



**HAL**  
open science

# Étude de la formation, du transport et de la destruction par vidange de bulles interfaciales

Alexandre Delvert

► **To cite this version:**

Alexandre Delvert. Étude de la formation, du transport et de la destruction par vidange de bulles interfaciales. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Rennes 1, 2020. Français. NNT : 2020REN1S044 . tel-03150036v2

**HAL Id: tel-03150036**

**<https://theses.hal.science/tel-03150036v2>**

Submitted on 21 Mar 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE RENNES 1

ECOLE DOCTORALE N° 596

*Matière, Molécules, Matériaux*

Spécialité : Physique

Par

**Alexandre DELVERT**

## **Etude de la formation, du transport et de la destruction par vidange de bulles interfaciales**

**Thèse présentée et soutenue à Rennes, le 2 novembre 2020**

**Unité de recherche : Institut de Physique de Rennes – UMR 6251**

### **Rapporteurs avant soutenance :**

Benjamin Dollet                      Chargé de recherches – Université Joseph Fourier  
Anniina Salonen                      Maître de conférence – Université Paris Sud

### **Composition du Jury :**

Président :	Marie-Caroline Jullien	Directeur de recherche – Institut de Physique de Rennes
Examineurs :	Benjamin Dollet Anniina Salonen Laurence Talini	Chargé de recherches – Université Joseph Fourier Maître de conférence – Laboratoire de Physique des Solides Directeur de recherche – Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles
Dir. de thèse :	Pascal Panizza	Professeur des universités – Institut de Physique de Rennes
Co-dir. de thèse :	Laurent Courbin	Chargé de recherches – Institut de Physique de Rennes

### **Invité(s)**

Lazhar Benyahia	Professeur des universités – Université du Maine
Matthieu Roché	Chargé de recherches – Laboratoire Matière et Systèmes Complexes



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Pascal Panizza ainsi que mon co-directeur de thèse Laurent Courbin sans qui la réalisation de cette thèse n'aurait pas été possible. En effet, ils m'ont offert l'opportunité d'évoluer au sein d'un laboratoire scientifique afin d'acquérir les compétences et les connaissances spécifiques au domaine d'étude de la Matière Molle. Je suis conscient des difficultés rencontrées pendant la rédaction de ce manuscrit et je pense en être sorti grandi. Grâce à leur dévouement et leur force de proposition, le travail a été réalisé : »Mission Completed« . Merci de votre patience. Je garderai un bon souvenir de cette épopée en Bulgarie pendant laquelle j'aurai pris l'avion pour la première fois.

Je remercie l'ensemble de mes collègues de l'IPR qui ont pu contribuer au bon déroulement de ma thèse pendant ces 3 années et notamment ceux du département Matière Molle. Cette période fût enrichissante d'un point de vue scientifique, professionnelle mais aussi personnelle. C'était un honneur de travailler à vos cotés.

Je remercie également les membres de mon jury : Lazhar Benyahia, Benjamin Dollet, Anniina Salonen, Marie-Caroline Jullien, Laurence Talini et Mathieu Roché pour leurs observations perspicaces sur les travaux que nous avons pu mener, mettant à jour des idées originales sur d'éventuelles poursuites. Merci pour ces échanges instructifs que nous avons pu avoir le jour de la soutenance dans un contexte très particulier de pandémie.

Merci à ma fiancée Joana De Hollanda Cordeiro qui a cru en moi pendant toutes ces années et pour le soutien quotidien qu'elle a pu m'apporter. Merci à ma famille et mes amis qui ont également contribué au bon maintien de ma santé mentale.



# Résumé

Les bulles sont des objets du quotidien qui nous ont amusés étant enfant. Elles sont aussi une source d'inspiration pour les artistes et un outil pédagogique important pour introduire diverses notions de physique. Il n'est pas étonnant que ces objets soient à l'origine de recherches scientifiques depuis des siècles. Dans ce manuscrit, nous nous intéressons à la formation, au transport et à la destruction de bulles interfaciales c'est à dire des bulles en contact avec un solide ou une interface air-liquide. D'abord, nous présentons une expérience sur la formation de bulles interfaciales par impact, à vitesse constante, de films liquides sur la surface d'un bain du même liquide. L'air piégé entre la surface libre du bain et le film liquide conduit à la formation une bulle dont la taille augmente avec la vitesse d'impact. Nous montrons l'existence de deux régimes d'écoulements d'air qui contrôlent la formation de ces bulles : l'un régi par un mécanisme visco-capillaire à basse vitesse d'impact, l'autre, à haute vitesse d'impact, par une compétition entre inertie et capillarité. Nous présentons par la suite une étude sur la vidange d'une bulle interfaciale. Nous revisitons le problème classique de la vidange d'un réservoir en étudiant le cas d'un réservoir déformable, c'est à dire une bulle interfaciale posée sur une plaque percée d'un trou. La vidange est étudiée en fonction des paramètres clefs géométriques et physicochimiques du problème. Nous montrons que le temps de vidange peut être compris en modélisant l'écoulement d'air qui s'échappe d'une bulle à l'aide du théorème de Bernoulli, et que le déplacement d'une bulle pendant la vidange est piloté par la capillarité et est limité par la friction agissant au pied de la bulle. Nous développons dans le dernier chapitre une méthode éducative pour mesurer la viscosité de l'air avec un matériel expérimental simple de nos vies quotidiennes : un smartphone, un entonnoir, un tube et de l'eau savonneuse. L'expérience consiste à étudier le déplacement spontané d'un film liquide mince dans un entonnoir. Nous montrons que cette expérience peut servir de viscosimètre à air dans des conditions pour lesquelles l'écoulement de l'air peut être décrit par l'équation de Poiseuille et le film liquide se déplace de façon quasi-statique.

# Abstract

Bubbles are everyday-life fluid objects that amused us when we were children. Also, they are a source of the inspiration for artists and a important educational tool to introduce several notions of physics. Not surprisingly, these objects are at the origin of many scientific studies for centuries. In this manuscript, we are interested in the formation, travel and destruction of interfacial bubbles, i.e., bubbles in contact with a solid or an air-liquid interface. First, we present an experiment about the formation of interfacial bubbles by the impact, at constant velocity, of liquid films on the free surface of a liquid bath. The air trapped between the bath and the liquid film drives the formation of an interfacial bubble and its size increases with the impact velocity. We show the existence of two distinct regimes of the air flow : one of them is governed by a visco-capillary mechanism at low impact velocity, the other, at high impact velocity, is driven by a competition between inertia and capillarity. Thereafter, we present a study about shrinking surface soap bubbles. We revisit the classical problem of the draining of a tank studying the case of a deformable tank, i.e. , an interfacial bubble sitting on a plate drilled with a circular orifice. Shrinking is studied as functions of key setting geometric and physicochemical parameters of the problem. We show the shrinking time can be understood with a model for the air flow based on Bernoulli's principle, and a motion of a bubble during the shrinking that is driven by capillarity and is limited by the friction acting on its foot. We develop in the last chapter an educative method to measure the air viscosity with simple experimental equipment regularly used in our everyday life : a smartphone, a funnel, a pipe and soap solution. The experiment consists of studying the spontaneous motion of a thin liquid film in a funnel. We show this experiment can be used as a viscosimeter for gases (air in our experiments) with the conditions make the air flow describable by the Poiseuille's equation and the liquid film moves quasi-statically.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
Remerciements . . . . .	iii
Résumé . . . . .	v
Abstract . . . . .	vi
Table des matières . . . . .	vii
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1 Capillarité : tension de surface et surfactants . . . . .	2
1.1 Energie de surface . . . . .	2
1.2 Tensioactifs/surfactants en solution . . . . .	4
1.3 Approche mécanique . . . . .	6
1.4 Surfaces minimales . . . . .	7
1.5 Pression de Laplace . . . . .	10
1.6 Ménisque et ascension capillaire . . . . .	13
1.7 Mouillage . . . . .	16
1.8 Effet Marangoni . . . . .	19
2 Ecoulement de fluides : Equation de Navier-Stokes . . . . .	19
3 Nombres adimensionnés . . . . .	22
3.1 Nombre de Bond $\mathcal{B}_o$ . . . . .	22
3.2 Nombre de Weber $\mathcal{W}_e$ . . . . .	23
3.3 Nombre capillaire $\mathcal{C}$ . . . . .	23
3.4 Nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$ . . . . .	23
4 Matériels et méthodes . . . . .	24
4.1 Rhéométrie . . . . .	24
4.2 Tensiométrie . . . . .	28
4.3 Mesure d'épaisseur d'un film mince par interférométrie . . . . .	30
5 Sujets abordés dans ce manuscrit . . . . .	33
<b>Bibliographie</b>	<b>34</b>

vii

<b>2</b>	<b>Formation d'une bulle interfaciale par impact d'un film liquide mince sur un bain du même liquide</b>	<b>37</b>
1	Introduction . . . . .	38
1.1	Impact de gouttes . . . . .	39
1.2	Impact d'objets solides dans un bain liquide . . . . .	41
1.3	Impact de jet liquide . . . . .	42
2	Expérience . . . . .	46
3	Oscillations amorties d'un film liquide mince . . . . .	53
4	Résultats . . . . .	59
5	Conclusion . . . . .	67
	<b>Bibliographie</b>	<b>69</b>
<b>3</b>	<b>Vidange d'une bulle interfaciale</b>	<b>72</b>
1	Introduction . . . . .	73
2	Expérience . . . . .	83
3	Modélisation de l'écoulement . . . . .	90
3.1	$\theta \cong \pi/2$ , régime I : le cas d'une bulle hémisphérique . . . . .	90
3.2	$\theta < \pi/2$ , régime II : cas d'une calotte sphérique avec mobilité du pied de la bulle (voir Fig. 3.15) . . . . .	92
3.3	$\theta < \pi/2$ , régime III : cas de la vidange d'une calotte sphérique avec le pied immobile . . . . .	94
3.4	Drainage et évaporation du film liquide . . . . .	95
4	Résultats et discussion . . . . .	97
5	Conclusion . . . . .	104
6	Annexe . . . . .	105
6.1	Annexe 1 : La vidange d'un réservoir, loi de Torricelli . . . . .	105
6.2	Annexe 2 : Programme d'analyse vidéo réalisé dans le cadre de l'expérience de la vidange d'une bulle interfaciale. . . . .	107
6.3	Annexe 3 : Echange thermique survenant pendant la détente du gaz contenu dans la bulle . . . . .	117
	<b>Bibliographie</b>	<b>121</b>
<b>4</b>	<b>Déplacement spontané d'un film liquide mince dans un entonnoir</b>	<b>124</b>
1	Introduction . . . . .	125
1.1	Des micronageurs dans la nature et les laboratoires . . . . .	127
1.2	Mouvement spontané d'une goutte . . . . .	128
1.3	Mouvement spontané d'un liquide par capillarité dans une géométrie de section non-uniforme . . . . .	134

---

2	Expérience . . . . .	137
2.1	Dispositif expérimental . . . . .	138
2.2	Protocole expérimental . . . . .	141
2.3	Résultats . . . . .	145
3	Modélisation . . . . .	147
3.1	Conditions expérimentales et approximations . . . . .	147
3.2	Modèle de l'écoulement et de la durée du trajet du film liquide dans le cône . . . . .	149
3.3	Comparaison théorie-expérience . . . . .	150
3.4	Fiabilité du modèle . . . . .	151
4	Conclusion . . . . .	154
	<b>Bibliographie</b>	<b>155</b>
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>158</b>
5	Conclusion générale . . . . .	158
6	Perspectives . . . . .	159
	<b>Annexe : Articles réalisés au cours de la thèse</b>	<b>161</b>



# Chapitre 1

## Introduction

Nous définissons dans ce chapitre d'introduction les notions de physique utiles à la compréhension des études expérimentales que nous présentons dans ce manuscrit. Ces dernières portent sur des phénomènes observés dans des systèmes de fluides à base de films de savon. C'est la raison pour laquelle nous discutons ici de manière générale les différents aspects de la physique aux interfaces de deux phases liquide-liquide ou liquide-gaz non-miscibles. Nous commençons tout d'abord par décrire les interactions moléculaires survenant au niveau d'une telle interface afin de définir la tension de surface, un paramètre important de la dynamique des fluides responsable de phénomènes observables dans nos vies quotidiennes et aussi dans la nature. Par exemple, ce paramètre physique permet d'expliquer pourquoi le café se propage dans un morceau de sucre plongé dans une tasse de café ou bien pourquoi un gerris (également appelé punaise d'eau) ou un trombone peuvent flotter à la surface de l'eau alors que la poussée d'Archimède est inférieure à leur poids. Nous discutons également de molécules dites tensioactives et de la façon dont elles influent sur la tension de surface. Pourquoi un trombone coule-t-il lorsque nous ajoutons des tensioactifs dans un verre d'eau dans lequel il flotte? Nous donnons ensuite des notions élémentaires de dynamique des fluides en présentant notamment l'équation de Navier-Stokes et des nombres sans dimensions importants dans les problèmes que nous abordons. En utilisant les notions décrites en début de chapitre, nous décrivons dans une dernière section différentes méthodes de mesure des propriétés physiques cruciales pour nos expériences. Plus précisément, les deux méthodes de mesure de la viscosité qui sont décrites sont basées sur l'utilisation d'un viscosimètre capillaire ou bien d'un rhéomètre rotatif cône-plan. Nous expliquons également le fonctionnement de la méthode de tensiométrie de la goutte pendante, une méthode classique de mesure de la tension de surface. Pour finir, nous présentons une méthode de mesure d'épaisseur de films liquides par interférométrie.

