



**HAL**  
open science

# Les bornes uniformes pour la longueur des mots et groupe des éléments bornés

Yanis Amirou

► **To cite this version:**

Yanis Amirou. Les bornes uniformes pour la longueur des mots et groupe des éléments bornés. Théorie des groupes [math.GR]. Université Paris sciences et lettres, 2020. Français. NNT : 2020UPSLE004 . tel-03146833

**HAL Id: tel-03146833**

**<https://theses.hal.science/tel-03146833>**

Submitted on 19 Feb 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT**

**DE L'UNIVERSITÉ PSL**

Préparée à Ecole Normale Supérieure

**Les bornes uniformes pour la longueur des mots et groupe  
des éléments bornés**

Soutenue par

**Yanis AMIROU**

Le 20 Janvier 2020

École doctorale n°574

**Mathématiques Hadamard**

Spécialité

**Mathématiques fondamentales**

Composition du jury :

Pierre Pansu Pr, Université Paris-Saclay	<i>Président</i>
François Dahmani Pr, Université Grenoble Alpes	<i>Rapporteur</i>
Tatiana Smirnova-Nagnibeda Pr, Université de Genève	<i>Rapporteur</i>
Frédéric Paulin Pr, Université Paris-Saclay	<i>Examineur</i>
Anna ERSCHLER DR, Ecole Normale Supérieure-CNRS	<i>Directrice de thèse</i>
Romain Tessera DR, Université Paris Diderot-CNRS	<i>Examineur</i>



# Remerciements

Cette thèse a été réalisée au département de mathématiques et applications de l'École Normale Supérieure de Paris (ENS). Elle a été financée grâce à un contrat Doctoral avec l'université Paris Sciences et Lettres.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma directrice de thèse Anna Erschler pour m'avoir fait l'honneur de diriger mes travaux durant ces années de Doctorat en étant toujours disponible et encourageante. Ses conseils, son aide précieuse, sa rigueur scientifique et ses valeurs humaines m'ont bien guidé. Mes premiers pas dans la recherche ont d'ailleurs été sous sa tutelle dans le cadre de mon mémoire de Master 2.

Je remercie Pr François Dahmani, Pr Tatiana Smirnova-Nagnibeda pour avoir rapporté sur cette thèse.

Je tiens à remercier vivement Pr Frédéric Paulin, Pr François Dahmani, Pr Tatiana Smirnova-Nagnibeda, Pr Pierre Pansu et Dr Romain Tessera d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie chaleureusement le professeur Frédéric Paulin pour ses précieux conseils, pour avoir suivi le déroulement de ma thèse et pour ses remarques et conseils concernant la rédaction de ma thèse.

Je remercie Pr François Dahmani pour ses remarques et conseils concernant la rédaction de ma thèse.

Ma gratitude s'adresse aussi aux professeurs Rostislav Grigorchuk et Pierre de la Harpe pour leurs remarques enrichissantes sur mon travail.

Je remercie Markus Steenbock pour les nombreuses discussions que nous avons eue et ses commentaires sur la présentation de mon travail. Je remercie également Arman Darbinyan pour ses commentaires.

Les moments que j'ai passés à l'ENS ont été non seulement d'une excellence scientifique, mais aussi d'un réel épanouissement humain. J'ai rencontré au DMA des personnes sympathiques qui m'ont bien accueilli, soutenu et encouragé. Mes travaux de thèse se sont déroulés dans une ambiance amicale grâce aux membres du DMA.

Je remercie Zaïna Elmir et Bénédicte Auffray pour leur aide et leurs conseils sur les aspects administratifs.

Je remercie mes oncles pour leur aide et leur soutien tout au long de mes études en France.

Mon infinie gratitude s'adresse à mes parents sans qui je n'aurais pas fait d'études. Ils m'ont toujours soutenu avec tout ce qu'ils pouvaient et m'ont encouragé quelles soient les conditions et les difficultés.

Je n'oublierai pas de remercier Imane pour ses encouragements et sa patience.

# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Contributions de la thèse . . . . .	6
1.2	Organisation de la thèse . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Rappels sur les groupes</b>	<b>11</b>
2.1	Propriété de finitude . . . . .	11
2.2	FC-centre . . . . .	14
2.3	Les groupes nilpotents . . . . .	16
2.4	Groupes avec loi uniforme . . . . .	19
2.5	Groupes comme espaces métriques . . . . .	19
2.6	Propriétés géométriques . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Éléments uniformément bornés</b>	<b>27</b>
3.1	Propriétés de base et premiers exemples . . . . .	27
3.2	Groupes avec <i>maille</i> infinie . . . . .	31
3.3	Éléments de longueur prescrite . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Groupes hyperboliques</b>	<b>34</b>
4.1	Définitions et résultats de base . . . . .	34
4.2	$G_{bound}$ des groupes hyperboliques . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Groupes de Burnside</b>	<b>39</b>
5.1	Groupes avec $G_{bound}$ fini prescrit . . . . .	40
5.2	Groupes de Grigorchuk . . . . .	41
5.3	Les éléments uniformément bornés . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Groupes virtuellement nilpotents</b>	<b>44</b>
6.1	Groupes virtuellement abéliens . . . . .	44
6.2	Groupes nilpotents . . . . .	46
6.3	Groupes virtuellement nilpotents . . . . .	50

<b>7 Généralisation: <math>G_{bound}(d)</math></b>	<b>52</b>
7.1 Propriétés . . . . .	52
7.2 Exemples . . . . .	53
<b>Articles</b>	<b>57</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>62</b>

# Chapitre 1

## Introduction

La théorie des groupes a émergé de l'étude des transformations en géométrie, la théorie des nombres et l'étude des groupes de permutations des racines de polynômes à travers les travaux d'Evariste Galois au 19<sup>ème</sup> siècle. Les groupes ont ensuite été étudiés comme objets algébriques abstraits. Une perception plus géométrique des groupes a émergé au début du 20<sup>ème</sup> siècle notamment avec les travaux de Max Dehn en 1911 dans son étude des propriétés algorithmiques des groupes [19]. Ceci fut à l'origine d'un nouveau point de vue considérant les groupes comme espaces métriques. Cette vision a été ensuite développée en particulier dans les travaux de Michael Gromov [33] pour donner naissance à la théorie géométrique des groupes.

Tout groupe  $G$  engendré par une partie génératrice finie  $S$  symétrique peut être muni d'une distance appelée distance des mots. La longueur d'un élément  $x$  du groupe  $G$  relativement à  $S$  est notée  $l_S(x)$ . Il s'agit du plus petit entier  $k$  tel qu'il existe  $s_1, \dots, s_k \in S$  dont le produit  $s_1 \dots s_k$  vaut  $x$ . La distance entre deux éléments  $x$  et  $y$  du groupe est alors la longueur de  $y^{-1}x$ . Pour un groupe  $G$  fixé, les espaces métriques ainsi obtenus sont quasi-isométriques.

Cette approche a permis d'étudier les propriétés algébriques des groupes à travers des propriétés géométriques comme la croissance du volume des boules, le profil isopérimétrique, les fonctions de Følner, les espaces des bouts, l'existence de quasi-plans et le bord pour certains groupes. L'un des objectifs de la théorie géométrique des groupes est de comprendre quelles propriétés des groupes peuvent être exprimées en termes géométriques et de classer les groupes à quasi-isométrie près. Un exemple célèbre de propriété algébrique formulée géométriquement, est le fait qu'un groupe est virtuellement nilpotent si et seulement s'il est à croissance polynomiale. Ce théorème a été démontré par Mikhael Gromov dans [34].



Dans les années 1980, Mikhael Gromov a développé la notion de groupes hyperboliques qui sont des groupes ayant une géométrie analogue aux espaces hyperboliques au sens où les triangles géodésiques sont fins. Les groupes hyperboliques et leurs généralisations ont connu un grand développement et restent un sujet de recherche actif, voir e.g [15].

On dit qu'un groupe est périodique, ou de torsion, si tous ses éléments sont d'ordre fini. Dans [13], William Burnside a posé le problème cherchant à savoir si tout groupe de torsion de type fini est fini. En 1968, Serguei Novikov et Sergei Adian ont montré dans [54] que le groupe de Burnside libre de rang  $m$  et d'ordre  $n$

$$B(n, m) = F_m / \langle x^n \mid x \in F_m \rangle$$

est infini quand  $n$  est impair et  $n \geq 4381$ . Des preuves géométriques de ce résultat ont été apportées par Aleksandr Ol'shanskii dans [48] et par Thomas Delzant en collaboration avec Mikhael Gromov dans [20].

En 1992, Sergei Ivanov [38] montra que le groupe  $B(n, m)$  est infini si  $n$  est pair,  $n \geq 2^{48}$  et  $n$  divisible par  $2^9$ . Par la suite, Igor Lysenok a montré dans [41] que ceci est vrai pour  $n \geq 8000$ .

## 1.1 Contributions de la thèse

Étant donnée une fonction positive  $\ell$  sur un groupe  $G$  quasi-isométrique à une longueur des mots sur  $G$ , nous souhaitons savoir dans quels cas  $\ell$  est réalisable comme une longueur des mots. En d'autres termes, existe-t-il un sous-ensemble  $S'$  de  $G$  tel que  $\ell$  est la longueur correspondant à  $S'$ ? Des exemples d'obstacles à une telle fonction positive  $\ell$  pour être une longueur des mots est donné par le taux de croissance uniforme étudié dans [17, 18, 27, 39, 42] et la non-moyennabilité uniforme étudiée dans [6, 50, 51]. Il a par exemple été démontré dans [39, Theorem 1.1] que les groupes hyperboliques non-élémentaires sont à croissance exponentielle uniforme. Il a été démontré dans [6, Theorem 1] que les groupes hyperboliques non-élémentaires, les groupes possédant un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre non-abélien et les groupes de Burnside libres avec un exposant assez grand, les groupes sont uniformément non-moyennables. Ces notions donnent des contraintes sur les longueurs des mots qui sont indépendantes des parties génératrices considérées. Alors si la fonction  $\ell$  ne respecte pas ces contraintes, elle n'est pas une longueur des mots.

Nous observons que dans certains groupes, la valeur de  $\ell$  pour un seul élément peut constituer un obstacle pour être réalisable comme longueur des

mots. Si la longueur de la fonction  $\ell$  considérée ci-dessus en  $g$  est supérieure à  $\sup_S\{\ell_S(g)\}$ , alors il est clair que  $\ell$  n'est pas une longueur des mots.

**Définition 1.** (=Définition 3.0.1) *Étant donné un groupe de type fini  $G$ , un élément  $g \in G$  est dit uniformément borné si la longueur de  $g$  est uniformément bornée par une constante  $M(g)$  pour toute partie génératrice de  $G$ . Notons  $G_{\text{bound}}$  l'ensemble de ces éléments.*

Dans cette thèse, nous introduisons et étudions l'ensemble  $G_{\text{bound}}$  qui s'avère être un sous-groupe caractéristique. En particulier, nous étudions ce sous-groupe pour les classes de groupes suivantes: nilpotents, hyperboliques, virtuellement abéliens et les groupes possédant une loi uniforme.

Dans de nombreuses classes de groupes, le sous-groupe  $G_{\text{bound}}$  est trivial. C'est le cas par exemple, pour les groupes avec FC-centre trivial, car  $G_{\text{bound}}$  est inclus dans le FC-centre qui le sous-groupe des éléments ayant un nombre fini de conjugués (Corollaire 3.1.2). En particulier, c'est le cas pour les groupes agissant sur des arbres, extensions  $HNN$ , amalgames [16]. Le sous-groupe  $G_{\text{bound}}$  est également trivial dans le cas des groupes abéliens (Théorème 6.1.1) et hyperboliques non-élémentaires (Corollaire 4.2.1). Cependant, il existe des exemples où ce sous-groupe est non-trivial.

**Exemple.** *Soit  $G = \mathbb{Z} \times D_8$  où  $D_8$  est le groupe diédral à 8 éléments. Le sous-groupe  $G_{\text{bound}}$  est le centre de  $D_8$  qui est un sous-groupe à deux éléments (Exemple 6.1.1).*

Dans mon premier article [1], je démontre les résultats suivants.

**Théorème (A).** (=Théorème 6.1.1) *Le sous-groupe  $G_{\text{bound}}$  est fini quand le groupe  $G$  est virtuellement abélien.*

La "maille" d'un groupe de type fini, qui est la borne supérieure des longueurs des plus petits lacets non triviaux dans les graphes de Cayley du groupe  $G$  considéré (voir chapitre 3.2), a été étudiée par Saul Schleimer [59], Aleksandr Ol'shanskii et Mark Sapir [49] et par Azer Akhmedov [4]. Nous donnons un critère de trivialité de  $G_{\text{bound}}$  en terme de "maille" (voir Section 3.2). Nous utilisons principalement le résultat de Azer Akhmedov [4] pour le cas des groupes hyperboliques non-élémentaires.

**Proposition (A).** (=Proposition 3.2.1) *Si la maille d'un groupe  $G$  est infinie, alors  $G_{\text{bound}}$  ne contient pas d'éléments de torsion.*

Nous obtenons le corollaire suivant.

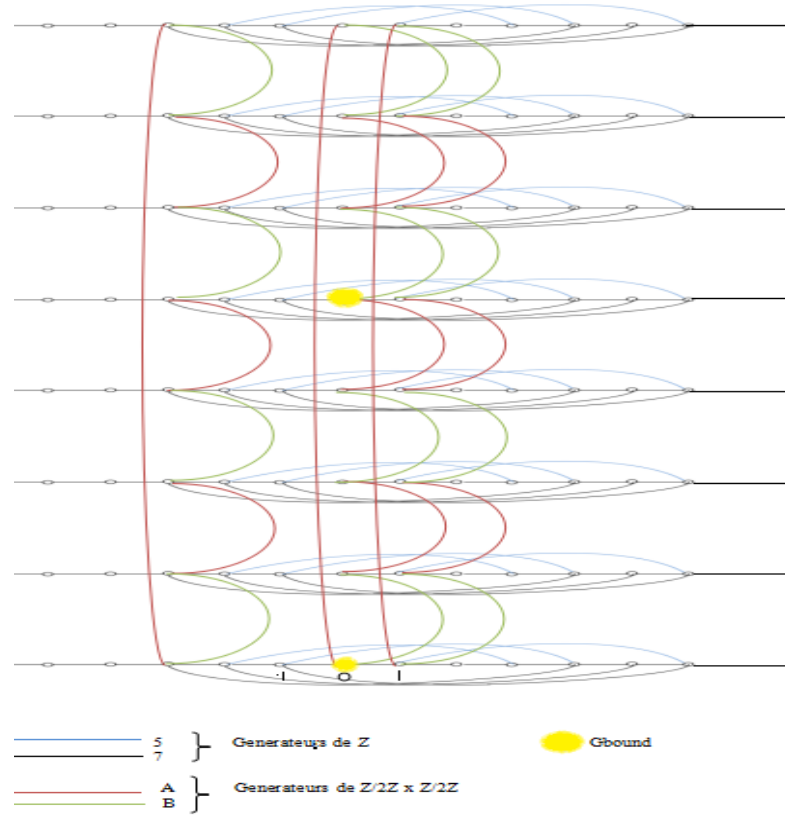


Figure 1.1: Graphe de Cayley de  $\mathbb{Z} \times D_8$  avec générateurs  $\{5, 7\}$  de  $\mathbb{Z}$  et  $\{A, B\}$ , les pré-images des générateurs de l'abélianisé de  $D_8$ .

**Corollaire.** (=Corollaire 4.2.1) *Dans un groupe  $G$  qui a une maille infinie, si  $G_{\text{bound}}$  est fini, alors il est trivial. En particulier,  $G_{\text{bound}}$  est trivial quand le groupe est hyperbolique non-élémentaire.*

Nous montrons également le résultat suivant ( voir théorème 5.1.1).

**Théorème (B).** (=Théorème 5.1.1) *Pour tout groupe fini  $A$ , il existe un groupe infini  $G$  tel que  $G_{\text{bound}} = A$ .*

Par la suite, nous étudions la dépendance d'une variante de  $G_{\text{bound}}$  en les cardinaux des parties génératrices.

**Définition 2.** (=Définition 7.0.1) *Soient  $G$  un groupe de type fini,  $r(G)$  le rang de  $G$ ,  $d$  un entier tel que  $d \geq r(G)$  et  $E(d)$  l'ensemble des parties génératrices finies de  $G$  de cardinal inférieur à  $d$ . Notons  $G_{\text{bound}}(d)$  l'ensemble  $\{g \in G : \exists M > 0 \text{ tq } S \in E(d), l_S(g) \leq M\}$ .*

Nous montrons que les sous-groupes  $G_{bound}(d)$  satisfont plusieurs propriétés de  $G_{bound}$ . Nous utilisons un résultat de A. Ol'shanskii et M. Sapir [49] pour en déduire que si  $G$  est hyperbolique non-élémentaire, les sous-groupes  $G_{bound}(d)$  sont triviaux pour  $d > r(G)$ .

Nous montrons aussi que les sous-groupes  $G_{bound}(d)$  peuvent varier en fonction de  $d$ . En particulier, nous calculons les valeurs de la suite  $G_{bound}(d)$  avec  $d \geq r(G)$  dans le cas où  $G$  est un groupe abélien libre et aussi dans le cas où  $G$  est le groupe de Heisenberg discret (à coefficients entiers).

**Proposition (B).** (=Proposition 7.2.1) Soit  $G = \mathbb{Z}^d$ .

1. Pour  $d = 1$ , si  $m = 2$ ,  $G_{bound}(m) = G$  sinon  $G_{bound}(m) = \{0\}$ .
2. Pour  $d \geq 2$  et  $m \geq 2d$ , alors  $G_{bound}(m) = \{0\}$ .

**Proposition (C).** (=Proposition 7.2.2)

Soit  $G = \langle a, b, c \mid [a, b] = c, [a, c] = [c, b] = 1 \rangle$  le groupe de Heisenberg.

On a :

1.  $G_{bound}(4) = \mathbb{Z} = Z(G)$  le centre de  $G$ .
2. Pour  $d \geq 6$ ,  $G_{bound}(d)$  est trivial.

En particulier, ceci implique le résultat suivant.

**Corollaire.** (=Corollaire 7.2.1) Soit  $G$  le groupe de Heisenberg,  $G_{bound}$  est trivial.

Dans un travail en cours [2], j'étudie le sous-groupe  $G_{bound}$  dans le cas des groupes virtuellement nilpotents. Je montre en particulier ce qui suit.

**Théorème (C).** (=Théorème 6.2.1) Soit  $G$  un groupe infini nilpotent de classe 2. Le sous-groupe  $G_{bound}$  est le plus grand sous-groupe fini de la suite centrale descendante.

Nous montrons ensuite le résultat suivant pour les groupes virtuellement nilpotents.

**Proposition (D).** (=Proposition 6.3.1) Soient  $H$  le groupe de Heisenberg et  $G$  un groupe qui contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à  $H$ . Alors  $G_{bound}$  est fini.

Nos résultats soulèvent les questions suivantes.

**Question:** Existe-t-il un groupe  $G$  tel que  $G_{bound}$  est infini?

**Question:** Est-il vrai que  $G_{bound}$  est fini pour tout groupe  $G$  virtuellement polycyclique?

**Question:** Est-ce que  $G_{bound}$  est fini dans le cas des groupes résolubles?

## 1.2 Organisation de la thèse

Après ce chapitre introductif, nous exposons au second chapitre quelques rappels sur les groupes de type fini et de présentation finie, sur les éléments ayant un nombre fini de conjugués et sur les groupes nilpotents. Nous définissons ensuite les graphes de Cayley, qui sont une représentation géométrique des groupes. Nous en donnons quelques exemples et propriétés.

