HAL
open science

Cohomologie des fibrés en droites sur SL3/B en caractéristique positive : deux filtrations et conséquences

Linyuan Liu

▶ **To cite this version:**

Linyuan Liu. Cohomologie des fibrés en droites sur SL3/B en caractéristique positive : deux filtrations et conséquences. Géométrie algébrique [math.AG]. Sorbonne Université, 2019. Français. NNT : 2019SORUS229 . tel-03148712

HAL Id: tel-03148712

https://theses.hal.science/tel-03148712v1

Submitted on 22 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sorbonne Université

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Linyuan Liu

Cohomologie des fibrés en droites sur SL_3/B en caractéristique positive : deux filtrations et conséquences

---

dirigée par Patrick Polo

Soutenue le 26 juin 2019 devant le jury composé de :

Mme. Anna Cadoret	Sorbonne Université	Examinatrice
Mme. Caroline Gruson	Université de Lorraine	Examinatrice
M. François Loeser	Sorbonne Université	Examinateur
M. Patrick Polo	Sorbonne Université	Directeur
M. Simon Riche	Université Clermont Auvergne	Rapporteur
M. Wolfgang Soergel	Albert-Ludwigs-Universität Freiburg	Examinateur

Rapporteur absent lors de la soutenance :

M. Geordie Williamson	University of Sydney

Institut de Mathématiques de Jussieu
- Paris Rive Gauche (UMR 7586)
Sorbonne Université
UFR de Mathématiques
4, place Jussieu
Boite Courrier 247
75252 Paris Cedex 05

Sorbonne Université
École doctorale Sciences
Mathématiques de Paris Centre
Boite Courrier 247
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

Logic is the beginning of wisdom, not the end.

— Leonard Nimoy a.k.a. Spock

STAR TREK VI: THE UNDISCOVERED COUNTRY

Remerciements

Je tiens avant tout à exprimer chaleureusement ma grande gratitude à mon directeur de thèse Patrick Polo. Je le remercie de m'avoir proposé un projet de thèse aussi riche et passionnant et de m'avoir guidée dans la théorie des représentations. Sans sa connaissance du sujet, sa patience et sa générosité à partager ses idées, cette thèse n'existerait pas. C'est un grand honneur de pouvoir faire mes études et travaux de recherche en mathématiques avec lui.

Je remercie ensuite Simon Riche et Geordie Williamson d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse et de m'avoir fait des remarques précieuses. Je remercie sincèrement Anna Cadoret, Caroline Gruson, François Loeser et Wolfgang Soergel de m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury. Je tiens particulièrement à remercier François Loeser pour son aide dans l'obtention de l'allocation de la thèse. Je remercie également Stephen Donkin d'avoir scanné la thèse de Yehia, qui s'est avérée utile pour ma thèse. Je voudrais aussi exprimer ma gratitude à mon directeur de mémoire de M2 Bassam Fayad, qui m'a beaucoup appris sur la théorie des systèmes dynamiques, même si je n'ai pas poursuivi mes études dans ce domaine.

Je profite de l'occasion pour remercier mes professeurs à Tsinghua : Ning Jiang (江宁), Xuguang Lu (卢旭光), Pin Yu (于品), Zhiying Wen (文志英) et Jie Xiao (肖杰). Sans eux, je n'aurais pas eu la chance de venir à l'ENS et de poursuivre mes études en mathématiques.

Je remercie les doctorants de l'IMJ, en particulier Peiyi (崔沛仪), Mahya et Grace, de leur amitié qui me rendent heureuse tous les jours. Je voudrais aussi exprimer ma gratitude à mes amies chinoises, Yuanyuan Feng (冯媛媛), Jing Li (李晶), Jie Lin (林洁), Yang Liu (劉暘), Sai Ma (马赛), Xuelai Peng (彭雪莱) et Shuang Wu (吴双) de m'avoir apporté un soutien émotionnel chaque fois que j'en avais besoin.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon mari Hua de son soutien de tous les jours.

最后，感谢我的父母多年以来对我的支持和培养。

Introduction

The Problem and Previous Results

Let G be a semisimple simply connected group scheme over a base ring k. Assume first that k is an algebraically closed field of characteristic $p > 0$. Let $T \subset G$ be a maximal torus and let $X(T)$ be its group of characters. Let R and W denote the root system and Weyl group of (G, T) and B the Borel subgroup containing T corresponding to the negative roots $-R^+$. Let ρ be the half-sum of positive roots and set $C = -\rho + X(T)^+$. For all $\mu \in X(T)$, one has a G-equivariant line bundle $\mathcal{L}(\mu)$ on G/B, and we set $H^i(\mu) = H^i(G/B, \mathcal{L}(\mu))$. Let $N = |R^+| = \dim(G/B)$ and let w_0 be the unique element of W such that $\ell(w) = N$.

The study of $H^i(\mu)$ began in 1976 with Kempf. He proved that for all $\lambda \in C$ one has $H^i(\lambda) = 0$ whenever $i \geq 1$, just as in the case of characteristic 0. By Serre Duality, this also gives $H^i(\mu) = 0$ for $i < |R^+| = N$ if $\mu \in w_0 \cdot C$.

In the following, by "H^i-chamber", we mean any chamber of the form $w \cdot C$, where $w \in W$ is such that $l(w) = i$. In characteristic 0, by the Borel-Weil-Bott theorem, $H^i(\mu) \neq 0$ if and only if μ belongs to the interior of an H^i-chamber. But this no longer holds for positive characteristics.

In 1978, Griffith ([Gri80]) studied the case of $G = \mathrm{SL}_3$ and determined the region in $X(T)$, which we will refer to as "the Griffith region", where both H^1 and H^2 are non-zero. Almost simultaneously in 1979, Andersen ([And79]) discovered, for all semisimple G, the necessary and sufficient condition for $H^1(\mu) \neq 0$. In particular, for $G = \mathrm{SL}_3$, he rediscovered the result of Griffith. Andersen has proved that if non-zero $H^1(\mu)$ has a simple socle. But apart from this, his results concern only whether or not $H^i(\mu)$ is zero and gives no information of its G-module structure.

Later on, there are several results about the G-module structure of $H^i(\mu)$ under some assumptions of genericity ([KH85], [And86a], [And86b], [DS88], [Lin90], [Lin91]).

In 2006, a new approach was discovered by Donkin, who gave in [Don06], recursive formulas for the characters of all $H^i(\mu)$'s. As a corollary of our results, we will show that his recurrence formulas correspond to certains filtrations of the $H^1(\mu)$'s, see Theorem 5.

A two-step filtration of $H^1(\mu)$ and $H^2(\mu)$ for μ in the Griffith region

Let $G = \mathrm{SL}_3$ and let $V(\lambda)$ denote the Weyl module of highest weight λ, and $L(\lambda)$ the simple module of highest weight λ. In the following, I always use the convention that $V(\lambda) = L(\lambda) = 0$ if λ is not dominant. For any G-module V, let $V^{(d)}$ denote the d-th Frobenius twist of V.

We will prove in Chapter 1 the existence of a two step filtration of $H^1(\mu)$ and $H^2(\mu)$ if μ is in the closure of the Griffith region. Using the symmetry between the two simple

roots and Serre duality, it suffices to state the result when μ belongs to the chamber $s_\beta \cdot C$ or $s_\beta s_\alpha \cdot C$, whence $\mu = (m, -n-2)$ for $m, n \in \mathbb{N}$. Namely, we have :

Theorem 1. *Let $\mu = (m, -n-2)$, where $m = ap^d + r$ and $n = ap^d + s$ with $d \geq 1$, $0 \leq a \leq p-1$ and $-1 \leq r, s \leq p^d - 1$. Set $\mu' = (r, -s-2)$, $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$, $\lambda = (s, p^d - r - 2)$ and ${}^t\lambda = (r, p^d - s - 2)$. Then :*

1. *$H^2(\mu)$ has a two step filtration as following :*

$$H^2(\mu) = \begin{array}{|c|}\hline L(0, a-1)^{(d)} \otimes V(\lambda) \\ \hline L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(\mu') \bigoplus L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu'') \\ \hline \end{array}.$$

That is, there is a short exact sequence of G-modules :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow H^2(\mu) \longrightarrow L(0, a-1)^{(d)} \otimes V(\lambda) \longrightarrow 0$$

such that

$$M \cong L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(\mu') \bigoplus L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu'').$$

2. *$H^1(\mu)$ has a two step filtration as following :*

$$H^1(\mu) = \begin{array}{|c|}\hline L(0,a)^{(d)} \otimes H^1(\mu') \bigoplus L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'') \\ \hline L(0, a-1)^{(d)} \otimes H^0({}^t\lambda) \\ \hline \end{array}.$$

That is, there is a shore exact sequence of G-modules :

$$0 \longrightarrow L(0, a-1)^{(d)} \otimes H^0({}^t\lambda) \longrightarrow H^1(\mu) \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

such that

$$Q \cong L(0,a)^{(d)} \otimes H^1(\mu') \bigoplus L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'').$$

Moreover, if we concentrate on those weights μ located on the wall between an H^1-chamber and an H^2-chamber (i.e. $\mu = (n, -n-2)$ or $(-n-2, n)$), then μ' and μ'' in the theorem are both located on such a wall too. Hence by induction, this theorem gives a concrete description of the structure of $H^1(\mu)$ and $H^2(\mu)$. More precisely, we will prove in section 1.4 the following theorem :

Theorem. (i) *Let $n \in \mathbb{N}$ of $\leq d$. If $n \not\equiv p-1 \pmod p$, then there is a filtration of $H^2(n, -n-2)$*

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{d-1} \subset N_d = H^2(n, -n-2)$$

such that, for each i and $1 \leq j \leq 2^i$, there exists ν_{ij} and λ_{ij} (which are explicitly given in Th. 4) such that

$$N_i / N_{i-1} \cong \bigoplus_{j=1}^{2^i} L(\nu_{ij}) \otimes V(\lambda_{ij}) \tag{0.1}$$

for all $i \in \{1, 2, \cdots, d\}$.

(ii) *If $n \equiv p-1 \pmod p$, then there is $k \in \{1, \cdots, d\}$ such that $n = mp^k + p^k - 1$ with $m \not\equiv p-1 \pmod p$. In this case, we have*

$$H^2(\mu) \cong L((p^k - 1)\rho) \otimes H^2(m, -m-2)^{(k)} \tag{0.2}$$

and (i) *can be applied to $H^2(m, -m-2)$.*

The p-H^i-D-filtration of $H^i(\mu)$

Jantzen has proved in [Jan80] that for $G = \mathrm{SL}_3$, every Weyl module $V(\lambda)$ possesses a p-Weyl-filtration, i.e. a filtration whose quotients are of the form $V(\nu^1)^{(1)} \otimes L(\nu^0)$, where ν^0 is p-restricted. Dually, $H^0(\lambda)$ possesses a p-H^0-filtration. So it is interesting to ask whether or not H^2 and H^1 also have this sort of p-filtration.

We will use a filtration of $\widehat{Z}(\mu) = \mathrm{Ind}_B^{BG_1}(\mu)$ that is slightly cruder than a composition series, which will be defined in section 2.1. This filtration, which will be called the D-filtration in honor of Donkin ([Don06]), behaves well under the induction from BG_1 to G.

As in [Don06], let $E_\alpha(\mu)$ denote the unique non-split extension of $\mu - \alpha$ by μ as B-modules. Namely, we have a non-split exact sequence of B-modules :

$$0 \longrightarrow \mu - \alpha \longrightarrow E_\alpha(\mu) \longrightarrow \mu \longrightarrow 0\ .$$

Similarly, let $E_\beta(\mu)$ denote the unique non-split extension of $\mu - \beta$ by μ as B-modules. Let $E_0(\mu) = \mu$. We will prove the following theorem :

Theorem 6. *Let $\mu \in X(T)$ and take*

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_\ell = \widehat{Z}(\mu)$$

a D-filtration of $\widehat{Z}(\mu)$ with $N_i/N_{i-1} \cong \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}$ where $\delta_i \in \{0, \alpha, \beta\}$. Then for all $j \in \mathbb{N}$, there exists a filtration of $H^j(\mu)$:

$$0 = \widetilde{N_0} \subset \widetilde{N_1} \subset \widetilde{N_2} \subset \cdots \subset \widetilde{N_\ell} = H^j(\mu)$$

where $\widetilde{N_i} \cong H^j(G/BG_1, N_i)$ and $\widetilde{N_i}/\widetilde{N_{i-1}} \cong L(\nu_i^0) \otimes H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}$.

We call this filtration of $H^j(\mu)$ the p-H^j-D-filtration.

Hence it is important to investigate the structure of $H^i(E)$, where $E = E_\delta(\nu)$ and $\delta \in \{\alpha, \beta\}$. If $i = 0$ or 3, their structures are not too complicated, and with the help of the p-H^i-D-filtration, we can reprove (section 2.3) the existence of the p-H^0-filtration and the p-Weyl-filtration.

For $i = 1$ or 2, the situation is more complicated. Since there is an exact sequence of cohomologies

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(\nu-\delta) \arrow[r] & H^1(E) \arrow[r] & H^1(\nu) \arrow[dll, "\phi"] & \\
& H^2(\nu-\delta) \arrow[r] & H^2(E) \arrow[r] & H^2(\nu) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

if $\nu \notin X^+$ and $\nu - \delta \notin w_0 \cdot X^+$, where ϕ is the boundary morphism, it suffices to study the structure of $I_\delta(\nu)$ which is defined to be the image of ϕ. In Chapter 3 we will prove the following theorem, which covers all the interesting cases we need :

Theorem 7. *Let $\mu = (m, -n-2)$ be a weight with $m > n \geq 0$. If $m = ap^d + r$ and $n = ap^d + s$ and if we set $\mu' = (r, -s-2)$ and $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$, then*

(i) If $0 \leq s < r \leq p^d - 1$, we have

$$I_\alpha(\mu) = L(0,a)^{(d)} \otimes I_\alpha(\mu') \bigoplus L(0, a-2)^{(d)} \otimes I_\alpha(\mu'').$$

(ii) If $-1 \leq s < r \leq p^d - 2$, we have

$$I_\beta(\mu) = L(0,a)^{(d)} \otimes I_\beta(\mu') \bigoplus L(0,a-2)^{(d)} \otimes I_\beta(\mu'').$$

Together, Theorems 6 and 7 allows one to give a complete, recursive description of all $H^i(\mu)$ for $i = 1, 2$, see section 3.3 for details. In particular, they contain as a (very) special case the results of Kühne-Hausmann [KH85] and of Doty and Sullivan [DS88] about generic weights in the lowest p^2-alcove.

Combinatorial results over $\mathbb{Z}$

Independently of the previous results, we will prove in Chapter 4 some results over $\mathbb{Z}$.

More precisely, if $\mu = (m, -n-2) = s_\beta \cdot \lambda$ is a weight in the Griffith region with $m \geq n \geq 0$, then we will prove that all weights of $H^2(\mu)$ are of the form $\nu_{t,k} = \lambda - k\alpha - t\beta$ with $k, t \in \mathbb{N}$, and, for $t \geq k$ and $\nu_{t,k}$ dominant, the $\nu_{t,k}$-weight space is the cokernel of the following matrix, with $k+1$ rows and $k-m+n+1$ columns :

$$D_{m,n,t,k} = \begin{pmatrix} \binom{m-k}{t-k} & \binom{m-k}{t-k-1} & \cdots & \binom{m-k}{t-2k+m-n} \\ \binom{m-k}{t-k+1} & \binom{m-k}{t-k} & \cdots & \binom{m-k}{t-2k+m-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m-k}{t} & \binom{m-k}{t-1} & \cdots & \binom{m-k}{t-k+m-n} \end{pmatrix}.$$

If $t < k$ and $\nu_{t,k}$ is dominant, then $\nu_{t,k}$-weight space is zero.

If $\mu = (m, -n-2) = s_\alpha s_\beta \cdot \lambda$ is a weight with $m < n$, then we will prove that all weights of $H^2(\mu)$ are of the form $\nu_{t,k} = \lambda - k\alpha - t\beta$ with $k, t \in \mathbb{N}$, and, for $k \geq n-m$ and $\nu_{t,k}$ dominant, the $\nu_{t,k}$-weight space is the cokernel of the following matrix, with $k-n+m+1$ rows and $k+1$ columns :

$$D_{m,n,t,k} = \begin{pmatrix} \binom{n-k}{t-k+n-m} & \binom{n-k}{t-k+n-m-1} & \cdots & \binom{n-k}{t-2k+n-m} \\ \binom{n-k}{t-k+n-m+1} & \binom{n-k}{t-k+n-m} & \cdots & \binom{n-k}{t-2k+n-m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-k}{t} & \binom{n-k}{t-1} & \cdots & \binom{n-k}{t-k} \end{pmatrix}.$$

If $k \leq n-m-1$ and $\nu_{t,k}$ is dominant, then the $\nu_{t,k}$-weight space is isomorphic to $\mathbb{Z}^{\min(t,k)-\max(0,t-m)+1}$.

Table des matières

0 Notations et Préliminaires **3**

1 Une filtration à deux étages **7**
1.1 Énoncé du théorème pricipal 7
1.2 Démonstration du Théorème 1 : réduction au Théorème 2 11
1.3 Preuve du Théorème 2 12
1.3.1 Trois suites exactes de B-modules 12
1.3.2 Suites exactes longues induites par le foncteur d'induction 13
1.3.3 Détermination de $H^2(\widetilde{M})$ et $H^3(\widetilde{M})$ 14
1.3.4 Injectivité de f 15
1.4 Description de $H^2(\mu)$ et $H^1(\mu)$ pour μ sur le mur 15

2 Une p-H^i-D-filtration **25**
2.1 « D-filtration » de $\widehat{Z}(\mu) = \mathrm{Ind}_B^{BG_1}(\mu)$ 25
2.1.1 Cas singulier pour une seule racine 26
2.1.2 Cas de l'alcôve supérieure Δ 28
2.1.3 Cas de l'alcôve inférieure ∇ 29
2.2 Sur la cohomologie des B-modules $E_\alpha(\mu)$ et $E_\beta(\mu)$ 30
2.3 La p-filtration de Jantzen 35
2.4 Existence d'une p-H^i-D-filtration 42
2.5 Preuve de la Proposition 5 45
2.6 Conclusion 49

3 La cohomologie des B-modules $E_\delta(\mu)$ **51**
3.1 Motivation et premières propriétés 51
3.2 Morphismes de bord ∂_α et ∂_β 52
3.2.1 Décomposition de l'image du morphisme de bord 54
3.2.2 $I_\delta(\mu)$ est sans multiplicité 60
3.3 Retour à la p-H^i-D-filtration 62
3.3.1 Type Δ 63
3.3.2 Type ∇ 66
3.3.3 Cas α-singulier 68
3.3.4 Cas β-singulier 70
3.3.5 Cas γ-singulier ou α-β-singulier 71
3.4 Cas p^2-restreint et régulier 72
3.4.1 Type Δ 72
3.4.2 Type ∇ 75
3.4.3 Conclusion 78

4 Des résultats sur $\mathbb{Z}$ et conséquences **81**
4.1 Cohomologie des faisceaux sur G/P_α, G/P_β et G/B 81
4.2 Au dessus du mur 82
4.2.1 Cas $s < n$ 82
4.2.2 Cas $s \geq n$ 83
4.3 En dessous du mur 88
4.4 Une application 92
4.4.1 $r = 0$ 93
4.4.2 $1 \leq r \leq p-1$ 95
4.5 Une extension au cas de SL_{d+1} 96
4.5.1 Cas $n \leq m$ 97
4.5.2 Cas $n > m$ 100
4.5.3 Sur le mur : cas $m = n$ 103

Chapitre 0

Notations et Préliminaires

Dans cette thèse, sauf mention expresse du contraire, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, G désigne le schéma en groupes SL_3 sur k, $B \subset G$ est le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires inférieures, et $T \subset B$ est le tore maximal des matrices diagonales.

On note $X(T) = \mathrm{Hom}_{k\text{-groupes}}(T, k^*)$ le groupe des caractères de T et

$$Y(T) = \mathrm{Hom}_{k\text{-groupes}}(k^*, T) \cong X(T)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), \mathbb{Z}).$$

Notons

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X(T) \times Y(T) \to \mathbb{Z}$$

le couplage naturel (cf. [Jan03] II.1.3). Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, notons ϵ_i l'élément dans $X(T)$ tel que $\epsilon_i(\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)) = a_i$.

Posons $\alpha = \epsilon_1 - \epsilon_2$, $\beta = \epsilon_2 - \epsilon_3$ et $\gamma = \alpha + \beta$, alors $R = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma\}$ est le système de racines de G par rapport à T (cf. [Jan03] II.1.1) et le sous-groupe de Borel B correspond à $\{-\alpha, -\beta, -\gamma\}$ (cf. [Jan03] II.1.8). Notons $R^+ = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ l'ensemble des racines positives et $R^- = \{-\alpha, -\beta, -\gamma\}$ l'ensemble des racines négatives. Alors $S = \{\alpha, \beta\}$ est l'ensemble des racines simples. Définissons l'ordre partiel $\leq$ sur $X(T)$ par $\mu \leq \lambda$ si et seulement si $\lambda - \mu \in \mathbb{N}\alpha + \mathbb{N}\beta$.

Pour tout $\delta \in R$, notons $\delta^\vee \in Y(T)$ la coracine correspondante. On désigne par $\omega_1, \omega_2 \in X(T)$ les poids fondamentaux correspondants à $\alpha^\vee$ et $\beta^\vee$, c'est-à-dire, on a

$$\begin{aligned} \langle \omega_1, \alpha^\vee \rangle &= 1, \qquad \langle \omega_1, \beta^\vee \rangle = 0; \\ \langle \omega_2, \alpha^\vee \rangle &= 0, \qquad \langle \omega_2, \beta^\vee \rangle = 1. \end{aligned}$$

Alors on a $X(T) = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, notons (a, b) le poids $a\omega_1 + b\omega_2$. Posons $\rho = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \gamma = (1, 1)$. Notons

$$X(T)^+ = \{\mu \in X(T) | \langle \mu, \delta^\vee \rangle \geq 0, \forall \delta \in R^+\} = \{(a, b) \in X(T) | a \geq 0, b \geq 0\}$$

l'ensemble des poids dominants. Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, notons

$$X_d(T) = \{\mu \in X(T) | 0 \leq \langle \mu, \delta^\vee \rangle < p^d, \forall \delta \in S\} = \{(a, b) \in X(T) | 0 \leq a, b < p^d\}$$

l'ensemble des poids dominants et p^d-restreints.

Pour $\delta \in R$, notons s_δ la réflexion par rapport à δ, c'est-à-dire, pour tout $\mu \in X(T)$:

$$s_\delta(\mu) = \mu - \langle \mu, \delta^\vee \rangle \delta.$$

Soit

$$W = \langle s_\delta | \delta \in R \rangle$$

le groupe de Weyl de R. Alors W est engendré par les réflexions simples s_α, s_β. La longueur $\ell(w)$ d'un $w \in W$ est définie comme le plus petit m tel qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ avec $w = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_m}$. Alors (cf. [Jan03] II.1.5)

$$\ell(w) = |\{\delta \in R^+ | w(\delta) < 0\}| \leq 3$$

et $w_0 = s_\alpha s_\beta s_\alpha = s_\beta s_\alpha s_\beta$ est l'unique élément de W de plus grande longueur.

Pour $\delta \in R$ et $r \in \mathbb{Z}$, notons $s_{\delta,r}$ la réflexion affine de $X(T)$ définie par

$$s_{\delta,r}(\mu) = \mu - (\langle \mu, \delta^\vee \rangle - r)\delta$$

pour tout $\mu \in X(T)$. Désignons par W_p le groupe engendré par tous les $s_{\delta,np}$ avec $\delta \in R$ et $n \in \mathbb{Z}$. Pour $w \in W_p$, définissons l'action décalée par $w \cdot \mu = w(\mu + \rho) - \rho$ pour tout $\mu \in X(T)$. On note $C = -\rho + X(T)^+$.

Tout G-module V est aussi un T-module de façon naturelle. Pour tout $\mu \in X(T)$, notons

$$V_\mu = \{v \in V | t \cdot v = \mu(t)v \qquad \forall t \in T\}$$

l'espace de poids μ de V. Donc on a

$$V = \bigoplus_{\mu \in X(T)} V_\mu.$$

On dit que μ est un poids de V si $V_\mu \neq 0$. On dit que μ est un plus haut poids de V si μ est un poids de V qui est maximal par rapport à l'ordre $\leq$ sur $X(T)$. On définit aussi le caractère de V par

$$\operatorname{ch} V = \sum_{\mu \in X(T)} \dim V_\mu e(\mu) \in \mathbb{Z}(X(T)).$$

Soit $H \subset G$ un sous-groupe fermé. Si V est un G-module, alors il admet naturellement une structure de H-module. Notons $\operatorname{res}_H^G(V)$ le H-module ainsi obtenu.

Pour tout H-module N, on note $\operatorname{Ind}_H^G(N)$ le G-module induit par N (cf. [Jan03] I.3.3). Pour $i \in \mathbb{N}$, on note

$$H^i(G/H, N) = H^i(G/H, \mathcal{L}_{G/H}(N))$$

où $\mathcal{L}_{G/H}(N)$ est le fibré vectoriel G-équivariant sur G/H associé à N (cf. [Jan03] I.5.8). Alors on a ([Jan03] I.5.12)

$$H^i(G/H, N) \cong R^i \operatorname{Ind}_H^G(N).$$

Pour un B-module N, on note $H^i(N) = H^i(G/B, N)$. Si $\mu \in X(T)$, alors μ est aussi un caractère de B, et on désigne encore par μ le B-module de dimension 1 tel que $g \in B$ agit comme le scalaire $\mu(g)$. Donc $H^i(\mu)$ est défini comme ci-dessus.

On sait que $H^0(\mu) \neq 0$ si et seulement si $\mu \in X(T)^+$. Si $H^0(\mu) \neq 0$, alors il contient un unique sous-G-module simple, noté $L(\mu)$, qui est de plus haut poids μ. Tout G-module simple est isomorphe à un unique $L(\mu)$ (cf. [Jan03] II.2).

Pour un G-module V de dimension finie, on note $\mathrm{FC}(V)$ l'ensemble des facteurs de composition de V.

Pour $i \in \{0,1,2,3\}$, on appelle « une H^i-chambre » un sous-ensemble de $X(T)$ de la forme $w \cdot C$ avec $\ell(w) = i$, voir la Figure 1 plus bas. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, « une p^d-alcôve » est un ensemble de la forme

$$\{\mu \in X(T) | ap^d < \langle \mu + \rho, \alpha \rangle < (a+1)p^d, \quad bp^d < \langle \mu + \rho, \beta \rangle < (b+1)p^d, \\ cp^d < \langle \mu + \rho, \gamma \rangle < (c+1)p^d\}$$

pour certains $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

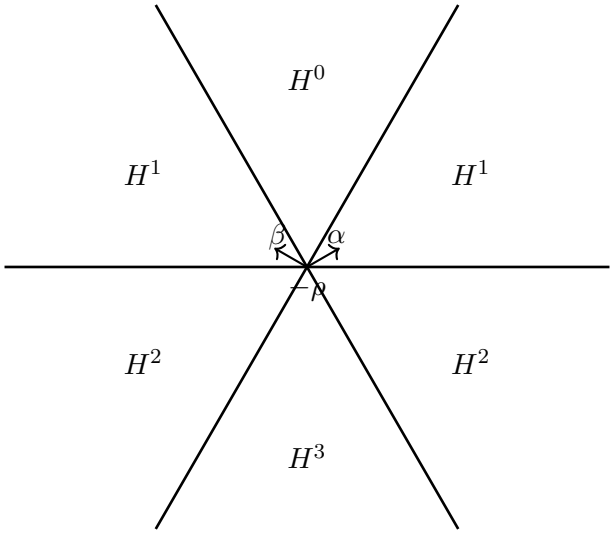


FIGURE 1 – chambres

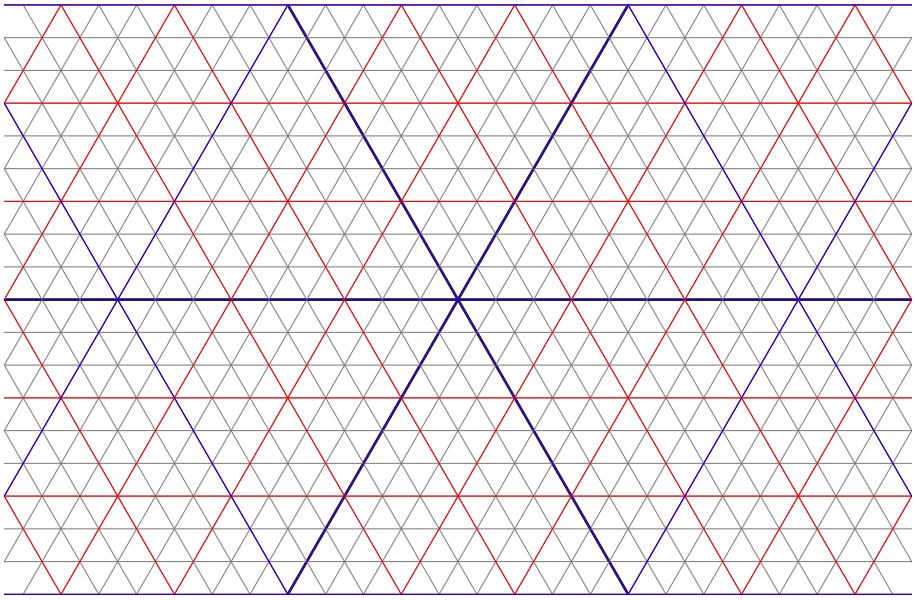


FIGURE 2 – alcôves pour $p = 3$

Pour tout G-module V, l'espace dual $\mathrm{Hom}_k(V, k)$ est naturellement muni de la structure de G-module définie par $(g \cdot \phi)(v) = \phi(g^{-1}v)$. On le note V^* et on l'appelle le dual de V. La dualité de Serre sur G/B est compatible avec l'action de G, donc on a (cf. [Jan03]

II.4.3)

$$H^i(\mu) \cong H^{3-i}(-2\rho - \mu)^*.$$

D'autre part, l'application $g \mapsto^t g$ est un anti-automorphisme de $G = \mathrm{SL}_3$ qui est l'identité sur T. Donc on peut munir l'espace dual $\mathrm{Hom}_k(V, k)$ d'une autre structure de G-module définie par $(g \cdot \phi)(v) = \phi({}^t g v)$. On le note V^t et on l'appelle « le dual contravariant » de V. Alors, « la dualité de Serre contravariante » s'écrit (cf. [DS88] 2.1)

$$H^i(\mu) \cong H^{3-i}(w_0 \cdot \mu)^t.$$

Soit $F : G \to G$ le morphisme de Frobenius de G (cf. [Jan03] II.3.1). Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, notons $G_r = \ker(F^r)$ le r-ième noyau de Frobenius. Pour tout $\mu \in X(T)$, notons $\widehat{L}(\mu)$ l'unique BG_1-module simple de plus haut poids μ (cf. [Jan03] II.9.6). Si on écrit $\mu = \mu^0 + p\mu^1$ avec $\mu^0 \in X_1(T)$ et $\mu^1 \in X(T)$, alors on a un isomorphisme de BG_1-modules

$$\widehat{L}(\mu) \cong \widehat{L}(\mu^0) \otimes p\mu^1.$$

De plus, si $\mu \in X_1(T)$, alors on a un isomorphisme de BG_1-modules $\widehat{L}(\mu) \cong \mathrm{res}^G_{BG^1}(L(\mu))$.

Chapitre 1

Une filtration à deux étages

1.1 Énoncé du théorème pricipal

Définition 1 (degré)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n \geq 1$, on appelle degré de n l'unique $d \in \mathbb{N}$ tel que $ap^d \leq n < (a+1)p^d$ pour un $a \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$. Si $n = 0$, on dit que n est de degré $-\infty$.

Soit $\mu \in X(T)$ tel que $\mu \neq (-1, -1)$. Il existe un unique $\lambda = (a, b) \in C \cap W \cdot \mu$. Le degré de μ est défini comme le degré de $a + b + 1 \in \mathbb{N}$.

Remarque 1. Si $\mu = (m, -n-2)$ avec $m, n \in \mathbb{N}$, alors $\mu = s_\beta \cdot (m - n - 1, n) = s_\beta s_\alpha \cdot (n - m - 1, m)$. Donc dans ce cas, le degré de μ est celui de $\max(m, n)$.

Définition 2 (Condition de Griffith)**.**

1. On dit qu'un poids μ vérifie la condition de Griffith s'il existe $m, n, d \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$ tels que

   - $ap^d \leq m, n \leq (a+1)p^d - 2$;
   - $\mu = (m, -n-2)$ ou $\mu = (-n-2, m)$.

   On appelle « région de Griffith », et l'on note Gr, l'ensemble des poids vérifiant la condition de Griffith.

2. On note $\overline{\mathrm{Gr}}$ l'ensemble des poids μ vérifiant qu'il existe $m, n, d \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$ tels que

   - $ap^d - 1 \leq m, n \leq (a+1)p^d - 1$;
   - $\mu = (m, -n-2)$ ou $\mu = (-n-2, m)$.

3. On note $\widehat{\mathrm{Gr}}$ l'ensemble des poids μ vérifiant qu'il existe $m, n, d \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$ tels que

   - $ap^d \leq m, n \leq (a+1)p^d - 1$;
   - $\mu = (m, -n-2)$ ou $\mu = (-n-2, m)$.

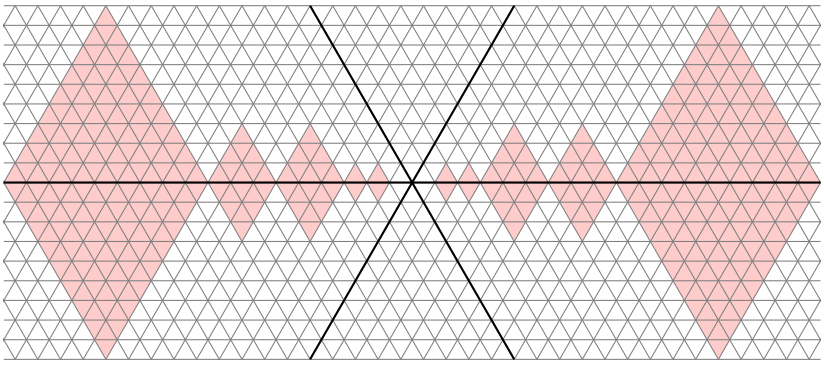


FIGURE 1.1 – Région de Griffith pour $p = 3$

Remarque 2. Dans la Définition 2, le degré de μ est d.

Remarque 3. D'après [Gri80] Theorem 1.3 ou [And79] Theorem 3.6, on sait que $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$ sont tous les deux non nuls si et seulement si $\mu \in \mathrm{Gr}$. Si μ est dans une H^1-chambre (resp. H^2-chambre) et $\mu \notin \mathrm{Gr}$, alors $H^2(\mu) = 0$ (resp. $H^1(\mu) = 0$).

Le théorème principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 1. *Soit $\mu = (m, -n-2) \in \overline{\mathrm{Gr}}$, où $m = ap^d + r$ et $n = ap^d + s$ avec $d \geq 1$, $0 \leq a \leq p-1$ et $-1 \leq r, s \leq p^d - 1$. Posons $\mu' = (r, -s-2)$, $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$, $\lambda = (s, p^d - r - 2)$ et ${}^t\lambda = (r, p^d - s - 2)$. Alors :*

1. *$H^2(\mu)$ admet la filtration à deux étages suivante :*

$$H^2(\mu) = \begin{array}{|c|}\hline L(0,a-1)^{(d)} \otimes V(\lambda) \\ \hline L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(\mu') \bigoplus L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu'') \\ \hline \end{array}$$

C'est-à-dire, il existe une suite exacte courte de G-modules :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow H^2(\mu) \longrightarrow L(0,a-1)^{(d)} \otimes V(\lambda) \longrightarrow 0$$

telle que

$$M \cong L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(\mu') \bigoplus L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu'').$$

2. *$H^1(\mu)$ admet la filtration à deux étages suivante :*

$$H^1(\mu) = \begin{array}{|c|}\hline L(0,a)^{(d)} \otimes H^1(\mu') \bigoplus L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'') \\ \hline L(0,a-1)^{(d)} \otimes H^0({}^t\lambda) \\ \hline \end{array}$$

C'est-à-dire, il existe une suite exacte courte de G-modules :

$$0 \longrightarrow L(0,a-1)^{(d)} \otimes H^0({}^t\lambda) \longrightarrow H^1(\mu) \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

telle que

$$Q \cong L(0,a)^{(d)} \otimes H^1(\mu') \bigoplus L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'').$$

Convention 1. Si η n'est pas dominant, on pose $L(\eta) = V(\eta) = 0$.

Remarque 4. 1. Si $a = 0$, alors $\mu = \mu'$ et le théorème dit que $H^2(\mu) = H^2(\mu')$.

2. Si $a = 1$, alors, d'après la Convention 1, on a $L(0, a-2) = 0$. Donc dans ce cas les filtrations du Théorème 1 se réduisent aux suites exactes :

$$0 \longrightarrow H^0({}^t\lambda) \longrightarrow H^1(\mu) \longrightarrow L(0,1)^{(d)} \otimes H^1(\mu') \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow L(0,1)^{(d)} \otimes H^2(\mu') \longrightarrow H^2(\mu) \longrightarrow V(\lambda) \longrightarrow 0.$$

Afin de démontrer le Théorème 1 on a besoin de quelques lemmes.

Lemme 1. *Soit $L(\eta)$ un facteur de composition de $H^i(\mu')$ ou $H^i(\mu'')$, où $\mu' = (r, -s-2)$ et $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$ avec $-1 \leq r, s \leq p^d - 1$. Alors η est p^d-restreint.*

Si $-1 \leq s \leq r \leq p^d - 1$ et $L(\eta)$ est un facteur de composition de $V(\lambda) = V(s, p^d - r - 2)$, alors η est p^d-restreint.

Démonstration. Soit $\zeta \in -\rho + X^+$. On sait, d'après le « Strong Linkage Principle » ([Jan03] II.6.13), que pour tout facteur de composition $L(\eta)$ d'un $H^i(w \cdot \zeta)$ on a $\eta \leq \zeta$. Comme $\gamma^\vee = \gamma = \rho$ est dominant, on a donc :

$$\langle \eta, \alpha^\vee \rangle \leq \langle \eta, \gamma^\vee \rangle = \langle \eta, \rho \rangle \leq \langle \zeta, \rho \rangle$$

et de même pour $\langle \eta, \beta^\vee \rangle$.

Pour $\mu' = (r, -s-2)$, le ζ correspondant est $(r - s - 1, s)$ si $r \geq s$ et $(s - r - 1, r)$ si $s \geq r$. Dans les deux cas on a $\langle \zeta, \rho \rangle = \max(r, s) - 1 < p^d$.

De même, pour $\mu'' = (r - p^d, p^d - s - 2)$, le poids ζ correspondant est $(p^d - r - 2, r - s - 1)$ si $r \geq s$ et $(p^d - s - 2, s - r - 1)$ si $s \geq r$. Dans les deux cas on a $\langle \zeta, \rho \rangle = p^d - \min(r, s) - 3 < p^d$.

Si $s \leq r + 1$ et $L(\eta)$ est un facteur de composition de $V(\lambda) = V(s, p^d - r - 2) \cong H^3(w_0 \cdot \lambda)$, alors dans ce cas $\langle \zeta, \rho \rangle = p^d + s - r - 2 \leq p^d - 1$. □

Lemme 2. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et soient $\lambda, \mu \in X_d(T)$. Alors on a*

$$\mathrm{Ext}^1_G(L(0,a)^{(d)} \otimes L(\lambda), L(0, a-2)^{(d)} \otimes L(\mu)) = 0.$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur d.

Si $d = 1$, alors $\lambda, \mu \in X_1(T)$. Si $\lambda = \mu$, alors d'après [Jan03] II.10.17(2),

$$\mathrm{Ext}^1_G\Big(L(0,a)^{(1)} \otimes L(\lambda), L(0,a-2)^{(1)} \otimes L(\lambda)) \cong \mathrm{Ext}^1_G(L(0,a), L(0,a-2)\Big) = 0$$

car $(0, a-2) \notin W_p \cdot (0, a)$. Si $\lambda \neq \mu$, d'après [Yeh82] Proposition 4.1.1, on sait que si $\mathrm{Ext}^1_G(L(0,a)^{(1)} \otimes L(\lambda), L(0,a-2)^{(1)} \otimes L(\mu))$ est non nul, alors si $p \neq 3$ il est parmi les trois possibilités suivantes (et est leur somme directe si $p = 3$) :

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}_G(L(0,a), L(0,a-2)),\\ \mathrm{Hom}_G(L(0,a), L(0,1) \otimes L(0,a-2)),\\ \mathrm{Hom}_G(L(0,a), L(1,0) \otimes L(0,a-2)).\end{gathered}$$

Or ceux-ci sont tous nuls car $(0, a) \not\leq \nu_0 + (0, a-2)$ pour $\nu_0 \in \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$.

Supposons que l'énoncé est vrai pour $d \geq 1$. Soient $\lambda, \mu \in X_{d+1}(T)$. Écrivons $\lambda = p\lambda^1 + \lambda^0$ et $\mu = p\mu^1 + \mu^0$ avec $\lambda^0, \mu^0 \in X_1(T)$. Si $\lambda_0 = \mu_0$, alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^1_G\Big(L(0,a)^{(d+1)} \otimes L(\lambda), L(0,a-2)^{(d+1)} \otimes L(\mu)\Big)\\ &\qquad\qquad \cong \mathrm{Ext}^1_G\Big(L(0,a)^{(d)} \otimes L(\lambda^1), L(0,a-2)^{(d)} \otimes L(\mu^1)\Big) = 0\end{aligned}$$

d'après [Jan03] II.10.17 (2) et l'hypothèse de récurrence.

Si $\lambda_0 \neq \mu_0$, alors d'après [Yeh82] Proposition 4.1.1, on sait que si $\mathrm{Ext}^1_G(L(0,a)^{(d+1)} \otimes L(\lambda), L(0,a-2)^{(d+1)} \otimes L(\mu))$ est non nul, alors si $p \neq 3$ il est parmi les trois possibilités suivantes (et est leur somme directe si $p = 3$) :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_G\Big(L((0,a)p^d + \lambda^1), L((0,a-2)p^d + \mu^1)\Big), \\ &\mathrm{Hom}_G\Big(L((0,a)p^d + \lambda^1), L((0,a-2)p^d + \mu^1) \otimes L(0,1)\Big), \\ &\mathrm{Hom}_G\Big(L((0,a)p^d + \lambda^1), L((0,a-2)p^d + \mu^1) \otimes L(1,0)\Big). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Soit $L(\eta)$ un facteur de composition de $L((0,a-2)p^d+\mu^1)\otimes L(\nu_0)$, où $\nu_0 \in \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$. Alors on a

$$\eta \leq (0,a-2)p^d + \mu^1 + \nu_0.$$

Donc, comme μ^1 est p^d-restreint,

$$\langle \eta, \rho \rangle \leq \langle (0,a-2)p^d + \mu^1 + \nu_0, \rho \rangle \leq (a-2)p^d + 2(p^d-1) + 1 = ap^d - 1.$$

Donc comme λ^1 est dominant, on ne peut pas avoir $\eta = (0,a)p^d + \lambda^1$. Par conséquent, tous les Hom de (1.1) sont nuls, d'où le résultat.

□

Lemme 3. *Soient M, N deux G-modules de longueur finie. Si pour tout $L_1 \in \mathrm{FC}(M)$ et pour tout $L_2 \in \mathrm{FC}(N)$, on a $\mathrm{Ext}^1_G(L_1, L_2) = 0$, alors $\mathrm{Ext}^1_G(M,N) = 0$.*

Démonstration. Soient

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_\ell = M$$

une suite de composition de M et $L \in \mathrm{FC}(N)$. Pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$, appliquons le foncteur $\mathrm{Hom}_G(\bullet, L)$ à la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow M_i/M_{i-1} \longrightarrow 0.$$

On obtient ainsi une suite exacte longue :

$$\cdots \longleftarrow \mathrm{Ext}^1_G(M_{i-1}, L) \longleftarrow \mathrm{Ext}^1_G(M_i, L) \longleftarrow \mathrm{Ext}^1_G(M_i/M_{i-1}, L) \longleftarrow \cdots.$$

Mais comme $M_i/M_{i-1} \in \mathrm{FC}(M)$, on a $\mathrm{Ext}^1_G(M_i/M_{i-1}, L) = 0$ pour tout i. Donc on a $\mathrm{Ext}^1_G(M_i, L) = 0$ pour tout i par récurrence sur i. En particulier, on a $\mathrm{Ext}^1_G(M, L) = \mathrm{Ext}^1_G(M_\ell, L) = 0$ pour tout $L \in \mathrm{FC}(N)$.

Prenons maintenant une suite de composition pour N :

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{\ell'} = N.$$

Pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, \ell'\}$, appliquons le foncteur $\mathrm{Hom}_G(M, \bullet)$ à la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow N_{i-1} \longrightarrow N_i \longrightarrow N_i/N_{i-1} \longrightarrow 0.$$

On obtient une suite exacte longue :

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_G(M, N_{i-1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_G(M, N_i) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_G(M, N_i/N_{i-1}) \longrightarrow \cdots.$$

Mais comme $N_i/N_{i-1} \in \mathrm{FC}(N)$, on a $\mathrm{Ext}^1_G(M, N_i/N_{i-1})$ pour tout i. Donc on a $\mathrm{Ext}^1_G(M, N_i) = 0$ pour tout i par récurrence sur i. En particulier, on a $\mathrm{Ext}^1_G(M, N) = 0$.

□

1.2 Démonstration du Théorème 1 : réduction au Théorème 2

Dans cette section, on va montrer que le Théorème 1 découle du théorème un peu plus faible suivant :

Théorème 2. *Soit $\mu = (m, -n-2)$, où $m = ap^d + r$ et $n = ap^d + s$ avec $d \geq 1$, $1 \leq a \leq p-1$ et $-1 \leq r, s \leq p^d - 1$ (c'est-à-dire, $\mu \in \overline{\mathrm{Gr}}$ de degré d). Posons $\mu' = (r, -s-2)$, $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$, $\lambda = (s, p^d - r - 2)$ et ${}^t\lambda = (r, p^d - s - 2)$. Alors :*

1. *$H^1(\mu)$ admet la filtration à trois étages suivante :*

$$H^1(\mu) = \begin{array}{|c|}\hline L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'') \\ \hline L(0, a)^{(d)} \otimes H^1(\mu') \\ \hline L(0, a-1)^{(d)} \otimes H^0({}^t\lambda) \\ \hline \end{array}.$$

Plus précisément, il existe des suites exactes courtes de G-modules :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow H^1(\mu) \longrightarrow L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu''),$$

$$0 \longrightarrow L(0, a-1)^{(d)} \otimes H^0({}^t\lambda) \longrightarrow M \longrightarrow L(0, a)^{(d)} \otimes H^1(\mu') \longrightarrow 0.$$

2. *$H^2(\mu)$ admet la filtration à trois étages suivante :*

$$H^2(\mu) = \begin{array}{|c|}\hline L(0, a-1)^{(d)} \otimes V(\lambda) \\ \hline L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu'') \\ \hline L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(\mu') \\ \hline \end{array}.$$

Plus précisément, il existe des suites exactes courtes de G-modules :

$$0 \longrightarrow L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(\mu') \longrightarrow H^2(\mu) \longrightarrow W \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu'') \longrightarrow W \longrightarrow L(0, a-1)^{(d)} \otimes V(\lambda) \longrightarrow 0.$$

De plus, W est un quotient du module de Weyl $V(s, ap^d - r - 2)$.

Montrons que le Théorème 1 découle du Théorème 2.

