



HAL
open science

Complétion de l'Espace des Modules des Métriques d'Einstein en Dimension 4

Tristan Ozuch

► **To cite this version:**

Tristan Ozuch. Complétion de l'Espace des Modules des Métriques d'Einstein en Dimension 4. Géométrie différentielle [math.DG]. École Normale Supérieure (Paris), 2020. Français. NNT: . tel-03137993

HAL Id: tel-03137993

<https://theses.hal.science/tel-03137993>

Submitted on 10 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée à l'École Normale Supérieure

**Complétion de l'Espace des Modules des Métriques
d'Einstein en Dimension 4**

Soutenue par

Tristan OZUCH

Le 03 juillet 2020

Ecole doctorale n° 386

**Sciences Mathématiques de
Paris-Centre**

Spécialité

Mathématiques

Composition du jury :

Gilles CARRON Professeur, Université de Nantes	<i>Rapporteur</i>
Michael SINGER Professeur, University College London	<i>Rapporteur</i>
Gérard BESSON Professeur, Université de Grenoble	<i>Examineur</i>
Gilles COURTOIS Professeur, CNRS et IMJ-PRG	<i>Examineur</i>
Marc HERZLICH Professeur, Université de Montpellier	<i>Examineur</i>
Pierre PANSU Professeur, Université Paris-Saclay	<i>Examineur</i>
Olivier BIQUARD Professeur, École Normale Supérieure	<i>Directeur de thèse</i>

Résumé

Nous étudions la complétion de l'ensemble des métriques d'Einstein à volume normalisé en dimension 4. Leurs dégénérescences ont été observées dans les années 70 et comprises au sens de Gromov-Hausdorff dans les années 80. Nous montrons que toute métrique d'Einstein proche au sens de Gromov-Hausdorff d'une métrique singulière est le résultat d'un processus de recollement-perturbation que l'on développe. Cette nouvelle description nous permet d'étendre une obstruction observée par Biquard au cadre général autorisant la formation d'arbres de singularités en un nombre arbitraire de points et en supposant une simple proximité de Gromov-Hausdorff. Elle rend aussi possible de nouvelles constructions de métriques d'Einstein et l'étude de l'espace de modules des métriques d'Einstein au voisinage de son bord.

Abstract

We study the completion of the set of unit-volume Einstein 4-manifolds. Their degenerations were observed in the 70's and understood in the 80's in a Gromov-Hausdorff sense. We prove that any smooth Einstein 4-manifold close to a singular one in a mere Gromov-Hausdorff sense is the result of a gluing-perturbation procedure that we develop. This new description lets us extend Biquard's obstruction to a general setting, allowing multiple singularities and trees of singularities and only assuming a Gromov-Hausdorff convergence. This enables the construction of new Einstein metrics and also sheds light on the structure of the moduli space of Einstein 4-manifolds near its boundary.

À ma mère.

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier mon directeur de thèse, Olivier Biquard, qui m'a guidé depuis mon arrivée à l'ENS. Olivier m'a tout d'abord permis d'effectuer des séjours de recherche passionnants avant de me présenter un sujet de thèse si porteur et fascinant. Merci d'avoir cru en moi et pour ton soutien. Je tiens ensuite à remercier Gilles Carron d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Sa relecture si précise m'a largement permis de corriger et d'améliorer ce manuscrit et nos discussions mathématiques ont toujours été si instructives. I would then like to also thank Michael Singer for reviewing my thesis. His insightful comments greatly helped me.

Je tiens aussi à remercier les autres membres de mon jury : Gérard Besson, Gilles Courtois, Marc Herzlich et Pierre Pansu. Cela a été un honneur de présenter et discuter de mes résultats devant une telle liste de mathématiciens dont les travaux originaux et profonds, déjà devenus des classiques, m'ont grandement inspiré depuis des années.

Durant ces années de thèse, j'ai eu la chance et l'honneur rencontrer des mathématicien(ne)s exceptionnel(le)s :

- Alix Deruelle avec qui j'ai la chance de collaborer,
- Dmitri Burago, Richard Bamler, Aaron Naber and Bruce Kleiner who invited me to their respective universities for semester-long research internship during which I learned so much about Mathematics and Geometric Analysis in exciting places,
- Alexis Michelat (depuis 2013!), Antoine Song, Davide Parise et Bruno Premoselli avec qui j'ai eu des discussions mathématiques fascinantes,
- Michael Anderson, Jeff Cheeger, Xiuxiong Chen, Joel Fine, Hajo Hein, Claude Lebrun, Heather Macbeth, and Christina Sormani with whom I had inspiring discussions during my visits abroad.

J'aimerais aussi remercier mes amis :

- de l'ENS ; Alex, Bérénice, Emma, Florestan, Gauthier, Guillaume, Idriss, Jeanne, Léna, Manon, Samy, Theodor, et les autres qui se reconnaîtront.

- du bureau ; Thomas, Vladimiro et Elie.

- de prépa ; Cosme, Charlie, et Makhtar et Yassin (merci pour votre accueil à New York!). Sans oublier les professeurs qui nous ont épaulés, en particulier Jean-Claude Soladié et Denis Favennec.

- de Poitiers : en particulier Omar, Jean-Thomas, Emilie, Axelle, Gaby et Clément.

- de la natation/du triathlon ; Sophie et Colo.

Merci aussi à Zaina pour sa sympathie et sa compétence pendant ces années à l'ENS.

J'aimerais dire un grand merci aux Genevay pour leur gentillesse, leur hospitalité et leur générosité, tout particulièrement pendant ces longs mois de confinement : Alex, Marie-Ange, Gérald, Solange, Jean...

Je remercie aussi les Ozuch pour l'accueil dans le Nord ainsi que pour leur courageux voyage jusqu'à Paris pour assister à la soutenance de cette thèse : Christian, Mona, Judith et Alexis.

Finalement, mes deux derniers remerciements vont évidemment à mes deux plus grands soutiens : Aude depuis quelques années et j'espère beaucoup d'autres, et ma mère depuis toujours.

Maman, je te dois tout et j'espère qu'après tous tes sacrifices et ces années difficiles, j'arrive au moins à te rendre fière en retour.

Table des matières

Abstract	i
Remerciements	iii
Résumé de la Thèse	5
1 Motivations et résultats antérieurs	5
2 Contributions de la thèse	11
3 Perspectives de recherche	17
Outline of the Thesis	19
Notations	20
Chapitre 1 : Espace de modules des métriques d'Einstein	21
1 Équation d'Einstein	21
1.1 Invariances de l'équation d'Einstein	22
1.2 L'équation d'Einstein en coordonnées harmoniques	23
1.3 L'équation d'Einstein en jauge de Bianchi	24
1.4 L'équation d'Einstein en jauge divergence	28
2 Espace de modules des métriques d'Einstein	30
3 Structure au voisinage d'une métrique lisse	35
3.1 Applications analytiques entre espaces de Banach	35
3.2 Structure d'ensemble analytique de l'espace de modules	36
3.2.1 Pré-espace de modules classique	37
3.2.2 Un nouveau pré-espace de modules	38
4 Voisinage d'une métrique lisse au sens de Gromov-Hausdorff	42
4.1 Distance de Gromov-Hausdorff et compacité	42
4.2 Compacité de Cheeger-Gromov	43
4.3 Régularité des métriques d'Einstein	45
4.3.1 ε -régularité des métriques à courbure de Ricci bornée	45
4.3.2 De Gromov-Hausdorff à C^∞	46
5 Applications	48
5.1 Complétude de l'espace de modules en dimension 2 et 3	48
5.2 Proximité $C^{k,\alpha}$ d'ordre optimal avec une métrique ronde	49

Chapitre 2 :	Complétion de GH en dimension 4	53
1	Métriques d'Einstein en dimension 4	53
1.1	Particularités des métriques d'Einstein en dimension 4	54
1.1.1	Topologie de dimension 4	54
1.1.2	Courbure et 2-formes en dimension 4	54
1.1.3	Norme L^2 de la courbure	55
1.1.4	Inégalité d'Hitchin-Thorpe	55
1.2	Variétés Ricci-plates ALE et singularités orbifolds	56
1.2.1	Définitions	56
1.2.2	Exemples de dégénérescences de variétés d'Einstein	58
1.2.3	Sous-groupes finis de $SO(4)$	60
1.2.4	Exemples connus d'orbifolds Ricci-plats ALE	61
1.3	Questions sur les métriques d'Einstein en dimension 4	63
2	Arbre de singularités	64
2.1	Contrôles uniformes et ε -régularité	65
2.2	Concentration de l'énergie à différentes échelles	66
3	Contrôle de la courbure des anneaux de basse énergie	68
3.1	Inégalités différentielles sur la courbure	69
3.2	Étude des solutions de l'équation $\Delta u \geq -fu$	72
3.3	Conséquences pour la courbure des anneaux de basse énergie	73
4	Orbifolds et espaces ALE	75
4.1	Structure des singularités	75
4.2	Coordonnées d'ordre optimal	78
Chapitre 3 :	De Gromov-Hausdorff à C^∞ à poids	83
1	Arbres des singularités et désingularisations naïves	84
1.1	Désingularisation naïve d'orbifold	84
1.2	Coordonnées sur une désingularisation naïve	86
1.3	Coordonnées sur une variété d'Einstein	87
2	Des premières coordonnées dans les anneaux intermédiaires	89
2.1	Construction des premières coordonnées	89
2.2	Utilité de ces premières coordonnées	95
3	Contrôle des hypersurfaces CMC	98
4	Perturbation de presque sphères	106
5	Feuilletage CMC des anneaux de basse courbure	110
5.1	Feuilletage local	111
5.2	Feuilletage global	114
6	Coordonnées optimales et contrôle de la métrique	116

6.1	Coordonnées basées sur le feuilletage	116
6.2	Expression de la métrique	117
6.3	Contrôle de la métrique	118
6.4	Contrôle C^∞ à poids global	121
Chapitre 4 : Désingularisation de métriques d'Einstein		123
1	Espaces fonctionnels	124
1.1	Une réécriture du contrôle entre les métriques	124
1.2	Espaces de Hölder à poids sur les orbifolds et ALE	126
1.3	Espaces fonctionnels sur les arbres de singularités	127
1.4	Estimations de Schauder à poids	130
1.5	Normes de découplage	132
1.5.1	Estimations dans ces normes	139
1.5.2	Estimations elliptiques	142
2	Jauge divergence réduite	143
2.1	Noyau de la linéarisation	144
2.2	Contrôle de l'inverse de la linéarisation	147
2.3	Métriques d'Einstein en jauge	157
3	Résolution de l'équation d'Einstein modulo obstructions	158
3.1	Noyau et conoyau de la linéarisation	159
3.2	Résolution de l'équation	170
4	Préespace de modules autour d'une métrique singulière	177
Chapitre 5 : Obstructions à la désingularisation		179
1	Contrôle des obstructions	180
2	Obstruction en un des points singuliers	182
2.1	Perturbation des bulles	183
2.2	Contrôle de l'opérateur modulo obstructions	185
2.3	Une première obstruction	187
2.4	Une question d'intégrabilité	188
2.4.1	Développements des métriques Ricci-plates ALE	189
2.4.2	Une nouvelle désingularisation naïve	190
2.4.3	Une meilleure approximation	192
3	Obstruction à tous les points singuliers	199
3.1	Désingularisations naïves partielles et espaces à poids	199
3.2	Résolution de l'équation modulo obstructions	201
3.3	Désingularisations totales et approximations	202
4	Obstruction à la formation d'arbres de bulles connues	205
4.1	Obstructions pour la métrique d'Eguchi-Hanson	205

4.2	Autres variétés Ricci-plates ALE kählériennes	208
4.3	Arbres de singularités et obstructions	211
4.3.1	Contrôle des instantons gravitationnels	211
4.3.2	Recollement d'instantons gravitationnels	217
4.3.3	Obstructions pour les arbres kählériens	221
5	Obstructions sous des hypothèses topologiques	225
5.1	Inégalité de Hitchin-Thorpe et obstructions	226
5.2	Variétés spin	228
5.3	Courbure de Ricci pincée et constante	229
6	Une obstruction générale	231
6.1	Des déformations infinitésimales générales	231
6.2	Orbifolds Ricci plats ALE et volume maximal	233
6.3	Obstruction pour les orbifolds sphériques et hyperboliques	233
Appendices		237
Chapitre A : Perturbation d'hypersurfaces		239
1	Perturbations normales quelconques	239
2	Perturbations infinitésimales	248
Chapitre B : Dégénérescence des métriques AdS-Taub-Bolt		251
1	Limite d'éclatements	251
2	L'ordre de précision suivant	253
 Bibliographie		 257

Résumé de la Thèse

1 Motivations et résultats antérieurs

Une question centrale en géométrie riemannienne est la suivante : étant donnée une variété différentielle M , existe-t-il une métrique g *optimale* sur M ? Ou autrement dit, peut-on trouver une géométrie qui reflète au mieux la topologie ? Après avoir fixé une notion d’“optimalité”, répondre à cette question suppose à la fois de bien comprendre ces métriques optimales et d’être capable de les trouver ou de les construire.

Une métrique peut par exemple être dite *optimale* si elle est particulièrement homogène ou bien la moins courbée possible, ce qui peut être mesuré par une certaine fonctionnelle de courbure. Une première fonctionnelle naturelle pour cela est celle d’Hilbert-Einstein qui est la moyenne spatiale des moyennes directionnelles des courbures sectionnelles :

$$\bar{R}(g) := \frac{1}{\text{Vol}(M, g)} \int_M R_g \, d\text{vol}_g,$$

avec R_g la courbure scalaire et $d\text{vol}_g$ la mesure de volume riemannien. Les points critiques de cette fonctionnelle à volume fixé sont les *métriques d’Einstein*, c’est-à-dire les métriques à courbure de Ricci constante qui satisfont

$$\text{Ric}(g) = \Lambda g$$

pour un certain réel Λ . Cette notion est issue de la physique dans le cadre lorentzien, mais c’est aussi une propriété naturelle à étudier en géométrie riemannienne. Une telle condition d’homogénéité de la courbure peut être considérée comme *optimale* tout en étant moins *rigide* que la condition de courbure constante correspondant seulement aux géométries sphérique, plate et hyperbolique trop rares en haute dimension, mais plus forte que la condition *souple* de courbure scalaire constante trop abondante en haute dimension.

En dimension 4, une raison supplémentaire de considérer les métriques d'Einstein comme optimales est la suivante : une quantité naturelle et invariante par changement d'échelle pour mesurer à quel point une métrique est courbée est la norme L^2 du tenseur de courbure de Riemann, noté Rm . La formule de Chern-Gauss-Bonnet implique que pour toute métrique g sur une variété M , on ait,

$$\int_M |\text{Rm}_g|^2 dv_g = 8\pi^2 \chi(M) + \underbrace{\int_M |\text{Ric}_g^0|^2 dv_g}_{\geq 0}, \quad (0.1)$$

où $\text{Ric}_g^0 = \text{Ric}_g - \frac{\text{R}_g}{4}g$ est la partie sans trace de la courbure de Ricci et où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler qui ne dépend pas de g . On en déduit donc que les métriques satisfaisant $\text{Ric}^0 \equiv 0$ sont les *seules* à minimiser $\int_M |\text{Rm}_g|^2 dv_g$ quand elles existent. Ce sont exactement les métriques d'Einstein par la contraction de la seconde égalité de Bianchi, et pour ces métriques, la quantité $\int_M |\text{Rm}_g|^2 dv_g = 8\pi^2 \chi(M)$ est de plus purement topologique.

En dimension 2, où les courbures scalaires, de Ricci et sectionnelles sont proportionnelles, les métriques *optimales* sont classifiées : le théorème d'uniformisation implique qu'il existe toujours une métrique à courbure constante (donc d'Einstein) de volume 1 sur une surface donnée et la valeur de sa constante d'Einstein détermine complètement la topologie.

En dimension 3, la preuve de la conjecture de la géométrisation de Thurston par Perelman décompose les 3-variétés en des parties équipées de métriques optimales, *géométrisées*. Les métriques d'Einstein et le flot de Ricci, le flot parabolique qui leur est associé, jouent un rôle fondamental dans ces deux descriptions et on suppose que ce sera encore le cas en dimension 4. Notons que cela ne semble cependant pas raisonnable à partir de la dimension 5.

À partir de la dimension 4, la situation devient bien plus compliquée, en partie parce que la condition d'Einstein n'implique plus que les métriques aient une courbure riemannienne constante. La situation peut même *dégénérer*, dans le sens où des suites de métriques d'Einstein lisses peuvent converger vers des espaces singuliers. Comme dit précédemment, un espoir est tout de même de comprendre la géométrie en dimension 4 à l'aide du flot de Ricci. Une première étape est alors d'étudier les flots "triviaux" donnés par les métriques d'Einstein en dimension 4.

Notons aussi que certaines variétés de dimension 3 et 4 ne peuvent pas avoir de métriques d'Einstein pour des raisons topologiques (l'équation (0.1) implique par exemple qu'il n'en existe pas si $\chi(M^4) < 0$), mais qu'aucun résultat de ce

type n'existe en dimension supérieure. À partir de la dimension 5, la condition d'Einstein devient étonnamment souple et donne lieu à des ensembles de solutions arbitrairement compliqués. L'intuition serait qu'il existe en réalité bien trop de métriques d'Einstein en haute dimension.

Dans l'étude des variétés d'Einstein, des suites de variétés apparaissent souvent très naturellement, par exemple dans l'étude d'espaces de modules, dans des suites de contre-exemples ou plus généralement quand on veut approcher un comportement limite. Il convient donc d'être capable d'obtenir des limites de sous-suites, c'est-à-dire avoir une propriété de compacité.

Dans les deux premiers chapitres de cette thèse, nous présentons les propriétés des métriques d'Einstein en dimension générale puis en dimension 4, qui serviront de base au reste de la thèse. Nous montrons ces résultats en nous appuyant sur des preuves ou énoncés partiels disséminés dans la littérature des années 70 et 80.

Espace de modules des métriques d'Einstein

Dans le premier chapitre, nous synthétisons les résultats existants sur la structure de l'espace de modules des métriques d'Einstein en toute dimension.

La condition d'Einstein étant invariante par changement d'échelle et par l'action des difféomorphismes par tiré en arrière. Nous définissons donc *l'espace de module des métriques d'Einstein* sur une variété compacte M comme le quotient de l'ensemble des métriques d'Einstein de volume 1 par $\mathcal{D}(M)$, le groupe des difféomorphismes de M :

$$\mathbf{E}(M) := \left\{ (M, g) \mid \exists \Lambda \in \mathbb{R}, \text{Ric}(g) = \Lambda g, \text{Vol}(M, g) = 1 \right\} / \mathcal{D}(M).$$

Cet espace est assez simple jusqu'en dimension 3, extrêmement compliqué à partir de la dimension 5 et la question de sa complexité reste ouverte en dimension 4. Classiquement, l'étude d'un espace de modules nécessite de comprendre sa compactification si possible avec une structure utile.

La distance fondamentale pour compactifier de tels ensembles est la distance entre espaces métriques, appelée *distance de Gromov-Hausdorff* et que l'on notera d_{GH} . Cette faible notion de distance a d'excellentes propriétés de compacité, par exemple pour les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée.

Théorème 0.1 ([Gro81]). *Soit $(M_i^n, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variétés (resp. de variétés pointées) de dimension n satisfaisant : pour tout $i \in \mathbb{N}$,*

1. *la courbure de Ricci de g_i est uniformément minorée,*

2. le diamètre de (M_i, g_i) est uniformément majoré.

Alors, il existe une sous-suite qui converge vers un espace métrique (resp. espace métrique pointé) (X, d) au sens de Gromov-Hausdorff.

Une question cruciale en géométrie que soulève cet énoncé est : quelle est la structure de l'espace (X, d) obtenu comme limite d'une suite de $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ayant des propriétés données ? Et que peut-on dire de la convergence ?

Par un théorème classique attribué Cheeger et prouvé dans le premier chapitre de cette thèse, l'ensemble des métriques d'Einstein à volumes uniformément minorés, courbures sectionnelles et diamètres uniformément bornés est compact pour la distance de Gromov-Hausdorff. Plus précisément, (X, d) , la d_{GH} -limite d'une suite de telles métriques est une variété d'Einstein et la convergence est lisse.

Compactification de l'espace de modules des métriques d'Einstein en dimension 4

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, nous étudions la compactification de l'espace de modules des métriques d'Einstein en dimension 4 et prouvons de manière concise la plupart des résultats obtenus jusqu'au début des années 90 dont nous nous servirons ensuite.

Sans bornes sur la courbure, nous avons toujours un résultat de précompacité dans le cas des variétés d'Einstein de dimension 4. Le théorème suivant décrit les dégénérescences au sens de la faible distance de Gromov-Hausdorff. Il donne en particulier la structure des *espaces singuliers* qui peuvent apparaître comme limites, les *orbifolds d'Einstein* (voir la définition 2.2).

Théorème 0.2 ([And89, BKN89, CT06]). *Soit M^4 une variété différentielle compacte de dimension 4. Alors, nous avons la décomposition suivante pour la compactification $(\overline{\mathbf{E}(M)}_{GH}, d_{GH})$ de $(\mathbf{E}(M), d_{GH})$:*

$$\overline{\mathbf{E}(M)}_{GH} = \mathbf{E}(M) \cup \partial_o \mathbf{E}(M) \cup \partial_\infty \mathbf{E}(M) \quad (0.2)$$

où $\partial_o \mathbf{E}(M)$ est composé d'espaces compacts singuliers appelés orbifolds d'Einstein de volume 1, et où $\partial_\infty \mathbf{E}(M)$ est composé d'espaces métriques noncompacts.

Les espaces noncompacts de $\partial_\infty \mathbf{E}(M)$ viennent de deux comportements qui apparaissent aussi en dimension 2 : la formation de *cusps* et l'*effondrement* vers un espace de dimension inférieure. Lorsque le volume est fixé à 1, cela implique

que le diamètre tend vers l'infini, et donc que la distance d_{GH} à une métrique donnée tend vers l'infini.

Les orbifolds de $\partial_o \mathbf{E}(M)$ sont des espaces métriques qui sont des variétés riemanniennes hors d'un nombre fini de points où ils ont des singularités modelées sur des cônes plats \mathbb{R}^4/Γ pour $\Gamma \subset SO(4)$ agissant librement sur la sphère \mathbb{S}^3 .

Exemple 0.3. Le quotient de $\mathbb{S}^4 \subset \mathbb{R}^5$ par l'identification $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \sim (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, x_5)$ est un orbifold, souvent appelé "ballon de rugby" (ou "de football américain") avec deux singularités $\mathbb{R}^4/\{\pm \text{Id}\}$.

Le théorème de [And89, BKN89] décrit de plus les *bulles*, qui modèlent la formation des singularités et qui sont des variétés Ricci-plates et asymptotiquement localement euclidienne (ALE), c'est-à-dire asymptotiques à des cônes plats \mathbb{R}^4/Γ à l'infini. Ces bulles sont mal comprises à part quand elles sont kählériennes, auquel cas elles ont été classifiées. Une conjecture cruciale est la suivante.

Conjecture 0.4 ([BKN89]). Tout orbifold Ricci-plat ALE est kählérien et donc un quotient cyclique d'instanton gravitationnel d'après [Kro89a, Suv11].

Ce théorème laisse des questions en suspens, et en particulier celle de savoir s'il est possible d'effectuer le procédé inverse de la dégénérescence, la *désingularisation*.

Question 0.5 ([And10, 7.I.], traduit). "Une question ouverte depuis bien longtemps est celle de savoir si les métriques orbifolds d'Einstein peuvent être désingularisées au sens de Gromov-Hausdorff. L'idée serait ici d'inverser le processus de formation des singularités orbifolds par des variétés Ricci-plates ALE."

Notons aussi que le théorème 0.2 ne donne absolument pas de structure à la compactification.

Question 0.6. Peut-on décrire le voisinage de $\partial_o \mathbf{E}(M^4)$ dans $(\overline{\mathbf{E}(M^4)}_{GH}, d_{GH})$ plus précisément qu'au faible sens de Gromov-Hausdorff? Peut-on en déduire une structure locale utile?

Au voisinage de toute métrique lisse, $\mathbf{E}(M)$ a une structure d'ensemble analytique et y est donc une union finie de sous-variétés analytiques. Une structure semianalytique pour le voisinage de $\partial_o \mathbf{E}(M^4)$ dans $(\overline{\mathbf{E}(M^4)}_{GH}, d_{GH})$ impliquerait une réponse positive à la question suivante :

Question 0.7 ([And10] et [Bes87, 12.10]). L'ensemble $(\mathbf{E}(M^4), d_{GH})$ n'a-t-il localement qu'un nombre fini de composantes connexes?

La réponse est positive jusqu'en dimension 3 et négative à partir de la dimension 5, car $\mathbf{E}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2)$ a un nombre infini de composantes connexes par [WZ90].

Toutes ces questions reviennent à chercher de nouveaux raffinements à la compactification de l'ensemble des variétés d'Einstein en dimension 4 du théorème 0.2. C'est précisément l'objectif de cette thèse.

Désingularisation par recollement-perturbation

Une technique naturelle pour désingulariser des orbifolds est une méthode de recollement-perturbation : on recolle naïvement à l'orbifold des espaces Ricci-plats ALE pour obtenir une solution approchée de l'équation d'Einstein (l'objectif étant d'inverser la formation des singularités du théorème 0.2). Nous appellerons (M, g_t^D) le résultat de cette désingularisation, où t est l'ensemble des échelles de recollement. On peut alors parfois perturber l'espace obtenu après le recollement en une vraie variété d'Einstein proche de l'orbifold. L'existence de telles perturbations d'Einstein sans présence de structure kählérienne, et donc une réponse partielle à la question 0.5 d'Anderson a été formulée pour la première fois par Biquard [Biq13] dans le cadre asymptotiquement hyperbolique.

Étonnamment, sa méthode particulière de perturbation en une métrique d'Einstein n'est possible que si une *obstruction* est satisfaite. En notant \mathbf{R} la courbure de Riemann vue comme un endomorphisme symétrique sur les 2-formes, la condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une désingularisation par sa technique s'écrit $\det \mathbf{R} = 0$ en chaque point singulier de l'orbifold. Ce résultat d'obstruction a plusieurs hypothèses limitantes :

1. l'orbifold limite doit être rigide (ne pas avoir de déformations infinitésimales d'Einstein), avoir une courbure scalaire négative et un seul point singulier,
2. les termes de la suite doivent être proches d'une métrique g_t^D pour une certaine norme $C^{1,\alpha}$ à poids introduite dans [Biq13],
3. la bulle apparaissant doit être la métrique d'Eguchi-Hanson.

Ces hypothèses éloignent donc le résultat du cadre de la question 0.5. Une question naturelle à laquelle on se propose de répondre est alors la suivante :

Question 0.8 ([Biq13]). Supposons que la conjecture 0.4 soit vraie, la condition $\det \mathbf{R} = 0$ est-elle nécessairement satisfaite aux points singuliers des orbifolds d_{GH} -limites de variétés d'Einstein de dimension 4 ?

Cette condition de courbure n'est pas toujours vérifiée, elle n'est en particulier pas satisfaite pour le quotient de \mathbb{S}^4 de l'exemple 0.3 ou les orbifolds hyperboliques.

2 Contributions de la thèse

Dans cette thèse, nous raffinons dans un premier temps la convergence de [And89, BKN89] pour passer d'une proximité faible au sens de Gromov-Hausdorff à une proximité forte dans des espaces de Hölder à poids. Nous montrons que toute métrique d'Einstein suffisamment proche d'un orbifold d'Einstein au sens de Gromov-Hausdorff est obtenue par perturbation d'une métrique g_t^D dans ces espaces à poids particuliers. Cela éclaire la structure de $\overline{\mathbf{E}(M)}_{GH}$ au voisinage de $\partial_o \mathbf{E}(M)$. Nous prouvons ensuite une réciproque partielle : toute métrique g_t^D peut être perturbée en une métrique d'Einstein modulo certaines obstructions. Ces obstructions s'annulent si et seulement si une désingularisation d'Einstein est possible au faible sens de Gromov-Hausdorff. Nous identifions alors ces premières obstructions, qui sont maintenant des obstructions à des désingularisations générales, et en déduisons une réponse positive à la question 0.8 ainsi que plusieurs raffinements.

De Gromov-Hausdorff à C^∞ à poids

Le troisième chapitre de cette thèse présente les résultats de [Ozu19a] où la convergence de [And89, BKN89] est raffinée.

Le résultat principal de [Ozu19a] est que pour toute métrique d'Einstein g qui est d_{GH} -proche d'une métrique orbifold g_o , il existe une désingularisation naïve g_t^D proche de g au sens d'une norme de Hölder à poids que l'on notera $C_{\beta,*}^{l,\alpha}(g_t^D)$. Une borne sur cette norme à poids implique une décroissance dans les anneaux où se font les recollements entre bulles et singularités.

Théorème 0.9 ([Ozu19a]). *Soient $D_0, v_0 > 0$, $l \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, D_0, v_0, l) > 0$ tel que si (M, g) est une variété d'Einstein satisfaisant*

$$d_{GH}\left((M, g), (M_o, g_o)\right) \leq \delta,$$

alors, il existe une désingularisation naïve g_t^D de (M_o, g_o) et un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M$ tels que l'on ait

$$\|\varphi^* g - g_t^D\|_{C_{\beta,*}^{l,\alpha}(g_t^D)} \leq \varepsilon.$$

Nous nous approchons donc du cadre de la question 0.5 d'Anderson en décrivant concrètement ce à quoi toute dégénérescence ou désingularisation au sens de

Gromov-Hausdorff ressemble en un sens lisse.

La difficulté principale de la preuve d'un tel énoncé est la construction de coordonnées dans lesquelles comparer les métriques en un sens C^∞ à poids. Cela nécessite tout d'abord une analyse précise des anneaux qui relient les différents orbifolds et espaces ALE, puis la construction de coordonnées optimales dans ces zones. Ces coordonnées s'appuient sur un feuilletage des anneaux par des hypersurfaces à courbure moyenne constante.

Notons que ces espaces à poids $C_{\beta,*}^{l,\alpha}$ sont nécessairement différents de ceux de [Biq13] car ils sont adaptés au cadre général des dégénérescences d'Einstein :

- l'orbifold n'étant pas nécessairement rigide, la convergence vers l'orbifold limite peut être arbitrairement lente,
- les singularités peuvent apparaître à des vitesses différentes, et
- des arbres de singularités peuvent se former.

Désingularisation de métriques d'Einstein

Le quatrième chapitre de cette thèse présente la première partie de [Ozu19b]. Nous y prouvons le théorème de perturbation des métriques de désingularisation naïve g_t^D en des métriques d'Einstein modulo obstructions.

Nous étudions la réciproque du théorème 0.9 et montrons que toute métrique de désingularisation naïve g_t^D peut être $C_{\beta,*}^{l,\alpha}$ -perturbée en une métrique qui est d'Einstein modulo des obstructions. Ces obstructions sont des éléments du noyau approché de la linéarisation de l'opérateur d'Einstein. Nous qualifierons ces métriques d'Einstein modulo obstructions.

Théorème 0.10 ([Ozu19b]). *Soit g_t^D une désingularisation naïve d'un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) avec des échelles de recollement suffisamment petites.*

Alors, il existe un petit voisinage $C_{\beta,}^{2,\alpha}$ de g_t^D dans lequel il existe une unique métrique \hat{g}_t qui est d'Einstein modulo obstructions tout en satisfaisant des conditions de jauge par rapport à g_t^D .*

Ce théorème combiné au théorème 0.9 nous assure que l'on produit ainsi toutes les métriques d'un voisinage de $\partial_o \mathbf{E}(M)$ dans $(\mathbf{E}(M), d_{GH})$.

Corollaire 0.11 ([Ozu19b]). *Soit (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein. Il existe $\delta > 0$ tel que si (M, g) est une métrique d'Einstein satisfaisant*

$$d_{GH}((M, g), (M_o, g_o)) \leq \delta,$$

alors, (M, g) est isométrique à une des métriques \hat{g}_t du théorème 0.10.

La preuve du théorème 0.10 revient à effectuer une réduction de Lyapunov-Schmidt approchée pour l'opérateur d'Einstein en jauge en assurant des contrôles uniformes lorsque les échelles de recollement t tendent vers 0. Les normes $C_{\beta,*}^{l,\alpha}$ sont ici cruciales car elles *découplent* l'analyse sur chaque orbifold compact ou ALE. Cela permet de traiter le cas général de plusieurs singularités, d'arbres de singularités se formant à des vitesses arbitraires et d'orbifolds avec des déformations infinitésimales d'Einstein. La décroissance sur les anneaux de basse courbure est similaire à une borne $\varepsilon^\beta(r^\beta + r^{-\beta})$ pour $\beta > 0$ sur un anneau de rayons $0 < \varepsilon < 1$ et ε^{-1} où r est la distance au centre. Cela fait de ces anneaux des “zones tampons” entre l'analyse classique sur les 2-tenseurs bornés en $r^{-\beta}$ sur les ALE, et ceux bornés en r^β sur les orbifolds, et assure donc bonnes propriétés Fredholm aux opérateurs utilisés.

Notons de plus que les métriques \hat{g}_t sont d'Einstein exactement lorsque les obstructions du théorème 0.10 s'annulent. Pour mieux comprendre ces obstructions, nous aurons besoin d'informations sur les bulles se formant.

Obstruction à la désingularisation de métriques d'Einstein

Le cinquième et dernier chapitre est consacré à l'identification des obstructions à la perturbation des métriques g_t^D en des métriques d'Einstein, les résultats correspondent à la fin de [Ozu19b]. Grâce aux résultats de convergence de [Ozu19a] et du troisième chapitre, nous obtenons les premiers résultats d'obstructions à la désingularisation d'orbifolds d'Einstein au sens de Gromov-Hausdorff.

D'après le corollaire 0.11, ces obstructions sont exactement celles du théorème 0.10. Nous pouvons les approcher en construisant de meilleures approximations, notées g_t^A , des métriques d'Einstein modulo obstruction \hat{g}_t du théorème 0.10.

Obstructions pour les bulles connues

Les premières obstructions étant explicites, on peut les tester pour les orbifolds Ricci-plats ALE connus : les instantons gravitationnels et leurs quotients.

Notre premier résultat est une réponse positive à la question 0.8. Nous répondons à cette question et à sa généralisation au cas conjecturalement général de formation d'arbres d'orbifolds Ricci-plats ALE kählériens.

Théorème 0.12 ([Ozu19b], réponse partielle à la question 0.5). *Soit $(M_i, g_i)_i$ une suite de variétés d'Einstein convergeant au sens de Gromov-Hausdorff vers*

un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) en formant des arbres d'orbifolds Ricci-plats ALE kähleriens.

Alors, pour tout point singulier p de (M_o, g_o) , on a

$$\det \mathbf{R}_{g_o}(p) = 0.$$

L'obstruction est donc toujours satisfaite si la conjecture 0.4 est vraie. La preuve nécessite premièrement d'étendre l'obstruction $\det \mathbf{R}_{g_o}(p) = 0$ pour la métrique d'Eguchi-Hanson à tous les instantons gravitationnels et leurs quotients. Une seconde étape est de montrer que l'obstruction est satisfaite en tous les points singuliers, ce qui nécessite de considérer et de contrôler des désingularisations *partielles* où l'on ne désingularise que certains points. La dernière difficulté est celle des arbres de singularités. Nous tirons profit du fait que les arbres d'orbifolds Ricci-plats ALE kähleriens peuvent être recollés puis perturbés en une seule métrique Ricci-plate kählienne. Les propriétés de découplage des normes $C_{\beta,*}^{l,\alpha}$ sont encore une fois cruciales à chacune de ces étapes.

Le théorème 0.12 est essentiellement un résultat optimal dans le cas d'une singularité $\mathbb{R}^4/\{\pm \text{Id}\}$ dans le sens où c'est la seule obstruction *locale* à la désingularisation. En effet en combinant nos résultats à ceux de [Biq13, Biq16], nous voyons qu'il est possible de désingulariser un orbifold asymptotiquement hyperbolique non dégénéré ayant des singularités modelées sur $\mathbb{R}^4/\{\pm \text{Id}\}$ à l'aide de métriques d'Eguchi-Hanson *si et seulement si* la condition $\det \mathbf{R} = 0$ est satisfaite. Dans le cas compact, des obstructions *globales* (attendues) s'ajoutent au problème de désingularisation.

Remarque 0.13. Le théorème 0.9 ne nécessite aucune supposition sur les bulles qui ne doivent pas nécessairement être kähleriennes. Cette restriction dans le théorème 0.12 est due au fait que l'on ne connaisse pas d'autres variétés Ricci-plates ALE. Une question naturelle qui revient à mieux comprendre les variétés Ricci-plates ALE est la suivante :

Question 0.14 ([Ozu19b]). Tout orbifold d_{GH} -limite d'une suite de variétés d'Einstein en dimension 4 satisfait-il $\det \mathbf{R} = 0$ à chacune de ses singularités ?

La réponse est par exemple positive si les bulles ont des déformations intégrables et une vitesse de convergence d'ordre *exactement* 4 vers leur cône plat asymptotique, grâce à un article récent de Biquard-Hein [BH19] et aux techniques mises en oeuvre dans la fin de cette thèse.

Obstruction sous des hypothèses topologiques

Plutôt que d'attaquer cette question 0.14 qui semble hors de portée tout comme la conjecture 0.4, il est pour l'instant possible d'assurer sous certaines hypothèses topologiques que les variétés Ricci-plates ALE apparaissant sont kählériennes, et donc qu'il y a une obstruction à désingulariser les orbifolds. Les résultats qui suivent sont essentiellement des applications des théorèmes de [Nak90].

Inégalité de Hitchin-Thorpe et désingularisation d'Einstein

L'inégalité de Hitchin-Thorpe donne une obstruction topologique à l'existence de métriques d'Einstein sur une variété différentielle M :

$$2\chi(M) \geq 3|\tau(M)|,$$

où χ est la caractéristique d'Euler, et τ la signature. Ces invariants topologiques ont des définitions adaptées aux orbifolds que l'on notera $\tilde{\chi}$ et $\tilde{\tau}$, et tout orbifold M_o admettant une métrique d'Einstein satisfait

$$2\tilde{\chi}(M_o) \geq 3|\tilde{\tau}(M_o)|.$$

Nous remarquons alors que toute désingularisation d'Einstein dégrade cette inégalité, et le cas d'égalité est caractérisé.

Théorème 0.15 ([Ozu19b]). *Soit (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein avec l'orientation donnant $\tilde{\tau}(M_o) \geq 0$, et supposons que (M, g_i) soit une suite de métriques d'Einstein convergeant au sens de Gromov-Hausdorff vers (M_o, g_o) .*

On a alors l'inégalité suivante,

$$2\chi(M) - 3|\tau(M)| \geq 2\tilde{\chi}(M_o) - 3\tilde{\tau}(M_o).$$

De plus, on a égalité, si et seulement si M est une désingularisation de M_o par recollement d'arbres d'orbifolds kählériens Ricci-plats ALE dans la même orientation (c'est-à-dire avec des échelles de recollement dans $SO(4)$).

Dans ce cas d'égalité on a à tous les points singuliers la condition

$$\det \mathbf{R}_{g_o}^+ = 0,$$

où \mathbf{R}^+ est la partie autoduale de \mathbf{R} . On a donc aussi $\det \mathbf{R}_{g_o} = 0$ aux points singuliers.

Cas des dégénérescences de variétés spin

Une autre manière d’assurer que les bulles apparaissant sont bien des instantons gravitationnels est d’imposer à la suite de variétés dégénérant de satisfaire une condition topologique assez répandue, celle d’être spin.

Corollaire 0.16 ([Ozu19b]). *Soit M une variété spin de dimension 4 et $(M_o, g_o) \in \partial_o \mathbf{E}(M)$. Alors (M_o, g_o) est spin, et à tous ses points singuliers dont le groupe appartient à $SU(2)$, nous avons*

$$\det \mathbf{R}_{g_o}^+ = 0.$$

Premiers exemples d’obstruction à la désingularisation d’orbifolds d’Einstein sans supposer que les bulles apparaissant sont kählériennes

Nous pouvons ensuite utiliser notre théorème 0.9, qui ne repose pas sur le fait que les bulles apparaissant soient des instantons gravitationnels, pour montrer des résultats plus généraux d’obstructions. Ceux-ci reposent sur une observation de Biquard-Hein [BH19] à propos du volume renormalisé à l’infini des variétés Ricci-plates ALE. Nous avons pour l’instant besoin de supposer que les déformations infinitésimales d’Einstein des bulles apparaissant sont *intégrables*, c’est-à-dire les premiers jets de vraies déformations d’Einstein.

Théorème 0.17 ([Ozu19b]). *Les orbifolds sphériques et hyperboliques ne peuvent pas être désingularisés à l’aide de variétés Ricci-plates ALE dont toutes les déformations infinitésimales sont intégrables.*

L’hypothèse d’intégrabilité des déformations infinitésimales semble seulement technique. Nous conjecturons que les orbifolds sphériques et hyperboliques ne peuvent pas être limites de variétés d’Einstein.

Cela montre qu’il y a une différence importante entre les conditions de pincement sur la courbure de Ricci et la condition d’Einstein si l’on autorise la formation de singularités. En effet, si les singularités d’un orbifold sphérique ou hyperbolique (M_o, g_o) sont modélées sur des \mathbb{R}^4/Γ pour $\Gamma \subset SU(2)$, alors il existe une suite de variétés (M, g_i) avec une courbure de Ricci minorée par 3 et arbitrairement pincée autour de 3 en norme L^p pour tout $1 \leq p < +\infty$, et telle que (M, g_i) converge vers (M_o, g_o) au sens de Gromov-Hausdorff. Il n’existe pourtant pas de suite de variétés d’Einstein convergeant vers (M_o, g_o) .

3 Perspectives de recherche

Les résultats de cette thèse permettent d'envisager de répondre à des questions qui paraissaient jusqu'ici inaccessibles, comme la question 0.7.

Structure de l'espace des modules complété

La nouvelle description du voisinage de $\partial_o \mathbf{E}(M)$ dans $(\overline{\mathbf{E}(M)}_{GH}, d_{GH})$ du théorème 0.5 fournit enfin un cadre prometteur pour étudier la structure de la compactification $\overline{\mathbf{E}(M)}_{GH}$. En particulier, nous donnons à la fin du chapitre 4 une définition de préespace de modules au voisinage d'une métrique de $\partial_o \mathbf{E}(M)$. C'est une étape nécessaire pour considérer la question suivante qui permettrait de répondre à la question 0.7.

Question 0.18. L'ensemble $\overline{\mathbf{E}(M)}_{GH}$ admet-il une structure *semianalytique* au voisinage de $\partial_o \mathbf{E}(M)$?

En effet, le préespace de modules des métriques d'Einstein est un sous-ensemble des métriques d'Einstein modulo obstructions \hat{g}_t et sont exactement celles qui annulent l'opérateur d'Einstein qui est analytique. Le problème devient celui de la structure de l'ensemble des métriques \hat{g}_t .

Des obstructions d'ordres supérieurs

Une autre direction intéressante est celle de la recherche de nouvelles obstructions. L'objectif est de comprendre si les orbifolds qui peuvent être désingularisés par des métriques d'Einstein ont nécessairement une structure particulière. Une question serait par exemple la suivante :

Question 0.19. Un orbifold d'Einstein compact limite de métriques d'Einstein lisses est-il nécessairement kählérien ?

Notons que le résultat est manifestement faux dans le cadre asymptotiquement hyperboliques (qui est très différent) d'après l'exemple explicite de la métrique d'AdS-Taub-Bolt étudié dans l'annexe B.

Une compréhension plus fine des obstructions pourrait aussi permettre de comprendre dans combien de directions il est possible de désingulariser un orbifold d'Einstein donné. Cela serait utile pour attaquer la conjecture suivante qui formalise l'intuition que $\partial_o \mathbf{E}(M)$ n'est pas un *bord* de $\mathbf{E}(M)$ mais correspond plutôt à des morceaux manquants à l'intérieur de $\mathbf{E}(M)$. C'est le cas pour les dégénérescences de surfaces $K3$, voir [And92].

Conjecture 0.20 ([And10]). Le sous-ensemble $\partial_o \mathbf{E}(M^4)$ est de codimension 2 dans $\overline{\mathbf{E}(M^4)}_{GH}$.

Prouver cette conjecture reviendrait à montrer que s'il existe une direction de désingularisation d'un orbifold d'Einstein, alors il en existe au moins un espace de dimension 2.

Notons que cette conjecture est fautive dans le cadre, encore une fois très différent, des métriques asymptotiquement hyperboliques d'après [Biq13].

Métriques Ricci-plates compactes

Un problème classique de géométrie Riemannienne est de comprendre les métriques Ricci-plates. Depuis la preuve de la conjecture de Calabi par Yau, la question est de savoir si les métriques Ricci-plates compactes sont à holonomie réduite.

Dans [Pag81, GP79], une construction de métriques hyperkähleriennes est proposée sur des surfaces $K3$ par désingularisation de $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ à l'aide de métriques d'Eguchi-Hanson recollées dans la même orientation. Le meilleur candidat à l'existence d'une métrique Ricci-plate à holonomie générique est donné par la question suivante :

Question 0.21 ([Pag78]). Peut-on perturber les désingularisations de $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ par des métriques d'Eguchi-Hanson recollées dans des orientations *différentes* en des métriques Ricci-plates ? Cela donnerait une métrique Ricci-plate à holonomie générique.

Inspirés par [Biq13], Brendle et Kapouleas ont tenté une telle désingularisation dans [BK17] et ont identifié une obstruction à une configuration très particulière. Il serait important de considérer des désingularisations générales qui resteraient dans le cadre du théorème 0.10.

Désingularisations de métriques de Kähler-Einstein

Une autre application potentielle des résultats de cette thèse est celle des dégénérescences de métriques de Kähler-Einstein. Les résultats de désingularisation de [Spo14] et [BR15] nécessitent des hypothèses techniques venant essentiellement de l'utilisation de normes comme celle de [Biq13]. Il serait alors utile d'éliminer ces hypothèses techniques à l'aide des normes $C_{\beta,*}^{2,\alpha}$ introduites dans cette thèse. Cela permettrait peut-être d'atteindre le cadre des dégénérescences kähleriennes générales.

Outline of the Thesis

Notations

- Rm le tenseur de courbure $(3, 1)$.
 Sec une courbure sectionnelle.
 Ric la courbure de Ricci vue comme 2-tenseur.
 R la courbure scalaire.
 \mathbf{R} l'endomorphisme symétrique de courbure sur les 2-formes.
 $B(x, \rho)$ la boule de centre x de rayon ρ , on omettra le centre quand c'est le point distingué de la variété considérée.
 $A(\rho_1, \rho_2) = B(\rho_2) \setminus B(\rho_1)$ l'anneau centré en le point distingué de la variété considérée (pour \mathbb{R}^4/Γ , ce point est 0).
 A^Σ le 2-tenseur de seconde forme fondamentale d'une hypersurface Σ .
 H^Σ la courbure moyenne d'une hypersurface Σ .
 \mathcal{L} la dérivée de Lie.
 δ l'opérateur de divergence.
 δ^* l'adjoint formel de la divergence.
 B l'opérateur de Bianchi.
 $\mathring{\text{R}}$ l'action de la courbure sur les 2-tenseurs symétriques.
 Vol le volume total d'un ensemble.
 dv la forme de volume.
 Ω^k le fibré des k -formes sur une variété différentielle.
 χ la caractéristique d'Euler.

Chapitre 1

Espace de modules des métriques d'Einstein sur une variété

Dans ce chapitre, nous présentons succinctement les propriétés classiques de l'ensemble des métriques d'Einstein sur une variété différentielle donnée. Nous exhibons premièrement les invariances de l'équation d'Einstein qui motivent la définition de l'espace de modules des métriques d'Einstein. Nous présentons dans un second temps la théorie des déformations des métriques d'Einstein qui aboutira au fait que l'espace de modules des métriques d'Einstein a une structure de (quotient de) variété analytique. Nous étudions enfin le voisinage d'une métrique d'Einstein lisse au sens de Gromov-Hausdorff c'est-à-dire au sens des espaces métriques. Nous observons que des métriques d'Einstein suffisamment proches en ce sens faible sont difféomorphes et en réalité proches au sens lisse. Cela nous permet tout d'abord de montrer que l'espace de modules des métriques d'Einstein en dimension 2 ou 3 est complet pour la distance de Gromov-Hausdorff. Nous montrons enfin qu'une variété à courbures sectionnelles pincées autour de 1 est quantitativement proche d'un quotient de la sphère unité.

Contributions. Nous présentons de manière concise les méthodes et résultats de l'étude des métriques d'Einstein lisses disséminés dans de nombreux articles des années 60 à 80.

1 Équation d'Einstein

Une métrique d'Einstein est une métrique à courbure de Ricci constant. Plus précisément, on dira que g est d'*Einstein* s'il existe une constante Λ , appelée

constante d'Einstein, telle que l'on ait

$$\text{Ric}(g) = \Lambda g. \quad (1.1)$$

Cette équation est issue de la physique (dans le cadre lorentzien) car elle caractérise les points critiques de l'action d'Hilbert-Einstein à volume fixé,

$$\bar{\mathbf{R}}(g) := \int_M \mathbf{R}(g) dv_g. \quad (1.2)$$

C'est une fonctionnelle naturelle qui mesure la moyenne spatiale de la courbure scalaire qui est elle-même la moyenne directionnelle de la courbure Riemannienne.

Une autre motivation, plus géométrique pour l'étude de cette équation est la condition d'homogénéité sur la courbure. Imposer aux courbures sectionnelles d'être constantes n'autorise que trois géométries locales et impose des conditions topologiques bien trop restrictives pour être répandues à part en dimension 2 – c'est une condition trop rigide. Imposer à la courbure scalaire d'être constante est toujours possible mais donne des espaces de solutions de dimension infinie à part en dimension 2 – c'est une condition trop souple. La condition d'Einstein correspond à autant d'équations que de degrés de liberté sur la métrique (la courbure de Ricci et la métrique sont des 2-tenseurs symétriques en tout point) et heuristiquement ses solutions ne devraient être ni trop souples, ni trop rigides.

Nous verrons dans le chapitre suivant (ch.2) suivant qu'en dimension 4, une raison supplémentaire de considérer ces métriques est qu'elles *minimisent* l'énergie donnée par la norme L^2 de la courbure Riemannienne (lorsqu'elles existent).

1.1 Invariances de l'équation d'Einstein

L'équation d'Einstein est invariante par changement d'échelle car pour toute métrique g et toute constante positive s^2 , on a pour le 2-tenseur de courbure de Ricci

$$\text{Ric}(s^2g) = \text{Ric}(g). \quad (1.3)$$

Ainsi, si g satisfait $\text{Ric}(g) = \Lambda g$, alors nous avons

$$\text{Ric}(s^2g) = \Lambda g = \frac{\Lambda}{s^2}(s^2g).$$

De même, elle est invariante par l'action des difféomorphismes par tiré en

arrière. Pour tout difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M$, nous avons

$$\text{Ric}(\varphi^*g) = \varphi^* \text{Ric}(g), \quad (1.4)$$

et donc si $\text{Ric}(g) = \Lambda g$ est d'Einstein, alors pour tout difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M$, $\text{Ric}(\varphi^*g) = \Lambda(\varphi^*g)$. Cela implique que dès qu'une métrique d'Einstein existe sur une variété, alors il y a un espace de dimension infinie de telles métriques. En particulier, l'équation d'Einstein n'est, en l'état, pas elliptique.

1.2 L'équation d'Einstein en coordonnées harmoniques

Pour fixer une jauge locale, c'est-à-dire pour trouver des coordonnées locales naturelles et ainsi fixer l'action des difféomorphismes, un choix classique est celui des coordonnées harmoniques.

Définition 1.1 (Coordonnées harmoniques et rayon harmonique). Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n et $0 < \alpha < 1$ et soit $p \in M$. On définit son *rayon harmonique* en p , noté $r_h(p)$ comme étant le supremum des $r > 0$ tels qu'il existe un difféomorphisme local $\varphi : B(0, r) \subset \mathbb{R}^n \mapsto M$ avec

1. $\varphi(0) = p$,
2. $\Delta_{\varphi^*g} x^k = 0$, où Δ_{φ^*g} est l'opérateur de Laplace-Beltrami et où x^k est la k -ième coordonnée sur \mathbb{R}^n ,
3. $\|\varphi^*g - \sum_i (dx^i)^2\|_{C^{1,\alpha}} \leq 10^{-5}$. Cette valeur est évidemment arbitraire mais on souhaite qu'elle soit petite devant 1.

Les coordonnées données par un tel φ seront qualifiées d'*harmoniques*.

Remarque 1.2. Le choix de la régularité $C^{1,\alpha}$ est justifié par le fait que des bornes ponctuelles sur la courbure impliquent l'existence et le contrôle de telles coordonnées, ce sera détaillé dans la section 4 de ce chapitre. On ne peut par exemple pas espérer de contrôles C^2 . La constante 10^{-5} du troisième point est arbitraire et toute constante petite par rapport à 1 donne une définition satisfaisante.

Il est toujours possible de construire de telles coordonnées au voisinage d'un point d'une variété lisse. En effet, il suffit de considérer des coordonnées géodésiques (ou presque linéaires, voir [Jos84]) et de résoudre le problème de Dirichlet donné par leur valeur au bord d'une boule suffisamment petite.

La subtilité vient de la taille des voisinages sur lesquels de telles coordonnées existent. Les contrôles de la métrique en coordonnées géodésiques (ou presque linéaires) impliquent la proposition suivante.

Proposition 1.3 ([BKN89, Fact (2.9)]). *Soit x un point de M , et supposons que (M, g) ait un rayon d'injectivité $\text{inj}_x \geq i_0 > 0$, des courbures sectionnelles bornées par $K > 0$ sur $B_g(x, i_0)$. Alors, le rayon harmonique en tout point est minoré par une fonction de i_0 et K .*

L'une des motivations principales pour l'introduction de ces coordonnées est qu'elles donnent une régularité optimale aux métriques [DK81]. Une autre est la forme que prend la courbure de Ricci dans ces coordonnées.

Lemme 1.4. *En coordonnées harmoniques, la courbure de Ricci prend la forme suivante*

$$\text{Ric}(g)_{ij} = -\frac{1}{2}\Delta g_{ij} + Q_g(\partial g)_{ij}, \quad (1.5)$$

où $Q_g(\partial g)$ est une forme quadratique en la première dérivée de g dans ces coordonnées. L'expression est explicitée dans [BKN89, Fact (2.9), 1)] et l'on voit que Q_g dépend polynomialement des coefficients de g et g^{-1} mais pas de ses dérivées.

Il devient alors clair par régularité elliptique que les métriques d'Einstein sont analytiques dans ces coordonnées.

Corollaire 1.5. *Une métrique d'Einstein est analytique en coordonnées harmoniques.*

Démonstration. Par définition des coordonnées harmoniques, la métrique g est de classe $C^{1,\alpha}$, et $Q_g(\partial g)$ est donc de classe C^α . Comme nous avons

$$\Delta g_{ij} = 2Q_g(\partial g)_{ij} - 2\Lambda g_{ij}, \quad (1.6)$$

si la constante d'Einstein de g est Λ d'après (1.5), Δg_{ij} est de classe C^α . Ainsi, par estimations elliptiques, g_{ij} est de classe $C^{2,\alpha}$ à l'intérieur de la boule où les coordonnées sont définies. D'après (1.6), Δg_{ij} est alors de classe $C^{1,\alpha}$, puis g_{ij} est de classe $C^{3,\alpha}$... Pour enfin obtenir une métrique de classe C^∞ , puis analytique. \square

Remarque 1.6. La régularité de la métrique dépend grandement du système de coordonnées dans lequel elle est regardée. En effet, par exemple, si l'on tire en arrière la métrique Euclidienne par un difféomorphisme peu régulier, alors la métrique obtenue n'est plus nécessairement lisse.

1.3 L'équation d'Einstein en jauge de Bianchi

Il existe d'autres choix de jauge pour lesquelles l'équation d'Einstein a un comportement elliptique satisfaisant. Un premier choix tenant compte de l'identité de Bianchi est la jauge dite *de Bianchi*.

Définition 1.7 (Opérateur et jauge de Bianchi). Nous définissons l'opérateur de Bianchi comme appliqué à un 2-tenseur h comme étant $B_g(h) := \delta_g\left(h - \frac{\text{tr}_g h}{2}g\right)$, où δ_g est la divergence.

Ce choix est naturel pour rendre l'équation d'Einstein elliptique d'après le lemme suivant qui précise les linéarisations des courbures scalaires et de Ricci.

Lemme 1.8. *La linéarisation de la courbure de Ricci en une métrique g dans la direction h vaut*

$$d_g \text{Ric}(h) = \frac{1}{2} \left(\nabla^* \nabla h - 2\delta^* \delta h - \nabla^2 \text{tr} h - 2\mathring{\text{R}}(h) + \text{Ric} \circ h + h \circ \text{Ric} \right),$$

où pour une base orthonormée $(e_i)_i$ et deux champs de vecteurs X et Y , on définit

$$\mathring{\text{R}}(h)(X, Y) := \sum_i h(\text{Rm}(e_i, X)Y, e_i),$$

et où l'on identifie formes bilinéaires symétriques et endomorphismes à l'aide de la métrique pour définir la composition \circ . La linéarisation de la courbure scalaire est

$$d_g \text{R}(h) = -\Delta(\text{tr} h) + \delta \delta h - \langle \text{Ric}, h \rangle,$$

où tous les opérateurs sont pris pour la métrique g .

En particulier, lorsque g_0 est d'Einstein, avec $\text{Ric}(g_0) = \Lambda g_0$ et h est en jauge de Bianchi et satisfait $\int_M \text{tr}_{g_0} h \, dv_{g_0} = 0$, la linéarisation en g_0 de l'opérateur $g \mapsto \text{Ric}(g) - \frac{\overline{\text{R}}(g)}{n}g$ appliqué à h tel que $B_{g_0}h = 0$, est

$$P_{g_0}h := \frac{1}{2} \nabla_{g_0}^* \nabla_{g_0} h - \mathring{\text{R}}_{g_0} h$$

qui est elliptique.

Nous pouvons de plus résumer les deux équations, d'Einstein et de jauge de Bianchi, en une seule équation elliptique.

Lemme 1.9. *Soit (M, g_0) une variété d'Einstein compacte telle que $\text{Ric}(g_0) = \Lambda g_0$ avec $\Lambda < 0$ et soit g une autre métrique suffisamment proche en norme C^2 . Nous avons*

$$\begin{cases} \text{Ric}(g) = \frac{\overline{\text{R}}(g)}{n}g, & \text{et} \\ B_{g_0}g = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

si et seulement si nous avons

$$\Phi_{g_0}(g) := \text{Ric}(g) - \frac{\bar{\mathbf{R}}(g)}{n}g + \delta_g^* B_{g_0}g = 0, \quad (1.8)$$

où $\delta_g^* : X \mapsto \frac{1}{2}\mathcal{L}_Xg$ est l'adjoint formel de la divergence δ_g .

Démonstration. Il est clair que la première annulation implique la seconde. Réciproquement, supposons que

$$\text{Ric}(g) - \frac{\bar{\mathbf{R}}(g)}{n}g + \delta_g^* B_{g_0}g = 0,$$

En appliquant l'opérateur de Bianchi B_g pour lequel, par l'identité de Bianchi, nous avons $B_g \text{Ric}(g) = 0$, nous obtenons

$$B_g \delta_g^* B_{g_0}g = 0.$$

Or, nous avons $B_g \delta_g^* = \frac{1}{2}(\nabla_g^* \nabla_g - \text{Ric}(g))$ (voir par exemple l'exercice 2.10.32 de [Biq07]), et par intégration par parties, nous obtenons

$$0 = 2 \int_M \langle B_g \delta_g^* B_{g_0}g, B_{g_0}g \rangle dv_g = \int_M |\delta(B_{g_0}g)|^2 dv_g - \int_M \langle \text{Ric}(g)(B_{g_0}g), B_{g_0}g \rangle dv_g.$$

Si g est suffisamment proche de g_0 en norme C^2 , alors la plus grande valeur propre de $-\text{Ric}(g)$ est plus petite que la moitié de la plus grande valeur propre de $-\text{Ric}(g_0)$ sur (M, g_0) . On en déduit donc que $B_{g_0}g = 0$. \square

Remarque 1.10. Dans le cas où la variété a un volume infini, $\bar{\mathbf{R}}$ est mal défini et on le remplace par $n\Lambda$. Cela fixe cependant la constante d'Einstein et empêche de voir des déformations de métriques Ricci-plates en des métriques à courbure non-nulle.

Remarque 1.11. Dans certaines situations non compactes, il existe des déformations d'Einstein non Ricci-plates de métriques Ricci-plates. Par exemple, la famille de métriques $\eta \mapsto g_\eta := \frac{1}{\eta^2} g_{TB}(1 + \eta^2)$ pour $0 \leq \eta \ll 1$, où les $(g_{TB}(s))_s$ sont les métriques d'AdS-Taub-Bolt étudiées dans l'annexe B. En effet, nous avons $\text{Ric}(g_\eta) = -3\eta^2$, la courbe de métriques est lisse et part de $g_\eta = g_{EH}$ la métrique d'Eguchi-Hanson définie dans (2.5) du chapitre 2. Nous verrons à la fin de ce premier chapitre que lorsqu'une variété Ricci-plate a un volume fini, il existe un voisinage au faible sens de Gromov-Hausdorff dans lequel toutes les métriques d'Einstein sont Ricci-plates.

Un avantage de cette condition de jauge par rapport aux coordonnées harmoniques est le fait qu'elle peut être définie globalement pour des variétés proches de métriques d'Einstein à courbure de Ricci négative.

L'outil principal qui nous servira à de nombreuses reprises au cours de cette thèse est la version quantitative suivante du théorème des fonctions inverses entre espaces de Banach.

Lemme 1.12. *Soit $\Phi : E \rightarrow F$, une application lisse entre espaces de Banach, et soit $Q := \Phi - \Phi(0) - d_0\Phi$. Supposons qu'il existe $q > 0$, $r_0 > 0$ et $c > 0$ tels que :*

1. *pour tout x et y dans $B(0, r_0)$, on a le contrôle suivant sur la partie non linéaire de l'opérateur :*

$$\|Q(x) - Q(y)\| \leq q(\|x\| + \|y\|)\|x - y\|. \quad (1.9)$$

2. *la linéarisation $d_0\Phi$ est un isomorphisme, et plus précisément, on a :*

$$\|(d_0\Phi)^{-1}\| \leq c. \quad (1.10)$$

Si $r \leq \min\left(r_0, \frac{1}{4qc}\right)$ et $\|\Phi(0)\| \leq \frac{r}{2c}$, alors, l'équation $\Phi(x) = 0$ admet une unique solution dans $B(0, r)$.

Démonstration. La preuve est une application du théorème de point fixe de Banach. Remarquons pour cela qu'un zéro de Φ est caractérisé par une équation de point fixe. Notons $(d_0\Phi)^{-1}$ l'inverse de la linéarisation en 0 qui est un opérateur de norme plus petite que $c > 0$ par (1.10). Nous avons alors $\Phi(x) = 0$ si et seulement si nous avons

$$x = \Psi(x) := x - (d_0\Phi)^{-1}(\Phi(x)) = (d_0\Phi)^{-1}(d_0\Phi(x) - \Phi(x)),$$

où Ψ est donc un opérateur de E dans E .

Par le théorème de point fixe de Banach, il suffit alors de montrer que l'application est strictement contractante dans un certain voisinage de 0. Par le contrôle (1.9) et le contrôle (1.10), pour tous x et x' dans la boule de rayon r pour la norme de E , nous avons

$$\begin{aligned} \|\Psi(x) - \Psi(x')\|_E &= \|(d_0\Phi)^{-1}(Q(x) - Q(x'))\|_E \\ &\leq c\|Q(x) - Q(x')\|_F \\ &\leq 2rcq\|x - x'\|_E \end{aligned}$$

qui est donc contractante pour $r < \frac{1}{2c}$ et $r < r_0$, et si $\|\Phi(0)\|_F \leq \frac{r}{2c}$, nous pouvons donc appliquer nos itérations de point fixe et aboutir à la solution à la limite. \square

Nous pouvons appliquer cela à l'opérateur $g \mapsto B_{(\exp_X^{g_0})^*g_0}g$, où $\exp_X^{g_0} : x \in M \mapsto \exp_x^{g_0}(X(x))$ est un difféomorphisme. Sa linéarisation est $B\mathcal{L}_Xg = 2B\delta^*g$ (dans toutes ces formules, nous identifions 1-formes et champs de vecteurs à l'aide de la métrique). D'après la formule générale $B\delta^* = \frac{1}{2}(\nabla^*\nabla - \text{Ric})$, cette linéarisation est inversible si la courbure de Ricci est négative, voir la preuve (plus délicate) de la proposition 4.55 pour les détails.

Proposition 1.13. *Soit g_0 une métrique à courbure de Ricci strictement négative. Alors, pour tout $0 < \alpha < 1$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que si une métrique g satisfait $\|g - g_0\|_{C^{2,\alpha}(g_0)} < \varepsilon$. Alors, il existe un difféomorphisme $\Phi : M \rightarrow M$ proche de l'identité en norme $C^{3,\alpha}$ tel que*

$$B_{g_0}(\varphi^*g) = 0$$

1.4 L'équation d'Einstein en jauge divergence

Un autre choix de jauge qui comme la jauge de Bianchi pourra être assuré globalement est la jauge divergence.

Définition 1.14 (Jauge divergence). Nous dirons qu'une métrique g' est en jauge divergence par rapport à une métrique g si l'on a $\delta_g g' = 0$, où δ_g est l'opérateur de divergence.

Il est encore une fois possible de résumer le fait de satisfaire la condition d'Einstein tout en étant en jauge divergence à l'aide d'une seule équation, et ce sera développé dans la section 2 suivante.

L'avantage de cette jauge divergence par rapport à la jauge de Bianchi est qu'il est toujours possible de mettre des métriques $C^{k,\alpha}$ -proches l'une de l'autre en jauge divergence à l'aide d'un difféomorphisme $C^{k+1,\alpha}$, sans condition sur le signe de la courbure de Ricci, comme nous allons le voir dans le lemme suivant.

Lemme 1.15. *Pour toute métrique g_0 sur une variété M , et tout $l \in \mathbb{N}$, il existe $\delta > 0$ tel que : si une métrique g satisfait*

$$\|g - g_0\|_{C^{l+1,\alpha}} \leq \delta,$$

alors il existe un champ de vecteurs $X \in C^{l+2,\alpha}(TM)$ tel que, si l'on définit le difféomorphisme $\varphi_X := \exp_{g_0} X$, qui à x associe $\exp_x^{g_0} X(x)$, on ait,

$$\delta_{g_0}(\varphi_X^* g) = 0.$$

On peut de plus choisir X tel que pour une constante $C = C(g_0, l, \alpha) > 0$ on ait

$$\|X\|_{C^{l+2,\alpha}} \leq C \|\delta_{g_0} g\|_{C^{l,\alpha}}.$$

Démonstration. Mettre une métrique g en jauge divergence par rapport à g_0 signifie trouver un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M$ tel que $\delta_{g_0}(\varphi^* g) = 0$. Mais l'action par difféomorphisme

$$\varphi \mapsto \varphi^* g$$

n'est pas lisse de $C^{l+2,\alpha}$ dans $C^{l+1,\alpha}$. Cependant, comme on a $\varphi_* \delta_{g_0} \varphi^* g = \delta_{\varphi_* g_0} g$, et qu'il n'y a pas de problème de régularité avec le poussé en avant car g_0 est de classe C^∞ , on résoudra donc plutôt :

$$\delta_{\varphi_* g_0} g = 0,$$

qui impliquera bien que $\delta_{g_0}(\varphi^* g) = 0$. Pour ce faire, on s'intéresse à l'opérateur lisse suivant :

$$X \mapsto \Psi(X, g) := \delta_{(\exp_{g_0} X)_* g_0}(g)$$

où Ψ va de $C^{l+2,\alpha}(TM) \times B_{C^{l+1,\alpha}(g_0)}(g_0, \delta)$ dans $C^{l+\alpha}(T^*M)$. La linéarisation de cet opérateur au point $(0, g_0)$ suivant la première coordonnée est :

$$\partial_1 \Psi_{(0, g_0)}(X) = \delta_{g_0} \delta_{g_0}^* X.$$

Il y a maintenant deux cas, soit cet opérateur est inversible, soit il ne l'est pas (comme dans le cas de la sphère).

Si l'opérateur $\delta \delta^*$ est inversible (par exemple si $\text{Ric} < 0$), il suffit d'appliquer le lemme 1.12 dont les hypothèses sont satisfaites.

Si ce n'est pas le cas, alors l'opérateur $\delta \delta^*$ n'est en fait pas surjectif car Ψ doit satisfaire la contrainte

$$\Psi(X, g) \in \text{Im}(\delta_{\varphi_* g_0}) = \ker(\delta_{\varphi_* g_0}^*)^{\perp \varphi_* g_0}$$

Mais on sait que $\ker(\delta_{\varphi_* g_0}^*) = \varphi^* \ker(\delta_{g_0}^*)$. Cela implique que si φ est assez proche de l'identité et si g est assez proche de g_0 , alors $\delta_{\varphi_* g_0} g = 0$ si et seulement si

$\pi_{\text{Im}(\delta_{g_0})}^{g_0} \delta_{\varphi^* g_0} g = 0$ où $\pi_{\text{Im}(\delta_{g_0})}^{g_0}$ est la projection orthogonale sur $\text{Im}(\delta_{g_0})$ par rapport à g_0 . En effet, nous avons

$$\text{Im}(\delta_{\varphi^* g_0}) = \ker(\delta_{\varphi^* g_0}^*)^{\perp \varphi^* g_0},$$

et tous les noyaux ont donc la même dimension. On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites comme dans le cas inversible à $\pi_{\text{Im}(\delta_{g_0})}^{g_0} \circ \Psi$ restreint à $\text{Im}(\delta_{g_0})$, où $\pi_{\text{Im}(\delta_{g_0})}^{g_0}$ est la projection sur $\text{Im}(\delta_{g_0})$. On en déduit l'existence d'un champ de vecteurs mettant les métriques en jauge divergence l'une par rapport à l'autre. La solution est de plus unique à un élément de $\text{Isom}(g_0)$ -près. \square

La condition de jauge divergence définit une *tranche* de métriques par le théorème de la tranche d'Ebin suivant.

Lemme 1.16 (Théorème de la tranche d'Ebin, [Ebi70]). *Soit g_0 une métrique sur une variété compacte M , et soient $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$. Notons $\mathcal{D}^{k+1,\alpha}(M)$ le groupe des difféomorphismes de M dans M de classe $C^{k+1,\alpha}$, et $\mathcal{M}^{k,\alpha}(M)$ l'ensemble des métriques de classe $C^{k,\alpha}$.*

Alors, il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel l'ensemble $S_\varepsilon := B_{C^{k,\alpha}}(g_0, \varepsilon) \cap \ker(\delta_{g_0})$ est une tranche de l'action par $\mathcal{D}^{k+1,\alpha}(M)$, c'est-à-dire que :

- *si $\varphi \in \text{Isom}(M, g_0)$, alors $\varphi(S_\varepsilon) \subset S_\varepsilon$,*
- *si $\varphi \in \mathcal{D}^{k+1,\alpha}(M)$ et $\varphi(S_\varepsilon) \cap S_\varepsilon \neq \emptyset$, alors $\varphi \in \text{Isom}(M, g)$, et*
- *soit une section $\sigma : \mathcal{D}^{k+1,\alpha}(M)/\text{Isom}(M, g) \rightarrow \mathcal{D}^{k+1,\alpha}(M)$, alors, $F : \mathcal{D}^{k+1,\alpha}(M)/\text{Isom}(M, g) \times S_\varepsilon \rightarrow \mathcal{M}^{k,\alpha}(M)$ défini par $F(\varphi, g) = \sigma(\varphi)^* g$ est un homéomorphisme d'un voisinage de (Id, g_0) .*

2 Espace de modules des métriques d'Einstein

Étant donnée une variété différentielle compacte M de dimension n , on définit $\mathcal{M}(M)$, l'ensemble des métriques riemanniennes de classe C^∞ sur M qui est un sous-ensemble des 2-tenseurs symétriques sur M , $S^2(M)$. Parmi celles-ci, nous serons particulièrement intéressés par l'ensemble des métriques d'Einstein sur M que l'on notera $\mathcal{E}(M) \subset \mathcal{M}(M)$.

La condition d'Einstein étant stable par changement d'échelle et par l'action du groupe des difféomorphismes de classe C^∞ (qui est de dimension infinie) d'après la section précédente. Définissons alors l'espace de modules des métriques d'Einstein

sur M comme le quotient de $\mathcal{E}(M)$ par ces deux actions,

$$\mathbf{E}(M) := \{g \mid \exists \Lambda \in \mathbb{R}, \text{Ric}(g) = \Lambda g, \text{Vol}(M, g) = 1\} / \mathcal{D}(M),$$

où $\mathcal{D}(M)$ est le groupe des difféomorphismes de M agissant par tiré en arrière sur les métriques.

Décrivons maintenant la structure locale de $\mathbf{E}(M)$ au voisinage d'une métrique d'Einstein lisse sur M , que l'on notera g_0 . Nous étudions un espace quotient (par changement d'échelle et par difféomorphismes), et il convient de considérer des représentants de classes d'équivalence, c'est-à-dire des métriques dans une *tranche* au voisinage de g_0 qui satisfait $\text{Ric}(g_0) = \Lambda g_0$ pour $\Lambda \in \mathbb{R}$.

Définition 1.17 (Pré-espace de modules). Soit M une variété différentielle et $g_0 \in \mathbf{E}(M)$. Le pré-espace de modules au voisinage de la métrique g_0 , noté $\mathbb{E}_{g_0}(M)$, est l'ensemble des métriques g ,

1. qui sont d'Einstein avec la même constante,

$$\text{Ric}(g) = \Lambda g,$$

ce qui fixe l'échelle pour $\Lambda \neq 0$,

2. qui ont le même volume que g_0 ,

$$\text{Vol}(M, g) = \text{Vol}(M, g_0),$$

ce qui fixe l'échelle,

3. qui sont en jauge divergence par rapport à g_0 ,

$$\delta_{g_0} g = 0,$$

ce qui fixe l'action des difféomorphismes à isométrie près.

La troisième propriété donne effectivement une *tranche* de métriques et fixe l'action des difféomorphismes de M à isométries-près par le théorème de la tranche d'Ebin, lemme 1.16.

Remarque 1.18. Les deux premières conditions sont cohérentes (et redondantes) dans le cas où $\Lambda \neq 0$ si l'on reste dans une même composante connexe de l'espace de modules. En effet, les métriques d'Einstein sont des points critiques de la fonctionnelle d'Einstein-Hilbert,

$$\int_M \text{R}(g) dv_g = n \text{Vol}(M, g) \Lambda,$$

qui est donc constante sur chaque composante connexe de l'espace de modules. Il n'est cependant pour le moment pas clair qu'il n'y ait pas d'accumulations d'éléments composantes connexes différentes de métriques au voisinage d'une métrique donnée. Nous verrons a posteriori, dans la proposition 1.50 que dans le cas compact, au voisinage d'une métrique lisse, la constante d'Einstein est en réalité Λ .

Pour cette raison, nous relâcherons la première contrainte en $E(g) = 0$ où $E(g) := \text{Ric}(g) - \frac{\text{R}(g)}{2}g + \frac{n-2}{2n}\bar{\text{R}}(g)g$. Cet opérateur est adapté à la jauge divergence car il satisfait $\delta_g E(g) = 0$ pour toute métrique g , et il ne fixe pas a priori la constante d'Einstein de la métrique.

Remarque 1.19. Nous faisons un choix différent

- de [Koi83] et [Bes87], où l'opérateur considéré est $\text{Ric}(g) - \frac{\bar{\text{R}}(g)}{n}g$. Bien qu'il soit adapté à la jauge de Bianchi et qu'il ne fixe pas la constante d'Einstein a priori, il n'est pas adapté à la jauge divergence, et
- de [And10], où l'opérateur $\text{Ric}(g) - \frac{\text{R}(g)}{2}g + \frac{(n-2)\Lambda}{2}g$ est considéré. Il est bien adapté à la jauge divergence, mais fixe a priori la constante d'Einstein.

Remarque 1.20. Pour effectivement étudier des tranches de l'espace de modules $\mathbf{E}(M)$, nous devrions encore quotienter par l'action du groupe d'isométries de g_0 (qui est de dimension finie). Pour ne pas nous préoccuper des singularités orbifolds de l'espace de modules $\mathbf{E}(M)$ dues à l'action du groupe d'isométrie, nous restreindront aux questions de structure sur le pré-espace de modules $\mathbb{E}_{g_0}(M)$.

Pour s'assurer de ne pas manquer de métrique d'Einstein de constante d'Einstein différente et pour coller à la définition de l'espace de modules des métriques d'Einstein, nous préférons fixer le volume égal à 1.

Lemme 1.21. *Soit (M^n, g_0) une variété d'Einstein compacte et de volume 1, et définissons*

$$\Phi_{g_0}(g) := E(g) + \delta_g^* \delta_{g_0} g = \text{Ric}(g) - \frac{\text{R}(g)}{2}g + \frac{n-2}{2n}\bar{\text{R}}(g)g + \delta_g^* \delta_{g_0} g.$$

Alors, il existe $\delta > 0$ (celui de la proposition 1.15) tel que

$$\Phi_{g_0}^{-1}(\{0\}) \cap B_{C^{1,\alpha}}(\delta) \cap \{g, \text{Vol}(M, g) = 1\}$$

soit exactement l'ensemble des métriques d'Einstein de volume 1 et en jauge divergence par rapport à g_0 dans $B_{C^{1,\alpha}}(\delta)$.

Démonstration. En appliquant δ_g à Φ_{g_0} , on obtient

$$\begin{aligned}\delta_g \Phi_{g_0}(g) &= \delta_g \left(E(g) \right) + \delta_g \left(\delta_g^* \delta_{g_0} g \right) \\ &= 0 + \delta_g \delta_g^* \left(\delta_{g_0} g \right),\end{aligned}$$

par l'identité de Bianchi. Ainsi, si $\Phi_{g_0}(g) = 0$, en particulier, $\delta_g \delta_g^* \left(\delta_{g_0} g \right) = 0$, or en intégrant par parties $\delta_g \delta_g^* \delta_{g_0} g = 0$ contre $\delta_{g_0} g$, on en déduit qu'en fait $\delta_g^* \left(\delta_{g_0} g \right) = 0$ car $\delta_g \delta_g^*$ est inversible sur l'image de δ_{g_0} d'après la preuve du lemme 1.15. En réécrivant $\Phi_{g_0}(g)$ avec cette nouvelle information, on obtient

$$E(g) = 0,$$

et donc une métrique d'Einstein. \square

Lemme 1.22. *Soit (M, g) une variété riemannienne et soit h un 2-tenseur sur M . Alors, la variation infinitésimale du volume de (M, g) dans la direction h est :*

$$d_g \text{Vol}(M)(h) = \frac{1}{2} \int_M \text{tr}_g h dv_g. \quad (1.11)$$

Comme nous travaillerons toujours à volume constant ici, nous ne nous intéresserons qu'aux déformations infinitésimales préservant le volume, c'est-à-dire satisfaisant $\int_M \text{tr}_g h dv_g = 0$ avec les notations du lemme ci-dessus.

Les métriques proches en jauge divergence et de même volume que g_0 au voisinage de g_0 sont donc exactement $\Phi_{g_0}^{-1}(\{0\})$. Il se trouve que pour une métrique d'Einstein g_0 , la linéarisation de Φ_{g_0} en g_0 appliquée à un 2-tenseur h satisfaisant $\int_M \text{tr}_{g_0} h dv_{g_0} = 0$ est

$$\frac{1}{2} \left(\nabla_{g_0}^* \nabla_{g_0} h - 2R_{g_0}^\circ(h) - \nabla_{g_0}^2 \text{tr}_{g_0} h - (\delta_{g_0} \delta_{g_0} h) g_0 + (\Delta_{g_0} \text{tr}_{g_0} h) g_0 + \Lambda(\text{tr}_{g_0} h) g_0 \right)$$

qui est un opérateur autoadjoint et elliptique (et donc Fredholm). Il a donc en particulier un noyau de dimension finie. On appelle son noyau l'ensemble des *déformations infinitésimales d'Einstein* de g_0 .

Remarque 1.23. Koiso caractérise de plus ces déformations d'essentielles car elles sont transverses aux déformations triviales de changement d'échelle et d'action par le groupe des difféomorphismes.

Lemme 1.24. *L'ensemble des déformations infinitésimales de g_0 est l'ensemble des 2-tenseurs symétriques h sur M tels que $d_{g_0} \Phi_{g_0}(h) = 0$ et $\int_M \text{tr}_{g_0} h dv_{g_0} = 0$ (ce qui fixe infinitésimalement le volume). C'est équivalent à avoir*

- $\text{tr}_{g_0} h = 0$
- $\delta_{g_0} h = 0$
- $P_{g_0}(h) := \frac{1}{2} \nabla_{g_0}^* \nabla_{g_0} h - \mathring{R}_{g_0}(h) = 0$.

Démonstration. La linéarisation de l'opérateur Φ_{g_0} en g_0 d'Einstein et dans la direction de h satisfaisant $\int_M \text{tr}_{g_0} h dv_{g_0} = 0$ est

$$(d_{g_0} \Phi_{g_0})(h) = \frac{1}{2} \left(\nabla^* \nabla h - 2\mathring{R}(h) - \nabla^2 \text{tr} h - (\delta \delta h)_{g_0} + (\Delta \text{tr} h)_{g_0} + \Lambda(\text{tr} h)_{g_0} \right),$$

où toutes les opérations sont faites par rapport à g_0 .

Intéressons-nous à son noyau et linéarisons $g \mapsto \delta_g(\Phi_{g_0}(g)) = \delta_g \delta_g^* \delta_{g_0} g$ en g_0 dans la direction h du noyau de $d_{g_0} \Phi_{g_0}$, cela donne $0 = \delta_{g_0}(d_{g_0} \Phi_{g_0}(h)) = (\delta_{g_0} \delta_{g_0}^*) \delta_{g_0} h$ car $\Phi_{g_0}(g_0) = 0$. Par inversibilité de $\delta_{g_0} \delta_{g_0}^*$ sur l'image de δ_{g_0} on obtient $\delta_{g_0} h$.

L'équation $(d_{g_0} \Phi_{g_0})(h) = 0$ se simplifie donc en

$$\nabla^* \nabla h - 2\mathring{R}(h) - \nabla^2 \text{tr} h + (\Delta \text{tr} h)g + \Lambda(\text{tr} h)g = 0.$$

Si $\Lambda \leq 0$, en prenant la trace de cette expression, comme $\text{Ric}(g_0) = \Lambda g_0$, on obtient

$$\Delta_{g_0} \text{tr}_{g_0} h + \Lambda \text{tr}_{g_0} h = 0. \quad (1.12)$$

Il est alors clair par intégration par parties contre h sur notre variété compacte sans bord que si la moyenne de la trace de h est nulle, alors $\text{tr}_{g_0}(h) = 0$.

Si $\Lambda > 0$, quitte à effectuer un changement d'échelle, on peut supposer que $\Lambda = n - 1$. La première valeur propre de $-\Delta$, λ_1 satisfait alors $\lambda_1 \geq n$ avec égalité sur la sphère seulement. En effet, si $\Delta f + \lambda_1 f = 0$, alors $\Delta df + \lambda_1 df = 0$. Par la formule de Bochner, on a alors

$$(\nabla^* \nabla - \lambda_1)df + \text{Ric}(df) = 0,$$

et donc, en prenant le produit scalaire avec df ,

$$\|\nabla df\|^2 - \lambda_1 \|df\|^2 \leq -(n-1) \|df\|^2.$$

Maintenant, comme $\Delta f = \text{tr}(\nabla df)$, on a l'inégalité

$$\|\nabla df\|^2 \geq \frac{1}{n} \|\Delta f\|^2 = \frac{\lambda_1}{n} \|df\|^2.$$

On obtient donc bien $\lambda_1 \geq n$, et (1.12) implique que $\text{tr} h = 0$.

□

3 Structure de l'espace de modules autour d'une métrique lisse

Le pré-espace de modules des métriques d'Einstein au voisinage de g_0 , définition 1.17, $\mathbb{E}_{g_0}(M)$ a une structure analytique au voisinage de g_0 .

3.1 Applications analytiques entre espaces de Banach

Rappelons des définitions et théorèmes de base sur les applications analytiques entre espaces de Banach et les sous-ensembles analytiques qui nous seront utiles.

Soient $a_k : V^k \rightarrow W$, $k \in \mathbb{N}$ des formes k -linéaires symétriques continues sur V à valeur dans W . La *série entière* notée $x \in V \mapsto \sum_k a_k x^k \in W$ d'un espace de Banach V à valeur dans un espace de Banach W est définie comme la somme des $a_k(x, \dots, x)$. On dira qu'elle converge si la somme réelle $\sum_k \|a_k(x, \dots, x)\|_W$ converge. On en dérive la définition d'une application analytique

Définition 1.25 (Application analytique). Soient V et W des espaces de Banach, et U un ouvert de V . Une application $f : V \rightarrow W$ est dite *analytique* si pour tout point $x \in U$, f est égale à une série entière convergente au voisinage de x .

Cette définition est adaptée au cadre de l'analyse, et en particulier, le théorème des fonctions implicites est valable pour cette régularité.

Lemme 1.26 ([Whi65, Implicit Function Theorem, p. 1081]). Soient X , Y et Z des espaces de Banach, et A un ouvert de $X \times Y$. Supposons qu'une application analytique $f : A \rightarrow Z$ satisfasse pour $(x_0, y_0) \in A$,

1. $f(x_0, y_0) = 0$,
2. $d_{(x_0, y_0)} f(0, \cdot) : Y \rightarrow Z$ est un homéomorphisme.

Alors,

1. il existe $N(x_0)$, un voisinage ouvert de x_0 dans X et une unique application continue $g : N(x_0) \rightarrow Y$ telle que $g(x_0) = y_0$, $(x, g(x)) \in A$ pour $x \in N(x_0)$,
et

$$f(x, g(x)) = 0,$$

2. g est analytique,

$$3. \quad d_x g = -\left(d_{(x,g(x))} f(0, \cdot)\right)^{-1} \circ \left(d_{(x,g(x))} f(\cdot, 0)\right).$$

Plus tard dans cette thèse, on se basera sur des métriques seulement approximativement d'Einstein et qui ne seront pas analytiques. Il sera crucial de noter que les opérations entre tenseurs n'ayant qu'une régularité H^s locale pour s assez grand en fonction de la dimension ou ayant une régularité $C^{k,\alpha}$ pour k plus grand que le nombre de dérivations sont en fait analytiques. Cela s'obtient en étendant la preuve de [Koi83, Lemma 13.7] au cas (plus simple) des espaces de Hölder. L'outil principal est la théorie développée dans [Pal68] et la propriété cruciale est que pour ces régularités, l'ensemble de fonctions forme une algèbre muni de la multiplication ponctuelle.

Lemme 1.27. *Soient E et F des fibrés vectoriels sur une variété M de dimension $n \in \mathbb{N}$, et $E^{\mathbb{C}}$ et $F^{\mathbb{C}}$ leurs complexifications. Soit f une section de E , et soit $\psi : U \subset E \rightarrow F$, où U est un voisinage de l'image de f , une application C^∞ préservant les fibres. Supposons que ψ admette une extension $\psi^{\mathbb{C}} : U^{\mathbb{C}} \subset E^{\mathbb{C}} \rightarrow F^{\mathbb{C}}$ préservant les fibres telle que la restriction de $\psi^{\mathbb{C}}$ à chaque fibre soit holomorphe.*

Alors, l'application $\Psi : H^s(E) \rightarrow H^s(F)$ définie par

$$\Psi(u) = \psi \circ u$$

définie sur un voisinage de l'image de f est analytique pour $s > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

De même, l'application $\Psi : C^{k,\alpha}(E) \rightarrow C^{k,\alpha}(F)$ définie par $\Psi(u) = \psi \circ u$ définie sur un voisinage de l'image de f est analytique pour $k + \alpha \geq 0$.

Nous n'aurons en particulier pas besoin d'utiliser la régularité analytique des fonctions ou des métriques auxquelles on aura affaire, mais seulement une régularité partielle.

Corollaire 1.28 ([Koi83, Lemma 13.9]). *La composition, la différenciation et les contractions sont des opérations analytiques entre espaces H^s locaux pour s suffisamment grand en fonction de la dimension et de l'opération. C'est aussi le cas entre espaces $C^{k,\alpha}$ pour tout k, α tels que $k + \alpha$ plus grand que le nombre de dérivations.*

3.2 Structure d'ensemble analytique de l'espace de modules

Nous allons montrer qu'au voisinage d'une métrique lisse g_0 , le pré-espace de modules $\mathbb{E}_{g_0}(M)$ a une structure de sous-ensemble analytique d'une sous-variété analytique de dimension finie de $\mathcal{M}(M)$.

Définition 1.29 (Sous-ensemble analytique). Soit X une variété analytique. Nous dirons que $Z \subset X$ est un *sous-ensemble analytique* de X s'il existe $d \in \mathbb{N}$ et une application analytique $F : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que

$$Z = F^{-1}\{0\}.$$

Remarque 1.30. D'après le profond théorème de structure de Łojasiewicz (voir [Łoj65]), un sous-ensemble analytique est une union de sous-variétés analytiques.

3.2.1 Structure analytique du pré-espace de modules classique

La preuve classique de la structure de sous-ensemble analytique du pré-espace de modules due à Koiso consiste à s'intéresser à l'ensemble des zéros de Φ_{g_0} .

Proposition 1.31 ([Koi83, Theorem 3.1]). *Soit g_0 une métrique d'Einstein sur une variété M . Alors, il existe U un voisinage ouvert de g_0 dans $\mathcal{M}(M)$ muni de la distance $C^{2,\alpha}(g_0)$ tel que l'espace $\Phi_{g_0}^{-1}(\{0\}) \cap U$ ait une structure de sous-ensemble analytique d'une sous-variété analytique W_{g_0} de $\mathcal{M}(M)$ de dimension finie. De plus l'espace tangent à W_{g_0} , $T_{g_0}W_{g_0}$ est l'ensemble $\ker d_{g_0}\Phi_{g_0}$ des déformations infinitésimales de g_0 .*

Démonstration. Soit M^n une variété différentielle et g_0 une métrique d'Einstein sur M de volume 1. Démarrons cette preuve en définissant la variété W_{g_0} sur laquelle on s'appuiera. Pour $0 < \alpha < 1$ et $k \in \mathbb{N}$, l'application $\Phi_{g_0} : C^{k+2,\alpha} \rightarrow C^{k,\alpha}$ est analytiques grâce au corollaire 1.27.

On définit $\pi_{g_0} : C^{k,\alpha} \rightarrow \text{Im}(d_{g_0}\Phi_{g_0})$ une projection sur $\text{Im}(d_{g_0}\Phi_{g_0})$ (dont un supplémentaire est de dimension finie). Et posons $F_{g_0} = \pi_{g_0}\Phi_{g_0} : C^{k+2,\alpha} \rightarrow \text{Im}(d_{g_0}\Phi_{g_0})$. C'est une submersion par construction, et l'ensemble

$$W_{g_0} := F_{g_0}^{-1}(\{0\}),$$

est alors une variété analytique de dimension finie dont l'espace tangent à g_0 est $\ker d_{g_0}\Phi_{g_0}$ par le théorème des fonctions implicites qui assure de plus que son espace tangent est l'ensemble des déformations infinitésimales de g_0 .

Maintenant, Φ_{g_0} est une fonction analytique sur la variété analytique W_{g_0} , et $\Phi_{g_0}^{-1}(\{0\})$ en est donc une sous-variété analytique. \square

Remarque 1.32. On voit donc qu'a priori, l'ensemble $\Phi_{g_0}^{-1}(\{0\})$ est de dimension inférieure à W_{g_0} . La raison en est que toutes les déformations infinitésimales ne sont pas *intégrables*, c'est-à-dire qu'étant donnée h une déformation infinitésimale

de g_0 , il n'existe pas nécessairement de courbe $t \in [-1, 1] \rightarrow g_t \in \Phi_{g_0}^{-1}(\{0\})$ de métriques telles que $\partial_t g_t|_{t=0} = h$. Lorsque pour une déformation infinitésimale h , une telle courbe existe, on qualifiera h d'*intégrable*

Remarque 1.33. L'intégrabilité d'une déformation infinitésimale h est équivalente à son intégrabilité formelle, c'est-à-dire à l'existence d'une série $g_0 + th + \sum_{l \geq 2} \frac{t^l}{l!} h_l$ satisfaisant formellement l'équation d'Einstein, voir [Koi83, Theorem 3.2] dont la preuve est une application de [Art68].