# 1 Capillarité : tension de surface et surfactants

## 1.1 Energie de surface

Considérons un volume de liquide, comme de l'eau, en contact avec un fluide, typiquement de l'air ou de l'huile, formant deux phases continues immiscibles. D'un point de vue microscopique, les molécules composant le liquide interagissent via un potentiel d'interaction avec leurs voisines (voir Fig. 1.1 et 1.2). La figure 1.2 montre l'allure du potentiel d'interaction entre deux molécules voisines en fonction de la distance  $r$  qui les sépare. Comme le montre cette figure, ce potentiel se compose d'une partie attractive à longue distance (interactions de van der Waals, variation en  $-1/r^6$ ) assurant la cohésion générale de la phase et un caractère fortement répulsif à courte portée notamment dû au principe de Pauli et variant en  $1/r^{12}$ . Les deux phases étant immiscibles, nous observons au repos une interface macroscopique entre elles (voir Fig. 1.1). Les molécules positionnées au niveau de l'interface possèdent un nombre d'interactions inférieur à celles positionnées en volume. En effet, elles perdent à l'interface environ la moitié de leurs voisines comme le montre schématiquement la figure 1.1. La force attractive résultante tend à les éloigner de l'interface. Cette asymétrie crée un excès d'énergie par unité de surface à l'interface appelée la tension de surface  $\gamma$  [1]. Pour cette raison, une phase fluide tend spontanément à diminuer sa surface de contact avec une autre.

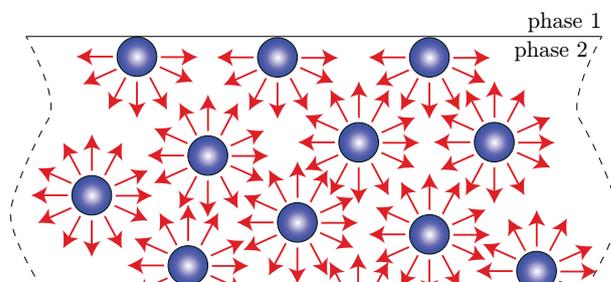


FIGURE 1.1: Schéma représentant les interactions entre les molécules d'une phase 2 en volume et à l'interface avec une phase 1. Les molécules situées à l'interface possèdent moins d'interactions que les autres.

La tension de surface est donc le résultat des interactions moléculaires qui ont des conséquences macroscopiques. Nous pouvons déterminer une valeur typique d'une tension de surface par un calcul en ordre de grandeur. Nous avons vu qu'une molécule positionnée dans une phase est entourée de plusieurs autres molécules et possède

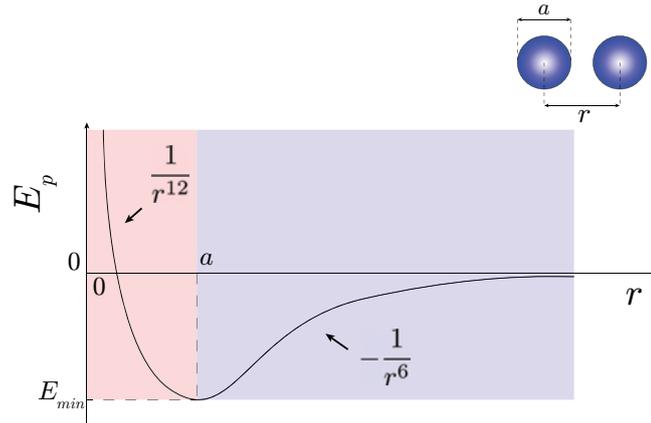


FIGURE 1.2: Graphe représentant le potentiel d'interaction  $E_p$  entre deux molécules en fonction de la distance  $r$  qui les sépare. Les zones rouges et bleues représentent respectivement les régions répulsives et attractives.

une énergie de cohésion  $E_c \sim k_b T$  où  $T$  est la température et  $k_b$  la constante de Boltzmann. La taille typiquement d'une molécule comme l'eau est  $a \simeq 3\text{\AA}$  et sa surface exposée  $a^2$ . Une valeur typique de la tension de surface est donnée par la relation :

$$\gamma \sim \frac{k_b T}{a^2} \simeq 50 \text{ mJ.m}^{-2} \quad (1.1)$$

pour  $T = 300 \text{ K}$  et  $k_b = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ . Cet ordre de grandeur ne traduit pas les variations réelles de la tension de surface avec la température mais permet d'en établir une valeur typique. Dans la littérature, nous trouvons des mesures de tensions de surface entre divers liquides et l'air (notées  $\gamma_{\text{liquide-air}}$ ) à température ambiante :  $\gamma_{\text{eau-air}} = 72 \text{ mJ.m}^{-2}$ ,  $\gamma_{\text{huile-air}} = 20 \text{ mJ.m}^{-2}$  et  $\gamma_{\text{glycérol-air}} = 63 \text{ mJ.m}^{-2}$ . La valeur  $\gamma_{\text{eau-air}}$  est plus élevée que les autres du fait de la présence d'atomes d'hydrogènes qui composent la molécule d'eau. Cette molécule est formée de deux doublets non liants entre les atomes d'hydrogène et l'atome d'oxygène. Le caractère très électronégatif de l'atome d'oxygène crée des liaisons électrostatiques avec les atomes d'hydrogène composant les molécules d'eau voisines, ce qui augmente la cohésion de la phase. Le type de liaisons des molécules composant une phase a donc un impact sur la valeur de la tension de surface et c'est pour cette raison que des valeurs encore plus élevées sont trouvées dans le cas des métaux. Par exemple, la tension de surface pour le mercure est de  $\gamma_{\text{mercure-air}} = 485 \text{ mJ.m}^{-2}$ .

La tension de surface est une fonction décroissante de la température comme le montre l'étude de Mezger en 1946 [2]. La température augmentant l'agitation thermique, le mouvement des molécules diminue le mécanisme d'attraction entre ces dernières diminuant par la même la tension de surface. La tension de surface

eau-air vaut ainsi  $58 \text{ mJ.m}^{-2}$  lorsque la température du système est  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ .

## 1.2 Tensioactifs/surfactants en solution

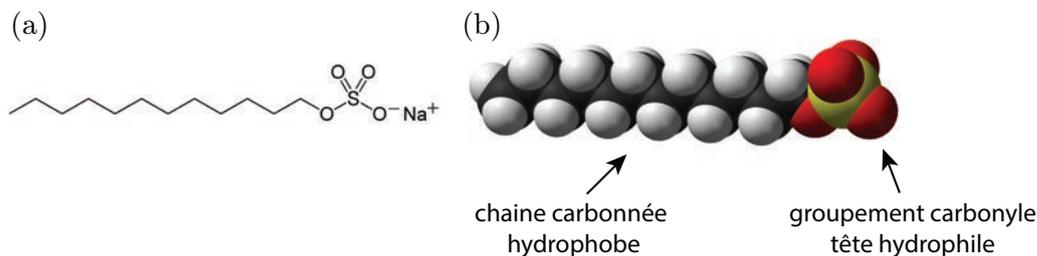


FIGURE 1.3: Exemple de surfactant composé d'une chaîne carbonnée hydrophobe et d'une tête hydrophile. La formule topologique (a) et le schéma (b) tirés de [3] représentent une molécule de dodécylsulfate de sodium communément appelée SDS. C'est une molécule régulièrement utilisée dans les laboratoires comme tensioactif qui possède une concentration micellaire critique  $\text{CMC} = 8.2 \text{ mM}$  dans de l'eau à  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Précédemment, nous avons vu que la tension de surface entre l'air et l'eau pure est  $\gamma_{\text{eau/air}} = 72 \text{ mJ.m}^{-2}$  à température ambiante. La présence d'impuretés dans l'eau aura pour effet de diminuer la valeur de la tension de surface. En effet, les impuretés migrent vers l'interface fluide-fluide séparant deux phases immiscibles diminuant ainsi la surface libre effective occupée par les molécules à l'interface. Dans une solution, les molécules ajoutées pour diminuer la tension de surface sont appelées tensioactifs ou surfactants. Ils sont couramment utilisés dans les produits ménagers de la vie courante comme le savon ou le liquide vaisselle mais également en laboratoire pour étudier les émulsions ou les films liquides. Dans les études que nous allons présenter, les détergents utilisés pour préparer nos solutions diminuent la tension de surface d'environ un facteur trois, la tension de surface atteint une valeur typiquement égale à  $25 \text{ mJ/m}^2$ . Les études scientifiques s'inspirent largement de la nature puisque il y a de nombreux exemples de la présence des tensioactifs notamment dans le corps humain sous forme de lipides ou de protéines et certains animaux sécrètent des substances possédant les mêmes propriétés physiques, nous illustrons quelques exemples dans le chapitre 4.

Les tensioactifs sont des molécules amphiphiles qui se composent d'une ou plusieurs longues chaînes carbonnées hydrophobes et d'une tête polaire hydrophile [voir Fig. 1.3]. Ajoutées en solution, les molécules se positionnent à l'interface fluide-fluide comme mentionné précédemment et diminuent la tension de surface entre deux fluides (voir Fig. 1.4).

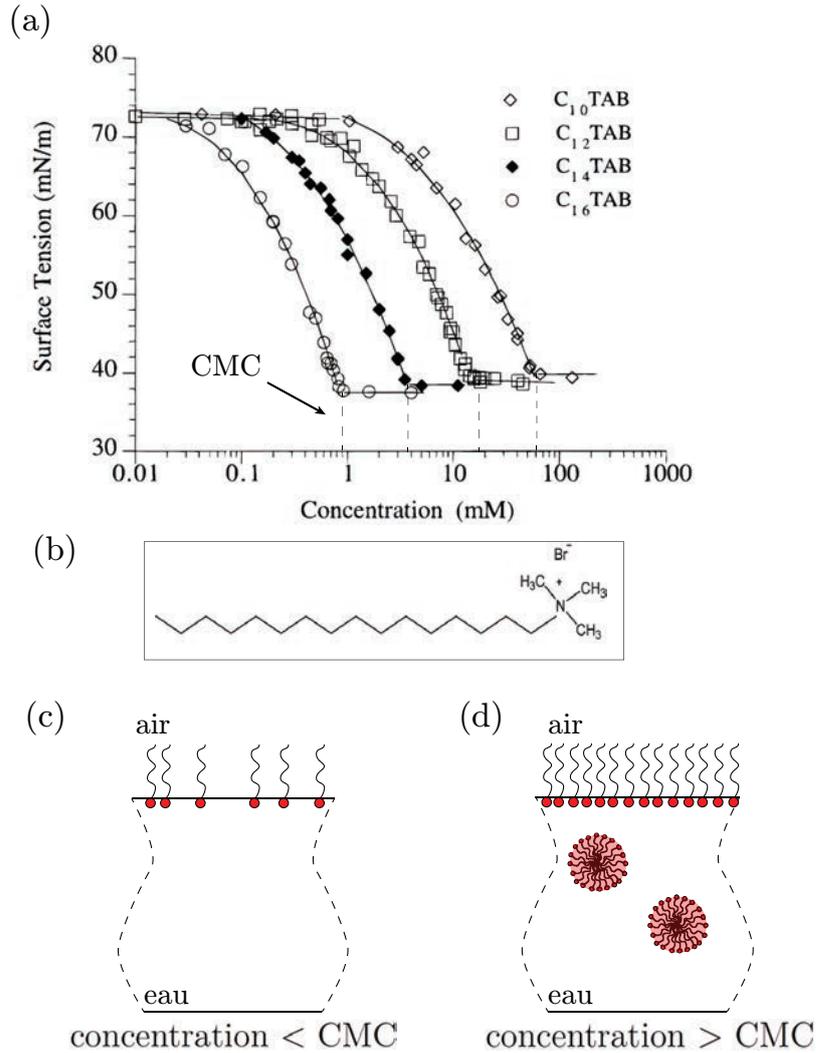


FIGURE 1.4: Le graphe en (a) est tiré de [4], il représente l'évolution de la tension de surface en fonction de la concentration d'un surfactant cationique (le bromure de cétyletriméthylammonium ou  $C_nTAB$  dont la formule topologique représentée en (b) est tirée de [5]). Lorsqu'on ajoute un surfactant comme le  $C_nTAB$  dans un volume d'eau exposé dans l'air ambiant, le surfactant migre à l'interface eau-air comme montré sur le schéma en (c). En augmentant la concentration, la tension de surface diminue jusqu'à ce que l'interface soit saturée. Au-delà de la CMC, les molécules du surfactant se rassemblent sous forme de micelles en volume comme montré en (d).