Le chapitre 3 introduit les propriétés de base du sous-groupe  $G_{bound}$  et en donne les premiers exemples.

À travers le chapitre 4, nous rappelons la définition ainsi que quelques propriétés des groupes hyperboliques avant de décrire le sous-groupe  $G_{bound}$  pour ces groupes.

Dans le chapitre 5, nous construisons des groupes avec  $G_{bound}$  prescrit en utilisant des groupes de torsion. Ceci, après un bref état de l'art sur les groupes de Burnside. Nous discutons ensuite le cas du premier groupe de Grigorchuk pour lequel  $G_{bound}$  est trivial.

Des critères de finitude de  $G_{bound}$  sont donnés au chapitre 6. Nous y étudions  $G_{bound}$  dans les cas des groupes abéliens, virtuellement abéliens et nilpotents. De plus, nous y donnons un exemple de groupe virtuellement nilpotent de classe 2 avec  $G_{bound}$  trivial.

Nous finissons cette thèse par un septième chapitre consacré à la suite des sous-groupes  $\{G_{bound}(d)\}_{d \geq r(G)}$  qui sont une généralisation du sous-groupe  $G_{bound}$ . Nous montrons quelques propriétés générales de cette suite et nous la calculons dans le cas des groupes abéliens libres et dans le cas du groupe de Heisenberg.

# Chapitre 2

## Rappels sur les groupes

### 2.1 Propriété de finitude

**Définition 2.1.1.** *On dit d'un groupe  $G$  qu'il est de type fini, s'il existe un sous ensemble fini  $S \subset G$ , tel que tout élément  $g \in G$  est égal à un produit d'éléments de  $S$ . Ainsi,  $\forall g \in G, \exists s_1, \dots, s_k \in S$  tel que  $g = s_1^{\pm 1} \dots s_k^{\pm 1}$ . L'ensemble  $S$  est appelé partie génératrice de  $G$ .*

Il est clair que tout groupe fini est de type fini.

-Le groupe  $\mathbb{Z}^d$  est un groupe de type fini engendré par la partie génératrice  $S = \{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1)\}$ .

-Il existe une infinité non dénombrable de classes d'isomorphismes de groupes de type fini. En particulier, il existe une infinité non dénombrable de groupes à petites simplifications (voir section 4.1.1).

-De même, il existe une infinité non dénombrable de groupes résolubles. En particulier, Philip Hall a montré que tout groupe abélien dénombrable est isomorphe au centre d'un certain groupe résoluble de type fini (voir Théorème 6 dans [37]). Or, il existe une infinité non dénombrable de groupes abéliens dénombrables non-isomorphes.

La propriété qu'un groupe soit de type fini est préservée par les opérations suivantes :

-Le produit direct, le produit libre, le produit amalgamé, le quotient par un sous-groupe distingué et l'extension par un groupe de type fini.

Il est également connu que le produit en couronne de deux groupes de type

fini est de type fini.

### Croissance des groupes de type fini

**Définition 2.1.2.** Soit  $G$  un groupe engendré par une partie génératrice finie  $S$ . Notons  $B_S(n)$  la boule de rayon  $n$  pour la distance induite par  $S$ . On appelle

- Taux de croissance d'un groupe  $G$  de partie génératrice finie  $A$  [17], le nombre

$$\lambda(G, S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\#B_S(n)}.$$

Cette limite existe par la sous-multiplicativité de  $\#B_S(n)$ .

- Taux de croissance uniforme  $\lambda(G) = \inf_S \lambda(G, S)$ .

**Définition 2.1.3.** Soient  $G$  un groupe de type fini et  $S$  une partie génératrice finie de  $G$ . On appelle longueur des mots associée à  $S$ , la fonction  $l_S : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour tout élément  $g \in G$ ,  $l_S(g) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid g = s_1 \dots s_n, s_i \in S\}$ .

Cette longueur permet de définir une distance  $d_S$  sur le groupe  $G$ , de la manière suivante: pour  $x, y \in G$ , nous avons  $d_S(x, y) = l_S(x^{-1}y)$ .

**Définition 2.1.4.** Le taux de croissance permet de classer les groupes de type fini à quasi-isométrie près en trois catégories:

- $\lambda(G, S) > 1$  groupes à croissance exponentielle.
- $\lambda(G, S) = 1$  groupes à croissance sous-exponentielle:
  1. s'il existe un entier  $d > 0$  tel que  $\#B_S(n) \leq \alpha n^d$  croissance polynomiale.
  2.  $\#B_S(n)$  croît plus vite que tout polynôme, croissance intermédiaire.

Les groupes libres de type fini et plus généralement les groupes hyperboliques, sont de croissance exponentielle [29]. Les groupes à croissance polynomiale sont les groupes virtuellement nilpotents [34]. Il existe une infinité non dénombrable de groupes à croissance intermédiaire [31].

### Présentation de groupes

La notion de présentation permet de représenter les groupes de manière plus précise en terme de générateurs et de relations entre ces générateurs.

**Définition 2.1.5.** Soit  $G$  un groupe engendré par une partie génératrice  $S$ . Soit  $F(S)$  le groupe libre engendré par  $S$ . Il existe un morphisme  $\pi : F(S) \rightarrow G$  tel que  $\pi|_S = Id_S$ . Soit  $N = \ker(\pi)$ , le noyau de ce morphisme. Soit  $R$  un sous-ensemble de  $N$  tel que le plus petit sous-groupe distingué de  $F(S)$  contenant  $R$  est  $N$ . En d'autres termes,  $N$  est l'intersection de tous les sous-groupes distingués de  $F(S)$  contenant  $R$ . Dans ce cas,  $G$  admet une présentation notée  $\langle S \mid R \rangle$ . Si  $G$  admet une présentation  $\langle S \mid R \rangle$  où les ensembles  $S$  et  $R$  sont finis,  $G$  est alors dit de présentation finie.

**Exemples de groupes de présentation finie:**

-Le groupe libre à  $k$  générateurs est clairement de présentation finie.

-Le groupe abélien libre à  $k$  générateurs a pour présentation  $\langle x_1, \dots, x_k \mid [x_i, x_j], 1 \leq i, j \leq k \rangle$ .

-Le produit direct de deux groupes de présentation finie.

**Définition 2.1.6.** Le produit en couronne de deux groupes  $G$  et  $H$  est le groupe  $H \wr G = (\bigoplus_{g \in G} H_g) \rtimes G$  où  $G$  agit sur  $(\bigoplus_{g \in G} H_g)$  à gauche par translations.

Notons que si deux groupes  $H$  et  $G$  sont engendrés respectivement par deux parties finies  $X$  et  $Y$ , leur produit en couronne  $H \wr G$  est engendré par l'union de  $(\dots \times \{e_H\} \times X \times \{e_H\} \times \dots) \subset \bigoplus_{g \in G} H_g$  et  $\{e\} \times Y \subset \{e\} \times G$ .

**Exemple 2.1.1.** Le produit en couronne  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$  est appelé groupe de Lamp-lighter ou bien groupe de l'allumeur de réverbères. Cette appellation est due au fait que l'action du groupe  $\mathbb{Z}$  sur le groupe infini  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  fait penser à un allumeur de réverbères qui change les états (allumée/éteinte) d'une lampe (réverbère) qui fait partie d'une suite infinie de lampes.

**Définition 2.1.7.** Soient deux groupes  $G$  et  $H$  ayant pour présentations respectives  $H = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$  et  $G = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ . Le produit libre de  $G$  et  $H$  est le groupe donné par la présentation  $G * H = \langle S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \rangle$ .

Nous déduisons que le produit libre de deux groupes libres est un groupe libre.

**Définition 2.1.8.** Soient  $G = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ ,  $H = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$  deux groupes et  $K$  un sous-groupe de  $G$  isomorphe à un sous-groupe  $K_H$  de  $H$  par un morphisme



$\phi : K \longrightarrow K_H$ . Le produit amalgamé de  $G$  et  $H$  sur  $K$  est le groupe donné par la présentation

$$G *_K H = \langle S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \sqcup \{\phi(k)k^{-1}\}_{k \in K} \rangle .$$

**Définition 2.1.9.** Soient  $G$  un groupe de type fini et  $S$  une partie génératrice finie de  $G$ . On appelle longueur des mots associée à  $S$ , la fonction  $l_S : G \longrightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour tout élément  $g \in G$ ,  $l_S(g) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid g = s_1 \dots s_n, s_i \in S\}$ .

Cette longueur permet de définir une distance  $d_S$  sur le groupe  $G$ , de la manière suivante: pour  $x, y \in G$ , nous avons  $d_S(x, y) = l_S(x^{-1}y)$ .

## 2.2 FC-centre

Le FC-centre d'un groupe (FC pour *Finite Conjugacy*) est une généralisation de la notion de centre.

**Définition 2.2.1.** Soit  $G$  un groupe. On appelle FC-centre de  $G$  que l'on note  $FC(G)$ , le sous-groupe formé par les éléments de  $G$  qui ont un nombre fini de conjugués i.e  $FC(G) = \{g \in G \mid \#\{hgh^{-1}\}_{h \in G} < \infty\}$ .

Un résultat classique stipule que les sous-groupes de type fini du FC-centre sont virtuellement abéliens. Dans cette section nous expliquons la preuve de ce résultat. Commençons par le lemme suivant:

**Lemme 2.2.1.** (Lemme 2.14 dans [56]) Soient  $G$  un groupe et  $A = \{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  une famille de sous-groupes telle que: si  $X$  et  $Y \in A$ , alors pour tout  $y \in Y$ ,  $yXy^{-1} \in A$ . Nous obtenons alors le fait que pour tout bon ordre sur  $A$ , donc sur  $I$ , le groupe engendré par l'union des  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  est  $J = X_{\alpha_1}X_{\alpha_2}\dots$ , le produit des  $X_\alpha$  dans l'ordre croissant.

*Preuve.* Nous avons  $J \subset \langle \cup_{\alpha \in I} X_\alpha \rangle$ . Soit  $a \in J - \{e\}$ ,  $a$  s'écrit comme un produit:  $a = x_1 \dots x_r$  avec  $r$  minimal et  $x_i \in X_{\alpha_i}$ . Considérons que  $X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_r}$  est minimal pour l'ordre lexicographique induit par l'ordre sur  $I$ .

Montrons que la suite  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  est strictement croissante. Supposons  $\alpha_i = \alpha_j$  avec  $i \neq j$ . Dans ce cas,  $a = x_1 \dots x_i x_j x_{i+1}^{x_j} \dots x_{j-1}^{x_j} x_{j+1} \dots x_r$  avec  $x^u = uxu^{-1}$ . En revanche, comme  $x_i x_j \in X_{\alpha_i}$ , il s'agit d'une écriture de  $a$  plus courte que  $x_1 \dots x_r$ . Ceci étant impossible, alors pour  $i \neq j$ , nous avons  $\alpha_i \neq \alpha_j$ . Supposons à présent qu'il existe  $x_i$  dans l'écriture de  $a$  tel que  $\alpha_{i+1} < \alpha_i$ , alors

$$a = x_1 \dots x_{i+1} (x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1}) x_{i+2} \dots x_r \quad (*).$$

Comme  $x_{i+1}^{-1}X_{\alpha_i}x_{i+1} \in A$ , le mot obtenu ici est plus petit que  $x_1\dots x_r$  dans l'ordre lexicographique. Ceci est impossible. A présent, dans le cas où  $\alpha_{i+m} < \alpha_i$ , nous pouvons nous ramener au cas  $\alpha_{i+1} < \alpha_i$  en effectuant la manipulation (\*).  $\square$

**Corollaire 2.2.1.** (*Corollaire 2 du Lemme 2.14, [56]*) Soient  $G$  un groupe et  $F \subset G$  une partie finie stable par conjugaison telle que tous les éléments de  $F$  sont d'ordre fini. Dans ce cas, le groupe engendré par  $F$  est fini.

*Preuve.* Notons  $X_\alpha$  le groupe engendré par l'élément  $\alpha$  et  $A = \{X_\alpha\}_{\alpha \in F}$ .  $A$  est une famille finie de groupes, alors nous pouvons la munir d'un bon ordre. Lorsque nous appliquons le lemme précédent à  $A$ , nous obtenons le fait que le groupe  $\langle \cup_{\alpha \in F} X_\alpha \rangle = \langle F \rangle$  est un produit fini de groupes finis. Il est donc un sous-groupe fini de  $G$ .  $\square$

À présent, nous pouvons démontrer le théorème.

**Théorème 2.2.1.** (*Théorème 4.3.1 dans [56]*) Soit  $G$  un groupe de type fini tel que  $FC(G) = G$ , alors  $G$  est virtuellement  $\mathbb{Z}^d$ .

*Preuve.* Pour démontrer ce résultat, nous allons montrer que  $G/C(G)$  est un groupe fini, où  $C(G)$  est le centre de  $G$ . Pour  $x \in G$ , notons  $C(x)$  le centralisateur de  $x$ .

Nous allons appliquer le Corollaire 2.2.1 à  $F$ , une partie génératrice finie de  $G/C(G)$  bien choisie. Notons  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  une partie génératrice de  $G$  stable par conjugaison. Comme tout élément de  $G$  admet un nombre fini de conjugués, nous pouvons simplement ajouter tous les conjugués qui manquent dans  $S$ . Notons  $\pi_i : G \rightarrow G/C(s_i)$  la projection canonique. Soit  $a \in G$ . Comme tout  $s_i \in S$  admet un nombre fini de conjugués, alors  $G/C(s_i)$  est fini. Dans ce cas, il existe un  $k_i \in \mathbb{N}$  tel que  $\pi_i(a)^{k_i} = e$ . En d'autres termes,  $a^{k_i} \in C(s_i)$ . Ainsi,  $a^{k_1 \dots k_n} \in \cap_{1 \leq i \leq n} C(s_i) = C(G)$ . Nous en déduisons alors que tous les éléments de  $F$  sont d'ordre fini. Ceci nous permet d'appliquer le corollaire précédent à  $F$  qui est une partie génératrice de  $G/C(G)$ . Nous en déduisons alors que  $G/C(G)$  est fini.

Il s'ensuit que  $G$  est une extension finie de son centre qui est abélien et de type fini en conséquence du Lemme de Schreier. Par conséquent,  $G$  est l'extension finie d'un groupe abélien de type fini qui est alors une extension finie de  $\mathbb{Z}^d$ .  $\square$

Même s'il n'y a pas de sous-groupe FC-central de type fini qui ne soit pas virtuellement abélien, il existe de nombreuses classes de groupes où FC-centre est grand. Une construction possible est due à P.Hall [37]. Une application

des sous-groupes FC-centraux a été exposée dans l'article d'Antoine Gournay [30]. Jérémie Brioussel et Tianyi Zheng [11] utilisent une généralisation des extensions FC-centrales pour construire des classes de groupes avec la propriété HFD de Shalom (Voir aussi [24]).

## 2.3 Les groupes nilpotents

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et propriétés des groupes nilpotents. Le chapitre 6 expose nos résultats sur  $G_{bound}$  quand  $G$  est virtuellement nilpotent.

**Définition 2.3.1.** *Soit  $G$  un groupe.*

- On appelle commutateur de deux éléments  $x, y$  de  $G$ , l'élément

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

- On appelle commutateur de  $n$  éléments  $x_1, \dots, x_n$ , l'élément

$$[x_1, \dots, x_n] = [\dots [x_1, x_2], x_3], \dots x_n].$$

**Définition 2.3.2.** *Un groupe  $G$  est dit nilpotent de classe  $n$  avec  $n \geq 1$  si les commutateurs de longueur  $n + 1$  sont égaux à l'élément trivial dans  $G$ . Ceci équivaut à dire que pour la suite centrale descendante  $C_{i+1} = [C_i, G]$ , telle que  $C_0 = G$ , nous avons  $C_n = \{e\}$ . Le groupe  $C_i$  est engendré par les commutateurs de longueur  $i$  de  $G$ .*

Les groupes de la suite centrale vérifient  $C_0 \triangleright \dots \triangleright C_{n+1}$ . De plus, nous avons la propriété suivante.

**Lemme 2.3.1.** *Pour tout groupe  $G$ ,  $a_1, \dots, a_j \in G$  et  $k_1, \dots, k_j \in \mathbb{Z}$ , nous avons*

$$[a_1^{k_1}, \dots, a_j^{k_j}] = [a_1, \dots, a_j]^{\prod_{i=1}^j k_i} \text{ mod } G_{j+1}.$$

*En particulier, si  $G$  est nilpotent de classe  $n + 1$  alors*

$$[a_1^{k_1}, \dots, a_n^{k_n}] = [a_n, \dots, a_n]^{\prod_{i=1}^n k_i}.$$

*Preuve.* Notons  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ . Nous savons que pour tout groupe  $G$  et  $x_1, x_2, x_3 \in G$ , nous avons

$$[x_1, x_2x_3] = [x_1, x_3][x_3, [x_1, x_2]][x_1, x_2] \quad (2.1)$$

voir par exemple la formule (10.2.1.2) dans [36]. Ceci implique que pour des entiers  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $[x_1^n, x_2^m] = [x_1, x_2]^{nm} \text{ mod } G_3$  où  $G_3$  est le sous-groupe des commutateurs de longueur 3. Procédons par récurrence. Supposons que pour tout  $a_1, \dots, a_j \in G$  et  $k_1, \dots, k_j \in \mathbb{Z}$ , nous avons

$$[a_1^{k_1}, \dots, a_j^{k_j}] = [a_1, \dots, a_j]^{\prod_{i=1}^j k_i} \text{ mod } G_{j+1}.$$

Soient  $a_{j+1} \in G$  et  $k_{j+1} \in \mathbb{Z}$  deux éléments non-triviaux. Nous avons

$$[a_1^{k_1}, \dots, a_{j+1}^{k_{j+1}}] = [([a_1, \dots, a_j]^{\prod_{i=1}^j k_i})h, a_{j+1}^{k_{j+1}}]$$

où  $h \in G_{j+1}$ . En utilisant l'équation 2.1, nous obtenons

$$[a_1^{k_1}, \dots, a_{j+1}^{k_{j+1}}] = [[a_1, \dots, a_j]^{\prod_{i=1}^j k_i}, a_{j+1}^{k_{j+1}}] \text{ mod } G_{j+2}$$

et

$$[a_1^{k_1}, \dots, a_{j+1}^{k_{j+1}}] = [a_1, \dots, a_{j+1}]^{\prod_{i=1}^j k_i} \text{ mod } G_{j+2}.$$

Ce qui termine la preuve. Si  $G$  est nilpotent de classe  $n + 1$ , alors  $G_{n+1}$  est trivial. Dans ce cas, pour tout  $a_1, \dots, a_j \in G$  et  $k_1, \dots, k_j \in \mathbb{Z}$ ,

$$[a_1^{k_1}, \dots, a_n^{k_n}] = [a_n, \dots, a_n]^{\prod_{i=1}^n k_i}.$$

□

**Lemme 2.3.2.** *Soit  $G$  un groupe de type fini,  $H$  et  $K$  deux sous-groupes distingués de  $G$ , engendrés respectivement par  $X$  et  $Y$ . Le sous-groupe  $[H, K]$  est le plus petit sous-groupe distingué de  $G$  contenant l'ensemble  $S = \{[x, y] : x \in X, y \in Y\}$ .*

*Preuve.* Soit  $N$  le plus petit sous-groupe distingué contenant  $S$ . Il est clair que  $N \subset [H, K]$ . Les éléments de  $X$  commutent avec les éléments de  $Y$  dans le quotient  $G/N$ . Comme tout élément de  $H$  est un produit d'éléments de  $X$  et tout élément de  $K$  est un produit d'éléments de  $Y$ , les éléments de  $K$  et  $H$  commutent dans  $G/N$ . Ceci implique que  $N \subset [H, K]$ . □

**Lemme 2.3.3.** *Soit  $G$  un groupe nilpotent engendré par une partie génératrice finie  $S$ . Le sous-groupe  $C_i$  est engendré par  $S_i = \{[s_1, \dots, s_i] \mid \forall 1 \leq j \leq i, s_j \in S\}$ , les commutateurs de longueur  $i$  de la partie  $S$  [42].*

*Preuve.* Par récurrence, le cas  $i = 2$  résulte du Lemme 2.3.2. Supposons que l'assertion est vraie pour  $C_i$ . Nous avons  $S_{i+1} \subset C_{i+1}$  et  $C_{i+1}$  est distingué. Comme  $N$  est le plus petit sous-groupe distingué contenant  $S_{i+1}$ , il est inclus dans  $C_{i+1}$ . Soit  $g = [x_1, \dots, x_{i+1}]$  un commutateur de longueurs  $i + 1$ .