Corollaire 1.34. *Soit g_0 une métrique d'Einstein sur une variété M . Si toutes les déformations infinitésimales de g_0 sont intégrables, alors le pré-espace de modules $\mathbb{E}_{g_0}(M)$ a une structure de sous-variété analytique dans un voisinage de g_0 et son espace tangent est l'ensemble des déformations infinitésimales de g_0 .*

3.2.2 Un nouveau pré-espace de modules adaptable au voisinage d'une métrique non-lisse

Nous proposons une construction de pré-espace de modules qui se généralisera au voisinage des métriques singulières, voir la dernière section du chapitre 4. L'objectif est de définir une section de l'espace de modules des métriques d'Einstein (à isométries près) sans avoir à mettre nos métriques en jauge par rapport à g_0 , ce qui ne sera pas possible dans le cas singulier où la métrique g_0 ne sera pas lisse ou pas définie sur la même variété. Définissons, pour une métrique g , $\pi_g := \text{Id} - \delta_g^*(\delta_g \delta_g^*)^{-1} \delta_g$, où $(\delta_g \delta_g^*)^{-1}$ est l'inverse de $\delta_g \delta_g^* : \ker(\delta_g)^{\perp_g} \rightarrow \ker(\delta_g)^{\perp_g}$ une projection sur le noyau de δ_g . Nous allons définir une autre section du pré-espace de modules au voisinage d'une métrique g_0 compact ou ALE. En notant $\mathbf{O}(g_0)$ le noyau L^2 de P_{g_0} sur l'ensemble des 2-tenseurs à trace et divergence nulles, et en choisissant $(o_i)_{\{1 \leq i \leq d\}}$ une base orthonormée, nous définissons pour $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ la métrique

$$g_v := g_0 + \sum_{i=1}^d v_i o_i$$

qui est une première approximation d'une potentielle déformation d'Einstein de g_0 dans la direction v . L'ensemble des g_v pour $v \in \mathbb{R}^d$ est l'espace tangent en g_0 à l'ensemble des métriques que l'on qualifiera d'Einstein *modulo obstructions* par la suite.

Une nouvelle mise en jauge.

Lemme 1.35. *Soit (M^n, g_0) une variété d'Einstein compacte. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < 1$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute métrique g satisfaisant $\|g - g_0\|_{C^{k,\alpha}} \leq \varepsilon$ et $\text{Vol}(g) = \text{Vol}(g_0)$, il existe un unique $v \in \mathbf{O}(g_0)$ pour lequel il existe un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M$ et une constante $c > 0$ tels que l'on ait*

$$\delta_{g_v}(\varphi^*g) = 0,$$

et

$$\varphi^*g - g_v \perp_{g_v} \pi_{g_v} \mathbf{O}(g_0).$$

De plus, le difféomorphisme φ est proche de l'identité en norme $C^{k+1,\alpha}$, et v est proche de 0.

Démonstration. D'après le théorème de la tranche d'Ebin, lemme 1.16 et sa preuve, lemme 1.15, pour toute métrique g et tout $v \in \mathbb{R}^d$ suffisamment petit, il existe un unique champ de vecteurs $X(g, v) \perp_{g_v} \ker \delta_{g_0}^*$ tel que l'on ait

$$\delta_{g_v} \exp_{X(g,v)}^* g - g_v = 0.$$

Nous cherchons alors naturellement v tel qu'on ait en plus $\exp_{X(g,v)}^* g - g_v \perp_{g_v} \pi_{g_v} \mathbf{O}(g_0)$. Or, comme $\delta_{g_v}(\exp_{X(g,v)}^* g - g_v) = 0$, c'est équivalent à avoir $\exp_{X(g,v)}^* g - g_v \perp_{g_v} \mathbf{O}(g_0)$ car pour tout $\mathbf{o} \in \mathbf{O}(g_0)$, $\pi_{g_v} \mathbf{o} - \mathbf{o} \perp_{g_v} \ker \delta_{g_v}$.

Considérons alors l'application

$$F : (g, v) \mapsto \pi_{\mathbf{O}(g_0)}^{g_v} \left(\exp_{X(g,v)}^* g - g_v \right),$$

où $\pi_{\mathbf{O}(g_0)}^{g_v}$ est la projection orthogonale pour g_v sur $\mathbf{O}(g_0)$. Nous considérerons F sur un voisinage de $(g_0, 0)$ dans $(C^{k,\alpha} \cap \{g' \mid \text{Vol}(g') = \text{Vol}(g_0)\}) \times \mathbb{R}^d$, pour $k \in \mathbb{N}$ à valeur dans $\mathbf{O}(g_0)$. On peut lui appliquer le théorème des fonctions implicites, lemme 1.26. En effet, $F(g_0, 0) = 0$ et $d_{(g_0,0)} F(0, v) = v$ est bien un isomorphisme et les espaces $(C^{k,\alpha} \cap \{g' \mid \text{Vol}(g') = \text{Vol}(g_0)\}) \times \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{O}(g_0)$ sont bien de Banach. Ainsi, il existe une application analytique (unique en tant qu'application continue) V telle que pour toute métrique g dans un voisinage de g_0 , on ait

$$F(g, V(g)) = 0.$$

□

On en déduit en particulier, pour toute métrique g d'Einstein dans un $C^{1,\alpha}$ -voisinage de g_0 telle que $\text{Vol}(g) = \text{Vol}(g_0)$, il existe un unique élément de \mathbb{R}^d , $V(g)$,

tel que

1. $\delta_{g_{V(g)}}(\exp_{X(g,V(g))}^* g) = 0$, et
2. $\exp_{X(g,V(g))}^* g - g_{V(g)} \perp_{g_{V(g)}} \pi_{g_{V(g)}} \mathbf{O}(g_0)$.

et donc en particulier, nous avons $\Phi_{g_{V(g)}}(\exp_{X(g,V(g))}^* g) = 0$. Réciproquement, si \hat{g}_v satisfait $\Phi_{g_{V(g)}}(\hat{g}_v) = 0$, alors $\text{Ric}(\hat{g}_v) = \Lambda \hat{g}_v$ et $\delta_{g_v} \hat{g}_v = 0$.

Un nouveau pré-espace de modules au voisinage de g_0 . Nous définissons alors $\mathbb{E}_{g_0}^*(M)$ comme l'ensemble des métriques g dans un voisinage $C^{1,\alpha}$ de g_0 satisfaisant, il existe $v \in \mathbb{R}^d$ tel que :

1. $\text{Ric}(g) = \Lambda g$, $\text{Vol}(g) = \text{Vol}(g_0)$,
2. $g - g_v \perp_{g_v} \pi_{g_v} \mathbf{O}(g_0)$,
3. $\delta_{g_v} g = 0$.

Pour chaque v , nous allons voir qu'il existe au plus une solution à l'aide d'une réduction de Lyapunov-Schmidt dans la proposition suivante. Les v pour lesquels il existe \hat{g}_v satisfaisant $\hat{g}_v - g_v \perp_{g_v} \pi_{g_v} \mathbf{O}(g_0)$ et $\Phi_{g_{V(g)}}(\hat{g}_v) = 0$ paramètrent alors $\mathbb{E}_{g_0}^*(M)$ et nous donnent bien une tranche de $\mathbf{E}(M)$ au voisinage de g_0 à isométrie près.

Proposition 1.36. *Soit M^n une variété différentielle, et soit $g_0 \in \mathbf{E}(M)$, et d la dimension du noyau L^2 de $d_{g_0} \Phi_{g_0}$ parmi les 2-tenseurs à trace nulle, noté $\mathbf{O}(g_0)$, et choisissons $(o_i)_i$ une base orthonormée de $\mathbf{O}(g_0)$.*

Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^d$ tel que $|v| < \varepsilon$, il existe une unique métrique \hat{g}_v telle que si l'on note $g_v := g_0 + \sum_i v_i o_i$,

$$\Phi_{g_v}(\hat{g}_v) = E(\hat{g}_v) + \delta_{\hat{g}_v}^* \delta_{g_v} \hat{g}_v \in \pi_{g_v} \mathbf{O}(g_0),$$

et satisfaisant les conditions de jauge suivantes :

1. $\|g_0 - \hat{g}_v\|_{C^{1,\alpha}} \leq 2\varepsilon$,
2. $g_v - \hat{g}_v \perp_{L^2(g_v)} \pi_{g_v} \mathbf{O}(g_0)$.

De plus, l'ensemble des déformations d'Einstein modulo obstructions,

$$\hat{W}_{g_0} := \{ \hat{g}_v \mid v \in \mathbb{R}^d, |v| < \varepsilon \}$$

est une sous-variété analytique de $g_0 + C^{k,\alpha}$, et l'ensemble des métriques d'Einstein,

$$\mathbb{E}_{g_0}^*(M) = \{ \hat{g}_v \in \hat{W}_{g_0} \mid \Phi_{g_v}(\hat{g}_v) = 0 \}$$

est un sous-ensemble analytique de la variété analytique \hat{W}_{g_0} .

Démonstration. Soient (M^n, g_0) une variété d'Einstein, $(o_i)_{\{1 \leq i \leq d\}}$ une base orthonormée de $\mathbf{O}(g_0)$, $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$, et $\sum_i v_i o_i \in \mathbf{O}(g_0)$. Dans la preuve qui suit, tous les produits scalaires sont ceux de la métrique $g_v := g_0 + \sum_i v_i o_i$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, le lemme se montre par théorème des fonctions inverses pour les applications analytiques appliqué à l'application analytique $\Psi : \mathbb{R}^d \times C^{k+2, \alpha} \rightarrow C^{k, \alpha} \times C^{k+2, \alpha}$, qui a une métrique g associée

$$\Psi(v, g) := \left(\pi_{\pi_{g_v} \mathbf{O}(g_0)^\perp}^{g_v} \Phi_{g_v}(g), \pi_{\pi_{g_v} \mathbf{O}(g_0)}^{g_v}(g - g_v) \right).$$

La linéarisation de l'opérateur en g_v est inversible pour v suffisamment petit. En effet, en g_0 , la linéarisation $d_{(0, g_0)} \Psi(0, \cdot)$ est $\left(\pi_{\mathbf{O}(g_0)^\perp}^{g_0} d_{g_0} \Phi_{g_0}, \pi_{\mathbf{O}(g_0)}^{g_0} \right)$ qui est inversible par définition de $\mathbf{O}(g_0)$ qui est le noyau et le conoyau de la linéarisation de Φ_{g_0} .

Les termes quadratiques sont classiquement contrôlés à partir de la forme schématique des variations de la courbure de Ricci, en notant abusivement $*$ diverses contractions de tenseurs :

$$\text{Ric}(g + h) = \text{Ric}(g) + (g + h)^{-1} * \text{Rm}(g) + (g + h)^{-2} * \nabla^2 h + (g + h)^{-3} * \nabla h * \nabla h.$$

Il existe donc $C > 0$ ne dépendant que de g_0 tel que $\|\Psi(v, g_v)\|_{C^{k, \alpha}(g_0)} \leq C|v|^2$ par le contrôle des termes non-linéaires. On déduit du théorème des fonctions implicites pour les applications analytiques, lemme 1.26 que pour v suffisamment petit, il existe une unique solution \hat{g}_v de $\Psi(v, \hat{g}_v) = 0$ telle que pour $C' > 0$ ne dépendant que de g_0 , on ait

$$\|\hat{g}_v - g_v\|_{C^{k+2, \alpha}(g_0)} \leq C'|v|^2.$$

L'application $v \rightarrow \hat{g}_v$ est analytique et injective pour v dans un voisinage U de zéro. L'ensemble $\hat{W}_{g_0} := \{\hat{g}_v, v \in U\}$ a donc une structure de sous-variété analytique de $C^{k+2, \alpha}$ pour U suffisamment petit.

Sur \hat{W}_{g_0} , l'application $\hat{g}_v \mapsto E(\hat{g}_v)$ est analytique et s'annule exactement sur les métriques d'Einstein. \square

4 Voisinage d'une métrique lisse au sens de Gromov-Hausdorff

Durant toute la suite de cette thèse, nous étudierons souvent des suites de métriques satisfaisant diverses propriétés de courbure (bien souvent d'Einstein). Il nous sera donc souvent utile d'étudier leur comportement limite. Pour cela, il nous faudra utiliser une topologie ayant de bonnes propriétés de compacité. Une telle topologie sera donnée par la distance de Gromov-Hausdorff.

4.1 Distance de Gromov-Hausdorff et compacité

Rappelons tout d'abord les définitions et propriétés de base de la distance de Gromov-Hausdorff.

Définition 1.37 (Distance de Hausdorff, d^H). Soit (Z, d) un espace métrique et soient X et Y des sous-ensembles de Z . On définit la distance de Hausdorff entre X et Y comme :

$$d_Z^H(X, Y) := \max \left(\sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X) \right).$$

Définition 1.38 (Distance de Gromov-Hausdorff, d_{GH}). Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques compacts. On définit la distance de Gromov-Hausdorff, d_{GH} , entre (X, d_X) et (Y, d_Y) par

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \inf_Z d_Z^H(X, Y)$$

où l'infimum est pris sur les espaces métriques (Z, d) et les plongements isométriques de (X, d_X) et (Y, d_Y) dans (Z, d) .

Remarque 1.39. Il y a plusieurs définitions différentes de cette distance qui induisent la même topologie sur l'ensemble des espaces métriques. La définition que l'on a choisie est celle introduite par Gromov et a l'avantage de justifier le nom de cette topologie.

Il est aussi possible de définir la convergence d'espaces non compacts qui revient à une convergence sur les compacts.

Définition 1.40 (Distance de Gromov-Hausdorff pointée). Soient (X, d_X, x) et (Y, d_Y, y) deux espaces métriques pointés. On définit la distance de Gromov-Hausdorff pointée, encore notée d_{GH} , entre (X, d_X, x) et (Y, d_Y, y) par l'infimum

des $\varepsilon > 0$ tels que l'on ait

$$d_{GH}\left((X, d_X, x), (Y, d_Y, y)\right) := \inf \left\{ \varepsilon, d_{GH}\left(B_{d_X}(x, \varepsilon^{-1}), B_{d_Y}(y, \varepsilon^{-1})\right) < \varepsilon \right\}$$

Cette notion de distance est entre autres motivée par le crucial théorème de compacité de Gromov, théorème 0.1 énoncé en introduction, mais elle a des applications dans de nombreux autres domaines.

Remarque 1.41. La borne sur la courbure de Ricci n'est présente dans les hypothèse que parce qu'elle assure que l'espace obtenu est *doublant*, c'est-à-dire que le volume de ses boules ne peut pas croître à une vitesse plus qu'exponentielle en leur diamètre.

Remarque 1.42. Cette notion de convergence a donc d'excellentes propriétés de convergence dans le cadre qui nous intéresse mais est extrêmement faible. En particulier, elle ne dit rien sur les propriétés topologiques d'espaces proches les uns des autres. Par exemple, tout espace métrique compact est limite d'espaces métriques discrets, et il n'y a aucun espoir de contrôler la dimension ou le nombre de composantes connexes sans hypothèse supplémentaire.

L'enjeu est alors souvent de tout d'abord étudier les propriétés particulières des métriques de la suite afin de déterminer si les limites possibles ont une certaine régularité. Il convient ensuite d'étudier si la convergence a lieu dans un sens plus fort qui préserverait par exemple des propriétés topologiques, géométriques ou analytiques.

4.2 Compacité de Cheeger-Gromov

Un premier exemple d'ensemble de métriques auquel la compacité de Gromov s'applique est l'ensemble des métriques à courbures sectionnelles bornées. La référence [HH97] et les articles mentionnés dedans donnent un bon panorama des premiers résultats de cette théorie.

Au contrôle des métriques en coordonnées harmoniques du corollaire 1.5, nous pouvons ajouter le théorème profond de Cheeger-Gromov-Taylor.

Théorème 1.43 ([CGT82, Theorem 4.7]). *Soit (M, g) une variété riemannienne dont les courbures sectionnelles sont bornées par K , le volume minoré par v et le diamètre majoré par D .*

Alors, il existe une borne inférieure $i = i(K, v, D) > 0$ sur le rayon d'injectivité de (M, g) .

Esquisse de preuve. Considérons un point $x \in M$, puis tirons en arrière la métrique autour de x grâce à des coordonnées géodésiques jusqu'au rayon de conjugaison, $conj_x$ qui est minoré à l'aide des courbures sectionnelles. Nous obtenons ainsi une métrique lisse sur une boule de rayon $conj_x$.

Le rayon d'injectivité, inj_x majore la longueur des géodésiques qui se referment sur elles-mêmes. Cela permet de minorer le nombre de préimages disjointes de la boule $B(x, inj_x)$ dans la carte géodésique de rayon $conj_x$ par un nombre $N \geq \frac{conj_x}{inj_x}$. Nous avons donc une inégalité

$$N \operatorname{Vol}(B(0, inj_x)) \leq \operatorname{Vol}(B(0, conj_x)). \quad (1.13)$$

Par l'inégalité de Bishop-Gromov sur la boule $\operatorname{Vol}(B(0, conj_x))$ où la courbure de Ricci est minorée, on obtient un contrôle du type

$$\frac{conj_x}{inj_x} \leq N \leq \frac{\operatorname{Vol}(B(0, conj_x))}{\operatorname{Vol}(B(0, inj_x))} \leq C(K, v, D) \frac{conj_x^n}{inj_x^n}. \quad (1.14)$$

On en déduit donc que pour $n \geq 2$ (le cas $n = 1$ est beaucoup plus simple), on a

$$inj_x \geq C'(K, v, D)^{\frac{1}{n-1}} conj_x. \quad (1.15)$$

□

En combinant les énoncés de la proposition 1.5 et du théorème 1.43, nous obtenons le théorème de compacité de Cheeger-Gromov.

Corollaire 1.44 (Compacité de Cheeger-Gromov). *Soit $(M_i, g_i)_i$ une suite de variétés riemanniennes satisfaisant*

1. *leurs courbures sectionnelles sont uniformément bornées*
2. *leurs volumes sont uniformément minorés*
3. *leurs diamètres sont uniformément majorés*

Alors, il existe une sous-suite telle que toutes les variétés soient difféomorphes. Elles convergent de plus, à difféomorphisme-près de manière $C^{1,\alpha}$ vers une variété riemannienne (M_∞, g_∞) dont la métrique est de classe $C^{1,\alpha}$ en coordonnées harmoniques.

Esquisse de preuve. La partie la plus difficile de cette preuve, que nous ne développerons pas ici, est la construction d'un difféomorphisme entre deux variétés proches au sens de Gromov-Hausdorff. Une bonne référence est [GW88].

L'idée est d'effectuer un recouvrement de Vitali de l'une des deux variétés par des boules harmoniques puis d'en déduire un recouvrement similaire sur la seconde variété à l'aide de la proximité de Gromov-Hausdorff. Cela nous donne des difféomorphismes locaux qu'il faut ensuite "recoller" en un difféomorphisme global. La technique classique est de considérer des barycentres des points différentes cartes qui se superposent.

Le contrôle des métriques en coordonnées géodésiques (ou presque linéaires) puis harmoniques, permet alors de contrôler la distance entre les métriques et de prouver une convergence en norme $C^{1,\alpha}$, voir encore une fois [GW88]. \square

4.3 Régularité des métriques d'Einstein

4.3.1 ε -régularité des métriques à courbure de Ricci bornée

Présentons tout d'abord un résultat de [And89], voir aussi [CC96] et [CN15, section 2.2]. Il affirme qu'une métrique à courbure de Ricci bornée qui est localement proche au sens de Gromov-Hausdorff d'une boule Euclidienne, a en réalité une courbure bornée.

Proposition 1.45 (ε -régularité, [And89]). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute variété riemannienne (M, g) , s'il existe un point $p \in M$, tel que l'on ait*

1. $|\text{Ric}_g| < \varepsilon$ sur $B_g(p, 2)$, et
2. $d_{GH}\left((B_g(p, 2), g), (B_{g_\varepsilon}(0, 2), g_\varepsilon)\right) < \varepsilon$,

alors, on a

$$|\text{Rm}_g| \leq 1, \text{ sur } B_g(p, 1). \quad (1.16)$$

Si la métrique est d'Einstein, les dérivées de la métriques sont aussi uniformément contrôlées.

Remarque 1.46. La deuxième hypothèse de la proposition 1.45 est équivalente (à une constante différente-près) à avoir un volume proche de celui de la boule Euclidienne d'après [Col97, Theorem 0.8].

Remarque 1.47. Ce résultat est faux en supposant uniquement une borne inférieure sur la courbure de Ricci. Il suffit de lisser un cône sur une sphère de rayon plus petit que 1 mais arbitrairement proche de 1 à l'aide d'une métrique à courbure positive pour obtenir des contre-exemples.

Remarque 1.48. Un résultat encore plus difficile d' ε -régularité de [CN15] donne la même conclusion en remplaçant la deuxième hypothèse par

$$d_{GH}\left((B_g(p, 2), g), (B_{\mathbb{R}^{n-3} \times C(Z)}(0, 2), g_e)\right) < \varepsilon,$$

pour $C(Z)$ un cône quelconque. Nous retrouvons le lemme 1.45 avec $C(Z) = C(\mathbb{S}^2)$.

4.3.2 De Gromov-Hausdorff à C^∞

Nous en déduisons par régularité elliptique que pour toute métrique d'Einstein, les métriques d'Einstein suffisamment proches au sens de Gromov-Hausdorff sont en fait proches dans le sens lisse du début du chapitre.

Corollaire 1.49. *Soit (M, g_0) une variété d'Einstein compacte à constante d'Einstein bornée par $n - 1$. Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si (N, g) est une variété riemannienne à courbure de Ricci bornée par $10^6(n - 1)$ telle que*

$$d_{GH}\left((M, g_0), (N, g)\right) < \eta,$$

alors, $M = N$ et il existe un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M$ tel que

$$\|g - g_0\|_{C^{1,\alpha}} < \delta.$$

Si (N, g) est d'Einstein, on peut de plus obtenir des contrôles pour les dérivées d'ordre supérieur.

Démonstration. Soit (M, g_0) une variété d'Einstein, et soit K tel que $|\text{Rm}_{g_0}| < K$, $0 < v_0 < \text{Vol}(M, g_0)$ et $D_0 > \text{diam}(M, g_0)$. D'après la proposition 1.3 combinée à 1.43, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_0 = r_0(\varepsilon, K, v_0) > 0$ tel que pour tout point p de M , on ait

$$d_{GH}\left(B_{g_0}(p, 2r_0), B_{g_e}(2r_0)\right) < \frac{\varepsilon}{2}r_0. \quad (1.17)$$

Supposons, quitte à prendre r_0 plus petit, que $10^6(n - 1) < \frac{\varepsilon}{r_0^2}$. Soit maintenant (N, g) à courbure de Ricci bornée par $10^6(n - 1)$ satisfaisant $d_{GH}\left((M, g_0), (N, g)\right) < \frac{\varepsilon}{2}r_0$. Alors, grâce à (1.17) sur chaque boule de rayon 2 de (N, g) , on a

$$d_{GH}\left((B_g(p, 2r_0), g), (B_{g_e}(0, 2r_0), g_e)\right) < \frac{\varepsilon}{2}r_0.$$

On en déduit en choisissant ε la constante du lemme 1.45 que l'on a

$$|\mathrm{Rm}_g| \leq \frac{1}{r_0^2}$$

sur toute la variété (N, g) . Par la convergence du volume de [Col97], on déduit alors du théorème 1.44 de compacité de Cheeger-Gromov, par un argument par contradiction, que pour tout $\delta > 0$, il existe η pour lequel si l'on a

$$d_{GH}((M, g_0), (N, g)) < \eta,$$

pour $0 < \eta < \frac{\varepsilon}{2}r_0$ suffisamment petit, alors

$$\|g - g_0\|_{C^{1,\alpha}} < \delta.$$

□

En utilisant alors la structure analytique de l'espace de modules des métriques d'Einstein au voisinage d'une métrique lisse prouvée dans la section précédente, nous en déduisons que la constante d'Einstein est la même pour toutes les métriques suffisamment d_{GH} -proches et de même volume qu'une métrique d'Einstein lisse donnée.

Corollaire 1.50. *Soit (M, g_0) une variété d'Einstein compacte à constante d'Einstein Λ telle que $|\Lambda| \leq n - 1$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour toute variété d'Einstein (N, g) à courbure de Ricci bornée par $10^6(n - 1)$ satisfaisant $\mathrm{Vol}(N, g) = \mathrm{Vol}(M, g_0)$ et*

$$d_{GH}((M, g_0), (N, g)) < \eta,$$

on ait $\mathrm{Ric}(g) = \Lambda g$.

Démonstration. Soit (M, g_0) une variété d'Einstein et soit $\eta > 0$ suffisamment petit pour que le $\delta(\eta)$ du corollaire 1.49 soit suffisamment petit pour que les métriques (N, g) de l'énoncé appartiennent au voisinage U de la proposition 1.31 (la régularité elliptique de l'équation d'Einstein permet de passer de $C^{1,\alpha}$ à $C^{2,\alpha}$).

L'ensemble des métriques à distance d_{GH} au plus η de (M, g_0) et satisfaisant les hypothèses de l'énoncé a ainsi une structure de sous-ensemble analytique. C'est donc localement une union de sous-variétés analytiques et donc localement connexe (quitte à choisir un voisinage plus petit), avec de plus des courbes analytiques reliant les métriques à g_0 . Comme la différentielle de $g \mapsto \bar{\mathbf{R}}_g = \frac{1}{\mathrm{Vol}(N, g)} \int_N \mathbf{R}_g \, dv_g$

en une métrique d'Einstein est nulle pour les déformations à volume constant, nous en déduisons que \bar{R} est constante. Comme elle est proportionnelle à la constante d'Einstein divisée par le volume qui est supposé constant, la constante d'Einstein est constante. \square

Remarque 1.51. En dimension 4 on peut se défaire de l'hypothèse sur la borne de la courbure de Ricci de g dans les deux énoncés précédents en la remplaçant par une condition topologique à l'aide de la formule (2.2).

5 Applications

Présentons maintenant deux applications des résultats précédents. Le premier est la preuve de la complétude de l'espace de modules des métriques d'Einstein en dimension 2 et 3, ce qui motivera la complétion de l'espace de modules en dimension 4 présentée dans le chapitre suivant (ch. 2) puis dans le reste de la thèse. Le deuxième est la rigidité des métriques à courbures sectionnelles constantes égales à 1 dans un sens fort et quantitatif qui nous servira dans le chapitre 3.

5.1 Complétude de l'espace de modules en dimension 2 et 3 pour la distance de Gromov-Hausdorff

En dimension 2, il n'y a qu'une notion de courbure, celle de Gauss qui vaut à une constante près la courbure de Ricci et la courbure scalaire. En effet, les courbures sectionnelles sont définies comme les courbures de Gauss de plans géodésiques, or il n'y en a qu'un ici, les différentes moyennes de cette unique courbure sont donc proportionnelles.

En dimension 3, la courbure de Ricci contrôle aussi le tenseur de courbure de Riemann car nous avons la formule suivante,

$$R_{ijkl} = g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} - g_{jk}R_{il} + g_{jl}R_{ik} - \frac{1}{2}R(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad (1.18)$$

qui peut par exemple être retrouvée dans [Ham82, Theorem 8.1], où les R_{ijkl} sont les courbures sectionnelles et les R_{ij} les composantes de la courbure de Ricci en coordonnées.

Lorsque l'on considère des suites de métriques d'Einstein en dimension 2 et 3 à courbure de Ricci bornée, alors, leur courbure Riemannienne est bornée et l'on se retrouve dans le cadre du corollaire 1.44.

Théorème 1.52. *Soit $(M_i, g_i)_i$ une suite de variétés d'Einstein de dimension 2 ou 3 de volume 1, de courbure de Ricci uniformément bornée et de diamètre uniformément borné.*

Alors, il existe une sous-suite convergeant vers une variété lisse d'Einstein et de plus, la convergence a lieu au sens C^∞ .

Remarque 1.53. Bien que ces espaces de modules soient complets au sens de Gromov-Hausdorff, ils ne sont pas compacts. En effet, lorsque l'on autorise leur diamètre à tendre vers l'infini, deux types de dégénérescences sont envisageables : l'effondrement et la formation de cusps hyperboliques.

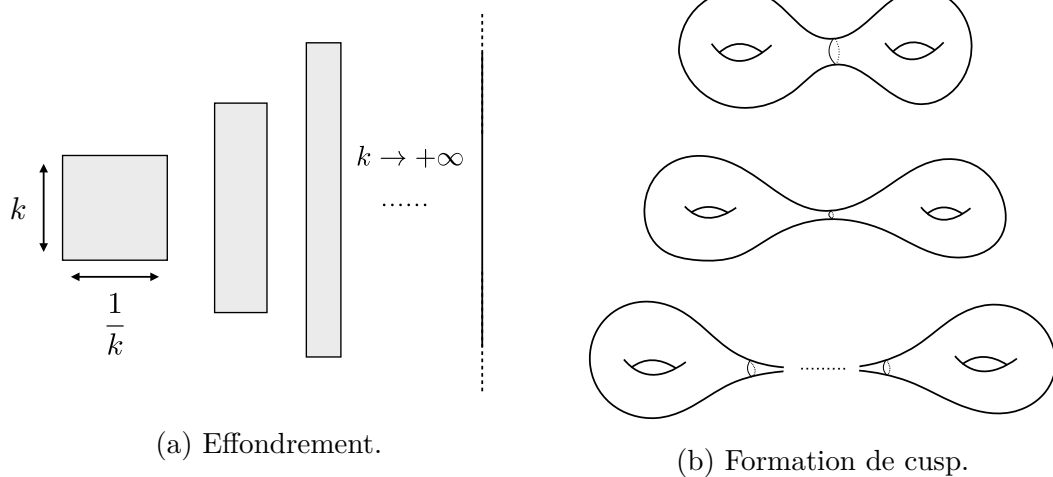


FIGURE 1.1 – Dégénérescences de métriques d'Einstein en dimension 2.

Nous verrons qu'en dimension 4 des singularités coniques peuvent se former à distance de Gromov-Hausdorff finie. Avec la formation de cusps et l'effondrement, ce sont les seuls types de dégénérescences qui apparaissent en dimension 4, voir [And92] pour une preuve dans le cadre L^2 et [CT06] pour une preuve pour la distance de Gromov-Hausdorff.

5.2 Proximité $C^{k,\alpha}$ d'ordre optimal avec une métrique ronde

Montrons dans cette partie que l'on peut obtenir un contrôle d'ordre optimal entre une métrique à courbures sectionnelles presque égales à 1 et une métrique ronde lorsque le volume est minoré. Une conséquence du théorème de compacité de Cheeger-Gromov, théorème 1.44 est le lemme suivant.

Lemme 1.54. *Pour tout n , $0 < \alpha < 1$, $\delta > 0$ et $v_0 > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si (M^n, g) satisfait*

1. $1 - \varepsilon < \text{Sec}(g) < 1 + \varepsilon$,
2. et $\text{Vol}(M) > v_0$,

alors il existe Γ un sous-groupe fini de $SO(n+1)$ (dont le cardinal est majoré par une fonction de v_0), et un difféomorphisme $\Phi : \mathbb{S}^n/\Gamma \rightarrow M$ tel que :

$$\left\| \Phi^* g - g^{\mathbb{S}^n/\Gamma} \right\|_{C^{1,\alpha}} \leq \delta,$$

où $g^{\mathbb{S}^n/\Gamma}$ est une métrique à courbures sectionnelles constantes égales à 1 sur \mathbb{S}^n/Γ .

Nous allons en fait montrer le résultat suivant qui est un raffinement du lemme 1.54.

Proposition 1.55. *Soit (M, g_0) une variété à courbures sectionnelles constantes égales à 1, et $k \in \mathbb{N}$. Alors, il existe $\delta > 0$ et $C > 0$, tel que si une métrique g sur M satisfait :*

$$\|g - g_0\|_{C^{k+1,\alpha}} \leq \delta,$$

alors, il existe un difféomorphisme $\Phi : M \rightarrow M$, pour lequel

$$\|\Phi^* g - g_0\|_{C^{k+1,\alpha}} \leq C \left\| \text{Ric}(g) - (n-1)g \right\|_{C^k}.$$

Remarque 1.56. Il suffit en fait que la métrique d'Einstein g_0 n'admette pas de déformations infinitésimales pour avoir un résultat similaire. C'est par exemple aussi le cas si la métrique est à courbures sectionnelles négatives.

Corollaire 1.57. *Pour tout n , $0 < \alpha < 1$ et $v_0 > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, si (M^n, g) satisfait :*

1. $1 - \varepsilon < \text{Sec}(g) < 1 + \varepsilon$,
2. et $\text{Vol}(M, g) > v_0$,

alors il existe Γ un sous-groupe fini de $SO(n+1)$ (dont le cardinal est majoré par une fonction de v_0), et un difféomorphisme $\Phi : \mathbb{S}^n/\Gamma \rightarrow M$ tel que

$$\|\Phi^* g - g_0\|_{C^{1,\alpha}} \leq C\varepsilon.$$

Remarque 1.58. Ce qui est important pour nous ici, c'est que le ε de l'estimation finale soit bien celui de l'inégalité $1 - \varepsilon < \text{Sec}(g) < 1 + \varepsilon$.

Proposition 1.59. *Si une métrique g_0 a des courbures sectionnelles constantes égales à 1, alors la linéarisation de $\Phi_{g_0} : g \mapsto E(g) + \delta_g^* \delta_{g_0} g$ au voisinage de g_0 est inversible sur les 2-tenseurs h satisfaisant $\int_M \text{tr}_{g_0} h \, dv_{g_0} = 0$.*

Démonstration. D'après le lemme 1.24, l'équation $d_{g_0} \Phi_{g_0} h = 0$ se réduit à

$$\nabla^* \nabla h - 2\mathring{R}(h) = 0.$$

Si les courbures sectionnelles de g_0 sont toutes égales à 1, alors,

$$\mathring{R}_{g_0}(h) = \text{tr}_{g_0}(h)g_0 - h,$$

et donc, comme $\text{tr}_{g_0} h = 0$, on obtient

$$\nabla^* \nabla h + 2h = 0,$$

qui implique que $h = 0$ par intégration par parties contre h . □

Maintenant, lorsque nous avons un opérateur inversible entre espaces de Banach, nous avons en fait un contrôle uniforme sur son inverse.

Lemme 1.60. *Pour tout opérateur linéaire Fredholm et injectif P entre des espaces de Banach X et Y , il existe $C = C(P) > 0$, et $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(P) > 0$ tels que : pour tout opérateur P' satisfaisant pour tout $u \in X$,*

$$\|(P' - P)u\|_Y \leq \varepsilon_0 \|u\|_X,$$

on ait :

$$\|u\|_X \leq C \|P'u\|_Y.$$

Ce lemme est une conséquence du théorème de l'inverse de Banach appliqué à l'opérateur Fredholm P en restreignant l'espace d'arrivée Y à l'image de P qui est fermée par hypothèse.

On déduit alors du théorème des fonctions inverses 1.12 et des contrôles du lemme 1.60 le résultat suivant.

Corollaire 1.61. *Si une métrique g_0 a des courbures sectionnelles constantes égales à 1, alors pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe $\delta > 0$, et $C > 0$ tels que, si une métrique g satisfait $\|g - g_0\|_{W^{l+2,p}} \leq \delta$ et a le même volume que g_0 , alors,*

$$\|g - g_0\|_{W^{l+2,p}} \leq C \|\Phi_{g_0}(g)\|_{W^{l,p}}.$$

Maintenant que l'on a montré que la linéarisation de notre opérateur était inversible, on peut conclure en utilisant le théorème des fonctions inverses pour estimer à quelle distance il se trouve du seul zéro de l'opérateur d'Einstein en jauge divergence, la métrique g_0 que l'on a fixée.

Proposition 1.62. *Soit (M, g_0) une variété à courbures sectionnelles constantes égales à 1, et $k \in \mathbb{N}$. Alors, il existe $\delta > 0$ et $C > 0$, tel que si une métrique g sur M satisfait :*

$$\|g - g_0\|_{C^{k+1,\alpha}} \leq \delta$$

alors, il existe un difféomorphisme $\Phi : M \rightarrow M$, si $k \geq 1$,

$$\|\Phi^*g - g_0\|_{C^{k+1,\alpha}} \leq C \left\| \text{Ric}(g) - (n-1)g \right\|_{C^{k-1,\alpha}},$$

ou bien, si $k = 0$,

$$\|\Phi^*g - g_0\|_{C^{1,\alpha}} \leq C \left\| \text{Ric}(g) - (n-1)g \right\|_{C^0}.$$

Démonstration. Soit (M, g_0) une variété à courbures sectionnelles égales à 1, et soit $\delta > 0$ la constante du lemme 1.15, et de celui du corollaire 1.61. Alors, d'après le lemme 1.15, il existe un difféomorphisme $\Phi : M \rightarrow M$ tel que

$$\delta_{g_0} \Phi^*g = 0.$$

On a donc, $\|\Phi_{g_0}(\Phi^*g)\|_{C^k} \leq \left\| \text{Ric}(g) - (n-1)g \right\|_{C^k}$, et par le corollaire 1.61, on en déduit qu'il existe $C > 0$, indépendante de ε telle que

$$\|g - g_0\|_{C^{k+1,\alpha}} \leq C\varepsilon,$$

car sur la sphère, pour p suffisamment grand, $W^{k+2,p}$ se plonge continûment dans $C^{k+1,\alpha}$, et C^k se plonge continûment dans $W^{k,p}$. \square

Chapitre 2

Complétion au sens de Gromov-Hausdorff de l'espace de modules des métriques d'Einstein en dimension 4

Dans ce chapitre et dans la suite de cette thèse, nous nous focalisons sur la dimension 4. Contrairement aux dimensions inférieures, l'espace de modules des métriques d'Einstein n'est plus complet lorsqu'il est muni de la distance de Gromov-Hausdorff. Nous rappelons tout d'abord quelques particularités de la dimension 4 qui motivent cette étude. Nous présentons ensuite la complétion de l'espace de modules des métriques d'Einstein de dimension 4. Nous verrons que le seul type de dégénérescence possible fait apparaître des *espaces singuliers* qui se forment après la contraction des *bulles* du problème.

Contributions. Nous présentons des preuves concises et peut-être plus modernes de résultats montrés au cours des années 70 et 80, ce qui permet de fixer les notations et d'avoir des résultats de base clairs pour la suite de la thèse.

1 Métriques d'Einstein en dimension 4

Comme évoqué en introduction, la dimension 4 présente des caractéristiques spécifiques en géométrie et en topologie. Nous en présentons quelques unes dans cette section.

1.1 Quelques particularités des métriques d'Einstein lisses en dimension 4

Certaines de ces propriétés de la dimension 4 que nous exhibons ci-dessous permettent de justifier le côté “optimal” des métriques d'Einstein pour cette dimension.

1.1.1 Variétés topologiques et différentiables en dimension 4

La topologie en dimension 4 est un vaste sujet dans lequel beaucoup de résultats sont frappants et inattendus, voir par exemple [Sco05]. Ce domaine se trouve à l'intersection de la topologie de “haute” et de “basse” dimension et semble hériter de leurs difficultés respectives.

Tout au long de cette thèse, nous utiliserons le terme de *variété* pour désigner une *variété différentielle*. De même le terme *topologie*, désignera une *structure différentiable* fixée (dont la régularité n'a pas d'importance par un théorème classique de Whitney). Nous ne nous poserons donc jamais la question du choix d'une structure différentiable sur une variété topologique qui apparaît à partir de la dimension 4.

Pour illustrer la difficulté de cette question, mentionnons d'une part que le nombre de structures différentiables sur la sphère (topologique) \mathbb{S}^4 n'est toujours pas connu, et d'autre part qu'il existe une infinité non dénombrable de structures différentiables sur \mathbb{R}^4 topologique d'après la théorie de Donaldson.

1.1.2 Courbure et 2-formes en dimension 4

En dimension 4, l'étoile de Hodge restreinte aux 2-formes, $*$: $\Omega^2 \rightarrow \Omega^2$ satisfait $*^2 = \text{Id}$ et ses valeurs propres sont donc ± 1 . On note alors Ω_{\pm}^2 les espaces propres associés qui sont tous les deux de dimension 3, Ω_+ est l'ensemble des 2-formes *autoduales* alors que Ω_- est l'ensemble des formes *anti-autoduales*, et l'on a

$$\Omega^2 = \Omega_+^2 \oplus \Omega_-^2.$$

Cette somme directe est orthogonale pour le produit scalaire donné par la forme bilinéaire $\omega \mapsto \omega \wedge \omega$ qui satisfait de plus $\omega_{\pm} \wedge \omega_{\pm} = \pm |\omega_{\pm}|^2 \text{dvol}$ si $\omega_{\pm} \in \Omega_{\pm}^2$.

Grâce à cette somme directe, l'endomorphisme symétrique sur les 2-formes,

noté \mathbf{R} donné par la courbure Riemannienne se décompose par blocs,

$$\mathbf{R} =: \begin{bmatrix} \mathbf{R}^+ & \text{Ric}^0 \\ \text{Ric}^0 & \mathbf{R}^- \end{bmatrix},$$

où les Ric^0 forment la partie sans trace de la courbure de Ricci, et où $\mathbf{R}^\pm := W^\pm + \frac{R}{12}$, avec R la courbure scalaire, et où les tenseurs sans trace W^\pm sont les parties autoduale et anti-autoduale du tenseur de Weyl, W .

Nous dirons qu'une métrique d'Einstein est *autoduale* si l'on a $W^- = 0$ et *anti-autoduale* si $W^+ = 0$.

1.1.3 Norme L^2 de la courbure

En dimension 4, une quantité naturelle pour mesurer à quel point une métrique est courbée est la norme L^2 du tenseur de courbure de Riemann, noté Rm . Celle-ci est invariante par changement d'échelle pour cette dimension.

La formule de Chern-Gauss-Bonnet implique que pour toute métrique g sur une variété M de dimension 4, nous avons

$$\int_M |\text{Rm}_g|^2 dv_g = 8\pi^2 \chi(M) + \int_M |\text{Ric}_g^0|^2 dv_g, \quad (2.1)$$

où $\text{Ric}_g^0 = \text{Ric}_g - \frac{R_g}{4}g$, est la partie sans trace de la courbure de Ricci et $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler qui ne dépend pas de g .

On en déduit donc que les métriques satisfaisant $\text{Ric}^0 \equiv 0$ sont les *seules* à minimiser $\int_M |\text{Rm}_g|^2 dv_g$ lorsqu'elles existent, et que pour une telle métrique, $\int_M |\text{Rm}_g|^2 dv_g = 8\pi^2 \chi(M)$ est de plus purement topologique. La condition $\text{Ric}_g^0 \equiv 0$ est en fait équivalente à la condition d'Einstein par la contraction de la seconde égalité de Bianchi qui donne $\delta_g \left(\text{Ric}_g - \frac{R(g)}{2}g \right) = 0$. En effet, comme $\text{Ric}_g^0 = 0$ implique $\text{Ric}_g = \frac{R_g}{4}g$, nous avons donc nécessairement $dR_g = 0$ puis Ric_g est constante.

Cette norme L^2 sera vue comme une *énergie* contrôlée de manière purement topologique et sera à la base de la plupart de nos arguments analytiques.

1.1.4 Inégalité d'Hitchin-Thorpe

Pour une variété d'Einstein de dimension 4, comme vu dans la partie précédente, la formule de Chern-Gauss-Bonnet implique la formule,

$$\chi(M) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M |\text{Rm}|^2 dv = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(\frac{R^2}{24} + |W^+|^2 + |W^-|^2 \right) dv, \quad (2.2)$$

qui nous assure déjà que pour qu'une métrique d'Einstein existe sur une variété M nous avons nécessairement $\chi(M) \geq 0$ avec égalité pour les métriques plates uniquement. La formule de signature de Hirzebruch est

$$\tau(M) = \frac{1}{12\pi^2} \int_M (|W^+| - |W^-|^2) dv. \quad (2.3)$$

De plus, comme $\int_M |W^\pm|^2 dv \geq 0$ et $\int_M R^2 dv \geq 0$, grâce à (2.2) et (2.3), on obtient l'inégalité de Hitchin-Thorpe suivante pour les variétés d'Einstein,

$$2\chi(M) \geq 3|\tau(M)|.$$

avec égalité si et seulement si M est un quotient du tore plat ou d'une variété hyperkählérienne.

On en déduit qu'il existe des variétés en dimension 4 sur lesquelles il n'existe pas de métrique d'Einstein.

Exemple 2.1 (Variétés de dimension 4 sans métriques d'Einstein). Simplement avec la condition $\chi(M) \geq 0$, nous pouvons trouver des variétés de dimension 4 n'admettant pas de métriques d'Einstein. Par exemple les fibrés en cercle sur $M^3 \neq \mathbb{T}^3$ ou bien, les produits de surfaces $\mathbb{S}^2 \times \Sigma_\gamma$ pour $\gamma \geq 2$ où Σ_γ est la surface de genre γ n'admettent pas de métriques d'Einstein.

1.2 Variétés Ricci-plates ALE et singularités orbifolds

En dimension 4, les métriques d'Einstein n'ont plus nécessairement une courbure bornée et peuvent développer des singularités. Nous verrons dans la partie suivante que ces singularités sont les plus simples et lisses envisageables et que l'on peut comprendre leur formation au sens de Gromov-Hausdorff. Présentons donc des exemples de telles dégénérescences.

1.2.1 Définitions

Donnons pour commencer les définitions d'*orbifold* et d'*espace asymptotiquement localement euclidien (ALE)* qui seront respectivement les espaces singuliers et les modèles de singularités des dégénérescences que l'on étudiera.

Définition 2.2 (Orbifold (à singularités isolées)). Nous dirons qu'un espace métrique (M_o, g_o) est un *orbifold (à singularités isolées)* s'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et un nombre fini de points $(p_k)_k$ de M_o que l'on qualifiera de *singuliers* tels que l'on ait les propriétés suivantes :

1. l'espace $(M_o \setminus \{p_k\}_k, g_o)$ est une variété riemannienne,
2. pour chaque point singulier p_k de M_o , il existe un voisinage de p_k , $U_k \subset M_o$, un sous-groupe fini $\Gamma_k \subset SO(4)$ agissant librement sur la sphère, et un difféomorphisme $\Phi_k : B_e(0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}^4/\Gamma_k \rightarrow U_k \subset M_o$ pour lequel $\Phi_k^*g_o$ est lisse lorsqu'elle est tirée en arrière sur \mathbb{R}^4 , et donc en particulier

$$r_e^l |\nabla^l(\Phi_k^*g_o - g_e)|_{C^2(g_e)} \leq C_l r_e^2.$$

Définition 2.3 (Variété ou orbifold asymptotiquement localement euclidienne (ALE)). On dira qu'une variété ou un orbifold (N^n, g) est *asymptotiquement localement euclidien* (ALE) s'il existe $\tau > 0$ et un compact $K \subset N$, un rayon $R > 0$, Γ un sous-groupe fini de $SO(n)$ dont l'action est libre sur \mathbb{S}^{n-1} , et un difféomorphisme $\Psi_\infty : (\mathbb{R}^n/\Gamma) \setminus B_e(0, R) \rightarrow N \setminus K$ tels que, si l'on note g_e la métrique euclidienne projetée sur \mathbb{R}^n/Γ , on ait, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\rho^k |\nabla_e^k(\Psi_\infty^*g - g_e)|_{g_e} = \mathcal{O}(\rho^{-\tau}),$$

sur $(\mathbb{R}^n/\Gamma) \setminus B_e(0, R)$, où $\rho = d_e(\cdot, 0)$. Au voisinage des singularités orbifolds, nous avons des difféomorphismes locaux Ψ_k introduits dans la définition 2.2.

Les exemples les plus simples sont non-compacts et modélisent à la fois les singularités des orbifolds et les infinis des ALE.

Exemple 2.4 (Les cônes plats \mathbb{R}^4/Γ). Soit $\Gamma \subset SO(4)$ agissant librement sur la sphère \mathbb{S}^3 c'est-à-dire n'ayant que $\{0\}$ ou \mathbb{R}^4 entier (si $\Gamma = \{\text{Id}\}$) comme ensemble de points fixes sur \mathbb{R}^4 . L'espace quotient \mathbb{R}^4/Γ est alors localement euclidien.

C'est de plus un cône sur la variété d'Einstein \mathbb{S}^3/Γ . Le cas particulier de $\Gamma = \mathbb{Z}_2 = \{\pm \text{Id}\}$ correspond à $\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^3$.

Donnons quelques exemples d'orbifolds compacts.

Exemple 2.5 (L'orbifold plat $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$). Considérons maintenant le tore $\mathbb{T}^4 = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$. L'action multiplicative de $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ sur \mathbb{R}^4 descend sur \mathbb{T}^4 , et on note $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ l'orbifold quotient obtenu.

Il a seize singularités modelées sur $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$ à tous les points $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ avec les $\varepsilon_i \in \{0, \frac{1}{2}\}$.

Exemple 2.6 (L'orbifold sphérique $\mathbb{S}^4/\mathbb{Z}_2$). La sphère \mathbb{S}^4 peut être vue comme $\mathbb{S}^4 \subset \mathbb{R}^5$. On notera $\mathbb{S}^4/\mathbb{Z}_2$ la variété obtenue comme quotient de \mathbb{S}^4 par l'identification antipodale pour les 4 premières coordonnées de \mathbb{R}^5 .

Exemple 2.7 (L'orbifold hyperbolique $\mathbb{H}^4/\mathbb{Z}_2$). L'orbifold $\mathbb{H}^4/\mathbb{Z}_2$ est obtenu par identification antipodale en carte géodésique globale sur le disque de Poincaré \mathbb{H}^4 .

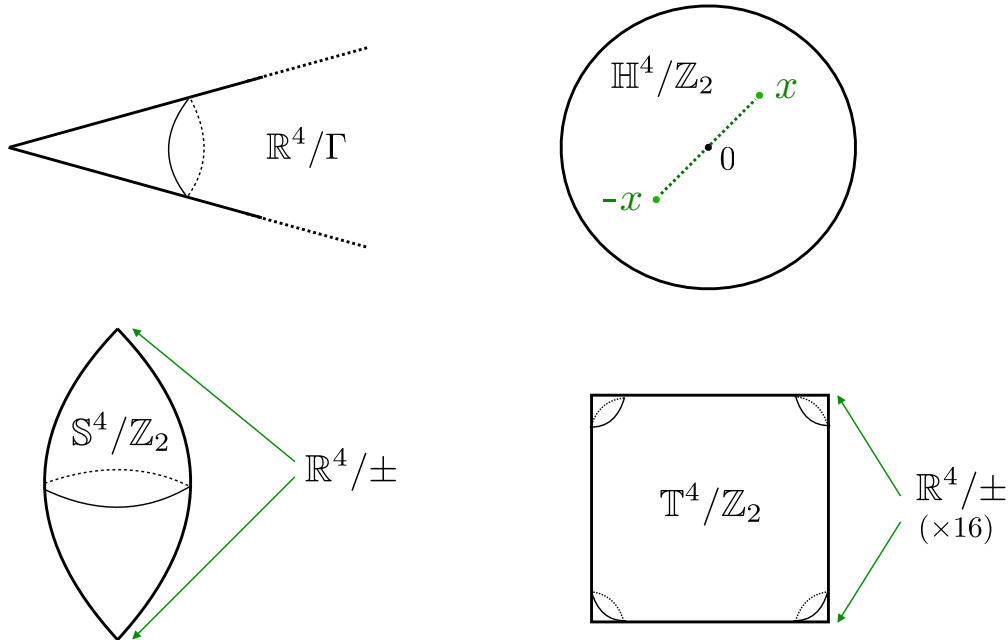


FIGURE 2.1 – Exemples d'orbifolds.

Remarque 2.8. Voir l'exemple des métriques AdS-Taub-Bolt en annexe B pour un orbifold non compact (asymptotiquement hyperbolique).

1.2.2 Exemples de dégénérescences de variétés d'Einstein en dimension 4

Montrons tout d'abord à l'aide d'exemples que contrairement aux métriques d'Einstein en dimension 2 et 3, l'ensemble des métriques d'Einstein en dimension 4 à volume et à diamètre uniformément contrôlés n'est pas compact. Il y a donc un nouveau phénomène : les dégénérescences orbifolds. Nous verrons dans la suite que c'est exactement qui empêche l'espace de modules des métriques d'Einstein d'être complet en dimension 4 lorsqu'il est muni de la distance de Gromov-Hausdorff.

La variété Ricci-plate ALE d'Eguchi-Hanson. En dimension 4, une nouveauté par rapport aux dimensions inférieures est le fait qu'il existe des métriques Ricci-plates autre que l'espace euclidien avec une croissance euclidienne des volumes.

La métrique d'Eguchi-Hanson est une métrique sur $T^*\mathbb{S}^2$ qui est Ricci-plate et asymptotique au cône plat $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$. Notons (x, y, z, t) des coordonnées dans une base orthonormale de \mathbb{R}^4 , et définissons $\rho := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$, et une base de 1-formes invariantes sur la sphère \mathbb{S}^3 , $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ par,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &:= \frac{1}{\rho^2}(xdy - ydx + zdt - tdz) \\ \alpha_2 &:= \frac{1}{\rho^2}(xdz - zdx - ydt + tdy) \\ \alpha_3 &:= \frac{1}{\rho^2}(xdt - tdx + ydz - zdy).\end{aligned}\tag{2.4}$$

À l'aide de ces 1-formes, la métrique ronde sur la sphère \mathbb{S}^3 s'écrit $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, et la métrique Euclidienne s'écrit donc $d\rho^2 + \rho^2 g_{\mathbb{S}^3} = d\rho^2 + \rho^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)$.

Hors de la section nulle de $T^*\mathbb{S}^2$ représentée par $\rho = 0$, la métrique g_{EH} s'écrit (avec l'identification $T^*\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^2 \approx (\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2) \setminus \{0\}$) :

$$g_{EH} := \sqrt{\frac{\rho^4}{1 + \rho^4}}(d\rho^2 + \rho^2 \alpha_1^2) + \sqrt{1 + \rho^4}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2).\tag{2.5}$$

En $\rho = 0$, la métrique est asymptotique à $d\left(\frac{\rho^2}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{\rho^2}{2}\right)^2 \alpha_1^2 + (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)$ et se prolonge bien de manière lisse à l'origine grâce à une sphère ronde \mathbb{S}^2 (avec la métrique $\alpha_2^2 + \alpha_3^2$) totalement géodésique, parce que $2\alpha_1$ est de longueur 2π sur $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$. À l'infini, la métrique est asymptotique à la métrique plate $d\rho^2 + \rho^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)$. Cette métrique satisfait $\text{Ric}(g_{EH}) = 0$ et $\mathbf{R}_+(g_{EH}) = 0$.

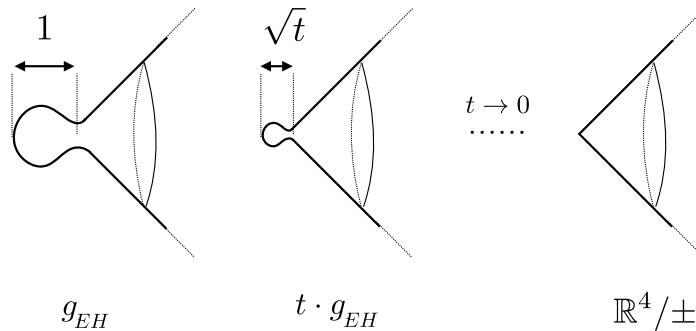


FIGURE 2.2 – Formation de singularité orbifold.

Par invariance par rééchelonnement, pour $t > 0$, les métriques $t g_{EH}$ restent Ricci-plates et asymptotiques à $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$. De plus, par définition du cône asympto-

tique, nous avons

$$(T^*\mathbb{S}^2, tg_{EH}) \xrightarrow[d_{GH}]{t \rightarrow 0} \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2.$$

On observe donc la formation d'une singularité $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$ à la limite alors que la courbure de Ricci et le volume de la boule de rayon 1 restent bornés.

Remarque 2.9. Il existe d'autres exemples *explicités* de métriques Ricci-plates (et même hyperkähleriennes) $U(2)$ -invariants asymptotiques à $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_k$ pour $k \geq 2$, [GH78].

Remarque 2.10. Nous avons aussi décrit dans l'annexe B un exemple *explicite* de dégénérescence dans le cadre asymptotiquement hyperbolique avec la famille de métriques AdS-Taub-Bolt qui développent une singularité $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$.

Métriques hyperkähleriennes sur la surface K3. Dans le cas compact, les dégénérescences connues n'ont pas d'expression explicite. Cependant, il est possible d'approcher ce phénomène et d'en avoir une bonne représentation géométrique asymptotique par recollement-perturbation. L'exemple le plus connu est sur la surface K3 où une suite de métriques Ricci-plates (hyperkähleriennes) converge vers l'orbifold $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$.

Lemme 2.11. *Il existe une suite de métriques hyperkähleriennes convergeant vers l'orbifold $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ et telles que tous les éclatements à l'échelle de la courbure aux 16 points singuliers convergent vers la métrique d'Eguchi-Hanson au sens de Gromov-Hausdorff pointé.*

Remarque 2.12. Il existe de la même manière des exemples de dégénérescences de variétés de Kähler-Einstein avec des constantes d'Einstein constantes égales à ± 1 dégénérent vers des orbifolds de Kähler-Einstein, voir l'article d'exposition [Nak94] et ses références.

1.2.3 Sous-groupes finis de $SO(4)$ agissant librement sur \mathbb{S}^3

Remarquons que l'ensemble des singularités qui peuvent se former s'injecte dans l'ensemble des sous-groupes finis de $SO(4)$ qui agissent librement sur \mathbb{S}^3 . Décrivons ces sous-groupes.

L'algèbre \mathbb{C}^2 s'identifie à celle des quaternions \mathbb{H} grâce l'isomorphisme suivant

$$(a + ib, c + id) \in \mathbb{C}^2 \rightarrow a + ib + (c + id)j = a + ib + jc + kd \in \mathbb{H},$$

avec les relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Si l'on note $*$ la multiplication des quaternions, on peut alors définir l'application $\varphi : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(4)$ définie pour $c \in \mathbb{H}$ par

$$\varphi(a, b)(c) = a * c * \bar{b},$$

qui est en fait un revêtement à deux feuillets.

Cette identification est pratique pour identifier les sous-groupes de $SO(4)$. Par exemple, la multiplication à droite par un élément de \mathbb{S}^3 (ou plus précisément la restriction de φ à $1 \times \mathbb{S}^3$) est équivalente à l'action de $SU(2)$, et $SU(2) \approx \mathbb{S}^3$. De même, la restriction de φ à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ est un revêtement à deux feuillets de $U(2)$. On appellera $\overline{U(2)} := \varphi(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1)$ qui sera vu comme $U(2)$ avec l'orientation opposée.

Théorème 2.13 ([Sco83, Theorem 4.10]). *Si Γ est un sous-groupe fini de $SO(4)$ agissant librement sur \mathbb{S}^3 , alors Γ est conjugué à un sous-groupe fini de $U(2)$ ou un sous-groupe fini de $\overline{U(2)}$.*

Cela signifie qu'il suffit de considérer les sous-groupes finis de $U(2)$ et les changements d'orientation pour atteindre tous les sous-groupes finis de $SO(4)$.

Ces sous-groupes sont classifiés dans le théorème 4.11 de [Sco83] comme les projections des $\mathbb{Z}_k \times G$ où G est un sous-groupe fini de $\mathbb{S}^3 \approx SU(2)$, voir [LV16, Table 1] pour une liste des groupes possibles.

1.2.4 Exemples connus d'orbifolds Ricci-plats ALE

Présentons brièvement les exemples connus d'orbifolds Ricci-plats ALE qui sont tous kählériens. Il est souvent conjecturé que ce sont les seuls espaces Ricci-plats ALE.

Orbifolds ALE hyperkähleriens. Les seuls exemples connus d'orbifolds Ricci-plats ALE sont kählériens. Tous ces exemples sont classifiés, et on a une paramétrisation satisfaisante de l'espace des modules de ces métriques Ricci-plats ALE. Donnons tout d'abord certaines propriétés des exemples hyperkähleriens.

Théorème 2.14 (Métriques Ricci-plats ALE hyperkähleriennes, [Kro89a, Kro89b]). *Soit Γ un sous-groupe fini de $SU(2)$. Alors, il existe $k_\Gamma \in \mathbb{N}^*$ et D_Γ une union de sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^{3k_Γ} de codimension au moins 3 contenant 0, tels que l'espace de modules des variétés hyperkähleriennes asymptotiques à \mathbb{R}^4/Γ soit paramétré sur \mathbb{R}^{3k_Γ} par des métriques $(X_\zeta, g_\zeta)_{\zeta \in \mathbb{R}^{3k_\Gamma}}$ telles que $\zeta \mapsto g_\zeta$ soit analytique.*

Remarque 2.15. Pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^{3k_\Gamma} \setminus D_\Gamma$, X_ζ est diffeomorphe à la résolution minimale de \mathbb{C}^2/Γ .

Remarque 2.16. Lorsque $\zeta \in \mathbb{R}^{3k_\Gamma}$ s'approche de D_Γ avec les notations du théorème 2.14, les métriques convergent au sens de Gromov-Hausdorff pointé vers des orbifolds Ricci-plats ALE.

Orbifolds Ricci-plats ALE kählériens. Les autres exemples kählériens sont classifiés dans [Suv11]. Ils sont tous asymptotiques à des groupes cycliques de type

$$\frac{1}{dn^2}(1, dnm - 1) \subset U(2),$$

c'est-à-dire le groupe cyclique d'ordre dn^2 engendré par :

$$\begin{bmatrix} e^{\frac{i2\pi}{dn^2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i2\pi(dnm-1)}{dn^2}} \end{bmatrix},$$

où $d \geq 1$, $n \geq 2$ et n et m sont premiers entre eux. Ce groupe admet un sous-groupe cyclique $\frac{1}{dn}(1, -1) \subset SU(2)$ d'ordre dn engendré par

$$\begin{bmatrix} e^{\frac{i2\pi}{dn}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i2\pi}{dn}} \end{bmatrix},$$

et on note A_{dn-1} la singularité $\mathbb{R}^4/\frac{1}{dn}(1, -1)$.

D'après [Suv11], les variétés kählériennes Ricci-plats ALE dont le groupe à l'infini n'est pas dans $SU(2)$ sont asymptotiques à $\mathbb{R}^4/\frac{1}{dn^2}(1, dnm - 1)$ et sont des quotients d'instantons gravitationnels de Gibbons-Hawking [GH78] asymptotiques à $\mathbb{R}^4/\frac{1}{dn}(1, -1)$ par l'action d'un groupe d'isométries \mathbb{Z}_n . D'après la fin de la partie 6.2 de [BR15], cela ne laisse que $3d-1$ degrés de liberté, et on peut donc paramétrer ces métriques sur $\mathbb{R}^{3d-1} \setminus D_{\frac{1}{dn^2}(1, dnm-1)}$ avec encore une fois un sous-ensemble de codimension 3 à éviter pour avoir des espaces lisses.

Remarque 2.17. Nous voyons donc qu'avec les variétés Ricci-plats ALE kählériennes (avec une de leurs orientations), nous n'atteignons pas tous les sous-groupes de $SO(4)$ agissant sur \mathbb{S}^3 , mais seulement ceux contenus dans $SU(2)$ et les groupes $\frac{1}{dn^2}(1, dnm - 1) \subset U(2)$. Il n'est pas clair que les autres groupes puissent modéliser les infinis d'espaces Ricci-plats ALE non plats.

Pour $\Gamma = \frac{1}{dn^2}(1, dnm - 1)$, nous noterons $d_\Gamma := 3d - 1$, et pour $\Gamma \subset SU(2)$, nous noterons $d_\Gamma := 3k_\Gamma$, où k_Γ est la constante du théorème 2.14.

1.3 Questions sur les métriques d'Einstein en dimension 4

Terminons cette section en listant quelques questions et conjectures sur les variétés d'Einstein, en particulier en dimension 4. Nous verrons ainsi que des questions basiques sont toujours ouvertes.

L'ensemble des métriques d'Einstein sur une 4-variété fixée. L'ensemble des solutions de l'équation d'Einstein sur une variété donnée est loin d'être compris, même sur les variétés les plus simples.

Question 2.18. Existe-t-il une métrique d'Einstein autre que la métrique ronde sur \mathbb{S}^4 ?

La réponse est négative en dimension 2 et 3 alors qu'elle est positive pour des dimensions supérieures, et ce même avec la structure différentiable habituelle de la sphère [Böh98].

Question 2.19. Y a-t-il un nombre fini de constantes d'Einstein possibles (à volume fixé) sur une variété différentielle donnée en dimension 4 ?

Un résultat plus fort serait le suivant.

Question 2.20. Y a-t-il un nombre fini de composantes connexes pour l'ensemble des métriques d'Einstein en dimension 4 ?

Notons que c'est une question subtile pour laquelle la dimension 4 est la dimension critique entre deux comportements bien distincts. En effet, la réponse à cette question est positive jusqu'en dimension 3 et fautive à partir de la dimension 5 car $\mathbf{E}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2)$ a un nombre infini de composantes connexes d'après [WZ90]. Comme signalé dans [And10], la question est en réalité celle de la structure de l'ensemble de l'espace des modules des métriques d'Einstein au voisinage de son bord.

Les dégénérescences de 4-variétés d'Einstein.

Question 2.21. Existe-t-il des variétés ou orbifolds Ricci-plats (mais non plats) ALE asymptotiques à tous les cônes \mathbb{R}^4/Γ pour $\Gamma \subset SO(4)$ fini, agissant librement sur la sphère et classifiés dans le théorème 2.13 ?

Une réponse positive à la question suivante donnerait une réponse négative à la question 2.21 d'après la remarque 2.17.

Question 2.22 ([BKN89, 3], page 315]). Les variétés Ricci-plates ALE sont-elles nécessairement kählériennes ?

Remarque 2.23. Dans [BKN89], Bando, Kasue et Nakajima présentent cette question comme une conjecture. Cependant la justification semble être la conjecture analogue dans le cadre Yang-Mills qui a été contredite [SSU89] la même année.

Question 2.24. Existe-t-il des métriques Ricci-plates compactes à holonomie générique ?

Un angle d'attaque pour obtenir une réponse négative serait de construire une dégénérescence orbifold qui ne serait pas hyperkählérien en désingularisant un orbifold Ricci-plat.

Question 2.25. Existe-t-il des exemples de dégénérescences orbifolds pour des métriques non-kählériennes ?

Comme indiqué en introduction, la notion d'Einstein est entre autres motivée par le fait qu'elle corresponde à autant d'équations qu'il n'y a de degrés de liberté. L'intuition (confirmée dans le cadre asymptotiquement hyperbolique) est alors que l'espace de modules des métriques d'Einstein devrait génériquement être discret.

On s'attend au contraire à ce que les dégénérescences viennent de courbes de métriques et qu'elles soient alors associées à des comportements très particuliers.

Remarque 2.26. Il existe aussi beaucoup d'orbifolds kählériens qui ne peuvent pas être désingularisés par des métriques de Kähler-Einstein lisses. Il existe en effet des orbifolds sur des surfaces de Del Pezzo avec des seconds nombres de Betti arbitrairement grands alors qu'une métrique lisse sur une telle surface a un second nombre de Betti majoré par 9, voir l'exposition [And10].

Pour répondre à toutes ces questions, il est crucial de comprendre la complétion de l'espace de modules des métriques d'Einstein en dimension 4. C'est précisément l'objectif de cette thèse.

2 Arbre de singularités

L'objectif de cette section est de présenter les idées principales du théorème classique d'Anderson et Bando-Kasue-Nakajima ci-dessous. D'après ce théorème, la complétion au sens de Gromov-Hausdorff de l'espace de modules des métriques d'Einstein en dimension 4 consiste à ajouter des espaces singuliers particuliers, les *orbifolds d'Einstein*. Ils décrivent de plus les limites possibles au sens de Gromov-Hausdorff (pointé) d'éclatements.

Théorème 2.27 ([And89, BKN89]). *Soit $(M_i^4, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variétés d'Einstein de dimension 4 et de même constante d'Einstein satisfaisant : pour tout $i \in \mathbb{N}$,*

1. *le diamètre de (M_i^4, g_i) est uniformément majoré,*
2. *le volume de (M_i^4, g_i) est uniformément minoré,*
3. *l'énergie $\mathcal{E}_i := \int_{M_i^4} |\text{Rm}(g_i)|_{g_i}^2 dv_{g_i}$ est uniformément majorée (c'est le cas si $M_i^4 = M^4$).*

Alors, il existe une sous-suite (M_i^4, g_i) convergeant vers un orbifold d'Einstein (M_∞^4, g_∞) , l'espace singulier.

De plus, à chaque singularité se forme un arbre de singularités, c'est-à-dire que les éclatements non triviaux convergent vers des orbifolds ALE qui se recollent avec une structure d'arbre. Ils sont reliés par des anneaux intermédiaire de basse énergie.

Plutôt que de nous intéresser aux éclatements à l'échelle de la courbure comme cela a été fait historiquement, nous allons montrer qu'il est possible de directement identifier une structure d'arbre de singularités.

2.1 Contrôles uniformes et ε -régularité

Présentons pour commencer deux résultats qui nous permettent de traduire nos hypothèses géométriques en des contrôles analytiques uniformes. Tout d'abord, nous avons un contrôle uniforme de la *constante de Sobolev* d'une zone D qui est définie comme l'infimum des constantes S telles que l'on ait : pour toute fonction v de classe C^1 à support compact, en notant \bar{v} la moyenne de v sur D , on ait

$$\left(\int_D |v - \bar{v}|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq S \int_D |\nabla v|^2.$$

Lemme 2.28 ([Cro80, Theorem 13]). *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n telle que :*

- *le diamètre est majoré par $D_0 > 0$,*
- *le volume est minoré par $v_0 > 0$,*
- *la courbure de Ricci est constante et minorée par -3 .*

La constante de Sobolev S est majorée de la manière suivante : il existe une

constante $C > 0$ ne dépendant que de la dimension telle que,

$$S \leq C \left(\frac{\left(\int_0^{D_0} \sinh(s) ds \right)^{n-1}}{v_0} \right)^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

Des itérations de Nash-Moser combinées à des formules de la section suivante permettent alors de montrer que les régions avec une petite “énergie”, c’est-à-dire une petite norme L^2 de leur courbure, sont bien contrôlées.

Lemme 2.29 ([Gao90, Theorems 4.8, 4.9 et 4.11]). *Soit (M, g) une variété d’Einstein de dimension 4 telle que :*

- le diamètre est majoré par $D_0 > 0$,
- le volume est minoré par $v_0 > 0$,
- la courbure de Ricci est constante et minorée par -3 .

Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\rho > 0$ satisfaisant

$$\int_{B(x, 2\rho)} |\text{Rm}_g|_g^2 dv_g < \varepsilon^2,$$

on ait sur $B(x, \rho)$

$$|\text{Rm}_g|_g \leq \frac{1}{\rho^2}.$$

2.2 Concentration de l’énergie à différentes échelles

Étudions maintenant plus précisément les dégénérescences de métriques d’Einstein en dimension 4. Nous verrons qu’à part en un nombre fini de points, la convergence est lisse vers un espace lisse. Nous verrons qu’aux points que l’on qualifiera de *singuliers*, la courbure peut aussi diverger à des vitesses différentes et qu’il se forme des *arbres de singularités*.

Proposition 2.30. *Soit $(M, g_i)_i$ une suite de variétés d’Einstein satisfaisant :*

1. $\text{Vol}(g_i) = 1$,
2. $\text{diam}(g_i) < D_0$ pour $D_0 > 0$ fixé.

Alors, il existe une sous-suite convergeant vers un espace métrique (X_∞, d_∞) avec un nombre fini de points singuliers, $(p_k)_k$. C’est-à-dire que $(X_\infty \setminus \{p_k\}, d_\infty)$ est une variété d’Einstein (incomplète) de dimension 4. Au cours de la dégénérescence se forment des arbres de singularités en chaque point singulier. Plus précisément, il existe des suites d’éclatements convergeant au sens de Gromov-Hausdorff vers des espaces non-compacts et lisses hors d’un nombre fini de points singuliers.

Démonstration. Soit $(M, g_i)_i$ une suite de métriques d'Einstein satisfaisant les hypothèses 1 et 2 de l'énoncé.

Alors, d'après le théorème de compacité de Gromov, théorème 0.1, il existe une sous-suite convergeant au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique limite (M_∞, d_∞) . Montrons que c'est un espace lisse à part à un nombre fini de points où des arbres de singularités de forment.

Définissons donc pour commencer l'ensemble des points singuliers :

$$S := \left\{ p \in M_\infty, \forall p_i \rightarrow p, \forall r > 0, \liminf_i \int_{B_{g_i}(p_i, r)} |\text{Rm}(g_i)|_{g_i}^2 dv_{g_i} > \varepsilon \right\},$$

où $\varepsilon > 0$ est la constante du lemme 2.29, et où les p_i sont des points où la courbure diverge et convergeant grâce à la convergence de Gromov-Hausdorff vers p . Ce sont donc les points où l'on ne pourra à aucune échelle obtenir des bornes sur la courbure et une convergence lisse grâce au lemme 2.29.

Il n'y a qu'un nombre fini de tels points car à chacun d'entre eux est associée une énergie strictement supérieure à ε . Il y en a donc un nombre inférieur à $\frac{8\pi^2\chi(M)}{\varepsilon}$ par (2.2). Hors de ces points, (M_∞, d_∞) est une variété d'Einstein de métrique lisse notée g_∞ d'après le lemme 2.29, et la norme L^2 de sa courbure est uniformément bornée par convergence lisse sur les compacts.

Définissons alors r_∞ tel que pour tout $p \in S$,

$$\int_{B_p(r_\infty) \setminus p} |\text{Rm}(g_\infty)|_{g_\infty}^2 dv_{g_\infty} < \frac{\varepsilon}{2},$$

Comme la convergence est lisse sur les compacts de $M_\infty \setminus S$, il existe pour tout i , r_i tel que

$$\int_{A(r_i, r_\infty)} |\text{Rm}(g_i)|_{g_i}^2 dv_{g_i} = \varepsilon.$$

Nous pouvons alors considérer une sous-suite de la suite $(M, r_i^{-2}g_i, p_i)_i$ convergeant vers un espace métrique non compact. Par le même argument qu'au dessus, la limite est lisse hors d'un nombre fini de points et la norme L^2 de sa courbure est bornée. L'espace est de plus non plat par définition de r_i .

En conclusion, nous obtenons une limite singulière (M_∞, d_∞) lisse partout sauf à un nombre fini de points. À chacun de ces points, en éclatant à la bonne échelle, nous trouvons un premier espace non trivial qui peut lui aussi toujours avoir des singularités. On peut alors éclater à ces points singuliers jusqu'à avoir une limite lisse, Ricci-plate et noncompacte. En effet chaque éclatement non lisse a une énergie plus grande que $\varepsilon > 0$. \square

Remarque 2.31. Le résultat est le même avec des topologies M_i variables tant que leur caractéristique d'Euler est bornée car cela contrôle l'énergie L^2 . On se ramène en fait à une topologie fixée en considérant une sous-suite.

Remarque 2.32. Ce genre de formation d'arbres de singularités est typique des problèmes variationnels en dimension critique, c'est-à-dire lorsque l'énergie étudiée est invariante par changement d'échelle comme c'est le cas ici avec la norme L^2 de la courbure.

Remarque 2.33. Il manque plusieurs aspects importants d'un bon résultat de convergence en arbre de singularités. Nous n'avons par exemple pour l'instant pas montré qu'il n'y avait pas d'énergie perdue dans les anneaux de basse courbure que l'on a identifiés. Nous n'avons pas non plus déterminé de lien entre la topologie M et celles des différentes limites, ni obtenu de structure pour ces mêmes limites. Pour obtenir ces résultats, les articles [And89] et [BKN89] (et même [Ban90] qui s'appuie sur ces résultats) se focalisent sur la structure de M_∞ et des limites d'éclatements, mais nous verrons que tout découle en fait de l'analyse dans les anneaux intermédiaires et nous nous restreindrons donc à cette étude.

3 Contrôle de la courbure des anneaux de basse énergie

La norme du tenseur de courbure pour une métrique d'Einstein satisfait des équations différentielles particulières qui impliquent en fait que dans toute zone annulaire de basse énergie, la courbure se concentre aux bords de l'anneau.

La démonstration de ce fait est l'objet de cette section qui est largement inspirée des techniques mises en œuvre dans [BKN89] puis [Ban90]. La difficulté ajoutée dans notre cas est que l'on s'intéresse à des anneaux finis dont les rapports entre les rayons intérieur et extérieur varient (et divergent lorsque des singularités se forment). Dans [BKN89], l'analyse est faite dans les cas limites où le rayon extérieur est infini ou bien dans le cas où le rayon intérieur est nul.

Proposition 2.34. *Soit (M, g) une variété d'Einstein de dimension 4 telle que :*

- *le diamètre est majoré par $D_0 > 0$,*
- *le volume est minoré par $v_0 > 0$,*
- *la courbure de Ricci est constante et minorée par -3 .*

Il existe des constantes $\varepsilon_1 > 0$, $C > 0$, $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$ dépendant uniquement de D_0 et v_0 telles que si l'on a un anneau de basse courbure de rayons $\rho_1 > 0$ et

$\rho_2 > 0$, avec $\rho_2 > 8\rho_1$:

$$\int_{A(\rho_1, \rho_2)} |\text{Rm}|^2 < \varepsilon_1^2,$$

alors pour tout $2\rho_1 \leq \rho \leq \frac{\rho_2}{4}$, on a :

$$\rho^2 |\text{Rm}| \leq C \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^{\beta_1} + \left(\frac{\rho}{\rho_2} \right)^{\beta_2} \right] \left(\int_{A(\rho_1, \rho_2)} |\text{Rm}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

sur l'anneau $A(\rho, 2\rho)$.

La preuve de cette proposition se trouve dans la section 3.3 de ce chapitre.

Ce qui signifie qu'au milieu de l'anneau, il y a un bien meilleur contrôle qu'initialement prévu par les théorèmes d' ε -régularité classiques comme le lemme 2.29 qui donneraient seulement $\rho^2 |\text{Rm}| \leq C \|\text{Rm}\|_{L^2(A(\rho_1, \rho_2))}$.

Analytiquement, cela permettra de faire de l'analyse dans des espaces à poids où les opérateurs qui nous intéressent sont Fredholm.

Remarque 2.35. L'énoncé et sa preuve sont très proches de la proposition 3 de [Ban90]. La différence est la présence du facteur $\left(\int_{A(\rho_1, \rho_2)} |\text{Rm}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

3.1 Inégalités différentielles sur la courbure

Les estimations sur la courbure qui nous permettent de construire des coordonnées sur la zone de transition (ou autrement dit un difféomorphisme entre cette zone et un anneau d'un cône plat) viennent toutes d'une formule de Weitzenböck et de ce qu'elle implique sur le tenseur de courbure d'une variété d'Einstein.

Proposition 2.36. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ telle que pour toute variété d'Einstein de dimension n :*

$$\Delta |\text{Rm}| \geq -C |\text{Rm}|^2.$$

Démonstration. Notons $d : \Gamma(\Omega^p \otimes \Omega^2) \rightarrow \Gamma(\Omega^{p+1} \otimes \Omega^2)$ la différentielle extérieure quelque soit $p \in \mathbb{N}$, et δ son adjoint formel.

En considérant le laplacien $d\delta + \delta d$, on a la formule de Weitzenböck [BL81, Theorem 3.2] suivante :

$$(d\delta + \delta d) \text{Rm} = \nabla^* \nabla \text{Rm} + Q(\text{Rm}),$$

où Q est une forme quadratique ne dépendant que de la dimension.

Cette formule implique l'égalité suivante :

$$\Delta |\text{Rm}|^2 := -\nabla^* \nabla |\text{Rm}|^2 = -2 \langle (d\delta + \delta d) \text{Rm}, \text{Rm} \rangle + 2 |\nabla \text{Rm}|^2 - 2 \langle Q(\text{Rm}), \text{Rm} \rangle.$$

Dans le cas d'une variété d'Einstein, la courbure est harmonique pour le laplacien $-(d\delta + \delta d)$. En effet, la seconde identité de Bianchi assure d'une part que

$$d \text{Rm} = 0,$$

et d'autre part que pour trois champs de vecteurs X, Y et Z

$$\delta \text{Rm}(X, Y, Z) = d^\nabla \text{Ric}(Y, Z, X),$$

où pour h un 2 tenseur on définit $d^\nabla h(X, Y, Z) := \nabla_X h(Y, Z) - \nabla_Y h(X, Z)$. Pour une variété d'Einstein, comme Ric est constante, nous avons

$$(d\delta + \delta d) \text{Rm} = 0.$$

On peut ainsi écrire :

$$\Delta |\text{Rm}|^2 \geq -2 \langle Q(\text{Rm}), \text{Rm} \rangle,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On en déduit qu'il existe $C' > 0$, telle que :

$$\Delta |\text{Rm}|^2 \geq -C' |\text{Rm}|^3.$$

Maintenant, comme pour toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$\Delta(g^\alpha) = \alpha(\alpha - 1)g^{\alpha-2} |\nabla g|^2 + \alpha g^{\alpha-1} \Delta g, \quad (2.6)$$

on en déduit, pour $g = |\text{Rm}|^2$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, que :

$$\Delta |\text{Rm}| = -\frac{1}{4} |\text{Rm}|^{-3} |\nabla |\text{Rm}|^2|^2 + \frac{1}{2} |\text{Rm}|^{-1} \Delta |\text{Rm}|^2 \geq -\frac{C'}{2} |\text{Rm}|^2.$$

□

Une autre inégalité différentielle est satisfaite par la norme de la courbure.

Proposition 2.37. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\gamma_* > 0$ et $C > 0$ telles que pour toute variété d'Einstein de dimension n :*

$$\Delta |\text{Rm}|^{1-\gamma_*} \geq -C |\text{Rm}|^{2-\gamma_*}.$$

Remarque 2.38. De plus, en dimension 4, on peut choisir $\gamma_* = \frac{2}{3}$ (ce qu'on ne prouvera pas ici, voir [BKN89]).

Démonstration. La preuve consiste à reprendre l'égalité :

$$\Delta |\text{Rm}|^2 = 2|\nabla \text{Rm}|^2 - \langle Q(\text{Rm}), \text{Rm} \rangle, \quad (2.7)$$

et d'être plus précis au niveau du contrôle du terme $2|\nabla \text{Rm}|^2$ avec l'estimation suivante connue sous le nom d'inégalité de Kato *améliorée* :

Lemme 2.39 ([BKN89, lemme 4.9], [CGH00, Théorème 5.1]). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\gamma_* > 0$ tel que l'on ait pour toute métrique d'Einstein de dimension n :*

$$(1 + \gamma_*)|(\text{Rm}, \nabla \text{Rm})|^2 \leq |\text{Rm}|^2 |\nabla \text{Rm}|^2,$$

où $(\text{Rm}, \nabla \text{Rm})(X) = (\text{Rm}, \nabla \text{Rm}(X))$.

Le terme $2|\nabla \text{Rm}|^2$ de (2.7), peut donc être contrôlé par :

$$|\nabla \text{Rm}|^2 \geq (1 + \gamma_*) \frac{|(\nabla \text{Rm}, \text{Rm})|^2}{|\text{Rm}|^2} = (1 + \gamma_*) |\nabla |\text{Rm}||^2.$$

On en déduit donc

$$\Delta |\text{Rm}|^2 \geq 2(1 + \gamma_*) |\nabla |\text{Rm}||^2 - C' |\text{Rm}|^3. \quad (2.8)$$

En utilisant la formule (2.6) avec $g = |\text{Rm}|^2$ et $\alpha = \frac{1-\gamma_*}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta |\text{Rm}|^{1-\gamma_*} &= - \frac{(1 + \gamma_*)(1 - \gamma_*)}{4} |\text{Rm}|^{2(\frac{1-\gamma_*}{2}-2)} |\nabla |\text{Rm}||^2 \\ &\quad + \frac{1 - \gamma_*}{2} |\text{Rm}|^{2(\frac{1-\gamma_*}{2}-1)} \Delta |\text{Rm}|^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (2.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta |\text{Rm}|^{1-\gamma_*} &\geq - \frac{(1 + \gamma_*)(1 - \gamma_*)}{4} |\text{Rm}|^{2(\frac{1-\gamma_*}{2}-2)} |\nabla |\text{Rm}||^2 \\ &\quad + \frac{1 - \gamma_*}{2} |\text{Rm}|^{2(\frac{1-\gamma_*}{2}-1)} \left(2(1 + \gamma_*) |\nabla |\text{Rm}||^2 - C' |\text{Rm}|^3 \right). \end{aligned}$$

Comme $|\nabla |\text{Rm}||^2 = 4|\text{Rm}|^2 |\nabla \text{Rm}|^2$, les deux premiers termes se compensent et il reste exactement :

$$\Delta |\text{Rm}|^{1-\gamma_*} \geq - \frac{C'(1 - \gamma_*)}{2} |\text{Rm}|^{2-\gamma_*}.$$

□

De ces inégalités, on va pouvoir déduire des contrôles sur $|\text{Rm}|$ venant de l'étude de l'inéquation différentielle $\Delta u \geq -fu$ en prenant $u = |\text{Rm}|^{1-\gamma^*}$ ou $|\text{Rm}|$ et $f = C|\text{Rm}|$.

3.2 Étude des solutions de l'équation $\Delta u \geq -fu$

On présente ici des lemmes techniques sur les solutions de l'équation

$$\Delta u \geq -fu.$$

L'analyse de [BKN89] est adaptée d'une part à $\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$ et d'autre part à $B(0,1) \setminus \{0\}$ et leurs espaces à poids respectifs.

Ici, nous utilisons plutôt l'analyse de [Ban90] où l'étude est adaptée aux anneaux. Nous obtenons des contrôles dans des espaces à poids qui en un sens ne dépendent pas du rapport des rayons intérieurs et extérieurs et qui sont donc pratiques lorsque ces rapports varient (et divergent dans notre cas). Lorsque le rayon intérieur tend vers 0 à rayon extérieur constant égal à 1, on retrouve les espaces à poids habituels sur $B(0,1) \setminus \{0\}$ et quand le rayon extérieur tend vers l'infini à rayon intérieur constant égal à 1, on retrouve les espaces classiques sur $\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$.

Convexité des intégrales de u dans les zones de petite énergie. Pour cela on commence par contrôler des quantités intégrales sur u (qui représentera soit $|\text{Rm}|$, soit $|\text{Rm}|^{1-\gamma^*}$), essentiellement par injections de Sobolev.

Lemme 2.40 ([Ban90, Lemma 1,2]). *Soient $n \in \mathbb{N}$, $S > 0$, $V > 0$, $1 < p_0 < p_1$. Alors, il existe $\varepsilon_0(S, V, p_0, p_1) > 0$, $C(S, V, p_0) > 0$, $\beta_1(S, V, p_0), \beta_2(S, V, p_0) > 0$ tels pour tous $0 < \rho_1 < \frac{1}{8}\rho_2$ que si (M, g) est une variété riemannienne pointée de dimension n telle que sur un anneau de rayons ρ_1 et ρ_2 , $A(\rho_1, \rho_2)$, on ait :*

1. la constante de Sobolev sur l'anneau majorée par S .
2. $\text{vol}(A(\rho_1, \rho)) \leq V\rho^n$ pour tous $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$.

Soit $f \in L^{\frac{n}{2}}$ et $u \in L^p$, avec $1 < p_0 \leq p \leq p_1$ une solution de :

$$\Delta u \geq -fu.$$

Alors, si

$$\int_{A(\rho_1, \rho_2)} f^{\frac{n}{2}} \leq \varepsilon_0^{\frac{n}{2}},$$

on a, pour tout ρ tel que $\rho_1 \leq \rho \leq 8\rho \leq \rho_2$:

1. la fonction u est en fait aussi dans $L^{\frac{n}{n-2p}}$:

$$\left(\int_{A(2\rho, 4\rho)} u^{\frac{n}{n-2p}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \rho^{-2} \int_{A(\rho, 8\rho)} u^p.$$

2. si on a de plus $p > 2$, l'énergie d'un anneau est contrôlée par sa distance aux deux bords de l'anneau :

Il existe $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$ tels que :

$$\int_{A(2\rho, 4\rho)} u^p \leq C \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^{\beta_1} + \left(\frac{\rho}{\rho_2} \right)^{\beta_2} \right] \int_{A(\rho_1, \rho_2)} u^p.$$

Remarque 2.41. Les hypothèses techniques 1 et 2 de ce lemme seront satisfaites par les variétés que l'on considérera car elles sont à courbure de Ricci bornée et non effondrées grâce à l'inégalité de Bishop-Gromov et au lemme 2.28.

Convexité en norme L^∞ . Nous avons donc un contrôle de quantités intégrales sur u . Des itérations de Moser, vont nous permettre d'en déduire un contrôle en norme L^∞ .

Lemme 2.42 ([Ban90, Lemma 3]). *Sous les hypothèses du lemme 2.40, si l'on suppose de plus $f \in L^q$ pour $q > \frac{n}{2}$ et $u \in L^p$, $p > 1$, et qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $\rho \in [\rho_1, \frac{\rho_2}{8}]$ on ait,*

$$\int_{A(\rho, 8\rho)} f^q \leq A \rho^{-(2q-n)},$$

alors, il existe $C = C(A, S, V, p, q) > 0$ telle que,

$$\sup_{A(2\rho, 4\rho)} u^p \leq C \rho^{-n} \int_{A(\rho, 8\rho)} u^p.$$

3.3 Conséquences pour la courbure des anneaux de basse énergie

Remarquons alors que les anneaux de basse énergie reliant deux échelles de formation de singularité satisfont effectivement les hypothèses techniques des lemmes 2.40 et 2.42 précédents. Rappelons nos hypothèses :

- le diamètre est majoré par $D_0 > 0$,
- le volume est minoré par $v_0 > 0$,
- la courbure de Ricci est constante et minorée par $-(n-1)$.

La constante de Sobolev est elle aussi contrôlée par le diamètre, le volume et la courbure de Ricci d'après le lemme 2.28 et l'hypothèse 1 du lemme 2.42 est donc satisfaite. Les dégénérescences que l'on considère sont à volume minoré et diamètre majoré ce qui combiné à la borne inférieure sur la courbure de Ricci implique que les volumes des anneaux sont majorés par le théorème de Bishop-Gromov. L'hypothèse 2 du lemme 2.42 est donc satisfaite.

Preuve de la proposition 2.34. Soit une zone annulaire satisfaisant les hypothèses de l'énoncé. Elle satisfait donc les hypothèses techniques des lemmes 2.40 et 2.42.

D'après les propositions 2.36 et 2.37, $u_1 := |\text{Rm}|$ et $u_2 := |\text{Rm}|^{1-\gamma^*}$ satisfont

$$\Delta u_1 \geq -f u_1, \text{ et } \Delta u_2 \geq -f u_2,$$

avec $f := C|\text{Rm}| = C u_1 = C u_2^{\frac{1}{1-\gamma^*}}$. Nous allons leur appliquer les lemmes précédents afin d'obtenir le contrôle souhaité.