On pose $w = s_\gamma s_\beta = s_\beta s_\alpha$. Notons $\overline{\mathrm{Gr}}_\alpha = \overline{\mathrm{Gr}} \cap s_\alpha \cdot C$, $\overline{\mathrm{Gr}}_\beta = \overline{\mathrm{Gr}} \cap s_\beta \cdot C$ et $\overline{\mathrm{Gr}}_w = \overline{\mathrm{Gr}} \cap w \cdot C$.

Posons

$$\widetilde{\mu} = w_0 \cdot \mu = (ap^d + s, -ap^d - r - 2).$$

Alors $\widetilde{\mu}$ appartient à $\overline{\mathrm{Gr}}_w$ (resp. à $\overline{\mathrm{Gr}}_\beta$) si et seulement si μ appartient à $\overline{\mathrm{Gr}}_\beta$ (resp. à $\overline{\mathrm{Gr}}_w$). D'autre part, comme $\widetilde{\mu}$ se déduit de μ en échangeant r et s, alors le poids $(\widetilde{\mu})'$ associé à $\widetilde{\mu}$ est $(s, -r-2) = s_\gamma \cdot \mu'$; on le notera $\widetilde{\mu}'$. De même, le poids $\widetilde{\mu}''$ associé à $\widetilde{\mu}$ est

$$(-p^d + s, p^d - r - 2) = s_\gamma \cdot \mu''.$$

Par dualité de Serre contravariante, on a :

$$H^1(\mu) \simeq H^2(\widetilde{\mu})^t \qquad \text{et} \qquad H^2(\mu) \simeq H^1(\widetilde{\mu})^t$$

et de même $H^i(\mu') \simeq H^{3-i}(\widetilde{\mu}')^t$ et $H^i(\mu'') \simeq H^{3-i}(\widetilde{\mu}'')^t$ pour $i = 1, 2$. Comme les modules simples $L(0, i)$ sont auto-duaux pour la dualité contravariante, on obtient que $H^1(\mu)$ a aussi la filtration à trois étages suivante :

$$H^1(\mu) \simeq H^2(\widetilde{\mu})^t = \begin{array}{|c|}\hline L(0,a)^{(d)} \otimes H^1(\mu') \\ \hline L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'') \\ \hline L(0,a-1)^{(d)} \otimes H^0({}^t\lambda) \\ \hline \end{array}$$

où les deux étages inférieurs sont un sous-module de $H^0({}^t\lambda) = H^0(r, ap^d - s - 2)$, et $H^2(\mu)$ a aussi la filtration à trois étages suivante :

$$H^2(\mu) = H^1(\widetilde{\mu})^t = \begin{array}{|c|}\hline L(0,a-1)^{(d)} \otimes V(\lambda) \\ \hline L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(\mu') \\ \hline L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu'') \\ \hline \end{array}.$$

Donc pour montrer le Théorème 1, il suffit de montrer que pour $i \in \{1, 2\}$, on a :

$$\mathrm{Ext}^1_G(L(0,a)^{(d)} \otimes H^i(\mu'), L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^i(\mu'')) = 0.$$

Or ceci est vrai d'après le lemme 1, le lemme 2 et le lemme 3. Ceci montre que le Théorème 1 découle du Théorème 2. On va montrer le Théorème 2 dans la section 1.3.

1.3 Preuve du Théorème 2

Commençons par le lemme suivant.

Lemme 4. *Soit $\lambda = (a, b) \in X^+$ tel que $b \geq 1$. Soit K le sous-module de $V(\lambda)$ engendré par le vecteur $X^{(b)}_{-\beta} v_\lambda$. Alors $V(\lambda)/K$ est isomorphe comme B-module à $V(a, b-1) \otimes (0, 1)$.*

Démonstration. D'après [Jan77] Satz 2, on sait que l'annulateur de v_λ dans l'algèbre des distributions $\mathrm{Dist}(U^-)$ est l'idéal engendré par les $X^{(s)}_{-\beta}$ pour $s \geq b + 1$ et les $X^{(r)}_{-\alpha}$ pour $r \geq a + 1$. Le résultat en découle. □

1.3.1 Trois suites exactes de B-modules

Appliquons le lemme 4 à $\lambda = (0, a)$, pour $a \geq 1$. On a $V(0, a) = L(0, a)$ et l'on obtient le sous-module K engendré par le vecteur de poids $(a, -a)$; il est isomorphe comme B-module au P_α-module simple $L_\alpha(a, -a)$ de plus haut poids $(a, -a)$ et $L(0, a)/K$ est isomorphe à $L(0, a-1) \otimes (0, 1)$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L(0,a) \longrightarrow L(0,a-1) \otimes (0,1) \longrightarrow 0.$$

Notons M le sous-module de K tel qu'on ait une suite exacte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow (a, -a) \longrightarrow 0$$

et Q le quotient de M tel qu'on ait une suite exacte

$$0 \longrightarrow (-a, 0) \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Notons que Q est nul si $a = 1$, et si $a = 2$ alors Q est l'espace de poids $(0, -1)$.

1.3.2 Suites exactes longues induites par le foncteur d'induction

Appliquons la d-ième puissance du Frobenius aux suites exactes courtes de la section précédente et tensorisons par le poids $\mu' = (r, -s-2)$. Posons aussi

$$\lambda = (s, ap^d - r - 2)$$

et remarquons que $w_0 \cdot \lambda = w_0\lambda - 2\rho = (r - ap^d, -s-2)$. On obtient alors des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \widetilde{K} \longrightarrow L(0,a)^{(d)} \otimes (r, -s-2) \longrightarrow L(0, a-1)^{(d)} \otimes (r, p^d - s - 2) \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

$$0 \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{K} \longrightarrow (m, -n-2) \longrightarrow 0 \tag{1.3}$$

$$0 \longrightarrow w_0 \cdot \lambda \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{Q} \longrightarrow 0. \tag{1.4}$$

Appliquons le foncteur H^0 à ces suites exactes. Comme ${}^t\lambda = (r, p^d - s - 2)$ appartient à C et comme $(r, -s-2)$ n'a de la cohomologie qu'en degré 1 et 2, alors (1.2) donne, en utilisant l'identité tensorielle ([Jan03] I.4.8) : l'égalité $H^0(\widetilde{K}) = 0$, la suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L(0,a-1)^{d)} \otimes H^0(r, p^d - s - 2) \arrow[r] & H^1(\widetilde{K}) \arrow[dll, rounded corners] \\ & L(0,a)^{d)} \otimes H^1(r, -s-2) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

l'isomorphisme

$$H^2(\widetilde{K}) \simeq L(0,a)^{d)} \otimes H^2(r, -s-2) \tag{1.6}$$

et l'égalité $H^3(\widetilde{K}) = 0$.

Considérons maintenant la suite exacte (1.4). Les poids de $\widetilde{Q}$ sont les poids

$$\chi_i = ((a-2i)p^d + r, -(a-i)p^d - s - 2)$$

pour $i = 1, \ldots, a-1$. Pour $2i \leq a$, on a

$$s_\beta \cdot \chi_i = \chi_i + ((a-i)p^d + s + 1)\beta = (-ip^d - (s-r) - 1, (a-i)p^d + s)$$

et

$$s_\alpha s_\beta \cdot \chi_i = s_\beta \cdot \chi_i + (ip^d + s - r)\alpha = (ip^d + s - r - 1, (a-2i)p^d + r)$$

donc χ_i est dans la chambre où $H^2 \neq 0$ et comme

$$(a-2i)p^d + r < (a-2i+1)p^d \leq (a-i)p^d \leq (a-i)p^d + s + 1$$

la condition de Griffith n'est pas vérifiée donc le H^1 est nul. Et pour $2i > a$, χ_i appartient à $w_0 \cdot C$ donc H^1 et H^2 sont nuls. Plus précisément, on a χ_i appartient à $w_0 \cdot \lambda + (a-i)p^d\alpha$ donc

$$w_0 \cdot \chi_i = \lambda - (a-i)p^d\beta = ((a-i)p^d + r, (2i-a)p^d - s - 2).$$

Par conséquent, on a $H^0(\widetilde{Q}) = 0 = H^1(\widetilde{Q}) = H^0(\widetilde{M}) = H^1(\widetilde{M})$ et l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^2(\widetilde{M}) \longrightarrow H^2(\widetilde{Q}) \longrightarrow V(\lambda) \longrightarrow H^3(\widetilde{M}) \longrightarrow H^3(\widetilde{Q}) \longrightarrow 0. \tag{1.7}$$

Notons de plus que les χ_i qui sont anti-dominants, i.e. qui contribuent au $H^3(\widetilde{Q})$, donnent des modules de Weyl $V(\lambda - (a-i)p^d\beta)$ dont le plus haut poids est $\leq \lambda$. Par conséquent, tous les poids de $H^3(\widetilde{Q})$ sont $\leq \lambda$ et donc ceux de $H^3(\widetilde{M})$ aussi.

Considérons maintenant la suite exacte (1.3). Comme on a vu que $H^1(\widetilde{M}) = 0$, on obtient la suite exacte :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1(\widetilde{K}) \arrow[r] & H^1(m, -n-2) \arrow[r] & H^2(\widetilde{M}) \arrow[dll, rounded corners] \\ & H^2(\widetilde{K}) \arrow[r, "f"] & H^2(m, -n-2) \arrow[r] & H^3(\widetilde{M}) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

Alors $H^3(\widetilde{M})$ est un quotient de $H^2(m, -n-2)$ dont tous les poids sont $\leq \lambda$. D'après [Jan03] II.5.15 b) et la dualité entre H^1 et H^2, on sait que $H^2(m, -n-2)$ est engendré par son espace de poids λ ; ceci entraîne que le morphisme surjectif $H^2(m, -n-2) \to H^3(\widetilde{M})$ se factorise par un morphisme surjectif $V(\lambda) \to H^3(\widetilde{M})$, unique à un scalaire près, et alors (1.7) donne que $H^3(\widetilde{Q}) = 0$ et peut donc se récrire sous la forme :

$$0 \longrightarrow H^2(\widetilde{M}) \longrightarrow H^2(\widetilde{Q}) \longrightarrow V(\lambda) \longrightarrow H^3(\widetilde{M}) \longrightarrow 0. \tag{1.9}$$

1.3.3 Détermination de $H^2(\widetilde{M})$ et $H^3(\widetilde{M})$

Notons K_a et M_a les modules introduits dans la sous-section 1.3.1. Comme $a < p$ on voit que $M_a \simeq K_{a-1} \otimes (-1, 0)$ et donc on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow M_a \longrightarrow L(0, a-1) \otimes (-1, 0) \longrightarrow L(0, a-2) \otimes (-1, 1) \longrightarrow 0. \tag{1.10}$$

Appliquant la d-ième puissance du Frobenius, tensorisant par le poids $(r, -s-2)$ et posant $\nu = (-p^d + r, -s-2)$, on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \widetilde{M}_a \longrightarrow L(0, a-1)^{(d)} \otimes \nu \longrightarrow L(0, a-2)^{(d)} \otimes (-p^d + r, p^d - s - 2) \longrightarrow 0\,. \tag{1.11}$$

Alors $\nu = w_0 \cdot (s, p^d - r - 2)$ est anti-dominant donc $H^j(\nu) = 0$ pour $j < 3$ et $H^3(\nu) = V(s, p^d - r - 2)$. Par conséquent, en appliquant le foncteur H^0 à la suite exacte (1.11) on obtient l'isomorphisme

$$L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'') \simeq H^2(\widetilde{M}_a) \tag{1.12}$$

et la suite exacte :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'') \arrow[r] & H^3(\widetilde{M}_a) \arrow[dll, rounded corners] \\ & L(0, a-1)^{(d)} \otimes V(s, p^d - r - 2) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.13}$$

où l'on a posé, comme dans le Théorème 2, $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$.

D'autre part, la suite exacte (1.9) de la sous-section 1.3.2 s'écrit ici, en utilisant l'isomorphisme (1.12)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'') \arrow[r] & H^2(\widetilde{Q}_a) \arrow[dll, rounded corners] \\ & V(s, ap^d - r - 2) \arrow[r] & H^3(\widetilde{M}_a) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{1.14}$$

1.3.4 Injectivité de f

Lemme 5. *Le morphisme f dans la suite exacte* (1.8) *est injectif.*

Démonstration. Par (1.6), on sait que $H^2(\widetilde{K}) \cong L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(\mu)$. Donc par le lemme 1, si $L(\eta)$ est un facteur de composition de $H^2(\widetilde{K})$, alors $\eta = (0, ap^d) + \eta_0$ où η_0 est un poids dominant p^d-restreint. De même, comme $H^2(\widetilde{M}) \cong L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'')$ par (1.12), si $L(\eta)$ est un facteur de composition de $H^2(\widetilde{M})$, alors $\eta = (0, (a-2)p^d) + \eta_0$ où η_0 est dominant et p^d-restreint.

Par conséquent, $H^2(\widetilde{K})$ et $H^2(\widetilde{M})$ n'ont pas de facteur de composition commun. Donc le morphisme de $H^2(\widetilde{M})$ vers $H^2(\widetilde{K})$ dans (1.8) est nul, d'où l'injectivité de f. □

Par conséquent, la suite exacte (1.8) se coupe en deux suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(\mu) \longrightarrow H^2(m, -n-2) \longrightarrow H^3(\widetilde{M}_a) \longrightarrow 0 \tag{1.15}$$

$$0 \longrightarrow H^1(\widetilde{K}_a) \longrightarrow H^1(m, -n-2) \longrightarrow L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(\mu'') \longrightarrow 0. \tag{1.16}$$

Celles-ci, avec la suite exacte (1.13) et la suite exacte (1.5), terminent la preuve du Théorème 2.

1.4 Description de $H^2(\mu)$ et $H^1(\mu)$ pour μ sur le mur

Lorsque μ se situe sur le mur entre une H^1-chambre et une H^2-chambre, c'est-à-dire, $\mu = (n, -n-2)$ ou $(-n-2, n)$ pour un $n \in \mathbb{N}$, on peut donner une version plus précise du Théorème 1. Par la symétrie entre α et β, il suffit de considérer le cas où $\mu = (n, -n-2)$.

Remarquons d'abord que si $0 \leq n \leq p-1$, on peut appliquer le Théorème de Borel-Weil-Bott (cf. [Jan03] II.5.5) à $\mu = (n, -n-2) = s_\beta \cdot (-1, n)$. Donc on a $H^i(\mu) \cong H^{i-1}(-1, n) = 0$ pour tout i dans ce cas.

Si $n \geq p$, on a le théorème suivant :

Théorème 3. *Soit $\mu = (n, -n-2)$ de degré $d \geq 1$ (c'est-à-dire, $n \geq p$). Alors il existe une filtration de $H^2(\mu)$*

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{\ell-1} \subset V_\ell = H^2(\mu)$$

avec $\ell \leq d$ telle que pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$, on ait

$$V_i / V_{i-1} \cong \bigoplus_{j=1}^{q_i} L(\nu_{ij})^{(d_{ij})} \otimes V(\lambda_{ij}),$$

avec $q_i \leq 2^{\ell-i}$. De plus, $p^{d_{ij}}\nu_{ij}$ est p^{d+1}-restreint et λ_{ij} est $p^{d_{ij}}$-restreint pour tout i, j.

Comme $H^1(\mu) \cong H^2(\mu)^t$, on obtient aussi une filtration duale de $H^1(\mu)$.

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur d. Si $d = 1$, alors $n = ap + r$ avec $1 \leq a, r \leq p-1$. D'après le Théorème 1, il existe une filtration à deux étages :

$$H^2(\mu) = \begin{array}{|c|}\hline L(0,a-1)^{(1)} \otimes V(\lambda) \\ \hline L(0,a)^{(1)} \otimes H^2(\mu') \bigoplus L(0,a-2)^{(1)} \otimes H^2(\mu'') \\ \hline \end{array},$$

où $\lambda = (r, p-r-2)$, $\mu' = (r, -r-2)$ et $\mu'' = (-p+r, p-r-2)$. Comme r et $p-r-2$ sont $\leq p-1$, on a $H^2(\mu') = H^2(\mu'') = 0$, d'où $H^2(\mu) \cong L(0,a-1)^{(1)} \otimes V(\lambda)$. Donc l'énoncé est vrai dans ce cas.

Supposons l'énoncé vrai pour tout n de degré $\leq d$, et soit $n = ap^{d+1} + r$ avec $1 \leq a \leq p-1$ et $0 \leq r \leq p^d - 1$. D'après le Théorème 1, on a une filtration à deux étages :

$$H^2(\mu) = \begin{array}{|c|}\hline L(0,a-1)^{(d+1)} \otimes V(\lambda) \\ \hline L(0,a)^{(d+1)} \otimes H^2(\mu') \bigoplus L(0,a-2)^{(d+1)} \otimes H^2(\mu'') \\ \hline \end{array}$$

où $\lambda = (r, p^{d+1} - r - 2)$, $\mu' = (r, -r-2)$ et $\mu'' = (-p^{d+1} + r, p^{d+1} - r - 2) = (-m-2, m)$, où $m = p^{d+1} - r - 2$. Donc μ' et μ'' sont tous les deux encore sur le mur et de degré $\leq d$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une filtration de $H^2(\mu')$:

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{\ell'} = H^2(\mu')$$

avec $\ell' \leq d$ telle que pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, \ell'\}$, on ait

$$M_i/M_{i-1} \cong \bigoplus_{j=1}^{q'_i} L(\nu'_{ij})^{(d'_{ij})} \otimes V(\lambda'_{ij}),$$

avec $q'_i \leq 2^{\ell'-i}$. De plus, $p^{d'_{ij}}\nu'_{ij}$ est p^{d+1}-restreint et λ'_{ij} est $p^{d'_{ij}}$-restreint pour tout i, j. Pour $i > \ell'$, posons $M_i = M_{\ell'} = H^2(\mu')$ et $q'_i = 0$.

De même, on a une filtration de $H^2(\mu'')$:

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{\ell''} = H^2(\mu'')$$

avec $\ell'' \leq d$ telle que pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, \ell''\}$, on ait

$$N_i/N_{i-1} \cong \bigoplus_{j=1}^{q''_i} L(\nu''_{ij})^{(d''_{ij})} \otimes V(\lambda''_{ij}),$$

avec $q''_i \leq 2^{\ell''-i}$. De plus, $p^{d''_{ij}}\nu''_{ij}$ est p^{d+1}-restreint et λ''_{ij} est $p^{d''_{ij}}$-restreint pour tout i, j. Pour $i > \ell''$, posons $N_i = N_{\ell''} = H^2(\mu'')$ et $q''_i = 0$.

Posons maintenant $\ell = \max(\ell', \ell'') + 1 \leq d + 1$. Pour $0 \leq i \leq \ell - 1$, posons

$$\begin{aligned} V_i &= L(0,a)^{(d+1)} \otimes M_i \bigoplus L(0,a-2)^{(d+1)} \otimes N_i \\ &\subset L(0,a)^{(d+1)} \otimes H^2(\mu') \bigoplus L(0,a-2)^{(d+1)} \otimes H^2(\mu'') \\ &\subset H^2(\mu). \end{aligned}$$

Posons aussi $V_\ell = H^2(\mu)$.

Alors pour $1 \leq i \leq \ell - 1$, on a :

$$\begin{aligned} V_i/V_{i-1} \cong & L(0,a)^{(d+1)} \otimes \bigoplus_{j=1}^{q'_i} L(\nu'_{ij})^{(d'_{ij})} \otimes V(\lambda'_{ij}) \\ & \oplus L(0,a-2)^{(a+1)} \otimes \bigoplus_{j=1}^{q''_i} L(\nu''_{ij})^{(d''_{ij})} \otimes V(\lambda''_{ij}) \\ \cong & \bigoplus_{j=1}^{q'_i} L(\nu'_{ij} + (0,a)p^{d+1-d'_{ij}})^{(d'_{ij})} \otimes V(\lambda'_{ij}) \\ & \oplus \bigoplus_{j=1}^{q''_i} L(\nu''_{ij} + (0,a-2)p^{d+1-d''_{ij}})^{(d''_{ij})} \otimes V(\lambda''_{ij}). \end{aligned}$$

Pour $1 \leq i \leq \ell-1$, posons $q_i = q'_i + q''_i$. Pour $1 \leq j \leq q'_i$, posons $\nu_{ij} = \nu'_{ij} + (0,a)p^{d+1-d'_{ij}}$, $d_{ij} = d'_{ij}$ et $\lambda_{ij} = \lambda'_{ij}$. Pour $q'_i < j \leq q_i$, posons $\nu_{ij} = \nu''_{i,j-q'_i} + (0,a-2)p^{d+1-d''_{i,j-q'_i}}$, $d_{ij} = d''_{i,j-q_i}$ et $\lambda_{ij} = \lambda''_{i,j-q_i}$. Alors l'isomorphisme précédent se récrit

$$V_i/V_{i-1} \cong \bigoplus_{j=1}^{q_i} L(\nu_{ij})^{(d_{ij})} \otimes V(\lambda_{ij}).$$

De plus, on a $q_i = q'_i + q''_i \leq 2^{\ell'-i} + 2^{\ell''-i} \leq 2 \cdot 2^{\max(\ell',\ell'')-i} = 2^{\ell-i}$ et λ_{ij} est $p^{d_{ij}}$-restreint par définition. D'après le lemme 1, $p^{d_{ij}}\nu_{ij}$ est p^{d+2}-restreint puisque $L(p^{dij}\nu_{ij} + \lambda_{ij})$ est un facteur de composition de $H^2(n, -n-2)$, avec $n = ap^{d+1} + r$.

Enfin, si $i = \ell$, on a $V_i/V_{i-1} \cong L(0,a-1)^{(d+1)} \otimes V(r, p^{d+1} - r - 2)$.

Donc l'énoncé est vrai pour μ. Ceci termine la preuve du Théorème 3.

□

De plus, on peut décrire explicitement les ν_{ij} et λ_{ij} du Théorème 3. Supposons pour commencer que $n \not\equiv p-1 \pmod p$.

Pour $a \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, notons $\widehat{a} = p - a - 1$, alors on a $\widehat{\widehat{a}} = a$. Pour $d \in \mathbb{N}$, notons

$$\mathbb{N}_d = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ est de degré } \leq d\}.$$

Notons $N_d = \{0\}$ pour tout $d \in -\mathbb{N}^*$.

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, définissons

$$\mathbf{s_d} : \mathbb{N}_d \to \mathbb{N}_{d-1}$$

et

$$\mathbf{t_d} : \mathbb{N}_d \to \mathbb{N}_d$$

comme suit. Si

$$n = a_d p^d + a_{d-1}p^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{N}_d$$

où $a_i \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, alors

$$\mathbf{s_d} n = a_{d-1}p^{d-1} + a_{d-2}p^{d-2} + \cdots + a_0 = n - a_d p^d$$

(en particulier, $\mathbf{s_0} n = 0$ si $d = 0$), et

$$\mathbf{t_d} n = \widehat{a}_d p^d + \widehat{a}_{d-1}p^{d-1} + \cdots + \widehat{a}_0 - 1 = p^{d+1} - n - 2.$$

Alors on a

$$\mathbf{t_d}^2 n = n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_d$. Si $0 \leq a_0 \leq p-2$, alors on a

$$\mathbf{s_d t_d} n = \mathbf{t_{d-1} s_d} n = a_d p^d + p^d - n - 2.$$

Pour $i = 1, \cdots, d$, notons

$$\mathbf{s_d}^{(i)} = \mathbf{s_{d-i+1} s_{d-i+2}} \cdots \mathbf{s_d} n.$$

C'est-à-dire, si $n = a_d p^d + a_{d-1} p^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{N}_d$, alors

$$\mathbf{s_d}^{(i)} = a_{d-i} p^{d-i} + a_{d-i-1} p^{d-i-1} + \cdots + a_0.$$

Soit $n = a_d p^d + a_{d-1} p^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{N}_d$ (attention : a_d peut être 0). Pour $i \in \{1, \cdots, d\}$. posons

$$\widetilde{\Gamma}_d^i(n) = \Big\{ \nu = \sum_{j=d-i+1}^{d} p^j \eta_j \in X(T) | \eta_j \in \{(0, a_j), (0, a_j - 2), (\widehat{a}_j, 0), (\widehat{a}_j - 2, 0)\} \Big\}.$$

Pour $\nu = \sum_{j=d-i+1}^{d} p^j \eta_j \in \widetilde{\Gamma}_d^i(n)$, définissons $\varepsilon(\nu) \in \{0, 1\}$ par

$$\varepsilon(\nu) \equiv \sharp\{j | \eta_j \in \{(0, a_j - 2), (\widehat{a}_j - 2, 0)\}\} \pmod 2.$$

Soit $\nu = \sum_{j=d-i+1}^{d} p^j \eta_j \in \widetilde{\Gamma}_d^i(n)$. On dit que ν est <u>admissible</u> s'il vérifie les trois conditions suivantes :

1. $\eta_d \in \{(0, a_d), (0, a_d - 2)\}$;
2. pour $d-i+1 \leq j \leq d-1$, si $\eta_{j+1} \in \{(0, a_{j+1}), (\widehat{a}_{j+1} - 2, 0)\}$, alors $\eta_j \in \{(0, a_j), (0, a_j - 2)\}$;
3. pour $d-i+1 \leq j \leq d-1$, si $\eta_{j+1} \in \{(0, a_{j+1} - 2), (\widehat{a}_{j+1}, 0)\}$, alors $\eta_j \in \{(\widehat{a}_j, 0), (\widehat{a}_j - 2, 0)\}$.

Pour $i = 1, \cdots, d$, définissons

$$\Gamma_d^i(n) = \Gamma_{d,0}^i(n) \cup \Gamma_{d,1}^i(n)$$

où

$$\Gamma_{d,0}^i(n) = \{\nu | \nu \in \widetilde{\Gamma}_d^i(n) \text{ est admissible et } \varepsilon(\nu) = 0\} \tag{1.17}$$

et

$$\Gamma_{d,1}^i(n) = \{\nu | \nu \in \widetilde{\Gamma}_d^i(n) \text{ est admissible et } \varepsilon(\nu) = 1\}. \tag{1.18}$$

Alors $|\Gamma_{d,0}^i(n)| = |\Gamma_{d,1}^i(n)| = 2^{i-1}$. En effet, pour un élément $\nu \in \Gamma_d^i$, il y a exactement deux choix pour η_j pour tout $j \in \{d, d-1, \cdots, d-i+1\}$, d'où $|\Gamma_d^i| = 2^i$. Si $\nu \in \Gamma_{d,0}^i$, alors il y a deux choix pour η_j tout $j \in \{d, d-1, \cdots, d-i+2\}$, et η_{d-i+1} est uniquement déterminé par $\eta_d, \eta_{d-1}, \cdots, \eta_{d-i+2}$ car $\varepsilon(\nu) = 0$. Donc $|\Gamma_{d,0}^i| = 2^{i-1}$.

Posons aussi $\Gamma_{d,0}^0(n) = \{(0, 0)\} \subset X(T)$ et $\Gamma_{d,1}^0(n) = \varnothing$. Définissons

$$\begin{aligned} \tau : X(T) &\to X(T) \\ (x, y) &\mapsto (y, x). \end{aligned}$$

Alors on a $\tau^2 = \mathrm{Id}_{X(T)}$. D'après les définitions, pour tout $i \geq 1$ et pour $n = a_d p^d + a_{d-1}p^{d-1} + \cdots + a_0$ avec $1 \leq a_0 \leq p-2$, on a

$$\Gamma^i_{d,0}(n) = \Big((0,a_d)p^d + \Gamma^{i-1}_{d-1,0}(\mathbf{s_d}n)\Big) \cup \Big((0,a_d-2)p^d + \tau\Gamma^{i-1}_{d-1,1}(\mathbf{t_{d-1}s_d}n)\Big) \tag{1.19}$$

et

$$\Gamma^i_{d,1}(n) = \Big((0,a_d)p^d + \Gamma^{i-1}_{d-1,1}(\mathbf{s_d}n)\Big) \cup \Big((0,a_d-2)p^d + \tau\Gamma^{i-1}_{d-1,0}(\mathbf{t_{d-1}s_d}n)\Big). \tag{1.20}$$

Enfin, pour $n = ap^d + r \in \mathbb{N}_d$ avec $0 \leq r \leq p^d - 1$, posons

$$\Lambda_d(n) = (r, p^d - r - 2) \in X(T).$$

Théorème 4. *Soit $n \in \mathbb{N}$ de degré $\leq d$.*

(i) *Si $n \not\equiv p-1 \pmod p$, alors il existe une filtration de $H^2(n,-n-2)$*

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{d-1} \subset N_d = H^2(n,-n-2)$$

telle que

$$\begin{aligned} N_i/N_{i-1} \cong & \bigoplus_{\nu \in \Gamma^{d-i}_{d,0}(n)} L(\nu) \otimes L(0,a_i-1)^{(i)} \otimes V(\Lambda_i(\mathbf{s_d}^{(d-i)}n)) \\ & \oplus \bigoplus_{\nu \in \Gamma^{d-i}_{d,1}(n)} L(\nu) \otimes L(\widehat{a}_i-1,0)^{(i)} \otimes V(\tau\Lambda_i(\mathbf{t_i s_d}^{(d-i)}n)). \end{aligned} \tag{1.21}$$

pour tout $i \in \{1,2,\cdots,d\}$.

(ii) *Si $n \equiv p-1 \pmod p$, alors il existe $k \geq 1$ tel que $n = mp^k + p^k - 1$ avec $m \not\equiv p-1 \pmod p$. Dans ce cas, on a*

$$H^2(\mu) \cong L((p^k-1)\rho) \otimes H^2(m,-m-2)^{(k)} \tag{1.22}$$

et (i) *s'applique à $H^2(m,-m-2)$.*

Remarque 5. On utilise toujours la Convention 1, donc il peut y avoir des facteurs nuls dans l'expression ci-dessus.

Démonstration. Pour (ii), il suffit de remarque que

$$\mu = (n,-n-2) = (m,-m-2)p^k + (p^k-1)\rho$$

et (1.22) résulte de [Jan03] II.3.18.

Pour démontrer (i), raisonnons par récurrence sur d. Si $d = 1$ et $n \in \mathbb{N}_d$ est tel que $n \not\equiv p-1 \pmod p$, alors $n = a_1 p + a_0$ avec $0 \leq a_1 \leq p-1$ et $0 \leq a_0 \leq p-2$. D'après le Théorème 1 (qui est encore vrai même si $a = 0$ d'après la Remarque 4) on a

$$H^2(\mu) \cong L(0,a_1-1)^{(1)} \otimes V(\Lambda_1(n)).$$

Donc l'énoncé est vrai dans ce cas.

Supposons l'énoncé vrai pour tout $n \in \mathbb{N}_d$ avec $n \not\equiv p-1 \pmod p$ pour un $d \geq 1$, et soit $n \in \mathbb{N}_{d+1}$ tel que $n \not\equiv p-1 \pmod p$. Alors n s'écrit comme

$$n = a_{d+1}p^{d+1} + a_d p^d + \cdots + a_0$$

avec $0 \leq a_i \leq p-1$ pour tout i et $a_0 \leq p-2$. D'après le Théorème 1 (qui est vrai même si $a=0$), H^2 a une filtration à deux étages :

$L(0, a_{d+1}-1)^{(d+1)} \otimes V(\Lambda_{d+1}(n))$
$L(0, a_{d+1})^{(d+1)} \otimes H^2(\mathbf{s_{d+1}}n, -\mathbf{s_{d+1}}n-2) \bigoplus L(0, a_{d+1}-2)^{(d+1)} \otimes H^2(-\mathbf{t_d s_{d+1}}n-2, \mathbf{t_d s_{d+1}}n)$

.

Comme $0 \leq p-a_0-2 = \widehat{a}_0 - 1 \leq p-2$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à

$$\mathbf{s_{d+1}}n = a_d p^d + \cdots + a_0 \in \mathbb{N}_d$$

et

$$\mathbf{t_d s_{d+1}}n = \widehat{a}_d p^d + \cdots + \widehat{a_0} - 1 \in \mathbb{N}_d.$$

Donc il existe une filtration de $H^2(\mathbf{s_{d+1}}n, -\mathbf{s_{d+1}}n-2)$:

$$0 = N'_0 \subset N'_1 \subset \cdots \subset N'_{d-1} \subset N'_d = H^2(\mathbf{s_{d+1}}n, -\mathbf{s_{d+1}}n-2)$$

telle que

$$\begin{aligned} N'_i/N'_{i-1} \cong & \bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d,0}^{d-i}(\mathbf{s_{d+1}}n)} L(\nu) \otimes L(0, a_i-1)^{(i)} \otimes V(\Lambda_i(\mathbf{s_d}^{(d-i)}\mathbf{s_{d+1}}n)) \\ & \oplus \bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d,1}^{d-i}(\mathbf{s_{d+1}}n)} L(\nu) \otimes L(\widehat{a}_i-1, 0)^{(i)} \otimes V(\tau\Lambda_i(\mathbf{t_i s_d}^{(d-i)}\mathbf{s_{d+1}}n)) \\ = & \bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d,0}^{d-i}(\mathbf{s_{d+1}}n)} L(\nu) \otimes L(0, a_i-1)^{(i)} \otimes V(\Lambda_i(\mathbf{s_{d+1}}^{(d-i+1)}n)) \\ & \oplus \bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d,1}^{d-i}(\mathbf{s_{d+1}}n)} L(\nu) \otimes L(\widehat{a}_i-1, 0)^{(i)} \otimes V(\tau\Lambda_i(\mathbf{t_i s_{d+1}}^{(d-i)}n)). \end{aligned} \tag{1.23}$$

pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, d\}$ car

$$\mathbf{s_d}^{(d-i)}\mathbf{s_{d+1}}n = \mathbf{s_{i+1}s_{i+2}} \cdots \mathbf{s_d s_{d+1}}n = \mathbf{s_{d+1}}^{(d-i+1)}n.$$

De même, il existe une filtration de $H^2(-\mathbf{t_d s_{d+1}}n-2, \mathbf{t_d s_{d+1}}n)$:

$$0 = N''_0 \subset N''_1 \subset \cdots \subset N''_{d-1} \subset N''_d = H^2(-\mathbf{t_d s_{d+1}}n-2, \mathbf{t_d s_{d+1}}n)$$

telle que

$$\begin{aligned} N''_i/N''_{i-1} \cong & \bigoplus_{\nu \in \tau\Gamma_{d,0}^{d-i}(\mathbf{t_d s_{d+1}}n)} L(\nu) \otimes L(\widehat{a}_i-1, 0)^{(i)} \otimes V(\tau\Lambda_i(\mathbf{s_d}^{(d-i)}\mathbf{t_d s_{d+1}}n)) \\ & \oplus \bigoplus_{\nu \in \tau\Gamma_{d,1}^{d-i}(\mathbf{t_d s_{d+1}}n)} L(\nu) \otimes L(0, a_i-1)^{(i)} \otimes V(\Lambda_i(\mathbf{t_i s_d}^{(d-i)}\mathbf{t_d s_{d+1}}n)) \\ = & \bigoplus_{\nu \in \tau\Gamma_{d,0}^{d-i}(\mathbf{t_d s_{d+1}}n)} L(\nu) \otimes L(\widehat{a}_i-1, 0)^{(i)} \otimes V(\tau\Lambda_i(\mathbf{t_i s_{d+1}}^{(d-i+1)}n)) \\ & \oplus \bigoplus_{\nu \in \tau\Gamma_{d,1}^{d-i}(\mathbf{t_d s_{d+1}}n)} L(\nu) \otimes L(0, a_i-1)^{(i)} \otimes V(\Lambda_i(\mathbf{s_{d+1}}^{(d-i+1)}n)) \end{aligned} \tag{1.24}$$

car

$$\mathbf{s_d}^{(d-i)}\mathbf{t_d s_{d+1}}n = \mathbf{s_{i+1}s_{i+2}} \cdots \mathbf{s_d t_d s_{d+1}}n = \mathbf{t_i s_{i+1}s_{i+2}} \cdots \mathbf{s_d s_{d+1}} = \mathbf{t_i s_{d+1}}^{(d-i+1)}n.$$

Posons

$$\begin{aligned} N_i =& L(0,a_{d+1})^{(d+1)} \otimes N_i' \bigoplus L(0,a_{d+1}-2)^{(d+1)} \otimes N_i'' \\ \subset& L(0,a_{d+1})^{(d+1)} \otimes H^2(\mathbf{s_{d+1}}n, -\mathbf{s_{d+1}}n-2) \\ & \bigoplus L(0,a_{d+1}-2)^{(d+1)} \otimes H^2(-\mathbf{t_d s_{d+1}}n-2, \mathbf{t_d s_{d+1}}n) \\ \subset& H^2(\mu). \end{aligned}$$

Posons aussi $N_{d+1} = H^2(n, -n-2)$.

Alors pour $1 \leq i \leq d$, on a

$$\begin{aligned} N_i/N_{i-1} \cong& L(0,a_{d+1})^{(d+1)} \otimes (N_i'/N_{i-1}') \bigoplus L(0,a_{d+1}-2)^{(d+1)} \otimes N_i''/N_{i-1}'' \\ \cong& \bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d,0}^{d-i}(\mathbf{s_{d+1}}n)} L((0,a_{d+1})p^{d+1}+\nu) \otimes L(0,a_i-1)^{(i)} \otimes V(\Lambda_i(\mathbf{s_{d+1}}^{(d-i+1)}n)) \\ & \oplus \bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d,1}^{d-i}(\mathbf{s_{d+1}}n)} L((0,a_{d+1})p^{d+1}+\nu) \otimes L(\widehat{a}_i-1,0)^{(i)} \otimes V(\tau\Lambda_i(\mathbf{t_i s_{d+1}}^{(d-i)}n)) \\ & \oplus \bigoplus_{\nu \in \tau\Gamma_{d,0}^{d-i}(\mathbf{t_d s_{d+1}}n)} L((0,a_{d+1}-2)p^{d+1}+\nu) \otimes L(\widehat{a}_i-1,0)^{(i)} \otimes V(\tau\Lambda_i(\mathbf{t_i s_{d+1}}^{(d-i+1)}n)) \\ & \oplus \bigoplus_{\nu \in \tau\Gamma_{d,1}^{d-i}(\mathbf{t_d s_{d+1}}n)} L((0,a_{d+1}-2)p^{d+1}+\nu) \otimes L(0,a_i-1)^{(i)} \otimes V(\Lambda_i(\mathbf{s_{d+1}}^{(d-i+1)}n)) \\ \cong& \bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d+1,0}^{d-i}(n)} L(\nu) \otimes L(0,a_i-1)^{(i)} \otimes V(\Lambda_i(\mathbf{s_{d+1}}^{(d-i+1)}n)) \\ & \oplus \bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d+1,1}^{d-i}(n)} L(\nu) \otimes L(\widehat{a}_i-1,0)^{(i)} \otimes V(\tau\Lambda_i(\mathbf{t_i s_{d+1}}^{(d-i+1)}n)) \end{aligned}$$

où le dernier isomorphisme résulte de (1.19) et (1.20). Ceci termine la preuve du Théorème 4.

□

D'autre part, si $\mu = (n, -n-2)$ avec $n = ap^d + r$, où $0 \leq a \leq p-1$ et $0 \leq r \leq p^d - 1$, alors d'après le Théorème 2, il existe une suite exacte courte de G-modules :

$$0 \longrightarrow L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(r, -r-2) \longrightarrow H^2(\mu) \longrightarrow W(r, n-2r-2) \longrightarrow 0,$$

où $W(r, n-2r-2)$ est un quotient du module de Weyl $V(r, n-2r-2)$. On a le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Soit $n = a_d p^d + a_{d-1}p^{d-1} + \cdots + a_0$ avec $0 \leq a_i \leq p-1$. Pour $k \in \{0, 1, \cdots, d\}$, notons $r_k = \sum_{i=0}^{k} a_i p^i$ (donc $n = r_d$). Alors $H^2(n, -n-2)$ admet une filtration :*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{d-1} \subset M_d = H^2(n, -n-2)$$

telle que

$$M_i/M_{i-1} \cong L(0, n-r_i) \otimes W(r_{i-1}, r_i - 2r_{i-1} - 2)$$

où $W(r_{i-1}, r_i - 2r_{i-1} - 2)$ est un quotient du module de Weyl $V(r_{i-1}, r_i - 2r_{i-1} - 2)$.

Remarque 6. On utilise toujours la convention que $V(a,b) = 0$ si (a,b) n'est pas dominant. Donc si $a_i = 0$ pour un $i \in \{1, 2, \cdots, d\}$, alors $r_{i-1} = r_i$ et $W(r_{i-1}, r_i - 2r_{i-1} - 2) = 0$. Donc $M_i = M_{i-1}$ dans ce cas.

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur d. Si $d = 1$, alors $n = ap + r$ avec $0 \leq a, r \leq p - 1$. Avec les notations ci-dessus, on a $r_0 = r$ et $r_1 = n$. Comme $H^2(r, -r-2) \cong H^0(-1, r) = 0$, d'après le Théorème 2, $H^2(n, -n-2) \cong W(r, n-2r-2) \cong L(0, n - r_1) \otimes W(r_0, r_1 - 2r_0 - 2)$ où $W(r, n-2r-2) = W(r_0, r_1 - 2r_0 - 2)$ est un quotient du module de Weyl $V(r_0, r_1 - 2r_0 - 2)$. Donc l'énoncé est vrai dans ce cas.

Supposons l'énoncé vrai pour tout n de degré $\leq d$ pour un $d \geq 1$. Soit $n = a_{d+1}p^{d+1} + a_d p^d + \cdots + a_0$. Alors d'après le Théorème 2, on a une suite exacte courte de G-modules :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L(0, a_{d+1})^{(d+1)} \otimes H^2(r_d, -r_d - 2) \arrow[r] & H^2(n, -n-2) \arrow[dll, rounded corners] \\
& W(r_d, n - 2r_d - 2) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

où $W(r_d, n - 2r_d - 2)$ est un quotient de $V(r_d, n - 2r_d - 2)$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $r_d = a_d p^d + \cdots + a_0$, on obtient une filtration :

$$0 = M'_0 \subset M'_1 \subset \cdots \subset M'_{d-1} \subset M'_d = H^2(r_d, -r_d - 2)$$

telle que pour $i = 1, 2, \cdots, d$,

$$M'_i / M'_{i-1} \cong L(0, r_d - r_i) \otimes W(r_{i-1}, r_i - 2r_{i-1} - 2)$$

où $W(r_{i-1}, r_i - 2r_{i-1} - 2)$ est un quotient de $V(r_{i-1}, r_i - 2r_{i-1} - 2)$. Posons $M_i = L(0, a_{d+1})^{(d+1)} \otimes M'_i$ pour $i = 0, 1, \cdots, d$ et $M_d = H^2(n, -n-2)$, alors on obtient une filtration de $H^2(n, -n-2)$

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_d \subset M_{d+1} = H^2(n, -n-2)$$

telle que

$$\begin{aligned}
M_{d+1}/M_d &\cong W(r_d, n - 2r_d - 2) \cong L(0, n - r_{d+1}) \otimes W(r_d, r_{d+1} - 2r_d - 2), \\
M_i/M_{i-1} &\cong L(0, a_{d+1})^{(d+1)} \otimes (M'_i/M'_{i-1}) \\
&\cong L(0, a_{d+1}p^{d+1}) \otimes L(0, r_d - r_i) \otimes W(r_{i-1}, r_i - 2r_{i-1} - 2) \\
&\cong L(0, n - r_i) \otimes W(r_{i-1}, r_i - 2r_{i-1} - 2) \qquad \text{si } i \leq d.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

La figure suivante donne la relation entre la filtration du Théorème 4 (indiquée par les lignes noires) et celle du Corollaire 1 (indiquée par les courbes pointillées) lorsque $d = 4$.

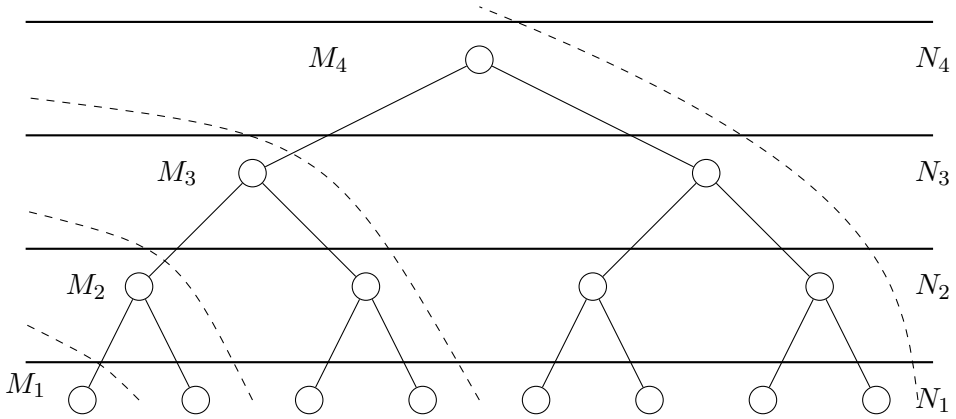


Figure 1.2 – $d = 4$

Chapitre 2

Une p-H^i-D-filtration

La filtration obtenue dans le chapitre 1 ne donne pas d'informations sur la structure de $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$ si μ n'est pas dans la région de Griffith. Mais Jantzen a montré ([Jan80]) que pour $G = \mathrm{SL}_3$, tout module de Weyl $V(\lambda)$ possède une p-Weyl-filtration, c'est-à-dire une filtration dont les quotients sont de la forme $V(\nu^1)^{(1)} \otimes L(\nu^0)$, où ν^0 est p-restreint et l'exposant $^{(1)}$ désigne la torsion par le morphisme de Frobenius. Dualement, pour $G = \mathrm{SL}_3$ tout module induit $H^0(\lambda)$ possède une p-H^0-filtration. Il est naturel de se demander si $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$ possèdent aussi une filtration analogue. Pour cela, comme dans [Jan80], on commence par étudier la structure du BG_1-module $\widehat{Z}(\mu) = \mathrm{Ind}_B^{BG_1}\mu$.

Tandis que Jantzen utilise une suite de composition de $\widehat{Z}(\mu)$ pour induire une p-filtration de la $H^0(\mu)$ (et de la $H^3(\mu)$ par dualité), j'utiliserai la notion de « D-filtration » (en l'honneur de Donkin, cf. [Don06]) de $\widehat{Z}(\mu)$, qui sera définie dans section 2.1. On va voir que cette filtration non seulement redonne la p-filtration de Jantzen pour $H^0(\mu)$ et $H^3(\mu)$ (Proposition 3) si μ est dominant ou anti-dominant, mais donne aussi une filtration analogue pour $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$ si $\mu \notin C \cup w_0 \cdot C$.

2.1 « D-filtration » de $\widehat{Z}(\mu) = \mathrm{Ind}_B^{BG_1}(\mu)$

Notons G_1 le premier noyau de Frobenius de G et $\widehat{Z}(\mu) = \mathrm{Ind}_B^{BG_1}(\mu)$.

Dans cette section, je vais considérer une filtration de $\widehat{Z}(\mu)$ qui se comportera bien pour le foncteur $H^0(G/BG_1, \bullet)$. Ce n'est pas une suite de composition comme BG_1-module car certains facteurs font apparaître des B-extensions de dimension 2, tordues par le Frobenius. Ces extensions apparaissent, au moins au niveau de formules de caractère, dans l'article [Don06] de Donkin. Pour cette raison, j'appelle cette filtration de $\widehat{Z}(\mu)$ la D-filtration.

Remarque 7. Notre $\widehat{Z}(\mu)$ est noté $\widehat{Z}_1'(\mu)$ dans [Jan03] II.9.

Notons $E_\alpha(\mu)$ l'unique B-module tel qu'il existe une suite exacte non scindée :

$$0 \longrightarrow \mu - \alpha \longrightarrow E_\alpha(\mu) \longrightarrow \mu \longrightarrow 0.$$

De même, notons $E_\beta(\mu)$ l'unique B-module tel qu'il existe une suite exacte non scindée :

$$0 \longrightarrow \mu - \beta \longrightarrow E_\beta(\mu) \longrightarrow \mu \longrightarrow 0.$$

Posons aussi $E_0(\mu) = \mu$.

