



HAL
open science

Groupoïde de déformation, Blup et théorèmes de l'indice pour certaines variétés singulières

Ibrahim Akrouf

► **To cite this version:**

Ibrahim Akrouf. Groupoïde de déformation, Blup et théorèmes de l'indice pour certaines variétés singulières. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2019. Français. NNT : 2019TOU30308 . tel-03132478

HAL Id: tel-03132478

<https://theses.hal.science/tel-03132478>

Submitted on 5 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier

Présentée et soutenue par
Ibrahim AKROUR

Le 3 juin 2019

**Groupeïde de déformation, Blup et théorèmes de l'indice pour
certaines variétés singulières**

Ecole doctorale : **EDMITT - Ecole Doctorale Mathématiques, Informatique et
Télécommunications de Toulouse**

Spécialité :

Unité de recherche :

IMT : Institut de Mathématiques de Toulouse

Thèse dirigée par

PAULO CARRILLO ROUSE

Jury

Mme Claire DEBORD, Rapporteur

M. Xiang TANG, Rapporteur

M. Bertrand MONTHUBERT, Examineur

M. Robert YUNCKEN, Examineur

M. Joseph TAPIA, Examineur

M. Moulay Tahar BENAMEUR, Examineur

M. Paulo CARRILLO ROUSE, Directeur de thèse



THÈSE

En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier

Présentée et soutenue par
Ibrahim AKROUR

Le 3 juin 2019

**Groupeïde de déformation, Blup et théorèmes de l'indice pour
certaines variétés singulières**

Ecole doctorale : **EDMITT - Ecole Doctorale Mathématiques, Informatique et
Télécommunications de Toulouse**

Spécialité :

Unité de recherche :

IMT : Institut de Mathématiques de Toulouse

Thèse dirigée par

PAULO CARRILLO ROUSE

Jury

Mme Claire DEBORD, Rapporteur

M. Xiang TANG, Rapporteur

M. Bertrand MONTHUBERT, Examineur

M. Robert YUNCKEN, Examineur

M. Joseph TAPIA, Examineur

M. Moulay Tahar BENAMEUR, Examineur

M. Paulo CARRILLO ROUSE, Directeur de thèse

Remerciements

Travailler sous la direction de Paulo Carrillo Rouse à été pour moi très stimulant. Sa patience et sa passion ont été pour moi une source d'inspiration tout au long de ma rédaction de thèse. Je voudrais le remercier d'avoir partagé ses remarques pertinentes, son grand savoir et sa bonne humeur et surtout de m'avoir fait confiance depuis le début.

Je souhaite remercier Claire Debord et Xiang Tang pour l'intérêt qu'ils ont porté sur mon travail. Ils ont accepté de consacrer une partie de leur temps précieux pour être mes rapporteurs. Leurs remarques m'ont été précieuses, notamment l'impressionnante méticulosité de Claire Debord et l'enthousiasme de Xiang Tang.

Il est également très important pour moi de remercier Moulay Tahar BENAMEUR, Paulo Carrillo Rouse, Claire Debord, Bertrand MONTUBERT, Joseph TAPIA et Robert YUNCKEN pour m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon jury.

Je tiens à remercier particulièrement Claire Debord et Jean-Marie Lescure pour le soutien qu'ils m'ont apportés en tant que spécialistes de leurs domaines et pour leurs invitations. Je me souviens de mon passage dans votre laboratoire de Clermont-Ferrand où nos échanges m'ont énormément apporté.

Joseph Tapia est pour moi une source d'inspiration à l'IMT. Il a su me captiver lors de son cours de Master 2 sur les classes caractéristiques, et je l'ai croisé dans un bon nombre de groupes de travail et de séminaires dans les années qui ont suivi, où il avait toujours une question ou une remarque intéressante. Sa polyvalence et sa culture mathématiques sont pour moi une source d'inspiration.

Il y a une personne avec qui j'ai partagé énormément durant la majeure partie de ma vie universitaire, il s'agit de Sylvain Gibaud. Mon collègue et ami de longue date, merci d'avoir toujours été là, avec tous tes conseils avisés, ton humanité et ta bonne humeur !

Merci à toutes les personnes qui ont croisé ma vie de près ou de loin durant cette période, notamment Eric, Alix, Laure, Patrick, Florent, Adrien C., Adrien G., Jolan, Lauren, Clémence, Zach, Marine, Samuela, Rémi, Vincent, Alia.

Merci à mon grand frère Sofian et à ma Maman, qui ont été des piliers grâce auxquels j'ai pu me construire en tant qu'adulte. Vous m'avez toujours soutenus et j'espère un jour être à la hauteur de votre confiance. Je vous aime.

Élodie, merci d'avoir été à mes côtés durant ces longs moments de doute et de travail acharnés. Ces souvenirs, bons et mauvais, constituent sans doute l'expression de notre amour sincère.

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	1
Chapitre 1. Groupoïdes de Lie	15
1.1. Groupoïdes de Lie	15
1.2. Algébroïdes de Lie	24
1.3. C^* -algèbres réduites et maximales de groupoïdes de Lie	35
Chapitre 2. Groupoïdes de déformation et théorèmes de l'indice	41
2.1. Déformation au cône normal	41
2.2. Théorème de l'indice pour une variété compacte	50
Chapitre 3. Blups de Debord-Skandalis	59
3.1. Définition	59
3.2. Functorialité	61
3.3. Blup de groupoïdes de Lie de Debord-Skandalis	62
3.4. Blups, b-groupoïdes et morphismes vers \mathbb{R}^N	65
Chapitre 4. Théorie de l'indice pour une classe de variétés singulières	73
4.1. Indice analytique et indice de Fredholm pour une immersion de groupoïdes de Lie	73
4.2. Calcul topologique pour l'indice de Fredholm et l'indice analytique pour un quadruplé b-principal	75
4.3. Le cas d'une famille de variétés à bords	79
Bibliographie	93

Introduction

La théorie de l'indice est un vaste domaine mathématique ayant pour qualité remarquable d'allier plusieurs branches des mathématiques modernes, tels que les équations aux dérivées partielles, la géométrie différentielle, la topologie et la théorie des opérateurs. Elle devint un sujet à part entière dès lors que I. Singer et M. Atiyah publièrent leur suite d'articles ([**AS68a**] , [**AS68b**], [**AS63**]). Outre les formules d'indice et les applications qu'ils y développèrent, ces articles introduisirent des outils qui ouvrirent la voie à de nouveaux domaines des mathématiques.

Le théorème de l'indice classique d'Atiyah et Singer consiste à calculer l'indice d'un opérateur elliptique par des formules topologiques, motivé par Gelfand, qui remarqua la propriété d'invariant par homotopie de l'indice. Les noyaux et conoyaux d'un opérateur pseudodifférentiel elliptique D sur une variété compacte M étant de dimension finie, son indice de Fredholm peut alors être défini par :

$$Ind(D) = \dim(\ker D) - \dim(\operatorname{coker} D)$$

Or, un résultat important stipule que le morphisme d'indice peut être représenté en K -théorie par un morphisme dit d'indice analytique

$$Ind_a : K^0(T^*M) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

via le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Ell(M) & \xrightarrow{Ind} & \mathbb{Z} \\ \text{symb} \downarrow & \nearrow Ind_a & \\ K^0(T^*M) & & \end{array}$$

ce qui revient à dire que l'indice d'un opérateur elliptique sur la variété compacte M peut être calculé par l'indice analytique de son symbole principal. On peut alors utiliser les outils très riches de K -théorie pour manipuler les indices d'opérateurs elliptiques. Dans la suite, ce théorème a permis de donner une formule cohomologique en termes de classes caractéristiques [**AS68b**].

Depuis lors, beaucoup d'intentions de généraliser ce théorème ont été menées à bien. Dans la foulée, Atiyah et Singer ont démontré un équivalent de leur théorème pour une famille de variétés, c'est à dire une variété fibrée, et dans ce cas particulier, l'indice analytique d'opérateurs n'est plus entier, mais il prend ses valeurs dans un groupe de K -théorie. D'autre part, avec V. K. Patodi, ils ont donné une version de leur théorème pour le cas à bord, communément appelé le théorème d'Atiyah-Patodi-Singer. Plus tard, Melrose démontra d'une autre manière ce theorem en 1993 [**Mel93**], qui développa le calcul pseudodifférentiel adapté aux problèmes de bord, le b-calcul, pour le

faire.

Un mouvement s'est développé, initié par A. Connes, vers la théorie de l'indice d'opérateurs pseudodifférentiels dans le cadre des groupoïdes de Lie. Connes a démontré le théorème de l'indice à l'aide du groupoïde des paires d'une variété compacte et de son groupoïde tangent [Con94]. Il s'agissait dans un premier temps de définir l'indice analytique d'une variété différentielle C^∞ comme composée de morphismes des groupes de K -théorie des C^* -algèbres du groupoïde tangent du groupoïde des paires $M \times M$ et de ses restrictions, comme suit :

$$K^0(T^*M) \simeq K_0(C^*(TM)) \xrightarrow[e_0^{-1}]{} K_0(C^*(G_{tan})) \xrightarrow[e_1]{} K_0(C^*(M \times M)) \simeq \mathbb{Z}$$

où e_0 et e_1 sont respectivement les morphismes induits en K -théorie des restrictions à $t = 0$ et à $t = 1$ de la C^* -algèbre du groupoïde tangent $G_{tan} := M \times M \times]0, 1] \sqcup TM \times \{0\}$. Ce dernier est un groupoïde de déformation du groupoïde des paires $M \times M$ en son algébroïde de Lie TM .

Ensuite, après avoir défini un morphisme de groupoïdes de Lie $h_T : G_{tan} \rightarrow \mathbb{R}^N$ à partir d'un plongement de M dans un espace euclidien \mathbb{R}^N , où N est pair, il va utiliser un isomorphisme en K -théorie, dit de Connes-Thom, du groupoïde tangent G_{tan} vers le groupoïde de l'action induite par le morphisme h_T :

$$CT_{h_T} : K_0(C^*(G_{tan})) \longrightarrow K_0(C^*(G_{tan} \rtimes \mathbb{R}^N))$$

ainsi que ses analogues pour les deux restrictions de G_{tan} .

Les groupoïdes produit semi-directs étant libres et propres, ils sont Morita-équivalents à leur espace d'orbite, ce qui induit des isomorphismes en K -théorie qui vont, avec les isomorphismes de Connes-Thom, former un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 K^0(T^*M) & \xleftarrow[\simeq]{\mathcal{F}} & K_0(C^*(TM)) & \xleftarrow{e_0} & K_0(C^*(G_{tan})) & \xrightarrow{e_1} & K_0(C^*(M \times M)) & \xrightarrow[\simeq]{\mathcal{M}} & \mathbb{Z} \\
 & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\
 & & K_0(C^*(H_0)) & \xleftarrow[\simeq]{e_0} & K_0(C^*(H_T)) & \xrightarrow[\simeq]{e_1} & K_0(C^*(H_1)) & & \\
 & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\
 & & K^0(T\mathbb{R}^N/TM) & \xleftarrow[\simeq]{e_0} & K^0(DNC(\mathbb{R}^N, M)) & \xrightarrow{e_1} & K^0(\mathbb{R}^N) & & \\
 \text{Thom} & \searrow & & & & & & \nearrow & \text{Bott}^{-1}
 \end{array}$$

où $H_T = G_{tan} \rtimes \mathbb{R}^N$ et H_i pour $i = 0, 1$ sont ses restrictions à 0 et à 1 et $DNC(\mathbb{R}^N, M)$ est une variété de déformation définie dans la section 2.1 du chapitre 2.

Or, la ligne du bas, composée avec les morphismes de *Bott* et *Thom* comme dans le diagramme, correspond à la définition de l'indice topologique. Le diagramme donne donc le théorème de l'indice.

L'idée de généraliser ce procédé amène plusieurs questionnements. D'abord, dans le cas d'une variété singulière, il faut trouver un groupoïde de Lie qui va pouvoir remplacer le groupoïde des paires. Plusieurs solutions ont été trouvées : B. Monthubert [Mon03] construit un groupoïde permettant de faire du calcul pseudodifférentiel dans le cas des variétés à coins, C. Debord, J-M. Lescure et V. Nistor [DLN09] donnent un théorème de l'indice pour les variété à singularités coniques.

Le souci est alors de pouvoir donner un point commun à des groupoïdes qui à priori ne se ressemblent pas, afin, étant donné une situation singulière, de pouvoir construire un groupoïde de Lie qui permettra de définir un calcul pseudodifférentiel sur la variété singulière étudiée. Pour bien respecter la géométrie de la variété singulière, il faut considérer un algébroïde de Lie particulier, dont les sections vont fournir les champs de vecteurs adéquats.

Un tel algébroïde de Lie a été proposé par R. Melrose dans [Mel93] dans le cas du b-calcul comme rescaling d'un fibré vectoriel muni d'une filtration par rapport à une hypersurface. M. Lanius, dans [Lan16], donne un nombre important d'exemples classiques de "rescaling" d'algébroïde de Lie :

Soit une variété M et une sous-variété L de codimension 1. On se munit d'un algébroïde de Lie A au dessus de M , et d'un algébroïde de Lie $F \subset A_L$ au dessus de L . Alors on peut construire un algébroïde de Lie ${}^F A \rightarrow M$ dont l'ensemble des sections est isomorphe au module projectif de type fini :

$$\mathcal{D} := \{u \in \Gamma^\infty(M, A) : u|_L \in \Gamma^\infty(L, F)\}$$

Celui-ci définit une géométrie adaptée aux contraintes données, et permet de couvrir toute une batterie d'exemples classiques.

En effet, choisir $A = TM$ et $F = 0$ le fibré nul permet de définir le fibré 0-tangent ${}^0 TM$ introduit par R. Mazzeo et R. Melrose dans le cas des variétés à bord, pour traiter de géométrie hyperbolique. Localement, si l'on pose x, y_1, \dots, y_n un système de coordonnées au voisinage d'un point de L , où x est une fonction de définition de L , alors

$$x \frac{\partial}{\partial x}, x \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, x \frac{\partial}{\partial y_n}$$

est une base de champs de vecteur de ${}^0 TM$. On peut alors donner une base duale du cotangent associé, puis construire une métrique, ou des crochets de Poisson.

Un autre exemple serait l'exemple de la géométrie cylindrique en appliquant la construction à $A = TM$ et $F = TL$, ce qui nous donnerait le fibré b-tangent bTM introduit par Melrose pour traiter du b-calcul pseudodifférentiel. Localement, on obtiendrait au voisinage d'un point de L la base de champs de vecteurs :

$$x \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Le coté très intéressant de cette construction, outre le fait de donner un support pour développer la théorie de Poisson dans des cas singuliers, est qu'elle est fonctorielle. On peut itérer le "rescaling", ce qui augmente le nombre d'exemples traités par ce procédé.

L'étape suivante serait de pouvoir construire un groupoïde de Lie qui intégrerait cet algébroïde de Lie. Celui-ci serait alors un très bon candidat pour donner un théorème de l'indice dans le cas étudié. Un tel groupoïde peut-être construit en tant que blowup (Blup) de groupoïde de Lie comme introduit par M. Gualtieri et S. Li dans [GL14] et par C. Debord et G. Skandalis [DS17]. Nous utiliserons la construction de ces derniers dans cette thèse.

Il s'agit, étant donné un groupoïde de Lie $H \rightrightarrows M$ et un sous-groupoïde de Lie $G \rightrightarrows L$, de construire un nouveau groupoïde de Lie

$$Blup_{r,s}(H, G) \rightrightarrows Blup(M, L)$$

comme un quotient par l'action naturelle de \mathbb{R}^* d'un sous-ensemble de la déformation au cône normal $DNC(H, G)$. Des exemples classiques sont développés dans la section 3.3, comme le groupoïde du b-calcul, le groupoïde d'une famille de variété à bord, etc...

Cette construction est fonctorielle, et vérifie la propriété :

$$A(Blup(H, G)) = Blup(AH, AG).$$

Dans cette thèse, on utilise le Blup de Debord-Skandalis pour généraliser la construction d'A. Connes [Con94] pour le cas classique et de P. Carrillo Rouse, J-M. Lescure et B. Monthubert [CRLM14] pour le cas à bord et ainsi donner des théorèmes de l'indice classique et de Fredholm pour un ensemble de groupoïdes.

Si l'on se donne un groupoïde de Lie $G_2 \rightrightarrows \tilde{M}$ et un sous groupoïde de Lie $G_1 \rightrightarrows L$ au dessus d'une sous-variété L de \tilde{M} , alors on définit le Blup de groupoïdes de Lie de Debord-Skandalis comme le groupoïde de Lie :

$$Blup_{r,s}(G_2, G_1) \rightrightarrows Blup(\tilde{M}, L).$$

Dans la suite, on choisit L de codimension 1 et on peut alors identifier $Blup(\tilde{M}, L)$ avec \tilde{M} .

On va considérer plus précisément la composante s-connexe de la restriction de celui-ci à $M := \rho^{-1}(\mathbb{R}_+)$, notée $\Gamma_b(G_2, G_1)$ comme dans la définition 3.4.1, où ρ est une fonction de définition de L (voir section 3.4).

Viennent alors un morphisme en K-théorie d'indice analytique et un morphisme d'indice de Fredholm.

L'indice analytique associé au groupoïde de Lie $\Gamma_b(G_2, G_1)$ est le morphisme en K-théorie :

$$Ind_a : K_0(C^*(A\Gamma_b(G_2, G_1))) \longrightarrow K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)))$$

qui se définit par la composée $e_1 \circ e_0^{-1}$ des morphismes induits en K-théorie des restrictions de la C^* -algèbre du groupoïde tangent.

Puis, si l'on définit $A_{nc}\Gamma_b(G_2, G_1)$ et $\Gamma_b(G_2, G_1)|_M^\circ$ comme des restrictions du groupoïde tangent à des sous-ensembles saturés (voir définition 1.1.5) de $M \times [0, 1]$, on obtient la définition suivante, bien détaillée dans la section 4.1 :

L'indice de Fredholm associé au groupoïde de Lie $\Gamma_b(G_2, G_1)$ est le morphisme en K-théorie :

$$Ind_a^{\mathcal{F}} : K_0(C^*(A_{nc}\Gamma_b(G_2, G_1))) \longrightarrow K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)|_M^\circ))$$

qui se définit par la composée $e_\circ \circ e_\rho^{-1}$ des morphismes induits en K-théorie des restrictions du groupoïde tangent.

Afin de donner des théorèmes de l'indice pour ce groupoïde de Lie, nous ajoutons des hypothèses sur l'immersion de groupoïde de Lie considérée. Nous supposons qu'il existe un morphisme de groupoïdes de Lie

$$h_2 : G_2 \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

avec $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ le groupoïde des paires compatible avec ρ dans le sens où la restriction de h_2 à $G_2|_M$ est un morphisme à valeurs dans $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$ et dont la restriction à G_1 donne un (sous-)morphisme $h_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1}$. Nous résumons cette situation dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} G_2 & \xrightarrow{h_2} & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ \uparrow & & \uparrow \\ G_1 & \xrightarrow{h_1} & \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1} \end{array}$$

où les flèches verticales représentent les inclusions de groupoïdes (on supposera toujours dans cette thèse, sauf indication du contraire que \mathbb{R}^{N-1} est identifié à $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ dans \mathbb{R}^N).

Par functorialité du Blup , on obtient un morphisme

$$\text{Blup}_{r,s}(G_2, G_1) \xrightarrow{\text{Blup}(h_2)} \text{Blup}_{r,s}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1})$$

qui va induire le morphisme que l'on considérera par la suite : le morphisme de groupoïdes de Lie

$$\Gamma_b(G_2, G_1) \xrightarrow{h} \mathbb{R}^N,$$

où \mathbb{R}^N est vu comme groupe additif et donné par la composé de $\Gamma(h_2) := \text{Blup}(h_2)|_{\Gamma_b(G_2, G_1)}$ suivi du morphisme de groupoïde de Lie

$$\Gamma_b(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1}) \xrightarrow{h_N} \mathbb{R}^N,$$

défini en (3.4) dans [CRLM14]. On rappelle son expression explicite dans la section 3.4.

Il peut alors être construit un groupoïde produit semi-direct induit du morphisme de groupoïdes de Lie h :

$$\Gamma_b(G_2, G_1) \rtimes_h \mathbb{R}^N \rightrightarrows M \times \mathbb{R}^N.$$

Nous allons nous intéresser dans la suite à certains cas de couple (G_2, G_1) comme ci-dessus pour lesquels on ait des morphismes vers $(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1})$ tels que le groupoïde produit semi-direct soit libre et propre. Il suffit de choisir des quadruplés (G_2, G_1, h_2, h_1) b-principaux comme dans la définition 3.4.3 pour obtenir cette propriété (voir la proposition 3.4.1). Le corollaire 3.4.2 nous dit que le groupoïde de Lie

$$\Gamma_b(G_2, G_1)^{\text{tan}} \rtimes_{h^T} \mathbb{R}^N$$

est libre et propre (où $h^T : \Gamma_b(G_2, G_1)^{\text{tan}} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est induit de h), et la proposition 3.4.2 nous dit que les produits semi-directs associés aux restrictions de $\Gamma_b(G_2, G_1)^{\text{tan}}$ le sont également.

On va alors obtenir dans un premier temps des isomorphisme de Connes-Thom qui nous donnerons deux diagrammes commutatifs, que l'on peut d'ores et déjà compléter par une troisième ligne car, comme les groupoïdes semi-directs sont tous libres et propres, ils sont Morita équivalents à leur espace d'orbite, et donc ont même groupe de K-théorie qu'eux. Le premier diagramme factorise l'indice analytique :

$$\begin{array}{ccccc}
A\Gamma_b(G_2, G_1) & \xleftarrow[\simeq]{e_0} & \Gamma_b(G_2, G_1)^{tan} & \xrightarrow{e_1} & \Gamma_b(G_2, G_1) \\
A(h) \downarrow \simeq & & CT_{hT} \downarrow \simeq & & h \downarrow \simeq \\
A\Gamma_b(G_2, G_1) \times_{A(h)} \mathbb{R}^N & \xleftarrow[\simeq]{e_0^\times} & \Gamma_b(G_2, G_1)^{tan} \times_{hT} \mathbb{R}^N & \xrightarrow[\simeq]{e_1^\times} & \Gamma_b(G_2, G_1) \times_h \mathbb{R}^N \\
\mathcal{M} \downarrow \simeq & & \mathcal{M} \downarrow \simeq & & \mathcal{M} \downarrow \simeq \\
B_h^0 & \xleftarrow[\simeq]{r_0} & B_h & \xrightarrow{r_1} & B_h^1
\end{array}$$

alors que le deuxième factorise l'indice de Fredholm :

$$\begin{array}{ccccc}
A_{nc}\Gamma_b(G_2, G_1) & \xleftarrow[\simeq]{e_\partial} & \Gamma_b(G_2, G_1)_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{e_\circ} & \Gamma_b(G_2, G_1)_{\circ_M} \\
CT_{h_\partial} \downarrow \simeq & & CT_{h_{\mathcal{F}}} \downarrow \simeq & & CT_h \downarrow \simeq \\
A_{nc}\Gamma_b(G_2, G_1) \times_{h_\partial} \mathbb{R}^N & \xleftarrow[\simeq]{e_\partial^\times} & \Gamma_b(G_2, G_1)_{\mathcal{F}} \times_{h_{\mathcal{F}}} \mathbb{R}^N & \xrightarrow[\simeq]{e_\circ^\times} & \Gamma_b(G_2, G_1)_{\circ_M} \times_h \mathbb{R}^N \\
\mathcal{M} \downarrow \simeq & & \mathcal{M} \downarrow \simeq & & \mathcal{M} \downarrow \simeq \\
B_h^\partial & \xleftarrow[\simeq]{r_\partial} & B_h^{\mathcal{F}} & \xrightarrow{r_\circ} & B_h^{\circ_M}
\end{array}$$

où les espaces d'orbites sont définis dans la section 4.2.

Si l'on définit l'indice topologique comme le morphisme en K -théorie topologique

$$Ind_t : K^0(A^*\Gamma_b(G_2, G_1)) \longrightarrow K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1))),$$

développé dans la définition 4.2.1, le premier diagramme commutatif nous donne le

THÉORÈME 4.2.1. *Pour un quadruplé b -principal (G_2, G_1, h_2, h_1) , l'indice analytique et l'indice topologique de $\Gamma_b(G_2, G_1)$ coïncident, i.e. $Ind_a = Ind_t$.*

Avec la définition de l'indice de Fredholm topologique

$$Ind_t^{\mathcal{F}} : K_0(C^*(A_{nc}\Gamma_b(G_2, G_1))) \longrightarrow K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)_{\circ_M})),$$

développé dans la définition 4.2.2, le deuxième diagramme commutatif nous donne le

THÉORÈME 4.2.2. *Pour un quadruplé b -principal (G_2, G_1, h_2, h_1) , l'indice de Fredholm et l'indice de Fredholm topologique de $\Gamma_b(G_2, G_1)$ coïncident, i.e. $Ind_a^{\mathcal{F}} \equiv Ind_t^{\mathcal{F}}$.*

Un des exemples fondamentaux d'application de ces résultats que l'on se propose d'approfondir dans cette thèse est le cas d'une famille de variétés à bord. Soit une variété compacte lisse \tilde{M} et une hypersurface L . On pose une fibration $\phi : \tilde{M} \rightarrow B$, qui induit une fibration $\phi_L : L \rightarrow B$ sur la sous-variété. On munit \tilde{M} d'une fonction de définition $\rho : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ de L et on pose $M := \rho^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

On considère la restriction à M de la composante s -connexe de $Blup(\tilde{M} \times_{\phi} \tilde{M}, L \times_{\phi} L)$ et on le note $\Gamma_b^{\phi}(M)$. C'est le groupoïde de Lie du calcul pseudo différentiel du cas des familles à bord inspiré du groupoïde associé à une famille transverse de sous-variétés de Montaubert [Mon03] et on note ${}^bT_{\phi}M$ son algébroides de Lie. Cela nous permet d'introduire un morphisme d'indice analytique :

$${}^bInd_a : K_0(C^*({}^bT_{\phi}M)) \rightarrow K_0(C^*(\Gamma_b^{\phi}(M)))$$

qui se définit par la composée $e_1 \circ e_0^{-1}$ des morphismes induits en K-théorie des restrictions du groupoïde tangent.

Comme on traite un cas particulier, on sait déjà que le groupoïde de Lie produit semi-direct

$$\Gamma_b^{\phi}(M) \times_h \mathbb{R}^N$$

est libre et propre, et un calcul de son espace d'orbite nous donne une variété contractile (voir la proposition 4.3.1). Par conséquent, l'indice analytique est nul, et si l'on définit l'indice topologique comme dans le cas général, il sera nul aussi. On obtient trivialement un théorème de l'indice.

Comme décrit dans [ACR17], ce résultat permet de montrer (dans le cas M compacte) que tous les opérateurs longitudinaux elliptiques associé à ce groupoïde sont perturbables dans un opérateur de Fredholm dans le sens où (au moins à homotopie stable près) on peut le perturber par un opérateur régularisant pour avoir un opérateur de Fredholm. Ceci donne une autre preuve du résultat montré d'abord par Melrose et Piazza ([MP97]) pour les opérateurs de Dirac et par Melrose et Rochon ([MR04]) pour les opérateurs pseudodifférentiels. Dans [ACR17], on montre que la preuve ci-dessus s'étend au cas des feuilletages, cette fois-ci grâce à un calcul de l'indice topologique.

L'indice de Fredholm a par conséquent une utilité d'autant plus flagrante dans cet exemple.

Si on pose $M_{\mathcal{F}} := (M \times [0, 1]) \setminus (L \times \{1\})$ un ouvert saturé de $M \times [0, 1]$, et si on pose $M_{\partial} := M_{\mathcal{F}} \setminus (\overset{\circ}{M} \times]0, 1])$ un fermé saturé de $M_{\mathcal{F}}$, alors on définit

$$T_{NC}M \rightrightarrows M_\partial$$

le sous-groupeïde de Lie saturé de la restriction $(\Gamma_b^\phi(M)^{tan})_{\mathcal{F}}$ de $\Gamma_b^\phi(M)^{tan}$ au fermé saturé $M_{\mathcal{F}}$.

Dans ces conditions, on introduit l'indice de Fredholm du groupeïde de Lie $\Gamma_b^\phi(M)$ comme étant le morphisme en K-théorie :

$${}^b Ind_a^{\mathcal{F}} : K_0(C^*(T_{NC}M)) \longrightarrow K_0(C^*(\Gamma_b^\phi(M)))$$

qui se définit par la composée $e_\circ \circ e_\partial^{-1}$ des morphismes induits en K-théorie des restrictions du groupeïde tangent.

Se construit alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 K_0(C^*(T_{NC}^\phi M)) & \xleftarrow{e_\partial} & K_0(C^*((\Gamma_b^\phi(M))_{\mathcal{F}})) & \xrightarrow{e_\circ} & K_0(C^*(\overset{\circ}{M} \times_{\phi} \overset{\circ}{M})) & \xrightarrow{\simeq} & K_{top}^0(B) \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow CT_h^\circ & & \uparrow \text{Bott}^{-1} \\
 \text{Thom} \downarrow & & \downarrow CT_{h_\partial} & & \downarrow CT_{h_T} & & \\
 K_0(C^*(H_\partial)) & \xleftarrow{e_\partial} & K_0(C^*(H_{\mathcal{F}})) & \xrightarrow{e_\circ} & K_0(C^*(\overset{\circ}{H})) & & \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\
 K^0(N_\partial) & \xleftarrow{e_\partial} & K^0(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{e_\circ} & K^0(B \times \mathbb{R}^N) & &
 \end{array}$$

$$\text{où } H_\partial = T_{NC}^\phi M \times_{h_\partial} \mathbb{R}^N ; H_{\mathcal{F}} = (\Gamma_b^\phi(M))_{\mathcal{F}} \times_{h^T} \mathbb{R}^N \text{ et } \overset{\circ}{H} = (\overset{\circ}{M} \times_{\phi} \overset{\circ}{M}) \times_{\overset{\circ}{h}} \mathbb{R}^N.$$

Ainsi, si l'on considère l'indice topologique de Fredholm comme étant la composition des flèches courbées et de la flèche de K-théorie topologique du bas du diagramme, on a :

THÉORÈME 4.3.1. *L'indice analytique de Fredholm et l'indice topologique de Fredholm du groupeïde $\Gamma_b^\phi(M)$ coïncident.*

On veut alors calculer cet indice de Fredholm.

Dans [MP12], Moriyoshi et Piazza donnent une nouvelle approche de la théorie de l'indice supérieure sur des structures géométriques à bord basée sur l'utilisation de la cohomologie cyclique et sa dualité avec la K-théorie. Pour le cas de certaines fibrations, ils prouvent une formule du type Godbillon-Vey pour les opérateurs longitudinaux.