Soit $\varepsilon_1 > 0$ telle que : $\varepsilon_1 < C^{-1/2} \varepsilon_0$ où ε_0 est la constante introduite dans le lemme 2.40. On a alors bien $\int_{A(\rho_1, \rho_2)} f^2 < \varepsilon_0^2$, et en appliquant le point 1 du lemme 2.40 à u_1 , on obtient, avec $p = 2$:

$$\left(\int_{A(2\rho, 4\rho)} u_1^4 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \rho^{-2} \int_{A(\rho, 8\rho)} u_1^2.$$

Maintenant, comme $f = -C u_1$, on a :

$$\int_{A(2\rho, 4\rho)} f^4 \leq C^2 \rho^{-4} \left(\int_{A(\rho, 8\rho)} f^2 \right)^2 \leq A \rho^{-(2 \times 4 - 4)},$$

avec $A = C^2 \left(\int_{A(\rho_1, \rho_2)} f^2 \right)^2 \leq C^2 \varepsilon_0^2$. En d'autres termes, f satisfait en fait les hypothèses du lemme 2.42 avec $q = 4 > \frac{n}{2} = 2$. En considérant u_2 et $p' := \frac{2}{(1-\gamma^*)} > \frac{n}{n-2} = 2$, il existe donc une constante C' (du lemme 2.42) telle qu'on ait :

$$\sup_{A(2\rho, 4\rho)} u_2^{p'} \leq C' \rho^{-n} \int_{A(\rho, 8\rho)} u_2^{p'},$$

c'est-à-dire :

$$\sup_{A(2\rho, 4\rho)} |\text{Rm}|^2 \leq C' \rho^{-4} \int_{A(\rho, 8\rho)} |\text{Rm}|^2. \quad (2.9)$$

Or, par le point 2 du lemme 2.40, avec le même $p' := \frac{2}{(1-\gamma^*)} > 2$ il existe $\beta_1 > 0$ et

$\beta_2 > 0$ tels que l'on ait :

$$\int_{A(\rho, 8\rho)} |\text{Rm}|^2 \leq C \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^{2\beta_1} + \left(\frac{\rho}{\rho_2} \right)^{2\beta_2} \right] \int_{A(\rho_1, \rho_2)} |\text{Rm}|^2. \quad (2.10)$$

Les inégalités (2.9) et (2.10) combinées donnent le contrôle énoncé :

$$\sup_{A(2\rho, 4\rho)} |\text{Rm}|^2 \leq C \rho^{-4} \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^{2\beta_1} + \left(\frac{\rho}{\rho_2} \right)^{2\beta_2} \right] \int_{A(\rho_1, \rho_2)} |\text{Rm}|^2.$$

□

Remarque 2.43. On peut obtenir des résultats tout à fait analogues en dimension n en supposant des contrôles bien moins naturels sur la norme $L^{\frac{n}{2}}$ de la courbure de Riemann.

4 Orbifolds et espaces ALE

Montrons maintenant nos espaces limites sont en réalité des orbifolds et orbifolds ALE. Nous obtiendrons ainsi une bonne description de la dégénérescence à toutes les échelles.

4.1 Structure des singularités

Nous avons donc des contrôles ponctuels satisfaisants sur la courbure dans les anneaux reliant les différentes échelles de singularités.

Corollaire 2.44. *Soit g_∞ une des limites de l'arbre de singularités identifié dans la proposition 2.30. Il existe $\beta > 0$ tel qu'on ait*

1. *au voisinage des points singuliers de g_∞ , la courbure est un $\mathcal{O}(r^{-2+\beta})$, où r est la distance au point singulier et*
2. *à l'infini, si g_∞ est noncompact, la courbure est un $\mathcal{O}(r^{-2-\beta})$, où r est la distance à un point quelconque fixé.*

Après la construction de coordonnées, ce contrôle de la courbure implique que les différentes limites obtenues dans la proposition 2.30 sont des orbifolds et que leurs infinis sont ALE.

Proposition 2.45. *Soit $\beta > 0$ la constante du corollaire 2.44 précédent. Au voisinage de chaque point singulier il existe des constantes $C_k > 0$ pour $k \in \mathbb{N}$ et un*

difféomorphisme local φ d'un voisinage de 0 dans $(\mathbb{R}^4/\Gamma, g_e)$ vers un voisinage du point singulier de (M_∞, g_∞) tel que l'on ait

$$r_e^k |\nabla_e^k(\varphi^* g_\infty - g_e)|_{g_e} < C_k r_e^\beta \quad (2.11)$$

De même, il existe un difféomorphisme ψ entre un voisinage de l'infini de $(\mathbb{R}^4/\Gamma, g_e)$ vers un voisinage de l'infini d'un limite d'éclatements de la proposition 2.30, tel que l'on ait

$$r_e^k |\nabla_e^k(\psi^* g_\infty - g_e)|_{g_e} < C_k r_e^{-\beta}. \quad (2.12)$$

Idées de preuve. Nous ne donnons qu'une idée de preuve ici car le chapitre 3 suivant apportera une preuve plus générale. Nous avons donc un contrôle de la courbure d'après le corollaire 2.44 et nous souhaitons montrer que dans de bonnes coordonnées, cela traduit un contrôle de la métrique.

L'idée est assez naturellement d'utiliser des coordonnées géodésiques qui sont bien contrôlées par la courbure ambiante par l'équation de Riccati. En considérant donc une carte géodésique au voisinage d'un point singulier, on obtient le contrôle énoncé.

Pour le contrôle à l'infini, un argument un peu plus subtil est nécessaire. La première étape est de trouver une hypersurface Σ_0 à seconde forme fondamentale presque constante, ce qui est assuré par un résultat difficile de [Kas88].

Enfin, l'idée est de considérer les géodésiques partant orthogonalement vers l'extérieur de l'hypersurface Σ_0 . L'équation de Riccati assure alors d'une part que les géodésiques ne s'intersectent pas, mais cela assure de plus que la seconde forme fondamentale des lignes de niveaux de la distance à Σ_0 , une fois rééchelonnée converge vers l'identité lorsque la distance tend vers l'infini. Le contrôle de la courbure ambiante implique alors que ces sphères rééchelonnées convergent vers une variété à courbures sectionnelles positives constantes par les formules de Gauss. D'après le lemme 1.54, c'est donc un quotient de la sphère ronde \mathbb{S}^3 par un groupe fini $\Gamma \subset SO(4)$ agissant librement dessus. En particulier, comme il n'y a pas de point conjugué, hors du compact à l'intérieur de l'hypersurface Σ_0 , la variété est difféomorphe à $(\mathbb{R}^4 \setminus B_e(0, 1)) / \Gamma$.

En intégrant l'équation de Riccati le long des géodésiques depuis l'infini jusqu'à Σ_0 , on obtient alors un contrôle de la métrique restreinte aux hypersurfaces et de leur seconde forme fondamentale. On en déduit un contrôle de la métrique ambiante qui est proche de la métrique plate avec une décroissance à l'infini. \square

On déduit aussi du contrôle sur la courbure des anneaux de la proposition 2.34 que l'énergie, c'est-à-dire le carré de la norme L^2 de la courbure, de la suite de

variétés dégénérant correspond exactement à la somme des énergies de l'orbifold limite et des différents orbifolds Ricci-plats ALE qui apparaissent.

Corollaire 2.46 (Conservation de l'énergie). *Sous les hypothèses du théorème 2.34, l'énergie de (M_i^4, g_i) est égale à la somme de l'énergie de l'orbifold (M_∞^4, g_∞) et de celles de toutes les variétés Ricci-plates ALE apparaissant dans les arbres de singularités se formant aux points singuliers de (M_∞^4, g_∞) .*

Nous en déduisons aussi à l'aide des constructions de coordonnées du chapitre 3 les théorèmes de structures suivants pour nos arbres de singularités.

Théorème 2.47 ([Ban90, Theorem 1, Proposition 2]). *Soit $(M_i^4, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variétés d'Einstein de dimension 4 et de même constante d'Einstein satisfaisant :*

1. *le diamètre de (M_i^4, g_i) est uniformément majoré,*
2. *le volume de (M_i^4, g_i) est uniformément minoré,*
3. *l'énergie $\int_{M_i^4} |\text{Rm}(g_i)|^2 dv(g_i)$ est uniformément majorée (cette hypothèse est en fait impliquée par les deux précédentes d'après [CN15]).*

Alors, il existe une sous-suite (M_i^4, g_i) convergeant vers un orbifold d'Einstein (M_∞^4, g_∞) au sens de Gromov-Hausdorff.

Pour chaque point singulier p_∞ dont la singularité est modélisée sur \mathbb{R}^4/Γ pour Γ un sous-groupe de $SO(4)$, il existe une suite de points $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de M_i^4 de haute courbure $|\text{Rm}(g_i)|(p_i) \rightarrow \infty$, et une suite de réels $T_i \rightarrow 0$ appelés premières échelles de singularité tels que : $(M_i^4, \frac{g_i}{T_i}, p_i)$ converge au sens de Gromov-Hausdorff vers (N, g_b, p) un orbifold Ricci-plat ALE asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ . De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ ne dépendant que de $\varepsilon > 0$, (N, g_b, p) et (M_∞^4, g_∞) tel qu'en notant $A_i(\delta)$ l'anneau de rayons $\frac{\sqrt{T_i}}{\delta}$ et δ centré en p_i , on ait pour i suffisamment grand :

$$\int_{A_i(\delta)} |\text{Rm}(g_i)|^2 dv(g_i) < \varepsilon^2.$$

Remarque 2.48. Plus généralement, il se forme un *arbre de singularités* en chaque point singulier comme décrit dans la proposition 2.30. En effet, en considérant ensuite la suite de métriques pointées $(M_i^4, \frac{g_i}{T_i}, p_i)$, on obtient de nouvelles “premières” échelles de singularités. On peut alors itérer jusqu'à obtenir tout l'arbre de singularités. Pour $\delta > 0$ assez petit et i assez grand, chaque boule $B_{g_i}(p_i, \delta)$ a la topologie d'un recollement d'un nombre fini, $k \in \mathbb{N}$, d'orbifolds Ricci-plats ALE $\{(N_j, g_{b_j}, p_j)\}$ pour $j \in \{1, \dots, k\}$ avec un nombre fini de singularités. L'infini de chaque orbifold Ricci-plat ALE asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ est recollé au point singulier d'un autre orbifold modélisé sur \mathbb{R}^4/Γ le long d'une sphère S^3/Γ .

4.2 Coordonnées d'ordre optimal

Finalement, nous pouvons en réalité montrer que la courbure décroît à des ordres particuliers aux points singuliers et à l'infini.

Lemme 2.49 (Fonctions harmoniques sur \mathbb{R}^4/Γ). *Soit f une fonction harmonique bornée sur un anneau $A_e(r_1, r_2)$ de \mathbb{R}^4/Γ centré en zéro de rayons $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$. Alors, c'est une somme dénombrable de fonctions harmoniques homogènes de degrés k et $-2 - k$ pour $k \in \mathbb{N}$. De plus, pour $\Gamma \neq \{\text{Id}\}$, nous avons $k \neq 1$.*

Démonstration. Soit f une fonction harmonique bornée sur un anneau $A_e(r_1, r_2)$. C'est donc la solution du problème de Dirichlet donné par $f|_{S_e(r_1)}$ sur $S_e(r_1)$, la sphère de rayon r_1 et $f|_{S_e(r_2)}$ sur $S_e(r_2)$. Notons que si $r_2 = +\infty$, nous considérons sa limite à l'infini comme étant une condition de Dirichlet.

Cherchons à construire une autre solution du problème de Dirichlet comme dans l'énoncé du lemme. Le principe du maximum nous assurera qu'elle est égale à f . Développons $f|_{S_e(r_1)}$ et $f|_{S_e(r_2)}$ en harmoniques sphériques. C'est-à-dire qu'il existe des fonctions propres du laplacien sur \mathbb{S}^3/Γ associées à la valeur propre $-k(k+2)$ pour $k \in \mathbb{N}$, $F_k(r_1)$ et $F_k(r_2)$, telles que l'on ait :

$$f|_{S_e(r_1)} = \sum_k F_k(r_1), \quad (2.13)$$

et

$$f|_{S_e(r_2)} = \sum_k F_k(r_2). \quad (2.14)$$

Notons alors que les $r_e^k F_k$ et les $r_e^{-2-k} F_k$ sont harmoniques où r_e est la distance euclidienne à 0.

Si $r_1 = 0$, alors nous avons $f = \sum_k \frac{r_e^k}{r_2^k} F_k(r_2)$ par le principe du maximum et si $r_2 = +\infty$, alors nous avons $f = \lim_{r_e \rightarrow +\infty} f + \sum_k \frac{r_1^{2+k}}{r_e^{2+k}} F_k(r_1)$.

Dans le cas intermédiaire où la fonction est bornée sur un anneau fini, la solution est un peu moins directe. Nous cherchons un développement

$$\sum_{k \geq 0} r_e^k \tilde{F}_k^+ + r_e^{-2-k} \tilde{F}_k^-$$

dont les valeurs aux bords sont

$$\sum_{k \geq 0} r_1^k \tilde{F}_k^+ + r_1^{-2-k} \tilde{F}_k^- = \sum_{k \geq 0} F_k(r_1)$$

et

$$\sum_{k \geq 0} r_2^k \tilde{F}_k^+ + r_2^{-2-k} \tilde{F}_k^- = \sum_{k \geq 0} F_k(r_2),$$

c'est-à-dire que l'on pose

$$\tilde{F}_k^+ = \frac{1}{r_1^k r_2^{-2-k} - r_2^k r_1^{-2-k}} \left(r_2^{-2-k} F_k(r_1) - r_1^{-2-k} F_k(r_2) \right),$$

et

$$\tilde{F}_k^- = \frac{1}{r_1^k r_2^{-2-k} - r_2^k r_1^{-2-k}} \left(-r_2^k F_k(r_1) + r_1^k F_k(r_2) \right).$$

Le principe du maximum nous assure donc encore une fois que $f = \sum_{k \geq 0} r_e^k \tilde{F}_k^+ + r_e^{-2-k} \tilde{F}_k^-$.

Le fait que $k = 1$ n'apparaisse pas lorsque $\Gamma \neq \{\text{Id}\}$ vient simplement du fait qu'une fonction linéaire (un $r_e F_1$) invariante par Γ est nécessairement nulle et que la valeur propre -3 n'apparaît alors pas sur \mathbb{S}^3/Γ . \square

Lemme 2.50. *Sur \mathbb{R}^4/Γ pour $\Gamma \neq \{\text{Id}\}$, il n'y a pas de 2-tenseur homogène harmonique dont les coefficients soient d'ordre -2 ou -3 en jauge de Bianchi, il n'y en a en particulier pas en jauge divergence et à trace nulle.*

Démonstration. Ce résultat est prouvé dans [CT94, p. 537-538]. Un 2-tenseur homogène harmonique h à coefficients d'ordre -2 ou -3 sur \mathbb{R}^4/Γ se tire en arrière sur \mathbb{R}^4 comme des matrices dont les coefficients sont des fonctions harmoniques homogènes. Comme vu dans la preuve précédente, si $\Gamma \neq \{\text{Id}\}$, alors la valeur propre -3 n'apparaît pas et il n'y a pas de 2-tenseur harmonique en r^{-3} .

Un élément du noyau de $\nabla_e^* \nabla_e$ homogène à coefficients d'ordre -2 s'écrit $\frac{H_0}{r_e^2}$ pour H_0 un 2-tenseur constant sur \mathbb{R}^4 . Un tel 2-tenseur n'est à divergence nulle que s'il s'annule car nous avons

$$\delta_e \left(\frac{H_0}{r_e^2} \right) = 2 \frac{H_0(\partial_{r_e}, \cdot)}{r_e^3},$$

et, si $x \in \mathbb{R}^4$ un vecteur propre de H_0 de valeur propre λ , comme $\partial_{r_e}(x) = \frac{x}{|x|}$, et nous avons alors $\delta_e \left(\frac{H_0}{r_e^2} \right)_x \left(\frac{x}{|x|} \right) = -2 \frac{H_0 \left(\frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|} \right)}{r_e^3(x)} = -2 \frac{\lambda}{r_e^3(x)}$. \square

Proposition 2.51. *Au voisinage de chaque point singulier il existe des constantes $C_k > 0$ pour $k \in \mathbb{N}$ et un difféomorphisme local φ d'un voisinage de 0 dans $(\mathbb{R}^4/\Gamma, g_e)$ vers un voisinage du point singulier de (M_∞, g_∞) tel que l'on ait*

$$r_e^k |\nabla_e^k (\varphi^* g_\infty - g_e)|_{g_e} < C_k r_e^2 \quad (2.15)$$

Et de plus, la métrique φ^*g_∞ est lisse (et même analytique) lorsqu'elle est tirée en arrière sur \mathbb{R}^4 .

De même, il existe un difféomorphisme ψ entre d'un voisinage de l'infini de $(\mathbb{R}^4/\Gamma, g_e)$ vers un voisinage de l'infini d'un limite d'éclatements de la proposition 2.30, tel que l'on ait

$$r_e^k |\nabla^k(\psi^*g_\infty - g_e)|_{g_e} < C_k r_e^{-4}. \quad (2.16)$$

Démonstration. Considérons les coordonnées obtenues dans la proposition 2.45. Il est alors possible de construire des coordonnées dans lesquelles la métrique est en jauge de Bianchi par rapport à la métrique Euclidienne. En effet, cela revient à résoudre le problème de Dirichlet suivant :

$$B_{(\exp_{g_e} X)^*g_e} g = 0,$$

avec la condition de bord

$$X = 0 \text{ sur } B_e(0, \varepsilon)$$

pour un certain $\varepsilon > 0$.

L'équation satisfaite par φ^*g qui est d'Einstein par rapport à g_e se réécrit alors

$$\nabla_e^* \nabla_e(\varphi^*g - g_e) = \Lambda(\varphi^*g) + Q_e(\varphi^*g), \quad (2.17)$$

où Q_e est quadratique en φ^*g et ses deux premières dérivées. Par hypothèse, nous avons $r_e^i |\nabla_e^i(\varphi^*g - g_e)|_{g_e} = \mathcal{O}(r_e^\beta)$, puis (2.17) implique

$$\nabla_e^* \nabla_e(\varphi^*g - g_e) = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(r_e^{-2+2\beta}) \quad (2.18)$$

puis comme il n'y a pas d'élément du noyau de $\nabla_e^* \nabla_e$ décroissant plus lentement que r^2 en zéro, nous avons $r_e^i |\nabla_e^i(\varphi^*g - g_e)|_{g_e} = \mathcal{O}(r_e^{\min(2\beta, 2)})$. En itérant cet argument, nous obtenons finalement que

$$r_e^i |\nabla_e^i(\varphi^*g - g_e)|_{g_e} = \mathcal{O}(r_e^2).$$

Pour montrer que la métrique est lisse une fois tirée en arrière sur \mathbb{R}^4 , on utilise le théorème de singularité effaçable [BKN89, Theorem 5.1] dont la preuve est essentiellement contenue dans [Gao90] et qui est basée sur un argument par itérations de Moser plus simple que celui de la partie précédente.

La preuve dans le cas noncompact est similaire et s'appuie sur le fait que les éléments du noyau en $\frac{1}{r^2}$ ou $\frac{1}{r^3}$ et en jauge de Bianchi sont nuls d'après le lemme 2.50. \square

Remarque 2.52. On ne peut pour l'instant rien dire à propos de la métrique sur un anneau fini de basse énergie. En effet, le contrôle de la métrique passe par la construction de coordonnées qui s'appuient sur l'asymptotique de la métrique à l'infini ou au point singulier, ce qui n'est pas encore établi sur un anneau fini. Nous verrons comment une nouvelle construction de coordonnées optimales permet de s'en sortir et permettrait aussi de retrouver le lemme précédent.

Chapitre 3

De Gromov-Hausdorff à C^∞ à poids au voisinage d'une métrique singulière

Dans ce chapitre, dont les résultats sont essentiellement tirés de [Ozu19a], nous montrons que toute métrique d'Einstein suffisamment proche d'un orbifold d'Einstein au sens de Gromov-Hausdorff est en fait proche de la désingularisation de l'orbifold par le recollement a priori *naïf* de variétés Ricci-plates ALE aux points singuliers de l'orbifold. Cette proximité est mesurée par une norme C^∞ à poids (voir le théorème 3.42) qui est plus forte que la norme C^∞ et qui est cruciale pour les chapitres 4 et 5 suivants. La difficulté principale de la preuve consiste à analyser les anneaux de basse courbure qui relient les bulles et les espaces singuliers et à y construire des coordonnées optimales. Le résultat principal est le théorème 3.42 énoncé à la fin du chapitre.

Contributions. Nous raffinons la convergence des métriques d'Einstein vers leurs limites singulières en dimension 4. Nous prouvons qu'une telle dégénérescence est contrôlée dans des espaces de Hölder à poids. Cette convergence est cruciale car c'est dans ces espaces que l'analyse de la suite de la thèse se placera.

1 Arbres des singularités et désingularisations naïves

Donnons pour commencer des définitions et expliquons pourquoi notre preuve se résume à étudier les anneaux de basse courbure analysés dans le chapitre 2 précédent.

1.1 Désingularisation naïve d'orbifold

Par [Ban90] et les résultats du chapitre 2, lorsqu'une suite de métriques d'Einstein d_{GH} -converge vers un orbifold d'Einstein, un arbre de singularités se forme à chaque point singulier. Un tel arbre de singularités donne en réalité aussi une configuration de désingularisation de l'orbifold par des orbifolds ALE.

Définition 3.1 (Configuration de désingularisation). Soit (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein et S_o l'ensemble de ses points singuliers, et $(N_j, g_{b_j})_j$ une famille d'espaces ALE Ricci-plats asymptotiques à \mathbb{R}^4/Γ_j à l'infini et $(S_{b_j})_j$ l'ensemble de ses points singuliers. Définissons aussi une application de recollement

$$p : j \mapsto p_j \in S_o \cup \bigcup_k S_{b_k},$$

où la singularité en p_j est aussi \mathbb{R}^4/Γ_j . Nous appellerons

$$D := \left((M_o, g_o, S_o), (N_j, g_{b_j}, S_{b_j})_j, p \right)$$

une *configuration de désingularisation* pour (M_o, g_o) .

Exemple 3.2. Les arbres de singularités du chapitre précédent (ch. 2) apparaissant dans les dégénérescences de variétés d'Einstein sont des configurations de désingularisation. La question 0.5 s'intéresse donc à sa réciproque : quand est-ce qu'une configuration de désingularisation D est l'arbre de singularités apparaissant lors d'une dégénérescence de métriques d'Einstein ?

Définissons les métriques qui imiteront la dégénérescence de métriques d'Einstein décrite dans le chapitre 2. Nous qualifierons ces désingularisations de *naïves* dans un premier temps et le but de ce chapitre sera de montrer que ce sont finalement de bonnes approximations de la dégénérescence.

Définissons tout d'abord le recollement naïf d'un espace ALE à une singularité d'un orbifold. Reprenons pour cela la constante $\varepsilon_0 > 0$ des définitions 2.2 et 2.3.

Soit $0 < 2\varepsilon < \varepsilon_0$, $0 < t < \varepsilon^4$, (M_o, g_o) un orbifold, et $\Phi : B_e(0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}^4/\Gamma \rightarrow U$ une carte locale autour d'un point singulier $p \in M_o$ satisfaisant $\Phi^*g_o = g_e + \mathcal{O}(r_e^2)$. Soit aussi (N, g_b) un orbifold ALE asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ , et $\Psi_\infty : (\mathbb{R}^4/\Gamma_\infty) \setminus B_e(0, \varepsilon_0^{-1}) \rightarrow N \setminus K$ une carte d'un voisinage de l'infini où l'on a $\Psi_\infty^*g_b = g_e + \mathcal{O}(r_e^{-4})$, voir le lemme 2.51. Considérons finalement $\chi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, une fonction de coupure C^∞ supportée dans $[0, 2]$ et égale à 1 sur $[0, 1]$, et définissons pour tout $s > 0$, $\varphi_s : x \in \mathbb{R}^4/\Gamma \rightarrow sx \in \mathbb{R}^4/\Gamma$, ce qui induit en particulier l'identification suivante

$$\varphi_{\sqrt{t}}(A_e(\varepsilon_0^{-1}, \varepsilon_0 t^{-1/2})) = A_e(\varepsilon_0^{-1} \sqrt{t}, \varepsilon_0).$$

Nous définissons alors l'orbifold $M_o \# N$ comme N recollé à M_o à l'aide du difféomorphisme $\Phi \circ \varphi_{\sqrt{t}} \circ \Psi^{-1} : \Psi(A_e(\varepsilon_0^{-1}, \varepsilon_0 t^{-1/2})) \rightarrow \Phi(A_e(\varepsilon_0^{-1} \sqrt{t}, \varepsilon_0))$ identifiant leurs anneaux $\Phi(A_e(\varepsilon_0^{-1} \sqrt{t}, \varepsilon_0))$ et $\Psi(A_e(\varepsilon_0^{-1}, \varepsilon_0 t^{-1/2}))$.

Définition 3.3 (Recollement naïf d'espace ALE à un orbifold). On définit une *désingularisation naïve* de (M_o, g_o) en p par (N, g_b) à l'échelle t , que l'on notera $(M_o \# N, g_o \#_{p,t} g_b)$ où l'on définit $g_o \#_{p,t} g_b = g_o$ sur $M_o \setminus U$, $g_o \#_{p,t} g_b = t g_b$ sur $K \subset N$, et en tirant en arrière sur l'anneau plat la métrique interpoles entre les métriques ALE et orbifold

$$g_o \#_{p,t} g_b = \chi(t^{-1/4} r_e) \Phi^* g_o + t(1 - \chi(t^{-1/4} r_e)) \varphi_{t^{1/2},*} \Psi_\infty^* g_b$$

sur $A(t, \varepsilon_0) := A_e(\varepsilon_0^{-1} \sqrt{t}, \varepsilon_0)$.

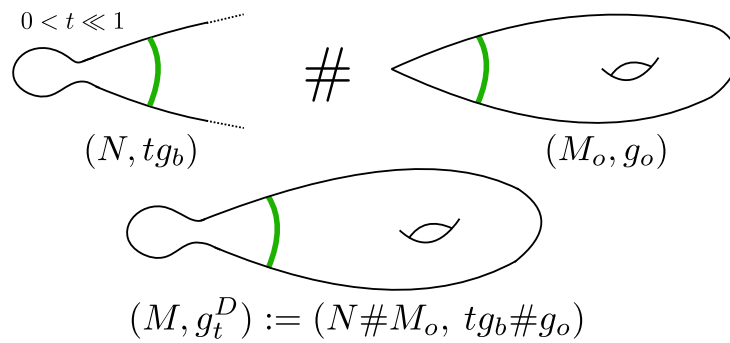


FIGURE 3.1 – Recollement naïf.

Plus généralement, il est possible de désingulariser des orbifolds itérativement à l'aide d'arbres d'orbifolds Ricci-plats ALE.

Soient $0 < 2\varepsilon < \varepsilon_0$, (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein orbifold et $(N_j, g_{b_j})_j$ un arbre d'orbifolds Ricci-plats ALE tels que $M = M_o \#_j N_j$ soit donnée par une

configuration de désingularisation D , et soit $t = (t_j)_j$ avec $0 < t_j < \varepsilon^4$ les *échelles relatives de recollement*.

Définition 3.4 (Désingularisation naïve d'un orbifold). La métrique de *désingularisation naïve* g_t^D est alors le résultat de la construction itérative suivante.

Démarrer avec une bulle la plus profonde (N_j, g_{b_j}) , c'est-à-dire avec j pour lequel $S_j = \emptyset$. Si $p_j \in N_k$ (la même chose marche avec $p_j \in M_o$), alors remplacer (N_k, g_{b_k}, S_j) par $(N_k \# N_j, g_{b_k} \#_{p_j, t_j} g_{b_j}, S_k \setminus \{p_j\})$, supprimer $(N_j, g_{b_j}, \emptyset)$ dans D et restreindre p par $l \rightarrow p_l$ sur $l \neq j$ dans D . Considérer ensuite une autre bulle la plus profonde, et appliquer le procédé précédent jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de point singulier.

Pour $t = (t_j)_j$, si N_j est recollé à $p_j \in N_{j_1}$, et N_{j_1} est recollé à $p_{j_1} \in N_{j_2}, \dots, N_{j_{k-1}}$ est recollé à N_{j_k} , qui est recollé à M_o , on définit $T_j := t_j t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_k}$ l'échelle de la bulle j . Avec cette notation, sur chaque $N_j(2\varepsilon)$, la métrique est $T_j g_{b_j}$.

Remarque 3.5. Notre construction dépend d'un choix de jauge : la manière de faire correspondre les infinis des bulles et les voisinages de points singuliers de l'orbifold grâce à φ_t peut être composée avec n'importe quelle isométrie de \mathbb{R}^4/Γ_k . Il y a donc deux jauges de recollement, l'échelle t_k , et $\varphi_k \in \text{Isom}(\mathbb{R}^4/\Gamma_k)$. Ces jauges reviennent simplement à recoller des métriques Ricci-plates ALE différentes.

Définition 3.6. On définit des coupures $\chi_{M_o^t}$ et $\chi_{N_j^t}$ qui valent 1 respectivement sur les parties isométriques à $M_o^t := M_o \setminus B_{g_o}(p_k, 2t_k^{\frac{1}{4}})$ et $N_j^t := N_j \cap B_{g_{b_j}}(p_j, t_k^{-\frac{1}{4}})$ à support dans $M_o \setminus B_{g_o}(p_k, t_k^{\frac{1}{4}})$ et $N_j^t := N_j \cap B_{g_{b_j}}(p_j, 2t_k^{-\frac{1}{4}})$.

1.2 Coordonnées sur une désingularisation naïve

La métrique ci-dessus permet d'identifier dans M des régions où la métrique est proche de celle de l'orbifold, de l'ALE ou d'un anneau plat reliant les deux.

Définition 3.7 (Zones modèles sur un arbre de singularités : $M_o(\varepsilon)$, $N_j(\varepsilon)$ et $A_k(t, \varepsilon)$). Avec les notation des définitions 2.2 et 2.3, for $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, on notera

- $M_o(\varepsilon) := M_o \setminus \left(\bigcup_k \Phi_k(B_e(0, \varepsilon)) \right) \subset M_o$,
- $N(\varepsilon) := N \setminus \left(\bigcup_k \Psi_k(B_e(0, \varepsilon)) \cup \Psi_\infty \left((\mathbb{R}^4/\Gamma_\infty) \setminus B_e(0, \varepsilon^{-1}) \right) \right) \subset N_j$,
- $A_j(t, \varepsilon) := A_e \left(\varepsilon^{-1} \sqrt{T_j} \sqrt{t_j}, \varepsilon \sqrt{T_j} \right) \subset \mathbb{R}^4/\Gamma_k$.

Nous voyons que ces ensembles se plongent naturellement dans notre variété M grâce à notre construction de désingularisation naïve, et on utilisera la même notation sur M .

Remarque 3.8. $M_o(\varepsilon)$, $N(\varepsilon)$ et $A_j(t, \varepsilon)$ sont les ensembles compacts des orbifolds privés de leurs points singuliers qui apparaissent dans le théorème 2.47. Ils sont de plus exhaustifs lorsque ε tend vers zéro.

Nous avons donc un recouvrement de $M = M_o \#_j N_j$ adapté à une dégénérescence à échelles relatives $(t_j)_j$:

$$M = \bigcup_j \left(N_j(\varepsilon) \cup A_j(t, \varepsilon) \right) \cup M_o(\varepsilon). \quad (3.1)$$

L'objectif de ce chapitre sera d'identifier chacune de ces régions avec une région d'une métrique d'Einstein proche d'un orbifold au sens de Gromov-Hausdorff.

1.3 Coordonnées sur une variété d'Einstein

Le résultat principal de notre première partie est que toute métrique d'Einstein dégénéralant (c'est-à-dire s'approchant d'un orbifold d'Einstein au sens de Gromov-Hausdorff) n'est pas seulement décrite par un arbre de singularités au sens de Gromov-Hausdorff, mais a une métrique ε -proche de celle d'une désingularisation naïve dans un sens C^k à poids, voir le théorème 3.42.

Définition 3.9 (Variété ε -décrite par un arbre de singularités). Pour $\varepsilon > 0$, et $l \in \mathbb{N}$, nous dirons qu'une variété riemannienne (M, g) est ε -décrite en norme C^l par une désingularisation naïve de (M_o, g_o) , (M, g_t^D) , s'il existe un difféomorphisme $\Phi : M \rightarrow M$ tel que si l'on note $\Phi(M_o(\varepsilon)) =: \mathcal{M}_o(\varepsilon) \subset M$, $\Phi(N_j(\varepsilon)) =: \mathcal{N}_j(\varepsilon) \subset M$ et $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon)$ la composante connexe de $M \setminus \mathcal{M}_o(32\varepsilon) \cup \bigcup_j \mathcal{N}_j(32\varepsilon)$ ayant une intersection non-vidée avec $\Psi_\infty(\mathcal{N}_k(\varepsilon) \setminus B_\varepsilon(0, \varepsilon^{-1}))$ on ait :

1. sur $\mathcal{M}_o(\varepsilon)$,

$$\|\Phi^*g - g_o\|_{C^l(g_o)} = \|\Phi^*g - g^D\|_{C^l(g^D)} \leq \varepsilon,$$

2. sur la zone $\mathcal{N}_j(\varepsilon)$,

$$\left\| \frac{\Phi^*g}{T_j} - g_{b_j} \right\|_{C^l(g_{b_j})} = \|\Phi^*g - g^D\|_{C^l(g^D)} \leq \varepsilon,$$

3. et sur $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon)$,

$$\int_{\mathcal{A}_k(t, \varepsilon)} |\text{Rm}_g|^2 dv_g < \varepsilon^2.$$

Proposition 3.10. *Sous les hypothèses du théorème 2.47, étant donnée une suite $(M_i, g_i)_i$ de métriques d'Einstein convergeant au sens de Gromov-Hausdorff vers un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) , il existe une désingularisation naïve $(M_i, g_{t_i}^D)$ et*

une sous-suite telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et $l \in \mathbb{N}$, pour i suffisamment grand, la variété (M_i, g_i) est ε -décrite par (M_i, g_t^D) en norme C^l .

Démonstration. Soit $(M_i, g_i)_i \xrightarrow{GH} (M_o, g_o)$ une suite de variétés satisfaisant les hypothèses du théorème 2.47. Quitte à prendre une sous-suite, pour tout point singulier de M_o , il existe une suite d'échelles $T_i > 0$ et de points p_i de M_i de haute courbure $|\text{Rm}(g_i)|(p_i) \rightarrow \infty$ pour lesquels $(M_i, \frac{g_i}{T_i}, p_i)$ converge de manière lisse sur les compacts d'un orbifold Ricci-plat ALE (N_j, g_{b_j}, p_j) privé de ses points singuliers. La convergence est de plus lisse à distance uniformément minorée des points singulier d'après les résultats du chapitre 2 car les métriques d'Einstein proches au sens de Gromov-Hausdorff y ont une borne inférieure sur leur rayon harmonique.

Soit $\varepsilon > 0$ et $l \in \mathbb{N}$, en considérant un compact $N_j(\varepsilon)$, il existe $i_j \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i > i_j$, il existe un difféomorphisme sur son image $\Phi_i : N_j(\varepsilon) \rightarrow M_i$ avec $\left\| \frac{\Phi_i^* g_i}{T_{j,i}} - g_{b_j} \right\|_{C^l} \leq \varepsilon$ et de même, il existe un rang i_o à partir duquel les métriques sont C^l -proches sur $M_o(\varepsilon)$. Comme la norme L^2 de la courbure riemannienne est uniformément bornée d'après [CN15], il n'y a qu'un nombre fini de telles échelles dans chaque arbre de singularités, nous pouvons considérer le maximum des rangs i_j et i_o pour obtenir le résultat énoncé.

Le contrôle de la norme L^2 de la courbure dans les anneaux intermédiaires est prouvée dans le théorème 2.47 du chapitre 2. \square

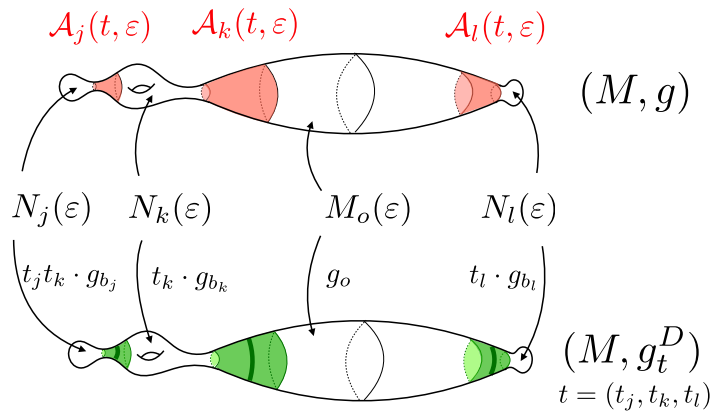


FIGURE 3.2 – Correspondance entre les zones modèles.

Remarque 3.11. L'existence de bonnes coordonnées sur les zones $\mathcal{M}_o(\varepsilon)$ et $\mathcal{N}_j(\varepsilon)$ est donc déjà présente dans les théorèmes de [And89, BKN89] raffinés dans [Ban90] qui ont été présentés dans le chapitre 2.

L'objectif premier de ce chapitre est de construire des bonnes coordonnées sur les zones $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon)$.

2 Des premières coordonnées dans les anneaux intermédiaires

La difficulté principale ici pour la construction de coordonnées (et supplémentaire par rapport à [BKN89]) est que l'on ne dispose pas d'un comportement asymptotique (à l'infini ou à un point singulier) sur lequel nous pouvons baser notre construction. Nous allons commencer par construire des premiers systèmes de coordonnées locales par ε -régularité. Cela nous aidera ensuite à obtenir un système de coordonnées optimales.

2.1 Construction des premières coordonnées

L'objectif de cette section est de prouver la proposition suivante.

Proposition 3.12. *Pour tous $\delta > 0$, $D_0 > 0$, $v_0 > 0$, $E > 0$ et $l \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que si une variété d'Einstein satisfait :*

- *le diamètre est majoré par $D_0 > 0$,*
- *le volume est minoré par $v_0 > 0$,*
- *la courbure de Ricci est minorée par -3 ,*
- *il existe un anneau $A(\rho_1, \rho_2)$ avec $4\rho_1 < \rho_2$ satisfaisant :*

$$\int_{A(\rho_1, \rho_2)} |\text{Rm}|^2 \leq \varepsilon_2^2,$$

et tel que $\int_{B(\rho_2)} |\text{Rm}|^2 \leq E$ (c'est toujours satisfait pour une certaine constante $E(v_0, D_0)$ d'après [CN15]),

- *le rapport des volumes des boules associées est presque euclidien*

$$\left| \frac{\text{Vol}(B(\rho_2))}{\text{Vol}(B(\varepsilon_2\rho_1))} - \frac{\rho_2^4}{(\varepsilon_2\rho_1)^4} \right| \leq \varepsilon_2.$$

Alors, pour tout $\rho \in [2\rho_1, \frac{1}{4}\rho_2]$ il existe un domaine $\hat{A}(\rho, 2\rho)$ proche de l'anneau

$A(\rho, 2\rho)$ au sens suivant,

$$A((1 + \delta)\rho, (2 - \delta)\rho) \subset \hat{A}(\rho, 2\rho) \subset A((1 - \delta)\rho, (2 + \delta)\rho),$$

tel qu'il existe Γ sous-groupe fini de $SO(4)$ et un difféomorphisme

$$\Phi_\rho : A_e(1, 2) \subset \mathbb{R}^4/\Gamma \rightarrow \hat{A}(\rho, 2\rho) \subset M,$$

pour lesquels on ait :

$$\left\| \frac{\Phi_\rho^* g}{\rho^2} - g_e \right\|_{C^l(A_e(1,2))} \leq \delta.$$

Notre situation est non-effondrée à toutes les échelles par une application de l'inégalité de Bishop-Gromov.

Lemme 3.13. *Soit (M, g) une variété riemannienne de diamètre inférieur à $D_0 > 0$ et de volume supérieur à $v_0 > 0$ et ayant une courbure de Ricci minorée par $-(n - 1)\kappa < 0$. Alors, pour tout $0 \leq r \leq D_0$, nous avons,*

$$\text{Vol}_g(B_g(r)) \geq \frac{\text{Vol}_{g_{-\kappa}}(B_{g_{-\kappa}}(r))}{\text{Vol}_{g_{-\kappa}}(B_{g_{-\kappa}}(D_0))} v_0$$

où $g_{-\kappa}$ est la métrique de l'espace simplement connexe à courbures sectionnelles constantes égales à $-\kappa$. En particulier, il existe $C = C(\kappa, D_0, v_0) > 0$ telle que l'on ait

$$\text{Vol}_g(B_g(r)) \geq Cr^4. \quad (3.2)$$

Le rayon d'injectivité est bien contrôlé sur les zones correspondant à l'orbifold et les orbifolds ALE grâce à la proximité avec des métriques modèles du corollaire 2.47. Il est de plus contrôlé dans les zones intermédiaires coniques d'après le lemme suivant.

Lemme 3.14. *Sous les hypothèses de la proposition 3.12, il existe une constante $r_0 > 0$ ne dépendant que de D_0, v_0 , telle qu'en tout point de l'anneau $A(2\rho_1, \frac{1}{2}\rho_2)$ à distance ρ du centre, le rayon d'injectivité et le rayon harmonique soient minorés par $r_0\rho$.*

Démonstration. Considérons un point x à distance $\rho \in [2\rho_1, \frac{1}{2}\rho_2]$ du centre de l'anneau et la boule $B(x, \frac{\rho}{2})$. Le volume de $B(x, \frac{\rho}{2})$ est minoré grâce à l'inégalité de Bishop-Gromov par $C_1\rho^4$ pour une constante C_1 ne dépendant que de v_0 et D_0 , voir le lemme 3.13. Pour contrôler la courbure, on peut utiliser le théorème d' ε -régularité de [Gao90], lemme 2.29, voir aussi [And89] et [BKN89]. Ainsi, pour

$\rho \in [4\rho_1, \frac{1}{4}\rho_2]$, quitte à réduire la constante ε_2 de l'énoncé, alors la norme L^2 de la courbure sur la boule $B(x, \frac{\rho}{2})$ est plus petite que la constante ε du lemme 2.29. La courbure à distance ρ est donc plus petite que $\frac{1}{\rho^2}$ par le lemme 2.29.

Par le théorème 1.43, les contrôles sur la courbure et le volume à l'échelle ρ impliquent qu'il existe une constante $r_1 > 0$ dépendant du volume de la boule de rayon ρ et d'une borne sur la courbure à cette échelle telle qu'en tout point à distance ρ , le rayon d'injectivité soit minoré par $r_1\rho$. Comme la courbure est bornée, il existe $0 < r_0 < r_1$ dépendant de r_1 et de la borne sur la courbure telle que le rayon harmonique soit minoré par r_0 . □

L'outil essentiel pour prouver l'existence des premières coordonnées de la proposition 3.12 sera le théorème de presque rigidité des cônes de Cheeger et Colding.

Lemme 3.15 ([CC96, Theorem 4.85]). *Pour tout $\delta > 0$, il existe $\kappa > 0$ tel que pour tout $r > 0$, si (M^n, g) satisfait $\text{Ric}(g) \geq -(n-1)\kappa r^{-2}$ et qu'il existe un point $p \in M$ auquel,*

$$\frac{\text{Vol}(B(p, \kappa r))}{v_{-\kappa r^{-2}}(\kappa r)} - \frac{\text{Vol}(B(p, 2r))}{v_{-\kappa r^{-2}}(2r)} < \kappa,$$

où $v_{-\kappa r^{-2}}(s)$ est le volume de la boule de rayon s dans l'espace simplement connexe à courbures sectionnelles constantes égales à $-\kappa r^{-2}$, alors, il existe un cône métrique $(C(X), d_{C(X)}, 0)$ tel que $\text{diam}(X) \leq \pi$ et,

$$d_{GH}\left(\left(B(p, r), p\right), \left(B_{C(X)}(0, r), 0\right)\right) \leq \delta r.$$

Nous allons avoir besoin d'un raffinement de ce résultat dans notre cas. Pour obtenir une preuve ne se basant pas sur les techniques de [And89, BKN89] et en particulier uniquement basée sur l'étude des anneaux de basse courbure comme dans le second chapitre, nous n'utilisons pas le fait que les limites soient des ALE et orbifolds.

Lemme 3.16 (Presque cône volumique dans une variété d'Einstein de dimension 4). *Pour tous $\delta > 0$, $l \in \mathbb{N}$, $v_0 > 0$, et $E > 0$, il existe $\kappa > 0$ tel que pour tout $r > 0$, si (M^4, g) satisfait $\text{Ric}(g) = \Lambda g$ avec, $|\Lambda| \leq 3\kappa r^{-2}$ et qu'il existe un point $p \in M$ pour lequel,*

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B(p, r)) &\geq v_0 r^4, \\ \frac{\text{Vol}(B(p, \kappa r))}{v_{-\kappa r^{-2}}(\kappa r)} - \frac{\text{Vol}(B(2r))}{v_{-\kappa r^{-2}}(2r)} &< \kappa, \end{aligned}$$

et

$$\int_{B(p,2r)} |\text{Rm}|^2 dv \leq E,$$

alors, il existe un sous-groupe fini $\Gamma \subset SO(4)$ (dont le cardinal est majoré par une fonction de v_0), et un difféomorphisme $\Phi : A_e(\delta, (1-\delta)) \rightarrow \hat{A}(\delta r, (1-\delta)r)$, où,

$$A(2\delta r, (1-2\delta)r) \subset \hat{A}(\delta r, (1-\delta)r) \subset A\left(\frac{1}{2}\delta r, \left(1-\frac{1}{2}\delta\right)r\right), \quad (3.3)$$

tel que sur l'anneau $A_e(\delta r, (1-\delta)r)$, on ait :

$$\left\| \frac{\Phi^* g}{r^2} - g_e \right\|_{C^l(g_e)} \leq \delta. \quad (3.4)$$

Remarque 3.17. Les hypothèses sur la courbure et sur le volume ne sont présentes que pour majorer le cardinal du groupe Γ pour avoir compacité. On évite ainsi les suites de variétés d'Einstein proches de cônes \mathbb{R}^4/Γ_i où le cardinal de Γ_i diverge. Dans une telle situation, la suite convergerait vers le cône \mathbb{R}^+ . Ces hypothèses sur le volume et la courbure sont de plus redondantes ici, par la dernière section de [CN15].

Démonstration. Par changement d'échelle on se ramène à $r = 1$. Prouvons ce résultat par contradiction en supposant qu'il existe $\delta > 0$, $E > 0$ et $v_0 > 0$, et une suite de contre-exemples $(M_i^4, g_i, p_i)_i$ satisfaisant :

- $\text{Vol}(B_i(p_i, 1)) > v_0 > 0$,
- $\int_{B_i(p_i, 2)} |\text{Rm}_i|^2 dv_i \leq E$,
- il existe $\kappa_i \rightarrow 0$ et Λ_i , $|\Lambda_i| \leq 3\kappa_i$ pour lesquels $\text{Ric}(g_i) = \Lambda_i g_i$ et $\frac{\text{Vol}(B_i(p_i, \kappa_i))}{v - \kappa_i(\kappa_i)} - \frac{\text{Vol}(B_i(p_i, 2))}{v - \kappa_i(2)} < \kappa_i$,

mais pour laquelle, quel que soit Γ sous-groupe fini de $SO(4)$, il n'existe pas de difféomorphisme $\Phi : A_e(\delta, (1-\delta)) \rightarrow \hat{A}(\delta, (1-\delta))$ où $\hat{A}(\delta, (1-\delta))$ satisfait (3.3), et tel qu'on ait le contrôle (3.4).

D'après le théorème 0.1, comme $\text{Vol}(B_i(p_i, 1)) > v_0 > 0$ et $\text{Ric}(g_i) \geq -3$, une sous-suite des boules de rayon 1 pointées converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique que l'on notera (Y, d_Y, p) .

Par le lemme 3.15, quitte à reprendre une sous-suite, pour tout i , on peut supposer que κ_i est suffisamment petit pour que l'on ait

$$d_{GH}\left(\left(B_i(p, 1), p_i\right), \left(B_{C(X_i)}(0, 1), 0\right)\right) \leq \frac{1}{i},$$

pour un certain cône métrique $(C(X_i), d_{C(X_i)}, 0)$ tel que $\text{diam} X_i \leq \pi$. Par in-

égalité triangulaire, la suite $(B_{C(X_i)}(0, 1), 0)$ converge aussi vers (Y, d_Y, p) au sens de Gromov-Hausdorff. Maintenant, comme les $C(X_i)$ munis des distances $d_{C(X_i)}((r, x), (s, y)) := \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos(d_{X_i}(x, y))}$ d_{GH} -convergent, on en déduit en fixant $r > 0$ et $s > 0$ que les (X_i, d_{X_i}) d_{GH} -convergent vers (X, d_X) , et donc que la limite est un cône métrique, $(Y, d_Y, p) = (C(X), d_{C(X)}, 0)$.

Par la proposition 2.30, nous savons que la limite (Y, d_Y, p) privée d'un nombre fini de points singuliers est une métrique d'Einstein lisse et que la convergence est lisse sur les compacts. La limite de $(B_i(p_i, 1), g_i, p_i)$ au sens de Gromov-Hausdorff est donc à la fois la boule de rayon 1 d'un cône métrique et une variété d'Einstein de dimension 4 hors d'un nombre fini de points singulier.

Un cône n'ayant qu'un nombre fini de points singuliers est un cône sur une variété lisse. De plus un cône d'Einstein est nécessairement Ricci-plat car la courbure de Ricci d'un cône s'annule dans la direction radiale. La limite est donc un cône sur une variété d'Einstein lisse de dimension 3 et de constante d'Einstein 2. C'est donc un quotient de \mathbb{S}^3 par un sous-groupe $\Gamma \subset SO(4)$ car en dimension 3, les métriques d'Einstein sont à courbures sectionnelles constantes par (1.18). Il existe donc un difféomorphisme $\Phi : A_\epsilon(\delta, (1 - \delta)) \rightarrow \hat{A}(\delta r, (1 - \delta)r)$ satisfaisant (3.3) et (3.4), ce qui est absurde. \square

On peut donc maintenant utiliser ces résultats pour construire des premières coordonnées dans les zones intermédiaires.

Preuve de la proposition 3.12. Soient $\delta > 0$, $D_0 > 0$, $v_0 > 0$, $E > 0$, $\Lambda \in [-3, 3]$ et $l \in \mathbb{N}$, et une variété de dimension 4, (M, g) satisfaisant :

- $\text{Ric}(g) = \Lambda g$,
- le diamètre est majoré par $D_0 > 0$,
- le volume est minoré par $v_0 > 0$,
- il existe $p \in M$, et $\rho_2 > 0$, tels qu'on ait : $\int_{B(p, \rho_2)} |\text{Rm}|^2 \leq E$.

Remarquons que ces hypothèses impliquent une borne sur $\Lambda\rho_2^2$

$$\begin{aligned}
E &\geq \int_{B(\rho_2)} |\text{Rm}|^2 dv \\
&\geq 6 \int_{B(\rho_2)} |\text{Ric}|^2 dv \\
&\geq 24\Lambda^2 \text{Vol}(B(\rho_2)) \\
&\geq 24v_0\Lambda^2 \frac{\text{Vol}_{g_{-|\Lambda|}}(B_{g_{-|\Lambda|}}(\rho_2))}{\text{Vol}_{g_{-|\Lambda|}}(B_{g_{-|\Lambda|}}(D_0))} \\
&\geq 24v_0\Lambda^2 \frac{\text{Vol}_{g_{-3}}(B_{g_{-3}}(\rho_2))}{\text{Vol}_{g_{-3}}(B_{g_{-3}}(D_0))} \\
&\geq C(D_0, v_0)\Lambda^2\rho_2^4,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

puis $\Lambda\rho_2^2 \leq \frac{E^{1/2}}{C(D_0, v_0)^{1/2}} =: C'(E, D_0, v_0)$.

Soit $l \in \mathbb{N}$, et notons $0 < \kappa_0 < \frac{1}{4}$ la constante du lemme précédent associée à nos constantes δ, l et E . Cherchons $\varepsilon_2 > 0$ suffisamment petit pour satisfaire les hypothèses du lemme 3.16 avec la constante $\kappa_0 > 0$.

Pour tous $0 < 4\rho_1 \leq \rho_2$ pour lesquels on a :

$$\int_{A(\rho_1, \rho_2)} |\text{Rm}|^2 \leq \varepsilon_2^2,$$

et

$$\left| \frac{\text{Vol}(B(\rho_2))}{\text{Vol}(B(\varepsilon_2\rho_1))} - \frac{\rho_2^4}{(\varepsilon_2\rho_1)^4} \right| \leq \varepsilon_2,$$

nous avons en fait, par l'inégalité de Bishop-Gromov, pour $C'''(E, D_0, v_0) > 0$,

$$\left| \frac{\text{Vol}(B(\rho_2))}{\text{Vol}(B(\rho_1))} - \frac{\rho_2^4}{\rho_1^4} \right| \leq C'''(E, D_0, v_0)\varepsilon_2, \tag{3.6}$$

et pour tout ρ et $\kappa_0 > 0$ pour lesquels $\rho_1 < \kappa_0\rho < 2\rho < \rho_2$,

$$\left| \frac{\text{Vol}(B(2\rho))}{\text{Vol}(B(\kappa_0\rho))} - \frac{(2\rho)^4}{(\kappa_0\rho)^4} \right| \leq C'''(E, D_0, v_0)\varepsilon_2. \tag{3.7}$$

Nous pouvons donc supposer en choisissant ε_2 assez petit que $\text{Vol}(A(\rho_1, \rho_2)) \geq c(E, D_0, v_0)\rho_2^4$ pour $4\rho_1 < \rho_2$ pour $c(E, D_0, v_0) > 0$. Cherchons donc à obtenir une meilleure borne sur Λ pour être sous les hypothèses du lemme 3.16. Comme

$\text{Ric} = \Lambda g$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^2 &\geq \int_{A(\rho_1, \rho_2)} |\text{Rm}|^2 dv \\ &\geq 6 \int_{A(\rho_1, \rho_2)} |\text{Ric}|^2 dv \\ &\geq 24\Lambda^2 \text{Vol}(A(\rho_1, \rho_2)) \\ &\geq 24c(E, D_0, v_0)\Lambda^2 \rho_2^4 \end{aligned}$$

et nous avons donc $|\Lambda| \leq \varepsilon_2(24c(E, D_0, v_0))^{-1/2} \rho_2^{-2}$. Ainsi, pour ε_2 assez petit, nous sommes donc sous les hypothèses du lemme 3.16 pour tout ρ en choisissant ε_2 pour lequel on ait

$$\kappa_0 = \varepsilon_2 \max((24c(E, D_0, v_0))^{-1/2}, 1, C''(E, D_0, v_0)),$$

car nous contrôlons la croissance du volume entre $\kappa_0 \rho$ et 2ρ à l'aide de (3.7). La conclusion de la proposition 3.12 est donc satisfaite pour tout $\rho_1 < \rho < \frac{1}{4}\rho_2$ avec $\delta(\kappa_0) > 0$. \square

2.2 Utilité de ces premières coordonnées

Le difféomorphisme de la proposition 3.12 nous permet de tirer notre géométrie en arrière sur des anneaux plats où la métrique d'Einstein g est C^∞ -proche de la métrique plate g_e .

Nous allons utiliser cette proximité pour construire et contrôler des hypersurfaces proches d'être à seconde forme fondamentale constante pour la métrique d'Einstein. Les lemmes suivants concernent les métriques proches de la métrique plate sur $A_e(\frac{1}{4}, 4)$, et impliqueront directement les résultats sur $A(\frac{1}{4}\rho, 4\rho)$ pour $\rho > 0$ par changement d'échelle.

Note 3.18. *Ici et dans la suite, on prend la convention de considérer des normales sortantes. Pour une hypersurface Σ de normale sortante N^Σ , on définit la seconde forme fondamentale par $A^\Sigma(X, Y) := \langle X, \nabla_Y N^\Sigma \rangle$, qui nous assure que les sphères dans l'espace euclidien sont à seconde forme fondamentale positive.*

Lemme 3.19. *Pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ et $\delta_0 > 0$ tels que si une métrique g sur $A_e(\frac{1}{4}, 4)$ satisfait,*

$$\|g - g_e\|_{C^{l+1}(A_e(\frac{1}{4}, 4))} \leq \delta_0,$$

on ait, pour tout $s \in [\frac{1}{4}, 4]$, en notant \mathcal{S}_s la sphère de rayon s de \mathbb{R}^n/Γ , \mathcal{S}_s a une seconde forme fondamentale pour g , $A_g^{\mathcal{S}_s}$ qui satisfait,

$$\left\| \frac{A_g^{\mathcal{S}_s}}{s} - \frac{g^{\mathcal{S}_s}}{s^2} \right\|_{C^l(\frac{g^{\mathcal{S}_s}}{s^2})} \leq C \|g - g_e\|_{C^{l+1}(A_e(\frac{1}{4}, 4))},$$

et de plus, on a,

$$\left\| \frac{g^{\mathcal{S}_s}}{s^2} - g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma} \right\|_{C^{l+1}(g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma})} \leq C \|g - g_e\|_{C^{l+1}(A_e(\frac{1}{4}, 4))}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que la seconde forme fondamentale fait intervenir une dérivée de la métrique qui est contrôlée par hypothèse. Comme pour g_e , les hypersurfaces \mathcal{S}_s ont une seconde forme fondamentale constante égale à $\frac{g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma}}{s}$, on en déduit le résultat. \square

Étant donnée une hypersurface orientable et lisse Σ , on définit son *rayon d'injectivité normale*, $\text{inj}_g^\perp(\Sigma)$ comme le supremum des $r > 0$ tels que l'application $F^g : \Sigma \times [-r, r] \rightarrow M$ définie par $F^g(x, s) := \gamma_x^g(s)$, où γ_x^g est la géodésique pour g telle que $\gamma_x^g(0) = x$, et $\gamma_x^g(0)$ est la normale sortante à Σ , soit un difféomorphisme sur son image.

Lemme 3.20. *Pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $C > 0$ et $\delta > 0$ tel que si une métrique g satisfait :*

$$\|g - g_e\|_{C^{l+2}(A_e(\frac{1}{4}, 4))} \leq \delta,$$

et si une hypersurface $\Sigma \subset A_e(\frac{1}{2}, 2)$ satisfait $\|A_{g_e}^\Sigma\|_{C^{l+1}} \leq 10$, alors, on ait les deux propriétés suivantes concernant les perturbations normales d'hypersurfaces :

- les rayons d'injectivité normale de Σ pour g et g_e , $\text{inj}_g^\perp(\Sigma)$, et $\text{inj}_{g_e}^\perp(\Sigma)$ satisfont

$$\left| \frac{\text{inj}_g^\perp(\Sigma)}{\text{inj}_{g_e}^\perp(\Sigma)} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

- les deux applications exponentielles normales sont proches l'une de l'autre sur $\Sigma \times \left[-(1 - \varepsilon)\text{inj}_{g_e}^\perp(\Sigma), (1 - \varepsilon)\text{inj}_{g_e}^\perp(\Sigma) \right]$: il existe un champ de vecteurs X sur \mathbb{R}^n/Γ , $\|X\|_{C^{l+1}(g_e)} < \varepsilon$, pour lequel on a,

$$F^g \circ (F^{g_e})^{-1} = \varphi_X,$$

où $\varphi_X : p \mapsto \exp_p^{g_e}(X(p))$.

Démonstration. Les courbes $F^g(x, \cdot) = \gamma_x^g(\cdot)$ et $F^{g_e}(x, \cdot) = \gamma_x^{g_e}(\cdot)$ sont respective-

ment les solutions des équations des géodésiques pour g et g_e ,

$$\begin{cases} \nabla_{\gamma'_x} \gamma'_x = 0, \\ \gamma_x(0) = x, \\ \gamma'_x(0) = N_x. \end{cases} \quad (3.8)$$

où N_x^g et $N_x^{g_e}$ sont les normales sortantes à Σ pour les deux métriques. Par hypothèse, les métriques g et g_e sont C^{l+2} -proches. Cela implique que les N_x sont C^{l+2} -proches, et que ∇^g et ∇^{g_e} sont C^{l+1} -proches.

Par continuité par rapport aux conditions initiales et aux paramètres des solutions d'équations différentielles d'ordre 2, on en déduit qu'étant donnée une hypersurface Σ fixée, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si la différence entre les deux métriques est plus petite que δ en norme C^{l+2} , alors la différence entre les géodésiques normales est petite en norme C^l dans le sens suivant : il existe un champ de vecteurs X défini le long de chaque $\gamma_x^{g_e}$ tel que

$$\gamma_x^g(s) = \varphi_X(\gamma_x^{g_e}(s)) := \exp_{\gamma_x^{g_e}(s)}(X(\gamma_x^{g_e}(s))).$$

Par continuité par rapport aux conditions initiales et aux paramètres, vu comme champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n/Γ , nous avons $\|X\|_{C^{l+1}(g_e)} < \varepsilon$. L'égalité $\gamma_x^g(s) = \varphi_X(\gamma_x^{g_e}(s))$ se réécrit :

$$F^g = \varphi_X \circ F^{g_e}.$$

□

On en déduit en particulier que si une hypersurface Σ' est une petite perturbation normale de Σ pour la métrique g , alors c'est aussi une petite perturbation normale de Σ pour la métrique g_e , et inversement.

Corollaire 3.21. *Pour tout $\varepsilon_0 > 0$ et $l \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ et $\delta_0 > 0$, tels que pour toute métrique g satisfaisant,*

$$\|g - g_e\|_{C^{l+2}(A_e(\frac{1}{4}, 4))} \leq \delta_0,$$

et pour toute hypersurface $\Sigma \subset A_e(\frac{1}{2}, 2)$ telle que $\|A_{g_e}^\Sigma\|_{C^{l+1}} \leq 10$, on ait : pour toute fonction $w : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\|w\|_{C^l} \leq \varepsilon_0$, et en notant $\Sigma(w) := \{F(x, w(x)), x \in \Sigma\}$,

1. *il existe $w' : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\|w'\|_{C^l} \leq 2\varepsilon_0$ telle que*

$$\Sigma_{g_e}(w) = \Sigma_g(w'),$$

2. il existe $w'' : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\|w''\|_{C^l} \leq 2\varepsilon_0$ telle que

$$\Sigma_g(w) = \Sigma_{g_e}(w'').$$

Démonstration. D'après le lemme 3.20 précédent, on a $F^g = \varphi_X \circ F^{g_e}$, pour X arbitrairement petit en norme C^{l+1} en fonction de δ_0 . En ajoutant l'hypothèse que $\|A_{g_e}^\Sigma\|_{C^{l+1}} \leq 10$, on s'assure du fait que qu'il existe ε_0 tel que sur $\Sigma \times [-2\varepsilon_0, 2\varepsilon_0]$, les métriques $(F^{g_e})^*g_e$ et $g_p := (g_e)|_\Sigma + ds^2$ soient arbitrairement proches en norme C^l . Cela implique que

$$\left[(F^{g_e})^{-1} \circ \varphi_X \circ F^{g_e} \right] = \varphi_{X^e},$$

où X^e est le tiré en arrière de X par F^{g_e} , et $\varphi_{X^e}^e(p) := \exp_p^{g_e}(X^e(p))$. On a donc $\|X^e\|_{C^{l+1}(g_e)} \leq \varepsilon_0$. Par la proximité des métriques $(F^{g_e})^*g_e$ et g_p , $\varphi_{X^e}^e = (\varphi_{X_\Sigma^\Sigma}^\Sigma, \varphi_{X_\mathbb{R}^\mathbb{R}}^\mathbb{R})$, où $\|X_\Sigma^\Sigma\|_{C^l(g^\Sigma)} + \|X_\mathbb{R}^\mathbb{R}\|_{C^l(ds^2)} \leq 2\varepsilon_0$.

Maintenant, pour tout $(x, s) \in \Sigma \times [-2\varepsilon_0, 2\varepsilon_0]$, nous avons

$$\begin{aligned} F^g(x, s) &= F^{g_e} \circ \left[(F^{g_e})^{-1} \circ \varphi_X \circ F^{g_e} \right] (x, s), \\ &= F^{g_e} \circ (\varphi_{X_\Sigma^\Sigma}^\Sigma, \varphi_{X_\mathbb{R}^\mathbb{R}}^\mathbb{R})(x, s) \\ &= F^{g_e} \left(\varphi_{X_\Sigma^\Sigma}^\Sigma(x), \varphi_{X_\mathbb{R}^\mathbb{R}}^\mathbb{R}(s) \right) \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $w : \Sigma \rightarrow [-2\varepsilon_0, 2\varepsilon_0]$, nous avons

$$F^g(x, w(x)) = \left(\varphi_{X_\Sigma^\Sigma}^\Sigma(x), w'(\varphi_{X_\Sigma^\Sigma}^\Sigma(x)) \right),$$

où $w' := \varphi_{X_\mathbb{R}^\mathbb{R}}^\mathbb{R} \circ w \circ (\varphi_{X_\Sigma^\Sigma}^\Sigma)^{-1}$. Par les contrôles de $X_\mathbb{R}^\mathbb{R}$ et X_Σ^Σ que l'on peut supposer arbitrairement petits quitte à prendre δ_0 plus petit, on en déduit le résultat. \square

3 Contrôle des hypersurfaces à courbure moyenne constante dans les zones de basse courbure

Expliquons pourquoi les hypersurfaces à courbure moyenne constante sont intéressantes et bien contrôlées dans notre situation. On contrôle à la fois la manière dont elles sont plongées dans M et leur géométrie intrinsèque à l'aide de la courbure ambiante.

Note 3.22. *Tout au long de cette partie, nous noterons les hypersurfaces à courbure moyenne constante avec un tilde pour insister sur leur particularité.*

Définition 3.23 (Espaces de Hölder). Les normes $C^{k,\alpha}$ seront toujours prises à l'échelle du rayon d'injectivité. C'est-à-dire que l'on définit la norme $C^{k,\alpha}$ d'une fonction f de la manière suivante :

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}} := \|f\|_{C^0} + \dots + \|\nabla_g^k f\|_{C^0} + [\nabla_g^k f]_\alpha,$$

où

$$[h]_\alpha = \sup_{\{(x,y)|d(x,y)<\text{inj}\}} \left| \frac{h(x) - h(y)}{d(x,y)^\alpha} \right|_g.$$

Le but de cette section est la proposition suivante.

Proposition 3.24. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < 1$, il existe $\varepsilon > 0$ et $C = C(k, \alpha) > 0$ pour lesquels, si $\tilde{\Sigma}$ est une hypersurface d'une variété (M^n, g) satisfaisant :*

1. *sa courbure moyenne est constante égale à $n - 1$,*
2. *il existe Γ un sous-groupe fini de $SO(n)$, et un difféomorphisme $\Phi : \mathbb{S}^{n-1}/\Gamma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ tels qu'on ait :*

$$\left\| \Phi^* g^{\tilde{\Sigma}} - g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma} \right\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma)} \leq \varepsilon.$$

3. *la courbure ambiante est basse : sur $\tilde{\Sigma}$,*

$$\left\| \text{Rm}(g) \right\|_{C^k(g)} \leq \varepsilon,$$

alors :

- *la seconde forme fondamentale est presque constante à l'échelle de la courbure dans un sens fort,*

$$\left\| A^{\tilde{\Sigma}} - g^{\tilde{\Sigma}} \right\|_{C^{k,\alpha}} \leq C \left\| \text{Rm}(g) \right\|_{C^k(g)},$$

- *il existe un difféomorphisme $\Psi : \mathbb{S}^{n-1}/\Gamma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ tel que,*

$$\left\| \Psi^* g^{\tilde{\Sigma}} - g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma} \right\|_{C^{k+1,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma)} \leq C \left\| \text{Rm}(g) \right\|_{C^k(g)}.$$

Précisons les notations que nous emploierons dans cette partie :

- $\nabla^{\tilde{\Sigma}}$: la connexion de Levi-Civita de l'hypersurface,
- ∇ : la connexion de Levi-Civita de l'espace ambiant,

- N^Σ : la normale sortante à l'hypersurface,
- $A^\Sigma(X, Y)$: la seconde forme fondamentale de l'hypersurface qui sera vue soit comme un 2-tenseur de l'espace tangent à $\tilde{\Sigma}$,
- H^Σ : la courbure moyenne de l'hypersurface,
- pour B un 2-tenseur symétrique sur $\tilde{\Sigma}$, on définit :

$$(d^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}} B)(X, Y) := \nabla_X^{\tilde{\Sigma}} B(Y, \cdot) - \nabla_Y^{\tilde{\Sigma}} B(X, \cdot).$$

- on notera δ^{∇^Σ} l'adjoint formel de d^{∇^Σ} .

Équations satisfaites par la seconde forme fondamentale d'une hypersurface en terme de la courbure ambiante.

Lemme 3.25. *On a les formules suivantes pour la seconde forme fondamentale d'une hypersurface Σ quelconque : pour tous champs de vecteurs X, Y, Z sur Σ ,*

$$d^{\nabla^\Sigma} A^\Sigma(X, Y, Z) = g(\text{Rm}(X, Y)N^\Sigma, Z),$$

et

$$\delta^{\nabla^\Sigma} A^\Sigma(X) = \text{Ric}(N^\Sigma, X) - dH^\Sigma(X).$$

Démonstration. La première égalité est connue sous le nom de formule de Codazzi-Mainardi, voir [Pet98, Chapter 4, Theorem 4].

Montrons la seconde égalité. Rappelons notre convention de considérer la normale sortante N^Σ pour définir la seconde forme fondamentale par $A^\Sigma(X, Y) := \langle X, \nabla_Y N^\Sigma \rangle$. Considérons $(e_i)_i$ une base orthonormée sur l'espace tangent à l'hypersurface, et X un champ de vecteurs. Fixons un point de l'hypersurface Σ auquel nous supposerons, sans perte de généralité (car nous manipulons des tenseurs) que les dérivées des champs de vecteurs e_i s'annulent. Nous avons

$$\begin{aligned} (\delta^{\nabla^\Sigma} A^\Sigma)(X) &= - \sum_{i=1}^{n-1} \nabla_{e_i}^\Sigma (A^\Sigma(e_i, X)) \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i, \nabla_{e_i}^\Sigma \nabla_X N^\Sigma \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i, \nabla_{e_i} \nabla_X N^\Sigma \rangle, \end{aligned}$$

car la différence entre les connexions est orthogonale à l'hypersurface.

On a d'autre part $H^\Sigma = \sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i, \nabla_{e_i} N^\Sigma \rangle$ et donc :

$$\begin{aligned} dH^\Sigma(X) &= d\left(\sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i, \nabla_{e_i} N^\Sigma \rangle\right)(X) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i, \nabla_X \nabla_{e_i} N^\Sigma \rangle. \end{aligned}$$

Étant donné que $(e_1, \dots, e_{n-1}, N^\Sigma)$ forme une base orthonormée, et comme pour toute extension N du champ de vecteurs N^Σ à l'espace ambiant, la quantité

$$\langle N, \nabla_N \nabla_X N - \nabla_X \nabla_N N - \nabla_{[N, X]} \rangle$$

s'annule par symétries de la courbure riemannienne, on a :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i, \nabla_X \nabla_{e_i} N^\Sigma - \nabla_{e_i} \nabla_X N^\Sigma \rangle = \text{Ric}(X, N^\Sigma),$$

on a donc le résultat énoncé. □

Contrôle de la seconde forme fondamentale par estimations elliptiques.

On en déduit donc les égalités suivantes dans notre cas à courbure moyenne constante, pour A^Σ la seconde forme fondamentale vue comme un 2-tenseur,

$$d^{\nabla^\Sigma} A^\Sigma(X, Y, Z) = g(\text{Rm}(X, Y)N^\Sigma, Z),$$

et

$$\delta^{\nabla^\Sigma} A^\Sigma(X) = \text{Ric}(N^\Sigma, X).$$

En notant A_0^Σ la partie sans trace de A^Σ pour g^Σ , on a même

$$d^{\nabla^\Sigma} A_0^\Sigma(X, Y, Z) = g(\text{Rm}(X, Y)N^\Sigma, Z),$$

et

$$\delta^{\nabla^\Sigma} A_0^\Sigma(X) = \text{Ric}(N^\Sigma, X).$$

Les seconds membres étant bien contrôlés par la courbure ambiante, on espère avoir un contrôle de A_0^Σ en remarquant que l'opérateur $d^{\nabla^\Sigma} + \delta^{\nabla^\Sigma}$ est elliptique et inversible. C'est l'objet des lemmes suivants.

Lemme 3.26. *L'opérateur $d^{\nabla^\Sigma} + \delta^{\nabla^\Sigma}$ agissant sur les 2-tenseurs symétriques sur $\tilde{\Sigma}$ est elliptique. De plus, pour toute métrique g sur \mathbb{S}^{n-1} suffisamment proche en*

norme C^0 de la métrique ronde $g^{\mathbb{S}^{n-1}}$, $d^{\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}} + \delta^{\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}}$ est injectif sur l'ensemble des tenseurs ayant une trace nulle pour g .

Démonstration. Le symbole de cet opérateur appliqué à $\xi \in T^*\tilde{\Sigma}$ est la somme du produit extérieur par ξ et du produit intérieur par le champ de vecteurs associé à ξ par la métrique. Le noyau du premier est l'ensemble des formes proportionnelles à ξ et pour le second celles qui sont orthogonales. Le noyau du symbole de l'opérateur $d^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}} + \delta^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}}$ est donc nul et l'opérateur est elliptique.

D'après [Bes87, 12.69], le laplacien associé : $-\hat{\Delta}^{\tilde{\Sigma}} := \delta^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}} d^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}} + d^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}} \delta^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}}$ a la forme suivante pour h un 2-tenseur symétrique,

$$-\hat{\Delta}^{\tilde{\Sigma}} h = (\nabla^{\tilde{\Sigma}})^* \nabla^{\tilde{\Sigma}} h - \mathring{R}^{\tilde{\Sigma}} h + h \circ \text{Ric}^{\tilde{\Sigma}},$$

où $\mathring{R}(h)$ est l'action de la courbure sur les 2-tenseurs symétriques : pour $(e_i)_i$ une base orthonormée,

$$\mathring{R}(h)(X, Y) = \sum_i h(\text{Rm}(e_i, X)Y, e_i),$$

en coordonnées, cela s'écrit $\mathring{R}(h)_{ij} := \text{Rm}_{iklj} h_{mn} g^{km} g^{ln}$. Sur la sphère unité de dimension $n-1$, où l'on a $\text{Rm}_{iklj}^{\mathbb{S}^{n-1}} = g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{kj}$, et donc $\mathring{R}^{\mathbb{S}^{n-1}}(h)_{ij} = \text{tr}(h)g_{ij} - h_{ij}$, et $\alpha \circ \text{Ric}^{\mathbb{S}^{n-1}} = (n-2)\alpha$. Ainsi, on obtient :

$$-\hat{\Delta}^{\mathbb{S}^{n-1}} h = (\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}})^* \nabla^{\mathbb{S}^{n-1}} h + (n-1)h - \text{tr}(h)\text{Id}. \quad (3.9)$$

Soit h_0 un 2-tenseur $C^{1,\alpha}$ symétrique à trace nulle pour $g^{\mathbb{S}^{n-1}}$ dans le noyau de l'opérateur. La trace de h_0 est nulle, et donc d'après (3.9), nous avons

$$(\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}})^* \nabla^{\mathbb{S}^{n-1}} h_0 + (n-1)h_0 = 0.$$

En prenant le produit scalaire L^2 avec h_0 , on obtient

$$\|\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}} h_0\|_{L^2}^2 + (n-1)\|h_0\|_{L^2}^2 = 0, \quad (3.10)$$

et enfin $h_0 = 0$. L'opérateur $d^{\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}} + \delta^{\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}}$ est donc injectif sur les tenseurs sans trace pour $g^{\mathbb{S}^{n-1}}$.

Considérons maintenant une métrique g proche de $g^{\mathbb{S}^{n-1}}$: il existe $\varepsilon > 0$ que

l'on choisira suffisamment petit a posteriori tel que,

$$\|g - g^{\mathbb{S}^{n-1}}\|_{C^0} \leq \varepsilon.$$

On veut montrer que l'opérateur $d^{\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}} + \delta^{\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}}$ est aussi inversible sur les tenseurs à trace nulle pour g . Soit donc h un 2-tenseur de trace nulle pour g . Par proximité des métriques, pour ε assez petit, il existe $C = C(n)$ telle que :

$$|\text{tr}^{\mathbb{S}^{n-1}} h|_{\mathbb{S}^{n-1}} \leq C\varepsilon |h|_{\mathbb{S}^{n-1}}. \quad (3.11)$$

On a toujours

$$-\hat{\Delta}^{\mathbb{S}^{n-1}} h = (\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}})^* \nabla^{\mathbb{S}^{n-1}} h + (n-1)h - \text{tr}^{\mathbb{S}^{n-1}}(h)\text{Id},$$

et donc, grâce à (3.11), si $(d^{\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}} + \delta^{\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}})h = 0$, alors

$$0 \geq \|\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}} h\|^2 + (n-1-C\varepsilon)\|h\|^2,$$

et donc $h = 0$ si ε est assez petit pour avoir $n-1 > C\varepsilon$. On en déduit que $d^{\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}} + \delta^{\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}}$ est injectif sur les tenseurs de trace nulle pour g . \square

Corollaire 3.27. *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si Σ est une hypersurface d'une variété (M^n, g) pour laquelle il existe Γ un sous-groupe fini de $SO(n)$, et un difféomorphisme $\Phi : \mathbb{S}^{n-1}/\Gamma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ tel que l'on ait*

$$\left\| \Phi^* g^{\tilde{\Sigma}} - g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma} \right\|_{W^{l+1,p}(\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma)} \leq \varepsilon.$$

Alors, pour tout $1 \leq p < +\infty$ et $l \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que pour tout 2-tenseur symétrique u sur $\tilde{\Sigma}$ de trace nulle pour $g^{\tilde{\Sigma}}$, on ait,

$$\|u\|_{W^{l+1,p}} \leq C \left(\|\delta^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}} u\|_{W^{l,p}} + \|d^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}} u\|_{W^{l,p}} \right).$$

Démonstration. Nous avons le contrôle suivant sur la différence avec l'opérateur sur la sphère : pour tout $p \geq 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout 2-tenseur de classe $W^{l+1,p}$, u on ait :

$$\left\| \Phi^* (d^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}} + \delta^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}}) u - (d^{\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}} + \delta^{\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}}) u \right\|_{W^{l,p}} \leq C\varepsilon \|u\|_{W^{l+1,p}}.$$

La conclusion vient alors des estimations elliptiques pour les opérateurs Fredholm injectifs du lemme 1.60 énoncé dans le premier chapitre. \square

Démonstration de la proposition 3.24. Soit $0 < \alpha < 1$, et $p > \frac{n}{1-\alpha}$. Alors, $W^{1,p}$ s'injecte continûment dans C^α , c'est-à-dire qu'il existe $C_1 = C_1(p, \alpha, n) > 0$ tel que pour tout 2-tenseur u , on ait :

$$\|u\|_{C^\alpha} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Définissons les opérateurs, $P := \delta^{\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}} + d^{\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}}$ et $P' := \Phi^*(\delta^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}} + d^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}})$ qui agissent entre les espaces de Banach $W^{1,p}$ et L^p . D'après le lemme 3.26, P est injectif sur les 2-tenseurs sans trace. Grâce à l'expression du lemme 3.25 de l'opérateur $\delta^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}} + d^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}}$ appliqué à $A_0^{\tilde{\Sigma}}$ et en considérant tous les opérateurs par rapport à g on a par le corollaire 3.27 :

$$\begin{aligned} \|A_0^{\tilde{\Sigma}}\|_{W^{1,p}} &\leq C \left(\|\delta^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}} A_0^{\tilde{\Sigma}}\|_{L^p} + \|d^{\nabla^{\tilde{\Sigma}}} A_0^{\tilde{\Sigma}}\|_{L^p} \right) \\ &= C \left(\|\operatorname{Rm}(\cdot, \cdot) N^{\tilde{\Sigma}}\|_{L^p} + \|\operatorname{Ric}(N^{\tilde{\Sigma}})\|_{L^p} \right). \end{aligned}$$

Comme l'hypersurface a un volume majoré (proche de celui de \mathbb{S}^{n-1}/Γ), il existe de plus $C_2 = C_2(p, n) > 0$ telle que l'on ait :

$$\|\operatorname{Ric}(N^{\tilde{\Sigma}})\|_{L^p} \leq C_2 \|\operatorname{Rm}(\cdot, \cdot) N^{\tilde{\Sigma}}\|_{C^0},$$

et

$$\|\operatorname{Rm}(\cdot, \cdot) N^{\tilde{\Sigma}}\|_{L^p} \leq C_2 \|\operatorname{Rm}(\cdot, \cdot) N^{\tilde{\Sigma}}\|_{C^0}.$$

Par injection de $W^{1,p}$ dans C^α , on en déduit que

$$\|A_0^{\tilde{\Sigma}}\|_{C^\alpha} \leq 2C_1 C_2 C \|\operatorname{Rm}(\cdot, \cdot) N^{\tilde{\Sigma}}\|_{C^0},$$

qui est le résultat énoncé pour $k = 0$.

Expliquons maintenant comment obtenir des estimations d'ordre supérieur par récurrence. Supposons donc que pour $l \in \mathbb{N}$, on ait les contrôles suivants sur l'hypersurface $\tilde{\Sigma}$: il existe $C > 0$ telle que,

1. $\|\operatorname{Rm}(g)\|_{C^{l+1}(g)} \leq \varepsilon$,
2. $\|A^{\tilde{\Sigma}} - g^{\tilde{\Sigma}}\|_{C^{l,\alpha}} \leq C \|\operatorname{Rm}(g)\|_{C^l(g)}$,
3. il existe un difféomorphisme $\Psi : \mathbb{S}^{n-1}/\Gamma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ tel qu'on ait

$$\|\Psi^* g^{\tilde{\Sigma}} - g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma}\|_{C^{l+1,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma)} \leq C \|\operatorname{Rm}(g)\|_{C^l(g)}.$$

En notant $\text{Rm}^{\tilde{\Sigma}}$ la courbure riemannienne de $\tilde{\Sigma}$, l'équation de Gauss pour la courbure s'écrit :

$$g(\text{Rm}^{\tilde{\Sigma}}(X, Y)Z, W) = g(\text{Rm}(X, Y)Z, W) + A^{\tilde{\Sigma}}(X, Z)A^{\tilde{\Sigma}}(Y, W) - A^{\tilde{\Sigma}}(Y, Z)A^{\tilde{\Sigma}}(X, W).$$

Les contrôles 1 et 2 impliquent donc qu'il existe $C = C(\alpha, l, n) > 0$ telle que l'on ait

$$\left\| \text{Ric}(g^{\tilde{\Sigma}}) - (n-1)g^{\tilde{\Sigma}} \right\|_{C^{l, \alpha}} \leq C \left\| \text{Rm}(g) \right\|_{C^{l+1}(g)},$$

et grâce à la proposition 1.62 du chapitre 1.

Proposition 3.28 (Proposition 1.62). *Soit (M, g_0) une variété à courbures sectionnelles constantes égales à 1, et $k \in \mathbb{N}$. Alors, il existe $\delta > 0$ et $C > 0$, tels que si une métrique g sur M satisfait :*

$$\|g - g_0\|_{C^{k+1, \alpha}} \leq \delta$$

alors, il existe un difféomorphisme $\Phi : M \rightarrow M$, pour lequel on a si $k \geq 1$,

$$\|\Phi^*g - g_0\|_{C^{k+1, \alpha}} \leq C \left\| \text{Ric}(g) - (n-1)g \right\|_{C^{k-1, \alpha}},$$

ou bien, si $k = 0$,

$$\|\Phi^*g - g_0\|_{C^{1, \alpha}} \leq C \left\| \text{Ric}(g) - (n-1)g \right\|_{C^0}.$$

On en déduit donc dans notre cas qu'il existe un difféomorphisme $\tilde{\Psi}_{\tilde{\Sigma}} : \mathbb{S}^{n-1}/\Gamma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ tel qu'on ait

$$\left\| \tilde{\Psi}_{\tilde{\Sigma}}^*g^{\tilde{\Sigma}} - g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma} \right\|_{C^{l+2, \alpha}(\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma)} \leq C \left\| \text{Rm}(g) \right\|_{C^{l+1}(g)}.$$

Ce dernier contrôle combiné aux contrôles en norme C^{l+1} sur la courbure implique par régularité elliptique (comme dans la preuve avec $k = 0$) qu'il existe une constante $C' = C'(l+1, \alpha, n) > 0$ pour laquelle on ait

$$\left\| A^{\tilde{\Sigma}} - g^{\tilde{\Sigma}} \right\|_{C^{l+1, \alpha}} \leq C' \left\| \text{Rm}(g) \right\|_{C^{l+1}(g)}.$$

□

4 Perturbation d'hypersurfaces à seconde forme fondamentale presque constante

Durant toute la construction on se ramènera toujours au cas où la courbure moyenne de l'hypersurface a une valeur moyenne égale à $n - 1$ par changement d'échelle. Montrons comment il est possible de perturber une hypersurface à seconde forme fondamentale presque constante dans une zone à basse courbure en une hypersurface à courbure moyenne constante.

Proposition 3.29. *Pour tout $0 < r_0 < \frac{1}{6}$ et $S_0 > 0$, il existe $C > 0$ et $0 < \varepsilon < \frac{r_0}{C}$ tels que pour toute hypersurface Σ difféomorphe à \mathbb{S}^{n-1}/Γ , pour $\Gamma \neq \{\text{Id}\}$ de volume minoré par S_0 , d'une variété (M, g) satisfaisant :*

1. *le rayon d'injectivité normale de Σ et le rayon d'injectivité des points de Σ dans M sont minorés par $3r_0$,*
2. $\|A^\Sigma - g^\Sigma\|_{C^\alpha} \leq \varepsilon$,
3. *sur l'anneau $\{x, d_g^M(x, \Sigma) < 3r_0\}$, on a $\|\text{Rm}(g)\|_{C^4(g)} < \varepsilon$,*

Alors, il existe une unique fonction w satisfaisant $\|w\|_{C^{2,\alpha}} \leq C\varepsilon$ et telle que l'on ait

$$H^{\Sigma(w)} \equiv n - 1,$$

où l'on a noté $\Sigma(w) := \{\gamma_x(w(x)), x \in \Sigma\}$, où γ_x est la géodésique telle que $\gamma_x(0) = x$, et $\gamma'_x(0)$ est la normale unitaire sortante à Σ . On a de plus le contrôle suivant,

$$\|w\|_{C^{2,\alpha}} \leq C \|H^\Sigma - (n - 1)\|_{C^\alpha}.$$

Remarque 3.30. Rappelons que l'on a défini les normes de Hölder à l'échelle du rayon d'injectivité, voir la définition 3.23. Dans nos applications, les contrôles sur le rayon d'injectivité seront des conséquences du lemme 3.14, et les différents contrôles de la courbure, de la partie précédente.

En général, la construction de sphères à courbure moyenne constante est délicate (voir par exemple [Ye96, PX09]) car elle passe par la construction d'un inverse à droite pour l'opérateur $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} + (n - 1)$ (où $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami avec des valeurs propres négatives) qui n'est pas inversible. Cependant, dans notre cas, nos hypersurfaces ne sont pas difféomorphes à \mathbb{S}^{n-1} , mais à \mathbb{S}^{n-1}/Γ pour $\Gamma \neq \{\text{Id}\}$. La différence que cela induit est que $-(n - 1)$ n'est plus une valeur propre du laplacien. En effet, les fonctions propres associées à la valeur propre $-(n - 1)$ sont les restrictions de fonctions linéaires sur \mathbb{R}^n à la sphère.

Cette différence rend la construction beaucoup plus simple dans notre cas (voir aussi [CEV17] pour la même remarque dans le cas des variétés asymptotiquement coniques).

Remarque 3.31. Géométriquement, cela vient du fait qu'étant donnée $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, les simples translations de la sphères sont des perturbations à courbure moyenne constante. Dans le cas de $\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma \subset \mathbb{R}^n/\Gamma$, ce n'est plus le cas, le centre est fixé car il est distingué comme point fixe de l'action du groupe Γ .

Coordonnées géodésiques normales. Construisons pour commencer des coordonnées au voisinage d'une hypersurface satisfaisant les hypothèses de la proposition 3.29.

Lemme 3.32. *Soit Σ une hypersurface satisfaisant les hypothèses de la proposition 3.29.*

Alors, il existe un difféomorphisme $\Phi : A_\varepsilon(1-2r_0, 1+2r_0) \rightarrow \{x, d(x, \Sigma) < 2r_0\}$ tel qu'on ait pour $C > 0$,

$$\|\Phi^*g - g_\varepsilon\|_{C^{1,\alpha}(g_\varepsilon)} \leq C\varepsilon,$$

où $\varepsilon > 0$ est la constante de la proposition 3.29.

Démonstration. Considérons le difféomorphisme $F_g : \Sigma \times [-2r_0, 2r_0]$ obtenu à partir des géodésiques normales sortant de Σ .

Nous utilisons alors nos contrôles sur la seconde forme fondamentale et la courbure ambiante et intégrons l'équation de Riccati satisfaite par les champs de Jacobi donnés par les changements de points sur l'hypersurface Σ . Nous obtenons ainsi comme dans le lemme A.4 (voir aussi le lemme 3.37) le contrôle suivant pour $C = C(n, v_0) > 0$, en notant s le paramètre des géodésiques s'annulant sur Σ :

$$\|F_g^*g - (ds^2 + s^2g^\Sigma)\|_{C^{1,\alpha}} \leq C\varepsilon. \quad (3.12)$$

D'après les hypothèses de la proposition 3.29, quitte à choisir ε arbitrairement petit, la seconde forme fondamentale est arbitrairement proche d'être constante et la courbure ambiante arbitrairement petite. En particulier, d'après l'équation de Gauss, le lemme 1.54 et la proposition 1.62, cela implique qu'il existe $\Gamma \subset SO(4)$ tel que quitte à reparamétriser Σ , pour une certaine constante $C = C(n, v_0) > 0$, on ait

$$\|g^\Sigma - g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma}\|_{C^{1,\alpha}} \leq C\varepsilon.$$

En combinant cela avec le contrôle (3.12), nous obtenons le contrôle énoncé. \square

Perturbations normales de l'hypersurface. Considérons des perturbations normales de l'hypersurface de la forme $\Sigma(w) := \{\gamma_x(w(x)), x \in \Sigma\}$ pour une fonction w sur Σ . La courbure moyenne de ces hypersurfaces admet le développement suivant démontré dans l'annexe A.

Lemme 3.33 (Proposition A.1). *Pour tout $0 < r_0 < \frac{1}{6}$ et toute hypersurface lisse $\Sigma \subset M$ dont les rayons d'injectivité et d'injectivité normale sont supérieurs à $3r_0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction $w : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\|w\|_{C^{2,\alpha}} \leq \varepsilon$, la courbure moyenne de $\Sigma(w)$ est donnée par :*

$$H(\Sigma(w)) = H(\Sigma) - J_{\Sigma,M}w + Q_{\Sigma,M}(w),$$

où

$$J_{\Sigma,M} := \Delta_\Sigma + |A^\Sigma|^2 + \text{Ric}^M(N, N)$$

est l'opérateur de Jacobi associé à l'hypersurface et où $Q_{\Sigma,M}$ est telle que, pour une constante $C > 0$ dépendant de la norme C^4 de la courbure et de la norme C^α de la seconde forme fondamentale et de r_0 , on ait :

$$\|Q_{\Sigma,M}(w) - Q_{\Sigma,M}(w')\|_{C^\alpha} \leq C\|w - w'\|_{C^{2,\alpha}} (\|w\|_{C^{2,\alpha}} + \|w'\|_{C^{2,\alpha}}).$$

La proposition 3.29 est alors une conséquence du lemme suivant appliqué à Σ .

Lemme 3.34. *Pour tout $r_0 > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si une métrique g sur l'anneau $A_e(1 - r_0, 1 + r_0) \subset \mathbb{R}^n/\Gamma$ pour $\Gamma \subset SO(n)$ avec $\Gamma \neq \{\text{Id}\}$ satisfait*

- $\|g - g_e\|_{C^{1,\alpha}} \leq \varepsilon$,
- pour la sphère unité centrée en zéro notée $S \subset \mathbb{R}^n/\Gamma$, on ait

$$\|A_g^S - g|_S\|_{C^\alpha} \leq \varepsilon,$$

- pour la courbure sur $A_e(1 - r_0, 1 + r_0)$, on ait

$$\|\text{Rm}_g\|_{C^4} \leq \varepsilon,$$

alors, il existe $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(r_0, \varepsilon, n, \alpha) > 0$ telle qu'il y ait une unique solution w satisfaisant $\|w\|_{C^{2,\alpha}} \leq \varepsilon_1$ à l'équation

$$H_g(S(w)) \equiv n - 1,$$

où H_g est la courbure moyenne pour la métrique g et où $S(w) = \{\gamma_x(w(x)), x \in S\}$ pour γ_x la géodésique partant en x normalement de S .