On sait que $\widehat{Z}(\mu + p\mu') \cong \widehat{Z}(\mu) \otimes p\mu'$ comme BG_1-modules (cf. [Jan03] II.9.2), donc il suffit de considérer six cas pour $\mu \in X_1(T)$, cf. la figure et la définition ci-dessous.

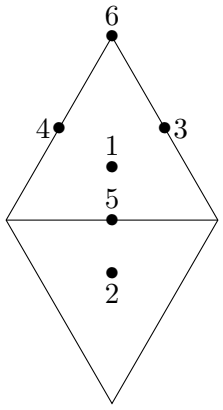


FIGURE 2.1 – Six cas dans $X_1(T)$

Définition 3. Soit $\mu = (x, y) \in X(T)$. Écrivons $x = x^1p + r$ et $y = y^1p + s$ avec $r, s \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$. On rappelle la terminologie suivante (voir par exemple [KH85]).

1. On dit que μ est de type Δ si $r < p-1$, $s < p-1$ et $r + s > p-2$;
2. On dit que μ est de type ∇ si $r + s < p-2$;
3. On dit que μ est α-singulier si $r = p-1$ et $s < p-1$;
4. On dit que μ est β-singulier si $s = p-1$ et $r < p-1$;
5. On dit que μ est γ-singulier si $r < p-1$,$s < p-1$ et $r + s = p-2$;
6. On dit que μ est α-β-singulier si $r = s = p-1$.

Pour $0 \leq r, s \leq p-2$, on pose $\overline{r} = p-r-2$ et $\overline{s} = p-s-2$.

D'abord, si $\mu = (p-1)\rho$ (correspondant au cas 6 dans la Figure 2.1) alors $\widehat{Z}(\mu) = L((p-1)\rho)$. Dans ce cas, la D-filtration est juste la filtration triviale.

2.1.1 Cas singulier pour une seule racine

Si μ est γ-singulier (correspondant au cas 5 dans la Figure 2.1) alors $\mu = (r, p-2-r)$ avec $0 \leq r \leq p-2$. Alors $s_\alpha \cdot \mu = \mu - (r+1)\alpha = (-r-2, p-1)$ et $s_\beta \cdot \mu = \mu - (p-1-r)\beta = (p-1, -p+r)$. Et $s_\gamma \cdot \mu = \mu - p\gamma = (-p+r, -r-2)$. Alors d'après [Irv86] 3.3, le graphe de $\widehat{Z}(r, p-2-r)$ comme TG_1-module, est donné par :

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{L}(r,\overline{r}) \otimes (-1,-1)^{(1)} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\widehat{L}(\overline{r},p-1) \otimes (-1,0)^{(1)} \arrow[dr] & & \widehat{L}(p-1,r) \otimes (0,-1)^{(1)} \arrow[dl] \\
 & \widehat{L}(r,\overline{r}) &
\end{tikzcd}$$

De plus, on a

$$\mathrm{Ext}^1_{BG_1}\left(\widehat{L}(\overline{r}, p-1) \otimes (-1,0)^{(1)}, \widehat{L}(p-1, r) \otimes (0,-1)^{(1)}\right) = 0$$

et

$$\mathrm{Ext}^1_{BG_1}\left(\widehat{L}(p-1,r)\otimes(0,-1)^{(1)}, \widehat{L}(\overline{r},p-1)\otimes(-1,0)^{(1)}\right) = 0$$

d'après [Jan03] II.9.21. Donc le graphe ci-dessus est aussi le graphe de $\widehat{Z}(r,p-2-r)$ comme BG_1-module.

Dans ce cas, une D-filtration est n'importe quelle suite de composition de $\widehat{Z}(\mu)$.

Si μ est α-singulier (correspondant au cas 3 dans la Figure 2.1) alors $\mu = (p-1,s)$ avec $0 \leq s \leq p-2$. On a

$$\begin{cases} \mu_3 = s_\beta \cdot \mu = \mu - (s+1)\beta = (p+s, -s-2) \\ \mu_4 = s_{\alpha,p} \cdot \mu_3 = \mu_3 - (s+1)\alpha = (p-2-s, -1) \\ \mu_2 = s_\alpha \mu_4 = \mu_4 - (p-1-s)\alpha = \mu_3 - p\alpha = (-p+s, p-s-2) \end{cases}$$

Alors d'après [Irv86] 5.2, le graphe de $\widehat{Z}(p-1,s)$ comme BG_1-module est donné par :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{L}(\overline{s},p-1)\otimes(0,-1)^{(1)} \arrow[d] \\
\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(1,-1)^{(1)} \arrow[d, Rightarrow, "-p\alpha"] \\
\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(-1,0)^{(1)} \arrow[d] \\
\widehat{L}(p-1,s)
\end{tikzcd}$$

où la flèche $\Longrightarrow$ indique une extension non scindée de $\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(1,-1)^{(1)}$ par $\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(-1,0)^{(1)}$. Or on a

$$\mathrm{Ext}^1_{BG_1}(\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(1,-1)^{(1)}, \widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(-1,0)^{(1)}) \cong k$$

d'après [Jan03] II.9.21 et on sait qu'il existe une extension non scindée

$$0 \longrightarrow \widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(-1,0)^{(1)} \longrightarrow \widehat{L}(s,\overline{s})\otimes E_\alpha(1,-1)^{(1)} \longrightarrow \widehat{L}(s,\overline{s})\otimes(1,-1)^{(1)} \longrightarrow 0,$$

donc la flèche $\Longrightarrow$ indique l'extension non scindée isomorphe à $\widehat{L}(s,\overline{s})\otimes E_\alpha(1,-1)^{(1)}$.

Dans ce cas, la D-filtration est la suivante :

$$\begin{aligned} 0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3 &= \widehat{Z}(p-1,s) \\ N_1 &\cong \widehat{L}(p-1,s) \\ N_2/N_1 &\cong \widehat{L}(s,\overline{s})\otimes E_\alpha(1,-1)^{(1)} \\ N_3/N_2 &\cong \widehat{L}(\overline{s},p-1)\otimes(0,-1)^{(1)}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

De même, si μ est β-singulier (correspondant au cas 4 dans la Figure 2.1) alors $\mu = (r,p-1)$ avec $0 \leq r \leq p-2$. On a

$$\begin{cases} \mu_3 = s_\alpha \cdot \mu = \mu - (r+1)\alpha = (-r-2, p+r) \\ \mu_4 = s_{\beta,p} \cdot \mu_3 = \mu_3 - (r+1)\beta = (-1, p-2-r) \\ \mu_2 = s_\beta \mu_4 = \mu_4 - (p-1-r)\beta = \mu_3 - p\beta = (p-2-r, -p+r) \end{cases}$$

Alors le graphe de $\widehat{Z}(r, p-1)$ comme BG_1-module est donné par :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{L}(p-1, p-2-r) \otimes (-1,0)^{(1)} \arrow[d] \\
\widehat{L}(p-2-r, r) \otimes (-1,1)^{(1)} \arrow[d, Rightarrow, "-p\beta"] \\
\widehat{L}(p-2-r, r)) \otimes (0,-1)^{(1)} \arrow[d] \\
\widehat{L}(r, p-1)
\end{tikzcd}$$

où la flèche $\Longrightarrow$ indique l'extension non scindée isomorphe à $\widehat{L}(p-2-r, r) \otimes E_\beta(-1,1)^{(1)}$.

Dans ce cas, <u>la D-filtration</u> est la suivante :

$$\begin{aligned}
0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3 &= \widehat{Z}(r, p-1) \\
N_1 &\cong \widehat{L}(r, p-1) \\
N_2/N_1 &\cong \widehat{L}(\overline{r}, r) \otimes E_\beta(-1,1)^{(1)} \\
N_3/N_2 &\cong \widehat{L}(p-1, \overline{r}) \otimes (-1,0)^{(1)}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1.2 Cas de l'alcôve supérieure Δ

Soient $r, s \geq 0$ tels que $r + s \leq p-3$ et soit $\mu = (\overline{r}, \overline{s})$.

Alors d'après [Irv86] 5.3, le graphe de $\widehat{Z}(\overline{r}, \overline{s})$ (correspondant au cas 1 dans la Figure 2.1) comme BG_1-module est donné par :

$$\begin{tikzcd}
& \widehat{L}(s,r) \otimes (-1,-1)^{(1)} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\widehat{L}(\overline{s}, r+s+1) \otimes (-1,0)^{(1)} \arrow[d] \arrow[ddr] \arrow[ddrr] & & \widehat{L}(r+s+1, \overline{r}) \otimes (0,-1)^{(1)} \arrow[d] \arrow[ddl] \arrow[ddll] \\
\widehat{L}(r, p-3-r-s) \otimes (-1,1)^{(1)} \arrow[d, Rightarrow, "-p\beta"] & & \widehat{L}(p-3-r-s, s) \otimes (1,-1)^{(1)} \arrow[d, Rightarrow, "-p\alpha"] \\
\widehat{L}(r, p-3-r-s) \otimes (0,-1)^{(1)} \arrow[dr] & \widehat{L}(s,r) \arrow[d] & \widehat{L}(p-3-r-s, s) \otimes (-1,0)^{(1)} \arrow[dl] \\
& \widehat{L}(\overline{r}, \overline{s}) &
\end{tikzcd}$$

où la flèche $\Longrightarrow$ à gauche indique une extension non scindée de $\widehat{L}(r, p-3-r-s) \otimes (-1,1)^{(1)}$ par $\widehat{L}(r, p-3-r-s) \otimes (0,-1)^{(1)}$. Or d'après [Jan03] II.9.21, il existe une unique telle extension à isomorphisme près, donc cette flèche $\Longrightarrow$ indique l'extension isomorphe à $\widehat{L}(r, p-3-r-s) \otimes E_\beta(-1,1)^{(1)}$. De même, la flèche $\Longrightarrow$ à droite indique une extension isomorphe à $\widehat{L}(p-3-r-s, s) \otimes E_\alpha(1,-1)^{(1)}$.

Dans ce cas, une D-filtration est une filtration induite par le graphe suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{L}(s,r)\otimes(-1,-1)^{(1)} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\widehat{L}(\overline{s},r+s+1)\otimes(-1,0)^{(1)} \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \widehat{L}(r+s+1,\overline{r})\otimes(0,-1)^{(1)} \arrow[d] \arrow[dl] \arrow[dll] \\
\widehat{L}(r,p-3-r-s)\otimes E_\beta(-1,1)^{(1)} \arrow[dr] & \widehat{L}(s,r) \arrow[d] & \widehat{L}(p-3-r-s,s)\otimes E_\alpha(1,-1)^{(1)} \arrow[dl] \\
 & \widehat{L}(\overline{r},\overline{s}) &
\end{tikzcd} . \tag{2.3}$$

Par exemple, la filtration suivante est une D-filtration :

$$\begin{aligned}
0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_6 \subset N_7 &= \widehat{Z}(\overline{r},\overline{s}) \\
N_1 &\cong \widehat{L}(\overline{r},\overline{s}) \\
N_2/N_1 &\cong \widehat{L}(s,r) \\
N_3/N_2 &\cong \widehat{L}(p-3-r-s,s)\otimes E_\alpha(1,-1)^{(1)} \\
N_4/N_3 &\cong \widehat{L}(r,p-3-r-s)\otimes E_\beta(-1,1)^{(1)} \\
N_5/N_4 &\cong \widehat{L}(r+s+1,\overline{r})\otimes(0,-1)^{(1)} \\
N_6/N_5 &\cong \widehat{L}(\overline{s},r+s+1)\otimes(-1,0)^{(1)} \\
N_7/N_6 &\cong \widehat{L}(s,r)\otimes(-1,-1)^{(1)}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

2.1.3 Cas de l'alcôve inférieure ∇

Soit $\mu = (r,s)$ avec $r,s \geq 0$ et $r+s \leq p-3$ (correspondant au cas 2 dans la Figure 2.1). Alors d'après [Irv86] 5.3, le graphe de $\widehat{Z}(r,s)$ comme BG_1-module est donné par :

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{L}(\overline{s},\overline{r})\otimes(-1,-1)^{(1)} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\widehat{L}(s,p-3-r-s)\otimes(0,-1)^{(1)} \arrow[d, Rightarrow, "-p\alpha"] \arrow[drr] & \widehat{L}(r,s)\otimes(-1,-1)^{(1)} \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \widehat{L}(p-3-r-s,r)\otimes(-1,0)^{(1)} \arrow[d, Rightarrow, "-p\beta"] \arrow[ddll] \\
\widehat{L}(s,p-3-r-s)\otimes(-2,0)^{(1)} \arrow[d] & & \widehat{L}(p-3-r-s,r)\otimes(0,-2)^{(1)} \arrow[d] \\
\widehat{L}(\overline{r},r+s+1)\otimes(-1,0)^{(1)} \arrow[dr] & & \widehat{L}(r+s+1,\overline{s})\otimes(0,-1)^{(1)} \arrow[dl] \\
 & \widehat{L}(r,s) &
\end{tikzcd}$$

où à nouveau la flèche $\Longrightarrow$ à gauche indique l'extension non scindée $\widehat{L}(s,p-3-r-s)\otimes E_\alpha(0,-1)^{(1)}$ et la flèche $\Longrightarrow$ à droite indique l'extension non scindée $\widehat{L}(p-3-r-s,r)\otimes E_\beta(-1,0)^{(1)}$ comme dans le cas de l'alcôve Δ.

Dans ce cas, une D-filtration est une filtration induite par le graphe suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{L}(\overline{s},\overline{r})\otimes(-1,-1)^{(1)} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\widehat{L}(s,p-3-r-s)\otimes E_\alpha(0,-1)^{(1)} \arrow[d] \arrow[drr] & \widehat{L}(r,s)\otimes(-1,-1)^{(1)} \arrow[dl] \arrow[dr] & \widehat{L}(p-3-r-s,r)\otimes E_\beta(-1,0)^{(1)} \arrow[d] \arrow[dll] \\
\widehat{L}(\overline{r},r+s+1)\otimes(-1,0)^{(1)} \arrow[dr] & & \widehat{L}(r+s+1,\overline{s})\otimes(0,-1)^{(1)} \arrow[dl] \\
 & \widehat{L}(r,s) &
\end{tikzcd} . \tag{2.5}$$

Par exemple, la filtration suivante est une D-filtration :

$$\begin{aligned}
0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_6 \subset N_7 &= \widehat{Z}(r,s)\\
N_1 &\cong \widehat{L}(r,s)\\
N_2/N_1 &\cong \widehat{L}(\overline{r},r+s+1)\otimes(-1,0)^{(1)}\\
N_3/N_2 &\cong \widehat{L}(r+s+1,\overline{s})\otimes(0,-1)^{(1)}\\
N_4/N_3 &\cong \widehat{L}(s,p-3-r-s)\otimes E_\alpha(0,-1)^{(1)}\\
N_5/N_4 &\cong \widehat{L}(p-3-r-s,r)\otimes E_\beta(-1,0)^{(1)}\\
N_6/N_5 &\cong \widehat{L}(r,s)\otimes(-1,-1)^{(1)}\\
N_7/N_6 &\cong \widehat{L}(\overline{s},\overline{r})\otimes(-1,-1)^{(1)}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2 Sur la cohomologie des B-modules $E_\alpha(\mu)$ et $E_\beta(\mu)$

Pour montrer les résultats principaux, il faut d'abord établir quelques propriétés des modules $H^i(E_\alpha(\mu))$ et $H^i(E_\beta(\mu))$.

Lemme 6. *On a $H^i(E_\alpha(0,y)) = H^i(E_\beta(x,0)) = 0$ pour tout $i\in\mathbb{N}$ et $x,y\in\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On a $E_\alpha(0,y)\cong L_\alpha(1,0)\otimes(-1,y)$, donc d'après l'identité tensorielle (cf. [Jan03] I.3.6) $H^i(P_\alpha/B,E_\alpha(0,y))\cong L_\alpha(1,0)\otimes H^i(P_\alpha/B,(-1,y)) = 0$ pour tout i. Et de même pour $E_\beta(x,0)$. □

Proposition 1. *Supposons que $\mu_1 = (ap^d+r,-ap^d)$ et $\mu_2 = ((a+1)p^d,-ap^d-s-2)$ avec $d\geq 0$, $a\in\{1,2,\cdots,p-1\}$, $r\geq -1$ et $s\leq p^d-1$. Alors*

$$H^2(E_\beta(\mu_1)) = H^2(E_\alpha(\mu_2)) = 0.$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur d. Lorsque $d=0$, on a $\mu_1=(a+r,-a)$ et $\mu_2=(a+1,-a-s-2)$ avec $r\geq -1$ et $s\leq 0$. Donc $H^2(\mu_1)=H^2(\mu_1-\beta)=H^2(\mu_2)=H^2(\mu_2-\alpha)=0$ d'après le Remarque 3. Par conséquent, $H^2(E_\beta(\mu_1))=H^2(E_\alpha(\mu_2))=0$.

Supposons le résultat établi au cran d et soient $\mu_1=(ap^{d+1}+r,-ap^{d+1})$ et $\mu_2=((a+1)p^{d+1},-ap^{d+1}-s-2)$ avec $r\geq -1$ et $s\leq p^{d+1}-1$.

1) Montrons d'abord que $E_\beta(\mu_1)=0$. Notons $\mu_1'=(r,0)$ et $\mu_1''=(-p^{d+1}+r,p^{d+1})$. Comme $\mu_1''=(-(p-1)p^d-(p^d-r-2)-2,p\cdot p^d)$, alors, en échangeant les rôles de α et β et en appliquant l'hypothèse de récurrence à α, on a $H^2(E_\beta(\mu_1''))=0$.

Rappelons les trois suites exactes de la sous-section 1.3.1 :

$$0 \longrightarrow K_a \longrightarrow L(0,a) \longrightarrow L(0,a-1)\otimes(0,1) \longrightarrow 0, \tag{2.7}$$

$$0 \longrightarrow M_a \longrightarrow K_a \longrightarrow (a,-a) \longrightarrow 0, \tag{2.8}$$

et

$$0 \longrightarrow (-a,0) \longrightarrow M_a \longrightarrow Q_a \longrightarrow 0. \tag{2.9}$$

Rappelons aussi la suite exacte de la sous-section 1.3.3 :

$$0 \longrightarrow M_a \longrightarrow L(0,a-1)\otimes(-1,0) \longrightarrow L(0,a-2)\otimes(-1,1) \longrightarrow 0. \tag{2.10}$$

Appliquons la d-ième puissance du morphisme de Frobenius à (2.7),(2.8), (2.9) et tensorisons par $E_\beta(r,0)$. Désignons encore les modules ainsi obtenus par $\widetilde{K}_a$,$\widetilde{M}_a$ et $\widetilde{Q}_a$. On obtient les suites exactes :

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}_a \longrightarrow L(0,a)^{d+1}\otimes E_\beta(\mu_1') \longrightarrow L(0,a-1)^{(d+1)}\otimes E_\beta(r,p^{d+1}) \longrightarrow 0. \tag{2.11}$$

$$0 \longrightarrow \widetilde{M}_a \longrightarrow \widetilde{K}_a \longrightarrow E_\beta(\mu_1) \longrightarrow 0. \tag{2.12}$$

$$0 \longrightarrow \widetilde{M}_a \longrightarrow L(0,a-1)^{(d+1)}\otimes E_\beta(r-p^{d+1},0) \longrightarrow L(0,a-2)^{(d+1)}\otimes E_\beta(\mu_1'') \longrightarrow 0. \tag{2.13}$$

Comme $H^2(E_\beta(\mu_1''))=0$ d'après l'hypothèse de récurrence et $H^3(E_\beta(r-p^{d+1},0))=0$ d'après le lemme 6, alors (2.13) donne $H^3(\widetilde{M}_a)=0$.

Comme (r,p^{d+1}) et $(r,p^{d+1})-\beta=(r+1,p^{d+1}-2)$ sont dominants donc n'ont pas de H^1, on a $H^1(E_\beta(r,p^{d+1}))=0$. Par ailleurs $H^2(E_\beta(\mu_1'))=0$ d'après le lemme 6, donc (2.11) donne $H^2(\widetilde{K}_a)=0$.

D'après (2.12), on a une suite exacte $H^2(\widetilde{K}_a) \longrightarrow H^2(E_\beta(\mu_1)) \longrightarrow H^3(\widetilde{M}_a)$, d'où $H^2(E_\beta(\mu_1))=0$.

2) Montrons maintenant que $E_\alpha(\mu_2)=0$. Notons $\mu_2'=(p^{d+1},-s-2)$ et $\mu_2''=(0,p^{d+1}-s-2)$.

Comme $\mu_2'=(p\cdot p^d,-(p-1)p^d-(s-p^{d+1}+p^d)-2)$ avec $s-p^{d+1}+p^d\le p^d-1$, alors d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient $H^2(E_\alpha(\mu_2'))=0$.

Appliquons la d-ième puissance du morphisme de Frobenius à (2.7),(2.8), (2.9) et tensorisons par $E_\alpha(\mu_2')$. On obtient les suites exactes suivantes :

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}_a \longrightarrow L(0,a)^{d+1}\otimes E_\alpha(\mu_2') \longrightarrow L(0,a-1)^{(d+1)}\otimes E_\alpha(p^{d+1},p^{d+1}-s-2) \longrightarrow 0. \tag{2.14}$$

$$0 \longrightarrow \widetilde{M}_a \longrightarrow \widetilde{K}_a \longrightarrow E_\alpha(\mu_2) \longrightarrow 0. \tag{2.15}$$

$$0 \longrightarrow \widetilde{M}_a \longrightarrow L(0,a-1)^{(d+1)}\otimes E_\alpha(0,-s-2) \longrightarrow L(0,a-2)^{(d+1)}\otimes E_\alpha(\mu_2'') \longrightarrow 0. \tag{2.16}$$

Comme $H^2(E_\alpha(\mu_2''))=H^2(E_\alpha(0,p^{d+1}-s-2))=0$ et $H^3(E_\alpha(0,-s-2))=0$ d'après le lemme 6, on déduit de (2.16) que $H^3(\widetilde{M}_a)=0$.

Comme $(p^{d+1},p^{d+1}-s-2)$ et $(p^{d+1},p^{d+1}-s-2)-\alpha=(p^{d+1}-2,p^{d+1}-s-1)$ sont dominants donc n'ont pas de H^1, on a $H^1(E_\alpha(p^{d+1},p^{d+1}-s-2))=0$. Par ailleurs $H^2(E_\alpha(\mu_2'))=0$, donc d'après (2.14) on a $H^2(\widetilde{K}_a)=0$.

Enfin, par (2.15) on a une suite exacte $H^2(\widetilde{K}_a) \longrightarrow H^2(E_\alpha(\mu_2)) \longrightarrow H^3(\widetilde{M}_a)$, ce qui donne $H^2(E_\alpha(\mu_2))=0$. Ceci termine la preuve de la Proposition 1. □

On déduit de la symétrie entre α et β le corollaire suivant :

Corollaire 2. *Soient $a \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$, $d \geq 0$, $m \geq ap^d - 1$ et $n \leq ap^d - 1$. Alors*

$$H^2(E_\beta(-n-2, ap^d)) = 0,$$

$$H^2(E_\alpha(-ap^d, m)) = 0.$$

Proposition 2. *Soit $\mu = (ap^d + r, -ap^d - s - 2)$ avec $a \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$ et $d \geq 0$.*

(i) Si $1 \leq r \leq p^d$ et $0 \leq s \leq p^d - 1$, alors $H^2(E_\alpha(\mu))$ admet la filtration à trois étages suivante :

$$H^2(E_\alpha(\mu)) = \begin{array}{|c|}\hline L(0, a-1)^{(d)} \otimes H^3(E_\alpha(\mu + (-a-1, a)p^d)) \\ \hline L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^2(E_\alpha(\mu + (-a-1, a+1)p^d)) \\ \hline L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(E_\alpha(\mu + (-a, a)p^d)) \\ \hline \end{array}. \tag{2.17}$$

(ii) Si $-1 \leq r \leq p^d - 2$ et $-2 \leq s \leq p^d - 3$, alors $H^2(E_\beta(\mu))$ admet la filtration à trois étages suivante :

$$H^2(E_\beta(\mu)) = \begin{array}{|c|}\hline L(0, a-1)^{(d)} \otimes H^3(E_\beta(\mu + (-a-1, a)p^d)) \\ \hline L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^2(E_\beta(\mu + (-a-1, a+1)p^d)) \\ \hline L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(E_\beta(\mu + (-a, a)p^d)) \\ \hline \end{array}. \tag{2.18}$$

Démonstration. $\boxed{\text{Montrons d'abord (i).}}$ Écrivons $E_\alpha(\mu) = E(\mu)$ pour abréger.

Soit $\mu = (ap^d + r, -ap^d - s - 2)$ avec $1 \leq r \leq p^d$ et $0 \leq s \leq p^d - 1$.

Notons $\mu' = (r, -s-2) = \mu \otimes (-a, a)p^d$ et $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2) = \mu \otimes (-a-1, a+1)p^d$. Alors $E(\mu') \cong E(\mu) \otimes (-a, a)p^d$ et $E(\mu'') \cong E(\mu) \otimes (-a-1, a+1)p^d$. Appliquons la d-ième puissance du morphisme de Frobenius à (2.7),(2.8), (2.9) et tensorisons par $E(\mu')$. Désignons les modules ainsi obtenus par $\widetilde{K}_a$,$\widetilde{M}_a$ et $\widetilde{Q}_a$. On obtient des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}_a \longrightarrow L(0, a)^{(d)} \otimes E(\mu') \longrightarrow L(0, a-1)^{(d)} \otimes E(r, p^d - s - 2) \longrightarrow 0. \tag{2.19}$$

$$0 \longrightarrow \widetilde{M}_a \longrightarrow \widetilde{K}_a \longrightarrow E(\mu) \longrightarrow 0 \tag{2.20}$$

$$0 \longrightarrow E(-ap^d + r, -s - 2) \longrightarrow \widetilde{M}_a \longrightarrow \widetilde{Q}_a \longrightarrow 0. \tag{2.21}$$

$$0 \longrightarrow \widetilde{M}_a \longrightarrow L(0, a-1)^{(d)} \otimes E(r - p^d, -s - 2) \longrightarrow L(0, a-2)^{(d)} \otimes E(\mu'') \longrightarrow 0. \tag{2.22}$$

Si $r \leq p^d - 1$, alors $(r - p^d, -s - 2)$ et $(r - p^d, -s - 2) - \alpha = (r - 2 - p^d, -s - 1)$ sont dans $w_0 \cdot C$ donc n'ont de la cohomologie qu'en degré 3. Si $r = p^d$, alors $H^i(E(r - p^d, -s - 2)) = 0$ pour tout i d'après le lemme 6. Donc dans tous les cas, on a $H^i(E(r - p^d, -s - 2)) = 0$ si $i \neq 3$. De plus, comme $s \leq p^d - 1$, alors $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$ et $\mu'' - \alpha = (-p^d + r - 2, p^d - s - 1)$ n'ont pas de cohomologie en degré 3, donc $H^3(E(\mu'')) = 0$. Donc d'après (2.22) on obtient l'isomorphisme

$$H^2(\widetilde{M}_a) \cong L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(E(\mu''))$$

et la suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu'')) \arrow[r] & H^3(\widetilde{M}_a) \arrow[dll, rounded corners] \\ & L(0,a-1)^{(d)} \otimes H^3(E(r-p^d,-s-2)) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{2.23}$$

Comme $(r, p^d - s - 2)$ et $(r, p^d - s - 2) - \alpha = (r-2, p^d - s - 1)$ n'ont de la cohomologie qu'en degré 0 car $r \geq 1$ et $s \leq p^d - 1$, on a $H^i(E(r, p^d - s - 2)) = 0$ si $i \neq 0$. De plus, comme $\mu' = (r, -s-2)$ et $\mu' - \alpha = (r-2, -s)$ n'ont pas de cohomologie en degré 3, on a $H^3(E(\mu')) = 0$. Donc d'après (2.19) on a $H^2(\widetilde{K}_a) \cong L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu'))$ et $H^3(\widetilde{K}_a) \cong L(0,a)^{(d)} \otimes H^3(E(\mu')) = 0$. D'après (2.20), on a

$$H^2(\widetilde{M}_a) \xrightarrow{f} H^2(\widetilde{K}_a) \longrightarrow H^2(E(\mu)) \longrightarrow H^3(\widetilde{M}_a) \longrightarrow 0 \tag{2.24}$$

car $H^3(\widetilde{K}_a) = 0$.

Par ailleurs, si $r = p^d$, alors $H^i(E(\mu'')) = H^i(E(0, p^d - s - 2)) = 0$ pour tout i d'après le lemme 6. Si $r \leq p^d - 1$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{FC}(H^1(E(\mu''))) &\subset \mathrm{FC}(H^1(\mu'')) \cup \mathrm{FC}(H^1(\mu'' - \alpha)) \\ &= \mathrm{FC}(H^1(-p^d + r, p^d - s - 2)) \cup \mathrm{FC}(H^1(-p^d + r - 2, p^d - s - 1)), \end{aligned}$$

donc tout plus haut poids d'un facteur de composition de $H^1(E(\mu''))$ est p^d-restreint d'après le lemme 1. De même,

$$\begin{aligned} \mathrm{FC}(H^2(E(\mu'))) &\subset \mathrm{FC}(H^2(\mu'')) \cup \mathrm{FC}(H^2(\mu' - \alpha)) \\ &= \mathrm{FC}(H^2(r, -s-2)) \cup \mathrm{FC}(H^2(r-2, -s-1)), \end{aligned}$$

donc tout plus haut poids d'un facteur de composition de $H^2(E(\mu'))$ est p^d-restreint d'après le lemme 1 (en fait, d'après la preuve du lemme 1, on peut voir que tout plus haut poids de $H^i(p^d, -s-2)$ est aussi p^d-restreint si $s \geq -1$). Donc

$$\mathrm{FC}(H^2(\widetilde{M}_a)) \cap \mathrm{FC}(H^2(\widetilde{K}_a)) = \varnothing$$

car $H^2(\widetilde{M}_a) \cong L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(E(\mu''))$ et $H^2(\widetilde{K}_a) \cong L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu'))$. Donc $f = 0$ dans (2.24).

En conclusion, si $\mu = (ap^d + r, -ap^d - s - 2)$ avec $1 \leq r \leq p^d$ et $0 \leq s \leq p^d - 1$, alors on a une filtration à trois étages de $H^2(E(\mu))$, donnée par (2.23) et par :

$$0 \longrightarrow L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu')) \longrightarrow H^2(E(\mu)) \longrightarrow H^3(\widetilde{M}_a) \longrightarrow 0. \tag{2.25}$$

Cette filtration implique (2.17).

$\boxed{\text{Montrons maintenant (ii).}}$ Écrivons $E_\beta(\mu) = E(\mu)$ pour abréger. Supposons $\mu = (ap^d + r, -ap^d - s - 2)$ avec $-1 \leq r \leq p^d - 2$ et $-1 \leq s \leq p^d - 3$ (On traitera le cas $s = -2$ à la fin).

Notons $\mu' = (r, -s-2) = \mu \otimes (-a, a)p^d$ et $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2) = \mu \otimes (-a-1, a+1)p^d$. Alors $E(\mu') \cong E(\mu) \otimes (-a, a)p^d$ et $E(\mu'') \cong E(\mu) \otimes (-a-1, a+1)p^d$. Appliquons la d-ième puissance du morphisme de Frobenius à (2.7),(2.8), (2.9) et tensorisons par $E(\mu')$. Désignons les modules ainsi obtenus par $\widetilde{K}_a$,$\widetilde{M}_a$ et $\widetilde{Q}_a$. On obtient les suites exactes

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}_a \longrightarrow L(0,a)^{(d)} \otimes E(\mu') \longrightarrow L(0,a-1)^{(d)} \otimes E(r, p^d - s - 2) \longrightarrow 0. \tag{2.26}$$

$$0 \longrightarrow \widetilde{M}_a \longrightarrow \widetilde{K}_a \longrightarrow E(\mu) \longrightarrow 0 \tag{2.27}$$

$$0 \longrightarrow E(-ap^d + r, -s-2) \longrightarrow \widetilde{M}_a \longrightarrow \widetilde{Q}_a \longrightarrow 0. \tag{2.28}$$

$$0 \longrightarrow \widetilde{M}_a \longrightarrow L(0, a-1)^{(d)} \otimes E(r-p^d, -s-2) \longrightarrow L(0, a-2)^{(d)} \otimes E(\mu'') \longrightarrow 0. \tag{2.29}$$

Comme $(r-p^d, -s-2)$ et $(r-p^d, -s-2) - \beta = (r+1-p^d, -s-4)$ sont dans $w_0 \cdot C$ donc n'ont de la cohomologie qu'en degré 3, on a $H^i(E(r-p^d, -s-2)) = 0$ si $i \neq 3$ et la suite exacte :

$$0 \longrightarrow V(s+2, p^d - r - 3) \longrightarrow H^3(E(r-p^d, -s-2)) \longrightarrow V(s, p^d - r - 2) \longrightarrow 0. \tag{2.30}$$

Donc par (2.29) on obtient

$$H^2(\widetilde{M}_a) \cong L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(E(\mu''))$$

et la suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L(0,a-2)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu'')) \arrow[r] & H^3(\widetilde{M}_a) \arrow[dll, bend left] \\ & L(0,a-1)^{(d)} \otimes H^3(E(r-p^d,-s-2)) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{2.31}$$

Comme $(r, p^d - s - 2)$ et $(r, p^d - s - 2) - \beta = (r+1, p^d - s - 4)$ n'ont de la cohomologie qu'en degré 0 car $r \geq -1$ et $s \leq p^d - 3$, alors $H^i(E(r, p^d - s - 2)) = 0$ si $i \neq 0$. Donc par (2.26) on a $H^2(\widetilde{K}_a) \cong L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu'))$ et $H^3(\widetilde{K}_a) \cong L(0,a)^{(d)} \otimes H^3(E(\mu')) = 0$ car μ' et $\mu' - \beta$ n'ont pas de cohomologie en degré 3.

Comme μ et $\mu - \beta$ n'ont pas de H^0 ni de H^3, on a $H^0(E(\mu)) = H^3(E(\mu)) = 0$. Donc par (2.27), on a une suite exacte :

$$H^2(\widetilde{M}_a) \xrightarrow{f} H^2(\widetilde{K}_a) \longrightarrow H^2(E(\mu)) \longrightarrow H^3(\widetilde{M}_a) \longrightarrow 0. \tag{2.32}$$

Par ailleurs, $\mathrm{FC}(H^1(E(\mu''))) \subset \mathrm{FC}(H^1(\mu'')) \cup \mathrm{FC}(H^1(\mu'' - \beta))$, donc tout plus haut poids d'un facteur de composition de $H^1(E(\mu''))$ est p^d-restreint d'après le lemme 1. De même, tout plus haut poids d'un facteur de composition de $H^2(E(\mu'))$ est p^d-restreint. Donc

$$\mathrm{FC}(H^2(\widetilde{M}_a)) \cap \mathrm{FC}(H^2(\widetilde{K}_a)) = \varnothing$$

car $H^2(\widetilde{M}_a) \cong L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^1(E(\mu''))$ et $H^2(\widetilde{K}_a) \cong L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu'))$. Donc $f = 0$ dans (2.32).

En conclusion, si $\mu = (ap^d + r, -ap^d - s - 2)$ avec $-1 \leq r \leq p^d - 2$ et $-1 \leq s \leq p^d - 3$, alors on a une filtration à trois étages pour $H^2(E(\mu))$ donnée par (2.31) et par :

$$0 \longrightarrow L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(E(\mu')) \longrightarrow H^2(E(\mu)) \longrightarrow H^3(\widetilde{M}_a) \longrightarrow 0\ . \tag{2.33}$$

Cette filtration implique (2.18) pour $-1 \leq r \leq p^d - 2$ et $-1 \leq s \leq p^d - 3$.

Il reste à montrer (2.18) pour $s = -2$ et $-1 \leq r \leq p^d - 2$. Dans ce cas, $\mu = (ap^d + r, -ap^d)$, donc d'après la Proposition 1, on a $H^2(E_\beta(\mu)) = 0$. Comme $\mu + (-a-1, a)p^d = (r - p^d, 0)$ et $\mu + (-a, a)p^d = (r, 0)$, on a

$$H^3(E_\beta(\mu + (-a-1, a)p^d)) = H^2(E_\beta(\mu + (-a, a)p^d)) = 0$$

d'après le lemme 6. En outre, posons

$$\mu'' = (\mu + (-a-1, a+1)) = (r - p^d, p^d),$$

alors $H^2(E_\beta(\mu'')) = 0$ d'après le Corollaire 2 car $r \geq -1$. Donc les deux membres de (2.18) sont nuls. Ceci termine la preuve de (ii) et donc de la Proposition 2.

□

2.3 La p-filtration de Jantzen

Tandis que Jantzen utilise une suite de composition de $\widehat{Z}(\mu)$ pour induire une p-filtration de $H^0(\mu)$ (et de $H^3(w_0 \cdot \mu)$ par dualité) pour μ dominant, je vais utiliser la D-filtration de $\widehat{Z}(\mu)$.

Lemme 7. *Soient G un groupe algébrique réductif sur un corps k et H un sous-groupe fermé. Soit N un H-module qui admet une filtration :*

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_\ell = N.$$

Posons $L_i = N_i/N_{i-1}$ pour $i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$. Si pour un $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\operatorname{ch} R^n \operatorname{Ind}_H^G(N) = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} R^n \operatorname{Ind}_H^G(L_i), \tag{2.34}$$

alors $R^n \operatorname{Ind}_H^G(N)$ admet une filtration

$$0 = R^n \operatorname{Ind}_H^G(N_0) \subset R^n \operatorname{Ind}_H^G(N_1) \subset \cdots \subset R^n \operatorname{Ind}_H^G(N_{\ell-1}) \subset R^n \operatorname{Ind}_H^G(N_\ell) = R^n \operatorname{Ind}_H^G(N)$$

telle que

$$R^n \operatorname{Ind}_H^G(N_i)/R^n \operatorname{Ind}_H^G(N_{i-1}) \cong R^n \operatorname{Ind}_H^G(L_i)$$

pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$.

Démonstration. Appliquons le foncteur $\operatorname{Ind}_H^G(\bullet)$ aux suites exactes suivantes :

$$0 \longrightarrow N_0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow L_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow L_2 \longrightarrow 0$$

$$\cdots$$

$$0 \longrightarrow N_{\ell-1} \longrightarrow N_\ell \longrightarrow L_\ell \longrightarrow 0.$$

On obtient :

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & R^{n-1} \operatorname{Ind}_H^G(L_1) \arrow[dll, "\partial_1^{n-1}"'] \\
R^n \operatorname{Ind}_H^G(N_0) \arrow[r] & R^n \operatorname{Ind}_H^G(N_1) \arrow[r] & R^n \operatorname{Ind}_H^G(L_1) \arrow[dll, "\partial_1^n"'] \\
R^{n+1} \operatorname{Ind}_H^G(N_0) \arrow[r] & \cdots, & \\
 & \cdots, &
\end{tikzcd}$$

$$
(*)\qquad
\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & R^{n-1}\operatorname{Ind}_H^G(L_i) \arrow[dll, "\partial_i^{n-1}"'] \\
R^n\operatorname{Ind}_H^G(N_{i-1}) \arrow[r] & R^n\operatorname{Ind}_H^G(N_i) \arrow[r] & R^n\operatorname{Ind}_H^G(L_i) \arrow[dll, "\partial_i^{n}"'] \\
R^{n+1}\operatorname{Ind}_H^G(N_{i-1}) \arrow[r] & \cdots, & \\
 & \cdots, & \\
 & \cdots \arrow[r] & R^{n-1}\operatorname{Ind}_H^G(L_\ell) \arrow[dll, "\partial_\ell^{n-1}"'] \\
R^n\operatorname{Ind}_H^G(N_{\ell-1}) \arrow[r] & R^n\operatorname{Ind}_H^G(N_\ell) \arrow[r] & R^n\operatorname{Ind}_H^G(L_\ell) \arrow[dll, "\partial_\ell^{n}"'] \\
R^{n+1}\operatorname{Ind}_H^G(N_{\ell-1}) \arrow[r] & \cdots. &
\end{tikzcd}
$$

Donc pour montrer le lemme, il suffit de montrer que $\partial_i^{n-1} = \partial_i^n = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$.

Or (2.34) nous donne

$$\dim R^n\operatorname{Ind}_H^G(N_\ell) = \dim R^n\operatorname{Ind}_H^G(N) = \sum_{i=1}^{\ell} \dim R^n\operatorname{Ind}_H^G(L_i),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\ell} \dim R^n\operatorname{Ind}_H^G(N_i) &= \sum_{i=1}^{\ell-1} \dim R^n\operatorname{Ind}_H^G(N_i) + \sum_{i=1}^{\ell} \dim R^n\operatorname{Ind}_H^G(L_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} \dim R^n\operatorname{Ind}_H^G(N_{i-1}) + \sum_{i=1}^{\ell} \dim R^n\operatorname{Ind}_H^G(L_i).
\end{aligned}$$

Donc on a forcément

$$\dim R^n\operatorname{Ind}_H^G(N_i) = \dim R^n\operatorname{Ind}_H^G(N_{i-1}) + \dim R^n\operatorname{Ind}_H^G(L_i)$$

et $\partial_i^{n-1} = \partial_i^n = 0$ pour tout i.

□

Proposition 3. *Soit $\lambda = (x, y)$ un poids tel que $x, y \geq -1$. D'après la section 2.1, il existe une D-filtration*

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_\ell = \widehat{Z}(w_0 \cdot \lambda) = \widehat{Z}(-y-2, -x-2)$$

telle que $N_i/N_{i-1} \cong \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}$ où $\delta_i \in \{0, \alpha, \beta\}$ (donc $r = 1, 3, 4,$ ou 7).

Alors il existe une filtration de $H^3(-y-2, -x-2) \cong V(\lambda)$:

$$0 = \widetilde{N_0} \subset \widetilde{N_1} \subset \cdots \subset \widetilde{N_\ell} = V(\lambda)$$

telle que

$$\widetilde{N_i}/\widetilde{N_{i-1}} \cong L(\nu_i^0) \otimes H^3(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}$$

pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$.

De plus, pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ et tout $j \neq 3$, on a $H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^1)) = 0$.

Démonstration. Posons $\widetilde{N_i} = H^3(G/BG_1, N_i)$. D'après le lemme 7, il suffit de montrer l'égalité suivante :

$$\operatorname{ch} H^3(-y-2,-x-2) = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^3(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}. \tag{2.35}$$

La caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\cdot) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \operatorname{ch} H^i(\cdot)$ est additive, donc

$$\chi(-y-2,-x-2) = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0)\chi(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}.$$

Comme $x, y \geq -1$, on a $\chi(-y-2,-x-2) = -\operatorname{ch} H^3(-y-2,-x-2)$. Si $-y-2 = ap+r$ et $-x-2 = bp+s$ avec $r, s \in \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$, alors $a, b \leq -1$. D'après la section 2.1, les $E_{\delta_i}(\nu_i^1)$ possibles sont :

- $(a, b), (a-1, b), (a, b-1), (a-1, b-1)$
- $E_\alpha(a+1, b-1), E_\alpha(a, b-1), E_\beta(a-1, b+1), E_\beta(a-1, b)$.

Tout poids de la première ligne n'a de la cohomologie qu'en degré 3. Pour la deuxième ligne : $E_\alpha(a, b-1)$ et $E_\beta(a-1, b)$ n'ont de la cohomologie qu'en degré 3. Et $E_\alpha(a+1, -b-1)$ n'a de la cohomologie qu'en degré 3 si $a \leq -2$; si $a = -1$, $(a+1, -b-1) = (0, -b-1)$, donc $H^2(E_\alpha(a+1, -b-1)) = 0$ par le lemme 6. Donc $E_\alpha(a+1, -b-1)$ n'a de la cohomologie qu'en degré 3 . De même pour $E_\beta(a-1, b+1)$.

Donc on a toujours $H^j(E_{\delta_i}(\nu_i)) = 0$ si $j \neq 3$. Par conséquent, pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ on a

$$H^j(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) \cong L(\nu_i^0) \otimes H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)} = 0$$

(cf. [Jan03] II.9.13) si $j \neq 3$ et $\chi(E_{\delta_i}(\nu_i^1)) = -\operatorname{ch} H^3(E_{\delta_i}(\nu_i^1))$, d'où l'égalité (2.35).

□

En utilisant la dualité de Serre contravariante, on obtient la :

Proposition 4. *Soit $\lambda = (x, y)$ un poids tel que $x, y \geq -1$. D'après la section 2.1, il existe une D-filtration*

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_\ell = \widehat{Z}(\lambda)$$

telle que $N_i/N_{i-1} \cong \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}$ où $\delta_i \in \{0, \alpha, \beta\}$ (donc $r = 1, 3, 4,$ ou 7).

Alors il existe une filtration de $H^0(\lambda)$:

$$0 = \widetilde{N_0} \subset \widetilde{N_1} \subset \cdots \subset \widetilde{N_\ell} = H^0(\lambda)$$

telle que

$$\widetilde{N_i}/\widetilde{N_{i-1}} \cong L(\nu_i^0) \otimes H^0(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}$$

pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$.

De plus, pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ et tout $j \neq 0$, on a $H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^1)) = 0$.

Avec cette filtration, on peut redémontrer l'existence d'une p-Weyl-filtration pour tout $\lambda \in X(T)^+$ si $G = \mathrm{SL}_3$ (cf. [Jan80] 3.13).

Plus précisément, supposons $\lambda = (a, b) \in X(T)^+$ et écrivons $a = a^1p + r$, $b = b^1p + s$ avec $0 \leq r, s \leq p-1$. Distinguons les cas suivants.

1) Si λ est de type Δ, alors les plus hauts poids des facteurs de composition de $\widehat{Z}(\lambda)$ sont donnés par la figure suivante, où $\lambda_1 = \lambda$ et les triangles équilatéraux sont des p-alcôves :

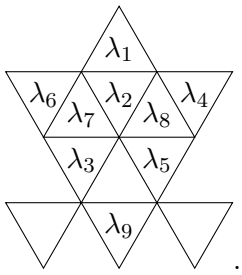


FIGURE 2.2 – type Δ

Remarque 8. Si $\widehat{L}(\lambda')$ est un facteur de composition de $\widehat{Z}(\lambda)$, alors $\lambda' \in W_p \cdot \lambda$, donc il suffit d'indiquer la p-alcôve contenant λ'.