On peut se demander dans quels cas le morphisme d'indice ci-dessus peut-il être calculé de manière topologique? Nous allons mettre en relation nos calculs avec la formule d'indice pour des familles d'opérateurs de Dirac par Melrose et Piazza dans [MP97] et obtenir une nouvelle expression pour le terme de bord "Eta".

Résumé des chapitres. Nous donnerons ici un plan détaillé des chapitres qui composent la thèse. Le premier chapitre constitue une base de préliminaires nécessaires aux théories développées dans les autres chapitres. Le deuxième chapitre contient la construction de la déformation au cône normal, ainsi qu'un théorème de l'indice dans le cas d'une variété compacte. Dans le troisième chapitre, il sera question de la construction du Blup de Debord-Skandalis pour des variétés puis pour des groupoïdes de Lie; quelques propriétés seront données ensuite, ainsi que des constructions permettant de donner des théorèmes de l'indice. Le quatrième et dernier chapitre contient des théorèmes de l'indice pour une classe de variétés singulières construites à partir des constructions de la fin du chapitre précédent, et l'exemple très explicite du cas d'une famille de variétés à bord. Il se clora par une formule cohomologique

Chapitre 1. Groupoïdes de Lie :

Dans ce chapitre, on rappelle des définitions et propriétés très classiques et largement développés dans toute la littérature sur les groupoïdes de Lie [CR07], [ANS06].

Dans la première partie, on définit un groupoïde de Lie et on en profite pour donner quelques exemples classiques ainsi que les constructions que l'on va utiliser dans la thèse, telles que les pullback de groupoïdes de Lie, ou encore les recollements. Afin de mettre les groupoïdes de Lie dans une catégorie adaptée à la théorie de l'indice, on va également définir les équivalences de Morita qui joueront le rôle des isomorphismes dans cette catégorie. On rappellera que la K-théorie est invariante par équivalence de Morita.

On s'intéresse ensuite aux algébroïdes de Lie en les définissant, en donnant des exemples classiques, puis en développant quelques constructions. On calcule également l'algébroïde de Lie naturelle d'un groupoïde de Lie.

Il est ensuite question des C^* -algèbres de groupoïdes de Lie, construites comme une complétion de l'algèbre de convolution de ce dernier.

Chapitre 2. Groupoïdes de déformation et théorèmes de l'indice :

Dans ce chapitre, il est question des différentes constructions dont on a besoin autour des groupoïdes de Lie afin de développer la théorie de l'indice.

Dans la première partie, nous rappellerons la définition et les propriétés de la déformation au cône normal de variétés ainsi que des exemples incontournables tel que le cas des espaces vectoriels \mathbb{R}^N . La functorialité de ce procédé sera alors redémontrée afin d'en suite définir la déformation au cône normal des groupoïdes de Lie à travers le groupoïde normal. Ceux-ci sont l'exemple primordial des groupoïdes

de déformation. Le plus important est le groupoïde adiabatique qui "code" la déformation d'un groupoïde de Lie sur son algèbroïde de Lie.

Dans la seconde partie, on mentionne des notions de K -théorie et de théorie de l'indice d'Atiyah-Singer pour le cas d'une variété compacte. On donnera des propriétés utiles pour la suite, ainsi que le théorème de l'indice pour une variété compacte, faisant entrer en jeu le groupoïde des paires et son groupoïde tangent, introduits dans [Con94] et également repris dans [CR07].

Chapitre 3. Blups de Debord-Skandalis :

Ce chapitre se concentre sur la définition et les applications du Blup de Debord-Skandalis [DS17]. Il s'agit d'un quotient de la déformation au cône normal par une action de \mathbb{R}^* .

Dans un premier temps, nous définissons le Blup d'un couple de variété, puis nous redémontrons la fonctorialité du procédé afin de finir par définir le Blup d'un couple de groupoïdes de Lie. Une série d'exemple sont présentés.

Nous finissons ce chapitre par la construction d'un groupoïde semi-direct induit d'un morphisme de groupoïdes de Lie de la composante s -connexe d'un blup de groupoïdes de Lie $\Gamma_b(G_2, G_1)$ vers \mathbb{R}^N vu comme groupe additif. Il sera donné un cadre dans lequel ce groupoïde ainsi que ses analogues pour le groupoïde tangent et ses restrictions sont libres et propres, ce qui nous permettra dans le chapitre suivant de développer des théorèmes de l'indice. On dira que l'on se muni d'un quadruplé b -principal.

Chapitre 4. Théorie de l'indice pour une classe de variétés singulières :

Ce chapitre traite des groupoïdes de Lie formant des quadruplés b -principaux. Il s'agit de quadruplés (G_2, G_1, h_2, h_1) où $G_1 \rightarrow G_2$ est une immersion de groupoïdes de Lie au dessus d'une inclusion de variété $L \rightarrow M$ (L étant une sous-variété de M de codimension 1), et h_1 et h_2 sont des morphismes de groupoïdes de Lie de G_1 et G_2 vers les groupoïdes des paires $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1}$ et $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ vérifiant certaines conditions (voir définition 3.4.3).

Dans ce cadre, nous donnerons des morphismes d'indice analytique et de Fredholm pour le groupoïde de Lie $\Gamma_b(G_2, G_1)$. Nous donnons ensuite des morphismes de type Connes-Thom pour plusieurs restrictions de son groupoïde tangent. En utilisant le caractère libre et propre des groupoïdes semi-directs utilisés, on démontrera enfin des théorèmes de l'indice.

Un exemple qui est bien explicité dans ce travail est le cas d'une famille de variétés à bord. Dans ce cas, nous choisissons un groupoïde de Lie inspiré du groupoïde du b -calcul de [CRLM14] afin de donner

un théorème de l'indice classique et un théorème de l'indice de Fredholm. Toutes les étapes de la partie précédente sont menées à bien. Nous calculons les orbites explicitement dans cet exemple et donnons les deux théorèmes de l'indice. Nous finissons par donner une formule cohomologique pour l'indice de Fredholm.

Groupoïdes de Lie

Ce chapitre traite des groupoïdes de Lie. Dans un premier temps, nous rappelons la définition des groupoïdes de Lie, des algébroïdes de Lie et le rapport qu'il y a entre les deux notions. Nous nous attardons ensuite sur les C^* -algèbres associées. Pour plus de détails sur ces objets, le lecteur peut se référer à [Ren80], [MM03] et [Mac87]. Enfin, nous utilisons la K-théorie des C^* -algèbres de groupoïdes de Lie [Kha09] pour donner un théorème de l'indice classique en utilisant le groupoïde tangent d'Alain Connes [Con79].

1.1. Groupoïdes de Lie

1.1.1. Définitions.

DÉFINITION 1.1.1. *Un groupoïde de Lie $G \underset{s}{\overset{r}{\rightrightarrows}} M$ est la donnée des éléments suivants :*

- . Deux variétés différentielles G et M appelées respectivement espace des flèches et espace des unités du groupoïde,
- . Une submersion "source" $s : G \rightarrow M$ et une submersion "but" $r : G \rightarrow M$,
- . Une application lisse "produit" $m : G \times G \rightarrow G$ qui n'est définie que sur le sous-ensemble $G^{(2)} := \{(\gamma, \delta) \in G \times G \mid s(\gamma) = r(\delta)\}$. On dit qu'un couple dans $G^{(2)}$ est un couple de flèches composables.

Pour alléger les écritures, on note souvent : $m(\gamma, \delta) = \gamma\delta$.

- . Une immersion $\epsilon : M \rightarrow G$ appelée morphisme des unités du groupoïde, qui a pour propriété d'être à la fois une r -section et une s -section. Par abus de langage, on omet souvent d'écrire $u : \epsilon(x) = x$.
- . Un difféomorphisme "inverse" idempotent $i : G \rightarrow G$. Par analogie avec les groupes de Lie, on note souvent $i(\gamma) = \gamma^{-1}$.

Ces applications vérifient les relations algébriques suivantes, pour $\gamma, \delta, \eta \in G$ et $x \in M$:

- $r(\gamma\delta) = r(\gamma)$ et $s(\gamma\delta) = s(\delta)$,
- $r(\gamma^{-1}) = s(\gamma)$ et $s(\gamma^{-1}) = r(\gamma)$,
- $\gamma.(\delta\eta) = (\gamma\delta)\eta$, où tous les couples nécessaires sont des flèches composables,

- $\gamma.x = \gamma$ et $x.\delta = \delta$, où $s(\gamma) = x = r(\delta)$,
- $\gamma\gamma^{-1} = \epsilon \circ r(\gamma)$ et $\gamma^{-1}\gamma = \epsilon \circ s(\gamma)$.

Toutes ces propriétés ont l'air assez lourdes avec ce formalisme, mais cette approche s'avère extrêmement efficace quand il s'agit d'exploiter les groupoïdes de Lie d'un point de vue de la géométrie différentielle.

Il existe une autre manière de considérer la structure algébrique d'un groupoïde de Lie. En effet, on peut le considérer comme une petite catégorie où toutes les flèches sont inversibles. L'ensemble des flèches de la catégorie sera alors assimilé à G , l'ensemble des objets de la catégorie à M , et toutes les propriétés algébriques découleront de la définition même de catégorie. L'application m sera alors vue comme la composition de flèches.

DÉFINITION 1.1.2. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie. On dit qu'un groupoïde de Lie $F \rightrightarrows L$ est un sous-groupoïde de Lie de G si F est une sous-variété de G et L est une sous-variété de M .

DÉFINITION 1.1.3. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie. Pour $x \in M$, on note $G_x := s^{-1}(x)$ l'ensemble des flèches de G ayant pour source x et $G^x := r^{-1}(x)$ l'ensemble des flèches de G ayant pour but x . Ce sont des variétés lisses.

L'ensemble $G_x^x := G^x \cap G_x$ est appelée groupe d'isotropie de x ; c'est un groupe de Lie.

Si $A \subset M$ est une partie de M , on note de même $G_A := s^{-1}(A)$ et $G^A := r^{-1}(A)$.

DÉFINITION 1.1.4. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie. L'orbite d'un point $x \in M$ dans G est l'ensemble

$$\text{Orb}_x := G_x \cup G^x.$$

DÉFINITION 1.1.5. Soit G un groupoïde de Lie au dessus de M . Une sous-variété $A \subset M$ est dite saturée par G si A est l'union d'orbites de G . En d'autres termes, on peut définir une sous-variété $G_A^A := G|_A$ de G au dessus de A composée de flèches de source et de but dans A , qui aura la structure de groupoïde de Lie de G induite par restriction.

On dit alors que $G|_A$ est un sous-groupoïde de Lie saturé de G .

DÉFINITION 1.1.6. Un morphisme de groupoïde de Lie f de $G \rightrightarrows M$ vers $H \rightrightarrows N$ est la donnée d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \xrightarrow{f_0} & N \end{array}$$

vérifiant les relations, pour $\gamma, \delta \in G$, $x \in M$,

- $f(\gamma\delta) = f(\gamma)f(\delta)$,
- $f(\gamma^{-1}) = f(\gamma)^{-1}$,
- $u_H \circ f_0(x) = f \circ u_G(x)$.

1.1.2. Exemples. Nous donnons ici de nombreux exemples, différemment détaillés selon les cas. Le groupoïde d'holonomie aura un traitement particulier car il nous sera très utile par la suite.

Pour les premiers exemples, on remarquera la naturalité des constructions. On construit un groupoïde de Lie associé à une structure différentielle, et le groupoïde comporte exactement toutes les informations de la structure, dans le formalisme des catégories. C'est une des raisons pour lesquelles cet outil est idéal pour modéliser des structures différentielles d'un système physique. Il est largement utilisé dans le domaine.

1.1.2.1. *Groupoïde d'un groupe de Lie.* Soit G un groupe de Lie. Alors

$$G \rightrightarrows \{e\}$$

est un groupoïde de Lie, où e est l'élément neutre du groupe et la source et le but sont les applications constantes à e , et la composition est la multiplication du groupe de Lie.

1.1.2.2. *Groupoïde identité.* Soit M une variété différentielle. Alors

$$M \rightrightarrows M$$

est un groupoïde de Lie, où la source et le but sont l'identité de M . Ainsi, les couples de flèches composables sont les éléments (x, x) où $x \in M$. En d'autres termes, il n'y a que des unités dans ce groupoïde.

1.1.2.3. *Groupoïde des paires.* Voici un groupoïde de Lie très intéressant pour la théorie de l'indice classique sur une variété différentiable.

Soit M une variété. Alors

$$M \times M \rightrightarrows M$$

est un groupoïde de Lie, où $s(x, y) = y$, $r(x, y) = x$, et $(x, y).(y, z) = (x, z)$. Il vient directement que les unités sont les éléments $\epsilon(x) = (x, x)$ et l'inverse est $(x, y)^{-1} = (y, x)$.

On remarque que pour chaque couple (x, y) d'éléments de la base M , il n'y a qu'une seule flèche dont la source est y et dont le but est x . Il s'agit justement de la flèche (x, y) . C'est la particularité de ce groupoïde.

1.1.2.4. *Groupoïde associé à une fibration.* Soit $\pi : M \rightarrow N$ une submersion de variété différentielles. On pose

$$M \times_N M = \{(x, y) \in M \times M \mid \pi(x) = \pi(y)\}.$$

C'est alors un sous-groupoïde de Lie de $M \times M$. C'est à dire qu'il partage les mêmes applications source, but, inverse, unité et composition. C'est une généralisation du groupoïde de paire, en le sens que si

$\pi = id_M$, alors on a affaire à ce dernier. Il sera intéressant de comparer leur algèbroïde de Lie, car c'est cela qui les distingue. Prendre en compte une structure sur la variété M (ici, la fibration), permet d'enrichir les informations que l'on va traiter, et donc d'enrichir le modèle choisi.

1.1.2.5. *Groupeïde d'une action de groupe de Lie sur une variété.* Soit M une variété différentielle, et G un groupe de Lie. On définit un action à gauche de G sur M :

$$\rho : G \longrightarrow Diff(M)$$

On définit alors le groupeïde de transformation associé à l'action ρ par :

$$G \times M \rightrightarrows M$$

où $s(g, x) = x$, $r(g, x) = \rho(g)(x)$, et $(h, \rho(g)(x)).(g, x) = (hg, x)$. Les unités sont donc $\epsilon(x) = (e, x)$ et l'inverse d'un élément est $(g, x)^{-1} = (g^{-1}, \rho(g)(x))$. Toute la structure découle directement des définitions de groupe de Lie, et d'action de groupe de Lie sur une variété. Il n'y a que le formalisme qui change.

1.1.2.6. *Groupeïde d'action de groupeïde de Lie sur un groupe de Lie.* Soit $G \xrightarrow[r_s]{r_s} M$ un groupeïde de Lie, et H un groupe de Lie.

On considère $h : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupeïdes de Lie, où l'on considère H comme le groupeïde associé à sa structure de groupe de Lie.

On peut alors construire un groupeïde de Lie associé

$$G \times H \xrightarrow[h]{r_h} M \times H$$

où $r_h(\gamma, g) = (r(\gamma), g)$ et $s_h(\gamma, g) = (s(\gamma), h(\gamma).g)$.

Ce groupeïde, en prenant $G = M \times M$ et $H = \mathbb{R}^N$ entre en jeu dans la définition de l'isomorphisme de Connes-Thom introduit pour démontrer le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer en utilisant le groupeïde tangent de A. Connes (Voir section 2.2.2.3).

1.1.2.7. *Groupeïde d'un fibré vectoriel.* Soit $p : E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel lisse. On peut définir directement le groupeïde de Lie associé :

$$E \rightrightarrows M$$

où $s = r = p$, et $(x, X).(x, Y) = (x, X + Y)$. L'application unité est alors la section nulle du fibré : $\epsilon(x) = (x, 0)$, et l'inverse est de manière évidente $(x, X)^{-1} = (x, -X)$.

1.1.2.8. *Groupeïde associé à un revêtement.* Soit \widetilde{M} une variété différentiable, et G un groupe discret agissant sur \widetilde{M} tel que $\widetilde{M}/G =: M$ soit une variété compacte.

Alors G agit sur $\widetilde{M} \times \widetilde{M}$ par : $g : (x, y) \longrightarrow (g.x, g.y)$. On note \mathcal{G} la variété quotient par cette action diagonale de G .

Ainsi,

$$\mathcal{G} \rightrightarrows M$$

est un groupoïde de Lie, avec $s(\tilde{x}, \tilde{y}) = y$, $r(\tilde{x}, \tilde{y}) = x$ et $(\tilde{x}, \tilde{y}).(\tilde{y}, \tilde{z}) = (\tilde{x}, \tilde{z})$.

1.1.2.9. *Groupoïdes d'isomorphismes fibre à fibre.* Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. On peut définir le groupoïde de Lie :

$$GL(E) \rightrightarrows M$$

où une flèche de source x et de but y est un isomorphisme de E_x vers E_y .

1.1.2.10. *Groupoïde de Monodromie d'un feuilletage.* Pour plus de détail sur ce sujet, voir [MM03].

Considérons une variété M , munie d'un feuilletage \mathcal{F} . On note la variété feuilletée (M, \mathcal{F}) . Construisons le groupoïde de monodromie

$$Mon(M, \mathcal{F}) \rightrightarrows M$$

où les flèches sont les suivantes :

Soit x, y dans M . Si ces points de M appartiennent à la même feuille L , les flèches de x vers y sont les classes d'homotopie de chemins allant de x vers y . Sinon, il n'y a pas de flèches de source x et de but y . La classe d'homotopie de la concaténation de chemin jouera le rôle de composition, les unités seront les chemins constants, et l'inverse sera la classe d'homotopie du chemin parcouru dans le sens opposé.

On remarque ainsi que les groupes d'isotropie (ensemble de flèches de source et but le même point) de ce groupoïde de Lie sont les groupes d'homotopie de la feuille concernée :

$$Mon(M, \mathcal{F})_x^x = \pi_1(L, x).$$

1.1.2.11. *Groupoïde de l'action d'un groupe de Lie sur un groupoïde de Lie.* Soit Γ un groupe de Lie qui agit sur un groupoïde de Lie $G \rightrightarrows M$ par automorphisme.

On peut alors définir un groupoïde de Lie associé à cette action :

$$G \rtimes \Gamma \begin{array}{c} \xrightarrow{r_\times} \\ \xrightarrow{s_\times} \end{array} M$$

tels que $r_\times(g, \gamma) = r(g)$ et $s_\times(g, \gamma) = \gamma^{-1}(s(g))$.

On a également, pour $\gamma, \delta \in \Gamma$ et $g, h \in G$, $(g, \gamma)(h, \delta) = (g\gamma(h), \gamma\delta)$.

1.1.2.12. *Pullback de groupoïde de Lie.* Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie, et $f : X \rightarrow M$ une submersion \mathcal{C}^∞ . Alors, si on pose $*f^*(G) = \{(x, \gamma, y) \in X \times G \times X \mid f(x) = r(\gamma) \text{ et } f(y) = s(\gamma)\}$, le diagramme

$$*f^*(G) \rightrightarrows X$$

est un groupoïde de Lie, où $s(x, \gamma, y) = y$ et $r(x, \gamma, y) = x$. La règle de composition est la suivante : $(x, \gamma, y).(y, \delta, z) = (x, \gamma\delta, z)$. Les unités

sont les éléments $\epsilon(x) = (x, \epsilon_G(f(x)), x)$, et l'inverse d'un élément est $(x, \gamma, y)^{-1} = (y, \gamma^{-1}, x)$.

C'est une manière très pratique de générer des groupoïdes de Lie. La proposition suivante en fait même une construction primordiale dans l'étude des groupoïdes de Lie.

1.1.3. Equivalences de Morita. Il est maintenant assez classique de considérer une catégorie privilégiée pour l'étude des groupoïdes de Lie. En effet, introduite par Hilsun et Skandalis, elle est utile car bon nombre de propriétés sur les groupoïdes de Lie sont préservées dans cette catégorie. Il s'agit en fait de la catégorie dont les flèches sont les morphismes généralisés entre deux groupoïdes de Lie, et les isomorphismes sont les équivalences de Morita, notion qui est préservée par les groupes de K-théorie entre autre. On va l'introduire ici afin qu'elle supplante la catégorie dont les flèches sont les morphismes de groupoïdes de Lie, trop rigide pour notre étude. Pour plus de détails sur cette notion, voir [MM03].

DÉFINITION 1.1.7. Soit $G \rightrightarrows M$ et $H \rightrightarrows N$ deux groupoïdes de Lie. On dit qu'un morphisme de groupoïde de Lie $\phi : G \rightarrow H$ est une équivalence faible s'il satisfait les deux conditions suivantes :

(i) l'application :

$$r \circ pr_1 : H \times_N M \longrightarrow N$$

est une submersion surjective et

(ii) le carré

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & H \\ (s,r) \downarrow & & \downarrow (s,r) \\ M \times M & \xrightarrow{\phi \times \phi} & N \times N \end{array}$$

est cartésien dans la catégorie des variétés (i.e. c'est un produit fibré de variétés).

REMARQUE. Ces deux propriétés sont des versions modifiées des propriétés d'être essentiellement surjectif et pleinement fidèle pour un foncteur entre catégories.

DÉFINITION 1.1.8. On dit de deux groupoïdes de Lie G et H qu'ils sont Morita équivalents, et on note $G \sim H$, s'il existe un groupoïde de Lie P et deux équivalences faibles $\phi_G : P \rightarrow G$ et $\phi_H : P \rightarrow H$.

Il s'agit d'une relation d'équivalence entre groupoïdes de Lie.

EXEMPLE 1.1.1. (i) Soit M une variété différentielle et $M \times M$ le groupoïde de paire associé. Si on note $\mathbf{1}$ le groupoïde de Lie ayant un seul objet et une seule flèche, alors

$$M \times M \sim \mathbf{1}.$$

(ii) Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie, et $f : L \rightarrow M$ une submersion surjective de variétés. Alors

$$*f^*(G) \sim G.$$

REMARQUE. On peut donner une autre définition d'équivalence de Morita entre deux groupoïdes de Lie, voir [DL09] ou [MRW87].

On dit que $G \rightrightarrows M$ et $H \rightrightarrows N$ sont Morita équivalents s'il existe un groupoïde de Lie $P \rightrightarrows M \sqcup N$ tel que

$$- P_M^M = G, P_N^N = H \text{ et}$$

$$- \text{pour tout } \gamma \in P, \text{ il existe } \eta \in P_N^M \cup P_M^N \text{ tel que } s(\gamma) = r(\eta).$$

On peut voir P comme un bi-module qui agit sur G et H , et représenter cela dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & & P & & H \\ \Downarrow & & \swarrow & & \Downarrow \\ M & & & & N. \end{array}$$

Pour plus de détails sur les propositions qui suivent, le lecteur est invité à se référer au chapitre 5 de [MM03].

PROPOSITION 1.1.1. Soit Γ un groupe de Lie agissant de manière libre et propre sur un groupoïde de Lie $G \rightrightarrows M$.

On peut alors définir le groupoïde de Lie quotient :

$$G/\Gamma \rightrightarrows M/\Gamma$$

et $G \rtimes \Gamma$ est Morita équivalent à G/Γ .

DÉFINITION 1.1.9. Soit $G \xrightarrow[r]{s} M$ un groupoïde de Lie. On dit que G est libre (respectivement, propre) si son action sur sa base est libre (respectivement, propre). En d'autres termes, si le morphisme de variété :

$$\begin{aligned} (r, s) : G &\longrightarrow M \times M \\ \gamma &\longmapsto (r(\gamma), s(\gamma)) \end{aligned}$$

est injectif (respectivement, propre).

PROPOSITION 1.1.2. Soit G un groupoïde de Lie,

Alors G est libre si et seulement si ses groupes d'isotropie sont triviaux.

DÉMONSTRATION. La démonstration est immédiate. \square

PROPOSITION 1.1.3. Soient $G \underset{\mathcal{M}}{\sim} H$ deux groupoïdes de Lie Morita équivalents.

Alors G est propre si et seulement si H est propre.

La proposition suivante est une caractérisation d'un groupoïde de Lie propre. C'est la proposition 2.10 de [Tu04].

PROPOSITION 1.1.4. Soit $G \xrightarrow[r]{s} M$ un groupoïde de Lie. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) G est propre ;
- (ii) (r, s) est fermée et $\forall x \in M, G_x^x$ est quasi-compact.

1.1.3.1. Espace d'orbite d'un groupoïde de Lie. La proposition qui suit est primordiale pour la théorie de l'indice car elle permet de passer de la K-théorie de la C^* -algèbre d'un groupoïde de Lie à la K-théorie topologique d'un espace. Elle provient des propositions 2.11, 2.12 et 2.29 de [Tu04].

PROPOSITION 1.1.5. Si $G \rightrightarrows M$ est un groupoïde de Lie libre et propre, alors le quotient par son action sur sa base est une variété lisse, et le groupoïde de Lie associé à cette variété est appelé espace d'orbites. On le note M/G ou $\text{Orb}_G(M)$. De plus,

$$G \sim M/G.$$

EXEMPLE 1.1.2. Nous donnons ici une liste d'exemples simples, et des exemples importants pour la suite.

- (i) Soit M une variété. Considérons le groupoïde de paire $M \times M$ sur cette variété.

Les applications source et but sont les projections de l'espace produit $M \times M$, ce qui rend l'application (r, s) bien entendu libre et propre.

Calculons l'espace d'orbite de ce groupoïde :

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff \exists (a, b) \in M \times M \text{ tel que } s(a, b) = y \text{ et } r(a, b) = x \\ &\iff \exists (a, b) \in M \times M \text{ tel que } b = y \text{ et } a = x \end{aligned}$$

et cette condition est toujours vérifiée. Donc tous les éléments de $M \times M$ sont dans la même orbite. Ainsi, $\text{Orb}_{(M \times M)}(M) = \{x\}$, où x est un élément quelconque de M . On retrouve alors que le groupoïde de paire est Morita équivalent à un point.

- (ii) Soit M une variété. Considérons le groupoïde associé à cette variété. C'est à dire : $M \xrightarrow[id]{id} M$. Il est clair que ce groupoïde est libre et propre.

Maintenant, on remarque, de par la composition de ce groupoïde, que l'orbite d'un point est réduite à un point. Ainsi, $\text{Orb}_M(M) = M$.

- (iii) Soit G un groupe de Lie compact. Considérons le groupoïde de Lie associé, soit $G \xrightarrow[r]{s} \{e\}$.

L'application (r, s) est l'application constante à (e, e) . Elle est propre mais elle n'est pas libre. On ne peut donc pas conclure.

(iv) Soit G un groupe de Lie agissant sur une variété M . Considérons le groupoïde de l'action $G \ltimes M$.

L'application suivante :

$$\begin{aligned} (r, s) : G \ltimes M &\longrightarrow M \times M \\ (g, x) &\longmapsto (g.x, x) \end{aligned}$$

est libre et propre si et seulement si l'action du groupe de Lie G est libre et propre. Supposons donc que c'est le cas.

Alors, vérifions les orbites :

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff \exists (g, u) \in G \ltimes M \text{ tel que } s(g, u) = y \text{ et } r(g, u) = x \\ &\iff \exists (g, u) \in G \ltimes M \text{ tel que } g.u = y \text{ et } u = x \\ &\iff \exists g \in G \text{ tel que } g.x = y. \end{aligned}$$

Ainsi, deux éléments x et y sont dans la même orbite dans le groupoïde de transformation si et seulement s'ils sont dans la même orbite de l'action du groupe G . On a donc l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} \text{Orb}_{(G \ltimes M)}(M) &\longrightarrow M/G \\ \bar{x} &\longmapsto \bar{x} \end{aligned}$$

où M/G est l'espace quotient de M par l'action du groupe de Lie G .

Cela s'avère extrêmement pratique. Ce groupoïde de Lie est donc morita équivalent à son espace d'orbite :

$$\text{Orb}_{(G \ltimes M)}(M) = M/G \implies M/G .$$

(v) Soit $\phi : M \longrightarrow B$ une submersion de variétés différentielles. On considère le sous-groupoïde $M \times_{\phi} M$ du groupoïde de paire. L'application (r, s) est la restriction du couple de projections du groupoïde de paire à notre présent groupoïde, donc elle reste libre et propre avec la topologie induite.

Calculons donc l'orbite d'un point :

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff \exists (a, b) \in M \times_{\phi} M \text{ tel que } s(a, b) = y \text{ et } r(a, b) = x \\ &\iff \exists (a, b) \in M \times_{\phi} M \text{ tel que } b = y \text{ et } a = x \\ &\iff \phi(x) = \phi(y). \end{aligned}$$

On en déduit l'isomorphisme de variétés :

$$\begin{aligned} \text{Orb}_{M \times_{\phi} M}(M) &\longrightarrow B \\ \bar{x} &\longmapsto \phi(x) \end{aligned}$$

On remarque que le sous-groupoïde $M \times_{\phi} M$ est Morita équivalent à B alors que $M \times M$ est Morita équivalent à un point. L'inclusion n'est clairement pas préservée par l'équivalence de Morita.

(vi) Plongeons une variété M dans un \mathbb{R}^N avec le plongement $j : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$, pour un entier N . Soit $M \times_\phi M \rightrightarrows M$ le groupoïde de Lie associé à la fibration ϕ , et $h : M \times_\phi M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ le morphisme de groupoïdes de Lie tel que $h(x, y) = j(y) - j(x)$. On construit alors le groupoïde de Lie $(M \times_\phi M) \times_h \mathbb{R}^N$ au dessus de $M \times \mathbb{R}^N$ comme dans la section 1.1.2. Ce groupoïde est libre et propre, donc il est isomorphe à son espace d'orbites.

Calculons maintenant l'orbite d'un point dans ce produit semi-direct :

$$\begin{aligned} (x, X) \sim (y, Y) &\iff \exists (a, b, A) \in (M \times_\phi M) \times_h \mathbb{R}^N \text{ tel que} \\ &\quad s_h(a, b, A) = (y, Y) \text{ et } r_h(a, b, A) = (x, X) \\ &\iff \exists (a, b, A) \in (M \times_\phi M) \times_h \mathbb{R}^N \text{ tel que} \\ &\quad (b, A + j(b) - j(a)) = (y, Y) \text{ et } (a, A) = (x, X) \\ &\iff \phi(x) = \phi(y) \text{ et } X - j(x) = Y - j(y). \end{aligned}$$

On en déduit le morphisme surjectif suivant,

$$\begin{aligned} p : M \times \mathbb{R}^N &\longrightarrow B \times \mathbb{R}^N \\ (x, X) &\longmapsto (\phi(x), X - j(x)) \end{aligned}$$

qui par construction passera au quotient pour former un isomorphisme \bar{p} .