On a de plus le contrôle :

$$\|w\|_{C^{2,\alpha}} \leq C \|H_g(S) - (n-1)\|_{C^\alpha}.$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème des fonctions inverses, lemme 1.12. On y munit toujours S des normes de Hölder par rapport à la restriction de g_e à S .

En considérant l'opérateur $\Phi : C^{2,\alpha}(S) \rightarrow C^{0,\alpha}(S)$ défini par

$$\Phi : w \in C^{2,\alpha}(S) \mapsto H_g(S(w)) - (n-1) \in C^{0,\alpha}(S),$$

on est bien sous les hypothèses du lemme 1.12, avec $\Phi(0) = H_g(S) - (n-1)$, $d_0\Phi = J_{S,g}$,

Note 3.35. Dans cette preuve, on précisera la métrique plutôt que la variété dans pour l'opérateur de Jacobi et les termes non-linéaires de la courbure moyenne.

1. L'opérateur $J_{S,g}$ est inversible et a un inverse borné en fonction du $\varepsilon > 0$ de l'énoncé : $-(n-1)$ n'est pas une valeur propre du laplacien car $\Gamma \neq \{\text{Id}\}$, donc J_{S,g_e} est inversible et a un inverse borné. De plus, par proximité des métriques et par le contrôle de la seconde forme fondamentale et de la courbure de Ricci, il existe $C_1 > 0$ telle que,

$$\|J_{S,g_e} - J_{S,g}\| \leq C_1\varepsilon,$$

pour la norme d'opérateur de $C^{2,\alpha}(S)$ dans $C^\alpha(S)$.

En effet, la différence en norme $C^{1,\alpha}$ entre les métriques est plus petite que ε , la norme C^4 de la courbure est plus petite que ε et la différence entre les secondes formes fondamentales en norme C^α est plus petite que ε . L'inverse de $J_{S,g}$ peut donc être uniformément borné.

2. Les termes non-linéaires sont contrôlés de manière quadratique avec une constante $C > 0$ dépendant de r_0, α et ε :

$$\|Q_{S,g}(w) - Q_{S,g}(w')\|_{C^\alpha} \leq C \|w - w'\|_{C^{2,\alpha}} (\|w\|_{C^{2,\alpha}} + \|w'\|_{C^{2,\alpha}}).$$

3. Comme la seconde forme fondamentale est presque constante, on a :

$$\|H_g(S) - (n-1)\|_{C^\alpha} \leq \varepsilon.$$

Il existe donc une unique solution w à l'équation $\Phi(w) = 0$ telle que $\|w\|_{C^{2,\alpha}} \leq$

$\varepsilon_1 := \min\left(\frac{1}{2CC_1}, 2C_1\varepsilon\right)$. Cette solution satisfait en fait, pour $C' > 0$,

$$\|w\|_{C^{2,\alpha}} \leq C' \|H_g(S) - (n-1)\|_{C^\alpha}.$$

□

Preuve de la proposition 3.29. D'après le lemme 3.32, sous les hypothèses de la proposition 3.29, alors, il existe un difféomorphisme $\Phi : A_e(1 - 2r_0, 1 + 2r_0) \rightarrow \{x, d(x, \Sigma) < 2r_0\}$ tel qu'on ait pour $C > 0$,

—

$$\|\Phi^*g - g_e\|_{C^{1,\alpha}(g_e)} \leq C\varepsilon,$$

— pour la sphère unité centrée en zéro notée $S \subset \mathbb{R}^n/\Gamma$, on ait

$$\|A_{\Phi^*g}^S - (\Phi^*g)|_S\|_{C^\alpha} \leq \varepsilon,$$

— pour la courbure sur $A_e(1 - r_0, 1 + r_0)$, on ait

$$\|\text{Rm}_{\Phi^*g}\|_{C^4} \leq \varepsilon,$$

où $\varepsilon > 0$ est la constante des hypothèses de la proposition 3.29, pour lequel la métrique Φ^*g satisfait les hypothèses du lemme 3.34 avec $S = \Phi^*\Sigma$ la sphère unité de \mathbb{R}^n/Γ . En appliquant le lemme 3.34, nous obtenons l'énoncé de la proposition 3.29. □

Pour Σ satisfaisant les hypothèses de la proposition 3.29 définissons alors $\tilde{\Sigma} := \Sigma(w)$, où w est l'unique solution donnée par le théorème des fonctions inverses. C'est une perturbation de Σ en une hypersurface à courbure moyenne constante.

5 Feuilletage des anneaux de basse courbure par des hypersurfaces à courbure moyenne constante

Nous allons donc maintenant construire une famille d'hypersurfaces à courbure moyenne constante feuilletant nos anneaux de basse courbure.

5.1 Feuilletage local

Construisons tout d'abord un feuilletage local au voisinage d'une hypersurface à courbure moyenne constante donnée.

Proposition 3.36 (Feuilletage local). *Pour tout $0 < r_0 < \frac{1}{6}$, il existe $C > 0$ et $0 < \varepsilon < \frac{r_0}{C}$ tels que si une hypersurface $\tilde{\Sigma}_1$ difféomorphe à \mathbb{S}^{n-1}/Γ , $\Gamma \neq \{\text{Id}\}$ et de volume minoré par $S_0 > 0$, d'une variété (M, g) satisfait :*

- le rayon d'injectivité normale de $\tilde{\Sigma}_1$ et le rayon d'injectivité des points de $\tilde{\Sigma}_1$ dans M sont minorés par $3r_0$,
- $H^{\tilde{\Sigma}_1} \equiv n - 1$, et $\|A^{\tilde{\Sigma}_1} - g^{\tilde{\Sigma}_1}\|_{C^\alpha} < \varepsilon$,
- sur l'anneau $\{x, d_g^M(x, \Sigma) < 3r_0\}$, on a $\|\text{Rm}\|_{C^4} \leq \varepsilon$.

Alors, pour $s \in \left[\frac{1}{1+2r_0}, 1 + 2r_0\right]$, il existe une famille d'hypersurfaces $\tilde{\Sigma}_s$ à courbure moyenne constante égale à $\frac{n-1}{s}$ qui feuillète une sous-partie $\tilde{A}\left(\frac{1}{1+2r_0}, 1 + 2r_0\right)$ de l'anneau qui satisfait :

$$\{x, d_g^M(x, \Sigma) < r_0\} \subset \tilde{A}\left(\frac{1}{1+2r_0}, 1 + 2r_0\right) \subset \{x, d_g^M(x, \Sigma) < 3r_0\}.$$

La construction que l'on propose consiste à perturber normalement les lignes de niveaux de la fonction distance à l'hypersurface $\tilde{\Sigma}_1$ en des hypersurfaces à courbure moyenne constante grâce à la proposition 3.29.

Définissons les hypersurfaces equidistantes $\Sigma_s := \{\gamma_x(s - 1), x \in \tilde{\Sigma}_1\}$ où γ_x est la géodésique sortante partant normalement en x de l'hypersurface $\tilde{\Sigma}$. Ces hypersurfaces feuillètent l'anneau défini par $\{x, d_g^M(x, \Sigma) < 3r_0\}$ par définition de l'injectivité normale, et ce sont elles que l'on va perturber en des hypersurfaces à courbure moyenne constante. Leur géométrie est bien contrôlée par la courbure ambiante et l'hypersurface $\tilde{\Sigma}_1$.

Lemme 3.37. *Pour tout $0 < r_0 < \frac{1}{6}$, il existe $C > 0$ et $0 < \varepsilon < \frac{r_0}{C}$ tels que si une hypersurface $\tilde{\Sigma}_1$ difféomorphe à \mathbb{S}^{n-1}/Γ , $\Gamma \neq \{\text{Id}\}$ et à volume minoré par $S_0 > 0$, d'une variété (M, g) satisfait :*

- le rayon d'injectivité normale de $\tilde{\Sigma}_1$ et le rayon d'injectivité des points de $\tilde{\Sigma}_1$ dans M sont minorés par $3r_0$,
- $H^{\tilde{\Sigma}_1} \equiv n - 1$, et $\|A^{\tilde{\Sigma}_1} - g^{\tilde{\Sigma}_1}\|_{C^\alpha} < \varepsilon$,
- sur l'anneau $\{x, d_g^M(x, \Sigma) < 3r_0\}$, on a $\|\text{Rm}\|_{C^4} \leq \varepsilon$,

alors,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{A^{\Sigma_s}}{s} - \frac{g^{\Sigma_s}}{s^2} \right\|_{C^\alpha\left(\frac{g^{\Sigma_s}}{s^2}\right)} &\leq C\left(\|A^{\tilde{\Sigma}_1} - g^{\tilde{\Sigma}_1}\|_{C^\alpha} + |s-1|\|\text{Rm}\|_{C^0} + |s-1|^2\|\text{Rm}\|_{C^4}\right) \\ &\leq C(1+r_0^2)\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.13)$$

et

$$\left\| \frac{H^{\Sigma_s}}{s} - \frac{n-1}{s^2} \right\|_{C^\alpha\left(\frac{g^{\Sigma_s}}{s^2}\right)} \leq C(|s-1|\|\text{Ric}\|_{C^0} + |s-1|^2\|\text{Rm}\|_{C^4}) \leq C(r_0 + r_0^2)\varepsilon, \quad (3.14)$$

Démonstration. Ces estimations reposent sur les contrôles de l'équation de Riccati satisfaite par la seconde forme fondamentale. Étant donnée une hypersurface $\tilde{\Sigma}_1$ de rayon d'injectivité inférieur à $3r_0 > 0$, on définit un champ de vecteurs N sur la zone $\{x, d_g^M(x, \tilde{\Sigma}) < 3r_0\}$ grâce aux normales unitaires sortantes des hypersurfaces equidistantes Σ_s .

En notant, pour X un champ de vecteurs sur M , $S(X) := \nabla_X N$, pour lequel $g(S(X), Y) = A(X, Y)$, on a

$$(\nabla_N S)(X) = -(S^2(X) + \text{Rm}(X, N)N). \quad (3.15)$$

En supposant $\|S|_{\Sigma_1} - \text{Id}\|_{C^\alpha} < \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on peut suivre S le long des géodésiques normales, et en intégrant l'équation de Riccati précédente, il existe $C > 0$ telle que pour $|s-1| \leq r_0 \leq \frac{1}{6}$, on ait

$$\left\| \frac{S|_{\Sigma_s}}{s} - \frac{\text{Id}}{s^2} \right\|_{C^\alpha} \leq \|S|_{\Sigma_1} - \text{Id}\|_{C^\alpha} + C|s-1|\|\text{Rm}\|_{C^0} + C|s-1|^2\|\text{Rm}\|_{C^4}.$$

En notant $\kappa_i(s)$ les valeurs propres de la seconde forme fondamentale de Σ_s , et $(e_i(s))$ une base orthonormée de vecteurs propres associée, si l'on projette (3.15) sur $e_i(s)$, on obtient :

$$\kappa_i'(s) = -\left(\kappa_i(s)^2 + g\left(\text{Rm}(N^s, e_i(s))e_i(s), N^s\right)\right).$$

En sommant cela sur i , on trouve $H'(s) = -(|A|^2(s) + \text{Ric}(N^s, N^s))$. Avec pour condition initiale $H(1) \equiv n-1$, on obtient le second contrôle énoncé. \square

Démonstration de la proposition 3.36. Grâce aux contrôles (3.13), et (3.14), on peut utiliser le lemme 3.34 pour perturber normalement chaque hypersurface Σ_s en une hypersurface à courbure moyenne constante égale à $\frac{n-1}{s}$ notée $\tilde{\Sigma}_s$. On

en déduit l'existence d'une famille d'hypersurfaces $(\tilde{\Sigma}_s)_{s \in [\frac{1}{1+2r_0}, 1+2r_0]}$ à courbure moyenne constante égale à $\frac{n-1}{s}$ pour chaque s . Chacune de ces hypersurfaces est définie à partir d'une *unique* fonction w_s de $\tilde{\Sigma}_1$ dans \mathbb{R} définie par la proposition 3.29,

$$\tilde{\Sigma}_s = \Sigma(s(1 + w_s)) := \{\gamma_x(s(1 + w_s(x))), x \in \tilde{\Sigma}_1\},$$

et on a le contrôle

$$\|w_s\|_{C^{2,\alpha}} \leq C(\varepsilon|s-1| + \varepsilon|s-1|^2).$$

Montrons maintenant que la famille d'hypersurfaces feuillète bien l'anneau. Nous allons plus précisément montrer qu'étant donnés s et $s' \in [\frac{1}{1+2r_0}, 1+2r_0]$, suffisamment proches et tels que $s < s'$, $\tilde{\Sigma}_{s'}$ s'écrit comme perturbation normale de $\tilde{\Sigma}_s$ avec une fonction $w_s^{s'} : \tilde{\Sigma}_s \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positive. Le fait qu'elles s'écrivent comme perturbation normale l'une de l'autre est une conséquence directe du fait que ce sont des petites perturbations (en norme $C^{2,\alpha}$) des hypersurfaces equidistantes à $\tilde{\Sigma}_1$.

Par le lemme 3.34, pour s et s' suffisamment proches, la fonction $w_s^{s'}$ satisfait $\|w_s^{s'}\|_{C^{2,\alpha}} \leq 2|s' - s|$ et est solution de l'équation

$$-J_{\tilde{\Sigma}_s, M}(w_s^{s'}) = \frac{n-1}{s'} - \frac{n-1}{s} + Q_{\tilde{\Sigma}_s, M}(w_s^{s'}), \quad (3.16)$$

où il existe $C = C(\varepsilon, n, \alpha, r_0) > 0$ indépendante de s telle que pour toutes fonctions w , et w' , on ait $\|Q_{\tilde{\Sigma}_s, M}(w) - Q_{\tilde{\Sigma}_s, M}(w')\|_{C^\alpha} \leq C\|w - w'\|_{C^{2,\alpha}}(\|w\|_{C^{2,\alpha}} + \|w'\|_{C^{2,\alpha}})$.

On a donc $\|Q_{\tilde{\Sigma}_s, M}(w_s^{s'})\|_{C^\alpha} \leq 4C|s' - s|^2$ pour $|s' - s|$ suffisamment petit. De plus, comme $s\tilde{\Sigma}_s$ est proche de \mathbb{S}^{n-1}/Γ , $J_{\tilde{\Sigma}_s, M}$ est un opérateur elliptique inversible car à un difféomorphisme-près, il est proche de $\Delta^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma} + n - 1$ qui est inversible. D'après (3.16), nous avons

$$\left\| J_{\tilde{\Sigma}_s, M}(w_s^{s'} - (s' - s)) \right\|_{C^\alpha} \leq C((s' - s)^2 + \varepsilon(s' - s)),$$

puis par estimations elliptiques et inversibilité de l'opérateur, il existe donc $C = C(\alpha, n) > 0$ telle que

$$\|w_s^{s'} - (s' - s)\|_{C^{2,\alpha}} \leq C((s' - s)^2 + \varepsilon(s' - s)).$$

En tout, on a donc $w_s^{s'} = (s' - s) + \mathcal{O}((s' - s)^2 + \varepsilon(s' - s))$, et en particulier, pour $s' - s$ et ε suffisamment petit (en fonction de n et α), $w_s^{s'} > 0$.

On en déduit donc que pour tous $s, s' \in [\frac{1}{1+2r_0}, 1+2r_0]$, les hypersurfaces $\tilde{\Sigma}_s$ et $\tilde{\Sigma}_{s'}$ sont deux-à-deux disjointes et feuillètent l'anneau. En effet, on vient de voir

que si $s < s'$ et $|s - s'|$ est assez petit, l'hypersurface $\tilde{\Sigma}_{s'}$ est strictement incluse d'un côté de $\tilde{\Sigma}_s$. En se rappelant que pour tout s , $\tilde{\Sigma}_s = \tilde{\Sigma}_1(s(1 + w_s))$, cela signifie que pour tout x , l'application $s \mapsto (s(1 + w_s(x)))$ est strictement croissante, et donc que l'on a bien un feuilletage de la zone. \square

Remarque 3.38. Il n'était pas directement possible d'assurer que deux hypersurfaces $\tilde{\Sigma}_s$ et $\tilde{\Sigma}_{s'}$ ne se rencontraient pas pour $s, s' \in [\frac{1}{1+2r_0}, 1 + 2r_0]$, en effet le contrôle $\|w_s\|_{C^{2,\alpha}} \leq C(\varepsilon|s - 1| + \varepsilon|s - 1|^2)$ n'est pas suffisamment bon pour empêcher que l'on ait $w_s(x) = w_{s'}(x')$ lorsque $s - 1$ est beaucoup plus grand que $s - s'$.

5.2 Feuilletage global

Revenons maintenant au cadre qui nous intéresse. Considérons une variété d'Einstein proche d'un orbifold d'Einstein au sens de Gromov-Hausdorff. D'après le théorème 2.47, cette variété est en fait ε -décrite par un arbre de bulles ALE désingularisant l'orbifold, et on a donc des coordonnées satisfaisantes sur les parties $\mathcal{M}_o(\varepsilon)$ et $\mathcal{N}_k(\varepsilon)$ diffeomorphes à des compacts de l'orbifold et des bulles privés de leurs points singuliers.

Nous sommes ici intéressés par les anneaux intermédiaires $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon)$ de basse énergie reliant ces parties. Ces anneaux sont inclus dans un anneau $A(\rho_1, \rho_2)$ centré en un point p pour $\rho_1 := \frac{1}{8}\varepsilon^{-1}T_k^{\frac{1}{2}}$ et $\rho_2 := 8\varepsilon T_j^{\frac{1}{2}}$ tel que l'anneau $A(\frac{1}{4}\rho_1, 4\rho_2)$ ait une basse courbure. Rappelons ce que l'on sait sur un tel anneau :

1. la courbure est contrôlée par le théorème 2.34 : pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ telle qu'à distance $\rho \in [\frac{\rho_1}{2}, 2\rho_2]$ de p ,

$$\rho^{2+l} |\nabla^l \text{Rm}| \leq \eta(\rho) := C\varepsilon \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^{\beta_1} + \left(\frac{\rho}{\rho_2} \right)^{\beta_2} \right],$$

2. par la proposition 3.12, il existe $\delta(\varepsilon)$ tel que $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et pour tout $2\rho_1 < \rho < \frac{1}{4}\rho_2$, il existe un domaine $\hat{A}(\rho, 2\rho)$ satisfaisant

$$A((1 + \delta)\rho, (2 - \delta)\rho) \subset \hat{A}(\rho, 2\rho) \subset A((1 - \delta)\rho, (2 + \delta)\rho),$$

Γ sous-groupe fini de $SO(4)$ et un diffeomorphisme

$$\Phi_\rho : A_\varepsilon(1, 2) \subset \mathbb{R}^4/\Gamma \rightarrow \hat{A}(\rho, 2\rho) \subset M,$$

pour lesquels on ait,

$$\left\| \frac{\Phi_{\rho}^* g}{\rho^2} - g_e \right\|_{C^{l+2}(A_\varepsilon(1,2))} \leq \delta.$$

3. par le lemme 3.19, il existe donc une hypersurface Σ_{ρ_1} dont la seconde forme fondamentale satisfait $\left\| \frac{A_g^{\Sigma_{\rho_1}}}{\rho_1} - \frac{g}{\rho_1^2} \right\|_{C^{l+1}(\frac{g}{\rho_1^2})} \leq \delta$.
4. par les lemmes 3.14 et 3.20 il existe $r_0 > 0$ tel que le rayon d'injectivité en tout point x est minoré par $3r_0 d(x, p)$, et le rayon d'injectivité normale à une hypersurface proche d'une sphère de rayon s au sens du lemme 3.19 soient minorés par $3r_0 s$.

La difficulté principale de la construction de coordonnées sur un tel anneau est le fait que le rayon intérieur, ρ_1 , est négligeable par rapport au rayon où nos contrôles sont optimaux ($\bar{\rho} := (\rho_1^{\beta_1} \rho_2^{\beta_2})^{\frac{1}{\beta_1 + \beta_2}}$ qui minimise η). Les hypersurfaces à courbure moyenne constante sont donc un bon outil dans ce contexte car elles peuvent être construites dans toute la zone, et car la proposition 3.24 permet de les contrôler.

Proposition 3.39. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$, et $C > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, si (M, g) est une variété d'Einstein ε -décrite par un arbre de singularités, et soit $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon)$ un anneau intermédiaire inclus dans un anneau $A(4\rho_1, \frac{1}{4}\rho_2)$ satisfaisant $\int_{A(\rho_1, \rho_2)} |\text{Rm}|^2 dv < \varepsilon^2$. Alors, il existe un feuilletage d'une zone $\tilde{A}(2\rho_1, \frac{1}{2}\rho_2)$ bornée par deux hypersurfaces à courbures moyennes constantes respectivement égales à $\frac{n-1}{2\rho_1}$ et $\frac{n-1}{\frac{1}{2}\rho_2}$, contenant $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon)$ et satisfaisant*

$$A\left((2 + C\varepsilon)\rho_1, \left(\frac{1}{2} - C\varepsilon\right)\rho_2\right) \subset \tilde{A}\left(2\rho_1, \frac{1}{2}\rho_2\right) \subset A\left((2 - C\varepsilon)\rho_1, \left(\frac{1}{2} + C\varepsilon\right)\rho_2\right),$$

par des hypersurfaces à courbures moyennes constantes notées $\tilde{\Sigma}_s$ si leur courbure moyenne est égale à $\frac{n-1}{s}$.

Démonstration. En considérant $\Phi_{2\rho_1}$ le difféomorphisme de la proposition 3.12 à l'échelle $2\rho_1$, on définit une hypersurface $\Sigma_{2\rho_1} := \Phi_{2\rho_1, * } S \subset M$, où S est la sphère unité centrée en zéro de \mathbb{R}^4/Γ . D'après les lemmes 3.19 et 3.20, et le corollaire 3.21, nous avons une hypersurface à seconde forme fondamentale presque constante dans un anneau proche d'un anneau plat de \mathbb{R}^4/Γ et nous sommes sous les hypothèses du lemme 3.34. Nous pouvons alors la perturber en une hypersurface $\tilde{\Sigma}_{2\rho_1}$ de courbure moyenne constante égale à $\frac{n-1}{2\rho_1}$.

D'après la proposition 3.36, il existe un feuilletage par des hypersurfaces $\tilde{\Sigma}_s$ à courbure moyenne constante égale à $\frac{n-1}{s}$ pour $2\rho_1 < s < (1 + 2r_0)2\rho_1$. De plus pour

tout s , il existe une constante $C = C(n, \alpha) > 0$ telle qu'en rappelant la notation

$$\eta(s) := C\varepsilon \left[\left(\frac{\rho_1}{s} \right)^{\beta_1} + \left(\frac{s}{\rho_2} \right)^{\beta_2} \right],$$

on ait les contrôles suivant *a priori* sur les $\tilde{\Sigma}_s$:

- le rayon d'injectivité normale de $\tilde{\Sigma}_s$ et le rayon d'injectivité des points de $\tilde{\Sigma}_s$ dans M sont minorés par $3sr_0$ d'après les lemmes 3.14 et 3.20,
- $H^{\tilde{\Sigma}_1} \equiv \frac{n-1}{s}$, et $\| \frac{A^{\tilde{\Sigma}_s}}{s} - \frac{g^{\tilde{\Sigma}_s}}{s^2} \|_{C^\alpha} < C\eta(s)$,
- sur l'anneau $\{x, d_g^M(x, \Sigma) < 3sr_0\}$, on a $\| \text{Rm} \|_{C^4(g)} \leq \frac{C\eta(s)}{s^2}$.

Nous pouvons donc une nouvelle fois utiliser la proposition 3.36 à partir de l'hypersurface $\Sigma_{2(1+2r_0)\rho_1}$ pour obtenir un feuilletage par des hypersurfaces à courbure moyenne constante égale à $\frac{n-1}{s}$ jusqu'à $s = 2(1 + 2r_0)^2\rho_1$. Encore une fois, les contrôles *a priori* de la proposition 3.24 de l'ordre de $C\eta(s)$ nous permettent d'itérer ce procédé et de construire des hypersurfaces à courbure moyenne constante jusqu'à $s = 2(1 + 2r_0)^k\rho_1$ pour tout k tel que $2(1 + 2r_0)^k\rho_1 < \frac{1}{2}\rho_2$ ce qui est le résultat énoncé. \square

6 Construction de coordonnées et contrôle de la métrique

Pour construire un difféomorphisme de la zone, nous allons nous appuyer sur une hypersurface où nos contrôles sont optimaux et suivre les lignes de gradient de la coordonnée s pour construire naturellement un difféomorphisme entre les hypersurfaces à courbure moyenne constante.

6.1 Coordonnées basées sur le feuilletage

Dans le feuilletage construit dans la proposition 3.39, il y a une hypersurface à courbure moyenne constante qui est mieux contrôlée que les autres à son échelle, c'est $\tilde{\Sigma}_{\bar{\rho}}$ où $\eta(\bar{\rho}) = \min_{\rho_1 < \rho < \rho_2} \eta(\rho)$, qui satisfait les propriétés suivantes par les propositions 2.34 et 3.24 :

1. il existe un difféomorphisme $\varphi : \mathbb{S}^{n-1}/\Gamma \rightarrow \tilde{\Sigma}_{\bar{\rho}}$ tel que : pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < 1$, il existe $C = C(k, \alpha, n, r_0) > 0$ pour laquelle,

$$\left\| \frac{\varphi^* g^{\tilde{\Sigma}_{\bar{\rho}}}}{\bar{\rho}^2} - g^{\mathbb{S}^n/\Gamma} \right\|_{C^{k, \alpha}(g^{\mathbb{S}^n/\Gamma})} < C\eta(\bar{\rho}),$$

2. pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < 1$, il existe $C = C(k, \alpha, n) > 0$ telle que

$$\left\| \frac{A^{\tilde{\Sigma}_{\bar{\rho}}}}{\bar{\rho}} - \frac{g^{\tilde{\Sigma}_{\bar{\rho}}}}{\bar{\rho}^2} \right\|_{C^{k, \alpha} \left(\frac{\tilde{\Sigma}_{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}^2} \right)} \leq C\eta(\bar{\rho}).$$

3. pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C = C(k, n) > 0$ telle que sur l'anneau $[\frac{1}{2}\bar{\rho}, 2\bar{\rho}]$ on ait,

$$\bar{\rho}^{2+k} \left| \nabla^k \text{Rm} \right|_g \leq C\eta(\bar{\rho}).$$

Nous définissons alors un difféomorphisme $\Phi : [\rho_1, \rho_2] \times \mathbb{S}^{n-1}/\Gamma \rightarrow \tilde{A}(\rho_1, \rho_2)$ de la manière suivante : en $\bar{\rho}$,

$$\Phi(\bar{\rho}, x) = \varphi(x),$$

où φ est le difféomorphisme du point 1 précédent, et pour tout $s \in [\rho_1, \rho_2]$,

$$\partial_s \Phi(s, x) = u_s(x) N^{\tilde{\Sigma}_s} \left(\Phi(s, x) \right) = -\text{grad} \left(\frac{1}{s} \right),$$

où u_s est telle que $\Phi(s, \mathbb{S}^{n-1}/\Gamma) = \tilde{\Sigma}_s$. C'est un difféomorphisme sur son image car deux courbes suivant le flot donné par le champ de vecteurs $-\text{grad} \left(\frac{1}{s} \right)$, qui ne s'annule pas, ne peuvent pas se rencontrer si elles ne sont pas confondues.

6.2 Expression de la métrique

Dans de telles coordonnées, la métrique a la forme suivante,

$$\Phi^* g(s, x) = u_s(x)^2 ds^2 + s^2 h_s(x),$$

où h_s est une métrique sur \mathbb{S}^{n-1}/Γ .

Prenons les notations suivantes pour la suite où l'on tirera toujours la situation en arrière sur \mathbb{R}^n/Γ :

- $\varphi_s(x) = \Phi(s, x)$, ce qui implique que $s^2 h_s = \varphi_s^* g^{\tilde{\Sigma}_s}$.
- $H(s) = \varphi_s^* H^{\tilde{\Sigma}_s} \equiv \frac{n-1}{s}$,
- $A(s) = \varphi_s^* A^{\tilde{\Sigma}_s}$,
- $N(s) = \varphi_s^* N^{\tilde{\Sigma}_s}$
- $f_i(s) = d_{(s, \cdot)} \Phi(0, e_i)$, où les $e_i(x)$ forment une base orthonormée de $T_x \mathbb{S}^{n-1}/\Gamma$,
- $\nabla^s = \varphi_s^* \nabla^{\tilde{\Sigma}_s}$,
- $\Delta^s = \varphi_s^* \Delta^{\tilde{\Sigma}_s}$, où $\Delta^{\tilde{\Sigma}_s}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami (à valeur propres

- négatives) associé à $g^{\tilde{\Sigma}_s}$,
- grad^s le gradient pour $s^2 h_s$,
- $K(s)_i^j = g(\text{Rm}_g(N(s), f_i(s))f_j(s), N(s))$,

On a les variations suivantes des quantités géométriques montrées en annexe dans le corollaire A.7, mais aussi prouvées dans le théorème 3.2 de [HP99].

Lemme 3.40 (Corollaire A.7, [HP99, Theorem 3.2]). *Étant donnée une variation $\partial_s \Phi(s, x) = u_s N^{\tilde{\Sigma}_s}$, on a les variations suivantes des quantités géométriques :*

1. $\partial_s(s^2 h_s) = 2u_s A(s)$,
2. $\partial_s N(s) = \text{grad}^s u_s$,
3. $\partial_s A(s)_{ij} = -\nabla_i^s \nabla_j^s u_s + \left(\sum_k A(s)_{ik} A(s)_j^k + K(s)_i^j \right)$,
4. $\partial_s H(s) = -\left(\Delta^s + |A(s)|^2 + \text{Ric}(N(s), N(s)) \right) u_s$.

6.3 Contrôle de la métrique

Contrôlons maintenant la métrique dans ces coordonnées. L'objectif est la proposition suivante.

Proposition 3.41. *Avec les notations précédentes en particulier le difféomorphisme $\Phi : [2\rho_1, \frac{1}{2}\rho_2] \times \mathbb{S}^{n-1}/\Gamma \rightarrow \tilde{A}(2\rho_1, \frac{1}{2}\rho_2)$, et si l'on note $g_e := ds^2 + s^2 g^{\mathbb{S}^{n-1}}$, on a de plus les contrôles suivants sur $\Phi^* g = u_s(x)^2 ds^2 + s^2 h_s(x)$: pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe $C(l, n, v_0, D_0) > 0$ telle que pour tout $s \in [2\rho_1, \frac{1}{4}\rho_2]$, on a sur l'anneau $[s, 2s]$,*

$$\|u - 1\|_{C^l(g_e)} \leq C\eta(s),$$

et

$$\|h - g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma}\|_{C^l(g_e)} \leq C\eta(s),$$

et donc, pour tout $s \in [2\rho_1, \frac{1}{4}\rho_2]$, sur l'anneau de rayons s et $2s$,

$$\|\Phi^* g - g_e\|_{C^l(g_e)} \leq C\eta(s).$$

Démonstration. Notons pour commencer que le point 4 du lemme 3.40 implique que u_s satisfait l'équation suivante sur \mathbb{S}^{n-1}/Γ pour tout s

$$\frac{n-1}{s^2} = \left(\Delta^s + |A(s)|^2 + \text{Ric}(s)(N(s), N(s)) \right) u_s. \quad (3.17)$$

En effet, en suivant la perturbation normale par $u_s N^{\tilde{\Sigma}_s} = -\text{grad}\left(\frac{1}{s}\right)$, la variation première de la courbure moyenne est exactement $-\frac{n-1}{s^2}$. On en déduit en particulier

que l'on a pour tout s ,

$$\left(\Delta^s + |A(s)|^2 + \text{Ric}(N(s), N(s))\right)(u_s - 1) = \frac{n-1}{s^2} |A(s)|^2 - \text{Ric}(s)(N(s), N(s)), \quad (3.18)$$

D'après la proposition 3.24, tant que $\|h_s - g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma}\|_{C^{1,\alpha}(g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma})}$ est suffisamment petit, il existe $C = C(\alpha, n) > 0$ telle que pour tout s ,

$$\left\| \frac{A(s)}{s} - h_s \right\|_{C^\alpha(h_s)} \leq C\eta(s). \quad (3.19)$$

Comme $s^2 |\text{Ric}(s)(N(s), N(s))| = s^2 |\Lambda| < \eta(s)$, cela implique que le second membre de (3.18) satisfait : il existe $C = C(\alpha, n) > 0$ telle que pour tout s ,

$$\left\| n - 1 - s^2 |A(s)|^2 - s^2 \text{Ric}(s)(N(s), N(s)) \right\|_{C^\alpha(g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma})} \leq C\eta(s).$$

De même, pour le membre de gauche, pour toute fonction $v : \mathbb{S}^{n-1}/\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left\| s^2 \left(\Delta^s + |A(s)|^2 + \text{Ric}(s)(N(s), N(s)) \right) v - \left(\Delta^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma} + n - 1 \right) v \right\|_{C^\alpha(g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma})} \\ \leq C\eta(s) \|v\|_{C^{2,\alpha}(g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma})}. \end{aligned}$$

Comme $\Delta^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma} + n - 1$, est un opérateur elliptique inversible, on obtient le contrôle suivant par le lemme 1.60 : il existe $C = C(n, \alpha) > 0$ telle que pour tout s

$$\|u_s - 1\|_{C^{2,\alpha}(g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma})} \leq C\eta(s). \quad (3.20)$$

Montrons maintenant que pour tout $s \in [2\rho_1, \frac{1}{2}\rho_2]$, $\|h_s - g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma}\|_{C^{1,\alpha}(g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma})}$ reste petit. Nous allons en fait montrer qu'il existe $C'' = C''(n, \alpha) > 0$ telle que $\|h_s - g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma}\|_{C^{1,\alpha}(g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma})} \leq C''\eta(s)$. La première égalité du lemme 3.40 se réécrit

$$\partial_s \left(h_s - g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma} \right) = \frac{2}{s} \left(u \frac{A^s}{s} - h_s \right),$$

or, par le contrôle (3.20), et la proposition 3.24, il existe $C = C(n, \alpha) > 0$ telle que l'on ait $\left\| u \frac{A^s}{s} - h_s \right\|_{C^{1,\alpha}(g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma})} \leq C\eta(s)$. En se rappelant que

$$\eta(s) := C\varepsilon \left[\left(\frac{\rho_1}{s} \right)^{\beta_1} + \left(\frac{s}{\rho_2} \right)^{\beta_2} \right],$$

on en déduit que pour $\bar{\rho} < s_0 < \frac{1}{2}\rho_2$, on a

$$\begin{aligned} \left\| h_{s_0} - g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma} \right\|_{C^{1,\alpha}(g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma})} &\leq C \left(\eta(\bar{\rho}) + \int_{\bar{\rho}}^{s_0} \frac{2}{s} \eta(s) ds \right) \\ &= C \eta(\bar{\rho}) + \left(\frac{2C'\varepsilon}{\rho_2^{\beta_2}} \int_{\bar{\rho}}^{s_0} s^{\beta_2-1} ds \right) \\ &= C \varepsilon \frac{\bar{\rho}^{-\beta_2}}{\rho_2^{\beta_2}} + \left(\frac{2C'\varepsilon}{\rho_2^{\beta_2}} (s_0^{\beta_2} - \bar{\rho}^{\beta_2}) \right) \\ &\leq C'' \eta(s_0). \end{aligned}$$

et de même, pour $2\rho_1 < s_0 < \bar{\rho}$,

$$\left\| h_{s_0} - g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma} \right\|_{C^{1,\alpha}(g^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma})} \leq C'' \eta(s_0).$$

Pour obtenir des contrôles des autres dérivées de u et h_s , on utilise les autres égalités du lemme 3.40 : d'après l'égalité 2, et le contrôle (3.20), il existe $C = C(n, \alpha)$ tel qu'on ait pour tout s

$$\left\| \partial_s N(s) \right\|_{C^{1,\alpha}(h_s)} \leq C \eta(s) \quad (3.21)$$

d'après d'égalité 3 et les contrôles (3.20), (3.19) et (3.21), et comme les dérivées l -ièmes de la courbures sont bornées par $s^{-2-l}\eta(s)$, il existe $C = C(n, \alpha) > 0$ telle qu'on ait pour tout s :

$$\left\| \partial_s \left(\frac{A(s)}{s} \right) \right\|_{C^\alpha(h_s)} \leq C \eta(s). \quad (3.22)$$

En dérivant l'égalité 4 par rapport à s , et en utilisant les inégalités $\|\partial_s h_s\|_{C^{1,\alpha}} \leq C \eta(s)$, et (3.22), il existe $C = C(n, \alpha) > 0$ telle qu'on ait pour tout s :

$$\left\| \left(\Delta^{\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma} + n - 1 \right) \partial_s u_s \right\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^{n-1}/\Gamma)} \leq C \eta(s).$$

On en déduit que pour tout s , $\|\partial_s u_s\|_{C^{2,\alpha}(h_s)} \leq C \eta(s)$.

En itérant, on obtient des contrôles de toutes les dérivées dans les directions tangentielles et normales. \square

6.4 Proximité de la métrique d'Einstein et de la désingularisation *naïve* en norme C^k à poids

Maintenant, pour obtenir un difféomorphisme global sur toute la variété M , nous recollons les difféomorphismes locaux entre les domaines $\mathcal{M}_o(\varepsilon)$, $\mathcal{N}_j(\varepsilon)$ et $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon)$ et les domaines $M_o(\varepsilon)$, $N_j(\varepsilon)$ et $A_k(t, \varepsilon)$, par exemple à l'aide des techniques de centre de masse présentées entre autre dans [GW88]. Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.42. *Soit $D_0, v_0 > 0$ et soit $(M_i^\varepsilon, g_i^\varepsilon)_i$ une suite de variétés d'Einstein telle que :*

- les volumes sont minorés par $v_0 > 0$,
- les diamètres sont majorés par D_0 ,
- les courbures de Ricci sont bornées $|\text{Ric}| \leq 3$.

Alors, il existe une sous-suite à topologie M fixe proche d'une désingularisation naïve $(M, g_{\varphi_i, t_i}^D)$ d'un orbifold (M_o, g_o) par des arbres de singularités (N_j, g_{b_j}, p_j) au sens suivant : pour tout $l \in \mathbb{N}$ et i assez grand il existe, $C(l, v_0, D_0) > 0$, $\beta_1(v_0, D_0) > 0$ et $\beta_2(v_0, D_0) > 0$, $\varepsilon_i > 0$ $\varepsilon_i \rightarrow 0$, et un difféomorphisme $\Phi_i : M \rightarrow M$ satisfaisant

1. sur $\mathcal{M}_o(\varepsilon_i)$, on a

$$\left\| \Phi_i^* g_i^\varepsilon - g_o \right\|_{C^l(g_o)} \leq C \varepsilon_i.$$

2. aux différentes échelles $T_{i,j}$ (associées à t_i), sur $\mathcal{N}_j(\varepsilon_i)$ on a

$$\left\| \frac{\Phi_i^* g_i^\varepsilon}{T_{i,j}} - g_{b_j} \right\|_{C^l(g_{b_j})} \leq C \varepsilon_i.$$

3. dans les zones annulaires intermédiaires, $\mathcal{A}_k(\varepsilon_i)$ incluses dans l'anneau de rayons $\rho_1^{i,k} = \frac{1}{8} T_{i,k}^{\frac{1}{2}} \varepsilon_i^{-1}$, $\rho_2^{i,k} = 8 T_{i,j}^{\frac{1}{2}} \varepsilon_i$, pour tout $\rho_1^{i,k} \leq \rho \leq \frac{1}{2} \rho_2^{i,k}$, sur les anneaux de rayons ρ et 2ρ en notant $\Phi_\rho = \Phi \circ \varphi_\rho$, où φ_ρ est l'homothétie de rapport ρ sur le cône \mathbb{R}^4/Γ_k muni de la métrique plate notée g_e ,

$$\left\| \frac{\Phi_\rho^* g_i^\varepsilon}{\rho^2} - g_e \right\|_{C^l(A_e(1,2))} \leq C \varepsilon_i \left[\left(\frac{\rho_1^{i,k}}{\rho} \right)^{\beta_1} + \left(\frac{\rho}{\rho_2^{i,k}} \right)^{\beta_2} \right].$$

Remarque 3.43. La valeur optimale pour (β_1, β_2) est en fait (4, 2) avec une preuve similaire à la proposition 2.51, mais nous n'en aurons pas besoin pour la suite.

Chapitre 4

Désingularisations de métriques d'Einstein par recollement-perturbation

Dans ce chapitre, dont les résultats sont essentiellement tirés du début de [Ozu19b], nous nous attaquons à la réciproque des résultats du chapitre précédent (ch.3). Nous étudions l'existence et l'unicité des métriques d'Einstein dans des voisinages C^∞ à poids de nos recollements naïf. Nous montrons qu'il est toujours possible de trouver une unique métrique d'Einstein *modulo obstructions* dans un tel voisinage.

Contributions. Nous développons une analyse dans des espaces à poids adaptés au cadre général des dégénérescences de métriques d'Einstein réelles. Cette analyse est aussi nouvelle dans le cadre kählérien. Nous en déduisons une réciproque au résultat du chapitre précédent (ch. 3) : toute désingularisation naïve g_t^D d'orbifold peut être perturbée en une métrique d'Einstein modulo certaines *obstructions*. En combinant cela aux résultats du chapitre précédent (ch. 3), nous produisons donc *toutes* les métriques d'Einstein d_{GH} -proches de métriques singulières par recollement-perturbation. Cela éclaire la structure de l'espace de modules $\mathbf{E}(M)$ au d_{GH} -voisinage de son bord $\partial_o \mathbf{E}(M)$. De plus, les obstructions que l'on obtient s'annulent *si et seulement* s'il est possible de d_{GH} -désingulariser un orbifold par des métriques d'Einstein lisses.

1 Espaces fonctionnels

Définissons pour commencer les différents espaces fonctionnels dans lesquels l'analyse du reste de cette thèse se place.

Note 4.1. *Dans les résultats de ce chapitre, lorsqu'aucune hypothèse n'est spécifiée sur un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) , il peut être indifféremment supposé compact ou ALE.*

1.1 Une réécriture du contrôle entre les métriques

Pour Γ un sous-groupe fini de $SO(4)$ agissant librement sur \mathbb{S}^3 , notons $(\mathbb{R}^4/\Gamma, g_e)$ le quotient de l'espace plat par Γ , et $r_e := d_e(\cdot, 0)$. Soient (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein, et (M, g^D) une désingularisation naïve de (M_o, g_o) par un arbre d'orbifolds Ricci-plats ALE (N_j, g_{b_j}) recollés à des échelles $T_j > 0$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que l'on ait les propriétés suivantes. Pour chaque point singulier p_k de M_o de singularité \mathbb{R}^4/Γ_k , d'après la proposition 2.51, il existe un voisinage de p_k , $U_k \subset M_o$ et un difféomorphisme $\Phi_k : B_e(0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}^4/\Gamma_k \rightarrow U_k \subset M_o$ où la métrique est contrôlée.

Définition 4.2 (Fonction r_o sur un orbifold). On définit r_o une fonction lisse sur M_o satisfaisant $r_o := \Phi_k^* r_e$ sur chaque U_k , et telle que sur $M_o \setminus U_k$, on ait $\varepsilon_0 < r_o < 1$ (les différents choix possibles seront équivalents pour nos applications).

De même, toujours d'après la proposition 2.51, sur chaque orbifold Ricci-plateau ALE N_j , il existe U_k des voisinages des points singuliers p_k et U_∞ un voisinage de l'infini et des difféomorphismes $\Psi_k : B_e(0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}^4/\Gamma_k \rightarrow U_k \subset N_j$ et $\Psi_\infty : (\mathbb{R}^4/\Gamma_\infty) \setminus B_e(0, \varepsilon_0^{-1}) \rightarrow U_\infty \subset N_j$ grâce auxquels la métrique est bien contrôlée.

Définition 4.3 (Fonction r_{b_j} sur un orbifold ALE). On définit r_{b_j} une fonction lisse sur N_j satisfaisant $r_{b_j} := \Psi_k^* r_e$ sur chaque U_k , et $r_{b_j} := \Psi_\infty^* r_e$ sur U_∞ , et telle que $\varepsilon_0 < r_{b_j} < \varepsilon_0^{-1}$ sur le reste de N_j (les différents choix possibles seront équivalents pour nos applications).

Dans le chapitre 3 précédent, pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ nous avons utilisé un recouvrement $M = \mathcal{M}_o(\varepsilon) \cup \bigcup_j \mathcal{N}_j(\varepsilon) \cup \bigcup_k \mathcal{A}_k(t, \varepsilon)$. Rappelons que si (N_j, g_{b_j}) est recollé à (N_k, g_{b_k}) , on note alors l'échelle relative $t_j := \frac{T_j}{T_k}$, et $t_j = T_j$ si (N_j, g_{b_j}, p_j) est recollé à (M_o, g_o) . La variété M est aussi découpée en $M = M_o^t \cup \bigcup_j N_j^t$, où

$$M_o^t := M_o \setminus \left(\bigcup_k \Phi_k(B_e(0, t_k^{\frac{1}{4}})) \right),$$

où $t_k > 0$ l'échelle de recollement de N_k au point singulier $p_k \in M_o$, et où

$$N_j^t := \left(N_j \setminus \Psi_\infty \left((\mathbb{R}^4 / \Gamma_\infty) \setminus B_\varepsilon(0, 2t_j^{-\frac{1}{4}}) \right) \right) \setminus \left(\bigcup_k \Psi_k(B_\varepsilon(0, t_k^{\frac{1}{4}})) \right).$$

Sur $M_o^{16t} \subset M_o^t$, on a $g^D = g_o$ et sur chaque $N_j^{16t} \subset N_j^t$, on a $g^D = T_j g_{b_j}$. On définit aussi $t_{\max} := \max_j t_j$. Par définition des recollements, sur l'intersection $N_j^t \cap M_o^t$ on a alors $\sqrt{T_j} r_{b_j} = r_o$, et sur l'intersection $N_j^t \cap N_k^t$, on a $\sqrt{T_j} r_{b_j} = \sqrt{T_k} r_{b_k}$.

Définition 4.4 (La fonction r_D sur une désingularisation naïve). Sur une désingularisation naïve (M, g^D) , on définit une fonction r_D de la manière suivante :

1. $r_D = r_o$ sur M_o^t ,
2. $r_D = \sqrt{T_j} r_{b_j}$ sur chaque N_j^t .

La fonction r_D est lisse sur M .

Cette fonction nous permet de réécrire le théorème.

Corollaire 4.5. Soit $D_0, v_0 > 0$, $l \in \mathbb{N}$ et soit $(M_i^\mathcal{E}, g_i^\mathcal{E})_i$ une suite de variétés d'Einstein telle que :

- les volumes sont minorés par $v_0 > 0$,
- les diamètres sont majorés par D_0 ,
- les courbures de Ricci sont bornées $|\text{Ric}| \leq 3$.

Alors, il existe $\beta = \beta(v_0, D_0) > 0$, une sous-suite $(M, g_i^\mathcal{E})_i$ à topologie M fixe, un difféomorphisme $\varphi_i : M \rightarrow M$ et des désingularisations naïves (M, g_i^D) d'un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) par des orbifolds Ricci-plats ALE (N_j, g_{b_j}, p_j) aux échelles t_i telles que $M = M_o^{t_i} \cup \bigcup_j N_j^{t_i}$ et pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{N}$ assez grand :

1. sur $M_o^{t_i}$, on ait

$$r_{D,i}^{-\beta+l} \left| \nabla_{g_o}^l (g_i^\mathcal{E} - g_o) \right|_{g_o} \leq \frac{1}{i},$$

2. sur $N_j^{t_i}$, avec $T_{i,j}$ l'échelle de N_j associée à t_i ,

$$\max \left(\left(\frac{r_{D,i}}{\sqrt{T_{i,j}}} \right)^{-\beta+l}, \left(\frac{r_{D,i}}{\sqrt{T_{i,j}}} \right)^{\beta+l} \right) \left| \nabla^l \left(\frac{g_i^\mathcal{E}}{T_{i,j}} - g_{b_j} \right) \right|_{g_{b_j}} \leq \frac{1}{i}.$$

Remarque 4.6. Sur un anneau intermédiaire $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon)$ où N_k se recolle à N_j , les rayons extérieur et intérieur sont (à une constante près) $\rho' = \sqrt{T_k}$ et $\rho = \sqrt{T_j} = \sqrt{t_j} \sqrt{T_k}$, et on retrouve bien un contrôle avec un poids

$$\max \left[\left(\frac{r_D}{\sqrt{T_j}} \right)^{-\beta}, \left(\frac{r_D}{\sqrt{T_k}} \right)^\beta \right] \approx \max \left[\left(\frac{\rho}{r_D} \right)^\beta, \left(\frac{r_D}{\rho'} \right)^\beta \right]$$

équivalent au dernier contrôle du théorème 3.42.

1.2 Espaces de Hölder à poids sur les orbifolds et ALE

Définissons tout d'abord des espaces à poids sur des variétés asymptotiques à des cônes ou ayant des singularités coniques.

Pour les orbifolds, on considère une norme qui est bornée pour les tenseurs qui décroissent aux points singuliers.

Définition 4.7 (Norme à poids sur un orbifold). Soit $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$ et (M_o, g_o) un orbifold. Définissons alors pour tout tenseur s sur M_o ,

$$\|s\|_{C_\beta^{k,\alpha}(g_o)} := \sup_{M_o} r_o^{-\beta} \left(\sum_{i=0}^k r_o^i |\nabla_{g_o}^i s|_{g_o} + r_o^{k+\alpha} [\nabla_{g_o}^k s]_{C^\alpha(g_o)} \right).$$

Remarque 4.8. Le rayon d'injectivité en un point $x \in M_o$ est équivalent à r_o .

Pour les variétés ALE, on considère une norme qui est bornée pour les tenseurs qui décroissent à l'infini.

Définition 4.9 (Norme à poids sur une variété ALE). Soit $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$ et (N, g_b) une variété ALE. Définissons pour tout tenseur s sur N ,

$$\|s\|_{C_\beta^{k,\alpha}(g_b)} := \sup_N r_b^\beta \left(\sum_{i=0}^k r_b^i |\nabla_{g_b}^i s|_{g_b} + r_b^{k+\alpha} [\nabla_{g_b}^k s]_{C^\alpha(g_b)} \right).$$

Remarque 4.10. Le rayon d'injectivité en un point $x \in N$ est équivalent à r_{b_j} .

Définition 4.11 (Norme à poids sur les orbifolds ALE). On définit aussi naturellement une norme à poids pour $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < 1$ sur un orbifold ALE (N, g_b) par le maximum des deux normes précédentes.

$$\|s\|_{C_\beta^{k,\alpha}(g_b)} := \sup_N \left\{ \max(r_b^\beta, r_b^{-\beta}) \left(\sum_{i=0}^k r_b^i |\nabla_{g_b}^i s|_{g_b} + r_b^{k+\alpha} [\nabla_{g_b}^k s]_{C^\alpha(g_b)} \right) \right\}.$$

qui est bornée sur les tenseurs décroissant à l'infini et aux points singuliers.

Sur des espaces non compacts, les opérateurs elliptiques asymptotiques à des laplaciens ont de bonnes propriétés Fredholm dans ces espaces à poids. Ce n'est pas le cas des espaces de Hölder ou Sobolev classiques, voir [LM85] par exemple.

1.3 Espaces fonctionnels sur les arbres de singularités

Supposons que (M, g^D) soit une désingularisation naïve de (M_o, g_o) par un arbre de singularités (N_j, g_{b_j}) . Pour $t_{\max} < \varepsilon_0^4$, pour $\varepsilon_0 > 0$ la constante du début de la partie 1.1 ne dépendant que de g_o et des g_{b_j} , on définit la norme à poids globale de la manière suivante.

Choisissons une partition de l'unité :

$$1 = \chi_{M_o^t} + \sum_j \chi_{N_j^t},$$

où $\chi_{M_o^t}$ à support dans M_o^t et valant 1 sur M_o^{16t} et $\chi_{N_j^t}$ à support dans N_j^t et valant 1 sur N_j^{16t} , sont des fonctions de coupure telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k > 0$ telle que $|\nabla_{g^D}^k \chi(x)|_{g^D} \leq \frac{C_k}{r_D(x)^k}$.

Définition 4.12 (Norme à poids adaptée aux arbres de singularités). Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$. On définit pour $s \in TM^{\otimes l_+} \otimes T^*M^{\otimes l_-}$ un tenseur $(l_+, l_-) \in \mathbb{N}^2$, avec $l := l_+ - l_-$ le poids conforme associé à la section.

$$\|s\|_{C_\beta^{k,\alpha}(g^D)} := \|\chi_{M_o^t} s\|_{C_\beta^{k,\alpha}(g_o)} + \sum_j T_j^{\frac{l}{2}} \|\chi_{N_j^t} s\|_{C_\beta^{k,\alpha}(g_{b_j})}.$$

Remarque 4.13. La présence de $T_j^{\frac{l}{2}}$ vient du fait que sur N_j^t , la métrique g^D est proche de $T_j g_{b_j}$. En effet, pour s un tenseur (l_+, l_-) de poids conforme $l_+ - l_-$, nous avons

$$|s|_{T_j g_{b_j}} = T_j^{\frac{l}{2}} |s|_{g_{b_j}}.$$

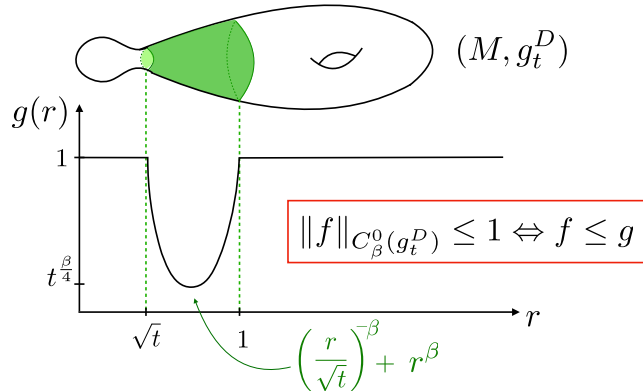


FIGURE 4.1 – Norme à poids pour une singularité.

Cette norme a l'avantage d'être adaptée aux cas de plusieurs singularités et d'arbres de singularités.

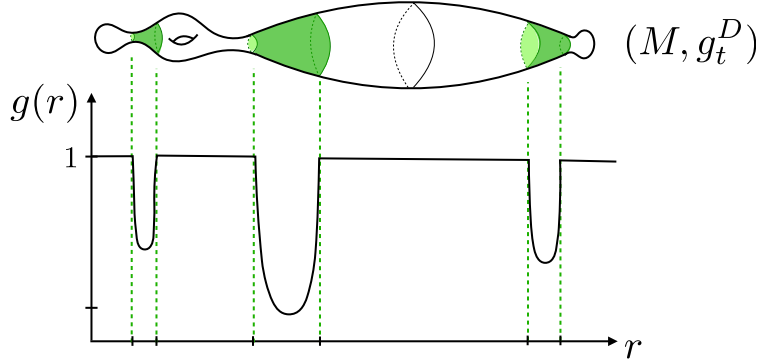


FIGURE 4.2 – Norme à poids sur un arbre de singularités.

Grâce à cette norme, on peut par exemple décrire les métriques d'Einstein proches d'orbifolds au sens de Gromov-Hausdorff.

Corollaire 4.14. *Soient $D_0, v_0 > 0$, $l \in \mathbb{N}$, et $\beta = \beta(v_0, D_0) > 0$ obtenu dans le corollaire 4.5. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, D_0, v_0, l) > 0$ tel que si $(M, g^\mathcal{E})$ est une variété d'Einstein satisfaisant*

- le volume est minoré par $v_0 > 0$,
- le diamètre est majoré par D_0 ,
- la courbure de Ricci est bornée $|\text{Ric}| \leq 3$.

et telle que pour un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) ,

$$d_{GH}((M, g^\mathcal{E}), (M_o, g_o)) \leq \delta,$$

alors, il existe une désingularisation naïve (M, g^D) de (M_o, g_o) par un arbre de singularités et un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M$ tels que

$$\|\varphi^* g^\mathcal{E} - g^D\|_{C_\beta^l(g^D)} \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $l \in \mathbb{N}$. Raisonnons par l'absurde et considérons une suite de contre-exemples, c'est-à-dire une suite de variétés d'Einstein $(M_i, g_i)_i$ telles que $\text{Vol}(g_i) \geq v_0 > 0$, $\text{diam}(g_i) < D_0$ et $|\text{Ric}(g_i)|_{g_i} \leq 3$ convergeant au sens de Gromov-Hausdorff vers un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) , mais telles qu'il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel pour tout $i \in \mathbb{N}$ et toute désingularisation naïve (M_i, g_i^D) de (M_o, g_o) , et tout difféomorphisme $\Phi_i : M_i \rightarrow M_i$, on ait $\|\Phi_i^* g_i - g_i^D\|_{C_\beta^l(g_i^D)} > \varepsilon$.

D'après le corollaire 4.5, il existe alors une sous-suite $(M, g_i)_i$ à topologie fixée, et une suite (M, g_i^D) contredisant cela pour i assez grand par définition de la norme à poids. \square

La norme à poids est équivalente à la somme de celles des espaces modèles M_o , N_j sur les tenseurs respectivement à support dans M_o^t et N_j^t . Sur les anneaux de basse courbure $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon_0)$ tirés en arrière sur des anneaux plats $A_e(\rho_1, \rho_2) \subset \mathbb{R}^4/\Gamma$, elle est équivalente à une norme particulière qui permet de contrôler *indépendamment des rayons* les sommes de tenseurs qui décroissent au centre de l'anneau et de tenseurs qui décroissent à l'infini.

Définition 4.15 (Norme à poids adaptée à un anneau). Soient $0 < \rho_1 < \rho_2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$ et un tenseur s sur $(A_e(\rho_1, \rho_2), g_e)$ et la fonction $r_e := d_e(0, \cdot)$. On définit $\eta(r_e) := \max\left(\left(\frac{\rho_1}{r_e}\right)^\beta, \left(\frac{r_e}{\rho_2}\right)^\beta\right)$, et la norme,

$$\|s\|_{C_\beta^{k,\alpha}(A_e(\rho_1,\rho_2))} := \sup_{A_e(\rho_1,\rho_2)} \left[\eta^{-1}(r_e) \left(\sum_{i=0}^k r_e^i |\nabla_{g_e}^i s|_{g_e} + r_e^{k+\alpha} [\nabla_{g_e}^k s]_{C^\alpha(g_e)} \right) \right].$$

Dans la suite, nous utiliserons souvent des espaces $fC_\beta^{k,\alpha}$ pour une fonction f définie et lisse hors des points singuliers. Ils seront toujours munis de la norme suivante

$$\|s\|_{fC_\beta^{k,\alpha}} := \left\| \frac{s}{f} \right\|_{C_\beta^{k,\alpha}}.$$

Remarquons que par définition de r_D , il existe une constante $C = C(m, k, \alpha) > 0$ dépendant des fonctions de coupure telle que

$$\frac{1}{C} \|s\|_{r_D^m C_\beta^{k,\alpha}(g^D)} \leq \| \chi_{M_o^t} s \|_{r_o^m C_\beta^{k,\alpha}(g_o)} + \sum_j T_j^{\frac{l-m}{2}} \| \chi_{N_j^t} s \|_{r_{b_j}^m C_\beta^{k,\alpha}(g_{b_j})} \leq C \|s\|_{r_D^m C_\beta^{k,\alpha}(g^D)}. \quad (4.1)$$

Finissons par lister quelques propriétés de ces normes à poids.

Proposition 4.16. *Soient $\beta \leq \beta'$, et $k + \alpha \leq k' + \alpha'$, et $m, m' \in \mathbb{Z}$. Pour toutes les normes à poids précédentes notées génériquement $r^m C_\beta^{k,\alpha}$, nous avons les propriétés suivantes : pour des tenseurs s et s'*

- $\|s\|_{r^m C_\beta^{k,\alpha}} \leq \|s\|_{r^m C_{\beta'}^{k',\alpha'}}$,
- $\|\nabla^k s\|_{r^m C_\beta^{k-k,\alpha}} \leq \|s\|_{r^{m+k} C_\beta^{k',\alpha}}$
- *si $*$ est une composition, un produit ou une contraction de tenseurs, il existe $C = C(*, k, \alpha, m, m', \beta, \beta') > 0$ telle que*

$$\|s * s'\|_{r^{m+m'} C_{\beta+\beta'}^{k,\alpha}} \leq C \|s\|_{r^m C_\beta^{k,\alpha}} \|s'\|_{r^{m'} C_{\beta'}^{k,\alpha}}.$$

En particulier, pour un 2-tenseur $h \in C_\beta^{2,\alpha}(g^D)$ et un champ de vecteurs $X \in r_D C_\beta^{3,\alpha}(g^D)$, on a pour $P_g := \frac{1}{2} \nabla_g^* \nabla_g - \mathring{R}_g$,

- $P_{g^D} h \in r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)$,
- $\delta_{g^D} h \in r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)$,
- $\delta_{g^D}^* X \in C_\beta^{2,\alpha}(g^D)$,
- $\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X \in r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)$.

1.4 Estimations de Schauder à poids

Des estimations de Schauder sont valables dans ces normes à poids pour l'opérateur $P := \frac{1}{2} \nabla^* \nabla - \mathring{R}$.

Proposition 4.17. *Pour tous $\beta > 0$ et $0 < \alpha < 1$, il existe $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que si h est un 2-tenseur symétrique sur (M, g^D) , et g une métrique sur M telle que*

$$\|g - g^D\|_{C_\beta^{2,\alpha}(g^D)} \leq \varepsilon,$$

alors,

$$\|h\|_{C_\beta^{2,\alpha}(g^D)} \leq C \left(\|P_g h\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} + \|h\|_{C_\beta^0(g^D)} \right).$$

Démonstration. Soit g une métrique sur M telle qu'on ait $\|g - g^D\|_{C_\beta^{2,\alpha}(g^D)} \leq \varepsilon$, pour $\varepsilon > 0$ que l'on choisira suffisamment petit au cours de la preuve.

Sur les compacts $M_o(\varepsilon_0)$ de l'orbifold et $N_j(\varepsilon_0)$ des ALE privés de leurs points singuliers, on a une estimation elliptique sur les opérateurs P_{g_o} et $P_{g_{b_j}}$: il existe $C_1 > 0$ telle que pour tous 2-tenseurs h_o à support dans $M_o(\varepsilon_0)$ et h_j à support dans $N_j(\varepsilon_0)$, on ait

$$\|h_o\|_{C^{2,\alpha}(g_o)} \leq C_1 \left(\|P_{g_o} h_o\|_{C^\alpha(g_o)} + \|h_o\|_{C^0(g_o)} \right),$$

et

$$\|h_j\|_{C^{2,\alpha}(g_{b_j})} \leq C_1 \left(\|P_{g_{b_j}} h_j\|_{C^\alpha(g_{b_j})} + \|h_j\|_{C^0(g_{b_j})} \right).$$

Par hypothèse, il existe $C > 0$ ne dépendant que de g_o et g_{b_j} tel que $\|g - g_o\|_{C^{2,\alpha}(g_o)} \leq C\varepsilon$ sur $M_o(\varepsilon_0)$ et $\left\| \frac{g}{T_j} - g_{b_j} \right\|_{C^{2,\alpha}(g_{b_j})} \leq C\varepsilon$ sur $N_j(\varepsilon_0)$. On en déduit que pour ε suffisamment petit, les opérateurs P_g et $P_{\frac{g}{T_j}}$, qui sont proches des opérateurs P_{g_o} et $P_{g_{b_j}}$, satisfont pour tous h_o à support dans $M_o(\varepsilon_0)$ et h_j à support dans $N_j(\varepsilon_0)$,

$$\|h_o\|_{C^{2,\alpha}(g_o)} \leq 2C_1 \left(\|P_g h_o\|_{C^\alpha(g_o)} + \|h_o\|_{C^0(g_o)} \right),$$

et

$$\|h_j\|_{C^{2,\alpha}(g_{b_j})} \leq 2C_1 \left(\left\| P_{\frac{g}{T_j}} h_j \right\|_{C^\alpha(g_{b_j})} + \|h_j\|_{C^0(g_{b_j})} \right).$$

Sur chaque anneau presque plat $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon_0)$, sur l'anneau $\mathcal{A}_\rho := \{\rho \leq r_D \leq 2\rho\}$, il existe un difféomorphisme $\varphi_\rho : A_e(1, 2) \rightarrow \mathcal{A}_\rho$ tel que

$$\left\| \frac{\varphi_\rho^* g}{\rho^2} - g_e \right\|_{C^{1,\alpha}} \leq C\eta(\rho)\varepsilon.$$

Ainsi par ellipticité, pour ε suffisamment petit, il existe $C_2 > 0$, telle que pour tout 2-tenseur h à support compact dans $A_e(1, 2)$ on ait,

$$\|h\|_{C^{2,\alpha}(A_e(1,2))} \leq 2C_2 \left(\|h\|_{C^0(A_e(1,2))} + \left\| P_{\frac{\varphi_\rho^* g}{\rho^2}} h \right\|_{C^\alpha(A_e(1,2))} \right).$$

En revenant à (M, g) , cela implique que pour ε suffisamment petit, on ait

$$\|h\|_{C^{2,\alpha}(\mathcal{A}_\rho, \frac{g}{\rho^2})} \leq 4C_2 \left(\|h\|_{C^0(\mathcal{A}_\rho, \frac{g}{\rho^2})} + \left\| P_{\frac{g}{\rho^2}} h \right\|_{C^\alpha(\mathcal{A}_\rho, \frac{g}{\rho^2})} \right).$$

La norme d'un 2-tenseur s se comporte de la manière suivante par changement d'échelle, pour $t > 0$:

$$|s|_{\frac{g}{t}} = t|s|_g,$$

et l'opérateur P se comporte de la manière suivante par changement d'échelle, pour $t > 0$: $P_{\frac{g}{t}} = tP_g$. En multipliant les deux côtés de l'égalité par r_D^{-2} , on obtient

$$\|h\|_{C^{2,\alpha}(\mathcal{A}_\rho, g)} \leq 4C_2 \left(\|h\|_{C^0(\mathcal{A}_\rho, g)} + r_D^2 \|P_g h\|_{C^\alpha(\mathcal{A}_\rho, g)} \right).$$

Étant donnés les contrôles sur les dérivées de r_D , on en déduit le résultat énoncé par définition des normes à poids en multipliant les deux côtés de l'inégalité par le poids de la norme. \square

Des estimations analogues sont aussi valables pour l'opérateur elliptique $\delta\delta^*$ avec une preuve analogue.

Proposition 4.18. *Pour tous $\beta > 0$ et $0 < \alpha < 1$ il existe $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que si X est un champ de vecteurs sur (M, g^D) , et g une métrique sur M telle que*

$$\|g - g^D\|_{C_\beta^{2,\alpha}(g^D)} \leq \varepsilon,$$

alors,

$$\|X\|_{r_D C_\beta^{3,\alpha}(g^D)} \leq C \left(\|\delta_g \delta_g^* X\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} + \|X\|_{r_D C_\beta^0(g^D)} \right).$$

1.5 Normes de découplage

Nous montrons maintenant que pour espérer de bons contrôles pour les opérateurs P et $\delta\delta^*$ dans les zones annulaires de notre variété, nous devons considérer séparément l'influence des 2-tenseurs constants pour P et des champs de vecteurs linéaires du noyau de $\delta_e\delta_e^*$ pour $\delta\delta^*$.

Estimations sur les anneaux $A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1})$ de (\mathbb{R}^4, g_e) . Étudions tout d'abord la situation sur des anneaux plats.

Proposition 4.19. *Soient $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha < 1$, et $P_{g_e} = \frac{1}{2}\nabla_e^*\nabla_e - \mathring{R}_e = \frac{1}{2}\nabla_e^*\nabla_e$. Il existe $C_e > 0$, et $\varepsilon_e > 0$ tels que pour tout 2-tenseur h sur un anneau de rayons $0 < \varepsilon < \varepsilon_e$ et $\frac{1}{\varepsilon}$, il existe un 2-tenseur constant H_0 et un 2-tenseur H_* défini sur l'anneau $A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1})$ satisfaisant*

$$\nabla_e^*\nabla_e H_* = 0,$$

$$\|H_*\|_{C_1^{2,\alpha}(A_e(2\varepsilon, (1/2)\varepsilon^{-1}))} \leq C_e \|h - H_0\|_{C_\beta^{2,\alpha}(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))}, \quad (4.2)$$

(remarquer la norme $C_1^{2,\alpha}$ pour le membre de gauche) et,

$$\|h - H_0 - H_*\|_{C_\beta^{2,\alpha}(A_e(2\varepsilon, (1/2)\varepsilon^{-1}))} \leq C_e \|P_{g_e} h\|_{r_e^{-2}C_\beta^\alpha(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))}. \quad (4.3)$$

Cela implique en particulier le contrôle suivant, pour tout $x \in A_e(1/2, 2)$,

$$\begin{aligned} & |h - H_0(x)|_{g_e} + |\nabla h(x)|_{g_e} + |\nabla^2 h(x)|_{g_e} + [\nabla^2 h]_{C^\alpha(g)}(x) \\ & \leq C_e \left((2\varepsilon)^\beta \|P_{g_e} h\|_{r_e^{-2}C_\beta^\alpha(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))} + 2\varepsilon \|h - H_0\|_{C_\beta^{2,\alpha}(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Démonstration. Remarquons pour commencer que (4.4) est une conséquence de (4.2) et (4.3). En effet, $h - H_0 = (h - H_0 - H_*) + H_*$, et on a donc, en notant

$$\|s\|_{C^{2,\alpha}(1/2,2)} := \sup_{x \in A_e(1/2,2)} |s(x)|_{g_e} + |\nabla s(x)|_{g_e} + |\nabla^2 s(x)|_{g_e} + [\nabla^2 s]_{C^\alpha(g)}(x),$$

$$\begin{aligned} \|h - H_0\|_{C^{2,\alpha}(1/2,2)} & \leq \|h - H_0 - H_*\|_{C^{2,\alpha}(1/2,2)} + \|H_*\|_{C^{2,\alpha}(1/2,2)} \\ & \leq (2\varepsilon)^\beta \|h - H_0 - H_*\|_{C_\beta^{2,\alpha}(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))} + 2\varepsilon \|H_*\|_{C_1^{2,\alpha}(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))} \\ & \leq C_e \left((2\varepsilon)^\beta \|P_{g_e} h\|_{r_e^{-2}C_\beta^\alpha(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))} + 2\varepsilon \|h - H_0\|_{C_\beta^{2,\alpha}(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))} \right), \end{aligned}$$

par définition des normes à poids et en supposant, pour $C_e > 0$, les inégalités (4.3) et (4.2).

D'après le lemme 2.49, sur $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, les 2-tenseurs harmoniques sont sommes de 2-tenseurs harmoniques homogènes dont les coefficients sont proportionnels à r^j pour $j \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Ces 2-tenseurs harmoniques s'écrivent plus précisément $r_e^k H_k$ ou $r_e^{-2-k} H_k$ pour $k \in \mathbb{N}$, où H_k est un 2-tenseur radial dont les coefficients, une fois restreints à la sphère unité sont des fonctions propres du laplacien de valeurs propres $-k(k+2)$. En particulier, on remarque que tout 2-tenseur harmonique non constant s'écrit comme un 2-tenseur constant plus un tenseur explosant au moins en r_e^{-2} en 0 ou en r_e à l'infini.

Pour tout 2-tenseur h sur $A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1})$, définissons \tilde{H} la solution du problème de Dirichlet suivant, en notant $S_e(r) := \{r_e = r\}$,

$$\begin{cases} \nabla_e^* \nabla_e \tilde{H} = 0, \\ \tilde{H} = h \text{ sur } S_e(\varepsilon) \cup S_e(\varepsilon^{-1}). \end{cases}$$

Plus précisément, $\tilde{H} = \sum_{k \geq 0} (\varepsilon r_e)^k \tilde{H}_k^+ + (\varepsilon^{-1} r_e)^{-2-k} \tilde{H}_k^-$ où, si l'on décompose en harmoniques sphériques $h|_{S_e(\varepsilon)} = \sum_k H_k(\varepsilon)$ et $h|_{S_e(\varepsilon^{-1})} = \sum_k H_k(\varepsilon^{-1})$, on a le système

$$\begin{cases} H_k(\varepsilon^{-1}) = \tilde{H}_k^+ + \varepsilon^{4+2k} \tilde{H}_k^-, \\ H_k(\varepsilon) = \varepsilon^{2k} \tilde{H}_k^+ + \tilde{H}_k^-, \end{cases}$$

et donc,

$$\begin{cases} \tilde{H}_k^+ = \frac{1}{1 - \varepsilon^{4+4k}} (H_k(\varepsilon^{-1}) - \varepsilon^{4+2k} H_k(\varepsilon)), \\ \tilde{H}_k^- = \frac{1}{1 - \varepsilon^{4+4k}} (H_k(\varepsilon) - \varepsilon^{2k} H_k(\varepsilon^{-1})), \end{cases} \quad (4.5)$$

Posons $\tilde{H}_* := \tilde{H} - \tilde{H}_0^+$. Comme $\nabla_e^* \nabla_e \tilde{H}_* = 0$, par régularité elliptique entre espaces de Sobolev et injection de Sobolev sur l'anneau $A_e(\rho/2, 4\rho) \subset A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1})$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle qu'on ait,

$$\|\tilde{H}_*\|_{C^0(A_e(\rho, 2\rho))} \leq \frac{C}{\rho^2} \|\tilde{H}_*\|_{L^2(A_e(\rho/2, 4\rho))}, \quad (4.6)$$

donc pour contrôler la norme $C_1^0(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))$ de \tilde{H}_* , il nous suffit donc de contrôler la norme L^2 de \tilde{H}_* sur les différents anneaux $A_e(\rho, 2\rho) \subset A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1})$. Les égalités (4.5) et le fait que les décompositions en harmoniques sphériques soient orthogonales nous donnent alors l'estimation suivante pour ε suffisamment petit et une

certaine constante $C > 0$,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{H}_*\|_{L^2(A_e(\rho,2\rho))}^2 &\leq 2 \int_{A_e(\rho,2\rho)} \sum_{k \geq 0} \left| (r_e \varepsilon)^{k+1} (H_{k+1}(\varepsilon^{-1}) - \varepsilon^{4+2(k+1)} H_{k+1}(\varepsilon)) \right. \\
&\quad \left. + (r_e \varepsilon^{-1})^{-2-k} (H_k(\varepsilon) - \varepsilon^{2k} H_k(\varepsilon^{-1})) \right|^2 \\
&\leq C \int_{A_e(\rho,2\rho)} (r_e \varepsilon)^2 (|(h - \tilde{H}_0^+)_{|S_e(\varepsilon)}|^2 + \varepsilon^8 |(h - \tilde{H}_0^+)_{|S_e(\varepsilon^{-1})}|^2) \\
&\quad + (r_e \varepsilon^{-1})^{-4} (|(h - \tilde{H}_0^+)_{|S_e(\varepsilon)}|^2 + |(h - \tilde{H}_0^+)_{|S_e(\varepsilon^{-1})}|^2) \\
&\leq C^2 \rho^4 \varepsilon^2 (\rho^1 + \rho^{-1})^2 \|h - \tilde{H}_0^+\|_{C_\beta^0(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))}^2
\end{aligned} \tag{4.7}$$

car $|(h - \tilde{H}_0^+)_{|S_e(\varepsilon)}|_{g_e} \leq \|h - \tilde{H}_0^+\|_{C_\beta^0(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))}$ et $|(h - \tilde{H}_0^+)_{|S_e(\varepsilon^{-1})}|_{g_e} \leq \|h - \tilde{H}_0^+\|_{C_\beta^0(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))}$ par définition de la norme. En combinant (4.6) et (4.7), on obtient

$$\|\tilde{H}_*\|_{C_1^0(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))} \leq C \|h - \tilde{H}_0^+\|_{C_\beta^0(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))} \tag{4.8}$$

Fixons $x_0 \in S_e(1)$ et modifions notre 2-tenseur \tilde{H} pour obtenir un 2-tenseur H tel que $h - H$ s'annule en x_0 et sur $S_e(\varepsilon)$ tout en étant constant sur $S_e(\varepsilon^{-1})$. Le seul choix possible à l'aide de 2-tenseurs harmoniques est

$$H := \left(\tilde{H}_0^+ - \frac{c_0}{1 - \varepsilon^2} \right) + \left(\tilde{H}_* + \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \frac{c_0}{r_e^2} \right),$$

où $c_0 = (h - \tilde{H})(x_0)$. Nous allons tout d'abord prouver le contrôle (4.2) de l'énoncé. Notons $H_0 := \tilde{H}_0^+ - \frac{c_0}{1 - \varepsilon^2}$ la partie constante de H , et $H_* := \tilde{H}_* + \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \frac{c_0}{(\varepsilon^{-1} r_e)^2}$ sa partie variable.

D'après (4.7), la partie $\tilde{H}_* = \sum_{k \geq 1} (\varepsilon r_e)^k \tilde{H}_k^+ + (\varepsilon^{-1} r_e)^{-2-k} \tilde{H}_k^-$ est bien contrôlée en norme L^2 par les parties de moyenne nulle de $h - H_0$ sur $S_e(\varepsilon)$ et $S_e(\varepsilon)$ (qui sont les mêmes que $h - \tilde{H}_0$). Il nous reste alors à contrôler le terme en r_e^{-2} , c'est-à-dire

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2} \frac{(1 - \varepsilon^2) \tilde{H}_0^- + c_0}{\varepsilon^{-2} r_e^2}.$$

D'après (4.5), $|\tilde{H}_0^-|$ est contrôlé par la différence entre la valeur moyenne de $h - H_0$ sur la sphère $S_e(\varepsilon)$ et celle sur la sphère $S_e(\varepsilon^{-1})$ (qui est la même que $h - \tilde{H}_0$). Nous avons donc $|\tilde{H}_0^-| \leq 3 \|h - H_0\|_{C_\beta^0}$ pour ε suffisamment petit. Pour contrôler $|c_0|$ en fonction de $\|h - H_0\|_{C_\beta^0}$, il suffit de noter que la valeur moyenne de $h - H_0$ sur $S_e(\varepsilon^{-1})$ vaut $\varepsilon^4 \tilde{H}_0^- + c_0$, et que l'on a donc $|c_0|_{g_e} \leq (1 + 3\varepsilon^4) \|h - H_0\|_{C_\beta^0}$ car $|\tilde{H}_0^-|_{g_e} \leq 3 \|h - H_0\|_{C_\beta^0}$.

Nous en déduisons donc finalement l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

nous avons, en passant de contrôles L^2 à des contrôles C^0 à l'aide de (4.6) appliqué à H_* ,

$$\|H_*\|_{C_1^0} \leq C \|h - H_0\|_{C_\beta^0},$$

et donc l'inégalité (4.2) énoncée.

Prouvons l'estimation (4.3), et raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite de réels strictement positifs $\varepsilon_i \rightarrow 0$, et une suite de 2-tenseurs h_i sur des anneaux $A_e(\varepsilon_i, \varepsilon_i^{-1})$ satisfaisant, $\|h_i - H_i\|_{C_\beta^0(A_e(\varepsilon_i, \varepsilon_i^{-1}))} = 1$, et

$$\|P_e h_i\|_{r_e^{-2} C_\beta^0(A_e(\varepsilon_i, \varepsilon_i^{-1}))} \leq \frac{1}{i}.$$

Soit alors x_i une suite de points de $A_e(\varepsilon_i, \varepsilon_i^{-1})$ où la norme $C_\beta^0(A_e(\varepsilon_i, \varepsilon_i^{-1}))$ de $\bar{h}_i := h_i - H_i$ est atteinte. On peut en extraire une sous-suite ayant l'un des comportements suivants :

1. $r_e(x_i) \rightarrow +\infty$, et $\varepsilon_i r_e(x_i) \rightarrow 0$,
2. $r_e(x_i) \rightarrow +\infty$, et $\varepsilon_i r_e(x_i) \rightarrow c > 0$,
3. $r_e(x_i) \rightarrow 0$ et $\varepsilon_i^{-1} r_e(x_i) \rightarrow +\infty$,
4. $r_e(x_i) \rightarrow 0$ et $\varepsilon_i^{-1} r_e(x_i) \rightarrow c > 0$,
5. $r_e(x_i) \rightarrow c > 0$.

Dans tous les cas, nous pouvons effectuer un changement d'échelle pour fixer $r_e(x_i) = 1$ en posant pour tout x ,

$$h'_i(x) := \frac{\bar{h}_i(r_e(x_i)x)}{\varepsilon_i^\beta (r_e(x_i)^\beta + r_e(x_i)^{-\beta})},$$

qui satisfait donc

$$(\nabla_e^* \nabla_e h'_i)(x) = r_e(x_i)^2 (\nabla_e^* \nabla_e \bar{h}_i)(r_e(x_i)x).$$

Comme nous avons par hypothèse les contrôles

$$\bar{h}_i(x) \leq \varepsilon_i^\beta (r_e(x)^\beta + r_e(x)^{-\beta}),$$

et

$$|\nabla_e^* \nabla_e \bar{h}_i|(x) \leq \frac{1}{i} r_e(x)^{-2} \varepsilon_i^\beta (r_e(x)^\beta + r_e(x)^{-\beta}),$$

notre nouveau 2-tenseur h'_i s'annule en $\frac{x_0}{r_e(x_i)}$ et sur $S_e(\varepsilon_i r_e(x_i)^{-1})$, et est constant

sur le bord $S_e(\varepsilon_i^{-1}r_e(x_i)^{-1})$. Il satisfait de plus pour tout x

$$|h'_i|(x) \leq \frac{\left((r_e(x_i)r_e(x))^\beta + (r_e(x_i)r_e(x))^{-\beta}\right)}{r_e(x_i)^\beta + r_e(x_i)^{-\beta}}$$

et

$$|\nabla_e^* \nabla_e h'_i|(x) \leq \frac{1}{i} r_e(x)^{-2} \frac{\left((r_e(x_i)r_e(x))^\beta + (r_e(x_i)r_e(x))^{-\beta}\right)}{r_e(x_i)^\beta + r_e(x_i)^{-\beta}}.$$

Dans les différents cas, quitte à extraire une sous-suite, on obtient alors une des situations limites suivantes,

1. sur $(\mathbb{R}^4/\Gamma) \setminus \{0\}$, une solution h'_∞ de $P_e h'_\infty = \frac{1}{2} \nabla_e^* \nabla_e h'_\infty = 0$, et $\sup r^{-\beta} h'_\infty = 1$. Or, il n'existe pas de telle solution car les 2-tenseurs harmoniques décroissent au moins en $\mathcal{O}(r)$ en 0 s'ils s'y annulent et doivent donc aussi croître à cette vitesse à l'infini. C'est absurde.
2. sur $(B_e(1/c)/\Gamma) \setminus \{0\}$, une solution h'_∞ de $P_e h'_\infty = 0$, et $\sup r^{-\beta} h'_\infty = 1$, et telle que $(h'_\infty)|_{S_e(1/c)}$ soit constant. L'unique solution du problème de Dirichlet avec annulation en zéro et une condition constante sur $S_e(1/c)$ est $h'_\infty = 0$, ce qui est absurde.
3. sur $(\mathbb{R}^4/\Gamma) \setminus \{0\}$, une solution h'_∞ de $P_e h'_\infty = 0$, et $\sup r^\beta h'_\infty = 1$. Or, il n'existe pas de telle solution car les 2-tenseurs harmoniques tendant vers 0 à l'infini décroissent au moins en $\mathcal{O}(r^{-2})$ à l'infini, et explosent donc au moins à cette vitesse en 0. Finalement, $h'_\infty = 0$, ce qui est absurde.
4. sur $(\mathbb{R}^4/\Gamma) \setminus B_e(1/c)$, une solution h'_∞ de $P_e h'_\infty = 0$, et $\sup r^\beta h'_\infty = 1$ et $(h'_\infty)|_{S_e(1/c)} = 0$. Sur $(\mathbb{R}^4/\Gamma) \setminus B_e(1/c)$, l'unique solution du problème de Dirichlet sur avec décroissance à l'infini et annulation sur $S_e(1/c)$ étant nulle, nous avons $h'_\infty = 0$, ce qui est absurde.
5. sur $(\mathbb{R}^4/\Gamma) \setminus \{0\}$, une solution h'_∞ de $P_e h'_\infty = 0$, et $\sup(r^\beta + r^{-\beta})h'_\infty = 1$ satisfaisant $h'_\infty\left(\frac{x_0}{c}\right) = 0$. Les conditions $P_e h'_\infty = 0$, et $\sup(r^\beta + r^{-\beta})h'_\infty = 1$ impliquent que h'_∞ est constant, comme h'_∞ s'annule en $\frac{x_0}{c}$, $h'_\infty = 0$, ce qui est absurde.

Nous en déduisons donc qu'il existe $\varepsilon_e > 0$ et $C_e > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_e$ et tout 2-tenseur h sur l'anneau $A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1})$, on ait

$$\|h - H_0\|_{C_\beta^{2,\alpha}(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))} \leq C_e \|P_g h\|_{r_e^{-2} C_\beta^\alpha(A_e(\varepsilon, \varepsilon^{-1}))}.$$

Le passage d'un contrôle en norme C_β^0 à un contrôle en norme $C_\beta^{2,\alpha}$ est une conséquence des estimations elliptiques qui sont valables sur les anneaux plats d'après la fin de la preuve de la proposition 4.17. \square

Avec une preuve tout à fait analogue en utilisant la décomposition harmonique des 1-formes sur un cône de [CT94, (2.16)-(2.19)] (voir aussi la section 2.1 de ce chapitre pour le cas particulier des cônes plats), nous avons le même résultat pour les champs de vecteurs, mais cette fois-ci, nous ne voulons pas tuer les constantes, mais le noyau linéaire de $\delta\delta^*$ sur \mathbb{R}^4/Γ . Sur \mathbb{R}^4 , l'opérateur elliptique

$$\delta\delta^* = \nabla^*\nabla - \frac{1}{2}d^*d = dd^* + \frac{1}{2}d^*d,$$

a son noyau restreint aux champs de vecteurs linéaires du noyau de $\delta_e\delta_e^*$ parmi les champs de vecteurs en $\mathcal{O}(r^{1-\beta} + r^{1+\beta})$ pour $0 < \beta < 1$, voir le lemme 4.30 pour une preuve de ce résultat et la section 2.1 de ce chapitre pour une description du noyau.

Proposition 4.20. *Soit $0 < \beta < 1$. Il existe $C_e > 0$, et $\varepsilon_e > 0$ tels que si un champ de vecteurs X satisfait $\|X\|_{r_e C_\beta^{3,\alpha}(A_e(\varepsilon,\varepsilon^{-1}))} \leq 1$ sur un anneau de rayons $0 < \varepsilon < \varepsilon_e$ et $\frac{1}{\varepsilon}$, alors, il existe un champ de vecteurs linéaire du noyau de $\delta_e\delta_e^*$, Y_0 , et un élément Y_* du noyau de $\delta_e\delta_e^*$ satisfaisant*

$$\|Y_*\|_{r_e C_1^{3,\alpha}(A_e(\varepsilon,\varepsilon^{-1}))} \leq C_e \|X - Y_0\|_{r_e C_\beta^{3,\alpha}(A_e(\varepsilon,\varepsilon^{-1}))},$$

(remarquer la norme $r_e C_1^{3,\alpha}$ pour le membre de gauche) et

$$\|X - Y_0 - Y_*\|_{r_e C_\beta^{3,\alpha}(A_e(\varepsilon,\varepsilon^{-1}))} \leq C_e \|\delta_{g_e}\delta_{g_e}^* X\|_{r_e^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(A_e(\varepsilon,\varepsilon^{-1}))}.$$

Cela implique en particulier le contrôle suivant, pour tout $x \in A_e(1/2, 2)$,

$$\begin{aligned} & |(X - Y_0)(x)|_{g_e} + |\nabla(X - Y_0)(x)|_{g_e} + |\nabla^2(X - Y_0)(x)|_{g_e} + [\nabla^2(X - Y_0)]_{C^\alpha(g)}(x) \\ & \leq C_e \left((2\varepsilon)^\beta \|\delta_g\delta_g^*\|_{r_e^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(A_e(\varepsilon,\varepsilon^{-1}))} + 2\varepsilon \|X - Y_0\|_{r_e C_\beta^{3,\alpha}(A_e(\varepsilon,\varepsilon^{-1}))} \right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Les noyaux approchés sur les anneaux : 2-tenseurs constants et champs de vecteurs linéaires du noyau de $\delta_e\delta_e^*$. Soit (M, g^D) une désingularisation naïve d'orbifold d'Einstein ε -décrite par un arbre de singularités pour $\varepsilon > 0$. Pour chaque anneau $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon)$ de la définition 3.7 entre de N_k et N_j ou N_k et M_o , il existe un difféomorphisme

$$\Phi_k : A_e(\varepsilon^{-1}\sqrt{T_j}\sqrt{t_k}, \varepsilon\sqrt{T_j}) \subset \mathbb{R}^4/\Gamma_k \rightarrow \mathcal{A}_k(t, \varepsilon) \subset M,$$

tel qu'il existe $C > 0$ pour lequel, pour tout $0 < \beta < 1$,

$$\left\| \Phi_k^* g^D - g_e \right\|_{C_\beta^{2,\alpha}(A_e(\varepsilon^{-1}\sqrt{T_j}\sqrt{t_k}, \varepsilon\sqrt{T_j}))} \leq C\varepsilon^{2-\beta}. \quad (4.10)$$

À cause des 2-tenseurs constants que l'on peut approcher sur (M, g^D) par coupure sur les anneaux $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon)$, nous ne pouvons pas obtenir d'estimations indépendantes des échelles de recollement sur (M, g^D) du type $\|h\|_{C_\beta^{2,\alpha}(g^D)} \leq C\|P_{g^D} h\|_{r_D^{-2}C_\beta^\alpha(g^D)}$. De tels contrôles sont nécessaires pour appliquer un théorème des fonctions inverses. En effet, nous avons les estimations suivantes d'après la proposition 4.28 montrée dans la suite.

Note 4.21. *La plupart du temps, dans le reste de cette thèse, nous oublierons abusivement les difféomorphismes Φ_k au voisinage des points orbifolds afin d'alléger les notations. Par exemple, le 2-tenseur $\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)}\Phi_k^*(H)$ sera noté $\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)}H$ sur M .*

Proposition 4.22. *Sur une désingularisation naïve (M, g^D) , pour tout $0 < \beta < 1$, il existe $C > 0$ tel que pour H_k un 2-tenseur constant, on ait à la fois*

$$\|P_{g^D}(\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)}H_k)\|_{r_D^{-2}C_\beta^\alpha(g^D)} \leq C|H_k|_{g_e},$$

et

$$\|\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)}H_k\|_{C_\beta^0(g^D)} \geq \frac{1}{2}t_{\max}^{-\frac{\beta}{4}}|H_k|_{g_e}.$$

Les champs de vecteurs linéaires du noyau de $\delta_e\delta_e^*$ empêchent eux aussi les estimations indépendantes de t pour l'opérateur $\delta\delta^*$ d'après la proposition 4.28.

Proposition 4.23. *Sur une désingularisation naïve (M, g^D) , pour tout $0 < \beta < 1$, il existe $C > 0$ tel que pour X_k un champ de vecteur linéaire du noyau de $\delta_e\delta_e^*$, on ait à la fois*

$$\|\delta_{g^D}\delta_{g^D}^*(\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)}X_k)\|_{r_D^{-1}C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} \leq C\|X_k\|_{r_eC_\beta^0(g_e)},$$

et

$$\|\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)}X_k\|_{C_\beta^0(g^D)} \geq \frac{1}{2}t_{\max}^{-\frac{\beta}{4}}\|X_k\|_{r_eC_\beta^0(g_e)}.$$

Norme à poids modulo les noyaux approchés des anneaux. Les propositions 4.19 et 4.20 montrent en fait que l'on peut contrôler l'inverse de nos opérateurs une fois que l'on résout nos équations modulo les 2-tenseurs constants et les champs de vecteurs linéaires du noyau de $\delta_e\delta_e^*$ sur \mathbb{R}^4 . Les propositions 4.22 et 4.23 montrent que l'on ne peut pas espérer mieux, et qu'il convient de traiter séparément ces 2-tenseurs et ces champs de vecteurs. Nous introduisons donc

de nouvelles normes dans ce but. Elles sont similaires aux normes introduites, essentiellement pour la même raison, dans [Bam12].