Écrivons $\lambda_i = p\lambda_i^1 + \lambda_i^0$ avec $\lambda_i^0 \in X_1(T)$. On sait que $\lambda_5^0 = \lambda_6^0$ et $\widehat{L}(\lambda_5)$ et $\widehat{L}(\lambda_6)$ forment le facteur $\widehat{L}(\lambda_6^0) \otimes E_\beta(\lambda_6^1)^{(1)}$. De même, $\lambda_3^0 = \lambda_4^0$ et $\widehat{L}(\lambda_3)$ et $\widehat{L}(\lambda_4)$ forment le facteur $\widehat{L}(\lambda_4^0) \otimes E_\beta(\lambda_4^1)^{(1)}$. Appliquons le foncteur $\mathrm{Ind}_{BG_1}^G(\bullet)$ aux suites exactes suivantes :

$$0 \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_3) \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_4^0) \otimes E_\alpha(\lambda_4^1)^{(1)} \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_4) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_5) \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_6^0) \otimes E_\beta(\lambda_6^1)^{(1)} \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_6) \longrightarrow 0.$$

On obtient

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L(\lambda_3^0) \otimes H^0(\lambda_3^1)^{(1)} \arrow[r] & L(\lambda_4^0) \otimes H^0(E_\alpha(\lambda_4^0))^{(1)} \arrow[r] & L(\lambda_4^0) \otimes H^0(\lambda_4^1)^{(1)} \arrow[dll, "\partial_\alpha"] \\
& L(\lambda_3^0) \otimes H^1(\lambda_3^1)^{(1)} \arrow[r] & \cdots ,
\end{tikzcd} \tag{2.36}$$

et

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L(\lambda_5^0) \otimes H^0(\lambda_5^1)^{(1)} \arrow[r] & L(\lambda_6^0) \otimes H^0(E_\beta(\lambda_6^0))^{(1)} \arrow[r] & L(\lambda_6^0) \otimes H^0(\lambda_6^1)^{(1)} \arrow[dll, "\partial_\beta"] \\
& L(\lambda_5^0) \otimes H^1(\lambda_5^1)^{(1)} \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd} \tag{2.37}$$

Mais on a $\lambda_3^1 = (a^1 - 1, b^1)$ et $\lambda_5^1 = (a^1, b^1 - 1)$, donc $\lambda_3^1, \lambda_5^1 \in C$. Par conséquent, on a $H^1(\lambda_3^1) = H^1(\lambda_5^1) = 0$, d'où $\partial_\alpha = \partial_\beta = 0$. C'est-à-dire, $L(\lambda_3^0) \otimes H^0(E_\alpha(\lambda_4^0))^{(1)}$ est juste une extension de $L(\lambda_4^0) \otimes H^0(\lambda_4^1)^{(1)}$ par $L(\lambda_3^0) \otimes H^0(\lambda_3^1)^{(1)}$, et $L(\lambda_5^0) \otimes H^0(E_\beta(\lambda_6^0))^{(1)}$ est juste une extension de $L(\lambda_6^0) \otimes H^0(\lambda_6^1)^{(1)}$ par $L(\lambda_5^0) \otimes H^0(\lambda_5^1)^{(1)}$.

Donc d'après la Proposition 4, il existe dans ce cas une filtration de $H^0(\lambda)$ dont les quotients sont les $L(\nu_i^0) \otimes H^0(\lambda_i^1)^{(1)}$ pour $i \in \{1, 2, \cdots, 9\}$. Certains d'entre eux peuvent être nuls si l'alcôve en question n'est pas dans C, mais à part cela il n'y a pas d'effacement.

2) Si λ est de type ∇, alors les plus hauts poids des facteurs de composition de $\widehat{Z}(\lambda)$ sont donnés par la figure suivante, où $\lambda_1 = \lambda$:

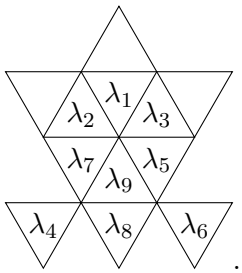


Figure 2.3 – type ∇

Écrivons $\lambda_i = p\lambda_i^1 + \lambda_i^0$ avec $\lambda_i^0 \in X_1(T)$. On sait que $\lambda_6^0 = \lambda_7^0$ et $\widehat{L}(\lambda_6)$ et $\widehat{L}(\lambda_7)$ forment le facteur $\widehat{L}(\lambda_7^0) \otimes E_\beta(\lambda_7^1)^{(1)}$. De même, $\lambda_4^0 = \lambda_5^0 \widehat{L}(\lambda_4)$ et $\widehat{L}(\lambda_5)$ forment le facteur $\widehat{L}(\lambda_5^0) \otimes E_\beta(\lambda_5^1)^{(1)}$. Appliquons le foncteur $\mathrm{Ind}_{BG_1}^G(\bullet)$ aux suites exactes suivantes :

$$0 \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_4) \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_5^0) \otimes E_\alpha(\lambda_5^1)^{(1)} \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_5) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_6) \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_7^0) \otimes E_\beta(\lambda_7^1)^{(1)} \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_7) \longrightarrow 0.$$

On obtient

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L(\lambda_4^0) \otimes H^0(\lambda_4^1)^{(1)} \arrow[r] & L(\lambda_5^0) \otimes H^0(E_\alpha(\lambda_5^0))^{(1)} \arrow[r] & L(\lambda_5^0) \otimes H^0(\lambda_5^1)^{(1)} \arrow[dll, "\partial_\alpha"] \\
& L(\lambda_4^0) \otimes H^1(\lambda_4^1)^{(1)} \arrow[r] & \cdots ,
\end{tikzcd} \tag{2.38}$$

et

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L(\lambda_6^0) \otimes H^0(\lambda_6^1)^{(1)} \arrow[r] & L(\lambda_7^0) \otimes H^0(E_\beta(\lambda_7^0))^{(1)} \arrow[r] & L(\lambda_7^0) \otimes H^0(\lambda_7^1)^{(1)} \arrow[dll, "\partial_\beta"] \\
& L(\lambda_6^0) \otimes H^1(\lambda_6^1)^{(1)} \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd} \tag{2.39}$$

De plus, on a $\lambda_4^1 = (a^1 - 2, b^1)$ et $\lambda_6^1 = (a^1, b^1 - 2)$.

Si $a^1 \geq 1$ et $b^1 \geq 1$, on a $\lambda_4^1, \lambda_6^1 \in C$ et $H^1(\lambda_4^1) = H^1(\lambda_6^1) = 0$, d'où $\partial_\alpha = \partial_\beta = 0$. C'est-à-dire, $L(\lambda_4^0) \otimes H^0(E_\alpha(\lambda_5^0))^{(1)}$ est juste une extension de $L(\lambda_5^0) \otimes H^0(\lambda_5^1)^{(1)}$ par $L(\lambda_4^0) \otimes H^0(\lambda_4^1)^{(1)}$, et $L(\lambda_6^0) \otimes H^0(E_\beta(\lambda_7^0))^{(1)}$ est juste une extension de $L(\lambda_7^0) \otimes H^0(\lambda_7^1)^{(1)}$ par $L(\lambda_6^0) \otimes H^0(\lambda_6^1)^{(1)}$.

Donc d'après la Proposition 4, il existe dans ce cas une filtration de $H^0(\lambda)$ dont les quotients sont $L(\nu_i^0) \otimes H^0(\lambda_i^1)^{(1)}$ pour $i \in \{1, 2, \cdots, 9\}$ (certains peuvent être nuls).

Si $a^1 = 0$, alors $\lambda_5^1 = (a^1, b^1 - 1) = (0, b^1 - 1)$, d'où $H^i(E_\alpha(\lambda_5^1)) = 0$ pour tout i d'après le lemme 6. Donc le morphisme de bord ∂_α dans (2.38) est un isomorphisme de $L(\lambda_5^0) \otimes H^0(\lambda_5^1)^{(1)}$ sur $L(\lambda_4^0) \otimes H^1(\lambda_4^1)^{(1)}$. Donc dans ce cas, non seulement le facteur correspondant à λ_4 n'apparaît pas, mais le facteur correspondant à λ_5 est « effacé » dans $H^0(\lambda)$.

De même, si $b^1 = 0$, alors le facteur λ_7 est « effacé » dans $H^0(\lambda)$.

3) Si λ est α-singulier, alors les plus hauts poids des facteurs de composition de $\widehat{Z}(\lambda)$ sont donnés par la figure suivante, où $\lambda_1 = \lambda$:

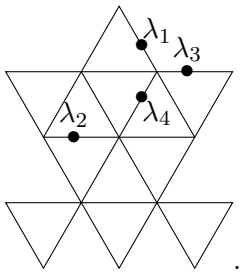


FIGURE 2.4 – α-singulier

Écrivons $\lambda_i = p\lambda_i^1 + \lambda_i^0$ avec $\lambda_i^0 \in X_1(T)$. On sait que $\lambda_2^0 = \lambda_3^0 = (s, \overline{s})$ et $\widehat{L}(\lambda_2)$ et $\widehat{L}(\lambda_3)$ forment le facteur $\widehat{L}(\lambda_3^0) \otimes E_\alpha(\lambda_3^1)^{(1)}$. Appliquons le foncteur $\mathrm{Ind}_{BG_1}^G(\bullet)$ à la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_2) \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_3^0) \otimes E_\alpha(\lambda_3^1)^{(1)} \longrightarrow \widehat{L}(\lambda_3) \longrightarrow 0.$$

On obtient

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L(\lambda_2^0) \otimes H^0(\lambda_2^1)^{(1)} \arrow[r] & L(\lambda_3^0) \otimes H^0(E_\alpha(\lambda_3^0))^{(1)} \arrow[r] & L(\lambda_3^0) \otimes H^0(\lambda_3^1)^{(1)} \arrow[dll, "\partial_\alpha"] \\ & L(\lambda_2^0) \otimes H^1(\lambda_2^1)^{(1)} \arrow[r] & \cdots . \end{tikzcd} \tag{2.40}$$

De plus, on a $\lambda_2^1 = (a^1 - 1, b^1) \in C$ car $a^1, b^1 \geq 0$, d'où $H^1(\lambda_2^1) = 0$. C'est-à-dire, $L(\lambda_2^0) \otimes H^0(E_\alpha(\lambda_3^0))^{(1)}$ est juste une extension de $L(\lambda_3^0) \otimes H^0(\lambda_3^1)^{(1)}$ par $L(\lambda_2^0) \otimes H^0(\lambda_2^1)^{(1)}$.

Donc d'après la Proposition 4, il existe dans ce cas une filtration de $H^0(\lambda)$ dont les quotients sont les $L(\nu_i^0) \otimes H^0(\lambda_i^1)^{(1)}$ pour $i \in \{1, 2, \cdots, 4\}$.

4) Si λ est β-singulier, alors les plus hauts poids des facteurs de composition de $\widehat{Z}(\lambda)$ sont donnés par la figure suivante, où $\lambda_1 = \lambda$:

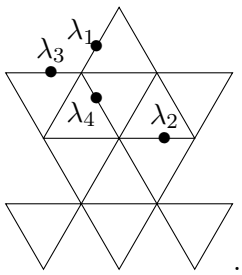


FIGURE 2.5 – β-singulier

Comme dans le cas α-singulier, il existe dans ce cas une filtration de $H^0(\lambda)$ dont les quotients sont $L(\nu_i^0) \otimes H^0(\lambda_i^1)^{(1)}$ pour $i \in \{1, 2, \cdots, 4\}$.

5) Si λ est γ-singulier, alors les plus hauts poids des facteurs de composition de $\widehat{Z}(\lambda)$ sont donnés par la figure suivante, où $\lambda_1 = \lambda$:

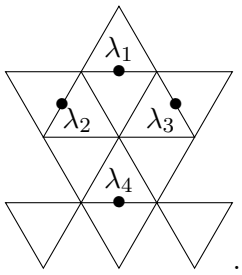


Figure 2.6 – γ-singulier

Comme il n'y a pas de facteur $E_\alpha(\nu)$ ou $E_\beta(\nu)$ dans ce cas, alors d'après la Proposition 4 il existe une filtration de $H^0(\lambda)$ dont les quotients sont les $L(\nu_i^0) \otimes H^0(\lambda_i^1)^{(1)}$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

6) Si λ est α-β-singulier, alors

$$\widehat{Z}(\lambda) \otimes \widehat{L}(p-1, p-1) \otimes (a^1, b^1)^{(1)} = \widehat{L}(\lambda^0) \otimes p\lambda^1.$$

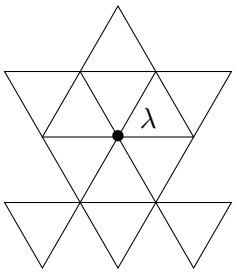


Figure 2.7 – α-β-singulier

Dans ce cas, on a

$$H^0(\lambda) \cong L(\lambda^0) \otimes H^0(\lambda^1)^{(1)}.$$

En conclusion, on obtient comme corollaire une autre démonstration du résultat suivant de Jantzen ([Jan80] 3.13, voir aussi [KH85] 2.4) :

Corollaire 3 (Jantzen)**.** *Soit $\lambda = (a, b) \in X(T)^+$. Écrivons $a = a^1 p + r$ et $b = b^1 p + s$ avec $0 \leq r, s \leq p-1$. Soit*

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{\ell-1} \subset N_\ell = \widehat{Z}(\lambda)$$

une suite de composition de $\widehat{Z}(\lambda)$ induite par une D-filtration. Notons $N_i/N_{i-1} \cong \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes p\nu_i^1$ pour $i \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$ et $\nu_i = \nu_i^0 + p\nu_i^1$. Posons

$$\widetilde{N_i} = \mathrm{Ind}_{BG_1}^G(N_i) \cong H^0(G/BG_1, N_i).$$

Alors il existe une filtration

$$0 = \widetilde{N_0} \subset \widetilde{N_1} \subset \cdots \subset \widetilde{N_{\ell-1}} \subset \widetilde{N_\ell} = H^0(\lambda)$$

telle que $\widetilde{N_i}/\widetilde{N_{i-1}} \cong L(\nu_i^0) \otimes M_i^{(1)}$ où

$$M_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \notin X(T)^+, \\ 0 & \text{si } \lambda \text{ est de type } \nabla, a^1 = 0 \text{ et } \nu_i = \lambda' \text{ dans la figure 2.8}, \\ 0 & \text{si } \lambda \text{ est de type } \nabla, b^1 = 0 \text{ et } \nu_i = \lambda' \text{ dans la figure 2.9}, \\ H^0(\nu_i^1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

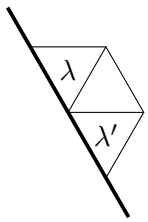


FIGURE 2.8 – Alcôve ∇ touchant le mur pour α

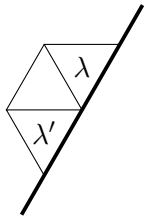


FIGURE 2.9 – Alcôve ∇ touchant le mur pour β

Par dualité, on obtient aussi une p-Weyl-filtration pour le module de Weyl $V(\lambda)$.

2.4 Existence d'une p-H^i-D-filtration

Supposons maintenant que $\mu \notin C \cup w_0 \cdot C$. Alors $\mu = (m, -n-2)$ ou $(-n-2, m)$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. D'après la symétrie entre α et β, on peut supposer que $\mu = (m, -n-2)$ sans perte de généralité.

Écrivons $m = m^1 p + r$ et $n = n^1 p + s$ avec $0 \leq s, r < p$. D'après la section 2.1, il existe une D-filtration de $\widehat{Z}(\mu)$:

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_\ell = \widehat{Z}(\mu)$$

telle que $N_i/N_{i-1} \cong \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}$ où $\delta_i \in \{0, \alpha, \beta\}$. Listons tous les $\widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)$ possibles :

(I) si μ est de type Δ, il y a les sept facteurs suivants :

$$\begin{aligned}
&\widehat{L}(r, \overline{s}) \otimes (m^1, -n^1 - 1)^{(1)}, \quad \widehat{L}(s, \overline{r}) \otimes (m^1, -n^1 - 1)^{(1)}, \\
&\widehat{L}(r - s - 1, s) \otimes E_\alpha(m^1 + 1, -n^1 - 2)^{(1)}, \quad \widehat{L}(\overline{r}, r - s - 1) \otimes E_\beta(m^1 - 1, -n^1)^{(1)}, \\
&\widehat{L}(\overline{r} + s + 1, r) \otimes (m^1, -n^1 - 2)^{(1)}, \quad \widehat{L}(\overline{s}, \overline{r} + s + 1) \otimes (m^1 - 1, -n^1 - 1)^{(1)}, \\
&\widehat{L}(s, \overline{r}) \otimes (m^1 - 1, -n^1 - 2)^{(1)};
\end{aligned} \tag{2.41}$$

(II) si μ est de type ∇, il y a les sept facteurs suivants :

$$\begin{aligned}
&\widehat{L}(r, \overline{s}) \otimes (m^1, -n^1 - 1)^{(1)}, \quad \widehat{L}(\overline{r}, r + \overline{s} + 1) \otimes (m^1 - 1, -n^1 - 1)^{(1)}, \\
&\widehat{L}(r + \overline{s} + 1, s) \otimes (m^1, -n^1 - 2)^{(1)}, \quad \widehat{L}(\overline{s}, s - r - 1) \otimes E_\alpha(m^1, -n^1 - 2)^{(1)}, \\
&\widehat{L}(s - r - 1, r) \otimes E_\beta(m^1 - 1, -n^1 - 1)^{(1)}, \quad \widehat{L}(r, \overline{s}) \otimes (m^1 - 1, -n^1 - 2)^{(1)}, \\
&\widehat{L}(s, \overline{r}) \otimes (m^1 - 1, -n^1 - 2)^{(1)};
\end{aligned} \tag{2.42}$$

(III) si μ est α-singulier, il y a les trois facteurs suivants :

$$\begin{aligned}&\widehat{L}(p-1,\overline{s})\otimes(m^1,-n^1-1)^{(1)},\quad \widehat{L}(\overline{s},s)\otimes E_\alpha(m^1+1,-n^1-2)^{(1)},\\&\widehat{L}(s,p-1)\otimes(m^1,-n^1-2)^{(1)};\end{aligned}\tag{2.43}$$

(IV) si μ est β-singulier, il y a les trois facteurs suivants :

$$\begin{aligned}&\widehat{L}(r,p-1)\otimes(m^1,-n^1-2)^{(1)},\quad \widehat{L}(\overline{r},r)\otimes E_\beta(m^1-1,-n^1-1)^{(1)},\\&\widehat{L}(p-1,\overline{r})\otimes(m^1-1,-n^1-2)^{(1)};\end{aligned}\tag{2.44}$$

(V) si μ est γ-singulier, il y a les quatre facteurs suivants :

$$\begin{aligned}&\widehat{L}(r,\overline{r})\otimes(m^1,-n^1-1)^{(1)},\quad \widehat{L}(p-1,r)\otimes(m^1,-n^1-2)^{(1)},\\&\widehat{L}(\overline{r},p-1)\otimes(m^1-1,-n^1-1)^{(1)},\quad \widehat{L}(r,\overline{r})\otimes(m^1-1,-n^1-2)^{(1)};\end{aligned}\tag{2.45}$$

(VI) si μ est α-β-singulier, il n'y a que le facteur :

$$\widehat{L}(p-1,p-1)\otimes(m^1,-n^1-2)^{(1)}.\tag{2.46}$$

Donc pour la partie à tordre par le Frobenius, il n'y a que les huit possibilités suivantes :

$$\begin{aligned}&(m^1,-n^1-1),(m^1-1,-n^1-1),(m^1,-n^1-2),(m^1-1,-n^1-2)\\&E_\alpha(m^1+1,-n^1-2),E_\alpha(m^1,-n^1-2),E_\beta(m^1-1,-n^1),E_\beta(m^1-1,-n^1-1).\end{aligned}\tag{2.47}$$

Énonçons maintenant le théorème principal de ce chapitre :

Théorème 5 (Existence d'une p-H^i-D-filtration)**.** *Supposons que $\mu\notin C\cup w_0\cdot C$. Soit*

$$0=N_0\subset N_1\subset N_2\subset\cdots\subset N_\ell=\widehat{Z}(\mu)$$

une D-filtration de $\widehat{Z}(\mu)$ (cf. la section 2.1) telle que $N_i/N_{i-1}\cong\widehat{L}(\nu_i^0)\otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}$ où $\delta_i\in\{0,\alpha,\beta\}$. Alors il existe une filtration de $H^1(\mu)$:

$$0=\widetilde{N_0}\subset\widetilde{N_1}\subset\widetilde{N_1}\subset\cdots\subset\widetilde{N_\ell}=H^1(\mu)$$

où $\widetilde{N_i}\cong H^1(G/BG_1,N_i)$ et l'on a $\widetilde{N_i}/\widetilde{N_{i-1}}\cong L(\nu_i^0)\otimes H^1(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}$.

De même, il existe une filtration de $H^2(\mu)$:

$$0=\widetilde{N_0}\subset\widetilde{N_1}\subset\widetilde{N_1}\subset\cdots\subset\widetilde{N_\ell}=H^2(\mu)$$

où $\widetilde{N_i}\cong H^2(G/BG_1,N_i)$ et l'on a $\widetilde{N_i}/\widetilde{N_{i-1}}\cong L(\nu_i^0)\otimes H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}$.

De plus, si $\mu=(m,-n-2)$ avec $m=m^1p+r$, $n=n^1p+s$ et $0\le r,s\le p-1$, alors la liste des ν_i^0,ν_i^1 se trouve dans (2.41),(2.42),(2.43),(2.44),(2.45) *et* (2.46)*.*

On appelle cette filtration de $H^i(\mu)$ « **une p-H^i-D-filtration** » .

Avant de démontrer ce théorème, prouvons d'abord le lemme suivant :

Lemme 8. *Soit $\mu=(m,-n-2)$ avec $m,n\in\mathbb{N}$. Utilisons les notations du Théorème 5. Alors*

$$H^0(G/BG_1,N_i/N_{i-1})=H^3(G/BG_1,N_i/N_{i-1})=0$$

pour $1\le i\le\ell$ et

$$H^0(G/BG_1,N_i)=H^3(G/BG_1,N_i)=0$$

pour $0\le i\le\ell$.

Démonstration. Écrivons $m = m^1p + r$ et $n = n^1p + s$ avec $0 \leq s, r < p$.

Comme $H^j(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) \cong L(\nu_i^0) \otimes H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^{(1)}))^1$ pour tout i, j (cf. [Jan03] II.9.13), pour montrer la première assertion il suffit de montrer que $H^0(E) = H^3(E) = 0$ pour tout E dans (2.47).

Comme $m^1, n^1 \geq 0$, on a $m^1 - 1 \geq -1$, $-n^1 - 1 \leq -1$ et $-n^1 - 2 \leq -2$. Donc aucun poids dans la première ligne de (2.47) n'a de H^0 ou H^3. Les deux poids de $E_\alpha(m^1 + 1, -n^1 - 2)$ sont $(m^1 + 1, -n^1 - 2)$ et $(m^1 - 1, -n^1 - 1)$, qui n'ont pas de H^0 ou H^3, d'où l'assertion pour $E_\alpha(m^1 + 1, -n^1 - 2)$.

Les deux poids de $E_\alpha(m^1, -n^1 - 2)$ sont $(m^1, -n^1 - 2)$ et $(m^1 - 2, -n^1 - 1)$, qui n'ont jamais de H^0 car $-n^1 - 1 \leq -1$. Si $m^1 \geq 1$, ils n'ont pas de H^3 non plus. Si $m^1 = 0$, le poids $(m^1 - 2, -n^1 - 1)$ peut avoir un H^3 non nul. Mais dans ce cas, on a encore que $H^3(E_\alpha(m^1, -n^1 - 2) = H^3(E_\alpha(0, -n^1 - 2)) = 0$ par le lemme 6.

Les deux poids de $E_\beta(m^1 - 1, -n^1)$ sont $(m^1 - 1, -n^1)$ et $(m^1, -n^1 - 2)$, qui n'ont jamais de H^3 car $m^1 - 1 \geq 0$. Si $n^1 \geq 1$, ils n'ont pas de H^0 non plus. Si $n^1 = 0$, on a encore que $H^0(E_\beta(m^1 - 1, -n^1)) = H^0(E_\beta(m^1 - 1, 0)) = 0$ par le lemme 6.

En conclusion, on a que $H^0(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) = H^3(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq \ell$.

Montrons la deuxième assertion par récurrence sur i. Pour $i = 0$, $N_0 = 0$ par définition, et le résultat est évident. Supposons maintenant que $H^0(G/BG_1, N_i) = H^3(G/BG_1, N_i) = 0$ pour un $i \in \{0, 1, \cdots, l - 1\}$. En appliquant le foncteur $H^0(G/BG_1, \cdot)$ à la suite exacte de BG_1-modules :

$$0 \longrightarrow N_i \longrightarrow N_{i+1} \longrightarrow N_{i+1}/N_i \longrightarrow 0$$

on obtient deux suites exacte de G-modules :

$$0 \longrightarrow H^0(G/BG_1, N_i) \longrightarrow H^0(G/BG_1, N_{i+1}) \longrightarrow H^0(G/BG_1, N_{i+1}/N_i) \longrightarrow$$

et

$$\longrightarrow H^3(G/BG_1, N_i) \longrightarrow H^3(G/BG_1, N_{i+1}) \longrightarrow H^3(G/BG_1, N_{i+1}/N_i) \longrightarrow 0.$$

Donc $H^0(G/BG_1, N_{i+1}) = H^3(G/BG_1, N_{i+1}) = 0$ par l'hypothèse de récurrence et la première assertion.

□

Démonstration du Théorème 5. Par dualité de Serre contravariante, on a $H^i(m, -n-2) \cong H^{3-i}(-m - 2, n)$, donc il suffit de traiter le cas où $m \geq n$.

Pour un BG_1-module M, notons

$$\chi_1(M) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{ch} H^i(G/BG_1, M).$$

Comme le foncteur $\mathrm{Ind}_B^{BG_1}$ est exact ([Jan03] II.9.12), alors pour tout B-module M, on a

$$\chi(M) = \chi_1(\mathrm{Ind}_B^{BG_1}(M)).$$

Comme la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_1(\cdot)$ est additive sur les suites exactes, on a

$$\chi(\mu) = \chi_1(\widehat{Z}(\mu)) = \sum_{i=1}^{\ell} \chi_1(N_i/N_{i-1}). \tag{2.48}$$

Comme $\mu \notin C \cup w_0 \cdot C$, on a

$$\chi(\mu) = -\operatorname{ch} H^1(\mu) + \operatorname{ch} H^2(\mu). \tag{2.49}$$

En outre, d'après le lemme 8, on a

$$\chi_1(N_i/N_{i-1}) = -\operatorname{ch} H^1(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) + \operatorname{ch} H^2(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) \tag{2.50}$$

pour tout i.

Donc d'après (2.48), (2.49) et (2.50), on a

$$\operatorname{ch} H^1(\mu) - \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} H^1(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) = \operatorname{ch} H^2(\mu) - \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} H^2(G/BG_1, N_i/N_{i-1}). \tag{2.51}$$

Comme on a

$$H^j(G/BG_1, N_i/N_{i-1}) \cong H^j(G/BG_1, \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}) \cong L(\nu_i^0) \otimes H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)},$$

alors le Théorème 5 découle du lemme 7 du paragraphe 2.3 et de la proposition suivante. □

Proposition 5. *Soit $\mu = (m, -n-2)$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Soit*

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_\ell = \widehat{Z}(\mu)$$

une D-filtration de $\widehat{Z}(\mu)$ (cf. la section 2.1) telle que $N_i/N_{i-1} \cong \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}$ où $\delta_i \in \{0, \alpha, \beta\}$. Si $m \geq n$, alors on a

$$\operatorname{ch} H^2(\mu) = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}. \tag{2.52}$$

2.5 Preuve de la Proposition 5

Démonstration. Écrivons $m = m^1 p + r$ et $n = n^1 p + s$ avec $0 \leq r, s \leq p-1$.

$\boxed{\text{Supposons d'abord que } n = 0.}$ Alors $H^2(\mu) = H^2(m, -2) = 0$. Dans ce cas, on a $n^1 = s = 0$ et μ ne peut pas être de type ∇ ou β-singulier, donc les $E_{\delta_i}(\nu_i^1)$ possibles sont :

$$(m^1, -1), (m^1 - 1, -1), (m^1, -2), (m^1 - 1, -2), E_\alpha(m^1 + 1, -2), E_\beta(m^1 - 1, 0). \tag{2.53}$$

On sait que $H^1(m^1, -1) = H^1(m^1 - 1, -1) = 0$ pour tout m^1 (cf. [Jan03] II.5.4.d)). Comme $m^1 \geq 0$, on a $H^2(m^1, -2) = H^2(m^1 - 1, -2) = 0$. De même, $H^2(m^1 + 1, -2) = 0$, et $H^2((m^1 + 1, -2) - \alpha) = H^2(m^1 - 1, -1) = 0$, d'où $H^2(E_\alpha(m^1 + 1, -2)) = 0$. Enfin, on a $H^2(E_\beta(m^1 - 1, 0)) = 0$ d'après le lemme 6. Donc l'égalité (2.52) est vraie si $n = 0$.

$\boxed{\text{Si } n \geq 1 \text{ et } \mu \notin \widehat{\mathrm{Gr}}\ ,}$ alors $H^2(\mu) = 0$. Montrons dans ce cas que $H^2(E)$ est aussi nul pour tout E dans la liste (2.47).

Comme $n \geq 1$, il existe $d \geq 0$ et $a \in \{1, \cdots, p-1\}$ tels que $ap^d \leq n < (a+1)p^d$. On a $m \geq (a+1)p^d$ car $\mu \notin \widehat{\mathrm{Gr}}$.

Si $d = 0$, alors $n^1 = 0$ et $m^1 \geq 0$. Alors on a déjà montré que tout E dans la liste (2.53) n'a pas de cohomologie en degré 2. Dans (2.47), il reste encore les deux termes $E_\alpha(m^1, -2)$ et $E_\beta(m^1 - 1, -1)$. Mais ces deux termes n'apparaissent que si μ est de type ∇ ou β-singulier, avec $r < s$. Comme $m \geq n$, il faut que $m^1 \geq 1$ pour que $E_\alpha(m^1, -2)$

ou $E_\beta(m^1-1,-1)$ apparaissent. On sait que $H^2(m^1,-2)=H^2(m^1-1,-1)=0$. Comme $(m^1,-2)-\alpha=(m^1-2,-1)$ et $(m^1-1,-1)-\beta=(m^1,-3)$ n'ont pas de cohomologie en degré 2 non plus si $m^1\geq 1$, on a $H^2(E_\alpha(m^1,-2))=H^2(E_\beta(m^1-1,-1))=0$. Donc l'égalité (2.52) est vraie dans ce cas.

Si $d\geq 1$, alors $ap^{d-1}\leq n^1<(a+1)p^{d-1}$ et $m^1\geq(a+1)p^{d-1}$. Dans ce cas, les poids suivants :

$$\begin{aligned}(m^1,-n^1-1),(m^1-1,-n^1-1),(m^1,-n^1-2),(m^1-1,-n^1-2)\\ (m^1+1,-n^1-2),(m^1+1,-n^1-2)-\alpha,\\ (m^1-1,-n^1),(m^1-1,-n^1)-\beta,\end{aligned}$$

sont tous dans la chambre $s_\beta\cdot C$ et hors de la région de Griffith, donc n'ont pas de cohomologie en degré 2. Donc il reste à traiter $E_\alpha(m^1,-n^1-2)$ et $E_\beta(m^1-1,-n^1-1)$ dans la liste (2.47).

Si $m^1\geq(a+1)p^{d-1}+1$, alors $(m^1,-n^1-2)-\alpha=(m^1-2,-n^1-1)$ qui n'a pas de cohomologie en degré 2 car il est dans la chambre $s_\beta\cdot C$ et hors de la région de Griffith. Donc $H^2(E_\alpha(m^1,-n^1-2))=0$ dans ce cas. Si $m^1=(a+1)p^{d-1}$, alors on a aussi $H^2(E_\alpha(m^1,-n^1-2))=0$ d'après la Proposition 1.

Si $n^1\leq(a+1)p^{d-1}-2$, alors $(m^1-1,-n^1-1)-\beta=(m^1,-n^1-3)$ n'est pas dans la région de Griffith, donc il n'a pas de cohomologie en degré 2 et $H^2(E_\beta(m^1-1,-n^1-1))=0$ dans ce cas. Si $n^1=(a+1)p^{d-1}-1$, alors $H^2(E_\beta(m^1-1,-n^1-1))=H^2(E_\beta(m^1-1,-(a+1)p^{d-1}))=0$ d'après la Proposition 1.

Par conséquent, (2.52) est toujours vraie si $\mu\notin\widehat{\mathrm{Gr}}$.

$\boxed{\text{Si } \mu\in\widehat{\mathrm{Gr}},}$ raisonnons par récurrence sur le degré d de μ.

Si $d=1$, alors $\mu=(ap+r,-ap-s-2)$. Donc $r\geq s$, et μ doit être de type Δ ou α-singulier ou γ-singulier ou α-β-singulier. Si μ est de type Δ ou γ-singulier, on a

$$H^2(\mu)\cong L(0,a-1)^{(1)}\otimes V(s,p-r-2)\cong L(s,ap-2)$$

et d'après (2.41) et (2.45) :

$$\begin{aligned}\bigoplus_i L(\nu_i^0)\otimes H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}&=L(s,p-r-2)\otimes H^2(a-1,-a-2)^{(1)}\\ &\cong L(s,p-r-2)\otimes V(0,a-1)^{(1)}\\ &\cong L(s,ap-r-2)\\ &\cong H^2(\mu),\end{aligned}$$

d'où (2.52). Dans les deux autres cas, on a $r=p-1$ et $H^2(\mu)=0$. D'après (2.43) et (2.46), on a $H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1))=0$ pour tout i car $m^1=n^1=a$. Donc les deux cotés de (2.52) sont nuls, et l'égalité est aussi vraie. Donc (2.52) est vraie si $\mu\in\widehat{\mathrm{Gr}}$ est de degré $d=1$.

Supposons l'égalité (2.52) vraie pour tout μ de degré $\leq d$ dans une H^1-chambre, et montrons-la pour μ de degré $d+1$. D'après ce qu'on a déjà montré, il suffit de supposer que $\mu\in\widehat{\mathrm{Gr}}$.

Écrivons $m=ap^{d+1}+a_dp^d+a_{d-1}p^{d-1}+\cdots+a_1p+r$ et $n=ap^{d+1}+b_dp^d+b_{d-1}p^{d-1}+\cdots+b_1p+s$. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}H^2(\mu)=&\operatorname{ch}L(0,a-1)^{(d+1)}\operatorname{ch}H^3(\mu+(-a-1,a)p^{d+1})\\ &+\operatorname{ch}L(0,a)^{(d+1)}\operatorname{ch}H^2(\mu+(-a,a)p^{d+1})\\ &+\operatorname{ch}L(0,a-2)^{(d+1)}\operatorname{ch}H^{d+1}(\mu+(-a-1,a+1)p^{d+1}).\end{aligned}\tag{2.54}$$

Notons $\mu' = \mu + (-a,a)p^{d+1} = (m', -n'-2)$ et $\mu'' = \mu + (-a-1, a+1)p^{d+1} = (-n''-2, m'')$. Alors

$$\begin{aligned} m' &= a_d p^d + a_{d-1}p^{d-1} + \cdots + a_1 p + r, \\ n' &= b_d p^d + b_{d-1}p^{d-1} + \cdots + b_1 p + s, \\ m'' &= (p-1-b_d)p^d + (p-1-b_{d-1})p^{d-1} + \cdots + (p-1-b_1)p + p - s - 2, \\ n'' &= (p-1-a_d)p^d + (p-1-a_{d-1})p^{d-1} + \cdots + (p-1-a_1)p + p - r - 2. \end{aligned}$$

Donc μ' et μ'' sont des poids de degré $\leq d$ dans une H^1-chambre (plus précisément, $\mu' \in s_\beta \cdot C$ et $\mu'' \in s_\alpha \cdot C$).

Comme $\mu' = \mu + (-a,a)p^{d+1}$, on sait que la D-filtration de $\widehat{Z}(\mu')$ est juste celle de $\widehat{Z}(\mu)$ tensorisée par $(-a,a)p^{d+1}$. De même, la D-filtration de $\widehat{Z}(\mu'')$ est celle de $\widehat{Z}(\mu)$ tensorisée par $(-a-1,a+1)p^{d+1}$ et la D-filtration de $\widehat{Z}(\mu + (-a-1,a)p^{d+1})$ est celle de $\widehat{Z}(\mu)$ tensorisée par $(-a-1,a)p^{d+1}$.

Donc l'hypothèse de récurrence pour μ' et μ'' (pour μ'' on utilise la symétrie entre α et β) nous donne

$$\operatorname{ch} H^2(\mu') = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1 + (-a,a)p^d))^{(1)} \tag{2.55}$$

et

$$\operatorname{ch} H^2(\mu'') = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1 + (-a-1,a+1)p^d))^{(1)}. \tag{2.56}$$

De plus, d'après la Proposition 3 du paragraphe 2.3, on a

$$\operatorname{ch} H^3(\mu + (-a-1,a)p^{d+1}) = \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^3(E_{\delta_i}(\nu_i^1 + (-a-1,a)p^d)^{(1)}).$$

Posons $m^1 = ap^d + a_d p^{d-1} + \cdots + a_1 = ap^d + \widetilde{r}$ et $n^1 = ap^d + b_d p^{d-1} + \cdots + b_1 = ap^d + \widetilde{s}$ avec $0 \leq \widetilde{r}, \widetilde{s} \leq p^d - 1$, alors tout poids de la liste (2.47) vérifie les conditions correspondantes de la Proposition 2 et du Théorème 1. Plus précisément, si $\delta_i = 0$, alors

$$\nu_i^1 \in \{(m^1, -n^1-1), (m^1-1, -n^1-1), (m^1, -n^1-2), (m^1-1, -n^1-2)\}, \tag{2.57}$$

d'après (2.47). On a $m^1 - 1 = ap^d + \widetilde{r} - 1$ avec $-1 \leq \widetilde{r} - 1 \leq p^d - 2$ et $n^1 - 1 = ap^d + \widetilde{s} - 1$ avec $-1 \leq \widetilde{s} - 1 \leq p^d - 2$, donc $\widetilde{r}, \widetilde{s}, \widetilde{r}-1, \widetilde{s}-1$ vérifient l'hypothèse du Théorème 1, d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} H^2(E_0(\nu_i^1)) = {} & \operatorname{ch} L(0,a-1)^{(d)} \operatorname{ch} H^3(E_0(\nu_i^1 + (-a-1,a)p^d)) \\ & + \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_0(\nu_i^1 + (-a,a)p^d)) \\ & + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_0(\nu_i^1 + (-a-1,a+1)p^d)) \end{aligned} \tag{2.58}$$

si $\delta_i = 0$.

Si $\delta_i = \alpha$, alors

$$E_\alpha(\nu_i^1) \in \{E_\alpha(m^1+1, -n^1-2), E_\alpha(m^1, -n^1-2)\}$$

d'après (2.47). On a $m^1 + 1 = ap^d + \widetilde{r} + 1$ avec $1 \leq \widetilde{r} + 1 \leq p^d$ et $n^1 = ap^d + \widetilde{s}$ avec $0 \leq \widetilde{s} \leq p^d - 1$, donc $(m^1+1, -n^1-2)$ vérifie l'hypothèse dans (i) de la Proposition 2. D'autre part, le facteur $E_\alpha(m^1, -n^1-2)$ apparaît seulement si μ est de type ∇, auquel cas on a $s > r$. Mais $m^1 p + r = m \geq n = n^1 p + s$, donc $m^1 \geq n^1 + 1 \geq ap^d + 1$, d'où

$\widetilde{r} \geq 1$ dans ce cas. Donc s'il existe i tel que $E_{\delta_i}(\nu_i^1) = E_\alpha(m^1, -n^1 - 2)$, alors $m^1 = ap^d + \widetilde{r}$ avec $1 \leq \widetilde{r} \leq p^d - 1$ et $n^1 = ap^d + \widetilde{s}$ avec $0 \leq \widetilde{s} \leq p^d - 1$, donc $(m^1, -n^1 - 2)$ vérifie aussi l'hypothèse (i) de la Proposition 2. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} H^2(E_\alpha(\nu_i^1)) = &\operatorname{ch} L(0, a-1)^{(d)} \operatorname{ch} H^3(E_\alpha(\nu_i^1 + (-a-1, a)p^d)) \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\alpha(\nu_i^1 + (-a, a)p^d)) \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a-2)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\alpha(\nu_i^1 + (-a-1, a+1)p^d)) \end{aligned} \tag{2.59}$$

si $\delta_i = \alpha$.

Si $\delta_i = \beta$, alors on a

$$E_\beta(\nu_i^1) \in \{E_\beta(m^1 - 1, -n^1), E_\beta(m^1 - 1, -n^1 - 1)\}$$

d'après (2.47). On a $m^1 - 1 = ap^d + \widetilde{r} - 1$ avec $-1 \leq \widetilde{r} \leq p^d - 2$ et $n^1 - 2 = ap^d + \widetilde{s} - 2$ avec $-2 \leq \widetilde{s} \leq p^d - 3$, donc $(m^1 - 1, -n^1)$ vérifie l'hypothèse (ii) de la Proposition 2. D'autre part, le facteur $E_\beta(m^1 - 1, -n^1 - 1)$ apparaît seulement si μ est de type ∇, auquel cas on a $s \geq r$. Mais $m^1 p + r = m \geq n = n^1 p + s$, donc on a $n^1 \leq m^1 - 1 \leq (a+1)p^d - 2$. Donc $n^1 - 1 = ap^d + \widetilde{s} - 1$ avec $-1 \leq \widetilde{s} - 1 \leq p^d - 3$ dans ce cas, et l'hypothèse dans (ii) de la Proposition 2 est aussi satisfaite. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} H^2(E_\beta(\nu_i^1)) = &\operatorname{ch} L(0, a-1)^{(d)} \operatorname{ch} H^3(E_\beta(\nu_i^1 + (-a-1, a)p^d)) \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\beta(\nu_i^1 + (-a, a)p^d)) \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a-2)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\beta(\nu_i^1 + (-a-1, a+1)p^d)) \end{aligned} \tag{2.60}$$

si $\delta_i = \beta$.

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} H^2(\mu) = &\operatorname{ch} L(0, a-1)^{(d+1)} \operatorname{ch} H^3(\mu + (-a-1, a)p^{d+1}) \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a)^{(d+1)} \operatorname{ch} H^2(\mu') + \operatorname{ch} L(0, a-2)^{(d+1)} \operatorname{ch} H^2(\mu'') \\ = &\operatorname{ch} L(0, a-1)^{(d+1)} \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^3(E_{\delta_i}(\nu_i^1 + (-a-1, a)p^d))^{(1)} \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a)^{(d+1)} \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1 + (-a, a)p^d))^{(1)} \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a-2)^{(d+1)} \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1 + (-a-1, a+1)p^d))^{(1)} \\ = &\sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0)[\operatorname{ch} L(0, a-1)^{(d)} \operatorname{ch} H^3(E_{\delta_i}(\nu_i^1 + (-a-1, a)p^d)) \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1 + (-a, a)p^d)) \\ &+ \operatorname{ch} L(0, a-2)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1 + (-a-1, a+1)p^d))]^{(1)} \\ = &\sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{ch} L(\nu_i^0) \operatorname{ch} H^2(E_{\delta_i}(\nu_i^1)), \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de (2.58), (2.59) et (2.60). Ceci termine la preuve de la Proposition 5 et donc du Théorème 5.

□

2.6 Conclusion

En combinant les Propositions 3 et 4, le Théorème 5 et le lemme 8, on obtient le :

Théorème 6. *Soit $\mu \in X(T)$. Soit*

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_\ell = \widehat{Z}(\mu)$$

une D-filtration de $\widehat{Z}(\mu)$ (cf. la section 2.1) telle que $N_i/N_{i-1} \cong \widehat{L}(\nu_i^0) \otimes E_{\delta_i}(\nu_i^1)^{(1)}$ où $\delta_i \in \{0, \alpha, \beta\}$. Alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe une filtration de $H^j(\mu)$:

$$0 = \widetilde{N_0} \subset \widetilde{N_1} \subset \widetilde{N_2} \subset \cdots \subset \widetilde{N_\ell} = H^j(\mu)$$

où $\widetilde{N_i} \cong H^j(G/BG_1, N_i)$ et $\widetilde{N_i}/\widetilde{N_{i-1}} \cong L(\nu_i^0) \otimes H^j(E_{\delta_i}(\nu_i^1))^{(1)}$.

Chapitre 3

La cohomologie des B-modules $E_\delta(\mu)$

3.1 Motivation et premières propriétés

Dans le Chapitre 2, on a montré que pour tout $\mu \in X(T)$, $H^i(\mu)$ admet une filtration dont les quotient sont de la forme $L(\nu^0) \otimes H^i(E_\delta(\nu^1))^{(1)}$. Cette filtration introduit des modules inconnus $H^i(E_\delta(\nu))$, donc il faut étudier leur structure pour bien connaître celle de $H^i(\mu)$.

Pour $i = 0$, d'après la discussion suivant la Proposition 4 (section 2.3), pour $\delta \in \{\alpha, \beta\}$, tout $H^0(E_\delta(\nu))$ qui apparaît dans la p-filtration de $H^0(\mu)$ est soit nul, soit une extension de $H^0(\nu)$ par $H^0(\nu - \delta)$. Donc le problème pour $i = 0$ ou 3 est déjà complètement résolu.

Pour $i = 1$ ou $i = 2$, la situation est plus compliquée.

Rappelons que $E_\alpha(\mu)$ est l'unique B-module tel qu'il existe une suite exacte non scindée :

$$0 \longrightarrow \mu - \alpha \longrightarrow E_\alpha(\mu) \longrightarrow \mu \longrightarrow 0$$

et $E_\beta(\mu)$ est l'unique B-module tel qu'il existe une suite exacte non scindée :

$$0 \longrightarrow \mu - \beta \longrightarrow E_\beta(\mu) \longrightarrow \mu \longrightarrow 0.$$

Appliquons le foncteur $H^0(G/B, \bullet)$ aux suites exactes ci-dessus. On obtient les suites exactes longues :

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^1(\mu-\alpha) \arrow[r] & H^1(E_\alpha(\mu)) \arrow[r] & H^1(\mu) \arrow[dll, "\partial_\alpha"] \\ & H^2(\mu-\alpha) \arrow[r] & H^2(E_\alpha(\mu)) \arrow[r] & H^2(\mu) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

et

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^1(\mu-\beta) \arrow[r] & H^1(E_\beta(\mu)) \arrow[r] & H^1(\mu) \arrow[dll, "\partial_\beta"] \\ & H^2(\mu-\beta) \arrow[r] & H^2(E_\beta(\mu)) \arrow[r] & H^2(\mu) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Donc pour connaître la structure de $H^1(E_\delta(\mu))$ et $H^2(E_\delta(\mu))$, il « suffit » de connaître le morphisme de bord ∂_δ. D'après le « Strong Linkage Principle » (cf [Jan03] II.6.13), on

sait que $\partial_\alpha = 0$ (resp. $\partial_\beta = 0$) si $\mu - \alpha \notin W_p \cdot \mu$ (resp. $\mu - \beta \notin W_p \cdot \mu$). En outre, pour $\delta \in \{\alpha, \beta\}$, $\mu - \delta \in W_p \cdot \mu$ si et seulement si $\langle \mu, \delta^\vee \rangle$ est divisible par p. Donc si $p \nmid \langle \mu, \delta^\vee \rangle$, alors $H^i(E_\delta(\mu))$ est la somme directe de $H^i(\mu - \delta)$ et $H^i(\mu)$.

Proposition 6. *Supposons que $\mu = (x, y)$ et $p \mid x$. Posons $\nu = (x - 1, y)$, c'est un poids sur le mur entre μ et $\mu - \alpha$. Alors $H^i(E_\alpha(\nu)) \cong T^\mu_\nu(H^i(\nu))$ si $p \nmid y + 1$.*

Démonstration. Par définition de $E_\alpha(\mu)$, on sait qu'il existe une suite exacte de B-modules :

$$0 \longrightarrow (0, -1) \longrightarrow L(1, 0) \longrightarrow E_\alpha(1, 0) \longrightarrow 0.$$

Tensorisons par le poids $\nu = (x - 1, y)$. On obtient :

$$0 \longrightarrow \mu - \gamma \longrightarrow L(1, 0) \otimes \nu \longrightarrow E_\alpha(\mu) \longrightarrow 0.$$

Appliquant le foncteur $H^0(G/B, \bullet)$ à cette suite exacte donne une suite exacte longue de cohomologie :

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & H^{i-1}(E_\alpha(\mu)) \arrow[dll, "\partial_{i-1}"'] \\
H^i(\mu - \gamma) \arrow[r, "\psi"] & L(1, 0) \otimes H^i(\nu) \arrow[r, "\phi"] & H^i(E_\alpha(\mu)) \arrow[dll, "\partial_i"'] \\
H^{i+1}(\mu - \gamma) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Si $p \nmid y + 1$, alors $p \nmid x + y + 1$. Dans ce cas $\mu - \gamma$ n'appartient pas à $W_p \cdot \mu$, d'où $\partial_i = 0$. Donc ϕ est surjectif.