Lorsque l'interface est saturée de molécules, on atteint une concentration seuil appelée concentration micellaire critique (CMC). Au-delà de la CMC, des agrégats se créent sous forme de micelles sphériques [voir 1.4(d)]. La CMC représente également la limite la plus basse de la tension de surface atteignable par l'ajout d'une molécule de tensioactif donnée à une solution [voir Fig. 1.4(a)]. Bien que largement

utilisées pour introduire le comportement des surfactants aux interfaces, ces représentations schématiques, en figure 1.4 (c) et 1.4 (d), reflètent peu la réalité. En effet, les processus d'adsorption et de désorption des tensioactifs aux interfaces révèlent un caractère très dynamique.

### 1.3 Approche mécanique

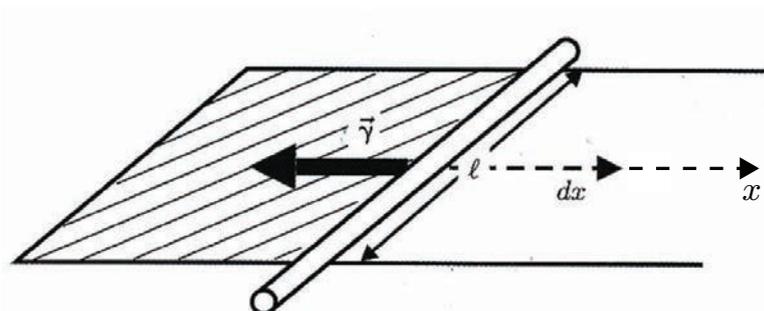


FIGURE 1.5: Schéma représentant une expérience qui permet de montrer l'existence d'une force de tension de surface  $\vec{\gamma}$  qui agit sur un film de savon (zone hachurée) et permet ici le déplacement d'un bâtonnet mobile.  $dx$  représente un petit déplacement le long d'un axe  $x$ . La figure est tirée de [1].

Nous avons considéré jusqu'ici la tension de surface comme une énergie par unité de surface qui peut être exprimée en  $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$ , mais la tension de surface peut aussi être vue comme une force par unité de longueur qui s'exprime en  $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$  et qui agit dans le plan d'une interface. Un dispositif expérimental simple permet de révéler l'existence de la force exercée par la tension de surface en mettant en mouvement un objet solide par l'intermédiaire d'un film de savon. Ce film est une lame liquide composée de deux interfaces air-liquide saturées en surfactants. Considérons un cadre rectangulaire réalisé avec un matériau rigide, par exemple du verre (la figure 1.5 montre un schéma de cette expérience). Lorsque nous immergeons puis extrayons le cadre d'une solution savonneuse, il se forme un film liquide de savon recouvrant la surface intérieure de la géométrie. Posons maintenant une tige de section circulaire (réalisée avec le même matériau que le cadre) sur le cadre pour qu'elle puisse se déplacer comme sur des rails. Nous obtenons donc un film liquide de chaque côté de la tige. En perçant l'un des deux films, la tige se met spontanément à se déplacer dans la direction où se trouve l'autre film, comme montré sur la figure 1.5. Il est intéressant de constater que si le cadre est légèrement incliné, la tige peut se déplacer dans le sens inverse de la gravité. Pour maintenir la tige à l'équilibre, il faut agir manuellement sur celle-ci pour stopper son déplacement. Pour étendre le film liquide

d'une distance  $dx$  dans le sens inverse au déplacement, il faudra exercer un travail mécanique tel que :

$$\delta W \sim F dx = 2\gamma \ell dx = \gamma d\mathcal{A} \quad (1.2)$$

avec  $\vec{F} = -2\gamma\ell\vec{x}$  où  $\vec{x}$  est le vecteur unitaire de l'axe  $x$ . Comme nous pouvons voir sur la figure 1.6, le film liquide est composé de deux surfaces. C'est la raison pour laquelle il y a un facteur 2 dans l'équation (1.2).

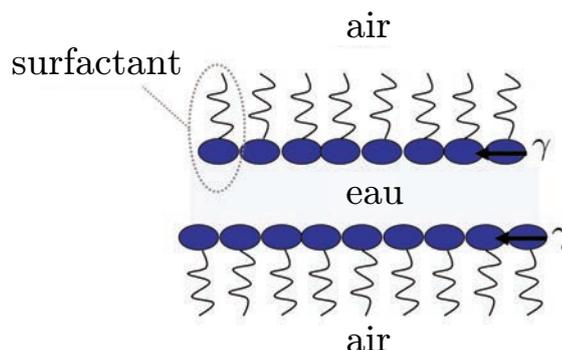


FIGURE 1.6: Schéma qui représente la vue en coupe d'un film de savon. Un tel film se compose de deux interfaces eau-air couvertes de surfactants dont la représentation montre ici la nature chimiquement antagoniste : ils sont formés d'une tête polaire (affinité pour l'eau) et d'une ou plusieurs chaînes carbonées (affinité pour l'air ou pour l'huile dans d'autres systèmes). Les flèches représentent la tension de surface  $\gamma$  qui agit sur ces interfaces.

## 1.4 Surfaces minimales

Au 18<sup>e</sup> siècle, la notion de surface minimale apparaît pour désigner une surface qui minimise son aire pour des conditions aux bords de la surface fixes. D'abord étudiées dans le domaine des mathématiques, ces surfaces peuvent être très simplement observées en laboratoire et dans nos vies quotidiennes puisque nous pouvons les former sur des structures en fil de fer avec des films de savon. L'action de la tension superficielle minimise la surface de contact du film de savon avec l'air créant ainsi une surface ayant la plus petite aire possible. La particularité des surfaces minimales est que leur courbure moyenne est nulle. Les premières études sur ce sujet ont été réalisées en 1744 par Leonhard Euler qui s'intéressait à un problème mathématique visant à répondre à la question suivante : quelle est la surface la plus petite, parmi toutes les surfaces possibles, reliant deux cercles parallèles [6] ? La solution de ce

problème est une caténoïde qui est décrite par un cosinus hyperbolique [voir Fig 1.7 (a)]. Nous pouvons également citer les travaux réalisés par Joseph-Louis Lagrange en 1755 qui ont mené à l'élaboration de l'équation d'Euler-Lagrange qui est un fondement dans le domaine du calcul variationnel [7]. Plus tard, en 1776, Jean-Baptiste Meusnier déduit de cette équation que les deux courbures principales doivent être égales et de signes opposés afin d'obtenir une courbure moyenne nulle. La variation de la géométrie des points d'ancrage des bords d'une surface permet la découverte de nouvelles surfaces minimales. Nous pouvons citer quelques unes d'entre elles : la surface hélicoïdale (Meusnier 1776), les deux surfaces de Scherk (1834) et la surface d'Enneper (1863) (voir Fig. 1.7). La première forme découverte étant évidemment la surface plane [voir Fig. 1.7(f)]. Ces surfaces attirent également l'attention des

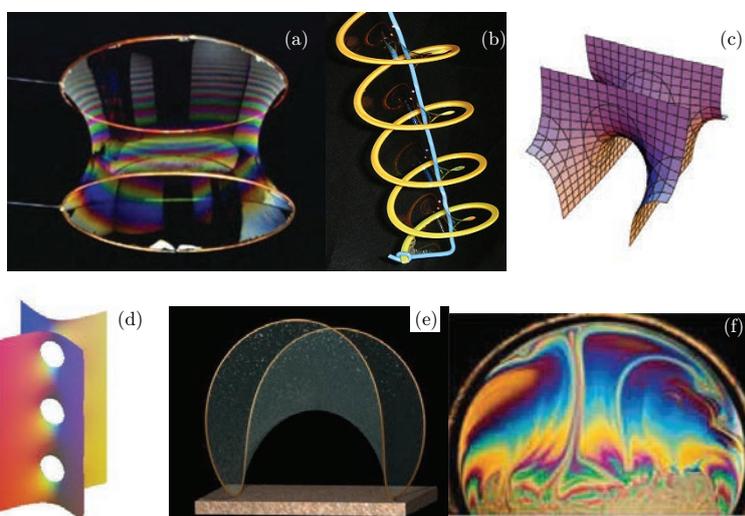


FIGURE 1.7: La figure représente plusieurs surfaces minimales : (a) la caténoïde d'Euler [8], (b) l'hélicoïde de Meusnier [9], (c) et (d) les surfaces de Scherk [10], (e) une surface d'Enneper [11], (f) une surface plane [12].

artistes et des architectes. Il existe par exemple des bâtiments qui sont conçus en s'inspirant de ces formes mathématiques comme la piscine olympique de Pékin ou le stade olympique de Munich que l'on peut voir sur la figure 1.8.

Nous avons mentionné précédemment une surface minimale bien connue de tous : la caténoïde (voir Fig. 1.7 et 1.9). Lorsque nous souhaitons matérialiser une telle surface minimale avec un film de savon, nous utilisons deux anneaux solides connectés par un film liquide. Nous pouvons observer qu'en éloignant les deux anneaux, la caténoïde va évoluer vers une forme plus évasée, le rayon de courbure situé dans un plan parallèle à celui des deux anneaux diminue jusqu'à l'effondrement de la caténoïde. La figure 1.9 nous montre la forme prise par le film liquide pour différentes

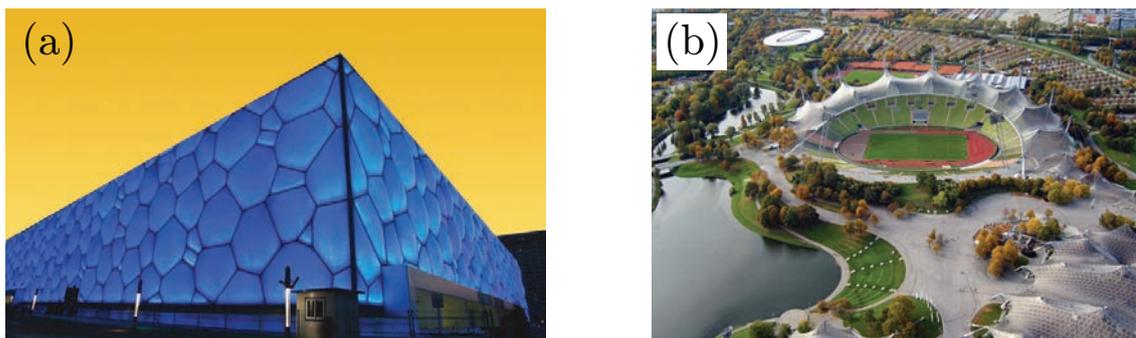


FIGURE 1.8: (a) Photographie de la piscine olympique de Pékin tirée de [13]. (b) Photographie du stade olympique de Munich tirée de [14].