Le commutateur  $[x_1, \dots, x_i]$  est un produit d'éléments de  $S_i$ . Dans ce cas,  $g = [s_1 \dots s_i, x_{i+1}] = [s_1 \dots s_i, u_1 \dots u_n]$  où  $s_1, \dots, s_i \in S_i$  et  $u_1, \dots, u_n \in S$ . Par ailleurs, nous savons que pour tout groupe  $G$  et  $x, y, z \in G$ , nous avons  $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$ . Ceci implique que l'élément  $g$  est un produit de conjugués d'éléments de  $S_{i+1}$  ainsi,  $g \in N$  et finalement  $C_{i+1} \subset N$ .

Comme le conjugué d'un commutateur est un produit de commutateurs de longueurs plus grandes, le groupe  $C_i$  est engendré par les commutateurs de longueur  $i$   $\square$

Le groupe de Heisenberg à coefficients entiers

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

est engendré par la partie

$$S = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$G$  admet la présentation suivante:

$$G = \langle A, B, C \mid [A, C], [B, C], [A, B]C^{-1} \rangle.$$

Ce groupe est nilpotent de classe 2. Il a pour centre  $C(G) \simeq \mathbb{Z}$  et

$$G/C(G) \simeq \mathbb{Z}^2.$$

**Définition 2.3.3.** *Un groupe est dit résoluble de classe  $n$ , si la suite des sous-groupes dérivés  $D_{i+1} = [D_i, D_i]$ , où  $D_0 = G$ , stationne à  $\{e\}$ . Ceci signifie qu'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $D_n = \{e\}$*

Remarquons que comme la suite centrale descendante, la suite des sous-groupes dérivés vérifie  $D_n \triangleright \dots \triangleright D_{n+1}$ .

John Milnor [45] et Joseph Wolf [61] ont montré le résultat suivant: Soit  $G$  un groupe résoluble de type fini. Si  $G$  n'est pas de croissance exponentielle, il est virtuellement nilpotent.

Il est connu que les groupes virtuellement nilpotents sont à croissance polynomiale. Ce résultat est attribué à Dixmier, Wolf, Guivarc'h, Bass et d'autres, voir VII.C.26 dans [17] pour l'historique de la question, voir aussi par exemple [42]. Par conséquent, il n'y a pas de groupe résoluble de croissance intermédiaire. Il n'est cependant pas connu s'il existe des groupes de présentation finie à croissance intermédiaire.

## 2.4 Groupes avec loi uniforme

Les groupes possédant une loi uniforme représentent une classe importante de groupes. Elle contient par exemple les groupes nilpotents, les groupes abéliens et les groupes de torsion.

**Définition 2.4.1.** *Soit  $G$  un groupe de type fini, on dit de  $G$  qu'il possède une loi uniforme s'il existe un mot non trivial  $w(x_1, \dots, x_n)$  dans un groupe libre  $F_n$  où  $\{x_1, \dots, x_n\}$  est une partie génératrice libre de  $F_n$ , telle que  $\forall g_1, \dots, g_n \in G, w(g_1, \dots, g_n) = e$ . Le mot  $w(x_1, \dots, x_n)$  est alors appelé loi uniforme sur  $G$ .*

### Exemples:

- Les groupes abéliens ont pour loi uniforme le mot  $w = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$ .
- Les groupes nilpotents de classe  $n$  ont pour loi  $w = [x_1, \dots, x_n]$ , le commutateur de longueur  $n$ , voir 2.3.1.
- Les groupes de torsion tels que l'ordre maximal des éléments est borné, ont pour loi uniforme un mot  $w = x^n$ . En particulier, les groupes finis ont pour loi uniforme  $x^{|G|}$ .

Des généralités concernant les lois uniformes sont exposés dans [46] pour.

## 2.5 Groupes comme espaces métriques

Dans cette section nous rappelons quelques propriétés de base sur les métriques des mots.

On associe à un groupe  $G$  engendré par une partie finie  $S$ , un graphe  $\Gamma(G, S)$  appelé graphe de Cayley de  $(G, S)$  dont les sommets sont les éléments du groupe  $G$ . Deux sommets  $x, y \in G$  sont reliés par une arête si  $x^{-1}y \in S$ . Le graphe  $\Gamma(G, S)$  est muni de la distance de  $(G, d_S)$ . Ceci revient à dire que la distance entre deux sommets est égale à leur distance dans  $(G, d_S)$

L'action de  $G$  sur lui même par multiplication à gauche définit une action par isométries sur le graphe de Cayley  $\Gamma(G, S)$ .

### Exemples de graphes de Cayley

**Définition 2.5.1.** *Soient  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  deux espaces métriques. « Soient  $C \geq 0, \lambda > 1$ . Une application  $f : E \rightarrow F$  est appelée plongement  $(\lambda, C)$ -quasi-isométrique si pour tout  $x, y$ , nous avons*

$$\frac{1}{\lambda} d_E(x, y) - C \leq d_F(f(x), f(y)) \leq \lambda d_E(x, y) + C$$

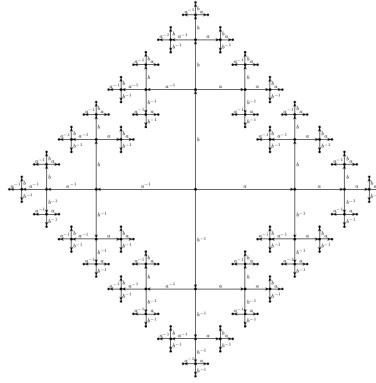


Figure 2.1: Graphe de Cayley de  $F_2$  avec générateurs standard  $\{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ .

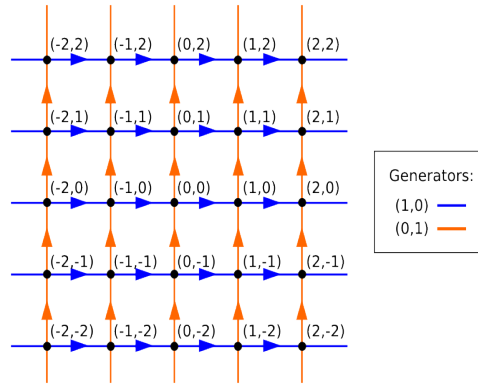


Figure 2.2: Graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$  avec générateurs standards  $\{\pm(0,1), \pm(1,0)\}$ .

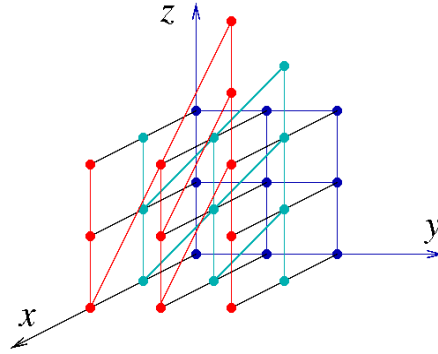
où  $f$  est appelée plongement  $(\lambda, C)$ -quasi-isométrique. Si de plus, il existe une constante  $K > 0$  telle que  $\forall y \in F$  et  $d_F(f(E), y) \leq K$ , on dit que  $f$  est une  $(\lambda, C, K)$ -quasi-isométrie.

**Exemple 2.5.1.** *Tout espace métrique borné est quasi-isométrique à un point. En particulier, tout groupe fini l'est.*

Il n'est pas difficile de voir que l'existence de quasi-isométries entre espaces métriques définit une relation d'équivalence.

**Définition 2.5.2.** *Une  $(\lambda, 0)$ -quasi-isométrie est appelée application bi-lipschitzienne.*

Une application bi-lipschitzienne est clairement continue. Cependant, ce n'est pas le cas des quasi-isométries de façon générale comme le montre l'exemple suivant.


 Figure 2.3:  $\mathbb{Z}$  avec générateurs  $\{\pm 1\}$  et  $\{\pm 2, \pm 3\}$ .

 Figure 2.4: Groupe de Heisenberg  $G = \langle x, y, z \mid [x, z], [y, z], [x, y]z^{-1} \rangle$ .

**Exemple 2.5.2.** L'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui associe à un réel sa partie entière est une  $(1, 2)$ -quasi-isométrie avec  $K = 2$ .

**Lemme 2.5.1.** Soit  $G$  un groupe de type fini et  $S_1, S_2$  deux parties génératrices finies de  $G$ . L'application identité de  $(G, d_{S_1})$  dans  $(G, d_{S_2})$  est bi-lipschitzienne [29].

*Preuve.* Soient  $\lambda_1 = \max\{l_{S_1}(s) \mid s \in S_2\}$ ,  $g \in G$  et  $w = s_{i_1} \dots s_{i_n}$  un mot sur  $S_2$  représentant  $g$ . Pour pouvoir écrire  $g$  comme mot sur  $S_1$ , nous pouvons remplacer chaque lettre  $s_{i_j}$  du mot  $w$  par un mot sur  $S_1$  représentant  $s_{i_j}$ . Dans ce cas,  $l_{S_1}(g) \leq \lambda_1 l_{S_2}(g)$ . En notant  $\lambda_2 = \max\{l_{S_2}(s) \mid s \in S_1\}$  et en adoptant le même raisonnement, nous obtenons l'inégalité  $l_{S_2}(g) \leq \lambda_2 l_{S_1}(g)$ . Par ailleurs, si nous notons  $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ , nous obtenons

$$\frac{1}{\lambda} l_{S_2}(g) \leq l_{S_1}(g) \leq \lambda l_{S_2}(g).$$

Pour  $x, y \in G$ , nous avons  $d_{S_1}(x, y) = l_{S_1}(x^{-1}y)$  et  $d_{S_2}(x, y) = l_{S_2}(x^{-1}y)$ . Ceci implique que

$$\frac{1}{\lambda} l_{S_2}(x^{-1}y) \leq l_{S_1}(x^{-1}y) \leq \lambda l_{S_2}(x^{-1}y).$$



Finalement,

$$\frac{1}{\lambda}d_{S_2}(x, y) \leq d_{S_1}(x, y) \leq \lambda d_{S_2}(x, y).$$

□

Nous rappelons dans ce qui suit la preuve d'un théorème bien connu dû à Svarc, Milnor et Efremovic, voir par exemple Proposition 8.19 dans [10], voir aussi [17].

**Théorème 2.5.1.** *Soit  $X$  un espace métrique géodésique et propre i.e tout couple de points peut être relié par une géodésique et les boules fermées sont compactes. Soit  $G$  un groupe discret agissant sur  $X$  proprement discontinuement par isométries tel que  $X/G$  compact. Dans ce cas,  $G$  est de type fini. Muni de la distance des mots,  $G$  est quasi-isométrique à  $X$ .*

*Preuve.* Nous savons que  $G/X$  est compact. Comme l'action est par isométries, elle induit une distance sur le quotient défini par  $d([x], [y]) = \inf d(x, y)$  avec  $x \in [x], y \in [y]$ . Il existe alors un réel  $R > 0$  tel que  $\text{diam}(X/G) = R$ . Soit  $x_0 \in X$  un point fixé. Notons  $X \xrightarrow{\pi} X/G$  la surjection canonique. Dans ce cas,  $\pi(B = B(x_0, R)) = X/G$ .

Introduisons  $S = \{s \in G \mid sB \cap B \neq \emptyset\}$  et remarquons que  $S = S^{-1}$ . Notons  $r = \sup\{d(sx_0, x_0) \mid s \in S\}$  et  $E = r - R$ . Le réel  $E$  est positif car par définition,  $R$  est plus petit que  $r$ .

Soit  $g \in G$ ,  $\gamma$  une géodésique joignant  $x_0$  à  $gx_0$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  des point de  $\gamma$  tels que  $d(x_i, x_{i+1}) \leq E$  pour  $i = 0, \dots, n$  avec  $x_n = gx_0$ .

Comme  $B$  est un domaine fondamental pour l'action,  $\exists \gamma_i$  tel que  $\gamma_i^{-1}x_i \in B$ . Nous avons  $d(\gamma_1 x_0, x_0) \leq E + R = r$  alors,  $\gamma_1 \in S$ . De même,  $\theta_i = \gamma_i \gamma_{i-1}^{-1} \in S$  car  $S = \{s \in G \mid sB(x_i, R) \cap B(x_i, R) \neq \emptyset\}$ . Il en découle que  $g = \theta_n \dots \theta_1$  ce qui prouve alors que  $S$  engendre  $G$  qui est de type fini.

Montrons que  $G$  muni de sa distance de mots est quasi-isométrique à  $X$ .

Soit  $f : G \rightarrow X$  qui, à  $g \in G$  associe  $gx_0 \in X$ . Nous avons:

$$\frac{1}{\lambda}|\gamma_1^{-1}\gamma_2| \leq |\gamma_1^{-1}\gamma_2| \leq d(\gamma_1 x_0, \gamma_2 x_0) = d(x_0, \gamma_1^{-1}\gamma_2 x_0) \leq \lambda|\gamma_1^{-1}\gamma_2|$$

avec  $\lambda = \max\{r, 1\}$ . Comme  $B$  est un domaine fondamental,  $d(f(G), y) \leq R$  et ce,  $\forall y \in X$ . Ce qui termine la preuve. □

**Corollaire 2.5.1.** *Soit  $G$  un groupe de type fini et  $H < G$  un sous-groupe d'indice fini. Pour toute partie génératrice  $S_G$  (resp  $S_H$ ) de  $G$  (resp de  $H$ ), l'injection de  $(H, d_{S_H})$  vers  $(G, d_{S_G})$  est une quasi-isométrie bi-lipschitzienne [17].*

*Preuve.* Le groupe  $H$  agit par isométrie sur le graphe de Cayley  $\Gamma(G, S_G)$ . L'action est proprement discontinue et le quotient par  $H$  est compact.  $\square$

**Définition 2.5.3.** *Un groupe  $G$  est dit commensurable à un groupe  $H$  s'il existe un sous-groupe  $G_1$  de  $G$  d'indice fini et un sous-groupe  $H_1$  de  $H$  d'indice fini tels que  $H_1$  est isomorphe à  $G_1$ .*

Nous pouvons vérifier qu'être commensurable est une relation d'équivalence.

**Corollaire 2.5.2.** *Si deux groupes  $G$  et  $H$  sont commensurables, alors ils sont quasi-isométriques [17].*

**Définition 2.5.4.** *Les graphes de Cayley sont sommet-transitifs. Ceci signifie que pour tout couple de sommets, il existe un automorphisme de graphe qui envoie le premier sommet sur le deuxième.*

**Exemple 2.5.3.** *Le graphe de Petersen est un exemple de graphes sommets-transitif qui n'est pas le graphe de Cayley d'un groupe. Ce graphe est défini de la manière suivante: les sommets sont les couples non ordonnés de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Deux sommets  $(i, j)$  et  $(k, l)$  sont reliés par une arête si la relation  $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$  est vérifiée. La figure suivante montre une représentation de ce graphe.*

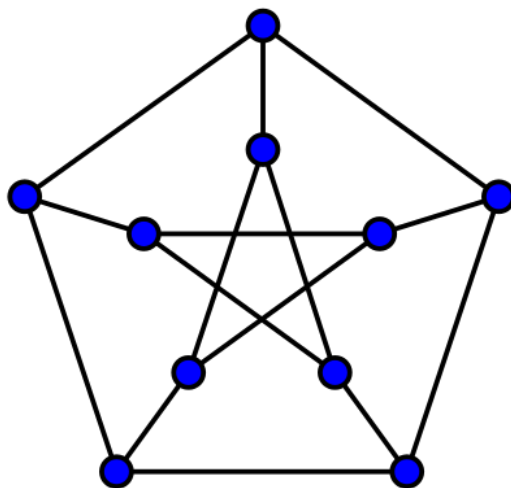


Figure 2.5: Graphe de Petersen

Il existe des graphes transitifs qui ne sont pas quasi-isométriques à des graphes de Cayley. Ceci a été montré par A.Eskin, D.Fisher et K.Whyte dans [26]. Pour montrer ce résultat, les auteurs ont introduit et utilisé la notion de *coarse differentiation*. Ils ont utilisé les graphes de Diestel-Leader.

Dans [22], T.Dymarz a montré que pour deux groupes de type fini, être quasi-isométrique n'est pas équivalent à être bi-Lipschitz. L'auteur a démontré en particulier le résultat suivant:

Soient deux groupes  $F$  et  $G$  finis tels que  $\#F = n$  et  $\#G = nk$ , où  $k > 1$ . Il n'existe pas de quasi-isométrie bijective entre les groupes  $G \wr \mathbb{Z}$  et  $F \wr \mathbb{Z}$  si  $k$  n'est pas un produit de facteurs premiers de  $n$ .

**Définition 2.5.5.** Soit  $\Gamma$  un graphe connexe. On appelle nombre de bouts de  $\Gamma$ , le supremum du nombre de composantes connexes non-bornées des complémentaires des sous-ensembles finis d'arêtes de  $\Gamma$ .

**Exemples:**

- Le nombre de bouts d'un graphe fini est 0.
- Le graphe  $\Gamma(\mathbb{Z}^2, \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\})$  possède 1 bout.
- Le nombre de bouts de  $\Gamma(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})$  est 2.
- $\Gamma(F_2, \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\})$  a un nombre infini de bouts.

Le nombre de bouts est un invariant quasi-isométrique (Proposition 7.1.1 dans [29]).

Rappelons un résultat connu et dû à John R.Stallings voir [60].

-Si  $G$  est un groupe de présentation finie, sans torsion, dont le graphe de Cayley possède un nombre infini de bouts, alors  $G$  est un produit libre non-trivial.

-Un groupe de type fini sans torsion, ayant un groupe libre pour sous-groupe d'indice fini est un groupe libre.

## 2.6 Propriétés géométriques

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et résultats connus sur les propriétés non-géométriques des groupes de type fini.

**Définition 2.6.1.** Une propriété  $(P)$  de groupes de type fini est dite géométrique si elle est invariante par quasi-isométries. Ceci signifie que si un groupe  $G$

possède la propriété (P) et qu'un groupe  $H$  est quasi-isométrique à  $G$ , alors  $H$  est commensurable à un groupe qui possède la propriété (P).

Il est clair qu'être un groupe fini est une propriété géométrique. Il est facile de voir qu'être de présentation finie est une propriété géométrique. Le sous-groupe  $G_{bound}$  n'est pas un invariant quasi-isométrique (voir la remarque 2). En particulier, la trivialité de  $G_{bound}$  n'est pas une propriété géométrique. Néanmoins, il semble intéressant d'étudier l'image de  $G_{bound}$  par les quasi-isométries pour certaines classes de groupes.