Notons $N = T^\mu_\nu(H^i(\nu))$. Alors $N \cong \mathrm{pr}_\mu(L(1, 0) \otimes H^i(\nu)) \subset L(1, 0) \otimes H^i(\nu)$. Comme $\mu - \gamma$ n'appartient pas à $W_p \cdot \mu$, alors $\operatorname{Im} \psi \cap N = \varnothing$. Donc N est isomorphe à son image par ϕ. Or $\mathrm{pr}_\mu(H^i(E_\alpha(\mu))) = H^i(E_\alpha(\mu))$ est inclus dans l'image de $N = \mathrm{pr}_\mu(L(1, 0 \otimes H^i(\nu)))$ car ϕ est surjectif. Donc $N \cong \phi(N) = H^i(E_\alpha(\mu))$. □

De même, on a une proposition analogue pour E_β :

Proposition 7. *Supposons que $\mu = (x, y)$ et $p \mid y$. Posons $\nu = (x, y - 1)$, c'est un poids sur le mur entre μ et $\mu - \beta$. Alors $H^i(E_\beta(\nu)) \cong T^\mu_\nu(H^i(\nu))$ si $p \nmid x + 1$.*

3.2 Morphismes de bord ∂_α et ∂_β

Commençons par la proposition suivante.

Proposition 8. *Soient $\mu_1 = (m_1, -n_1 - 2)$ et $\mu_2 = (m_2, -n_2 - 2)$ vérifiant*

1. *$m_i > n_i \geq 0$ pour $i \in \{1, 2\}$;*
2. *$k_1 = v_p(m_1) \geq 1$ et $k_2 = v_p(n_2 + 2) \geq 1$;*
3. *$m_i - n_i \geq p^{k_i}$ pour $i \in \{1, 2\}$.*

Alors

$$\operatorname{ch} H^2(E_\alpha(\mu_1)) = \operatorname{ch} H^2(\mu_1) + \operatorname{ch} H^2(\mu_1 - \alpha), \tag{3.3}$$

$$\operatorname{ch} H^2(E_\beta(\mu_2)) = \operatorname{ch} H^2(\mu_2) + \operatorname{ch} H^2(\mu_2 - \beta). \tag{3.4}$$

C'est-à-dire, les morphismes de bord sont nuls.

Remarque 9. Fixons $i \in \{1,2\}$, notons d le degré de μ_i. C'est-à-dire, $ap^d \leq m_i \leq (a+1)p^d$ pour un $a \in \{1,2,\cdots,p-1\}$. Si $i=1$, alors $d \geq v_p(m_1) = k_1$. Si $i=2$ et si $k_2 = v_p(n_2+2) > d$, alors $n_2 \geq p^{k_2} - 2 \geq p^{d+1} - 2$. Mais dans ce cas, on a $m_2 \geq n_2 + p^{k_2} \geq 2p^{d+1} - 2$, absurde. Donc on a toujours $d \geq k_i$ pour $i \in \{1,2\}$.

Démonstration. Notons d_i le degré de μ_i. On appelle $d_i - k_i$ le « degré relatif » de μ_i et on le note $\widetilde{d_i}$. On montre la proposition simultanément pour E_α et E_β par récurrence sur le degré relatif. D'après la Remarque 9, on sait que le degré relatif est toujours ≥ 0.

Si $\widetilde{d_i} = 0$, alors $d_i = k_i$ et $\mu_1 = (ap^{d_1}, -n_1-2)$ avec $n_1 \leq (a-1)p^{d_1}$ et $\mu_2 = (m_2, -ap^{d_2})$ avec $m_2 \geq (a+1)p^{d_2} - 2$.

Dans ce cas, μ_1, $\mu_1-\alpha$,μ_2 et $\mu_2-\beta$ sont tous hors de la région de Griffith. En particulier, (3.3) et (3.4) sont triviales.

Supposons qu'on ait déjà montré la proposition pour tout μ_i tel que $\widetilde{d_i}(\mu_i) \leq \ell$ pour un certain $\ell \geq 0$. Pour $i \in \{1,2\}$, soit $\mu_i = (m_i, -n_i - 2)$ tel que $\widetilde{d_i}(\mu_i) = \ell + 1$.

On se concentre d'abord sur $\mu = \mu_1$ et on enlève l'indice 1 pour alléger la notation. Écrivons $m = ap^d + a_{d-1}p^{d-1} + \cdots + a_k p^k = ap^d + r$ avec $a \neq 0$, $a_k \neq 0$ et $d-k = \ell+1 \geq 1$. Si $\mu \notin \widehat{\mathrm{Gr}}$, alors $n < ap^d$, donc $\mu - \alpha \notin \widehat{\mathrm{Gr}}$ aussi, car $m \geq ap^d + p^k \geq ap^d + 2$, et (3.3) est vraie dans ce cas. Donc il suffit de considérer le cas où $\mu \in \widehat{\mathrm{Gr}}$, d'où $n = ap^d + s$ avec $0 \leq s \leq r - p^k$. En particulier, on a $1 \leq r \leq p^d - 1$ et $0 \leq s \leq p^d - 2$, donc d'après la Proposition 2, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} H^2(E_\alpha(\mu)) = {} & \operatorname{ch} L(0,a-1)^{(d)} \operatorname{ch} H^3(E_\alpha(r-p^d, -s-2)) \\
& + \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\alpha(r, -s-2)) \\
& + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\alpha(-p^d+r, p^d-s-2)).
\end{aligned}$$

Comme $v_p(r) = v_p(p^d - r) = v_p(m) = k$ et $(p^d - s - 2) - (p^d - r - 2) = r - s \geq p^k$, le poids $(r, -s-2)$ vérifie les hypothèses pour E_α dans la Proposition et est de degré relatif majoré par ℓ. Le poids $(p^d - s - 2, -p^d + r)$ vérifie les hypothèses pour E_β et est de degré relatif aussi majoré par ℓ. D'après l'hypothèse de récurrence on a donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} H^2(E_\alpha(\mu)) = {} & \operatorname{ch} L(0,a-1)^{(d)}(\operatorname{ch} H^3(r-p^d, -s-2) + \operatorname{ch} H^3(r-p^d-2, -s-1)) \\
& + \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)}(\operatorname{ch} H^2(r, -s-2) + \operatorname{ch} H^2(r-2, -s-1)) \\
& + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)}(\operatorname{ch} H^2(-p^d+r, p^d-s-2) + \operatorname{ch} H^2(-p^d+r-2, p^d-s-1)) \\
= {} & \operatorname{ch} H^2(ap^d+r, -ap^d-s-2) + \operatorname{ch} H^2(ap^d+r-2, -ap^d-s-1) \\
= {} & \operatorname{ch} H^2(\mu) + \operatorname{ch} H^2(\mu-\alpha),
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte du Théorème 2 et du fait que $0 \leq r - 2 \leq p^d - 3$ car $r \geq s + p^k \geq p^k$.

Traitons maintenant $E_\beta(\mu_2)$ et enlevons l'indice 2 pour alléger la notation. On a $v_p(n+2) = k$, $m = ap^d + r$ avec $a \geq 1$, $0 \leq r \leq p^d - 1$ et $d - k = \ell + 1 \geq 1$.

Si $\mu \notin \widehat{\mathrm{Gr}}$, alors $n + 2 \leq ap^d + 1$. Mais comme $v_p(n+2) = k$, on a $n + 2 \leq ap^d - p^k$. Dans ce cas $\mu - \beta = (m+1, -n-4)$ n'est pas dans $\widehat{\mathrm{Gr}}$ non plus.

Si $\mu \in \widehat{\mathrm{Gr}}$ mais $\mu \notin \mathrm{Gr}$, c'est-à-dire $r = p^d - 1$, alors $n = ap^d + s$ avec $0 \leq s \leq r - p^k \leq p^d - 3$. Donc $\mu - \beta = ((a+1)p^d, -ap^d - s - 4) \notin \mathrm{Gr}$, d'où $H^2(\mu) = H^2(\mu - \beta) = 0$.

Donc il suffit de considérer le cas où $\mu \in \mathrm{Gr}$ et donc $r \leq p^d - 2$. Dans ce cas $n = ap^d + s$ avec $v_p(s+2) = k$ et $p^k - 2 \leq s \leq r - p^k < p^d - 3$. Alors le poids (r, s) vérifie les hypothèses pour E_β et le poids $(p^d - s - 2, -p^d + r)$ vérifie les hypothèses pour E_α, et ils sont de degrés

relatifs majorés par ℓ, et les hypothèses pour l'existence d'une filtration à trois étages pour $H^2(E_\beta(\mu))$ sont vérifiées. Donc on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} H^2(E_\beta(\mu)) &= \operatorname{ch} L(0,a-1)^{(d)} \operatorname{ch} H^3(E_\beta(r-p^d,-s-2)) \\
&\quad + \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\beta(r,-s-2)) \\
&\quad + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\beta(-p^d+r,p^d-s-2)) \\
&= \operatorname{ch} L(0,a-1)^{(d)}(\operatorname{ch} H^3(r-p^d,-s-2) + \operatorname{ch} H^3(r+1-p^d,-s-4)) \\
&\quad + \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)}(\operatorname{ch} H^2(r,-s-2) + \operatorname{ch} H^2(r+1,-s-4)) \\
&\quad + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)}(\operatorname{ch} H^2(-p^d+r,p^d-s-2) + \operatorname{ch} H^2(-p^d+r+1,p^d-s-4)) \\
&= \operatorname{ch} H^2(ap^d+r,-ap^d-s-2) + \operatorname{ch} H^2(ap^d+r+1,-ap^d-s-4) \\
&= \operatorname{ch} H^2(\mu) + \operatorname{ch} H^2(\mu-\beta),
\end{aligned}$$

où la première égalité est la filtration à trois étages pour $H^2(E_\beta(\mu))$, la deuxième égalité résulte de l'hypothèse de récurrence et du fait que $H^2(r-p^d,-s-2)=0$, et la troisième égalité résulte du Théorème 2 et du fait que $0<r+1\leq p^d-1$ et $0<s+2<p^d-1$.

Ceci termine la preuve de la Proposition 8.

□

3.2.1 Décomposition de l'image du morphisme de bord

Lemme 9. *Si $\mu=(x,y)$ avec $x,y\leq -1$, alors pour $\delta\in\{\alpha,\beta\}$, on a :*

$$\operatorname{ch} H^3(E_\delta(\mu)) = \chi^3(\mu)+\chi^3(\mu-\delta).$$

Démonstration. Si $x\leq -2$ et $y\leq -2$, alors $\mu-\delta$ n'a de la cohomologie qu'en degré 3, d'où le résultat.

Si $x=-1$ ou $y=-1$, alors $H^i(\mu)=0$ pour tout i, donc $H^i(E_\delta(\mu))\cong H^i(\mu-\delta)$ pour tout i, donc le résultat est aussi vrai dans ce cas. □

Définition 4. Pour $\delta\in\{\alpha,\beta\}$, on note $I_\delta(\mu)\subset H^2(\mu-\delta)$ l'image du morphisme de bord $H^1(\mu)\to H^2(\mu-\delta)$. Donc si $\mu-\delta\notin w_0\cdot X(T)^+$, on a

$$\operatorname{ch} I_\delta(\mu) = \chi^2(\mu)+\chi^2(\mu-\delta)-\operatorname{ch} H^2(E_\delta(\mu)).$$

Proposition 9. *Soit $\mu=(ap^d+r,-ap^d-s-2)$. Posons $\mu'=(r,-s-2)$ et $\mu''=(-p^d+r,p^d-s-2)$.*

Alors si $0\leq s<r\leq p^d-1$, on a

$$\operatorname{ch} I_\alpha(\mu) = \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} I_\alpha(\mu') + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)} \operatorname{ch} I_\alpha(\mu''). \tag{3.5}$$

Si $-1\leq s<r\leq p^d-2$, alors

$$\operatorname{ch} I_\beta(\mu) = \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} I_\beta(\mu') + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)} \operatorname{ch} I_\beta(\mu''). \tag{3.6}$$

Démonstration. Montrons d'abord (3.5) où $\delta=\alpha$. Comme $0\leq s<r\leq p^d-1$, μ vérifie les hypothèses pour l'existence de la filtration à trois étages pour $H^2(E_\alpha(\mu))$ de la Proposition 2. De plus, comme $\mu'-\alpha=(r-2,-s-1)$ vérifie $r-2\geq -1$ et $\mu''-\alpha=(-p^d+r-2,p^d-s-1)$ vérifie $p^d-s-1\geq 0$, on a $\mu'-\alpha\notin w_0\cdot X(T)^+$

et $\mu'' - \alpha \notin w_0 \cdot X(T)^+$. Donc en utilisant la filtration à trois étages pour $H^2(E_\alpha(\mu))$ pour la première égalité, et le lemme 9 et la Définition 4 pour la deuxième égalité, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} H^2(E_\alpha(\mu)) =& \operatorname{ch} L(0,a-1)^{(d)} \operatorname{ch} H^3(E_\alpha(r-p^d,-s-2)) \\
&+ \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\alpha(\mu')) + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\alpha(\mu'')) \\
=& \operatorname{ch} L(a-1)^{(d)}(\chi^3(r-p^d,-s-2) + \chi^3((r-p^d,-s-2)-\alpha)) \\
&+ \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)}(\chi^2(\mu') + \chi^2(\mu'-\alpha) - \operatorname{ch} I_\alpha(\mu')) \\
&+ \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)}(\chi^2(\mu'') + \chi^2(\mu''-\alpha) - \operatorname{ch} I_\alpha(\mu'')) \\
=& \chi^2(\mu) + \chi^2(\mu-\alpha) - \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} I_\alpha(\mu') - \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)} \operatorname{ch} I_\alpha(\mu''),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du Théorème 1 en remarquant que $\mu-\alpha = (ap^d+r-2, -ap^d-s-1)$ avec $-1 \le r-2, s-1 < p^d-1$. Donc on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} I_\alpha(\mu') + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)} \operatorname{ch} I_\alpha(\mu'') =& \chi^2(\mu) + \chi^2(\mu-\alpha) - \operatorname{ch} H^2(E_\alpha(\mu)) \\
=& \operatorname{ch} I_\alpha(\mu),
\end{aligned}$$

car $\mu - \alpha \notin w_0 \cdot X(T)^+$.

Montrons maintenant (3.6) où $\delta = \beta$. Comme $-1 \le s < r \le p^d - 2$, μ vérifie les hypothèses pour l'existence de la filtration à trois étages pour $H^2(E_\beta(\mu))$ de la Proposition 2. De plus, comme $\mu'-\beta = (r+1, -s-4)$ vérifie $r+1 \ge 0$ et $\mu''-\beta = (-p^d+r+1, p^d-s-4)$ vérifie $p^d-s-4 \ge -1$, on a $\mu'-\beta \notin w_0 \cdot X(T)^+$ et $\mu''-\beta \notin w_0 \cdot X(T)^+$. Donc en utilisant la filtration à trois étages pour $H^2(E_\beta(\mu))$ pour la première égalité, et le lemme 9 et la Définition 4 pour la deuxième égalité, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} H^2(E_\beta(\mu)) =& \operatorname{ch} L(0,a-1)^{(d)} \operatorname{ch} H^3(E_\beta(r-p^d,-s-2)) \\
&+ \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\beta(\mu')) + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)} \operatorname{ch} H^2(E_\beta(\mu'')) \\
=& \operatorname{ch} L(a-1)^{(d)}(\chi^3(r-p^d,-s-2) + \chi^3((r-p^d,-s-2)-\beta)) \\
&+ \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)}(\chi^2(\mu') + \chi^2(\mu'-\beta) - \operatorname{ch} I_\beta(\mu')) \\
&+ \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)}(\chi^2(\mu'') + \chi^2(\mu''-\beta) - \operatorname{ch} I_\beta(\mu'')) \\
=& \chi^2(\mu) + \chi^2(\mu-\beta) - \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} I_\beta(\mu') - \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)} \operatorname{ch} I_\beta(\mu''),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du Théorème 2 en remarquant que $\mu-\beta = (ap^d+r+1, -ap^d-s-4)$ avec $0 < r+1, s+2 \le p^d-1$. Donc on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} I_\beta(\mu') + \operatorname{ch} L(0,a-2)^{(d)} \operatorname{ch} I_\beta(\mu'') =& \chi^2(\mu) + \chi^2(\mu-\beta) - \operatorname{ch} H^2(E_\beta(\mu)) \\
=& \operatorname{ch} I_\beta(\mu),
\end{aligned}$$

car $\mu - \beta \notin w_0 \cdot X(T)^+$. Ceci termine la preuve de la Proposition 9. □

Lemme 10. *Soit $\mu = (m, -n-2)$ avec $m > n \ge 0$. Alors pour $\delta \in \{\alpha, \beta\}$, $I_\delta(\mu)$ est « saturé » dans $H^2(\mu-\delta)$, c'est-à-dire, si $L(\nu) \in \mathrm{FC}(I_\delta(\mu))$, alors*

$$[I_\delta(\mu) : L(\nu)] = [H^2(\mu-\delta) : L(\nu)].$$

Démonstration. Comme dans la Proposition 8, notons $k_1(\mu) = v_p(m)$, $k_2(\mu) = v_p(n+2)$. Notons d le degré de μ, c'est-à-dire, il existe $a \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$ tel que $ap^d \le m < (a+1)p^d$. Pour $i \in \{1,2\}$, notons $\widetilde{d_i} = d - k_i$. Notons aussi $\alpha_1 = \alpha$ et $\alpha_2 = \beta$.

Considérons l'énoncé suivant qui dépend d'un indice $\ell \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{P}_\ell : \text{pour tout } i \in \{1,2\}, \text{ si } \mu = (m, -n-2) \text{ avec } m > n \geq 0 \text{ et } \widetilde{d}_i(\mu) \leq \ell,$$
$$\text{alors pour tout } \nu \in X(T)^+ \text{on a } [I_\delta(\mu) : L(\nu)] = [H^2(\mu - \delta) : L(\nu)].$$

Le but est de montrer que $\mathcal{P}_\ell$ est vraie pour tout ℓ. Raisonnons par récurrence sur ℓ. Il suffit de considérer le cas où μ ne vérifie pas les hypothèses de la Proposition 8 car l'énoncé est trivial si $I_\delta(\mu) = 0$.

D'après la définition de d et k_1, on a toujours $d \geq k_1$, d'où $\widetilde{d}_1 \geq 0$. Comme $m > n$ et $k_2 = v_p(n+2)$, on a $d < k_2$ seulement s'il existe $d \geq 1$ tel que $m = p^d - 1$ et $n = p^d - 2$. Dans ce cas, on a

$$H^2(E_\beta(\mu)) = H^2(E_\beta(p^d - 1, -p^d)) = 0$$

d'après la Proposition 1, d'où $I_\beta(\mu) = H^2(\mu - \beta)$ et l'énoncé est vrai. Donc $\mathcal{P}_{-1}$ est vrai.

Supposons $\widetilde{d}_1(\mu) = 0$ et $\delta = \alpha$. Si $k_1 = 0$, alors $p \nmid m$, d'où $I_\alpha(\mu) = 0$ car $\mu - \alpha \notin W_p \cdot \mu$. Si $k_1 \geq 1$, alors comme μ ne vérifie pas les hypothèses de la Proposition 8, on a $\mu = (ap^d, -(a-1)p^d - s - 2)$ avec $1 \leq s \leq p^d - 1$. D'après la Proposition 1 on sait que $H^2(E_\alpha(\mu)) = 0$, d'où $I_\alpha(\mu) = H^2(\mu - \alpha)$ et l'énoncé du lemme est évident.

Supposons $\widetilde{d}_2(\mu) = 0$. Si $k_2 = 0$, alors $p \nmid n+2$ et $\mu - \beta \notin W_p \cdot \mu$, d'où $I_\beta(\mu) = 0$. Si $k_2 \geq 1$, alors comme μ ne vérifie pas les hypothèses de la Proposition 8, on a $\mu = (ap^d + r, -ap^d)$ avec $-1 \leq r \leq p^d - 3$ et $d - v_p(m) = d - k_1 = \ell + 1$. D'après la Proposition 1, $H^2(E_\beta(\mu)) = 0$, d'où $I_\beta(\mu) = H^2(\mu - \beta)$ et l'énoncé du lemme est évident.

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}_\ell$ est vraie pour un $\ell \geq 0$. Soit μ tel que $\widetilde{d}_1(\mu) = \ell + 1$. Si $k_1 = 0$, alors $p \nmid m$ et $I_\alpha(\mu) = 0$. Si $k_1 \geq 1$, comme μ ne vérifie pas les hypothèses de la Proposition 8, on a

$$m = ap^d + a_{d-1}p^{d-1} + \cdots + a_k p^k = ap^d + r$$

et $n = ap^d + s$ avec $0 \leq r - p^k < s < r \leq p^d - 1$. Posons $\mu' = (r, -s-2)$, $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$ et ${}^t\mu'' = (p^d - s - 2, -p^d + r)$. Comme

$$v_p(ap^d + r) = k_1 = d - \ell - 1 \leq d - 1,$$

on a

$$v_p(r) = v_p(-p^d + r) = k_1,$$

donc $\widetilde{d}_1(\mu') \leq d - 1 - k_1 = \ell$ et $\widetilde{d}_2({}^t\mu'') \leq d - 1 - k_1 = \ell$. On a

$$\operatorname{ch} I_\alpha(\mu) = \operatorname{ch} L(0,a)^{(d)} \operatorname{ch} I_\alpha(\mu') + \operatorname{ch} L(0, a-2)^{(d)} \operatorname{ch} I_\alpha(\mu'')$$

car $0 < s < r \leq p^d - 1$. D'après le lemme 1, tout plus haut poids d'un facteur de composition de $H^2(\mu' - \alpha)$ ou de $H^2(\mu'' - \alpha)$ est p^d-restreint. Donc

$$\mathrm{FC}(I_\alpha(\mu)) = L(0,a)^{(d)} \otimes \mathrm{FC}(I_\alpha(\mu')) \amalg L(0, a-2)^{(d)} \otimes \mathrm{FC}(I_\alpha(\mu'')).$$

Soit $L(\nu) \in KF(I_\alpha(\mu))$, alors $\nu = \nu^1 p^d + \nu^0$ où $\nu^1 = (0,a)$ ou $(0, a-2)$ et ν^0 est p^d-restreint. Si $\nu^1 = (0,a)$, alors $L(\nu^0) \in \mathrm{FC}(I_\alpha(\mu'))$. Donc

$$\begin{aligned}
[I_\alpha(\mu) : L(\nu)] &= [I_\alpha(\mu') : L(\nu^0)] \\
&= [H^2(\mu' - \alpha) : L(\nu^0)] \\
&= [L(0,a)^{(d)} \otimes H^2(\mu' - \alpha) : L(\nu)] \\
&= [H^2(\mu - \alpha) : L(\nu)]
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte de l'hypothèse de récurrence pour μ' et la dernière égalité résulte du Théorème 2 et du lemme 1 appliqués à $\mu - \alpha$.

Si $\nu^1 = (0, a-2)$, alors $L(\nu^0) \in \mathrm{FC}(I_\alpha(\mu''))$. Posons $\tau\nu = (y, x)$ si $\nu = (x, y)$ comme dans la section 1.4, alors

$$\begin{aligned}
[I_\alpha(\mu) : L(\nu)] &= [I_\alpha(\mu'') : L(\nu^0)] \\
&= [I_\beta(\tau\mu'') : L(\tau\nu^0)] \\
&= [H^2(\tau\mu'' - \beta) : L(\tau\nu^0)] \\
&= [H^2(\mu'' - \alpha) : L(\nu^0)] \\
&= [L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu'' - \alpha) : L(\nu)] \\
&= [H^2(\mu - \alpha) : L(\nu)].
\end{aligned}$$

Donc la partie $i = 1$ dans $\mathcal{P}_\ell$ est vraie.

Soit $\mu = (m, -n-2)$ tel que $\widetilde{d}_2(\mu) = \ell + 1$. Notons $k = k_2$ pour alléger la notation. Si $k = 0$, alors $p \nmid n+2$ et $I_\beta(\mu) = 0$. Si $k \geq 1$, comme μ ne vérifie pas les hypothèses de la Proposition 8, alors $m = ap^d + r$ et $n = ap^d + s$ avec $0 \leq r \leq p^d - 1$ et $s < r < s + p^k$ (a priori s peut être négatif). Mais comme $d = k+\ell+1 \geq k+1$, on a $k = v_p(n+2) = v_p(s+2)$. Si $s < 0$, alors $s + 2 \leq 1$, d'où $s + 2 \leq -p^k$ car $v_p(s+2) = k \geq 1$. Par conséquent, on a $r < s+p^k \leq -2$, contradiction avec $r \geq 0$. Donc $0 \leq s < r \leq p^d-1$. Or $v_p(s+2) = k \leq d-1$, donc $s + 2 \leq p^d - p^k$ et $r < s + p^k \leq p^d - 2$. D'après la Proposition 9, on a

$$\operatorname{ch} I_\beta(\mu) = \operatorname{ch} L(0, a)^{(d)} \operatorname{ch} I_\beta(\mu') + \operatorname{ch} L(0, a-2)^{(d)} \operatorname{ch} I_\beta(\mu'')$$

où $\mu' = (r, -s-2)$ et $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$. Posons $\tau\mu'' = (p^d - s - 2, -p^d + r)$, alors $\widetilde{d}_2(\mu') \leq d - 1 - k = \ell$ et $\widetilde{d}_1(\tau\mu'') \leq d - 1 - k = \ell$ car $v_p(s+2) = v_p(p^d - s - 2) = k$.

D'après le lemme 1, tout plus haut poids d'un facteur de composition de $H^2(\mu' - \beta)$ ou de $H^2(\mu'' - \beta)$ est p^d-restreint. Donc

$$\mathrm{FC}(I_\beta(\mu)) = L(0, a)^{(d)} \otimes \mathrm{FC}(I_\beta(\mu')) \amalg L(0, a-2)^{(d)} \otimes \mathrm{FC}(I_\beta(\mu'')).$$

Soit $L(\nu) \in KF(I_\beta(\mu))$, alors $\nu = \nu^1 p^d + \nu^0$ où $\nu^1 = (0, a)$ ou $(0, a-2)$ et ν^0 est p^d-restreint. Si $\nu^1 = (0, a)$, alors $L(\nu^0) \in \mathrm{FC}(I_\beta(\mu'))$. Donc

$$\begin{aligned}
[I_\beta(\mu) : L(\nu)] &= [I_\beta(\mu') : L(\nu^0)] \\
&= [H^2(\mu' - \beta) : L(\nu^0)] \\
&= [L(0, a)^{(d)} \otimes H^2(\mu' - \beta) : L(\nu)] \\
&= [H^2(\mu - \beta) : L(\nu)]
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte de l'hypothèse de récurrence pour μ' et la dernière égalité résulte du Théorème 2 et du lemme 1 appliqués à $\mu - \beta$.

Si $\nu^1 = (0, a-2)$, alors $L(\nu^0) \in \mathrm{FC}(I_\beta(\mu''))$. Donc

$$\begin{aligned}
[I_\beta(\mu) : L(\nu)] &= [I_\beta(\mu'') : L(\nu^0)] \\
&= [I_\alpha(\tau\mu'') : L(\tau\nu^0)] \\
&= [H^2(\tau\mu'' - \alpha) : L(\tau\nu^0)] \\
&= [H^2(\mu'' - \beta) : L(\nu^0)] \\
&= [L(0, a-2)^{(d)} \otimes H^2(\mu'' - \beta) : L(\nu)] \\
&= [H^2(\mu - \beta) : L(\nu)].
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{\ell+1}$ est vraie. Ceci termine la preuve du lemme 10.

□

Théorème 7. *Soit $\mu = (m, -n-2)$ avec $m > n \geq 0$. Si M est un sous-module de $H^2(\mu - \delta)$ qui vérifie $\operatorname{ch} M = \operatorname{ch} I_\delta(\mu)$, alors $M = I_\delta(\mu)$.*

Par conséquent, si $m = ap^d + r$ et $n = ap^d + s$ et si l'on pose $\mu' = (r, -s-2)$ et $\mu'' = (-p^d + r, p^d - s - 2)$, alors

(i) Si $0 \leq s < r \leq p^d - 1$, on a

$$I_\alpha(\mu) = L(0,a)^{(d)} \otimes I_\alpha(\mu') \bigoplus L(0, a-2)^{(d)} \otimes I_\alpha(\mu'').$$

(ii) Si $-1 \leq s < r \leq p^d - 2$, on a

$$I_\beta(\mu) = L(0,a)^{(d)} \otimes I_\beta(\mu') \bigoplus L(0, a-2)^{(d)} \otimes I_\beta(\mu'').$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 10 et la Proposition 9. □

En utilisant le Théorème 7, on peut décrire explicitement $I_\delta(\mu)$ en utilisant les notations introduites dans la section 1.4 avant le Théorème 4.

Théorème 8. *Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ de degré $\leq d$. Soit $\mu = (m, -n-2)$ avec $0 \leq n < m$. Notons $k_\alpha(\mu) = v_p(m)$ and $k_\beta(\mu) = v_p(n+2)$.*

A. *Si $k_\delta(\mu) = 0$, alors $I_\delta(\mu) = 0$;*

B. *Si $k_\delta(\mu) \geq 1$ et $m - n \geq p^{k_\delta(\mu)}$, alors $I_\delta(\mu) = 0$;*

C. *Si $k_\delta(\mu) \geq 1$ et $m - n < p^{k_\delta(\mu)}$, alors :*

(i) *Si $\delta = \alpha$, on pose $k = k_\delta(\mu)$. Alors il existe $a_i \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, $a_k \geq 1$ et $1 \leq s \leq p^k - 1$ tels que $m = a_d p^d + \cdots + a_k p^k$ et $n = a_d p^d + \cdots + a_k p^k - p^k + s$. On a*

$$\begin{aligned} I_\alpha(\mu) \cong & H^2(a_k p^k - 2, -(a_k - 1)p^k - s - 1) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d,0}^{d-k}(m)} L(\nu) \Big) \\ & \oplus H^2(-(p - a_k)p^k - 2, (p - a_k + 1)p^k - s - 1) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d,1}^{d-k}(m)} L(\nu) \Big). \end{aligned} \tag{3.7}$$

(ii) *Si $\delta = \beta$, on pose $k = k_\delta(\mu)$. Alors il existe $a_i \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, $a_k \geq 1$ et $-1 \leq r \leq p^k - 3$ tels que $m = a_d p^d + \cdots + a_k p^k + r$ et $n = a_d p^d + \cdots + a_k p^k - 2$. On a*

$$\begin{aligned} I_\beta(\mu) \cong & H^2(a_k p^k + r + 1, -a_k p^k - 2) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d,0}^{d-k}(m)} L(\nu) \Big) \\ & \oplus H^2(-(p - a_k)p^k + r + 1, (p - a_k)p^k - 2) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d,1}^{d-k}(m)} L(\nu) \Big). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Démonstration. Si $k_\delta(\mu) = 0$, alors $p \nmid \langle \mu, \delta^\vee \rangle$. Donc $I_\delta(\mu) = 0$ car $\mu - \delta \notin W_p \cdot \mu$, d'où (A).

Puis (B) résulte de la Proposition 8 de la section 3.2.

Montrons (C) par récurrence sur d.

Si $d = 1$ et $\delta = \alpha$, alors $k = v_p(m) = 1 = d$. On a $m = ap$ et $n = (a-1)p + s$ avec $1 \le a, s \le p-1$. D'après la Proposition 1, on a $H^2(E_\alpha(\mu)) = 0$, donc $I_\alpha(\mu) = H^2(\mu - \alpha) = H^2(ap-2, -(a-1)p - s - 1)$. Donc (3.7) est vraie car $d - k = 0$ dans ce cas.

Si $d = 1$ et $\delta = \beta$, alors $n = ap - 2$ et $m = ap + r$ avec $-1 \le r \le p-3$ et $1 \le a \le p-1$. D'après la Proposition 1, on a $H^2(E_\beta(\mu)) = H^2(E_\beta(ap+r, -ap)) = 0$, donc $I_\beta(\mu) = H^2(\mu - \beta) = H^2(ap + r + 1, -ap - 2)$. Donc (3.7) est vraie car $d - k = 0$ dans ce cas.

Supposons l'énoncé vrai pour tout $n < m \in \mathbb{N}$ de degré $\le d$ pour un certain $d \ge 1$. Soient m de degré $\le d+1$ et $n < m$.

Supposons d'abord $\delta = \alpha$, alors $k = v_p(m) \ge 1$. Écrivons $m = a_{d+1}p^{d+1} + \cdots + a_k p^k$ et $m = a_{d+1}p^{d+1} + \cdots + (a_k - 1)p^k + s$ avec $1 \le s \le p^k - 1$. Si $k = d+1$, alors $\mu = (a_k p^k, -(a_k - 1)p^k - s - 2)$. Donc $H^2(E_\alpha(\mu)) = 0$ d'après la Proposition 1 et $I_\alpha(\mu) = H^2(\mu - \alpha) = H^2(a_k p^k - 2, -(a_k - 1)p^k - s - 1)$. Donc (3.7) est vraie dans ce cas. Si $k < d+1$, alors d'après le Théorème 7, on a

$$I_\alpha(\mu) = L(0, a_{d+1})^{(d+1)} \otimes I_\alpha(\mu') \bigoplus L(0, a_{d+1} - 2)^{(d+1)} \otimes I_\alpha(\mu'') \tag{3.9}$$

où $\mu' = (m', -n' - 2) = (a_d p^d + \cdots + a_k p^k, -a_d p^d - \cdots - a_k p^k + p^k - s - 2)$ et $\mu'' = (-n'' - 2, m'') = (-p^{d+1}, p^{d+1}) + \mu'$, où $n'' = \widehat{a}_d p^d + \cdots + \widehat{a}_k p^k + p^k - 2$ et $m'' = \widehat{a}_d p^d + \cdots + \widehat{a}_k p^k + 2p^k - s - 2$ avec $1 \le \widehat{a}_k + 1 = p - a_k \le p - 1$ et $-1 \le p^k - s - 2 \le p^k - 3$. Comme m', m'' sont de degré $\le d$, alors d'après l'hypothèse de récurrence on a les isomorphismes suivants (on rappelle que $\tau(x, y) = (y, x)$, cf. 1.4) :

$$\begin{aligned} I_\alpha(\mu') \cong & H^2(a_k p^k - 2, -(a_k - 1)p^k - s - 1) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d,0}^{d-k}(m')} L(\nu) \Big) \\ & \oplus H^2(-(p - a_k)p^k - 2, (p - a_k + 1)p^k - s - 1) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d,1}^{d-k}(m')} L(\nu) \Big) \end{aligned} \tag{3.10}$$

et

$$\begin{aligned} I_\alpha(\mu'') \cong & H^2(\tau((\widehat{a}_k + 1)p^k + p^k - s - 1, -(\widehat{a}_k + 1)p^k - 2)) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \tau\Gamma_{d,0}^{d-k}(m'')} L(\nu) \Big) \\ & \oplus H^2(\tau(-(p - \widehat{a}_k - 1)p^k + p^k - s - 1, (p - \widehat{a}_k - 1)p^k - 2)) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \tau\Gamma_{d,1}^{d-k}(m'')} L(\nu) \Big) \\ = & H^2(-(p - a_k)p^k - 2, (p - a_k + 1)p^k - s - 1) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \tau\Gamma_{d,0}^{d-k}(m'')} L(\nu) \Big) \\ & \oplus H^2(a_k p^k - 2, -(a_k - 1)p^k - s - 1) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \tau\Gamma_{d,1}^{d-k}(m'')} L(\nu) \Big). \end{aligned} \tag{3.11}$$

D'après les définitions de la section 1.4, $\Gamma_{d,-}^i(m)$ ne dépend que des coefficients p-adiques $a_d, a_{d-1}, \cdots, a_{d-i+1}$ de m. Les coefficients p-adiques de m' sont $a_d, a_{d-1}, \cdots, a_k, 0, \cdots$. Si $s \le p^k - 2$, alors les coefficients p-adiques de m'' sont $\widehat{a}_d, \cdots, \widehat{a}_{k+1}, \widehat{a}_k + 1, \cdots$; si $s = p^k - 1$, alors les coefficients p-adiques de m'' sont $\widehat{a}_d, \cdots, \widehat{a}_{k+1}, \widehat{a}_k, p-1, \cdots, p-1$. Donc on a

$$\Gamma_{d,0}^{d+1-k}(m) = \Big((0, a_{d+1})p^{d+1} + \Gamma_{d,0}^{d-k}(m') \Big) \cup \Big((0, a_{d+1} - 2)p^{d+1} + \tau\Gamma_{d,1}^{d-k}(m'') \Big)$$

et

$$\Gamma_{d,1}^{d+1-k}(m) = \Big((0, a_{d+1})p^{d+1} + \Gamma_{d,1}^{d-k}(m') \Big) \cup \Big((0, a_{d+1} - 2)p^{d+1} + \tau\Gamma_{d,0}^{d-k}(m'') \Big).$$

Donc (3.10), (3.11) et (3.9) donnent le résultat dans ce cas.

Supposons maintenant que $\delta = \beta$, alors $k = v_p(n+2) \geq 1$. Écrivons $m = a_{d+1}p^{d+1} + \cdots + a_k p^k + r$ et $m = a_{d+1}p^{d+1} + \cdots + a_k p^k - 2$ avec $-1 \leq r \leq p^k - 3$. Si $k = d+1$, alors $\mu = (a_k p^k + r, -a_k p^k)$. Donc $H^2(E_\beta(\mu)) = 0$ d'après la Proposition 1 et $I_\beta(\mu) = H^2(\mu - \beta) = H^2(a_k p^k + r + 1, -a_k p^k - 2)$. Donc (3.7) est vraie dans ce cas. Si $k < d+1$, alors d'après le Théorème 7, on a

$$I_\beta(\mu) = L(0, a_{d+1})^{(d+1)} \otimes I_\beta(\mu') \bigoplus L(0, a_{d+1} - 2)^{(d+1)} \otimes I_\beta(\mu'') \tag{3.12}$$

où $\mu' = (m', -n'-2) = (a_d p^d + \cdots + a_k p^k + r, -a_d p^d - \cdots - a_k p^k)$ et $\mu'' = (-n''-2, m'') = (-p^{d+1}, p^{d+1}) + \mu'$, où $n'' = \widehat{a}_d p^d + \cdots + \widehat{a}_k p^k + p^k - r - 2$ et $m'' = \widehat{a}_d p^d + \cdots + \widehat{a}_k p^k + p^k$ avec $1 \leq \widehat{a}_k + 1 = p - a_k \leq p - 1$ et $1 \leq p^k - r - 2 \leq p^k - 1$. Comme m', m'' sont de degré $\leq d$, alors d'après l'hypothèse de récurrence on a les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} I_\beta(\mu') \cong & H^2(a_k p^k + r + 1, -a_k p^k - 2) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d,0}^{d-k}(m')} L(\nu) \Big) \\ & \oplus H^2(-(p-a_k)p^k + r + 1, (p-a_k)p^k - 2) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \Gamma_{d,1}^{d-k}(m')} L(\nu) \Big) \end{aligned} \tag{3.13}$$

et

$$\begin{aligned} I_\beta(\mu'') \cong & H^2(\tau((\widehat{a}_k + 1)p^k - 2, -\widehat{a}_k p^k - p^k + r + 1)) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \tau\Gamma_{d,0}^{d-k}(m'')} L(\nu) \Big) \\ & \oplus H^2(\tau(-(p - \widehat{a}_k - 1)p^k - 2, (p - \widehat{a}_k)p^k - p^k + r + 1)) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \tau\Gamma_{d,1}^{d-k}(m'')} L(\nu) \Big) \\ = & H^2(-(p-a_k)p^k + r + 1, (p-a_k)p^k - 2) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \tau\Gamma_{d,0}^{d-k}(m'')} L(\nu) \Big) \\ & \oplus H^2(a_k p^k + r + 1, -a_k p^k - 2) \otimes \Big(\bigoplus_{\nu \in \tau\Gamma_{d,1}^{d-k}(m'')} L(\nu) \Big). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Les coefficients p-adiques de m' sont $a_d, a_{d-1}, \cdots, a_k, 0, \cdots$. Les coefficients p-adiques de m'' sont $\widehat{a}_d, \cdots, \widehat{a}_{k+1}, \widehat{a}_k + 1, \cdots$. Donc on a

$$\Gamma_{d,0}^{d+1-k}(m) = \Big((0, a_{d+1})p^{d+1} + \Gamma_{d,0}^{d-k}(m') \Big) \cup \Big((0, a_{d+1} - 2)p^{d+1} + \tau\Gamma_{d,1}^{d-k}(m'') \Big)$$

et

$$\Gamma_{d,1}^{d+1-k}(m) = \Big((0, a_{d+1})p^{d+1} + \Gamma_{d,1}^{d-k}(m') \Big) \cup \Big((0, a_{d+1} - 2)p^{d+1} + \tau\Gamma_{d,0}^{d-k}(m'') \Big).$$

Donc (3.13), (3.14) et (3.12) donnent le résultat dans ce cas. Ceci termine la preuve du Théorème 8. □

3.2.2 $I_\delta(\mu)$ est sans multiplicité

Proposition 10. *Soit $\mu = (m, -n-2)$ avec $m > n \geq 0$. Alors pour $\delta \in \{\alpha, \beta\}$, $I_\delta(\mu)$ est un T-module sans multiplicité. C'est-à-dire, pour tout poids $\nu \in X$, on a $\dim(I_\delta(\mu)_\nu) \leq 1$.*

Avant de montrer cette proposition, on montre d'abord le lemme utile suivant :

Lemme 11. *Soit $\mu = (ap^d + p^d - 2, -ap^d - s - 1)$ avec $d \geq 0$, $a \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$ et $s \leq p^d - 1$ (s n'est pas nécessairement positif). Alors $H^2(\mu)$ est un T-module sans multiplicité.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur d. Si $d = 0$, alors $\mu = (a-1, -a-s-1)$ avec $s \leq 0$. Donc $H^2(\mu) = 0$ d'après la Remarque 3. Supposons que $\mu = (ap^{d+1} + p^{d+1} - 2, -ap^{d+1} - s - 1)$ pour un $d \geq 0$ et $s \leq p^{d+1} - 1$. Si $s \leq 0$, alors $H^2(\mu) = 0$. Si $s > 0$, alors d'après le Théorème 2, on sait que $H^2(\mu)$ est filtré par $E_1 = L(0, a-1)^{(d+1)} \otimes V(s-1, 0)$ et $E_2 = L(0, a)^{(d+1)} \otimes H^2(p^{d+1} - 2, -s-1)$ car $H^2(\mu'') = H^2(-2, p^{d+1} - s - 1) = 0$. Comme tout poids de $V(s-1, 0)$ et de $H^2(p^{d+1} - 2, -s-1)$ est p^{d+1}-restreint, et comme $L(0, a)$ et $L(0, a-1)$ n'ont pas de poids commun, E_1 et E_2 n'ont pas de poids commun. D'après l'hypothèse de récurrence, $H^2(p^{d+1} - 2, -s-1) = H^2((p-1)p^d + p^d - 2, -(p-1)p^d - (s - (p-1)p^d) - 1)$ n'a pas de multiplicité comme T-module car $s - (p-1)p^d \leq p^{d+1} - 1 - p^{d+1} + p^d = p^d - 1$. On sait aussi que $V(s-1, 0)$ n'a pas de multiplicité comme T-module. Par conséquent, $H^2(\mu)$ n'a pas de multiplicité non plus. □

Démontrons maintenant la Proposition 10.

Démonstration. Comme $m \geq 1$, il existe $d \geq 0$ et $a \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$ tels que

$$ap^d \leq m < (a+1)p^d.$$

Écrivons $m = ap^d + r$ et $n = ap^d + s$, alors $0 \leq r \leq p^d - 1$ et $s < r$ (s peut être négatif).

Raisonnons par récurrence sur d. Si $d = 0$, alors $\mu = (a, -a-s-2)$ avec $s \leq -1$. Donc $\mu - \alpha = (a-2, -a-s-1)$ et $\mu - \beta = (a+1, -a-s-4)$, d'où $H^2(\mu - \delta) = 0$ pour tout $\delta \in \{\alpha, \beta\}$. Par conséquent, $I_\delta(\mu) = 0$ car $I_\delta(\mu) \subset H^2(\mu - \delta)$ et l'énoncé est trivial.

Maintenant supposons $m = ap^{d+1} + r$ et $n = ap^{d+1} + s$ avec $0 \leq r \leq p^{d+1} - 1$ et $s < r$.

Supposons d'abord que $\delta = \alpha$. $\boxed{\text{Si } s \leq 0 \text{ et } r \geq 1}$, alors $H^2(\mu - \alpha) = H^2(ap^{d+1} + r - 2, -ap^{d+1} - s - 1) = 0$ car $ap^{d+1} + r - 2 \geq ap^{d+1} - 1$ et $ap^{d+1} + s - 1 \leq ap^{d+1} - 1$. Donc $I_\alpha(\mu) = 0$ et le résultat est trivial.

$\boxed{\text{Si } s \leq 0 \text{ et } r = 0}$, alors $s \leq -1$ car $s < r$. Donc on a $\mu - \alpha = (ap^{d+1} - 2, -ap^{d+1} - s - 1)$ et $H^2(\mu - \alpha)$ n'a pas de multiplicité comme T-module d'après le lemme 11. Donc l'énoncé est vrai car $I_\alpha(\mu) \subset H^2(\mu - \alpha)$.

$\boxed{\text{Si } s > 0}$, alors $0 < s < r \leq p^{d+1} - 1$, et d'après la Proposition 9, on a

$$\operatorname{ch} I_\alpha(\mu) = \operatorname{ch} L(0, a)^{(d+1)} \operatorname{ch} I_\alpha(\mu') + \operatorname{ch} L(0, a-2)^{(d+1)} \operatorname{ch} I_\alpha(\mu'')$$

où $\mu' = (r, -s-2)$ et $\mu'' = (-p^{d+1} + r, p^{d+1} - s - 2)$. Comme $(0, 2) \notin \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$, alors $L(0, a)$ et $L(0, a-2)$ n'ont pas de poids commun. D'après le lemme 1, tout poids de $I_\alpha(\mu') \subset H^2(\mu' - \alpha)$ et $I_\alpha(\mu'') \subset H^2(\mu'' - \alpha)$ est p^{d+1}-restreint, donc $L(0, a)^{(d+1)} \otimes I_\alpha(\mu')$ et $L(0, a-2)^{(d+1)} \otimes I_\alpha(\mu'')$ n'ont pas de poids commun. Par conséquent, $I_\alpha(\mu)$ n'a pas de multiplicité comme T-module car $I_\alpha(\mu')$ et $I_\alpha(\mu'')$ n'ont pas de multiplicité d'après l'hypothèse de récurrence.

Supposons maintenant que $\delta = \beta$. $\boxed{\text{Si } s \leq -3}$, alors $\mu - \beta = (ap^{d+1} + r + 1, -ap^{d+1} - s - 4)$ avec $r + 1 \geq 1$ et $s + 2 \leq -1$, d'où $H^2(\mu - \beta) = 0$. En particulier, $I_\beta(\mu) = 0$ et l'énoncé est trivial.

$\boxed{\text{Si } s = -2}$, alors $\mu = (ap^{d+1} + r, -ap^{d+1})$ avec $r \geq 0$. Donc $H^2(E_\beta(\mu)) = 0$ d'après la Proposition 1, et par conséquent on a

$$I_\beta(\mu) = H^2(\mu - \beta) = H^2(ap^d + r + 1, -ap^d - 2).$$

Si $r = p^d - 1$, alors $H^2(ap^d + r + 1, -ap^d - 2) = 0$ et l'énoncé est trivial. Si $r \leq p^d - 2$, alors d'après le Théorème 2, on sait que $H^2(ap^d + r + 1, -ap^d - 2)$ est un quotient de $V(0, ap^d - r - 3)$ car $H^2(r + 1, -2) = 0$. Comme $V(0, ap^d - r - 3)$ n'a pas de multiplicité, l'énoncé est vrai dans ce cas.