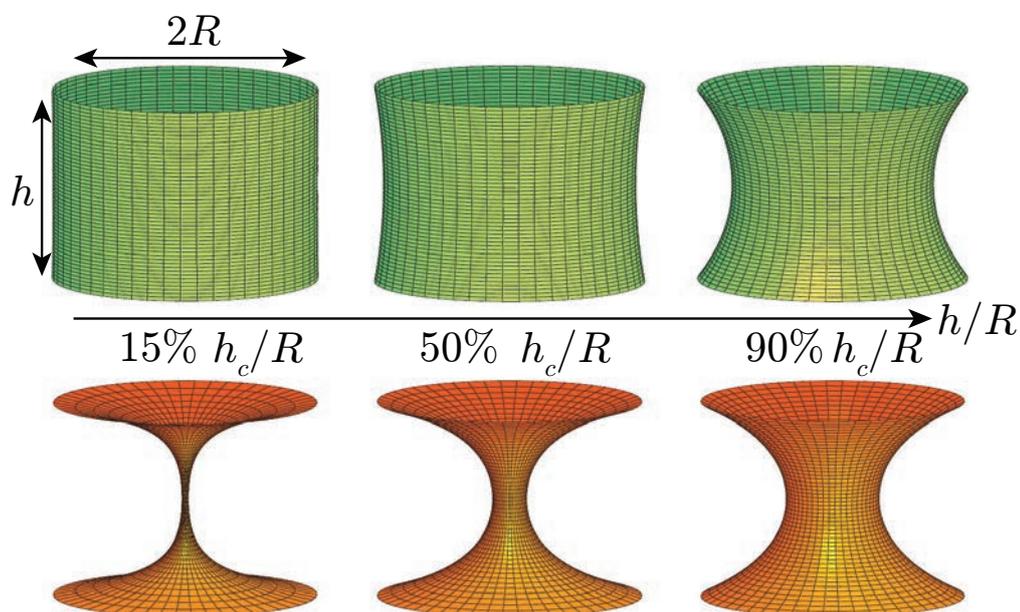


FIGURE 1.9: Figure adaptée de [12] représente en 3D les deux solutions mathématiques de la caténoïde lorsque les anneaux la bordant s'éloignent (l'échelle verticale est dilatée pour plus de clarté). En vert, la caténoïde présente un large cou qui décroît quand la hauteur  $h$  augmente ce qui correspond aux observations expérimentales. En orange, la solution est inverse, le cou s'épaissit lorsque la hauteur augmente; cette forme n'est pas observée expérimentalement.

distances entre les anneaux. Au dessus d'une certaine distance, la caténoïde devient instable et s'effondre pour former deux films plans sur les anneaux. Cette solution est appelée la solution de Goldshmidt. Une étude publiée dans [15], a été réalisée par un ancien doctorant de l'IPR, Louis Salkin, sur la stabilité de la caténoïde formée

par un film de savon dans le cas symétrique (cas que nous venons d'évoquer quand les deux cercles sont de même rayon) et une demi-caténoïde symétrique (formée entre un anneau circulaire et la surface libre d'un bain) (voir Fig. 1.10).

Dans le premier cas bien connu, les deux conditions d'existence de la caténoïde vue expérimentalement sont :

- Le rapport entre le rayon minimal  $a$  à l'axe de révolution  $z$  et le rayon  $R$  des anneaux doit être supérieur à 0.55 : une caténoïde s'effondre lorsque son rayon minimal est inférieur à  $0.55R$ .
- Le rapport entre la distance séparant les deux anneaux  $h$  et le rayon des anneaux doit être inférieur à 1.33. Autrement dit, une caténoïde symétrique s'effondre lorsque la distance entre les deux anneaux est supérieur à  $1.33R$ .

Dans [15], les auteurs ont également étudié l'existence et la stabilité d'une forme que nous utilisons plus loin dans le manuscrit, une demi-caténoïde que nous pouvons matérialiser en extrayant un anneau d'un bain de solution savonneuse parallèlement à la surface libre (voir Fig. 1.10). Il apparaît que le seuil en hauteur d'existence de la surface est exactement la moitié de celui de la caténoïde : la demi-caténoïde symétrique vue entre un bain est un anneau de rayon  $R$  est exactement la moitié de la caténoïde symétrique qui serait portée par les deux anneaux métalliques de même rayon  $R$ . En effet, la hauteur seuil d'instabilité est  $h_c \approx 0.66R$  et le rayon de la forme au niveau de la surface du bain  $a_c \approx 0.55R$ . Comme discuté dans la référence [15], une demi-caténoïde connecte le bain de façon perpendiculaire pour assurer un équilibre mécanique au niveau de la zone de contact bain-film.

## 1.5 Pression de Laplace

Les sujets étudiés durant cette thèse s'articulent autour de différents écoulements qui mettent en scène des bulles et des films liquides. Le saut de pression, survenant à travers une interface fluide-fluide courbe, est un paramètre qui intervient systématiquement dans chacune de ces études en tant que moteur de l'écoulement. Ce type de phénomène est aussi impliqué dans de nombreuses observations faites dans nos vies quotidiennes. Par exemple, lorsque nous soufflons sur un film de savon, nous pouvons créer une bulle qui prend une forme sphérique dont le rayon est directement en relation avec la tension de surface et la différence de pression entre l'air contenu à l'intérieur et celui qui entoure la bulle. Nous allons maintenant dériver l'équation mettant en relation ces paramètres. Dans le cas d'une goutte d'eau en suspension dans l'air, nous pouvons calculer la variation d'énergie  $dW$  à fournir pour augmenter son rayon  $R$  d'une quantité infinitésimale  $dR$  (voir Fig.1.11). La tension de surface ayant une tendance à vouloir contracter la goutte, la pression à l'intérieur  $P_i$  de la goutte sera supérieure à la pression extérieure  $P_e$ . Pour augmenter légèrement le

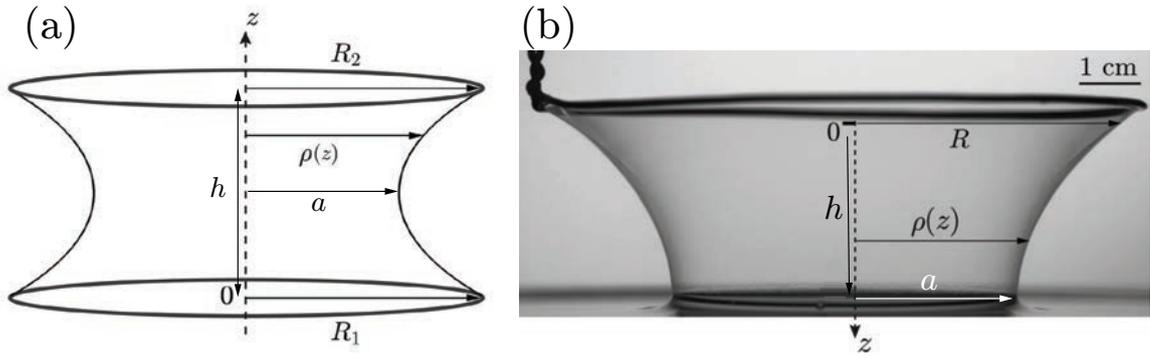


FIGURE 1.10: (a) Schéma représentant une caténoïde d'axe de révolution  $z$ .  $h$  est la distance entre les deux anneaux,  $\rho(z)$  est le rayon de la caténoïde en fonction de la position,  $a$  est le rayon minimal de la caténoïde,  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons des anneaux. Dans le cas d'une caténoïde symétrique  $R_1 = R_2 = R$ . (b) Photographie d'une expérience dans laquelle une surface minimale est formée avec un cadre solide en fil de fer. La demi-caténoïde est obtenue par l'extraction d'un anneau initialement positionné sous la surface libre d'un bain de solution savonneuse.  $h$  est la distance entre l'anneau et la surface du bain,  $\rho(z)$  est le rayon de la caténoïde en fonction de la position,  $a$  est le rayon de la caténoïde à la surface du bain,  $R$  est le rayon de l'anneau. Les deux illustrations sont adaptées de [15].

rayon de la goutte d'une quantité  $dR$  le travail exercé s'écrit :

$$dW = \gamma dS - (\Delta P) dV \quad (1.3)$$

où  $dS = 8\pi R dR$  est la variation de la surface,  $dV = 4\pi R^2 dR$  est la variation du volume et  $\Delta P$  est la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la goutte  $\Delta P = P_i - P_e$ . Dans notre raisonnement la pression  $P_e$  est la pression atmosphérique  $P_0$ . A l'équilibre mécanique  $dW = 0$ , nous pouvons alors écrire la loi de Young-Laplace<sup>1 2</sup> :

$$\Delta P = P_i - P_0 = \frac{2\gamma}{R}. \quad (1.4)$$

Comme nous le verrons dans nos études, puisqu'un film de savon est composé de deux interfaces liquide-air (voir Fig. 1.6), la pression de Laplace s'écrit  $4\gamma/R$  dans le cas d'une bulle. L'équation (1.4) montre que la pression à l'intérieur de la

1. Thomas Young est un physicien anglais né en 1773 qui est particulièrement connu pour sa définition du module d'Young qui est un coefficient permettant de caractériser l'élasticité d'un matériau isotrope mais également pour son expérience dans le domaine de l'optique (les fentes de Young) qui porte sur les interférences de rayons lumineux issus d'une source unique.

2. Pierre-Simon de Laplace est un mathématicien et astronome français né en 1749 qui était réputé pour ses travaux sur le calcul des probabilités et la mécanique céleste.

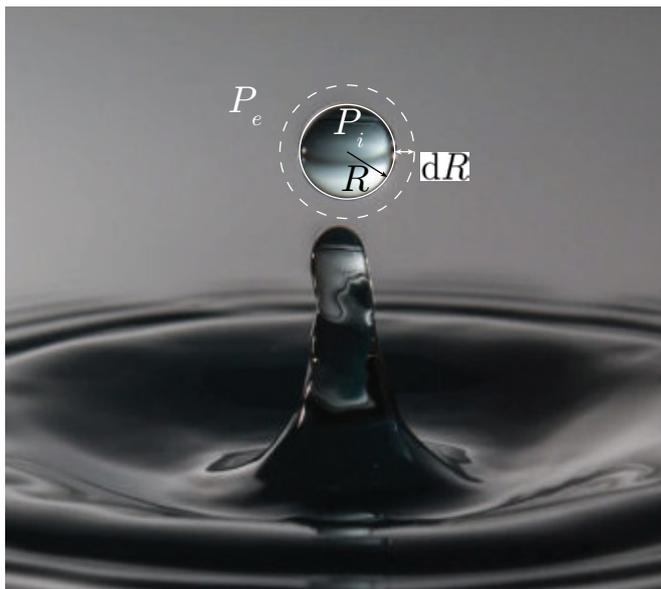


FIGURE 1.11: Image d'une goutte sphérique formée par la déstabilisation d'un jet liquide qui émerge de la surface d'un bain.  $P_e$  et  $P_i$  sont respectivement la pression l'air autour de la goutte et la pression du liquide à l'intérieur.  $R$  est le rayon de la bulle et  $dR$  représente une augmentation infinitésimale du rayon.

---

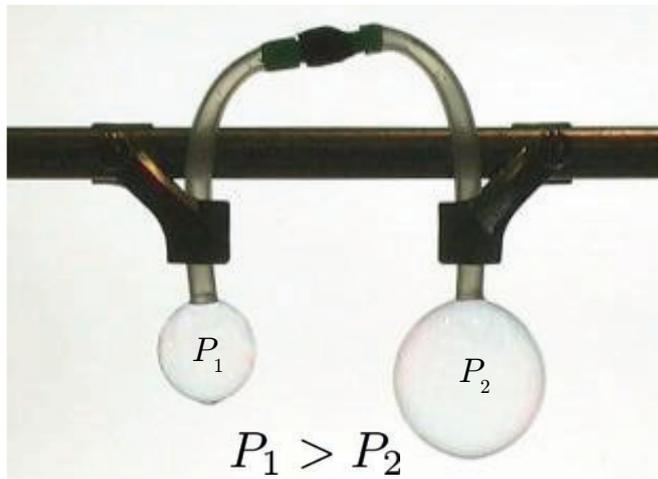


FIGURE 1.12: Photographie d'une expérience dans laquelle deux bulles de rayons différents sont positionnées à chaque extrémité d'un tube. D'après la loi de Young-Laplace d'équation (1.4), la petite bulle ayant une pression interne supérieure ( $P_1 > P_2$ ) se vide dans la plus grande lorsque le robinet est ouvert [16].

---

goutte augmente lorsque le rayon  $R$  diminue. Pour nous en convaincre, nous pouvons réaliser une expérience classique dont le dispositif expérimental se compose de deux

bulles de savon de tailles différentes placées à chaque extrémité d'un tube (voir Fig. 1.12). Pour réaliser le montage, il convient de positionner un robinet sur le tube pour contrôler l'écoulement de l'air entre les deux bulles. En ouvrant le robinet, nous pouvons observer que la petite bulle se dégonfle et que l'air qui, présente en son sein, s'écoule dans le tube et fait grossir la bulle possédant le plus grand rayon initial. Cette observation est la conséquence de la différence de pression entre les deux bulles engendrée par la différence de leurs rayons. Dans la figure 1.12, la pression  $P_1$  dans la bulle la plus petite est plus grande que la pression  $P_2$  dans la bulle de plus grand rayon (voir Fig. 1.12). L'air s'écoule donc à travers le tube de la bulle la plus petite vers la bulle la plus grande.