#### Exemples de propriétés géométriques:

- Admettre une décomposition en produit libre non-triviale. Ceci est obtenu en utilisant le théorème de Stallings [60] cité précédemment.
- Être un groupe libre  $F_k$  avec  $k \geq 1$ . Cette propriété est une conséquence du théorème cité précédemment (Théorème 19, chapitre 7 dans l'article [29]).
- Être nilpotent. Ceci est une conséquence d'un célèbre résultat de M.Gromov sur les groupes à croissance polynomiale [34].
- Être un groupe abélien libre (voir exemple dans chapitre 1 de [29]).
- Être hyperbolique. La définition des groupes hyperboliques est rappelée dans le chapitre 4.

#### Exemples de propriétés non-géométriques:

- Être un groupe résoluble [23].
- Être un groupe 'juste infini'.

Le fait que les trois propriétés suivantes sont non-géométriques est dû à Marc Burger et Shahar Moses [12] qui ont construit des groupes simples quasi-isométriques à  $F_k \times F_k$  où  $F_k$  est le groupe libre de rang  $k$ .

- Être un groupe simple
- Être un groupe qui a pour quotient un groupe libre (voir remarque IV.29 dans [17]).
- Être résiduellement fini.
- Propriété (T) de Kazhdan. Au Chapitre 3.6 dans [9], les auteurs attribuent un contre exemple à S.Gersten.

**Exemples de propriétés où la question est ouverte:**

- Avoir un sous-groupe polycyclique d'indice fini (voir chapitre 4.50 dans [17]).
- Avoir une croissance exponentielle uniforme [17].
- Être résoluble et de présentation finie. Cette question a été formulée dans le survol de Wolfgang Lück (Remarque 3.9 dans [40]).

# Chapitre 3

## Éléments uniformément bornés

Dans ce chapitre, nous allons définir et étudier les premières propriétés du sous-groupe  $G_{bound}$  des éléments uniformément bornés et nous en donnerons les propriétés de base.

Rappelons que  $G_{bound}$  est constitué des éléments dont la longueur des mots est uniformément bornée.

**Définition 3.0.1.** *Soit  $G$  un groupe de type fini. Un élément  $g \in G$  est dit de longueur uniformément bornée s'il existe une constante  $M > 0$  telle que pour toute partie génératrice  $S$  de  $G$ ,  $l_S(g) \leq M$ . L'ensemble des éléments de longueurs uniformément bornées est noté  $G_{bound}$ .*

### 3.1 Propriétés de base et premiers exemples

Le lemme suivant est une conséquence de la définition de  $G_{bound}$ .

**Lemme 3.1.1.** *Le sous-groupe  $G_{bound}$  est caractéristique.*

*Preuve.* Montrons d'abord que  $G_{bound}$  est un sous-groupe. Il est clair que  $G_{bound}$  contient l'élément neutre de  $G$ . Soit  $g \in G_{bound}$  un élément non trivial. Nous avons  $m = \sup_S \{l_S(g)\} = \sup_S \{l_S(g^{-1})\}$  car  $l_S(g) = l_S(g^{-1})$ . Il en résulte que si  $g \in G_{bound}$ , alors  $g^{-1} \in G_{bound}$ . Soient  $g_1, g_2 \in G_{bound}$ . Notons  $m_1 = \sup_S l_S(g_1)$  et  $m_2 = \sup_S l_S(g_2)$ . Pour toute partie génératrice finie  $S$  de  $G$ , nous avons  $l_S(g_1 g_2) \leq l_S(g_1) + l_S(g_2) \leq m_1 + m_2$ . Donc  $g_1 g_2 \in G_{bound}$  et nous en déduisons que  $G_{bound}$  est un sous-groupe de  $G$ .

Montrons qu'il est caractéristique. Soient  $g \in G_{bound}$  non trivial et  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  une partie génératrice symétrique de  $G$ , telle que  $g = s_{i_1} \dots s_{i_n}$  avec  $s_{i_j} \in S$  pour  $1 \leq j \leq n$ . Étant donné un automorphisme  $A$  de  $G$ , nous avons  $A(g) = A(s_{i_1} \dots s_{i_n}) = A(s_{i_1}) \dots A(s_{i_n})$  et l'ensemble  $A(S) =$

$A(s_1), \dots, A(s_k)$  engendre  $G$ . Nous remarquons que  $l_{A(S)}(A(g)) = l_S(g)$ . Il s'ensuit que pour une partie génératrice  $E$  de  $G$ ,  $l_E(A(g)) = l_{A^{-1}(E)}(g)$ . Nous en déduisons que si  $m = \sup_S l_S(g)$ , alors  $l_E(A(g)) = l_{A^{-1}(E)}(g) \leq m$ . Ceci implique que  $A(g) \in G_{bound}$  et que  $G_{bound}$  est un sous-groupe caractéristique de  $G$ .  $\square$

Rappelons qu'un groupe  $G$  est dit résiduellement fini, si tout élément  $g \in G$ , il existe un sous-groupe distingué  $H \triangleleft G$  d'indice fini tel que  $g \notin H$ .

**Lemme 3.1.2.** *Soit  $G$  un groupe résiduellement fini. Soit  $g$  dans  $G$ . Il existe  $M$  tel que pour tout partie génératrice  $S$  on a  $l_S(g) \leq M$ , si, et seulement si, pour tout quotient fini  $\pi : G \rightarrow Q$  de  $G$ , et toute longueur du mot  $\ell$  sur  $Q$ , on a  $\ell(\pi(g)) \leq M$ .*

*Preuve.* L'implication directe est triviale, la réciproque: supposons que pour tout quotient fini  $\pi : G \rightarrow Q$  de  $G$ , et toute longueur du mot  $\ell$  sur  $Q$ , on a  $\ell(\pi(g)) \leq M$  mais que il existe  $S$  partie génératrice de  $G$  telle que  $l_S(g) > M$ . Alors prenons un quotient fini dans lequel l'union de la boule de rayon  $M$  et de  $g$ , pour  $l_S$ , s'injecte. Alors  $g$  n'est pas dans la boule de rayon  $M$  de  $Q$  pour la métrique donnée par l'image de  $S$ . Contradiction.  $\square$

**Lemme 3.1.3.** *Soit  $G$  et  $H$  deux groupes de type fini, et  $\pi : G \rightarrow H$  un morphisme surjectif.*

(i) *Pour toute partie génératrice finie  $T$  de  $H$ , il existe une partie génératrice finie  $S$  de  $G$  telle que pour tout  $g \in G$ , on a  $l_T(\pi(g)) \leq l_S(g)$  et  $\pi(S) \subset T \cup \{e\}$ .*

(ii) *De plus  $\pi(G_{bound}) \subset H_{bound}$ .*

*Preuve.* (i) Soit  $A$  une partie génératrice finie de  $G$ . Notons  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $r_j \in G$  tel que  $\pi(r_j) = t_j$ , et posons  $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ . Observons que  $\pi(R) = T$ .

Pour tout  $a \in A$ , il existe un mot  $w_a(T)$  sur  $T \cup T^{-1}$  tel que  $\pi(a) = w_a(T)$ . Notons  $w_a(R)$  le mot sur  $R \cup R^{-1}$  obtenu à partir de  $w_a(T)$  en remplaçant  $t_j$  et son inverse par  $r_j$  et son inverse. Soit  $q_a = w_a(R)^{-1}a$ . Alors  $a = w_a(R)q_a$  et  $\pi(a) = w_a(T)$ .

Posons  $W = \{w_a(R)\}_{a \in A} \cup q_a$  et  $S = R \cup \{q_a\}_{a \in A}$ . Tout élément de  $G$  peut être écrit comme un mot sur  $A \cup A^{-1}$  est donc aussi comme mot sur  $W \cup W^{-1}$ . Ainsi, tout élément de  $G$  peut être écrit comme un mot sur  $S$  et donc  $S$  engendre  $G$ .

Soit  $g \in G$ . Soit  $l = l_S(g)$ . Soient  $s_1, \dots, s_l \in S \cup S^{-1}$  tels que  $g = s_1 \dots s_l$ . Puisque pour tout  $i \in \{1, \dots, l\}$ , on a  $l_T(\pi(s_i)) \in \{0, 1\}$ , alors  $l_T(\pi(g)) \leq l$ . Ceci implique que pour tout  $g \in G$ ,

$$l_T(\pi(g)) \leq l_S(g).$$

(ii) Soit  $g \in G_{\text{bound}}$ . Il existe une constante  $M_g \geq 0$  telle que pour toute partie génératrice finie  $A$  de  $G$ , on a  $l_A(g) \leq M_g$ . Soit  $T$  une partie génératrice finie de  $H$  et  $S$  comme dans (i). Alors,

$$l_T(\pi(g)) \leq l_S(g) \leq M_g.$$

Ainsi,  $\pi(g) \in H_{\text{bound}}$ . □

**Corollaire 3.1.1.** *Si  $G = A \times B$ , alors  $G_{\text{bound}} \subset A_{\text{bound}} \times B_{\text{bound}}$ .*

*Preuve.* Soient  $\pi_1 : G \rightarrow A$  et  $\pi_2 : G \rightarrow B$  les projections canoniques. Il résulte du lemme 3.1.3 que  $G_{\text{bound}} \subset A_{\text{bound}} \times B_{\text{bound}}$ . □

Pour certains groupes, l'égalité  $(A \times B)_{\text{bound}} = A_{\text{bound}} \times B_{\text{bound}}$  n'est pas vérifiée comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 3.1.4.** *Soient  $A = \mathbb{Z}$ ,  $B = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  où  $q$  est un entier tel que  $q > 2$  et  $G = A \times B$ . Alors,  $G_{\text{bound}}$  est trivial tandis que  $A_{\text{bound}} \times B_{\text{bound}} = \{0\} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ .*

Montrons que  $\mathbb{Z}_{\text{bound}}$  est trivial. Soit  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Considérons la partie génératrice  $S_p = \{n+1, p\}$  où  $p$  est un nombre premier tel que  $p > n+1$ . Il existe deux entiers  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $n = u(n+1) + vp$  et  $l_{S_p}(n) = |u| + |v|$ . On a  $l_{S_p}(n) \rightarrow \infty$  quand  $p \rightarrow \infty$ .

Montrons que l'élément  $(0, 1) \in \{0\} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  n'est pas dans  $G_{\text{bound}}$ . Soit  $p$  un nombre premier tel que  $p > q+1$ , alors  $S = \{\pm(p, 1), \pm(q+1, 0)\}$  engendre  $G$ . Il s'ensuit que,

$$(0, 1) = (q+1)(p, 1) - p(q+1, 0).$$

Par conséquent,  $l_S(0, 1) = p + q + 1$ . Ceci implique que  $l_S(0, 1)$  tend vers l'infini quand  $p$  tend vers l'infini. Dans ce cas,  $(0, 1) \notin G_{\text{bound}}$  et  $\{0\} \times B_{\text{bound}}$  n'est pas contenu dans  $G_{\text{bound}}$ . Finalement,  $A_{\text{bound}} \times B_{\text{bound}}$  n'est pas un sous-groupe de  $G_{\text{bound}}$ .

**Lemme 3.1.5.** *Soient  $G$  un groupe engendré par  $n$  éléments et  $g \in G_{\text{bound}}$  non trivial. Nous avons  $|\text{Aut}(G).g| \leq n^M$  où  $M = \sup_S l_S(g)$ .*

*Preuve.* Soit  $S$  une partie génératrice finie de  $G$  telle que  $|S| = n$ . Pour tout automorphisme  $A \in \text{Aut}(G)$ , l'ensemble  $A(S)$  engendre  $G$  et  $l_{A(S)}(A(g)) = l_S(g)$ . Ceci implique que

$$l_S(A(g)) = l_{A^{-1}(S)}(g) \leq M.$$



Nous en déduisons que l'orbite  $Aut(G).g$  est contenue dans  $B_S(M)$ , la boule de rayon  $M$  pour  $l_S$  dans  $G$ . D'autre part, nous savons que  $|B_S(M)| \leq n^M$ . Ainsi,

$$|Aut(G).g| \leq n^M.$$

□

**Exemple 3.1.1.** Soit  $G$  un groupe de type fini agissant sur un ensemble infini  $X$ . Soit  $H$  un groupe de type fini. Notons  $\Gamma = H \wr_X G = (\bigoplus_{x \in X} H_x) \rtimes G$  le produit en couronne correspondant. Si l'orbite de chaque élément de  $X$  est infinie ou bien si  $H_{bound}$  est trivial, alors  $\Gamma_{bound}$  est trivial.

En effet, soit  $\gamma = (h, g) \in \Gamma$  avec  $h = (\dots, e, h_1, \dots, h_n, e, \dots)$  avec  $h_1$  non trivial. Supposons que les orbites des éléments de  $X$  sous l'action de  $G$  sont infinies. Soit  $S$  une partie génératrice finie de  $H$  et  $S_G$  une partie génératrice finie de  $G$ . Soit  $\{S_i = g_i S\}_{i \in \mathbb{N}}$  deux à deux disjoints, une suite de translatés de  $S$  par l'action d'une suite  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $G$ . Nous avons  $l_{S_i}(h) = l_S(h_i)$  et  $l_S(h_i) \rightarrow \infty$  quand  $i \rightarrow \infty$ . Pour  $i \in \mathbb{N}$ , notons  $T_i = S_i \times \{e\} \cup \{e\} \times S_G$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $T_i$  est une partie génératrice de  $\Gamma$  et  $l_{T_i}((h, g)) \geq l_{S_i}(h)$ . Nous en déduisons que  $(h, g) \notin G_{bound}$ .

Si  $H_{bound}$  est trivial, il existe une suite  $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de parties génératrices de  $H$  telles que  $l_{S_i}(h_1) \rightarrow \infty$  quand  $i \rightarrow \infty$ . Soit  $E_i = \{(\dots, e, s, \dots, e, g)\}_{s \in S_i}$  tel que  $s$  est à la coordonnée de  $h_1$ . Nous avons  $l_{S_i}(h_1) \leq l_{E_i}(h, g)$ . Ainsi,  $l_{E_i}(h, g) \rightarrow \infty$  quand  $i \rightarrow \infty$ . Il en résulte que  $\Gamma_{bound}$  est trivial.

Nous allons utiliser le lemme 3.1.5 pour des groupes finis. Dans le cas où  $G$  est un groupe infini, pour un élément  $g \in G$ , ce lemme implique que si  $|Aut(G).g|$  est infini alors  $g \notin G_{bound}$ . Notons que la réciproque n'est pas vraie. En effet, pour  $G = \mathbb{Z}$  l'Aut-orbite de tout élément est de cardinal 2. Cependant,  $G_{bound}$  est trivial (voir Théorème 6.1.1).

**Corollaire 3.1.2.** *Le sous-groupe  $G_{bound}$  est inclus dans  $FC(G)$ .*

*Preuve.* Puisque les éléments de  $FC(G)$  sont ceux dont les orbites sont finies dans  $G$  sous l'action de  $Inn(G)$ , il résulte du lemme 3.1.5 que  $G_{bound} \subset FC(G)$ .

□

**Corollaire 3.1.3.** *Soit  $G$  un groupe de type fini. Tout sous-groupe de type fini de  $G_{bound}$  est virtuellement abélien.*

*Preuve.* Soit  $H$  un sous-groupe de type fini de  $G_{bound}$ . Comme  $(FC(G) \cap H) \subset FC(H)$  et  $H \subset G_{bound} \subset FC(G)$ , alors  $H \subset FC(H)$ . Par conséquent,

$H = FC(H)$ . Le fait que  $H$  est virtuellement abélien découle du théorème 4.3.1 de la référence [56]. Ce théorème stipule que si  $G$  est égal à  $FC(G)$ , alors  $G$  est virtuellement abélien. Nous rappelons la preuve de ce théorème dans le Chapitre 2 (voir Théorème 2.2.1).  $\square$

## 3.2 Groupes avec *maille* infinie

Soit  $G$  un groupe engendré par une partie génératrice finie  $S$ . Nous rappelons qu'un lacet dans le graphe de Cayley  $\Gamma(G, S)$  est un chemin non-trivial et non-contractile, qui commence et se termine en l'élément neutre  $e$ . La *maille* (tour de taille) d'un graphe de Cayley  $\Gamma(G, S)$  est la longueur du plus petit lacet qu'il contient. Un groupe est dit avoir une *maille* infinie si pour toute constante  $k > 0$ , il existe une partie génératrice finie  $S$  de  $G$  telle que la *maille* de  $\Gamma(G, S)$  est plus grand que  $k$ .

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $G$  un groupe engendré par une partie finie  $S$  et  $\Gamma(G, S)$  le graphe de Cayley correspondant. Soient  $g \in G$  un élément d'ordre  $n$  et  $w$  un mot sur  $S$  représentant  $g$  avec une longueur minimale  $k$ . Soit  $w'$  le mot le plus court parmi les conjugués de  $w$ . Le chemin obtenu en concaténant  $n$  fois  $w'$  est un lacet.*

*Preuve.* L'élément du groupe que  $w'$  définit est d'ordre  $n$  et non trivial dans le groupe car il est conjugué à  $g$ , et donc le concatènera  $n$  fois ramène au sommet de départ. En effet, Supposons que  $w' = u w u^{-1}$  est le mot le plus court parmi les conjugués de  $w$ . Supposons aussi qu'il existe un sous-mot  $w''$  de la forme  $ss^{-1}$  où  $s \in S$ . Dans ce cas, il existe un sous-mot  $w''$  de  $w'$  tel que  $w' = s w'' s^{-1}$ . Il existe alors un mot  $u$  tel que  $w = u^{-1} s w'' s^{-1} u$ . Il en découle que  $w''$  est un conjugué de  $w$  qui est plus court que  $w'$ . Ceci étant contradictoire, nous déduisons que  $w''$  est un lacet.  $\square$

**Proposition 3.2.1.** *Si un groupe  $G$  a une maille infinie, alors  $G_{bound}$  ne contient pas d'éléments de torsion.*

*Preuve.* Soit  $g \in G$ , tel qu'il existe un entier minimal  $n(g) > 1$  satisfaisant  $g^{n(g)} = e$ . Supposons que  $g \in G_{bound}$ . Il existe alors une constante  $M > 0$  telle que pour toute partie génératrice finie  $S = \{s_1, \dots, s_m\}$  de  $G$ , nous avons  $l_S(g) \leq M$ . Dans ces conditions, pour toute partie génératrice  $S$  de  $G$ , nous avons  $l_S(g^{n(g)}) \leq n(g)M$ . Par ailleurs, nous savons qu'il existe un mot  $w$  sur  $S$ , représentant  $g$ , tel que  $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$  correspond à un chemin reliant l'élément neutre  $e$  à  $g$  dans le graphe de Cayley  $\Gamma(G, S)$ . Soit  $w'$  le plus court conjugué de  $w$ . Le chemin correspondant à  $w' \dots w'$  (la concaténation de  $n$  copies de  $w'$ ) commence et se termine en  $e$ . Il résulte du lemme 3.2.1 que

ce chemin est un lacet non trivial. Ainsi, pour toute partie génératrice finie, nous avons un lacet de longueur bornée par  $n(g)M$ . Ce qui contredit le fait que la *maille* de  $G$  est infinie.  $\square$

**Corollaire 3.2.1.** *Si  $G$  est un groupe de torsion de type fini avec une maille infinie, alors  $G_{\text{bound}}$  est trivial.*

### 3.3 Éléments de longueur prescrite

Soient  $G$  un groupe de type fini, un élément  $g \in G \setminus G_{\text{bound}}$  et un entier  $k > 0$ . Nous souhaitons répondre à la question suivante: peut-on construire une partie génératrice finie  $S$  de  $G$ , telle que  $l_S(g) = k$ ?