$\boxed{\text{Si } s = -1}$, alors $p \nmid ap^{d+1} + s + 2$, donc $\mu - \beta \notin W_p \cdot \mu$ et en particulier on a $I_\beta(\mu) = 0$.

$\boxed{\text{Si } 0 \leq s \leq p^{d+1} - 3 \text{ et } r = p^{d+1} - 1}$, alors on a

$$H^2(\mu - \beta) = H^2((a + 1)p^{d+1}, -ap^{d+1} - s - 4) = 0$$

car $s + 2 \leq p^{d+1} - 1$, d'où $I_\beta(\mu) = 0$.

$\boxed{\text{Si } s = p^{d+1} - 2 \text{ et } r = p^{d+1} - 1}$, alors

$$H^2(E_\beta(\mu)) = H^2(E_\beta((a + 1)p^{d+1} - 1, -(a + 1)p^{d+1})) = 0$$

d'après la Proposition 1. Donc

$$I_\beta(\mu) = H^2(\mu - \beta) = ((a + 1)p^{d+1}, -(a + 1)p^{d+1} - 2)$$

qui est un quotient de $V(0, (a + 1)p^{d+1} - 2)$ d'après le Théorème 2 car $H^2(0, -2) = 0$. Comme $V(0, (a + 1)p^{d+1} - 2)$ n'a pas de multiplicité comme T-module, le résultat en découle.

$\boxed{\text{Si } 0 \leq s < r \leq p^{d+1} - 2}$, alors d'après le Proposition 9 on a

$$\operatorname{ch} I_\beta(\mu) = \operatorname{ch} L(0, a)^{(d+1)} \operatorname{ch} I_\beta(\mu') + \operatorname{ch} L(0, a - 2)^{(d+1)} \operatorname{ch} I_\beta(\mu'')$$

où $\mu' = (r, -s - 2)$ et $\mu'' = (-p^{d+1} + r, p^{d+1} - s - 2)$. Comme $(0, 2) \notin \mathbb{Z}\beta + \mathbb{Z}\beta$, alors $L(0, a)$ et $L(0, a - 2)$ n'ont pas de poids commun. D'après le lemme 1, tout poids de $I_\beta(\mu') \subset H^2(\mu' - \beta)$ et $I_\beta(\mu'') \subset H^2(\mu'' - \beta)$ est p^{d+1}-restreint, donc $L(0, a)^{(d+1)} \otimes I_\beta(\mu')$ et $L(0, a - 2)^{(d+1)} \otimes I_\beta(\mu'')$ n'ont pas de poids commun. Par conséquent, $I_\beta(\mu)$ n'a pas de multiplicité comme T-module car $I_\beta(\mu')$ et $I_\beta(\mu'')$ n'ont pas de multiplicité d'après l'hypothèse de récurrence. Ceci termine la preuve de la Proposition 10. □

3.3 Retour à la p-H^i-D-filtration

Maintenant revenons à la p-H^i-D-filtration de $H^i(\mu)$ où $i \in \{1, 2\}$ et $\mu \notin C \cup w_0 \cdot C$. Alors il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $\mu = (m, -n - 2)$ ou $\mu = (-n - 2, m)$. D'après la symétrie entre α et β, on peut supposer que $\mu = (m, -n - 2)$ sans perte de généralité. D'après la dualité de Serre, il suffit de considérer $H^1(\mu) = H^1(m, -n - 2)$ et $H^2(\mu) = H^2(m, -n - 2)$ où $m \geq n$ (c'est-à-dire, $\mu \in s_\beta \cdot C$).

Si $n \leq m \leq p - 1$, alors $H^2(m, -n - 2) = 0$ et

$$H^1(m, -n - 2) \cong H^0(s_\beta \cdot \mu) = H^0(m - n - 1, n)$$

d'après le Théorème de Borel-Weil-Bott (cf. [Jan03] II.5.5).

Si $m \geq p$, alors il existe $d \geq 1$ et $a \in \{1, 2, \cdots, p - 1\}$ tels que $ap^d \leq m < (a + 1)p^d$. Écrivons $m = ap^d + Rp + r$ et $n = ap^d + Sp + s$ avec $0 \leq r, s \leq p - 1$ (S peut être négatif mais $S \geq -ap^{d-1}$ car $n \geq 0$), alors on a $0 \leq R \leq p^{d-1} - 1$ et $S \leq R$. Notons $m^1 = ap^{d-1} + R$ et $n^1 = ap^{d-1} + S$.

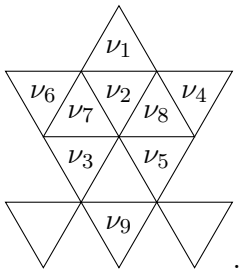
Pour $\nu = p\nu^1 + \nu^0$ où $\nu^0 \in X_1(T)$, posons

$$\mathcal{H}^i_\delta(\nu) = L(\nu^0) \otimes H^i(E_\delta(\nu^1_i))^{(i)}$$

où $\delta \in \{0, \alpha, \beta\}$. Notons aussi $\mathcal{H}^i(\nu) = \mathcal{H}^i_0(\nu)$.

3.3.1 Type Δ

Supposons que μ est de type Δ, c'est-à-dire $0 \leq s < r \leq p-2$. Les neuf facteurs simples de $\widehat{Z}(\mu)$ sont donnés par la figure suivante (où $\nu_1 = \mu$) :



.

D'après le Théorème 5, on sait que pour $i \in \{1,2\}$, il existe une filtration de $H^i(\mu)$ dont les quotients sont les suivants (l'ordre peut être différent)

$$\mathcal{H}^i(\nu_1), \mathcal{H}^i(\nu_2), \mathcal{H}^i_\alpha(\nu_4), \mathcal{H}^i_\beta(\nu_6), \mathcal{H}^i(\nu_7), \mathcal{H}^i(\nu_8), \mathcal{H}^i(\nu_9).$$

On sait que $H^0(\nu_4^1) = H^0(m^1+1, -n^1-2) = 0$ et $H^3(\nu_3^1) = H^3(m^1-1, -n^1-1) = 0$ car $m^1, n^1 \geq 0$, donc $\mathcal{H}^0(\nu_4) = \mathcal{H}^3(\nu_3) = 0$. Donc il existe une suite exacte longue

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_3) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_4) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_4) \arrow[dll, "\partial_\alpha"] \\ & \mathcal{H}^2(\nu_3) \arrow[r] & \mathcal{H}^2_\alpha(\nu_4) \arrow[r] & \mathcal{H}^2(\nu_4) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{3.15}$$

De même, comme $H^3(\nu_5^1) = H^3(m^1, -n^1-2) = 0$, on a une suite exacte longue

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathcal{H}^0(\nu_6) \arrow[r, "\partial^0_\beta"] & \mathcal{H}^1(\nu_5) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\beta(\nu_6) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_6) \arrow[dll, "\partial^1_\beta"] \\ & \mathcal{H}^2(\nu_5) \arrow[r] & \mathcal{H}^2_\beta(\nu_6) \arrow[r] & \mathcal{H}^2(\nu_6) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{3.16}$$

$\boxed{\text{Si } n^1 = 0,}$ alors $H^2(\mu) = 0$ car $n \leq p-1$ et $m \geq n$. On a aussi $\mathcal{H}^2(\nu_3) = 0$ car $\nu_3^1 = (m^1-1, -n^1-1) = (m^1-1, -1)$. Donc d'après (3.15), on sait que $\mathcal{H}^1_\alpha(\nu_4)$ est juste une extension de $\mathcal{H}^1(\nu_4)$ par $\mathcal{H}^1(\nu_3)$.

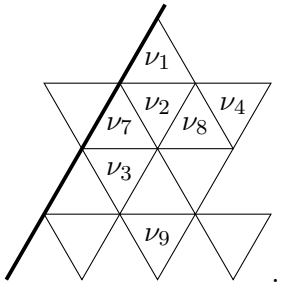
Or on a $H^i(E_\beta(\nu_6^1)) = H^i(E_\beta(m^1-1, 0)) = 0$ pour tout i d'après le lemme 6, donc d'après (3.16), ∂^0_β induit un isomorphisme

$$\mathcal{H}^0(\nu_6) \cong \mathcal{H}^1(\nu_5).$$

Par conséquent, non seulement le facteur $\mathcal{H}^1(\nu_6)$ n'apparaît pas, mais le facteur $\mathcal{H}^1(\nu_5)$ est « effacé » dans la filtration de $H^1(\mu)$, c'est-à-dire, le G-module $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^1(\nu_i) | i = 1,2,3,4,7,8,9\}.$$

La situation est visualisée par la figure suivante, où la droite en gras est le mur entre C et $s_\beta \cdot C$, i.e.$\{\mu \in X(T) | \langle \mu+\rho, \beta \rangle = 0\}$:



$\boxed{\text{Si } n^1 \geq 1 \text{ et } \mu \notin \widehat{\mathrm{Gr}}\ ,}$ c'est-à-dire $1 - ap^{d-1} \leq S \leq -1$, alors on a $H^2(\mu) = 0$. De plus, on a

$$H^0(\nu_6^1) = H^0(m^1 - 1, -n^1) = 0$$
$$H^2(\nu_3^1) = H^2(m^1 - 1, -n^1 - 1) = 0$$

et

$$H^2(\nu_5^1) = H^2(m^1, -n^1 - 2) = 0.$$

Donc d'après (3.15) et (3.16), $\mathcal{H}^1_\alpha(\nu_4)$ est juste une extension de $\mathcal{H}^1(\nu_4)$ par $\mathcal{H}^1(\nu_3)$, et $\mathcal{H}^1_\beta(\nu_6)$ est juste une extension de $\mathcal{H}^1(\nu_6)$ par $\mathcal{H}^1(\nu_4)$. Donc dans ce cas, $H^2(\mu) = 0$ et $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^1(\nu_i) | i \in \{1, 2, \cdots, 9\}\}.$$

$\boxed{\text{Si } \mu \in \widehat{\mathrm{Gr}},}$ c'est-à-dire $S \geq 0$, alors $H^0(\nu_6^1) = H^0(m^1 - 1, -n^1) = 0$. Donc (3.16) devient :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_5) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\beta(\nu_6) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_6) \arrow[dll, "\partial^1_\beta"] \\ & \mathcal{H}^2(\nu_5) \arrow[r] & \mathcal{H}^2_\beta(\nu_6) \arrow[r] & \mathcal{H}^2(\nu_6) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{3.17}$$

<u>Si $S \geq 0$ et $R = p^{d-1} - 1$,</u> alors

$$H^2(\nu_5^1) = H^2(m^1, -n^1 - 2) = H^2((a+1)p^{d-1}, -ap^{d-1} - S - 2) = 0.$$

En particulier, on a $\partial^1_\beta = 0$ dans (3.17), donc pour $i \in \{1, 2\}$, le G-module $\mathcal{H}^i_\beta(\nu_6)$ est juste une extension de $\mathcal{H}^i(\nu_6)$ par $\mathcal{H}^i(\nu_5)$.

D'autre part, on a

$$H^2(E_\alpha(\nu_4^1)) = H^2(E_\alpha(m^1 + 1, -n^1 - 2)) = H^2(E_\alpha(ap^{d-1}, -ap^{d-1} - S - 2)) = 0$$

d'après la Proposition 1. Donc $\mathcal{H}^2_\alpha(\nu_4) = 0$ et, d'après (3.15), on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^1(\nu_3) \longrightarrow \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_4) \xrightarrow{f} \mathcal{H}^1(\nu_4) \xrightarrow{\partial_\alpha} \mathcal{H}^2(\nu_3) \longrightarrow 0. \tag{3.18}$$

Notons $\mathcal{Q}_4 \subset \mathcal{H}^1(\nu_4)$ l'image de f, alors on a

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^1(\nu_3) \longrightarrow \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_4) \xrightarrow{f} \mathcal{Q}_4 \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_4 \longrightarrow \mathcal{H}^1(\nu_4) \xrightarrow{\partial_\alpha} \mathcal{H}^2(\nu_3) \longrightarrow 0.$$

Donc dans ce cas, le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_3)$ est « effacé » dans la filtration de $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$. Plus précisément, $H^2(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^2(\nu_i)|i = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

et $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^1(\nu_i)|i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\} \cup \{\mathcal{Q}_4\}$$

où $\mathcal{Q}_4 \subset \mathcal{H}^1(\nu_4)$ est tel que

$$\mathcal{H}^1(\nu_4)/\mathcal{Q}_4 \cong \mathcal{H}^2(\nu_3).$$

De même, si $S = 0$ et $0 \leq R \leq p^{d-1} - 1$, alors le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_5)$ est « effacé » dans la filtration de $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$. Plus précisément, $H^2(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^2(\nu_i)|i = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$$

et $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^1(\nu_i)|i = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\} \cup \{\mathcal{Q}_6\}$$

où $\mathcal{Q}_6 \subset \mathcal{H}^1(\nu_6)$ est tel que

$$\mathcal{H}^1(\nu_6)/\mathcal{Q}_6 \cong \mathcal{H}^2(\nu_5).$$

Si $1 \leq S \leq R \leq p^{d-1} - 2$, alors

$$\nu_4^1 = (m^1 + 1, -n^1 - 2) = (ap^{d-1} + R + 1, -ap^{d-1} - S - 2)$$

avec $1 \leq S < R + 1 \leq p^{d-1} - 1$. Donc ν_4^1 vérifie l'hypothèse du Théorème 7 pour $\delta = \alpha$. D'autre part,

$$\nu_6^1 = (m^1 - 1, -n^1) = (ap^{d-1} + R - 1, -ap^{d-1} - (S - 2) - 2)$$

avec $-1 \leq S - 2 < R - 1 \leq p^d - 3$, donc ν_6^1 vérifie l'hypothèse du Théorème 7 pour $\delta = \beta$.

Donc pour $i \in \{1, 2\}$, $H^i(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^i(\nu_1), \mathcal{H}^i(\nu_2), \mathcal{H}^i_\alpha(\nu_4), \mathcal{H}^i_\beta(\nu_6), \mathcal{H}^i(\nu_7), \mathcal{H}^i(\nu_8), \mathcal{H}^i(\nu_9)\}.$$

De plus, on a des suites exactes longues :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_3) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_4) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_4) \arrow[dll, "\partial_\alpha"] & & \\
& \mathcal{H}^2(\nu_3) \arrow[r] & \mathcal{H}^2_\alpha(\nu_4) \arrow[r] & \mathcal{H}^2(\nu_4) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_5) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\beta(\nu_6) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_6) \arrow[dll, "\partial_\beta"] & & \\
& \mathcal{H}^2(\nu_5) \arrow[r] & \mathcal{H}^2_\beta(\nu_6) \arrow[r] & \mathcal{H}^2(\nu_6) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où

$$\mathrm{Im}(\partial_\alpha) \cong L(\nu_4^0) \otimes I_\alpha(\nu_4^1)^{(1)}$$

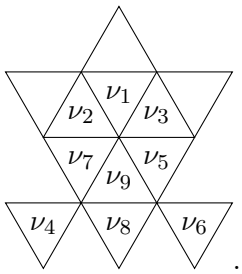
et

$$\mathrm{Im}(\partial_\beta) \cong L(\nu_6^0) \otimes I_\beta(\nu_6^1)^{(1)}$$

qui peuvent être calculés récursivement par le Théorème 7.

3.3.2 Type ∇

Si μ est de type ∇, c'est-à-dire $r < s$, alors on a forcément $m^1 > n^1$ et $R > S$ car $m \geq n$. Les neuf facteurs simples de $\widehat{Z}(\mu)$ sont donnés par la figure suivante (où $\nu_1 = \mu$) :



.

D'après le Théorème 5, on sait que pour $i \in \{1, 2\}$, il existe une filtration de $H^i(\mu)$ dont les quotients sont les suivants (l'ordre peut être différent) :

$$\mathcal{H}^i(\nu_1), \mathcal{H}^i(\nu_2), \mathcal{H}^i(\nu_3), \mathcal{H}^i_\alpha(\nu_5), \mathcal{H}^i_\beta(\nu_7), \mathcal{H}^i(\nu_8), \mathcal{H}^i(\nu_9).$$

On a

$$H^0(\nu_5^1) = H^0(m^1, -n^1 - 2) = 0$$

et

$$H^3(\nu_4^1) = H^3(m^1 - 2, -n^1 - 1) = 0$$

car $m^1 \geq n^1 + 1 \geq 1$. Donc $\mathcal{H}^0(\nu_5) = 0$ et $\mathcal{H}^3(\nu_4) = 0$, d'où une suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_4) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_5) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_5) \arrow[dll, "\partial_\alpha"] & \\ & \mathcal{H}^2(\nu_4) \arrow[r] & \mathcal{H}^2_\alpha(\nu_5) \arrow[r] & \mathcal{H}^2(\nu_5) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{3.19}$$

De même, on a

$$H^0(\nu_7^1) = H^0(m^1 - 1, -n^1 - 1) = 0$$

et

$$H^3(\nu_6^1) = H^3(m^1, -n^1 - 3) = 0,$$

d'où une suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_6) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\beta(\nu_7) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_7) \arrow[dll, "\partial_\beta"] & \\ & \mathcal{H}^2(\nu_6) \arrow[r] & \mathcal{H}^2_\beta(\nu_7) \arrow[r] & \mathcal{H}^2(\nu_7) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{3.20}$$

$\boxed{\text{Si } S \leq -2 \text{ et } R \geq 1,}$ alors

$$H^2(\nu_4^1) = H^2(m^1 - 2, -n^1 - 1) = H^2(ap^{d-1} + R - 2, -ap^{d-1} - (S - 1) - 1) = 0$$

et

$$H^2(\nu_6^1) = H^2(m^1, -n^1 - 3) = H^2(ap^{d-1} + R, -ap^{d-1} - (S + 1) - 2) = 0.$$

En particulier, on a $\partial_\alpha = \partial_\beta = 0$. Donc dans ce cas, $H^2(\mu) = 0$ et $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^1(\nu_i) | i \in \{1, 2, \cdots, 9\}\}.$$

$\boxed{\text{Si } S \leq -2 \text{ et } R = 0,}$ alors on a encore

$$H^2(\nu_6^1) = H^2(m^1, -n^1 - 3) = H^2(ap^{d-1} + R, -ap^{d-1} - (S+1) - 2) = 0,$$

d'où $\partial_\beta = 0$. D'autre part, on a

$$H^2(E_\alpha(\nu_5^1)) = H^2(E_\alpha(m^1, -n^1 - 2)) = H^2(E_\alpha(ap^{d-1}, -ap^{d-1} - S - 2)) = 0$$

d'après la Proposition 1, donc (3.19) devient

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_4) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_5) \arrow[r, "f_\alpha"] & \mathcal{H}^1(\nu_5) \arrow[dll, "\partial_\alpha"] \\ & \mathcal{H}^2(\nu_4) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Dans ce cas, le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_4)$ est « effacé » dans la filtration de $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$. Plus précisément, notons $\mathcal{Q}_5$ l'image de f_α, alors $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^1(\nu_i) | i = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\} \cup \{\mathcal{Q}_5\}$$

où $\mathcal{Q}_5 \subset \mathcal{H}^1(\nu_5)$ est tel que

$$\mathcal{H}^1(\nu_5)/\mathcal{Q}_5 \cong \mathcal{H}^2(\nu_4).$$

De plus, $H^2(\mu) = 0$ même si $\mathcal{H}^2(\nu_4) \neq 0$.

$\boxed{\text{Si } S = -1 \text{ et } R \geq 1,}$ alors

$$H^2(\nu_4^1) = H^2(m^1 - 2, -n^1 - 1) = H^2(ap^{d-1} + R - 2, -ap^{d-1} - (S-1) - 1) = 0,$$

d'où $\partial_\alpha = 0$. D'autre part, on a

$$H^2(E_\beta(\nu_7^1)) = H^2(E_\beta(m^1 - 1, -n^1 - 1)) = H^2(E_\beta(ap^{d-1} + R - 1, -ap^{d-1})) = 0$$

d'après la Proposition 1. Donc (3.20) devient

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_6) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\beta(\nu_7) \arrow[r, "f_\beta"] & \mathcal{H}^1(\nu_7) \arrow[dll, "\partial_\beta"] \\ & \mathcal{H}^2(\nu_6) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Dans ce cas, le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_6)$ est « effacé » dans la filtration de $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$. Plus précisément, notons $\mathcal{Q}_7$ l'image de f_β, alors $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^1(\nu_i) | i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\} \cup \{\mathcal{Q}_7\}$$

où $\mathcal{Q}_7 \subset \mathcal{H}^1(\nu_7)$ est tel que

$$\mathcal{H}^1(\nu_7)/\mathcal{Q}_7 \cong \mathcal{H}^2(\nu_6).$$

De plus, $H^2(\mu) = 0$ même si $\mathcal{H}^2(\nu_6)$ n'est pas forcément nul.

$\boxed{\text{De même, si } S = -1 \text{ et } R = 0,}$ alors le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_4)$ et le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_6)$ sont tous les deux « effacés ». C'est-à-dire, $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^1(\nu_i) | i = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\} \cup \{\mathcal{Q}_5, \mathcal{Q}_7\}$$

où $\mathcal{Q}_5 \subset \mathcal{H}^1(\nu_5)$ et $\mathcal{Q}_7 \subset \mathcal{H}^1(\nu_7)$ sont tels que

$$\mathcal{H}^1(\nu_5)/\mathcal{Q}_5 \cong \mathcal{H}^2(\nu_4)$$

et

$$\mathcal{H}^1(\nu_7)/\mathcal{Q}_7 \cong \mathcal{H}^2(\nu_6).$$

De plus, $H^2(\mu) = 0$ même si $\mathcal{H}^2(\nu_4)$ et $\mathcal{H}^2(\nu_6)$ ne sont pas nuls.

$\boxed{\text{Si } S \geq 0,}$ alors on a $0 \leq S < R < p^{d-1} - 1$. Dans ce cas,

$$\nu_5^1 = (m^1, -n^1 - 2) = (ap^{d-1} + R, -ap^{d-1} - S - 2)$$

vérifie l'hypothèse du Théorème 7 pour $\delta = \alpha$.

D'autre part,

$$\nu_7^1 = (m^1 - 1, -n^1 - 1) = (ap^{d-1} + R - 1, -ap^{d-1} - (S - 1) - 2)$$

avec $-1 \leq S - 1 < R - 1 \leq p^{d-1} - 2$. Donc ν_7^1 vérifie l'hypothèse du Théorème 7 pour $\delta = \alpha$. Donc pour $i \in \{1, 2\}$, $H^i(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^i(\nu_1), \mathcal{H}^i(\nu_2), \mathcal{H}^i(\nu_3), \mathcal{H}^i_\alpha(\nu_5), \mathcal{H}^i_\beta(\nu_7), \mathcal{H}^i(\nu_8), \mathcal{H}^i(\nu_9)\}.$$

De plus, on a des suites exactes longues :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_4) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_5) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_5) \arrow[dll, "\partial_\alpha"] & \\
& \mathcal{H}^2(\nu_4) \arrow[r] & \mathcal{H}^2_\alpha(\nu_5) \arrow[r] & \mathcal{H}^2(\nu_5) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_6) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\beta(\nu_7) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_7) \arrow[dll, "\partial_\beta"] & \\
& \mathcal{H}^2(\nu_6) \arrow[r] & \mathcal{H}^2_\beta(\nu_7) \arrow[r] & \mathcal{H}^2(\nu_7) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où

$$\mathrm{Im}(\partial_\alpha) \cong L(\nu_5^0) \otimes I_\alpha(\nu_5^1)^{(1)}$$

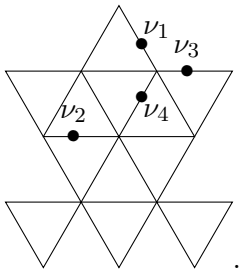
et

$$\mathrm{Im}(\partial_\beta) \cong L(\nu_7^0) \otimes I_\beta(\nu_7^1)^{(1)}$$

qui peuvent être calculés récursivement par le Théorème 7.

3.3.3 Cas α-singulier

Supposons que μ est α-singulier, c'est-à-dire $0 \leq s < r = p - 1$. Les quatre facteurs simples de $\widehat{Z}(\mu)$ sont donnés par la figure suivante (où $\nu_1 = \mu$) :



.

D'après le Théorème 5, on sait que pour $i \in \{1,2\}$, il existe une filtration de $H^i(\mu)$ dont les quotients sont :

$$\mathcal{H}^i(\nu_1), \mathcal{H}^i_\alpha(\nu_3), \mathcal{H}^i(\nu_4).$$

On sait que $H^0(\nu_3^1) = H^0(m^1+1, -n^1-2) = 0$ et $H^3(\nu_2^1) = H^3(m^1-1, -n^1-1) = 0$ car $m^1, n^1 \geq 0$, donc $\mathcal{H}^0(\nu_3) = \mathcal{H}^3(\nu_2) = 0$. Donc il existe une suite exacte longue

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_2) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_3) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_3) \arrow[dll, "\partial_\alpha"] \\ & \mathcal{H}^2(\nu_2) \arrow[r] & \mathcal{H}^2_\alpha(\nu_3) \arrow[r] & \mathcal{H}^2(\nu_3) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{3.21}$$

$\boxed{\text{Si } \mu \notin \widehat{\mathrm{Gr}}\ ,}$ c'est-à-dire $S \leq -1$, alors on a $H^2(\mu) = 0$. De plus, on a

$$H^2(\nu_2^1) = H^2(m^1-1, -n^1-1) = H^2(ap^{d-1}+R-1, -ap^{d-1}-S-1) = 0.$$

Donc d'après (3.21) , $\mathcal{H}^1_\alpha(\nu_3)$ est juste une extension de $\mathcal{H}^1(\nu_3)$ par $\mathcal{H}^1(\nu_2)$. Donc dans ce cas, $H^2(\mu) = 0$ et $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^1(\nu_i) | i = 1,2,3,4\}.$$

$\boxed{\text{Si } \mu \in \widehat{\mathrm{Gr}} \text{ et } R = p^{d-1}-1,}$ c'est-à-dire $S \geq 0$ et $R = p^{d-1}-1$, alors on a

$$H^2(E_\alpha(\nu_3^1)) = H^2(E_\alpha(m^1+1, -n^1-2)) = H^2(E_\alpha(ap^{d-1}, -ap^{d-1}-S-2)) = 0$$

d'après la Proposition 1. Donc $\mathcal{H}^2_\alpha(\nu_3) = 0$ et d'après (3.21), on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^1(\nu_2) \longrightarrow \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_3) \xrightarrow{f} \mathcal{H}^1(\nu_3) \xrightarrow{\partial_\alpha} \mathcal{H}^2(\nu_2) \longrightarrow 0.$$

Donc dans ce cas, le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_2)$ est « effacé » dans la filtration de $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$. Plus précisément, notons $\mathcal{Q}_3 \subset \mathcal{H}^1(\nu_3)$ l'image de f, alors $H^2(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^2(\nu_i) | i = 1,3,4\}$$

et $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^1(\nu_i) | i = 1,2,4\} \cup \{\mathcal{Q}_3\}$$

où $\mathcal{Q}_3 \subset \mathcal{H}^1(\nu_3)$ est tel que

$$\mathcal{H}^1(\nu_3)/\mathcal{Q}_3 \cong \mathcal{H}^2(\nu_2).$$

$\boxed{\text{Si } 0 \leq S \leq R \leq p^{d-1}-2,}$ alors

$$\nu_3^1 = (m^1+1, -n^1-2) = (ap^{d-1}+R+1, -ap^{d-1}-S-2)$$

avec $1 \leq S < R+1 \leq p^{d-1}-1$. Donc ν_3^1 vérifie l'hypothèse du Théorème 7 pour $\delta = \alpha$.

Donc pour $i \in \{1,2\}$, $H^i(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^i(\nu_1), \mathcal{H}^i_\alpha(\nu_3), \mathcal{H}^i(\nu_4)\}.$$

De plus, on a une suite exacte longue :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_2) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\alpha(\nu_3) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_3) \arrow[dll, "\partial_\alpha"] \\ & \mathcal{H}^2(\nu_2) \arrow[r] & \mathcal{H}^2_\alpha(\nu_3) \arrow[r] & \mathcal{H}^2(\nu_3) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

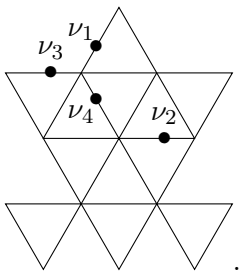
où

$$\mathrm{Im}(\partial_\alpha) \cong L(\nu_3^0) \otimes I_\alpha(\nu_3^1)^{(1)}$$

qui peut être calculé récursivement par le Théorème 7.

3.3.4 Cas β-singulier

Si μ est β-singulier, c'est-à-dire $0 \leq r < s = p-1$, alors on a forcément $m^1 > n^1$ et $R > S$ car $m \geq n$. Les quatre facteurs simples de $\widehat{Z}(\mu)$ sont donnés par la figure suivante (où $\nu_1 = \mu$) :



.

D'après le Théorème 5, on sait que pour $i \in \{1,2\}$, il existe une filtration de $H^i(\mu)$ dont les quotients sont :

$$\mathcal{H}^i(\nu_1), \mathcal{H}^i_\beta(\nu_3), \mathcal{H}^i(\nu_4).$$

On a

$$H^0(\nu_3^1) = H^0(m^1-1, -n^1-1) = 0$$

et

$$H^3(\nu_2^1) = H^3(m^1, -n^1-3) = 0,$$

d'où une suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_2) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\beta(\nu_3) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_3) \arrow[dll, "\partial_\beta"] & \\ & \mathcal{H}^2(\nu_2) \arrow[r] & \mathcal{H}^2_\beta(\nu_3) \arrow[r] & \mathcal{H}^2(\nu_3) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{3.22}$$

$\boxed{\text{Si } S \leq -2,}$ alors

$$H^2(\nu_2^1) = H^2(m^1, -n^1-3) = H^2(ap^{d-1}+R, -ap^{d-1}-(S+1)-2) = 0.$$

En particulier, on a $\partial_\beta = 0$. Donc dans ce cas, $H^2(\mu) = 0$ et $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^1(\nu_i) | i \in \{1,2,3,9\}\}.$$

$\boxed{\text{Si } S = -1,}$ alors on a

$$H^2(E_\beta(\nu_3^1)) = H^2(E_\beta(m^1-1, -n^1-1)) = H^2(E_\beta(ap^{d-1}+R-1, -ap^{d-1})) = 0$$

d'après la Proposition 1. Donc (3.22) devient

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^1(\nu_2) \longrightarrow \mathcal{H}^1_\beta(\nu_3) \xrightarrow{f_\beta} \mathcal{H}^1(\nu_3) \xrightarrow{\partial_\beta} \mathcal{H}^2(\nu_2) \longrightarrow 0.$$

Dans ce cas, le facteur $\mathcal{H}^2(\nu_2)$ est « effacé » dans la filtration de $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$. Plus précisément, notons $\mathcal{Q}_3$ l'image de f_β, alors $H^1(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^1(\nu_i)|i = 1, 2, 4\} \cup \{\mathcal{Q}_3\}$$

où $\mathcal{Q}_3 \subset \mathcal{H}^1(\nu_3)$ est tel que

$$\mathcal{H}^1(\nu_3)/\mathcal{Q}_3 \cong \mathcal{H}^2(\nu_2).$$

De plus, $H^2(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^2(\nu_i)|i = 1, 3, 4\}.$$

$\boxed{\text{Si } S \geq 0,}$ alors on a $0 \leq S < R < p^{d-1} - 1$. Dans ce cas, on a

$$\nu_3^1 = (m^1 - 1, -n^1 - 1) = (ap^{d-1} + R - 1, -ap^{d-1} - (S - 1) - 2)$$

avec $-1 \leq S - 1 < R - 1 \leq p^{d-1} - 2$. Donc ν_3^1 vérifie l'hypothèse du Théorème 7 pour $\delta = \beta$. Donc pour $i \in \{1, 2\}$, $H^i(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^i(\nu_1), \mathcal{H}^i_\beta(\nu_3), \mathcal{H}^i(\nu_4)\}.$$

De plus, on a une suite exacte longue :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_2) \arrow[r] & \mathcal{H}^1_\beta(\nu_3) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\nu_3) \arrow[dll, "\partial_\beta"] & & \\
& \mathcal{H}^2(\nu_3) \arrow[r] & \mathcal{H}^2_\beta(\nu_3) \arrow[r] & \mathcal{H}^2(\nu_3) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où

$$\mathrm{Im}(\partial_\beta) \cong L(\nu_3^0) \otimes I_\beta(\nu_3^1)^{(1)}$$

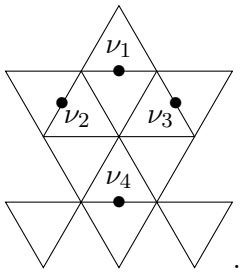
qui peuvent être calculés récursivement par le Théorème 7.

3.3.5 Cas γ-singulier ou α-β-singulier

Si μ est γ-singulier ou α-β-singulier, alors il n'y a pas de E_α ou E_β dans la filtration. Donc d'après le Théorème 5, si μ est γ-singulier, alors pour $j \in \{1, 2\}$, $H^i(\mu)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{\mathcal{H}^j(\nu_i)|i = 1, 2, 3, 4\},$$

où la valeur de ν_i est donnée par la figure suivante (où $\nu_1 = \mu$) :



.

Si μ est α-β-singulier, alors $\mu = (m^1p + p - 1, -n^1p - p - 1)$ et pour $i \in \{1, 2\}$, on a

$$H^i(\mu) \cong L(p - 1, p - 1) \otimes H^i(m^1, -n^1 - 2)^{(1)}.$$

3.4 Cas p^2-restreint et régulier

On va comparer les résultats de la section 3.3 avec ceux de [KH85] et de [DS88]. Le but est de donner les conditions explicites pour l'existence d'une filtration générique de $H^{\ell(w)}(w \cdot \lambda)$ lorsque le poids dominant λ est dans la p^2-alcôve du bas.

Soit $\lambda = (m, n) = (ap + r, bp + s) \in X_2(T)$ avec $a, b, r, s \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ un poids dominant p^2-restreint. Supposons que λ est régulier, c'est-à-dire, $r, s \leq p-2$ et $r+s+2 \neq p$. Donc λ est de type Δ ou de type ∇. On va étudier la structure de $H^{\ell(w)}(w \cdot \lambda)$ pour tout $w \in W$.

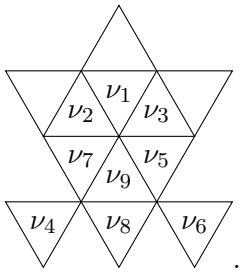
3.4.1 Type Δ

Si λ est de type Δ, alors $r + s + 1 \geq p$.

1) Supposons d'abord que $w = s_\beta$. Alors

$$w \cdot \lambda = (m + n + 1, -n - 2) = ((a + b + 1)p + (r + s + 1 - p), -bp - s - 2)$$

avec $0 \leq r + s + 1 - p < s \leq p - 2$. Donc $w \cdot \lambda$ est de type ∇, et les neuf facteurs simples de $\widehat{Z}(w \cdot \lambda)$ sont donnés par la figure suivante (où $\nu_1 = w \cdot \lambda$) :



.

On sait que le facteur $\widehat{L}(\nu_4)$ et $\widehat{L}(\nu_5)$ forment le facteur $\widehat{L}(\nu_5^0) \otimes E_\alpha(\nu_5^1)^{(1)}$ et les facteurs $\widehat{L}(\nu_6)$ et $\widehat{L}(\nu_7)$ forment le facteur $\widehat{L}(\nu_7^0) \otimes E_\alpha(\nu_7^1)^{(1)}$.

Donc $H^{\ell(w)}(w \cdot \lambda) = H^1(s_\beta \cdot \lambda)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{L(\nu_i^0) \otimes H^1(\nu_i^1)^{(1)} | i \in \{1, 2, \cdots, 9\}\}$$

si et seulement si $H^1(E_\alpha(\nu_5^1))$ est une extension de $H^1(\nu_5^1)$ par $H^1(\nu_5^1 - \alpha)$ et $H^1(E_\beta(\nu_7^1))$ est une extension de $H^1(\nu_7^1)$ par $H^1(\nu_7^1 - \beta)$.

On a

$$\nu_5 = (p - s - 2, p - r - 2) + p(a + b + 1, -b - 2),$$

donc $\nu_5^1 = (a+b+1, -b-2)$ et $\nu_5^1 - \alpha = (a+b-1, -b-1)$. Donc $H^0(\nu_5^1) = 0$ car $-b-2 < 0$ et $H^2(\nu_5^1 - \alpha) = 0$ car $-1 \leq b - 1 \leq a + b - 1$ et $b - 1 \leq p - 1$. Donc $H^1(E_\alpha(\nu_5^1))$ est toujours une extension de $H^1(\nu_5^1)$ par $H^1(\nu_5^1 - \alpha)$.

D'autre part,

$$\nu_7 = (p - r - 2, r + s + 1 - p) + p(a + b, -b - 1),$$

donc $\nu_7^1 = (a + b, -b - 1)$ et $\nu_7^1 - \beta = (a + b + 1, -b - 3)$. Si $b \leq p - 2$, alors $p \nmid -b - 1$, d'où $\nu_7^1 - \beta \notin W_p \cdot \nu_7^1$ et $H^1(E_\beta(\nu_7^1))$ est la somme directe de $H^1(\nu_7^1)$ et $H^1(\nu_7^1 - \beta)$. Si $b = p - 1$, alors

$$H^2(E_\beta(\nu_7^1)) = H^2(E_\beta(a + p - 1, -p)) = 0$$

d'après la Proposition 1. Donc le morphisme de bord

$$\partial_\beta : H^1(\nu_7^1) \to H^2(\nu_7^1 - \beta)$$

est surjectif. Or

$$H^2(\nu_7^1 - \beta) = H^2(p + a, -p - 2) \neq 0$$

si $a \leq p - 2$, donc $\partial_\beta \neq 0$ si $a \leq p - 2$.

Donc dans le cas $w = s_\beta$, $H^{\ell(w)}(w \cdot \lambda) = H^1(s_\beta \cdot \lambda)$ admet une filtration dont les quotients sont

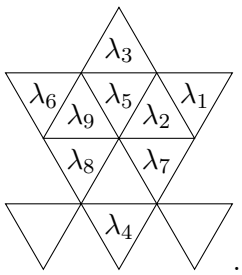
$$\{L(\nu_i^0) \otimes H^1(\nu_i^1)^{(1)} | i \in \{1, 2, \cdots, 9\}\}$$

si et seulement si $a = p - 1$ ou $b \neq p - 1$.

Notons $\lambda_i = \nu_i^0 + pw^{-1} \cdot \nu_i^1$. Calculons les λ_i :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= (r + s + 1 - p, p - s - 2) + p(a + 1, b - 1) \\
\lambda_2 &= (2p - r - s - 3, r) + p(a, b - 1) \\
\lambda_3 &= (r, s) + p(a, b) = \lambda \\
\lambda_4 &= (p - s - 2, p - r - 2) + p(a - 1, b - 1) \\
\lambda_5 &= (p - s - 2, p - r - 2) + p(a, b) \\
\lambda_6 &= (p - r - 2, r + s + 1 - p) + p(a - 1, b + 1) \\
\lambda_7 &= (p - r - 2, r + s + 1 - p) + p(a, b - 1) \\
\lambda_8 &= (r + s + 1 - p, p - s - 2) + p(a - 1, b) \\
\lambda_9 &= (s, 2p - r - s - 3) + p(a - 1, b).
\end{aligned}$$

Leur positions sont visualisées par la figure suivante, où $\lambda_3 = \lambda$:



.

Si $a, b \geq 1$ et $a + b + 2 \leq p$, alors $w^{-1} \cdot \nu_i^1$ est dominant et dans l'adhérence de la première p-alcôve pour tout i. Donc

$$L(\nu_i^0) \otimes H^1(\nu_i^1)^{(1)} \cong L(\nu_i^0) \otimes H^0(w^{-1} \cdot \nu_i^1)^{(1)} \cong L(\nu_i^0) \otimes L(w^{-1} \cdot \nu_i^1)^{(1)} \cong L(\lambda_i) \neq 0.$$

Donc si $a, b \geq 1$ et $a + b + 2 \leq p$, alors les facteurs de compositions de $H^{\ell(w)}(w \cdot \lambda)$ sont

$$\{L(\lambda_i) | i \in \{1, 2, \cdots, 9\}\}.$$

Si $a = 0$, alors λ_4, λ_6, λ_8 et λ_9 ne sont pas dominants.

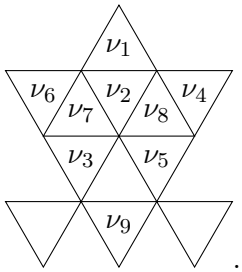
Si $b = 0$, alors λ_1, λ_2, λ_4 et λ_7 ne sont pas dominants.

Si $a + b + 2 > p$, alors pour certains i, λ_i^1 n'est plus dans l'adhérence de la première p-alcôve, et donc on n'a pas forcément $H^1(\nu_i^1) \cong H^0(\lambda_i^1)$.

2) Supposons que $w = s_\alpha s_\beta$. Alors

$$w \cdot \lambda = (-m - n - 3, m) = (-(a + b + 1)p - (r + s + 1 - p) - 2, ap + r)$$

qui est de type Δ car $r \geq r+s+1-p$. Donc les neuf facteurs simples de $\widehat{Z}(w\cdot\lambda)$ sont donnés par la figure suivante (où $\nu_1 = w\cdot\lambda$) :



.

Comme

$$H^{\ell(w)}(w\cdot\lambda) = H^2(-m-n-3,m) = H^1(m+n+1,-m-2)^*,$$

alors d'après la discussion pour $w = s_\beta$, on trouve que $H^2(s_\alpha s_\beta\cdot\lambda)$ admet une filtration dont les quotients sont

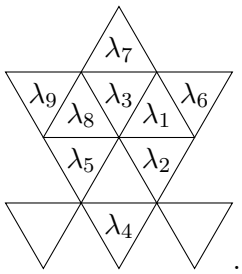
$$\{L(\nu_i^0)\otimes H^2(\nu_i^1)^{(1)} | i\in\{1,2,\cdots,9\}\}$$

si et seulement si $b = p-1$ ou $a \neq p-1$.

Notons $\lambda_i = \nu_i^0 + pw^{-1}\cdot\nu_i^1$. Calculons les λ_i :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= (2p-r-s-3,r) + p(a,b-1)\\
\lambda_2 &= (p-r-2,r+s+1-p) + p(a,b-1)\\
\lambda_3 &= (p-s-2,p-r-2) + p(a,b)\\
\lambda_4 &= (p-s-2,p-r-2) + p(a-1,b-1)\\
\lambda_5 &= (r+s+1-p,p-s-2) + p(a-1,b)\\
\lambda_6 &= (r+s+1-p,p-s-2) + p(a+1,b-1)\\
\lambda_7 &= (r,s) + p(a,b) = \lambda\\
\lambda_8 &= (s,2p-r-s-3) + p(a-1,b)\\
\lambda_9 &= (p-r-2,r+s+1-p) + p(a-1,b+1).
\end{aligned}$$

Leur positions sont visualisées par la figure suivante, où $\lambda_7 = \lambda$:



.

Si $a,b\geq 1$ et $a+b+2\leq p$, alors $w^{-1}\cdot\nu_i^1$ est dominant et dans l'adhérence de la première p-alcôve pour tout i. Donc

$$L(\nu_i^0)\otimes H^2(\nu_i^1)^{(1)} \cong L(\nu_i^0)\otimes H^0(w^{-1}\cdot\nu_i^1)^{(1)} \cong L(\nu_i^0)\otimes L(w^{-1}\cdot\nu_i^1)^{(1)} \cong L(\lambda_i) \neq 0.$$

Donc si $a,b\geq 1$ et $a+b+2\leq p$, alors les facteurs de compositions de $H^{\ell(w)}(w\cdot\lambda)$ sont

$$\{L(\lambda_i) | i\in\{1,2,\cdots,9\}\}.$$

Si $a = 0$, alors λ_4, λ_5, λ_8 et λ_9 ne sont pas dominants.

Si $b = 0$, alors λ_1, λ_2, λ_4 et λ_6 ne sont pas dominants.

Si $a + b + 2 > p$, alors pour certains i, λ_i^1 n'est plus dans l'adhérence de la première p-alcôve, et donc on n'a pas forcément que $H^2(\nu_i^1) \cong H^0(\lambda_i^1)$.

Pour $w = s_\alpha$ ou $s_\beta s_\alpha$, il suffit d'utiliser la symétrie entre α et β, et on trouve que si $a, b \geq 1$ et $a + b + 2 \leq p$, alors $H^{\ell(w)}(w \cdot \lambda)$ a exactement neuf facteurs simples.

Pour $w = 1$, si $a, b \geq 1$ et $a + b + 2 \leq p$ et si $\widehat{L}(\nu^0) \otimes p\nu^1$ est un facteur de $\widehat{Z}(\lambda)$, alors d'après la section 2.1, ν^1 est dominant et est dans l'adhérence de la première p-alcôve. Donc d'après le Corollaire 3, $H^0(\lambda)$ a neuf facteurs simples distincts. De même pour $H^3(w_0 \cdot \lambda)$.

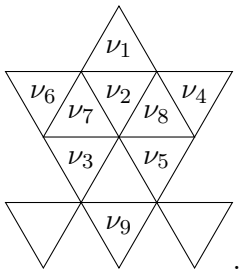
3.4.2 Type ∇

Si λ est de type ∇, alors $r + s + 2 \leq p - 1$.

1) Supposons que $w = s_\beta$. Alors

$$w \cdot \lambda = (m + n + 1, -n - 2) = ((a + b)p + (r + s + 1), -bp - s - 2)$$

avec $0 \leq s < r + s + 1 \leq p - 2$. Donc $w \cdot \lambda$ est de type Δ, et les neuf facteurs simples de $\widehat{Z}(w \cdot \lambda)$ sont donnés par la figure suivante (où $\nu_1 = w \cdot \lambda$) :



.

On sait que les facteurs $\widehat{L}(\nu_3)$ et $\widehat{L}(\nu_4)$ forment le facteur $\widehat{L}(\nu_4^0) \otimes E_\alpha(\nu_4^1)^{(1)}$ et les facteurs $\widehat{L}(\nu_5)$ et $\widehat{L}(\nu_6)$ forment le facteur $\widehat{L}(\nu_6^0) \otimes E_\alpha(\nu_6^1)^{(1)}$.

Donc $H^{\ell(w)}(w \cdot \lambda) = H^1(s_\beta \cdot \lambda)$ admet une filtration dont les quotients sont

$$\{L(\nu_i^0) \otimes H^1(\nu_i^1)^{(1)} | i \in \{1, 2, \cdots, 9\}\}$$

si et seulement si $H^1(E_\alpha(\nu_4^1))$ est une extension de $H^1(\nu_4^1)$ par $H^1(\nu_4^1 - \alpha)$ et $H^1(E_\beta(\nu_6^1))$ est une extension de $H^1(\nu_6^1)$ par $H^1(\nu_6^1 - \beta)$.

On a

$$\nu_4 = (r, s) + p(a + b + 1, -b - 2),$$

donc $\nu_4^1 = (a+b+1, -b-2)$ et $\nu_4^1 - \alpha = (a+b-1, -b-1)$. Donc $H^0(\nu_4^1) = 0$ car $-b-2 < 0$ et $H^2(\nu_4^1 - \alpha) = 0$ car $-1 \leq b - 1 \leq a + b - 1$ et $b - 1 \leq p - 1$. Donc $H^1(E_\alpha(\nu_4^1))$ est toujours une extension de $H^1(\nu_4^1)$ par $H^1(\nu_4^1 - \alpha)$.