Définition 4.24 (Norme $\|\cdot\|_{C_{\beta,*}^{k,\alpha}}$ sur les 2-tenseurs). Soit h un 2-tenseur sur (M, g^D) , (M_o, g_o) ou (N, g_b) . On définit sa norme $C_{\beta,*}^{k,\alpha}$ par

$$\|h\|_{C_{\beta,*}^{k,\alpha}} := \inf_{h_*, H_k} \|h_*\|_{C_{\beta}^{k,\alpha}} + \sum_k |H_k|_{g_e},$$

où l'infimum est pris sur les (h_*, H_k) satisfaisant $h = h_* + \sum_k \chi_{A_k(t,\varepsilon)} H_k$ (ou $h = h_* + \sum_k \chi_{B_e(\varepsilon)} H_k$ sur M_o ou N_j), pour H_k des 2-tenseurs constants à trace nulle sur \mathbb{R}^4/Γ_k .

Définition 4.25 (Norme $\|\cdot\|_{rC_{\beta,*}^{k,\alpha}}$ sur les champs de vecteurs). Soit X un champ de vecteurs sur (M, g^D) , (M_o, g_o) ou (N, g_b) . On définit sa norme $rC_{\beta,*}^{k,\alpha}$, où r est la fonction r_D , r_o ou r_b correspondante par

$$\|X\|_{rC_{\beta,*}^{k,\alpha}} := \inf_{X_*, X_k} \|X_*\|_{rC_{\beta}^{k,\alpha}} + \sum_k \|X_k\|_{rC_0^0(g_e)},$$

où l'infimum est pris sur les (X_*, X_k) satisfaisant $X = X_* + \sum_k \chi_{A_k(t,\varepsilon)} X_k$ (ou $X = X_* + \sum_k \chi_{B_e(\varepsilon)} X_k$ sur M_o ou N_j).

Remarque 4.26. Par définition des normes à poids, sur un orbifold compact ou ALE, les décompositions $h = h_* + \sum_k \chi_{B_e(\varepsilon)} H_k$ et $X = X_* + \sum_k \chi_{B_e(\varepsilon)} X_k$ sont uniques et déterminées respectivement par les limites de h et de $\frac{X_k}{r}$ lorsque $r \rightarrow 0$ (où $r = r_o$ ou $r = r_b$), sinon la norme diverge.

Remarque 4.27. Par définition, on a

$$\|\cdot\|_{C_{\beta,*}^{k,\alpha}} \leq \|\cdot\|_{C_{\beta}^{k,\alpha}}, \text{ et } \|\cdot\|_{rC_{\beta,*}^{k,\alpha}} \leq \|\cdot\|_{rC_{\beta}^{k,\alpha}},$$

et les espaces $(C_{\beta,*}^{k,\alpha}, \|\cdot\|_{C_{\beta,*}^{k,\alpha}})$ et $(rC_{\beta,*}^{k,\alpha}, \|\cdot\|_{rC_{\beta,*}^{k,\alpha}})$ sont clairement de Banach.

1.5.1 Estimations dans ces normes

Montrons qu'il est possible de contrôler en normes $r^m C_{\beta}^{k,\alpha}$ les images par les opérateurs P et $\delta\delta^*$ d'éléments de $r^m C_{\beta,*}^{k,\alpha}$.

Proposition 4.28. Soient $0 < \beta < 1$, $(M_{\bullet}, g_{\bullet})$, un des espaces (M_o, g_o) , (N_j, g_{b_j}) ou (M, g^D) , g une métrique, h un 2-tenseur symétrique et X un champ de vecteurs

sur M_\bullet . On a alors les contrôles suivants :

$$\begin{aligned} \|P_{g_\bullet} h\|_{r_\bullet^{-2} C_\beta^\alpha(g_\bullet)} &\leq C \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_\bullet)}, \\ \|\delta_{g_\bullet} \delta_{g_\bullet}^* X\|_{r_\bullet^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g_\bullet)} &\leq C \|X\|_{r_\bullet C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_\bullet)}, \\ \|P_g(h) - P_{g_\bullet}(h)\|_{r_\bullet^{-2} C_\beta^\alpha(g_\bullet)} &\leq C \|g - g_\bullet\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_\bullet)} \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_\bullet)}, \end{aligned}$$

et

$$\|\delta_g \delta_g^*(X) - \delta_{g_\bullet} \delta_{g_\bullet}^*(X)\|_{r_\bullet^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g_\bullet)} \leq C \|g - g_\bullet\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_\bullet)} \|X\|_{r_\bullet C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_\bullet)}.$$

Démonstration. Montrons le résultat pour g^D la preuve pour les autres espaces est très similaire. Pour les deux premières inégalités, considérons h un 2-tenseur et X un champ de vecteurs sur M , et des décompositions $h = h_* + \sum_k \chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)} H_k$ et $X = X_* + \sum_k \chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)} X_k$. La proposition 4.16 implique que l'on a les contrôles suivants pour h_* et X_* ,

$$\|P_{g^D} h_*\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} \leq C \|h_*\|_{C_\beta^{2,\alpha}(g^D)}, \quad (4.11)$$

et

$$\|\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X_*\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} \leq C \|X_*\|_{r_D C_\beta^{3,\alpha}(g^D)}. \quad (4.12)$$

Sur \mathbb{R}^4/Γ , nous avons $P_e H_k = 0$ et $\delta_e \delta_e^* X_k = 0$, et pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$|\nabla^l \chi_k|_{g^D} \leq C_l r_D^{-l}. \quad (4.13)$$

Donc, grâce au contrôle (4.10) de la différence entre $\Phi_k^* g^D$ et g_e , nous avons

$$\|P_{g^D}(\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)} H_k)\|_{C_\beta^\alpha(g^D)} \leq C |H_k|_{g_e}, \quad (4.14)$$

et

$$\|\delta_{g^D} \delta_{g^D}^*(\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)} X_k)\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} \leq C \|X_k\|_{r_e C_0^0(g_e)}, \quad (4.15)$$

en tirant en arrière la situation à l'aide du difféomorphisme

$$\Phi_k : A_e(\varepsilon^{-1} \sqrt{T_j} \sqrt{t_k}, \varepsilon \sqrt{T_j}) \subset \mathbb{R}^4/\Gamma_k \rightarrow \mathcal{A}_k(t, \varepsilon) \subset M.$$

En sommant les contrôles (4.11) et (4.14) d'une part, et les contrôles (4.12) et (4.15) d'autre part, nous obtenons les deux premières inégalités avec les normes $C_{\beta,*}^{2,\alpha}$.

Intéressons nous maintenant aux deux dernières inégalités qui sont plus dé-

licates. Le contrôle que l'on vise est local, écrivons donc l'expression des deux opérateurs en coordonnées dans une base locale $(e_i)_i$. Pour un 2-tenseur h , et un champs de vecteurs X , en notant $h_{ij} = h(e_i, e_j)$ et R_{ijkl} , les courbures sectionnelles, on a

$$P_g(h)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\nabla_g^* \nabla_g h \right)_{ij} - g^{kp} g^{lq} R_{ikjl} h_{pq}, \quad (4.16)$$

et, pour $\omega = g(X, \cdot)$

$$(\delta_g \delta_g^* X)_i = -\frac{1}{2} g^{ki} \nabla_k (\nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i), \quad (4.17)$$

où ∇_i est la dérivée covariante pour g dans la direction e_i . On voit alors directement grâce aux estimations de la proposition 4.16 que l'on a les contrôles en norme $C_\beta^{2,\alpha}$:

$$\|P_g(h) - P_{g^D}(h)\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} \leq C \|g - g^D\|_{C_\beta^{2,\alpha}(g^D)} \|h\|_{C_\beta^{2,\alpha}(g^D)},$$

et

$$\|\delta_g \delta_g^*(X) - \delta_{g^D} \delta_{g^D}^*(X)\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} \leq C \|g - g^D\|_{C_\beta^{2,\alpha}(g^D)} \|X\|_{r_D C_\beta^{3,\alpha}(g^D)}.$$

Afin d'obtenir un contrôle en norme $C_{\beta,*}^{2,\alpha}$, après avoir noté que la norme $C_0^{2,\alpha}$ est majorée par la norme $C_{\beta,*}^{2,\alpha}$, la remarque cruciale est alors que dans (4.16), tous les termes font au moins intervenir une dérivée de h ou de $g - g^D$. On a donc le contrôle plus précis sur h un 2-tenseur à support dans $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon_0)$,

$$\begin{aligned} \|P_g(h) - P_{g^D}(h)\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} &\leq C \left(\|g - g^D\|_{C_0^{2,\alpha}(g^D)} \|\nabla^2 h\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} \right. \\ &\quad + \|\nabla(g - g^D)\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} \|\nabla h\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} \\ &\quad \left. + \|\nabla^2(g - g^D)\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} \|h\|_{C_0^{2,\alpha}(g^D)} \right) \end{aligned}$$

(remarquer les normes $C_0^{2,\alpha}(g^D)$ qui sont majorées par la norme $C_{\beta,*}^{2,\alpha}$).

Il reste à contrôler les dérivées des troncatures de 2-tenseurs constants pour montrer que les termes $\|\nabla h\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)}$ et $\|\nabla^2 h\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)}$ sont contrôlés par $\|h\|_{C_{\beta,x}^{2,\alpha}(g^D)}$ et de même pour $g - g^D$. Considérons donc $\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)} H_k$ où H_k est constant sur \mathbb{R}^4 / Γ_k . Comme H_k est constant sur \mathbb{R}^4 , on a $\nabla_e H_k = 0$, puis, comme les fonctions de coupures sont bornées en norme $C_0^2(g^D)$ par (4.13), pour $i \in \{1, 2\}$, on a

$$\|\nabla^i(\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)} H_k)\|_{r_D^{-i} C_\beta^{2-i,\alpha}(g^D)} \leq C |H_k|_{g_e},$$

ce qui suffit pour conclure pour les 2-tenseurs.

Pour les champs de vecteurs, nous avons la réécriture suivante, pour X un champ de vecteurs à support dans $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon_0)$

$$\begin{aligned} \left\| \delta_g \delta_g^*(X) - \delta_{g^D} \delta_{g^D}^*(X) \right\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} &\leq C \left(\left\| (\delta_g - \delta_{g^D})(\mathcal{L}_X g) \right\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \delta_{g^D}(\mathcal{L}_X(g^D - g)) \right\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} \right). \end{aligned}$$

Soit X_k dans le noyau linéaire de $\delta_e \delta_e^*$, alors le 2-tenseur $\mathcal{L}_{X_k} g_e$ est constant et pour H_k un 2-tenseur symétrique constant nous avons $\delta_{g_e}(\mathcal{L}_{X_k} H_k) = 0$ sur \mathbb{R}^4 . Nous en déduisons alors l'inégalité annoncée pour les champs de vecteurs après un argument similaire à celui pour l'opérateur P . \square

1.5.2 Estimations elliptiques

Des estimations elliptiques sont toujours valables dans ces normes.

Proposition 4.29. *Soit $0 < \beta < 1$, g une métrique, h un 2-tenseur symétrique et X un champ de vecteurs sur M_o (respectivement N_j , ou M). Alors, il existe $\varepsilon_* = \varepsilon_*(g_o, g_{b_j}, g^D, \beta) > 0$ et $C > 0$ tels que si l'on a $\|g - g_\bullet\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_\bullet)} \leq \varepsilon_*$, où g_\bullet est l'une des normes g_o, g_{b_j} ou g^D , alors,*

$$\|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_\bullet)} \leq C \left(\|P_g h\|_{r_\bullet^{-2} C_\beta^\alpha(g_\bullet)} + \|h\|_{C_{\beta,*}^0(g_\bullet)} \right),$$

et

$$\|X\|_{r_\bullet C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_\bullet)} \leq C \left(\|\delta_g \delta_g^* X\|_{r_\bullet^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g_\bullet)} + \|X\|_{r_\bullet C_{\beta,*}^0(g_\bullet)} \right).$$

Démonstration. Soit g_\bullet une des métriques g_o, g_{b_j} ou g^D , et pour tout k , H_k un 2-tenseur constant à trace nulle sur \mathbb{R}^4/Γ_k , et X_k un champ de vecteurs linéaire du noyau de $\delta \delta^*$ sur \mathbb{R}^4/Γ_k . Soient de plus h_* un 2-tenseur de $C_\beta^{2,\alpha}(g_\bullet)$ et X_* un champ de vecteurs de $r_\bullet C_\beta^{3,\alpha}(g_\bullet)$, et définissons $h = h_* + \sum_k \chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)} H_k$ et $X = X_* + \sum_k \chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)} X_k$.

On a alors les contrôles suivants :

$$\|P_{g_\bullet}(\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)} H_k)\|_{r_\bullet^{-2} C_\beta^\alpha(g_\bullet)} \leq C |H_k|_{g_e},$$

et

$$\|\delta_{g_\bullet} \delta_{g_\bullet}^*(\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)} X_k)\|_{r_\bullet^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g_\bullet)} \leq C \|X_k\|_{r_e C_0^0(g_e)}.$$

Ainsi, pour h_* , on a

$$\|P_{g_\bullet} h_*\|_{r_\bullet^{-2} C_\beta^\alpha} \leq \|P_{g_\bullet} h\|_{r_\bullet^{-2} C_\beta^\alpha(g_\bullet)} + C \sum_k |H_k|_{g_e},$$

et l'estimation annoncée pour $g = g_\bullet$ est alors une conséquence des estimations elliptiques dans les espaces à poids du lemme 4.17 qui donnent

$$\|h_*\|_{C_\beta^{2,\alpha}(g_\bullet)} \leq C \left(\|P_{g_\bullet} h_*\|_{r_\bullet^{-2} C_\beta^\alpha(g_\bullet)} + \|h_*\|_{C_\beta^0(g_\bullet)} \right),$$

et permettent de conclure que

$$\|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_\bullet)} \leq C' \left(\|P_g h\|_{r_\bullet^{-2} C_\beta^\alpha(g_\bullet)} + \|h\|_{C_{\beta,*}^0(g_\bullet)} \right).$$

Le même argument marche pour l'opérateur $\delta\delta^*$ sur les champs de vecteurs à l'aide des estimations elliptiques du lemme 4.18.

La proposition 4.28 permet enfin de passer de la métrique g_\bullet à une métrique g telle que $\|g - g_\bullet\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_\bullet)} \leq \varepsilon_*$. \square

2 Jauge divergence réduite

Lorsque l'orbifold d'Einstein que l'on approche est à courbure scalaire négative, on peut toujours mettre nos métriques en jauge de Bianchi à l'aide d'un petit difféomorphisme (voir [Biq13, Lemme 8.2] adapté à nos normes). Lorsque la courbure de Ricci de notre variété d'Einstein n'est pas négative, ce n'est plus nécessairement vrai, mais la mise en jauge divergence, elle, est toujours possible. C'est l'objet de cette sous-section dont le résultat principal est la proposition 4.39 qui généralisera le théorème 1.16 au cas des métriques au voisinage d'une métrique singulière. Le principe est le même que dans la section 3.2.2 du premier chapitre, et les analogues des métriques g_v sont les différentes métriques de désingularisation naïve g^D que l'on interprète comme des déformations de l'orbifold (M_o, g_o) .

Pour cette mise en jauge, nous proposons une approche par théorème du point fixe de Banach qui nécessite l'étude de l'équation linéarisée :

$$\delta\delta^* X = -\delta h,$$

où X est un champ de vecteurs, et h un 2-tenseur.

Dans notre cadre de dégénérescence et d'espaces à poids particuliers on souhaite obtenir des estimations indépendantes des échelles de recollement des différents espaces. Une difficulté est que l'orbifold limite pourrait avoir des champs de Killing qui ne se prolongent pas aux bulles se formant. L'opérateur $\delta\delta^*$ prendrait alors des valeurs arbitrairement petites sur ces champs de vecteurs, et

on ne pourrait pas espérer obtenir de contrôles. La mise en jauge pourrait donc complètement perturber nos métriques dans les normes $\|\cdot\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}}$.

2.1 Noyau de la linéarisation

Intéressons nous à l'opérateur $\delta\delta^*$ sur un cône plat $(\mathbb{R}^4/\Gamma, g_e)$ puis sur un orbifold (M_o, g_o) et sur des orbifolds Ricci-plats ALE (N_j, g_{b_j}) .

Sur un cône plat. Étudions tout d'abord l'opérateur $\delta\delta^*$ sur les 1-formes d'un cône plat. Sur le cône plat $(\mathbb{R}^4/\Gamma, g_e) = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^3/\Gamma, dr^2 + r^2 g_S)$, comme utilisé dans [CT94, Section 2], toute 1-forme sur \mathbb{R}^4/Γ se décompose en somme de 1-formes d'un des deux types suivants préservés par $\delta\delta^*$:

1. $p(r)\psi$, où $\delta_S\psi = 0$, et $d_S^*d_S\psi = \mu\psi$,
2. $r^{-1}l(r)\varphi dr + u(r)rd_S\varphi$, et $d_S^*d_S\varphi = \nu\varphi$,

où $u, p, l : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{S}^3/\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ et où ψ est une 1-forme sur \mathbb{S}^3/Γ .

D'après [AV12], grâce au calcul des valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami et du laplacien de Hodge sur les 1-formes de la sphère de [Fol89, Theorem C], les solutions de $\delta_e\delta_e^*\omega = 0$ s'écrivent alors comme des sommes de 1-formes des types suivants

1. $r^{a_j^\pm}\psi$ avec $a_j^\pm := \pm(1+j)$, $j \in \mathbb{N}^*$,
2. $r^{b_j^\pm}d_S\varphi + b_j^\pm r^{b_j^\pm-1}\varphi dr$, ou $2r^{b_j^\pm+2}d_S\varphi + b_j^\mp r^{b_j^\pm+1}\varphi dr$, avec $b_j^\pm = -1 \pm (1+j)$, $j \in \mathbb{N}$.

Comme nous sommes intéressés par la résolution d'une équation du type

$$\delta\delta^*X = -\delta h,$$

où X est un champ de vecteurs, et h un 2-tenseur appartenant à $C_{\beta,*}^{2,\alpha}$, nous chercherons naturellement X dans $r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha}$. Les *poids critiques* de $\delta_e\delta_e^*$ sont les valeurs $\gamma \in \mathbb{R}$ telles qu'il existe une 1-forme homogène en r_e^γ annulant $\delta_e\delta_e^*$. Nous sommes donc intéressés par les poids critiques autour du poids 1 des champs de vecteurs linéaires du noyau de $\delta_e\delta_e^*$.

Lemme 4.30. *Sur $(\mathbb{R}^4/\Gamma) \setminus \{0\}$ pour $\Gamma \neq \{\text{Id}\}$, 1 est le seul poids critique entre -3 et 2.*

Démonstration. D'après la discussion précédant le lemme, les poids critiques sont a priori de la forme $a_j^\pm - 1 = -1 \pm (1+j)$ pour $j \in \mathbb{N}^*$, $b_j^\pm - 1 = -2 \pm (1+j)$ avec $j \in \mathbb{N}$, ou $b_j^\pm + 1 = \pm(1+j)$ avec $j \in \mathbb{N}$. Remarquons pour commencer que

$a_j^\pm - 1 \in (-3, 2)$ pour $j \in \mathbb{N}^*$ implique que $a_j^\pm - 1 = 1$, pour les tenseurs de la forme $r^{a_j^\pm} \psi$, il n'y a donc pas de poids critique de ce type autre que 1 entre -3 et 2.

Pour les poids $b_j^\pm - 1$, il y a a priori aussi le poids 0 et le poids -1 dans $(-3, 2)$, et pour $b_j^\pm - 1$, il y a -1 et -2 . Ces valeurs ne peuvent cependant pas apparaître sur un cône plat \mathbb{R}^4/Γ pour $\Gamma \neq \{\text{Id}\}$. En effet, les valeurs $b_j^\pm - 1 = 0$ et $b^\pm + 1 = -2$ n'apparaissent que si -3 est valeur propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la section du cône, or ce n'est pas possible sur \mathbb{S}^3/Γ car il n'existe pas de fonction linéaire Γ -invariante sur \mathbb{R}^4 . Pour écarter les valeurs $b_j^\pm - 1 = -1$ et $b_j^\pm + 1 = -1$ (qui est la valeur critique pour effectuer certaines intégrations par parties dans la suite), il faut utiliser la forme des solutions. Dans le premier cas, $b_j^\pm = 0$ donne

$$r^{b_j^\pm} d_S \varphi + b_j^\pm r^{b_j^\pm - 1} \varphi dr = d_S \varphi,$$

pour $\Delta_S \varphi = 0$, et donc φ constante, puis $d_S \varphi = 0$. Dans le second cas l'égalité $b_j^\pm = -2$, et donc $b_j^\mp = 0$, donne

$$2r^{b_j^\pm + 2} d_S \varphi + b_j^\mp r^{b_j^\pm + 1} \varphi dr = d_S \varphi,$$

pour $\Delta_S \varphi = 0$, et donc φ constante, puis $d_S \varphi = 0$. □

Les champs de vecteurs posant problème dans les zones annulaires sont alors les champs de vecteurs duaux des 1-formes solutions à croissance linéaires (de poids critique 1) de $\delta_e \delta_e^* \omega = 0$. Elles sont sommes de 1-formes des 3 types suivants :

1. $r^2 \psi$, où ψ est le dual d'un champ de vecteurs de Killing sur \mathbb{S}^3 ,
2. $r dr$, (associés à la valeur propre $\nu = 0$),
3. $2r \varphi dr + r^2 d_S \varphi$, (associés à la valeur propre $\nu = 8$).

Sur un orbifold ou un espace ALE. Comme il n'y a pas de poids critique autre que 1 dans $(-3, 2)$, nous avons le résultat suivant sur un orbifold ALE.

Proposition 4.31. *Soit (N, g_b) un orbifold Ricci-plat ALE. Pour $0 < \beta < 1$, l'opérateur*

$$\delta_{g_b} \delta_{g_b}^* : r_b C_{\beta,*}^{3,\alpha} \rightarrow r_b^{-1} C_\beta^{1,\alpha}$$

est bijectif.

Soit (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein compact. Pour $0 < \beta < 1$, l'opérateur

$$\delta_{g_o} \delta_{g_o}^* : r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha} \rightarrow r_o^{-1} C_\beta^{1,\alpha}$$

est Fredholm et son noyau et son conoyau sont restreints à \mathbf{K}_o l'ensemble des champs de vecteurs de Killing de (M_o, g_o) .

Démonstration. Pour les singularités orbifolds, nous allons dans un premier temps autoriser nos tenseurs à être en $r^{1-\beta}$ pour $0 < \beta < 1$ aux singularités, plutôt que d'être dans des espaces $rC_{\beta,*}^{3,\alpha}$ pour utiliser la théorie des opérateurs elliptiques dans des espaces de Hölder à poids (voir [PR78, Chapter 2]). Considérons tout d'abord un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) et l'opérateur $\delta_{g_o}\delta_{g_o}^* : r_oC_{-\beta}^{3,\alpha} \rightarrow r_o^{-1}C_{-\beta}^{1,\alpha}$. Son noyau est composé des champs de vecteurs de Killing de g_o que l'on notera \mathbf{K}_o car si pour $X \in r_oC_{-\beta}^{3,\alpha}$ on a $\delta_{g_o}\delta_{g_o}^*X = 0$, en intégrant par parties contre X , on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{M_o} \langle \delta_{g_o}\delta_{g_o}^*X, X \rangle dv_o \\ &= \int_{M_o} |\delta_{g_o}^*X|_{g_o}^2 dv_o + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\{r_o=r\}} \delta_{g_o}^*X(n, X) \\ &= \int_{M_o} |\delta_{g_o}^*X|_{g_o}^2 dv_o, \end{aligned}$$

où $n = \frac{\nabla r_o}{|\nabla r_o|}$, car le terme de bord qui est de la forme $\lim_{r \rightarrow 0}(\mathcal{O}(r^{-\beta+1-\beta+3}))$ s'annule. De même, son conoyau est égal au noyau de $\delta_{g_o}\delta_{g_o}^*$ sur $r_o^{-3}C_{\beta}^{1,\alpha}$ qui est aussi réduit à \mathbf{K}_o car il n'y a pas de poids critique entre -3 et 1 .

Sur un orbifold ALE (N, g_b) , supposons qu'un champ de vecteurs $X \in r_b^{1-\beta}C_0^{3,\alpha}$ satisfasse $\delta_{g_b}\delta_{g_b}^*X = 0$. Comme il n'y a pas de poids critique entre -3 et 1 , nous avons en fait $X = \mathcal{O}(r_b)$ quand $r_b \rightarrow 0$ aux points singuliers de (N, g_b) , et $X = \mathcal{O}(r_b^{-3})$ à l'infini. Considérons alors l'intégration par parties suivante

$$\begin{aligned} 0 &= \int_N \langle \delta_{g_b}\delta_{g_b}^*X, X \rangle dv_b \\ &= \int_N |\delta_{g_b}^*X|_{g_b}^2 dv_b - \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\{r_b=\rho\}} \delta_{g_b}^*X(n, X) + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\{r_b=r\}} \delta_{g_b}^*X(n, X) \\ &= \int_N |\delta_{g_b}^*X|_{g_b}^2 dv_b. \end{aligned}$$

En effet, le terme de bord s'annule car c'est la somme de la limite pour $r_b \rightarrow \infty$ d'un $\mathcal{O}(|X|_{g_b}|\nabla X|_{g_b}r_b^3) = \mathcal{O}(r_b^{-4})$ et de la limite quand $r_b \rightarrow 0$ d'un $\mathcal{O}(|X|_{g_b}|\nabla X|_{g_b}r_b^3) = \mathcal{O}(r_b^4)$.

Nous en déduisons donc que $\delta_{g_b}^*X = 0$, puis comme g_b est Ricci-plate, $(\delta_b + \frac{1}{2}d\text{tr}_b)\delta_{g_b}^*X = \nabla_b^*\nabla_b X = 0$, ce qui implique que $\nabla_b X = 0$ par intégration par parties contre X , et finalement, que X est parallèle sur N . Comme X tend vers 0 à l'infini, nous avons $X = 0$. L'opérateur $\delta_{g_b}\delta_{g_b}^* : r_b^{1-\beta}C_0^{3,\alpha} \rightarrow r_b^{-1-\beta}C_0^{1,\alpha}$ est donc injectif.

Le conoyau de l'opérateur autoadjoint $\delta_{g_b} \delta_{g_b}^* : r_b^{1-\beta} C_0^{3,\alpha} \rightarrow r_b^{-1-\beta} C_0^{1,\alpha}$ est égal au noyau de $\delta_{g_b} \delta_{g_b}^*$ sur $r_b^{-3+\beta} C_0^{1,\alpha}$ qui est aussi réduit à $\{0\}$ car il n'y a pas de poids critiques entre $-3+\beta$ et $1-\beta$. L'opérateur $\delta_{g_b} \delta_{g_b}^* : r_b^{1-\beta} C_0^{3,\alpha} \rightarrow r_b^{-1-\beta} C_0^{1,\alpha}$ est donc bijectif.

Passons finalement aux opérateurs

$$\delta_{g_o} \delta_{g_o}^* : r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha} \rightarrow r_o^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}$$

et

$$\delta_{g_b} \delta_{g_b}^* : r_b C_{\beta,*}^{3,\alpha} \rightarrow r_b^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}.$$

Comme les espaces $r_b C_{\beta,*}^{3,\alpha}$ et $r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}$ ne sont respectivement que la somme directe de $r_b C_{\beta}^{3,\alpha}$ et $r_o C_{\beta}^{3,\alpha}$ avec un espace de dimension fini composé des troncatures de champs de vecteurs de linéaires, l'image reste bien fermée et de codimension finie. Nous pouvons être plus précis en remarquant que

$$\delta_{g_o} \delta_{g_o}^* (r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}) = \delta_{g_o} \delta_{g_o}^* (r_o C_{-\beta}^{3,\alpha}) \cap r_o^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}.$$

En effet, nous avons $\delta_{g_o} \delta_{g_o}^* (r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}) \subset \delta_{g_o} \delta_{g_o}^* (r_o C_{-\beta}^{3,\alpha}) \cap r_o^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}$ car $r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha} \subset r_o C_{-\beta}^{3,\alpha}$ et grâce à la proposition 4.28, et réciproquement, si pour $X \in r_o C_{-\beta}^{3,\alpha}$ nous avons $\delta_{g_o} \delta_{g_o}^* X \in r_o^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}$, alors, comme le seul poids critique entre $1-\beta$ et $1+\beta$ est 1 et correspond au noyau linéaire de $\delta_e \delta_e^*$, nous avons $X \in r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}$. De même, nous concluons que

$$\delta_{g_b} \delta_{g_b}^* (r_b C_{\beta,*}^{3,\alpha}) = \delta_{g_b} \delta_{g_b}^* (r_b^{1-\beta} C_0^{3,\alpha}) \cap r_b^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha},$$

et finalement, $\delta_{g_o} \delta_{g_o}^* : r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha} \rightarrow r_o^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}$ est Fredholm avec \mathbf{K}_o comme noyau et conoyau, et $\delta_{g_b} \delta_{g_b}^* : r_b C_{\beta,*}^{3,\alpha} \rightarrow r_b^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}$ est bijectif. \square

2.2 Contrôle de l'inverse de la linéarisation

Lemme 4.32. *Soit $0 < \beta < 1$ et $0 < \alpha < 1$, alors, il existe $C_o > 0$ et $\varepsilon_o > 0$ dépendant de g_o tels que si $\|g - g_o\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(M_o)} \leq \varepsilon_o$ alors l'opérateur*

$$\delta_g \delta_g^* : \mathbf{K}_o^{\perp} \cap r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_o) \rightarrow r_o^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g_o)$$

est injectif et on a plus précisément pour tout champ de vecteurs $X \in \mathbf{K}_o^{\perp}$ sur M_o

$$\|X\|_{r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_o)} \leq C_o \|\delta_g \delta_g^* X\|_{r_o^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g_o)}.$$

Il existe aussi $C_j > 0$ et $\varepsilon_j > 0$ dépendant de g_{b_j} tels que si $\|g - g_{b_j}\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(N_j)} \leq \varepsilon_j$ alors l'opérateur

$$\delta_g \delta_g^* : r_{b_j} C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_{b_j}) \rightarrow r_{b_j}^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g_{b_j})$$

soit injectif et tel que l'on ait pour tout champ de vecteurs X sur N_j ,

$$\|X\|_{r_{b_j} C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_{b_j})} \leq C_j \|\delta_g \delta_g^* X\|_{r_{b_j}^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g_{b_j})}.$$

Démonstration. Remarquons pour commencer que si $X \in r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_o)$, alors l'orthogonalité à \mathbf{K}_o est bien définie et définit un fermé de $r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_o)$. Il suffit alors d'observer que pour une autre métrique g sur M_o et pour tout $X \in r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_o)$, on a le contrôle

$$\|(\delta_{g_o} \delta_{g_o}^* - \delta_g \delta_g^*) X\|_{r_o^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g_o)} \leq C \|g - g_o\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(M_o)} \|X\|_{r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_o)}$$

par la proposition 4.28, et le même argument donne un contrôle similaire pour les métriques g_{b_j} . Nous pouvons alors utiliser le lemme 1.60 pour contrôler les inverses des deux opérateurs et conclure. \square

Ces contrôles se répercutent sur les arbres de singularités avec des paramètres de recollement suffisamment petits. Nous approchons pour cela le noyau \mathbf{K}_o sur notre désingularisation naïve (M, g^D) de la manière suivante. Pour tout $\mathbf{X}_o \in \mathbf{K}_o$, d'après la remarque 4.26, sur un orbifold, il existe une unique décomposition

$$\mathbf{X}_o = \mathbf{X}_{o,*} + \sum_k \chi_{B_o(p_k, \varepsilon_0)} \mathbf{X}_{o,k},$$

où $\sum_k \chi_{B_o(p_k, \varepsilon_0)} = \chi(\varepsilon_0^{-1} r_o)$, telle que $\|\mathbf{X}_o\|_{r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}} = \|\mathbf{X}_{o,*}\|_{r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}} + \sum_k \|\mathbf{X}_{o,k}\|_{r_o C_0^0}$ (toutes les autres décompositions donnant une norme infinie). On définit alors $\tilde{\mathbf{K}}_o$ comme l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur M de la forme

$$\tilde{\mathbf{X}}_{o,t} := \chi_{M_o^{16t}} \mathbf{X}_{o,*} + \sum_k \chi_{A_k(t, \varepsilon_0)} \mathbf{X}_{o,k},$$

pour $\mathbf{X}_o \in \mathbf{K}_o$, où $\chi_{M_o^{16t}}$ est la fonction de troncature de la définition 3.6. Nous avons alors $\tilde{\mathbf{X}}_{o,t} = \mathbf{X}_o$ sur M_o^{16t} .

Remarque 4.33. Par régularité elliptique sur M_o , les normes L^2 , $r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha}$ et $r_D^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}$ sont équivalentes sur l'espace \mathbf{K}_o . Comme la norme C_0^4 des fonctions de coupure est bornée, on en déduit que pour ε et t_{\max} assez petits, les normes L^2 , $r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha}$ et $r_D^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}$ sont équivalentes sur $\tilde{\mathbf{K}}_o$.

Définition 4.34 (Jauge divergence réduite). Nous définissons l'opérateur de *divergence réduite*, $\tilde{\delta}_g := \pi_{\tilde{\mathbf{K}}_o^\perp} \delta_g$, où $\pi_{\tilde{\mathbf{K}}_o^\perp}$ est la projection orthogonale $L^2(g^D)$ sur $\tilde{\mathbf{K}}_o^\perp$. On dira qu'une métrique g_1 est en *jauge divergence réduite* par rapport à une métrique g_2 si $\tilde{\delta}_{g_2} g_1 = 0$.

Remarquons tout d'abord que l'opérateur $\tilde{\delta}_{g^D}$ est en fait très proche de δ_{g^D} pour un arbre suffisamment dégénéré.

Lemme 4.35. *Sur M , les opérateurs $\tilde{\delta}_{g^D}$ et δ_{g^D} sont proches, et plus précisément, il existe $C > 0$ tel que pour tout 2-tenseur $h \in C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)$, on ait,*

$$\left\| (\tilde{\delta}_{g^D} - \delta_{g^D})h \right\|_{r_D^{-1}C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} \leq Ct_{\max} \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)}. \quad (4.18)$$

Démonstration. D'après la remarque 4.33, pour montrer le résultat, il suffit de montrer que la projection L^2 sur $\tilde{\mathbf{K}}_o$ de $\delta_{g^D} h$ est petite. Nous procédons naturellement par intégration par parties. Soit $\tilde{\mathbf{X}}_{o,t} \in \tilde{\mathbf{K}}_o$ pour $\mathbf{X}_o \in \mathbf{K}_o$. Nous avons,

$$\left| \int_M (\delta_{g^D} h)(\tilde{\mathbf{X}}_{o,t}) dv_{g^D} \right| = \left| \int_M \langle h, \delta_{g^D}^*(\tilde{\mathbf{X}}_{o,t}) \rangle_{g^D} dv_{g^D} \right|,$$

or, on a $\delta_{g^D} = \delta_{g_o}$ sur $M_o^{16t} \subset M_o^t$, et donc, comme $\delta_{g_o}^* \mathbf{X}_o = 0$,

$$\begin{aligned} \delta_{g^D}^*(\tilde{\mathbf{X}}_{o,t}) &= \delta_{g_o}^*((\chi_{M_o^{16t}} - 1)\mathbf{X}_{o,*}) + \delta_{g_o}^* \left(\sum_k (\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon_0)} - \chi_{B_o(p_k,\varepsilon_0)}) \mathbf{X}_{o,k} \right) \\ &+ (\delta_{g_o}^* - \delta_{g^D}^*) \left(\sum_k \chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon_0)} \mathbf{X}_{o,k} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nous allons contrôler chacun de ces termes. Sur M_o^{16t} , $\chi_{M_o^{16t}} \mathbf{X}_{o,*}$ est égal à $\mathbf{X}_{o,*}$ sauf sur les anneaux de rayons $2t_k^{\frac{1}{4}}$ et $4t_k^{\frac{1}{4}}$, et de la même manière $\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon_0)} - \chi_{B_o(p_k,\varepsilon_0)}$ est à support dans $\varepsilon_0^{-1}\sqrt{t_k} < r_D < 2\varepsilon_0^{-1}\sqrt{t_k}$, les fonctions de coupure satisfont pour tout $\varepsilon_0^{-1}\sqrt{t_k} < r < \varepsilon_0$ et pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, il existe $C_l > 0$ tel que si l'on note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice d'un ensemble A ,

$$r^l |\nabla^l \chi_{M_o^{16t}}|_{g_o} \leq C_l \mathbb{1}_{\{r < r_D < 2r\}},$$

pour les champs de vecteurs, nous avons

$$r_D^l \left(|\nabla^l \mathbf{X}_{o,*}|_{g_o} + \left| \nabla^l \sum_k \mathbf{X}_{o,k} \right|_{g_o} \right) \leq C_l \|\mathbf{X}_o\|_{r_o C_{\beta,*}^l} r_D,$$

et enfin pour les métriques, nous avons

$$r_D^l \left| \nabla^l (g^D - g_o) \right|_{g_o} \leq C_l \mathbb{1}_{\{r_D < t_k^{\frac{1}{4}}\}} \left(r_D^2 + t_k^2 r_D^{-4} \right),$$

On déduit alors de la proposition 4.16 que l'on a les contrôles suivants sur les termes de (4.19),

$$|\delta_{g_o}^* ((\chi_{M_o^{16t}} - 1) \mathbf{X}_{o,*})|_{g_o} \leq C \|\mathbf{X}_o\|_{r_o C_0^1(g_o)}, \quad (4.20)$$

et que sur l'anneau de rayons $\varepsilon_0^{-1} \sqrt{t_k} < r_D < 2\varepsilon_0^{-1} \sqrt{t_k}$,

$$\left| \delta_{g_o}^* \left(\sum_k (\chi_{A_k(t, \varepsilon_0)} - \chi_{B_o(p_k, \varepsilon_0)}) \mathbf{X}_{o,k} \right) \right| \leq C \mathbb{1}_{\{\varepsilon_0^{-1} \sqrt{t_k} < r_D < 2\varepsilon_0^{-1} \sqrt{t_k}\}} \|\mathbf{X}_o\|_{r_o C_0^1(g_o)}, \quad (4.21)$$

et

$$\left| (\delta_{g_o}^* - \delta_{g^D}^*) \left(\sum_k \chi_{A_k(t, \varepsilon_0)} \mathbf{X}_{o,k} \right) \right| \leq C \mathbb{1}_{\{\varepsilon_0^{-1} \sqrt{t_k} < r_D < t_k^{\frac{1}{4}}\}} t_k^2 r_D^{-4} \|\mathbf{X}_o\|_{r_o C_0^1(g_o)}. \quad (4.22)$$

Enfin, comme nous avons pour $C > 0$ indépendant de t , $\text{Vol}_{g_e} \left(A_e \left(t_k^{\frac{1}{4}}, 2t_k^{\frac{1}{4}} \right) \right) \leq C t_{\max}$, $\text{Vol}_{g_e} \left(A_e \left(\varepsilon_0^{-1} \sqrt{t_k}, 2\varepsilon_0^{-1} \sqrt{t_k} \right) \right) \leq C t_k^2$, et $\left| \int_{\{\varepsilon_0^{-1} \sqrt{t_k} < r_D < t_k^{\frac{1}{4}}\}} t_k^2 r_D^{-4} \cdot r_D^3 dv_{g_e} \right| \leq C t_k^2 \log t_k$, nous pouvons intégrer les contrôles (4.20), (4.21) et (4.22) des différents termes de (4.19), pour obtenir

$$\left| \int_M \langle \delta_{g^D} h, \tilde{\mathbf{X}}_{o,t} \rangle_{g^D} dv_{g^D} \right| \leq C t_{\max} \|h\|_{C_0^0(g^D)} \|\mathbf{X}_o\|_{r_o C_0^0(g_o)}.$$

On en déduit finalement qu'en notant $\tilde{\mathbf{Y}}_{o,t} = \pi_{\mathbf{K}_o} \delta_{g^D} h$, nous avons $\tilde{\delta}_{g^D} h = \pi_{\tilde{\mathbf{K}}_o^\perp} \delta_{g^D} h = \delta_{g^D} h - \tilde{\mathbf{Y}}_{o,t}$ avec

$$\|\tilde{\mathbf{Y}}_{o,t}\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} \leq C t_{\max} \|h\|_{C_0^0(g^D)},$$

par l'équivalence des normes de la remarque 4.33. \square

Remarque 4.36. Nous avons aussi le contrôle en norme $r_D C_{\beta,*}^{l,\alpha}(g^D)$ pour tout l par l'équivalence des normes de la remarque 4.33.

Lemme 4.37. *Soient $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha < 1$ et $(M, g^D = g_t^D)$ une désingularisation naïve d'orbifold d'Einstein compact ou ALE par un arbre de singularités. Alors, il existe $\tau_D > 0$ et $\varepsilon_D > 0$ et $C_D > 0$, ne dépendant que de β et des métriques g_o et g_{b_j} , tels que pour $t_{\max} < \tau_D$, et toute métrique g satisfaisant $\|g - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq \varepsilon_D$, l'opérateur*

$$\tilde{\delta}_g \delta_g^* : \tilde{\mathbf{K}}_o^\perp \cap r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g^D) \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}_o^\perp \cap r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)$$

soit inversible et que l'on ait pour tout champ de vecteurs $X \perp \tilde{\mathbf{K}}_o$ sur M ,

$$\|X\|_{r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g^D)} \leq C_D \|\tilde{\delta}_g \delta_g^* X\|_{r_D^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g^D)}.$$

Démonstration. Soit $0 < \varepsilon < \varepsilon_D^{1/(2-\beta)} < \varepsilon_0$ pour $\varepsilon_D > 0$ et ε que l'on choisira suffisamment petits au cours de la preuve, et supposons que $t_{\max} < \varepsilon^4$ de manière à avoir sur chaque anneau $\mathcal{A}_k(t, \varepsilon)$ entre N_k et N_j ou N_k et M_o (auquel cas, on fixera $T_o = 1$), l'existence d'un difféomorphisme

$$\Phi_k : A_e(\varepsilon^{-1} \sqrt{T_j} \sqrt{t_k}, \varepsilon \sqrt{T_j}) \subset \mathbb{R}^4 / \Gamma_k \rightarrow \mathcal{A}_k(t, \varepsilon) \subset M,$$

tel que pour tout $0 < \beta < 1$, il existe $C > 0$,

$$\left\| \Phi_k^* g^D - g_e \right\|_{C_{\beta}^{2,\alpha}(A_e(\varepsilon^{-1} \sqrt{T_j} \sqrt{t_k}, \varepsilon \sqrt{T_j}))} \leq C \varepsilon^{2-\beta} < C \varepsilon_D. \quad (4.23)$$

Jusqu'à la fin de la preuve, nous prendrons les notations

$$A_k := A_e(\varepsilon^{-1} \sqrt{T_j} \sqrt{t_k}, \varepsilon \sqrt{T_j}) \text{ et } \mathcal{A}_k := \mathcal{A}_k(t, \varepsilon).$$

Nous cherchons donc $\tau_D > 0$ suffisamment petit pour que si $t_{\max} < \tau_D$, il existe $C_D > 0$, ne dépendant que des constantes $\varepsilon_o > 0$, $C_o > 0$, ε_j , $C_j > 0$, ε_e et C_e du lemme 4.32 et de la proposition 4.20, telle qu'on ait pour tout $X \perp \tilde{\mathbf{K}}_o$

$$\|X\|_{r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g^D)} \leq C_D \|\tilde{\delta}_{g^D} \delta_{g^D}^* X\|_{r_D^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g^D)}.$$

D'après l'estimation (4.18), pour t_{\max} suffisamment petit, il suffit d'avoir

$$\|X\|_{r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g^D)} \leq C_D \|\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X\|_{r_D^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g^D)}.$$

Et par les estimations elliptiques du lemme 4.29, il suffit de montrer qu'il existe une constante C'_D telle que

$$\|X\|_{r_D C_{\beta,*}^0(g^D)} \leq C'_D \|\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X\|_{r_D^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g^D)}.$$

Les difféomorphismes $\Phi_k : A_k \rightarrow \mathcal{A}_k$ permettent de ramener la situation sur \mathbb{R}^4 et le rapport des rayons extérieur et intérieur des anneaux A_k est $\varepsilon^2 t_k^{-1/2}$ qui est arbitrairement grand pour t_{\max} arbitrairement petit. D'après la proposition 4.20 et grâce aux contrôles de la proposition 4.28, il existe $\varepsilon_e > 0$ tel que si l'on a $\|\Phi_k^* g^D - g_e\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(A_k)} < \varepsilon_D < \varepsilon_e$, alors, il existe des champs de vecteurs linéaires

X_k du noyau de $\delta_e \delta_e^*$ tels que les champs de vecteurs $\chi_{\mathcal{A}_k} X_k$ dans les anneaux \mathcal{A}_k satisfassent

$$\begin{aligned} \|\Phi_k^* X - X_k\|_{r_e C_0^{3,\alpha}(A(T_j^{1/2} t_k^{1/4}))} &\leq C_e T_j^{\frac{1}{2}} t_k^{\frac{1}{4}} \left(\varepsilon^{-\beta} t_k^{\frac{\beta}{4}} \|\delta_{g_e} \delta_{g_e}^* \Phi_k^* X\|_{r_e^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(A_k)} \right. \\ &\quad \left. + 2\varepsilon^{-1} t_k^{\frac{1}{4}} \|\Phi_k^* X - X_k\|_{r_e C_\beta^{3,\alpha}(A_k)} \right) \\ &\leq 2C_e T_j^{\frac{1}{2}} t_k^{\frac{1}{4}} \left(\varepsilon^{-\beta} t_k^{\frac{\beta}{4}} \left\| (\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X)|_{\mathcal{A}_k} \right\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} \right. \\ &\quad \left. + 2\varepsilon^{-1} t_k^{\frac{1}{4}} \|(X - \chi_{\mathcal{A}_k} X_k)|_{\mathcal{A}_k}\|_{r_D C_\beta^{3,\alpha}(g^D)} \right) \quad (4.24) \end{aligned}$$

sur $A(\sqrt{T_j} t_k^{1/4}) := A_e((1/2)\sqrt{T_j} t_k^{1/4}, 4\sqrt{T_j} t_k^{1/4})$. Considérons alors la décomposition

$$X = X_* + \sum_k \chi_{\mathcal{A}_k} X_k \quad (4.25)$$

pour le reste de la preuve. L'objectif est maintenant de montrer qu'il existe une constante $C_D > 0$ telle que

$$\|X_*\|_{r_D C_\beta^{3,\alpha}(g^D)} + \sum_k \|X_k\|_{r_e C_0^0(g_e)} \leq C_D \|\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)}.$$

Pour ce faire, nous allons nous ramener aux espaces M_o ou N_j où de tels contrôles ont été montrés dans le lemme 4.32.

Sur $M_o^{t/16}$, la métrique g^D est proche de la métrique g_o . Plus précisément, $g^D - g_o$ est à support dans $M_o^{t/16} \setminus M_o^{16t}$, où sur chaque anneau \mathcal{A}_k , $\frac{1}{2} t_k^{1/4} < r_D < 2t_k^{1/4}$, et pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe $C_l > 0$ tel que dans ces zones, on ait

$$t_k^{\frac{l}{4}} |\nabla^l (g^D - g_o)|_{g_o} \leq C_l t_k^{\frac{1}{2}}. \quad (4.26)$$

Comme $M_o^{16t} \subset M_o^t \subset M_o^{t/16}$, il existe une fonction de coupure $\chi_{M_o^{t/16}}$ à support dans $M_o^{t/16}$ telle que $\chi_{M_o^{t/16}} \equiv 1$ sur M_o^t et telle que pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe $C_l > 0$ pour lequel dans chaque \mathcal{A}_k ,

$$t_k^{\frac{l}{4}} |\nabla^l \chi_{M_o^{t/16}}|_{g^D} \leq C_l. \quad (4.27)$$

On définit alors un champ de vecteurs X_o sur M_o par

$$X_o := \chi_{M_o^{t/16}} X_* + \sum_{k \in K_o} \chi_{B_o(p_k, \varepsilon)} X_k,$$

où K_o est l'ensemble des k tels que l'anneau \mathcal{A}_k ait une intersection non vide avec M_o^t .

Par construction, on a donc le contrôle suivant en notant $X_{o,*} := \chi_{M_o^{t/16}} X_*$,

$$\|X_{o,*}\|_{r_o C_\beta^{3,\alpha}(g_o)} \geq \|X_{o,*}\|_{r_o C_\beta^0(g_o)} \geq \|(X_*)|_{M_o^t}\|_{r_D C_\beta^0(g^D)}, \quad (4.28)$$

car on a $X_* = X_{o,*}$ sur M_o^t .

Sur $M_o^{\frac{t}{16}}$, nous avons,

$$\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X = \delta_{g_o} \delta_{g_o}^* X_o + \delta_{g_o} \delta_{g_o}^* (X - X_o) + (\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* - \delta_{g_o} \delta_{g_o}^*) X.$$

Comme les fonctions de coupures sont bornées en norme $C_0^{3,\alpha}(g^D)$ et $C_0^{3,\alpha}(g_o)$ par (4.27), et leurs dérivées à support dans $M_o^{t/16} \setminus M_o^t$, nous avons la borne inférieure suivante grâce à (4.24) et à (4.26) pour $C > 0$ dépendant de la fonction de coupure,

$$\begin{aligned} \left\| (\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X) \Big|_{M_o^{t/16}} \right\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} &\geq \|\delta_{g_o} \delta_{g_o}^* X_o\|_{r_o^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g_o)} \\ &\quad - C \left\| (X_*) \Big|_{M_o^{t/16} \setminus M_o^t} \right\|_{r_D C_\beta^{3,\alpha}(g^D)} \\ &\quad - CC_2 \sum_{k \in K_o} t_k^{\frac{1}{2}} \|X\|_{r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha}} \\ &\geq \|\delta_{g_o} \delta_{g_o}^* X_o\|_{r_o^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g_o)} \\ &\quad - 2CC_e \left(\left\| (\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X) \Big|_{\mathcal{A}_k} \right\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in K_o} \varepsilon^{\beta-1} t_k^{\frac{1-\beta}{4}} \|(X - \chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)} X_k)_{\mathcal{A}_k}\|_{r_D C_\beta^{3,\alpha}(g^D)} \right) \\ &\quad - CC_2 \sum_{k \in K_o} t_k^{\frac{1}{2}} \|X\|_{r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha}}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

car la coupure n'est effectuée que sur X_* , donc l'erreur entre X et X_o sur $M_o^{t/16}$ est de l'ordre de $|\Phi_k^*(X - \chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon)} X_k)|_{g_e}$ sur $A_e((1/2)\sqrt{T_j} t_k^{1/4}, 4\sqrt{T_j} t_k^{1/4})$ qui est estimé dans (4.24), et l'erreur entre g^D et g_o est estimée dans (4.26). Maintenant, comme lorsque $t_{\max} \rightarrow 0$, nous avons

$$\frac{\|\pi_{\mathbf{K}_o} X_o\|_{r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_o)}}{\|X_o\|_{r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_o)}} \rightarrow 0$$

car $X \perp \tilde{\mathbf{K}}_o$, et en particulier, pour t assez petit, nous avons

$$\|X_o\|_{r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_o)} \leq \|\pi_{\mathbf{K}_o} X_o\|_{r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_o)} + \|\pi_{\mathbf{K}_o^\perp} X_o\|_{r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_o)} \leq 2\|\pi_{\mathbf{K}_o^\perp} X_o\|_{r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_o)}.$$

Par le lemme 4.32 appliqué à $\pi_{\mathbf{K}_o^\perp} X_o$ qui satisfait $\delta_{g_o} \delta_{g_o}^* (\pi_{\mathbf{K}_o^\perp} X_o) = \delta_{g_o} \delta_{g_o}^* X_o$, nous avons donc pour t_{\max} suffisamment petit,

$$\|X_o\|_{r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_o)} \leq 2C_o \|\delta_{g_o} \delta_{g_o}^* X_o\|_{r_o^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g_o)}. \quad (4.30)$$

Et donc, grâce à (4.28) et (4.29), pour t_{\max} suffisamment petit, et en notant $C' := CC_2 + 2C_o CC_e \varepsilon^{\beta-1}$ et $\gamma(t_{\max}) := \sum_k t_{\max}^{\frac{1}{2}} + t_{\max}^{\frac{1-\beta}{4}}$, nous avons

$$\begin{aligned} \|(X_*)|_{M_o^t}\|_{r_D C_{\beta}^0(g^D)} + \sum_{k \in K_o} \|X_k\|_{r_e C_{\beta}^0(g_e)} - C' \gamma(t_{\max}) \|X\|_{r_D C_{\beta,*}^0(g^D)} \\ \leq \|X_o\|_{r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_o)} - C' \gamma(t_{\max}) \|X\|_{r_D C_{\beta,*}^0(g^D)} \\ \leq C_o \|\delta_{g_o} \delta_{g_o}^* X_o\|_{r_o^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g_o)} - C' \gamma(t_{\max}) \|X\|_{r_D C_{\beta,*}^0(g^D)} \\ \leq 2C_o (1 + CC_e) \|\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X\|_{r_D^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g^D)}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Où l'on a successivement utilisé (4.28), (4.30) et (4.29).

En effet, sur un orbifold (M_o, g_o) , les champs de vecteurs de la décomposition $X_o = X_{o,*} + \sum_{k \in K_o} \chi_{B_o(p_k, \varepsilon)} X_k$ atteignant l'infimum de la définition de la norme $\|\cdot\|_{r_o C_{\beta,*}^{3,\alpha}}$ sont déterminés par la limite de $r_o^{-1} X_o$ à chacun des points singuliers d'après la remarque 4.26. Ici, l'infimum est donc bien atteint avec les X_k de la décomposition (4.25).

On considère ensuite le champ de vecteurs $X_1 := X - \sum_{k \in K_o} \chi_{\mathcal{A}_k} X_k$ qui satisfait pour une certaine constante $C > 0$,

$$\|\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X_1\|_{r_D^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g^D)} \leq C \left(\|\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X\|_{r_D^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g^D)} + \gamma(t_{\max}) \|X\|_{r_D C_{\beta,*}^0(g^D)} \right) \quad (4.32)$$

grâce au contrôle (4.31) de $\sum_{k \in K_o} \|X_k\|_{r_e C_{\beta}^0(g_e)}$.

Étant donné $j \in K_o$, l'orbifold Ricci-plat ALE (N_j, g_{b_j}) est recollé à M_o et on peut prolonger le champ de vecteurs $X_1 = X_* + \sum_{l \notin K_o} \chi_{\mathcal{A}_l} X_l$ à N_j par

$$X_j := \chi_{N_j^{t/16}} X_* + \sum_{l \in K_j} \chi_{B_j(p_l, \varepsilon)} X_l,$$

où K_j est l'ensemble des $k \neq j$ tels que \mathcal{A}_k ait une intersection non vide avec N_j^t .

Remarque 4.38. Ce que l'on gagne en considérant X_1 plutôt que X , est le fait qu'il n'y ait pas de champ de vecteurs linéaire du noyau de $\delta_e \delta_e^*$ à prolonger à l'infini de N_j . Le champ de vecteurs X_j appartient donc bien à $r_{b_j} C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_{b_j})$.

La métrique $\frac{g^D}{T_j}$ est proche de la métrique g_{b_j} sur $N_j^{t/16}$, et la différence $\frac{g^D}{T_j} - g_{b_j}$

est à support dans $N_j^{t/16} \setminus N_j^{16t}$, où l'on a $\frac{1}{2}\sqrt{T_j}t_k^{\frac{1}{4}} < r_D = \sqrt{T_j}r_{b_j} < 2\sqrt{T_j}t_k^{\frac{1}{4}}$ aux points singuliers et $\frac{1}{2}\sqrt{T_j}t_j^{-\frac{1}{4}} < r_D = \sqrt{T_j}r_{b_j} < 2\sqrt{T_j}t_j^{-\frac{1}{4}}$ à l'infini, et plus précisément, il existe pour tout $l \in \mathbb{N}$, $C_l > 0$ tel qu'on ait

$$t_k^{\frac{l}{4}} \left| \nabla^l \left(\frac{g^D}{T_j} - g_{b_j} \right) \right|_{g_{b_j}} \leq C_l t_k^{\frac{1}{2}}, \quad (4.33)$$

et

$$t_j^{-\frac{l}{4}} \left| \nabla^l \left(\frac{g^D}{T_j} - g_{b_j} \right) \right|_{g_{b_j}} \leq C_l t_j^{\frac{1}{2}}. \quad (4.34)$$

En notant $X_{j,*} := \chi_{N_j^{t/16}} X_*$, nous avons

$$\|X_{j,*}\|_{r_{b_j} C_\beta^{3,\alpha}(g_{b_j})} \geq \|X_{j,*}\|_{r_{b_j} C_\beta^0(g_{b_j})} \geq \|X_*\|_{r_D C_\beta^0(g^D)}, \quad (4.35)$$

et grâce à (4.24) et aux inégalités (4.33) et (4.34), en écrivant

$$\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X_1 = \delta_{g_{b_j}} \delta_{g_{b_j}}^* X_j + \delta_{g_{b_j}} \delta_{g_{b_j}}^* (X_1 - X_j) + \left(\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* - \delta_{g_{b_j}} \delta_{g_{b_j}}^* \right) X_1,$$

nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \left(\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X_1 \right) \Big|_{N_j^{t/16}} \right\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} &\geq \left\| \delta_{g_{b_j}} \delta_{g_{b_j}}^* X_j \right\|_{r_{b_j}^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g_{b_j})} \\ &\quad - 2CC_e \left(\left\| \left(\delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X_1 \right) \Big|_{\mathcal{A}_k} \right\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in K_j} \varepsilon^{\beta-1} t_k^{\frac{1-\beta}{4}} \left\| (X_*)_{\mathcal{A}_k} \right\|_{r_D C_\beta^{3,\alpha}(g^D)} \right) \\ &\quad - CC_2 t_k^{\frac{1}{2}} \|X_1\|_{r_D C_\beta^{3,\alpha}} - CC_2 t_j^{\frac{1}{2}} \|X_1\|_{r_D C_\beta^{3,\alpha}}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

où nous noterons que par définition $\|X_1\|_{r_D C_\beta^{3,\alpha}} \leq \|X_*\|_{r_D C_\beta^{3,\alpha}} + \sum_{k \in K_j} \|X_k\|_{r_e C_0^0(g_e)}$.

Grâce au lemme 4.32, qui nous donne

$$\|X_j\|_{r_j C_\beta^{3,\alpha}(g_{b_j})} \leq C_o \left\| \delta_{g_{b_j}} \delta_{g_{b_j}}^* X_j \right\|_{r_j^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g_{b_j})},$$

et grâce au contrôle (4.32), nous avons alors pour une constante $C > 0$ ne dépendant que des constantes annoncées, le contrôle

$$\begin{aligned} \left\| (X_*) \Big|_{N_j^t} \right\|_{r_D C_\beta^0(g^D)} + \sum_{k \in K_j} \|X_k\|_{r_e C_0^0(g_e)} - C\gamma(t_{\max}) \|X\|_{r_D C_\beta^0(g^D)} \\ \leq C \left\| \delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X \right\|_{r_D^{-1} C_\beta^{1,\alpha}(g^D)}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

similaire à (4.31).

En itérant aux autres orbifolds Ricci-plats ALE, nous obtenons des contrôles analogues à (4.37) sur tous les N_j qui, avec (4.31) sur M_o , donnent le contrôle sur M entier. Il existe donc finalement $C > 0$ dépendant des constantes précédentes, et donc seulement de β , de g_o et des g_{b_j} telle qu'on ait

$$\begin{aligned} \|X_*\|_{r_D C_{\beta}^0(g^D)} + \sum_k \|X_k\|_{r_e C_0^0(g_e)} - C\gamma(t_{\max}) \|X\|_{r_D C_{\beta,*}^0(g^D)} \\ \leq C \left\| \delta_{g^D} \delta_{g^D}^* X \right\|_{r_D^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g^D)} \end{aligned}$$

et donc le résultat énoncé pour $g = g^D$ car $M = M_0^t \cup \bigcup_j N_j^t$ pour t_{\max} suffisamment petit.

Pour passer à une autre métrique g proche de g^D , il suffit d'utiliser la proposition 4.28 pour s'assurer que pour $\|g - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)}$ arbitrairement petit, $\tilde{\delta}_g \delta_g^*$ est arbitrairement proche de $\delta_{g^D} \delta_{g^D}^*$ pour la norme d'opérateur sur $r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g^D)$.

Enfin, notons que $(\tilde{\delta}_{g^D})^* = \delta_{g^D}^* \pi_{\tilde{\mathbf{K}}_o^\perp}$, et donc que $\tilde{\delta}_{g^D} \delta_{g^D}^*$ est autoadjoint sur $\tilde{\mathbf{K}}_o^\perp$. Son injectivité implique donc sa surjectivité sur la variété compacte (M, g^D) . \square

Nous pouvons alors mettre nos métriques en jauge les unes par rapport aux autres grâce à un théorème de point fixe.

Proposition 4.39. *Soient $0 < \beta < 1$ et $(M, g^D) = (M, g_{\varphi,t}^D)$ une désingularisation naïve d'un orbifold d'Einstein compact ou ALE, (M_o, g_o) . Alors, il existe $\varepsilon_D, \tau_D, C_D > 0$ qui ne dépendent que de β et des métriques g_o et g_{b_j} telles que pour $t_{\max} \leq \tau_D$ et pour toute métrique g satisfaisant $\|g - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq \varepsilon_D$, il existe un unique champ de vecteurs $X \perp \tilde{\mathbf{K}}_o$ sur M pour lequel,*

$$\tilde{\delta}_{g^D}(\exp_X^* g) = 0,$$

où \exp_X est le difféomorphisme $\exp_X : x \in M \mapsto \exp_x^{g^D}(X(x))$.

Nous avons de plus, $\|X\|_{r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g^D)} \leq C_D \|\tilde{\delta}_{g^D}(g - g^D)\|_{r_D^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g^D)}$, et donc, il existe $\eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ avec $\lim_0 \eta = 0$ telle qu'on ait

$$\|\exp_X^* g - g\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq \eta\left(\|g - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)}\right).$$

Démonstration. Soit g une métrique sur M , satisfaisant $\|g - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}} \leq \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ que l'on choisira suffisamment petit au cours de la preuve, et définissons l'opérateur $F_g : r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g^D) \rightarrow r_D^{-1} C_{\beta}^{1,\alpha}(g^D)$ qui associe à un champ de vecteurs X

la 1-forme

$$F_g(X) := \tilde{\delta}_{(\exp_{g^D} X)^* g^D} g.$$

L'objectif est alors de trouver X tel que $F_g(X) = 0$, ce qui impliquera bien que $\tilde{\delta}_{g^D}(\exp_{g^D} X)^* g = 0$ car pour tout difféomorphisme φ , nous avons $\varphi_*(\delta_{g^D} \varphi^* g) = \delta_{\varphi_* g^D} g$ (en appliquant φ_* à g^D qui est C^∞ , nous ne perdons pas de régularité). L'application $g \mapsto F_g$ est linéaire, et la linéarisation de F_{g^D} autour de zéro est $\tilde{\delta}_{g^D} \delta_{g^D}^*$ qui est inversible entre les orthogonaux de $\tilde{\mathbf{K}}_o$ d'après le lemme 4.37.

Il reste alors à contrôler les termes non-linéaires dans nos normes, ce qui est une conséquence du comportement de nos normes par rapport aux opérations habituelles, voir la proposition 4.16. Nous pouvons donc mettre nos métriques en jauge par rapport à g^D à l'aide du théorème de point fixe quantitatif énoncé dans le lemme 1.12.

Enfin, remarquons que pour un champ de vecteurs linéaire X_k du noyau de $\delta_e \delta_e^*$, le 2-tenseur $\delta_e^* X_k$ est constant. Cela nous permet de définir, pour toute métrique g sur M , une application continue $\psi_g : r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha} \rightarrow C_{\beta,*}^{2,\alpha}$ qui à un champ de vecteurs X associe le 2-tenseur

$$\psi_g(X) := \exp_X^* g,$$

Cette application est continue car pour tout difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M$, nous avons

$$(\varphi^* g)(x)_{kl} = g(\varphi(x))_{ij} \frac{\partial_i \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial_j \varphi}{\partial x^l}$$

dans des coordonnées locales et donc, pour tout champ de vecteurs $X_* \in r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha}$, le 2-tenseur $\exp_X^* g - g$ est bien arbitrairement petit en norme $C_{\beta,*}^{2,\alpha}$. Pour la partie constante il suffit de remarquer que pour un champ de vecteurs linéaires X_k , le 2-tenseur $\exp_{X_k}^* g_e$ est constant et $|\exp_{X_k}^* g_e|_{g_e} \leq C \|X_k\|_{r_e C^0}$, et plus généralement, que pour H_k constant $\exp_{X_k}^* H_k$ est aussi constant avec un contrôle similaire. \square

2.3 Métriques d'Einstein en jauge divergence réduite

L'intérêt de notre mise en jauge divergence réduite est de nous permettre d'utiliser l'opérateur suivant dont la linéarisation est elliptique contrairement à E . Définissons

$$\Phi_{g^D}(g) := E(g) + \delta_g^* \tilde{\delta}_{g^D} g = \text{Ric}(g) - \frac{\mathbf{R}(g)}{2} g + \frac{\bar{\mathbf{R}}(g)}{4} g + \delta_g^* \tilde{\delta}_{g^D} g.$$

On remarque que si $E(g) = 0$, et $\tilde{\delta}_{g^D} g = 0$, alors $\Phi_{g^D}(g) = 0$. Réciproquement, si $\Phi_{g^D}(g) = 0$, alors $E(g) = 0$, et $\tilde{\delta}_{g^D} g = 0$. En effet, $E(g)$ est à divergence nulle par

l'identité de Bianchi, et on a donc $\tilde{\delta}_g \Phi_{g^D}(g) = (\tilde{\delta}_g \delta_g^*) \tilde{\delta}_{g^D} g$, or pour g proche de g^D , $(\tilde{\delta}_g \delta_g^*)$ est inversible sur l'image de $\tilde{\delta}_{g^D}$ par le lemme 4.37, et donc $\tilde{\delta}_{g^D} g = 0$. Le noyau de Φ_{g^D} décrit donc exactement les métriques d'Einstein en jauge divergence réduite au voisinage de $g^D = g_{\varphi,t}^D$.

Corollaire 4.40. *Soient $D_0, v_0 > 0$, $l \in \mathbb{N}$, et $\beta = \beta(v_0, D_0) > 0$ obtenu dans le corollaire 4.5. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, D_0, v_0, l) > 0$ tel que si (M, g^ε) est une variété d'Einstein satisfaisant*

- *le volume est minoré par $v_0 > 0$,*
- *le diamètre est majoré par D_0 ,*
- *la courbure de Ricci est bornée $|\text{Ric}| \leq 3$.*

et telle que pour un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) ,

$$d_{GH}((M, g^\varepsilon), (M_o, g_o)) \leq \delta,$$

alors, il existe une désingularisation naïve (M, g^D) de (M_o, g_o) par un arbre de singularités, et un difféomorphisme $\psi : M \rightarrow M$ tels que

$$\|\psi^* g^\varepsilon - g^D\|_{C_{\beta, *}(g^D)} \leq \varepsilon,$$

et

$$\tilde{\delta}_{g^D}(\psi^* g^\varepsilon) = 0.$$

En particulier, on a

$$\Phi_{g^D}(\psi^* g^\varepsilon) = 0.$$

3 Résolution de l'équation d'Einstein modulo obstructions

Nous montrons maintenant qu'il est toujours possible de produire des métriques d'Einstein modulo certaines obstructions (le conoyau de la linéarisation de l'opérateur d'Einstein) dans nos espaces à poids. Le résultat principal est le théorème 4.51 qui nous permet de perturber tout recollement naïf g^D en une métrique d'Einstein et nous assure en particulier d'après les résultats du chapitre 3 précédent que toute métrique d'Einstein proche d'un orbifold d'Einstein au sens de Gromov-Hausdorff est une petite perturbation dans nos normes à poids d'une désingularisation naïve g^D .

Nous avons vu dans le corollaire 4.40 qu'à un difféomorphisme-près, toute métrique d'Einstein g proche de (M_o, g_o) au sens de Gromov-Hausdorff est une solution de $\Phi_{g^D}(g) := E(g) + \delta_g^* \tilde{\delta}_{g^D} g = 0$.

Afin d'étudier cette équation, nous étudions tout d'abord naturellement sa linéarisation sur les déformations préservant infinitésimalement le volume, c'est-à-dire que les 2-tenseurs h satisfaisant $\int_M \text{tr}_g h \, dv_g = 0$. Grâce au lemme 1.8, cela donne la formule suivante pour la dérivée en g^D ,

$$\begin{aligned} \bar{P}_{g^D}(h) := d_{g^D} \Phi_{g^D}(h) = & \frac{1}{2} \left(\nabla_{g^D}^* \nabla_{g^D} h - 2\mathring{R}_{g^D}(h) \right. \\ & - 2\delta_{g^D}^* \delta_{g^D} h + 2\tilde{\delta}_{g^D}^* \tilde{\delta}_{g^D} h - (\delta_{g^D} \delta_{g^D} h) g^D \\ & + (\Delta_{g^D} \text{tr}_{g^D} h) g^D - \nabla_{g^D}^2 \text{tr}_{g^D} h \\ & + \text{Ric}_{g^D} \circ h + h \circ \text{Ric}_{g^D} - \text{R}_{g^D} h + \langle \text{Ric}_{g^D}, h \rangle_{g^D} g^D \\ & \left. + \frac{1}{2} \bar{R}(g) h - \frac{1}{2 \text{Vol}(g)} \int_M \left\langle \text{Ric}(g^D) - \frac{\text{R}(g^D)}{2}, h \right\rangle_{g^D} dv_{g^D} \right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

en dimension 4. Si g^D était une métrique d'Einstein et h est un 2-tenseur sans trace et à divergence nulle, l'opérateur \bar{P}_{g^D} se réduirait à

$$P_{g^D} := \frac{1}{2} \nabla_{g^D}^* \nabla_{g^D} - \mathring{R}_{g^D},$$

qui est bien plus simple à étudier. Comme g^D est presque d'Einstein, nous étudions principalement l'opérateur P_{g^D} et nous nous y ramènerons par approximation quand nous chercherons des informations particulières sur \bar{P}_{g^D} .

3.1 Noyau et conoyau de la linéarisation sur les espaces modèles

Poids critiques pour $P_e = \frac{1}{2} \nabla_e^* \nabla_e$ sur $(\mathbb{R}^4/\Gamma, g_e)$ et contraintes de jauge. Comme décrit dans la preuve de la proposition 4.19, les éléments du noyau de P_e sur \mathbb{R}^4/Γ sont des sommes de 2-tenseurs homogènes dont les coefficients dans une base orthonormée de \mathbb{R}^4 sont homogènes d'ordre k ou $-2 - k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Cependant, certains de ces tenseurs ne pourront pas apparaître dans nos développements car ils ne sont pas en jauge divergence ou à trace nulle d'après le lemme 2.50. Il n'y a donc pas de poids critique autre que 0 entre -4 et 2.

Noyau de l'opérateur P . Décrivons maintenant le noyau L^2 de P sur nos espaces, cela nous servira aussi dans les parties suivantes.

Lemme 4.41 (Noyau L^2 et décroissant à l'infini de l'opérateur d'Einstein). *Soit (N, g_b) un orbifold Ricci-plat ALE, et définissons $P_b := \frac{1}{2}\nabla_b^*\nabla_b - \mathring{R}_b$, et $\mathbf{O}(g_b)$, le noyau L^2 de P_b . Alors, pour tout $0 < \beta < 1$, le noyau de P_b sur $C_{\beta,*}^{2,\alpha}$ coïncide avec $\mathbf{O}(g_b)$.*

Les éléments $\mathbf{O}(g_b)$ décroissent au moins en r_b^{-4} à l'infini, et pour tout $\mathbf{o}_b \in \mathbf{O}(g_b)$, on a le développement suivant dans des coordonnées à l'infini,

$$\mathbf{o}_b = O^4 + \mathcal{O}(r_b^{-5}),$$

avec O^4 un 2-tenseur harmonique homogène décroissant en r_b^{-4} .

Soit aussi (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein compact. Le noyau L^2 de P_o , noté $\mathbf{O}(g_o)$, coïncide aussi avec le noyau de P_o sur $C_{\beta,}^{2,\alpha}$ pour tout $0 < \beta < 1$.*

Démonstration. Prouvons le résultat pour un orbifold ALE, (N, g_b) . Remarquons que pour la métrique euclidienne g_e , l'opérateur P_e satisfait une estimations elliptique sur les anneaux compacts : il existe $C > 0$ tel que pour tout 2-tenseur symétrique lisse h , on ait

$$\|h\|_{W^{2,2}(A_e(1,2))} \leq C \left(\|h\|_{L^2(A_e(1/2,4))} + \|P_e h\|_{L^2(A_e(1/2,4))} \right).$$

Maintenant sur (N, g_b) , pour ρ assez grand, $\frac{g_b}{\rho^2}$ sur l'anneau de rayons $((1/2)\rho, 4\rho)$ est proche de g_e sur l'anneau de rayons $(1/2, 4)$, cela implique donc que comme $P_{\frac{g_b}{\rho^2}}$ est proche de $P_e := \frac{1}{2}\nabla_e^*\nabla_e$, et l'on a donc

$$\|h\|_{W^{2,2}(A(\rho,2\rho),\frac{g_b}{\rho^2})} \leq 2C \left(\|h\|_{L^2(A((1/2)\rho,4\rho),\frac{g_b}{\rho^2})} + \|P_{\frac{g_b}{\rho^2}} h\|_{L^2(A((1/2)\rho,4\rho),\frac{g_b}{\rho^2})} \right),$$

puis par régularité elliptique entre espaces de Sobolev

$$\|h\|_{W^{4,2}(A(\rho,2\rho),\frac{g_b}{\rho^2})} \leq 2C \left(\|h\|_{L^2(A((1/2)\rho,4\rho),\frac{g_b}{\rho^2})} + \|P_{\frac{g_b}{\rho^2}} h\|_{W^{2,2}(A((1/2)\rho,4\rho),\frac{g_b}{\rho^2})} \right),$$

et comme $W^{4,2}(A((1/2)\rho, 4\rho), \frac{g_b}{\rho^2})$ s'injecte continûment dans C^0 , nous avons

$$|h|_{\frac{g_b}{\rho^2}}(x) \leq C \|h\|_{W^{4,2}(A(\rho,2\rho),\frac{g_b}{\rho^2})} \leq 2C^2 \left(\|h\|_{L^2(A((1/2)\rho,4\rho),\frac{g_b}{\rho^2})} + \|P_{\frac{g_b}{\rho^2}} h\|_{W^{2,2}(A((1/2)\rho,4\rho),\frac{g_b}{\rho^2})} \right)$$

pour x sur l'image de la sphère de rayon $3\rho/2$. Or, la norme L^2 de 2-tenseur est

invariante par changement d'échelle en dimension 4, et donc,

$$|h|_{g_b}(x) = \frac{1}{\rho^2} |h|_{\frac{g_b}{\rho^2}}(x) \leq \frac{2C^2}{\rho^2} \left(\|h\|_{L^2((A((1/2)\rho, 4\rho), g_b))} + \|P_{\frac{g_b}{\rho^2}} h\|_{W^{2,2}((A((1/2)\rho, 4\rho), \frac{g_b}{\rho^2}))} \right). \quad (4.39)$$

Dans le cas de $\mathbf{o} \in \mathbf{O}(g_b)$, comme $P_b \mathbf{o} = 0$, et $\mathbf{o} \in L^2$, et donc $\|\mathbf{o}\|_{L^2((A((1/2)\rho, 4\rho), g_b))} \rightarrow 0$ quand $\rho \rightarrow +\infty$, on déduit de (4.39) que $r_b^2 \mathbf{o} \rightarrow 0$. Un tel 2-tenseur h est en fait nécessairement à divergence et trace nulle. En effet, nous avons

$$\delta_{g_b} P_{g_b} = \frac{1}{2} \nabla_{g_b}^* \nabla_{g_b} \delta_{g_b},$$

et

$$\mathrm{tr}_{g_b} P_{g_b} = \frac{1}{2} \nabla_{g_b}^* \nabla_{g_b} \mathrm{tr}_{g_b}.$$

Ainsi, si $P_{g_b} h = 0$ et $h = \mathcal{O}(r_b^{-\delta})$ pour un $\delta > 0$, alors $\delta_{g_b} h = 0$, et $\mathrm{tr}_{g_b} h = 0$ par le principe du maximum. On en déduit du lemme 2.50 que h décroît au moins en ρ^{-4} et que son terme principal est un 2-tenseur harmonique.

De la même manière au voisinage d'une singularité d'un orbifold (M_o, g_o) ou d'un orbifold Ricci-plat ALE (N, g_b) , comme il n'y a pas de 2-tenseur harmonique à croissance linéaire du fait de l'action du groupe non-trivial, on obtient qu'un élément du noyau L^2 a un développement

$$\mathbf{o} = O_0 + O_2 + \mathcal{O}(r_b^3),$$

où O_0 et O_2 sont des 2-tenseurs homogènes harmoniques en r_o^0 et r_o^2 respectivement. \square

Estimations sur les inverses. Comme nous l'avons déjà montré pour l'opérateur $\delta\delta^*$ dans le lemme 4.32, les opérateurs P_{g_o} et P_{g_b} sont injectifs sur l'orthogonal de leurs noyaux respectifs.

Lemme 4.42. *Soient (N, g_b) un orbifold Ricci-plat ALE et (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein, et $0 < \beta < 1$.*

Alors, les opérateurs

$$P_b : \mathbf{O}(g_b)^\perp \cap C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_b) \rightarrow r_b^{-2} C_\beta^\alpha(g_b),$$

et

$$P_o : \mathbf{O}(g_o)^\perp \cap C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_o) \rightarrow r_o^{-2} C_\beta^\alpha(g_o)$$

sont injectifs et il existe $C_o > 0$ et $C_b > 0$, tels que l'on ait pour tous 2-tenseurs

$h_b \perp \mathbf{O}(g_b)$ sur N et $h_o \perp \mathbf{O}(g_o)$ sur M_o ,

$$C_b^{-1} \|P_b h_b\|_{r_b^{-2} C_\beta^\alpha(g_b)} \|h_b\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_b)} \leq C_b \|P_b h_b\|_{r_b^{-2} C_\beta^\alpha(g_b)}, \quad (4.40)$$

et

$$C_o^{-1} \|P_o h_o\|_{r_o^{-2} C_\beta^\alpha(g_o)} \leq \|h_o\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_o)} \leq C_o \|P_o h_o\|_{r_o^{-2} C_\beta^\alpha(g_o)}. \quad (4.41)$$

De plus, leurs conoyaux respectifs sont $\mathbf{O}(g_b)$ et $\mathbf{O}(g_o)$.

Démonstration. Les opérateurs elliptiques et bornées entre espaces à poids

$$P_o : C_{-\beta}^{2,\alpha}(g_o) \rightarrow r_o^{-2} C_{-\beta}^\alpha(g_o),$$

et

$$P_b : r_b^{-\beta} C_0^{2,\alpha}(g_b) \rightarrow r_b^{-2-\beta} C_0^\alpha(g_b)$$

sont Fredholm pour $0 < \beta < 1$ car on évite ainsi les poids critiques possibles proches de zéro : -2 et 1 . Étudions leurs noyaux et conoyaux.

Intéressons nous tout d'abord au cas d'un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) et remarquons que $C_{-\beta}^{2,\alpha}(g_o) \subset L^2(g_o)$, et $\mathbf{O}(g_o) \subset C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_o) \subset C_{-\beta}^{2,\alpha}(g_o)$ donc le noyau de $P_o : C_{-\beta}^{2,\alpha}(g_o) \rightarrow r_o^{-2} C_{-\beta}^\alpha(g_o)$ est réduit à $\mathbf{O}(g_o)$. Comme P_o est auto adjoint et que l'on est strictement entre deux poids critiques, son conoyau est le noyau de P_o sur $r_o^{-2} C_\beta^\alpha(g_o) \subset L^2(g_o)$ qui est lui aussi réduit à $\mathbf{O}(g_o)$.

De même, le conoyau de $P_b : r_b^{-\beta} C_0^{2,\alpha}(g_b) \rightarrow r_b^{-2-\beta} C_0^\alpha(g_b)$ est le noyau de P_b sur $r_b^{-2+\beta} C_0^\alpha(g_b)$ qui est réduit à $\mathbf{O}(g_b)$.

Pour en déduire les noyaux des opérateurs

$$P_o : C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_o) \rightarrow r_o^{-2} C_\beta^\alpha(g_o),$$

et

$$P_b : C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_b) \rightarrow r_b^{-2} C_\beta^\alpha(g_b),$$

il suffit alors de remarquer que comme le seul poids critique pour P entre $-\beta$ et β est 0 , le noyau de $P_o : C_{-\beta}^{2,\alpha}(g_o) \rightarrow r_o^{-2} C_{-\beta}^\alpha(g_o)$ appartient à $C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_o)$ et celui de $P_b : r_b^{-\beta} C_0^{2,\alpha}(g_b) \rightarrow r_b^{-2-\beta} C_0^\alpha(g_b)$ à $C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_b)$. Pour les conoyaux, comme dans la fin de la preuve de la proposition 4.31, on utilise le fait que

$$P_o(C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_o)) = P_o(C_{-\beta}^{2,\alpha}(g_o)) \cap r_o^{-2} C_\beta^\alpha(g_o),$$

et

$$P_b(C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_b)) = P_b(r_b^{-\beta} C_0^{2,\alpha}(g_b)) \cap r_b^{-2} C_\beta^\alpha(g_b).$$

□

Approximation des noyaux et conoyaux sur une désingularisation naïve.

Nous souhaitons résoudre l'équation $E(g) = 0$ pour une métrique g proche de g^D modulo le noyau et le conoyau de la linéarisation de l'opérateur d'Einstein. Nous utiliserons plutôt des noyaux et conoyaux approchés composés des déformations infinitésimales d'Einstein de chaque espace modèle tronquées sur l'arbre de singularités.

Soit $\mathbf{o}_o \in \mathbf{O}(g_o)$ et $\mathbf{o}_j \in \mathbf{O}(g_{b_j})$, et $\mathbf{o}_o = \mathbf{o}_{o,*} + \sum_k \chi_{B_o(p_k, \varepsilon)} \mathbf{o}_{o,k}$ et $\mathbf{o}_j = \mathbf{o}_{j,*} + \sum_k \chi_{B_j(p_k, \varepsilon)} \mathbf{o}_{j,k}$ leurs décompositions respectives en un 2-tenseur de $C_{\beta}^{2,\alpha}$ et des 2-tenseurs constants approchés au voisinages des points singuliers. On définit alors sur M les 2-tenseurs suivants

$$\tilde{\mathbf{o}}_{o,t} := \chi_{M_o^{16t}} \mathbf{o}_{o,*} + \sum_k \chi_{\mathcal{A}_k(t, \varepsilon)} \mathbf{o}_{o,k},$$

et

$$\tilde{\mathbf{o}}_{j,t} := \chi_{N_j^{16t}} \mathbf{o}_{j,*} + \sum_k \chi_{\mathcal{A}_k(t, \varepsilon)} \mathbf{o}_{j,k}.$$

Remarque 4.43. Nous avons $\tilde{\mathbf{o}}_{o,t} = \mathbf{o}_o$ sur M_o^{16t} , et $\tilde{\mathbf{o}}_{j,t} = \mathbf{o}_j$ sur N_j^{16t} .

Définition 4.44 (Espace des obstructions tronquées). Soit $(M, g^D = g_{\varphi,t}^D)$ une désingularisation naïve d'un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) .

Sur M , nous noterons

$$\tilde{\mathbf{O}}(g^D) := \left\{ \tilde{\mathbf{o}}_{o,t} + \sum_j \tilde{\mathbf{o}}_{j,t}, \mathbf{o}_o \in \mathbf{O}(g_o), \mathbf{o}_j \in \mathbf{O}(g_{b_j}) \right\},$$

l'espace des *obstructions tronquées*.

Remarque 4.45. Pour $0 < \beta < 2$, par régularité elliptique pour les éléments de $\mathbf{O}(g_o)$ et des $\mathbf{O}(g_{b_j})$ et le contrôle C_0^4 des fonctions de coupe, on a

$$\left\| \tilde{\mathbf{o}}_{o,t} + \sum_j T_j \tilde{\mathbf{o}}_{j,t} \right\|_{C^0(g^D)} \approx \left\| \tilde{\mathbf{o}}_{o,t} + \sum_j T_j \tilde{\mathbf{o}}_{j,t} \right\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \approx \sup \left(\|\mathbf{o}_o\|_{C^0(g_o)}, \|\mathbf{o}_j\|_{C^0(g_{b_j})} \right),$$

et

$$\left\| \tilde{\mathbf{o}}_{o,t} + \sum_j \tilde{\mathbf{o}}_{j,t} \right\|_{L^2(g^D)} \approx \left\| \tilde{\mathbf{o}}_{o,t} + \sum_j \tilde{\mathbf{o}}_{j,t} \right\|_{r_D^{-2} C_{\beta}^{\alpha}(g^D)} \approx \sup \left(\|\mathbf{o}_o\|_{L^2(g_o)}, \|\mathbf{o}_j\|_{L^2(g_{b_j})} \right).$$

Nous avons vu dans le corollaire 4.40 que pour toute métrique g satisfaisant $E(g) = 0$ proche de (M_o, g_o) au sens de Gromov-Hausdorff, il existe une désingu-

larisation naïve g^D et un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M$ tel qu'on ait

$$\Phi_{g^D}(\varphi^*g) := E(\varphi^*g) + \delta_{\varphi^*g}^* \tilde{\delta}_{g^D} \varphi^*g = 0.$$

Nous montrons que l'on peut perturber $g^D + v$ orthogonalement à $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ pour des paramètres t et $v \in \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ suffisamment petits en une métrique $\hat{g}_v = \hat{g}_{\varphi,t,v}$ qui aura les mêmes paramètres de jauge (qui appartient à un même supplémentaire du noyau) mais sera solution de :

$$\Phi_{g^D}(\hat{g}) \in \tilde{\mathbf{O}}(g^D).$$

Contrôle de l'inverse de la linéarisation. Nous pouvons tout d'abord montrer que la linéarisation est inversible et que l'on peut contrôler son inverse indépendamment des échelles de recollement à l'aide du lemme 4.42.

Montrons tout d'abord que l'opérateur $\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} P_{g^D}$ est très proche de P_{g^D} pour un arbre suffisamment dégénéré.

Lemme 4.46. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout 2-tenseur $h \in C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)$, on ait*

$$\left\| \left(\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} P_{g^D} - P_{g^D} \right) h \right\|_{r_D^{-2} C_{\beta}^{\alpha}(g^D)} \leq C t_{\max}^{\frac{1}{2}} \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)}.$$

Remarque 4.47. Ici, la constante C ne dépend que des constantes C_o et C_{b_j} du lemme 4.42.

Démonstration. La preuve est similaire à celle de l'estimation (4.18). D'après l'équivalence des normes de la remarque 4.45, il suffit de contrôler la norme $L^2(g^D)$ de la projection sur $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$.

Sur M_o , pour $\mathbf{o}_o \in \mathbf{O}(g_o)$, on a $P_{g_o}(\mathbf{o}_o) = 0$. On peut alors intégrer par parties en utilisant le fait que P_{g^D} est auto-adjoint

$$\left| \int_M \langle P_{g^D} h, \tilde{\mathbf{o}}_{o,t} \rangle_{g^D} dv_{g^D} \right| = \left| \int_M \langle h, P_{g^D}(\tilde{\mathbf{o}}_{o,t}) \rangle_{g^D} dv_{g^D} \right|,$$

et on peut décomposer, comme $g^D = g_o$ sur M_o^{16t}

$$\begin{aligned} P_{g^D}(\tilde{\mathbf{o}}_{o,t}) &= P_{g_o} \mathbf{o}_o + P_{g_o}((\chi_{M_o^{16t}} - 1) \mathbf{o}_{o,*}) \\ &\quad + P_{g_o} \left(\sum_k (\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon_0)} - \chi_{B_o(p_k,\varepsilon_0)}) \mathbf{o}_{o,k} \right) \\ &\quad + (P_{g_o} - P_{g^D}) \left(\sum_k \chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon_0)} \mathbf{o}_{o,k} \right) \end{aligned} \tag{4.42}$$

pour obtenir, grâce aux contrôles des χ_{M_r} et à la remarque 4.45 pour $r > 0$ les estimations suivantes (comparer avec la preuve de (4.18))

$$|P_{g_o}((\chi_{M_o^{16t}} - 1)\mathbf{o}_{o,*})|_{g_o} \leq C \|\mathbf{o}_o\|_{L^2(g_o)} \mathbb{1}_{\{2t^{\frac{1}{4}} < r_D < 4t^{\frac{1}{4}}\}} t_k^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.43)$$

$$\left| P_{g_o} \left(\sum_k (\chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon_0)} - \chi_{B_o(p_k,\varepsilon_0)}) \mathbf{o}_{o,k} \right) \right| \leq C \|\mathbf{o}_o\|_{L^2(g_o)} \mathbb{1}_{\{\varepsilon_0^{-1} t_k^{\frac{1}{2}} < r_D < 2\varepsilon_0^{-1} t_k^{\frac{1}{2}}\}} t_k^{-1}, \quad (4.44)$$

et

$$\left| (P_{g_o} - P_{g^D}) \left(\sum_k \chi_{\mathcal{A}_k(t,\varepsilon_0)} \mathbf{o}_{o,k} \right) \right| \leq C \|\mathbf{o}_o\|_{L^2(g_o)} \mathbb{1}_{\{\varepsilon_0^{-1} t_k^{\frac{1}{2}} < r_D < 2t_k^{\frac{1}{4}}\}} t_k^2 r_D^{-6}. \quad (4.45)$$

Comme nous avons pour $C > 0$ indépendante de t $\text{Vol}_{g_e} \left(\left\{ 2t_k^{\frac{1}{4}} < r^D < 4t_k^{\frac{1}{4}} \right\} \right) \leq C t_k$, $\text{Vol}_{g_e} \left(\left\{ \varepsilon_0^{-1} t_k^{\frac{1}{2}} < r_D < 2\varepsilon_0^{-1} t_k^{\frac{1}{2}} \right\} \right) \leq C \varepsilon_0^{-4} t_k^2$, et $\int_{\{\varepsilon_0^{-1} t_k^{\frac{1}{2}} < r_D < 2t_k^{\frac{1}{4}}\}} t_k^2 r_D^{-6} \cdot r_D^3 dv_{g_e} \leq C t_{\max}$, on en déduit en intégrant les contrôles (4.43), (4.44) et (4.45) des différents termes de (4.42) que l'on a

$$\left| \int_M \langle P_{g^D} h, \tilde{\mathbf{o}}_{o,t} \rangle_{g^D} dv_{g^D} \right| \leq C t_k^{\frac{1}{2}} \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \|\mathbf{o}_o\|_{L^2(g_o)}. \quad (4.46)$$

De même, pour les bulles N_j , on a pour $\mathbf{o}_j \in \mathbf{O}(g_{b_j})$ par invariance conforme de la norme L^2 des 2-tenseurs en dimension 4 et comme $P_{\frac{g}{t}} = tP_g$ pour toute métrique g et tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} \int_M \langle P_{g^D} h, \chi \mathbf{o}_j \rangle_{g^D} dv_{g^D} &= \int_M \left\langle \frac{h}{T_j}, P_{\frac{g^D}{T_j}} \tilde{\mathbf{o}}_j \right\rangle_{\frac{g^D}{T_j}} dv_{\frac{g^D}{T_j}} \\ &= \int_M \left\langle \frac{h}{T_j}, P_{g_{b_j}} \tilde{\mathbf{o}}_j \right\rangle_{g_{b_j}} dv_{g_{b_j}} \end{aligned}$$

le contrôle aux points singuliers est le même et à l'infini nous avons

$$P_{g_b}(\tilde{\mathbf{o}}_{j,t}) = P_{g_{b_j}} \mathbf{o}_j + P_{g_{b_j}}((\chi_{N_j^{16t}} - 1)\mathbf{o}_{j,*}),$$

et donc, comme $\mathbf{o}_j = \mathcal{O}(r_{b_j}^{-4})$, nous avons

$$\left| P_{g^D}(\tilde{\mathbf{o}}_{j,t}) \right|_{g_{b_j}} \leq C \|\mathbf{o}_j\|_{L^2(g_{b_j})} \mathbb{1}_{\{\frac{1}{2}t_j^{-1/4} < r_{b_j} < t_j^{-1/4}\}} r_{b_j}^{-6} \approx C \|\mathbf{o}_j\|_{L^2(g_{b_j})} \mathbb{1}_{\{\frac{1}{2}t_j^{-1/4} < r_{b_j} < t_j^{-1/4}\}} t_j^{\frac{3}{2}},$$

et donc comme le volume de l'anneau de rayons $\frac{1}{2}T_j^{\frac{1}{2}}t_j^{-\frac{1}{4}}$ et $T_j^{\frac{1}{2}}t_j^{-\frac{1}{4}}$ est comparable

à $T_j^2 t_j^{-1}$ et $\left| \chi_{N_j^{16t}} \frac{h}{T_j} \right|_{g_{b_j}} \leq \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)}$ ponctuellement, nous avons

$$\left| \int_M \langle P_{g^D} h, \tilde{\mathbf{O}}_{j,t} \rangle_{g^D} dv_{g^D} \right| \leq C t_{\max}^{\frac{1}{2}} \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \|\mathbf{O}_j\|_{L^2(g_{b_j})}, \quad (4.47)$$

et finalement,

$$\left\| \left(\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} P_g^D - P_g^D \right) h \right\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} \leq C t_{\max}^{\frac{1}{2}} \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)}.$$

□

Remarque 4.48. Ici, les constantes ne dépendent que des constantes C_o et C_{b_j} du lemme 4.42 et C_e, ε_e de la proposition 4.19.