Prenons par exemple  $G = \mathbb{Z}^2$  et notons  $g = (1, 0)$ . Étant donné  $n \in \mathbb{N}$  et  $S = \{(\pm 1, n), (0, \pm 1)\}$ , nous avons

$$l_S(g) = l_S((1, n) + n(0, -1)) = n + 1.$$

La réponse est positive pour les éléments non-triviaux des groupes libres.

**Lemme 3.3.1.** *Soient  $g \in F_k$  un élément non-trivial et un entier  $l \in \mathbb{N}^*$ . Il existe une partie génératrice  $E$  de  $F_k$  telle que  $l_E(g) = l + 1$ .*

*Preuve.* Soient  $p = 2l + 1$ ,  $S = \{x_1, \dots, x_k\}$  une partie génératrice libre de  $F_k$  et  $u, v$  deux nombres premiers distincts, tels que  $v > u > p$ . Notons  $A = \{x_i^u, x_i^v\}_{1 \leq i \leq k}$  et  $E = \{g^2, g^p\} \cup A$ . Il est clair que  $A$  et  $E$  sont des parties génératrices de  $F_k$  car  $A$  engendre  $S$ . Montrons que  $g = g^{p-2l}$  est la plus courte expression de  $g$  sur  $E$ . Puisque  $S$  est une partie génératrice libre de  $F_k$ , si un élément  $x_j$  est utilisé pour la plus courte expression de  $g$  sur  $E$ , alors il existe une expression de  $g$  sur  $A$  telle que  $l_A(g) < l + 1$ . Ceci signifie que

$$g = x_{i_1}^{n_{i_1}} \dots x_{i_m}^{n_{i_m}}$$

où  $n_{i_j} \in \mathbb{Z}$ . Notons que cette expression est unique. Il s'ensuit qu'il existe  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}$  tels que  $\alpha_j u + \beta_j v = n_{i_j}$  et la somme  $|\alpha_j| + |\beta_j|$  est minimale. Dans ce cas, l'expression la plus courte de  $g$  sur  $E$  est

$$g = x_{i_1}^{\alpha_1 u + \beta_1 v} \dots x_{i_m}^{\alpha_m u + \beta_m v}.$$

Dans ces conditions,  $l_E(g) = \sum_{j=1}^m |\alpha_j| + |\beta_j|$ . D'autre part, nous avons

$$|\alpha_j| = \frac{|n_{i_j} - \beta_j v|}{u}.$$

Si  $v > 3n_{i_j}u$ , alors  $l_A(g) > l + 1$ .

Dans ce cas,  $g = g^{p-2l}$  est l'expression la plus courte de  $g$  sur  $E$  et  $l_E(g) = l + 1$ .  $\square$

Le même argument peut être utilisé afin de montrer que les longueurs des éléments du groupe abélien libre  $\mathbb{Z}^d$  peuvent être prescrites.

**Exemple 3.3.1.** Soient  $g \in \mathbb{Z}^d$  un élément non trivial et un entier  $l$  positif. Il existe une partie génératrice  $E$  de  $\mathbb{Z}^d$  telle que  $l_E(g) = l + 1$ .

*Preuve.* Soient  $S = \{z_1, \dots, z_n\}$  une partie génératrice libre de  $\mathbb{Z}^d$ ,  $A = \{uz_i, vz_i\}_{1 \leq i \leq k}$ ,  $E = \{2g, pg\} \cup A$  où  $p = l + 1$  et  $u, v$  deux nombres premiers tels que  $v > u > p$ . En utilisant le même argument que dans le lemme 3.3.1, nous en déduisons que le mot le plus court représentant  $g$  sur  $E$  est  $g = (p - 2l)g$ . Il en résulte que  $l_E(g) = l + 1$ .  $\square$

# Chapitre 4

## Groupes hyperboliques

La théorie des groupes hyperboliques a connu un large développement depuis son introduction dans les années 1980. Les groupes hyperboliques forment une classe riche de groupes au sens où un groupe de présentation finie pris au hasard est hyperbolique avec probabilité 1 [47]. Des notions plus faibles d'hyperbolicité des groupes ont par ailleurs été introduites telles que les groupes relativement hyperboliques et les groupes acylindriquement hyperboliques. Pour un survol sur la question, voir par exemple [15].

### 4.1 Définitions et résultats de base

**Définition 4.1.1.** Soit  $X$  un espace métrique géodésique et  $o \in X$  un point fixé. Notons  $|x - y|$  la distance entre  $x, y \in X$ . On appelle produit de Gromov de  $x, y \in X$  par rapport à  $o$  la quantité  $(x|y)_o = \frac{1}{2}\{|x - o| + |y - o| - |x - y|\}$ .

L'inégalité triangulaire implique que cette quantité est positive.

**Définition 4.1.2.** Soient  $X$  un espace métrique géodésique et  $\delta \geq 0$  un réel. On dit que  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique si la condition suivante est vérifiée: pour  $x, y, z \in X$ ,  $z' \in [x, z]$  et  $y' \in [x, y]$ , si  $|x - y'| = |x - z'| \leq (z|y)_x$ , alors  $|y' - z'| \leq \delta$ .

Étant donné  $(X, d)$  un espace métrique géodésique, un sous-ensemble  $A \subset X$  et un réel  $\delta >$ , notons  $N_\delta(A)$  l'ensemble  $\{x \in X \mid d(x, A) \leq \delta\}$ .

Une définition équivalente des espaces  $\delta$ -hyperboliques due à Eliyahu Rips (voir définition 27 dans [29]) est que l'espace métrique géodésique  $X$  vérifie le fait que pour tout triangle géodésique  $[a, b], [b, c], [c, a]$ , nous avons  $[a, b] \subset N_\delta([b, c] \cup [c, a])$ ,  $[b, c] \subset N_\delta([c, a] \cup [a, b])$  et  $[c, a] \subset N_\delta([b, c] \cup [a, b])$ .

## Exemples

- Les variétés hyperboliques (variétés avec courbure scalaire constante égale à  $-1$ ) simplement connexes sont  $\delta$ -hyperboliques. Nous pouvons voir ceci sur l'espace hyperbolique  $H^2$  car tout triangle géodésique à sommets dans  $H^2$  est contenu dans un triangle géodésique à sommets dans le bord de  $H^2$ . Les triangles à sommets dans le bord sont tous isométriques et vérifient la condition de Rips. Ceci se généralise par la suite à  $H^n$  car tout triangle géodésique de  $H^n$  est contenu dans une copie isométrique de  $H^2$ .
- Les arbres (graphes contractiles) sont des espaces 0-hyperboliques.
- Un espace métrique compact  $X$  est  $\text{diam}(X)$ -hyperbolique.

**Remarque 1.** *Il est bien connu qu'étant donnés  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques géodésiques et  $f : X \rightarrow Y$  une  $(C, K)$ -quasi-isométrie, si  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique alors  $Y$  est  $\delta'$ -hyperbolique (Théorème 12 dans [29]).*

A présent, nous allons introduire les groupes hyperboliques.

**Définition 4.1.3.** *Un groupe hyperbolique est un groupe de type fini tel que, muni de la distance des mots pour une partie génératrice finie, l'espace métrique obtenu est  $\delta$ -hyperbolique.*

L'hyperbolicité d'un groupe est alors indépendante de la partie génératrice choisie. En effet, étant données deux parties génératrices  $S$  et  $S'$  de  $G$ , les deux espaces métriques  $(G, S)$  et  $(G, S')$  sont quasi-isométriques. De plus, comme tout groupe de type fini  $G$  agit proprement discontinuement sur son graphe de Cayley pour la partie génératrice  $S$  et que le quotient est compact, le théorème 2.5.1 implique que  $G$  est hyperbolique si et seulement si l'un de ses graphes de Cayley est hyperbolique.

Nous déduisons également du théorème 2.5.1 qu'étant donné un groupe de type fini  $G$ , tout sous-groupe  $\Gamma$  de  $G$  agit proprement discontinuement sur  $G$ . Dans ce cas, si  $\Gamma$  est d'indice fini, il est quasi-isométrique à  $G$ . Par conséquent,  $G$  hyperbolique  $\iff \Gamma$  hyperbolique. Par ailleurs, si  $N \triangleleft G$  est un sous-groupe distingué fini,  $G$  est quasi-isométrique à  $G/N$ . En effet,  $G$  agit proprement discontinuement sur le graphe de Cayley de  $G/N$ .

Il est connu que les groupes hyperboliques sont de présentation finie (Théorème 2.3 dans [14]).

### Exemples de groupes hyperboliques

- Les groupes libres sont hyperboliques car leurs graphes de Cayley sont des arbres.
- Les groupes fondamentaux de variétés compactes à courbure strictement négative. En effet, comme le revêtement universel d'une telle variété est hyperbolique, le résultat découle du théorème 2.5.1.

Les groupes à petites simplifications vérifiant la condition  $C'(1/6)$  sont hyperboliques (voir appendice dans [29]). Rappelons la définition des groupes à petites simplifications.

Soit  $G$  un groupe de présentation finie  $\langle S|R \rangle$ . Notons  $R^{-1}$  l'ensemble formé par les inverses des mots de  $R$  et  $R_*$  l'ensemble des permutations cycliques de mots de  $R \cup R^{-1}$ .

**Définition 4.1.4.** *On appelle une partie, un mot  $u$  sur l'alphabet  $S$  qui est préfixe de deux mots de  $R_*$ .*

**Définition 4.1.5.** *On dit que  $R$  satisfait la condition  $C'(\lambda)$ , si toute partie  $u$  d'un mot  $r \in R_*$ , vérifie  $|u| < \lambda|r|$ .*

**Exemple 4.1.1.** *Le groupe  $G = \langle a, b \mid (ab^n)^{100} \rangle$  vérifie la condition  $C'(1/6)$ .*

Les groupes  $G_A = \langle a, b \mid (ab^n)^{100}, n \in A \rangle$  avec  $A \subset \mathbb{Z}$  forment une infinité non dénombrable de groupes vérifiant la condition  $C'(1/6)$ . Étant donnés deux groupes de type fini  $G$  et  $H$ , il ne peut y avoir qu'un nombre dénombrable d'isomorphismes entre eux. En effet, le nombre d'isomorphisme est majoré par le nombre d'images possibles pour une partie génératrice de  $G$ . Ainsi, il y a donc une infinité non dénombrable de classes d'isomorphismes de groupes à petites simplifications vérifiant  $C'(1/6)$ .

Nous pouvons construire des groupes vérifiant la condition  $C'(\lambda)$  grâce au résultat suivant dû à E.Rips.

**Théorème 4.1.1.** *Étant donnés un groupe  $G$  de présentation finie  $\langle S|R \rangle$  et un réel  $\lambda > 0$ , on peut construire deux groupes  $N$  et  $\Gamma$  tels que l'on a la suite exacte*

$$1 \rightarrow N \rightarrow \Gamma \rightarrow G \rightarrow 1$$

avec  $\Gamma$  vérifiant  $C'(\lambda)$  [55].

**Idée de la preuve:** posons  $A = S \cup \{a, b\}$  la partie génératrice de  $\Gamma$  et définissons ses relations de la manière suivante:

-Pour tout  $r_l \in R$ , le mot  $r_l a^{i_1} b a^{i_2} b \dots a^{i_k}$  est une relation.

-Pour tout  $s \in S$ , les mots  $s a s^{-1} a^{j_1} b a^{j_2} b \dots a^{j_k}$ ,  $s b s^{-1} a^{p_1} b a^{p_2} b \dots a^{p_k}$ ,  $s a^{-1} s^{-1} a^{q_1} b a^{q_2} b \dots a^{q_k}$  et  $s b^{-1} s^{-1} a^{h_1} b a^{h_2} b \dots a^{h_k}$  sont des relations.

Il est clair que le sous-groupe  $N$  de  $\Gamma$  engendré par  $\{a, b\}$  est distingué et que le quotient est  $G$ . En contrôlant les exposants et les indices dans les relations, on peut imposer que  $\Gamma$  vérifie  $C'(\lambda)$ .

### Groupes non hyperboliques

- Les produits directs de groupes hyperboliques ne sont pas forcément hyperboliques, par exemple  $\mathbb{Z}^n$ .
- Les groupes qui contiennent un sous espace tel que, muni de la distance induite, il est quasi-isométrique à  $\mathbb{Z}^2$ . On dit d'un tel groupe qu'il contient une copie non-distordue de  $\mathbb{Z}^2$ .
- Les groupes virtuellement nilpotents qui ne sont pas une extension finie de  $\mathbb{Z}$ . Par exemple, les groupes abéliens ou encore le groupe de Heisenberg qui est l'ensemble des matrices de  $Gl_3(\mathbb{Z})$  de la forme
 
$$\begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- Les groupes qui ne sont pas de présentation finie car comme mentionné précédemment, les groupes hyperboliques sont de présentation finie.
- Si  $G$  et  $H$  sont hyperboliques, leur produit en couronne ne l'est pas toujours. Un tel produit est défini comme suit:

$$G \wr H = \left( \bigoplus_{h \in H} G_h \right) \rtimes H$$

Nous constatons ceci dans l'exemple de  $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$  qui contient une copie non-distordue de  $\mathbb{Z}^2$ .

- Un sous-groupe d'un groupe hyperbolique n'est pas nécessairement hyperbolique. Le groupe  $\Gamma$  construit dans le théorème 4.1.1 vérifie la condition  $C'(1/6)$ . Il est donc hyperbolique. Cependant, la suite exacte



définie dans le théorème 4.1.1 ci-dessus implique que si  $G$  est de présentation finie mais contient un sous-groupe  $H$  qui ne l'est pas, l'image réciproque de  $H$  par l'application  $\Gamma \rightarrow G$  n'est pas de présentation finie, donc n'est pas hyperbolique.

Le groupe  $G$  suivant est un exemple de groupe de présentation finie contenant un sous-groupe  $H$  qui n'est pas de présentation finie.

$$G = \langle a, s, t \mid a^t = aa^s, [s, t] = 1, [a^u, a^v] = 1 \rangle,$$

Avec  $u = s^\epsilon t^{\epsilon'}$ ,  $v = s^\delta t^{\delta'}$  et  $\epsilon, \epsilon', \delta, \delta' \in \{0, 1\}$ .  $H$  est le sous-groupe de  $G$  engendré par  $\{a, s\}$ .  $H$  est alors isomorphe à  $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ . Plus généralement, Gilbert Baumslag a montré dans [8] qu'en plus de cet exemple, un groupe métabélien de type fini peut être plongé dans un groupe de présentation finie.

## 4.2 $G_{bound}$ des groupes hyperboliques

Le fait qu'un groupe hyperbolique possède un FC-centre fini est un résultat connu, voir la remarque faite avant le théorème 6 dans [52], voir aussi la Proposition 5.10 dans [53]. Nous en donnons une autre preuve ci-après.

**Lemme 4.2.1.** *Si  $G$  est un groupe hyperbolique non-élémentaire, alors  $FC(G)$  est fini.*

*Preuve.* Nous savons que tout sous-groupe infini d'un groupe hyperbolique contient un élément d'ordre infini (voir par exemple le Corollaire 36, Chapitre 8 dans [29]). Il est également connu que si  $h \in G$  est un élément hyperbolique (d'ordre infini), il existe un entier  $n_1 \in \mathbb{N}$  et  $x \in G$  tels que le sous-groupe engendré par  $\{xh^{n_1}x^{-1}, h^{n_1}\}$  est libre de rang deux (voir proposition 5.5 dans [39]). Puisque  $FC(G)$  est distingué dans  $G$ , il s'ensuit que si  $FC(G)$  est infini, il contient un sous-groupe libre de rang deux. Ceci est impossible car par définition, tout élément de  $FC(G)$  n'a qu'un nombre fini de conjugués. Nous en déduisons que  $FC(G)$  est fini.  $\square$

En combinant le lemme 4.2.1 avec la Proposition 3.2.1, nous obtenons le corollaire suivant:

**Corollaire 4.2.1.** *Si  $G$  est un groupe hyperbolique non-élémentaire, alors  $G_{bound}$  est trivial.*

*Preuve.* D'après le Corollaire 3.1.2,  $G_{bound} \subset FC(G)$ . Il résulte alors du lemme 4.2.1 que si  $G$  est hyperbolique,  $G_{bound}$  est fini. Nous savons par ailleurs que les groupes hyperboliques non-élémentaires ont une *maille* infinie (voir théorème 2.6 dans [5]). Par conséquent, la Proposition 3.2.1 implique que  $G_{bound}$  est trivial.  $\square$

# Chapitre 5

## Groupes de Burnside

**Définition 5.0.1.** *On dit d'un groupe  $G$  qu'il est de torsion si tous ses éléments sont d'ordre fini.*

Il est évident que tout groupe fini est de torsion. Dans son article publié en 1902, William Burnside a posé le problème visant à savoir si tout groupe de torsion de type fini est fini [13]. Il a notamment mentionné un cas particulier de cette question qui consiste à savoir si tout groupe de type fini et de torsion dont l'ordre des éléments est borné, est fini. En d'autres termes, si  $G$  est un groupe de type fini tel qu'il existe un entier  $n$  vérifiant que  $\forall g \in G, g^n = 1_G$ , est-ce que  $G$  est fini? Ceci revient à se demander si le groupe

$$B(m, n) = F_m / \langle\langle x^n \mid x \in F_m \rangle\rangle$$

est fini où  $F_m$  est le groupe libre à  $m$  générateurs.

Dans le même article [13], W. Burnside a montré que le groupe  $B(m, n)$  est fini pour  $n = 2, 3$ . En 1940, Ivan Sanov a montré que la réponse est positive pour  $n = 4$  [58]. Par la suite, Marshall Hall a montré en 1957 que c'est aussi le cas pour  $n = 6$  [35]. Ce sont les seuls cas connus pour lesquels la réponse est positive. Pour les groupes d'exposant 5, la question est toujours ouverte. Le théorème B.13.1 énoncé dans [44] résume les réponses connues sur la question de Burnside où le groupe  $B(n, m)$  est fini.

Un résultat de Golod et Shafarevich [25] a donné une réponse négative dans le cas où l'ordre des éléments est non-borné. Ainsi, il existe des groupes de type fini, de torsion qui sont infinis.

Dans leur article publié en 1968 [54], P. Novikov et I. Adian ont montré l'existence de groupes infinis de type fini dont tous les éléments ont le même ordre. En particulier, le groupe  $B(m, n)$  est infini pour  $n$  impair et  $n \geq 4381$ . Adian a également montré dans son livre paru en 1979 [3] que cette borne peut être

ramenée à 665.

En 1992, S.Ivanov a montré que le groupe  $B(n, m)$  est infini pour  $n$  pair avec  $n \geq 2^{48}$  [38]. Par la suite, I.Lysenok a montré que ceci est vrai pour  $n \geq 8000$  [41].

Récemment, A. Atkarskaya, Elyahu Rips et Katerine Tent ont annoncé une preuve que le groupe de Burnside libre  $B(n, m)$  est infini si  $m$  est impair et  $m \geq 97$ .

Plus récemment encore, I. Lysenok a annoncé lors du Workshop "Groups and Group Rings", June 3-8, 2019, Saint Peterburg, que le groupe reste infini pour  $n$  impair et  $m \geq 35$ .