Le morphisme de $B \times \mathbb{R}^N$ vers $\text{Orb}_{(M \times_\phi M) \times_h \mathbb{R}^N}(M \times \mathbb{R}^N)$ défini par $(\bar{p})^{-1}(a, u) = \overline{(x, u + j(x))}$ pour n'importe quel $x \in \phi^{-1}(\{a\})$ est son inverse.

On donne une représentation de l'espace d'orbite du groupoïde étudié, que l'on va utiliser plus tard :

$$\text{Orb}_{(M \times_\phi M) \times_h \mathbb{R}^N}(M \times \mathbb{R}^N) \simeq B \times \mathbb{R}^N.$$

1.2. Algébroïdes de Lie

Les algébroïdes de Lie ont été introduits par J. Pradines afin de compléter le travail de C. Ehresmann et P. Libermann sur les groupoïdes différentiables. Cette notion généralise à la fois la structure de fibré vectoriel, celle de fibré tangent et celle d'algèbre de Lie (voir les exemples associés). On peut comprendre ce fibré vectoriel comme une approximation infinitésimale de la géométrie des groupoïdes de Lie.

1.2.1. Définitions.

DÉFINITION 1.2.1. *Un algébroïde de Lie $(A, \rho, [\ , \])$ au dessus d'une variété lisse M est la donnée des objets suivants :*

- un fibré vectoriel lisse A ,
- une structure d'algèbre de Lie $[\cdot, \cdot]$ sur l'ensemble $\Gamma(A)$ des sections différentiables de A ,
- un morphisme de fibré vectoriels $\rho : A \longrightarrow TM$, appelé "ancree" de A vers le fibré tangent de M , qui induit un morphisme d'algèbre de Lie $\rho : \Gamma(A) \longrightarrow \Gamma(TM)$ des sections de A vers l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de M .

Enfin, le crochet de Lie et l'ancree vérifient la relation de compatibilité de Leibniz suivante :

$$[\alpha, f\beta] = f[\alpha, \beta] + (\rho(\alpha).f)\beta.$$

1.2.2. Exemples. Voici quelques exemples basiques d'algébroïdes de Lie, largement définis et utilisés dans la littérature :

1.2.2.1. *Algébroïde tangent.* Soit M une variété différentielle. On peut alors dire que $(TM, Id, [\cdot, \cdot])$ est un algébroïde de Lie, où $Id : TM \longrightarrow TM$ est le morphisme identité d'algèbre de Lie et $[\cdot, \cdot]$ est le crochet des champs de vecteurs de la variété M .

1.2.2.2. *Algébroïde de Lie associé à une algèbre de Lie.* Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie, de crochet $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$. Alors $(\mathfrak{g}, \rho, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ est un algébroïde de Lie.

Ici, $\mathfrak{g} \longrightarrow \{0\}$ est le fibré vectoriel trivial au dessus d'un point, $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \{0\}$ est l'application constante, et $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$ est fourni par l'identification de l'espace vectoriel \mathfrak{g} à l'ensemble des sections au dessus d'un point du fibré vectoriel \mathfrak{g} .

1.2.2.3. *Algébroïde de Lie de l'action d'une algèbre de Lie sur une variété.* Soit ρ une action d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur une variété M , c'est à dire un morphisme $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ d'algèbres de Lie. On définit donc l'algébroïde de transformation, notée $\mathfrak{g} \times M$, comme étant le fibré vectoriel trivial $\mathfrak{g} \times M$, d'ancree :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times M &\longrightarrow TM \\ (X, x) &\longmapsto \rho(X).x \end{aligned}$$

et de crochet de Lie :

$$[\alpha, \beta](x) = [\alpha(x), \beta(x)]_{\mathfrak{g}} + \rho(\alpha(x))_x(\beta) - \rho(\beta(x))_x(\alpha).$$

Cette construction peut paraître artificielle mais nous verrons qu'elle est naturelle car on la retrouve en calculant l'algébroïde de Lie du groupoïde d'une action de groupe de Lie $G \times M$, où G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

1.2.2.4. *Fibré en algèbres de Lie.* Si $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$ est un algébroïde de Lie, tel que $\rho = 0$ est l'application constante à 0 (fibre à fibre),

Alors, d'après la propriété de Leibniz, on a

$$[\alpha, f\beta] = f[\alpha, \beta]$$

et il vient que $[\alpha, \beta]$ ne dépend que des valeurs ponctuelles de α et β . C'est ce qu'on appelle un fibré en algèbres de Lie.

1.2.3. L'algébroïde de Lie d'un groupoïde de Lie. Soit G un groupoïde de Lie $G^{(1)} \rightrightarrows M$ de source s et de but r . On note $\epsilon : M \rightarrow G^{(1)}$ son immersion unité.

Dans cette section, nous calculons l'algébroïde naturellement induite de la structure de groupoïde de Lie. Pour cela, il faut calculer un fibré vectoriel issu du groupoïde, donner une structure d'algèbre de Lie à l'ensemble de ses sections, et définir un morphisme ancre du fibré vers le fibré tangent de M .

1.2.3.1. *Fibré vectoriel associé au groupoïde de Lie.* On peut considérer l'action du groupoïde G sur son ensemble de flèches \mathcal{G}_1 qui, contrairement au cas des groupes de Lie, n'est pas définie partout.

Soit $\gamma \in G^{(1)}$ tel que $s(\gamma) = x$ et $r(\gamma) = y$.

On définit alors le difféomorphisme multiplication à gauche $L_\gamma : r^{-1}(x) \rightarrow r^{-1}(y)$ tel que $L_\gamma(g) = \gamma g$. Cette action de G sur $G^{(1)}$ induit donc naturellement une action de $G^{(1)}$ sur le fibré vectoriel $T^r G = \ker(dr)$ définie par : pour tout $\xi \in \ker d_\delta r$, et tout $\gamma \in G^{(1)}$ tel que $s(\gamma) = r(\delta)$:

$$\gamma \cdot \xi = d_\delta L_\gamma(\xi) \in \ker(d_\gamma \delta r)$$

On définit donc A , le fibré vectoriel de l'algébroïde de Lie de G , comme la restriction de $\ker(dr)$ aux unités M ; autrement dit : $A := \epsilon^*(\ker(dr))$.

1.2.3.2. *Structure d'algèbre de Lie sur $\Gamma(A)$.*

DÉFINITION 1.2.2. *Soit $X \in \mathfrak{X}(G^{(1)})$ un champ de vecteur de $G^{(1)}$. On dit que X est invariant à gauche si :*

- X est r -vertical, c'est à dire $X \in \mathfrak{X}^s(G^{(1)}) := \Gamma(\ker(dr))$,
- Pour tout $(\gamma, \delta) \in G^{(2)}$ composables, on a $X(\gamma\delta) = \gamma \cdot X(\delta) = dL_\gamma(X)(\delta)$.

On notera l'ensemble de ces champs de vecteurs $\mathfrak{X}_{inv}^r(\mathcal{G}^{(1)})$.

LEMME. *Soit α une section de A .*

Il existe une unique extension de α en un champ de vecteur invariant à gauche X_α de G .

DÉMONSTRATION. On pose

$$X_\alpha(\gamma) = d_{\epsilon(s(\gamma))} L_\gamma \cdot \alpha(s(\gamma)).$$

Pour chaque élément γ de $G^{(1)}$, on transporte le vecteur $\alpha(s(\gamma))$ basé en $s(\gamma)$, le long de la s -fibre de G associée, jusqu'en γ . Ce procédé en fait un champ de vecteur invariant à gauche, comme on le prouve ici.

On vérifie que c'est bien un champ de vecteur :

Soit $\gamma \in G^{(1)}$, montrons que $X_\alpha(\gamma) \in \ker(d_\gamma r)$.

Comme α est un champ de vecteurs, $\alpha(s(\gamma)) \in \ker(d_{\epsilon(s(\gamma))} r)$. En remarquant que $\gamma\epsilon(s(\gamma)) = \gamma$, le résultat suivant clos ce point :

$$T_{\epsilon(s(\gamma))} L_\gamma : \ker(d_{\epsilon(s(\gamma))} r) \longrightarrow \ker(d_\gamma r)$$

Il reste à vérifier que c'est un champ de vecteur invariant à gauche. Soit $(\gamma, \delta) \in G^{(2)}$, on a :

$$\begin{aligned} X_\alpha(\gamma\delta) &= d_{s(\gamma\delta)} L_{\gamma\delta} \cdot \alpha(s(\gamma\delta)) \\ &= d_{s(\delta)} L_{\gamma\delta} \cdot \alpha(s(\delta)) \\ &= d_{s(\delta)} (L_\gamma \circ L_\delta) \cdot \alpha(s(\delta)) \\ &= d_\delta L_\gamma (d_{s(\delta)} L_\delta \cdot \alpha(s(\delta))) \\ &= d_\delta L_\gamma (X_\alpha(\delta)) \\ &= \gamma \cdot X_\alpha(\delta). \end{aligned}$$

□

On a ainsi une identification entre l'ensemble des sections de A et les champs de vecteurs invariants à gauche de G .

$$\begin{aligned} \Gamma(A) &\longrightarrow \mathfrak{X}_{inv}^r(\mathcal{G}^{(1)}) \\ \alpha &\longmapsto X_\alpha \end{aligned}$$

Cela permet de voir, pour un algébroïde de Lie intégrable (qui provient d'un groupoïde de Lie), les sections comme un ensemble de "vrai" champs de vecteurs.

PROPOSITION 1.2.1. *Si G est un groupoïde de Lie. Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs de G invariants à gauche est un champ de vecteur invariant à gauche.*

DÉMONSTRATION. Soit $X, Y \in \mathfrak{X}_{inv}^r(\mathcal{G}^{(1)})$. Premièrement, on remarque que $[X, Y] \in \mathfrak{X}^s(\mathcal{G}^{(1)})$. Plus précisément, pour $\delta \in G^{(1)}$ de source p et de but q , $X(\delta)$ et $Y(\delta)$ sont tangents à la sous-variété $r^{-1}(q) =: G^q$, et donc $[X, Y](\delta)$ aussi.

Grâce à cette remarque, on peut écrire :

$$[X, Y]_G(\delta) = [X, Y]_{G^q}(\delta).$$

Ce résultat nous permet donc de se restreindre au crochet de Lie sur la sous-variété G^q , qui possède la propriété permettant de prouver le point (*) du calcul qui prouve l'invariance à gauche du crochet.

Soit $\gamma \in G^{(1)}$ tel que $(\gamma, \delta) \in G^{(2)}$, on calcule :

$$\gamma \cdot [X, Y](\delta) = dL_\gamma([X, Y])(\delta) \underset{(*)}{=} [dL_\gamma(X), dL_\gamma(Y)](\gamma\delta) = [X, Y](\gamma\delta),$$

où $[,]$ est le crochet de Lie des champs de vecteurs de G^q .

□

On peut alors sans problème définir le crochet de deux sections α et β de A comme étant la section de A correspondante au champ de vecteur invariant à droite $X_{[\alpha,\beta]} := [X_\alpha, X_\beta]$.

1.2.3.3. *Calcul de l'ancre.* Nous allons montrer que la différentielle $ds : \Gamma(A) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ de la source s est un morphisme d'algèbres de Lie.

Soit X, Y deux champs de vecteurs invariants à gauche de G , de flots respectifs ϕ_u et ψ_t .

On peut donc écrire :

$$X(\gamma) = \frac{d}{du}|_{u=0} \phi_u(\gamma) \quad \text{et} \quad Y(\gamma) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \psi_t(\gamma)$$

Montrons d'abord les deux lemmes suivants :

LEMME. *Pour* $(\gamma, \delta) \in G^{(2)}$,

$$\phi_u(\gamma\delta) = \gamma \cdot \phi_u(\delta)$$

et

$$\psi_t(\gamma\delta) = \gamma \cdot \psi_t(\delta)$$

DÉMONSTRATION. Soit $\gamma \in G^{(1)}$, définissons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \phi'_u &: r^{-1}(r(\gamma)) &\longrightarrow & r^{-1}(r(\gamma)) \\ &\eta &\longmapsto & \gamma \cdot \phi_u(\gamma^{-1}\eta) \end{aligned}$$

Remarquons que $\gamma^{-1}\eta$ décrit $r^{-1}(s(\gamma))$ quand η décrit $r^{-1}(r(\gamma))$. Par conséquent, si l'on prouve que ϕ'_u est le flot de X de la même manière que ϕ_u l'est, on aura prouvé le point pour ϕ_u . Le cas de ψ_t est analogue.

D'abord :

$$\begin{aligned} \phi'_0(\eta) &= \gamma \cdot \phi_0(\gamma^{-1}\eta) \\ &= \gamma\gamma^{-1}\eta \\ &= \eta \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule donc l'évaluation en $u = 0$ de la dérivée de ϕ'_u :

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}|_{u=0} \phi'_u(\eta) &= dL_\gamma \frac{d}{du}|_{u=0} \phi_u(\gamma^{-1}\eta) \\ &= dL_\gamma (X(\gamma^{-1}\eta)) \\ &= X(\eta). \end{aligned}$$

Ceci clos la démonstration. □

LEMME. *Le résultat technique suivant est également nécessaire :*

$$s \circ \phi_u = s \circ \phi_u \circ s$$

DÉMONSTRATION. Ce lemme repose sur le calcul suivant :

$$\begin{aligned} s \circ \phi_u(\delta) &= s \circ \phi_u(\delta s(\delta)) \\ &= s \circ L_\delta \circ \phi_u(s(\delta)) \\ &= s \circ \phi_u(s(\delta)). \end{aligned} \quad \square$$

Nous pouvons maintenant défendre la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2.2. *Si α, β sont deux sections de A , alors :*

$$ds([\alpha, \beta]) = [ds(\alpha), ds(\beta)]$$

DÉMONSTRATION. Soit X le champ de vecteur invariant à gauche de G associé à α et Y le champ de vecteur invariant à gauche de G associé à β .

En remarquant que

$$\begin{aligned} (s \circ \phi_u) \circ (s \circ \phi_{u'}) &= s \circ \phi_u \circ \phi_{u'} \\ &= s \circ \phi_{u+u'}, \end{aligned}$$

on peut avancer que le flot du champ de vecteur $ds(X)$ de M est $x \mapsto s \circ \phi_u(x)$ et que, de même, le flot du champ de vecteur $ds(Y)$ de M est $x \mapsto s \circ \psi_t(x)$.

Par définition du crochet de Lie classique de champs de vecteurs sur une variété, on a :

$$[X, Y](x) = \frac{d}{du}|_{u=0} \frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_{-u} \circ \psi_t \circ \phi_u(x).$$

Ce qui nous amène au résultat :

$$\begin{aligned} d_x s([X, Y](x)) &= \frac{d}{du}|_{u=0} \frac{d}{dt}|_{t=0} s \circ \phi_{-u} \circ \psi_t \circ \phi_u(x) \\ &= \frac{d}{du}|_{u=0} \frac{d}{dt}|_{t=0} (s \circ \phi_{-u}) \circ (s \circ \psi_t) \circ (s \circ \phi_u(x)) \\ &= [d_x s(X(x)), d_x s(Y(x))] \end{aligned} \quad \square$$

On peut donc conclure :

THÉORÈME 1.2.1. *Soit G un groupoïde de Lie de source s de but r et d'unités ϵ . Alors $(\epsilon^*(T^r G), ds, [,]) est un algébroïde de Lie.$*

REMARQUE. *Pour définir cette algébroïde de Lie induite, on a donné des rôles à s et r . Ces rôles peuvent être inversés mais dans ce cas, le crochet de Lie sera induit de celui des champs de vecteurs invariants à droite au lieu de celui des champs de vecteurs invariants à gauche.*

EXEMPLE 1.2.1. *Soit $\pi : E \rightarrow B$ un fibré vectoriel au dessus de la variété différentielle B . Comme vu plus haut, E a une structure de groupoïde de Lie induite, où les applications source et but sont π , l'espace des flèches est E , l'espace des unités est B , et la composition est*

l'addition dans une fibre.

Calculons son algébroides de Lie.

Tout d'abord, remarquons que le fibré tangent TE de E a pour fibres : $T_v E \simeq T_{\pi(v)} B \oplus E_{\pi(v)}$, pour $v \in E$.

La différentielle du but π en $v \in E$ s'écrit alors :

$$d_v \pi : \begin{array}{ccc} T_v E & \longrightarrow & T_{\pi(v)} B \\ (v_1, v_2) & \longmapsto & v_1 \end{array}$$

Ainsi, on peut donner le noyau de cette différentielle $d_v \pi$, où $v = (x, 0)$, $x \in B$ est une unité :

$$\ker(d_v \pi) = \{0\} \times E_x \simeq E_x$$

Il vient alors naturellement que l'algébroides de Lie du groupoïde de Lie, induite du fibré vectoriel $\pi : E \longrightarrow B$, est $A(E) = E$, qui n'est autre que le fibré vectoriel lui-même.

EXEMPLE 1.2.2. *Considérons le groupoïde de Lie $G \rightrightarrows \{e\}$ associé au groupe de Lie G .*

Si on calcule la différentielle du but, on obtient :

$$dr : \begin{array}{ccc} TG & \longrightarrow & T\{e\} \\ (g, X) & \longmapsto & (e, 0) \end{array}$$

En restreignant son noyau à l'unité du groupoïde, e , on obtient que $A(G) = T_e G = \mathfrak{g}$, au dessus de $\{e\}$. L'ancre vient immédiatement du fait que $T\{e\} = \{e\} \times \{0\}$. C'est donc l'application triviale.

Quant au crochet de Lie, il vient directement de l'observation que les champs de vecteurs invariants à gauche du groupoïde associé à G sont exactement les champs de vecteurs invariants à gauche du groupe de Lie en question, et donc, par définition, l'algèbre de Lie. On définit alors le crochet de Lie comme étant exactement celui de l'algèbre de Lie.

EXEMPLE 1.2.3. *Considérons le groupoïde identité $M \rightrightarrows M$.*

En remarquant que la submersion but r est l'identité de M , on obtient, en la différentiant, $dr = d(id_M) = id_{TM}$. Ainsi, $\ker(dr) = M \times \{0\}$. On pose donc $A := M \times \{0\}$. De même, la différentielle de la source est l'identité sur TM donc on obtient :

$$\rho : \begin{array}{ccc} M \times \{0\} & \longrightarrow & TM \\ (x, 0) & \longmapsto & (x, 0) \end{array}$$

Le crochet de Lie ne peut alors qu'être trivial.

EXEMPLE 1.2.4. *Considérons le groupoïde de paire $M \times M \rightrightarrows M$. Nous nous proposons de calculer l'algébroides de Lie qui lui est associé.*

Les applications sources et but étant des projections, il est très simple de calculer leur différentielle. Pour le but, on obtient :

$$\begin{aligned} dr & : T(M \times M) & \longrightarrow & TM \\ & ((x, y), (X, Y)) & \longmapsto & (x, X) \end{aligned}$$

On remarque, en identifiant $T(M \times M)$ avec $TM \times TM$, que dr est la première projection de $TM \times TM$ sur TM . De même, ds est la deuxième projection de $TM \times TM$ sur TM .

On a alors, en restreignant $\ker(dr)$ aux unités, qui sont les éléments diagonaux du produit, que $A := \{((x, x), (0, Y)) \mid x \in M \text{ et } Y \in T_x M\}$.

L'ancre est alors la deuxième projection comme dit précédemment, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \rho & : A & \longrightarrow & TM \\ & ((x, x), (0, Y)) & \longmapsto & (x, Y). \end{aligned}$$

Pour calculer le crochet de Lie, intéressons nous maintenant aux champs de vecteurs de $T(M \times M)$ invariants à gauche. Soit X un tel champ de vecteur. D'abord, il faut qu'il soit r -vertical. C'est à dire que X est une section du fibré vectoriel $\ker(dr) = \{((x, y), (0, Y)) \mid x, y \in M \text{ et } Y \in T_y M\}$.

Ensuite, il vérifie, par définition, $X(x, z) = d_{(y,z)}L_{(x,y)}(X(y, z))$. Pour comprendre cette égalité, calculons la différentielle de l'application multiplication à gauche $L_{(x,y)}$. On a :

$$\begin{aligned} L_{(x,y)} & : \{y\} \times M & \longrightarrow & \{x\} \times M \\ & (y, z) & \longmapsto & (x, z) \end{aligned}$$

On la différencie, en remarquant qu'une composante est l'identité, et l'autre est constante :

$$\begin{aligned} dL_{(x,y)} & : T(\{y\} \times M) & \longrightarrow & T(\{x\} \times M) \\ & ((y, z), (0, Z)) & \longmapsto & ((x, z), (0, Z)) \end{aligned}$$

Ainsi, on peut comprendre l'égalité précédente :

$$X(x, z) = d_{(y,z)}L_{(x,y)}(X(y, z)) = X(y, z),$$

car X est r -vertical.

On conclut que les champs de vecteurs du groupoïde de paire, invariants à gauche, sont les champs de vecteurs qui ne dépendent que de la deuxième variable, c'est à dire, des champs de vecteurs de M . On définit donc le crochet de Lie sur les sections de A comme celui induit par l'identification ainsi établie.

On conclut donc que si l'on fait les identifications $A \simeq TM$, $\rho = id_{TM}$, et le crochet de Lie sur les champs de vecteurs invariants à gauche revient au crochet de Lie sur les champs de vecteurs quelconques de TM (la version de TM correspondant à la deuxième projection bien sûr), on retrouve l'algèbroïde tangent de M .

1.2.4. Le foncteur "algébroïde de Lie" A . On peut prouver que le processus qui à un groupoïde de Lie associe un algébroïde de Lie est fonctoriel de la catégorie des groupoïdes de Lie dont les flèches sont les morphismes de groupoïdes de Lie vers la catégorie des algébroïdes de Lie. On note ce foncteur Lie , ou encore, s'il n'y a pas d'ambiguïté, A .

Soit $H \xrightarrow[r]{s} N$ et $G \xrightarrow[r]{s} M$ deux groupoïdes de Lie et $f : G \rightarrow H$ un morphisme de G vers H . Alors, on définit :

$$A(f) := f_* : A(G) \rightarrow A(H)$$

par $f_*(x, X) = (f(x), d_x f(X))$. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [Mac05].

1.2.5. Constructions.

1.2.5.1. *Produit direct d'algébroïdes de Lie.* Pour plus de détails sur cette section, voir [Mac05].

Nous voulons ici définir, à partir de deux algébroïdes de Lie $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$, un algébroïde de Lie A au dessus de $M \times N$, tel que le crochet de deux sections de E provienne directement de son crochet, de même pour le crochet de deux sections de F , et enfin le crochet d'une section de E avec une section de F vaut zéro. Nous clarifions tous cela par la suite.

Afin de définir la construction de produit direct d'algébroïde de Lie, nous aurons besoin de quelques résultats préalables. Tout d'abord, notons le lemme suivant :

LEMME. *Soit $F \rightarrow N$ un algébroïde de Lie, et M une variété différentielle.*

On pose $A := pr_2^(F)$ le pullback du fibré vectoriel sous-jacent à F , où $pr_2 : M \times N \rightarrow N$ est la projection sur la deuxième variable du produit de variété. On a alors le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \times N & \longrightarrow & N \end{array}$$

On munit le fibré vectoriel $A \rightarrow M \times N$ d'une structure d'algébroïde de Lie.

Pour cela, on identifie au préalable les sections de A avec l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty(M) \otimes \Gamma(N, F)$. On peut alors définir le crochet, pour $f \otimes \alpha, g \otimes \beta \in \mathcal{C}^\infty(M) \otimes \Gamma(N, F)$, par :

$$[f \otimes \alpha, g \otimes \beta] = fg \otimes [\alpha, \beta]_F$$

où $[,]_F$ est le crochet de Lie sur les sections de F . L'ancre, sera alors définie par

$$\rho(x, y, Y) = ((x, 0), \rho_F(y, Y))$$

où ρ_F est l'ancre de F . Si l'on s'intéresse plutôt à l'ancre du coté des sections, on aura la formule : $\rho(f \times \alpha) = f \times \rho_F(\alpha)$.

PROPOSITION 1.2.3. *Soient deux algébroïdes de Lie $E \longrightarrow M$ et $F \longrightarrow N$.*

Alors le fibré vectoriel

$$E \boxtimes F := pr_1^*(E) \oplus pr_2^*(F) \longrightarrow M \times N$$

isomorphe (en tant que fibré vectoriel) au produit $E \times F$, a une structure naturelle d'algébroïde de Lie

$$E \boxtimes F \longrightarrow M \times N$$

telle que les sections de E et de F commutent dans l'ensemble des sections $\Gamma(M \times N, E \boxtimes F)$. C'est le produit direct d'algébroïde de Lie de E et de F [Mac05].

1.2.5.2. *Pullback d'algébroïdes de Lie.* Etant muni d'un algébroïde de Lie, on pourrait être tenté de faire le pullback par une submersion de la structure de fibré vectoriel sous-jacent. Cette approche n'est pas la meilleure. On voudrait plutôt se calquer sur les constructions des groupoïdes de Lie, pour ne pas trop s'éloigner de la théorie désirée. On va donc construire un pullback d'algébroïde qui donnera l'algébroïde de Lie du pullback de groupoïdes de Lie.

DÉFINITION 1.2.3. *Soit $A \longrightarrow N$ un algébroïde de Lie d'ancre ρ . Soit $f : M \longrightarrow N$ une submersion.*

*Alors, on définit $*f^*(A) := A \times_{TN} TM$ comme le produit fibré du carré cartésien dans la catégorie des fibrés vectoriels :*

$$\begin{array}{ccc} *f^*(A) & \longrightarrow & TM \\ \downarrow & & \downarrow df \\ A & \xrightarrow{\rho} & TN \end{array}$$

où toutes les flèches sont des morphismes de fibrés vectoriels. Cela revient à écrire :

$$*f^*(A) = \{(\xi, X) \in A \times TM \text{ tel que } \rho(\xi) = df(X)\}.$$

C'est bien un fibré vectoriel au dessus de M , et l'ancre sera la projection sur TM .

Afin de retrouver la notion de pullback de fibré vectoriel, on peut traiter le cas suivant.

LEMME. Soit $A \longrightarrow N$ un algébroïde de Lie, et P une variété différentielle. On pose $f = pr_1 : N \times P \longrightarrow N$ la première projection, et on obtient l'isomorphisme d'algébroïdes de Lie :

$$*f^*(A) \simeq A \boxtimes TP.$$

On peut remarquer par ailleurs que ce produit direct est isomorphe, en tant que fibré vectoriel, à $f^*(A) \oplus (N \times TP)$.

Il s'agit maintenant de justifier l'intérêt de cette définition, en prouvant que le foncteur *Lie* commute avec le pullback. En d'autres termes,

PROPOSITION 1.2.4. Si $G \xrightarrow[r]{s} N$ est un groupoïde de Lie, et si $f : M \longrightarrow N$ est une submersion, on a :

$$A(*f^*(G)) = *f^*(A(G)).$$

DÉMONSTRATION. On commence par démontrer qu'au niveau des fibrés vectoriels, tout se passe bien.

Nous allons donc restreindre le noyau du but β de $*f^*(G)$ à ses unités. Au préalable, donnons une présentation de son fibré tangent :

$$T^*f^*(G) = \{((x, \gamma, y); (X, \Gamma, Y)) \text{ où } d_\gamma r(\Gamma) = d_x f(X) \text{ et } d_\gamma s(\Gamma) = d_y f(Y)\}.$$

Rappelons que la source et le but du pullback sont données respectivement par $\alpha(x, \gamma, y) = y$ et $\beta(x, \gamma, y) = x$, et que les unités sont $\epsilon(x) = (x, u(x), x)$ où u est elle-même l'immersion unité de G .

Il vient ainsi directement :

$$\begin{aligned} A(*f^*(G)) &= \epsilon^*(\ker(d\beta)) \\ &= \{((x, u(x), x); (X, \Gamma, Y)) \mid d_{u(x)}r(\Gamma) = 0 \text{ et } d_{u(x)}s(\Gamma) = d_x f(Y)\} \\ &= \{((x, \xi), (x, Y)) \in A(G) \times TM \text{ où } \rho(x, \xi) = df(x, Y)\} \\ &= *f^*(A(G)). \end{aligned}$$

où ρ est l'ancre de l'algébroïde de G .

L'ancre du pullback sera vite vérifiée, car c'est la différentielle de la projection α . Ainsi, l'ancre $\#$ n'est autre que la projection :

$$\begin{aligned} \# : A(*f^*(G)) &\longrightarrow TM \\ (x, \xi, Y) &\longmapsto (x, Y). \end{aligned}$$

Occupons nous maintenant du crochet de Lie. Pour faire cela, nous pouvons trouver les champs de vecteurs de $*f^*(G)$ invariants à gauche. Cela revient à trouver les sections θ de son fibré tangent qui vérifient :

$$\begin{aligned} \theta(x, \gamma, y) &\in \ker(d\beta), \quad \forall (x, \gamma, y) \in *f^*(G) \\ \theta((x, \gamma, y)(y, \delta, z)) &= d_{(y, \delta, z)}L_{(x, \gamma, y)}(\theta(y, \delta, z)). \end{aligned}$$

Soit donc θ un champ de vecteur invariant à gauche de $*f^*(G)$. Remarquons que l'on peut lui associer un champ de vecteur de G de manière naturelle, par la projection $*f^*(G) \longrightarrow G$.

Commençons par écrire la différentielle du difféomorphisme de multiplication à gauche par un élément (x, γ, y) du groupoïde, en rappelant que cette application s'écrit $L_{(x,\gamma,y)}(y, \delta, z) = (x, \gamma\delta, z)$. Sa différentielle vient naturellement :

$$d_{(y,\delta,z)}L_{(x,\gamma,y)}(Y, \Delta, Z) = (0, d_\delta L_\gamma(\Delta), Z).$$

On observe donc qu'elle peut être décomposée en deux parties, celle associée au groupoïde G , traité dans le cas général 1.2.3.2, et celle associée au groupoïde de paire $M \times M$, traité dans l'exemple 1.2.4. Il vient donc directement que les champs de vecteur invariants à gauche de $*f^*(G)$ sont les champs de vecteurs β -verticaux qui ne dépendent pas de la première variable et dont le champ de vecteur de G sous-jacent est invariant à gauche. Autrement dit, on peut décomposer les sections de l'algébroïde de Lie comme suit : $\theta = (a, b)$ où $a \in \Gamma(A(G))$ et $b \in \mathfrak{X}(M)$.