## 1.6 Ménisque et ascension capillaire

Nous pouvons observer les effets de la tension de surface dans de multiples phénomènes de nos vies de tous les jours. Dans un simple verre d'eau nous pouvons par exemple remarquer une montée de liquide contre la paroi du verre. Cette région courbe d'un liquide s'appelle un ménisque et s'étend sur une longueur caractéristique que nous allons définir. Nous avons vu précédemment qu'un liquide minimise sa surface de contact avec une phase gazeuse afin d'être dans un état énergétique favorable. Cependant, un liquide mouillant possède également une affinité avec un solide sur lequel il peut s'étaler ; nous discutons du mouillage d'un liquide avec un solide dans la section 1.7. Cette ascension de liquide le long de la paroi prend une forme courbe qui marque la transition entre la dominance de la force de gravité au profit de la force capillaire (voir Fig. 1.13). La longueur caractéristique d'un ménisque est appelée longueur capillaire et nous la notons  $\kappa^{-1}$  (voir Fig. 1.13). La courbure révèle la présence d'une différence de pression entre les deux phases liquide et gazeuse. Nous estimons que la pression de Laplace est de l'ordre de  $\Delta P = \gamma/\kappa^{-1}$ . En comparant cette quantité avec la pression hydrostatique exercée à une profondeur  $\kappa^{-1}$ ,  $\rho_\ell g \kappa^{-1}$ , nous obtenons une expression de la longueur capillaire :

$$\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_\ell g}} \quad (1.5)$$

où  $\rho_\ell$  est la masse volumique du liquide et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Typiquement, la valeur prise par la longueur capillaire dans le cas de l'eau à température ambiante est de 2.7 mm ( $\gamma_{eau-air} = 72 \text{ mJ.m}^{-2}$ ,  $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$  et  $\rho_\ell = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ ). Pour les huiles, elle peut prendre des valeurs légèrement inférieures, typiquement en dessous de 2 mm. Par contre, on pourrait s'attendre à trouver les longueurs capillaires beaucoup plus grande pour d'autres liquides comme le mercure comme nous avons vu que la tension de surface mercure-air est bien plus grande (près de 500

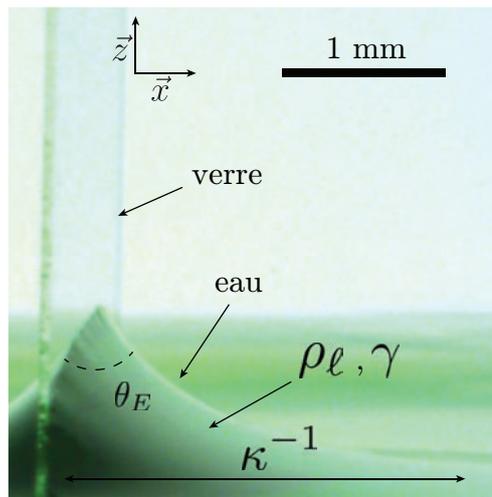


FIGURE 1.13: Photographie, [17], représentant le ménisque formé par l'eau sur une paroi en verre dans l'air. Dans cette figure,  $\kappa^{-1}$  est la longueur capillaire,  $\rho_l$  est la masse volumique du liquide,  $\gamma$  la tension de surface eau-air et  $\theta_E$  est l'angle d'équilibre entre la paroi en verre et l'interface eau-air.

mN/m) que celle de l'eau pure. Mais en fait, dans ce cas encore la longueur capillaire reste millimétrique car la grande tension de surface est compensée par une grande masse volumique ( $13.6 \text{ g.cm}^{-3}$ ).

Nous pouvons déterminer le profil mathématique  $z(x)$  d'un ménisque;  $z$  est l'altitude de la surface libre et  $x$  est la direction horizontale comme le montre la figure 1.13. Pour cela, nous écrivons l'égalité entre les pressions capillaire  $\gamma\mathcal{C}$  et hydrostatique  $\rho_l g z$  :

$$P_0 - \gamma\mathcal{C} = P_0 - \rho_l g z \quad (1.6)$$

où  $\mathcal{C} \approx d^2z/dx^2$ . On obtient alors l'équation différentielle donnant le profil du ménisque :

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{z}{\kappa^{-2}} \approx 0. \quad (1.7)$$

La résolution de l'équation (1.7) permet d'écrire :

$$z(x) \approx z_0 \exp\left(-\frac{x}{\kappa^{-1}}\right). \quad (1.8)$$

Le profil mathématique d'un ménisque est donc une fonction exponentielle décroissante avec une constante de longueur donnée par la longueur capillaire.

Lorsqu'on réduit par la pensée la section d'un verre jusqu'à ce que le rayon du tube obtenu soit inférieur à la longueur capillaire, un liquide peut se propager spontanément sur des grandes longueurs défiant ainsi la pesanteur [voir Fig. 1.14(a)]. En

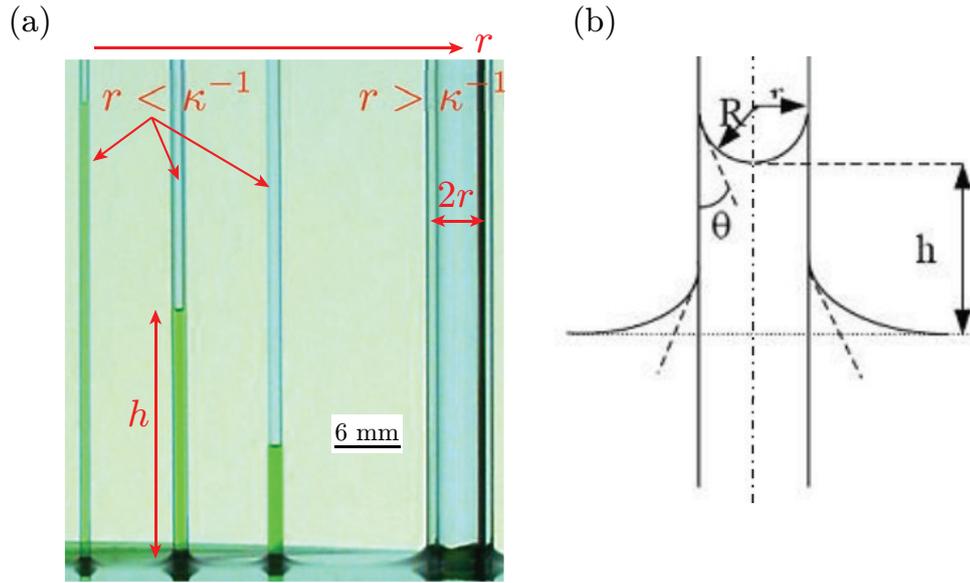


FIGURE 1.14: (a) Photographie, [17], qui représente le phénomène d'ascension capillaire de l'eau dans des tubes capillaires cylindriques de différents rayons. On observe que le liquide monte d'autant plus que le rayon du capillaire diminue. Le liquide n'imprègne pas le tube de droite dont le rayon est plus grand que la longueur capillaire. (b) Schéma répertoriant les différents observables de l'ascension capillaire.

immergeant l'extrémité d'un tube dans de l'eau, nous pouvons voir le liquide monter dans le tube possiblement sur plusieurs centimètres (voir Fig. 1.14), ce phénomène est appelé ascension capillaire.

Déterminons la hauteur de l'ascension du liquide dans un tube cylindrique de rayon  $r$  en comparant la pression capillaire et la pression hydrostatique comme dans le cas d'un ménisque. Cette égalité s'écrit :

$$P_0 - \gamma \mathcal{C} = P_0 - \rho_l g h \quad (1.9)$$

où  $\mathcal{C} = 2/R = 2 \cos \theta_E / r$ ,  $h$  est la hauteur du liquide,  $\theta_E$  est l'angle d'équilibre que fait le liquide avec le substrat et  $R$  le rayon de courbure du ménisque [voir Fig. 1.14(b)]. Finalement l'équation de la hauteur d'équilibre de l'ascension s'écrit :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta_E}{\rho_l g r} \quad (1.10)$$

Cette équation est appelée loi de Jurin<sup>3</sup>, elle permet de prédire la hauteur de montée à l'équilibre d'un liquide mouillant dans un tube capillaire.

3. Loi énoncée par le médecin anglais James Jurin au 18<sup>e</sup> siècle.

## 1.7 Mouillage

Un aspect important des phénomènes capillaires (déjà brièvement mentionné dans la section précédente) est le mouillage d'un liquide avec un substrat solide. C'est une situation plus compliquée que celles discutées auparavant car trois phases interagissent alors entre elles : le liquide, le gaz et le solide. Une goutte d'un liquide posée sur un substrat solide aura une préférence à s'étaler plus ou moins en fonction de l'affinité entre les deux phases en présence du gaz qui les entoure. Nous discutons ici d'effets de mouillage sur des gouttes suffisamment petites pour négliger les effets de la gravité. La goutte forme alors une calotte sphérique et on appelle angle de contact l'angle d'équilibre  $\theta_E$  que forme la goutte avec le substrat (voir Fig. 1.15). Le terme mouillage total désigne la situation d'une goutte dont l'angle de contact est égal à  $0^\circ$ .

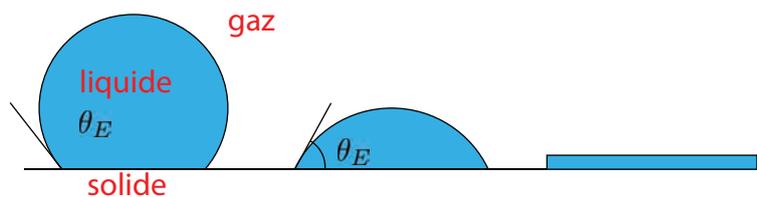


FIGURE 1.15: Schéma représentant l'évolution de l'angle de contact d'équilibre  $\theta_E$  pour différentes situations de mouillage. La dernière goutte, à droite, montre la situation en cas de mouillage total.

---

Au niveau de la zone de contact entre le pied de la goutte et le substrat nous observons trois tensions de surface  $\gamma_{G/S}$ ,  $\gamma_{L/G}$  et  $\gamma_{L/S}$  respectivement les tensions de surface gaz-solide, liquide-gaz et liquide-solide comme définis sur la figure 1.16. La région de l'espace où se rejoignent les trois phases solide-gaz-liquide est appelée la ligne triple ou ligne de contact. Un paramètre d'étalement  $S$ , qui correspond à la différence en énergie de surface entre un solide sec et un solide mouillé, peut être calculé pour prédire la capacité d'un liquide à mouiller le substrat :

$$S = \gamma_{G/S} - (\gamma_{L/S} + \gamma_{L/G}). \quad (1.11)$$

Dans le cas où  $S > 0$ , la situation favorable au système est le mouillage total. Dans le cas d'un mouillage partiel,  $S < 0$ , la goutte forme alors une calotte sphérique dont l'angle de contact à l'équilibre  $\theta_E$  (voir Fig. 1.16) peut être déterminé par la loi de

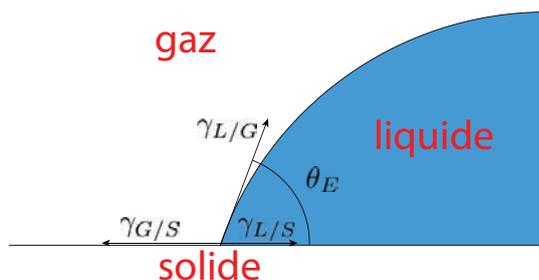


FIGURE 1.16: Schéma définissant les différentes tensions de surface au niveau d'une ligne triple où se rencontrent les trois phases.  $\gamma_{G/S}$ ,  $\gamma_{L/G}$  et  $\gamma_{L/S}$  sont respectivement les tensions de surface gaz-solide, liquide-gaz et liquide-solide.

Young-Dupré<sup>4</sup> :

$$\cos \theta_E = \frac{\gamma_{G/S} - \gamma_{L/S}}{\gamma_{L/G}} \quad (1.12)$$

La valeur de l'angle pourra donner également un indication sur la capacité du liquide à mouiller le substrat. Deux cas sont alors possibles :

- Si  $\theta_E < \frac{\pi}{2}$  le liquide est dit « mouillant ».
- Si  $\theta_E > \frac{\pi}{2}$  le liquide est dit « non-mouillant ».

Nous pouvons utiliser la loi de Young-Dupré dans l'équation (1.11) pour écrire le paramètre d'étalement sous la forme :

$$S = \gamma_{L/G}(\cos \theta_E - 1). \quad (1.13)$$

Pour des gouttes plus grosses que la longueur capillaire, la gravité joue un rôle non négligeable sur la forme d'une goutte. Nous pouvons d'ailleurs observer directement les effets puisque, lorsqu'une goutte est suffisamment grosse, elle aura tendance à s'aplatir par l'effet de la gravité et aura plutôt l'apparence d'une flaque comme le montre la figure 1.17 [17]. Nous pouvons également observer ce phénomène sur les bulles de savons. En effet, l'étude de Cohen et al. sur les bulles géantes montre l'existence d'une taille seuil au-delà de laquelle la gravité domine sur les effets capillaires (voir Fig. 1.18) [18].

4. Athanase Dupré est un mathématicien et physicien français du 19<sup>e</sup> siècle notamment reconnu pour ses travaux dans le domaine de la thermodynamique.