Lemme 4.49. *Soient $0 < \beta < 1$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$ et (M, g^D) une désingularisation naïve d'un orbifold d'Einstein compact ou ALE par un arbre de singularités. Alors, il existe $\tau_D > 0$, $\varepsilon_D > 0$ et $C_D > 0$ ne dépendant que de β , et des métriques g_o et g_{b_j} tels que pour $t_{\max} < \tau_D$ et pour toute métrique g telle que $\|g - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq \varepsilon_D$, l'opérateur*

$$\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} P_g : \tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp \cap C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D) \rightarrow \tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp \cap r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D),$$

où $\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp}$ est la projection orthogonale pour g^D sur $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp$, soit inversible et tel que l'on ait pour tout 2-tenseur $h \perp \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ sur M ,

$$\|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq C_D \|\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} P_g h\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)}.$$

Remarque 4.50. Ici, les constantes de l'énoncé ne dépendent que des constantes C_o et C_{b_j} du lemme 4.42 et C_e, ε_e de la proposition 4.19.

Démonstration. La preuve est similaire à celle du lemme 4.37. L'idée est encore une fois de prolonger les 2-tenseurs sur les espaces modèles et d'en déduire le contrôle sur l'arbre de singularités entier.

Soit $0 < \varepsilon < \varepsilon_D^{1/(2-\beta)} < \varepsilon_0$ pour $\varepsilon_D > 0$ que l'on choisira suffisamment petit au cours de la preuve. Supposons que $t_{\max} < \varepsilon^4$ de manière à avoir sur chaque anneau $\mathcal{A}_k := \mathcal{A}_k(t, \varepsilon)$ entre N_k et N_j , l'existence d'un difféomorphisme

$$\Phi_k : A_e(\varepsilon^{-1} \sqrt{T_j} \sqrt{t_k}, \varepsilon \sqrt{T_j}) \subset \mathbb{R}^4 / \Gamma_k \rightarrow \mathcal{A}_k \subset M,$$

tel que tout $0 < \beta < 1$, il existe $C > 0$,

$$\left\| \Phi_k^* g^D - g_e \right\|_{C_\beta^{2,\alpha}(A_e(\varepsilon^{-1}\sqrt{T_j}\sqrt{t_k}, \varepsilon\sqrt{T_j}))} \leq C\varepsilon^{2-\beta} < C\varepsilon_D.$$

Jusqu'à la fin de la preuve, nous prendrons la notation

$$A_k := A_e(\varepsilon^{-1}\sqrt{T_j}\sqrt{t_k}, \varepsilon\sqrt{T_j}).$$

Soit h un 2-tenseur symétrique sur M . Grâce à la proposition 4.19 et à sa généralisation à des métriques proches de g_e grâce à la proposition 4.28, pour ε_D et t_{\max} suffisamment petits, on peut choisir des 2-tenseurs H_k constants à traces nulles sur \mathbb{R}^4/Γ_k tels qu'on ait sur $A(\sqrt{T_j}t_k^{1/4}) := A_e((1/2)\sqrt{T_j}t_k^{1/4}, 4\sqrt{T_j}t_k^{1/4})$

$$\begin{aligned} \|\Phi_k^* h - H_k\|_{C_0^{2,\alpha}(A(T_j^{1/2}t_k^{1/4}))} &\leq C_e \left(\varepsilon^{-\beta} t_k^{\frac{\beta}{4}} \|P_{g_e} \Phi_k^* h\|_{r_e^{-2} C_\beta^\alpha(A_k)} \right. \\ &\quad \left. + 4\varepsilon^{-1} t_k^{\frac{1}{4}} \|\Phi_k^* h - H_k\|_{C_\beta^{2,\alpha}(A_k)} \right) \\ &\leq 2C_e \left(\varepsilon^{-\beta} t_k^{\frac{\beta}{4}} \|(P_{g^D} h)|_{\mathcal{A}_k}\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} \right. \\ &\quad \left. + 4\varepsilon^{-1} t_k^{\frac{1}{4}} \|(h - \chi_{\mathcal{A}_k} H_k)\|_{C_\beta^{2,\alpha}(g^D)} \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Considérons alors la décomposition

$$h = h_* + \sum_k \chi_{\mathcal{A}_k} H_k$$

pour le reste de la preuve.

Nous définissons alors un 2-tenseur h_o prolongeant h à M_o de la manière suivante :

$$h_o := \chi_{M_o^{t/16}} h_* + \sum_{k \in K_o} \chi_{B_o(p_k, \varepsilon)} H_k,$$

où K_o est l'ensemble des k tels que $\mathcal{A}_k \cap M_o^t \neq \emptyset$. En notant $h_{o,*} := \chi_{M_o^{t/16}} h_*$, nous avons

$$\|h_{o,*}\|_{C_\beta^{2,\alpha}(g_o)} \geq \|h_{o,*}\|_{C_\beta^0(g_o)} \geq \|(h_*)|_{M_o^t}\|_{C_\beta^0(g^D)},$$

car la norme de h_* sur M_o^t est atteinte hors de la zone endommagée par le recollement.

Comme la métrique g^D est proche en fonction de t_{\max} de la métrique g_o sur

$M_o^{t/16}$ par (4.26), on a de plus le contrôle suivant grâce à (4.48),

$$\begin{aligned} \|(P_{g^D} h)|_{M_o^{t/16}}\|_{r_D^{-2}C_\beta^\alpha(g^D)} &\geq \|P_{g_o} h_o\|_{r_o^{-2}C_\beta^\alpha(g_o)} \\ &\quad - CC_e \sum_k \|(P_{g^D} h)|_{\mathcal{A}_k}\|_{r_D^{-2}C_\beta^\alpha(g^D)} \\ &\quad - \gamma(t_{\max}) \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

où $\gamma(t_{\max}) \rightarrow 0$ quand $t_{\max} \rightarrow 0$ (comparer avec (4.29) pour les champs de vecteurs). Comme $h \perp \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$, nous avons $\frac{\|\pi_{\mathbf{O}(g_o)} h_o\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}}}{\|h_o\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}}} \rightarrow 0$ lorsque $t_{\max} \rightarrow 0$, nous avons en particulier $\|h_o\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}} \leq 2\|\pi_{\mathbf{O}(g_o)^\perp} h_o\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}}$ pour t_{\max} assez petit. Par le lemme 4.42, comme $P_o h_o = P_o(\pi_{\mathbf{O}(g_o)^\perp} h_o)$, cela implique le contrôle

$$\|h_o\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_o)} \leq 2C_o \|P_o h_o\|_{r_o^{-2}C_\beta^\alpha(g_o)}.$$

L'estimation (4.49) et le lemme 4.46 impliquent alors que pour t_{\max} suffisamment petit, il existe $C > 0$ tel qu'on ait

$$\|(h_*)|_{M_o^t}\|_{C_\beta^0(g^D)} + \sum_{k \in K_o} |H_k|_{g_e} - C\gamma(t_{\max}) \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq C \|\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} P_{g^D} h\|_{r_D^{-2}C_\beta^\alpha(g^D)}. \quad (4.50)$$

En effet, sur un orbifold (M_o, g_o) , les 2-tenseurs constants de la décomposition définissant la norme $\|\cdot\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}}$ sont déterminés par la remarque 4.26.

On considère ensuite le 2-tenseur $h_1 := h - \sum_{k \in K_o} H_k$ qui satisfait pour $C > 0$ dépendant des constantes précédentes,

$$\|\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} P_{g^D} h_1\|_{r_D^{-2}C_\beta^\alpha(g^D)} \leq C \|\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} P_{g^D} h\|_{r_D^{-2}C_\beta^\alpha(g^D)} + C\gamma(t_{\max}) \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \quad (4.51)$$

grâce au contrôle (4.50) de $\sum_{k \in K_o} |H_k|_{g_e}$.

Étant donné $j \in K_o$, l'orbifold Ricci-plat ALE (N_j, g_{b_j}) est recollé à M_o et on peut prolonger le 2-tenseur $h_1 = h_* + \sum_{l \notin K_o} \chi_{\mathcal{A}_l} H_l$ à N_j par

$$h_j := \chi_{N_j^{t/16}} h_* + \sum_{l \in K_j} \chi_{B_j(p_l, \varepsilon)} H_l,$$

où K_j est l'ensemble des $k \notin K_o$ tels que \mathcal{A}_k ait une intersection non vide avec le voisinage de N_j^t . Ce que l'on gagne en considérant h_1 plutôt que h , est le fait qu'il n'y ait pas de 2-tenseur constant à prolonger à l'infini de N_j .

En notant $h_{j,*} := \chi_{N_j^{t/16}} h_*$, on a

$$\|h_{j,*}\|_{C_{\beta}^{2,\alpha}(g_{b_j})} \geq \|h_{j,*}\|_{C_{\beta}^0(g_{b_j})} \geq \|(h_*)|_{N_j^t}\|_{C_{\beta}^0(g^D)}, \quad (4.52)$$

et par (4.48) et comme $\frac{g^D}{T_j}$ est très proche de g_{b_j} sur $N_j^{t/16}$ en fonction de t_{\max} , on a de plus le contrôle suivant grâce à (4.48) :

$$\begin{aligned} \left\| (P_{g^D} h_1) |_{N_j^{t/16}} \right\|_{r_D^{-2} C_{\beta}^{\alpha}(g^D)} &\geq \|P_{g_{b_j}} h_j\|_{r_{b_j}^{-2} C_{\beta}^{\alpha}(g_{b_j})} \\ &\quad - CC_e \sum_k \|(P_{g^D} h_1) |_{\mathcal{A}_k}\|_{r_D^{-2} C_{\beta}^{\alpha}(g^D)} \\ &\quad - \gamma(t_{\max}) \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

où $\gamma(t_{\max}) \rightarrow 0$ quand $t_{\max} \rightarrow 0$. Nous obtenons alors un contrôle sur $(h_*)|_{N_j^t}$ et sur les H_k , $k \in K_j$ grâce au lemme 4.32 en utilisant encore le fait que $h \perp \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ qui implique que pour t_{\max} assez petit, nous avons

$$\|h_j\|_{r_j C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g_{b_j})} \leq 2C_j \|P_{g_{b_j}} h_j\|_{r_j^{-2} C_{\beta}^{\alpha}(g_{b_j})}.$$

On obtient donc grâce aux estimations (4.53), (4.48) et au lemme 4.46, l'estimation

$$\|(h_*)|_{N_j^t}\|_{C_{\beta}^0} + \sum_{k \in K_j} |H_k|_{g_e} - C\gamma(t_{\max}) \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq C \|\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} P_{g^D} h\|_{r_D^{-2} C_{\beta}^{\alpha}(g^D)}. \quad (4.54)$$

En itérant aux autres orbifolds Ricci-plats ALE, nous obtenons des contrôles similaires à (4.54) sur tous les N_j et avec le contrôle (4.50) nous avons finalement

$$(1 - C\gamma(t_{\max})) \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq C \|\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} P_{g^D} h\|_{r_D^{-2} C_{\beta}^{\alpha}(g^D)},$$

et donc le résultat énoncé pour $g = g^D$ pour t_{\max} suffisamment petit.

Pour passer à une autre métrique g proche de g^D , il suffit d'utiliser la proposition 4.28 pour s'assurer que pour $\|g - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)}$ arbitrairement petit, P_g est arbitrairement proche de P_{g^D} pour la norme d'opérateur sur $C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)$.

L'opérateur P étant auto adjoint sur une variété compacte, son injectivité implique sa surjectivité. \square

3.2 Résolution de l'équation d'Einstein modulo obstructions

Montrons maintenant que l'on peut toujours résoudre une équation d'Einstein *modulo obstructions*. Rappelons qu'être d'Einstein et en jauge divergence réduite par rapport à une désingularisation naïve g^D est équivalent à annuler l'opérateur

$$\Phi_{g^D} : g \mapsto E(g) + \delta_g^* \tilde{\delta}_{g^D} g.$$

Théorème 4.51. *Soient (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein compact ou ALE de dimension 4 tel que $\text{Ric}(g_o) = \Lambda g_o$, pour $\Lambda \in \mathbb{R}$, et soit $(N_j, g_{b_j})_j$ un arbre de singularités permettant de désingulariser (M_o, g_o) avec une configuration de désingularisation D , et $0 < \beta < 1$.*

Alors, il existe $\tau > 0$, $\varepsilon > 0$ ne dépendant que des métriques g_o et g_{b_j} tels que pour toute désingularisation naïve $g^D := g_{\varphi,t}^D$, satisfaisant $t_{\max} < \tau$, et $\varphi = (\varphi_k)_k \in \text{Isom}(\mathbb{R}^4/\Gamma_k)_k$, et pour tout $v \in \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ satisfaisant $\|v\|_{C_{\beta,}^0(g^D)} < \varepsilon$, il existe une unique solution $\hat{g}_v = \hat{g}_{\varphi,t,v}$ de l'équation*

$$\Phi_{g^D}(\hat{g}_v) \in \tilde{\mathbf{O}}(g^D),$$

satisfaisant les conditions suivantes :

1. $\|\hat{g}_v - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}} \leq 2\varepsilon$,
2. $\hat{g}_v - (g^D + v)$ est orthogonal à $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ pour le produit L^2 de g^D .

Remarque 4.52. Ici, les constantes ne dépendent que des constantes C_o et C_{b_j} du lemme 4.42 et C_e , ε_e de la proposition 4.19.

Démonstration. Soit $(M, g_{\varphi,t}^D) = (M, g^D)$ une désingularisation naïve d'un orbifold (M_o, g_o) par un arbre de singularités (N_j, g_{b_j}) .

Définissons l'opérateur $\Psi : g^D + (\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp \cap C_{\beta,*}^{2,\alpha}) \rightarrow \tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp \cap r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)$,

$$\Psi(g) := \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \Phi_{g^D}(g) = \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} (E(g) + \delta_g^* \tilde{\delta}_{g^D}(g)),$$

où $\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp}$ est la projection orthogonale sur $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp$ pour le produit $L^2(g^D)$. La conclusion de l'énoncé pour $v = 0$ se réécrit alors : il existe une unique solution g à l'équation $\Psi(g) = 0$.

Cherchons à appliquer le théorème des fonctions inverses 1.12 à Ψ . Calculons donc tout d'abord sa différentielle en g^D . La linéarisation de l'opérateur Ψ en g^D

est donc pour tout 2-tenseur symétrique h ,

$$d_g \Psi(h) = \pi_{\mathring{\mathcal{O}}(g^D)^\perp} \bar{P}_g(h),$$

où \bar{P}_{g^D} est explicité dans (4.38). Montrons que cette linéarisation en g^D est inversible et d'inverse borné. Nous cherchons à nous ramener à l'opérateur $P = \frac{1}{2} \nabla^* \nabla h - \mathring{R}(h)$ pour lequel l'inversibilité a été prouvée dans le lemme 4.49.

Tout d'abord, par l'estimation (4.18), nous avons

$$\|\tilde{\delta}_{g^D} h - \delta_{g^D} h\|_{r_D C_{\beta,*}^{3,\alpha}(g^D)} \leq C t_{\max}^{\frac{1}{2}} \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)},$$

et nous en déduisons que le terme $-2\delta_g^* \delta_g h + 2\delta_g^* \tilde{\delta}_{g^D} h - (\delta_{g^D} \delta_{g^D} h) g^D$ de (4.38) est contrôlé de la manière suivante

$$\| -2\delta_g^* \delta_g h + 2\delta_g^* \tilde{\delta}_{g^D} h - (\delta_{g^D} \delta_{g^D} h) g^D \|_{r_D^{-2} C_{\beta}^{\alpha}(g^D)} \leq C t_{\max}^{\frac{1}{2}} \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)}. \quad (4.55)$$

Remarquons de plus que la courbure de Ricci de g^D est presque constante dans le sens suivant

$$\| \text{Ric}(g^D) - \Lambda g^D \|_{r_D^{-2} C_{\beta}^{\alpha}} \leq C t_{\max}^{\frac{2-\beta}{4}}, \quad (4.56)$$

car $\text{Ric}(g^D) - \Lambda g^D = 0$ pour $r_D > 2t_{\max}^{1/4}$, et sur le reste de la variété, $|\text{Ric}(g^D) - \Lambda g^D| \leq C$. Ainsi, pour t_{\max} arbitrairement petit, $d_{g^D} \Psi$ est proche (comme opérateur de $C_{\beta,*}^{2,\alpha}$ dans $r_D^{-2} C_{\beta}^{\alpha}$) à une puissance de t_{\max} -près de l'opérateur $\pi_{\mathring{\mathcal{O}}(g^D)^\perp} \hat{P}_{g^D}$, où, pour un 2-tenseur h , nous notons

$$\begin{aligned} \hat{P}_{g^D}(h) := & \frac{1}{2} \left(\nabla_{g^D}^* \nabla_{g^D} h - 2\mathring{R}_{g^D}(h) \right. \\ & \left. - \nabla_{g^D}^2 \text{tr}_{g^D} h + (\Delta_{g^D} \text{tr}_{g^D} h) g^D + \frac{\mathbf{R}_{g^D}}{4} (\text{tr}_{g^D} h) g^D \right), \end{aligned}$$

où l'on a négligé les termes de divergence par (4.55), et simplifié les termes impliquant la courbure par (4.56) dans l'expression (4.38).

Pour tout 2-tenseur v , nous avons la décomposition en un 2-tenseur conforme et un 2-tenseur sans trace $v = \frac{\text{tr}_{g^D} v}{4} g^D + (v - \frac{\text{tr}_{g^D} v}{4} g^D)$ qui est g^D -orthogonale. Maintenant, nous avons

$$\text{tr}_{g^D} \left(\pi_{\mathring{\mathcal{O}}(g^D)^\perp} \hat{P}_{g^D}(h) \right) = \text{tr}_{g^D} \hat{P}_{g^D}(h) - \text{tr}_{g^D} \left(\pi_{\mathring{\mathcal{O}}(g^D)} \hat{P}_{g^D}(h) \right).$$

Comme pour un élément $\tilde{\mathfrak{o}}$ de $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$, nous avons

$$\frac{\|(\mathrm{tr}_{g^D} \tilde{\mathfrak{o}})g^D\|_{r_D^{-2}C_\beta^\alpha}}{\|\tilde{\mathfrak{o}}\|_{r_D^{-2}C_\beta^\alpha}} \rightarrow 0 \quad (4.57)$$

lorsque $t_{\max} \rightarrow 0$, l'opérateur $\mathrm{tr}_{g^D}(\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \hat{P}_{g^D})$ est arbitrairement proche de l'opérateur $\mathrm{tr}_{g^D} \hat{P}_{g^D}$ (comme opérateurs de $C_{\beta,*}^{2,\alpha}$ dans $r_D^{-2}C_\beta^\alpha$) qui est à son tour arbitrairement proche de $\Delta_{g^D} + \Lambda$ pour t_{\max} arbitrairement petit car notre métrique est presque d'Einstein d'après (4.56) et à la preuve du lemme 1.24.

Pour la partie sans trace en rappelant que pour tout 2-tenseur h , $h = \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} h + \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)} h$, nous avons la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \hat{P}_{g^D}(h) - \mathrm{tr}_{g^D}(\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \hat{P}_{g^D}(h)) \frac{g^D}{4} &= \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \left(\hat{P}_{g^D}(h) - \mathrm{tr}_{g^D}(\hat{P}_{g^D}(h)) \frac{g^D}{4} \right) \\ &\quad - \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)} \mathrm{tr}_{g^D}(\hat{P}_{g^D}(h)) \frac{g^D}{4} \\ &\quad + \left(\mathrm{tr}_{g^D}(\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)} \hat{P}_{g^D}(h)) \right) \frac{g^D}{4}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

En utilisant une nouvelle fois (4.56) et le fait que la trace des éléments de $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ est petite, nous voyons que la partie sans trace de $\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \hat{P}_{g^D}(h)$ est arbitrairement proche de la projection sur $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ de la partie sans trace de $\hat{P}_{g^D}(h)$, c'est-à-dire de

$$\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)} \left(P_{g^D}(h) - \left(\nabla_{g^D}^2 \mathrm{tr}_{g^D} h - \Delta_{g^D} \mathrm{tr}_{g^D} h \frac{g^D}{4} \right) \right).$$

Décomposons alors h et l'opérateur $\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \hat{P}_{g^D}(h)$ de cette manière en une partie conforme et une partie sans trace. Nous obtenons un opérateur par blocs :

$$\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \hat{P}_{g^D} = \begin{bmatrix} \Delta_{g^D} + \Lambda & 0 \\ \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \left(\Delta_{g^D} \mathrm{tr}_{g^D} h \frac{g^D}{4} - \nabla_{g^D}^2 \mathrm{tr}_{g^D} h \right) & \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} P_{g^D} \end{bmatrix} + A_{g^D}$$

où $A_{g^D} : C_{\beta,*}^{2,\alpha} \rightarrow r_D^{-2}C_\beta^\alpha$ est un opérateur arbitrairement petit lorsque t_{\max} est arbitrairement petit. Il nous reste alors à montrer que

$$\begin{bmatrix} \Delta_{g^D} + \Lambda & 0 \\ \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \left(\Delta_{g^D} \mathrm{tr}_{g^D} h \frac{g^D}{4} - \nabla_{g^D}^2 \mathrm{tr}_{g^D} h \right) & \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} P_{g^D} \end{bmatrix}$$

de $C_{\beta,*}^{2,\alpha}$ dans $r_D^{-2}C_\beta^\alpha$ est un opérateur inversible avec un inverse uniformément borné indépendamment de t pour t_{\max} suffisamment petit. Il suffit de le montrer pour les deux blocs diagonaux séparément. L'opérateur $\Delta_{g^D} + \Lambda$ est inversible

avec un inverse indépendant de t d'après la preuve du lemme 1.24 et l'estimation (4.56), et c'est aussi le cas pour l'opérateur $\pi_{\tilde{\mathcal{O}}(g^D)^\perp} P_{g^D}$ d'après le lemme 4.49.

On conclut à l'aide du lemme 1.60 que la linéarisation de Ψ en g^D est inversible et a un inverse borné car elle est arbitrairement proche d'un opérateur inversible.

Remarque 4.53. L'opérateur \bar{P}_{g^D} n'est, lui, pas auto-adjoint car la métrique g^D n'est pas d'Einstein. Tous les termes sont auto-adjoints un à un sauf $-\nabla_g^2 \text{tr}_g h$, $-(\delta_g \delta_g h)g$, et $\langle \text{Ric}_g, h \rangle_g g$, on remarque que l'adjoint de $h \mapsto \nabla_g^2 \text{tr}_g h$ est $h \mapsto (\delta_g \delta_g h)g$, mais le terme $h \mapsto \langle \text{Ric}_g, h \rangle_g g$ dont l'adjoint est $h \mapsto (\text{tr}_g h) \text{Ric}_g$ empêche \bar{P}_{g^D} d'être auto-adjoint.

Pour appliquer le théorème des fonctions inverses, lemme 1.12 à l'opérateur Ψ , il reste à contrôler les termes non-linéaires. Or, comme les variations de la courbure de Ricci s'écrivent schématiquement, pour une variation h d'une métrique g ,

$$\text{Ric}(g+h) = \text{Ric}(g) + (g+h)^{-1} * \text{Rm}(g) + (g+h)^{-2} * \nabla^2 h + (g+h)^{-3} * \nabla h * \nabla h,$$

où $*$ désigne diverses opérations multilinéaires et par la proposition 4.16, les termes non-linéaires $Q_{g^D}(h) := \Psi(g^D + h) - \Psi(g^D) - d_{g^D} \Psi(h)$ satisfont le contrôle

$$\begin{aligned} & \|Q_{g^D}(h) - Q_{g^D}(h')\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} \\ & \leq C \left((\|h\|_{C_0^\alpha(g^D)} + \|h'\|_{C_0^\alpha(g^D)}) \|h - h'\|_{C_0^\alpha(g^D)} \|\text{Rm}(g^D)\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} \right. \\ & \quad + \|h - h'\|_{C_0^\alpha(g^D)} (\|\nabla^2 h\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} + \|\nabla^2 h'\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)}) \\ & \quad + (\|h\|_{C_0^\alpha(g^D)} + \|h'\|_{C_0^\alpha(g^D)}) \|\nabla^2(h - h')\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} \\ & \quad \left. + 2\|\nabla(h - h')\|_{r_D^{-1} C_\beta^\alpha(g^D)} (\|\nabla h\|_{r_D^{-1} C_\beta^\alpha(g^D)} + \|\nabla(h')\|_{r_D^{-1} C_\beta^\alpha(g^D)}) \right) \\ & \leq 3C (\|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} + \|h'\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)}) \|h - h'\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)}. \end{aligned}$$

D'après le théorème des fonctions inverses, lemme 1.12, comme on a le contrôle

$$\|\Psi(g^D)\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} \leq C t_{\max}^{\frac{2-\beta}{4}},$$

il existe donc une unique solution \hat{g} pour t_{\max} suffisamment petit, à l'équation $\Psi(\hat{g}) = 0$ qui satisfait de plus $\|g^D - \hat{g}\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq \|\Psi(g^D)\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} \leq C t_{\max}^{\frac{2-\beta}{4}}$. Maintenant, nous n'avons résolu l'équation qu'au voisinage de g^D et sur l'orthogonal de $\tilde{\mathcal{O}}(g^D)$. En s'intéressant pour $v \in \tilde{\mathcal{O}}(g^D)$ à l'opérateur $\Psi_v(g) := \Psi(g+v)$, le contrôle des termes non-linéaires est exactement le même pour cet opérateur, et pour v arbitrairement petit, $d_{g^D+v} \Psi_v$ est arbitrairement proche de $d_{g^D} \Psi$ qui est

inversible. On en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\|v\|_{C_\beta^0(g^D)} < \varepsilon$, il existe une unique solution \hat{g}_v de $\Psi_v(\hat{g}_v) = 0$, et la conclusion de l'énoncé.

Remarque 4.54. En ajoutant v , on détériore l'estimation sur $\Psi_v(g^D + v)$ qui n'est plus contrôlé que par :

$$\|\Psi_v(g^D + v)\|_{r_D^{-2}C_\beta^\alpha(g^D)} \leq C \left(\|v\|_{C_\beta^{2,\alpha}(g^D)}^2 + t_{\max}^{\frac{2-\beta}{4}} \right).$$

Nous verrons dans le chapitre 5 suivant que sans hypothèse sur l'intégrabilité des déformations infinitésimales, on ne peut pas espérer mieux. □

Corollaire 4.55. *Avec les notations du théorème 4.51, l'application $v \mapsto \hat{g}_v$ est analytique.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème des fonctions implicites pour les applications analytiques. Définissons l'application

$$(v, h) \mapsto \Psi(\hat{g}_0 + v + h)$$

de $\tilde{\mathbf{O}}(g^D) \times \left(\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp \cap C_{\beta,*}^{2,\alpha} \right) \rightarrow \tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp \cap r_D^{-2}C_\beta^\alpha(g^D)$ où l'on note

$$\Psi(g) := \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \Phi_{g^D}(g) = \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \left(E(g) + \delta_g^* \tilde{\delta}_{g^D}(g) \right),$$

comme dans la preuve du théorème 4.51 et où \hat{g}_0 est la solution donnée par le théorème 4.51 pour $v = 0$.

L'application $(v, h) \mapsto \Psi(\hat{g}_0 + v + h)$ est analytique car E et $g \mapsto \delta_g^*$ le sont, et car $\tilde{\delta}_{g^D}$ et $\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp}$ sont linéaires. Nous savons que $\|\hat{g}_0 - g^D\| \leq C t_{\max}^{\frac{2-\beta}{4}}$, et que $d_{g^D} \Psi$ est inversible d'après la preuve du théorème 4.51. Nous en déduisons que $d_{\hat{g}_0} \Psi$ est aussi inversible.

Le théorème des fonctions implicites, lemme 1.26, nous assure alors, par l'unicité de la solution \hat{g}_v du théorème 4.51 pour v petit, que l'application $v \mapsto \hat{g}_v - (g^D + v)$ est analytique, puis que $v \mapsto \hat{g}_v$ est analytique. □

Remarque 4.56. Grâce à la proposition 4.39, il est possible d'écrire le résultat sous une autre forme en imposant directement à g d'être en jauge divergence réduite par rapport à g^D . Il faut alors modifier $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ par $\pi_g \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$, où $\pi_g h := h - \delta_g^* \left(\tilde{\delta}_g \delta_g^* \right)^{-1} \tilde{\delta}_g h$ est une projection sur le noyau de $\tilde{\delta}_g$, voir la preuve de [Biq13, Proposition 9.1] et en particulier l'opérateur défini dans [Biq13, (66)] pour plus de détails. Le résultat se réécrit de la manière suivante. Avec les mêmes suppositions,

nous avons aussi une unique solution $\hat{g}_v = \hat{g}_{\varphi,t,v}$ de l'équation

$$E(\hat{g}_v) \in \pi_{\hat{g}_v} \tilde{\mathbf{O}}(g^D),$$

satisfaisant les conditions suivantes :

1. $\|\hat{g}_v - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}} \leq 2\varepsilon$,
2. $\tilde{\delta}_{g^D} \hat{g}_v = 0$,
3. $\hat{g}_v - (g^D + v)$ est orthogonal à $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ pour le produit L^2 de g^D .

Ces deux définitions de métriques d'Einstein *modulo obstructions* sont différentes, mais donnent les mêmes métriques lorsqu'elles sont d'Einstein.

Grâce au corollaire 4.40, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 4.57. *Soient $D_0, v_0 > 0$, $l \in \mathbb{N}$, et $\beta = \beta(v_0, D_0) > 0$ obtenu dans le corollaire 4.5. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, D_0, v_0, l) > 0$ tel que si (M, g^ε) est une variété d'Einstein satisfaisant*

- *le volume est minoré par $v_0 > 0$,*
- *le diamètre est majoré par D_0 ,*
- *la courbure de Ricci est bornée $|\text{Ric}| \leq 3$.*

et telle que pour un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) ,

$$d_{GH}\left((M, g^\varepsilon), (M_o, g_o)\right) \leq \delta,$$

alors, il existe une désingularisation naïve $(M, g^D + v)$ de (M_o, g_o) par un arbre de singularités, et un difféomorphisme $\psi : M \rightarrow M$ tels que

$$\psi^* g^\varepsilon = \hat{g}_v,$$

où \hat{g}_v est la perturbation de $g^D + v$ construite dans le théorème 4.51.

L'ensemble des métriques Ricci-plates sur la surface $K3$ désingularisant l'orbifold $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ est un exemple d'application de ce théorème. C'est un cas particulier où $E(g)$ n'est pas seulement orthogonal aux déformations infinitésimales de l'orbifold et des variétés Ricci-plates ALE, mais s'annule pour tous paramètres de recollement.

Exemple 4.58 (Désingularisation d'Einstein de $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$). Une construction proposée par Gibbons-Pope [GP79] et Page [Pag78] et obtenue rigoureusement par Topiwala [Top87a, Top87b] pour la première fois permet de désingulariser l'orbifold $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ de l'exemple 2.5 qui a 16 points singuliers modelés sur $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$. L'idée est

de recoller à chacun des points singuliers des copies de la variété d'Eguchi-Hanson (voir (2.5) pour sa définition) qui sont Ricci-plates et asymptotiques à $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$ dans la même orientation (pour pouvoir utiliser des techniques de géométrie kählérienne), c'est-à-dire que les paramètres de recollements sont dans $SO(4)$. Il est ensuite possible de perturber la métrique obtenue en une métrique Ricci-plate.

Il y a de nombreuses ambiguïtés dans la construction qui peuvent être vues de deux manières différentes :

1. il y a un espace de dimension 3 de déformations intégrables de la métrique d'Eguchi-Hanson (qui sont toutes homothétiques).
2. lorsque l'on recolle la i -ème métrique d'Eguchi-Hanson, il y a un paramètre d'échelle $t_i > 0$ et un paramètre de rotation $\varphi_i \in SO(4)$ à choisir.

Ces deux sources d'ambiguïtés sont en fait équivalentes dans cet exemple car les rotations et changements d'échelle des recollements peuvent être vus comme des variations de la métrique d'Eguchi-Hanson. Cette métrique étant $U(2)$ -invariante, les rotations correspondent à $SO(4)/U(2)$ et donc à deux dimensions de déformations et le changement d'échelle correspond à la troisième déformation de la métrique. À ces ambiguïtés de recollements, il faut ajouter les déformations plates à trace et divergence nulles de $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ qui forment un espace de dimension 9 (composé des 2-tenseurs symétriques constants à trace nulle).

En tout, il y a donc $57 = 9 + 16 \times 3$ directions de déformation indépendantes qui correspondent aux noyaux des opérateurs d'Einstein des espaces modèles.

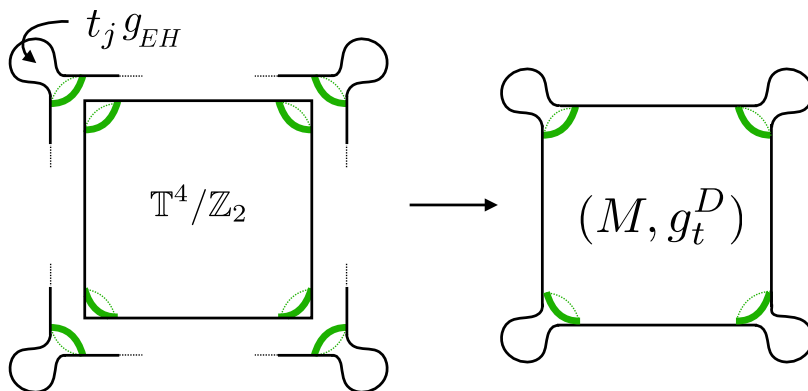


FIGURE 4.3 – Approximation de métrique hyperkählérienne.

4 Préespace de modules directionnel au voisinage d'une métrique singulière

Soit M une variété différentiable de dimension 4 et considérons $(M_o, g_o) \in \partial_o \mathbf{E}(M) \subset \overline{\mathbf{E}(M)}_{GH} \setminus \mathbf{E}(M)$ une métrique orbifold du bord de son espaces de modules des métriques d'Einstein. D'après le théorème 3.42, toutes les métriques d'Einstein proches dans au sens de Gromov-Hausdorff de (M_o, g_o) sont en réalité proches d'une désingularisation naïve (M, g_t^D) de (M_o, g_o) au sens $C_{\beta, *}^{k, \alpha}$ pour une configuration de désingularisation D .

On définit alors par analogie avec la définition 1.17 le préespace de modules *directionnel* au voisinage d'une métrique singulière.

Définition 4.59 (Préespace de modules des métriques d'Einstein au voisinage d'une métrique singulière). Nous définissons $\mathbb{E}_{g_o}^D(M)$, le *préespace de modules des métriques d'Einstein sur M* au voisinage de (M_o, g_o) et *dans la direction D* , comme l'ensemble des métriques d'Einstein g sur M pour lesquelles il existe t tel que l'on ait $\|g - g_t^D\|_{C_{\beta, *}^{2, \alpha}(g_t^D)} < \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ la constante du théorème 4.51 et $v \in \tilde{\mathbf{O}}(g_t^D)$ pour lequel on ait :

1. $E(g) = 0$, $\text{Vol}(g) = \text{Vol}(g_o)$,
2. $g - (g_t^D + v) \perp_{g_t^D} \tilde{\mathbf{O}}(g_t^D)$,
3. $\tilde{\delta}_{g_t^D} g = 0$.

Remarque 4.60. Ce préespace est directionnel dans le sens où il ne couvre pas toutes les désingularisations de Gromov-Hausdorff de (M_o, g_o) , mais seulement celles faisant apparaître l'arbre de singularités donné par D . En effet, cela correspondrait à *toutes* les configurations d'arbres de singularités aboutissant à (M_o, g_o) qui ne sont pas toutes $C_{\beta, *}^2$ -proches les unes des autres. Étant donnée une suite quelconque de métriques d'Einstein lisses $(g_i)_i$ sur M convergeant vers (M_o, g_o) , alors, quitte à prendre une sous-suite, toutes les métriques g_i sont dans un *unique* préespace de modules directionnel $\mathbb{E}_{g_o}^D(M)$.

Remarque 4.61. En général, il n'est pas clair que l'on puisse recoller ensemble ces préespaces de modules directionnels pour obtenir un vrai voisinage de $\partial_o \mathbf{E}(M)$. Dans le cas kählérien, ces différentes directions recouvrent l'espace des paramètres des désingularisations kählériennes de \mathbb{R}^4/Γ , c'est-à-dire un espace $\mathbb{R}^{d_r} \setminus D_\Gamma$, où D_Γ est une union finie de sous-espaces vectoriels, et les différents arbres de singularités correspondent à des voisinages particuliers de l'ensemble D_Γ qui paramètrent les métriques orbifolds.

Proposition 4.62. *Le pré-espace de modules directionnel $\mathbb{E}_{g_0}^D(M)$ est l'ensemble des zéros de E sur l'ensemble des métriques $\hat{g}_{t,v}$ au voisinage des g_t^D du théorème 4.51.*

Comme E est analytique, il suffirait de comprendre la structure de l'ensemble des $\hat{g}_{t,v}$ ou des obstructions associées pour déterminer la structure locale de l'espace de modules au voisinage de sa frontière. Notons qu'en adaptant le corollaire 4.55, cet ensemble a une structure analytique là où $t > 0$ et l'on retrouve la structure analytique au voisinage d'une métrique lisse de la proposition 1.31 avec notre paramétrisation particulière. La question se résume donc, comme on aurait pu s'y attendre, à comprendre ce qu'il se passe autour de $t = 0$.

Chapitre 5

Obstructions à la désingularisation de certains orbifolds d'Einstein

Dans ce chapitre, dont les résultats sont essentiellement tirés de [Ozu19b], nous étudions les obstructions à la résolution de l'équation d'Einstein du chapitre précédent (ch. 4). Nous montrons que ces obstructions ne s'annulent pas dans certaines situations et en déduisons que certaines métriques d'Einstein singulières ne peuvent jamais être désingularisées, même au sens le plus faible de Gromov-Hausdorff. Cela répond à la question 0.5 posée dans les années 80.

Contributions. Nous étudions les obstructions à la d_{GH} -désingularisation d'orbifolds par des métriques d'Einstein lisses du chapitre précédent (ch. 4). Nous étendons donc le résultat d'obstruction de [Biq13, Biq16, Biq17] valable pour la désingularisation par une métrique d'Eguchi-Hanson et sous des hypothèses restrictives dans plusieurs directions : nous autorisons

- une simple d_{GH} -proximité avec l'orbifold,
- l'orbifold à avoir des déformations infinitésimales d'Einstein (pas nécessairement intégrables),
- plusieurs singularités,
- des bulles quelconques à déformations infinitésimales d'Einstein intégrables.

Dans le cas conjecturalement général des formations d'arbres d'orbifolds Ricci-plats ALE en un nombre arbitraire de points, nous retrouvons l'obstruction de [Biq13], $\det \mathbf{R} = 0$, à *tous* les points singuliers. Nous en déduisons que sous des hypothèses topologiques répandues sur la variété M , comme la condition spin,

l'obstruction $\det \mathbf{R} = 0$ doit être satisfaite aux points singuliers des métriques de $\partial_o \mathbf{E}(M)$.

Nous exhibons enfin la première obstruction générale à la désingularisation d'orbifolds sphériques et hyperboliques sans supposition sur les bulles apparaissant.

1 Contrôle des obstructions

Montrons tout d'abord un lemme technique qui contrôle les distances entre métriques et les obstructions.

Proposition 5.1. *Soit $0 < \alpha < 1$, et $(M, g^D = g_{\varphi,t}^D)$ une désingularisation naïve. Il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que si la métrique $(M, \hat{g} = \hat{g}_{\varphi,t,0})$ obtenue par le théorème 4.51 (noter qu'ici $v = 0$) est une métrique d'Einstein satisfaisant :*

1. $\|\hat{g} - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq 2\varepsilon$,
2. $\tilde{\delta}_{g^D} \hat{g} = 0$,
3. $\hat{g} - g^D$ est orthogonal à $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ pour le produit L^2 de g^D .

et si une métrique g^A , satisfait :

1. $\|g^A - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq 2\varepsilon$,
2. $g^A - g^D$ est orthogonal à $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ pour le produit L^2 de g^D ,

alors, en notant $\Psi(g^A) = \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \Phi_{g^D}(g^A)$, on a

$$\|\hat{g} - g^A\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq C \|\Psi(g^A)\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)}, \quad (5.1)$$

et si l'on note $\mathbf{o}^A := \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)} \Phi_{g^D}(g^A)$, on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{o}^A\|_{L^2(g^D)} &\leq \left(\|\Psi(g^A)\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} + \|\Psi(g^D)\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} \right. \\ &\quad \left. + t_{\max}^{\frac{1}{2}} \right) \|\Psi(g^A)\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'inégalité (5.1) est une conséquence directe de la preuve du théorème 4.51. En effet, le théorème des fonctions inverses utilisé permet en fait de contrôler la distance d'une métrique g^A à l'unique solution \hat{g} de $\Psi(\hat{g}) = 0$ en fonction de la valeur de $\Psi(g^A)$. On a plus précisément

$$\|g^A - \hat{g}\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq C \|\Psi(g^A)\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)}.$$

En combinant cela avec le contrôle similaire $\|g^D - \hat{g}\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq \|\Psi(g^D)\|_{r_D^{-2}C_{\beta}^{\alpha}(g^D)}$, nous avons alors pour tout 2-tenseur h sur M , en notant $\bar{P}_{g^A} := d_{g^A}\bar{\Phi}_{g^D}$

$$\begin{aligned} \left\| (\bar{P}_{g^A} - \bar{P}_{g^D})h \right\|_{r_D^{-2}C_{\beta}^{\alpha}(g^D)} &\leq \left\| (\bar{P}_{g^A} - \bar{P}_{\hat{g}})h \right\|_{r_D^{-2}C_{\beta}^{\alpha}(g^D)} + \left\| (\bar{P}_{\hat{g}} - \bar{P}_{g^D})h \right\|_{r_D^{-2}C_{\beta}^{\alpha}(g^D)} \\ &\leq C \left(\|g^A - \hat{g}\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} + \|\hat{g} - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \right) \|h\|_{C_0^{2,\alpha}(g^D)} \\ &\leq C \left(\|\Psi(g^A)\|_{r_D^{-2}C_{\beta}^{\alpha}(g^D)} + \|\Psi(g^D)\|_{r_D^{-2}C_{\beta}^{\alpha}(g^D)} \right) \|h\|_{C_0^{2,\alpha}(g^D)}. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité (4.46), au contrôle sur $h^A := \hat{g} - g^A \perp \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ et en remarquant que $r_D^{-2}C_{\beta}^{\alpha}(g^D) \subset L^2(g^D)$, on a

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \bar{P}_{g^A}h^A, \tilde{\mathbf{o}}_{o,t} \right\rangle_{L^2} \right| &\leq C' \left\| (\bar{P}_{g^A} - \bar{P}_{g^D})h^A \right\|_{r_D^{-2}C_{\beta}^{\alpha}} \|\tilde{\mathbf{o}}_{o,t}\|_{L^2} + \left| \left\langle \bar{P}_{g^D}h^A, \tilde{\mathbf{o}}_{o,t} \right\rangle_{L^2} \right| \\ &\leq C' \left\| (\bar{P}_{g^A} - \bar{P}_{g^D})h^A \right\|_{r_D^{-2}C_{\beta}^{\alpha}} \|\tilde{\mathbf{o}}_{o,t}\|_{L^2} + Ct_{\max}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{o}_o\|_{L^2} \|h^A\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}} \\ &\leq CC' \gamma(g^A, g^D, t_{\max}) \|\mathbf{o}_o\|_{L^2} \|h^A\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}}. \end{aligned}$$

où $C, C' > 0$ ne dépendent que de β , et où $\gamma(g^A, g^D, t_{\max}) := \left(\|\Psi(g^A)\|_{r_D^{-2}C_{\beta}^{\alpha}(g^D)} + \|\Psi(g^D)\|_{r_D^{-2}C_{\beta}^{\alpha}(g^D)} + t_{\max}^{\frac{1}{2}} \right)$. Et de même sur les N_j^t , on a les mêmes contrôles aux points singuliers et à l'infini on utilise l'inégalité (4.47), pour $\mathbf{o}_j \in \mathbf{O}(g_{b_j})$, on a donc

$$\left| \left\langle \bar{P}_{g^D}h^A, \tilde{\mathbf{o}}_{j,t} \right\rangle_{L^2(g^D)} \right| \leq CC' \gamma(g^A, g^D, t_{\max}) \|\mathbf{o}_j\|_{L^2(g_{b_j})} \|h^A\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)}. \quad (5.3)$$

Soit \mathbf{o}^A la projection orthogonale sur $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ de $\bar{\Phi}_{g^D}(g^A)$. Comme $\bar{\Phi}_{g^D}(\hat{g}) = 0$, et $d_{g^A}\bar{\Phi}_{g^D} = \bar{P}_{g^A}$, nous avons

$$-\mathbf{o}^A = \bar{\Phi}_{g^D}(\hat{g}) - \mathbf{o}^A = \Psi(g^A) + \bar{P}_{g^A}h^A + Q_{g^A}(h^A), \quad (5.4)$$

où les termes non-linéaires $Q_{g^A}(h^A) = \bar{\Phi}_{g^D}(\hat{g}) - \bar{\Phi}_{g^D}(g^A) - d_{g^A}\bar{\Phi}_{g^D}(h^A)$ satisfont

$$\|Q_{g^A}(h^A)\|_{r_D^{-2}C^0(M)} \leq C \|h^A\|_{C_{\beta,*}^0}^2 \leq C \|\Psi(g^A)\|_{r_D^{-2}C_{\beta}^0(g^D)}^2, \quad (5.5)$$

et on a donc par définition des normes à poids, pour $\mathbf{o} \in \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$,

$$\left| \left\langle \mathbf{o}, Q_{g^A}(h^A) \right\rangle_{L^2(g^D)} \right| \leq C \|\mathbf{o}\|_{L^2} \|\Psi(g^A)\|_{r_D^{-2}C_{\beta}^0(g^D)}^2,$$

et donc, comme $\Psi(g^A) \perp_{g^D} \mathfrak{o}^A$ par définition de Ψ , on a par (5.4),

$$\begin{aligned} -\|\mathfrak{o}^A\|_{L^2(g^D)}^2 &= \left\langle \Phi_{g^D}(\hat{g}) - \mathfrak{o}^A, \mathfrak{o}^A \right\rangle_{g^D} \\ &= \left\langle \bar{P}_{g^A} h^A + Q_{g^A}(h^A), \mathfrak{o}^A \right\rangle_{g^D}, \end{aligned}$$

Finalement, grâce à (5.3) et (5.5) nous avons donc

$$\|\mathfrak{o}^A\|_{L^2(g^D)}^2 \leq \gamma(g^A, g^D, t_{\max}) \|\Psi(g^A)\|_{r_D^{-2}C_\beta^\alpha(g^D)} \|\mathfrak{o}^A\|_{L^2(g^D)}.$$

□

Remarque 5.2. L'inégalité (5.1) signifie que si l'on arrive à construire une métrique g^A qui annule presque l'opérateur Ψ , alors g^A est en fait une bonne approximation de \hat{g} . Cela nous permettra de décrire de manière arbitrairement précise les métriques d'Einstein qui dégènèrent.

L'inégalité (5.2) est un résultat d'obstruction. En effet, si l'on peut construire une métrique d'approximation g^A , pour laquelle $\Phi_{g^D}(g^A)$ est petit, mais sans que $\mathfrak{o}^A := \pi_{\bar{\mathfrak{O}}(g^D)} \Phi_{g^D}(g^A)$ ne le soit, alors cela signifie qu'il ne peut pas y avoir de variété d'Einstein proche au sens de Gromov-Hausdorff de l'orbifold (M_o, g_o) dans les mêmes jauges.

2 Obstruction en un des points singuliers

Afin d'exhiber de premières obstructions à la désingularisation d'orbifolds, nous allons construire une meilleure approximation de la dégénérescence des variétés d'Einstein qui nous assure que l'on approche une métrique d'Einstein modulo obstructions par (5.1), et on en déduira des obstructions sur l'orbifold limite par (5.2). Dans cette section, nous nous restreignons à montrer qu'une obstruction est satisfaite à *un* point singulier si l'on suppose qu'il n'y a pas d'arbre de singularités. L'analyse nécessaire pour l'obtenir à tous les points est développée dans la section suivante, et les arbres de singularités kählériennes sont considérés dans la quatrième section de ce chapitre.

Pour cela nous faisons apparaître les termes quadratiques du développement de la métrique orbifold à un point singulier à l'infini de la bulle que l'on recolle dans la proposition 5.3. L'erreur faite dans le recollement est alors plus faible et la métrique obtenue plus proche d'être Einstein dans les normes qui nous intéressent d'après le corollaire 5.9. Cela permet de déduire un résultat d'obstruction

à la désingularisation de Gromov-Hausdorff d'orbifolds d'Einstein par des variétés Ricci-plates ALE dont les déformations infinitésimales sont intégrables dans les corollaires 5.12 et 5.32.

2.1 Perturbation des bulles par les termes quadratiques de la métrique orbifold

Traisons pour commencer le cas où l'on désingularise un orbifold d'Einstein par des *variétés* Ricci-plates ALE que l'on ne perturbe qu'orthogonalement au noyau approché $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$, ce qui revient à appliquer le théorème 4.51 pour $v = 0$. C'est le cadre habituel des théorèmes de perturbation et de l'obstruction de [Biq13] car les orbifolds considérés dans [Biq13] n'ont pas de déformations infinitésimales d'Einstein.

Au voisinage d'un point singulier orbifold, il existe des coordonnées où

$$g_o = g_e + H_2 + \mathcal{O}(r_o^3),$$

et

$$\delta_e H_2 = 0,$$

où H_2 est un 2-tenseur symétrique dont les coefficients sont des polynômes homogènes de degré 2.

On souhaite donc ajouter à l'orbifold ALE des termes asymptotiques au tenseur d'ordre principal à la singularité, H_2 , tout en annulant la linéarisation de l'opérateur d'Einstein pour minimiser l'erreur. Il se trouve que ce n'est pas toujours possible, et que l'on ne peut que résoudre l'équation *modulo obstructions*. Notons $\mathbf{O}^4(g_{b_j})$ l'orthogonal des éléments de $\mathbf{O}(g_{b_j})$ qui décroissent en $o(r_b^{-4})$ à l'infini. On notera $\mathcal{O}^4(g_b)$ l'espace de ces tenseurs homogènes harmoniques sur \mathbb{R}^4/Γ . Ces tenseurs sont harmoniques homogènes sur \mathbb{R}^4/Γ et décroissent en r_b^{-4} .

Une conséquence du lemme 4.42 est que l'on peut toujours résoudre l'équation de prolongement de H_2 sur la bulle *modulo obstructions* explicites. Considérons \mathbf{o}_i^4 une base orthonormée de $\mathbf{O}^4(g_{b_j})$, et O_i^4 leur terme dominant harmonique homogène décroissant en r_e^{-4} .

Proposition 5.3. *Soit (N, g_b) un orbifold Ricci-plat ALE asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ et H_2 un 2-tenseur homogène quadratique sur \mathbb{R}^4/Γ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels qu'on ait :*

$$\bar{P}_e H_2 + \lambda g_e = 0.$$

Alors, il existe un 2-tenseur h_2 , et des réels λ_i tels que (h_2, λ_i) soit une solution de

$$\begin{aligned}\bar{P}_b h_2 + \lambda g_b &= \sum_i \lambda_i \mathbf{o}_i^4, \\ |h_2 - \chi H_2|_{g_b} &= \mathcal{O}(r_b^{-2}),\end{aligned}$$

où χ est une fonction de coupure à support dans un voisinage de l'infini de (N, g_b) où les coordonnées ALE sont définies et où

$$\lambda_i := - \int_{\mathbb{S}^3/\Gamma} \left(3 \langle H_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + O_i^4 \left(\nabla_e \operatorname{tr}_e H_2, \partial_{r_e} \right) \right) dv_{\mathbb{S}^3/\Gamma}.$$

L'ensemble des solutions est en fait $(h_2 + \mathbf{O}(g_b), \lambda_i)$.

Démonstration. Nous avons $\bar{P}_b(\chi H_2) + \lambda g_b \in r_b^{-2} C_\beta^\alpha(g_b)$ pour $0 < \beta < 1$ car dans un voisinage de l'infini, $g_b - g_e = \mathcal{O}(r_b^{-4})$.

Le lemme 4.42 est valable avec l'opérateur \bar{P}_b plutôt que l'opérateur P_b grâce au théorème 4.51 dans le cas où $(M_o, g_o) = (N, g_b)$ est un orbifold Ricci-plat ALE.. Il existe donc $h' \in C_\beta^{2,\alpha}(g_b)$ tel que $\bar{P}_b(\chi H_2 + h') + \lambda g_b = \sum_i \lambda_i \mathbf{o}_i$ avec

$$\lambda_i = - \int_{\mathbb{S}^3/\Gamma} \left(3 \langle H_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + \frac{1}{2} O_i^4 \left(\nabla_e \operatorname{tr}_e H_2, \partial_{r_e} \right) \right) dv_{\mathbb{S}^3/\Gamma}, \quad (5.6)$$

où O_i^4 est le terme d'ordre -4 du développement de \mathbf{o}_i à l'infini. En effet, par intégration par parties, en utilisant le fait que $\operatorname{tr}_b \mathbf{o}_i = \langle g_b, \mathbf{o}_j \rangle_{g_b} = 0$ et $\delta_b \mathbf{o}_i = 0$, nous obtenons,

$$\begin{aligned}\langle \bar{P}_b(\chi H_2), \mathbf{o}_j \rangle_{L^2} &= \frac{1}{2} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{r_b \leq \rho} \langle \nabla_b^* \nabla_b(\chi H_2) - \nabla_b^2 \operatorname{tr}_b(\chi H_2), \mathbf{o}_j \rangle_{g_b} dv_{g_b} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{r_b = \rho} \left(\langle \chi H_2, \nabla_n \mathbf{o}_j \rangle_{g_b} - \langle \nabla_n(\chi H_2), \mathbf{o}_j \rangle_{g_b} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{o}_j(\nabla_b \operatorname{tr}_b \chi H_2, \partial_{r_b}) \right) dS_\rho \\ &= - \int_{\mathbb{S}^3/\Gamma} \left(3 \langle H_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + \frac{1}{2} O_i^4 \left(\nabla_e \operatorname{tr}_e H_2, \partial_{r_e} \right) \right) dv_{\mathbb{S}^3/\Gamma}.\end{aligned}$$

Les valeurs de λ_i de (5.6) assurent donc bien que l'on ait

$$\bar{P}_b(\chi H_2) + \lambda g_b - \sum_i \lambda_i \mathbf{o}_i \perp_{g_b} \mathbf{O}(g_b).$$

□

Remarque 5.4. Le fait que l'on ne puisse pas résoudre $P_b(h_2) = \lambda g_b$ est la raison profonde pour laquelle certains orbifolds ne peuvent pas être désingularisés par

des variétés d'Einstein. La quantité $\int_{\mathbb{S}^3/\Gamma} \langle H_2, O_i^4 \rangle_{g_e} dv_{\mathbb{S}^3/\Gamma}$ peut être vue comme un produit scalaire du polynôme homogène harmonique quadratique 2, $H_2^{(i)}$, tel que $O_i^4 = \frac{H_2^{(i)}}{r_e^6}$ avec H_2 .

Remarque 5.5. Dans le cas où H_2 n'est pas en jauge de Bianchi et ne satisfait donc que $d_e \text{Ric}(H_2) = \Lambda g_e$, en adaptant [Biq13, Proposition 3.1] on peut aussi résoudre $d_{g_b} \text{Ric}(h_2) = \Lambda g_b + \sum_i \lambda_i \mathbf{o}_i^4$, avec

$$\lambda_i = - \int_{\mathbb{S}^3/\Gamma} \left(3 \langle H_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + O_i^4 (B_e H_2, \partial_{r_e}) \right) dv_{\mathbb{S}^3/\Gamma}.$$

L'intérêt est que l'on peut alors mettre les termes quadratiques de la métrique d'Einstein dans des jauges plus pratiques que la jauge de Bianchi suivant les situations.

2.2 Contrôle de l'opérateur d'Einstein modulo obstructions

On remarque alors que $g_b + th_2$ est bien une métrique sur une boule de rayon de l'ordre $t^{-\frac{1}{2}}$. En particulier, pour t suffisamment petit, c'est une métrique sur la boule de rayon $t^{-\frac{1}{4}}$, et on peut recoller cette métrique (plutôt que de recoller naïvement la métrique ALE) à la métrique orbifold exactement comme dans la définition 3.3 des désingularisations naïves.

La métrique obtenue sera appelée *approximation d'Einstein modulo obstructions*, et on la notera $g^A = g_{\varphi,t}^A$. Elle dépend elle aussi de choix de jauge au niveau des recollements et des paramètres d'échelle.

Le principal avantage de cette construction, et la raison pour laquelle elle est appelée *approximation* est le meilleur contrôle suivant.

Proposition 5.6 (Adaptation de [Biq13, Lemme 5.2]). *Soit (N, g_b, p) un orbifold Ricci-plat ALE, et H_2 le terme quadratique d'une métrique orbifold d'Einstein g_o asymptotique au même cône que (N, g_b, p) , et soient h_2 un 2-tenseur sur N et λ_i les réels obtenus par la proposition 5.3 ou la remarque 5.5 à partir de H_2 .*

En notant $g_b^t := g_b + th_2$ sur $B_{g_b}(p, t^{-\frac{1}{4}})$ pour $t > 0$ suffisamment petit, on a le contrôle suivant de l'opérateur d'Einstein, pour $p \in N$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k > 0$ telle que :

$$(1 + r_b)^{2+k} \left| \nabla_{g_b^t}^k \left(\text{Ric}(g_b^t) - \frac{\text{R}(g_b^t)}{2} g_b^t + t \lambda g_b^t + \delta_{g_b}^t \delta_{g_b}^* g_b^t + t \sum_i \lambda_i \mathbf{o}_i^4 \right) \right|_{g_b} \leq C_k t^2 (1 + r_b)^4.$$

Remarque 5.7. Les différents choix de h_2 dans la proposition 5.3 ne changent que la constante devant $t^2(1+r_b)^4$ dans l'estimation.

Remarque 5.8. Pour $r_b \gg 1$, $t^2(1+r_b)^4$ vaut approximativement $(\sqrt{tr_b})^4 = r_o^4$. C'est cohérent avec l'erreur venant des termes quadratiques de la courbure de Ricci sur l'orbifold.

Ces contrôles se répercutent sur les métriques d'approximation g^A .

Corollaire 5.9. *Soit (M, g^D) une désingularisation naïve d'un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) par des variétés Ricci-plates ALE (N_j, g_{b_j}) aux échelles $t_j > 0$, et soit $(\mathbf{o}_j^i)_i$ une base orthonormée de $\mathbf{O}^A(g_{b_j})$.*

Soit $g^A = g_{\varphi, t}^A$ une métrique d'approximation d'Einstein modulo obstructions et $\beta > 0$. Alors, on a le contrôle suivant pour $t_{\max} > 0$ suffisamment petit, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $C_k > 0$ telle qu'on ait :

$$\left\| \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \Phi_{g^D}(g^A) \right\|_{r_D^{-2} C_\beta^k(g^D)} \leq C_k t_{\max}^{\frac{3-\beta}{4}}, \quad (5.7)$$

et,

$$\left\| \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)} \Phi_{g^D}(g^A) - \sum_j t_j \sum_i \lambda_i^j \tilde{\mathbf{o}}_{j,t}^i \right\|_{L^2(g^D)} \leq C_0 t_{\max}^{\frac{3}{2}}. \quad (5.8)$$

Et la métrique g^A satisfait les conditions suivantes,

1. $\|g^A - g^D\|_{C_{\beta, *}^{2, \alpha}(g^D)} \leq 2\varepsilon$,
2. $g^A - g^D$ est orthogonal à $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ pour le produit L^2 de g^D ,

Démonstration. Traitons le cas du recollement d'une variété (N, g_b) à l'échelle $t > 0$, le cas général s'obtient en itérant les désingularisations car les contrôles nécessaires sont locaux. Sur M_o^{16t} , nous avons par hypothèse

$$\text{Ric}(g_o) = \Lambda g_o, \quad (5.9)$$

et sur N_j^{16t} , d'après la proposition 5.6, nous avons

$$\text{Ric}(g_b^t) - \frac{\mathbf{R}(g_b^t)}{2} g_b^t + t \lambda g_b^t + \delta_{g_b}^t \delta_{g_b}^* g_b^t + t \sum_i \lambda_i \mathbf{o}_i^4 = \mathcal{O}(tr_b^2). \quad (5.10)$$

Maintenant, au point p , le développement de g_o en coordonnées géodésiques est

$$g_o = g_e + H_2 + \mathcal{O}(r_o^3), \quad (5.11)$$

et $t(g_b + th_2)$ a le développement suivant pour $t^{-\frac{1}{4}} \leq r_b \leq t^{-\frac{1}{4}}$ d'après la proposition

5.3

$$t(g_b + th_2) = g_e + H_2 + \mathcal{O}(t^2 r_b^{-2} + \text{tr}_b^{-4}), \quad (5.12)$$

avec les contrôles adaptés pour les dérivées jusqu'à l'ordre 2. Nous contrôlons donc le recollement sur l'anneau de rayons $r_D = t^{\frac{1}{4}}$ et $r_D = 2t^{\frac{1}{4}}$ qui est en $\mathcal{O}(t^2(\sqrt{tr_D})^{-2} + t(\sqrt{tr_D})^{-4} + r_D^3) = \mathcal{O}(t^{\frac{3}{4}})$, puis par définition des normes à poids nous avons

$$\|\Phi_{g^D}(g^A) - t \sum_i \lambda_i \tilde{\mathbf{o}}_i\|_{r_D^{-2} C_\beta^{2,\alpha}(g^D)} \leq Ct^{\frac{3-\beta}{4}}. \quad (5.13)$$

La seconde inégalité s'obtient en intégrant l'inégalité de la proposition 5.6 contre les $\tilde{\mathbf{o}}_i$, pour tout $\mathbf{o} \in \mathbf{O}(g_b)$, nous avons alors

$$\left| \left\langle \Phi_{g^D}(g^A) - t \sum_i \lambda_i \tilde{\mathbf{o}}_i, \tilde{\mathbf{o}} \right\rangle_{g^D} \right| \leq C \|\tilde{\mathbf{o}}\|_{L^2(g^D)} t^{\frac{3}{2}}. \quad (5.14)$$

□

Remarque 5.10. Le contrôle (5.7) est faible et ne “voit” en particulier pas le terme $\sum_j t_j \sum_i \lambda_i^j \tilde{\mathbf{o}}_{j,t}^i$ qui est de l'ordre de t_{\max} en norme $r_D^{-2} C_\beta^k(g^D)$. Le second contrôle “voit” le conoyau pour les j tels que $t_{\max}^{\frac{3}{2}} \ll t_j$.

Remarque 5.11. Avec la désingularisation naïve d'un orbifold Ricci-plat, nous avons seulement le contrôle suivant :

$$\|\text{Ric}(g^D) - \Lambda g^D\|_{r_D^{-2} C_\beta^k(g^D)} \leq C'_k t_{\max}^{\frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}},$$

et donc seulement $\|\Psi(g^D)\|_{r_D^{-2} C_\beta^k(g^D)} \leq C'_k t_{\max}^{\frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}}$

2.3 Une première obstruction

Nous pouvons maintenant utiliser la proposition 5.1 appliquée à la métrique g^A ci-dessus. Avec les contrôles du corollaire 5.9. Nous obtenons le résultat d'obstruction suivant.

Corollaire 5.12. *Soit (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein ayant une seule singularité et (N, g_b) une variété Ricci-plat ALE.*

Alors, si l'on note H_2 les termes quadratiques du développement de g_o en coordonnées géodésiques, et $(O_j^4)_j$ une base de $\mathbb{O}^4(g_b)$, l'espace des termes homogènes en r_b^{-4} asymptotiques des $\mathbf{O}(g_b)$, il est impossible de perturber g^D en une métrique

d'Einstein en jauge divergence réduite orthogonalement à $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ si

$$\int_{\mathbb{S}^3} \left(3\langle H_2, O_j^4 \rangle + O_j^4(B_\epsilon H_2, \partial_{r_\epsilon}) \right) dv_{\mathbb{S}^3} \neq 0.$$

2.4 Une question d'intégrabilité

Nous avons donc montré que l'on pouvait construire de meilleures approximations d'Einstein à l'aide d'une métrique Ricci-plate ALE fixée. Cependant, le théorème 3.42 ne dit rien sur la vitesse d'apparition (la constante ε_i du théorème 3.42) de cette variété Ricci-plate ALE. Comme dans le théorème 4.51, pour en tenir compte, nous devons fixer une jauge de projection $v \in \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ sur le noyau de la linéarisation de la courbure de Ricci sur la variété Ricci-plate ALE.

Pour ne pas endommager les contrôles de la proposition 5.6, il ne suffit pas d'ajouter une déformation du noyau et nous allons devoir supposer que les déformations que l'on considère sont intégrables pour se ramener au cas $v = 0$, adapter la proposition 5.1 à notre nouveau cadre, et utiliser les estimations de la proposition 5.6.

Remarque 5.13. L'estimation [Biq13, (61)] est incorrecte mais le résultat principal de [Biq13] reste vrai comme nous le verrons dans la suite de cette partie car la métrique d'Eguchi-Hanson n'a que des déformations intégrables. Cela signifie tout de même qu'il ne suffit pas d'ajouter des éléments du noyau approché.

Définition 5.14 (Variété Ricci-plate ALE à déformations intégrables). On dira qu'une métrique Ricci-plate ALE g_b n'a que des *déformations intégrables* si pour tout $v \in \mathbf{O}(g_b)$ suffisamment petit, il existe une métrique Ricci-plate ALE $\bar{g}_{b,v}$ satisfaisant $\bar{g}_{b,v} - (g_b + v) \perp \mathbf{O}(g_b)$ et $\|\bar{g}_{b,v} - g_b\|_{L^2(g_b)} \leq 2\|v\|_{L^2}$, et telle que $\delta_{g_b}\bar{g}_{b,v} = 0$.

Remarque 5.15. Toutes les déformations infinitésimales L^2 d'orbifolds Ricci-plats ALE sont automatiquement à divergence nulle et à trace nulle. En effet, pour un tel orbifold (M, g_b) Ricci-plat, on a $\delta_{g_b}P_{g_b} = \frac{1}{2}\nabla_{g_b}^*\nabla_{g_b}\delta_{g_b}$, et $\text{tr}_{g_b}P_{g_b} = \frac{1}{2}\nabla_{g_b}^*\nabla_{g_b}\text{tr}_{g_b}$. Ainsi, si $P_{g_b}h = 0$ et $h = \mathcal{O}(r_b^{-\delta})$ pour un $\delta > 0$, alors $\delta_{g_b}h = 0$, et $\text{tr}_{g_b}h = 0$ par le principe du maximum.

Remarque 5.16. D'après [Koi83, Corollary 3.5] si pour tout $v \in \mathbf{O}(g_b)$, il existe $(g_t)_{t \in [-1,1]}$ une courbe de métriques Ricci-plates ALE dans les mêmes coordonnées que g_b , telle que $\partial_t g_t|_{t=0} = v$, alors g_b est à déformations intégrables.

Remarque 5.17. Tous les exemples connus d'espaces Ricci-plats ALE n'ont que des déformations intégrables car ce sont des quotients d'espaces hyperkähleriens.

2.4.1 Espaces de Hölder à poids et développements asymptotiques des métriques Ricci-plates ALE

Introduisons encore de nouveaux espaces à poids qui nous permettront de contrôler les termes asymptotiques de nos métriques ALE. Le contrôle de ces termes asymptotiques sera crucial pour obtenir des résultats d'obstructions dans la suite du chapitre.

Définition 5.18 (Norme $C_{\beta, **}^{2, \alpha}$ sur un orbifold ALE). Soit (N, g_b) un orbifold ALE, soit h un 2-tenseur sur N , et supposons que $h = H^4 + \mathcal{O}(r_b^{-4-\beta})$ pour $\beta > 0$. Pour χ , une fonction de coupure à support dans un voisinage de l'infini où g_b a des coordonnées ALE, on définit sa norme $C_{\beta, **}^{2, \alpha}$ par

$$\|h\|_{C_{\beta, **}^{2, \alpha}} := \sup r_b^4 |H^4|_{g_e} + \left\| (1 + r_b)^4 (h - \chi H^4) \right\|_{C_{\beta, *}^{2, \alpha}}.$$

Cette définition est motivée par le lemme suivant.

Lemme 5.19. Soit (N, g_b) un orbifold ALE. Alors, il existe $C > 0$ telle que l'on ait, pour tout $h \in C_{\beta, *}^{2, \alpha}$, $h \perp \mathbf{O}(g_b)$,

$$\|h\|_{C_{\beta, **}^{2, \alpha}} \leq C \|(1 + r_b)^4 \bar{P}_{g_b} h\|_{r_b^{-2} C_{\beta}^{\alpha}}. \quad (5.15)$$

Démonstration. D'après la théorie des opérateurs elliptiques entre espaces de Hölder à poids, l'opérateur $\bar{P}_{g_b} : (1 + r_b)^{-4} C_{-\beta}^{2, \alpha} \rightarrow (1 + r_b)^{-4} r_b^{-2} C_{-\beta}^{\alpha}$ est Fredholm de noyau $\mathbf{O}(g_b)$ et conoyau $\mathbf{O}(g_b)$ car il n'y a pas de poids critique autre que 0 entre 2 et -4 . Cela implique que $\bar{P}_{g_b} : (1 + r_b)^{-4} C_{-\beta}^{2, \alpha} \cap \mathbf{O}(g_b)^{\perp} \rightarrow (1 + r_b)^{-4} r_b^{-2} C_{-\beta}^{\alpha} \cap \mathbf{O}(g_b)^{\perp}$ est inversible avec un inverse borné.

De plus, nous avons $\bar{P}_{g_b}^{-1} \left((1 + r_b)^{-4} r_b^{-2} C_{\beta}^{\alpha} \right) = C_{\beta, **}^{2, \alpha}$ car -4 est le premier poids critique négatif de \bar{P} en jauge divergence, et le résultat énoncé vient alors du fait que l'inverse est borné. \square

En particulier, l'analyse du théorème 4.51 s'étend au cas où (M_o, g_o) est un orbifold Ricci-plat ALE et où la norme $C_{\beta, *}^{2, \alpha}(g_o)$ est remplacée par la norme $C_{\beta, **}^{2, \alpha}(g_o)$. En effet, tous les contrôles sont locaux au voisinage des points singuliers ou venant des estimations sur l'inverse de l'opérateur sur le reste de la variété exactement comme ceux de (5.15). Nous en déduisons le contrôle suivant sur les termes asymptotiques des ALE.

Corollaire 5.20. Soit (N, g_b) un orbifold Ricci-plat ALE et notons (N^B, g_t^B) une désingularisation naïve de (N, g_b) par un arbre d'orbifolds Ricci-plats ALE recollés suivant une configuration B avec des échelles relatives t .

Soit $\bar{g}_{t,v}$ l'unique métrique (d'après le théorème 4.51) satisfaisant, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit :

1. $\|g_t^B - \bar{g}_{t,v}\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_t^B)} < 2\varepsilon$,
2. $(g_t^B + v) - \bar{g}_{t,v}$ est $L^2(g_t^B)$ -orthogonal à $\tilde{\mathbf{O}}(g_t^B)$, et
3. $\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g_t^B)^\perp} \Phi_{g_t^B}(\bar{g}_{t,v}) = 0$.

Alors, pour tout $0 < \beta < 1$, nous avons $\bar{g}_{t,v} = g_e + \bar{H}_v^4 + \mathcal{O}(r_B^{-4-\beta})$ pour \bar{H}_v^4 homogène en r_e^{-4} . Il existe aussi $\delta > 0$ tel que pour toute métrique g sur N^B satisfaisant $g - (g_t^B + v) \perp \tilde{\mathbf{O}}(g_t^B)$, et $\|(1+r_B)^4 \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g_t^B)^\perp} \Phi_{g_t^B}(g)\|_{r_B^{-2}C_\beta^\alpha(g_t^B)} < \varepsilon$ nous ayons le développement $g = g_e + H^4 + \mathcal{O}(r_B^{-4-\beta})$ pour \bar{H}_v^4 homogène en r_e^{-4} et

$$r_B^4 |H^4 - \hat{H}_v^4|_{g_t^B} \leq C \|(1+r_b)^4 \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g_t^B)^\perp} \Phi_{g_t^B}(g)\|_{r_B^{-2}C_\beta^\alpha(g_t^B)}.$$

2.4.2 Une nouvelle désingularisation naïve

Dans le cas où (M_o, g_o) est une variété Ricci-plate ALE, et qu'il n'y a donc pas de désingularisation à considérer, le théorème 4.51 se réécrit de la manière suivante.

Corollaire 5.21. *Soit (N, g_b) une variété Ricci-plate ALE. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbf{O}(g_b)$, $\|v\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_b)} < \varepsilon$, il existe une unique métrique $\bar{g}_{b,v}$ satisfaisant :*

1. $\Phi_{g_b}(\bar{g}_{b,v}) \in \mathbf{O}(g_b)$,
2. $\|g_b - \bar{g}_{b,v}\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_b)} < 2\varepsilon$,
3. $(g_b + v) - \bar{g}_{b,v}$ est orthogonal à $\mathbf{O}(g_b)$ pour le produit L^2 de g_b .

Il existe de plus $C > 0$ ne dépendant que de g_b tel qu'on ait

$$\|(g_b + v) - \bar{g}_{b,v}\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_b)} \leq C \|v\|_{C_{\beta,**}^{2,\alpha}(g_b)}^2,$$

ce qui implique le contrôle suivant

$$\bar{g}_{b,v} = g_b + v + \mathcal{O}(\|v\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_b)}^2 (1+r_b)^{-4}). \quad (5.16)$$

Démonstration. La première partie de l'énoncé est une conséquence directe du théorème 4.51. pour la seconde partie, on a $\|(1+r_b)^4 \pi_{\mathbf{O}(g_b)^\perp} \Phi_{g_b}(g_b + v)\|_{C_\beta^\alpha(g_b)(g_b)} < C \|v\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}}^2$ car $\|v\|_{C_{\beta,**}^{2,\alpha}} \sim \|v\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}}$ (v décroît comme r_b^{-4} à l'infini d'après le lemme 4.41) et car par définition $\pi_{\mathbf{O}(g_b)^\perp} d_{g_b} \Phi_{g_b}(v) = 0$. Ainsi, d'après le corollaire 5.20, nous avons (5.16). \square

Sur un orbifold d'Einstein non désingularisé, le théorème 4.51 (voir aussi le théorème 5.40 dans la suite) se réécrit de la manière suivante.

Proposition 5.22. *Soit (M_o, g_o) une variété Ricci-plate ALE. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbf{O}(g_o)$, $\|v\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_o)} < \varepsilon$, il existe une unique métrique $\bar{g}_{o,v}$ satisfaisant :*

1. $\text{Ric}(\bar{g}_{o,v}) - \frac{\mathbf{R}(\bar{g}_{o,v})}{2}\bar{g}_{o,v} + \lambda\bar{g}_{o,v} + \delta_{g_o,v}^* \delta_{g_o}\bar{g}_{o,v} = \mathbf{o}_o \in \mathbf{O}(g_o)$,
2. $\|g_o - \bar{g}_{o,v}\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_b)} < 2\varepsilon$,
3. $(g_o + v) - \bar{g}_{o,v}$ est orthogonal à $\mathbf{O}(g_o)$ pour le produit L^2 de g_o .

Il existe de plus $C > 0$ ne dépendant que de g_b tel qu'on ait

$$\|(g_o + v) - \bar{g}_{o,v}\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_o)} \leq C\|v\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_b)}^2.$$

Étant donnés $v \in \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ et $t = (t_j)_j$, nous définissons alors \bar{g}_v^D comme le recollement naïf (définition 3.3) de \bar{g}_{o,v_o} avec les $t_j\bar{g}_{b_j,v_j}$ pour $v_o \in \mathbf{O}(g_o)$ et $v_j \in \mathbf{O}(g_{b_j})$ satisfaisant

$$\bar{g}_v^D - (g^D + v) \perp \tilde{\mathbf{O}}(g^D).$$

Remarquons alors que si les orbifolds Ricci-plats ALE (N_j, g_{b_j}) n'ont que des déformations intégrables, \bar{g}_v^D est bien un recollement de variétés Ricci-plates ALE exactement comme celui de la définition 3.3, mais cette fois à la métrique \bar{g}_{o,v_o} (qui n'est pas nécessairement d'Einstein). On obtient alors comme dans la proposition 5.1 un résultat d'obstruction, mais seulement contre les coupures des déformations des \bar{g}_{b_j,v_j} .

Définissons, pour $v \in \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ l'ensemble $\tilde{\mathbf{O}}_B(\bar{g}_v^D) \subset \tilde{\mathbf{O}}(\bar{g}_v^D)$ des troncutures (comme dans la définition 4.44) des éléments des $\mathbf{O}(\bar{g}_{b_j,v_j})$ seuls. Nous avons alors les propriétés suivantes pour \bar{g}_v^D .

1. $\|g^D - \bar{g}_v^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq 2\varepsilon$,
2. les métriques sont en jauge par rapport à $g^D + v$,

$$\bar{g}_v^D - (g^D + v) \perp \tilde{\mathbf{O}}(g^D),$$

3. Notre opérateur $\Psi = \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \tilde{\Phi}$ est contrôlé indépendamment de v ,

$$\|\Psi(\bar{g}_v^D)\|_{r_D^{-2}C_\beta^0(g^D)} \leq Ct_{\max}^{\frac{2-\beta}{4}}, \quad (5.17)$$

4. pour tout $h \in C_{\beta,*}^{2,\alpha}$ et $\mathbf{o}_v^B \in \tilde{\mathbf{O}}_B(\bar{g}_v^D)$,

$$\left| \left\langle \bar{P}_{\bar{g}_v^D} h, \mathbf{o}_v^B \right\rangle \right| \leq C t^{\frac{1}{2}} \|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}} \|\mathbf{o}_v^B\|_{L^2(\bar{g}_v^D)}. \quad (5.18)$$

Remarque 5.23. La dernière estimation (5.18) se montre exactement comme le lemme 4.46.

En utilisant le contrôle (5.18) pour remplacer (5.3) dans la preuve de la proposition 5.1, nous pouvons remplacer $g_t^D + v$ par $\bar{g}_{t,v}^D$ proposition 5.1 et obtenir un contrôle valable pour $v \neq 0$ aussi.

Proposition 5.24. *Soit $0 < \alpha < 1$, et (M, g^D) une désingularisation naïve de (M_o, g_o) par des variétés Ricci-plates ALE, $(N_j, g_{b_j})_j$. Soit alors $v \in \mathbf{O}(g^D)$ et soit $\hat{g}_v := \hat{g}_{\varphi,t,v}$ l'unique métrique d'Einstein modulo obstructions proche de g^D satisfaisant :*

1. $\|\hat{g}_v - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq 2\varepsilon$,
2. $\hat{g}_v - (g^D + v)$ est orthogonal à $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ pour le produit L^2 de g^D ,

obtenue par le théorème 4.51. Supposons que \hat{g}_v soit d'Einstein.

Soit g_v^A une métrique satisfaisant :

1. $\|g_v^A - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq 2\varepsilon$,
2. $g_v^A - (g^D + v)$ est orthogonal à $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ pour le produit L^2 de g^D ,

alors, en notant $\Psi(g_v^A) = \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \Phi_{g^D}(g_v^A)$, on a

$$\|\hat{g}_v - g_v^A\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq C \left\| \Psi(g_v^A) \right\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)}, \quad (5.19)$$

et si l'on note $\mathbf{o}_v^B := \pi_{\tilde{\mathbf{O}}_B(\bar{g}_v^D)} \Phi_{g^D}(g_v^A)$, on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{o}_v^B\|_{L^2(g^D)} \leq & \left(\|\Psi(g_v^A)\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} + \|\Psi(\bar{g}_v^D)\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)} \right. \\ & \left. + t_{\max}^{\frac{1}{2}} \right) \|\Psi(g_v^A)\|_{r_D^{-2} C_\beta^\alpha(g^D)}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

2.4.3 Une meilleure approximation de métrique d'Einstein modulo obstructions

Soit $v_o \in \mathbf{O}(g_o)$ et \bar{H}_2 les termes quadratiques du développement de \bar{g}_{o,v_o} dans des coordonnées locales où elle est en jauge divergence par rapport à g_e autour d'un point singulier p où nous avons donc $\bar{g}_{o,v_o} = g_e + \bar{H}_2 + \mathcal{O}(r_e^3)$, et où l'on sait que $\Phi_{g_o}(\bar{g}_{o,v_o}) = \mathbf{o}_o = \mathbf{O}_o + \mathcal{O}(r_e^2)$ avec $\text{tr}_{g_e} \mathbf{O}_o = 0$ et $\delta_{g_e} \mathbf{O}_o = 0$.

En développant en g_e , grâce aux formules du début de la preuve du théorème 4.51 pour $\bar{P}_{g_o} = d_{g_o} \Phi_{g_o}$, nous avons pour $\lambda = \frac{\bar{R}(\bar{g}_{o,v_o})}{4}$

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi_{g_o}(\bar{g}_{o,v_o}) - \mathbf{O}_o = \lambda g_e + \bar{P}_e(\bar{H}_2) - \mathbf{O}_o + \mathcal{O}(r_e^2) \\ &= \lambda g_e + \frac{1}{2} \left(\nabla_e^* \nabla_e \bar{H}_2 - \nabla_e^2 \text{tr}_e \bar{H}_2 + (\Delta_e \text{tr}_e \bar{H}_2) g_e \right) - \mathbf{O}_o + \mathcal{O}(r_e^2) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Proposition 5.25. *Soit (N, g_b) un orbifold Ricci-plat ALE asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ et \bar{H}_2 un 2-tenseur homogène quadratique à divergence nulle sur \mathbb{R}^4/Γ , $\lambda \in \mathbb{R}$ et \mathbf{O}_o un 2-tenseur constant sur \mathbb{R}^4/Γ tels qu'on ait :*

$$\bar{P}_e \bar{H}_2 + \lambda g_e = \mathbf{O}_o.$$

Alors, il existe un 2-tenseur \bar{h}_2 , et des réels $\bar{\lambda}_i$ tels que $(\bar{h}_2, \bar{\lambda}_i)$ soit une solution de

$$\begin{aligned} \bar{P}_b \bar{h}_2 + \lambda g_b &= \chi \mathbf{O}_o + \sum_i \bar{\lambda}_i \mathbf{o}_i, \\ |\bar{h}_2 - \chi \bar{H}_2|_{g_b} &= \mathcal{O}(r_b^{-2}), \end{aligned}$$

où χ est une fonction de coupure à support dans un voisinage de l'infini de (N, g_b) où les coordonnées ALE sont définies et où

$$\bar{\lambda}_i := - \int_{\mathbb{S}^3/\Gamma} \left(3 \langle \bar{H}_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + O_i^4 \left(\nabla_e \text{tr}_e \bar{H}_2, \partial_{r_e} \right) \right) dv_{\mathbb{S}^3/\Gamma} + \int_N \chi \langle \mathbf{O}_o, \mathbf{o}_i \rangle_{g_b} dv_b.$$

L'ensemble des solutions est en fait $(\bar{h}_2 + \mathbf{O}(g_b), \bar{\lambda}_i)$.

Démonstration. Nous avons $\bar{P}_b(\chi \bar{H}_2) + \lambda g_b - \chi \mathbf{O}_o \in r_b^{-2} C_\beta^\alpha(g_b)$ pour $0 < \beta < 1$ car dans un voisinage de l'infini, $g_b - g_e = \mathcal{O}(r_b^{-4})$.

Le lemme 4.42 est valable avec l'opérateur \bar{P}_b plutôt que l'opérateur P_b grâce au théorème 4.51 dans le cas où $(M_o, g_o) = (N, g_b)$ est un orbifold Ricci-plat ALE. Il existe donc $\bar{h}' \in C_\beta^{2,\alpha}(g_b)$ tel que $\bar{P}_b(\chi \bar{H}_2 + \bar{h}') + \lambda g_b = \chi \mathbf{O}_o + \sum_i \bar{\lambda}_i \mathbf{o}_i$ avec

$$\bar{\lambda}_i = - \int_{\mathbb{S}^3/\Gamma} \left(3 \langle \bar{H}_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + \frac{1}{2} O_i^4 \left(\nabla_e \text{tr}_e \bar{H}_2, \partial_{r_e} \right) \right) dv_{\mathbb{S}^3/\Gamma} + \int_N \chi \langle \mathbf{O}_o, \mathbf{o}_i \rangle_{g_b} dv_b, \quad (5.22)$$

où O_i^4 est le terme d'ordre -4 du développement de \mathbf{o}_i à l'infini. En effet, par intégration par parties, en utilisant le fait que $\text{tr}_b \mathbf{o}_i = \langle g_b, \mathbf{o}_i \rangle_{g_b} = 0$ et $\delta_b \mathbf{o}_i = 0$,

nous obtenons,

$$\begin{aligned}
\langle \bar{P}_b(\chi \bar{H}_2), \mathbf{o}_j \rangle_{L^2} &= \frac{1}{2} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{r_b \leq \rho} \langle \nabla_b^* \nabla_b \chi \bar{H}_2 - \nabla_b^2 \text{tr}_b \chi \bar{H}_2, \mathbf{o}_j \rangle_{g_b} dv_{g_b} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{r_b = \rho} \left(\langle \chi \bar{H}_2, \nabla_n \mathbf{o}_j \rangle_{g_b} - \langle \nabla_n (\chi \bar{H}_2), \mathbf{o}_j \rangle_{g_b} \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{o}_j(\nabla_b \text{tr}_b \chi \bar{H}_2, \partial_{r_b}) \right) dS_\rho \\
&= - \int_{\mathbb{S}^3/\Gamma} \left(3 \langle \bar{H}_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + \frac{1}{2} O_i^4(\nabla_e \text{tr}_e \bar{H}_2, \partial_{r_e}) \right) dv_{\mathbb{S}^3/\Gamma}.
\end{aligned}$$

Maintenant, l'intégrale $\int_N \chi \langle \mathbf{O}_o, \mathbf{o}_i \rangle_{g_b} dv_b$ converge bien que $\langle \mathbf{O}_o, \mathbf{o}_i \rangle_{g_b} = \mathcal{O}(r_b^{-4})$ car dans des coordonnées ALE, $r_b^4 \mathbf{o}_i = \varphi_{ij} dx^i dx^j + \mathcal{O}(r_b^{-1})$, où les $\varphi_{ij} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions propres non constantes et ont donc des moyennes nulles. Ainsi, $\int_{\{r_b = \rho\}} \langle \mathbf{O}_o, \mathbf{o}_i \rangle_{g_b} dS_\rho = \mathcal{O}(r_b^{-2})$ et l'intégrale converge bien.

Les valeurs de $\bar{\lambda}_i$ de (5.22) assurent donc bien que l'on ait

$$\bar{P}_b(\chi \bar{H}_2) + \lambda g_b - \chi \mathbf{O}_o - \sum_i \bar{\lambda}_i \mathbf{o}_i \perp_{g_b} \mathbf{O}(g_b).$$

□

Maintenant, si l'on a une métrique d'Einstein (sans obstruction) nous retrouvons l'obstruction indépendante de la jauge de la remarque 5.5 (voir la fin de la preuve de [Biq13, Proposition 3.1]).

Corollaire 5.26. *Soit H_2 un 2-tenseur quadratique satisfaisant $d_e \text{Ric}(H_2) = \Lambda g_e$, et soit V un champ de vecteur dont les coefficients sont homogènes et en r_e^3 et satisfont $\delta_e \delta_e^* V = -\delta_e H_2$, et définissons $\bar{H}_2 := H_2 + \delta_e^* V$ qui satisfait $\delta_e \bar{H}_2 = 0$. Alors, nous avons*

$$\bar{\lambda}_i = \lambda_i,$$

où

$$\bar{\lambda}_i := - \int_{\mathbb{S}^3/\Gamma} \left(3 \langle \bar{H}_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + \frac{1}{2} O_i^4(\nabla_e \text{tr}_e \bar{H}_2, \partial_{r_e}) \right) dv_{\mathbb{S}^3/\Gamma},$$

et

$$\lambda_i := - \int_{\mathbb{S}^3/\Gamma} \left(3 \langle H_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + O_i^4(B_e H_2, \partial_{r_e}) \right) dv_{\mathbb{S}^3/\Gamma}$$

Soit (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein et $v \in \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$. Nous définissons alors \bar{g}_v^A comme le recollement naïf (définition 3.3) de \bar{g}_{o,v_o} avec les $t_j(\bar{g}_{b_j,v_j} + t_j \bar{h}_2^j)$ pour $v_o \in \mathbf{O}(g_o)$ et $v_j \in \mathbf{O}(g_{b_j})$ et \bar{h}_2^j asymptotique à \bar{H}_2^j et tel que $\bar{P}_{\bar{g}_{b_j,v_j}} \bar{h}_2^j + \lambda \bar{g}_{b_j,v_j} = \chi \mathbf{O}_o$, où \bar{H}_2^j sont les termes quadratiques du développement de \bar{g}_{o,v_o} dans des coordonnées locales où elle est en jauge divergence par rapport à g_e autour de

chaque point singulier p_j satisfaisant $\bar{g}_v^D - (g^D + v) \perp \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$, et $\chi_{N_j^t} \bar{h}_2^j \perp \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$. Nous avons les contrôles suivants.