On peut alors définir le crochet de deux sections $\theta = (a, b)$ et $\theta' = (a', b')$ de l'algébroïde de Lie $A(*f^*(G))$ par :

$$[\theta, \theta'] = ([a, a'], [b, b'])$$

□

1.3. C^* -algèbres réduites et maximales de groupoïdes de Lie

Dans cette section, nous rappelons la construction de la C^* -algèbre associée à un groupoïde de lie. Pour faire cela, nous donnons explicitement une famille de mesures sur les r -fibres du groupoïde, nous l'utilisons pour définir l'algèbre de convolution associée à ce dernier, pour enfin la munir d'une topologie qui donnera naissance à notre C^* -algèbre.

1.3.1. Algèbre de convolution. La convolution est largement développée dans le cas des fonctions de \mathbb{R}^n car la mesure de Lebesgue est l'outil puissant qui permet d'intégrer sur cet espace. Quand on s'intéresse à une variété quelconque, il faut gérer l'intégration sur cette dernière, en utilisant un système de mesures compatibles avec les cartes locales, et pour ce qui est des groupoïdes de Lie, il faut que ce système soit en plus compatible avec la structure de ce dernier.

Pour construire ces mesures, nous allons introduire la notion de densité, détaillée dans [CCG⁺04].

1.3.1.1. *Intégration sur un espace vectoriel.*

DÉFINITION 1.3.1. *Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , et α un réel.*

Une α -densité est une fonction $\rho : \Lambda^n(V) \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\rho(\lambda T) = |\lambda|^\alpha \rho(T)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall T \in \Lambda^n(V)$.

On désignera par $|\Omega|^\alpha(V)$ l'espace vectoriel des α -densités sur V .

Il est de dimension 1 car, comme $\Lambda^n(V)$ est de dimension 1, chaque α -densité ρ est entièrement déterminée par sa valeur en un point non nul de cet espace vectoriel.

PROPOSITION 1.3.1. Les morphismes d'espaces vectoriels suivants sont des isomorphismes canoniques :

- $|\Omega|^\alpha(V) \otimes |\Omega|^\beta(V) \longrightarrow |\Omega|^{\alpha+\beta}(V)$
- $|\Omega|^\alpha(V) \otimes |\Omega|^\alpha(W) \longrightarrow |\Omega|^\alpha(V \oplus W)$

DÉFINITION 1.3.2. Soit $A = \{[v_1, \dots, v_n], v_1, \dots, v_n \in V\}$ où $[v_1, \dots, v_n] = \{\sum_i t_i v_i, \sum_i t_i = 1\}$.

On pose $\mathcal{A} = \sigma(A)$ la tribu engendrée par A . On définit alors la mesure invariante par translation μ issue de la 1-densité ρ comme étant la mesure engendrée par :

$$\mu([v_1, \dots, v_n]) = \rho(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$$

Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de V , on définit l'intégration par rapport à μ d'une application linéaire $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ comme

$$\int f d\mu = \int f\left(\sum_i x_i e_i\right) \rho(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) dx$$

où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et dx est la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n .

C'est donc une intégration qui dépend de la base choisie.

1.3.1.2. *Intégration sur un fibré vectoriel.* On va maintenant étendre la définition de α -densité à un fibré vectoriel, puis définir une mesure associée afin d'intégrer des fonctions sur un fibré vectoriel.

DÉFINITION 1.3.3. Soit $\pi : E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel. On appelle α -densité du fibré E toute section du fibré vectoriel $|\Omega|^\alpha(E) \longrightarrow M$ où les fibres sont les espaces vectoriels $|\Omega|^\alpha(E_x)$ des α -densités sur la fibre E_x du fibré vectoriel E .

Comme la mesure sur un espace vectoriel dépend de la base choisie, et que l'on veut que notre mesure sur le fibré vectoriel soit lisse, on introduit la notion de repère local.

DÉFINITION 1.3.4. Un repère local du fibré E est un couple (U, e) où U est un ouvert de M et $e = (e_1, \dots, e_p)$ est un p -uplet de sections du fibré E tel que pour tout élément x de U , $(e_1(x), \dots, e_p(x))$ est une base de l'espace vectoriel E_x .

C'est donc une famille lisse de bases des fibres de E , au sens où e est une section lisse du fibré vectoriel $E^{\otimes p} \longrightarrow M$.

PROPOSITION 1.3.2. Soit $\mu \in \mathcal{C}^\infty(M, |\Omega|^1(E))$ une section lisse du fibré vectoriel $|\Omega|^1(E)$. On dira que μ est une 1-densité de E .

A un repère local, on peut associer la fonction :

$$\begin{aligned} \mu_e & : U \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longmapsto \mu(x)(e_1(x) \wedge \dots \wedge e_p(x)) \end{aligned}$$

qui va nous permettre d'intégrer sur le fibré vectoriel, de la manière suivante.

Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{K})$,

$$\int f d\mu = \int_{\pi^{-1}(U)} f \left(\sum_{i=1}^p v_i e_i(x) \right) \mu_e(x) dv.$$

1.3.1.3. *Intégration sur un groupoïde de Lie.*

DÉFINITION 1.3.5. *Soit V, W deux espaces vectoriels de même dimension, et $f : V \rightarrow W$ une application linéaire.*

On associe à cette application, une fonction $f^\Omega : |\Omega|^\alpha(W) \rightarrow |\Omega|^\alpha(V)$ définie par :

$$(f^\Omega \rho)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \rho(f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_n)).$$

Soit $G \xrightarrow[r]{s} M$ un groupoïde de Lie, d'algébroïde de Lie A .

On considère le fibré vectoriel $|\Omega|^\alpha(A) \rightarrow M$ associé à l'algébroïde de Lie A , et le fibré vectoriel $\ker Tr \subset TG^{(1)} \rightarrow G^{(1)}$.

Soit $T_{\gamma\delta} L_{\gamma^{-1}} : T_{\gamma\delta} G^{r(\gamma)} \rightarrow T_\delta G^{s(\gamma)}$, la différentielle de la multiplication à gauche par γ^{-1} . On lui associe, comme précédemment, l'application

$$(T_{\gamma\delta} L_{\gamma^{-1}})^\Omega : |\Omega|^\alpha(T_\delta G^{s(\gamma)}) \rightarrow |\Omega|^\alpha(T_{\gamma\delta} G^{r(\gamma)}).$$

DÉFINITION 1.3.6. *On peut définir une action à gauche de G sur $|\Omega|^\alpha(\ker Tr)$ par l'application suivante :*

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{C}^\infty(G^{(1)}, |\Omega|^\alpha(\ker Tr)) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(G^{(1)}, |\Omega|^\alpha(\ker Tr)) \\ (\gamma, \rho) &\mapsto \gamma \cdot \rho \end{aligned}$$

avec $(\gamma \cdot \rho)(\delta) = (T_{\gamma\delta} L_{\gamma^{-1}})^\Omega(\rho(\delta))$, $\delta \in G^{s(\gamma)}$.

Elle est bien définie car $\rho(\delta) \in \ker(T_\delta r) = T_\delta G^{r(\delta)} = T_\delta G^{s(\gamma)}$.

On considère maintenant le fibré vectoriel $\pi_1 : r^*(|\Omega|^{1/2}(A)) \rightarrow G^{(1)}$, pullback par l'application but du fibré des demi-densités de A .

Sachant que :

$$\begin{aligned} |\Omega|^{1/2}(A) &= \{(\gamma, v) \mid \gamma \in G^{(1)}, v \in |\Omega|^{1/2}(A_{r(\gamma)})\} \\ &= \{(\gamma, v) \mid \gamma \in G^{(1)}, v \in |\Omega|^{1/2}(T_{r(\gamma)} G^{r(\gamma)})\} \end{aligned}$$

on peut expliciter les fibres : $\pi_1^{-1}(\gamma) = |\Omega|^{1/2}(T_{r(\gamma)} G^{r(\gamma)})$.

De la même manière, on se muni du fibré vectoriel $\pi_2 : s^*(|\Omega|^{1/2}(A)) \rightarrow G^{(1)}$, de fibre $\pi_2^{-1}(\gamma) = |\Omega|^{1/2}(T_{s(\gamma)} G^{s(\gamma)})$.

Grâce à ces deux fibrés, on peut définir le fibré suivant, noté \mathcal{E} , qui va nous servir par la suite à avoir des mesures pour intégrer des fonctions de notre groupoïde :

$$\pi : \mathcal{E} = r^*(|\Omega|^{1/2}(A)) \otimes s^*(|\Omega|^{1/2}(A)) \longrightarrow G^{(1)}.$$

La fibre de \mathcal{E} au dessus de $\gamma \in G^{(1)}$ est

$$\pi^{-1}(\gamma) = |\Omega|^{1/2}(T_{r(\gamma)}G^{r(\gamma)}) \otimes |\Omega|^{1/2}(T_{s(\gamma)}G^{s(\gamma)}).$$

Nous avons maintenant tous les outils pour définir un produit de convolution

DÉFINITION 1.3.7. *Intéressons-nous à l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(G, \mathcal{E})$ des sections lisses à support compact du fibré vectoriel E .*

Munissons cet espace d'un produit de convolution défini, pour $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(G^{(1)}, \mathcal{E})$ par :

$$(f * g)(\gamma) = \int_{G^{r(\gamma)}} (id \otimes \delta)f(\delta)(\delta \otimes id)g(\delta^{-1}\gamma)$$

ainsi que d'une involution $f^*(\gamma) = \widetilde{f(\gamma^{-1})}$,
où

$$\begin{aligned} \widetilde{(\cdot)} : |\Omega|^{1/2}(T_x G^x) \otimes |\Omega|^{1/2}(T_y G^y) &\longrightarrow \frac{|\Omega|^{1/2}(T_y G^y) \otimes |\Omega|^{1/2}(T_x G^x)}{a(x) \otimes b(y)} \longmapsto \frac{|\Omega|^{1/2}(T_y G^y) \otimes |\Omega|^{1/2}(T_x G^x)}{b(y) \otimes a(x)}, \end{aligned}$$

$(id \otimes \delta)$ est définie sur $|\Omega|^{1/2}(T_{r(\delta)}G^{r(\delta)}) \otimes |\Omega|^{1/2}(T_{s(\delta)}G^{s(\delta)})$ par

$$(id \otimes \delta)(a \otimes b) = (a \otimes \delta.b) \in |\Omega|^{1/2}(T_{r(\delta)}G^{r(\delta)}) \otimes |\Omega|^{1/2}(T_{\delta}G^{r(\delta)}).$$

et $(\delta \otimes id)$ est définie sur $|\Omega|^{1/2}(T_{s(\gamma)}G^{s(\gamma)}) \otimes |\Omega|^{1/2}(T_{s(\gamma)}G^{s(\gamma)})$ par

$$(\delta \otimes id)(a \otimes b) = (\delta.a \otimes b) \in |\Omega|^{1/2}(T_{\delta}G^{r(\delta)}) \otimes |\Omega|^{1/2}(T_{s(\delta)}G^{s(\delta)}).$$

On vérifie donc que l'intégrande est un élément de

$$|\Omega|^{1/2}(T_{r(\gamma)}G^{r(\gamma)}) \otimes |\Omega|^{1/2}(T_{\delta}G^{r(\delta)}) \otimes |\Omega|^{1/2}(T_{s(\gamma)}G^{s(\gamma)}).$$

On l'intègre donc comme une 1-densité de la variété $G^{r(\delta)}$ pour obtenir un élément de $|\Omega|^{1/2}(T_{r(\gamma)}G^{r(\gamma)}) \otimes |\Omega|^{1/2}(T_{s(\gamma)}G^{s(\gamma)})$.

Pour la suite, nous aurons besoin du résultat suivant, qui permet de mettre en relation les densités de l'algébroïde avec celles du groupoïde associé invariantes à gauche.

PROPOSITION 1.3.3. *L'application $\lambda \longmapsto \lambda|_M$ est une bijection entre les sections invariantes à gauche de $|\Omega|^\alpha(\ker Tr)$ et les sections de $|\Omega|^\alpha(A)$. Cette bijection préserve la propriété d'être lisse.*

DÉMONSTRATION. Elle est bien définie car $|\Omega|^\alpha(A) \subset |\Omega|^\alpha(\ker(Tr))$.

On définit l'inverse de cette application par

$$\begin{aligned} |\Omega|^\alpha(A) &\longrightarrow |\Omega|^\alpha(\ker(Tr)) \\ \rho &\longrightarrow \tilde{\rho} \end{aligned}$$

où $\tilde{\rho}(\gamma) = \gamma \cdot \rho(s(\gamma))$.

□

1.3.1.4. *Complétion de l'algèbre de convolution d'un groupoïde de Lie.* Nous allons maintenant définir la C^* -algèbre du groupoïde de Lie. Nous munirons d'abord l' $*$ -algèbre $\mathcal{C}_c^\infty(G^{(1)}, \mathcal{E})$ d'une C^* -norme. Considérons ses $*$ -représentations sur un espace de Hilbert H .

Soit \mathcal{R} l'ensemble des $*$ -représentations $\pi : \mathcal{C}_c^\infty(G^{(1)}, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ pour lesquelles $f \mapsto \langle \xi, \pi(f)\eta \rangle$ est une mesure de Radon sur $\mathcal{C}_c^\infty(G^{(1)}, \mathcal{E})$ quels que soient $\xi, \eta \in H$. On définit alors la C^* -norme sur $\mathcal{C}_c^\infty(G^{(1)}, \mathcal{E})$ par :

$$\|f\|_{max} = \sup_{\pi \in \mathcal{R}} \|\pi(f)\|;$$

La complétion de $\mathcal{C}_c^\infty(G^{(1)}, \mathcal{E})$ avec cette norme est la C^* -algèbre $C^*(G)$.

Par ailleurs, pour chaque $x \in M$, on définit une représentation involutive π_x de $\mathcal{C}_c^\infty(G^{(1)}, \mathcal{E})$ sur l'espace de hilbert $L^2(G^x)$ des demi-densités sur la variété G^x par :

$$[\pi_x(f)\xi](\gamma) = \int_{G^x} (id \otimes \gamma_1)f(\gamma_1)(\gamma_1 \otimes id)\xi(\gamma_1^{-1}\gamma)$$

pour $\gamma \in G^x$, $\xi \in L^2(G^x)$.

Alors on définit une autre norme

$$\|f\|_r = \sup_{x \in M} \|\pi_x(f)\|$$

La complétion avec cette norme donne naissance à la C^* -algèbre réduite $C_r^*(G)$. Dans notre contexte, ces deux C^* -algèbres seront égales car nous traitons exclusivement de groupoïdes moyennables [Ren80], [ADR00].

REMARQUE. Soit $G \xrightleftharpoons[s]{r} M$ un groupoïde de Lie. On considère U un ouvert de M , de complémentaire F . On rappelle que U est un ouvert saturé de G si G_U^U est un groupoïde de Lie. On notera $G_{|U} := G_U^U$. Ainsi, F est aussi saturé, et $G_{|F} := G_F^F$. On a alors la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow C^*(G_{|U}) \xrightarrow{i} C^*(G) \xrightarrow{r} C^*(G_{|F}) \longrightarrow 0$$

où i est le prolongement par 0 en dehors de U et r est la restriction à F . Pour plus de détails, voir [HS87].

Groupoïdes de déformation et théorèmes de l'indice

2.1. Déformation au cône normal

Pour un couple (M, L) constitué d'une variété M et d'une sous-variété L , la déformation au cône normal est une construction de géométrie différentielle consistant à "déformer" de manière lisse la variété M en le fibré normal à l'inclusion $L \subset M$. Le terme déformation est employé de manière imagée. Il est convenu d'imaginer une infinité de copies de la variété M , indexé par \mathbb{R}^* ; on y "colle" en 0 l'objet en quoi on déforme : ici, le fibré normal. Tout le problème est de comprendre en quoi l'objet exotique ainsi construit possède une structure différentielle.

Cela revient à donner une structure de variété à l'ensemble

$$DNC(M, L) = N_L^M \times \{0\} \bigsqcup M \times \mathbb{R}^*$$

où N_L^M est le fibré normal à l'inclusion $L \subset M$. Autrement dit, c'est le fibré qui fait de la suite suivante une suite exacte courte de fibrés vectoriels :

$$0 \longrightarrow TL \longrightarrow TM \longrightarrow N_L^M \longrightarrow 0.$$

La structure de variété dont on va munir cet ensemble repose sur le théorème de voisinage tubulaire appliqué à la sous-variété L . En effet, on peut définir un isomorphisme θ d'un voisinage de la section nulle de N_L^M vers un voisinage de L dans M , qui envoie la section nulle $L \times \{0\}$ sur L .

Ce sujet est largement détaillé dans [CR07]. Dans un premier temps, nous allons traiter le cas de sous-variétés de \mathbb{R}^n , cela nous permettra d'enchaîner avec le cas général, et nous conclurons en vérifiant la functorialité de la construction. Cette dernière nous permettra d'appliquer le procédé de déformation au cône normal aux groupoïdes de Lie.

2.1.1. Définition.

Le cas où $X = \emptyset$. Soit le couple (M, \emptyset) où M est une variété. Alors on a $N_{\emptyset}^M = \emptyset$ et il vient naturellement :

$$DNC(M, \emptyset) = M \times \mathbb{R}^*.$$

Le cas d'un ouvert. Soit le couple (M, U) où M est une variété et U est un ouvert de M . Alors, on a $N_U^M \simeq U$ et il vient

$$DNC(M, U) = U \times \{0\} \bigsqcup M \times \mathbb{R}^* = U \times \mathbb{R} \cup M \times \mathbb{R}^*$$

vu comme un ouvert de $M \times \mathbb{R}^*$. En fait, il n'y a pas de déformation, ce qui peut se comprendre quand on essaie d'imaginer le voisinage tubulaire. Le fibré normal étant de dimension 0, on garde la topologie du produit $M \times \mathbb{R}$.

2.1.1.1. *Le cas du couple $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.* Commençons donc par traiter le cas de l'inclusion $\mathbb{R}^p \simeq \mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \simeq \mathbb{R}^n$. Dans la suite, on identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ avec \mathbb{R}^n pour alléger les notations. On veut définir une variété dont la structure différentielle pourrait être interprétée comme une déformation de \mathbb{R}^n en son cône normal $N_{\mathbb{R}^p}^{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ où $p + q = n$. Il vient alors :

$$DNC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^* \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

On pose le morphisme :

$$\begin{aligned} \psi : DNC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ (x, y, t) &\longmapsto \begin{cases} (x, \frac{y}{t}, t) & \text{si } t \neq 0 \\ (x, y, 0) & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette application est bijective, et elle permettra alors de donner à $DNC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ une structure de variété différentielle de dimension $n + 1$ avec une seule carte.

2.1.1.2. *Cas d'un couple d'ouverts de \mathbb{R}^n .* Traitons ensuite le cas où $V \subset U$, avec V un ouvert de \mathbb{R}^p , U un ouvert de \mathbb{R}^n , et $p + q = n$, tels que $V = U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

On a alors le sous-ensemble de $DNC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ suivant :

$$DNC(U, V) = N_V^U \times \{0\} \bigsqcup U \times \mathbb{R}^*.$$

On remarque que

$$\psi(DNC(U, V)) = \Omega_V^U := \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \mid (x, ty) \in U\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, ce qui nous amène à dire que $DNC(U, V)$ est un ouvert de la variété $DNC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. C'est donc lui-même une variété lisse.

Les applications

$$\psi : DNC(U, V) \longrightarrow \Omega_V^U$$

vont jouer le rôle de cartes locales dans le cas général.

2.1.1.3. *Cas général.* Considérons le couple de variétés (M, L) où M est une variété de dimension n et L est une sous-variété de M de dimension p .

Commençons par définir les cartes locales que l'on va considérer ; à savoir, les cartes locales compatibles avec la structure de sous-variété de L :

DÉFINITION 2.1.1. *On appelle "carte adaptée à L " une carte locale (\mathcal{U}, ϕ) de M , telle que*

- $\phi : \mathcal{U} \xrightarrow{\cong} U \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme,
- Si on pose $\mathcal{V} := \mathcal{U} \cap L$ et $V := \phi(\mathcal{V})$, alors $V = U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

Ayant un atlas $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)_\alpha$ du couple (L, M) (constitué de cartes locales adaptées à L), on se propose de prouver que $(DNC(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha), \chi_\alpha)_\alpha$ est un atlas de $DNC(M, L)$, après avoir défini les applications χ_α .

Soit (\mathcal{U}, ϕ) une carte locale de M adaptée à L .

Par définition, si $x \in \mathcal{V}$, $\phi(x) = (\phi_1(x), 0) \in V \subset \mathbb{R}^p \times \{0\}$, où

$$\phi_1 : \mathcal{V} \xrightarrow{\cong} V.$$

est un homéomorphisme.

Avant de définir $\tilde{\phi}$, une étape préalable est nécessaire. Comme L est une sous-variété \mathcal{C}^∞ de M , l'inclusion est une immersion. On a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow TL \longrightarrow TM \longrightarrow N_L^M \longrightarrow 0$$

qui peut être supposée scindée sans perdre l'aspect général qui nous intéresse (par exemple le choix d'une structure de Riemann). On peut donc écrire pour $x \in L$, $T_x M \simeq T_x L \times (N_L^M)_x$, qui nous permet de définir l'application suivante :

$$d_x^N \phi : (N_L^M) \longrightarrow \mathbb{R}^q.$$

Il s'agit du passage au quotient de la différentielle de ϕ en x :

$$d_x \phi : T_x \mathcal{U} \longrightarrow TU \subset T\mathbb{R}^p \times T\mathbb{R}^q,$$

bien définie grâce à l'inclusion : $d_x \phi(T\mathcal{V}) \subset TV \subset T(\mathbb{R}^p \times \{0\})$. La composante normale $d_x^N \phi$ est alors un difféomorphisme vers \mathbb{R}^p et c'est d'ailleurs une bonne manière de donner une structure de variété compatible avec l'inclusion $L \subset M$ au cône normal.

On peut enfin définir l'application $\tilde{\phi} : DNC(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \longrightarrow DNC(U, V)$ d'une manière naturelle :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x, \xi, 0) &= (\phi_1(x), d_x^N \phi(\xi), 0) \text{ et} \\ \tilde{\phi}(x, t) &= (\phi(x), t) \text{ pour } t \neq 0 \end{aligned}$$

De cette manière, on a construit une bijection $\tilde{\phi}$ sur $DNC(U, V)$, ce qui nous permet de munir $DNC(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ d'une structure de variété induite, via les applications :

$$DNC(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\tilde{\phi}} DNC(U, V) \xrightarrow{\psi} \Omega_V^U.$$

Dans la suite, on notera $\chi = \psi \circ \tilde{\phi}$.

Soit $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)_\alpha$ un atlas de M .

On va maintenant montrer que $(DNC(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha), \chi_\alpha)_\alpha$ est un atlas de l'ensemble $DNC(M, L)$.

On remarque tout d'abord que les $DNC(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha)$ forment une partition de cet ensemble. Il reste maintenant à montrer que si $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ et $(\mathcal{U}_\beta, \phi_\beta)$ sont deux cartes locales de M d'intersection non-nulle, alors $\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}$ est un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ de $\Omega_{V_\alpha}^{U_\alpha}$ vers $\Omega_{V_\beta}^{U_\beta}$.

Commençons par démontrer un lemme qui nous donnera le résultat.

LEMME. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse qui s'annule sur $U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.*

Alors, l'application induite sur la déformation au cône normal $\tilde{F} : \Omega_V^U \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\tilde{F}(x, \xi, t) = \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi & \text{si } t = 0 \\ \frac{1}{t} F(x, t\xi) & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, 0) = (\frac{\partial F}{\partial \xi_1}(x, 0), \dots, \frac{\partial F}{\partial \xi_q}(x, 0))$ si (ξ_1, \dots, ξ_q) est un système de coordonnées locales de \mathbb{R}^q est lisse.

DÉMONSTRATION. Le développement de Taylor de F en 0 nous donne la formule :

$$F(x, \xi) = F(x, 0) + \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi + h(x, \xi) \cdot \xi$$

où $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une application lisse qui vérifie $h(x, 0) = 0$.

On a alors

$$\frac{1}{t} F(x, t\xi) = \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi + h(x, t\xi) \cdot \xi$$

qui démontre que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} F(x, t\xi) = \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, 0)$. □

En appliquant ce lemme coordonnées par coordonnées, on peut prouver aisément la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1.1. *Soit U, U' deux ouverts de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Prenons une application $F : U \rightarrow U'$ vérifiant $F_2(x, 0) = 0$, en écrivant $F = (F_1, F_2)$.*

Alors l'application $\tilde{F} : \Omega_V^U \rightarrow \Omega_{V'}^{U'}$, définie par

$$\tilde{F}(x, \xi, t) = \begin{cases} (F_1(x, 0), \frac{\partial F_2}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi, 0) & \text{si } t = 0 \\ (F_1(x, t\xi), \frac{1}{t}F_2(x, t\xi), t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ .

Il est maintenant temps de dire que l'application $\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}$ définie par :

$$\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}(x, \xi, t) = \begin{cases} (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(x), d_x^N(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(\xi), 0) & \text{si } t = 0 \\ (\frac{1}{t}\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x, t\xi), t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

est une application lisse, les applications entrant en jeu étant toutes lisses, et le recollement en $t = 0$ étant traité par la proposition précédente.

DÉFINITION 2.1.2. Soit (M, L) un couple de variétés tel que L est une sous-variété de M . La déformation au cône normal associé à ce couple est la variété obtenue en munissant l'ensemble $DNC(M, L)$ de la structure lisse introduite ci-dessus.

EXEMPLE 2.1.1 (Cas d'un point). Soit M une variété et $x \in M$. On étudie le couple $(M, \{x\})$. Le fibré normal associé est $N_x^M = T_x M$ et la déformation au cône normal devient :

$$DNC(M, \{x\}) = T_x M \times \{0\} \bigsqcup M \times \mathbb{R}^*.$$

EXEMPLE 2.1.2. Soit M une variété différentielle. On étudie le couple (M, M) . Le fibré normal associé à l'identité $M \rightarrow M$ est trivial et il vient

$$DNC(M, M) = M \times \{0\} \bigsqcup M \times \mathbb{R}^* \simeq M \times \mathbb{R}$$

en tant que variété produit.

2.1.2. Functorialité.

DÉFINITION 2.1.3. On note \mathcal{C}_2^∞ la catégorie dont les objets sont les couples de variétés (M, L) où L est une sous-variété de M et dont les flèches entre deux objets (M, L) et (N, P) sont les applications lisses $f : M \rightarrow N$ telle que $f(L) \subset P$.

On veut dans cette section définir un foncteur DNC de la catégorie \mathcal{C}_2^∞ vers la catégorie des variétés lisses.

Cas des ouverts de \mathbb{R}^n . Soit (U, V) un couple tel que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, et que $V := U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$, et (U', V') un couple tel que U' est un ouvert de $\mathbb{R}^{n'} = \mathbb{R}^{p'} \times \mathbb{R}^{q'}$, et que $V' := U' \cap (\mathbb{R}^{p'} \times \{0\})$.

On se donne une application lisse $F : U \rightarrow U'$ telle que $F(V) \subset V'$. Cette application vérifie les hypothèse de la proposition 2.1.1. On peut alors construire une application lisse $\tilde{F} : \Omega_V^U \rightarrow \Omega_{V'}^{U'}$, définie par

$$\tilde{F}(x, \xi, t) = \begin{cases} (F_1(x, 0), \frac{\partial F_2}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi, 0) & \text{si } t = 0 \\ (F_1(x, t\xi), \frac{1}{t}F_2(x, t\xi), t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉFINITION 2.1.4. *Définissons l'application*

$$DNC(F) : DNC(U, V) \longrightarrow DNC(U', V')$$

par :

$$DNC(F)(x, \xi, t) = \begin{cases} (F_1(x, 0), \frac{\partial F_2}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi, 0) & \text{si } t = 0 \\ (F_1(x, \xi), F_2(x, \xi), t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

PROPOSITION 2.1.2. *L'application*

$$DNC(F) : DNC(U, V) \longrightarrow DNC(U', V')$$

est de classe \mathcal{C}^∞ .

DÉMONSTRATION. On rappelle que, par définition, montrer que $DNC(F)$ est de classe \mathcal{C}^∞ revient à montrer que l'application

$$\Omega_V^U \xrightarrow{\psi^{-1}} DNC(U, V) \xrightarrow{DNC(F)} DNC(U', V') \xrightarrow{\psi'} \Omega_{V'}^{U'}$$

est une application lisse. Ici, ψ et ψ' sont les cartes locales définies dans la section 2.1.1.1.

Or, justement, $\psi' \circ DNC(F) \circ \psi^{-1} = \tilde{F}$, et cette dernière est lisse. \square

Cas général. Soit maintenant (M, L) et (N, P) deux objets de \mathcal{C}_2^∞ , ainsi que $F : (M, L) \longrightarrow (N, P)$ une flèche entre ces objets (c'est à dire que $F(L) \subset P$).

DÉFINITION 2.1.5. *On définit l'application*

$$DNC(F) : DNC(M, L) \longrightarrow DNC(N, P) \text{ par :}$$

$$\begin{aligned} DNC(F)(m, t) &= (F(m), t) && \text{si } t = 0 \\ DNC(x, \xi, 0) &= (F(x), D_x^N F(\xi), 0) && \text{sinon,} \end{aligned}$$

où $D_x^N F : (N_L^M)_x \longrightarrow (N_P^N)_{F(x)}$ est l'application induite de la différentielle $D_x F$ de F sur le fibré normal au dessus de x .

PROPOSITION 2.1.3. *L'application*

$$DNC(F) : DNC(M, L) \longrightarrow DNC(N, P)$$

est lisse.

DÉMONSTRATION. En dehors de 0, on remarque que l'application est lisse.

Soit $(x, \xi, 0) \in DNC(M, L)$. On considère une carte locale $DNC(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ en $(x, \xi, 0)$ et une carte locale $DNC(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ en $(F(x), d_x^N F(\xi), 0)$. On se retrouve dans le cadre du début de la section 2.1.2, ce qui nous donne le résultat. \square

On a bien construit ici un foncteur DNC de la catégorie \mathcal{C}_2^∞ vers la catégorie des variétés \mathcal{C}^∞ . Donnons maintenant une propriété du foncteur, qui permet à l'image $DNC(F)$ d'une flèche d'hériter des propriétés de celle-ci. Il s'agit de la proposition 3.2.5 de [CR07].