D'autre part,

$$\nu_6 = (p - r - s - 3, r) + p(a + b - 1, -b),$$

donc $\nu_6^1 = (a + b - 1, -b)$ et $\nu_6^1 - \beta = (a + b, -b - 2)$. Si $b \geq 1$, alors $p \nmid -b$, d'où $\nu_6^1 - \beta \notin W_p \cdot \nu_6^1$ et $H^1(E_\beta(\nu_6^1))$ est la somme directe de $H^1(\nu_6^1)$ et $H^1(\nu_6^1 - \beta)$. Si $b = 0$, alors

$$H^1(E_\beta(\nu_6^1)) = H^1(E_\beta(a - 1, 0)) = 0$$

d'après le lemme 6. Mais si $a \geq 1$ et $b = 0$, alors $H^1(\nu_6^1 - \beta) = H^1(a, -2) \neq 0$. Donc si $b = 0$ et $a \geq 1$, $H^1(E_\beta(\nu_6^1))$ n'est pas une extension de $H^1(\nu_6^1)$ par $H^1(\nu_6^1 - \beta)$.

Donc lorsque λ est de type ∇, $H^{\ell(w)}(w\cdot\lambda) = H^1(s_\beta\cdot\lambda)$ admet une filtration dont les quotients sont

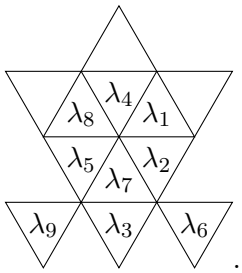
$$\{L(\nu_i^0)\otimes H^1(\nu_i^1)^{(1)} | i\in\{1,2,\cdots,9\}\}$$

si et seulement si $a=0$ ou $b\neq 0$.

Notons $\lambda_i = \nu_i^0 + pw^{-1}\cdot\nu_i^1$. Calculons les λ_i :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= (r+s+1, p-s-2) + p(a, b-1)\\
\lambda_2 &= (s, p-r-s-3) + p(a, b-1)\\
\lambda_3 &= (r, s) + p(a-1, b-1)\\
\lambda_4 &= (r, s) + p(a, b) = \lambda\\
\lambda_5 &= (p-r-s-3, r) + p(a-1, b)\\
\lambda_6 &= (p-r-s-3, r) + p(a, b-2)\\
\lambda_7 &= (p-s-2, p-r-2) + p(a-1, b-1)\\
\lambda_8 &= (p-r-2, r+s+1) + p(a-1, b)\\
\lambda_9 &= (s, p-r-s-3) + p(a-2, b).
\end{aligned}$$

Leur positions sont visualisées par la figure suivante, où $\lambda_4 = \lambda$:



.

Si $a, b\geq 2$ et $a+b+2\leq p$, alors $w^{-1}\cdot\nu_i^1$ est dominant et dans l'adhérence de la première p-alcôve pour tout i. Donc

$$L(\nu_i^0)\otimes H^1(\nu_i^1)^{(1)} \cong L(\nu_i^0)\otimes H^0(w^{-1}\cdot\nu_i^1)^{(1)} \cong L(\nu_i^0)\otimes L(w^{-1}\cdot\nu_i^1)^{(1)} \cong L(\lambda_i)\neq 0.$$

Donc si $a, b\geq 2$ et $a+b+2\leq p$, alors les facteurs de compositions de $H^{\ell(w)}(w\cdot\lambda)$ sont

$$\{L(\lambda_i) | i\in\{1,2,\cdots,9\}\}.$$

Si $a\leq 1$, alors λ_9 n'est pas dominant.

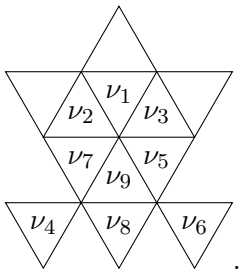
Si $b\leq 1$, alors λ_6 n'est pas dominant.

Si $a+b+2>p$, alors pour certains i, λ_i^1 n'est plus dans l'adhérence de la première p-alcôve, et donc on n'a pas forcément $H^1(\nu_i^1)\cong H^0(\lambda_i^1)$.

2) Supposons que $w = s_\alpha s_\beta$. Alors

$$w\cdot\lambda = (-m-n-3, m) = (-(a+b)p - (r+s+1) - 2, ap+r)$$

qui est de type ∇ car $r < r+s+1$. Donc les neuf facteurs simples de $\widehat{Z}(w\cdot\lambda)$ sont donnés par la figure suivante (où $\nu_1 = w\cdot\lambda$) :



.

Comme

$$H^{\ell(w)}(w \cdot \lambda) = H^2(-m-n-3, m) = H^1(m+n+1, -m-2)^*,$$

alors d'après la discussion pour $w = s_\beta$, on trouve que $H^2(s_\alpha s_\beta \cdot \lambda)$ admet une filtration dont les quotients sont

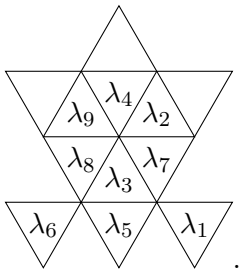
$$\{L(\nu_i^0) \otimes H^2(\nu_i^1)^{(1)} | i \in \{1, 2, \cdots, 9\}\}$$

si et seulement si $b = 0$ ou $a \neq 0$.

Notons $\lambda_i = \nu_i^0 + pw^{-1} \cdot \nu_i^1$. Calculons les λ_i :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= (p-r-s-3, r) + p(a, b-2) \\
\lambda_2 &= (r+s+1, p-s-2) + p(a, b-1) \\
\lambda_3 &= (p-s-2, p-r-2) + p(a-1, b-1) \\
\lambda_4 &= (r, s) + p(a, b) = \lambda \\
\lambda_5 &= (r, s) + p(a-1, b-1) \\
\lambda_6 &= (s, p-r-s-3) + p(a-2, b) \\
\lambda_7 &= (s, p-r-s-3) + p(a, b-1) \\
\lambda_8 &= (p-r-s-3, r) + p(a-1, b) \\
\lambda_9 &= (p-r-2, r+s+1) + p(a-1, b).
\end{aligned}$$

Leur positions sont visualisées par la figure suivante, où $\lambda_4 = \lambda$:



.

Si $a, b \geq 2$ et $a + b + 2 \leq p$, alors $w^{-1} \cdot \nu_i^1$ est dominant et dans l'adhérence de la première p-alcôve pour tout i. Donc

$$L(\nu_i^0) \otimes H^2(\nu_i^1)^{(1)} \cong L(\nu_i^0) \otimes H^0(w^{-1} \cdot \nu_i^1)^{(1)} \cong L(\nu_i^0) \otimes L(w^{-1} \cdot \nu_i^1)^{(1)} \cong L(\lambda_i) \neq 0.$$

Donc si $a, b \geq 2$ et $a + b + 2 \leq p$, alors les facteurs de compositions de $H^{\ell(w)}(w \cdot \lambda)$ sont

$$\{L(\lambda_i) | i \in \{1, 2, \cdots, 9\}\}.$$

Si $a \leq 1$, alors λ_6 n'est pas dominant.

Si $b \leq 1$, alors λ_1 n'est pas dominant.

Si $a+b+2 > p$, alors pour certains i, λ_i^1 n'est plus dans l'adhérence de la première p-alcôve, et donc on n'a pas forcément $H^2(\nu_i^1) \cong H^0(\lambda_i^1)$.

Pour $w = s_\alpha$ ou $s_\beta s_\alpha$, il suffit d'utiliser la symétrie entre α et β, et on trouve que si $a, b \geq 2$ et $a+b+2 \leq p$, alors $H^{\ell(w)}(w \cdot \lambda)$ a exactement neuf facteurs simples.

Pour $w = 1$, si $a, b \geq 2$ et $a+b+2 \leq p$ et si $\widehat{L}(\nu^0) \otimes p\nu^1$ est un facteur de $\widehat{Z}(\lambda)$, alors d'après la section 2.1, ν^1 est dominant et est dans l'adhérence de la première p-alcôve. Donc d'après le Corollaire 3, $H^0(\lambda)$ a neuf facteurs simples distincts. De même pour $H^3(w_0 \cdot \lambda)$.

3.4.3 Conclusion

On obtient ainsi une autre démonstration de la proposition suivante de Kühne-Hausmann [KH85] 6.3.2 (voir aussi [DS88] 5.3), en précisant les conditions pour que λ soit générique :

Théorème 9. *Soit $\lambda = (ap+r, bp+s) \in X_2(T)$ avec $a, b, r, s \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ un poids dominant p^2-restreint. Supposons que λ est régulier, c'est-à-dire, $r, s \leq p-2$ et $r+s+2 \neq p$. Alors $H^{\ell(w)}(w \cdot \lambda)$ admet une filtration générique (c'est-à-dire, il a neuf facteurs simples distincts) pour tout $w \in W$ si l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :*

- *λ est de type Δ et $a, b \geq 1$, $a+b+2 \leq p$;*
- *λ est de type ∇ et $a, b \geq 2$, $a+b+2 \leq p$.*

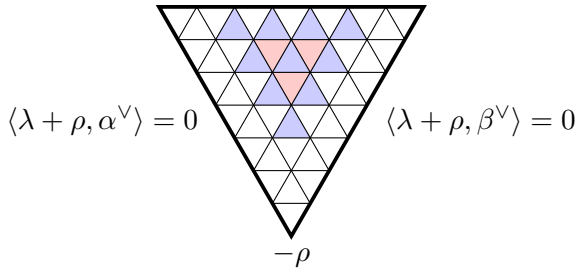


FIGURE 3.1 – Région générique de la p^2-alcôve pour $p = 7$

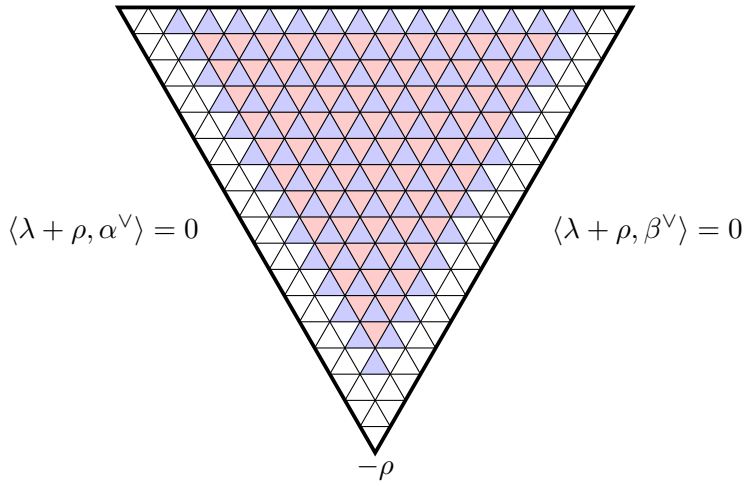


Figure 3.2 – Région générique de la p^2-alcôve pour $p = 17$

Chapitre 4

Des résultats sur $\mathbb{Z}$ et conséquences

Dans ce chapitre, G désigne le $\mathbb{Z}$-schéma en groupes SL_3.

4.1 Cohomologie des faisceaux sur G/P_α, G/P_β et G/B

Soit V la représentation naturelle de G et V^* la représentation duale. Soit $\{X_1, X_2, X_3\}$ la base canonique de V et $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ la base duale de V^*. Alors on a

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \mathrm{Stab}(X_3) \\ P_\beta &= \mathrm{Stab}(Y_1). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} G/P_\alpha &\cong \mathbb{P}(V) \\ &= \mathrm{Proj}(S(V^*)) = \mathrm{Proj}(k[Y_1, Y_2, Y_3]) \\ G/P_\beta &\cong \mathbb{P}(V^*) \\ &= \mathrm{Proj}(S(V)) = \mathrm{Proj}(k[X_1, X_2, X_3]) \end{aligned}$$

où $S(V)$ est l'algèbre symétrique de V.

On a

$$H^0(G/P_\beta, r\omega_1) \cong S_r \tag{4.1}$$

où $S_r = \langle X_1^{a_1} X_2^{a_2} X_3^{a_3} | a_1 + a_2 + a_3 = r \rangle$.

D'autre part, pour P_α, on a

$$\mathcal{L}_{G/P_\alpha}(r\omega_2) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(r). \tag{4.2}$$

Le fibré canonique est $\mathcal{L}(-3\omega_2)$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$ on a :

$$H^2(G/P_\alpha, -r\omega_2) \cong Q_{r-3} \tag{4.3}$$

où $Q_r = \langle Y_1^{-1-b_1} Y_2^{-1-b_2} Y_3^{-1-b_3} | b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N}, b_1 + b_2 + b_3 + 3 = r + 3 \rangle$.

Notons $\xi = ([Y_1], [X_3]) \in \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V)$. Alors

$$\begin{aligned} B &= \mathrm{Stab}(\xi) \\ G/B &\cong G\xi = \mathscr{V}(X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3) \end{aligned}$$

où $\mathscr{V}(\phi)$ désigne la sous-variété fermée définie par un polynôme bi-homogène ϕ.

Donc pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ il existe une suite exacte de faisceaux :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{G/P_\beta}(m-1) \boxtimes \mathcal{O}_{G/P_\alpha}(-n-3) \arrow[r] & \mathcal{O}_{G/P_\beta}(m) \boxtimes \mathcal{O}_{G/P_\alpha}(-n-2) \arrow[dll, rounded corners] \\ & \mathcal{L}_{G/B}(m, -n-2) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

En prenant la cohomologie, on trouve une suite exacte de G-modules

$$S_{m-1} \otimes Q_n^* \xrightarrow{f} S_m \otimes Q_{n-1}^* \longrightarrow H^2(m, -n-2) \longrightarrow 0 \tag{4.5}$$

où f est la multiplication par $X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3$.

4.2 Au dessus du mur

Considérons le module $H^2(m, -n-2)$ avec $n \leq m$ (c'est-à-dire, le poids $(m, -n-2)$ est dans la chambre $s_\beta \cdot C$). Il est isomorphe au conoyau de l'application

$$f : E = S^{m-1} \otimes Q_n^* \to F = S^m \otimes Q_{n-1}^*.$$

Le plus haut poids de E et F est $\mu = (n+m-1)\omega_1$. Si $\nu \leq \mu$ est dominant, alors $\nu = \mu - s\alpha - t\beta$ avec $n+m-1-2s+t \geq 0$ et $s-2t \geq 0$. Donc l'espace de poids ν consiste en les monômes

$$X_1^{a_1} X_2^{a_2} X_3^{a_3} Y_1^{-1-b_1} Y_2^{-1-b_2} Y_3^{-1-b_3}$$

tels que $(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) = (n+m-1-s, s-t, t)$. Par conséquent si on fixe ν, un monôme dans l'espace de poids ν est déterminé par le triplet (b_1, b_2, b_3).

4.2.1 Cas $s < n$

Supposons que $s \leq n-1$. Si le monôme déterminé par (b_1, b_2, b_3) est de poids $\nu = (n+m-1, s-t, t)$, alors on a $0 \leq b_3 \leq t$ et $0 \leq b_2 \leq s-t$. De plus, si le monôme (b_1, b_2, b_3) est dans E_ν, alors

$$b_1 = n+m-1-s-a_1 \geq n+m-1-(n-1)-a_1 = m-a_1 \geq 1$$

car $a_1 \leq a_1 + a_2 + a_3 = m-1$.

Donc on peut prendre pour base de E_ν les monômes

$$\{v_{i,j} | 0 \leq i \leq n-1, \max(0, i-s+t) \leq j \leq \min(i,t)\}$$

où $v_{i,j}$ est déterminé par le triplet $(n-i, i-j, j)$ et pour base de F_ν les monômes

$$\{w_{i,j} | 0 \leq i \leq n-1, \max(0, i-s+t) \leq j \leq \min(i,t)\}$$

où $w_{i,j}$ est déterminé par le triplet $(n-i-1, i-j, j)$. On utilise aussi la convention que $v_{i,j} = w_{i,j} = 0$ si (i,j) ne vérifie pas les conditions sur i, j ci-dessus.

Classons les vecteurs dans les bases par ordre lexicographique inverse (c'est-à-dire, $(a,b,c) < (a',b',c')$ si $a > a'$ ou si $a = a'$ et $b > b'$ ou si $a = a'$ et $b = b'$ et $c > c'$, donc $v_{i,j} < v_{i',j'}$ si $i < i'$ ou si $i = i'$ et $j < j'$, de même pour $w_{i,j}$) :

$$\begin{aligned} E_\nu : (n,0,0), (n-1,1,0), (n-1,0,1), (n-2,2,0), \cdots, \\ (n-s+1, s-t, t-1), (n-s+1, s-t-1, t), (n-s, s-t, t); \end{aligned}$$

$$F_\nu : (n-1,0,0),(n-2,1,0),(n-2,0,1),(n-3,2,0),$$
$$\cdots,(n-s,s-t,t-1),(n-s,s-t-1,t),(n-s-1,s-t,t).$$

Avec ces bases, $f_\nu(v_{i,j}) = w_{i,j} + w_{i-1,j} + w_{i-1,j-1}$ où $w_{i-1,j} < w_{i,j}$ et $w_{i-1,j-1} < w_{i,j}$.

Donc en mettant la base de E dans les lignes et celle de F dans les colonnes, la matrice de f_ν est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux valent tous 1 :

$$\begin{array}{c} \\ v_{0,*} \\ v_{1,*} \\ \vdots \\ v_{n-2,*} \\ v_{n-1,*} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} w_{0,*} & w_{1,*} & \cdots & w_{n-2,*} & w_{n-1,*} \end{array} \\ \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & I & 0 \\ * & * & \cdots & * & I \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc dans ce cas le conoyau est trivial.

Par conséquent, si $H^2(m,-n-2)_\nu \neq 0$, alors $\nu \leq \mu - n\alpha = (m-1-n,n)$.

4.2.2 Cas $s \geq n$

Bases Initiales

On écrit $s = n+k$ avec $k \geq 0$, d'où $\nu = (m-n-1+t-2k, n+k-2t)$. Un monôme

$$X_1^{a_1} X_2^{a_2} X_3^{a_3} Y_1^{-1-b_1} Y_2^{-1-b_2} Y_3^{-1-b_3}$$

est de poids ν si et seulement si

$$(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) = (m-k-1, n+k-t, t).$$

On prend pour base de E_ν l'ensemble

$$\mathcal{B}^E = \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq m-k, 0 \leq j \leq t, t-m+i \leq j \leq k+i-m+n\}$$

où $v_{i,j}$ est le monôme déterminé par le triplet $(m-k-i, k+i-j-m+n, j)$.

De même, on prend pour base de F_ν l'ensemble $\mathcal{B}^F = \mathcal{B}_1^F \cup \mathcal{B}_2^F$ où

$$\mathcal{B}_1^F = \{w_{i,j} | 1 \leq i \leq m-k-1, 0 \leq j \leq t, t-m+i \leq j \leq k+i-m+n\}$$

et

$$\mathcal{B}_2^F = \{u_j | 0 \leq j \leq t, t-m \leq j \leq k-m+n\},$$

$w_{i,j}$ est le monôme déterminé par le triplet $(m-k-i-1, k+i-j-m+n, j)$ et u_j est le monôme déterminé par $(m-k-1, k-j-m+n, j)$. On utilise encore la convention $v_{i,j} = w_{i,j} = w_j = 0$ si (i,j) ne vérifie pas les conditions précédentes.

Remarque 10. Les conditions sur i et j viennent du fait que $0 \leq b_i \leq a_i + b_i$ et on connaît déjà la valeur de $a_i + b_i$.

Remarque 11. L'ensemble $\mathcal{B}_2^F$ peut être vide (par exemple, lorsque $k < m-n$).

Cardinalités des bases

Supposons maintenant qu'il existe $a \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$ tel que

$$ap^d \leq n \leq m < (a+1)p^d. \tag{4.6}$$

Dans ce cas, on peut simplifier les conditions pour j dans les définitions de $\mathcal{B}^E$ et $\mathcal{B}^F$. En effet, comme $\nu = (m-n-1+t-2k, n+k-2t)$ est dominant, on a

$$2k \leq m-n-1+t$$

et

$$2t \leq n+k,$$

d'où

$$4t \leq 2n+m-n-1+t = n+m-1+t.$$

Donc

$$t \leq \frac{n+m-1}{3} \leq n$$

sous l'hypothèse (4.6).

Posons

$$\mathcal{B}_1^E = \{v_{i,j} \in \mathcal{B}^E | 1 \leq i \leq m-k-1\}$$

et

$$\mathcal{B}_2^E = \{v_{i,j} \in \mathcal{B}^E | i = m-k\}.$$

Alors $\mathcal{B}^E = \mathcal{B}_1^E \cup \mathcal{B}_2^E$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2^E &= \{v_{i,j} | i = m-k, 0 \leq j \leq t, t-k \leq j \leq n\} \\ &= \{v_{i,j} | i = m-k, \max(0, t-k) \leq j \leq t\}\end{aligned}$$

car $t \leq n$.

De même, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2^F &= \{u_j | 0 \leq j \leq t, t-m \leq j \leq k-m+n\} \\ &= \{w_j | 0 \leq j \leq \min(t, k-m+n)\}\end{aligned}$$

car $t \leq n < m$.

Donc si $k \leq t$, alors $|\mathcal{B}_2^E| = k+1$ et $|\mathcal{B}_2^F| = k-m+n+1$; si $t \leq k \leq t+m-n$, alors $|\mathcal{B}_2^E| = t+1$ et $|\mathcal{B}_2^F| = k-m+n+1$; si $k \geq t+m-n$, alors $|\mathcal{B}_2^E| = t+1$ et $|\mathcal{B}_2^F| = t+1$.

Ordre sur les bases

Classons $\mathcal{B}^E$ par ordre lexicographique, c'est-à-dire $v_{i,j} < v_{i',j'}$ si $i < i'$ où si $i = i'$ et $j < j'$. Classons aussi $\mathcal{B}_1^F$ et $\mathcal{B}_2^F$ respectivement par ordre lexicographique et demandons que les éléments dans $\mathcal{B}_1^F$ sont toujours plus petits que les éléments dans $\mathcal{B}_2^F$, c'est à dire $w_{i,j} < w_{i',j'}$ si $i < i'$ ou si $i = i'$ et $j < j'$, et $u_j < u_{j'}$ si $j < j'$, et $w_{i,j} < u_{j'}$.

Listons les deux bases par ordre (ici on suppose que $k \leq t$, les autres cas sont analogues) :

	$\mathcal{B}^E$	$\mathcal{B}^F$
$i=1$	$(m-k-1,k+1-m+n,0)$, $(m-k-1,k-m+n,1)$, $\cdots$, $(m-k-1,0,k+1-m+n)$	$(m-k-2,k+1-m+n,0)$, $(m-k-2,k-m+n,1)$, $\cdots$, $(m-k-2,0,k+1-m+n)$
$i=2$	$(m-k-2,k+2-m+n,0)$, $(m-k-2,k+1-m+n,1)$, $\cdots$, $(m-k-2,0,k+2-m+n)$	$(m-k-3,k+2-m+n,0)$, $(m-k-3,k+1-m+n,1)$, $\cdots$, $(m-k-3,0,k+2-m+n)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$i=t+m-n-k+1$	$(n-t-1,t+1,0)$, $(n-t-1,t,1)$, $\cdots$, $(n-t-1,1,t)$	$(n-t-2,t+1,0)$, $(n-t-2,t,1)$, $\cdots$, $(n-t-2,1,t)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$i=m-t+1$	$(t-k-1,n+k-t,1)$, $(t-k-1,n+k-t-1,2)$, $\cdots$, $(t-k-1,n+1+k-2t,t)$	$(t-k-2,n+k-t,1)$, $(t-k-2,n+k-t-1,2)$, $\cdots$, $(t-k-2,n+1+k-2t,t)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\mathcal{B}_2^E$ et $\mathcal{B}_2^F$	$(0,n-t+k,t-k)$, $(0,n-t+k-1,t-k+1)$, $\cdots$, $(0,n-t,t)$	$(m-k-1,k-m+n,0)$, $(m-k-1,k-m+n-1,1)$, $\cdots$, $(m-k-1,0,k-m+n)$

Remarque 12. On peut voir que sauf pour la dernière ligne, chaque ligne des listes $\mathcal{B}^E$ et $\mathcal{B}^F$ ont la même cardinalité.

Changement de bases

On écrit simplement f au lieu de f_ν car ν est déjà fixé. Avec ces bases,

$$f(v_{i,j}) = w_{i,j} + w_{i-1,j} + w_{i-1,j-1}, \quad \text{si} \quad i \geq 2 \tag{4.7}$$

$$f(v_{1,j}) = w_{1,j} + u_j + u_{j-1} \tag{4.8}$$

Maintenant faisons un changement de base pour E en définissant $v'_{i,j}$ par récurrence : Posons $v'_{1,j} = v_{i,j}$; si $i \geq 2$ et on a déjà défini $v'_{i-1,j}$, posons $v'_{i,j} = v_{i,j} - v'_{i-1,j} - v'_{i-1,j-1}$.

Remarque 13. On utilise toujours la convention que $v_{i,j} = 0$ si (i,j) ne vérifie pas les conditions.

Montrons par récurrence que avec cette base, on a

$$f(v'_{i,j}) = w_{i,j} - (-1)^i \sum_{j'=0}^{\infty} \binom{i}{j'} u_{j-j'} \tag{4.9}$$

(comme il n'y a qu'un nombre fini de u_j non nuls, c'est bien une somme finie).

La formule est correcte pour $i = 1$. Si on l'a montrée pour $i \geq 1$, alors

$$\begin{aligned}
f(v'_{i+1,j}) =& f(v_{i+1,j}) - f(v'_{i,j}) - f(v'_{i,j-1}) \\
=& w_{i+1,j} + w_{i,j} + w_{i,j-1} - w_{i,j} + (-1)^i \sum_{j'=0}^{\infty} \binom{i}{j'} u_{j-j'} \\
& - w_{i,j-1} + (-1)^i \sum_{j'=0}^{\infty} \binom{i}{j'} u_{j-j'-1} \\
=& w_{i+1,j} + (-1)^i \sum_{j'=1}^{\infty} [\binom{i}{j'} + \binom{i}{j'-1}] u_{j-j'} + (-1)^i u_j \\
=& w_{i+1,j} - (-1)^{i+1} \sum_{j'=0}^{\infty} \binom{i}{j'} u_{j-j'}.
\end{aligned}$$

Cela termine la preuve de la formule (4.9).

Matrices

Avec ces nouvelles bases, la matrice de f devient

$$\begin{array}{c} \\ v'_{1,*} \\ v'_{2,*} \\ \vdots \\ v'_{m-k-1,*} \\ v'_{m-k,*} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} w_{1,*} & w_{2,*} & \cdots & w_{m-k-1,*} & u_* \end{array} \\
\begin{pmatrix}
I & 0 & \cdots & 0 & C_1 \\
0 & I & \cdots & 0 & C_2 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & I & C_{m-k-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & C_{m-k}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Remarque 14. Les blocs diagonaux sont des matrices identité carrées, à l'exception du dernier bloc C_{m-k}, qui a $|\mathcal{B}_2^E|$ lignes et $|\mathcal{B}_2^F|$ colonnes.

Remarque 15. Si $k < m - n$, alors la dernière colonne n'existe pas. Dans ce cas, la matrice de f est simplement une matrice identité avec quelques lignes nulles au-dessous.

Remarque 16. Les C_i ne sont pas forcément carrées. Par exemple, supposons que $k \leq t$ et $1 \leq i \leq t + m - n - k$, alors $C_i =$

$$\begin{array}{c} \\ v'_{i,0} \\ v'_{i,1} \\ \vdots \\ v'_{i,i} \\ \vdots \\ v'_{i,k+i-m+n} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} u_0 & u_1 & \cdots & u_{k-m+n} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\binom{i}{0} & 0 & \cdots & 0 \\
\binom{i}{1} & \binom{i}{0} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\binom{i}{i} & \binom{i}{i-1} & \cdots & \binom{i}{i-k+m-n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \binom{i}{i}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Ce qui nous intéresse, c'est la matrice C_{m-k}. Comme elle dépend de m, n, t, k, on la note $D_{m,n,t,k}$.

D'après la discussion dans le paragraphe « Cardinalités des bases », si $k > t + m - n$, alors

$$\begin{aligned} D_{m,n,t,k} &= \begin{pmatrix} \binom{m-k}{0} & \binom{m-k}{-1} & \cdots & \binom{m-k}{-t} \\ \binom{m-k}{1} & \binom{m-k}{0} & \cdots & \binom{m-k}{-t+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m-k}{t} & \binom{m-k}{t-1} & \cdots & \binom{m-k}{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{m-k}{1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m-k}{t} & \binom{m-k}{t-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

qui est une matrice triangulaire inférieure dont tout coefficient diagonal vaut 1. Donc dans ce cas, $H^2(m, -n-2)_\nu = \operatorname{coker}(f_\nu) = 0$.

Si $t < k \leq t + m - n$, alors

$$\begin{aligned} D_{m,n,t,k} &= \begin{pmatrix} \binom{m-k}{0} & \binom{m-k}{-1} & \cdots & \binom{m-k}{m-n-k} \\ \binom{m-k}{1} & \binom{m-k}{0} & \cdots & \binom{m-k}{m-n-k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m-k}{t} & \binom{m-k}{t-1} & \cdots & \binom{m-k}{t-k+m-n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{m-k}{1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m-k}{t} & \binom{m-k}{t-1} & \cdots & \binom{m-k}{t-k+m-n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & 1 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.11}$$

dont le conoyau est nul. Donc dans ce cas $H^2(m, -n-2)_\nu = 0$.

D'après ce qui précède, le conoyau est nul si $k > t$ et l'on obtient donc la proposition suivante.

Proposition 11. *Pour $m \geq n$ fixés, et (t, k) tels que $\nu_{t,k} = (m - n - 1, n) - k\alpha - t\beta$ soit dominant, l'espace de poids $\nu_{t,k}$ de $H^2(m, -n-2)$ est le conoyau de la matrice*

$$D_{m,n,t,k} = \begin{pmatrix} \binom{m-k}{t-k} & \binom{m-k}{t-k-1} & \cdots & \binom{m-k}{t-2k+m-n} \\ \binom{m-k}{t-k+1} & \binom{m-k}{t-k} & \cdots & \binom{m-k}{t-2k+m-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m-k}{t} & \binom{m-k}{t-1} & \cdots & \binom{m-k}{t-k+m-n} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

si $m-n \leq k \leq t$, et est nul sinon.

Remarque 17. Par [And79, 3.6 b], tout poids ν de $H^2(m,-n-2)$ vérifie que $\nu \leq (n-m, m-2) = (n+m-1, 0) - m\alpha - \beta$, c'est-à-dire il faut que $k \geq m-n$ et $t \geq 1$. On peut aussi déduire ce résultat des calculs ci-dessus.

Remarque 18. Si $\mu = (m, -n-2)$ est sur le mur, c'est-à-dire $m = n$, alors les matrices $D_{m,n,t,k} = D_{n,t,k}$ pour $k \leq t$ sont toujours carrées.

Plus précisément, on a

$$D_{n,t,k} = \begin{pmatrix} \binom{n-k}{t-k} & \binom{n-k}{t-k-1} & \cdots & \binom{n-k}{t-2k} \\ \binom{n-k}{t-k+1} & \binom{n-k}{t-k} & \cdots & \binom{n-k}{t-2k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-k}{t} & \binom{n-k}{t-1} & \cdots & \binom{n-k}{t-k} \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

En outre, d'après [Kra99] (2.17), on a

$$d_{n,t,k} = \text{dét}(D_{n,t,k}) = \prod_{i=1}^{k+1} \prod_{j=1}^{t-k} \prod_{l=1}^{n-t} \frac{i+j+l-1}{i+j+l-2} = \prod_{i=1}^{k+1} \frac{\binom{n-k+i-1}{t-k}}{\binom{t-k+i-1}{t-k}} = \prod_{i=0}^{k} \frac{\binom{n}{t-i}}{\binom{n}{i}}. \tag{4.14}$$

4.3 En dessous du mur

Traitons maintenant le cas de $H^2(m,-n-2)$ où $n > m$.

On a $H^2(m,-n-2) \cong H^1(-m-2,n)^*$ et $s_\alpha(-m-2,n) - \alpha = (m, n-m-1)$ est dominant. Donc par [And79] Theorem 3.5, l'unique plus haut poids de $H^2(m,-n-2)$ est $\lambda = -w_0(m, n-m-1) = (n-m-1, m)$.

Soit $\nu = \lambda - k\alpha - t\beta = (n+m-1, 0) - (m+k)\alpha - t\beta = (n-m-1+t-2k, m+k-2t)$ un poids dominant dans $H^2(m,-n-2)$. Alors on a

$$0 \leq 2k \leq n-m-1+t \tag{4.15}$$

et

$$0 \leq 2t \leq m+k. \tag{4.16}$$

Les monômes de l'espace de poids ν vérifient $(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) = (n-k-1, m+k-t, t)$.

On prend pour base de E_ν l'ensemble

$$\mathcal{B}^E = \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq n-k, 0 \leq j \leq t, t-m+i \leq j \leq k+i\}$$

où $v_{i,j}$ est le monôme déterminé par le triplet $(n-k-i, k+i-j, j)$.

De même, on prend pour base de F_ν l'ensemble $\mathcal{B}^F = \mathcal{B}_1^F \cup \mathcal{B}_2^F$ où

$$\mathcal{B}_1^F = \{w_{i,j} | 1 \leq i \leq n-k-1, 0 \leq j \leq t, t-m+i \leq j \leq k+i\}$$

et

$$\mathcal{B}_2^F = \{u_j | 0 \leq j \leq t, t-m \leq j \leq k\},$$

$w_{i,j}$ est le monôme déterminé par le triplet $(n-k-i-1, k+i-j, j)$ et u_j est le monôme déterminé par $(n-k-1, k-j, j)$. On utilise encore la convention $v_{i,j} = w_{i,j} = u_j = 0$ si (i,j) ne vérifie pas les conditions ci-dessus.

Remarque 19. Les conditions sur i et j viennent du fait que $0 \leq b_i \leq a_i + b_i$ et on connaît déjà la valeur de $a_i + b_i$.

Posons
$$\mathcal{B}_1^E = \{v_{i,j} \in \mathcal{B}^E | 1 \leq i \leq n-k-1\}$$
et
$$\mathcal{B}_2^E = \{v_{i,j} \in \mathcal{B}^E | i = n-k\}.$$
Alors $\mathcal{B}^E = \mathcal{B}_1^E \cup \mathcal{B}_2^E$.

Remarque 20. Par (4.15) et (4.16), on a $t-k \leq m-t \leq n-k-1$. Dans la définition de $\mathcal{B}_1^E$ et $\mathcal{B}_1^F$, les valeurs possibles pour j dépendent de la valeur de i. Plus précisément,

$$\begin{array}{rrl} & \text{si} \quad 0 \leq i \leq t-k, \text{ alors} & 0 \leq j \leq k+i \\ \text{si} & t-k < i \leq m-t, \text{ alors} & 0 \leq j \leq t \\ \text{si} & m-t < i \leq n-k-1, \text{ alors} & i-m+t \leq j \leq t. \end{array}$$

Cardinalité de $\mathcal{B}_2^E$ et $\mathcal{B}_2^F$

D'après (4.15) et (4.16), on a $3t \leq m+n-1 < 2n$, d'où $t < n$. Par conséquent,
$$\mathcal{B}_2^F = \{u_j | \max(0, t-m) \leq j \leq \min(t,k)\}$$
et
$$\mathcal{B}_2^E = \{v_{n-k,j} | \max(0, t-k+n-m) \leq j \leq t\}.$$
En particulier, si $k < n-m$, alors $\mathcal{B}_2^E$ est vide.

Si $k \geq n-m$, alors on a $t \geq k+1$ car $2k \leq n-m-1+t$ d'après (4.15). De plus, d'après (4.16), on a $2t \leq m+k \leq m+t-1$, d'où $t \leq m-1$. Donc dans ce cas, $\mathcal{B}_2^F = \{u_j | 0 \leq j \leq k\}$ et $\mathcal{B}_2^E = \{w_{n-k,j} | t-k+n-m \leq j \leq t\}$. Donc $|\mathcal{B}_2^F| = k+1$ et $|\mathcal{B}_2^E| = k-n+m+1$

Ordre sur les bases

Classons $\mathcal{B}^E$ par ordre lexicographique, c'est-à-dire $v_{i,j} < v_{i',j'}$ si $i < i'$ où si $i = i'$ et $j < j'$. Classons aussi $\mathcal{B}_1^F$ et $\mathcal{B}_2^F$ respectivement par ordre lexicographique et demandons que les éléments de $\mathcal{B}_1^F$ sont toujours plus petits que les éléments de $\mathcal{B}_2^F$, c'est-à-dire $w_{i,j} < w_{i',j'}$ si $i < i'$ où si $i = i'$ et $j < j'$, et $u_j < u_{j'}$ si $j < j'$, et $w_{i,j} < u_{j'}$.

Changement de base

On écrit simplement f au lieu de f_ν car ν est déjà fixé. Avec ces bases,

$$f(v_{i,j}) = w_{i,j} + w_{i-1,j} + w_{i-1,j-1}, \quad \text{si} \quad i \geq 2 \tag{4.17}$$
$$f(v_{1,j}) = w_{1,j} + u_j + u_{j-1} \tag{4.18}$$

Maintenant faisons un changement de base pour E en définissant $v'_{i,j}$ par récurrence : Posons $v'_{1,j} = v_{i,j}$; Si $i \geq 2$ et on a déjà défini $v'_{i-1,j}$, posons $v'_{i,j} = v_{i,j} - v'_{i-1,j} - v'_{i-1,j-1}$.

Remarque 21. On utilise toujours la convention que $v_{i,j} = 0$ si (i,j) ne vérifie pas les conditions.

Montrons par récurrence que avec cette base, on a

$$f(v'_{i,j}) = w_{i,j} - (-1)^i \sum_{j'=0}^{\infty} \binom{i}{j'} u_{j-j'} \tag{4.19}$$

(comme il n'y a qu'un nombre fini de u_j non nul, c'est bien une somme finie).

La formule est correcte pour $i = 1$. Si on l'a montré pour $i \geq 1$, alors

$$\begin{aligned}
f(v'_{i+1,j}) =& f(v_{i+1,j}) - f(v'_{i,j}) - f(v'_{i,j-1}) \\
=& w_{i+1,j} + w_{i,j} + w_{i,j-1} - w_{i,j} + (-1)^i \sum_{j'=0}^{\infty} \binom{i}{j'} u_{j-j'} \\
& - w_{i,j-1} + (-1)^i \sum_{j'=0}^{\infty} \binom{i}{j'} u_{j-j'-1} \\
=& w_{i+1,j} + (-1)^i \sum_{j'=1}^{\infty} [\binom{i}{j'} + \binom{i}{j'-1}] u_{j-j'} + (-1)^i u_j \\
=& w_{i+1,j} - (-1)^{i+1} \sum_{j'=0}^{\infty} \binom{i}{j'} u_{j-j'}.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la formule (4.19).

Matrices

Avec ces nouvelles bases, la matrice de f devient

$$\begin{array}{c} \\ v'_{1,*} \\ v'_{2,*} \\ \vdots \\ v'_{n-k-1,*} \\ v'_{n-k,*} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} w_{1,*} & w_{2,*} & \cdots & w_{n-k-1,*} & u_* \end{array} \\
\begin{pmatrix}
I & 0 & \cdots & 0 & C_1 \\
0 & I & \cdots & 0 & C_2 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & I & C_{n-k-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & C_{n-k}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Remarque 22. Les blocs diagonaux sont des matrices identité carrées, à l'exception du dernier bloc C_{n-k}, qui a $|\mathcal{B}_2^E|$ lignes et $|\mathcal{B}_2^F|$ colonnes.

Remarque 23. Si $k < n - m$, alors la dernière ligne n'existe pas. Dans ce cas, la matrice de f est simplement une matrice identité avec quelques colonnes à droite. La dimension du conoyau est simplement la cardinalité de $\mathcal{B}_2^F$ (c'est-à-dire, le nombre de colonnes dans le bloc u_*).

Remarque 24. Les C_i ne sont pas forcément carrées. Par exemple, supposons que $k \leq t$ et $1 \leq i \leq t - k$, alors

$$C_i = \begin{array}{c} \\ v'_{i,0} \\ v'_{i,1} \\ \vdots \\ v'_{i,i} \\ \vdots \\ v'_{i,k+i} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} u_0 & u_1 & \cdots & u_k \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\binom{i}{0} & 0 & \cdots & 0 \\
\binom{i}{1} & \binom{i}{0} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\binom{i}{i} & \binom{i}{i-1} & \cdots & \binom{i}{i-k} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \binom{i}{i}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Ce qui nous intéresse, c'est la matrice C_{n-k}. Comme elle dépend de m, n, t, k, on la note $D_{m,n,t,k}$.

Comme le cas $k < n - m$ a déjà été discuté dans Remarque 23, supposons maintenant que $k \geq n - m$. D'après la discussion dans le paragraphe « Cardinalité de $\mathcal{B}_2^E$ et $\mathcal{B}_2^F$ », on a

$$D_{m,n,t,k} = \begin{pmatrix} \binom{n-k}{t-k+n-m} & \binom{n-k}{t-k+n-m-1} & \cdots & \binom{n-k}{t-2k+n-m} \\ \binom{n-k}{t-k+n-m+1} & \binom{n-k}{t-k+n-m} & \cdots & \binom{n-k}{t-2k+n-m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-k}{t} & \binom{n-k}{t-1} & \cdots & \binom{n-k}{t-k} \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 12. *Pour $m < n$ fixés, et (t, k) tels que $\nu_{t,k} = (n - m - 1, m) - k\alpha - t\beta$ soit dominant, l'espace de poids $\nu_{t,k}$ de $H^2(m, -n - 2)$ est le conoyau de la matrice* (4.20) *si $k \geq n - m$, et est isomorphe à $\mathbb{Z}^{\min(t,k)-\max(0,t-m)+1}$ sinon.*

Remarque 25. On se place maintenant sur un corps k de caractéristique $p > 0$. Si $n > m$ et $(m, -n - 2) \notin \mathrm{Gr}$, alors $(m, -n - 2)$ n'a de la cohomologie qu'en degré deux. Donc on a

$$\operatorname{ch} H^2(m, -n - 2) = \chi(s_\alpha s_\beta \cdot (m, -n - 2)) = \chi(n - m - 1, m) = \chi(\lambda),$$

et la multiplicité de chaque poids dominant $\lambda - k\alpha - t\beta$ est connue, cf. [Hum72] 21.3. Plus précisément, la multiplicité du poids dominant $\lambda - k\alpha - t\beta$ est $1 + \min(t, k, n - m - 1, m)$. On va comparer ce résultat classique avec les résultat obtenus dans cette section.

1. Supposons d'abords que $n - m - 1 \geq m$.

Si $k \leq m \leq n - m - 1$, alors $\dim H^2(m, -n - 2)_{\lambda - k\alpha - t\beta} = |\mathcal{B}_2^F|$ d'après la Remarque 23. Or d'après (4.16), on a $2t \leq m + k \leq 2m$, d'où $t \leq m$ et

$$\mathcal{B}_2^F = \{u_j | 0 \leq j \leq \min(t, k)\}.$$

Donc, comme $k \leq m \leq n - m - 1$, on obtient

$$\dim H^2(m, -n - 2)_{\lambda - k\alpha - t\beta} = 1 + \min(t, k) = 1 + \min(t, k, n - m - 1, m),$$

qui coïncide avec le résultat classique.

Si $t \leq m \leq n - m - 1$, alors d'après (4.15), on a $2k \leq n - m - 1 + t \leq 2(n - m - 1)$, d'où $k \leq n - m - 1$. Donc d'après la Remarque 23,

$$\dim H^2(m, -n - 2)_{\lambda - k\alpha - t\beta} = |\mathcal{B}_2^F| = 1 + \min(t, k) = 1 + \min(t, k, n - m - 1, m),$$

qui coïncide aussi avec le résultat classique.

Si $\min(t, k) > m$, alors d'après (4.16), on a $2t \leq m + k < 2k$, d'où $t < k$. Donc d'après (4.15), on a $2k \leq n - m - 1 + t < n - m + 1 + k$, d'où $k < n - m - 1$. Par conséquent, on a $\dim H^2(m, -n - 2)_{\lambda - k\alpha - t\beta} = |\mathcal{B}_2^F| = |\{u_j | t - m \leq j \leq t\}| = 1 + m = 1 + \min(t, k, n - m - 1, m)$, qui coïncide avec le résultat classique.

2. Supposons maintenant que $n - m - 1 < m$, alors d'après (4.15) et (4.16), on a $3t \leq 2m + n - m - 1 < 3m$, d'où $t < m$ et $\mathcal{B}_2^F = \{u_j | 0 \leq j \leq \min(t, k)\}$.

Si $k \leq n - m - 1$, alors d'après la Remarque 23, on a $\dim H^2(m, -n - 2)_{\lambda - k\alpha - t\beta} = |\mathcal{B}_2^F| = 1 + \min(t, k) = 1 + \min(t, k, n - m - 1, m)$, qui coïncide avec le résultat classique.

Si $k \geq n-m$, alors d'après (4.15), on a $t \geq 2k-(n-m-1) \geq k+1$, d'où $\min(t,k) > n-m-1$. Le résultat classique donne $\dim H^2(m,-n-2)_{\lambda-k\alpha-t\beta} = 1+\min(t,k,n-m-1,m) = n-m$ dans ce cas. D'autre part, on sait que $H^2(m,-n-2)_{\lambda-k\alpha-t\beta}$ est isomorphe au conoyau de la matrice (4.20), qui a $k-n+m+1$ lignes et $k+1$ colonnes, d'où le corollaire suivant :

Corollaire 4. *Fixons un corps k de caractéristique $p>0$. Si $n>m>n-m-1$ et $(m,-n-2) \notin \mathrm{Gr}$, alors la matrice (4.20) est de rang maximal.*

4.4 Une application

On se place à nouveau sur un corps k de caractéristique $p>0$.

Proposition 13. *Si $n = ap^d + r$ avec $a \in \{1,2,\cdots,p-1\}$ et $r \in \{0,1,\cdots,p-1\}$, alors on a une suite exacte de G-modules*

$$0 \longrightarrow L(p^d-1,(a-2)p^d+r) \longrightarrow V(r,n-2r-2) \longrightarrow H^2(n,-n-2) \longrightarrow 0. \tag{4.21}$$

Dans ce cas, $H^2(r,-r-2)=0$ et d'après le Théorème 2, $H^2(n,-n-2)$ est un quotient du module de Weyl $V(r,n-2r-2)$, c'est-à-dire, il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow V(r,n-2r-2) \longrightarrow H^2(n,-n-2) \longrightarrow 0.$$

Donc pour montrer la Proposition 13, il suffit de montrer que $K \cong L(p^d-1,(a-2)p^d+r)$.

Remarque 26. Si $a=1$, alors on a $H^2(n,-n-2) \cong V(r,p^d-r-2) = V(r,n-2r-2)$ d'après le Théorème 2. D'autre part, on a $L(p^d-1,(a-2)p^d+r) = L(p^d-1,r-p^d) = 0$ d'après la Convention 1. Donc on peut supposer que $a \geq 2$ dans la preuve.

Pour $t,k \geq 0$, comme dans la sous-section 4.2.2, notons

$$\nu_{t,k} = (2n-1)\omega_1 - (n+k)\alpha - t\beta = (t-2k-1, n+k-2k).$$

Alors on sait que l'espace de poids $H^2(n,-n-2)_{\nu_{t,k}}$ est isomorphe (comme espace vectoriel) au conoyau de la matrice

$$D_{n,t,k} = \begin{pmatrix} \binom{n-k}{t-k} & \binom{n-k}{t-k-1} & \cdots & \binom{n-k}{t-2k} \\ \binom{n-k}{t-k+1} & \binom{n-k}{t-k} & \cdots & \binom{n-k}{t-2k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-k}{t} & \binom{n-k}{t-1} & \cdots & \binom{n-k}{t-k} \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

dont le déterminant est (cf. [Kra99] (2.17))

$$\text{dét}(D_{n,t,k}) = \prod_{i=1}^{k+1}\prod_{j=1}^{t-k}\prod_{l=1}^{n-t} \frac{i+j+l-1}{i+j+l-2} = \prod_{i=1}^{k+1} \frac{\binom{n-k+i-1}{t-k}}{\binom{t-k+i-1}{t-k}} = \prod_{i=0}^{k} \frac{\binom{n}{t-i}}{\binom{n}{i}}. \tag{4.23}$$

4.4.1 $r = 0$

Dans ce cas, $n = ap^d$ et le module de Weyl $V(0, ap^d - 2)$ n'a pas de multiplicité comme T-module et la structure de ses sous-modules est connue d'après l'article [Dot85].