FIGURE 1.17: Photographie de gouttes de différentes tailles représentant l'impact de la gravité suivant que le rayon de la goutte est supérieur ou inférieur à la longueur capillaire [17]. Nous pouvons voir la plus grosse des gouttes s'aplatir sous l'effet de la gravité alors que les autres gouttes ont la forme d'une calotte sphérique.

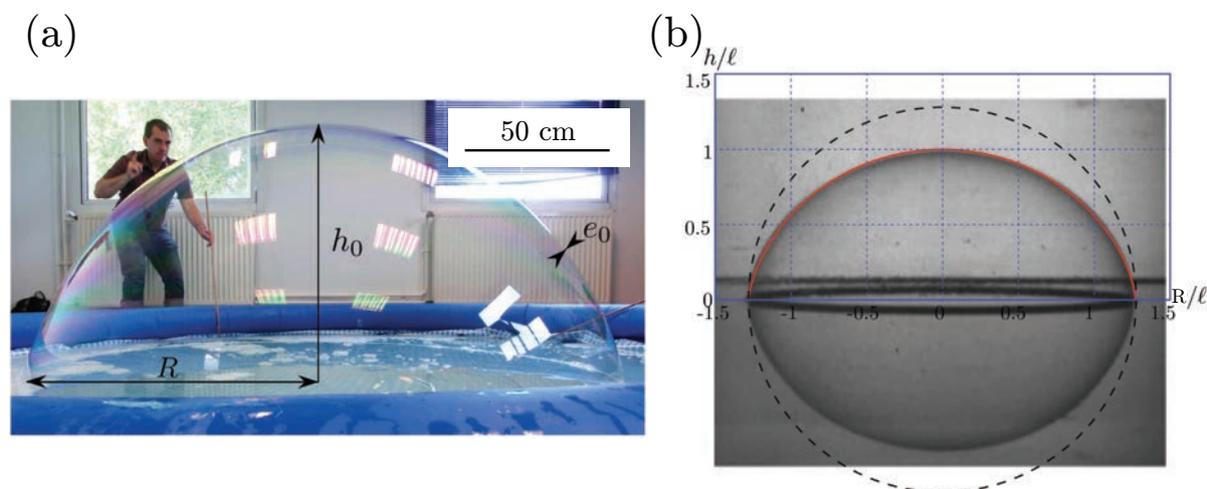


FIGURE 1.18: La photographie (a) évoque une bulle interfaciale géante.  $h_0$  est la hauteur initiale,  $R$  est le rayon et  $e_0$  est l'épaisseur initiale de la bulle. En (a),  $R$  et  $h_0$  sont respectivement un peu supérieur et légèrement inférieur au mètre. La photographie (b) représente une bulle interfaciale (avec sa symétrie par rapport à la surface) de 20 cm de diamètre aplatie par la gravité. La ligne en pointillé est un cercle et la ligne rouge représente la forme théorique prédite par le modèle des auteurs.  $h$  est la hauteur de la bulle,  $R$  est le rayon et  $\ell = a^2/e_0$  est un paramètre de l'expérience où  $a = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$  ( $\gamma$  la tension de surface air-liquide,  $\rho$  la masse volumique et  $g$  l'accélération de pesanteur). Les deux photographies sont tirées de [18].

## 1.8 Effet Marangoni

L'effet Marangoni<sup>5</sup> est fréquemment observé dans les expériences pour lesquelles des effets de tension de surface sont importants. Les surfactants présents dans un liquide jouent un rôle principal dans la formation de l'effet Marangoni. Le phénomène en question est un écoulement liquide provoqué par un gradient de tension de surface aux abords d'une interface fluide-fluide. Il existe plusieurs origines à ce phénomène comme par exemple une variation de la température ou une inhomogénéité locale de la concentration en surfactants. L'histoire veut que Carlo Marangoni ait découvert cet effet en observant un phénomène bien connu maintenant appelé les larmes de vin. Ce phénomène apparaît sur les parois d'un verre d'alcool, typiquement du vin, et a comme origine la variation de la tension de surface d'une interface liquide-air. Le vin est idéalement un mélange d'eau et d'éthanol. Le ménisque formé par le vin sur la paroi du verre forme un film liquide très fin le long de la paroi qui augmente le taux d'évaporation de l'alcool par rapport au centre du verre (voir Fig 1.19). La diminution d'éthanol dans le ménisque a pour conséquence l'augmentation locale de la tension de surface et la montée du liquide au niveau de la ligne triple du fait du gradient de tension de surface généré (voir Fig. 1.19). Par la suite, des gouttes se forment et coulent le long de la paroi par l'action de la gravité.

Cet effet peut être utilisé dans des processus industriels, notamment dans la fabrication de wafers de silicium<sup>6</sup>. La majorité des procédés de traitement de surface des wafers sont réalisés dans des phases liquides qui sont souvent aqueuses. Malheureusement les résidus d'eau sur un wafer peuvent endommager les composants d'un circuit. La pulvérisation d'alcool sur de telles surfaces permet de créer un gradient de tension superficielle empêchant l'humidité de rester sur la surface. En d'autres mots, l'eau est poussée par l'effet Marangoni créé par le gradient de surface [19].

## 2 Ecoulement de fluides : Equation de Navier-Stokes

Nous nous intéressons ici à la modélisation de l'écoulement d'un fluide Newtonien monophasique. L'hypothèse du milieu continu<sup>7</sup> permet d'envisager les paramètres du fluide (par exemple la vitesse, la pression, la masse volumique, la température) comme des champs scalaires et vectoriels variant avec le temps. Il existe deux manières de concevoir l'écoulement d'un fluide. Dans la description lagrangienne nous

5. Carlo Marangoni est un physicien italien né en 1840 qui a notamment étudié les effets de la tension de surface.

6. Un wafer est une tranche très fine d'un matériau semi-conducteur servant à la fabrication de microstructures électroniques comme des circuits intégrés. C'est également un élément de base de la production de puces microfluidiques.

7. Cette hypothèse permet de considérer que toutes les propriétés d'un matériau solide ou liquide sont dérivables.

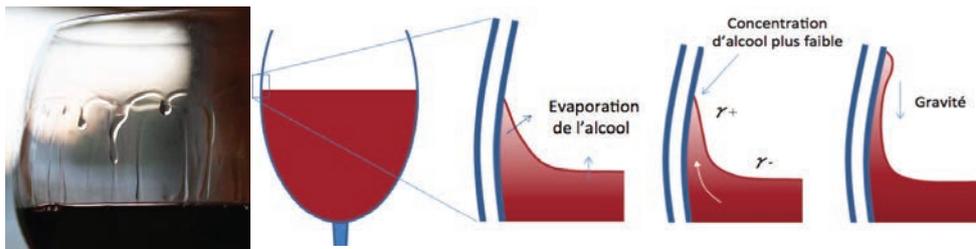


FIGURE 1.19: La photographie tirée de [20] représente les larmes de vin visibles sur les parois d'un verre. Le schéma est adapté de [21], il décrit les différentes étapes de la formation des larmes de vin.

prenons le parti de suivre les paramètres d'une particule fluide<sup>8</sup> qui s'écoule. A l'inverse, la description eulérienne consiste à analyser les propriétés du liquide dans une zone fixe de l'écoulement par laquelle transite plusieurs particules fluides. Pour ces deux descriptions, la forme locale de la conservation de la masse appliquée à une particule fluide et s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.14)$$

Cette équation est également appelée équation de continuité ;  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $\vec{v}$  est le champ de vitesse et  $t$  est le temps. Nous considérons tous les fluides étudiés dans cette thèse comme incompressibles, la masse volumique  $\rho$  n'est alors plus fonction de l'espace et du temps. L'équation précédente se ramène donc à une forme simplifiée :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.15)$$

Le bilan de la quantité de mouvement appliqué à une particule fluide est appelé principe fondamental de la dynamique des milieux continus et s'écrit sous la forme de l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}, \quad (1.16)$$

où  $P$  est la pression,  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide et  $\vec{f}$  représente les forces volumiques.  $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  correspond à la dérivée particulaire, elle définit ici la variation du champ scalaire de la vitesse  $\vec{v}$  en fonction du temps et de la position de la particule.

Prenons le cas d'un écoulement monophasique et incompressible d'un fluide dans

8. Une particule fluide est un volume élémentaire de matière dont la taille est caractéristique de l'échelle à laquelle nous étudions le milieu continu.

les conditions d'un régime établi permanent et laminaire<sup>9</sup> qui est caractérisé par un nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e$  faible (nous définissons dans la section suivante le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e$  avec plus de détails). L'absence de forces volumiques ( $\vec{f} = \vec{0}$ ) autres que les forces de pression nous permet de réduire l'équation de Navier-Stokes à la forme de l'équation de Stokes, une égalité entre les forces volumiques de pression et de dissipation visqueuse :

$$\eta \Delta \vec{v} = -\vec{\nabla} P. \quad (1.17)$$

Nous utilisons une solution de l'équation de Stokes notamment dans le cas d'un écoulement visqueux d'air dans un tube cylindrique **lors de l'étude du mouvement spontané de films liquides dans des entonnoirs** (voir Chap. 4). C'est l'équation de Poiseuille qui établit la relation entre la perte de charge<sup>10</sup> lors de l'écoulement d'un fluide dans une canalisation et la viscosité dynamique du fluide :

$$\Delta P = \frac{8\eta\ell}{\pi R^4} Q, \quad (1.18)$$

où  $\Delta P$  est la différence de pression entre deux points de la canalisation,  $\eta$  est la viscosité du fluide,  $\ell$  est la longueur entre deux points de la canalisation,  $R$  est le rayon de la canalisation et  $Q$  est le débit volumique de l'écoulement.

Dans l'hypothèse de l'écoulement d'un fluide dit « parfait », c'est-à-dire un fluide dont on peut s'affranchir des effets visqueux (cas inviscide  $\eta = 0$ ), l'écoulement ne génère pas de dissipation. L'équation de Navier-Stokes se réduit alors à l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \vec{f}. \quad (1.19)$$

Le théorème de Bernoulli est établi dans le cas d'un écoulement permanent et en présence uniquement des forces de pression. Son équation s'obtient par l'intégration de l'équation d'Euler le long d'une ligne de courant :

$$\Delta P + \frac{1}{2}\rho v^2 = C^{ste} \quad (1.20)$$

**Nous utilisons cette notion notamment lors de l'étude de la vidange d'une bulle** (voir Chap. 3).

---

9. Régime d'écoulement d'un fluide dans lequel la phase peut être décomposée en couches parallèles.

10. La perte de charge est la différence de pression entre deux zones d'une canalisation.

### 3 Nombres adimensionnés

En mécanique des fluides, les nombres adimensionnés sont régulièrement utilisés afin de comparer l'importance de deux phénomènes dans une expérience. Ils se révèlent particulièrement utiles lorsque des résultats expérimentaux obéissent à des lois d'échelle. Ils s'écrivent sous la forme d'un ratio des paramètres entrant en jeu dans le problème étudié. Nos études font intervenir les **six grandeurs** suivantes : une vitesse d'un liquide  $v$ , une longueur caractéristique  $\ell$ , une masse volumique  $\rho$ , l'accélération de pesanteur  $g$ , la viscosité dynamique  $\eta$  et la tension superficielle  $\gamma$ . Ces grandeurs sont construites en utilisant **trois unités** fondamentales du système international : le mètre, le kilogramme et la seconde.

D'après le théorème Buckingham  $\Pi$ , on peut alors construire **6-3=** trois nombres sans dimensions caractérisant les problèmes étudiés dans cette thèse. Par exemple les nombres de Bond  $\mathcal{B}_o$ , capillaire  $\mathcal{C}$  et de Reynolds  $\mathcal{R}_e$  que nous allons définir dans les paragraphes qui suivent. En fait, comme nous pouvons construire des nombres à partir de combinaisons de ces trois quantités adimensionnées, nous discuterons aussi du nombre de Weber  $\mathcal{W}_e$ , pertinent pour nos expériences, que nous pouvons définir comme le produit du nombre capillaire et de celui de Reynolds.

#### 3.1 Nombre de Bond $\mathcal{B}_o$

Le nombre de Bond compare les forces de gravité et de tension de surface fluide-fluide. Il est défini par l'expression :

$$\mathcal{B}_o = \frac{\rho g \ell^2}{\gamma} \quad (1.21)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $g$  est l'accélération de pesanteur,  $\ell$  la longueur caractéristique du système et  $\gamma$  la tension de surface fluide-fluide. Il peut aussi se trouver sous une autre forme qui permet de comparer directement la longueur caractéristique du système  $\ell$  à la longueur capillaire  $\kappa^{-1}$ . Il s'écrit alors :

$$\mathcal{B}_o = \left( \frac{\ell}{\kappa^{-1}} \right)^2. \quad (1.22)$$

Il s'utilise notamment dans les études portant sur les gouttes. Concrètement, si la taille de la goutte est supérieure à la longueur capillaire  $\ell > \kappa^{-1}$  alors les effets de la gravité dominant sur les effets capillaires  $\mathcal{B}_o > 1$ . Comme nous avons pu le mentionner avant, si  $\ell > \kappa^{-1}$ , une goutte ne conservera pas une forme de calotte sphérique et aura tendance à s'aplatir [22]. Dans le cas où ce sont les effets capillaires qui dominant  $\ell < \kappa^{-1}$  et  $\mathcal{B}_o < 1$ .