## 5.1 Groupes avec $G_{bound}$ fini prescrit

**Théorème 5.1.1.** *Soit  $A$  un groupe fini, il existe un groupe infini de type fini  $G$  tel que  $G_{bound} = A$ . Ce groupe peut être choisi parmi les groupes de torsion.*

*Preuve.* Soient  $G = H \times A$  où  $H$  est un groupe de Burnside infini tel que  $H_{bound}$  est trivial et l'ordre de ses éléments est premier avec  $|A|$ . Par exemple, nous pouvons choisir comme groupe  $H$ , le groupe de Burnside libre  $B(2, p) = \langle a, b | x^p, x \in F_2 \rangle$  tel que  $p$  est un nombre premier et  $p > \max\{|A|, 665\}$ . Ce groupe est infini pour tout nombre impair  $p \geq 665$  comme mentioné plus haut. Il a été démontré dans [54] que le centralisateur de tout élément dans un tel groupe est cyclique. Ceci implique que  $FC(B(2, p))$  est trivial. Dans ce cas,  $B(2, p)_{bound}$  est trivial.

En fait, tout groupe de Burnside infini possède un quotient avec FC-centre trivial. En effet, un résultat de A.M.Duguid et D.H.Mclain (voir [21] et [43]) affirme qu'un groupe de type fini  $G$  possède un quotient infini  $H$  avec  $FC(H)$  trivial si et seulement si  $G$  n'est pas virtuellement nilpotent. Cependant, il est connu que les groupes de torsion de type fini et virtuellement nilpotents sont finis (proposition 2.19 dans [42]). Ce résultat est exposé dans [28].

Montrons à présent que  $G_{bound} = \{e\} \times A$ .

Pour ce faire, nous allons commencer par montrer que  $A \subset G_{bound}$ . Soit  $g = (h, a)$  un élément de  $G$ . Notons  $q$  l'ordre de  $a$  dans  $A$ . Nous avons  $g^p = (h^p, a^{p \bmod q}) = (e, a^{p \bmod q})$ . Il existe  $\alpha \in \mathbb{N}$  et  $\beta \in \mathbb{Z}$  tels que  $\alpha p + \beta q = 1$  et  $\alpha \leq q$ . Ceci implique que  $g^{\alpha p} = (e, a)$ .

Soient  $\pi_A : H \times A \rightarrow A$  et  $\pi_H : H \times A \rightarrow H$  les surjections standards. Soit  $S_G = \{(h_1, a_1), \dots, (h_n, a_n)\}$  une partie génératrice finie de  $G$ . Notons  $s_i = (h_i, a_i)$ . L'ensemble  $\pi_A(S_G) = S_A = \{a_1, \dots, a_n\}$  est une partie génératrice de  $A$ . Soit  $w = s_{i_1} \dots s_{i_n}$  un mot sur  $S_G$  avec longueur minimale telle

que  $\pi_A(w) = a$ , i.e  $\exists h \in H$  avec  $w = (h, a) = (h, a_{i_1} \dots a_{i_n})$ . Il s'ensuit que  $l_{S_G}(w) = l_{S_A}(a)$ . Puisque  $w^{\alpha p} = (e, a)$ , alors

$$l_{S_G}(e, a) \leq \alpha p l_{S_G}(w) \leq \alpha p l_{S_A}(a) \leq \alpha p \#(A) \leq q p \#(A) \leq p \#(A)^2.$$

Ceci étant vrai pour toute partie génératrice  $S_G$  de  $G$ , nous en déduisons que  $(e, a) \in G_{\text{bound}}$  et que  $\{e\} \times A < G_{\text{bound}}$ .

En conséquence du Corollaire 3.1.1, nous avons  $G_{\text{bound}} \subset H_{\text{bound}} \times A$ . Puisque  $H_{\text{bound}}$  est trivial, alors  $G_{\text{bound}} = \{e\} \times A$ .  $\square$

**Remarque 2.** *Remarquons les points suivants:*

1. *Dans le groupe  $G$  considéré dans le théorème 5.1.1, le sous-groupe  $A$  est contenu dans la boule de rayon  $p \#(A)^2$  de tout graphe de Cayley  $\Gamma(G, S)$  où  $S$  est une partie génératrice finie de  $G$ .*
2.  *$H$  et  $G$  sont commensurables mais  $H_{\text{bound}} = \{e\}$  et  $G_{\text{bound}} = A$ . Ce dernier est non-trivial.*
3. *Pour  $A$  et  $B$  deux groupes finis distincts, les groupes  $G = H \times A$  et  $\Gamma = H \times B$  sont bi-Lipschitz car quasi-isométriques mais  $G_{\text{bound}} \neq \Gamma_{\text{bound}}$ . En effet, les groupes non-moyennables et quasi-isométriques sont bi-Lipschitz [22].*

## 5.2 Groupes de Grigorchuk

Rostislav Grigorchuk [31] a introduit en 1980 le groupe que nous allons définir dans cette section. Il a ensuite démontré en 1985 que ce groupe est de croissance intermédiaire [32]. Ce fut le premier groupe à croissance intermédiaire connu. Ce groupe noté  $G_{0,1,2}$ , est appelé Premier groupe de Grigorchuk.

Notons  $T$  l'arbre enraciné de degré 2. Cet arbre est infini avec un point racine  $o$  qui a deux descendants et n'a pas d'ancêtre, tandis que les autres sommets ont un ancêtre et 2 descendants. On dit que deux sommets sont voisins s'ils ont le même ancêtre. Pour chaque sommet de  $T$ , on associe l'étiquette 0 au descendant gauche et l'étiquette 1 au descendant droit.

Nous pouvons alors identifier chaque sommet de l'arbre par le chemin le reliant à la racine  $o$ . Ainsi, il existe une bijection entre les sommets de l'arbre  $T$  et les mots sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  où la racine  $o$  est désignée par le mot vide. Notons  $G$  le groupe d'automorphismes de ce graphe. Remarquons que  $G$  fixe le point origine et permute les sommets voisins. Notons  $a$  l'automorphisme de  $T$  qui permute les deux premiers sommets de l'arbre. Ainsi,  $a$  échange

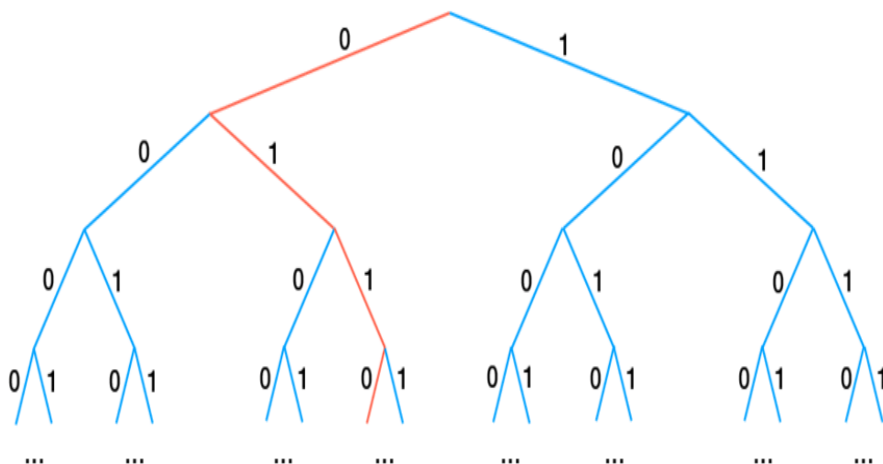


Figure 5.1: Arbre enraciné de degré 2

les deux sous-arbres ayant pour racines les éléments 0 et 1. Ces deux arbres sont notés respectivement  $T_1$  et  $T_2$ . Dans ce cas, pour un mot sur  $\{0, 1\}$ , l'automorphisme  $a$  change la première lettre. Remarquons que  $a^2 = 1_G$  est l'élément neutre de  $G$ . Étant donnés deux automorphismes  $f, g \in G$ , notons  $(f, g)$  l'automorphisme qui applique  $f$  sur  $T_1$  et  $g$  sur  $T_2$ .

Le groupe  $G_{0,1,2}$  est un sous-groupe de  $G$  qui est engendré par les éléments suivants:  $a, b, c, d$  où

$$b = (a, c), \quad c = (a, d), \quad d = (1, b).$$

Le groupe  $G_{0,1,2}$  est un 2-groupe. Ceci signifie que pour tout élément  $g \in G_{0,1,2}$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $g^{2^N} = 1$ . Ce groupe est donc de torsion et infini. Il s'agit d'un exemple de groupe de Burnside.

### 5.3 Les éléments uniformément bornés

Il y a divers exemples de groupes satisfaisant la Proposition 3.2.1. C'est le cas du groupe de Grigorchuk. En effet, ce groupe est un groupe de torsion (voir théorème 2.1 dans [32] ainsi que le théorème 17 du chapitre 8 dans [17]). Ce groupe a une *maille* infinie comme il a été montré dans le corollaire 6.12 dans [7]. En utilisant le lemme 3.2.1, nous déduisons que  $G_{bound}$  est trivial. Cependant, un énoncé plus fort est vérifié par le premier groupe de Grigorchuk. Le FC-centre de ce groupe est trivial. En effet,  $G$  est un groupe

"*juste infini*" (voir théorème 8.1 dans [32]). Ceci signifie que tout sous-groupe distingué est d'indice fini. Puisque  $FC(G)$  est un sous-groupe distingué de  $G_{0,1,2}$ , s'il est non-trivial, alors il est d'indice fini. Ceci implique que  $FC(G_{0,1,2})$  est de type fini. Puisque les sous-groupes de type fini de  $FC(G)$  sont virtuellement abéliens, nous pouvons conclure que  $FC(G_{0,1,2})$  est virtuellement abélien. Puisque les groupes abéliens de type fini qui sont infinis contiennent des éléments d'ordre infini et comme le premier groupe de Grigorchuk est un groupe de torsion, nous en déduisons que  $FC(G_{0,1,2})$  est trivial.

# Chapitre 6

## Groupes virtuellement nilpotents

### 6.1 Groupes virtuellement abéliens

**Théorème 6.1.1.** *Si  $G$  est un groupe abélien de type fini qui est infini,  $G_{bound}$  est trivial.*

*Preuve.* Puisque  $G$  est un groupe abélien de type fini, il existe des entiers  $\{p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n\}$  tels que  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$  avec  $n$  minimal. Nous allons donc montrer que tout groupe de cette forme a un  $G_{bound}$  trivial. Soit  $G = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$  et  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$ .

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , notons  $\pi_i : G \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$  la projection canonique qui est une surjection. Le lemme 3.1.4 implique que tout groupe de la forme  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  n'a pas d'éléments uniformément bornés non-triviaux. Le lemme 3.1.3, implique alors que la projection d'un élément  $g \in G_{bound}$  est triviale sur toutes composantes  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Nous en déduisons que  $G_{bound}$  est trivial.  $\square$

Notons que pour tout groupe abélien  $G$ , le sous-groupe  $G_{bound}$  est trivial et  $FC(G) = G$ .

**Proposition 6.1.1.** *Si  $G$  est un groupe virtuellement abélien de type fini, alors  $G_{bound}$  est fini.*

*Preuve.* Supposons que  $H = \mathbb{Z}^d$  est un sous-groupe distingué de  $G$ , tel que  $G/H$  est fini. Nous voulons montrer que  $G_{bound} \cap H$  est trivial. Si  $g \in H \setminus \{e\}$ , alors il existe un entier  $N > 1$  tel que, pour tout nombre premier  $p > N$ ,  $g \notin H^p$ . Le théorème de Schur-Zassenhaus (voir par exemple théorème 7.41

dans [57]), implique que si  $p$  est premier avec  $|G/H|$ , alors le groupe  $G/H_p$  est isomorphe au produit semi-direct  $H/H_p \rtimes G/H$ . Par ailleurs, tout automorphisme  $x \rightarrow x^k$  de  $H/H^p$  avec  $(k, p) = 1$  s'étend en un automorphisme de  $G/H^p$ . En effet, le morphisme  $F : G/H^p \rightarrow G/H^p$  tel que  $F(x, y) = (x^k, y)$  vérifie  $F(x, y)F(a, b) = (x^k(a^k)^y, yb) = F(xa^y, yb)$ . Il est facile de voir que ce morphisme est bijectif car  $k$  est premier à  $p$ .

Ceci implique que la taille de l'orbite  $Aut(G/H).g'$  est infinie dans  $G/H^p$  quand  $p \rightarrow \infty$ . Soit  $S$  une partie génératrice finie de  $G$ , notons  $S'$  la projection de  $S$  dans  $G/H^p$ . Soit  $g \in G_{bound} \cap H$  un élément non trivial,  $M > 0$  la borne uniforme pour la longueur de  $g$  dans  $G$  et  $g'$  la projection de  $g$  dans  $G/H^p$ . Nous avons

$$l_{S'}(g') \leq l_S(g) \leq M.$$

Ainsi, la longueur de  $g'$  est uniformément bornée par  $M$ . Puisque, les automorphismes de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sont les morphismes de la forme  $x \rightarrow x^k$  avec  $k$  premier à  $p$  et  $H/H^p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d$ , pour tous entiers  $k, k'$  premiers à  $p$ , les automorphismes correspondants  $F_k, F_{k'}$  sont distincts. Ces automorphismes n'ont pas de point fixe non trivial dans  $H/H^p$ . Ceci implique que le cardinal de l'orbite  $Aut(G).g'$  est plus grand que  $\frac{p}{|G/H|}$  dans  $G/H^p$ . Ce cardinal tend vers l'infini quand  $p \rightarrow \infty$ . Ceci contredit le lemme 3.1.5. Nous concluons que  $H \cap G_{bound}$  est trivial donc  $G_{bound}$  s'injecte dans  $G/H$ . Puisque  $G/H$  est fini alors  $G_{bound}$  est également fini.  $\square$

**Corollaire 6.1.1.** *Soit  $G$  un groupe de type fini.*

*-Si  $G$  est infini, alors le sous-groupe  $G_{bound}$  est d'indice infini.*

*-On a  $G = G_{bound}$  si et seulement si  $G$  est fini.*

*Preuve.* Supposons  $G$  infini et  $G_{bound}$  d'indice fini. Cela implique que  $G_{bound}$  est de type fini. Le lemme 3.1.3 implique que  $G_{bound}$  est virtuellement abélien. Donc  $G$  est virtuellement abélien, ce qui implique que  $G_{bound}$  est fini. Ceci est une contradiction.  $\square$

Dans ce qui suit, nous allons donner un exemple de groupe virtuellement abélien avec  $G_{bound}$  non-trivial.

**Exemple 6.1.1.** *Notons  $D_8$  le groupe diédral à 8 éléments. Le groupe  $G = Z \times D_8$  a un  $G_{bound}$  non trivial. Ce groupe est non-abélien et nilpotent de classe 2. Le centre de  $D_8$  est  $C(D_8) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, z\}$ . Soit  $S$  une partie génératrice finie de  $G$ . Puisque  $G$  est non-abélien, il existe  $x = (a, u), y = (b, v) \in S$  tels que  $[x, y] \neq e$ . Puisque  $D_8$  est nilpotent de classe 2,  $\forall u, v, w \in D_8$ , nous avons  $[[u, v], w] = e$ . Par conséquent,  $\forall r \in D_8$ , nous*



avons  $[[x, y], (0, r)] = (0, [[u, v], r]) = (0, e)$ . Ainsi,  $[u, v] \in C(D_8) \setminus \{0\} = z$ .  
Ce qui implique que

$$l_S(0, z) = l_S(0, [u, v]) = l_S([x, y]) \leq 2l_S(x) + 2l_S(y) = 4.$$

Il s'ensuit que  $(0, z) \in G_{\text{bound}}$ .

## 6.2 Groupes nilpotents

Dans cette section nous allons décrire le sous-groupe  $G_{\text{bound}}$  dans le cas des groupes nilpotents.

**Notation 1.** Soient  $\{p_i, q_j\}_{(i,j) \in I}$  des entiers avec  $I = \{1, \dots, K\}^2$ . Notons  $\alpha_{i,j} = p_i q_j - p_j q_i$  et  $W = \{\alpha_{i,j}\}_{(i,j) \in I}$ . Comme  $\alpha_{i,j} = -\alpha_{j,i}$ , nous supposons  $j < i$ . Ordonnons l'ensemble  $I$  par ordre lexicographique. Ainsi, pour tout  $i, j, i', j' \in \{1, \dots, K\}$ , si  $i' < i$  alors,  $(i', j') < (i, j)$  et si  $j' < j$  alors,  $(i, j') < (i, j)$ .

**Lemme 6.2.1.** Soit  $M > 0$  un entier. Il existe des entiers positifs  $\{p_i, q_i\}_{1 \leq i \leq K}$  tels que:

1. Pour tout  $i$ , nous avons  $p_i, q_i > M$  et l'ensemble  $W$  engendre  $\mathbb{Z}$ .
2. Si  $(i, j)$  est plus grand que  $(i', j')$ , alors  $\alpha_{i',j'} < \alpha_{i,j}$ .
3. Pour tout  $w_1, w_2 \in W$  tels que  $w_1 < w_2$ , nous avons  $Mw_1 < w_2$ .

*Preuve.* Soient  $p_1, q_1$  tels que  $p_1 = q_1 = X > M$  et  $M < q_1 < \dots < q_K$  tel que  $\frac{q_{i+1}}{q_i} > M+1$  et  $M < p_1 < \dots < p_K$  tel que  $\frac{p_{i+1}}{p_i} > M \prod_{1 \leq i \leq K} q_i$ . Notons  $w = p_2 q_1 - p_1 q_2 = (p_2 - q_2)X$  et  $w' = p_3 q_1 - p_1 q_3 = (p_3 - q_3)X$ . Choisissons  $p_3$  tel que  $\gcd(w, w') = X$  et  $p_4, q_4, p_5, q_5$  tels que  $X$  ne soit pas un diviseur de  $w'' = \alpha_{5,4} = p_5 q_4 - p_4 q_5$ . Par exemple, prenons  $q_4$  divisible par  $X$  et  $p_4, q_5$  non divisibles par  $X$ .

1. Nous avons  $\gcd(w, w', w'') = 1$ . Dans ce cas,  $W$  est une partie génératrice de  $\mathbb{Z}$ . Comme  $p_1 = q_1 = X > M$  et pour  $i \geq 2$ , nous avons  $q_i < q_{i+1} < p_i < p_{i+1}$  alors, pour tout  $i \in \{1 \dots K\}$ , nous avons  $q_i > M$  et  $p_i > M$ .

2. Montrons que pour  $j' < j < i' < i$ , les inégalités suivantes sont vraies:  
 $M^2\alpha_{i',j'} < M\alpha_{i',j} < \alpha_{i,j}$ .

Nous avons

$$\frac{\alpha_{i',j}}{\alpha_{i',j'}} = \frac{p_{i'}q_j - p_jq_{i'}}{p_{i'}q_{j'} - p_{j'}q_{i'}} \geq \frac{p_{i'}q_j - p_jq_{i'}}{p_{i'}q_{j'}} \geq \frac{q_j}{q_{j'}} - \frac{p_jq_{i'}}{p_{i'}q_{j'}} \geq \frac{q_j}{q_{j'}} - 1 > M$$

et

$$\frac{\alpha_{i,j}}{\alpha_{i',j}} = \frac{p_iq_j - p_jq_i}{p_{i'}q_j - p_jq_{i'}} \geq \frac{p_iq_j - p_jq_i}{p_{i'}q_j} \geq \frac{p_i}{p_{i'}} - \frac{p_jq_i}{p_{i'}q_j} \geq \frac{p_i}{p_{i'}} - 1 > M.$$

Dans le cas  $j > i'$ , le nombre  $\alpha_{i',j}$  est négatif et donc  $M\alpha_{i',j} < \alpha_{i,j}$ .