PROPOSITION 2.1.4. *Soient (M, L) et (N, P) deux objets de \mathcal{C}_2^∞ , et $F : (M, L) \longrightarrow (N, P)$ une flèche de \mathcal{C}_2^∞ . On peut alors construire*

$$DNC(F) : DNC(M, L) \longrightarrow DNC(N, P)$$

et on a les propriétés suivantes :

- $DNC(F)$ est une immersion si et seulement si $F : M \longrightarrow N$ et $d_N F : N_L^M \longrightarrow N_P^N$ sont des immersions.
- $DNC(F)$ est une submersion si et seulement si $F : M \longrightarrow N$ et $d_N F : N_L^M \longrightarrow N_P^N$ sont des submersions.
- Si $G : (N, P) \longrightarrow (B, Q)$ est une autre flèche de \mathcal{C}_2^∞ , on a :

$$DNC(G \circ F) = DNC(G) \circ DNC(F).$$

PROPOSITION 2.1.5. *Soit (M, L) un objet de \mathcal{C}_2^∞ . La functorialité de la déformation au cône normal nous donne l'existence d'un morphisme d'évaluation lisse*

$$p : DNC(M, L) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

DÉMONSTRATION. La functorialité de la déformation au cône normal appliqué à la flèche inclusion de \mathcal{C}_2^∞ :

$$(M, L) \longrightarrow (M, M)$$

donne l'application lisse :

$$DNC(M, L) \longrightarrow M \times \mathbb{R}$$

et la projection sur la deuxième variable nous donne l'application lisse p . \square

Dans la suite, on sera amené à "restreindre" cette déformation au cône normal à des sous-variétés (possiblement à bord). Par restreindre à la sous-variété I de \mathbb{R} , on entend :

$$DNC(M, L)|_I := p^{-1}(I).$$

On obtient directement une structure de variété sur la restriction $DNC(M, L)|_I$ car p est une submersion. Si I est une variété à bord, alors il en est de même pour $DNC(M, L)|_I$. Dans la suite, on va entre-autre restreindre la déformation à l'intervalle $[0, 1]$ pour pouvoir obtenir des théorèmes de l'indice.

EXEMPLE 2.1.3. Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel lisse et $F \xrightarrow{\pi} L$ un sous-fibré vectoriel lisse. Alors, par functorialité, on obtient une flèche :

$$DNC(E, F) \xrightarrow{DNC(\pi)} DNC(M, L) .$$

Cette application se restreint au fibré normal $N_F^E = T_F E / TF$ en l'application

$$d^N \pi : N_F^E \longrightarrow N_L^M$$

Comme E est un fibré vectoriel, on peut identifier les fibres de son espace tangent : pour $x \in E$, on a $T_x E \simeq T_{\pi(x)} M \times E_x$ et $d\pi$ devient la projection sur la première variable. De même, si $x \in L$, $T_x F \simeq T_{\pi(x)} L \times F_x$. On peut alors réécrire l'application ci-dessus comme le fibré vectoriel $T_L M / TL \times E / F \xrightarrow{d^N \pi} T_L M / TL$, et ici aussi, $d^N \pi$ est la projection sur la première variable.

2.1.3. Groupoïde adiabatique. Etant donné un groupoïde de Lie $G \rightrightarrows M$, il s'agit de faire la déformation au cône normal de G par rapport à l'image $u(M)$ des unités M par l'immersion $u : M \longrightarrow G$. Par la suite, on identifiera, comme il est coutume de faire, l'espace des unités $u(M)$ avec l'espace des objets M . Cette construction est naturelle comme nous allons le voir dans cette section.

DÉFINITION 2.1.6. Soit $G \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie. On définit le groupoïde adiabatique associé, noté G^{ad} , comme étant le groupoïde de Lie dont l'ensemble des flèches est $DNC(G, M)$, déformation au cône normal de G par rapport à M , l'ensemble des unités est $M \times \mathbb{R}$, et la structure de groupoïde est la suivante :

— l'application source s^{ad} est définie par

$$\begin{aligned} s^{ad}(x, \xi, 0) &= (x, 0) \\ s^{ad}(\gamma, t) &= (s(\gamma), t) \text{ pour } t \neq 0 \end{aligned}$$

— l'application but r^{ad} est définie par

$$\begin{aligned} r^{ad}(x, \xi, 0) &= (x, 0) \\ r^{ad}(\gamma, t) &= (r(\gamma), t) \text{ pour } t \neq 0 \end{aligned}$$

— la composition m^{ad} est définie par

$$\begin{aligned} m^{ad}((x, \xi, 0), (x, \mu, 0)) &= (x, \xi + \mu, 0) \\ m^{ad}((\gamma, t), (\delta, t)) &= (m(\gamma, \delta), t) \quad \text{pour } t \neq 0 \text{ et } r(\delta) = s(\gamma) \end{aligned}$$

On note alors $G^{ad} := DNC(G, M) = A(G) \sqcup G \times \mathbb{R}^*$.

REMARQUE. De cette structure de groupoïde, on peut déduire les applications suivantes :

— l'application unité u^{ad} :

$$\begin{aligned} u^{ad}(x, 0) &= (x, 0, 0) \\ u^{ad}(x, t) &= (u(x), t) \text{ pour } t \neq 0 \end{aligned}$$

— l'application inverse i^{ad} :

$$\begin{aligned} i^{ad}(x, \xi, 0) &= (x, -\xi, 0) \\ i^{ad}(\gamma, t) &= (i(\gamma), t) \text{ pour } t \neq 0. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.1.6. *On muni naturellement l'espace des flèches G^{ad} d'une structure de variété différentielle induite de la déformation au cône normal. Avec cette structure de variété, le groupoïde adiabatique est un groupoïde de Lie.*

DÉFINITION 2.1.7 (Action de \mathbb{R}^*). *Soit un groupoïde de Lie $G \rightrightarrows M$. Alors, on peut définir une action naturelle de \mathbb{R}^* sur le groupoïde adiabatique associé.*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^* \times G^{tan} &\longrightarrow G^{tan} \\ (\lambda, \gamma, t) &\longmapsto (\gamma, \lambda t) \\ (\lambda, x, \xi, 0) &\longmapsto (x, \xi/\lambda, 0) \end{aligned}$$

2.1.4. Groupoïde normal. Soient $G \rightrightarrows L$ un groupoïde de Lie au dessus de la variété L et $H \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie au dessus de la variété M , d'algébroïdes de Lie respectives AG et AH .

On considère une immersion de groupoïdes de Lie $\phi : G \longrightarrow H$ telle que $\phi(G)$ soit une sous-variété localement fermée de H . On obtient une application injective induite au niveau des algébroïdes de Lie $\phi^A : AG \longrightarrow AH$.

On se propose de définir le groupoïde normal associé à l'immersion ϕ , puis de lui donner une structure lisse compatible.

DÉFINITION 2.1.8. *On va définir ce groupoïde de Lie comme la déformation au cône normal associée à l'immersion $\phi : G \longrightarrow H$. On obtient alors,*

$$DNC(H, G) = TH/TG \times \{0\} \bigsqcup H \times \mathbb{R}^*$$

un groupoïde de Lie au dessus de $DNC(M, L)$.

La structure de variété est alors donnée par la section 2.1. On rappelle ici la construction.

On note $N := TH/TG$ le fibré normal à ϕ . Soit Ω un voisinage de G dans N , et U , un voisinage de $\phi(G)$ dans H . On peut introduire une application exponentielle $\theta : \Omega \longrightarrow U$ induite d'une structure riemannienne sur G . Localement, on peut écrire : $\theta(\gamma, \xi) = (\gamma, y)$ où y est la composante transverse à $\phi(G)$ dans son voisinage U .

Soit $A_\Omega := \{(\gamma, \xi, t) / \xi \in N, t \in \mathbb{R}, t\xi \in \Omega\}$ un ouvert de $N \times \mathbb{R}$
 et $B_\Omega := \pi^{-1}(\pi(\Omega)) \cup (U \times \mathbb{R}^*)$ un ouvert de $DNC(H, G)$.

On définit Θ , une bijection entre ces deux ensembles comme suit :

$$\Theta(\gamma, \xi, t) = \begin{cases} (\gamma, \xi, 0) & \text{si } t = 0 \\ (\theta(\gamma, t\xi), t) & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

On a ainsi construit des cartes locales (Ω, Θ) [HS87].

2.2. Théorème de l'indice pour une variété compacte

2.2.1. K-théorie. Nous recommandons le lecteur avide de savoirs sur la K -théorie de se référer entre autres à [Ati88],[Kar78]. Pour une étude plus ciblée sur le contexte qui nous intéresse ici, à savoir, la K -théorie des C^* -algèbres et la théorie de l'indice, voir [Kha09].

Les propositions suivantes sont des propriétés très utiles pour la suite, notamment pour les théorèmes de l'indice du chapitre 3, voir [WO93] et [Bla98]. Elles permettent de dire que le groupe K_0 de K -théorie algébrique d'un groupoïde de Lie libre et propre est le même que le groupe K^0 de K -théorie topologique de son espace d'orbite.

PROPOSITION 2.2.1. *Si $G \stackrel{\mathcal{M}}{\sim} H$ sont deux groupoïdes de Lie Morita équivalents, alors*

$$K_0(C^*(G)) \simeq K_0(C^*(H)).$$

PROPOSITION 2.2.2. *Soit M une variété différentiable, Alors, on a l'isomorphisme en K -théorie :*

$$K_0(C^*(M)) = K^0(M)$$

où M est vu à la fois comme le groupoïde identité et comme une variété.

2.2.2. Théorème de l'indice. Dans le cas du groupoïde des paires d'une variété lisse [Con79], et d'une variété à bord [CRLM14], des théorèmes de l'indice utilisant des groupoïdes de déformation ont été développés. Dans ces deux cas, il s'agit dans un premier temps de définir un morphisme d'indice pour le groupoïde étudié G , c'est à dire un morphisme en K -théorie :

$$K^*(A^*G) \longrightarrow K_*(G)$$

qui coïncide avec l'indice des opérateurs pseudo-différentiels. Ensuite, on définit un autre morphisme de K -théorie, dit topologique, qui quant à lui proviendra d'éléments purement topologiques. Une formule cohomologique a d'ailleurs été introduite dans les deux références ci-dessus pour calculer cet indice. Le théorème de l'indice consiste alors à prouver que ces deux indices sont les mêmes.

Pour faire cela, il y a un schéma commun aux deux cas, ainsi qu'au cas des familles développé dans le chapitre 3. Il s'agit de définir un groupoïde de déformation (le groupoïde tangent d'A. Connes) qui permet d'introduire le morphisme d'indice analytique comme la composée

$$K^*(A^*G) \xleftarrow[\simeq]{ev_0} K_*(C^*(G_{tan})) \xrightarrow{ev_1} K_*(C^*(G)) .$$

Ensuite, on applique les isomorphismes de Connes-Thom [Con79] introduit ci-après, et enfin on utilise les isomorphismes des groupes de K-théorie algébriques vers les groupes de K-théorie topologiques des espaces d'orbites respectifs.

Commençons donc par définir les isomorphismes de Connes-Thom.

2.2.2.1. Isomorphisme de Connes-Thom.

PROPOSITION 2.2.3. *Soit $G \xrightarrow[r]{s} M$ un groupoïde de Lie et $h : G \rightarrow \mathbb{R}^N$ un morphisme de groupoïdes de Lie de G vers le groupoïde du groupe additif \mathbb{R}^N .*

Considérons le groupoïde associé $G \times_h \mathbb{R}^N$, défini dans la section 1.1.2. On note :

$$G_h := G \times_h \mathbb{R}^N .$$

En K-théorie, si N est pair, on a l'isomorphisme naturel de Connes-Thom :

$$CT_h : K_0(C^*(G)) \longrightarrow K_0(C^*(G \times_h \mathbb{R}^N))$$

tel que,

- (i) *si $h \equiv 0$, alors $G \times_h \mathbb{R}^N = G \times \mathbb{R}^N$ et CT_0 est l'isomorphisme de Bott.*
- (ii) *si G est un espace, alors CT_h coïncide avec l'isomorphisme de Thom.*

Comme proposé dans [CRLM14] par Carrillo-Lescure-Monthubert, on va donner une construction explicite de l'isomorphisme de Thom afin de pouvoir l'utiliser.

Définissons d'abord un morphisme du groupoïde produit $G \times [0, 1]$ vers le groupoïde \mathbb{R}^N :

$$H : \begin{array}{ccc} G \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ (\gamma, t) & \longmapsto & th(\gamma) \end{array}$$

qui donne une homotopie entre le morphisme nul et le morphisme h .

On construit le groupoïde de Lie $G_H := (G \times [0, 1]) \times_H \mathbb{R}^N$ au dessus de $M \times [0, 1]$ comme le produit semi-direct du groupoïde produit

$G \times [0, 1]$ par \mathbb{R}^N . En rappelant la forme de l'application source $s_H(\gamma, t, X) = (s(\gamma), t, X + th(\gamma))$, on peut avancer que $(G_H)_{|t=0} = G \times \mathbb{R}^N$ et $(G_H)_{|t=1} = G_h$.

Nous pouvons maintenant énoncer le lemme suivant, correspondant au lemme 2.8 de [CRLM14].

LEMME. *Il y a un isomorphisme entre la restriction de G_H à $]0, 1]$ et le groupoïde produit $G_h \times]0, 1]$. Cela amène donc à la contractilité de $C^*((G_H)_{|]0,1]}) \simeq C^*(G_h \times]0, 1])$.*

DÉMONSTRATION. On définit le morphisme de groupoïdes de Lie suivant :

$$\begin{array}{ccc} G_h \times]0, 1] & \xrightarrow{\theta} & (G_H)_{|]0,1]} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M \times \mathbb{R}^N \times]0, 1] & \longrightarrow & M \times]0, 1] \times \mathbb{R}^N \end{array}$$

défini par $\theta(\gamma, X, t) = (\gamma, t, tX)$ au niveau des flèches, et $\theta(x, X, t) = (x, t, tX)$ au niveau des objets. Le fait qu'il soit un morphisme de groupoïdes de Lie ainsi que la construction de son inverse est immédiat. \square

Vient alors un résultat très classique dans la théorie de l'indice.

LEMME. *Le morphisme induit de la restriction e_0 à $M \times \{0\} \times \mathbb{R}^N$ en K -théorie est un isomorphisme, i.e. :*

$$K_0(C^*(G_H)) \xrightarrow[\simeq]{[e_0]} K_0(C^*(G \times \mathbb{R}^N)).$$

DÉMONSTRATION. L'ensemble $M \times \{0\} \times \mathbb{R}^N$ est un fermé saturé de $M \times [0, 1] \times \mathbb{R}^N$ par rapport à G_H , donc on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow C^*(G_h \times]0, 1]) \longrightarrow C^*(G_H) \xrightarrow{e_0} C^*(G \times \mathbb{R}^N) \longrightarrow 0$$

où e_0 est la complétion du morphisme de restriction à $M \times \{0\} \times \mathbb{R}^N$ sur l'ensemble des fonctions lisses à support compact de G_H .

Ainsi, on obtient la suite exacte longue en K -théorie associée à cette suite exacte courte :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C^*(G_h \times]0, 1])) & \longrightarrow & K_0(C^*(G_H)) & \xrightarrow{[e_0]} & K_0(C^*(G \times \mathbb{R}^N)) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(C^*(G \times \mathbb{R}^N)) & \longleftarrow & K_1(C^*(G_H)) & \longleftarrow & K_1(C^*(G_h \times]0, 1])) \end{array}$$

Or, comme $C^*(G_h \times]0, 1])$ est contractile, on obtient l'isomorphisme

$$K_0(C^*(G_H)) \xrightarrow[\simeq]{[e_0]} K_0(C^*(G \times \mathbb{R}^N)) .$$

□

Ainsi, on obtient un morphisme de déformation \mathcal{D}_h , en faisant la composition

$$\mathcal{D}_h : K_0(C^*(G \times \mathbb{R}^N)) \xrightarrow{[e_0]^{-1}} K_0(C^*(G_H)) \xrightarrow{[e_1]} K_0(C^*(G_h)) .$$

DÉFINITION 2.2.1. *On peut alors définir le morphisme de Connes-Thom CT_h associé au morphisme de groupoïdes de Lie h comme étant la composition des morphismes suivants :*

$$\begin{array}{ccc} K_0(C^*(G)) & \xrightarrow{CT_h} & K_0(C^*(G_h)) \\ & \searrow \text{Bott} & \nearrow \mathcal{D}_h \\ & K_0(C^*(G \times \mathbb{R}^N)) & \end{array}$$

Par construction, il est naturel, et il généralise l'isomorphisme de Bott, dans le sens où si $h \equiv 0$, $CT_0 = \text{Bott}$.

COROLLAIRE 2.2.1. *Considérons le groupoïde adiabatique $DNC(G, M)$ au dessus de $M \times \mathbb{R}$ associé à G , et nommons G^{tan} sa restriction au fermé saturé $M \times [0, 1]$. Cette construction étant naturelle, nous pouvons aussi appliquer le foncteur DNC au morphisme h , pour obtenir un morphisme de groupoïdes de Lie de G^{tan} vers $DNC(\mathbb{R}^N, \{0\}) = \mathbb{R}^N \times [0, 1]$ puis projeter sur la première variable. On obtient alors un morphisme*

$$h^T : G^{\text{tan}} \longrightarrow \mathbb{R}^N .$$

qui se restreint en deux morphismes remarquables

$$\begin{array}{ccc} AG & & \\ \uparrow e_0 & \searrow h_0 & \\ G^{\text{tan}} & \xrightarrow{h^T} & \mathbb{R}^N \\ \downarrow e_1 & \nearrow h & \\ G & & \end{array}$$

On lui associe, comme plus haut, le produit semi-direct $G^{\text{tan}} \rtimes_{h^T} \mathbb{R}^N$.

Remarquons que l'on peut évaluer ici aussi les éléments de $C^*(G^{\text{tan}})$ en 0 ou en 1, afin d'obtenir les morphismes "évaluation" suivants :

$$C^*(AG) \xleftarrow{e_0} C^*(G^{\text{tan}}) \xrightarrow{e_1} C^*(G)$$

De même, on évalue les éléments de $C^*(G^{tan} \times_{h_T} \mathbb{R}^N)$:

$$C^*(AG \times_{h_0} \mathbb{R}^N) \xleftarrow{e_0} C^*(G^{tan} \times_{h_T} \mathbb{R}^N) \xrightarrow{e_1} C^*(G \times_h \mathbb{R}^N)$$

Enfin, la naturalité du morphisme de Connes-Thom nous donne la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C^*(AG)) & \xleftarrow{[e_0]} & K_0(C^*(G^{tan})) & \xrightarrow{[e_1]} & K_0(C^*(G)) \\ \simeq \downarrow C_{Th_0} & & \simeq \downarrow C_{Th_T} & & \simeq \downarrow C_{Th} \\ K_0(C^*(AG \times_{h_0} \mathbb{R}^N)) & \xleftarrow{[e_0]} & K_0(C^*(G^{tan} \times_{h_T} \mathbb{R}^N)) & \xrightarrow{[e_1]} & K_0(C^*(G \times_h \mathbb{R}^N)). \end{array}$$

2.2.2.2. *Théorème de l'indice.* Afin de construire l'indice topologique associé à la géométrie de G , il serait bien de pouvoir envoyer nos groupes de K -théorie des C^* -algèbres sur des groupes de K -théorie topologique. Il y a un isomorphisme de groupe très pratique pour faire ce lien :

$$K_0(C_0(H)) \simeq K^0(H)$$

où H est un espace (groupoïde identité, voir 1.1.2.2) , et $C_0(H)$ est l'algèbre des fonctions sur H qui s'annulent à l'infini, muni de la multiplication ponctuelle en guise de convolution.

Premièrement, comme AG est un fibré vectoriel, on peut appliquer l'isomorphisme de Fourier

$$\mathcal{F} : (C^*(AG), *) \longrightarrow (C_0(A^*G), \cdot)$$

qui envoie la C^* -algèbre de l'algèbroïde de Lie vue comme groupoïde de Lie AG , sur l'algèbre des fonctions continues sur son dual qui s'annulent à l'infini. Il envoie également la convolution du premier ensemble sur la multiplication ponctuelle du deuxième.

Cet isomorphisme induit un isomorphisme en K -théorie :

$$K_0(C^*(AG)) \xrightarrow{\simeq} K_0(C_0(A^*G)) \xrightarrow{\simeq} K^0(A^*G).$$

Ensuite, on peut également utiliser la proposition 2.2.1, en montrant que les groupoïdes de produit semi-directs de la ligne du bas du diagramme précédent sont Morita-équivalents à des groupoïdes identité (aussi appelés "espaces"). Pour ce faire, il suffirait que ces groupoïdes en question soient libres et propres et on pourrait appliquer la proposition 1.1.5 pour dire qu'ils sont Morita-équivalents à leur espace d'orbite. On aurait alors, si $G \rightrightarrows M$ est libre et propre,

$$K_0(C^*(G)) \xrightarrow{\simeq} K_0(C_0(Orb_G(M))) \xrightarrow{\simeq} K^0(Orb_G(M)).$$

2.2.2.3. *Théorème de l'indice pour une variété compacte lisse.* Voici donc une idée des constructions de Connes [Con79] pour énoncer le théorème de l'indice en utilisant le groupoïde des paires d'une variété compacte lisse.

Ici, le groupoïde de Lie étudié est donc le groupoïde des paires $M \times M$. On rappelle que son algébroïde de Lie est le fibré tangent TM muni du crochet de Lie usuel sur l'ensemble de ses sections. On rappelle également que le groupoïde tangent du groupoïde des paires est le suivant :

$$G_{tan} = TM \times \{0\} \bigsqcup [M \times M \times]0, 1]$$

qui est muni des évaluations en 0 et en 1 (entre autres), notées respectivement e_0 et e_1 .

DÉFINITION 2.2.2. *L'indice analytique de M est le morphisme en K -théorie suivant :*

$$Ind_a : K^0(T^*M) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

défini comme étant la composée des applications :

- l'inverse du morphisme induit en K -théorie de l'isomorphisme de Fourier des C^* -algèbres :

$$\mathcal{F}^{-1} : K^0(T^*M) \longrightarrow K_0(C^*(TM)).$$

- l'inverse du morphisme induit en K -théorie de e_0 :

$$[e_0]^{-1} : K_0(C^*(TM)) \longrightarrow K_0(C^*(G_{tan})).$$

C'est un isomorphisme pour des raisons de contractilité.

- le morphisme induit en K -théorie de e_1 :

$$K_0(C^*(G_{tan})) \longrightarrow K_0(C^*(M \times M)).$$

- le morphisme induit du fait que le groupoïde des paires est Morita équivalent à un point

$$K_0(C^*(M \times M)) \longrightarrow K^0(\{\text{point}\}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Afin de définir le morphisme d'indice topologique, nous devons maintenant suivre plusieurs étapes. Plongeons d'abord M dans un espace \mathbb{R}^N , pour N pair. On note $j : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ce plongement.

On définit alors un morphisme de groupoïdes de Lie

$$\begin{aligned} h & : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x, y) & \longmapsto j(x) - j(y). \end{aligned}$$

Ce morphisme en induit un autre

$$h_0 := A(h) : TM \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

défini par $h_0(x, V) = d_x j(V)$ via application du foncteur A qui associe à un groupoïde de Lie son algébroïde de Lie (voir la section 1.2.4). De même, il induit un morphisme :

$$h^T = pr_1 \circ DNC(h) : G_{tan} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

via application du foncteur DNC qui est défini dans la section 2.1.7.

On obtient donc les isomorphismes de Connes-Thom suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
K_0(C^*(TM)) & \xleftarrow{[e_0]} & K_0(C^*(G_{tan})) & \xrightarrow{[e_1]} & K_0(C^*(M \times M)) \\
\downarrow \simeq \downarrow CT_{h_0} & & \downarrow \simeq \downarrow CT_{h_T} & & \downarrow \simeq \downarrow CT_h \\
K_0(C^*(TM \times_{h_0} \mathbb{R}^N)) & \xleftarrow{[e_0]} & K_0(C^*(G_{tan} \times_{h_T} \mathbb{R}^N)) & \xrightarrow{[e_1]} & K_0(C^*(M \times M \times_h \mathbb{R}^N)).
\end{array}$$

Introduisons la proposition suivante, afin de donner une autre ligne d'isomorphisme à ce diagramme.

PROPOSITION 2.2.4. *Le groupoïde de Lie $(M \times M) \times_h \mathbb{R}^N$ est libre et propre.*

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que ses groupes d'isotropie sont triviaux.

En effet, pour $(x, X) \in M \times \mathbb{R}^N$, son groupe d'isotropie est :

$$((M \times M) \times \mathbb{R}^N)_{(x, X)}^{(x, X)} = \{(x, x, X)\}$$

Le groupoïde est ainsi libre.

Montrons maintenant que c'est un groupoïde de Lie propre. Par définition, on montre que l'application lisse

$$(s, r) : (M \times M) \times \mathbb{R}^N \longrightarrow (M \times \mathbb{R}^N) \times (M \times \mathbb{R}^N)$$

est propre.

Une base des compacts de l'espace d'arrivé est constitué des produits de compacts $K \times B_a \times K' \times B_{a'}$, où K et K' sont des compacts de M et B_a est une notation pour la boule fermée centrée en 0 de rayon $a > 0$. On va donc prouver le résultat pour un élément de cette base de compacts.

Soit $F = K \times B_a \times K' \times B_{a'}$ un compact de l'espace d'arrivée.

Alors

$$\begin{aligned}
(s, r)^{-1}(F) &= \{(x, y, X) \mid (x, X + j(x) - j(y)) \in K \times B_a \\
&\quad \text{et } (y, X) \in K' \times B_{a'}\}
\end{aligned}$$

Ainsi , on a

$$(s, r)^{-1}(F) \subset \{(x, y, X) \mid x \in K, y \in K' \text{ et } \|X\| < a'\} \subset K \times K' \times B_{a'}.$$

Donc $(s, r)^{-1}(F)$ étant un fermé (par continuité de (s, r)) dans un compact, il est compact, ce qui prouve que le groupoïde de Lie est propre. \square

PROPOSITION 2.2.5. *Le groupoïde de Lie $TM \times \mathbb{R}^N$ est libre et propre.*

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que ses groupes d'isotropie sont triviaux.

En effet, pour $(x, X) \in M \times \mathbb{R}^N$, son groupe d'isotropie est :

$$(TM \times \mathbb{R}^N)_{(x, X)}^{(x, X)} = \{(x, V, X) \mid X + d_x j(V) = X\}.$$

Or, comme $j : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une immersion (c'est même un plongement), on peut réécrire les groupes d'isotropies :

$$(TM \times \mathbb{R}^N)_{(x, X)}^{(x, X)} = \{(x, 0, X)\}.$$

Le groupoïde est donc libre.

Montrons maintenant que c'est un groupoïde de Lie propre. Par définition, on montre que l'application lisse

$$(s, r) : TM \times \mathbb{R}^N \longrightarrow (M \times \mathbb{R}^N) \times (M \times \mathbb{R}^N)$$

est propre. Pour ce faire, on choisit une métrique sur TM telle que $d_x j$ soit une isométrie pour tout $x \in M$.

De même que dans la proposition précédente, une base des compacts de l'espace d'arrivé est constitué des produits de compacts $K \times B_a \times K' \times B_{a'}$, où K et K' sont des compacts de M et B_a est une notation pour la boule fermée centrée en 0 de rayon $a > 0$. On va donc prouver le résultat pour un élément de cette base de compacts.

Soit $F = K \times B_a \times K' \times B_{a'}$ un compact de l'espace d'arrivée.

Alors

$$(s, r)^{-1}(F) = \{(x, V, X) \mid (x, X + d_x j(V)) \in K \times B_a \text{ et } (x, X) \in K' \times B_{a'}\}$$

Ainsi , on a

$$(s, r)^{-1}(F) \subset \{(x, V, X) \mid x \in K, x \in K', \|X + d_x j(V)\| < a \text{ et } \|X\| < a'\},$$

d'où

$$(s, r)^{-1}(F) \subset K \times K' \times B_{a+a'}.$$

Donc $(s, r)^{-1}(F)$ étant un fermé (par continuité de (s, r)) dans un compact, il est compact, ce qui prouve que le groupoïde de Lie est propre. \square

Ainsi, nous pouvons dire que les groupoïde de Lie $(M \times M) \times \mathbb{R}^N$ et $TM \times \mathbb{R}^N$ sont Morita équivalents à leur espace d'orbite, de même pour $G_{tan} \times \mathbb{R}^N$ par functorialité.

PROPOSITION 2.2.6. *Nous avons les identifications des espaces d'orbites suivantes :*

- L'espace d'orbite $Orb_{M \times M \times \mathbb{R}^N}(M \times \mathbb{R}^N)$ est \mathbb{R}^N .
- L'espace d'orbite $Orb_{TM \times \mathbb{R}^N}(M \times \mathbb{R}^N)$ est le fibré normal $T\mathbb{R}^N/TM$ associé à l'immersion j .

- Par functorialité, l'espace d'orbite $Orb_{G_{tan} \times \mathbb{R}^N}(M \times [0, 1] \times \mathbb{R}^N)$ est la déformation au cône normal $DNC(\mathbb{R}^N, M)$ induite de l'immersion j .

DÉFINITION 2.2.3. On définit ainsi un morphisme d'indice topologique

$$Ind_t : K^0(T^*M) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

comme la composée des morphismes en K -théorie suivants :

- le morphisme de Thom

$$Thom : K^0(T^*M) \longrightarrow K^0(T\mathbb{R}^N/TM)$$

associé aux fibrés

$$T^*M \longrightarrow M \longleftarrow T\mathbb{R}^N/TM$$

- le morphisme composé

$$K^0(T\mathbb{R}^N/TM) \xleftarrow{\simeq} K^0(DNC(\mathbb{R}^N, M)) \longrightarrow K^0(\mathbb{R}^N)$$

qui coïncide avec le push-forward $j!$ de j ,

- et l'inverse du morphisme de Bott du groupoïde réduit à un point :

$$Bott^{-1} : K^0(\mathbb{R}^N) \longrightarrow K^0(\{point\}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Maintenant que l'on a défini tous les éléments requis, on peut énoncer le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer :

THÉORÈME 2.2.1. L'indice analytique et l'indice topologique de M sont égaux. C'est à dire :

$$Ind_a = Ind_t.$$

DÉMONSTRATION. En effet, cette section prouve que le diagramme suivant est commutatif, et ce dernier clos la démonstration.

$$\begin{array}{ccccccc}
 K_*(T^*M) & \xleftarrow[\simeq]{\mathcal{F}} & K_*(TM) & \xleftarrow{e_0} & K_*(G_{tan}) & \xrightarrow{e_1} & K_*(M \times M) \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathbb{Z} \\
 & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 & & K_*(H_0) & \xleftarrow[\simeq]{e_0} & K_*(H_T) & \xrightarrow[\simeq]{e_1} & K_*(H_1) \\
 & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 & & K_*(T\mathbb{R}^N/TM) & \xleftarrow[\simeq]{e_0} & K_*(DNC(\mathbb{R}^N, M)) & \xrightarrow{e_1} & K_*(\mathbb{R}^N)
 \end{array}$$

Thom (courbe gauche) et Bott^{-1} (courbe droite)

où $H_T = G_{tan} \times \mathbb{R}^N$ et H_i pour $i = 0, 1$ sont ses évaluations en 0 et en 1. Elliot-Natsume-Nest montrent dans [ENN88] que l'isomorphisme de Connes-Thom comme proposé ici coïncide avec celui défini par Connes, généralisant l'isomorphisme de Thom dans [Con79]. \square

Blups de Debord-Skandalis

Le blow up, ou Blup, que l'on doit à C. Debord et G. Skandalis dans [DS17], est une construction très récente qui est le quotient d'une action de \mathbb{R}^* sur une déformation au cône normal. Elle peut être appliquée aux groupoïdes de Lie afin d'obtenir un groupoïde très particulier qui, on le verra dans cette section, va synthétiser une géométrie donnée. De plus, en s'appuyant sur la déformation au cône normal, on montrera que cette construction est fonctorielle.