On veut montrer que

$$K \cong L_0 = L(p^d - 1, (a-2)p^d) = L(p^d - 1, n - 2p^d) = L(\nu_{p^d,0}).$$

Lemme 12. *La matrice $D_{n,p^d,0}$ est inversible donc $\nu_{p^d,0}$ n'est pas un poids de $H^2(n, -n-2)$. Cela implique que K contient le poids $\nu_{p^d,0}$ et donc $L_0 \subset K$.*

Démonstration. Si $t = p^d$ et $k = 0$, alors on a $\text{dét}(D_{n,t,k}) = \binom{n}{t} = \binom{ap^d}{p^d} \equiv \binom{a}{1} \not\equiv 0 \pmod{p}$. □

Pour montrer que $K \subset L_0$, on va utiliser les résultats de [Dot85]. Attention, Doty considère $H^0(m, 0)$ et nous considérons son dual $V(0, m)$, pour

$$m = ap^d - 2 = (p-2) + \sum_{u=1}^{d-1} (p-1)p^u + (a-1)p^d.$$

Suivant [Dot85, 2.3], pour $u = 0, \ldots, d$, notons $c_u(m)$ le u-ième chiffre de l'écriture p-adique de m ; on a donc $c_0(m) = p - 2$, puis $c_u(m) = p - 1$ pour $u = 1, \ldots, d-1$, puis $c_d(m) = a - 1$ et enfin $c_u(m) = 0$ pour $u > d$.

D'après [Dot85], Prop. 2.4, on note $E(m)$ l'ensemble des d-uplets $(a_1, \ldots, a_d)$ d'entiers ≥ 0 vérifiant les conditions suivantes :

$$0 \leq c_0(m) + a_1 p = p - 2 + a_1 p \leq 3(p-1) \tag{4.24}$$

d'où $a_1 p \leq 2p - 1$ d'où $a_1 \leq 1$. Puis, pour $u = 1, \ldots, d-1$, supposant avoir montré que $0 \leq a_u \leq 1$, on doit avoir :

$$0 \leq c_u(m) + a_{u+1}p - a_u = p - 1 + a_{u+1}p - a_u \leq 3(p-1) \tag{4.25}$$

d'où $a_{u+1}p \leq 2p - 2 + a_u \leq 2p - 1$ et donc $a_{u+1} \leq 1$. Ceci montre que $0 \leq a_u \leq 1$ pour $u = 1, \ldots, d$. Enfin, pour $u = d$ la condition

$$0 \leq c_d(m) - a_d = a - 1 - a_d \leq 3(p-1)$$

est automatiquement vérifiée puisque $a \geq 2$ et $a_d \leq 1$. Donc, pour $m = ap^d - 2$ avec $a \geq 2$, l'ensemble $E(m)$ de Doty est $\{0, 1\}^d$.

Rappelons que notre $V(0, m)$ est le dual de $H^0(m, 0)$, donc contient un module simple $L(x, y)^* = L(y, x)$ si et seulement si $L(x, y)$ est un quotient de $H^0(m, 0)$. Tenant compte de ceci, on déduit de [Dot85], Theorem 2.3, que $V(0, ap^d - 2)$ contient un unique sous-module simple $L(\nu)^*$, qui correspond à l'unique quotient simple $L(\nu)$ de $H^0(ap^d - 2)$, qui est donné par l'élément maximal $e = (1, \ldots, 1)$ de $E(m)$.

Avec les notations de [Dot85], §2.4, ν vu comme poids dominant de SL_3 est donné par un triplet (b_1, b_2, b_3) d'entiers $b_1 \geq b_2 \geq b_3$, déterminé par la règle suivante (cf. [Dot85] haut de la page 379).

Pour $u = 0, \ldots, d$, on note $N_u(e)$ (resp. $R_u(e)$) le quotient (resp. le reste) de la division euclidienne de $c_u(m) + e_{u+1}p - e_u$ par $p - 1$, en posant $e_0 = 0 = e_{d+1}$ et, pour $u = 1, \ldots, d$, e_u est la u-ième coordonnée de e, à savoir 1. On a donc :

$$c_0(m) + e_1 p - e_0 = p - 2 + p - 0 = 2p - 2, \qquad \text{d'où } N_0(e) = 2 \text{ et } R_0(e) = 0.$$

Puis, pour $u = 1, \ldots, d-1$, on a :

$$c_u(m) + e_{u+1}p - e_u = p - 1 + p - 1 = 2p - 2, \qquad \text{d'où } N_u(e) = 2 \text{ et } R_u(e) = 0.$$

Enfin, pour $u = d$ on a $c_d(m) + e_{d+1}p - e_d = a - 1 + 0 - 1 = a - 2$ et donc $N_d(e) = 0$ et $R_d(e) = a - 2$. Alors, les coefficients $c_u(b_j)$ de l'écriture p-adique de b_j sont donnés pour $j = 1$ par :

$$c_u(b_1) = \begin{cases} p - 1 & \text{si } j = 1 \leq N_u(e) \text{ c-à-d si } u = 0, 1, \ldots, d-1 \\ R_d(e) = a - 2 & \text{pour } u = d \text{ car } j = 1 = N_d(e) + 1. \end{cases}$$

Puis, pour $j = 2$ les coefficients $c_u(b_2)$ sont donnés par

$$c_u(b_2) = \begin{cases} p - 1 & \text{si } j = 2 \leq N_u(e) \text{ c-à-d si } u = 0, 1, \ldots, d-1 \\ 0 & \text{pour } u = d \text{ car } j = 2 > N_d(e) + 1. \end{cases}$$

Enfin, pour $j = 3$ les coefficients $c_u(b_3)$ sont donnés par

$$c_u(b_3) = \begin{cases} R_u(e) = 0 & \text{si } j = 3 = N_u(e) + 1 \text{ c-à-d si } u = 0, 1, \ldots, d-1 \\ 0 & \text{pour } u = d \text{ car } j = 3 > N_d(e) + 1. \end{cases}$$

On obtient donc le triplet $(p^d - 1 + (a-2)p^d, p^d - 1, 0)$ d'où le poids dominant

$$\nu = (a-2)p^d\omega_1 + (p^d - 1)\omega_2$$

et donc $V(0, ap^d - 2)$ contient pour unique sous-module simple le module simple considéré plus haut :

$$L_0 = L(\nu^*) = L(p^d - 1, (a-2)p^d) = L(p^d - 1, n - 2p^d) = L(\nu_{p^d,0}).$$

Toujours d'après [Dot85], Theorem 2.3 et §2.4, le socle de $V(0, m)/L_0$ est la somme directe des modules simples $L(e^i)^*$, pour $i = 1, \ldots, d$, où chaque e^i désigne le d-uplet :

$$(1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, 1)$$

l'unique 0 étant à la i-ème place. Il faut déterminer le plus haut poids de $L(e^i)$, toujours avec la même règle. Cette fois-ci on trouve,

$$N_{i-1}(e^i) = 0, \qquad R_{i-1}(e^i) = p - 2, \qquad N_i(e^i) = 2, \qquad R_i(e^i) = 1,$$

si $i \leq d - 1$, et

$$N_{d-1}(e^d) = 0, \qquad R_{d-1}(e^d) = p - 2, \qquad N_d(e^d) = 0, \qquad R_d(e^d) = a - 1.$$

Donc le plus haut poids λ_i de $L(e^i)^*$ correspond à $(t_i, k_i) = (p^d + p^{i-1}, p^i)$ pour $i = 1, \cdots, d-1$ et λ_d correspond à $(t_d, k_d) = (p^{d-1}, 0)$.

Lemme 13. *Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, le conoyau de la matrice $D_{n,t_{i,k_i}}$ est non trivial et $H^2(n, -n-2)$ contient le poids λ_i. Donc $L(\lambda_i)$ n'est pas contenu dans K.*

Démonstration. On suppose d'abord que $1 \leq i \leq d-1$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} d_{n,t_i,k_i} &= \frac{\prod_{l=0}^{k_i} \binom{n}{t_i-l}}{\prod_{l=0}^{k_i} \binom{n}{l}} \\ v_p(d_{n,t_i,k_i}) &= (j+1)d - \sum_{l=0}^{k_i} v_p(t_i-l) - jd + \sum_{l=1}^{k_i} v_p l \\ &= d - v(\binom{t_i}{k_i}) - v(t_i-k_i) \\ &= d - v(\binom{t_i}{k_i}) - (i-1) \\ &\geq d-(d-i)-(i-1) = 1, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte de l'écriture p-adique de $k_i = p^i$ et $t_i - k_i = p^d - p^i + p^{i-1}$. C'est-à-dire, p divise d_{n,t_i,k_i}.

Il reste le cas $i = d$, où $(t_i, k_i) = (p^{d-1}, 0)$. Dans ce cas, $d_{n,t_d,k_d} = \binom{n}{t_d} = \binom{ap^d}{p^{d-1}}$, donc $v_p(d_{n,t_d,k_d}) = 1$. □

D'après le lemme 12 et le lemme 13, on conclut qu'il existe une suite exacte de G-modules :

$$0 \longrightarrow L(p^d-1,(a-2)p^d) \longrightarrow V(0,ap^d-2) \longrightarrow H^2(ap^d,-ap^d-2) \longrightarrow 0. \quad (4.26)$$

4.4.2 $1 \leq r \leq p-1$

Le but est d'étendre le résultat pour $r = 0$ au cas $1 \leq r \leq p-1$ en utilisant le principe de translation.

Notons $\lambda = (0, ap^d - 2)$ et $\mu = (r, ap^d - r - 2)$. Alors le mur contenant λ est défini par

$$F = \{\nu \in X(T) | 0 < \langle \nu+\rho, \alpha^\vee \rangle < p, ap^d - p < \langle \nu+\rho, \beta^\vee \rangle < ap^d, \langle \nu+\rho, \gamma^\vee \rangle = ap^d\}$$

et $\mu \in \overline{F}$.

Appliquons le foncteur exact T_λ^μ à la suite exacte (4.26) :

$$0 \longrightarrow T_\lambda^\mu L(p^d-1,(a-2)p^d) \longrightarrow V(\mu) \longrightarrow T_\lambda^\mu H^2(ap^d,-ap^d-2) \longrightarrow 0. \quad (4.27)$$

Définissons les éléments $w_1, w_2 \in W_p$ par

$$w_1 \cdot \nu = \nu - (\langle \nu+\rho, \beta^\vee \rangle - (a-1)p^d)\beta$$

et

$$w_2 \cdot \nu = s_\beta \cdot (\nu - (\langle \nu+\rho, \beta^\vee \rangle - ap^d)\beta).$$

Alors $(p^d-1,(a-2)p^d) = w_1 \cdot \lambda$ est sur le mur

$$\begin{aligned} F' = \{\nu \in X(T) | \langle \nu+\rho, \alpha^\vee \rangle = p^d, (a-2)p^d < \langle \nu+\rho, \beta^\vee \rangle < (a-2)p^d + p, \\ (a-1)p^d < \langle \nu+\rho, \gamma^\vee \rangle < (a-1)p^d + p\}. \end{aligned}$$

Donc

$$w_1 \cdot \mu = (p^d-1,(a-2)p^d + r) \in \widehat{F'}.$$

D'après [Jan03] II 7.15, on a

$$T_\lambda^\mu L(p^d-1,(a-2)p^d) = T_\lambda^\mu L(w_1\cdot\lambda) \cong L(w_1\cdot\mu) = L(p^d-2,(a-2)p^d+r).$$

De même, $w_2\cdot\lambda = (ap^d, -ap^d-2)$, d'où

$$T_\lambda^\mu H^2(ap^d,-ap^d-2) = T_\lambda^\mu H^2(w_2\cdot\lambda) \cong H^2(w_2\cdot\mu) = H^2(ap^d+r,-ap^d-r-2).$$

Donc la suite exacte (4.27) devient (4.21). Ceci termine la preuve de la Proposition 13.

4.5 Une extension au cas de SL_{d+1}

Dans cette section on travaille à nouveau sur $\mathbb{Z}$ et l'on étend les résultats des sections 4.1–4.3 au cas de SL_{d+1} pour d arbitraire. Notons T le sous-groupe des matrices diagonales. Pour $i\in\{0,1,\cdots,d\}$, définissons $\epsilon_i\in X(T)$ comme le caractère qui envoie $\mathrm{diag}(a_0,a_1,\cdots,a_d)$ sur a_i et posons $\alpha_i=\epsilon_{i-1}-\epsilon_i$. Alors $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_d\}$ est l'ensemble des racines simples. Notons $\omega_1,\cdots,\omega_d$ les poids fondamentaux correspondant à $\alpha_1,\cdots,\alpha_d$. On fixe $m,n\in\mathbb{N}$ et l'on considère le poids $\mu=m\omega_1-(n+d)\omega_d$. Le but est de calculer $H^d(\mu)$ [1].

Soit V la représentation naturelle de G et V^* la représentation duale. Soit $\{X_0,\cdots,X_d\}$ la base canonique de V et $\{Y_0,\cdots,Y_d\}$ la base duale de V^*. Soit P_1 (resp. P_d) le sous-groupe parabolique maximal correspondant à $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_d$ (resp. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{d-1}$). Posons $P=P_d\cap P_1$, c'est le sous-groupe parabolique correspondant à $\alpha_2,\cdots,\alpha_{d-1}$ Alors

$$\begin{aligned} P_d &= \mathrm{Stab}(X_d)\\ P_1 &= \mathrm{Stab}(Y_0). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} G/P_d &\cong \mathbb{P}(V)\\ &= \mathrm{Proj}(S(V^*)) = \mathrm{Proj}(k[Y_0,Y_1,\cdots,Y_d])\\ G/P_1 &\cong \mathbb{P}(V^*)\\ &= \mathrm{Proj}(S(V)) = \mathrm{Proj}(k[X_0,X_1,\cdots,X_d]) \end{aligned}$$

où $S(V)$ est l'algèbre symétrique de V.

On a

$$H^0(G/P_1,r\omega_1)\cong S_r \tag{4.28}$$

où $S_r=\langle X_0^{a_0}X_1^{a_1}\cdots X_d^{a_d}|a_0+a_1+\cdots+a_d=r\rangle$.

D'autre part, pour P_d, on a

$$\mathcal{L}_{G/P_d}(r\omega_d)\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(r). \tag{4.29}$$

Le fibré canonique est $\mathcal{L}(-(d+1)\omega_d)$ et pour tout $r\in\mathbb{N}$ on a :

$$H^2(G/P_d,-r\omega_d)\cong Q_{r-d-1} \tag{4.30}$$

où $Q_r=\langle Y_0^{-1-b_0}Y_1^{-1-b_1}\cdots Y_d^{-1-b_d}|b_i\in\mathbb{N},b_0+b_1+\cdots+b_d=r\rangle$.

1. Dans la version soumise le 21 mars on ne considérait que le cas où $m=n$. L'extension au cas général a été ajoutée en mai 2019.

Notons $\xi = ([Y_0], [X_d]) \in \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V)$. Alors

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{Stab}(\xi) \\ G/P &\cong G\xi = \mathscr{V}(X_0Y_0 + X_1Y_1 + \cdots + X_dY_d) \end{aligned}$$

où $\mathscr{V}(\phi)$ désigne la sous-variété fermée définie par un polynôme bi-homogène ϕ.

Donc pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ il existe une suite exacte de faisceaux :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{G/P_1}(m-1) \boxtimes \mathcal{O}_{G/P_d}(-n-d-1) \arrow[r] & \mathcal{O}_{G/P_1}(m) \boxtimes \mathcal{O}_{G/P_d}(-n-d) \arrow[dll, rounded corners] \\ & \mathcal{L}_{G/P}(m, 0, \cdots, 0, -n-d) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{4.31}$$

Comme $H^0(P/B, \mu) \cong \mu$ et $H^i(P/B, \mu) = 0$ si $i > 0$, on a

$$H^i(\mu) \cong H^i(G/P, \mu)$$

pour tout i. Donc en prenant la cohomologie, on trouve une suite exacte de G-modules

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^{d-1}(\mu) \arrow[r] & Q_n \otimes S_{m-1} \arrow[r, "f"] & Q_{n-1} \otimes S_m \arrow[dll, rounded corners] \\ & H^d(\mu) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{4.32}$$

où f est la multiplication par $X_0Y_0 + X_1Y_1 + \cdots + X_dY_d$.

On note $E = Q_n \otimes S_{m-1}$ et $F = Q_{n-1} \otimes S_m$.

On sait que X_0, $X_1, \cdots$, X_d sont de poids ω_1, $\omega_1 - \alpha_1$, $\cdots$, $\omega_1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_d$ et Y_i est de poids opposé à celui de X_i. Comme f préserve les espaces de poids, alors il suffit de calculer le conoyau de f_ν pour chaque poids dominant ν.

Le plus haut poids de E et de F est $(m+n-1)\omega_1$. Si $\nu \leq (m+n-1)\omega_1$ est dominant, alors il existe $s_1, s_2 \cdots, s_d \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{aligned} \nu =& (m+n-1)\omega_1 - s_1\alpha_1 - s_2\alpha_2 - \cdots - s_d\alpha_d \\ =& (m+n-1-2s_1+s_2)\omega_1 + (s_1 - 2s_2 + s_3)\omega_2 + (s_2 - 2s_3 + s_4)\omega_3 \\ &+ \cdots + (s_{d-2} - 2s_{d-1} + s_d)\omega_{d-1} + (s_{d-1} - 2s_d)\omega_d \end{aligned}$$

avec $m+n-1-2s_1+s_2 \geq 0$ et $s_{i-1} - 2s_i + s_{i+1} \geq 0$ pour $2 \leq i \leq d-1$ et $s_{d-1} - 2s_d \geq 0$. Donc l'espace de poids ν consiste en les monômes tels que $(a_0+b_0, a_1+b_1, \cdots, a_d+b_d) = (m+n-1-s_1, s_1-s_2, \cdots, s_{d-1}-s_d, s_d)$. Par conséquent si on fixe ν, un monôme dans l'espace de poids ν est déterminé par $b = (b_0, b_1, \cdots, b_d)$. Dans la suite, la lettre b sans indice désignera un élément de $\mathbb{N}^{d+1}$.

4.5.1 Cas $n \leq m$

1) Si $s_1 \leq n-1$, alors tout monôme $(b_0, b_1, \cdots, b_d)$ dans E_ν vérifie $b_0 \geq 1$ (car $b_1 + \cdots + b_d \leq s_1 < n$ et $b_0 + b_1 + \cdots + b_d = n$). Soit

$$\begin{aligned} A = \{b = (b_0, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_0 + b_1 + \cdots + b_d = n, \quad 1 \leq b_0 \leq m+n-1-s_1, \\ b_i \leq s_i - s_{i+1} \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad b_d \leq s_d\}. \end{aligned}$$

Donc on peut prendre pour base de E_ν l'ensemble $\{v_b | b \in A\}$ où v_b est le monôme déterminé par b. Comme $m+n-1-s_1 \geq 2n-1-s_1 \geq n$, on a

$$A = \{b = (b_0, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_0 + b_1 + \cdots + b_d = n, \quad 1 \leq b_0 \leq n, \\ b_i \leq s_i - s_{i+1} \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad b_d \leq s_d\}.$$

Pour $0 \leq i \leq d$, on note $e_i = (0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ où 1 est à la i-ème position, alors on peut prendre pour base de F_ν l'ensemble $\{w_b | b \in A\}$ où w_b est le monôme déterminé par $b - e_0$. Avec ces notations, on a

$$f(v_u) = w_u + w_{u+e_0-e_1} + \cdots + w_{u+e_0-e_d}.$$

Classons $A \subset \mathbb{N}^{d+1}$ par ordre lexicographique inverse, alors $u + e_0 - e_i < u$ pour tout $1 \leq i \leq d$. Donc la matrice de f correspondant aux bases v_b et w_b est triangulaire inférieure, et ses coefficients diagonaux valent tous 1. Donc le conoyau $H^d(\mu)_\nu$ de f_ν est nul.

Ceci montre que tout poids de $H^2(\mu)$ est $\leq (m+n-1)\omega_1 - n\alpha_1$.

2) Si $s_1 \geq n$, notons $s_1 = n + k$ avec $k \geq 0$. Posons

$$\begin{aligned} A =& \{b = (b_0, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_0 + b_1 + \cdots + b_d = n, \quad 1 \leq b_0 \leq m-1-k, \\ & b_i \leq s_i - s_{i+1} \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad b_d \leq s_d\}, \\ C =& \{b = (0, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_1 + \cdots + b_d = n, \\ & b_i \leq s_i - s_{i+1} \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad b_d \leq s_d\}, \\ D =& \{b = (m-k-1, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_1 + \cdots + b_d = k+n-m, \quad b_i \leq s_i - s_{i+1} \\ & \text{si} \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad b_d \leq s_d\}. \end{aligned}$$

On prend pour base de E_ν l'ensemble $\{v_b | b \in A \cup C\}$ où v_b est le monôme déterminé par $b = (b_0, \cdots, b_d)$. On prend pour base de F_ν l'ensemble $\{w_b | b \in A\} \cup \{u_b | b \in D\}$ où w_b est le monôme déterminé par $b - e_0$ et u_b est le monôme déterminé par $b \in D$.

Convention 2. Soit $b \in \mathbb{Z}^{d+1}$. Si $b \notin A \cup C$, on pose $v_b = 0$. Si $b \notin A$, on pose $w_b = 0$. Si $b \notin D$, on pose $u_b = 0$.

Avec cette notation, on a

$$\begin{aligned} f(v_b) =& w_b + w_{b+e_0-e_1} + w_{b+e_0-e_2} + \cdots w_{b+e_0-e_d} \quad \text{si} \quad b_0 \leq m-k-2 \\ f(v_b) =& w_b + u_{b-e_1} + u_{b-e_2} + \cdots + u_{b-e_d} \quad \text{si} \quad b_0 = m-k-1 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Maintenant faisons un changement de base pour E_ν en définisant v'_b pour tout $b \in A \cup C$ par :

- si $b_0 = m-k-1$, on pose $v'_b = v_b$;
- si $b_0 = m-k-2$, on pose

$$v'_b = v_b - v_{b+e_0-e_1} - v_{b+e_0-e_2} - \cdots - v_{b+e_0-e_d}. \tag{4.34}$$

Soit $j \geq 1$. Si on a déjà défini v'_b pour tout b tel que $j \leq b_0 \leq m-k-2$, on pose

$$v'_b = v_b - v'_{b+e_0-e_1} - v'_{b+e_0-e_2} - \cdots - v'_{b+e_0-e_d} \quad \text{si} \quad b_0 = j-1. \tag{4.35}$$

Donc v'_b est défini pour tout $b \in A \cup C$.

Alors, si $b_0 = m-k-1$, on a :

$$f(v'_b) = w_b + u_{b-e_1} + u_{b-e_2} + \cdots + u_{b-e_d} \tag{4.36}$$

et si $b_0 = m-k-2$, on a :

$$\begin{aligned}
f(v'_b) =& f(v_b) - f(v_{b+e_0-e_1}) - \cdots - f(v_{b+e_0-e_d}) \\
=& w_b + w_{b+e_0-e_1} + w_{b+e_0-e_2} + \cdots + w_{b+e_0-e_d} \\
& - w_{b+e_0-e_1} - u_{b+e_0-2e_1} - u_{b+e_0-e_1-e_2} - \cdots - u_{b+e_0-e_1-e_d} \\
& - w_{b+e_0-e_2} - u_{b+e_0-e_2-e_1} - u_{b+e_0-2e_2} - \cdots - u_{b+e_0-e_2-e_d} \\
& - \cdots \\
& - w_{b+e_0-e_d} - u_{b+e_0-e_d-e_1} - u_{b+e_0-e_d-e_2} - \cdots - u_{b+e_0-2e_d} \\
=& w_b - \sum_{b' \in D} \binom{2}{b_1 - b'_1, b_2 - b'_2, \ldots, b_d - b'_d} u_{b'}.
\end{aligned}$$

On va montrer par récurrence descendante sur b_0 que pour tout $b \in A \cup C$, on a

$$f(v'_b) = w_b - \sum_{b' \in D} \binom{m-k-b_0}{b_1 - b'_1, b_2 - b'_2, \ldots, b_d - b'_d} u_{b'}. \tag{4.37}$$

Remarque 27. Comme $b_0 + \cdots + b_d = n$ si $b \in A \cup C$, on a $b_1 + b_2 + \cdots + b_d = n - b_0$. Par ailleurs, si $b' \in D$, alors $b'_1 + b'_2 + \cdots + b'_d = n - 1 - b'_0 = n - 1 - (m-1-k) = k + n - m$, d'où $b_1 - b'_1 + b_2 - b'_2 + \cdots + b_d - b'_d = m - k - b_0$.

Cet énoncé est vrai si $b_0 = m-k-1$ ou $m-k-2$. Si (4.37) est vrai pour tout $b \in A \cup C$ tel que $1 \leq j \leq b_0 \leq m-k-2$, alors si $b_0 = j-1$ l'on a :

$$\begin{aligned}
f(v'_b) =& f(v_b) - f(v'_{b+e_0-e_1}) - \cdots - f(v'_{b+e_0-e_d}) \\
=& w_b + w_{b+e_0-e_1} + w_{b+e_0-e_2} + \cdots + w_{b+e_0-e_d} \\
& - w_{b+e_0-e_1} - \sum_{b' \in D} \binom{m-k-b_0-1}{b_1 - 1 - b'_1, b_2 - b'_2, \cdots, b_d - b'_d} u_{b'} \\
& - w_{b+e_0-e_2} - \sum_{b' \in D} \binom{m-k-b_0-1}{b_1 - b'_1, b_2 - 1 - b'_2, \cdots, b_d - b'_d} u_{b'} \\
& - \cdots \\
& - w_{b+e_0-e_d} - \sum_{b' \in D} \binom{m-k-b_0-1}{b_1 - b'_1, b_2 - b'_2, \cdots, b_d - 1 - b'_d} u_{b'} \\
=& w_b - \sum_{b' \in D} \sum_{i=1}^{d} \binom{m-k-b_0-1}{b_1 - b'_1, b_2 - b'_2, \ldots, b_i - 1 - b'_i, \ldots, b_d - b'_d} u_{b'} \\
=& w_b - \sum_{b' \in D} \binom{m-k-b_0}{b_1 - b'_1, b_2 - b'_2, \ldots, b_d - b'_d} u_{b'}.
\end{aligned}$$

Ceci montre l'égalité (4.37).

Donc la matrice de f correspondant aux bases v'_b et w_b, u_b est de la forme

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & * \\
& 1 & & 0 & * \\
& & \ddots & & \vdots \\
& 0 & & 1 & * \\
& & & & M
\end{pmatrix}$$

où les lignes de M sont indexées par C et les colonnes sont indexées par D et le coefficient correspondant à $b \in C, b' \in D$ est $\binom{m-k}{b_1-b'_1, b_2-b'_2, \ldots, b_d-b'_d}$.

On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 14. *Pour $m \geq n$ fixés, et $(k, s_2, \cdots, s_d)$ tels que*

$$\nu = (m-n-1, n, 0, \cdots, 0) - k\alpha_1 - s_2\alpha_2 - \cdots - s_d\alpha_d$$

soit dominant, l'espace de poids ν de $H^d(m, 0, \cdots, 0, -n-d)$ est le conoyau de la matrice

$$\left(\binom{m-k}{b_1-b'_1, b_2-b'_2, \ldots, b_d-b'_d}\right)_{\substack{b\in C\\ b'\in D}}, \tag{4.38}$$

où

$$\begin{aligned} C =& \{b = (0, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_1 + \cdots + b_d = n, \\ & b_i \leq s_i - s_{i+1} \quad si \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad b_d \leq s_d\}, \\ D =& \{b = (m-k-1, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_1 + \cdots + b_d = k+n-m, \quad b_i \leq s_i - s_{i+1} \\ & si \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad b_d \leq s_d\}. \end{aligned}$$

4.5.2 Cas $n > m$

1) Si $s_1 \leq m-1 < n-1$, alors un monôme $(b_0, b_1, \cdots, b_d)$ dans E_ν vérifie $b_0 \geq 1$ (car $b_1 + \cdots + b_d \leq s_1 < n$ et $b_0 + b_1 + \cdots + b_d = n$). Soit

$$\begin{aligned} A = \{b = (b_0, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_0 + b_1 + \cdots + b_d = n, \quad & 1 \leq b_0 \leq m+n-1-s_1, \\ & b_i \leq s_i - s_{i+1} \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad b_d \leq s_d\}. \end{aligned}$$

Donc on peut prendre pour base de E_ν l'ensemble $\{v_b | b \in A\}$ où v_b est le monôme déterminé par b. Comme $m+n-1-s_1 > n-1$, on a

$$\begin{aligned} A = \{b = (b_0, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_0 + b_1 + \cdots + b_d = n, \quad & 1 \leq b_0 \leq n, \\ & b_i \leq s_i - s_{i+1} \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad b_d \leq s_d\}. \end{aligned}$$

Pour $0 \leq i \leq d$, on note $e_i = (0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ où 1 est à la i-ème position, alors on peut prendre pour base de F_ν l'ensemble $\{w_b | b \in A\}$ où w_b est le monôme déterminé par $b - e_0$. Avec ces notations, on a

$$f(v_u) = w_u + w_{u+e_0-e_1} + \cdots + w_{u+e_0-e_d}.$$

Classons $A \subset \mathbb{N}^{d+1}$ par ordre lexicographique inverse, alors $u + e_0 - e_i < u$ pour tout $1 \leq i \leq d$. Donc la matrice de f correspondant aux bases v_b et w_b est triangulaire inférieure, et ses coefficients diagonaux valent tous 1. Donc le conoyau $H^d(\mu)_\nu$ de f_ν est nul.

Ceci montre que tout poids de $H^2(\mu)$ est $\leq (m+n-1)\omega_1 - m\alpha_1$

2) Si $s_1 \geq m$, notons $s_1 = m+k$ avec $k \geq 0$. Posons

$$\begin{aligned} A =& \{b = (b_0, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_0 + b_1 + \cdots + b_d = n, \quad 1 \leq b_0 \leq n-1-k, \\ & b_i \leq s_i - s_{i+1} \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad b_d \leq s_d\}, \\ C =& \{b = (0, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_1 + \cdots + b_d = n, \\ & b_i \leq s_i - s_{i+1} \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad b_d \leq s_d\}, \\ D =& \{b = (n-k-1, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_1 + \cdots + b_d = k, \quad b_i \leq s_i - s_{i+1} \\ & \text{si} \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad b_d \leq s_d\}. \end{aligned}$$

On prend pour base de E_ν l'ensemble $\{v_b | b \in A \cup C\}$ où v_b est le monôme déterminé par $b = (b_0, \cdots, b_d)$. On prend pour base de F_ν l'ensemble $\{w_b | b \in A\} \cup \{u_b | b \in D\}$ où w_b est le monôme déterminé par $b - e_0$ et u_b est le monôme déterminé par $b \in D$.

Convention 3. Soit $b \in \mathbb{Z}^{d+1}$. Si $b \notin A \cup C$, on pose $v_b = 0$. Si $b \notin A$, on pose $w_b = 0$. Si $b \notin D$, on pose $u_b = 0$.

Avec cette notation, on a

$$\begin{aligned} f(v_b) =& w_b + w_{b+e_0-e_1} + w_{b+e_0-e_2} + \cdots w_{b+e_0-e_d} \quad \text{si} \quad b_0 \leq n-k-2 \\ f(v_b) =& w_b + u_{b-e_1} + u_{b-e_2} + \cdots + u_{b-e_d} \quad \text{si} \quad b_0 = n-k-1 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Maintenant faisons un changement de base pour E_ν en définisant v'_b pour tout $b \in A \cup C$ par :

- si $b_0 = n-k-1$, on pose $v'_b = v_b$;
- si $b_0 = n-k-2$, on pose

$$v'_b = v_b - v_{b+e_0-e_1} - v_{b+e_0-e_2} - \cdots - v_{b+e_0-e_d}. \tag{4.40}$$

Soit $j \geq 1$. Si on a déjà défini v'_b pour tout b tel que $j \leq b_0 \leq n-k-2$, on pose

$$v'_b = v_b - v'_{b+e_0-e_1} - v'_{b+e_0-e_2} - \cdots - v'_{b+e_0-e_d} \quad \text{si} \quad b_0 = j-1. \tag{4.41}$$

Donc v'_b est défini pour tout $b \in A \cup C$.

Alors, si $b_0 = n-k-1$, on a :

$$f(v'_b) = w_b + u_{b-e_1} + u_{b-e_2} + \cdots + u_{b-e_d} \tag{4.42}$$

et si $b_0 = n-k-2$, on a :

$$\begin{aligned} f(v'_b) =& f(v_b) - f(v_{b+e_0-e_1}) - \cdots - f(v_{b+e_0-e_d}) \\ =& w_b + w_{b+e_0-e_1} + w_{b+e_0-e_2} + \cdots + w_{b+e_0-e_d} \\ & - w_{b+e_0-e_1} - u_{b+e_0-2e_1} - u_{b+e_0-e_1-e_2} - \cdots - u_{b+e_0-e_1-e_d} \\ & - w_{b+e_0-e_2} - u_{b+e_0-e_2-e_1} - u_{b+e_0-2e_2} - \cdots - u_{b+e_0-e_2-e_d} \\ & - \cdots \\ & - w_{b+e_0-e_d} - u_{b+e_0-e_d-e_1} - u_{b+e_0-e_d-e_2} - \cdots - u_{b+e_0-2e_d} \\ =& w_b - \sum_{b' \in D} \binom{2}{b_1 - b'_1, b_2 - b'_2, \ldots, b_d - b'_d} u_{b'}. \end{aligned}$$

On va montrer par récurrence descendante sur b_0 que pour tout $b \in A \cup C$, on a

$$f(v'_b) = w_b - \sum_{b' \in D} \binom{n-k-b_0}{b_1 - b'_1, b_2 - b'_2, \ldots, b_d - b'_d} u_{b'}. \tag{4.43}$$

Remarque 28. Comme $b_0 + \cdots + b_d = n$ si $b \in A \cup C$, on a $b_1 + b_2 + \cdots + b_d = n - b_0$. Par ailleurs, si $b' \in D$, alors $b'_1 + b'_2 + \cdots + b'_d = n - 1 - b'_0 = n - 1 - (n-1-k) = k$, d'où $b_1 - b'_1 + b_2 - b'_2 + \cdots + b_d - b'_d = n - k - b_0$.

Cet énoncé est vrai si $b_0 = n-k-1$ ou $n-k-2$. Si (4.43) est vrai pour tout $b \in A \cup C$ tel que $1 \leq j \leq b_0 \leq n-k-2$, alors si $b_0 = j-1$ l'on a :

$$\begin{aligned}
f(v'_b) =& f(v_b) - f(v'_{b+e_0-e_1}) - \cdots - f(v'_{b+e_0-e_d}) \\
=& w_b + w_{b+e_0-e_1} + w_{b+e_0-e_2} + \cdots + w_{b+e_0-e_d} \\
& - w_{b+e_0-e_1} - \sum_{b' \in D} \binom{n-k-b_0-1}{b_1-1-b'_1, b_2-b'_2, \cdots, b_d-b'_d} u_{b'} \\
& - w_{b+e_0-e_2} - \sum_{b' \in D} \binom{n-k-b_0-1}{b_1-b'_1, b_2-1-b'_2, \cdots, b_d-b'_d} u_{b'} \\
& - \cdots \\
& - w_{b+e_0-e_d} - \sum_{b' \in D} \binom{n-k-b_0-1}{b_1-b'_1, b_2-b'_2, \cdots, b_d-1-b'_d} u_{b'} \\
=& w_b - \sum_{b' \in D} \sum_{i=1}^{d} \binom{n-k-b_0-1}{b_1-b'_1, b_2-b'_2, \ldots, b_i-1-b'_i, \ldots, b_d-b'_d} u_{b'} \\
=& w_b - \sum_{b' \in D} \binom{n-k-b_0}{b_1-b'_1, b_2-b'_2, \ldots, b_d-b'_d} u_{b'}.
\end{aligned}$$

Ceci montre l'égalité (4.43).

Donc la matrice de f correspondant aux bases v'_b et w_b, u_b est de la forme

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & * \\
& 1 & & 0 & * \\
& & \ddots & & \vdots \\
& 0 & & 1 & * \\
& & & & M
\end{pmatrix}$$

où les lignes de M sont indexées par C et les colonnes sont indexées par D et le coefficient correspondant à $b \in C, b' \in D$ est $\binom{n-k}{b_1-b'_1, b_2-b'_2, \ldots, b_d-b'_d}$.

On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 15. *Pour $m < n$ fixés, et $(k, s_2, \cdots, s_d)$ tels que*

$$\nu = (n-m-1, m, 0, \cdots, 0) - k\alpha_1 - s_2\alpha_2 - \cdots - s_d\alpha_d$$

soit dominant, l'espace de poids ν de $H^d(m, 0, \cdots, 0, -n-d)$ est le conoyau de la matrice

$$\left(\binom{n-k}{b_1-b'_1, b_2-b'_2, \ldots, b_d-b'_d} \right)_{\substack{b \in C \\ b' \in D}}, \tag{4.44}$$

où

$$\begin{aligned}
C =& \{b = (0, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_1 + \cdots + b_d = n, \\
& b_i \leq s_i - s_{i+1} \quad si \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad b_d \leq s_d\}, \\
D =& \{b = (n-k-1, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_1 + \cdots + b_d = k, \quad b_i \leq s_i - s_{i+1} \\
& si \quad 1 \leq i \leq d-1, \quad b_d \leq s_d\}.
\end{aligned}$$

4.5.3 Sur le mur : cas $m = n$

Supposons maintenant que $m = n$. Alors on a montré que tout poids dominant de $H^d(\mu)$ est de la forme $\nu = (2n-1)\omega_1 - s_1\alpha_1 - s_2\alpha_2 - \cdots - s_d\alpha_d$ avec $s_1 \geq n$ et $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_d$. Notons $m_i = s_i - s_{i+1}$ pour $1 \leq d-1$ et $m_d = s_d$, alors comme ν est dominant on a $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_d \geq 0$. Notons aussi $k = s_1 - n \geq 0$. Alors comme $\mathbb{Z}$-module, l'espace de poids $H^d(\mu)_\nu$ est isomorphe au conoyau de la matrice M dont les ligne sont indexées par

$$C = \{b = (0, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_1 + \cdots + b_d = n, \quad b_i \leq m_i\}$$

et les colonnes sont indexées par

$$D = \{b = (n-k-1, b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{N}^{d+1} | b_1 + \cdots + b_d = k, \quad b_i \leq m_i\}$$

et le coefficient correspondant à $b \in C, b' \in D$ est $\binom{n-k}{b_1-b'_1, b_2-b'_2, \ldots, b_d-b'_d}$.

C'est une matrice carrée. En effet, il existe une bijection $\Phi : C \to D$ définie par $\Phi((0, b_1, \cdots, b_d)) = (n-k-1, m_1 - b_1, m_2 - b_2, \cdots, m_d - b_d)$ car $m_1 + m_2 + \cdots + m_d = s_1 = n + k$. Le déterminant de cette matrice a été calculé dans l'article [Pro90]. Plus précisément, notons $m = (m_1, \cdots, m_d)$ et posons

$$C(d, m, \ell) = \{(b_1, \cdots, b_d) | b_1 + \cdots + b_d = \ell, b_i \leq m_i\}$$

pour tout $\ell \geq 0$. Posons $\delta_\ell = |C(d, m, \ell)| - |C(d, m, \ell - 1)|$ (on utilise la convention que $C(d, m, -1) = \varnothing$) et $S_\ell = |C(d, m, 0)| + |C(d, m, 1)| + \cdots + |C(d, m, \ell)|$. Si $m_d = 0$, alors on est dans le cas de SL_d. Sinon, on a $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_d \geq 1$. De plus, comme ν est dominant, on a $0 \leq 2n - 1 - 2s_1 + s_2 = 2n - 1 - s_1 - m_1 \leq 2n - 1 - s_1 = n - 1 - k$, d'où $k \leq n$. Donc le Corollaire 1 de [Pro90] s'applique et l'on a la proposition suivante.

Proposition 16. *Fixons un ordre des éléments de D et utilisons cet ordre pour ordonner les colonnes (indexées par D) et les lignes (indexées par $(n-k-1, m_1-b_1, m_2-b_2, \cdots, m_d-b_d) \in C$ pour $(0, b_1, \cdots, b_d) \in D$). Alors si $s_d \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned} \text{dét}\left(\binom{n-k}{b_1 - b'_1, b_2 - b'_2, \ldots, b_d - b'_d}\right)_{\substack{b \in C \\ b' \in D}} \\ = (-1)^{S_{k'}} \frac{\prod_{b' \in C(d,m,k)} b'_1! b'_2! \cdots b'_d!}{\prod_{b \in C(d,m,n)} b_1! b_2! \cdots b_d!} \prod_{\ell=0}^{k} [(\ell+1)(\ell+2)\cdots(\ell+n-k)]^{\delta_{k-\ell}}, \end{aligned} \tag{4.45}$$

où k' est le plus grand nombre impair $\leq k$.

Corollaire 5. *Si $n < p$, alors $H^d(n, 0, \cdots, 0, -n-d) = 0$.*

Démonstration. Si $n < p$, alors pour tout $b \in C(d, m, k) \cup C(d, m, n)$ et tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, on a $d_i \leq n < p$. Pour tout $0 \leq \ell \leq k$, on a $\ell + n - k \leq n < p$. Donc tout facteur de (4.45) est $< p$. En particulier, le déterminant de la matrice (4.38) est non nul dans k, donc le conoyau de cette matrice est nul. □

Bibliographie

[And79] Henning Haahr Andersen, The first cohomology group of a line bundle on G/B, Invent. Math. **51** (1979), 287-296.

[And81] Henning Haahr Andersen, On the structure of the cohomology of line bundles on G/B, J. Algebra **71** (1981), 245-258.

[And86a] Henning Haahr Andersen, Torsion in the cohomology of line bundles on homogeneous spaces for Chevalley groups. Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), no. 4, 537–544.

[And86b] Henning Haahr Andersen, On the generic structure of cohomology modules for semi-simple algebraic groups, Trans. Amer. Math. Soc. **295** (1986), 397-415.

[AK12] Henning Haahr Andersen and Masaharu Kaneda, Cohomology of lines bundles on the flag variety for type G_2, J. Pure Applied Algebra **216** (2012), 1566-1579.

[Don06] Stephen Donkin, The cohomology of lines bundles on the three-dimensional flag variety, J. Algebra **307** (2006), 570-613.

[Dot85] Stephen R. Doty, The submodule structure of certain Weyl modules for groups of type An. J. Algebra **95** (1985), no. 2, 373–383.

[DS88] Stephen R. Doty and John B. Sullivan, On the structure of the higher cohomology bundles of line bundles on G/B, J. Algebra **114** (1988), 286-332.

[Gri80] Walter Lawrence Griffith, Cohomology of flag varieties in characteristic p, Illinois J. Math. **24** (1980), no. 3, 452-461.

[Hum72] James E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972 (3rd printing, revised, 1980).

[Hum86] James E. Humphreys, Cohomology of G/B in characteristic p, Adv. in Math. **59** (1986), 170-183.

[Irv86] Ronald S. Irving, The structure of certain highest weight modules for SL_3, J. Algebra **99** (1986), no. 2, 438–457.

[Jan77] Jens Carsten Jantzen, Darstellungen halbeinfacher Gruppen und kontravariante Formen. J. Reine Angew. Math **290** (1977), 117–141.

[Jan80] Jens Carsten Jantzen, Darstellungen halbeinfacher Gruppen und ihrer Frobenius-Kerne, J. reine angew. Math **317** (1980), 157-199.

[Jan03] Jens Carsten Jantzen, Representations of algebraic groups. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 107. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xiv+576 pp. ISBN : 0-8218-3527-0

[KH85] Kerstin Kühne-Hausmann, Zur Untermodulstruktur der Weylmoduln fur SL3, Bonner math. Schr **162** (1985).

[Kra99] Christian Krattenthaler, Advanced determinant calculus. The Andrews Festschrift (Maratea, 1998). Sém. Lothar. Combin. **42** (1999), Art. B42q, 67 pp.

[Lin90] Zongzhu Lin, Structure of cohomology of lines bundles on G/B for semi simple groups, J. Algebra **134** (1990), 225-256.

[Lin91] Zongzhu Lin, Socle series of cohomology groups of lines bundles on G/B, J. Pure Applied Algebra **72** (1991), 275-294.

[Par06] Alison E. Parker, Good ℓ-filtrations for q-$\mathrm{GL}_3(k)$, J. Algebra **304** (2006), 157-189.

[Pro90] Robert A. Proctor, Product evaluations of Lefschetz determinants for Grassmannians and of determinants of multinomial coefficients. J. Combin. Theory Ser. A **54** (1990), no. 2, 235–247.

[Yeh82] Samy El Badawy Yehia, Extensions of simple modules for the universal Chevalley groups and its parabolic subgroups, Ph. D. thesis, University of Warwick 1982.

Cohomologie des fibrés en droites sur SL_3/B en caractéristique positive : deux filtrations et conséquences

Résumé : Soit G un groupe algébrique semi-simple sur un corps k algébriquement clos de caractéristique positive et soit B un sous-groupe de Borel. La cohomologie des fibrés en droites G-équivariants sur G/B induits par des caractères de B sont des objets importants dans la théorie des représentations de G. Dans cette thèse, on se concentre sur $G = \mathrm{SL}_3$. Dans le premier chapitre, on montre l'existence d'une filtration à deux étages de $H^1(\mu)$ et $H^2(\mu)$ pour μ dans l'adhérence de la région de Griffith. Dans le deuxième chapitre, on montre l'existence d'une p-H^i-D-filtration de $H^i(\mu)$ pour tout i et μ, qui généralise la p-filtration de $H^0(\mu)$ introduite par Jantzen. Dans le troisième chapitre, on étudie et détermine la structure des modules apparaissants dans la p-H^i-D-filtration. Dans le dernier chapitre, on donne une description explicite et combinatoire de $H^2(\mu)$ pour μ dans la région de Griffith et on généralise cette description à $H^d(G/B, \mu)$ pour $G = \mathrm{SL}_{d+1}$ et certains poids μ.

Mots-clés : variété de drapeaux, cohomologie, fibrés en droites, groupes algébriques semi-simples, caractéristique positive, théorie des représentations

Cohomology of line bundles on SL_3/B in positive characteristic : two filtrations and consequences

Abstract : Let G be a semi-simple algebraic group over an algebraically closed field of positive characteristic. The cohomology of G-equivariant line bundles over G/B induced by a character of B are important objects in the representation theory of G. In this thesis, we concentrate on $G = \mathrm{SL}_3$. In the first chapter, we prove the existence of a two-step filtration of $H^1(\mu)$ and $H^2(\mu)$ when μ is in the closure of the Griffith region. In the second chapter, we prove the existence of a p-H^i-D-filtration of $H^i(\mu)$ for all i and μ, which generalizes the p-filtration of $H^0(\mu)$ introduced by Jantzen. In the third chapter, we study and determine the structure of the modules appearing in the p-H^i-D-filtration. In the last chapter, we give an explicit and combinatorial description of $H^2(\mu)$ for μ in the Griffith region and we generalize this description to $H^d(G/B, \mu)$ for $G = \mathrm{SL}_{d+1}$ and certain weights μ.

Key words : flag variety, cohomology, line bundles, semi-simple algebraic groups, positive characteristic, representation theory