3. Il résulte de (2) que l'ensemble  $W$  est totalement ordonné par ordre lexicographique. De plus, si  $w_1 < w_2$ , alors  $Mw_1 < w_2$ .

□

**Remarque 3.** Soit une constante fixée  $M > 2$ . Soit  $\{w_i\}_{1 \leq i \leq m}$  un ensemble d'entiers positifs tels que  $M^2w_i < w_{i+1}$ . Soient  $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq m}$  des entiers tels que  $\sum_i |\lambda_i| < M$  avec  $j$  l'indice maximal tel que  $\lambda_j \neq 0$ . En outre, nous supposons que  $\lambda_j > 0$ . Nous avons

$$\lambda_j w_j + \sum_i \lambda_i w_i > w_j + \sum_i \lambda_i w_i > w_j - M \frac{w_j}{M^2} \geq w_j \left(1 - \frac{1}{M}\right) > \frac{\min_i \{w_i\}}{2}$$

**Remarque 4.** Soient  $G$  un groupe nilpotent de classe 2 et  $a, b \in G$  tels que  $c = [a, b]$  est d'ordre infini dans  $G$ . Le groupe engendré par  $\{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$  dans  $G/[G, G]$ , est  $\mathbb{Z}^2$ .

*Preuve.* Comme  $G$  est nilpotent de classe 2, alors pour tout  $x, y, z \in G$ , nous avons  $[xy, z] = [x, y][x, z]$ . Supposons qu'il existe  $k, n \in \mathbb{Z}$  et  $h \in [G, G]$  tels que  $a^n = b^k h$ . Dans ce cas,

$$[a^n, a^n] = 1 = [a^n, b^k] = c^{nk}$$

Ceci contredit le fait que  $c$  est d'ordre infini.

□

**Lemme 6.2.2.** Soit  $G$  un groupe nilpotent de classe 2. Soient  $a, b \in G$  tels que  $c = [a, b]$  est d'ordre infini et  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  une partie génératrice de  $G$  telle que  $e_1 = e_2 = e$ , où  $e$  est l'élément trivial de  $G$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , notons  $c_i = [e_i, a]$ ,  $v_i = [e_i, b]$ ,  $\tau_i = e_i a^{p_i} b^{q_i}$  et  $S = \{\tau_i\}_{1 \leq i \leq n}$ . Pour tout  $(i, j)$ ,

$$[\tau_i, \tau_j] = c^{\alpha_{i,j}} c_i^{p_j} v_i^{q_j} c_j^{-p_i} v_j^{-q_i} [e_i, e_j]$$

où  $\alpha_{i,j} = p_i q_j - p_j q_i$ .

*Preuve.* Comme  $G$  est nilpotent de class 2,  $[G, G] \subset Z(G)$  avec  $Z(G)$  le centre de  $G$ . Nous avons  $[xy, z] = [y, z]y^{-1}[x, z]y = [y, z][x, z]$  (voir [36], page 150). Ceci implique que

$$\begin{aligned} [e_i a^{p_i} b^{q_i}, e_j a^{p_j} b^{q_j}] &= [e_i, a^{p_j}][e_i, b^{q_j}][e_j, a^{p_i}]^{-1}[e_j, b^{q_i}]^{-1} \\ &\quad [e_i, e_j][a^{p_j}, b^{q_i}]^{-1}[a^{p_i}, b^{q_j}] \\ &= [e_i, a]^{p_j}[e_i, b]^{q_j}[e_j, a]^{-p_i}[e_j, b]^{-q_i}[e_i, e_j] \\ &\quad [a, b]^{-p_j q_i}[a, b]^{p_i q_j} \\ &= c^{\alpha_{i,j}} c_i^{p_j} v_i^{q_j} c_j^{-p_i} v_j^{-q_i} [e_i, e_j] \end{aligned}$$

□

**Théorème 6.2.1.** *Soit  $G$  un groupe nilpotent de classe 2.  $G_{\text{bound}}$  est le plus grand sous-groupe fini de la suite centrale descendante.*

*Preuve.* La remarque 4 implique que si  $G$  est infini,  $[G, G]$  est d'indice infini. Soient  $g \in G$  un élément non-trivial et la projection standard

$$\pi : G \longrightarrow G/[G, G].$$

Il est clair que pour toute partie génératrice  $S$  de  $G$ ,  $l_S(g) \geq l_{\pi(S)}(\pi(g))$ . Par ailleurs, pour toute partie génératrice  $F$  de  $G/[G, G]$ ,  $\pi^{-1}(F)$  est une partie génératrice de  $G$ . Ceci implique que si  $g \in G_{\text{bound}}$ , alors  $\pi(g) \in (G/[G, G])_{\text{bound}}$ . En utilisant le fait que tout groupe abélien infini de type fini a un  $G_{\text{bound}}$  trivial, nous concluons que  $(G/[G, G])_{\text{bound}}$  est trivial. Ainsi, si  $g \in G_{\text{bound}}$  et  $g$  non-trivial, alors  $g \in [G, G]$  i.e  $G_{\text{bound}} \subset [G, G]$ .

Supposons que  $[G, G]$  est fini. Considérons  $T$  une partie génératrice de  $G$  et  $S = \{s_{i,j}\} = \{[t_i, t_j]\}_{i,j \in \{1, \dots, k\}}$ . Le lemme 2.3.3 implique que tout élément  $g \in [G, G]$  peut être exprimé par  $g = s_{i_1} \dots s_{i_k}$  où  $s_{i_u} \in S$ . Notons  $m$  le cardinal de  $[G, G]$ . Nous avons  $k \leq m$ . A partir de là, nous pouvons conclure que  $l_T(s_{i,j}) \leq 4$  et que  $l_T(g) \leq 4m$ . Ainsi,  $[G, G] \subset G_{\text{bound}}$  et  $[G, G] = G_{\text{bound}}$ .

Dans le cas où  $[G, G]$  est infini, comme  $G_{\text{bound}} \subset [G, G]$  qui est abélien, il existe des entiers  $\{\beta_{i,j}\}_{1 \leq j < i \leq n}$  tels que

$$g = \sum_{1 \leq j < i \leq n} \beta_{i,j} [t_i, t_j].$$

Comme  $[G, G]$  est un groupe abélien de type fini, il existe  $d \in \mathbb{N}$  et un groupe abélien fini  $A$ , tels que  $[G, G] = \mathbb{Z}^d + A$ . Soit  $c$  tel qu'il est défini dans la Remarque 4 et  $\{z_1, \dots, z_d\}$  une base de  $\mathbb{Z}^d$  telle que le produit scalaire  $\langle c, z_1 \rangle \neq 0$ . Soit  $g \in [G, G]$  un élément non-trivial. Nous exprimons  $g$  comme un mot sur les commutateurs de la partie génératrice  $S$  définie dans le lemme 6.2.2. Il existe des entiers  $\lambda_j, \gamma_j$  tels que

$$g = \sum_j \lambda_j z_j + \sum_j \gamma_j a_j$$

nous avons

$$\begin{aligned} \langle [t_i, t_j], z_1 \rangle &= \langle c^{\alpha_{i,j}} c_i^{p_j} v_i^{q_j} c_j^{-p_i} v_j^{-q_i} [e_i, e_j], z_1 \rangle \\ &= \alpha_{i,j} \langle c, z_1 \rangle + p_j \langle c_i, z_1 \rangle \\ &\quad + q_j \langle v_i, z_1 \rangle - p_i \langle c_j, z_1 \rangle - q_i \langle v_j, z_1 \rangle \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\langle g, z_1 \rangle = \left( \sum_{1 \leq j < i \leq n} \beta_{i,j} \alpha_{i,j} \right) \langle c, z_1 \rangle + \chi(p_1, \dots, p_K, q_1, \dots, q_K) = \lambda_1$$

où  $\chi(p_1, \dots, p_K, q_1, \dots, q_K)$  est un polynôme linéaire sur  $\{p_i, q_i\}$  et le terme  $(\sum_{1 \leq j < i \leq n} \beta_{i,j} \alpha_{i,j})$  est un polynôme quadratique en  $\{p_i, q_i\}$ .

Comme

$$g = \sum_{1 \leq j < i \leq n} \beta_{i,j} [t_i, t_j] \neq 0,$$

nous avons  $\sum_{1 \leq j < i \leq n} |\beta_{i,j}| \neq 0$ . Nous en concluons que  $\langle g, z_1 \rangle$  est un polynôme quadratique. Par conséquent, pour  $M > 2$ , il existe  $\{p_i, q_i\}$  tel que

$$\left\| \sum_{1 \leq j < i \leq n} \beta_{i,j} \alpha_{i,j} - |\chi(p_1, \dots, p_K, q_1, \dots, q_K)| \right\| > M.$$

Comme  $l_{[S,S]}(g) = \sum_{1 \leq j < i \leq n} |\beta_{i,j}|$ , si  $l_{[S,S]}(g) < M$  alors, il résulte de la Remarque 3 que  $(\sum_{1 \leq j < i \leq n} \beta_{i,j} \alpha_{i,j}) > \frac{\min\{\alpha_{i,j}\}}{2} > \frac{M}{2}$ . Si  $M > 2\lambda_1$ , alors  $|\langle g, z_1 \rangle| > \lambda_1$  ce qui contredit le fait que  $\langle g, z_1 \rangle = \lambda_1$ . Finalement, pour toute constante  $M > 0$ , il existe  $\{p_i, q_i\}$  tel que  $l_{[S,S]}(g) > M$ . Par ailleurs, l'inégalité  $l_S(g) < M$  implique que  $l_{[S,S]}(g) < M^2 K^2$ . Il en résulte que pour toute constante  $M > 0$ , il existe  $\{p_i, q_i\}$  tel que  $l_S(g) > M$  ce qui signifie que  $g \notin G_{bound}$ .

Puisque  $G_{bound} \subset [G, G]$ , nous en déduisons que si  $[G, G]$  est infini,  $G_{bound}$  est trivial.

□

De manière générale nous avons le résultat suivant:

**Lemme 6.2.3.** *Soit  $G$  un groupe nilpotent de type fini et  $G_k$  le plus grand sous-groupe fini de la suite centrale descendante de  $G$ . Nous avons  $G_k \subset G_{bound}$ .*

*Preuve.* Soit  $G_k$  le plus grand sous-groupe fini de la suite centrale descendante de  $G$ . Soit  $T$  une partie génératrice de  $G$ . Il résulte du lemme 2.3.3 que l'ensemble  $S = \{s_1, \dots, s_n\} = \{[t_1, \dots, t_k] \mid \{t_j\}_{1 \leq j \leq k} \subset T\}$  engendre  $G_k$ . Par ailleurs, tout élément  $g \in G_k$  peut s'exprimer par  $g = s_{i_1} \dots s_{i_j}$  avec  $\{s_{i_u}\}_{1 \leq u \leq j} \subset S$ . Sachant  $l_S(g) \leq \#G_k$ , nous déduisons que  $l_T(s_{i_u}) \leq 4^k \times 2$  et  $l_T(g) \leq 2 \times 4^k \#G_k$ . Par conséquent,  $G_k \subset G_{bound}$ . □

Ceci permet en particulier de déduire que si  $G$  est le groupe de Heisenberg à coefficients entiers,  $G_{bound}$  est trivial.

Nous pouvons alors nous demander si pour tout groupe nilpotent  $G$  de type fini,  $G_{bound}$  est le plus grand sous-groupe fini de la suite centrale descendante.

### 6.3 Groupes virtuellement nilpotents

**Proposition 6.3.1.** *Soit  $H$  le groupe de Heisenberg. Soit  $G$  un groupe contenant un sous-groupe d'indice fini isomorphe à  $H$ . Alors  $G_{bound}$  est fini.*

*Preuve.* La preuve est analogue à celle du cas virtuellement abélien. Le groupe  $H$  admet la présentation  $H = \langle a, b, c \mid [a, b]c^{-1} = [a, c] = [b, c] = 1 \rangle$ .

Notons  $n = [G : H]$ . Soit  $p$  un nombre premier supérieur à  $n$ . Notons  $H_p$  le sous-groupe distingué de  $H$  engendré par les éléments  $\{a^p, b^p, c^{p^2}\}$ . Le théorème de Schur-Zassenhaus (voir par exemple le théorème 7.41 dans [57]) implique que si  $p$  est premier à  $n$ , alors le groupe  $G/H_p$  est isomorphe au produit semi-direct

$$H/H_p \rtimes G/H.$$

Soient  $n = [G : H]$  et  $k$  un entier positif tel que les nombres  $\{k, p, n\}$  sont premiers entre eux. Le morphisme  $\phi_k : H/H_p \rightarrow H/H_p$  tel que  $\phi_k(a) = a^k$ ,  $\phi_k(b) = b^k$  et  $\phi_k(c) = c^{k^2}$  est un automorphisme. Il s'étend en un automorphisme  $\Phi_k$  du groupe  $H/H_p \rtimes G/H$  tel que  $\Phi_k(x, y) = (\phi_k(x), y)$ .

Supposons qu'il existe  $g \in H \cap G_{bound}$ , un élément non trivial. Notons  $M$  une borne uniforme pour la longueur de  $g$  et  $\pi : G \rightarrow G/H_p$  la projection

canonique. L'élément  $\pi(g)$  est non trivial dans  $G/H_p$ . Pour toute partie génératrice finie  $S$  de  $G$ , nous avons

$$l_{\pi(S)}(\pi(g)) \leq l_S(g) \leq M.$$

Comme le nombre des automorphismes  $\Phi_k$  tend vers l'infini quand  $p \rightarrow \infty$ , ceci contredit le lemme 3.1.5.  $\square$

Le cas du groupe de Heisenberg noté  $H$  précédemment est traité dans le chapitre 7. Nous montrons que  $H_{bound}$  est trivial (voir Corollaire 7.2.1).

# Chapitre 7

## Généralisation: $G_{bound}(d)$

Notons  $m(G)$  le nombre minimal d'éléments contenus dans une partie génératrice symétrique de  $G$ .

**Définition 7.0.1.** Soit  $G$  un groupe de type fini.

$G_{bound}(d) = \{g \in G \mid \exists M > 0 \text{ tel que pour toute partie génératrice finie } S \text{ de } G \text{ de cardinal inférieur ou égal à } d, l_S(g) \leq M\}$ .

Il est clair que pour  $d \geq m(G)$ ,

$$G_{bound} \subset G_{bound}(d) \subset G_{bound}(d-1) \cdots \subset G_{bound}(m(G))$$

et

$$G_{bound} = \bigcap_{d \geq m(G)} G_{bound}(d).$$

### 7.1 Propriétés

**Lemme 7.1.1.** Pour tout  $d \geq m(G)$ , les propriétés suivantes de  $G_{bound}$  restent vraies pour  $G_{bound}(d)$ :

1.  $G_{bound}(d)$  est un sous-groupe caractéristique de  $G$ .
2.  $G_{bound}(d)$  est contenu dans  $FC(G)$ .
3. Tout sous-groupe de type fini de  $G_{bound}(d)$  est virtuellement abélien.

*Preuve.* Soit un élément  $g \in G_{bound}(d)$ . Il existe une constante  $m > 0$  telle que pour toute partie génératrice de cardinal inférieur ou égal à  $d$ ,  $l_S(g) \leq m$ . Étant donné un automorphisme  $A$  de  $G$  et une partie génératrice  $E$  de  $G$ . Les parties génératrices  $A^{-1}(E)$  et  $E$  ont le même cardinal. En particulier,

ceci est vrai si l'automorphisme  $A$  est une conjugaison. En utilisant les mêmes arguments que dans le Lemme 3.1.1, nous obtenons le fait que pour tout  $d \geq m(G)$ , nous avons  $G_{bound}(d)$  est un sous-groupe de  $FC(G)$ . Comme nous l'avons montré dans le Corollaire 3.1.3 et le lemme 4.2.1, la propriété (3) est une conséquence directe de la propriété (2).  $\square$

**Corollaire 7.1.1.** *Nous constatons les faits suivants:*

1. *Si  $G$  est un groupe hyperbolique non-virtuellement cyclique (resp non-cyclique et sans torsion), alors  $G_{bound}(d)$  est trivial pour tout  $d \geq m(G) + 1$  (resp  $d \geq m(G)$ ).*
2. *Si  $G$  est le premier groupe de Grigorchuk, alors pour tout  $d \geq m(g)$ ,  $G_{bound}(d)$  est trivial.*

*Preuve.* 1. Soit  $G$  un groupe hyperbolique non-virtuellement cyclique (resp non-cyclique et sans torsion). Une conséquence du théorème 2 dans [49] est que pour tout  $d \geq m(G) + 1$  (resp  $d \geq m(G)$ ),  $G$  a une suite  $\{S_i(d)\}_{i \in \mathbb{N}}$  de parties génératrices de cardinal  $d$ , telle que la longueur minimale d'un lacet dans le graphe de Cayley  $\Gamma(G, S_i(d))$  est supérieure à  $i$ . Nous utilisons le même argument que celui utilisé dans le lemme 3.2.1 pour conclure que  $G_{bound}(d)$  ne peut pas contenir d'éléments de torsion. Du fait que le FC-centre d'un groupe hyperbolique est fini et que  $G_{bound}(d) \subset FC(G)$ , nous déduisons que  $G_{bound}(d)$  est trivial.

2. Soit  $G$  le premier groupe de Grigorchuk. Il est connu que  $G$  est "juste infini" (voir Théorème 8.1 dans [32]). Par conséquent, Si  $FC(G)$  est non-trivial, alors il est d'indice fini. Il s'ensuit que  $FC(G)$  est de type fini et virtuellement abélien (Théorème 4.3.1 dans [56]). Ainsi,  $G$  est un groupe virtuellement abélien. Puisque  $G$  est un groupe de torsion de type fini, il ne peut pas être un groupe infini et virtuellement abélien. Nous déduisons de cette contradiction que  $FC(G)$  est trivial. Le fait que pour tout  $d \geq m(G)$ ,  $G_{bound}(d) \subset FC(G)$  implique que  $G_{bound}(d)$  est trivial.  $\square$

## 7.2 Exemples

**Proposition 7.2.1.** *Soit  $G = \mathbb{Z}^d$ .*

1. *Pour  $d = 1$ , si  $m = 2$ ,  $G_{bound}(m) = G$  sinon  $G_{bound}(m) = \{0\}$ .*



2. Pour  $d \geq 2$  et  $m \geq 2d$ ,  $G_{\text{bound}}(m) = \{0\}$ .

*Preuve.* 1. Soit  $d = 1$  et  $G = \mathbb{Z}$ . L'unique partie génératrice de  $\mathbb{Z}$  de cardinal 2 est  $S = \{\pm 1\}$ . Dans ce cas, la longueur d'un entier  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  est  $l_S(n) = n$  et  $G_{\text{bound}}(2) = \mathbb{Z}$ .

Soient  $p, q$  deux nombres premiers différents. Il existe  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $ap + bq = n$ . Pour tous les entiers  $K > |n|$ ,  $p > K + 1$  et  $q > p!$ , nous avons:

$$|a| = \frac{|bq - n|}{p} \geq \left| \frac{bp!}{p} - \frac{n}{p} \right| \geq |b(p-1)! - 1| \geq K! - 1 \geq K.$$

Par ailleurs, nous savons que  $S = \{\pm p, \pm q\}$  est une partie génératrice de  $\mathbb{Z}$  et  $l_S(1) = |a| + |b|$ . De là, nous déduisons que pour tous les entiers  $n \in \mathbb{Z}$  et  $K > |n|$ , il existe une partie génératrice  $S$  telle que  $l_S(n) > K$ . Ceci implique que pour  $m \geq 4$ ,  $G_{\text{bound}}(m) = \{0\}$ .