3.1. Définition

PROPOSITION 3.1.1 (Action de \mathbb{R}^* sur la déformation au cône normal). *Soit (M, L) un couple de variétés C^∞ . L'application définie par*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^* \times DNC(M, L) &\longrightarrow DNC(M, L) \\ (\lambda, (y, t)) &\longmapsto (y, \lambda t) && \text{pour } t \neq 0 \\ (\lambda, (x, \xi, 0)) &\longmapsto ((x, \lambda^{-1}\xi), 0) && \text{sinon} \end{aligned}$$

est une action différentielle.

DÉMONSTRATION. En dehors de $t = 0$, l'action est très connue. Il s'agit de l'action par multiplication à gauche sur \mathbb{R}^* . Intéressons nous au cas proche de $t = 0$.

Soit $x \in L$ et \mathcal{U} un voisinage de x dans M . On pose $\mathcal{V} := \mathcal{U} \cap L$. On peut donc construire l'ouvert $DNC(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ de $DNC(M, L)$ qui va former une carte locale muni de l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} \Theta : \Omega_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} &\longrightarrow DNC(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \\ (x, \xi, t) &\longmapsto (\theta(x, t\xi), t), \end{aligned}$$

où on rappelle que $\theta : \Omega \longrightarrow U$ est un difféomorphisme entre un voisinage Ω de la section nulle du cône normal N_L^M et un voisinage U de L dans M qui est l'identité sur la section nulle. On rappelle également que

$$\Omega_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} := \{(x, \xi, t) \in N_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \mid \theta(x, t\xi) \in U\}.$$

Tout ceci étant dit, on peut écrire le diagramme trivialement commutatif suivant, qui va clore la démonstration :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \times DNC(\mathcal{U}, \mathcal{V}) & \longrightarrow & DNC(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \\ \text{id} \times \Theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ \mathbb{R}^* \times \Omega_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \Omega_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}. \end{array}$$

où la ligne du haut correspond à l'action définie dans la proposition tandis que la ligne du bas correspond à l'action de \mathbb{R}^* sur N_V^U par $\lambda.(x, \xi, t) = (x, \lambda^{-1}\xi, \lambda t)$. \square

PROPOSITION 3.1.2. *L'action de \mathbb{R}^* sur l'ouvert*

$$\widetilde{DNC}(M, L) := DNC(M, L) \setminus (L \times \mathbb{R})$$

de la déformation au cône normal $DNC(M, L)$ est libre et propre.

DÉFINITION 3.1.1. *Soit (M, L) un couple de variétés lisses. On définit le Blup de Debord-Skandalis de L dans M par la variété quotient :*

$$Blup(M, L) = \widetilde{DNC}(M, L) / \mathbb{R}^*.$$

REMARQUE. *En fait, on peut réécrire ce quotient comme la réunion disjointe de la variété $M \setminus L$ et de l'espace total du fibré vectoriel $\mathbb{P}(N_L^M)$ de l'espace projectif du fibré normal du couple (M, L) .*

En effet, $\widetilde{DNC}(M, L) = (T_L M / TL) \setminus (L \times \{0\}) \bigsqcup M \setminus L \times \mathbb{R}^$ et si l'on étudie les espaces d'orbites de l'action de \mathbb{R}^* , on obtient le résultat :*

$$Blup(M, L) = \mathbb{P}(N_L^M) \bigsqcup M \setminus L.$$

EXEMPLE 3.1.1.

Soit N un entier. On va considérer le couple $(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N-1})$. D'après la remarque qui précède, le blow up associé à ce couple est la réunion disjointe entre l'espace projectif $\mathbb{P}(N_{\mathbb{R}^{N-1}}^{\mathbb{R}^N})$ et l'ouvert $\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^{N-1}$. Or, l'espace projectif est isomorphe à \mathbb{R}^{N-1} car les fibres sont triviales. Plongeons le donc dans \mathbb{R}^N par le plongement $x \mapsto (x, 0)$ et considérons l'application :

$$\begin{aligned} \pi : DNC(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N-1}) \setminus (\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \\ (x, y, t) &\longmapsto \begin{cases} (x, 0) & \text{si } t = 0 \\ (x, yt) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Tout d'abord, on remarque que π est lisse en tant que composée de la carte globale ψ définie dans la section 2.1.1.1 avec la fonction passage au quotient de $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^ \times \mathbb{R}$ par l'action $\lambda.(x, y, t) = (x, \lambda^{-1}y, \lambda t)$, c'est à dire l'application :*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x, y, t) &\longmapsto (x, yt). \end{aligned}$$

On remarque ensuite que π est surjective comme composée d'applications surjectives et on vérifie qu'elle passe au quotient :

$$\pi(x, y, t) = \pi(x, \lambda^{-1}y, \lambda t) = (x, yt) \text{ et } \pi(x, \lambda^{-1}y, 0) = \pi(x, y, 0) = (x, 0).$$

On obtient ainsi :

$$Blup(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N-1}) \simeq \mathbb{R}^N.$$

EXEMPLE 3.1.2. On considère un couple (M, L) où L est une hypersurface (sous-variété de codimension 1) de M munie d'une fonction de définition $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$. Il existe un voisinage U de L et une rétraction lisse $\pi : U \rightarrow L$ tels que l'on a le difféomorphisme

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow L \times \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (\pi(x), \rho(x)). \end{aligned}$$

Cela nous donne la décomposition de l'espace tangent en un point $x \in U$:

$$T_x M \simeq T_{\pi(x)} L \times T_{\rho(x)} \mathbb{R}.$$

Ainsi, pour $x \in L$, $T_x M \simeq T_x L \times T_0 \mathbb{R} \simeq T_x L \times \mathbb{R}$ et le fibré normal $T_L M / TL$ s'identifie au fibré trivial $L \times \mathbb{R}$.

Enfin,

$$\text{Blup}(M, L) = \mathbb{P}(T_L M / TL) \sqcup (M \setminus L) \simeq L \sqcup (M \setminus L) \simeq M.$$

3.2. Functorialité

DÉFINITION 3.2.1. Soit $f : (M, L) \rightarrow (N, P)$ une flèche de \mathcal{C}_2^∞ . Par functorialité de la déformation au cône normal, on peut définir une application lisse $DNC(f) : DNC(M, L) \rightarrow DNC(N, P)$.

On pose $U_f = DNC(M, L) \setminus DNC(f)^{-1}(P \times \mathbb{R})$. Comme l'action de \mathbb{R}^* commute avec f , on obtient par passage au quotient :

$$\text{Blup}(f) : \text{Blup}_f(M, L) \rightarrow \text{Blup}(N, P)$$

où $\text{Blup}_f(M, L) = U_f / \mathbb{R}^*$, définie par les formules :

$$\begin{aligned} \text{Blup}(f)(x) &= f(x) && \text{si } x \in (M \setminus L) \\ \text{Blup}(f)(x, [\xi]) &= (f(x), [d_x^N f(\xi)]) && \text{sinon.} \end{aligned}$$

REMARQUE. On vérifie que $L \times \mathbb{R} \subset DNC(f)^{-1}(P \times \mathbb{R})$, ce qui permet d'écrire sans encombres $DNC(f) : U_f \rightarrow DNC(N, P) \setminus (P \times \mathbb{R})$ avant de passer au quotient.

PROPOSITION 3.2.1. Soit $g : (M, L) \rightarrow (N, P)$ et $f : (N, P) \rightarrow (B, Q)$ deux flèches de \mathcal{C}_2^∞ .

Alors $\text{Im}(\text{Blup}(g)) \subset \text{Blup}_f$ et on a $\text{Blup}(f \circ g) = \text{Blup}(f) \circ \text{Blup}(g)$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Blup}_g(M, L) & \xrightarrow{\text{Blup}(f \circ g)} & \text{Blup}(B, Q) \\ & \searrow \text{Blup}(g) & \nearrow \text{Blup}(f) \\ & & \text{Blup}_f(N, P) \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, montrons que la composée de $Blup(f)$ et $Blup(g)$ est bien définie. Par functorialité de la déformation au cône normal, on a la composition $DNC(f \circ g)$ de morphisme de groupoïdes de Lie :

$$DNC(M, L) \xrightarrow{DNC(g)} DNC(N, P) \xrightarrow{DNC(f)} DNC(B, Q)$$

Les inclusions suivantes, provenant de la définition de morphisme de couple de variétés, nous permettent de passer chacune des applications séparément au quotient (après restriction) :

$$\begin{aligned} P \times \mathbb{R} &\subset DNC(f)^{-1}(Q \times \mathbb{R}) \\ L \times \mathbb{R} &\subset DNC(g)^{-1}(P \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

De même, $L \times \mathbb{R} \subset DNC(g)^{-1}(DNC(f)^{-1}(Q \times \mathbb{R})) = DNC(f \circ g)^{-1}(Q \times \mathbb{R})$ de manière immédiate.

D'où, avec la notation $U_g = DNC(M, L) \setminus DNC(g)^{-1}(P \times \mathbb{R})$ et $U = DNC(B, Q) \setminus (Q \times \mathbb{R})$, on a les restrictions :

$$U_{f \circ g} \xrightarrow{DNC(g)} U_f \xrightarrow{DNC(f)} U$$

On peut maintenant quotienter par l'action de \mathbb{R}^* qui est libre et propre sur U, U_f et $U_{f \circ g}$, pour donner le morphisme :

$$Blup(f \circ g) : Blup_{f \circ g}(M, L) \longrightarrow Blup_f(N, P) \longrightarrow Blup(B, Q).$$

On peut vérifier la formule du $Blup$ "en 0" :

$$\begin{aligned} Blup(f \circ g)(x, [\xi]) &= (f \circ g(x), [d_x^N(f \circ g)(\xi)]) \\ &= (f(g(x)), [d_{g(x)}^N f(d_x^N g(\xi))]) \\ &= Blup(f)(g(x), [d_x^N g(\xi)]) \\ &= Blup(f) \circ Blup(g). \end{aligned}$$

□

3.3. Blup de groupoïdes de Lie de Debord-Skandalis

On va utiliser ici la functorialité du Blup de Debord-Skandalis pour les variétés afin de construire un groupoïde de Lie en tant que Blow up de groupoïdes de Lie.

Soit $G \xrightarrow[r]{s} M$ un groupoïde de Lie, et $F \xrightarrow{r} L$ un sous-groupoïde de Lie fermé de G .

On sait que l'on peut alors construire le groupoïde normal associé :

$$DNC(G, F) \xrightarrow[DNC(r)]{DNC(s)} DNC(M, L).$$

Considérons le sous-groupoïde ouvert

$$\widetilde{DNC}(G, F) := DNC(G, F) \setminus (DNC(s)^{-1}(L \times \mathbb{R}) \cup DNC(r)^{-1}(L \times \mathbb{R}))$$

de $DNC(G, F)$, obtenu par restriction à l'ouvert saturé

$$DNC(M, L) \setminus (L \times \mathbb{R}).$$

PROPOSITION 3.3.1. *L'action de \mathbb{R}^* sur $\widetilde{DNC}(G, F)$ est libre et propre.*

Ainsi, l'ouvert $Blup_{r,s}(G, F) := \widetilde{DNC}(G, F)/\mathbb{R}^*$ de $Blup(G, F)$ est également une variété. La functorialité de la construction nous donne alors toute la structure de groupoïde de Lie, comme stipulé ci-après.

PROPOSITION 3.3.2. *$Blup_{r,s}(G, F)$ est un groupoïde de Lie au-dessus de $Blup(M, L)$, de source $Blup(s)$, de but $Blup(r)$, de composition $Blup(m)$, d'unité $Blup(u)$ et d'inverse $Blup(i)$.*

La functorialité de cette construction provient de celle de la déformation au cône normal de groupoïdes de Lie.

La proposition suivante, permet de voir l'algébroïde de Lie du Blup de groupoïdes de Lie comme un Blup. Pour plus de détails, voir [DS17].

PROPOSITION 3.3.3. *Les foncteurs A et $Blup$ commutent dans le sens suivant. Soit (G, F) un couple de groupoïdes de Lie comme dans la partie précédente. Alors, on a :*

$$A(Blup_{r,s}(G, F)) = Blup(A(G), A(F))$$

REMARQUE. *Cette proposition est très utile. En effet, elle peut s'interpréter de la façon suivante.*

Soit (M, L) un couple de variétés tel que L soit une sous-variété de M , et l'on se muni d'un algébroïde de Lie $A \rightarrow M$ au-dessus de M , et d'un algébroïde $B \rightarrow L$ au-dessus de L tels que $B \subset A|_L$.

Avec ces données, on sait que l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{s \text{ section de } A \text{ telle que } s_L \text{ soit une section de } B\}$$

est un module projectif de type fini, donc il correspond aux sections d'un algébroïde de Lie (aux sections d'un fibré vectoriel par Serre-Swan qui hérite des structures d'algébroïde de Lie de A et B). Cet algébroïde de Lie sera un bon moyen de modéliser la géométrie donnée par A et B mais il ne suffit pas car il ne donne que des informations infinitésimales. Il serait également bien de pouvoir l'intégrer en un groupoïde de Lie. C'est ici que la proposition entre en jeu. En fait, un algébroïde dont l'ensemble des sections est \mathcal{D} peut être $Blup(A, B) \rightarrow Blup(M, L)$, et la proposition dit qu'il peut être intégré en un groupoïde de Lie $Blup_{r,s}(G, F)$ si A et B sont eux-même intégrables en G et F respectivement.

EXEMPLE 3.3.1 (Groupoïde du b-calcul). *Considérons une variété M munie d'une sous-variété L de codimension 1. On suppose qu'il existe une fonction de définition $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ de L . C'est à dire que*

ρ est une submersion en 0 et on a $\rho^{-1}(0) = L$ et $\rho^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \overset{\circ}{M}$. On rappelle que dans ce cadre, $\text{Blup}(M, L) \simeq M$.

Considérons maintenant l'inclusion de groupoïdes de Lie :

$$L \times L \subset M \times M.$$

On en construit le *Blup* de groupoïdes de Lie :

$$\text{Blup}_{r,s}(M \times M, L \times L) \Longrightarrow M$$

que l'on va voir plus en détails.

Par construction, on décompose cet espace en la réunion disjointe entre l'espace quotient $(\tilde{N}_{L \times L}^{M \times M})_{/\sim}$ et la variété $\overset{\circ}{M} \times \overset{\circ}{M}$, où

$$\tilde{N}_{L \times L}^{M \times M} := N_{L \times L}^{M \times M} \setminus (d^N s^{-1}(L \times \{0\}) \cup d^N r^{-1}(L \times \{0\})).$$

et \sim représente l'action naturelle de \mathbb{R}^* sur la déformation au cône normal.

Plus spécifiquement, comme $N_{L \times L}^{M \times M} \simeq (L \times L) \times \mathbb{R}^2$ après trivialisation du fibré normal de l'inclusion $L \subset M$, on obtient une description détaillée de ce groupoïde de Lie :

$$\text{Blup}_{r,s}(M \times M, L \times L) \simeq L \times L \times \mathbb{R}^* \bigsqcup \overset{\circ}{M} \times \overset{\circ}{M}.$$

C'est le groupoïde du *b-calcul*. Les sections de son algébroïde de Lie sont les champs de vecteurs de TM tangents à TL sur L .

EXEMPLE 3.3.2. Soit M une variété, et L une sous-variété munie d'une fibration $\phi : L \rightarrow B$.

Une inclusion de groupoïdes de Lie est intéressante à considérer :

$$\begin{array}{ccc} L \times L & \longrightarrow & M \times M \\ \downarrow \phi & & \downarrow \\ L & \longrightarrow & M \end{array}$$

Elle va définir le groupoïde de Lie suivant :

$$\text{Blup}_{r,s}(M \times M, L \times L) \xrightarrow[\phi]{} M$$

qui a pour section d'algébroïde les champs de vecteurs de TM qui, restreints à L sont des sections de $T_\phi L$.

EXEMPLE 3.3.3. Soit L une sous-variété de M , on considère l'inclusion de groupoïdes de Lie

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & M \times M \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ L & \longrightarrow & M. \end{array}$$

Le groupoïde que l'on en tire

$$\text{Blup}_{r,s}(M \times M, L) \rightrightarrows M$$

aura pour section d'algèbroïde les champs de vecteurs de TM nuls sur L .

PROPOSITION 3.3.4. Soit G un groupoïde de Lie immergé dans un autre groupoïde de Lie H .

Alors les groupoïdes de Lie

$$\widetilde{DNC}(H, G) \times \mathbb{R}^* \rightrightarrows DNC(H^{(0)}, G^{(0)}) \setminus (G^{(0)} \times \mathbb{R})$$

et

$$\text{Blup}_{r,s}(H, G) \rightrightarrows \text{Blup}(H^{(0)}, G^{(0)})$$

sont Morita équivalents.

DÉMONSTRATION. On applique la proposition 1.1.1 pour l'action canonique de \mathbb{R}^* sur la déformation au cône normal qui, restreinte au sous-groupoïde de Lie saturé $\widetilde{DNC}(H, G)$ est libre et propre. \square

EXEMPLE 3.3.4. Soit $H \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie et $G \rightrightarrows L$ un sous-groupoïde de Lie de H . Alors, d'après la section 2.1.8, la déformation au cône normal associée au couple (H, G) s'écrit :

$$DNC(H, G) = N_G^H \times \{0\} \bigsqcup H \times \mathbb{R}^*,$$

où N_G^H est le fibré normal associé à l'immersion $G \longrightarrow H$. On peut alors écrire le groupoïde de Lie $\text{Blup}_{r,s}(H, G)$ comme la réunion disjointe de l'espace projectif $\mathbb{P}(N_G^H)$ et du sous-groupoïde de Lie ouvert H_U^U . On a noté ici $U := M \setminus L$.

$$\text{Blup}_{r,s}(H, G) = \mathbb{P}(N_G^H) \bigsqcup H_U^U.$$

3.4. Blups, b-groupoïdes et morphismes vers \mathbb{R}^N

Dans cette section et dans le reste de cette thèse on va supposer N pair.

Dans cette section, on va considérer une variété lisse \tilde{M} et une sous-variété L de codimension 1 définie par une fonction de définition¹

1. C'est à dire $L = \rho^{-1}(\{0\})$ et $d_x \rho(V) \neq 0$ for all $x \in L$ and $V \in T_x \tilde{M}$ vecteur non nul.

(distance au bord) $\rho : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Nous allons noter $M := \rho^{-1}(\mathbb{R}^+)$.

Nous allons ensuite considérer la situation suivante. Soit $G_2 \rightrightarrows \tilde{M}$ un groupoïde de Lie avec un sous groupoïde de Lie $G_1 \rightrightarrows L$. Nous supposons qu'il existe un morphisme de groupoïdes de Lie

$$h_2 : G_2 \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

avec $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ le groupoïde des paires compatible avec ρ dans le sens où la restriction de h_2 à $G_2|_M$ est un morphisme à valeurs dans $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$ et dont la restriction à G_1 donne un (sous-) morphisme $h_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1}$. Nous résumons cette situation dans le diagramme suivant

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} G_2 & \xrightarrow{h_2} & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ \uparrow & & \uparrow \\ G_1 & \xrightarrow{h_1} & \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1} \end{array}$$

où les flèches verticales représentent les inclusions de groupoïdes (on supposera toujours dans cette thèse, sauf indication du contraire que \mathbb{R}^{N-1} est identifié à $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ dans \mathbb{R}^N).

La functorialité du Blup nous donne de manière immédiate un morphisme de groupoïdes de Lie

$$(2) \quad \text{Blup}_{r,s}(G_2, G_1) \xrightarrow{\text{Blup}(h_2)} \text{Blup}_{r,s}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1})$$

Maintenant, on va considérer la restriction de ce morphisme à des groupoïdes définis de la manière suivante :

DÉFINITION 3.4.1. *Le b -groupoïde associé à un couple (G_2, G_1) comme ci-dessus est par définition la restriction à M de la composante s -connexe de $\text{Blup}_{r,s}(G_2, G_1)$. On le note par*

$$(3) \quad \Gamma_b(G_2, G_1) := \text{Blup}_{r,s}^c(G_2, G_1)|_M \rightrightarrows M$$

où $\text{Blup}_{r,s}^c(G_2, G_1)$ est le groupoïde composante s -connexe de $\text{Blup}_{r,s}(G_2, G_1)$.

Nous allons considérer ensuite le morphisme de groupoïdes de Lie

$$(4) \quad \Gamma_b(G_2, G_1) \xrightarrow{h} \mathbb{R}^N,$$

où \mathbb{R}^N est vu comme groupe additif et donné par la composé de $\Gamma(h_2) := \text{Blup}(h_2)|_{\Gamma_b(G_2, G_1)}$ suivi du morphisme de groupoïde de Lie

$$(5) \quad \Gamma_b(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1}) \xrightarrow{h_N} \mathbb{R}^N,$$

défini en (3.4) dans [CRLM14] et donné explicitement par les formules suivantes :

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^{N-1}$,

$$h_N(x, y) = (x_{N-1} - y_{N-1}, \log(\frac{x_N}{y_N}))$$

où $a = (a_{N-1}, a_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$, et pour $(a, b, \alpha) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$h_N(a, b, \alpha) = (a - b, \log(\alpha)).$$

Nous pouvons donc considérer le groupoïde produit semi-direct

$$(6) \quad \Gamma_b(G_2, G_1) \times_h \mathbb{R}^N \rightrightarrows M \times \mathbb{R}^N.$$

Nous allons nous intéresser dans la suite à certains cas de couples (G_2, G_1) comme ci-dessus pour lesquels on ait des morphismes vers $(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1})$ tels que le groupoïde produit semi-direct (6) soit libre et propre. Le résultat suivant est dans cette direction. Il nous permettra dans le chapitre 4 de calculer topologiquement les groupes de K-théorie associés à ces Blups et encore plus de calculer topologiquement des morphismes d'indice. Mais avant cela, un peu de terminologie s'impose.

On rappelle ce que l'on entend par morphisme injectif de groupoïdes de Lie :

DÉFINITION 3.4.2. *Un morphisme de groupoïdes de Lie $h : G \longrightarrow H$ est injectif si $h(\gamma) = x$ avec x une unité de H implique que γ est une unité de G .*

REMARQUE. *Un morphisme de groupoïdes de Lie injectif n'est pas forcément injectif en tant que morphisme d'ensemble. Ce sont deux notions différentes.*

DÉFINITION 3.4.3. *Considérons une donnée comme ci-dessous*

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} G_2 & \xrightarrow{h_2} & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ \uparrow & & \uparrow \\ G_1 & \xrightarrow{h_1} & \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1} \end{array}$$

Nous notons par (G_2, G_1, h_2, h_1) cette donnée. Nous allons dire que le quadruplé est *b-principal* si le morphisme

$$(8) \quad \Gamma_b(G_2, G_1) \xrightarrow{\Gamma(h_2)} \Gamma_b(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1})$$

est un morphisme fermé et injectif en tant que morphisme de groupoïdes de Lie.

PROPOSITION 3.4.1. *Supposons que nous avons un quadruplé (G_2, G_1, h_2, h_1) b-principal comme ci-dessus. Alors le groupoïde produit semi-direct*

$$\Gamma_b(G_2, G_1) \times_h \mathbb{R}^N$$

est un groupoïde de Lie libre et propre.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse le morphisme h , défini comme la composée

$$\Gamma_b(G_2, G_1) \xrightarrow{\Gamma(h_2)} \Gamma_b(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1}) \xrightarrow{h_N} \mathbb{R}^N$$

est un morphisme injectif en tant que morphisme de groupoïdes de Lie et donc le groupoïde $\Gamma_b(G_2, G_1) \times_h \mathbb{R}^N$ est libre.

Il reste donc à montrer, d'après le critère de Tu 1.1.4, que l'application

$$\Gamma_b(G_2, G_1) \times_h \mathbb{R}^N \xrightarrow{(r,s)} (M \times \mathbb{R}^N) \times (M \times \mathbb{R}^N)$$

est fermé sachant que l'application analogue pour le groupoïde $\Gamma_b(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1}) \times_{h_N} \mathbb{R}^N$ l'est (d'après le lemme 3.3 dans [CRLM14] le groupoïde

$$\Gamma_b(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1}) \times_{h_N} \mathbb{R}^N$$

est libre et propre) et que $\Gamma(h_2)$ est un morphisme fermé et injectif en tant que morphisme de groupoïdes de Lie.

On peut résumer cela dans la situation générale suivante. Soit

$$G \xrightarrow{\theta} H \xrightarrow{\phi} I$$

une composée de morphismes de groupoïdes de Lie avec θ morphisme fermé et injectif en tant que morphisme de groupoïdes de Lie, et tel que le groupoïde produit semi-direct $H \times_{\phi} I$ est libre et propre. Montrons que l'application

$$G \times_h I \xrightarrow{(r,s)} (G_0 \times_{I_0} I) \times (G_0 \times_{I_0} I)$$

est fermée, où $h = \phi \circ \theta$. Pour le faire, considérons le morphisme de groupoïdes

$$G \times_h I \xrightarrow{\tilde{\theta}} H \times_{\phi} I$$

donnée par $\tilde{\theta}(\gamma, \iota) = (\theta(\gamma), \iota)$ et $\tilde{\theta}_0(x, \iota) = ((\theta_0(x), \iota))$ pour $(\gamma, \iota) \in G \times_h I$ et $(x, \iota) \in G_0 \times_{I_0} I$. Nous avons le diagramme commutatif suivant de fonctions continues

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} G \times_h I & \xrightarrow{(r,s)} & (G_0 \times_{I_0} I) \times (G_0 \times_{I_0} I) \\ \downarrow \tilde{\theta} & & \downarrow \tilde{\theta}_0 \times \tilde{\theta}_0 \\ H \times_{\phi} I & \xrightarrow{(r,s)} & (H_0 \times_{I_0} I) \times (H_0 \times_{I_0} I) \end{array}$$

avec la fonction verticale de gauche et la fonction horizontale du bas fermées, ainsi que la fonction verticale de droite injective. Un calcul

élémentaire montre que la fonction horizontale du haut est fermée. Ceci conclut la démonstration. \square

L'Intérêt d'avoir des groupoïdes libres et propres dans cette thèse sera de pouvoir calculer des indices via des groupes de K -théorie topologique des espaces topologiques (même des variétés dans notre contexte). On peut donner déjà un exemple de résultat dans cette direction :

COROLLAIRE 3.4.1. *Soit (G_2, G_1) un couple formé d'un groupoïde de Lie G_2 et d'un sous-groupoïde de Lie G_1 comme ci-dessus. Supposons qu'il existe un couple de morphismes (h_2, h_1) dans $(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1})$ tel que (G_2, G_1, h_2, h_1) est b -principal, alors l'espace d'orbites $Orb(\Gamma_b(G_2, G_1) \times_h \mathbb{R}^N)$ est une variété C^∞ à bord et on a un isomorphisme (l'isomorphisme de Connes-Thom) :*

$$K_*(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1))) \approx K_{top}^*(Orb(\Gamma_b(G_2, G_1) \times_h \mathbb{R}^N)).$$

Dans la suite nous allons calculer aussi des morphismes d'indice, il va donc falloir calculer aussi des groupes de K -théorie des groupoïdes produit semi-directs associés aux groupoïdes tangents et/ou de déformation.

En fait, si \mathcal{G} est un groupoïde de Lie muni d'un morphisme de groupoïdes de Lie $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^N$, alors, par functorialité, on a un morphisme de groupoïdes de Lie $h^T : \mathcal{G}^{tan} \rightarrow \mathbb{R}^N$ donné par la composition du morphisme tangent h^{tan} suivi de la projection $\mathbb{R}^N \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ (une fois $(\mathbb{R}^N)^{tan}$ identifié à $\mathbb{R}^N \times [0, 1]$). Dans le cadre des b -groupoïdes ci-dessus, on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.4.2. *Pour un quadruplé (G_2, G_1, h_2, h_1) b -principal comme ci-dessus, on a que le groupoïde*

$$(10) \quad \Gamma_b(G_2, G_1)^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N$$

est libre et propre.

DÉMONSTRATION. La proposition précédente donne que

$$\Gamma_b(G_2, G_1) \times_h \mathbb{R}^N$$

est libre et propre.

Maintenant, un calcul direct (analogue à celui du lemme 3.4 dans [CRLM14]) donne que $(AG_2, AG_1, A(h_2), A(h_1))$ est b -principal et donc

$$\Gamma_b(AG_2, AG_1) \times_{\Gamma_b(A(h_2))} \mathbb{R}^N,$$

ou encore (d'après la proposition 3.3.3)

$$A(\Gamma_b(G_2, G_1)) \times_{A(h)} \mathbb{R}^N$$

est libre et propre. Nous pouvons maintenant appliquer directement la proposition A.5 de [CRLM14]. \square

Plus généralement, on va s'intéresser dans le chapitre suivant aux couples (G_2, G_1) comme ci-dessus tels qu'on puisse trouver un morphisme

$$(11) \quad \Gamma_b(G_2, G_1) \xrightarrow{h} \mathbb{R}^N$$

tel que le groupoïde produit semi-direct

$$(12) \quad \Gamma_b(G_2, G_1)^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N \text{ soit libre et propre.}$$

Par ce qui précède, les quadruplés b-principaux fournissent des exemples de cette situation. Donnons à présent des exemples explicites des couples satisfaisant (12).

EXEMPLE 3.4.1. [”Manifolds with boundary”] Soit (\tilde{M}, L, ρ) comme dans le début de cette section. Soit

$$i_0 : \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}^{N-1}$$

un plongement fermé avec N pair, et soit $j : \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ donné par $j = (i_0, \rho)$. On définit le morphisme entre groupoïdes des paires

$$h_2 : \begin{array}{ccc} \tilde{M} \times \tilde{M} & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ (x, y) & \longmapsto & (j(x), j(y)). \end{array}$$

Il se restreint à $L \times L$ de manière naturelle en un morphisme h_1 vers $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1}$.

Un calcul direct permet de montrer que $(\tilde{M} \times \tilde{M}, L \times L, h_2, h_1)$ est b-principal.