### 3.2 Nombre de Weber $\mathcal{W}_e$

Le nombre de Weber compare les forces d'inertie et de tension superficielle. Il s'écrit :

$$\mathcal{W}_e = \frac{\rho v^2 \ell}{\gamma} \quad (1.23)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $v$  est la vitesse du liquide,  $\ell$  la longueur caractéristique du système et  $\gamma$  la tension de surface fluide-fluide. Ce nombre permet par exemple de caractériser l'instabilité de l'écoulement d'un fluide dans un autre [23]. En ouvrant doucement un robinet nous pouvons observer un premier régime d'écoulement dit « goutte à goutte » qui se change en jet continu lorsque l'on continue à ouvrir le robinet. Le nombre de Weber permet notamment d'indiquer la transition entre ces deux régimes. Lorsque les effets capillaires dominant ( $\mathcal{W}_e < 1$ ), nous observons l'écoulement de gouttes. A l'inverse pour un nombre de Weber  $\mathcal{W}_e > 1$ , le jet d'eau devient continu sous la forme d'un jet [24, 25].

### 3.3 Nombre capillaire $\mathcal{C}$

Le nombre capillaire compare les effets visqueux et capillaires. Il est défini par :

$$\mathcal{C} = \frac{\eta v}{\gamma}. \quad (1.24)$$

Comme mentionné précédemment,  $\eta$  est la viscosité dynamique du fluide,  $v$  est la vitesse du liquide et  $\gamma$  la tension de surface fluide-fluide. Ce nombre apparait notamment dans les études qui portent sur la fragmentation des gouttes. Prenons par exemple une goutte d'un fluide de taille  $\ell$  immergée dans un autre fluide non miscible comme une goutte d'huile dans de l'eau. Si l'eau est soumise à un écoulement, la goutte d'huile subit une contrainte de cisaillement  $\eta v / \ell$ ;  $v$  est la vitesse moyenne de l'eau et  $\eta$  sa viscosité dynamique. La force de cisaillement appliquée vaut  $\eta \ell v$ , ce qui correspond à la forme d'une loi de Stokes. Le nombre capillaire compare cette force qui tend à modifier la forme sphérique de la goutte à la force capillaire qui s'y oppose  $\gamma \ell$ .

### 3.4 Nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$

Il est défini par :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\rho v \ell}{\eta} \quad (1.25)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $\ell$  la longueur caractéristique du système,  $\eta$  est la viscosité dynamique et  $v$  est la vitesse du liquide. Il s'obtient en comparant les termes

visqueux et inertiels de l'équation de Navier-Stokes (Eq. 1.25). Ce nombre a une grande importance en mécanique des fluides puisqu'il permet d'identifier différents modes d'écoulement d'un fluide en fonction de sa valeur. A faible nombre de Reynolds (dominance des forces visqueuses), nous pouvons observer des écoulements dit « rampants » ou laminaires. Les particularités de ces écoulements résident dans le fait que l'ensemble du fluide s'écoule dans la même direction, les variations du champ de vitesse restent très localisées et les effets dissipatifs de la viscosité sont très prononcés. Le second mode d'écoulement à haut nombre de Reynolds (dominance des forces inertielles) fait apparaître des turbulences dans le fluide.

## 4 Matériels et méthodes

Après avoir abordé dans la partie précédente quelques principes fondamentaux de la matière molle, nous présentons ici différentes méthodes de mesure de deux propriétés physiques d'un fluide cruciales dans nos études telles la viscosité dynamique d'un fluide et la tension de surface. L'objectif de cette section est d'établir les concepts de mesure de chacune de ces grandeurs en utilisant les notions de physiques définies précédemment. D'une part, nous allons nous intéresser à deux méthodes de rhéométrie pour mesurer la viscosité dynamique d'un fluide. Ces méthodes sont basées sur l'utilisation d'une part d'un viscosimètre à tube capillaire et d'autre part d'un rhéomètre rotatif. Nous présentons ensuite une technique de tensiométrie pour mesurer la tension de surface fluide-fluide : la méthode de la goutte pendante. Ces méthodes que nous présentons ici sont utilisées régulièrement en laboratoire. Une dernière partie portera sur la méthode de mesure d'épaisseur de films liquides par interférométrie.

### 4.1 Rhéométrie

La rhéologie est un domaine d'étude visant à caractériser la façon dont les fluides s'écoulent sous l'action d'une contrainte mécanique. Comme nous pouvons le voir sur la figure 1.20, les méthodes de mesure de la viscosité sont très variées [26], nous pouvons citer par exemple les viscosimètres à corps chutant ou à corps vibrant, à tube capillaire ou encore à rotation. Nous allons nous intéresser aux deux dernières méthodes puisque nous avons pu utiliser un rhéomètre à rotation pour mesurer la viscosité dynamique des liquides utilisés dans nos expériences.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
Translation	Capillaire (écoulement laminaire). Loi de Poiseuille	Type pipette.....	R	Swearingen (1942)	Huiles + gaz	270		
		Charge de mercure	Variable.....	A	Michels (1931)	Gaz	1 000	
			Constante.....	A	Hyde (1920)	Huiles	1 000	
		Index (piston) de mercure	.....	R	Boyd (1932)	Gaz	200	
			Circulation	Bouteilles.....	A	Wildhagen (1923)	»	200
		Compresseurs.....		A	Golubev (1944)	»	800	
		Corps en chute. Loi de Stokes	Rapport des diamètres	$\geq 1$ .....	A	Suge Y. (1932)	Huiles	2 000
				Guidé.....	R	Bridgman (1925)	Liquides divers	12 000
			$\neq 1$	Non guidé....	R	Van Wijk (1940)	»	1 500
				Excentrée....	R	Weber (1947)	Huiles	1 000
Palette tombant autour d'une charnière.....	.....	R	Bridgman (1949)	Alcools, pentane	30 000			
Rotation	Loi de Couette	Continue. Cylindres coaxiaux...	A	Dow (1938)	Huiles	3 000		
	Loi de Coulomb	Alternative. Disque oscillant....	A	Gonikberg (1947)	Gaz	1 000		
Rotation + Translation	-	Bille roulante dans un cylindre incliné.....	R	Hersey (1928) Dow (1935)	Huiles »	4 000 4 000		

FIGURE 1.20: Cette liste tirée de [26] répertorie différentes méthodes de mesure de la viscosité avant 1950. La colonne 1 indique le mouvement utilisé dans la mesure, en colonne 2 la loi qui régie l'écoulement, en colonne 3 les caractéristiques des appareils, en colonne 4 le type de mesure : relatif ou absolu, colonne 5 les auteurs et la date de publication de leurs travaux, colonne 6 l'état du fluide étudié, colonne 7 la pression maximale de l'étude.

#### 4.1.1 Viscosimètre à tube capillaire / viscosimètre de Ostwald

Le viscosimètre capillaire se distingue par la simplicité de son dispositif expérimental et une utilisation facile à pression atmosphérique pour mesurer la viscosité dynamique  $\eta$  d'un liquide. Cette technique permet d'obtenir une valeur relative, il faudra donc utiliser une solution étalon de comparaison. Là encore, la figure 1.20 nous montre qu'il existe plusieurs types de viscosimètre capillaire. Il s'agit d'établir un écoulement du liquide à caractériser dans un tube de section circulaire dont la taille est inférieure à la longueur capillaire du liquide. La vitesse de cet écoulement étant très faible, il est possible d'établir l'équation de Poiseuille. Nous allons prendre pour exemple le viscosimètre d'Ostwald<sup>11</sup> pour illustrer ceci. Comme le montre la figure 1.21, ce type de viscosimètre a la forme d'un tube en U a section variable. Le principe est de faire couler un volume  $V$  le liquide à travers un tube capillaire de rayon  $r$  et de hauteur  $\ell$ . Le volume de liquide est contenu dans un réservoir de forme sphérique de rayon  $R$  marqué par deux graduations  $A$  et  $B$  surmontant le tube capillaire. Le volume de liquide contenu initialement dans le réservoir se vide avec le temps jusqu'à atteindre la seconde graduation  $B$ . Le débit de l'écoulement d'un

11. Friedrich Wilhelm Ostwald est un chimiste russe né en 1853 qui a reçu le prix Nobel de chimie en 1909 pour ces travaux portant sur la catalyse.

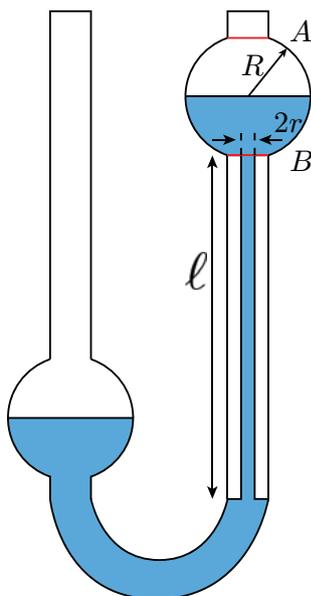


FIGURE 1.21: Schéma représentant le viscosimètre à capillaire de Ostwald. Le réservoir de rayon  $R$  positionné au dessus du tube capillaire (à droite) est rempli d'un fluide qui coule vers le second réservoir (à gauche). Le temps que met le volume contenu dans le premier réservoir à passer de la graduation  $A$  à  $B$  peut être directement relié à la viscosité dynamique du fluide. Le tube capillaire de longueur  $\ell$  et de rayon  $r$  peut être thermiquement régulé et ainsi obtenir une mesure de la viscosité pour différentes températures.

---

fluide Newtonien dans une conduite est régi par l'équation de Poiseuille et s'écrit :

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi r^4}{8\eta\ell} \Delta P \quad (1.26)$$

où  $\Delta P$  est la différence de pression entre l'entrée et la sortie du tube capillaire et  $\eta$  est la viscosité. Si nous intégrons cette équation sur le temps  $t$  [27], il est possible de la réécrire sous la forme :

$$\int_0^{t_0} \Delta P dt = \frac{8\eta\ell}{\pi r^4} V \quad (1.27)$$

où  $t_0$  est le temps que met le volume  $V$  à couler à travers le tube capillaire. Comme l'entrée du tube capillaire est proche de la surface nous approximations la pression à l'entrée du tube à la pression atmosphérique. Nous pouvons alors écrire la variation de la pression exercée par la colonne de liquide en fonction du temps :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\rho V g}{S} = \frac{\rho g}{S} \frac{dV}{dt} = \frac{\rho g}{S} Q \quad (1.28)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du liquide et  $S$  est la section du tube capillaire. D'après les équations (1.26) et (1.28) nous pouvons en déduire que la viscosité peut s'écrire sous la forme :

$$\eta = \frac{\pi r^4}{8V} \rho g t_0 \quad (1.29)$$

Des techniques plus récentes utilisant le tube capillaire ont été publiées, avec l'évolution de la technologie l'accès aux capteurs et à l'informatique modernise la méthode [27, 28].