Corollaire 5.27. *Soient $0 < \beta < 1$, (M, g^D) une désingularisation naïve d'un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) par des variétés Ricci-plates ALE (N_j, g_{b_j}) dont les déformations infinitésimales L^2 sont intégrables. Notons de plus $(\mathbf{o}_j^i)_i$ une base orthonormée de $\mathbf{O}(g_{b_j})$.*

Alors, il existe des réels $\bar{\lambda}_i^j$ pour lesquels on a le contrôle suivant : pour $t_{\max} > 0$ suffisamment petit, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $C_k > 0$, tel que

$$\left\| \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \Phi_{g^D}(\bar{g}^A) \right\|_{r_D^{-2} C_\beta^k(g^D)} \leq C_k t_{\max}^{\frac{3-\beta}{4}}, \quad (5.23)$$

et pour tout i_0 et j_0 , on ait en notant $\tilde{\mathbf{o}}_j^i$ la coupure de \mathbf{o}_j^i sur M (voir définition 4.44),

$$\left\langle \Phi_{g^D}(\bar{g}^A) - \sum_j t_j \sum_i \bar{\lambda}_i^j \tilde{\mathbf{o}}_j^i, \tilde{\mathbf{o}}_{j_0}^{i_0} \right\rangle_{L^2(g^D)} \leq C_0 t_{\max}^{\frac{3}{2}}. \quad (5.24)$$

Tout en satisfaisant,

1. $\|\bar{g}^A - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq 2\varepsilon$,
2. $\bar{g}^A - g^D$ est $L^2(g^D)$ -orthogonal à $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$.

Démonstration. Traitons encore une fois le recollement en un point singulier p et à l'échelle $t > 0$ d'une bulle (N, g_b) car l'estimation est locale. Nous noterons \bar{H}_2 les termes quadratiques du développement de \bar{g}_{o,v_o} au point p en jauge divergence par rapport à g_e , et \bar{h}_2 le 2-tenseur obtenu par la proposition 5.25 satisfaisant $\chi_{N_j^t} \bar{h}_2^j \perp \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$.

Sur M_o^{16t} , nous avons par hypothèse

$$\Phi_{g_o}(\bar{g}_{o,v_o}) = \mathbf{o}_o \in \mathbf{O}(g_o), \quad (5.25)$$

et sur N^{16t} , nous avons

$$\Phi_{g_b}(t(g_b + t\bar{h}_2)) = \chi \mathbf{O}_o + t \sum_i \bar{\lambda}_i \mathbf{o}_i + \mathcal{O}(r_D^2). \quad (5.26)$$

Maintenant, au point p , le développement de \bar{g}_{o,v_o} dans des coordonnées locales où elle est en jauge divergence par rapport à g_e est

$$\bar{g}_{o,v_o} = g_e + \bar{H}_2 + \mathcal{O}(r_o^3), \quad (5.27)$$

le développement de \mathbf{o}_o en p est

$$\mathbf{o}_o = \mathbf{O}_o + \mathcal{O}(r_o^2).$$

De même, $t(g_b + t\bar{h}_2)$ a le développement suivant pour $t^{-\frac{1}{4}} \leq r_b \leq t^{-\frac{1}{4}}$

$$t(g_b + t\bar{h}_2) = g_e + \bar{H}_2 + \mathcal{O}(t^2 r_b^{-2} + \text{tr}_b^{-4}), \quad (5.28)$$

avec les contrôles adaptés pour les dérivées jusqu'à l'ordre 2. Nous avons finalement sur l'anneau de rayons $r_D = t^{\frac{1}{4}}$ et $r_D = 2t^{\frac{1}{4}}$,

$$\Phi_{g^D}(\bar{g}^A) - \tilde{\mathbf{o}}_o - t \sum_i \bar{\lambda}_i \tilde{\mathbf{o}}_i = \mathcal{O}(t^{\frac{3}{4}}). \quad (5.29)$$

D'après (5.25), (5.26) et (5.29) appliqués à toutes les singularités, nous avons l'estimation (5.23). Enfin, grâce à (5.26) appliqué à toutes les singularités, nous avons (5.24). \square

Lemme 5.28. *Soient $\bar{\lambda}_i^j(v)$ les réels du corollaire 5.27 précédent pour le recollement de métriques $(N_j, \bar{g}_{b_j, v_j})$ plutôt que (N_j, g_{b_j}) . Nous avons le contrôle suivant,*

$$|\bar{\lambda}_i^j(v) - \bar{\lambda}_i^j(0)| \leq C \left(\|v\|_{C_0^0(g^D)} + \|\bar{H}_2\|_{C_2^0(g_o)} \right) \|v\|_{C_0^0(g^D)}. \quad (5.30)$$

Démonstration. Nous cherchons à contrôler les variations de

$$\bar{\lambda}_i = - \int_{\mathbb{S}^3/\Gamma} \left(3\langle \bar{H}_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + O_i^4 \left(\nabla_e \text{tr}_e \bar{H}_2, \partial_{r_e} \right) \right) dv_{\mathbb{S}^3/\Gamma} + \int_N \chi \langle \mathbf{O}_o, \mathbf{o}_i \rangle_{g_b} dv_b$$

en fonction de $v = \tilde{v}_o + \tilde{v}_j$.

Pour $\bar{H}_2(0)$ et $\bar{H}_2(v_o)$, les termes quadratiques des développements de g_o et \bar{g}_{o, v_o} , nous avons

$$\|\bar{H}_2(0) - \bar{H}_2(v_o)\|_{C_2^0(g_e)} \leq C \|v_o\|_{C^0(g_o)} \quad (5.31)$$

et,

$$|\mathbf{O}_o|_{g_e} \leq C \|v_o\|_{C^0(g_o)} \quad (5.32)$$

d'après le théorème 5.40 qui est énoncé dans la suite, mais qui est une conséquence directe du théorème 4.51 ne reposant que sur le fait que l'analyse sur un orbifold peut se faire sans poids à leurs points singuliers en considérant des revêtements locaux à ses points singuliers.

D'après le corollaire 5.21 précédent, pour $v_j \in \mathbf{O}(g_{b_j})$ suffisamment petit, nous avons

$$\bar{g}_{b_j, v_j} = g_{b_j} + v_j + \mathcal{O}(\|v_j\|_{C_{\beta, *}(g_{b_j})}^{2, \alpha} (1 + r_{b_j})^{-4}). \quad (5.33)$$

Cela implique que les termes d'ordre -4 des déformations infinitésimales de \bar{g}_{b_j, v_j} sont proches de ceux des déformations infinitésimales de g_{b_j} et que leurs différences sont de l'ordre de $\mathcal{O}(\|v_j\|_{C_{\beta, *}^{2, \alpha}(g_{b_j})})$.

On en déduit donc que

$$|\bar{\lambda}_i^j(v) - \bar{\lambda}_i^j(0)| \leq C \left(\|v\|_{C_0^0(g^D)} + \|\bar{H}_2\|_{C_2^0(g_o)} \right) \|v\|_{C^0(g^D)}.$$

□

Remarque 5.29. En supposant que $\mathbf{O}(g_o) = 0$, on peut en réalité être un peu plus précis dans l'expression de la différence $\bar{\lambda}_i(v) - \bar{\lambda}_i(0)$ en revenant à leur obtention par intégration par parties, sur (N, g_b) dans la proposition 5.25. Nous obtenons alors $\bar{\lambda}_i(v) - \bar{\lambda}_i(0) = \langle \bar{Q}_{g_b}^{(2)}(v, h_2) - \lambda v, \mathbf{o}_i \rangle + \mathcal{O}(\|v\|_{C^0}^2)$, où $\bar{Q}_{g_b}^{(l)}$ sont les termes l -linéaires du développement de Φ_{g_b} en g_b .

Remarque 5.30. La différence entre $\bar{\lambda}_i(v)$ et $\bar{\lambda}_i(0)$ devient alors assez explicite dans le cas où g_b est hyperkählérien. Dans la proposition 4 de [Biq17], le terme $\bar{Q}_{g_b}^{(2)}(v, h_2) - \lambda v$ est calculé dans le cas de la métrique d'Eguchi-Hanson en supposant que $\bar{\lambda}_i(0) = 0$. Dans le cas le moins dégénéré (où la partie autoduale de la courbure en p , $\mathbf{R}_+(H_2)$ est de rang 2 et $\Lambda \neq 0$), la différence $\bar{\lambda}_i(v) - \bar{\lambda}_i(0) = \langle v, \mathbf{o}_i \rangle (\mathbf{o}_i(\mathbf{R}_+(H_2)) - \Lambda \mathbf{o}_i)$ ne s'annule jamais pour $v \neq 0$.

Remarque 5.31. Dans le cas où il existe des déformations infinitésimales non intégrables de g_b , on ne peut plus espérer voir d'obstructions par les méthodes précédentes. En effet, la métrique se développe en $\bar{g}_{b, v} = g_b + v + w + \mathcal{O}(|v|^3)$, où w satisfait :

$$\bar{Q}_{g_b}^{(2)}(v, v) + \bar{P}_{g_b}(w) = \pi_{\mathbf{O}(g_b)} \bar{Q}_{g_b}^{(2)}(v, v) \in \mathbf{O}(g_b),$$

et on a potentiellement $\pi_{\mathbf{O}(g_b)} \bar{Q}_{g_b}^{(2)}(v, v) = \mathcal{O}(|v|^2)$ si v n'est pas une déformation intégrable. D'autre part, en considérant la métrique $\bar{g}_{b, v}^t := \frac{1}{t} \bar{g}_v^A$, on a le développement suivant de Φ_{g_b} sur N^{16t} ,

$$\Phi_{g_b}(\bar{g}_{b, v}^t) = \Phi_{g_b}(\bar{g}_{b, v}) + t \bar{P}_b(\bar{h}_2) + t Q_{g_b}^{(2)}(v, h_2) + \mathcal{O}(t^2).$$

Avant l'ordre t^2 il y a donc trois premières sources d'obstructions :

1. la projection de $\Phi_{g_b}(\bar{g}_{b, v}) = \mathcal{O}(|v|^2)$ sur $\mathbf{O}(g_b)$,
2. la projection de $t \bar{P}_b(h_2) = \mathcal{O}(t)$ sur $\mathbf{O}(g_b)$, et
3. la projection de $t Q_{g_b}^{(2)}(v, h_2) = \mathcal{O}(t|v|)$ sur $\mathbf{O}(g_b)$.

Il n'y a alors que si $\text{Ric}(\bar{g}_{b, v}) = 0$, ou si $|v| \ll t$ que l'on peut espérer voir les obstructions d'ordre t qui sont celles qui nous intéressent.

Corollaire 5.32. *Soit (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein, et $(M_i, g_i)_i$ une suite de variétés d'Einstein convergeant vers (M_o, g_o) au sens de Gromov-Hausdorff et telle que les éclatements non triviaux au point singulier apparaissant le plus lentement (c'est-à-dire qui a la courbure la plus basse) converge vers (N, g_b) , une variété (c'est-à-dire sans formation d'arbre de singularités) Ricci-plate ALE dont les déformations infinitésimales sont intégrables.*

Alors, si l'on note H_2 les termes quadratiques du développement de g_o en coordonnées géodésiques, et $(O_j^A)_j$ une base de $\mathbb{O}^A(g_b)$, on a :

$$\int_{\mathbb{S}^3} \left(3\langle H_2, O_j^A \rangle + O_j^A(B_\epsilon H_2, \partial_{r_\epsilon}) \right) dv_{\mathbb{S}^3} = 0.$$

Démonstration. Soit (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein, et supposons qu'il existe une suite de métriques d'Einstein $(M_i, g_i)_i$ convergeant vers (M_o, g_o) au sens de Gromov-Hausdorff. D'après le corollaire 4.40, il existe une sous-suite toujours notée $(M_i, g_i)_i$ telle que pour i assez grand, il existe une désingularisation naïve $(M, g_{t_i}^D)$, et $v_i \in \tilde{\mathbf{O}}(g_{t_i}^D)$ avec $v_i \rightarrow 0$ et un difféomorphisme $\varphi_i : M \rightarrow M$ tel que $\varphi_i^* g_i = \hat{g}_{t_i, v_i}$, où \hat{g}_{t_i, v_i} est la perturbation du théorème 4.51. Fixons alors k_0 pour lequel $t_{k_0, i} = t_{\max, i}$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que k_0 est constant car il n'y a qu'un nombre fini de singularités. Supposons que l'orbifold Ricci-plate ALE apparaissant à la singularité p_{k_0} soit lisse, et qu'il n'y ait donc pas d'arbre de singularités.

D'après le corollaire 5.27, il existe une approximation \bar{g}_{t_i, v_i}^A satisfaisant

$$\|\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \Phi_{g_{t_i}^D}(\bar{g}_{t_i, v_i}^A)\|_{r_{D, i}^{-2} C_{\beta}^{\alpha}(g_{t_i, v_i}^D)} \leq C t_{\max, i}^{\frac{3-\beta}{4}},$$

et

$$\left\| \mathbf{o}_i^B - \sum_k t_{k, i} \sum_j \bar{\lambda}_j^k(v_i) \tilde{\mathbf{o}}_{k, i, t_i}^j \right\|_{L^2} \leq C t_{\max, i}^{\frac{3}{2}},$$

où $\tilde{\mathbf{o}}_{k, i}^j$ est une base orthonormée d'éléments de $\tilde{\mathbf{O}}_B(\bar{g}_{t_i, v_i}^D)$ et où l'on a repris la notation $\mathbf{o}_i^B = \pi_{\tilde{\mathbf{O}}_B(\bar{g}_{t_i, v_i}^D)} \Phi_{g_{t_i}^D}(\bar{g}_{t_i, v_i}^A)$, et

1. $\|\bar{g}_{t_i, v_i}^A - g_{t_i}^D\|_{C_{\beta, * }^{2, \alpha}(g_{t_i}^D)} \leq 2\varepsilon$,
2. $\bar{g}_{t_i, v_i}^A - (g_i^D + v_i)$ est orthogonal à $\tilde{\mathbf{O}}(g_{t_i}^D)$ pour le produit L^2 de $g_{t_i}^D$.

Utilisons la proposition 5.24. Avec les contrôles (5.17) et (5.23), l'estimation (5.20) pour $0 < \beta < \frac{1}{2}$ se réécrit

$$t_{k, i} |\bar{\lambda}_j^k(v_i)| \leq C \left(t_{\max, i}^{\frac{3-\beta}{4}} + t_{\max, i}^{\frac{2-\beta}{4}} \right) t_{\max, i}^{\frac{3-\beta}{4}} \leq C t_{\max, i}^{\frac{5-2\beta}{4}} \ll t_{\max, i}. \quad (5.34)$$

Maintenant, nous savons que $v_i \rightarrow 0$, et d'après le lemme 5.28, cela implique que les $\bar{\lambda}_j^k(v_i)$ tendent vers les $\bar{\lambda}_j^k(0)$. Les $\bar{\lambda}_j^{k_0}(0)$ n'étant que des constantes dépendant uniquement de la géométrie de (M_o, g_o) et de celle de (N_k, g_{b_k}) , elles doivent nécessairement s'annuler pour que l'inégalité (5.34) soit satisfaite lorsque t_i tend vers zéro. En revenant à l'expression des $\bar{\lambda}_j^{k_0}(0)$ nous obtenons l'obstruction que l'on peut écrire en coordonnées géodésiques grâce au corollaire 5.26. On obtient ainsi l'égalité énoncée. \square

Remarque 5.33. La preuve donne un résultat plus fort : si toutes les échelles d'apparitions des singularités sont comparables (c'est-à-dire, s'il existe $0 < \beta < 1$ tel que pour tout k, k' , on ait $t_{k',i}^{\frac{5-\beta}{4}} < t_{k,i} < t_{k',i}^{\frac{4}{5-\beta}}$) et qu'il n'y a que des *variétés* à déformations intégrables dans l'arbre de singularités, alors l'obstruction est valable à toutes les singularités de l'orbifold. Nous verrons dans la section suivante que l'on peut montrer généralement que l'obstruction est satisfaite à tous les points singuliers.

3 Obstructions à des désingularisations partielles et totales

Notre théorème d'existence et d'unicité de la désingularisation d'un orbifold d'Einstein par une métrique d'Einstein modulo obstructions est en fait aussi valable pour les désingularisations *partielles* d'un orbifold. Cela nous permet de découpler plus précisément les influences des différentes bulles. Nous en déduisons principalement dans le corollaire 5.43 que la première obstruction exhibée dans le corollaire 5.32 est valable à *tous* les points singuliers.

3.1 Désingularisations naïves partielles et espaces à poids

Dans la définition 3.3, nous avons défini les désingularisations naïves d'un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) par le recollement d'arbres d'orbifolds Ricci-plats ALE (N_j, g_{b_j}) . Ici, nous définissons de la même manière des désingularisations partielles en n'imposant pas à la désingularisation d'avoir la topologie d'une variété, mais seulement d'un orbifold "moins singulier" que M_o .

On choisit donc S_o un sous-ensemble des singularités de M_o et pour chaque j , S_j un sous-ensemble des singularités de N_j , et les recollements des ALE ne se feront qu'en ces points singuliers et exactement comme dans la définition 3.3. La différence est que l'on obtient ainsi un orbifold singulier aux singularités de $M_o \setminus S_o$

et aux singularités de $N_j \setminus S_j$. En notant $S = (S_o, (S_j)_j)$ et $M := M_o \#_j N_j$ où la combinatoire des recollements est donnée par une configuration de désingularisation D (en les points de S seulement), on définit les désingularisations naïves exactement comme dans la définition 3.3. Nous allons aussi adapter les définitions des fonctions r_o , r_b et r_D en reprenant donc les notations de la section 1.1 du chapitre précédent.

Définition 5.34 (Fonction r_{o,S_o} sur un orbifold). On définit r_{o,S_o} une fonction lisse sur M_o satisfaisant $r_{o,S_o} := \Phi_k^* r_e$ sur chaque voisinage U_k de $p_k \in S_o$, et telle que sur le reste de M_o , on ait $\varepsilon_0 < r_{o,S_o} < 1$ (les différents choix possibles seront équivalents pour nos applications).

Définition 5.35 (Fonction r_{b_j,S_j} sur un orbifold ALE). On définit r_{b_j,S_j} une fonction lisse sur N_j satisfaisant $r_{b_j,S_j} := \Psi_k^* r_e$ sur chaque voisinage U_k de $p_k \in S_j$, et $r_{b_j,S_j} := \Psi_\infty^* r_e$ sur U_∞ , et telle que $\varepsilon_0 < r_{b_j,S_j} < \varepsilon_0^{-1}$ sur le reste de N_j (les différents choix possibles seront équivalents pour nos applications).

Définition 5.36 (Fonction $r_{D,S}$ sur une désingularisation naïve). Sur une désingularisation naïve (M, g^D) , on définit une fonction $r_{D,S}$ de la manière suivante :

1. $r_{D,S} = r_{o,S_o}$ sur M_o^t ,
2. $r_{D,S} = \sqrt{T_j} r_{b_j,S_j}$ sur chaque N_j^t .

La fonction $r_{D,S}$ est lisse sur M .

Espaces de Hölder à poids sur les orbifolds et ALE. Pour les orbifolds, on considérera une norme qui sera bornée pour les tenseurs qui décroissent aux points de S_o .

Définition 5.37 (Norme à poids sur un orbifold). Soit $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$ et (M_o, g_o, S_o) un orbifold. Définissons alors pour tout tenseur s sur M_o ,

$$\|s\|_{C_\beta^{k,\alpha}(g_o,S_o)} := \sup_{M_o} r_{o,S_o}^{-\beta} \left(\sum_{i=0}^k r_{o,S_o}^i |\nabla_{g_o}^i s|_{g_o} + r_{o,S_o}^{k+\alpha} [\nabla_{g_o}^k s]_{C^\alpha(g_o)} \right).$$

Définition 5.38 (Norme à poids sur les orbifolds ALE). Soit $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < 1$ sur un orbifold ALE (N, g_b, S) , on définit pour tout tenseur s sur N la norme suivante

$$\|s\|_{C_\beta^{k,\alpha}(g_b,S)} := \sup_N \left\{ \max(r_{b,S}^\beta, r_{b,S}^{-\beta}) \left(\sum_{i=0}^k r_{b,S}^i |\nabla_{g_b}^i s|_{g_b} + r_{b,S}^{k+\alpha} [\nabla_{g_b}^k s]_{C^\alpha(g_b)} \right) \right\}.$$

qui est bornée sur les tenseurs décroissant à l'infini et aux points de S .

Espaces fonctionnels sur les désingularisations partielles. Supposons que (M, g^D, S) soit une désingularisation naïve partielle de (M_o, g_o, S_o) par un arbre d'orbifolds Ricci-plats ALE (N_j, g_{b_j}, S_j) . Pour t_{\max} suffisamment petit, on définit la norme suivante.

Définition 5.39 (Norme à poids adaptée aux arbres de singularités). Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$. On définit pour $s \in TM^{\otimes l_+} \otimes T^*M^{\otimes l_-}$ un tenseur $(l_+, l_-) \in \mathbb{N}^2$, avec $l := l_+ - l_-$ le poids conforme associé à la section.

$$\|s\|_{C_\beta^{k,\alpha}(g^D,S)} := \|\chi_{M_o^t} s\|_{C_\beta^{k,\alpha}(g_o,S_o)} + \sum_j T_j^{\frac{l}{2}} \|\chi_{N_j^t} s\|_{C_\beta^{k,\alpha}(g_{b_j},S_j)}.$$

Toute l'analyse précédente de cette section concernant des orbifolds avec les poids issus de r_o et des r_{b_j} est valable avec les r_{o,S_o} et r_{j,S_j} en utilisant des revêtements locaux finis aux points singuliers n'appartenant pas à S_o , ou aux S_j . Nous noterons les différentes constantes en précisant les points de S_o , S_j ou S où les recollements ont lieu.

3.2 Résolution de l'équation d'Einstein modulo obstructions pour les désingularisations partielles

Les singularités orbifolds ne modifiant pas l'analyse en considérant des revêtements locaux au niveau des points laissés singuliers, la preuve du théorème 4.51 est en fait valable pour les désingularisations *partielles* d'orbifolds d'Einstein.

Théorème 5.40. Soient $0 < \beta < 1$, (M_o, g_o, S_o) un orbifold d'Einstein compact ou ALE tel que $\text{Ric}(g_o) = \Lambda g_o$, pour $\Lambda \in \mathbb{R}$, et soit D une configuration de désingularisation partielle par des orbifolds Ricci-plats ALE $(N_j, g_{b_j}, S_j)_j$.

Alors, il existe $\tau > 0$ et $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de β et des constantes C_{o,S_o} , ε_{o,S_o} , C_{j,S_j} et ε_{j,S_j} du lemme 4.42, et $C_e > 0$ et $\varepsilon_e > 0$ du lemme 4.19 tels que pour toute désingularisation naïve $g_S^D := g_{\varphi,t,S}^D$, satisfaisant $t_{\max} < \tau$, et $\varphi = (\varphi_k)_k \in \text{Isom}(\mathbb{R}^4/\Gamma_k)_k$, et pour tout $v \in \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ satisfaisant $\|v\|_{C_{\beta,*}^0(g^D)} < \varepsilon$, il existe une unique solution $\hat{g}_{v,S} = \hat{g}_{\varphi,t,v,S}$ de l'équation

$$\Phi_{g_S^D}(\hat{g}_{v,S}) \in \tilde{\mathbf{O}}(g_S^D),$$

satisfaisant les conditions suivantes :

1. $\|\hat{g}_{v,S} - g_S^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}} \leq 2\varepsilon$,
2. $\hat{g}_{v,S} - (g_S^D + v)$ est orthogonal à $\tilde{\mathbf{O}}(g_S^D)$ pour le produit L^2 de g_S^D .

De plus, il existe $C > 0$ indépendant de t et v telle qu'on ait

$$\|\hat{g}_{v;S} - (g_S^D + v)\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_S^D)} \leq C \left(\|v\|_{C_{\beta}^{2,\alpha}(g_S^D)}^2 + t^{\frac{2-\beta}{4}}_{\max;S} \right).$$

3.3 Désingularisations totales et approximations d'Einstein modulo obstructions

Soit (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein et soit p , un de ses points singuliers, dont la singularité est \mathbb{R}^4/Γ . Définissons alors S_o le complémentaire de $\{p\}$ parmi les points singuliers de M_o , soit $(M_{S_o}, g_{S_o}^D)$ une désingularisation partielle de (M_o, g_o) ne laissant que le point p singulier et soit (M_{S_o}, \hat{g}_{S_o}) une perturbation de $(M_{S_o}, g_{S_o}^D + v_{S_o})$ satisfaisant

$$\Phi_{g_{S_o}^D}(\hat{g}_{S_o}) = \tilde{\mathbf{o}}^{(S_o)} \in \tilde{\mathbf{O}}(g_{S_o}^D).$$

La métrique \hat{g}_{S_o} a le développement suivant dans des coordonnées locales où elle est en jauge divergence par rapport à g_e

$$\hat{g}_{S_o} = g_e + \hat{H}_2 + \mathcal{O}(r_o^3) \quad (5.35)$$

où $\bar{P}_e \hat{H}_2 + \lambda g_e = \tilde{\mathbf{O}}_o$, avec $\tilde{\mathbf{O}}_o$ la limite de $\tilde{\mathbf{o}}^{(S_o)} \in \tilde{\mathbf{O}}(g_{S_o}^D)$ en zéro qui satisfait $|\tilde{\mathbf{O}}_o|_{g_e} \leq C \|v_{S_o}\|_{C_0^0(g_o)}$ d'après la proposition 5.22, et où $\lambda = \frac{\bar{R}(\hat{g}_{S_o})}{4}$.

Soit de plus (N, g_b) un orbifold Ricci-plat ALE asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ , χ une fonction de coupure à support dans un voisinage de l'infini où g_b a des coordonnées ALE, et $(\mathbf{o}_i)_i$ une base orthonormée de $\mathbf{O}(g_b)$. D'après la proposition 5.25, il existe alors \hat{h}_2 un 2-tenseur sur N asymptotique à \hat{H}_2 et des réels $\hat{\lambda}_i$ tels qu'on ait

$$\bar{P}_b \hat{h}_2 + \lambda g_b = \chi \tilde{\mathbf{O}}_o + \sum_i \hat{\lambda}_i \mathbf{o}_i$$

avec

$$\hat{\lambda}_i = - \int_{\mathbb{S}^3/\Gamma} 3 \langle \hat{H}_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + \frac{1}{2} O_i^4 \left(\nabla_e \text{tr}_e \hat{H}_2, \partial_{r_e} \right) dv_{\mathbb{S}^3/\Gamma} + \int_N \chi \langle \tilde{\mathbf{O}}_o, \mathbf{o}_i \rangle_{g_b} dv_b.$$

Définissons alors $(M, \hat{g}_{p,t}^A)$ la métrique obtenue par recollement naïf (définition 3.3) de $(N, g_b + t\hat{h}_2)$ à (M_{S_o}, \hat{g}_{S_o}) à l'échelle $t > 0$, et \bar{g}_v^D celle du recollement naïf de (N, g_b) à $(M_{S_o}, \bar{g}_{S_o,v_o}^D)$ à l'échelle t . Nous avons le contrôle suivant.

Proposition 5.41. *Pour $t_{\max} = \max(t_{\max,S_o}, t) > 0$ suffisamment petit, pour tout*

$k \in \mathbb{N}$ il existe des réels $\hat{\lambda}_i$, $C_k > 0$ pour lesquels, on a

$$\left\| \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \Phi_{g^D}(\hat{g}_{p,t}^A) \right\|_{r_D^{-2} C_\beta^k(g^D)} \leq C_k t^{\frac{3-\beta}{4}}, \quad (5.36)$$

et pour tout i_0 , en notant $(\tilde{\mathbf{o}}_i)$ la projection de la base orthonormée \mathbf{o}_i sur $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$

$$\left\langle \Phi_{g^D}(\hat{g}_{p,t}^A) - t \sum_i \hat{\lambda}_i \tilde{\mathbf{o}}_i, \tilde{\mathbf{o}}_{i_0} \right\rangle_{L^2(g^D)} \leq C_0 t^{\frac{3}{2}}, \quad (5.37)$$

tout en satisfaisant,

1. $\|\hat{g}_{p,t}^A - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_{p,t}^D)} \leq 2\varepsilon$,
2. $\hat{g}_{p,t}^A - (g^D + v)$ est orthogonal à $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ pour le produit L^2 de g^D .

Remarque 5.42. Ce que l'on gagne donc en passant par des désingularisations partielles est le contrôle en t plutôt que t_{\max} comme dans le corollaire 5.27.

Démonstration. Sur $M_{S_o}^{16t}$, nous avons par hypothèse

$$\Phi_{g_o}(\hat{g}_{S_o}) = \tilde{\mathbf{o}}^{(S_o)} = \tilde{\mathbf{O}}_o + \mathcal{O}(r_o^2) \in \tilde{\mathbf{O}}(g_{S_o}^D), \quad (5.38)$$

et sur N^{16t} , nous avons

$$\Phi_{g_b}(t(g_b + t\hat{h}_2)) = \chi \tilde{\mathbf{O}}_o + t \sum_i \hat{\lambda}_i \mathbf{o}_i + \mathcal{O}(r_D^2). \quad (5.39)$$

Maintenant, comme au point p , le développement de \hat{g}_{S_o} dans des coordonnées locales où elle est en jauge divergence par rapport à g_e est

$$\hat{g}_{S_o} = g_e + \hat{H}_2 + \mathcal{O}(r_o^3), \quad (5.40)$$

et que $t(g_b + t\hat{h}_2)$ a le développement suivant pour $t^{-\frac{1}{4}} \leq r_b \leq t^{-\frac{1}{4}}$

$$t(g_b + t\hat{h}_2) = g_e + \hat{H}_2 + \mathcal{O}(t^2 r_b^{-2} + \text{tr}_b^{-4}), \quad (5.41)$$

avec les contrôles adaptés pour les dérivées jusqu'à l'ordre 2, nous avons sur l'anneau de rayons $r_D = t^{\frac{1}{4}}$ et $r_D = 2t^{\frac{1}{4}}$,

$$\Phi_{g^D}(\hat{g}_{p,t}^A) - \tilde{\mathbf{o}}_{p,t}^{(S_o)} - t \sum_i \hat{\lambda}_i \tilde{\mathbf{o}}_i = \mathcal{O}(t^{\frac{3}{4}}), \quad (5.42)$$

où $\tilde{\mathbf{o}}_{p,t}^{(S_o)} = \chi_{M_o \setminus B(p, t^{1/4})} \tilde{\mathbf{o}}_*^{(S_o)} + \chi_{\mathcal{A}_p(\varepsilon_0)} \tilde{\mathbf{o}}^{(S_o)}(p)$, où $\mathcal{A}(\varepsilon_0)$ est l'anneau $\varepsilon_0^{-1} \sqrt{t} < r_D < \varepsilon_0$ entre N et M_o . D'après (5.38), (5.39) et (5.42), nous avons l'estimation (5.36).

Ensuite, nous avons grâce à (5.41), (5.39) et (5.42), le contrôle

$$\left\langle \Phi_{g^D}(\hat{g}_{p,t}^A) - t \sum_i \hat{\lambda}_i \tilde{\mathbf{o}}_{i,t}, \tilde{\mathbf{o}}_{i_0,t} \right\rangle_{L^2(g_{p,t}^D)} \leq C_0 t^{\frac{3}{2}}. \quad (5.43)$$

□

En recollant des \bar{g}_{b_j, v_j} pour $v_j \in \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ plutôt que g_{b_j} à $\hat{g}_{S_o, v_{S_o}}$, on atteint toutes les jauges $g_{p,t}^A - (g^D + v) \perp \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ pour $v \in \tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ sans détériorer les estimations. D'après le lemme 5.28, la différence entre $\hat{\lambda}_i(0)$ associé à g_b et $\hat{\lambda}_i(v)$ associé à $\bar{g}_{b,v}$, est contrôlée

$$|\hat{\lambda}_i(v) - \hat{\lambda}_i(0)| \leq C \left(\|v\|_{C_0^0(g^D)} + \|\hat{H}_2\|_{C_2^0(g_o)} \right) \|v\|_{C_0^0(g^D)}. \quad (5.44)$$

De plus, grâce au théorème 5.40, en notant \bar{H}_2 les termes quadratiques de g_o dans des coordonnées où elle est en jauge divergence par rapport à g_e , nous avons les contrôles

$$\|\bar{H}_2 - \hat{H}_2\|_{C_2^0(g_e)} \leq C \left(t_{\max, S_o}^{\frac{2-\beta}{4}} + \|v_{S_o}\|_{C_{\beta, *}}^{2, \alpha} \right), \quad (5.45)$$

et

$$|\tilde{\mathbf{O}}_o|_{g_e} \leq C \left(t_{\max, S_o}^{\frac{2-\beta}{4}} + \|v_{S_o}\|_{C_{\beta, *}}^{2, \alpha} \right), \quad (5.46)$$

Finalement, en utilisant ces contrôles et (5.44) et l'expression des obstructions $\hat{\lambda}_i$, nous obtenons que $\hat{\lambda}_i(v) \rightarrow \bar{\lambda}_i$ lorsque $(t_{\max, S_o}, v_{S_o}, v) \rightarrow (0, 0, 0)$. Ainsi, avec la même preuve que pour le corollaire 5.32 en fixant le point p a priori et en considérant $\hat{g}_{p,t,v}^A$ plutôt que $\bar{g}_{t,v}^A$, nous obtenons le résultat d'obstruction suivant.

Corollaire 5.43. *Soit (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein, et $(M_i, g_i)_i$ une suite de variétés d'Einstein convergeant vers (M_o, g_o) au sens de Gromov-Hausdorff et telle que les éclatements non triviaux convergent vers des variétés Ricci-plates ALE (c'est-à-dire sans formation d'arbre de singularités) dont les déformations infinitésimales sont intégrables.*

Alors, pour tout point singulier $p \in M_o$, si l'on note H_2 les termes quadratiques du développement de g_o en coordonnées géodésiques en p , et $(O_j^4)_j$ une base de $\mathcal{O}^4(g_b)$, on a :

$$\int_{\mathbb{S}^3} \left(3 \langle H_2, O_j^4 \rangle + O_j^4(B_e H_2, \partial_{r_e}) \right) dv_{\mathbb{S}^3} = 0.$$

4 Obstruction à la formation d'arbre d'orbifolds kählériens Ricci-plats

Rendons notre résultat plus concret en interprétant les obstructions qui apparaissent lorsqu'une suite de métriques d'Einstein d_{GH} -converge vers un orbifold en faisant apparaître des arbres d'orbifolds Ricci-plats ALE kählériens. Il est parfois conjecturé (dans [BKN89] par exemple) que c'est le cas général. Nous allons voir que la condition sur la courbure $\det \mathbf{R} = 0$ aux points singuliers de l'orbifold déjà identifiée dans [Biq13, Biq16] dans le cas de la métrique d'Eguchi-Hanson sous des hypothèses restrictives est en fait générale. Le résultat principal de cette section est le corollaire 5.77.

4.1 Recollement de la métrique d'Eguchi-Hanson et obstructions

Nous montrons que quel que soit l'orbifold Ricci-plat ALE kählérien que l'on considère, il y a une obstruction commune à la désingularisation. C'est celle qui apparaît au point singulier de l'orbifold dans le cas du recollement d'Eguchi-Hanson décrite dans [Biq13] :

$$\det \mathbf{R}^+ = 0,$$

au point singulier, où \mathbf{R}^+ est la partie auto-duale de la courbure définie au début du chapitre 2. *Génériquement*, il y a en réalité des obstructions supplémentaires correspondant à l'annulation totale de la partie auto-duale de la courbure au point singulier :

$$\mathbf{R}^+ = 0.$$

Remarque 5.44. En recollant les bulles avec l'orientation opposée, c'est-à-dire avec un paramètre de recollement dans $O(4) \setminus SO(4)$ l'obstruction commune se réécrit $\det \mathbf{R}^- = 0$ et donc en général, comme l'équation d'Einstein implique que la courbure est diagonale par blocs dans la somme directe des 2-formes autoduales et anti-autoduales, l'obstruction s'écrit

$$\det \mathbf{R} = 0.$$

Remarque 5.45. Les orbifolds des exemples 2.6 et 2.7 ne satisfont pas cette obstruction et il n'est donc pas possible de les désingulariser de cette manière. L'orbifold limite de la famille de métriques d'AdS-Taub-Bolt de l'annexe B ou l'orbifold plat

$\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ de l'exemple 2.5 satisfont cette condition.

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, les premières obstructions à la désingularisation d'un orbifold (M_o, g_o) par une variété Ricci-plate ALE (N, g_b) viennent des déformations infinitésimales décroissant en r_b^{-4} à l'infini.

Comme décrit parmi les exemples du chapitre 2, à l'infini la métrique d'Eguchi-Hanson a le développement suivant :

$$g_{EH} = g_e - \frac{1}{r_e^4}(dr_e^2 + r_e^2\alpha_1^2 - r_e^2\alpha_2^2 - r_e^2\alpha_3^2) + \mathcal{O}(r_e^{-8}).$$

Ce comportement asymptotique se généralise à l'espace de modules des métriques Ricci-plates ALE sur $T^*\mathbb{S}^2$ (qui ne sont que des rotations et rééchelonnements de g_{EH}). D'après le théorème 2.14, l'espace de modules des métriques Ricci-plates ALE au voisinage de la variété d'Eguchi-Hanson $(T^*\mathbb{S}^2, g_{EH})$ est de dimension 3 et est composé de métriques notées $(g_\zeta)_\zeta$ pour $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. De plus, il existe un difféomorphisme Φ_ζ d'un voisinage de l'infini de $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{Z}_2$ dans un voisinage de l'infini de $T^*\mathbb{S}^2$ tel que l'on ait $\Phi_\zeta^*g_\zeta = g_e + h_\zeta + \mathcal{O}(r_e^{-8})$, où pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} h_\zeta = & - \sum_{j,k,l} \zeta_j^2 \frac{dr_e^2 + r_e^2\alpha_j^2 - r_e^2\alpha_k^2 - r_e^2\alpha_l^2}{r_e^4} \\ & - \zeta_1\zeta_2 \frac{r_e^2\alpha_1.\alpha_2 + r_e dr_e.\alpha_3}{r_e^4} \\ & - \zeta_1\zeta_3 \frac{r_e^2\alpha_1.\alpha_3 - r_e dr_e.\alpha_2}{r_e^4} \\ & - \zeta_2\zeta_3 \frac{r_e^2\alpha_2.\alpha_3 - r_e dr_e.\alpha_1}{r_e^4}, \end{aligned}$$

où la somme est prise sur les (j, k, l) tels que $l \equiv k + 1 \equiv j + 2 \pmod{3}$.

Remarque 5.46. Toutes les métriques ainsi obtenues pour des différents $\zeta \neq 0$ sont en fait homothétiques les unes aux autres, et pour la valeur (interdite) $\zeta = 0$, on a $(X_0, g_0) = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$, où la sphère \mathbb{S}^2 est écrasée en un point.

Remarque 5.47. Pour tout ζ , le terme h_ζ est harmonique homogène, à divergence et trace nulle par rapport à la métrique euclidienne.

Corollaire 5.48. *On a en fait $g_{EH} = g_{(1,0,0)}$, et on retrouve*

$$h_{(1,0,0)} = - \frac{dr_e^2 + r_e^2\alpha_1^2 - r_e^2\alpha_2^2 - r_e^2\alpha_3^2}{r_e^4}.$$

En faisant varier ζ au voisinage de $(1, 0, 0)$, on obtient au premier ordre des déformations infinitésimales de g_{EH} .

Elles sont engendrées par les déformations dans les trois directions ζ_1, ζ_2 et ζ_3 , notées $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2$ et \mathbf{o}_3 qui ont les développements $\mathbf{o}_i = O_i^4 + \mathcal{O}(r_e^{-8})$

1. $O_1^4 := 2 \frac{dr_e^2 + r_e^2 \alpha_j^2 - r_e^2 \alpha_k^2 - r_e^2 \alpha_l^2}{r_e^4},$
2. $O_2^4 := \frac{r_e^2 \alpha_1 \cdot \alpha_2 + r_e dr_e \cdot \alpha_3}{r_e^4},$
3. $O_3^4 := \frac{r_e^2 \alpha_1 \cdot \alpha_3 - r_e dr_e \cdot \alpha_2}{r_e^4}.$

Remarque 5.49. Les déformations infinitésimales $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2$ et \mathbf{o}_3 ont une interprétation géométrique : \mathbf{o}_1 est infinitésimalement un changement d'échelle à l'infini et \mathbf{o}_2 et \mathbf{o}_3 viennent de rotations de l'infini suivant les vecteurs de Killing de S^3 respectivement duaux de α_3 et α_2 (voir la sous-section 6.1 de ce chapitre).

Remarque 5.50. Comme les métriques de l'espace de modules autour de g_{EH} lui sont homothétiques, leurs déformations infinitésimales sont simplement O_1^4, O_2^4 et O_3^4 tirées en arrière par un difféomorphisme.

Reformulation des obstructions. D'après les corollaires 5.32 et 5.43, pour qu'un orbifold d'Einstein puisse être désingularisé au sens de Gromov-Hausdorff par la métrique d'Eguchi-Hanson, il faut que ses termes quadratiques (en coordonnées géodésiques par exemple), H_2 , satisfassent les conditions

$$\lambda_i = - \int_{S^3} \left(3 \langle H_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + O_i^4(B_e(H_2), \partial_{r_e}) \right) dv_{S^3} = 0$$

pour $i = 1, 2, 3$. D'après [Biq13], ces conditions peuvent se réécrire comme une condition sur la courbure $\mathbf{R}(H_2)$, qu'engendrent ces termes d'ordre 2. Plus précisément, on définit $\mathbf{R}(H_2) : \Lambda^2 \mathbb{R}^4 \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^4$ comme l'opérateur de courbure au point 0 commun aux métriques ayant un développement $g_e + H_2 + \mathcal{O}(r_e^3)$ en 0. En dimension 4, on a donc toujours la décomposition de la courbure :

$$\mathbf{R}(H_2) =: \begin{bmatrix} \mathbf{R}^+(H_2) & \text{Ric}^0(H_2) \\ \text{Ric}^0(H_2) & \mathbf{R}^-(H_2) \end{bmatrix}.$$

De plus, l'application $H_2 \mapsto \mathbf{R}(H_2)$ est linéaire.

Si l'on se place dans une jauge radiale, c'est-à-dire si $H_2(\partial_{r_e}, \cdot) = 0$, on a une décomposition

$$H_2 = \sum_{ij} H_{ij} \beta_i \beta_j,$$

où $\beta_i = r_e^2 \alpha_i$. Dans la base naturelle de Ω_+ composée de $\omega_1 := dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4$, $\omega_2 := dx^1 \wedge dx^3 - dx^2 \wedge dx^4$ et $\omega_3 := dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3$, on a l'égalité :

$$\mathbf{R}^+(H_2) = \text{tr}_e(H)I_3 - 6H$$

où H est la matrice des H_{ij} .

Remarque 5.51. De la même manière on obtient la décomposition de $\mathbf{R}^-(H_2)$ à partir de la décomposition de H_2 dans une base $A^* \beta_i$ où A est un élément de $O(4) \setminus SO(4)$.

Pour les déformations \mathbf{o}_i on obtient les égalités suivantes pour les trois obstructions :

$$\lambda_i = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^3} \left(3\langle H_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + O_i^4(B_e H_2, \partial_{r_e}) \right) dv_{\mathbb{S}^3} = \langle \mathbf{R}^+(H_2)(\omega_1), \omega_i \rangle.$$

Corollaire 5.52 ([Biq13, Theorem 4.1]). *Les obstructions*

$$\int_{\mathbb{S}^3} \left(3\langle H_2, O_i \rangle_{g_e} + O_i^4(B_e H_2, \partial_{r_e}) \right) dv_{\mathbb{S}^3} = 0$$

pour $i = 1, 2, 3$ contre H_2 un 2-tenseur quadratique tel que $d_e \text{Ric } H_2 = \Lambda g_e$ sont équivalentes à la condition :

$$\mathbf{R}^+(H_2)(\omega) = 0,$$

pour ω une 2-forme dépendant de la jauge de recollement. En particulier, on a toujours

$$\det \mathbf{R}^+(H_2) = 0.$$

Manifestement, ces conditions ne dépendent pas particulièrement de la métrique d'Eguchi-Hanson, mais des termes O_i^4 d'ordre -4 des déformations infinitésimales de la bulle recollée.

4.2 Autres variétés Ricci-plates ALE kählériennes et obstructions

Nous avons succinctement décrit les autres variétés Ricci-plates ALE connues dans la section 1.2.4 du chapitre 2. Nous allons maintenant être plus précis et en particulier étudier leurs déformations infinitésimales.

Déformations des instantons gravitationnels et obstructions. Étudions maintenant ces déformations pour les orbifolds Ricci-plats ALE connus. Nous en déduisons que l'obstruction est générale. Dans ces prochaines pages, nous reprenons les notations de la section 1.2.4 du chapitre 2.

Lemme 5.53 ([Auv18, Theorem 2.1]). *Soit Γ un sous-groupe fini de $SU(2)$, et soient $k_\Gamma \in \mathbb{N}^*$ et $D_\Gamma \subset \mathbb{R}^{3k_\Gamma}$ du théorème 2.14. Alors, pour chaque $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in (\mathbb{R}^{k_\Gamma})^3 \setminus D_\Gamma$, il existe un difféomorphisme Φ_ζ entre des voisinages des infinis de \mathbb{R}^4/Γ et de X_ζ tel que $\Phi_\zeta^*g_\zeta = g_e + h_\zeta + \mathcal{O}(r_e^{-6})$, où,*

$$\begin{aligned} h_\zeta = & - \sum_{j,k,l} |\zeta_j|^2 \frac{dr_e^2 + r_e^2 \alpha_j^2 - r_e^2 \alpha_k^2 - r_e^2 \alpha_l^2}{r_e^4} \\ & - \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle \frac{r_e^2 \alpha_1 \cdot \alpha_2 - r_e dr_e \cdot \alpha_3}{r_e^4} \\ & - \langle \zeta_1, \zeta_3 \rangle \frac{r_e^2 \alpha_1 \cdot \alpha_3 + r_e dr_e \cdot \alpha_2}{r_e^4} \\ & - \langle \zeta_2, \zeta_3 \rangle \frac{r_e^2 \alpha_2 \cdot \alpha_3 - r_e dr_e \cdot \alpha_1}{r_e^4}, \end{aligned}$$

où la première somme est prise sur les (j, k, l) tels que $l \equiv k + 1 \equiv j + 2 \pmod{3}$.

Remarque 5.54. La formule ci-dessus est aussi valable pour les métriques orbifolds avec $\zeta \in D_\Gamma$ par la proposition 3.14 de [Kro89a].

On en déduit que le recollement de tout orbifold hyperkählérien ALE qui n'est pas plat est obstrué par les obstructions données par les déformations infinitésimales par variation des ζ_i .

Corollaire 5.55. *Soient Γ un sous-groupe fini de $SU(2)$, et $\zeta \in \mathbb{R}^{3k_\Gamma} \setminus D_\Gamma$. Alors il existe un difféomorphisme Φ entre des voisinages des infinis de \mathbb{R}^4/Γ et de X_ζ tel que les 2-tenseurs harmoniques homogènes O_1^4 , O_2^4 et O_3^4 soient des termes en r_e^{-4} de déformations infinitésimales de Φ^*g_ζ .*

En particulier, les conditions $\int_{\mathbb{S}^3} \left(3\langle H_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + O_i^4(B_e H_2, \partial_{r_e}) \right) dS = 0$ pour un 2-tenseur quadratique H_2 tel que $d_e \text{Ric } H_2 = \Lambda g_e$ impliquent que

$$\det \mathbf{R}_+(H_2) = 0.$$

Démonstration. Soient Γ un sous-groupe fini de $SU(2)$, et $\zeta \neq 0$. Il existe donc $l \in \{1, \dots, k_\Gamma\}$ tel que la l -ième coordonnée de $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in (\mathbb{R}^{k_\Gamma})^3$, $(\zeta_1^l, \zeta_2^l, \zeta_3^l)$ soit non-nulle. Comme pour la métrique d'Éguchi-Hanson où toutes les métriques

sont homothétiques à celle avec $\zeta = (1, 0, 0)$, grâce à l'action de $SO(4)$ et d'une homothétie, on obtient une métrique $g_{\tilde{\zeta}}$ avec $(\tilde{\zeta}_1^l, \tilde{\zeta}_2^l, \tilde{\zeta}_3^l) = (1, 0, 0)$.

Les variations infinitésimales associées aux variations de $(\tilde{\zeta}_1^l, \tilde{\zeta}_2^l, \tilde{\zeta}_3^l)$ seulement sont alors asymptotiques à O_1^4 , O_2^4 et O_3^4 , et l'obstruction $\det \mathbf{R}_+(H_2) = 0$ est une conséquence du corollaire 5.52. \square

Remarque 5.56. Le cas de la métrique d'Eguchi-Hanson (ou des ζ^l parallèles), est en fait le cas le moins obstrué. La condition d'obstruction est $\mathbf{R}_+ = 0$ pour des ζ génériques lorsque $k_\Gamma > 1$.

Les derniers exemples connus de variétés Ricci-plates ALE sont seulement kählériens, et sont en fait des quotients de variétés hyperkähleriennes par des groupes cycliques. On en déduit le même résultat d'obstruction.

Corollaire 5.57. *Soit Γ un groupe $\frac{1}{dn^2}(1, dnm - 1) \subset U(2)$ pour $d \geq 1$, $n \geq 2$ et n et m premiers entre eux, et pour $\zeta \in \mathbb{R}^{dr} \setminus D_\Gamma$, g_ζ une métrique Ricci-plate ALE kählérienne asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ . Alors pour H_2 un 2-tenseur homogène sur \mathbb{R}^4/Γ satisfaisant $d_e \text{Ric } H_2 = \Lambda g_e$, les conditions*

$$\int_{\mathbb{S}^3} \left(3\langle H_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + O_i^4(B_e H_2, \partial_{r_e}) \right) dv_{\mathbb{S}^3} = 0,$$

pour O_i^4 les termes d'ordre -4 des déformations infinitésimales L^2 de g_ζ impliquent que

$$\det \mathbf{R}_+(H_2) = 0.$$

Démonstration. Soit $\frac{1}{dn^2}(1, dnm - 1) \subset U(2)$ un sous-groupe fini de $U(2)$, et (N, g_b) un orbifold Ricci-plate ALE asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ non plate. D'après [Suv11], (\tilde{N}, \tilde{g}_b) le revêtement universel de (N, g_b) est un orbifold hyperkählierien asymptotique à $\tilde{\Gamma} = \frac{1}{dn}(1, -1) \subset \frac{1}{dm^2}(1, dnm - 1)$. Soit H_2 , un 2-tenseur homogène sur \mathbb{R}^4/Γ , il se relève aussi sur $\mathbb{R}^4/\tilde{\Gamma}$ en \tilde{H}_2 .

Revenons à la source de l'obstruction qui est la proposition 5.3, et plus précisément l'existence d'un 2-tenseur h_2 asymptotique à H_2 tel que $d_{g_b} \text{Ric}(h_2) = \Lambda g_b$. Si un tel 2-tenseur existe sur (N, g_b) , on peut le relever en un 2-tenseur \tilde{h}_2 sur (\tilde{N}, \tilde{g}_b) asymptotique à \tilde{H}_2 et satisfaisant $d_{\tilde{g}_b} \text{Ric}(\tilde{h}_2) = \Lambda \tilde{g}_b$ ce qui implique, de nouveau d'après la proposition 5.3 et au corollaire 5.55, la condition $\det \mathbf{R}_+(\tilde{H}_2) = 0$ puis $\det \mathbf{R}_+(H_2) = 0$. \square

Remarque 5.58. Les preuves ci-dessus n'utilisent pas le côté kählérien des métriques étudiées. Elles s'appliquent en particulier à toute métrique Ricci-plate ALE dont les termes d'ordre -4 ne s'annulent pas et permet de déduire des obstructions pour d'autres métriques Ricci-plates ALE (s'il en existe) à partir du calcul

des termes d'ordre -4 de [BH19, Proposition 2.5]. Il n'est cependant pour l'instant pas clair que les termes d'ordre -4 d'une métrique Ricci-plate ALE non-plate soient non-nuls.

4.3 Arbres de singularités et obstructions

Nous allons maintenant traiter le cas d'arbres d'orbifolds Ricci-plats ALE kählériens.

4.3.1 Contrôle uniforme des métriques hyperkähleriennes ALE

Soit $\Gamma_1 \in SU(2)$ et $\zeta_1 \in D_{\Gamma_1}$ fixé tel que l'orbifold ALE $(X_{\zeta_1}, g_{\zeta_1})$ du théorème 2.14 ait une singularité \mathbb{R}^4/Γ pour $\Gamma \subset SU(2)$. Notons alors $\bar{g}_{\zeta_1, v}$ pour $v \in \mathbf{O}(g_{\zeta_1})$ pour v que l'on choisira assez petit la déformation Ricci-plate (et même hyperkählienne) de g_{ζ_1} donnée par le corollaire 5.21. L'objectif de cette sous-section est de montrer que pour $\zeta \in \mathbb{R}^{3k_{\Gamma}}$ avec $|\zeta| = 1$, il existe une échelle $\tau > 0$ telle que pour tout $t < \tau$, le recollement naïf de g_{ζ} à $\bar{g}_{\zeta_1, v}$ à l'échelle t , noté $g_{v, t, \zeta}^B$ peut être perturbé en une métrique Ricci-plate modulo obstructions que l'on notera $\hat{g}_{v, t, \zeta}$.

Le recollement naïf $g_{v, t, \zeta}^B$ est Ricci-plat partout sauf sur l'anneau où le recollement a lieu. On obtient donc un contrôle

$$\|\Phi_{g_{v, t, \zeta}^B}(g_{v, t, \zeta}^B)\|_{r_B^{-2}C_{\beta}^{\alpha}(g_{v, t, \zeta}^B)} \leq Ct^{\frac{2-\beta}{4}}$$

où $C > 0$ ne dépend que de ζ_1 et v car les coordonnées ALE de g_{ζ} sont uniformément contrôlées par $|\zeta| = 1$ dans les coordonnées de [Kro89a, Corollaire 3.14].

En reprenant la preuve par théorème des fonctions inverse du théorème 4.51, pour perturber $g_{v, t, \zeta}^B$ en une métrique Ricci-plate modulo obstructions, pour montrer l'existence de $\hat{g}_{v, t, \zeta}$, il nous suffirait de montrer que

$$\pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g_{v, t, \zeta}^B)^{\perp}} P_{g_{v, t, \zeta}^B} : \tilde{\mathbf{O}}(g_{v, t, \zeta}^B)^{\perp} \cap C_{\beta, *}^{2, \alpha}(g_{v, t, \zeta}^B) \rightarrow \tilde{\mathbf{O}}(g_{v, t, \zeta}^B)^{\perp} \cap r_B^{-2}C_{\beta}^{\alpha}(g_{v, t, \zeta}^B)$$

est uniformément borné avec un inverse uniformément borné pour $|\zeta| = 1$ et t suffisamment petit et de contrôler les termes non-linéaires de $\Phi_{g_{v, t, \zeta}^B}$. En se fixant ζ_1 et v , il suffirait alors de montrer par le lemme 4.49 que

$$P_{g_{\zeta}} : \mathbf{O}(g_{\zeta})^{\perp} \cap C_{\beta, *}^{2, \alpha}(g_{\zeta}) \rightarrow \mathbf{O}(g_{\zeta})^{\perp} \cap r_{\zeta}^{-2}C_{\beta}^{\alpha}(g_{\zeta})$$

est inversible avec un inverse borné et de contrôler les termes non-linéaires. Ce n'est cependant pas le cas lorsque $\zeta \rightarrow D_{\Gamma}$, c'est-à-dire lorsque g_{ζ} dégénère. Il

convient alors dans ces situations de remplacer les normes par rapport à g_ζ par des normes par rapport à une désingularisation naïve g_ζ^B proche de g_ζ pour garder une échelle de recollement uniforme.

Proposition 5.59. *Pour tout $\Gamma \subset SU(2)$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $C = C(\Gamma, \varepsilon) > 1$ telle que pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^{3k_\Gamma}$ avec $|\zeta| = 1$, il existe une métrique de désingularisation naïve (partielle si $\zeta \in D_\Gamma$ et totale si $\zeta \notin D_\Gamma$, voir définitions 3.3) g_ζ^B d'un orbifold g_{ζ_o} avec $\zeta_o \in D_\Gamma$ et $|\zeta_o| = 1$ asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ par des orbifolds hyperkähleriens g_{ζ_j} pour $|\zeta_j| = 1$ et $\zeta_j \in \mathbb{R}^{k_{\Gamma_j}}$ pour $|\Gamma_j| < |\Gamma|$, pour laquelle en notant*

$$R(g_\zeta^B) := \sup_{h \perp \tilde{\mathcal{O}}(g^B) \cap C_{\beta, *}^{2, \alpha}(g^B)} \frac{\|h\|_{C_{\beta, *}^{2, \alpha}(g^B)}}{\|P_{g^B} h\|_{r_B^{-2} C_{\beta}^\alpha(g^B)}} + \sup_{h \in C_{\beta, *}^{2, \alpha}(g^B)} \frac{\|P_{g^B} h\|_{r_B^{-2} C_{\beta}^\alpha(g^B)}}{\|h\|_{C_{\beta, *}^{2, \alpha}(g^B)}},$$

on ait

1. $\|g_\zeta^B - g_\zeta\|_{C_{\beta, *}^{2, \alpha}(g_\zeta^B)} < \frac{\varepsilon}{R(g_\zeta^B)}$,
2. $R(g_\zeta^B) \leq C$,
3. il existe des coordonnées ALE d'ordre 4 pour g_ζ^B hors d'une boule de rayon C .

Remarque 5.60. Les normes de cet énoncé prises par rapport à g_ζ^B sont des normes à poids d'arbre de singularités et décroissent donc dans les anneaux de basse courbure ce qui permet d'avoir des contrôles uniformes lorsque des zones de haute courbure apparaissent.

Remarque 5.61. Ce qui est crucial dans cet énoncé est que la constante C soit indépendante de la métrique g_ζ et en particulier que l'on puisse approcher les métriques singulières correspondant à $\zeta \in D_\Gamma$ tout en gardant des contrôles uniformes. La constante ε sert essentiellement à déterminer à partir de quelle proximité on préférera remplacer une métrique lisse g_ζ par un arbre de singularités dans nos applications. En effet, la désingularisation naïve triviale composée de $g_\zeta^B = g_\zeta$ seule est toujours un candidat satisfaisant la première et la dernière propriété.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Montrons ce résultat par récurrence sur l'ordre k du groupe à l'infini. C'est tout d'abord vrai pour le groupe d'ordre \mathbb{Z}_2 d'ordre 2 car les différentes métriques obtenues pour $|\zeta| = 1$ sont isométriques à la métrique d'Eguchi-Hanson et le contrôle espéré est satisfait pour la désingularisation naïve triviale composée de la métrique elle-même.

Supposons donc que la propriété soit satisfaite pour tous les groupes d'ordre inférieur à $k - 1 \geq 2$ et montrons qu'elle tient toujours pour un groupe Γ d'ordre k .

Raisonnons alors encore une fois par récurrence sur l'énergie de nos orbifolds hyperkähleriens ALE, c'est-à-dire sur le carré de la norme L^2 de la courbure Riemannienne qui est une quantité topologique proportionnelle à la dimension de la cohomologie (orbifold) L^2 en degré 2 pour ces instantons gravitationnels. D'après les résultats du chapitre 2, il y a une perte de norme L^2 de la courbure dans les bulles qui se forment et donc si l'on fixe le groupe à l'infini, plus cette énergie est petite, plus l'orbifold est singulier.

Considérons pour l'initialisation, le cas des orbifolds g_ζ , $\zeta \in \mathbb{R}^{3k\Gamma}$, $|\zeta| = 1$ avec la plus petite énergie possible. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite de métriques orbifolds g_{ζ_i} , $|\zeta_i| = 1$ avec l'énergie minimale et telles que pour toute désingularisation naïve (voir définition 3.3) g^B d'un orbifold hyperkählierien asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ , on ait

1. soit, $\|g_{\zeta_i} - g^B\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^B)} \geq \frac{\varepsilon}{R(g^B)}$,
2. soit, $R(g^B) > i$,
3. soit, il n'existe pas de coordonnées ALE d'ordre 4 hors de toute boule de rayon i ,

et supposons quitte à prendre une sous-suite que ces métriques aient la même topologie.

Remarque 5.62. Le fait que la topologie soit la même est en réalité déjà assuré par notre hypothèse de minimalité. De plus les espaces que l'on obtient sous cette hypothèse sont les instantons gravitationnels de rang 1 introduits dans [Biq16].

Dans les coordonnées données par [Kro89a, Proposition 3.14] où la dépendance entre les métriques est analytique, toutes les métriques g_{ζ_i} admettent des coordonnées ALE d'ordre 4 avec un contrôle uniforme en norme $r_{\zeta_i}^{-4}C^3(g_{\zeta_i})$ dans un voisinage uniforme de l'infini, où r_{ζ_i} est la fonction de la définition 4.9. On en déduit qu'il ne peut y avoir de concentration L^2 de la courbure que dans un compact de diamètre uniformément majoré et de volume uniformément minoré par l'inégalité de Bishop-Gromov (ou [Kro89a, Lemma 3.3]). Par minimalité de l'énergie, il ne peut pas y avoir de formation d'arbre de singularités car sinon l'orbifold ALE asymptotique à Γ aurait une énergie plus petite. Il existe donc une métrique g_{ζ_∞} telle que les g_{ζ_i} convergent de manière lisse (en considérant des revêtements locaux aux singularités orbifolds) vers g_{ζ_∞} , et donc $\|g_{\zeta_i} - g_{\zeta_\infty}\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_{\zeta_\infty})} \rightarrow 0$ quand

$i \rightarrow \infty$ où nous avons $\|\cdot\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_{\zeta_\infty})} \approx \|(1 + r_{\zeta_\infty})^\beta \cdot\|_{C^{2,\alpha}(g_{\zeta_\infty})}$ ici car on utilise des revêtements locaux aux singularités éventuelles de g_{ζ_∞} . De plus, il existe des coordonnées d'ordre 4 hors d'une boule ayant un rayon uniformément contrôlé d'après le corollaire 5.20 ce qui contredit donc la troisième propriété pour i assez grand. La désingularisation naïve triviale $g^B = g_{\zeta_\infty}$ contredit les deux autres hypothèses de départ. En effet, pour la première hypothèse, la convergence est lisse et a donc lieu dans l'espace $C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_{\zeta_\infty})$ où le poids n'est qu'à l'infini. D'autre part, comme $P_{g_{\zeta_\infty}}$ est elliptique, il existe $C > 0$ telle que pour tout $h \perp \mathbf{O}(g_{\zeta_\infty})$, on ait

$$\|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_{\zeta_\infty})} \leq C \|P_{g_{\zeta_\infty}} h\|_{r_{\zeta_\infty}^{-2} C_{\beta}^{\alpha}(g_{\zeta_\infty})},$$

ce qui contredit la seconde hypothèse.

Considérons maintenant un niveau d'énergie $E > 0$ supérieur et supposons que la propriété soit satisfaite par tous les instantons gravitationnels asymptotiques à \mathbb{R}^4/Γ et dont le carré de la norme L^2 de la courbure est strictement inférieure à E . Raisonnons encore une fois par l'absurde et supposons que l'on ait une suite de contre-exemples $\zeta_i \in \mathbb{R}^{3k\Gamma}$ $|\zeta_i| = 1$ satisfaisant $\|\text{Rm}_{g_{\zeta_i}}\|_{L^2(g_{\zeta_i})}^2 = E$ avec pour toute désingularisation naïve g^B d'un orbifold hyperkählerien asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ ,

- soit, $\|g_{\zeta_i} - g^B\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^B)} \geq \frac{\varepsilon}{R(g^B)}$,
- soit, $R(g^B) > i$,
- soit, il n'existe pas de coordonnées ALE d'ordre 4 hors d'une boule de rayon i .

Comme dans l'argument pour le niveau d'énergie minimal, si aucune singularité ne se formait et que l'on avait une convergence lisse (et $C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_{\zeta_\infty})$) vers un orbifold g_{ζ_∞} avec une borne $R(g_{\zeta_\infty})$. Nous avons donc la formation d'un arbre de singularités. Plus précisément, quitte à prendre une sous-suite, il existe une suite de désingularisations naïves $g_{\zeta_i}^{B'}$ d'un orbifold hyperkählerien asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ , composées d'un orbifold ALE g_{ζ_o} avec $|\zeta_o| = 0$ asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ et d'orbifolds ALE g_{ζ_j} avec $|\zeta_j| = 1$, $\zeta_j \in \mathbb{R}^{3k\Gamma_j}$ avec $|\Gamma_j| < |\Gamma| = k$ (on peut toujours le supposer car $g_{t\zeta}$ est isométrique à tg_ζ) à des échelles $t_{i,j}$, pour laquelle on ait $\|g_{\zeta_i} - g_{\zeta_i}^{B'}\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}} \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow \infty$. De plus, toutes les métriques g_{ζ_o} et g_{ζ_j} sont hyperkähleriennes d'après [Ban90]. Le carré de la norme L^2 de la courbure de g_{ζ_o} est strictement inférieur à E car on perd de l'énergie dans les singularités, et les g_{ζ_j} ont des groupes à l'infini d'ordre inférieur à $k - 1$ d'après l'inégalité de Bishop-Gromov. Quitte à remplacer par les désingularisations naïves de notre hypothèse de récurrence pour obtenir une nouvelle désingularisation naïve $g_{\zeta_i}^B$, nous contrôlons les inverses des opérateurs P des différents orbifolds ALE sur l'orthogonal de leur noyau (ou noyau

approché) de manière uniforme en fonction des constantes précédentes. D'après le lemme 4.42, nous obtenons un contrôle uniforme sur l'inverse de l'opérateur P sur notre désingularisation naïve. Cela contredit les hypothèses de départ et démontre l'énoncé. \square

Le lemme suivant nous permettra entre autres de contrôler le noyau de l'opérateur P_{g_ζ} à partir du noyau approché $\tilde{\mathbf{O}}(g_\zeta^B)$.

Lemme 5.63. *Soient P et P' deux opérateurs entre des espaces de Banach X et Y pour lesquels il existe $C > 0$, $\frac{1}{100C} > \varepsilon > 0$ et un sous-espace de dimension finie $K' \subset X$ et S' un supplémentaire de K' dans X tels que l'on ait :*

1. pour tout $x \in X$,

$$\|(P - P')x\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X,$$

2. pour tout $x \in S'$,

$$\|x\|_X \leq C \|P'x\|_Y,$$

3. pour tout $x \in K'$,

$$\|P'x\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X,$$

4. et $\dim(\ker P) = \dim(K')$.

Alors, pour tout élément k de $\ker P$, il existe un élément k' de K' tel qu'on ait

$$\|k - k'\|_X \leq \frac{2C\varepsilon}{1 - C\varepsilon} \|k'\|_X. \quad (5.47)$$

Démonstration. Soit $k \in \ker P$, et considérons sa décomposition $k = k' + s'$ dans la somme directe $X = K' \oplus S'$. Par la première hypothèse, nous avons

$$\|P'k\|_Y \leq \varepsilon \|k\|_X, \quad (5.48)$$

par la seconde, nous avons

$$\|s'\|_X \leq C \|P's'\|_Y \quad (5.49)$$

et par la troisième, nous avons

$$\|P'k'\|_Y \leq \varepsilon \|k'\|_X. \quad (5.50)$$

En utilisant (5.48), (5.49) et (5.50) ensemble, nous obtenons

$$\varepsilon \|k\|_X \geq \|P's'\|_Y - \|P'k'\|_Y \geq \frac{\|s'\|_X}{C} - \varepsilon \|k'\|_X, \quad (5.51)$$

puis comme $k = k' + s'$,

$$\|s'\|_X \leq C\varepsilon(\|k\|_X + \|k'\|_X) \leq 2C\varepsilon\|k'\|_X + C\varepsilon\|s'\|_X,$$

et finalement

$$\|k - k'\|_X = \|s'\|_X \leq \frac{2C\varepsilon}{1 - C\varepsilon}\|k'\|_X.$$

□

Remarque 5.64. Avec les trois premières hypothèses du lemme 5.63, nous avons toujours l'inégalité

$$\dim \ker P \leq \dim K',$$

et tout élément de $\ker P$ est proche d'un élément de K' (sa projection sur K' parallèlement à S') au sens de (5.47).

On déduit du lemme 5.63 et des estimations 1 et 2 de la proposition 5.59 que pour tout $\Gamma \subset SU(2)$ et pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit en fonction de Γ seulement, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^{3k_\Gamma}$ et pour la métrique g_ζ^B obtenue par la proposition 5.59 avec ε , on a le contrôle suivant avec $C = C(\Gamma, \varepsilon) > 0$: pour tout $h \perp \mathbf{O}(g_\zeta)$,

$$\frac{1}{C}\|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_\zeta^B)} < \|P_{g_\zeta} h\|_{r_B^{-2}C_\beta^\alpha(g_\zeta^B)} < C\|h\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_\zeta^B)}. \quad (5.52)$$

On en déduit que l'on peut définir des perturbations Ricci-plates modulo obstructions de nos désingularisations naïves.

Corollaire 5.65. *Soit $(X_{\zeta_1}, g_{\zeta_1})$ un orbifold Ricci-plat ALE pour $\zeta_1 \in D_{\Gamma_1}$ fixé ayant une singularité \mathbb{R}^4/Γ pour $\Gamma \subset SU(2)$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et $\tau > 0$ tels que pour tous $0 < t < \tau$, $\zeta \in \mathbb{R}^{3k_\Gamma}$ avec $|\zeta| = 1$ et $v \in \mathbf{O}(g_{\zeta_1})$ avec $\|v\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_{\zeta_1})} < \tau$, si l'on note $g_{v,t,\zeta}^{BB}$ le recollement naïf de la métrique (X_ζ, g_ζ^B) , de la proposition 5.59 pour la constante ε , à la singularité \mathbb{R}^4/Γ de $\bar{g}_{\zeta_1,v}$ (défini avant cet énoncé), et si l'on note $g_{v,t,\zeta}^B$ le recollement naïf de (X_ζ, g_ζ) à l'échelle t , il existe une unique métrique $\hat{g}_{v,t,\zeta}$ satisfaisant*

- $g_{v,t,\zeta}^B - \hat{g}_{v,t,\zeta} \perp \tilde{\mathbf{O}}(g_{v,t,\zeta}^B)$,
- $\|g_{v,t,\zeta}^B - \hat{g}_{v,t,\zeta}\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_{v,t,\zeta}^{BB})} \leq 2\tau$ (remarquer la norme de désingularisation naïve $g_{v,t,\zeta}^{BB}$), et
- $\Phi_{g_{v,t,\zeta}^B}(\hat{g}_{v,t,\zeta}) \in \tilde{\mathbf{O}}(g_{v,t,\zeta}^B)$.

De plus, la métrique $\hat{g}_{v,t,\zeta}$ dépend de manière lisse de v , t et ζ .

Démonstration. Comme vu dans la discussion au début de cette section, pour le

recollement naïf $g_{v,t,\zeta}^B$, nous avons un contrôle

$$\|\Phi_{g_{v,t,\zeta}^B}(g_{v,t,\zeta}^B)\|_{r_B^{-2}C_\beta^\alpha(g_{v,t,\zeta}^{BB})} \leq Ct^{\frac{2-\beta}{4}}$$

où $C > 0$ ne dépend que de ζ_1 et v . Maintenant, à l'aide du contrôle (5.52) pour remplacer les contrôles du lemme 4.42, nous pouvons reprendre la preuve du lemme 4.49 pour montrer que pour τ assez petit en fonction de Γ et ζ_1 seuls, l'opérateur

$$\pi_{\tilde{\mathcal{O}}(g_{v,t,\zeta}^B)^\perp} P_{g_{v,t,\zeta}^B} : \tilde{\mathcal{O}}(g_{v,t,\zeta}^B)^\perp \cap C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_{v,t,\zeta}^{BB}) \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}(g_{v,t,\zeta}^B)^\perp \cap r_B^{-2}C_\beta^\alpha(g_{v,t,\zeta}^{BB}),$$

est uniformément borné (indépendamment de ζ et de t et v assez petits) inversible avec un inverse uniformément borné, où l'on remarquera encore une fois que les normes sont définies par rapport à la désingularisation naïve $g_{v,t,\zeta}^{BB}$. La preuve du théorème 4.51 nous permet alors de montrer par théorème des fonctions inverses qu'il existe une unique solution $\hat{g}_{v,t,\zeta}$ aux équations de l'énoncé.

Comme dans le corollaire 4.55, la dépendance lisse de la métrique est une conséquence du théorème des fonctions implicites pour les fonctions lisses appliqué à l'application

$$\Psi : (v, t, \zeta, h) \mapsto \pi_{\tilde{\mathcal{O}}(g_{v,t,\zeta}^B)^\perp} \Phi_{g_{v,t,\zeta}^B}(g_{v,t,\zeta}^B + h)$$

pour $h \perp \tilde{\mathcal{O}}(g_{v,t,\zeta}^B)$.

Remarque 5.66. En définissant différemment nos désingularisations naïves, nous pourrions en réalité obtenir une dépendance analytique mais ce ne sera pas nécessaire pour la suite. Par exemple nous aurions pu recoller les métriques $g_{t\zeta}$ à une échelle τ petite et fixée plutôt que la métrique g_ζ à une échelle t

□

4.3.2 Recollement d'instantons gravitationnels

Remarquons tout d'abord que toutes les jauges de recollement d'instantons gravitationnels données par les isométries du cône \mathbb{R}^4/Γ sont équivalentes à recoller un instanton gravitationnel avec la jauge du lemme 5.53 mais avec un paramètre ζ différent.

Lemme 5.67. *Soit (M_o, g_o) un orbifold (compact ou ALE) ayant une singularité \mathbb{R}^4/Γ en p avec $\Gamma \subset SU(2)$, et soit $\zeta \in \mathbb{R}^{3k_\Gamma}$ avec les notations du théorème 2.14. Soit de plus ψ une isométrie du cône \mathbb{R}^4/Γ préservant l'orientation.*

Alors, il existe $\zeta' \in \mathbb{R}^{3k_\Gamma}$ tel que le recollement naïf de (X_ζ, g_ζ) en p avec les coordonnées ALE données par [Kro89a, Proposition 3.14] composé avec ψ au

moment d'identifier le cône à l'infini et de la singularité (voir la remarque 3.5) soit isométrique au recollement naïf de $(X_{\zeta'}, g_{\zeta'})$ à (M_o, g_o) en p sans composer avec une isométrie du cône.

Démonstration. Reprenons les notations de la section 1.2.3 du chapitre 1 pour les sous-groupes de $SO(4)$. Le résultat est clair pour le cas où $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ et où $\psi \in SO(4)$ car la métrique d'Eguchi-Hanson est $\overline{U(2)}$ -invariante et l'action de ψ sur la métrique revient à une action de $SO(4)/\overline{U(2)} \approx SU(2)/\overline{U(1)} \approx SO(3)/U(1)$ sur le paramètre $\zeta \in \mathbb{R}^3$ du théorème 2.14. Pour un autre groupe $\Gamma \subset SU(2)$, avoir $\psi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^4/\Gamma)$ implique que ψ soit un élément du normalisateur de Γ dans $SO(4)$ qui implique donc $\psi \in \varphi(\mathbb{S}^3 \times N_\Gamma)$, où N_Γ est le normalisateur de Γ dans $SU(2)$ (voir [McC02] pour un calcul de ces normalisateurs) et où $\varphi : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(4)$ est le revêtement à deux feuillets défini dans la section 1.2.3 du chapitre 1.

Étudions maintenant l'action du normalisateur de Γ , $\varphi(\mathbb{S}^3 \times N_\Gamma)$, sur une métrique de [Kro89a] dans les coordonnées de [Kro89a, Proposition 3.14]. Revenons pour cela à la construction de ces espaces. Elle part de

$$P := \mathbb{C}^2 \otimes \text{End}(R),$$

où \mathbb{C}^2 est vue comme la représentation standard de $SU(2)$ et où R est la représentation régulière de $SU(2)$. Notons P^Γ l'ensemble des éléments de P invariants par Γ , F , l'ensemble des éléments commutant avec Γ vu comme un sous-ensemble des transformations unitaires de R , et notons enfin T le sous-groupe des complexes de norme 1 qui agit trivialement. Les instantons gravitationnels asymptotiques à \mathbb{C}^2/Γ sont alors définis comme les quotients hyperkähleriens de P^Γ par F/T .

Par définition, le normalisateur $\varphi(\mathbb{S}^3 \times N_\Gamma)$ agit sur P^Γ et commute à l'action de F . Il agit donc sur l'ensemble des solutions des équations de l'application de moment $\mu : P^\Gamma \rightarrow (\mathfrak{f}/\mathfrak{t})^* \otimes \mathbb{R}^3$ où \mathfrak{f} et \mathfrak{t} sont les algèbres de Lie de F et T respectivement. Plus précisément, en notant I_k , $k \in \{1, 2, 3\}$ les trois structures complexes de P^Γ données par l'identification de \mathbb{C}^2 et de l'ensemble des quaternions, pour tout $\xi \in \mathfrak{f}/\mathfrak{t}$, les trois coordonnées de μ satisfont les équations

$$\text{grad}(\mu_k \cdot \xi) = I_k(V_\xi),$$

où V_ξ est le champ de vecteurs sur P^Γ engendré par l'action de ξ (voir aussi l'exemple 4.5.2 de la thèse de Kronheimer). La partie $SU(2)$ à laquelle Γ et N_Γ appartiennent commute aux trois structures complexes car elle est identifiée à la multiplication à droite par un quaternion de norme 1 (voir la section 1.2.3). On en

déduit que N_Γ agit par isométrie sur la métrique hyperkählérienne $\mu^{-1}(\zeta)/(F/T)$ pour tout $\zeta \in (\mathfrak{f}/\mathfrak{t})^* \otimes \mathbb{R}^3$. La partie $\overline{SU(2)}$ du normalisateur, qui est identifiée à la multiplication à gauche par un quaternion de norme 1, agit par rotation sur les trois structures complexes. Plus précisément, un élément $n_- \in \overline{SU(2)}$ envoie $\mu^{-1}(\zeta)/(F/T)$ sur $\mu^{-1}(Ad(n_-)\zeta)/(F/T)$ où $Ad(n_-)$ est l'action standard de $SU(2)/\pm \approx SO(3)$ sur le facteur \mathbb{R}^3 de $(\mathfrak{f}/\mathfrak{t})^* \otimes \mathbb{R}^3$.

Pour conclure, il reste à assurer que cette action du normalisateur est bien l'action standard sur le cône asymptotique \mathbb{R}^4/Γ dans les coordonnées de [Kro89a, Proposition 3.14]. Pour cela, on utilise l'identification $\mathbb{R}^4/\Gamma \approx \mu^{-1}(0)/(F/T)$ de [Kro89a, Corollary 3.2] qui permet tout d'abord d'assurer que le normalisateur agit de manière standard sur \mathbb{R}^4/Γ (et par isométries) par l'argument d'au dessus. La correspondance des infinis de $\mu^{-1}(\zeta)/(F/T)$ et de $\mu^{-1}(0)/(F/T)$ pour les coordonnées de [Kro89a, Proposition 3.14] donnée par [Kro89a, (3.13)] nous assure que l'action du normalisateur est bien l'action standard sur le cône asymptotique \mathbb{R}^4/Γ .

Ainsi, le recollement naïf de la métrique $(X_\zeta, g_\zeta) \approx \mu^{-1}(\zeta)/(F/T)$ pour $\zeta \in \mathbb{R}^{3k_\Gamma} \approx (\mathfrak{f}/\mathfrak{t})^* \otimes \mathbb{R}^3$ composée avec l'isométrie $\psi = \varphi(\psi_-, \psi_+)$ est isométrique au recollement naïf de $(X_{\zeta'}, g_{\zeta'})$ avec $\zeta' = Ad(\psi_-)\zeta$. □

Remarquons ensuite que tout orbifold hyperkählérien ALE peut être désingularisé en une variété hyperkählérienne ALE.

Lemme 5.68 ([Ban90]). *Soit $(X_{\zeta_1}, g_{\zeta_1})$ un orbifold ALE hyperkählérien avec une singularité \mathbb{R}^4/Γ . Alors, pour tout $t > 0$, il existe $\zeta_0^t \in \mathbb{R}^{3k_\Gamma} \setminus D_\Gamma$ et $v_t \in \mathbf{O}(g_{\zeta_1})$ satisfaisant $\lim_{t \rightarrow 0} v_t = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} X_{\zeta_0^t} = X_{\zeta_0} \in \mathbb{R}^{3k_\Gamma} \setminus D_\Gamma$, tels que la désingularisation d'Einstein modulo obstructions $(X_{\zeta_1} \# X_{\zeta_0}, \hat{g}_{v_t, t, \zeta_0^t})$ du corollaire 5.65 soit hyperkählérienne et donc un instanton gravitationnel de Kronheimer.*

Démonstration. Le résultat de [Ban90, Theorem 4] nous assure que pour t assez petit, il existe ζ_0 pour lequel il existe une métrique hyperkählérienne g_t satisfaisant

$$\|g_t - g_{0,t,\zeta_0}^B\|_{(1+r_B)^{-\beta} C_{0,t,\zeta_0}^{2,\alpha}(g_{0,t,\zeta_0}^B)} \leq \gamma(t),$$

où $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = 0$. Nous pouvons alors appliquer notre construction de coordonnées du chapitre 3 à $(X_{\zeta_1} \# X_{\zeta_0}, g_t)$ afin d'obtenir un difféomorphisme $\varphi : X_{\zeta_1} \# X_{\zeta_0} \rightarrow X_{\zeta_1} \# X_{\zeta_0}$ grâce auquel nous avons le meilleur contrôle

$$\|\varphi^* g_t - g_{0,t,\zeta_0}^B\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_{0,t,\zeta_0}^B)} \leq C\gamma(t).$$

Nous pouvons ensuite mettre cette métrique $\varphi^* g_t$ en jauge divergence réduite par rapport à g_{0,t,ζ_0}^B à l'aide d'un petit difféomorphisme $\psi : X_{\zeta_1} \# X_{\zeta_0} \rightarrow X_{\zeta_1} \# X_{\zeta_0}$ d'après la proposition 4.39. L'unicité du théorème 4.51 et le fait que les déformations infinitésimales de $(X_{\zeta_0}, g_{\zeta_0})$ s'intègrent en des courbes $t \mapsto (X_{\zeta_0(t)}, g_{\zeta_0(t)})$ par la classification de [Kro89a, Kro89b] nous assure alors qu'il existe $v_t \in \tilde{\mathbf{O}}(g_{0,t,\zeta_0}^B)$ et ζ_0^t tels que l'on ait

$$\psi^*(\varphi^* g_t) = \hat{g}_{v_t, t, \zeta_0^t},$$

avec $\hat{g}_{v_t, t, \zeta_0^t}$ une des métriques construites dans le théorème 4.51. \square

Remarque 5.69. Notons que [HV20, Theorem 6.2] permet de recoller et perturber des instantons gravitationnels lisses dans toutes les directions lisses.

Proposition 5.70. *Il existe $\tau > 0$ tel que pour tous $(v, t, \zeta) \in (B_{C_{\beta, *}(g_{\zeta_1})}^{2, \alpha}(0, \tau) \cap \mathbf{O}(g_{\zeta_1})) \times (0, \tau) \times (\mathbb{S}^{3k_\Gamma - 1} \setminus D_\Gamma)$, la métrique $\hat{g}_{v, t, \zeta}$ de la proposition 5.65 soit isométrique à une métrique hyperkählérienne de [Kro89a].*

Démonstration. Pour montrer ce résultat, nous remarquons tout d'abord que l'ensemble

$$(B_{C_{\beta, *}(g_{\zeta_1})}^{2, \alpha}(0, \tau) \cap \mathbf{O}(g_{\zeta_1})) \times (0, \tau) \times (\mathbb{S}^{3k_\Gamma - 1} \setminus D_\Gamma)$$

est connexe car D_Γ est une union finie de sous-espaces de codimension au moins 2 dans $\mathbb{S}^{3k_\Gamma - 1}$. Il nous suffit alors de montrer que l'ensemble

$$E = \left\{ (v, t, \zeta) \in (B_{C_{\beta, *}(g_{\zeta_1})}^{2, \alpha}(0, \tau) \cap \mathbf{O}(g_{\zeta_1})) \times (0, \tau) \times (\mathbb{S}^{3k_\Gamma - 1} \setminus D_\Gamma), \text{Ric}(\hat{g}_{v, t, \zeta}) = 0 \right\}$$

qui est non-vide d'après le lemme 5.68 est ouvert et fermé car une métrique Ricci-plate ayant la topologie $X_{\zeta_1} \# X_\zeta$ est nécessairement hyperkählérienne d'après [Nak90]. Elle est donc isométrique à $g_{\xi(v, t, \zeta)}$ pour $\xi(v, t, \zeta) \in \mathbb{R}^{3k_{\Gamma_1}} \setminus D_{\Gamma_1}$.

La fermeture de E est une conséquence directe de la continuité (et même la dépendance lisse) de

$$(v, t, \zeta) \in (B_{C_{\beta, *}(g_{\zeta_1})}^{2, \alpha}(0, \tau) \cap \mathbf{O}(g_{\zeta_1})) \times (0, \tau) \times (\mathbb{S}^{3k_\Gamma - 1} \setminus D_\Gamma) \mapsto \text{Ric}(\hat{g}_{v, t, \zeta})$$

prouvée dans le corollaire 5.65.

Pour l'ouverture, supposons que pour (v, t, ζ) fixé, nous ayons $\text{Ric}(\hat{g}_{v, t, \zeta}) = 0$. La métrique $\hat{g}_{v, t, \zeta}$ est donc une des métriques hyperkählériennes de [Kro89a]. Il existe un espace de la même dimension que $\tilde{\mathbf{O}}(g_{v, t, \zeta}^B)$ de déformations hyperkählériennes au voisinage de $g_{\xi(v, t, \zeta)}$ et donc de même pour les déformations Ricci-plates de $\hat{g}_{v, t, \zeta}$. En effet, comme les métriques $\bar{g}_{\zeta_1, v}$ et g_{ζ_2} et $g_{\xi(v, t, \zeta)}$ sont hyperkählériennes,

leurs déformations infinitésimales hyperkählériennes sont de dimension trois fois celle de leur cohomologie L^2 en degré 2, et la dimension de cette cohomologie est additive pour les recollements naïfs que l'on effectue.

D'après le lemme 5.63 appliqué à $P = P_{\hat{g}_{v,t,\zeta}}$, $P' = P_{g_{v,t,\zeta}^B}$, $K' = \tilde{\mathbf{O}}(g_{v,t,\zeta}^B)$ et $S' = \tilde{\mathbf{O}}(g_{v,t,\zeta}^B)^\perp$, les déformations infinitésimales Ricci-plates de $\hat{g}_{v,t,\zeta}$ sont arbitrairement proches d'éléments de $\tilde{\mathbf{O}}(g_{v,t,\zeta}^B)$. On en déduit que les petites déformations Ricci-plates de $\hat{g}_{v,t,\zeta}$ qui restent dans $B_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_{v,t,\zeta}^B, 2\varepsilon)}$ pour $\varepsilon > 0$ la constante du théorème 4.51 sont isométriques à des métriques $\hat{g}_{v',t',\zeta'}$ où les de (v', t', ζ') atteignent un voisinage entier de (v, t, ζ) dans $(B_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_{\zeta_1})}(0, \tau) \cap \mathbf{O}(g_{\zeta_1})) \times (0, \tau) \times (\mathbb{S}^{3k_\Gamma-1} \setminus D_\Gamma)$. L'ensemble est donc ouvert. \square

4.3.3 Obstructions à la formation d'arbres d'orbifolds ALE kählériens

Utilisons les notations de la preuve de la proposition 5.55, et paramétrons l'ensemble des variétés Ricci-plates ALE asymptotiques à \mathbb{R}^4/Γ par $(X_\zeta, g_\zeta)_{\zeta \in \mathbb{R}^{3k_\Gamma} \setminus D_\Gamma}$ dans l'énoncé qui suit.

Lemme 5.71. *Soit $(X_{\zeta_0}, g_{\zeta_0})$, pour $\zeta_0 \in D_\Gamma$ un orbifold Ricci-plate kählérien asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ . Alors, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^{3k_\Gamma}$ suffisamment proche de ζ_0 , il existe $(N_k, g_{b_k})_k$ un arbre d'orbifolds Ricci-plates ALE kählériens désingularisant \mathbb{R}^4/Γ , $t = (t_k)_k > 0$ avec $t_1 = 1$ et $(N_1, g_{b_1}) = (X_{\zeta_0}, g_{\zeta_0})$ tels que (X_ζ, g_ζ) soit isométrique à $(N, \bar{g}_{b,t})$ la perturbation (itérée) de la proposition 5.70 de $(N, g_{v,t,\zeta}^B)$, la désingularisation naïve obtenue en recollant les (N_k, g_{b_k}) aux échelles relatives t_k .*

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour ζ suffisamment proche de ζ_0 , il existe un difféomorphisme Φ_ζ entre des voisinages des infinis de (X_ζ, g_ζ) et de \mathbb{R}^4/Γ et $\mathbf{o}_1(\zeta)$, $\mathbf{o}_2(\zeta)$ et $\mathbf{o}_3(\zeta)$, des éléments de $\mathbf{O}(g_\zeta)$ satisfaisant pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\Phi_\zeta^* \mathbf{o}_i(\zeta) = O_i^4 + \mathcal{O}(r_B^{4+\beta}),$$

où les $O_i^4 = \mathcal{O}(r_B^{-4})$ sont les 2-tenseurs du corollaire 5.48, et avec $\|\mathbf{o}_i(\zeta)\|_{L^2(g_\zeta)} \geq \varepsilon$.

Démonstration. D'après le corollaire 5.20, $(X_\zeta, g_\zeta) = (N, \bar{g}_{b,t})$ est une petite perturbation Ricci-plate et kählérienne d'une désingularisation naïve (N, g_t^B) pour t suffisamment petit en fonction de ζ . De plus, les termes en r_e^{-4} de (X_ζ, g_ζ) convergent vers ceux de $(X_{\zeta_0}, g_{\zeta_0})$ lorsque $\zeta \rightarrow \zeta_0$ d'après le corollaire 5.20.

Par hypothèse, il existe $l \in \{1, \dots, k_\Gamma\}$ tel que $\zeta_0^l \neq 0$, et donc, pour ζ suffisamment proche de ζ_0 , nous avons $\zeta^l \neq 0$ par continuité. Exactement comme dans la preuve de la proposition 5.55, cela implique qu'il existe un difféomorphisme Φ_ζ

entre des voisinages des infinis de (X_ζ, g_ζ) et de \mathbb{R}^4/Γ et des déformations infinitésimales de g_ζ , $\mathbf{o}_1(\zeta)$, $\mathbf{o}_2(\zeta)$ et $\mathbf{o}_3(\zeta)$ telles qu'il existe $C > 0$ indépendant de ζ pour lequel on a pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\left| \Phi_\zeta^* \mathbf{o}_i(\zeta) - O_i^4 \right| \leq Cr_B^{-4-\beta}$$

d'après le corollaire 5.20. En particulier, comme $O_i^4 \neq 0$, il existe $\varepsilon > 0$ dépendant de C et β , mais indépendant de ζ tel que l'on ait $\|\mathbf{o}_i(\zeta)\|_{L^2(g_\zeta)} \geq \varepsilon$. \square

Lemme 5.72. *Soit g_t^B un recollement naïf d'orbifolds Ricci-plats ALE kählériens et $\bar{g}_{b,t}$ sa perturbation Ricci-plate ALE kählérienne obtenue dans la proposition 5.70.*

Alors pour tout 2-tenseur $w \in r_B^{-2}C_\beta^\alpha(g_t^B)$, il existe un unique 2-tenseur $u \in \tilde{\mathbf{O}}(g_t^B)_{g_t^B}^\perp \cap C_{\beta,}^{2,\alpha}(g_t^B)$, tel que*

$$\bar{P}_{\bar{g}_{b,t}} u = \pi_{\mathbf{O}(\bar{g}_{b,t})^\perp} w. \quad (5.53)$$

Nous avons de plus le contrôle suivant pour $C = C(g_t^B) > 0$,

$$\|u\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_t^B)} \leq \|\pi_{\mathbf{O}(\bar{g}_{b,t})^\perp} w\|_{r_B^{-2}C_\beta^\alpha(g_t^B)}.$$

Remarque 5.73. Ce qui est crucial dans ce lemme est le fait que la solution ne soit pas seulement contrôlée en norme $C_{\beta,*}^{2,\alpha}(\bar{g}_{b,t})$ qui ne “voit” pas les différentes échelles de l'arbre de singularités, mais en norme $C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_t^B)$ d'arbre de singularités qui les distingue et qui se comporte donc bien quand $t \rightarrow 0$.