EXEMPLE 3.4.2. [”Smooth families of Manifolds with boundary”] Soit M une variété C^∞ de bord C^∞ L définie par une fonction de définition $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}_+$. En considérant le double \tilde{M} de M le long du bord L , on peut se placer dans la situation des sections précédentes.

Soit $\phi : \tilde{M} \longrightarrow B$ une submersion de variétés différentielles telle que L hérite de la fibration définie par ϕ , c'est à dire que $\phi|_L : L \longrightarrow B$ est une submersion surjective.

Soit $j : \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ comme dans l'exemple précédent, alors la restriction de h_2 de l'exemple précédent (et de h_1) au sous-groupoïde $\tilde{M} \times_\phi \tilde{M}$ de $\tilde{M} \times \tilde{M}$ (au sous-groupoïde $L \times_\phi L$ de $L \times L$) donne un quadruplé b-principal $(\tilde{M} \times_\phi \tilde{M}, L \times_\phi L, h_2, h_1)$.

EXEMPLE 3.4.3. [”Closed subgroupoids”] En fait, le fait que l'exemple 3.4.2 donne bien un quadruplé b-principal s'obtient à partir de l'exemple 3.4.1. En effet, ceci entre dans le cadre plus général suivant.

Soit (G_2, G_1) comme ci-dessus et

$$(13) \quad \Gamma_b(G_2, G_1) \xrightarrow{h} \mathbb{R}^N$$

un morphisme tel que le groupoïde produit semi-direct

$$(14) \quad \Gamma_b(G_2, G_1)^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N$$

soit libre et propre.

Soit (G'_2, G'_1) un couple de sous-groupoïdes de (G_2, G_1) tel que le morphisme induit par les inclusions

$$(15) \quad \Gamma_b(G'_2, G'_1) \longrightarrow \Gamma_b(G_2, G_1)$$

soit un morphisme fermé et injectif en tant que morphisme de groupoïdes de Lie. Alors, d'après la preuve de la proposition 3.4.1, on obtient que

$$(16) \quad \Gamma_b(G'_2, G'_1)^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N$$

est libre et propre.

Nous finissons ce chapitre par un résultat/remarque qui est valable dans un contexte un peu plus général et qui nous sera très utile dans le chapitre suivant une fois appliqué à la situation précédente.

PROPOSITION 3.4.2. *Soit H un sous-groupoïde de Lie de \mathcal{G}^{tan} , alors le morphisme $f_H := h_H^T : H \longrightarrow \mathbb{R}^N$ induit une structure de sous-groupoïde de Lie sur $H \times_{f_H} \mathbb{R}^N$ de $\mathcal{G}^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N$. Si, de plus, $\mathcal{G}^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N$ est un groupoïde de Lie libre et propre et que H est un sous groupoïde de Lie saturé, alors $H \times_{h_H^T} \mathbb{R}^N$ est aussi libre et propre et on peut dire que l'espace d'orbites $Orb(H \times_{h_H^T} \mathbb{R}^N)$ est une sous-variété de $Orb(\mathcal{G}^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N)$.*

DÉMONSTRATION. La restriction de (r, s) à H reste une application fermée avec la topologie induite car H est un sous groupoïde de Lie saturé, et les groupes d'isotropie de $H \times_{h_H^T} \mathbb{R}^N$ sont des sous-groupes de Lie de ceux de $\mathcal{G}^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N$. H hérite par conséquent du caractère libre et propre du groupoïde dans lequel il est inclus. □

COROLLAIRE 3.4.3. *Dans le même contexte que la proposition précédente, si l'on considère l'isomorphisme de Connes-Thom en K -théorie :*

$$CT_{h^T} : K_0(C^*(\mathcal{G}^{tan})) \longrightarrow K_0(C^*(\mathcal{G}^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N)),$$

alors l'isomorphisme de Connes-Thom

$$CT_{h_H^T} : K_0(C^*(H)) \longrightarrow K_0(C^*(H \times_{h_H^T} \mathbb{R}^N)),$$

entre dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} K_0(C^*(H)) & \longleftarrow & K_0(C^*(\mathcal{G}^{tan})) \\ \begin{array}{c} \downarrow \simeq \\ CT_{f_H} \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \simeq \\ CT_f \end{array} \\ K_0(C^*(H \times_{f_H} \mathbb{R}^N)) & \longleftarrow & K_0(C^*(\mathcal{G}^{tan} \times_f \mathbb{R}^N)) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les morphismes induits en K -théorie par les restrictions.

Théorie de l'indice pour une classe de variétés singulières

4.1. Indice analytique et indice de Fredholm pour une immersion de groupoïdes de Lie

Soit

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\phi} & G_2 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ L & \longrightarrow & M \end{array}$$

une immersion de groupoïdes de Lie comme dans la section 3.4.

On va définir dans cette section un morphisme d'indice analytique et un morphisme d'indice de Fredholm.

On rappelle que l'on note $A\Gamma_b(G_2, G_1)$ l'algèbroïde de Lie de $\Gamma_b(G_2, G_1)$, et

$$\Gamma_b(G_2, G_1)^{tan} = A\Gamma_b(G_2, G_1) \times \{0\} \bigsqcup \Gamma_b(G_2, G_1) \times]0, 1]$$

son groupoïde tangent au dessus de $M \times [0, 1]$.

Les restrictions à $M \times \{0\}$ et $M \times \{1\}$ induisent des morphismes de C^* -algèbres

$$C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)^{tan}) \xrightarrow{e_0} C^*(A\Gamma_b(G_2, G_1))$$

et

$$C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)^{tan}) \xrightarrow{e_1} C^*(\Gamma_b(G_2, G_1))$$

sur lesquels on va appliquer le foncteur K_0 .

DÉFINITION 4.1.1. *On définit le morphisme d'indice analytique du groupoïde de Lie $\Gamma_b(G_2, G_1)$ comme le morphisme de groupes de K -théorie :*

$$Ind_a : K_0(C^*(A\Gamma_b(G_2, G_1))) \longrightarrow K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)))$$

obtenu par les compositions

$$\begin{array}{ccc} K_0(C^*(A\Gamma_b(G_2, G_1))) & \xleftarrow[\simeq]{e_0} & K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)^{tan})) \\ & & \downarrow e_1 \\ & & K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1))). \end{array}$$

où e_1 et e_2 sont les morphismes induits en K -théorie des morphismes de C^* -algèbre définis plus haut. On les note de la même manière par abus de notation.

On rappelle que dans cette section que L est de codimension 1. On identifie la variété $Blup(M, L)$ avec M en vertu de l'exemple 3.1.2.

LEMME. Posons $M_{\mathcal{F}} := (M \times [0, 1]) \setminus (L \times \{1\})$. Alors $M_{\mathcal{F}}$ est un ouvert saturé de $M \times [0, 1]$ pour le groupoïde $(\Gamma_b(G_2, G_1))^{tan}$.

DÉMONSTRATION. En effet, $(\Gamma_b(G_2, G_1)^{tan})_1 = \Gamma_b(G_2, G_1)$ et $\Gamma_b(G_2, G_1)|_L = \tilde{N}_{G_1}^{G_2}$. \square

On note $\Gamma_b(G_2, G_1)_{\mathcal{F}}$ la restriction de $\Gamma_b(G_2, G_1)^{tan}$ à l'ouvert saturé $M_{\mathcal{F}}$.

On va maintenant décomposer $M_{\mathcal{F}}$ en la réunion de l'ouvert $\overset{\circ}{M} \times]0, 1]$ et de son complémentaire fermé que l'on notera M_{∂} . Autrement dit :

$$M_{\mathcal{F}} = \overset{\circ}{M} \times]0, 1] \sqcup M_{\partial}.$$

LEMME. L'espace $M_{\partial} = M_{\mathcal{F}} \setminus (\overset{\circ}{M} \times]0, 1])$ est un fermé saturé de $M_{\mathcal{F}}$.

DÉMONSTRATION. Là aussi c'est immédiat par construction du $Blup$. \square

On définit maintenant l'algébroïde non-commutative associé à notre situation.

DÉFINITION 4.1.2. *Considérons*

$$(\Gamma_b(G_2, G_1)^{tan})_{|\overset{\circ}{M} \times]0, 1]} = \Gamma_b(G_2, G_1)_{\overset{\circ}{M}} \times]0, 1]$$

la restriction de $\Gamma_b(G_2, G_1)_{\mathcal{F}}$ à l'ouvert saturé $\overset{\circ}{M} \times]0, 1]$.

Son groupoïde complémentaire dans $\Gamma_b(G_2, G_1)_{\mathcal{F}}$ est appelé l'algébroïde non-commutative et est noté $A_{nc}\Gamma_b(G_2, G_1)$.

REMARQUE. Là aussi, les restrictions aux sous-ensembles saturés $M \times]0, 1]$ et M_∂ induisent des morphismes de C^* -algèbres

$$C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{e_\partial} C^*(A_{nc}\Gamma_b(G_2, G_1))$$

et

$$C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{e_\circ} C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)_{\overset{\circ}{M}})$$

sur lesquels on applique le foncteur K_0 . Le morphisme e_∂ induit un isomorphisme en K -théorie.

On obtient alors la possibilité de définir l'indice relatif à ces restrictions.

DÉFINITION 4.1.3. *Étant donné une immersion de groupoïdes de Lie $G_1 \rightarrow G_2$, introduisons le morphisme d'indice de Fredholm comme le morphisme en K -théorie :*

$$Ind_a^{\mathcal{F}} : K_0(C^*(A_{nc}\Gamma_b(G_2, G_1))) \rightarrow K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)_{\overset{\circ}{M}}))$$

obtenue par la composition $Ind_a^{\mathcal{F}} := e_\circ \circ e_\partial^{-1}$.

4.2. Calcul topologique pour l'indice de Fredholm et l'indice analytique pour un quadruplé \mathfrak{b} -principal

Afin de faire le calcul qui va suivre, on va raffiner les hypothèses sur notre immersion $\phi : G_1 \rightarrow G_2$. On suppose dans cette section qu'il existe un morphisme de groupoïdes de Lie

$$(17) \quad \Gamma_b(G_2, G_1) \xrightarrow{h} \mathbb{R}^N,$$

tel que le groupoïde produit semi-direct associé

$$(18) \quad \Gamma_b(G_2, G_1)^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N \rightrightarrows M \times \mathbb{R}^N.$$

soit libre et propre. Par exemple, d'après les résultats du chapitre précédent, les quadruplés (G_2, G_1, h_2, h_1) \mathfrak{b} -principaux fournissent des exemples de cette situation.

Dans l'idée de la section 2.3 de [CRLM14], on rappelle qu'on a un isomorphisme de Connes Thom

$$K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1))) \xrightarrow{CT_h} K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1) \times_h \mathbb{R}^N))$$

associé au morphisme (17). Nous avons de manière analogue les isomorphismes de Connes-Thom associés aux morphismes

$$(19) \quad \Gamma_b(G_2, G_1)^{tan} \xrightarrow{h^T} \mathbb{R}^N,$$

et

$$(20) \quad A\Gamma_b(G_2, G_1) \xrightarrow{h_0} \mathbb{R}^N,$$

La proposition suivante résulte de manière immédiate du corollaire 3.4.3 .

PROPOSITION 4.2.1. *Avec les notations ci-dessus, on a un diagramme commutatif de morphismes de K-théorie de C*-algèbres :*

$$\begin{array}{ccccc}
K_0(A\Gamma_b(G_2, G_1)) & \xleftarrow[\simeq]{e_0} & K_0(\Gamma_b(G_2, G_1)^{tan}) & \xrightarrow{e_1} & K_0(\Gamma_b(G_2, G_1)) \\
CT_{h_0} \downarrow \simeq & & CT_{h^T} \downarrow \simeq & & CT_h \downarrow \simeq \\
K_0(A\Gamma_b(G_2, G_1) \rtimes_{h_0} \mathbb{R}^N) & \xleftarrow[\simeq]{e_0} & K_0(\Gamma_b(G_2, G_1)^{tan} \rtimes_{h^T} \mathbb{R}^N) & \xrightarrow[\simeq]{e_1} & K_0(\Gamma_b(G_2, G_1) \rtimes_h \mathbb{R}^N).
\end{array}$$

On va considérer aussi les groupoïdes associés au morphisme

$$(21) \quad \Gamma_b(G_2, G_1)_{\mathcal{F}} \xrightarrow{h^T} \mathbb{R}^N,$$

induit sur le groupoïde de Fredholm. On peut énoncer aussi une proposition comme ci-dessus pour ces groupoïdes.

PROPOSITION 4.2.2. *Avec les notations ci-dessus, on a un diagramme commutatif de morphismes de K-théorie de C*-algèbres :*

$$\begin{array}{ccccc}
K_0(A_{nc}\Gamma_b(G_2, G_1)) & \xleftarrow[\simeq]{e_{\partial}} & K_0(\Gamma_b(G_2, G_1)_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{e_{\circ}} & K_0(\Gamma_b(G_2, G_1)|_{\circ}^M) \\
CT_{h_{\partial}} \downarrow \simeq & & CT_{h_{\mathcal{F}}} \downarrow \simeq & & CT_{\circ}^h \downarrow \simeq \\
K_0(A_{nc}\Gamma_b(G_2, G_1) \rtimes_{h_{\partial}} \mathbb{R}^N) & \xleftarrow[\simeq]{e_{\partial}} & K_0(\Gamma_b(G_2, G_1)_{\mathcal{F}} \rtimes_{h_{\mathcal{F}}} \mathbb{R}^N) & \xrightarrow[\simeq]{e_{\circ}} & K_0(\Gamma_b(G_2, G_1)|_{\circ}^M \rtimes_h \mathbb{R}^N)
\end{array}$$

Dans le cas de notre hypothèse de cette section, les groupoïdes produit semi-direct apparaissant dans les lignes d'en bas des deux diagrammes précédents sont tous libres et propres grâce aux résultats du chapitre précédent (proposition 3.4.1, corollaire 3.4.2 et proposition 3.4.2).

On rappelle que ces groupoïdes de Lie étant libres et propres, il sont Morita équivalents à leur espace d'orbite, ce qui implique que leur K-théorie est isomorphe à celle de leur espace d'orbite. Donnons un ensemble de notations pour les espaces d'orbites de ceux-ci.

On pose :

$$B_h := (M \times [0, 1]) / (\Gamma_b(G_2, G_1)^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N)$$

$$B_h^0 := M / (A\Gamma_b(G_2, G_1) \times_{h_0} \mathbb{R}^N)$$

$$B_h^1 := M / (\Gamma_b(G_2, G_1) \times_h \mathbb{R}^N)$$

$$B_h^{\mathcal{F}} := (M_{\mathcal{F}}) / (\Gamma_b(G_2, G_1)_{\mathcal{F}} \times_{h_{\mathcal{F}}} \mathbb{R}^N)$$

$$B_h^{\partial} := (M_{\partial}) / (A_{nc}(\Gamma_b(G_2, G_1)) \times_{h_{\partial}} \mathbb{R}^N)$$

$$B_h^{\overset{\circ}{M}} := \overset{\circ}{M} / (\Gamma_b(G_2, G_1) \overset{\circ}{M} \times_{\overset{\circ}{h}} \mathbb{R}^N).$$

On peut donner à présent une définition de l'indice topologique associé à un quadruplé b-principal comme ci-dessus :

DÉFINITION 4.2.1. *L'indice topologique associé au groupoïde de Lie $\Gamma_b(G_2, G_1)$ est le morphisme en K -théorie topologique*

$$Ind_t : K_{top}^0(A^*\Gamma_b(G_2, G_1)) \longrightarrow K_0(\Gamma_b(G_2, G_1)),$$

obtenue par la composition des morphismes suivants :

— l'isomorphisme

$$K_{top}^0(A^*\Gamma_b(G_2, G_1)) \longrightarrow K_0(C^*(A\Gamma_b(G_2, G_1)))$$

obtenue par composition de l'isomorphisme induit par la transformée de Fourier et l'isomorphisme de la proposition 2.2.2,

— l'isomorphisme de Thom

$$K_0(A\Gamma_b(G_2, G_1)) \longrightarrow K^0(B_h^0)$$

obtenue par composition entre l'isomorphisme de Connes-Thom CT_{h_0} :

$$K_0(C^*(A\Gamma_b(G_2, G_1))) \longrightarrow K_0(C^*(A\Gamma_b(G_2, G_1) \times_{h_0} \mathbb{R}^N))$$

et l'isomorphisme en K -théorie donné par l'équivalence de Morita entre le groupoïde de Lie $A\Gamma_b(G_2, G_1) \times_{h_0} \mathbb{R}^N$ et son espace d'orbite B_h^0 ,

— le morphisme $K^0(B_h^0) \longrightarrow K^0(B_h^1)$ induit par la composition :

$$K^0(B_h^0) \xrightarrow{e_0^{-1}} K^0(B_h) \xrightarrow{e_1} K^0(B_h^1)$$

— et l'isomorphisme $K^0(B_h^1) \longrightarrow K^0(\Gamma_b(G_2, G_1))$, obtenu en composant l'inverse de l'isomorphisme en K -théorie donné par l'équivalence de Morita entre le groupoïde de Lie $\Gamma_b(G_2, G_1) \times_{h_0} \mathbb{R}^N$ et son espace d'orbite B_h^1 et l'inverse de l'isomorphisme de Connes-Thom CT_h :

$$K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1))) \longrightarrow K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1) \times_{h_0} \mathbb{R}^N)).$$

Dans ce contexte, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 4.2.1. *Pour un quadruplé b -principal (G_2, G_1, h_2, h_1) , l'indice analytique et l'indice topologique de $\Gamma_b(G_2, G_1)$ coïncident, i.e. $Ind_a = Ind_t$.*

DÉMONSTRATION. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C^*(A\Gamma_b(G_2, G_1))) & \xleftarrow[\simeq]{e_0} & K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)^{tan})) & \xrightarrow{e_1} & K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1))) \\ CT_{h_0} \downarrow \simeq & & CT_{h_0} \downarrow \simeq & & CT_h \downarrow \simeq \\ K_0(C^*(A\Gamma_b(G_2, G_1) \times_{h_0} \mathbb{R}^N)) & \xleftarrow[\simeq]{e_0^\times} & K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)^{tan} \times_{BhT} \mathbb{R}^N)) & \xrightarrow{e_1^\times} & K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1) \times_h \mathbb{R}^N)) \\ \mathcal{M} \downarrow \simeq & & \mathcal{M} \downarrow \simeq & & \mathcal{M} \downarrow \simeq \\ K_{top}^0(B_h^0) & \xleftarrow[\simeq]{r_0} & K_{top}^0(B_h) & \xrightarrow{r_1} & K_{top}^0(B_h^1) \end{array}$$

où les lignes horizontales correspondent aux morphismes de restriction. \square

De la même manière, on donne une définition de l'indice de Fredholm topologique :

DÉFINITION 4.2.2. *L'indice de Fredholm topologique associé au groupoïde de Lie $\Gamma_b(G_2, G_1)$ est le morphisme en K -théorie topologique*

$$Ind_t^F : K_0(C^*(A_{nc}\Gamma_b(G_2, G_1))) \longrightarrow K_0(C^*\overset{\circ}{G}_2),$$

obtenu par la composition des morphismes suivants :

— l'isomorphisme en K -théorie

$$K_0 C^*(A_{nc}\Gamma_b(G_2, G_1)) \longrightarrow K_{top}^0(B_h^\circ)$$

obtenu par composition entre l'isomorphisme de Connes-Thom CT_{h_\circ} :

$$K_0(C^*(A\Gamma_b(G_2, G_1))) \longrightarrow K_0(C^*(A_{nc}(\Gamma_b(G_2, G_1) \times_{h_\circ} \mathbb{R}^N)))$$

et l'isomorphisme en K -théorie donné par l'équivalence de Morita entre le groupoïde de Lie $A_{nc}(\Gamma_b(G_2, G_1) \times_{h_\circ} \mathbb{R}^N)$ et son espace d'orbite B_h° ,

— le morphisme $K_{top}^0(B_h^\partial) \longrightarrow K_{top}^0(B_h^{\overset{\circ}{M}})$ donné par la composition :

$$K_{top}^0(B_h^\partial) \xrightarrow{e_0^{-1}} K_{top}^0(B_h^{\mathcal{F}}) \xrightarrow{e_0} K_{top}^0(B_h^{\overset{\circ}{M}})$$

— et le morphisme $K^0(B_h^{\overset{\circ}{M}}) \longrightarrow K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)|_{\overset{\circ}{M}}))$, obtenu en composant l'inverse de l'isomorphisme en K -théorie donné par l'équivalence de Morita entre le groupoïde de Lie

$\Gamma_b(G_2, G_1)|_{\overset{\circ}{M}} \times_{\overset{\circ}{h}} \mathbb{R}^N$ et son espace d'orbite $B_h^{\overset{\circ}{M}}$ et l'inverse de l'isomorphisme de Connes-Thom $CT_{\overset{\circ}{h}}$:

$$K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)|_{\overset{\circ}{M}})) \longrightarrow K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)|_{\overset{\circ}{M}} \times_{\overset{\circ}{h}} \mathbb{R}^N)).$$

Dans ce contexte, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 4.2.2. *Pour un quadruplé b -principal (G_2, G_1, h_2, h_1) , l'indice de Fredholm et l'indice de Fredholm topologique de $\Gamma_b(G_2, G_1)$ coïncident, i.e. $Ind_a^{\mathcal{F}} \equiv Ind_t^{\mathcal{F}}$.*

DÉMONSTRATION. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C^*(A_{nc}\Gamma_b(G_2, G_1))) & \xleftarrow[\simeq]{e_\partial} & K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)^{\mathcal{F}})) & \xrightarrow{e_0} & K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)|_{\overset{\circ}{M}})) \\ CT_{h_0} \downarrow \simeq & & CT_{h_{\mathcal{F}}} \downarrow \simeq & & CT_{\overset{\circ}{h}} \downarrow \simeq \\ K_0(C^*(A_{nc}\Gamma_b(G_2, G_1) \times_{h_\partial} \mathbb{R}^N)) & \xleftarrow[\simeq]{e_\partial} & K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)^{\mathcal{F}} \times_{h_{\mathcal{F}}} \mathbb{R}^N)) & \xrightarrow{e_0} & K_0(C^*(\Gamma_b(G_2, G_1)|_{\overset{\circ}{M}} \times_{\overset{\circ}{h}} \mathbb{R}^N)) \\ \mathcal{M} \downarrow \simeq & & \mathcal{M} \downarrow \simeq & & \mathcal{M} \downarrow \simeq \\ K_{top}^0(B_h^\partial) & \xleftarrow[\simeq]{r_0} & K_{top}^0(B_h^{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{r_1} & K_{top}^0(B_h^{\overset{\circ}{M}}) \end{array}$$

où les lignes horizontales correspondent aux morphismes de restriction. \square

4.3. Le cas d'une famille de variétés à bords

On s'intéresse ici à un cas qui généralise à la fois le cas des familles et le cas d'une variété à bord en s'inspirant des méthodes de [CRLM14]. C'est un exemple particulier de la situation décrite précédemment et sur lequel on va approfondir les calculs.

Soit M une variété de bord L défini par une fonction de définition $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}_+$. En considérant le double \tilde{M} de M le long du bord L , on peut se placer dans la situation des sections précédentes.

Soit $\phi : \tilde{M} \longrightarrow B$ une submersion de variétés différentielles telle que L hérite de la fibration définie par ϕ , c'est à dire que $\phi|_L : L \longrightarrow B$ est une submersion surjective.

Nous allons considérer le groupoïde Blup

$$\text{Blup}_{r,s}(\tilde{M} \times_{\phi} \tilde{M}, L \times_{\phi} L) \rightrightarrows \tilde{M}.$$

Celui-ci est isomorphe au groupoïde de Lie $G^{\phi}(\tilde{M}, \rho)$ introduit dans le 3e paragraphe de [?] par B. Monthubert qui est défini comme le sous-groupoïde du produit de groupoïdes de Lie : $\tilde{M} \times \tilde{M} \times \mathbb{R}$:

$$G^{\phi}(\tilde{M}, \rho) = \left\{ (x, y, \lambda) \in \tilde{M} \times_{\phi} \tilde{M} \times \mathbb{R} \mid \rho(x) = \lambda \rho(y) \right\}$$

Il sera utilisé en lieu et place du "Blup" dans le calcul des orbites du groupoïde semi-direct faisant l'objet de la proposition qui suit. Son statut de sous-groupoïde de Lie du groupoïde $\tilde{M} \times \tilde{M} \times \mathbb{R}$ va considérablement alléger les calculs.

La composante s-connexe de ce groupoïde de Lie peut se restreindre au fermé saturé $M \subset \tilde{M}$ pour donner un groupoïde de Lie au dessus de la variété à bord, noté dans cet exemple :

$$\Gamma_b^{\phi}(M) = \text{Blup}_{r,s}(\tilde{M} \times_{\phi} \tilde{M}, L \times_{\phi} L)|_M = (\overset{\circ}{M} \times_{\phi} \overset{\circ}{M}) \bigsqcup (L \times_{\phi} L) \times \mathbb{R}$$

d'algèbroïde de Lie :

$${}^bT_{\phi}M = ({}^bT\tilde{M})|_M = T_{\phi}\overset{\circ}{M} \bigsqcup T_{\phi}L \times \mathbb{R}.$$

4.3.1. L'indice analytique pour le cas des familles. Dans cette section on veut appliquer le théorème 4.2.1 dans le cas des familles avec le quadruplé

$$(\tilde{M} \times_{\phi} \tilde{M}, L \times_{\phi} L, h_2, h_1)$$

décrit dans l'exemple 3.4.2. D'après les résultats de la section précédente le groupoïde produit semi-direct associé

$$(22) \quad \Gamma_b^{\phi}(M) \times_{\underset{h}{h}} \mathbb{R}^N$$

est libre et propre et, en particulier, il est Morita équivalent à son espace d'orbites. On va calculer cet espace d'orbites pour donner un calcul K-théoretique de l'indice analytique.

PROPOSITION 4.3.1. *L'espace d'orbite du groupoïde de Lie*

$$\Gamma_b^{\phi}(M) \times_{\underset{h}{h}} \mathbb{R}^N$$

est le suivant :

$$\text{Orb}(\Gamma_b^{\phi}(M) \times_{\underset{h}{h}} \mathbb{R}^N) \simeq B \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$$

DÉMONSTRATION. Pour calculer l'espace d'orbite du groupoïde de Lie $\Gamma_b^\phi(M) \times_h \mathbb{R}^N$, on peut calculer l'espace d'orbite de $G^\phi(\tilde{M}, \rho) \times_h \mathbb{R}^N$, puis restreindre à M .

Soient $(x, X, X_0), (y, Y, Y_0) \in \tilde{M} \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$. Ces deux éléments sont dans la même orbite s'il existe (a, b, λ, W, W_0) dans $G^\phi(\tilde{M}, \rho) \times (\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R})$ tel que

$$\begin{aligned} s(a, b, \lambda, W, W_0) &= (y, Y, Y_0) \\ r(a, b, \lambda, W, W_0) &= (x, X, X_0). \end{aligned}$$

Autrement dit, tel que

$$\begin{aligned} (b, W + j_0(b) - j_0(a), W_0 + \lambda) &= (y, Y, Y_0) \\ (a, W, W_0) &= (x, X, X_0). \end{aligned}$$

Ainsi, $(x, X, X_0) \sim (y, Y, Y_0)$ si et seulement si

- $\phi(x) = \phi(y)$
- $X - j_0(x) = Y - j_0(y)$
- et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Y_0 - X_0 = \lambda$.

On peut donc poser le morphisme suivant :

$$\begin{aligned} \beta : M \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} &\longrightarrow B \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+ \\ (x, X, X_0) &\longmapsto (\phi(x), X - j_0(x), X_0). \end{aligned}$$

On s'est permis de réduire à \mathbb{R}_+ car les conditions pour que deux éléments soient dans la même classe d'équivalence le permettent.

Il vient que β est surjectif, car pour $(a, U, U_0) \in B \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$, on a $\beta(a', U + j_0(a'), U_0) = (a, U, U_0)$, où a' est un antécédent de a par ϕ dont l'existence est garantie par sa surjectivité. Le calcul de l'orbite d'un point nous dit que l'on peut faire passer cette application au quotient pour obtenir une bijection. L'application est lisse.

On peut donc donner une présentation de l'espace d'orbite de ce groupoïde de Lie :

$$\text{Orb} \left(G^\phi(\tilde{M}, \rho) \times \mathbb{R}^N \right) \simeq B \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$$

et

$$\text{Orb} \left(\Gamma_b^\phi(M) \times \mathbb{R}^N \right) \simeq B \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+.$$

□

Nous avons le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.3.1. *Dans la situation précédente le groupe de K-théorie $K_0(C^*(\Gamma_b^\phi(M)))$ est nul et, en particulier, l'indice analytique pour le groupoïde $\Gamma_b^\phi(M)$ est le morphisme nul, $\text{Ind}_a \equiv 0$.*

DÉMONSTRATION. On a $K^*(B \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+) = 0$, ce qui donne trivialement le résultat. \square

REMARQUE. *En particulier l'indice topologique est aussi nul dans cet exemple et le théorème 4.2.1 est trivial. Ceci ne veut pas dire que ce résultat trivial n'a pas de conséquences intéressantes, en effet, comme décrit dans [ACR17], ce résultat permet de montrer (dans le cas M compacte) que tous les opérateurs longitudinaux elliptiques associé à ce groupoïde sont perturbables dans un opérateur de Fredholm dans le sens où (au moins à homotopie stable près) on peut le perturber par un opérateur régularisant pour avoir un opérateur de Fredholm. Ceci donne une autre preuve du résultat montré d'abord par Melrose et Piazza ([MP97]) pour les opérateurs de Dirac et par Melrose et Rochon ([MR04]) pour les opérateurs pseudodifférentiels. Dans [ACR17], on montre que la preuve ci-dessus s'étend au cas des feuilletages, cette fois-ci grâce à un calcul de l'indice topologique.*

4.3.2. L'indice de Fredholm pour le cas des familles. Comme il a déjà été exposé, il est possible de définir un morphisme d'indice analytique avec la donnée d'un champ continu de groupoïdes de Lie, dit groupoïde de déformation. Le cas de l'indice analytique correspond au cas du groupoïde tangent. L'indice analytique ne coïncide pas en général avec l'indice de Fredholm ; dans le cas des familles, un groupoïde est introduit pour pouvoir définir le morphisme de l'indice de Fredholm : on parle de l'espace tangent non-commutatif pour le cas des familles à bord, largement inspiré du travail de Carrillo-Lescure-Monthubert [CRLM14] pour le cas d'une variété à bord. Il correspond à l'algébroïde non commutative du cas général exposé dans la section 4.1.