2. Soit  $X = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$  non nul. Il existe  $i \in \{1, \dots, d\}$  tel que  $x_i \neq 0$ . En utilisant un élément de  $SL(d, \mathbb{Z})$ , nous pouvons supposer que  $x_1 \geq 1$ . Soient  $p, q$  deux nombres premiers distincts et  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $bp - aq = 1$ . Nous avons  $A = \begin{pmatrix} p & q \\ a & b \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  et l'application  $v \in \mathbb{Z}^2 \rightarrow Av \in \mathbb{Z}^2$  est un isomorphisme. Dans ce cas, Il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  tels que  $A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Ceci implique que  $\alpha p + \beta q = x_1$ .

Pour des entiers  $K > 1$ ,  $p > \max\{|x_1|, K + 1\}$  et  $q > p!$ , nous avons

$$|\alpha| = \frac{|\beta q - x_1|}{p} \geq \left| \frac{\beta p!}{p} - \frac{x_1}{p} \right| \geq |\beta|(p-1)! - 1 \geq K! - 1 \geq K.$$

Soit  $S_{(p,q)} = \{\pm v_1, \dots, \pm v_d\}$  la partie génératrice de  $\mathbb{Z}^d$  avec  $2d$  éléments où  $v_1 = (p, a, 0, \dots, 0)$ ,  $v_2 = (q, b, 0, \dots, 0)$ ,  $v_3 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$  et  $v_d = (0, 0, \dots, 1)$ . Pour cette partie génératrice, nous avons

$$X = \alpha v_1 + \beta v_2 + \sum_{j=3}^{j=d} x_j v_j.$$

Pour tout  $K > 1$ , soit  $(p, q)$  comme ci-dessus. Nous avons alors,

$$l_{S_{(p,q)}}(X) = |\alpha| + |\beta| + \sum_{j=3}^{j=d} |x_j| \geq K.$$

Ceci implique que pour  $d \geq 2$  et  $m \geq 2d$ ,  $G_{\text{bound}}(m) = \{0\}$ .

□

**Proposition 7.2.2.** *Soit  $G = \langle a, b, c \mid [a, b] = c, [a, c] = [c, b] = 1 \rangle$  le groupe de Heisenberg. Nous avons:*

1.  $G_{\text{bound}}(4) = \mathbb{Z} = Z(G)$  le centre de  $G$ .
2. Pour  $d \geq 6$ ,  $G_{\text{bound}}(d)$  est trivial.

*Preuve.* 1. Soit  $S = \{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$  une partie génératrice de  $G$ . Notons  $z = [x, y]$ . Puisque  $G$  est nilpotent de classe 2, alors  $\forall g \in G$ , nous avons  $[[x, y], g] = [z, g] = e$ , ce qui implique que  $z \in Z(G) = \mathbb{Z}$ . Nous savons que  $G/Z(G) = \mathbb{Z}^2$ . Ceci induit un morphisme surjectif:

$$\pi : G \longrightarrow G/Z(G) = \mathbb{Z}^2.$$

Nous voulons montrer que  $Z(G)$  est engendré par  $z = [x, y]$ .

Le groupe  $Z(G)$  est engendré par  $c = [a, b]$  avec la présentation ci-dessus. Nous avons  $z \in Z(G) = \mathbb{Z}$  et  $c$  un générateur de  $Z(G)$ . Il s'ensuit qu'il existe un entier  $i$  tel que  $z = c^i$ .

Montrons que  $g = x^\alpha y^\beta$  tel que  $\alpha\beta \neq 0$  n'est pas un élément de  $Z(G)$ . L'ensemble  $\pi\{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$  est une partie génératrice de  $G/Z(G) = \mathbb{Z}^2$ . Pour  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ,  $\pi(g) = \alpha\pi(x) + \beta\pi(y) \neq 0$ . Ceci implique que  $g$  n'est pas un élément de  $Z(G)$ . Alors, pour tout élément  $g \in G$ , il existe  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$  tels que  $g = x^\alpha y^\beta c^\gamma$ .

Nous pouvons écrire  $a = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} c^{\gamma_1}$  et  $b = x^{\alpha_2} y^{\beta_2} c^{\gamma_2}$ . Il en découle que:

$$\begin{aligned} [a, b] &= x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2} y^{-\beta_1} x^{-\alpha_1} y^{-\beta_2} x^{-\alpha_2} \\ &= (x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{-\alpha_1} y^{-\beta_1}) (y^{\beta_1} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} y^{-\beta_1} x^{-\alpha_1} x^{-\alpha_2}) \\ &\quad x^{\alpha_2} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} y^{\beta_2} y^{-\beta_1} x^{-\alpha_1} y^{-\beta_2} x^{-\alpha_2} \end{aligned}$$

Puisque  $G$  est nilpotent de classe 2, alors pour tous  $x, y \in G$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ , nous avons  $[x^\alpha, y^\beta] = x^\alpha y^\beta x^{-\alpha} y^{-\beta} = [x, y]^{\alpha\beta}$ .

Il en résulte alors que:

$$\begin{aligned} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{-\alpha_1} y^{-\beta_1} &= z^{u_1}, \\ y^{\beta_1} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} y^{-\beta_1} x^{-\alpha_1} x^{-\alpha_2} &= z^{u_2}, \\ x^{\alpha_1} y^{\beta_2} x^{-\alpha_1} y^{-\beta_2} &= z^{u_3} \end{aligned}$$

où  $u_1 = \alpha_1\beta_1$ ,  $u_2 = -\beta_1(\alpha_1 + \alpha_2)$  et  $u_3 = \alpha_1\beta_2$ . Notons  $j = u_1 u_2 u_3$ . En utilisant ces équations dans l'expression de  $[a, b]$ , nous obtenons:

$$\begin{aligned} [a, b] &= z^{u_1 u_2} x^{\alpha_2} (x^{\alpha_1} y^{\beta_2} x^{-\alpha_1} y^{-\beta_2}) x^{-\alpha_2} \\ &= z^{u_1 u_2 u_3} = z^j \end{aligned}$$

Ainsi,  $c^{ij} = c$ . Ceci implique que  $|i| = 1$  et que  $z$  engendre  $Z(G)$ . Il s'ensuit que pour toute partie génératrice  $S$  de  $G$  à 4 éléments,  $l_S(c) \leq 4$ . Par conséquent,  $Z(G) \subset G_{\text{bound}}(4)$ . Rappelons que  $G_{\text{bound}}(4) \subset FC(G)$  et montrons que  $FC(G) = Z(G)$ .

Il est connu que tout élément de  $G$  a une expression unique de la forme  $g = a^i b^j c^l$  où  $i, j, l \in \mathbb{Z}$ . Dans ce cas, si  $j \neq 0$ , alors  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , nous avons:

$$a^n (a^i b^j c^l) a^{-n} = a^i (a^n b^j a^{-n}) c^l.$$

Puisque  $a^n b^j a^{-n} = c^{nj} b^j$ , il en découle que:

$$a^n (a^i b^j c^l) a^{-n} = a^i (c^{nj} b^j) c^l = a^i b^j c^{l+nj}.$$

Si  $i \neq 0$ , alors  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , nous avons

$$b^n (a^i b^j c^l) b^{-n} = a^i b^j c^{l-ni}.$$

Soit  $h = a^n b^m c^k$  un élément non-trivial. Nous avons

$$\begin{aligned} hgh^{-1} &= a^n b^m a^i b^j c^l b^{-m} a^n \\ &= a^n (b^m (a^i b^j c^l) b^{-m}) a^n \\ &= a^n (a^i b^j c^{l-mi}) a^{-n} \\ &= a^i b^j c^{l-mi+nj} \end{aligned}$$

De ce qui précède, nous déduisons que les éléments qui ne sont pas dans  $Z(G)$  ont un nombre infini de conjugués. Dans ce cas, ils ne sont pas dans  $FC(G)$ . Nous pouvons alors conclure que  $FC(G) = Z(G)$ .

2. Nous savons que  $G_{\text{bound}}(6) < FC(G)$ . Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers. L'ensemble  $S = \{a^{\pm p}, a^{\pm q}, b^{\pm 1}\}$  est une partie génératrice de  $G$ . Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $c^n \notin G_{\text{bound}}(6)$ . Pour tout  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $uv = n$ , nous avons  $c^n = [a^u, b^v]$ . Il existe  $\alpha_u, \beta_u \in \mathbb{Z}$  tels que  $\alpha_u p + \beta_u q = u$ . Il s'ensuit que  $c^n = [a^u, b^v] = a^{\alpha_u p + \beta_u q} b^v a^{-\alpha_u p - \beta_u q} b^{-v}$ . Soit  $A$  l'ensemble des diviseurs de  $n$ . Cet ensemble est fini. D'autre part, nous avons  $l_S(c^n) \geq \min\{|\alpha_u| + |\beta_u| \mid u \in A\}$  qui tend vers l'infini quand  $p$  tend vers l'infini. Puisque pour tout  $d \geq 6$ ,  $G_{\text{bound}}(d) \subset G_{\text{bound}}(6)$ , il est clair que  $G_{\text{bound}}(d)$  est trivial pour  $d \geq 6$ . □

**Corollaire 7.2.1.** *Soit  $G$  le groupe de Heisenberg, alors  $G_{\text{bound}}$  est trivial.*

*Preuve.* Puisque  $G_{\text{bound}} = \bigcap_{d \geq m(G)} G_{\text{bound}}(d)$  et  $G_{\text{bound}}(6)$  est trivial, alors  $G_{\text{bound}}$  est trivial. □

# Articles

- [1] Yanis Amirou. Elements of uniformly bounded word-length in groups.  
*<https://arxiv.org/abs/1811.11464>*.
- [2] Yanis Amirou. Subgroup of uniformly bounded elements for nilpotent groups and generalization. *En préparation*.

# Bibliographie

- [3] S. I. Adian. *The Burnside problem and identities in groups*, volume 95 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]*. Springer-Verlag, Berlin-New York. Translated from the Russian by John Lennox and James Wiegold.
- [4] Azer Akhmedov. On the girth of finitely generated groups. *Journal of Algebra*, 268(1):198 – 208, 2003.
- [5] Azer Akhmedov. The girth of groups satisfying Tits alternative. *Journal of Algebra*, 287(2):275 – 282, 2005.
- [6] G. N. Arzhantseva, J. Burillo, M. Lustig, L. Reeves, H. Short, and E. Ventura. Uniform non-amenability. *Adv. Math.*, 197(2):499–522, 2005.
- [7] Laurent Bartholdi and Anna Erschler. Ordering the space of finitely generated groups. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 65(5):2091–2144, 2015.
- [8] Gilbert Baumslag. On finitely presented metabelian groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78(2):279, 03 1972.
- [9] Bachir Bekka, Pierre De La Harpe, and Alain Valette. *Kazhdan’s property T*. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, 2008.
- [10] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Group Actions and Quasi-Isometries*, pages 131–156. Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [11] Jérémie Brieußel and Tianyi Zheng. Shalom’s property hfd and extensions by of locally finite groups. *Israel Journal of Mathematics*, 230, 12 2018.
- [12] Marc Burger and Shahar Mozes. Finitely presented simple groups and products of trees. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 324(7):747–752, 1997.

- [13] W Burnside. On an unsettled question in the theory of discontinuous groups. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 33, 03 1902.
- [14] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes: les groupes hyperboliques de Gromov*. Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1990.
- [15] F. Dahmani, V. Guirardel, and D. Osin. *Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces.*, volume 1156. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2016.
- [16] Yves De Cornulier. Infinite conjugacy classes in groups acting on trees. *Groups Geometry and Dynamics*, 3, 01 2009.
- [17] Pierre de la Harpe. *Topics in geometric group theory*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.
- [18] Pierre de la Harpe. Uniform growth in groups of exponential growth. In *Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part II (Haifa, 2000)*, volume 95, pages 1–17, 2002.
- [19] M. Dehn. Über unendliche diskontinuierliche gruppen. *Mathematische Annalen*, 71(1):116–144, Mar 1911.
- [20] Thomas Delzant and Misha Gromov. Courbure mésoscopique et théorie de la toute petite simplification. *Journal of Topology*, 1(4):804–836, 2008.
- [21] A. M. Duguid and D. H. McLain. Fc-nilpotent and fc-soluble groups. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 52(3):391–398, 1956.
- [22] Tullia Dymarz. Bilipschitz equivalence is not equivalent to quasi-isometric equivalence for finitely generated groups. *Duke Math. J.*, 154(3):509–526, 2010.
- [23] Anna Dyubina. Instability of the virtual solvability and the property of being virtually torsion-free for quasi-isometric groups. *Int. Math. Res. Not.*, 2000(21):1097–1101, 2000.
- [24] Anna Erschler and Tianyi Zheng. Growth of periodic grigorchuk groups. 02 2018.

- [25] E.S.Golod. On nil-algebras and finitely approximable  $p$ -groups. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 28:273–276, 1964.
- [26] Alex Eskin, David Fisher, and Kevin Whyte. Coarse differentiation of quasi-isometries II: Rigidity for Sol and lamplighter groups. *Ann. of Math. (2)*, 177(3):869–910, 2013.
- [27] Alex Eskin, Shahar Mozes, and Hee Oh. Uniform exponential growth for linear groups. *International Mathematics Research Notices*, 2002(31):1675–1683, 2002.
- [28] Joshua Frisch and Pooya Vahidi Ferdowsi. Non-virtually nilpotent groups have infinite conjugacy class quotients. *arXiv:1803.05064 [math.GR]*.
- [29] E. Ghys and P. de la Harpe. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.
- [30] Antoine Gournay. Mixing, malnormal subgroups and cohomology in degree one. *Groups Geom. Dyn.*, 12(4):1371–1416, 2018.
- [31] R. I. Grigorchuk. On burnside's problem on periodic groups. *Functional Analysis and Its Applications*, 14(1):41–43, Jan 1980.
- [32] R. I. Grigorchuk. Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 48(5):939–985, 1984.
- [33] M. Gromov. Hyperbolic groups. *Essays in group theory*, 8:75–263, 1987.
- [34] Mikhael Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps (with an appendix by jacques tits). *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 53:53–78, 1981.
- [35] Marshall Hall. Solution of the burnside problem of exponent 6. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 43:751–3, 09 1957.
- [36] Marshall Hall, Jr. *The theory of groups*. Chelsea Publishing Co., New York, 1976.
- [37] P. Hall. Finiteness conditions for soluble groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 4:419–436, 1954.

- [38] Sergei V. Ivanov. The free burnside groups of sufficiently large exponents. *International Journal of Algebra and Computation*, 04(01n02):1–308, 1994.
- [39] Malik Koubi. Croissance uniforme dans les groupes hyperboliques. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(5), 1998.
- [40] Wolfgang Lück. Survey on geometric group theory. *Münster J. Math.*, 1(1):73–108, 2008.
- [41] I. G. Lysenok. Infinite burnside groups of even exponent. *Izv. RAN. Ser. Mat.*, 60:3–224, 1996.
- [42] Avinoam Mann. *How groups grow*, volume 395 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [43] D. H. McLain. Remarks on the upper central series of a group. *Proceedings of the Glasgow Mathematical Association*, 3(1):38–44, 1956.
- [44] Alexander V. Mikhaev and all. *The Concise Handbook of Algebra*, chapter Groups, pages 71–151. Springer Netherlands, Dordrecht, 2002.
- [45] J. Milnor. Growth of finitely generated solvable groups. *J. Differential Geom.*, 2(4):447–449, 1968.
- [46] B. H. Neumann. Varieties of groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73(5):603–613, 09 1967.
- [47] Yann Ollivier. *A January 2005 invitation to random groups*, volume 10 of *Ensaïos Matemáticos [Mathematical Surveys]*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.
- [48] A. Yu. Olshanskii. *Geometry of defining relations in groups*, volume 70 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. Translated from the 1989 Russian original by Yu. A. Bakhturin.
- [49] A. Yu. Olshanskii and M. V. Sapir.  $k$ -free-like groups. *Algebra and Logic*, 48(2):140–146, Mar 2009.
- [50] D. V. Osin. Algebraic entropy of elementary amenable groups. *Geometriae Dedicata*, 107(1):133–151, Aug 2004.



- [51] Denis V. Osin. Uniform non-amenability of free Burnside groups. *Arch. Math. (Basel)*, 88(5):403–412, 2007.
- [52] Jean Philippe Préaux. On extensions of group with infinite conjugacy-classes, 1. <https://arxiv.org/pdf/math/0703739.pdf>, preprint 2007.
- [53] Jean-Philippe Préaux. Group extensions with infinite conjugacy classes. *Confluentes Mathematici*, 5(1):73–92, 2013.
- [54] S.I.Adian P.S.Novikov. Infinite periodic groups. iii. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32:709–7, 1968.
- [55] E. Rips. Subgroups of small cancellation groups. *Bull. London Math. Soc.*, 14(1):45–47, 1982.
- [56] Derek J. S. Robinson. *Finiteness conditions and generalized soluble groups. Part 1*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 62*.
- [57] Joseph J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1995.
- [58] I. N. Sanov. Solution of Burnside’s problem for exponent 4. *Leningrad State Univ. Annals [Uchenye Zapiski] Math. Ser.*, 10:166–170, 1940.
- [59] Saul Schleimer. On the girth of groups. *Preprint*, 2000.
- [60] John R. Stallings. On torsion-free groups with infinitely many ends. *Annals of Mathematics*, 88(2):312–334, 1968.
- [61] Joseph A. Wolf. Growth of finitely generated solvable groups and curvature of riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 2(4):421–446, 1968.



## RÉSUMÉ

---

Cette thèse étudie la question suivante: étant donné un groupe de type fini  $G$  quels sont les éléments dont la longueur est uniformément bornée pour toute longueur des mots sur  $G$ ? Ce travail introduit et étudie le sous-groupe  $G_{bound}$  formé par les éléments dont la longueur des mots est uniformément bornée par rapport au changement de parties génératrices de  $G$ . Nous montrons que ce sous-groupe est caractéristique, qu'il est fini quand le groupe  $G$  est virtuellement abélien, qu'il est trivial quand le groupe est hyperbolique non-élémentaire. Nous montrons que pour tout groupe fini  $A$ , il existe un groupe infini  $G$  tel que  $G_{bound} = A$ . Nous montrons que pour les groupes nilpotents de classe 2,  $G_{bound}$  est le plus grand sous-groupe fini de la suite centrale descendante. Nous étudions également une généralisation de  $G_{bound}$  dépendre des cardinaux des parties génératrices considérées.

## MOTS CLÉS

---

Longueur des mots, métrique des mots, sous-groupes caractéristiques, FC-centre, groupes virtuellement abéliens, identités de groupes, groupes de Burnside, groupes hyperboliques, groupes nilpotents.

## ABSTRACT

---

This thesis studies the following question: given a finitely generated group  $G$  which are the elements whose length is uniformly bounded for any word-length in  $G$ ?. This work introduces and studies the subgroup  $G_{bound}$  consisting of elements of uniformly bounded word-length with respect to any generating set of  $G$ . We show that this subgroup is characteristic, that it is finite when the group  $G$  is virtually abelian, that it is trivial when the group is non-elementary hyperbolic. We show that for every finite group  $A$ , there exists an infinite group  $G$  such that  $G_{bound} = A$ . It is shown that for nilpotent groups of class 2,  $G_{bound}$  is the largest finite subgroup of the lower central series. We also study a generalization of  $G_{bound}$  by making it depend on the cardinals of the generating sets considered.

## KEYWORDS

---

Word-length, word metrics, characteristic subgroups, FC-center, virtually abelian groups, torsion groups, group identities, Burnside groups, hyperbolic groups, nilpotent groups.