Démonstration. D'après le théorème 5.40, nous avons le contrôle

$$\|\bar{g}_{b,t} - g_t^B\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_t^B)} \leq Ct_{\max}^{\frac{2-\beta}{4}}, \quad (5.54)$$

qui, combiné à la preuve du théorème 4.51 implique que pour t_{\max} suffisamment petit, l'opérateur $\bar{P}_{\bar{g}_{b,t}}$ est injectif sur $\tilde{\mathbf{O}}(g_t^B)^\perp \cap C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_t^B)$.

De plus, pour $0 < \beta < 1$, son conoyau sur $r_B^{-2}C_\beta^\alpha(g_t^B)$ est égal à son noyau sur $r_B^{-2}C_{-\beta}^\alpha(g_t^B)$ qui est $\mathbf{O}(\bar{g}_{b,t})$. En effet, pour toute métrique Ricci-plate ALE $\bar{g}_{b,t}$, le noyau et le conoyau de $\bar{P}_{\bar{g}_{b,t}} : C_{\beta,*}^{2,\alpha}(\bar{g}_{b,t}) \rightarrow r_b^{-2}C_\beta^\alpha(\bar{g}_{b,t})$ sont égaux à $\mathbf{O}(\bar{g}_{b,t})$ car en prenant la divergence de l'égalité $\bar{P}_{\bar{g}_{b,t}}(h) = 0$ pour $h \in C_{\beta,*}^{2,\alpha}(\bar{g}_{b,t})$, on obtient $\delta_{\bar{g}_{b,t}} \delta_{\bar{g}_{b,t}}^*(\delta_{\bar{g}_{b,t}} h) = 0$, et finalement $\delta_{\bar{g}_{b,t}} h = 0$ d'après la proposition 4.32. En prenant la trace de l'équation restante, on trouve $\nabla_{\bar{g}_{b,t}}^* \nabla_{\bar{g}_{b,t}}(\text{tr}_{\bar{g}_{b,t}} h) = 0$, et comme h décroît à l'infini, $\text{tr}_{\bar{g}_{b,t}} h = 0$. Finalement $P_{\bar{g}_{b,t}}(h) = 0$, et on conclut que le noyau

de $\bar{P}_{\bar{g}_{b,t}} : C_{\beta,*}^{2,\alpha} \rightarrow r_b^{-2}C_\beta^\alpha$ est $\mathbf{O}(\bar{g}_{b,t})$, et de la même manière que son conoyau est aussi $\mathbf{O}(\bar{g}_{b,t})$. \square

Corollaire 5.74. *Soit $(N, \bar{g}_{b,t})$ la perturbation Ricci-plate ALE kählérienne de la proposition 5.70 d'un recollement d'orbifolds Ricci-plats ALE, $(N, g^B = g_t^B)$. Supposons que (N_1, g_{b_1}) soit asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ , considérons \bar{H}_2 un 2-tenseur homogène quadratique sur \mathbb{R}^4/Γ tel que $\bar{P}_e \bar{H}_2 + \lambda g_e = \mathbf{O}_o$ pour un 2-tenseur constant \mathbf{O}_o et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Alors, il existe \bar{h}_2 un 2-tenseur sur N et χ , une fonction de coupure à support dans un voisinage de l'infini indépendant des t_k où $(N, \bar{g}_{b,t})$ a des coordonnées ALE, tel qu'on ait

$$\bar{P}_{\bar{g}_{b,t}} \bar{h}_2 + \lambda \bar{g}_{b,t} - \chi \mathbf{O}_o = \sum_i \bar{\lambda}_i \mathbf{o}_i \in \mathbf{O}(\bar{g}_{b,t}).$$

Il existe $C > 0$ indépendant des t_k tels qu'on ait

$$\|\bar{h}_2 - \chi \bar{H}_2\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^B)} \leq C \|\bar{H}_2\|_{r_e^2 C^0(g_e)}.$$

Démonstration. Considérons \bar{H}_2 un 2-tenseur quadratique sur \mathbb{R}^4/Γ tel que $\bar{P}_e \bar{H}_2 + \lambda g_e = \mathbf{O}_o$, et soit χ une fonction de coupure sur N_1 à support dans un voisinage de l'infini où (N_1, g_{b_1}) a des coordonnées ALE on notera aussi χ sur N la coupure prolongée par 0 sur les orbifolds ALE inférieurs. Comme dans un voisinage de l'infini, $\bar{g}_{b,t}$ est une petite (indépendamment de t suffisamment petit) perturbation de g^B en norme $C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^B)$, quitte à choisir un plus petit voisinage de l'infini, on peut supposer que ce système de coordonnées est aussi ALE pour $\bar{g}_{b,t}$.

Nous avons alors

$$\|\bar{P}_{\bar{g}_{b,t}}(\chi \bar{H}_2) + \lambda \bar{g}_{b,t} - \chi \mathbf{O}_o\|_{r_B^{-2} C_\beta^\alpha(g^B)} \leq C \|\bar{H}_2\|_{r_e^2 C^0}.$$

En effet, dans un voisinage de l'infini où $\chi \equiv 1$, comme $\bar{g}_{b,t} - g_e = \mathcal{O}(r_B^{-4})$, on a $\bar{P}_{\bar{g}_{b,t}}(\chi \bar{H}_2) + \lambda \bar{g}_{b,t} = \mathbf{O}_o + \mathcal{O}(r_B^{-4})$, et sur le reste de la variété, on a le contrôle attendu par définition de la norme $r_B^{-2}C_\beta^\alpha(g^B)$. D'après le lemme 5.72, il existe un unique 2-tenseur $h' \in C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^B) \cap \tilde{\mathbf{O}}(g^B)^\perp$, tel qu'on ait

$$\bar{P}_{\bar{g}_{b,t}}(\chi \bar{H}_2 + h') + \lambda \bar{g}_{b,t} - \chi \mathbf{O}_o \in \mathbf{O}(\bar{g}_{b,t}).$$

De plus, d'après la proposition 5.25, l'élément de $\mathbf{O}(\bar{g}_{b,t})$ est explicite. Plus précisément, considérons $(\mathbf{o}_i)_i$ une base orthonormée de $\mathbf{O}(\bar{g}_{b,t})$, et supposons grâce au difféomorphisme Φ_t du lemme 5.71 que les trois premiers éléments sont asympto-

tiques à $c_i \Phi_{t,*} O_i^4$ pour $c_i > \frac{1}{\varepsilon}$. Nous avons la valeur explicite suivante de

$$\bar{P}_{\bar{g}_{b,t}}(\chi \bar{H}_2 + h') + \lambda \bar{g}_{b,t} - \chi \mathbf{O}_o = \sum_i \bar{\lambda}_i \mathbf{o}_i,$$

où, nous avons pour $i = 1, 2, 3$

$$\bar{\lambda}_i := - \int_{\mathbb{S}^3/\Gamma} \left(3 \langle \bar{H}_2, O_i^4 \rangle_{g_e} + O_i^4 \left(\nabla_e \text{tr}_e \bar{H}_2, \partial_{r_e} \right) \right) dv_{\mathbb{S}^3/\Gamma} + \int_N \chi \langle \mathbf{O}_o, \mathbf{o}_i \rangle_{\bar{g}_{b,t}} dv_b.$$

□

Soit (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein et p un de ses points singuliers de singularité \mathbb{R}^4/Γ , S_o l'ensemble des singularités de $M_o \setminus \{p\}$, et soit $(N_k, g_{b_k})_k$ un arbre d'orbifolds Ricci-plats ALE kählériens recollés dans la même orientation et désingularisant \mathbb{R}^4/Γ . Soit de plus $\hat{g}_{S_o, v_{S_o}}$ une désingularisation naïve modulo obstructions de (M_o, g_o, S_o) dont les termes quadratiques du développement en jauge divergence au point p sont \hat{H}_2 , $t_1 > 0$ et $\bar{g}_{b,t}$ un recollement Ricci-plat kählérien des $(N_k, g_{b_k})_k$ à des échelles relatives $t = (t_k)_k > 0$ donné par la proposition 5.70, et un 2-tenseur \hat{h}_2 sur N et les réels $\hat{\lambda}_i$ obtenus par le lemme 5.74.

Définissons la métrique d'approximation \hat{g}_v^A comme le recollement naïf (définition 3.3) de $\hat{g}_{S_o, v_{S_o}}$ et de $t_1(\bar{g}_{b,t} + t_1 \hat{h}_2)$ où $\chi \hat{h}_2 \perp \mathbf{O}(\bar{g}_{b,t})$. Nous avons le contrôle suivant qui se montre comme ceux des corollaires 5.9 et 5.27.

Corollaire 5.75. *Soit \hat{g}_v^A une métrique d'approximation d'Einstein modulo obstructions comme ci-dessus et $\beta > 0$. Alors, nous avons le contrôle suivant pour $t_{\max} > 0$ suffisamment petit : pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $C_k > 0$,*

$$\left\| \pi_{\tilde{\mathbf{O}}(g^D)^\perp} \Phi_{g^D}(\hat{g}_v^A) \right\|_{r_D^{-2} C_\beta^k(g^D)} \leq C_k t_1^{\frac{3-\beta}{4}}, \quad (5.55)$$

et pour tout $\mathbf{o} \in \mathbf{O}(g_b)$, en notant $\tilde{\mathbf{o}}$ sa coupure sur M de la définition 4.44,

$$\left\langle \Phi_{g^D}(\hat{g}_v^A) - t_1 \sum_i \hat{\lambda}_i \tilde{\mathbf{o}}_i, \tilde{\mathbf{o}} \right\rangle_{L^2(g^D)} \leq C_0 \|\mathbf{o}\|_{L^2(g_b)} t_1^{\frac{3}{2}}, \quad (5.56)$$

tout en satisfaisant,

1. $\|\hat{g}_v^A - g^D\|_{C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g^D)} \leq 2\varepsilon$,
2. $\hat{g}_v^A - (g^D + v)$ est orthogonal à $\tilde{\mathbf{O}}(g^D)$ pour le produit L^2 de g^D .

Remarque 5.76. Ce qui est crucial ici est qu'en considérant les espaces à poids $C_{\beta,*}^{2,\alpha}(g_t^B)$ adaptés à l'arbre de singularités se formant, nous obtenons un contrôle par une puissance de t_1 seulement.

On en déduit alors, comme dans les corollaires 5.32 et 5.43 que l'obstruction est satisfaite à la limite à tous les points singuliers de (M_o, g_o) sous l'hypothèse que les orbifolds ALE apparaissant sont kählériens.

Théorème 5.77. *Soit (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein, et supposons qu'il existe $(M_i, g_i)_i$ une suite de variétés d'Einstein telle que*

$$(M_i, g_i) \xrightarrow{GH} (M_o, g_o).$$

Alors, (M_o, g_o) satisfait $\det \mathbf{R}(g_o) = 0$ à tous ses points singuliers où les arbres de singularités se forment au sens de Gromov-Hausdorff d'après le théorème 2.47 sont composés d'orbifolds Ricci-plats ALE kählériens recollés dans la même orientation.

Remarque 5.78. Le résultat est optimal pour la singularité $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$ dans le sens où c'est la seule obstruction locale à la désingularisation. En effet, en combinant l'existence de désingularisations montrée dans [Biq13] avec notre résultat d'obstruction, dans le cas de métriques d'Einstein non-dégénérées et asymptotiquement hyperboliques et ayant une singularité $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$, on voit qu'il existe une désingularisation au sens de Gromov-Hausdorff (et avec une vitesse de convergence donnée à l'infini) grâce la métrique d'Eguchi-Hanson *si et seulement si* la condition $\det \mathbf{R}(g_o) = 0$ est satisfaite.

Remarque 5.79. Nous ne pouvons pour l'instant pas déduire de résultat d'obstruction si des arbres de singularités non kählériens apparaissent. La raison est qu'il n'y a pas de raison que les arbres d'orbifolds ALE Ricci-plats se recollent en une métrique Ricci-plate ALE. Les obstructions à ce recollement Ricci-plat pourraient alors compenser celles venant des termes de courbure de l'orbifold si les bulles les plus profondes apparaissent à des échelles relatives plus lentes.

5 Obstructions sous des hypothèses topologiques

Donnons maintenant des conditions topologiques qui assurent que les bulles qui apparaissent sont kählériennes. Cela nous permet de montrer des résultats d'obstructions sous ces conditions dans le théorème 5.84, et le corollaire 5.86.

5.1 Inégalité de Hitchin-Thorpe et désingularisations d'orbifolds d'Einstein

Dans cette partie, nous montrons que désingulariser un orbifold d'Einstein par des métriques d'Einstein détériore nécessairement l'inégalité de Hitchin-Thorpe satisfaite par l'orbifold, voir le théorème 5.84. Le cas où l'inégalité est préservée est le cas précis où tous les orbifolds Ricci-plats ALE des arbres de singularités sont kählériens et que tous les recollements se font dans la même orientation, et il y a alors obstruction.

Dans le cas des orbifolds et des variétés ALE, pour être cohérent avec la formule de Chern-Gauss-Bonnet (2.2) et la formule de Hirzebruch (2.3) pour les variétés d'Einstein compactes de dimension 4, il faut modifier la définition topologique de la caractéristique d'Euler et de la signature à l'aide d'un terme de bord. Il se trouve que les quantités intégrales (2.2) et (2.3) définies dans le chapitre 2 sont des invariants topologiques lorsque l'on considère des orbifolds et espaces ALE si l'on fixe des comportements ALE à l'infini et orbifolds aux singularités. Nous les noterons $\tilde{\chi}$ et $\tilde{\tau}$ pour les distinguer de la caractéristique d'Euler et de la signature habituels.

Pour les variétés Ricci-plates ALE, Nakajima a obtenu une inégalité tout à fait analogue à celle d'Hitchin-Thorpe.

Théorème 5.80 ([Nak90, Theorem 4.2]). *Soit (N, g_b) une variété Ricci-plate ALE de dimension 4. Alors, on a l'inégalité suivante entre la caractéristique d'Euler et la signature des orbifolds ALE,*

$$2\tilde{\chi}(N) \geq 3|\tilde{\tau}(N)|,$$

avec égalité si et seulement si (N, g_b) est un orbifold Ricci-plat ALE kählérien.

Remarque 5.81. En particulier, les seules variétés Ricci-plates ALE difféomorphes à des résolutions minimales de singularités ou leurs quotients sont kählériennes.

Les invariants $\tilde{\tau}$ et $\tilde{\chi}$ sont additifs par recollement de variétés ALE à un orbifold (avec la même orientation pour $\tilde{\tau}$). Si $M = M_o \#_j N_j$, on a alors

$$\tau(M) = \tau(M_o) + \sum_j \tau(N_j),$$

et

$$\chi(M) = \tilde{\chi}(M_o) + \sum_j \tilde{\chi}(N_j).$$

Cela implique directement :

$$\begin{aligned} 2\chi(M) - 3|\tau(M)| &= 2\left(\tilde{\chi}(M_o) + \sum_j \tilde{\chi}(N_j)\right) - 3\left|\tilde{\tau}(M_o) + \sum_j \tilde{\tau}(N_j)\right| \\ &\geq 2\tilde{\chi}(M_o) - 3|\tilde{\tau}(M_o)| + \sum_j \left(2\tilde{\chi}(N_j) - 3|\tilde{\tau}(N_j)|\right) \\ &\geq 2\tilde{\chi}(M_o) - 3|\tilde{\tau}(M_o)|. \end{aligned}$$

Comme tous les termes sont positifs, on voit qu'il y a égalité si et seulement si pour tout j on a $2\tilde{\chi}(N_j) - 3|\tilde{\tau}(N_j)| = 0$ et qu'en plus tous les recollements sont faits dans une même orientation pour laquelle $\tilde{\tau}(M_o)$ et tous les $\tilde{\tau}(N_j)$ sont du même signe.

Exemple 5.82. Si (M_o, g_o) est un orbifold hyperkählérien, alors les seules désingularisations au sens de Gromov-Hausdorff préservant l'inégalité sont hyperkählériens et correspondent au recollement de bulles hyperkählériennes dans la même orientation.

Exemple 5.83. La sphère S^4 peut être vue comme $S^4 \subset \mathbb{R}^5 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$. On notera S^4/Γ la variété obtenue comme quotient de S^4 par l'action de Γ pour les 4 premières coordonnées de \mathbb{R}^5 . L'orbifold obtenu a des courbures sectionnelles constantes égales à 1, et deux points singuliers aux pôles avec des singularités modelées sur \mathbb{R}^4/Γ .

Pour $\Gamma \subset SU(2)$, une désingularisation d'Einstein de S^4/Γ préservant l'inégalité de Hitchin-Thorpe est nécessairement difféomorphe à $M = S^4/\Gamma \# X_\Gamma \# X_\Gamma$ pour X_Γ une résolution minimale de la singularité S^2/Γ . Par exemple, c'est le cas pour pour $X_{\mathbb{Z}_2} = T^*S^2$, $S^4/\mathbb{Z}_2 \# T^*S^2 \# T^*S^2 = S^2 \times S^2$.

En étudiant le cas d'égalité dans les inégalités précédentes, on obtient une situation assez restreinte.

Théorème 5.84. *Soit (M_o, g_o) un orbifold d'Einstein avec l'orientation donnant $\tilde{\tau}(M_o) \geq 0$, et supposons que $(M, g_i)_i$ soit une suite de métriques d'Einstein convergant au sens de Gromov-Hausdorff vers (M_o, g_o) .*

On a alors l'inégalité suivante,

$$2\chi(M) - 3|\tau(M)| \geq 2\tilde{\chi}(M_o) - 3\tilde{\tau}(M_o).$$

De plus, on a égalité, si et seulement si M est une désingularisation de M_o par recollement d'arbres d'orbifolds kählériens Ricci-plates ALE dans la même orientation (c'est-à-dire avec des paramètres de recollement dans $SO(4)$), et dans ce

cas d'égalité on a la condition

$$\det \mathbf{R}_+(g_o) = 0$$

à tous les points singuliers.

Remarque 5.85. La condition d'égalité limite les groupes des singularités pouvant apparaître.

Une application directe de ce théorème est par exemple le résultat suivant.

Corollaire 5.86. *Soit $\Gamma \subset SU(2)$, $(M_i, g_i)_i$ une suite de métriques d'Einstein convergeant au sens de Gromov-Hausdorff vers l'orbifold sphérique \mathbb{S}^4/Γ . Alors, pour i assez grand, nous avons*

$$2\chi(M_i) - 3|\tau(M_i)| > 2\tilde{\chi}(M_o) - 3|\tilde{\tau}(M_o)|.$$

5.2 Variétés spin

Une autre manière d'assurer que les bulles apparaissant sont bien des instantons gravitationnels est d'imposer à la suite de variétés dégénérant d'être spin. Notre résultat est essentiellement une application du théorème suivant de Nakajima.

Théorème 5.87 ([Nak90, Corollary 3.3]). *Soit (N, g_b) une variété spin et Ricci-plate ALE asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ pour Γ un sous-groupe fini de $SU(2)$, alors, (N, g_b) est un instanton gravitationnel.*

Nous en déduisons un résultat d'obstruction pour les désingularisations d'orbifolds par des métriques d'Einstein spin. La preuve du théorème 1.1 de [KL16] dont l'outil principal est le théorème 5.87 implique que l'orbifold limite et les bulles apparaissant sont spin et recollées dans la même orientation. Si les bulles sont asymptotiques à des quotients de \mathbb{R}^4 par des sous-groupes de $SU(2)$, on utilise le théorème 5.87 pour obtenir le corollaire suivant.

Théorème 5.88. *Soit $(M_i, g_i)_i$ une suite de variétés spin d'Einstein de dimension 4 convergeant vers un orbifold d'Einstein (M_o, g_o) . Alors, (M_o, g_o) est spin et à ses points singuliers ayant un groupe inclus dans $SU(2)$, on a*

$$\det \mathbf{R} = 0.$$

Remarque 5.89. Il n'y avait pas de restriction sur le groupe des singularités dans le cadre de [KL16]. Cela vient du fait que dans la preuve de [KL16], des hypothèses

(topologiques encore une fois) sont faites sur le noyau de l'opérateur de Dirac de la suite dégénérant ce qui assure chez [KL16] que l'orbifold limite n'a que des singularités données par des sous-groupes de $SU(2)$.

5.3 Bornes sur la courbure de Ricci et condition d'Einstein

Notre résultat montre qu'il y a une différence fondamentale entre la condition d'Einstein et des conditions de pincement sur la courbure de Ricci lorsque l'on autorise la formation de singularités. On déduit des corollaires 5.84 et 5.86 qu'il existe une obstruction à la désingularisation d'orbifolds d'Einstein par des métriques d'Einstein lisses qui n'est pas présente sous l'hypothèse que la courbure de Ricci est arbitrairement pincée.

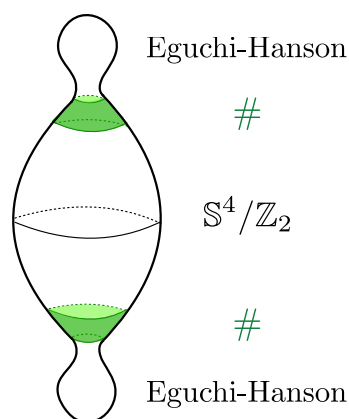


FIGURE 5.1 – Exemple de situation obstruée.

Corollaire 5.90. *Soit Γ un sous-groupe fini de $SU(2)$, et $M = \mathbb{S}^4/\Gamma \# X_\Gamma \# X_\Gamma$ (recollement aux deux singularités orbifolds), où X_Γ est la résolution minimale de la singularité \mathbb{C}^2/Γ . Alors, pour tout $1 \leq p < +\infty$,*

1. *il existe une suite de métriques $(M, g_i)_i$ telles que l'on ait*

- $\| \text{Ric}(g_i) - 3g_i \|_{L^p(g_i)} \leq \frac{1}{i}$,
 - $\text{Ric}(g_i) \geq 3g_i$ (ou bien $\text{Ric}(g_i) \leq 3g_i$), et
 - $(M, g_i^\mathcal{E}) \xrightarrow{GH} (\mathbb{S}^4/\Gamma, g_{\mathbb{S}^4/\Gamma})$,
- mais,*

2. *il n'existe pas de suite de métriques d'Einstein $(M, g_i^\mathcal{E})$ telle que*

- $\text{Ric}(g_i^\mathcal{E}) = 3g_i^\mathcal{E}$, et
- $(M, g_i^\mathcal{E}) \xrightarrow{GH} (\mathbb{S}^4/\Gamma, g_{\mathbb{S}^4/\Gamma})$.

Démonstration. La seconde partie est une conséquence du corollaire d'obstruction 5.32 car la courbure de la sphère ne satisfait jamais la condition $\det \mathbf{R} = 0$.

Pour la première partie, on remarque que notre métrique d'approximation g_t^A définie dans le corollaire 5.9 satisfait $\|\text{Ric}(g_t^A) - \Lambda g_t^A\|_{L^\infty(g_t^A)} = \mathcal{O}(1)$ mais est seulement non-nulle sur des domaines de volume de l'ordre de t , et qu'en choisissant des t_i suffisamment petit, on a donc le contrôle en norme L^p pour $p < +\infty$.

Pour obtenir une désingularisation avec une courbure de Ricci minorée (ou majorée de la même manière) par celle de l'orbifold, il faut être un peu plus fin. Notons tout d'abord qu'en calculant les obstructions à la désingularisation de $\mathbb{S}^4/\mathbb{Z}_2$ par des métriques d'Eguchi-Hanson avec une échelle maximale t_{\max} suffisamment petite, nous avons

$$|\text{Ric}(g_t^A) - 3g_t^A|_{g_t^A} \leq 1 + \delta(t_{\max}) \quad (5.57)$$

où $\delta(t_{\max}) \rightarrow 0$ quand $t_{\max} \rightarrow 0$.

Considérons pour $\varepsilon > 0$ et $b > 1$, une fonction de coupure $\chi_{b,\varepsilon}$, supportée $[0, b\varepsilon]$ et égale à 1 on $[0, \varepsilon]$ dont la k -ième dérivée est un $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(b)}\varepsilon^{-k}\right)$. Une manière de construire une telle fonction est la suivante, soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de coupure C^∞ égale à 1 sur $[-\infty, 0]$, et s'annulant sur $[1, +\infty]$. Soient $\varepsilon > 0$ et $b > 1$ et posons

$$\chi_{b,\varepsilon} : x \in \mathbb{R}^4 \mapsto u\left(\frac{\log(|x|/\varepsilon)}{\log b}\right). \quad (5.58)$$

Elle satisfait bien les propriétés attendues.

Définissons alors la métrique

$$g_{b,\varepsilon} := dr^2 + \sin\left((1 + \chi_{b,\varepsilon})r\right)g_{\mathbb{S}^3/\Gamma}.$$

Supposons que $\varepsilon \rightarrow 0$, $b \rightarrow +\infty$ et $b\varepsilon \rightarrow 0$, la métrique orbifold devient alors arbitrairement proche de \mathbb{S}^4/Γ au sens de Gromov-Hausdorff. De plus, les courbures sectionnelles de $g_{b,\varepsilon}$ sont minorées par $1 - \frac{C}{\log b} \rightarrow 1$ pour une constante $C > 0$ uniforme. Recollons alors naïvement $t(g_{EH} + 2th_2)$, où h_2 est asymptotique à $-\frac{1}{3}r_e^2g_{\mathbb{S}^3/\Gamma}$ aux points singuliers avec $t_{\max} \ll \varepsilon^2$, afin que la zone de recollement se trouve dans $0 \leq r < \varepsilon$ où la métrique $g_{b,\varepsilon}$ est égale à $dr^2 + \sin^2(2r)g_{\mathbb{S}^3/\Gamma}$ comme pour la sphère de rayon $\frac{1}{2}$ dont les courbures sectionnelles sont constantes égales à 4. Pour $r < \varepsilon$, les contrôles sont les mêmes que sur $\frac{g_t^A}{4}$, et la métrique satisfait donc $\text{Ric} \geq 3$ par (5.57) car $4\left(3 - (1 - \delta(t_{\max}))\right) > 3$. Comme la métrique satisfait

$\text{Ric} \geq 3 - \frac{C}{\log(b)}$ pour les r plus grands, on peut simplement réechelonner légèrement (en fonction de $\frac{C}{\log b} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0$) pour s'assurer d'avoir $\text{Ric} > 3$ partout. \square

La question reste cependant ouverte pour le cas des pincements de la courbure de Ricci en norme L^∞ .

Question 5.91. Existe-t-il une suite de variétés $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, g_i)$ satisfaisant $3 - \frac{1}{i} \leq \text{Ric}(g_i) \leq 3 + \frac{1}{i}$ convergeant au sens de Gromov-Hausdorff vers $\mathbb{S}^4/\mathbb{Z}_2$?

6 Une obstruction à la désingularisation d'orbifolds sphériques et hyperboliques

Nous exhibons finalement une obstruction à la désingularisation d'orbifolds sphériques et hyperboliques par des variétés Ricci-plates ALE générales (pas nécessairement kählériennes) dans le théorème 5.98. Nous en déduisons qu'il n'existe pas de désingularisation d'orbifolds sphériques ou hyperboliques au sens de Gromov-Hausdorff à l'aide de variétés Ricci-plates ALE dont les déformations infinitésimales sont intégrables dans le corollaire 5.100.

6.1 Production de déformations infinitésimales par prolongement de champs de Killing conformes à l'infini

Nous proposons une construction de déformations infinitésimales par prolongements harmoniques des isométries du cône asymptotique d'un espace Ricci-plat ALE quelconque (et en particulier pas nécessairement kählérien). Cela éclaire de plus le sens des déformations infinitésimales de g_{EH} .

Changement d'échelle.

Proposition 5.92. Soit (N, g_b) un orbifold Ricci-plat ALE asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ , et un difféomorphisme Φ entre voisinages de l'infini de N et \mathbb{R}^4/Γ .

Alors, il existe un unique champ de vecteurs X sur (N, g_b) tel que $\Phi^*X = 2r_e \partial_{r_e} + o(r_e)$, $\nabla^* \nabla X = 0$ et $X = \nabla u$, où u est l'unique solution de $-\nabla^* \nabla u = 8$, telle que $u = r_b^2 + o(1)$.

De plus, $(\mathcal{L}_X g_b)^\circ = \mathcal{L}_X g_b - 4g_b$, la partie sans trace de $\mathcal{L}_X g_b$ est une déformation infinitésimale de g_b à divergence et trace nulle.

Démonstration. L'existence et l'unicité de la fonction u est obtenue dans la preuve du théorème 2 de [BH19]. Le 2-tenseur $(\mathcal{L}_{\nabla u}g_b)^\circ$ est bien une déformation infinitésimale L^2 de g_b car l'équation $\text{Ric} = 0$ est invariante par changement d'échelle et action du groupe des difféomorphismes, mais aussi que la divergence et la trace de $(\mathcal{L}_{\nabla u}g_b)^\circ = 2\text{Hess}_{g_b}u - 4g_b$ s'annulent car $-\nabla^*\nabla u = 8$. \square

Exemple 5.93. La déformation $\mathbf{o}_1 := O_1^4 + \mathcal{O}(r_b^{-6})$ de la métrique d'Eguchi-Hanson est proportionnelle à cette déformation.

Rotation de l'infini. En jouant sur les symétries des termes d'ordre -4 de l'orbifold. Il y a en général un espace de dimension $\dim(SO(4)) = 6$ de déformations ainsi construites, mais certaines peuvent s'annuler en fonction des symétries de l'ALE. Par exemple, la métrique d'Eguchi-Hanson est invariante par $U(2)$ qui est de dimension 4, et $SO(4)/U(2)$ est de dimension 2.

Proposition 5.94 ([BH19, Section 4]). *Soit (N, g_b) un orbifold Ricci-plat ALE asymptotique à \mathbb{R}^4/Γ , et un difféomorphisme Φ entre voisinages de l'infini de N et \mathbb{R}^4/Γ .*

Alors, pour tout $X_0 \in \mathfrak{so}(4)$, il existe un unique champ de vecteurs harmonique sur (N, g_b) tel que

$$\Phi^*X = X_0 + o(r_e).$$

De plus, pour un tel champ de vecteurs X , \mathcal{L}_Xg_b est une déformation infinitésimale de g_b à divergence et trace nulle. Elle s'annule si et seulement si X est un champ de Killing de g_b .

Exemple 5.95. Les déformations $\mathbf{o}_i = O_i^4 + \mathcal{O}(r_b^{-6})$ pour $i = 2$ ou $i = 3$ de la métrique d'Eguchi-Hanson sont proportionnelles à ces déformations par rotation de l'infini pour X_0 valant le champ de Killing de \mathbb{S}^3 respectivement dual de α_3 et de α_2 .

Remarque 5.96. Ces déformations sont intégrables car elles viennent simplement de changement de coordonnées et d'échelle de la variété globale. Ainsi, une variété rigide, c'est-à-dire dont toutes les déformations sont de ce type, n'aura que des déformations intégrables et entrera dans le cadre du corollaire 5.100 de la fin de cette partie. La métrique d'Eguchi-Hanson en est un exemple et heuristiquement la plupart des métriques d'Einstein devrait l'être.

6.2 Orbifolds Ricci plats ALE et volume maximal

Résumons ici des résultats obtenus par Biquard-Hein dans [BH19]. Nous les utiliserons pour montrer que la déformation infinitésimale que l'on vient de construire dans la proposition 5.92 est non-nulle et peut donc être utilisée pour exhiber des obstructions à certaines désingularisations.

Théorème 5.97 ([BH19, Theorem A, Theorem B]). *Soit (N, g_b) un orbifold Ricci-plat ALE asymptotique à un cône plat \mathbb{R}^4/Γ , soit Ψ un difféomorphisme entre les infinis de (N, g_b) et de son cône asymptotique \mathbb{R}^4/Γ , et soit u est l'unique solution de $-\nabla^*\nabla u = 8$, $u = r_b^2 + o(1)$. Alors, il existe un compact $K \subset M$ tel que $M \setminus K$ soit feuilleté par des hypersurfaces Σ_ρ à courbure moyenne constante $\frac{3}{\rho}$.*

De plus, si l'on note Ω_ρ l'intérieur de Σ_ρ , la limite suivante existe :

$$\mathcal{V} := \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\text{Vol}_{g_b}(\Omega_\rho) - \text{Vol}_{g_e}(B(0, \rho)/\Gamma) \right], \quad (5.59)$$

et on a en fait $\mathcal{V} \leq 0$, avec égalité si et seulement si $(N, g_b) = (\mathbb{R}^4/\Gamma, g_e)$.

On a de plus le développement plus précis

$$u = r_b^2 + \frac{b}{r_b^2} + \mathcal{O}(r_b^{-3}),$$

avec

$$b = -4 \frac{\mathcal{V}}{|\partial B(0, 1)/\Gamma|} \geq 0.$$

On a l'expression suivante pour le développement de $(\mathcal{L}_{\nabla_{g_b} u} g_b)^\circ = (2\text{Hess}_{g_b} u - 4g_b)$

$$(\mathcal{L}_{\nabla_{g_b} u} g_b)^\circ(\partial_{r_b}, \partial_{r_b}) = \frac{8b}{r_b^4} + \mathcal{O}(r_b^{-5}) \quad (5.60)$$

6.3 Obstruction à la désingularisation d'orbifolds sphériques et hyperboliques

Nous allons maintenant tirer profit du fait que la déformation $\mathbf{o}_1 = (2\text{Hess}_{g_b} u - 4g_b)$ ne s'annule jamais pour une métriques non plate.

Théorème 5.98. *Soit (N, g_b) un orbifold Ricci-plat ALE et H_2 les termes quadratiques d'une métrique sphérique ou hyperbolique en coordonnées géodésiques, et O_1^4 les termes d'ordre -4 de la déformation $\mathbf{o}_1 = (2\text{Hess}_{g_b} u - 4g_b)$.*

Alors, on a

$$\int_{\mathbb{S}^3} \left(3\langle H_2, O_1^4 \rangle_{g_e} + O_1^4(B_e H_2, \partial_{r_e}) \right) dv \neq 0.$$

Remarque 5.99. Il est donc impossible de désingulariser de manière classique (orthogonalement au noyau) ces orbifolds d'après le corollaire 5.12.

Démonstration. Pour une métrique hyperbolique, on a $H_2 = \frac{r_e^4}{3}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)$ en coordonnées géodésiques, et pour une métrique sphérique, $H_2 = -\frac{r_e^4}{3}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)$.

Remarquons alors que, comme $g_e = dr_e^2 + r_e^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)$, on a $0 = \text{tr}_{g_e} O_1^4 = O_1^4(\partial_{r_e}, \partial_{r_e}) + \langle r_e^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2), O_1^4 \rangle$ et donc

$$\begin{aligned} \langle r_e^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2), O_1^4 \rangle_{g_e} &= \text{tr}_{g_e} O_1^4 - O_1^4(\partial_{r_e}, \partial_{r_e}) \\ &= -O_1^4(\partial_{r_e}, \partial_{r_e}). \end{aligned}$$

Pour l'autre partie de l'obstruction, on a $B_e(r_e^4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)) = 6r_e \partial_{r_e}$. En effet, $r_e^4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) = r_e^2 g_e - r_e^2 dr_e^2$, et

$$\begin{aligned} B_e(r_e^2 g_e) &= \delta_e(r_e^2 g_e) + \frac{1}{2} d\text{tr}_e(r_e^2 g_e) \\ &= -2r_e g_e(\partial_{r_e}) + 4r_e dr_e \\ &= 2r_e dr_e, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_e(r_e^2 dr_e^2) &= \delta_e(r_e^2 dr_e^2) + \frac{1}{2} d\text{tr}_e(r_e^2 dr_e^2) \\ &= \delta_e\left(\sum_{ij} x^i x^j dx^i dx^j\right) + r_e dr_e \\ &= -\sum_{i \neq j} x^j dx^j - 2 \sum_j x^j dx^j + r_e dr_e \\ &= -4r_e dr_e. \end{aligned}$$

Et donc finalement, en $r_e = 1$,

$$O_1^4(B_e(r_e^4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)), \partial_{r_e}) = 6O_1^4(\partial_{r_e}, \partial_{r_e}) = -192 \frac{\mathcal{V}}{|\partial B(0, 1)/\Gamma|} > 0.$$

□

Corollaire 5.100. *Soit (M_o, g_o) un orbifold sphérique ou hyperbolique. Alors, il n'existe pas de suite de variétés d'Einstein $(M_i, g_i)_i$ telle que*

$$(M_i, g_i) \xrightarrow{GH} (M_o, g_o),$$

et telle que les éclatements non-triviaux de $(M_i, \frac{g_i}{t_i}, p_i)$ pour $t_i \rightarrow 0$, $t_i > 0$ et

$p_i \in M_i$ convergent vers des variétés Ricci-plates ALE (c'est-à-dire sans qu'arbre se forme) dont les déformations infinitésimales sont intégrables.

Démonstration. D'après le corollaire 5.32, si les termes quadratiques du développement de g_o sont H_2 , l'obstruction induite par la déformation \mathbf{o}_1 est

$$\int_{\mathbb{S}^3} \left(3\langle H_2, O_1^4 \rangle_{g_e} + O_1^4(B_e H_2, \partial_{r_e}) \right) dv = 0,$$

qui n'est jamais satisfaite d'après le théorème 5.98. □

En d'autres termes, ces orbifolds ne peuvent pas être désingularisés au sens de Gromov-Hausdorff à l'aide de variétés Ricci-plates ALE dont les déformations infinitésimales sont intégrables. Nous ne pouvons donc par exemple pas désingulariser $\mathbb{S}^4/\mathbb{Z}_2$ par recollement de variétés Ricci-plates ALE dont les déformations sont intégrables. De même, en généralisant nos résultats au cadre asymptotiquement hyperbolique et non-dégénéré par les méthodes de [Biq13], il n'est pas possible de désingulariser $\mathbb{H}^4/\mathbb{Z}_2$, le disque de Poincaré \mathbb{H}^4 quotienté par la relation d'équivalence $\exp_{x_0}(v) = \exp_{x_0}(-v)$ pour $x_0 \in \mathbb{H}^4$ fixé par des bulles intégrables – c'était une conjecture d'Anderson.

L'obstruction à la désingularisation d'orbifolds sphériques ou hyperboliques est identifiée généralement dans le théorème, mais nous avons pour l'instant besoin d'une hypothèse d'intégrabilité pour conclure à une obstruction générale au sens de Gromov-Hausdorff.

Conjecture 5.101. Les orbifolds (singuliers) sphériques et hyperboliques de dimension 4 ne peuvent pas être limites de variétés d'Einstein au sens de Gromov-Hausdorff.

Appendices

Annexe A

Perturbation d'hypersurfaces

Soit Σ une hypersurface orientable d'une variété (M, g) , et supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'application $F : [-\varepsilon, \varepsilon] \times \Sigma \rightarrow M$ définie par

$$F(s, x) = \gamma_x(s),$$

soit un difféomorphisme sur son image, où γ_x partant de $x \in \Sigma$ est la géodésique dont la vitesse initiale est N_x^Σ normale à Σ .

Considérons alors une application $w : \Sigma \rightarrow [-\varepsilon, \varepsilon]$ ayant une norme $C^{2,\alpha}(\Sigma)$ suffisamment petite, et définissons $\Sigma(w)$ comme étant l'hypersurface image de l'application $G : \Sigma \rightarrow \Sigma(w) \subset M$ définie par

$$G(x) = F(w(x), x).$$

Nous allons contrôler la géométrie de $\Sigma(w)$, ce qui sera important dans le chapitre 3.

1 Perturbations normales quelconques

L'objectif de cette annexe est la preuve de l'estimation suivante de la courbure moyenne de $H(\Sigma(w))$, mais au cours de la preuve, nous obtiendrons d'autres formules utiles.

Proposition A.1. *La courbure moyenne de $\Sigma(w)$ dans une zone où le rayon d'injectivité est minoré par $r_0 > 0$ est donnée par*

$$H(\Sigma(w)) = H(\Sigma) - J_{\Sigma, M}w + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w),$$

où

$$J_{\Sigma, M} := \Delta_{\Sigma} + |A^{\Sigma}|^2 + \text{Ric}^M(N, N)$$

est l'opérateur de Jacobi associé à l'hypersurface et où $\mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2$ satisfait : pour tout $l \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$, il existe $C = C(\alpha, l, n, \|\text{Rm}\|_{C^{l+2}}, \|A\|_{C^{l+1}}, r_0)$

$$\|\mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w) - \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w')\|_{C^{l, \alpha}} \leq C\|w - w'\|_{C^{l+2, \alpha}} \left(\|w\|_{C^{l+2, \alpha}} + \|w'\|_{C^{l+2, \alpha}} \right),$$

Note A.2. Tout au long de la preuve, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on notera $\mathcal{Q}_{\Sigma, M}^k$ les opérateurs d'ordre k , c'est-à-dire satisfaisant un contrôle du type : pour tout l , il existe $C > 0$ telle que

$$\|\mathcal{Q}_{\Sigma, M}^k(w) - \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^k(w')\|_{C^{l, \alpha}} \leq C\|w - w'\|_{C^{l+2, \alpha}} \left(\|w\|_{C^{l+2, \alpha}} + \|w'\|_{C^{l+2, \alpha}} \right)^{k-1}.$$

Contrôle de la métrique ambiante. Dans les coordonnées induites par F , la métrique a une expression de la forme suivante,

$$F^*g = ds^2 + (1 + s)^2 g_s,$$

où g_s est une métrique sur Σ . Notons que g_0 est la métrique induite par g sur Σ . Notons de plus $\Sigma_s := F(s, \Sigma)$ l'hypersurface equidistante.

Remarque A.3. Nous allons surtout utiliser cette écriture de la métrique dans des situations qui correspondent approximativement à $\Sigma \approx \mathbb{S}^{n-1}$ plongée dans l'espace $M \approx \mathbb{R}^n$ de la même manière que la sphère unité dans l'espace euclidien. Dans l'espace euclidien, on a $ds^2 + (1 + s)^2 g^{\mathbb{S}^{n-1}}$, et c'est pour cette raison que l'on a introduit le facteur $(1 + s)^2$ devant g_s .

Nous avons le contrôle suivant sur la métrique g_s .

Lemme A.4. Soit $|s| \leq \inf \left(\|\text{Rm}\|_{\infty}^{-\frac{1}{2}}, (\sup_{\Sigma} |A|)^{-1}, \varepsilon \right)$, et (e_1, \dots, e_{n-1}) une base orthonormée pour g_0 , on a l'estimation suivante de la métrique g_s de Σ dans la base $(e_i)_i$

$$(1 + s)^2 (g_s)_{ij} = \delta_{ij} + 2sA_{ij} + s^2 \left(\sum_k A_{ik}A_{jk} - K_i^j \right) + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^3(s), \quad (\text{A.1})$$

où les A_{ij} sont les composantes de la seconde forme fondamentale de Σ dans (e_1, \dots, e_{n-1}) , et où $K_j^i := g(\text{Rm}(e_j, N)N, e_i)$, où N est la normale sortante à Σ .

Remarque A.5. Dans le cas de la sphère \mathbb{S}^{n-1} plongée dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n , pour laquelle on a $A_{ij} = \delta_{ij}$, $K_i^j = 0$ et $\text{Rm} = 0$. On a donc exactement $g_s = g_0$.

Démonstration. Soit $x \in \Sigma$ et $X \in T_x \Sigma$. Définissons $X(s) \in T_{F(x,s)} \Sigma_s$ pour tout $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ le champ de Jacobi le long de $\gamma_x = F(x, \cdot)$ tel que $X(0) = X$ et $\partial_s X(0) = A_x(X)$ où A_x est la seconde forme fondamentale Σ vue comme une 1-forme à valeurs vectorielles. On a pour tout $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, et pour tout $(0, X) \in T_{(s,x)}([-\varepsilon, \varepsilon] \times \Sigma)$:

$$dF_{(x,s)}(0, X) = X(s).$$

En effet, si l'on considère une courbe $c_s : [-1, 1] \rightarrow \Sigma_s$ sur Σ_s , alors, elle correspond à une courbe c de Σ : pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$c_s(t) = F(c(t), s).$$

On peut donc lui associer la famille de géodésiques $(\gamma_{c(t)})_t$ partant de $c(t)$ et dont la vitesse initiale est $N^\Sigma(c(t))$. Le champ de Jacobi correspondant à la variation autour de $t = 0$ (en particulier la variation $c'_s(0)$) a donc pour condition initiale $c'(0)$ et pour première variation la seconde forme fondamentale de Σ appliquée à $c'(0)$ qui est la variation de la vitesse initiale, la normale.

Cela va nous permettre d'exprimer g_s en fonction de g_0 . En effet, si l'on considère X et Y dans $T_x \Sigma$ et $X(s)$ et $Y(s)$ les vecteurs de $T\Sigma_s$ associés, on a

$$\begin{aligned} g_{F(x,s)}(X(s), Y(s)) &= g_{F(x,s)}(dF_{(x,s)}X, dF_{(x,s)}Y) \\ &= F^*g_{(x,s)}(X, Y) \\ &= (1+s)^2 g_s(X, Y). \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de contrôler les champs de Jacobi du type $s \mapsto X(s)$ pour un vecteur X donné pour contrôler la métrique g_s pour tout s .

Soient $x \in \Sigma$, $X \in T_x \Sigma$ et le champ de Jacobi associé $X(s) \in T_{F(x,s)} \Sigma_s$. Considérons une base orthonormée (e_1, \dots, e_{n-1}) de $T_x \Sigma$ transportée parallèlement le long de γ_x en $s \mapsto (e_1^s, \dots, e_{n-1}^s)$, qui est une base orthonormée de $T_{F(x,s)} \Sigma_s$ (à ne pas confondre avec les champs de Jacobi $e_i(s)$ partant de e_i).

Notons alors $X^i(s) := g(X(s), e_i^s)$ les composantes de $X(s)$ dans cette base. Si l'on note $K_j^i(s) := g(\text{Rm}(e_j^s, \gamma'(s))\gamma'(s), e_i^s)$, l'équation de Jacobi s'écrit pour tout i ,

$$(X^i)''(s) + \sum_j X^j(s) K_j^i(s) = 0.$$

On a donc pour tout i ,

$$X^i(s) = X^i + sA(X)^i - \int_0^s \int_0^v \sum_j X^j(u) K_j^i(u) dudv. \quad (\text{A.2})$$

Notons que l'on peut contrôler le dernier terme de la manière suivante : posons $Q_{\Sigma, M}(s) := \int_0^s \int_0^v \sum_j X^j(u) K_j^i(u) dudv - \frac{s^2}{2} \sum_j X^j K_i^j(0)$. Nous avons,

$$\begin{aligned} Q_{\Sigma, M}(s) &= \int_0^s \int_0^v \sum_j X^j(u) K_j^i(u) dudv - \frac{s^2}{2} \sum_j X^j K_i^j(0) \\ &= \int_0^s \int_0^v \left(\sum_j X^j(u) K_j^i(u) - X^j K_i^j(0) \right) dudv \\ &= \int_0^s \int_0^v \left(\sum_j X^j [K_j^i(u) - K_i^j(0)] + [X^j(u) - X^j] K_i^j(u) \right) dudv. \end{aligned}$$

Pour le premier terme, sur Σ , $[K_j^i(u) - K_i^j(0)]$ est contrôlé en norme $C^{l, \alpha}$ par $\| \text{Rm} \|_{C^{l, \alpha}}$ dans la direction Σ . Pour w et w' des fonction $C^{l+2, \alpha}$ de Σ , contrôlons le terme,

$$x \mapsto \int_{w'(x)}^{w(x)} \int_0^v \sum_j X^j [K_j^i(u) - K_i^j(0)] dudv.$$

On cherche à contrôler sa norme $C^{l+\alpha}$. Contrôlons sa norme C^1 pour plus de clarté, les autres contrôles s'obtiennent de la même manière,

$$\begin{aligned} &\partial_k \left(\int_{w'(\cdot)}^{w(\cdot)} \int_0^v \sum_j X^j [K_j^i(u) - K_i^j(0)] dudv \right) \\ &= \int_{w'(\cdot)}^{w(\cdot)} \int_0^v \sum_j \partial_k (X^j [K_j^i(u) - K_i^j(0)]) dudv \\ &\quad + \partial_k w'(\cdot) \int_0^{w'(\cdot)} \sum_j X^j [K_j^i(u) - K_i^j(0)] du \\ &\quad - \partial_k w(\cdot) \int_0^{w(\cdot)} \sum_j X^j [K_j^i(u) - K_i^j(0)] du \\ &= \int_{w'(\cdot)}^{w(\cdot)} \int_0^v \sum_j \partial_k (X^j [K_j^i(u) - K_i^j(0)]) dudv \\ &\quad + \partial_k w'(\cdot) \int_{w(\cdot)}^{w'(\cdot)} \sum_j X^j [K_j^i(u) - K_i^j(0)] du \\ &\quad + (\partial_k w'(\cdot) - \partial_k w(\cdot)) \int_0^{w(\cdot)} \sum_j X^j [K_j^i(u) - K_i^j(0)] du, \end{aligned}$$

et donc, en dérivant $k + 1$ fois, nous avons

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{w'(\cdot)}^{w(\cdot)} \int_0^v \sum_j X^j [K_j^i(u) - K_j^i(0)] dudv \right\|_{C^{k+1}} \\ & \leq \|w - w'\|_{C^k} (\|w\|_{C^0} + \|w'\|_{C^0}) \|X\|_{C^{k+1}} (\|w\|_{C^k} + \|w'\|_{C^k}) \|\nabla \text{Rm}\|_{C^{k+1}} \\ & \quad + \|w'\|_{C^{k+1}} \|w - w'\|_{C^k} \|X\|_{C^k} (\|w\|_{C^k} + \|w'\|_{C^k}) \|\nabla \text{Rm}\|_{C^k} \\ & \quad + \|w - w'\|_{C^{k+1}} \|w\|_{C^k} \|X\|_{C^k} \|w\|_{C^k} \|\nabla \text{Rm}\|_{C^k} \\ & \leq 3 (\|X\|_{C^{k+1}} \|\nabla \text{Rm}\|_{C^{k+1}}) \|w - w'\|_{C^{k+1}} (\|w\|_{C^{k+1}} + \|w'\|_{C^{k+1}})^2. \end{aligned}$$

Tant que $|u| \leq \inf \left((\|\text{Rm}\|)^{-\frac{1}{2}}, (\sup_{\Sigma} |A|)^{-1} \right)$ (ce qui ne sera pas restrictif dans nos applications), on a des contrôles uniformes des $X^j(u)$ grâce à l'équation de Jacobi qu'ils satisfont, et grâce à l'équation de Riccati satisfaite par $\frac{\partial_s X^j}{X^j}$. On peut donc contrôler la différence $[X^j(u) - X^j]$ en terme de la courbure ambiante et des valeurs propres de la seconde forme fondamentale de Σ : pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe $C = C(l, n) > 0$, telle que

$$\|X^j(u) - X^j\|_{C^k} \leq C \left(|u| \|A\|_{C^{k+1}} + |u|^2 \|\text{Rm}\|_{C^{k+1}} \right).$$

Pour le second terme, on cherche à contrôler l'application suivante en norme $C^{k,\alpha}$:

$$x \mapsto \int_{w'(x)}^{w(x)} \int_0^v \sum_j [X^j(u) - X^j] K_i^j(u) dudv.$$

Comme pour le premier terme, on obtient une borne de la norme C^{k+1} ,

$$3 \left(\|A\|_{C^{k+1}} + (\|w\|_{C^{k+1}} + \|w'\|_{C^{k+1}}) \|\text{Rm}\|_{C^{k+1}} \right) \|w - w'\|_{C^{k+1}} (\|w\|_{C^{k+1}} + \|w'\|_{C^{k+1}})^2.$$

On en déduit donc que pour $\|X^j\|_{C^1} \leq 1$, $Q_{\Sigma, M} : C^{k+2,\alpha} \rightarrow C^{k,\alpha}$ satisfait le contrôle

$$\begin{aligned} \|Q_{\Sigma, M}(w) - Q_{\Sigma, M}(w')\|_{C^{k,\alpha}} & \leq 3 \left(\|\text{Rm}\|_{C^{k+2}} + \|A\|_{C^{k+1}} \right) \\ & \quad \times \left(\|w'\|_{C^{k+2,\alpha}} + \|w\|_{C^{k+2,\alpha}} \right) \|w - w'\|_{C^{k+2,\alpha}}. \end{aligned}$$

C'est donc un $\mathcal{Q}_{\Sigma, M}^3$.

Si l'on considère $(e_i)_i$ une base orthonormée de $T_x \Sigma$ et les champs de jacobis associés $e_i(s)$, en notant $e_i^k(s) = g(e_i(s), e_k^s)$, et en notant A_{ij} les composantes de

la seconde forme fondamentale de Σ dans la base $(e_i)_i$, on a

$$e_i^k(s) = \delta_{ik} + sA_{ik} - \int_0^s \int_0^v \sum_l e_i^l(u) K_l^k(u) du dv$$

par (A.2). Ainsi, pour tous i, j , et pour $s \leq \inf \left((\sup_{I_{mF}} |\text{Rm}|)^{-\frac{1}{2}}, (\sup_{\Sigma} |A|)^{-1} \right)$, on a

$$\begin{aligned} (1+s)^2(g_s)_{ij} &= g(e_i(s), e_j(s)) \\ &= \sum_k e_i^k(s) e_j^k(s) \\ &= \delta_{ij} + s \sum_k (A_{ik} \delta_{jk} + \delta_{ik} A_{jk}) \\ &\quad + s^2 \left(\sum_k A_{ik} A_{jk} - \frac{1}{2} \sum_{k,l} (\delta_{il} K_l^k(0) \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl} K_l^k(0)) \right) \\ &\quad + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^3(s) \\ (1+s)^2(g_s)_{ij} &= \delta_{ij} + 2sA_{ij} + s^2 \left(\sum_k A_{ik} A_{jk} - K_i^j(0) \right) + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^3(s). \end{aligned}$$

□

Géométrie des surfaces perturbées normalement. Nous contrôlons donc bien les hypersurfaces equidistantes à Σ , passons maintenant aux perturbations normales plus compliquées. Soit $w : \Sigma \rightarrow [-\varepsilon, +\varepsilon]$ une application ayant une norme suffisamment petite dans $C^{2,\alpha}(\Sigma)$, et définissons $H(\Sigma(w))$ comme étant l'hypersurface image de l'application $G : \Sigma \rightarrow \Sigma(w) \subset M$ définie par :

$$G(x) = F(w(x), x).$$

Première forme fondamentale de $\Sigma(w)$. La famille $(e_i(w(x)))_i$, définie à partir de champs de Jacobi partant d'une base orthonormée de $T_x \Sigma$ est une base de l'espace tangent à l'hypersurface equidistante $\Sigma_{w(x)}$. Utilisons la pour décrire l'espace tangent à $\Sigma(w)$ en $F(w(x), x)$. Notons $\partial_i w$ les variations premières de w suivant les e_i qui forment une base orthonormée de $T\Sigma$. Comme $dF_{(w(x), x)}(e_i, 0) = e_i(w(x))$ et $dF_{(w(x), x)}(0, 1) = N^{\Sigma_{w(x)}}$, le vecteur normal à $\Sigma_{w(x)}$ l'hypersurface equidistante à Σ , nous avons

$$\begin{aligned} dG_x(e_i) &= dF_{(w(x), x)}(e_i, \partial_i w(x)) \\ &= e_i(w(x)) + \partial_i w(x) N^{\Sigma_{w(x)}}. \end{aligned}$$

Notons alors pour tout i , $f_i(x) := e_i(w(x)) + \partial_i w(x) N^{\Sigma_{w(x)}}$ les vecteurs d'une base de $T_{F(x,w(x))}\Sigma(w)$. Tous nos calculs seront effectués dans cette base. Comme on prendra la trace du résultat final (pour obtenir la courbure moyenne), on ne cherchera pas à en faire une base orthonormée.

On en déduit l'expression suivante pour la métrique induite sur l'hypersurface $\Sigma(w)$ dans la base $(f_i)_i$. Comme $g(e_i(w(x)), N^{\Sigma_{w(x)}}) = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\Sigma(w)} &= g(e_i(w(x)) + \partial_i w(x) N^{\Sigma_{w(x)}}, e_j(w(x)) + \partial_j w(x) N^{\Sigma_{w(x)}}) \\ &= (g_{w(x)})_{ij} + \partial_i w(x) \partial_j w(x). \\ &= (g_{w(x)})_{ij} + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w) \\ &= \delta_{ij} + 2w(x)(A_{ij} - \delta_{ij}) + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où l'on rappelle que $g_{w(x)}$ est la métrique de l'hypersurface équidistante $\Sigma_{w(x)}$.

Normale à $\Sigma(w)$. Afin de calculer la seconde forme fondamentale de $\Sigma(w)$, nous devons tout d'abord calculer sa normale. Cherchons la sous la forme suivante,

$$N^{\Sigma(w)} := \frac{N^{\Sigma_{w(x)}} + \sum_k b_k e_k(w(x))}{|N^{\Sigma_{w(x)}} + \sum_k b_k e_k(w(x))|}, \quad (\text{A.4})$$

pour des fonctions b_k de Σ . Elle doit être orthogonale à toute la base $(f_j)_j$, c'est-à-dire que pour tous k et j , on doit avoir

$$g\left(N^{\Sigma_{w(x)}} + \sum_k b_k e_k(w(x)), f_j(x)\right) = 0,$$

or, $f_j(x) = e_j(w(x)) + \partial_j w(x) N^{\Sigma_{w(x)}}$, puis

$$g\left(N^{\Sigma_{w(x)}} + \sum_k b_k e_k(w(x)), f_j(x)\right) = \sum_k b_k (g_{w(x)})_{kj} + \partial_j w(x).$$

La normale $N^{\Sigma(w)}$ est donc l'unique vecteur de la forme (A.4) où les b_k sont les solutions de

$$\sum_k b_k (g_{w(x)})_{kj} = -\partial_j w(x). \quad (\text{A.5})$$

Notons que comme $(g_{w(x)})_{kj} = \frac{1}{1+w(x)^2} \delta_{kj} + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^1(w) = \delta_{kj} + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^1(w)$. On en

déduit donc que $b_k = \partial_k w(x) + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w)$, puis

$$\begin{aligned} \left| N^{\Sigma w(x)} + \sum_k b_k e_k(w(x)) \right|^2 &= 1 + \sum_{j,k} b_j b_k \\ &= 1 + g(\partial_k w(x), \partial_k w(x)) \\ &= 1 + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w(x)). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Seconde forme fondamentale de $\Sigma(w)$. La seconde forme fondamentale de $\Sigma(w)$ dans la base f_i s'écrit

$$A_{ij}^{\Sigma(w)} = g(\nabla_{f_i} N^{\Sigma(w)}, f_j).$$

Développons cette expression grâce à (A.4) et en utilisant le fait que $g(N^{\Sigma w(x)} + \sum_k b_k e_k(w(x)), f_j) = 0$,

$$\begin{aligned} A_{ij}^{\Sigma(w)} &= g(\nabla_{f_i} N^{\Sigma(w)}, f_j) \\ &= g\left(\nabla_{f_i} \left(\frac{N^{\Sigma w(x)} + \sum_k b_k e_k(w(x))}{|N^{\Sigma w(x)} + \sum_k b_k e_k(w(x))|} \right), f_j\right) \\ &= g\left(\frac{\nabla_{f_i} (N^{\Sigma w(x)} + \sum_k b_k e_k(w(x)))}{|N^{\Sigma w(x)} + \sum_k b_k e_k(w(x))|}, f_j\right). \end{aligned}$$

Maintenant, par (A.6), $|N^{\Sigma w(x)} + \sum_k b_k e_k(w(x))|$ est proche de 1 à un terme quadratique près ce qui est l'ordre de précision que l'on vise. Calculons donc les composantes $\tilde{A}_{ij} := |N^{\Sigma w(x)} + \sum_k b_k e_k(w(x))| A_{ij}^{\Sigma(w)} = A_{ij}^{\Sigma(w)} + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w(x))$ qui sont plus simples,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ij} &= g\left(\nabla_{f_i} \left(N^{\Sigma w(x)} + \sum_k b_k e_k(w(x)) \right), f_j\right) \\ &= g\left(\nabla_{f_i} N^{\Sigma w(x)}, f_j\right) + g\left(\nabla_{f_i} \left(\sum_k b_k e_k(w(x)) \right), f_j\right) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Développons maintenant chacun des deux termes de (A.7). Pour le premier terme, comme $N^{\Sigma w(x)}$ est la vitesse d'une géodésique, nous avons,

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_{f_i} (N^{\Sigma w(x)}), f_j\right) &= g\left(\nabla_{e_i(w(x)) + \partial_i w(x) N^{\Sigma w(x)}} N^{\Sigma w(x)}, f_j\right) \\ &= g\left(\nabla_{e_i(w(x))} N^{\Sigma w(x)}, f_j\right) + \partial_i w(x) g\left(\nabla_{N^{\Sigma w(x)}} N^{\Sigma w(x)}, f_j\right) \\ &= g\left(\nabla_{e_i(w(x))} N^{\Sigma w(x)}, f_j\right) + 0 \\ &= g\left(\nabla_{e_i(w(x))} N^{\Sigma w(x)}, e_j(w(x))\right) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

C'est donc la seconde forme fondamentale de l'hypersurface équidistante $\Sigma_{w(x)}$. Or, on contrôle les valeurs propres de la seconde forme fondamentale grâce à l'équation de Riccati qu'elles satisfont. Si $(\varepsilon_i(s))_i$ est une base de vecteurs propres pour la seconde forme fondamentale de Σ_s en $\gamma_x(s)$, les valeurs propres associées κ_i satisfont l'équation de Riccati

$$\kappa_i'(s) = -\kappa_i^2(s) - K_i^i(s),$$

où, $K_i^i = g(\text{Rm}(N^s, \varepsilon_i(s))\varepsilon_i(s), N^s)$.

On en déduit donc, que pour w petit devant $\|A\|_\infty^{-1}$ et $\|\text{Rm}\|_\infty^{-\frac{1}{2}}$, les valeurs propres $\kappa_i(w(x))$ de la seconde forme fondamentale de $\Sigma_{w(x)}$ sont contrôlées par

$$\kappa_i(w(x)) = \kappa_i(0) - w(x) \left(\kappa_i^2(0) + K_i^i(0) \right) + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w(x)). \quad (\text{A.9})$$

Pour le second terme de (A.7), on a :

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_{f_i}\left(\sum_k b_k e_k(w(x)), f_j\right)\right) &= \nabla_{f_i}\left(g\left(\sum_k b_k e_k(w(x)), f_j\right)\right) \\ &\quad - \sum_k b_k g\left(\nabla_{f_i}(e_k(w(x))), f_j\right) \\ &= \partial_{ij}^2 w + \sum_l (\Gamma^{\Sigma(w)})_{ij}^l \partial_l w, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

où les $(\Gamma^{\Sigma(w)})_{ij}^l$ sont les symboles de Christoffel de $g^{\Sigma(w)}$ dans la base $(f_i)_i$. C'est en fait l'expression en coordonnées de $\text{Hess}_{g^{\Sigma(w)}} w$.

Comparons maintenant $\text{Hess}_{g^{\Sigma(w)}} w$ à $\text{Hess}_{g^\Sigma} w$. Cela revient à comparer les symboles de Christoffel des métriques. Nous savons, par (A.3) que la métrique de $\Sigma(w)$ en x est celle de $\Sigma_{w(x)}$ au terme $\partial_i w(x) \partial_j w(x)$, qui est quadratique en w , près. On en déduit donc que $\Gamma^{\Sigma(w)} = \Gamma^{\Sigma_{w(x)}} + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w)$. Maintenant, on a aussi un contrôle entre la métrique associée à $\Sigma(w(x))$ et celle de Σ grâce à (A.1). On en déduit que les symboles de Christoffel sont proches à un $\mathcal{Q}_{\Sigma, M}^1(w)$ -près, mais cette erreur multipliée par $\partial_l w$ donc :

$$g\left(\nabla_{f_i}\left(\sum_k b_k e_k(w(x))\right), f_j\right) = \text{Hess}_{g^\Sigma} w + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w). \quad (\text{A.11})$$

Courbure moyenne de $\Sigma(w)$. Il nous reste maintenant à prendre la trace de la seconde forme fondamentale calculée dans la partie précédente à l'aide de la métrique $g^{\Sigma(w)}$. Notons qu'il suffit de prendre celle de \tilde{A} à notre niveau de précision car $|N^{\Sigma_{w(x)}} + \sum_k b_k e_k(w(x))| = 1 + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w)$. Pour le premier terme (A.8), cela

revient à sommer les valeurs propres estimées par (A.9), et pour le second terme, cela revient à prendre la trace de la Hessienne.

Pour la trace du premier terme (A.8), les métriques $g^{\Sigma(w)}$ et $g_{w(x)}$ sont proches à un terme quadratique en w près, et on peut donc prendre la trace avec $g_{w(x)}$ en n'induisant qu'une erreur quadratique en w . On obtient donc approximativement la somme des valeurs propres estimées dans (A.9) :

$$H(\Sigma) - w(x) \left(|A^\Sigma|^2 + \text{Ric}(N^\Sigma, N^\Sigma) \right) + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w),$$

où $H(\Sigma) := \sum_i \kappa_i(0)$ est la courbure moyenne de Σ et où $|A^\Sigma|^2 = \sum_i \kappa_i^2(0)$ est la somme des carrés des valeurs propres de la seconde forme fondamentale de Σ .

Pour le second terme, l'erreur que l'on fait en prenant la trace avec g^Σ pour faire apparaître son laplacien est d'ordre 1. Comme le terme s'applique déjà à w , cela signifie que l'erreur totale sera d'ordre 2 en w ,

$$-\Delta^\Sigma w + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w).$$

Au total, on obtient,

$$H(\Sigma(w)) = H(\Sigma) - J_{\Sigma, M} w + \mathcal{Q}_{\Sigma, M}^2(w), \quad (\text{A.12})$$

où $J_{\Sigma, M} := \Delta^\Sigma + |A^\Sigma|^2 + \text{Ric}(N^\Sigma, N^\Sigma)$ est l'opérateur de Jacobi de l'hypersurface Σ plongée dans M .

2 Perturbations infinitésimales

Grâce aux estimations générales précédentes, on déduit des formules de perturbations normales infinitésimales. Elles sont résumées dans le corollaire suivant. Étant donnée une immersion lisse $\varphi_0 : N^{n-1} \rightarrow M^n$, on considère une variation du type suivant,

$$\partial_s \varphi_s = u_s N^{\varphi_s(N)}, \quad (\text{A.13})$$

pour une certaine fonction $u_s : N \rightarrow \mathbb{R}$ lisse.

Remarque A.6. Les formules suivantes sont montrées directement dans le théorème 3.2 de [HP99], où l'orientation est opposée à la notre, mais où les variations sont du type $\partial_s \varphi_s = -u_s N^{\varphi_s(N)}$. On retombe donc sur les mêmes formules.

Corollaire A.7. *Étant donnée une déformation comme (A.13), on a les variations suivantes des quantités géométriques :*

1. $\partial_s \varphi_s^* g = 2u_s A^{\varphi_s(N)},$
2. $\partial_s N^{\varphi_s(N)} = \text{grad}^{\varphi_s(N)} u_s,$
3. $\partial_s A_{ij}^{\varphi_s(N)} = -\nabla_i^{\varphi_s(N)} \nabla_j^{\varphi_s(N)} u_s + (A_{ik} A_j^k + K_i^j),$
4. $\partial_s H^{\varphi_s(N)} = -\left(\Delta^{\varphi_s(N)} + |A^{\varphi_s(N)}|^2 + \text{Ric}(N^{\varphi_s(N)}, N^{\varphi_s(N)})\right) u_s.$

Annexe B

Dégénérescence orbifold des métriques AdS-Taub-Bolt

Présentons le seul exemple explicite connu de dégénérescence orbifold autre que ceux donnés par les instantons gravitationnels d’Eguchi-Hanson et de Gibbons-Hawking.

Les métriques AdS-Taub-Bolt, définies dans [PP87], sont une famille de métriques $U(2)$ -invariantes, d’Einstein et asymptotiquement hyperboliques sur $T^*\mathbb{S}^2$. Elles dégènèrent vers un orbifold d’Einstein avec une singularité $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$. Par manque de référence suffisamment précise sur l’apparition de la métrique d’Eguchi-Hanson, nous décrivons en détails cette dégénérescence. Cela permet d’exhiber sur un exemple concret les coordonnées et les différentes constructions de cette thèse.

1 Limite d’éclatements

La famille de métriques d’AdS-Taub-Bolt dépend d’un paramètre $s > 1$ et définit une métrique lisse sur $(s, +\infty) \times \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_2 \approx T^2\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^2$ définie dans [HHP99] par (avec un simple changement de variables $\psi = E_s^{1/2}\tau$),

$$g_{TB}(s) = \frac{E_s}{4} \left(\frac{4(u^2 - 1)}{F_s(u)} du^2 + \frac{F_s(u)}{u^2 - 1} \alpha_1^2 + (u^2 - 1)(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) \right), \quad (\text{B.1})$$

où nous avons

$$\begin{aligned} F_s(u) &:= E_s u^4 + (4 - 6E_s)u^2 + \left[-E_s s^3 + (6E_s - 4)s + \frac{3E_s - 4}{s} \right] u + (4 - 3E_s) \\ &= E_s u(u^3 - s^3) + (4 - 6E_s)(u^2 - su) + (3E_s - 4) \left(\frac{u}{s} - 1 \right). \end{aligned}$$

et $E_s := \frac{4}{3(1+s)}$. La métrique se complète en une métrique lisse sur $T^*\mathbb{S}^2$ en ajoutant une sphère \mathbb{S}^2 totalement géodésique de métrique $(s^2 - 1)(\alpha_2^2 + \alpha_3^2)$ à $u = s$. Cette sphère se contracte donc sur un point lorsque $s \rightarrow 1$.

Rappelons que pour $\varepsilon > 0$, la métrique d'Eguchi-Hanson peut aussi être définie sur $(\varepsilon, +\infty) \times \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_2$ par

$$g_{EH}(\varepsilon) = \left(1 - \frac{\varepsilon^4}{r^4}\right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon^4}{r^4}\right) \alpha_1^2 + \frac{r^2}{4} (\alpha_2^2 + \alpha_3^2). \quad (\text{B.2})$$

La métrique se complète encore une fois sur $T^*\mathbb{S}^2$ à l'aide d'une sphère totalement géodésique de métrique $\frac{\varepsilon^2}{4}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2)$ à $r = \varepsilon$ qui se contracte en un point lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous allons montrer que c'est bien la "bulle" de notre dégénérescence, et que l'espace singulier est l'orbifold $U(2)$ -invariant et autodual dont la métrique est $g_{TB}(1)$ qui a pour expression

$$\frac{u+1}{(u-1)(u^2+2u+3)} du^2 + \frac{(u-1)(u^2+2u+3)}{6(u+1)} \alpha_1^2 + \frac{(u+1)(u-1)}{9} (\alpha_2^2 + \alpha_3^2). \quad (\text{B.3})$$

Trouvons des coordonnées dans lesquelles la métrique $g_{TB}(s)$ pour s proche de 1, est proche de $(s^2 - 1)g_{EH}$, $g_{\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2}$ et $g_{TB}(1)$ sur différentes parties de la variété. La métrique converge clairement vers $g_{TB}(1)$ pour $r > 1$ lorsque $s \rightarrow 1$ donc nous sommes principalement intéressés par le cas où r est proche de s qui est lui-même proche de 1.

Afin de faire correspondre les parties des métriques proportionnelles à $\alpha_2^2 + \alpha_3^2$, lorsque s est proche de 1 nous considérons le changement de variable $s = 1 + \eta^2$ pour $\eta > 0$ petit et $u^2 = \eta^2 r^2 + 1$ qui donne $du^2 = \frac{\eta^2 r^2}{1 + \eta^2 r^2} dr^2$. La métrique se réécrit :

$$g_{TB}(1 + \eta^2) = \frac{E_{1+\eta^2}}{4} \left(\frac{4\eta^4 r^4}{(1 + \eta^2 r^2)G_{\eta^2}(r^2)} \eta^2 dr^2 + \frac{G_{\eta^2}(r^2)}{\eta^4 r^4} \eta^2 r^2 \alpha_1^2 + \eta^2 r^2 (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) \right), \quad (\text{B.4})$$

où $G_{\eta^2}(r^2) := F_{1+\eta^2}(\sqrt{1 + \eta^2 r^2})$.

Soyons plus précis sur le comportement de $G_{\eta^2}(r^2)$ quand $\eta \rightarrow 0$ pour r borné (restant donc dans une région où la métrique devrait ressembler à la métrique d'Eguchi-Hanson). Nous avons

$$E_{1+\eta} = \frac{4}{3(2+\eta)} = \frac{2}{3} - \frac{\eta}{6} + \mathcal{O}(\eta^2).$$

alors qu'après la compensation (absolument pas évidente) des termes en $\mathcal{O}(1)$ et en $\mathcal{O}(\eta^2)$, nous avons

$$G_{\eta^2}(r^2) = \eta^4 \left(r^4 - 4 \right) + \mathcal{O}(\eta^3). \quad (\text{B.5})$$

En insérant ce contrôle dans (B.4), nous obtenons l'estimée

$$\frac{3}{2\eta^2} g_{TB}(1 + \eta^2) = \left(1 - \frac{4}{r^4} \right)^{-1} dr^2 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{4}{r^4} \right) r^2 \alpha_1^2 + \frac{1}{4} r^2 (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \mathcal{O}(\eta^2), \quad (\text{B.6})$$

Nous voyons ainsi la métrique $g_{EH}(\sqrt{2})$ apparaître au premier ordre comme attendu dans les théorèmes de [And89, BKN89].

Remarque B.1. L'erreur en η^2 vers la métrique d'Eguchi-Hanson sur $N(\varepsilon) = \{r < \varepsilon^{-1}\}$ est celle estimée dans [Biq13, Ozu19b].

Remarque B.2. Dans la convergence vers l'orbifold sur $M_o(\varepsilon) = \{r > \eta^{-1}\varepsilon\}$, nous n'obtenons qu'une convergence en η^2 alors que pour une dégénérescence compacte, l'erreur serait en η^4 (l'erreur commise en étendant le terme en r^{-4} de la métrique ALE). La raison est que l'infini conforme de la métrique doit être modifié pour que la dégénérescence ait lieu comme décrit dans la dernière section de [Biq13].

Remarque B.3. Cette forme explicite de la métrique et son développement asymptotique quand $\eta \rightarrow 0$ converge effectivement vers une métrique plate dans l'anneau de basse courbure et vers une métrique hyperbolique à l'infini. L'anneau de basse courbure $\mathcal{A}(\varepsilon)$ est la région où $\frac{1}{32}\varepsilon^{-1} < r < 32\eta^{-1}\varepsilon$ et la métrique a un développement convergeant en puissances de η^2 et r^2 dans cette région, l'erreur est même en $\eta^2 r^2 + r^{-4}$ comme prévu par le théorème 3.42. L'expression entière est en réalité analytique en r^2 et en η^2 dans nos coordonnées.

2 L'ordre de précision suivant

Nous pouvons de plus calculer le terme suivant du développement de $\frac{2}{3\eta^2} g_{TB}(1 + \eta^2) = g_{EH}(\sqrt{2}) + \eta^2 h_2 + \mathcal{O}(\eta^4)$, avec

$$h_2 = \frac{r^4 \left(-5r^6 - 3r^4 + 12r^2 + 20 \right)}{6r^4 - 4} dr^2 - \frac{r^6 + 3r^4 - 12r^2 - 4}{24r^4} \alpha_1^2, \quad (\text{B.7})$$

qui est solution de l'équation $d_{g_{EH}(\sqrt{2})} \text{Ric}(h_2) = -3g_{EH}(\sqrt{2})$. Le 2-tenseur h_2 est de plus asymptotique lorsque $r \rightarrow +\infty$ au 2-tenseur quadratique

$$H_2 := -\frac{5}{6}r^2 dr^2 - \frac{r^2}{24}r^2 \alpha_1^2,$$

qui est bien le terme quadratique de la métrique $g_{TB}(1)$ en $r = 0$ et satisfait donc $d_{g_e} \text{Ric}(H_2) = -3g_e$. En effet, en appliquant une fois de plus le changement de variable $r^2 = u^2 - 1$ à l'expression (B.3), et après avoir estimé $E_1 = \frac{2}{3}$ et $F_1(\sqrt{1+r^2}) = r^4 - \frac{r^6}{6} + \mathcal{O}(r^8)$, nous trouvons

$$g_{TB}(1) = \frac{r^2}{r^4 - \frac{r^6}{6} + \mathcal{O}(r^8)} \frac{r^2}{1+r^2} dr^2 + \frac{r^4 - \frac{r^6}{6} + \mathcal{O}(r^8)}{4r^2} \alpha_1^2 + \frac{r^2}{4}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2), \quad (\text{B.8})$$

qui a le développement

$$g_{TB}(1) = dr^2 + \frac{1}{4}r^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) - r^2 \left(\frac{5}{6}dr^2 + \frac{r^2}{24}\alpha_1^2 \right) + \mathcal{O}(r^4) \quad (\text{B.9})$$

$$= g_{\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2} + H_2 + \mathcal{O}(r^{-3}). \quad (\text{B.10})$$

On vérifie de plus que la courbure à la singularité $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$ satisfait $\text{Ric}^0 = 0$ car la métrique est d'Einstein et que dans les bases habituelles de Ω_{\pm} , nous avons

$$\mathbf{R}^- = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

car la courbure est autoduale, et finalement

$$\mathbf{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

a un noyau de dimension 1 et donc $\det \mathbf{R}^+ = 0$. On retrouve bien que la métrique d'Eguchi-Hanson apparaît dans la direction du noyau de dimension 1 de l'endomorphisme de courbure de $g_{TB}(1)$ à son point singulier comme attendu par [Biq13].

Remarque B.4. L'espace limite $g_{TB}(1)$ est autodual (c'est-à-dire qu'il satisfait $W^- = 0$), mais ce n'est pas le cas des métriques $g_{TB}(s)$ pour $s > 1$. Une manière de s'en convaincre pour $s - 1 \ll 1$ est de remarquer que sur la partie proche de $\frac{3(s-1)^2}{2}g_{EH}$, la courbure est proche de celle de $\frac{3(s-1)^2}{2}g_{EH}$ qui est anti-autoduale,

et que sur la partie proche de $g_{TB}(1)$, la courbure est presque autoduale.

Les variations de l'infini conforme sont aussi uniquement des changements de la partie en α_1^2 de la métrique pour un choix naturel de représentant de la métrique conforme.

Bibliographie

- [AV12] A.G. Ache ; J.A. Viaclovsky, *Obstruction-flat asymptotically locally Euclidean metrics*. *Geom. Funct. Anal.* 22 (2012), no. 4, 832–877
- [And89] M.T. Anderson, *Ricci Curvature Bounds and Einstein Metrics on Compact Manifolds*. *J. Amer. Math. Soc.* 2 (1989), no. 3, 455–490.
- [And92] M. T. Anderson, *The L^2 structure of moduli spaces of Einstein metrics on 4-manifolds*, *Geometric and Functional Analysis*, March 1992, Volume 2, Issue 1, pp 29–89
- [And10] M.T. Anderson, *A survey of Einstein metrics on 4-manifolds*. *Handbook of geometric analysis*, No. 3, 1–39, *Adv. Lect. Math. (ALM)*, 14, Int. Press, Somerville, MA, 2010.
- [Art68] Michael Artin, *On the Solutions of Analytic Equations*, *Inventiones mathematicae* 5 (1968) : 277-291
- [Auv18] H. Auvray, *From ALE to ALF gravitational instantons*. *Compos. Math.* 154 (2018), no. 6, 1159–1221.
- [Bam12] R.H. Bamler, *Construction of Einstein metrics by generalized Dehn filling*. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 14 (2012), no. 3, 887–909.
- [BKN89] S. Bando ; A. Kasue ; H. Nakajima, *On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth*. *Invent. Math.* 97 (1989), no. 2, 313–349.
- [Ban90] S. Bando, *Bubbling out of Einstein manifolds*. *Tohoku Math. J. (2)* 42 (1990), no. 2, 205–216.
- [Bes87] A.L. Besse, *Einstein manifolds*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*, 10. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [BM88] E. Bierstone, P. D. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, *Publications mathématiques de l’I.H.É.S.*, tome 67 (1988), p. 5-42

- [Biq07] O. Biquard, *Polycopié on differential geometry and global analysis*. <http://www.math.ens.fr/~biquard/dgga2007.pdf> (2007)
- [Biq13] O. Biquard, *Désingularisation de métriques d'Einstein. I*. Invent. Math. 192 (2013), no. 1, 197–252.
- [Biq16] O. Biquard, *Désingularisation de métriques d'Einstein. II*. Invent. Math. 204 (2016), no. 2, 473–504.
- [Biq17] O. Biquard, *Non dégénérescence et singularités des métriques d'Einstein asymptotiquement hyperboliques en dimension 4*. Math. Ann. 372 (2018), no. 1-2, 531–553.
- [BH19] O. Biquard ; H. Hein, *The renormalized volume of a 4-dimensional Ricci-flat ALE space*. arXiv :1901.03647 [math.DG]
- [BR09] O. Biquard ; Y. Rollin, *Wormholes in Ach Einstein Manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 4, 2021–2046.
- [BR15] O. Biquard ; Y. Rollin, *Smoothing singular constant scalar curvature Kähler surfaces and minimal Lagrangians*. Adv. Math. 285 (2015), 980–1024.
- [Böh98] C. Böhm, *Inhomogeneous Einstein metrics on low-dimensional spheres and other low-dimensional spaces*. Invent math 134, 145–176 (1998)
- [BL81] J.-P. Bourguignon ; B. H. Lawson, *Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields*. Comm. Math. Phys. 79 (1981), no. 2, 189–230.
- [BK17] S. Brendle ; N. Kapouleas *Gluing Eguchi–Hanson metrics and a question of Page*, Commun. Pure Appl. Math. 70 (2017) 1366–1401
- [CGH00] D. J. Calderbank ; P. Gauduchon ; M. Herzlich, *Refined Kato inequalities and conformal weights in Riemannian geometry*. J. Funct. Anal., vol. 173 (2000), 214–255.
- [CC96] J. Cheeger ; T.H. Colding, *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products*. Ann. of Math. (2) 144 (1996), no. 1, 189–237.
- [CGT82] J. Cheeger ; M. Gromov ; M. Taylor, *Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds*. J. Differential Geom. 17 (1982), no. 1, 15–53.
- [CN15] J. Cheeger ; A. Naber, *Regularity of Einstein Manifolds and the Codimension 4 Conjecture*. Ann. of Math. (2) 182 (2015), no. 3, 1093–1165.

- [CT94] J. Cheeger ; G. Tian, *On the cone structure at infinity of Ricci flat manifolds with Euclidean volume growth and quadratic curvature decay*. Invent. Math. 118 (1994), no. 3, 493–571.
- [CT06] J. Cheeger ; G. Tian, *Curvature and injectivity radius estimates for Einstein 4-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. 19 (2006), 487–525
- [CEV17] O. Chodosh ; M. Eichmair ; A. Volkmann, *Isoperimetric structure of asymptotically conical manifolds*. J. Differ. Geom. 105 (2017), 1–19.
- [Col97] T.H. Colding, *Ricci Curvature and Volume Convergence*. Ann. of Math. (2) 145 (1997), no. 3, 477–501.
- [Cro80] C. Croke, *Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 13 (1980), no. 4, 419–435.
- [DK81] D. M. DeTurck ; J. L. Kazdan, *Some regularity theorems in Riemannian geometry*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), 14 (1981), p. 249–260
- [Ebi70] David G. Ebin, *The manifold of Riemannian metrics*, 1970 Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, Calif., 1968) pp. 11–40 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [Fol89] G.B. Folland, *Harmonic analysis of the de Rham complex on the sphere*. Reine Angew. Math. 398 (1989), 130–143.
- [Gao90] L. Gao, *Einstein metrics*. J. Diff. Geom. 32 (1990), 155–183.
- [GH78] G.W. Gibbons ; S.W. Hawking, *Gravitational multi-instantons*. Physics Letters B Volume 78, Issue 4, 9 October 1978, Pages 430–432
- [GP79] G.W. Gibbons ; C.N. Pope, *The positive action conjecture and asymptotically euclidean metrics in quantum gravity*. Comm. Math. Phys. 66, 267–290 (1979)
- [GW88] R. E. Greene ; H. Wu, *Lipschitz convergence of Riemannian manifolds*, Pacific J. Math. Volume 131, Number 1 (1988), 119–141.
- [Gro81] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*. Textes Mathématiques Paris (1981), 1–120. (rédigé par Lafontaine et Pansu). (in French)
- [Ham82] R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*. J. Differential Geom. 17 (1982), no. 2, 255–306.
- [HV16] J. Han ; J. Viaclovsky *Deformation theory of scalar-flat Kähler ALE surfaces*. Amer. J. Math. 141. (2016)
- [HV20] J. Han ; J. Viaclovsky *Existence and compactness theory for ALE scalar-flat Kähler surfaces*. Forum of Mathematics, Sigma, 8, E1.

- [HHM04] T. Hausel ; E. Hunsicker ; R. Mazzeo, *Hodge cohomology of gravitational instantons* , Duke Math. J. Volume 122, Number 3 (2004), 485-548.
- [HHP99] S. W. Hawking ; C. J. Hunter ; and Don N. Page, *NUT charge, anti-de Sitter space, and entropy*, Phys. Rev. D (3) 59 (1999), no. 4, 044033, 6
- [HH97] E. Hebey ; M. Herzlich, *Harmonic coordinates, harmonic radius and convergence of Riemannian manifolds*, Rend. Mat. Appl. (7) 17 (1997), 569–605 (1998).
- [HP99] G. Huisken ; A. Polden, *Geometric evolution equations for hypersurfaces*. Calculus of variations and geometric evolution problems (Cetraro, 1996),45–84. Lecture Notes in Math., 1713, Springer, Berlin, 1999
- [Jos84] J. Jost, *Harmonic mappings between Riemannian manifolds*, Canberra Univ.Press, 1984.
- [KL16] V. Kapovitch ; J. Lott, *On noncollapsed almost Ricci-flat 4-manifolds*. Amer. J. Math. 141, p. 737-755
- [Kas88] A. Kasue, *A compactification of a manifold with asymptotically non-negative curvature*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 21 (1988), 593-622.
- [KB90] R. Kobayashi ; S. Bando, *Ricci-flat Kähler metrics on affine algebraic manifolds. II*. Mathematische Annalen (1990) Volume : 287, Issue : 1, page 175-180
- [Koi83] N. Koiso, *Einstein Metrics and Complex Structures*. Invent. Math. 73 (1983), no. 1, 71–106.
- [Kro89a] P.B. Kronheimer, *The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients*. J. Differential Geom. Volume 29, Number 3 (1989), 665-683.
- [Kro89b] P.B. Kronheimer, *A Torelli-type theorem for gravitational instantons*. J. Differential Geom. Volume 29, Number 3 (1989), 685-697.
- [LV16] M. Lock ; J. Viaclovsky, *Quotient singularities, eta invariants, and self-dual metrics*. Geom. Topol. Volume 20, Number 3 (2016), 1773-1806.
- [LM85] R.B. Lockhardt ; R.C. McOwen, *Elliptic operators on noncompact manifolds*. Ann. Sci. Normale Sup. Pisa IV-12 (1985), 409–446.

- [Łoj65] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, I.H.E.S. Lecture notes (1965)
- [McC02] D. McCullough, *Isometries of elliptic 3-manifolds*, J. London Math. Soc. 65 (2002), 167–182.
- [Nak90] H. Nakajima, *Self-Duality of ALE Ricci-Flat 4-Manifolds and Positive Mass Theorem*. Adv. Stud. Pure Math. Recent Topics in Differential and Analytic Geometry, T. Ochiai, ed. (Tokyo : Mathematical Society of Japan, 1990), 385 - 396
- [Nak94] H. Nakajima, *A convergence theorem for Einstein metrics and the ALE spaces*, in *Selected papers on number theory, algebraic geometry, and differential geometry*. American Mathematical Society Translations, Series 2, 160. 1994.
- [Ozu19a] T. Ozuch, *Noncollapsed degeneration of Einstein 4-manifolds I*. preprint.
- [Ozu19b] T. Ozuch, *Noncollapsed degeneration of Einstein 4-manifolds II*. preprint.
- [PR78] F. Pacard ; T. Rivière , *Linear and Nonlinear Aspects of Vortices* , . Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 39. Birkhäuser, Boston, MA, 2000.
- [PX09] F. Pacard ; X. Xu, *Constant mean curvature spheres in Riemannian manifolds*. Manuscripta Mathematica. 128, 3 (2009), 275-295
- [Pag78] D.N. Page, *A physical picture of the K3 gravitational instanton*, Physics Letters B80, 55–57 (1978)
- [Pag81] D.N. Page, *A periodic but nonstationary gravitational instanton*, Physics Letters B100, 313–315 (1981)
- [PP87] D. N. Page ; C. N. Pope, *Inhomogeneous Einstein metrics on complex line bundles*, Classical and Quantum Gravity, Volume 4, Number 2
- [Pal68] R. Palais, *Foundations of global non-linear analysis*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1968
- [Pet98] P. Petersen, *Riemannian geometry*, New York Springer cop. 1998, Graduate texts in mathematics 171
- [Sco83] P. Scott, *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), no. 5, b401–487.
- [Sco05] A. Scorpan, *The Wild World of 4-Manifolds*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

-
- [SSU89] L. M. Sibner; R. J. Sibner; and K. Uhlenbeck, *Solutions to Yang—Mills equations that are not self-dual* Proc. Natl. Acad. Sci. U S A. 1989 Nov; 86(22) : 8610–8613.
- [Spo14] C. Spotti, *Deformations of nodal Kähler-Einstein del Pezzo surfaces with discrete automorphism groups*, J. Lond. Math. Soc. (2) 89 (2014), 539–558.
- [Suv11] I. Suvaina, *ALE Ricci-flat Kähler metrics and deformations of quotient surface singularities*. Ann. Global Anal. Geom. 41 (2012), no. 1, 109–123.
- [Top87a] P. Topiwala, *A new proof of the existence of Kähler-Einstein metrics on $K3$ I*. Invent. Math. 89, 425–448 (1987)
- [Top87b] P. Topiwala, *A new proof of the existence of Kähler-Einstein metrics on $K3$, II*. Invent. Math. 89, 449–454 (1987)
- [WZ90] M. Wang; W. Ziller *Einstein metrics on principal torus bundles*, J. Differential Geom. 31 (1990), no. 1, 215–248.
- [Whi65] E. F. Whittlesey, *Analytic Functions in Banach Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 1077–1083.
- [Ye96] R. Ye, *Constant mean curvature foliation: singularity structure and curvature estimate*. Pacific J. Math. Volume 174, Number 2 (1996), 569-587.

RÉSUMÉ

Nous étudions la complétion de l'ensemble des métriques d'Einstein à volume normalisé en dimension 4. Leurs dégénérescences ont été observées dans les années 70 et comprises au sens de Gromov-Hausdorff dans les années 80. Nous montrons que toute métrique d'Einstein proche au sens de Gromov-Hausdorff d'une métrique singulière est le résultat d'un processus de recollement-perturbation que l'on développe. Cette nouvelle description nous permet d'étendre une obstruction observée par Biquard au cadre général autorisant la formation d'arbres de singularités en un nombre arbitraire de points et en supposant une simple proximité de Gromov-Hausdorff. Elle rend aussi possible de

MOTS CLÉS

Variétés d'Einstein, Compacité, Dimension 4, Espace de modules

ABSTRACT

We study the completion of the set of unit-volume Einstein 4-manifolds. Their degenerations were observed in the 70's and understood in the 80's in a Gromov-Hausdorff sense. We prove that any smooth Einstein 4-manifold close to a singular one in a mere Gromov-Hausdorff sense is the result of a gluing-perturbation procedure that we develop. This new description lets us extend Biquard's obstruction to a general setting, allowing multiple singularities and trees of singularities and only assuming a Gromov-Hausdorff convergence. This enables the construction of new Einstein metrics and also sheds light on the structure of the moduli space of Einstein 4-manifolds near its boundary.

KEYWORDS

Einstein manifolds, Compactness, Dimension 4, Moduli space