Proposons nous maintenant de calculer l'orbite des points de $\tilde{M} \times [0, 1]$ dans le groupoïde de Lie $(\Gamma_b^\phi(\tilde{M}))^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N$. Ce calcul nous permettra de donner les calculs des espaces d'orbites pour les sous-groupoïdes saturés qui apparaîtront dans les indices de Fredholm.

Remarquons d'abord que $(\Gamma_b^\phi(\tilde{M}))^{tan}$ est un champ continu (lisse) de groupoïdes de Lie. Comme h^T n'agit que fibre à fibre vis à vis de la composante de champs (c'est à dire la composante $[0, 1]$), le groupoïde $(\Gamma_b^\phi(\tilde{M}))^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N$ est lui-même un champ continu (lisse) de groupoïdes de Lie. Cela nous permet de définir une fibration lisse en groupoïdes de Lie

$$p : (\Gamma_b^\phi(\tilde{M}))^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, 1].$$

On a évidemment $p^{-1}(0) = {}^bT_\phi \tilde{M} \times_{h_0} \mathbb{R}^N$ et $p^{-1}(]0, 1]) \simeq \Gamma_b^\phi(\tilde{M}) \times_h \mathbb{R}^N \times]0, 1]$.

Une autre particularité des champs continus de groupoïdes de Lie est la suivante : l'espace d'orbite forme également un champ continu de groupoïdes de Lie. On définit donc la fibration lisse de variétés :

$$\pi : Orb((\Gamma_b^\phi(\tilde{M}))^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N) \longrightarrow [0, 1],$$

et il vient que $Orb(p^{-1}(t)) \simeq \pi^{-1}(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Il ne reste donc plus qu'à calculer les orbites des fibres de p .

Calculons ici l'orbite des différents points de notre base $\tilde{M} \times [0, 1] \times \mathbb{R}^N$.

— Soit $\mathcal{X} = (x, 0, X, X_0) \in \overset{\circ}{M} \times \{0\} \times \mathbb{R}^N$.

Alors cet élément est dans la même orbite qu'un autre élément

$\mathcal{Y} = (y, 0, Y, Y_0)$ du même espace, si et seulement s'il existe

$(a, V, A, A_0) \in T_\phi \overset{\circ}{M} \times_{h_0} \mathbb{R}^N$ dont la source est \mathcal{X} et le but est \mathcal{Y} .

Cela revient donc à avoir les conditions nécessaires et suffisantes :

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{Y} \iff x = y, \quad X - Y = d_x j_0(V), \quad X_0 - Y_0 = \frac{d_x \rho(V)}{\rho(x)}.$$

— Soit $\mathcal{X} = (x, 0, X, X_0) \in L \times \{0\} \times \mathbb{R}^N$.

Alors cet élément est dans la même orbite qu'un autre élément

$\mathcal{Y} = (y, 0, Y, Y_0)$ du même espace, si et seulement s'il existe

$(a, V, \epsilon, A, A_0) \in (T_{\phi_L} L \times \mathbb{R}) \times_{h_0} \mathbb{R}^N$ dont la source est \mathcal{X} et le but est \mathcal{Y} .

Cela revient donc à avoir les conditions nécessaires et suffisantes :

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{Y} \iff x = y, \quad X - Y = d_x j_0(V), \quad X_0 - Y_0 = \epsilon.$$

— Soit $\mathcal{X} = (x, t, X, X_0) \in \overset{\circ}{M} \times]0, 1] \times \mathbb{R}^N$.

Alors cet élément est dans la même orbite qu'un autre élément

$\mathcal{Y} = (y, t, Y, Y_0)$ du même espace, si et seulement s'il existe

$(a, b, A, A_0) \in (\overset{\circ}{M} \times_{\phi} \overset{\circ}{M}) \times_h \mathbb{R}^N$ dont la source est \mathcal{X} et le but est \mathcal{Y} .

Cela revient donc à avoir les conditions nécessaires et suffisantes :

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{Y} \iff \phi(x) = \phi(y), X - j_0(x) = Y - j_0(y), X_0 - \ln(\rho(x)) = Y_0 - \ln(\rho(y)).$$

— Soit $\mathcal{X} = (x, t, X, X_0) \in L \times]0, 1] \times \mathbb{R}^N$.

Alors cet élément est dans la même orbite qu'un autre élément

$\mathcal{Y} = (y, t, Y, Y_0)$ du même espace, si et seulement s'il existe $(a, b, \xi, A, A_0) \in (L \times L \times \mathbb{R}) \times_{\phi_L} \mathbb{R}^N \times_h \mathbb{R}^N$ dont la source est \mathcal{X} et le but est \mathcal{Y} .

Cela revient donc à avoir les conditions nécessaires et suffisantes :

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{Y} \iff \phi_L(x) = \phi_L(y), X - j_0(x) = Y - j_0(y), X_0 - Y_0 = \xi.$$

Ces quatre points nous permettent de définir une relation d'équivalence : deux points de la base $M \times [0, 1] \times \mathbb{R}^N$ sont équivalents s'ils sont sur la même orbite dans le groupoïde $(\Gamma_b^\phi(\tilde{M}))^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N$. On se propose donc de donner un isomorphisme sur l'ensemble des orbites de ce groupoïde

$$Orb((\Gamma_b^\phi(\tilde{M}))^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N) = (\tilde{M} \times [0, 1] \times \mathbb{R}^N) / \sim$$

et une variété qui rendra plus clair la structure lisse. Nous pourrons ensuite restreindre la base afin d'obtenir les espaces d'orbites des groupoïdes désirés.

REMARQUE. La variété qui va représenter notre espace d'orbite sera une déformation au cône normal. En fait, ce résultat est prévisible si l'on garde en tête l'aspect fonctoriel de celui-ci, car en effet le groupoïde dont on calcule l'espace d'orbite est lui-même une déformation au cône normal. Afin de définir rigoureusement cet espace, on a besoin d'identifier l'immersion utilisée pour construire le fibré normal. C'est l'objet du lemme qui suit.

LEMME. *L'application (ϕ, j) définie par*

$$\begin{aligned} \tilde{M} &\longrightarrow B \times \mathbb{R}^N \\ x &\longmapsto (\phi(x), j(x)). \end{aligned}$$

est une immersion.

Nous nous proposons donc de définir l'application $\beta : \tilde{M} \times [0, 1] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow DNC(B \times \mathbb{R}^N, \tilde{M})$ où la déformation au cône normal est faite

par rapport à l'immersion (ϕ, j) .

Au préalable, restons un bref moment sur cette déformation au cône normal. De manière purement ensembliste, elle s'écrit

$$DNC(B \times \mathbb{R}^N, \tilde{M}) = T(B \times \mathbb{R}^N)/(\phi, j)_*(T\tilde{M}) \sqcup B \times \mathbb{R}^N \times]0, 1].$$

Il est important de simplifier la fibre en 0 pour des raisons pratiques. En fait, nous restreindrons tout ce travail en 0 (le groupoïde étudié, l'application h^T , la déformation au cône normal), et pour le moment, la fibre en 0 de cette déformation ne présente pas de manière claire un rapport avec les classes d'orbites pour $t = 0$ calculées plus haut. Occupons-nous donc du lemme suivant.

LEMME. *A isomorphisme près, on peut réécrire la déformation au cône normal associée à l'immersion (ϕ, j) comme suit :*

$$DNC(B \times \mathbb{R}^N, \tilde{M}) = T\mathbb{R}^N/T_{\phi}\tilde{M} \sqcup B \times \mathbb{R}^N \times]0, 1].$$

DÉMONSTRATION. En utilisant le fait que (ϕ, j) est une immersion, et donc que $(\phi, j)_*(T\tilde{M}) \simeq T\tilde{M}$, et l'identification de l'espace tangent d'un produit avec le produit des espaces tangents, on obtient :

$$T(B \times \mathbb{R}^N)/(\phi, j)_*(TM) \simeq TB \times T\mathbb{R}^N/TM.$$

On peut de plus écrire, en invoquant que ϕ est une submersion, $T\tilde{M} \simeq \phi_*(T\tilde{M}) \oplus T_{\phi}\tilde{M} \simeq TB \oplus T_{\phi}\tilde{M}$. Les isomorphismes entrant en jeu ne sont pas canoniques mais le choix d'un en particulier n'est pas important pour l'étude que l'on mène.

En utilisant un résultat classique sur les fibrés vectoriels, on obtient donc

$$DNC(B \times \mathbb{R}^N, \tilde{M}) = T\mathbb{R}^N/T_{\phi}\tilde{M} \sqcup B \times \mathbb{R}^N \times]0, 1].$$

□

On peut maintenant réécrire l'application π et constater ce que l'on avait prévu :

$$\pi : DNC(B \times \mathbb{R}^N, \tilde{M}) \longrightarrow [0, 1]$$

$$\text{avec } \pi^{-1}(0) = T_{\tilde{M}}\mathbb{R}^N/T_{\phi}\tilde{M} \text{ et } \pi^{-1}(]0, 1]) \simeq B \times \mathbb{R}^N \times]0, 1].$$

Ayant maintenant une meilleure présentation de la variété à laquelle l'espace d'orbite devrait être isomorphe, on peut définir l'application β sur la variété $\tilde{M} \times \mathbb{R}^N \times [0, 1]$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\beta(x, X, X_0, t) &= (\phi(x), X - j_0(x), X_0 - \ln(\rho(x)), t) && \text{si } x \in \overset{\circ}{M} \text{ et } t \neq 0 \\
\beta(x, X, X_0, t) &= (\phi(x), X - j_0(x), X_0, t) && \text{si } x \in L \text{ et } t \neq 0 \\
\beta(x, X, X_0, 0) &= \overline{(x, X, X_0)} && \text{si } x \in L \text{ et } t = 0 \\
\beta(x, X, X_0, 0) &= \overline{(x, X, X_0 \rho(x))} && \text{si } x \in \overset{\circ}{M} \text{ et } t = 0.
\end{aligned}$$

PROPOSITION 4.3.2. *Le morphisme*

$$\beta : \tilde{M} \times \mathbb{R}^N \times [0, 1] \longrightarrow DNC(B \times \mathbb{R}^N, \tilde{M})$$

est surjectif et passe au quotient pour donner un isomorphisme $\bar{\beta}$ entre la variété lisse $DNC(B \times \mathbb{R}^N, \tilde{M})$ et l'espace d'orbite de $(\Gamma_b^\phi(M))^{\tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N$.

REMARQUE. *Explicitons la définition de cette application.*

Pour $t \neq 0$, il n'y a pas d'ambiguïté, mais pour $t = 0$, il est peut-être nécessaire d'expliquer la signification des classes d'équivalences entrant en jeu.

Pour $(x, X, X_0) \in \tilde{M} \times \mathbb{R}^N$, on peut définir un élément $(x, X, X_0) \in T\mathbb{R}^N$ en identifiant les fibres de ce fibré vectoriel avec l'espace vectoriel \mathbb{R}^N . On rappelle qu'en vertu du lemme, on a identifié $(\phi, j)_(T\tilde{M})$ avec $T\tilde{M}$, ce qui fait que l'on peut voir ce dernier comme un sous-fibré vectoriel de $T\mathbb{R}^N$. Ainsi, on peut dire que (X, X_0) est un élément de $T_x\mathbb{R}^N$, où $x \in \tilde{M}$; la classe d'équivalence de cet élément est alors bien définie dans le fibré quotient $T_{\tilde{M}}\mathbb{R}^N / T_\phi\tilde{M}$.*

DÉMONSTRATION. L'application β est un morphisme de variété car elle respecte la structure de variété de la déformation au cône normal.

Elle passe au quotient et elle est injective car elle a été construite spécialement pour que l'image de deux représentants de la même orbite, c'est à dire deux éléments de $M \times \mathbb{R}^N \times [0, 1]$ équivalents, aient la même image. Elle est surjective et donc l'application quotient $\bar{\beta}$ l'est également. En effet, si $(a, A, A_0) \in B \times \mathbb{R}^N$, la surjectivité de ϕ donne un élément $x \in M$ tel que $\phi(x) = a$.

- Si $x \in L$, il vient : $\beta(x, A + j_0(x), A) = (a, A, A_0)$,
- Si $x \in \overset{\circ}{M}$, il vient $\beta(x, A + j_0(x), A_0 + \ln(\rho(x))) = (a, A, A_0)$.

□

Maintenant que l'on a la structure de variété de l'espace d'orbite du groupoïde $\Gamma_b^\phi(M)^{\tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N$, on va pouvoir le restreindre aux groupoïdes de Lie qui nous intéressent. Ce sont des sous-groupoïdes

de Lie constitués d'orbites car ils sont issus de restrictions à des sous-ensembles saturés de la base. Par conséquent, toute la machinerie va suivre et il nous suffit de restreindre l'isomorphisme $\bar{\beta}$ aux espaces d'orbites de ces groupoïdes pour obtenir un nouvel isomorphisme sur leur image.

Appliquons maintenant la proposition 3.4.2 pour trouver efficacement les espaces d'orbites des groupoïdes de Lie concernés dans cette section. On pose $N_\phi = T_M \mathbb{R}^N / T_\phi M$ le fibré normal de (ϕ, j) .

- (i) Considérons le groupoïde de Lie $(\Gamma_b^\phi(M))_{\mathcal{F}}$ constitué des orbites des points de l'ouvert $M_{\mathcal{F}}$ dans $(\Gamma_b^\phi(M))^{tan}$. En appliquant la proposition, on obtient un morphisme

$$h_{\mathcal{F}} : (\Gamma_b^\phi(M))_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

qui va induire un sous-groupoïde de Lie ouvert

$$(\Gamma_b^\phi(M))_{\mathcal{F}} \times_{h_{\mathcal{F}}} \mathbb{R}^N$$

et un isomorphisme provenant de la restriction de $\bar{\beta}$:

$$\begin{array}{ccc} Orb \left((\Gamma_b^\phi(M))^{tan} \times_{h^T} \mathbb{R}^N \right) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & DNC(B \times \mathbb{R}^N, M) \\ \uparrow & & \uparrow \\ Orb \left((\Gamma_b^\phi(M))_{\mathcal{F}} \times_{h^T} \mathbb{R}^N \right) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & \mathcal{B}_{\mathcal{F}} \end{array}$$

où $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} := N_\phi \times \{0\} \sqcup B \times \mathbb{R}^N \times]0, 1[\sqcup B \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+^* \times \{1\}$ est l'ouvert complémentaire du fermé $B \times \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\} \times \{1\}$ de $B \times \mathbb{R}^N \times [0, 1]$.

- (ii) Considérons maintenant le groupoïde de Lie $T_{NC}^\phi M$ constitué des orbites des points du fermé saturé $M_\partial := M_{\mathcal{F}} \setminus (\overset{\circ}{M} \times]0, 1])$ dans $(\Gamma_b^\phi(M))_{\mathcal{F}}$. En appliquant la proposition, on obtient un morphisme :

$$h_\partial : (\Gamma_b^\phi(M))_\partial \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

qui va induire un sous-groupoïde de Lie fermé $T_{NC}^\phi \times_{h_\partial} \mathbb{R}^N$ et

la restriction de $\bar{\beta}$ à celui-ci devient :

$$Orb(T_{NC}^\phi \times_{h_\partial} \mathbb{R}^N) \xrightarrow{\cong} N_\phi \times \{0\} \sqcup B \times \mathbb{R}^{N-1} \times]0, 1[=: N_\partial.$$

- (iii) Enfin, le groupoïde complémentaire de $T_{NC}^\phi M$ dans $(\Gamma_b^\phi(M))_{\mathcal{F}}$ est le groupoïde de Lie $\overset{\circ}{M} \times_{\phi} \overset{\circ}{M} \times]0, 1]$ constitué des orbites de l'ouvert saturé $\overset{\circ}{M} \times]0, 1]$. Après avoir restreint à 1, on obtient le groupoïde des paires et la proposition nous donne :

$$Orb(\overset{\circ}{M} \times_{\phi} \overset{\circ}{M} \times_{\mathbb{h}} \mathbb{R}^N) \xrightarrow{\simeq} B \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+^* \simeq B \times \mathbb{R}^N.$$

Après ce travail préalable, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C^*(T_{NC}^\phi M \times_{\mathbb{h}_\partial} \mathbb{R}^N)) & \xleftarrow{[e_\partial]} & K_0(C^*((\Gamma_b^\phi(M))_{\mathcal{F}}) \times_{\mathbb{h}^T} \mathbb{R}^N)) & \xrightarrow{[e_1]} & K_0(C^*(\overset{\circ}{M} \times_{\phi} \overset{\circ}{M} \times_{\mathbb{h}} \mathbb{R}^N)) \\ \mathcal{M} \downarrow \simeq & & \mathcal{M} \downarrow \simeq & & \mathcal{M} \downarrow \simeq \\ K^0(N_\partial) & \xleftarrow{[e_\partial]} & K^0(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{[e_1]} & K^0(B \times \mathbb{R}^N). \end{array}$$

et un calcul plus explicite de l'indice topologique de Fredholm.

On rappelle que pour des raisons de contractibilité vue dans la section 2.2.2.1, l'application en K -théorie $[e_\partial]$ est un isomorphisme. De même, grâce au diagramme commutatif issu des équivalences de Morita, elle induit un isomorphisme noté également $[e_\partial]$ sur les espaces d'orbites.

THÉORÈME 4.3.1. *L'indice analytique de Fredholm et l'indice topologique de Fredholm du groupoïde $\Gamma_b^\phi(M)$ coïncident.*

DÉMONSTRATION. On a le diagramme commutatif suivant, issu de tout le travail qui précède,

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C^*(T_{NC}^\phi M)) & \xleftarrow{e_\partial} & K_0(C^*((\Gamma_b^\phi(M))_{\mathcal{F}})) & \xrightarrow{e_1} & K_0(C^*(\overset{\circ}{M} \times_{\phi} \overset{\circ}{M})) \xrightarrow{\simeq} K_{top}^0(B) \\ \downarrow \simeq CT_{h_\partial} & & \downarrow \simeq CT_{h_T} & & \downarrow CT_{h_h} \\ Thom \left(K_0(C^*(H_\partial)) \right) & \xleftarrow{[e_\partial]} & K_0(C^*(H_{\mathcal{F}})) & \xrightarrow{[e_1]} & K_0(C^*(\overset{\circ}{H})) \\ \downarrow \simeq \mathcal{M} & & \downarrow \simeq \mathcal{M} & & \downarrow \simeq \mathcal{M} \\ K^0(N_\partial) & \xleftarrow{[e_\partial]} & K^0(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{[e_1]} & K^0(B \times \mathbb{R}^N) \end{array} \quad \begin{array}{l} \curvearrowright \\ Bott^{-1} \end{array}$$

où $H_\partial = T_{NC}^\phi M \times_{\mathbb{h}_\partial} \mathbb{R}^N$; $H_{\mathcal{F}} = (\Gamma_b^\phi(M))_{\mathcal{F}} \times_{\mathbb{h}^T} \mathbb{R}^N$ et $\overset{\circ}{H} = \overset{\circ}{M} \times_{\phi} \overset{\circ}{M} \times_{\mathbb{h}} \mathbb{R}^N$.

La première ligne correspond à la définition de l'indice analytique de Fredholm, alors que la composition de la flèche $Bott^{-1}$, de la ligne horizontale, et de la flèche $Thom$ correspond à l'indice topologique de Fredholm. \square

4.3.3. Une formule cohomologique pour le b-indice d'APS des familles. Comme souvent dans le cas des variétés à bord, l'indice le plus intéressant à calculer est celui qui donne les indices de Fredholm. Dans notre exemple, nous avons défini le morphisme d'indice de Fredholm d'Atiyah-Patodi-Singer du cas d'une famille de variétés à bord

$${}^b\text{Ind}_a^{\mathcal{F}} : K_0(C^*(T_{nc}^\phi M)) \longrightarrow K_0(C^*(\overset{\circ}{M} \times_{\phi} \overset{\circ}{M}))$$

et une question naturelle serait : comment peut-on le calculer ?

Dans [MP12], Moriyoshi et Piazza donnent une nouvelle approche de la théorie de l'indice supérieure sur des structures géométriques à bord basée sur l'utilisation de la cohomologie cyclique et sa dualité avec la K-théorie. Pour le cas de certaines fibrations, ils prouvent une formule du type Godbillon-Vey pour les opérateurs longitudinaux.

Il serait certainement intéressant de tirer, des versions relatives des indices faits dans cette section, des formules d'indices des dualités relatives, comme l'ont fait Moriyoshi et Piazza. C'est une idée d'étude pour l'avenir. Dans cette section, nous nous posons une question différente bien que complémentaire. Dans quels cas le morphisme d'indice ci-dessus peut-il être calculé de manière topologique ? Nous allons ici mettre en relation nos calculs avec la formule d'indice pour des familles d'opérateurs de Dirac par Melrose et Piazza dans [MP97] et obtenir une nouvelle expression pour le terme de bord "Eta".

Le théorème 4.3.1 et le diagramme commutatif présent dans sa preuve nous donne une information importante. On peut calculer le b-indice de Fredholm (modulo isomorphismes de Connes-Thom et équivalences de Morita) par le calcul de l'indice de la variété de déformation

$\text{mathcal{B}}_{\mathcal{F}}$:

$$K^0(N_{\partial}) \xleftarrow[\simeq]{[e_{\partial}]} K^0(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{[e_1]} K^0(B \times \mathbb{R}^N).$$

Comme ce sont des morphismes de K-théorie topologique donnés par des inclusions, un calcul explicite devrait être possible.

En fait, le théorème de Stokes classique s'applique exactement de la même manière que dans la proposition 3.12 de [CRLM14] pour prouver

PROPOSITION 4.3.3. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{ind}_{\mathcal{B}_{\mathcal{F}}} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 K^0(N_{\partial}) & \xleftarrow[\simeq]{[e_0]} & K^0(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{[e_1]} & K^0(B \times \mathbb{R}^N) \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & \int_{\phi_N} \text{ch}(\cdot) & & \int_{p_1} \text{ch}(\cdot) & \\
 & & H_{dR}^{ev}(B) & &
 \end{array}$$

où les intégrations sont faites suivant les fibres des projections canoniques $p_1 : B \times \mathbb{R}^N \rightarrow B$ et $\phi_N : N_{\partial} \rightarrow B$.

Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème 4.3.1 et de la proposition que l'on vient d'énoncer.

COROLLAIRE 4.3.2 (Formule Cohomologique). *Pour un opérateur longitudinal pleinement elliptique D dans ${}^b\Psi^*(\Gamma_{\phi}^b(M))$, on a l'égalité suivante dans $H_{dR}^{ev}(B)$:*

$$Ch({}^b\text{Ind}_a^{\mathcal{F}}(D)) = \int_{\phi_N} Ch(\mathcal{T}([\sigma_{NC}^{\phi}(D)])).$$

où $[\sigma_{NC}^{\phi}(D)] \in K_0(C^*({}^bT_{nc}^{\phi}M))$ est le symbole non commutatif et $\mathcal{T} : K_0(C^*({}^bT_{nc}^{\phi}M)) \rightarrow K^0(N_{\partial})$ est l'isomorphisme de Connes-Thom suivi de l'isomorphisme induit par l'équivalence de Morita.

En particulier, en choisissant une forme différentielle ω_D dans N_{∂} représentant $Ch(\mathcal{T}([\sigma_{NC}^{\phi}(D)]))$, on obtient la formule :

$$Ch({}^b\text{Ind}_a^{\mathcal{F}}(D)) = \int_{\phi_{N_{\phi}}} \omega_D + \int_{\phi_{N_V}} \omega_D,$$

où $\phi_{N_{\phi}}$ est la restriction de ϕ_N au fibré normal $N_{\phi}(\mathbb{R}^N, M)$ et ϕ_{N_V} la restriction de ϕ_N au complémentaire $N_{\partial} \setminus (N_{\phi}(\mathbb{R}^N, M)|_{\circlearrowleft_M})$.

La première intégrale comprend la restriction de ω_D à $N_{\phi}(\mathbb{R}^N, M)$ qui est relié au symbole principal ordinaire de D . Plus précisément, le symbole principal $\sigma_{pr}(D)$ de D fournit une classe de K -theory de $C^*(A^*(\Gamma_b^{\phi}(M)))$ ou, en d'autres termes, du fibré b-cotangent ${}^bT_{\phi}^*M$. Par functorialité du caractère de Chern et des morphismes de Connes-Thom, on a :

$$[(\omega_D)|_{N_{\phi}}] = Ch(CT([\sigma_{pr}(D)])).$$

La seconde intégrale peut alors être vue comme un terme de correction, qui est relié à l'invariant eta apparaissant dans la formule d'APS des familles (dans le cas d'une famille d'opérateurs de Dirac) et qui dépend à son tour du choix du représentant $\omega_D \in Ch(CT([\sigma_D]))$.

Pour être plus précis à propos de cela, soit $\mathcal{D} \in {}^b\text{Diff}_{\phi}^1(M, E)$ une famille d'opérateurs de Dirac généralisés. Soit \mathcal{D}_P un opérateur

pleinement b -elliptique vérifiant $[\sigma(\mathcal{D})] = [\sigma(\mathcal{D}_P)]$ dans $K^0({}^bT_\phi^*M)$. Cet opérateur pleinement elliptique existe toujours par le corollaire 4.7 de [ACR17]. Ensuite, en appliquant la dernière formule cohomologique et en considérant les remarques précédentes et les notations, on obtient par les théorèmes 1 et 2 de [MP97] une nouvelle expression pour la forme η

$$\eta_{\mathcal{D}_P} = -2 \int_{\phi_{N_V}} \omega_{\mathcal{D}_P}.$$

Maintenant, le coté droit de la formule ci-dessus prend son sens en général. Une future étude serait possible sur des calculs explicites et des applications sur ces termes de correction de bord.

Bibliographie

- [ACR17] I. Akrouf and P. Carrillo Rouse, *Longitudinal b -operators, blups and index theorem*, arXiv :1711.11197, November 2017.
- [ADR00] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault, *Amenable groupoids*, Monographie de L'Enseignement Mathématique **36** (2000).
- [ANS06] Johannes Aastrup, Ryszard Nest, and Elmar Schrohe, *A continuous field of C^* -algebras and the tangent groupoid for manifolds with boundary*, J. Funct. Anal. **237** (2006), no. 2, 482–506.
- [AS63] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 422–433.
- [AS68a] ———, *The index of elliptic operators. I*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 484–530.
- [AS68b] ———, *The index of elliptic operators. III*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 546–604.
- [Ati88] *K-theory*, 1988.
- [Bla98] Bruce Blackadar, *K-theory for operator algebras*, vol. 5, MSRI Publications, 1998.
- [CCG⁺04] Alain Connes, Joachim Cuntz, E. Guentner, Nigel Higson, J. Kaminker, and J. E. Roberts, *Noncommutative geometry*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1831, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Martina Franca, September 3–9, 2000, Edited by S. Doplicher and R. Longo, Fondazione C.I.M.E.. [C.I.M.E. Foundation].
- [Con79] Alain Connes, *Sur la théorie non commutative de l'intégration*, Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978), Lecture Notes in Math., vol. 725, Springer, Berlin, 1979, pp. 19–143.
- [Con94] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.
- [CR07] Paulo Carrillo Rouse, *Indices analytiques à support compact pour des groupoides de Lie*, Thèse de Doctorat à l'Université de Paris 7 (2007).
- [CRLM14] P. Carrillo Rouse, J. M. Lescure, and B. Monthubert, *A cohomological formula for the Atiyah-Patodi-Singer index on manifolds with boundary*, J. Topol. Anal. **6** (2014), no. 1, 27–74. MR 3190137
- [DL09] C. Debord and J.-M. Lescure, *Index theory and groupoids*, arXiv :0801.3617, November 2009.
- [DLN09] C. Debord, J.-M. Lescure, and V. Nistor, *Groupoids and an index theorem for conical pseudo-manifolds*, J. Reine Angew. Math. **628** (2009), 1–35. MR MR2503234
- [DS17] C. Debord and G. Skandalis, *Blowup constructions for lie groupoids and a boutet de monvel type calculus*, arXiv :1705.09588, June 2017.

-
- [ENN88] G. A. Elliott, T. Natsume, and R. Nest, *Cyclic cohomology for one-parameter smooth crossed products*, Acta Math. **160** (1988), no. 3-4, 285–305. MR 945014 (89h :46093)
- [GL14] Marco Gualtieri and Songhao Li, *Symplectic groupoids of log symplectic manifolds*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2014), 3022–3074.
- [HS87] M. Hilsum and G. Skandalis, *Morphismes K -orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov (d'après une conjecture d'A. Connes)*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **20** (1987), no. 3, 325–390.
- [Kar78] Max Karoubi, *K -theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1978, An introduction, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 226.
- [Kha09] Massoud Khalkhali, *Basic noncommutative geometry*, European Mathematical Society Publishing House, 2009.
- [Lan16] M. Lanius, *Symplectic, poisson, and contact geometry on scattering manifolds*, arXiv :1603.02994 (03/2016).
- [Mac87] K. Mackenzie, *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 124, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [Mac05] ———, *General theory of lie groupoids and lie algebroids*, London Mathematical Society Lecture Note Series; 213, Cambridge University Press, June 2005.
- [Mel93] R.B. Melrose, *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, Research Notes in Mathematics, vol. 4, A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1993.
- [MM03] I. Moerdijk and J. Mrčun, *Introduction to foliations and Lie groupoids*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 91, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [Mon03] B. Monthubert, *Groupoids and pseudodifferential calculus on manifolds with corners*, J. Funct. Anal. **199** (2003), no. 1, 243–286.
- [MP97] Richard B. Melrose and Paolo Piazza, *Families of Dirac operators, boundaries and the b -calculus*, J. Differential Geom. **46** (1997), no. 1, 99–180. MR 1472895
- [MP12] Hitoshi Moriyoshi and Paolo Piazza, *Eta cocycles, relative pairings and the Godbillon-Vey index theorem*, Geom. Funct. Anal. **22** (2012), no. 6, 1708–1813. MR 3000501
- [MR04] Richard Melrose and Frédéric Rochon, *Families index for pseudodifferential operators on manifolds with boundary*, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 22, 1115–1141. MR 2041651
- [MRW87] P. S. Mulhy, J. N. Renault, and D. P. Williams, *Equivalence and isomorphism for groupoid C^* -algebras*, J. Operator Theory, vol. 17 - no. 1, 1987, pp. 3–22.
- [Ren80] J. Renault, *A groupoid approach to C^* -algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 793, Springer, Berlin, 1980.
- [Tu04] J.-L. Tu, *Non-Hausdorff groupoids, proper actions and K -theory*, Doc. Math. **9** (2004), 565–597 (electronic).
- [WO93] N. E. Wegge-Olsen, *K -theory and c^* -algebras : A friendly approach*, Oxford University Press, USA, 1993.