#### 4.1.2 Rhéomètre rotatif

La viscosité étant un paramètre important dans les études que nous réalisons, nous avons mesuré les viscosités dynamiques des solutions que nous utilisons dans nos expériences. A la différence du viscosimètre à capillaire présenté dans la section précédente, le rhéomètre rotatif permet de caractériser non seulement la viscosité d'un fluide mais aussi ses propriétés viscoélastiques. De plus, il permet de réaliser des écoulements permanents. Le rhéomètre est un appareil de laboratoire qui est commercialisé par des vendeurs spécialisés. Le fluide à analyser est positionné entre deux surfaces : une fixe, le stator, et une mobile, le rotor. Ce dernier est équipé d'une pièce métallique calibrée qui peut être de forme cylindrique, conique ou plane. Dans le cas de la cellule de Couette, la forme de cette pièce est cylindrique, le matériau est cisailé entre deux cylindres coaxiaux dans une région appelée l'entrefer de la cellule d'écoulement. Lorsque la surface fixe est plane, le rotor est équipé d'un embout de forme plane ou conique (voir Fig. 1.22). Comme nous le verrons dans les paragraphes qui suivent, l'avantage d'une géométrie cone-plan (par rapport à une cellule plan-plan) est que la taux de cisaillement en son sein est constant. La rotation de l'axe est réglée par une consigne qui peut être un couple mécanique ou une vitesse angulaire de rotation ce qui met en écoulement le matériau. Pour réaliser nos mesures, nous avons équipé l'appareil d'une géométrie conique tronquée de rayon  $R$  comme représenté sur la figure 1.22. L'angle formé par le cône avec la surface fixe est noté  $\Psi$ . Le taux de cisaillement vaut :

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega}{\tan \Psi} \quad (1.30)$$

Tant que l'angle  $\Psi$  est très petit ( $< 6^\circ$ ), nous pouvons simplifier la relation du taux de cisaillement comme  $\dot{\gamma} = \Omega/\Psi$  et considérer que le cisaillement et la contrainte visqueuse restent homogènes dans tout le matériau sollicité dans l'entrefer. La contrainte visqueuse  $\tau$  est reliée au couple  $C$  par la relation :

$$\tau = \frac{3C}{2\pi R^3} \quad (1.31)$$

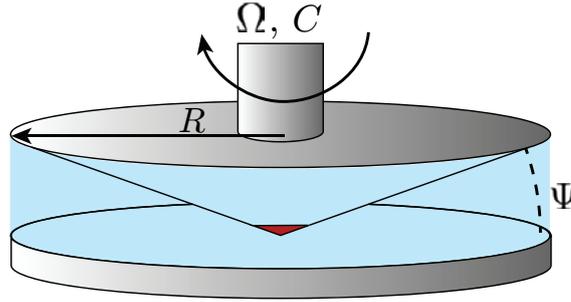


FIGURE 1.22: Schéma représentant le principe d'un rhéomètre cône-plan. En réalité le cône est tronqué (zone rouge) et le sommet imaginaire est en contact avec la partie plane fixe. Le moteur de l'appareil entraîne le rotor à une vitesse angulaire  $\Omega$  et le couple appliqué est noté  $C$ . L'échantillon est positionné dans l'entrefer (zone bleue).  $\Psi$  représente l'angle que fait le cône avec le plan fixe.

---

La détermination de la contrainte de cisaillement par le rhéomètre pour un taux de cisaillement appliqué donné nous permet de déduire la valeur de la viscosité dynamique d'un liquide par la relation :

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{3C \tan \Psi}{2\pi R^3 \Omega} \quad (1.32)$$

## 4.2 Tensiométrie

La tension de surface liquide-air est un paramètre essentiel dans les travaux que nous avons réalisés durant cette thèse. Nous avons donc utilisé une méthode classique de mesure de cette propriété des fluides. La méthode de la goutte pendante est couramment utilisée dans les laboratoires puisqu'elle permet une mesure de la tension de surface rapide qui ne nécessite pas un dispositif expérimental onéreux. Cette méthode est basée sur l'étude de la forme d'une goutte positionnée à l'extrémité d'une aiguille verticale. La forme d'ampoule prise par la goutte résulte d'un équilibre entre son poids et les forces capillaires qui s'y opposent.

Les aiguilles que nous utilisons pour former une goutte sont calibrées et le rayon est noté  $\delta$ . Le profil adopté par le liquide est représenté par la variation du rayon  $r(z)$  de la goutte en fonction de l'altitude  $z$ . Nous notons respectivement  $\rho_\ell$  et  $\rho_a$  la masse volumique du liquide et celle de l'air qui l'entoure. La valeur de la tension de surface que nous cherchons à déterminer est notée  $\gamma$ . La pression hydrostatique  $p$  à l'intérieur de la goutte est une fonction de l'altitude  $z$ . Nous prenons pour origine de l'axe  $O_z$  l'apex de la goutte  $O$ . La pression à l'intérieur de la goutte peut être exprimée de deux façons différentes, nous pouvons alors écrire l'équation de Young-

Laplace :

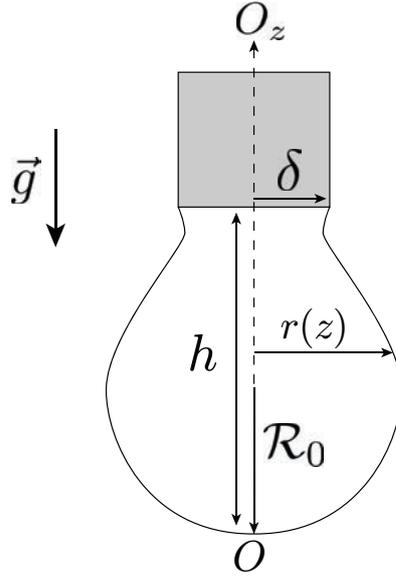


FIGURE 1.23: Schéma représentant une goutte suspendue à une aiguille.  $\mathcal{R}_0$ ,  $h$  et  $r(z)$  représentent respectivement le rayon de courbure principale, la hauteur totale et le rayon en fonction de la hauteur de la goutte. Le point  $O$  désigne l'apex de la goutte et l'origine de l'axe  $O_z$ . La force de gravité  $\vec{g}$  est dirigée vers le bas.

$$p_0 + \frac{2\gamma}{\mathcal{R}_0} - \rho_\ell g z = p_0 - \rho_a g z + \gamma \left( \frac{1}{\mathcal{R}_1(z)} + \frac{1}{\mathcal{R}_2(z)} \right) \quad (1.33)$$

où  $\mathcal{R}_0$  représente la courbure au niveau de l'apex de la goutte,  $\mathcal{R}_1(z)$  et  $\mathcal{R}_2(z)$  sont respectivement les deux rayons de courbures principaux en fonction de l'altitude.  $p_0$  est la pression du gaz à l'extérieur de la goutte (dans notre cas elle est égale à la pression atmosphérique) et  $g$  est l'accélération de pesanteur. En définissant  $\Delta\rho = \rho_\ell - \rho_a$  comme la valeur absolue de la différence de masse volumique entre le liquide de la goutte et le gaz à l'extérieur, nous pouvons réarranger l'équation précédente sous la forme :

$$\gamma \left( \frac{1}{\mathcal{R}_1(z)} + \frac{1}{\mathcal{R}_2(z)} \right) = -\Delta\rho g z + \frac{2\gamma}{\mathcal{R}_0}. \quad (1.34)$$

En utilisant les coordonnées cylindriques pour redéfinir les rayons de courbures  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , l'équation 1.34 s'écrit :

$$\gamma \left( \frac{1}{r(1+r'^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{r''}{(1+r'^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = -\Delta\rho g z + \frac{2\gamma}{\mathcal{R}_0}. \quad (1.35)$$

$r$  doit satisfaire les conditions aux limites  $r(0) = 0$  et  $r(h) = \delta$  où  $h$  est la distance

entre l'apex de la bulle et l'extrémité de l'aiguille. Nous utilisons des longueurs dimensionnées  $R = r/\kappa^{-1}$  et  $Z = z/\kappa^{-1}$  où  $\kappa^{-1} = \sqrt{\gamma/(\Delta\rho g)}$  est la longueur capillaire dans ce problème, nous obtenons l'équation finale :

$$\frac{1}{R(1+R^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{R''}{(1+R^2)^{\frac{3}{2}}} = -Z + \frac{2}{\sqrt{B_o}} \quad (1.36)$$

où  $B_o$  est le nombre de Bond que nous avons défini dans la section 3, il permet de comparer les forces capillaires et de pesanteur, ici il vaut  $\Delta\rho gR_0^2/\gamma$ . Nous pouvons remarquer que l'équation 1.36 est non linéaire et n'admet pas de solution analytique dans le cas général. Nous utilisons donc un ordinateur pour résoudre cette équation numériquement. En pratique, la goutte est photographiée par une caméra puis transmise à un ordinateur équipé d'un logiciel de traitement d'image. La valeur de la tension de surface liquide-air est fournie par l'ajustement du profil de la goutte de l'équation 1.36 par rapport à la photographie. Cette méthode est également utilisée pour mesurer des tensions interfaciales fluide-fluide dans le cas d'une bulle montante.

### 4.3 Mesure d'épaisseur d'un film mince par interférométrie

Pour mesurer des couches liquides minces, nous utilisons une technique d'interférométrie. Cette technique est largement utilisée par les scientifiques qui travaillent sur les bulles et notamment dans les expériences de drainage [29]. Avec cette technique, nous pouvons déterminer l'épaisseur de films liquides comme la paroi d'une bulle de savon ou un dépôt de solution sur un substrat. C'est justement pour ces deux cas que nous avons utilisé l'interférométrie dans ce chapitre. Les gammes d'épaisseurs sont de 1 à 9  $\mu\text{m}$  pour la paroi d'une bulle de savon et de 18 à 32  $\mu\text{m}$  pour la couche de solution présente sous la bulle. Pour ce faire, nous utilisons un spectromètre (Avantes AvaSpec-2048) et une source de lumière blanche positionnée orthogonalement à la surface. Les rayons lumineux issus de la source se propagent dans l'air jusqu'à une première interface air-liquide. Une partie de ces rayons lumineux est réfléchi par cette interface air-liquide et repart dans l'air. L'autre partie est réfractée dans le liquide et se propage jusqu'à une deuxième interface qui peut être liquide-solide ou liquide-air selon si nous observons une couche de solution sur un substrat ou alors la paroi d'une bulle. Les rayons lumineux sont alors, encore une fois, en partie réfléchis et réfractés. La partie réfléchi se propage dans le liquide vers la première interface air-liquide et est alors réfractée à travers cette dernière (voir Fig. 1.24 (a)). La différence de marche optique  $\Gamma$  entre les rayons réfléchis sur la première interface et ceux réfléchis sur la seconde interface va permettre de créer des interférences. Le signal reçu par le spectromètre est alors un spectre cannelé des longueurs d'ondes dont les maximas et les minimas représentent les interférences constructives et destructives.

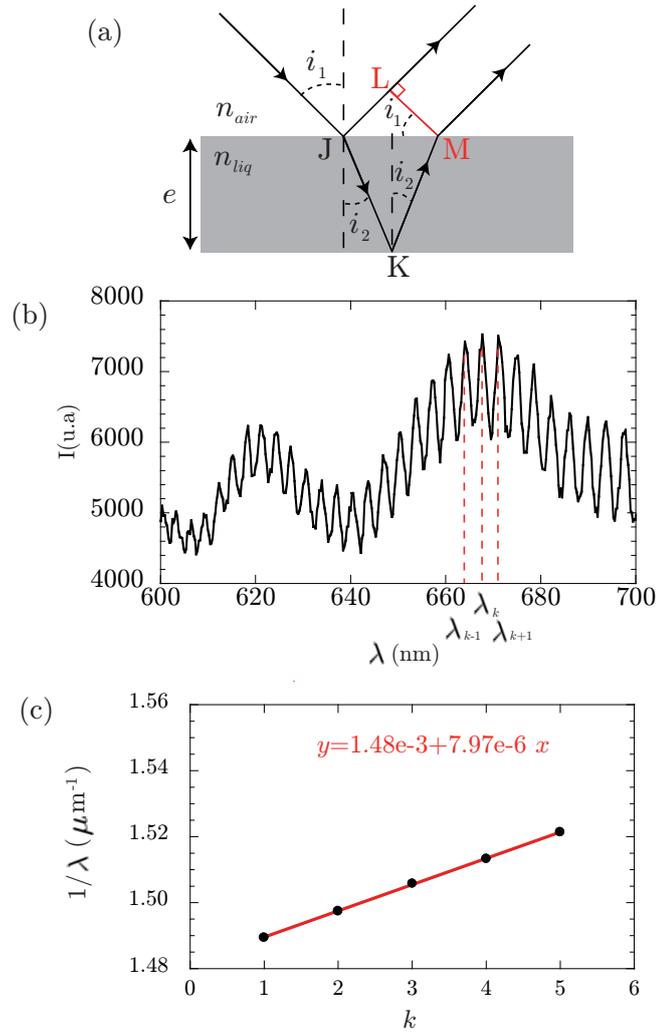


FIGURE 1.24: Le schéma (a) illustre la différence de marche de deux rayons lumineux, provenant de la source blanche, sur les deux interfaces. Le rayon lumineux issu du milieu d'indice  $n_{air}$  qui pénètre le milieu d'indice  $n_{liq}$  au point  $J$  ressort au point  $M$  par réfraction après avoir été réfléchi au point  $K$ . La différence de marche optique est donnée par la différence de trajet entre un rayon réfléchi au point  $J$  passant par  $L$  et le rayon qui sort du milieu liquide au point  $M$ . Le graphique (b) représente le spectre enregistré avec le spectromètre pour la mesure d'épaisseur de la couche de solution présente sous la bulle. Nous notons les positions des longueurs d'onde  $\lambda_k$  permettant de calculer l'épaisseur. Le graphique (c) montre la fonction  $1/\lambda_k = f(k)$  ajustée régression linéaire permettant de calculer l'épaisseur qui, ici, est de  $47 \mu m$ .

tives (voir Fig. 1.24 (b)). Nous écrivons la loi de Snell-Descartes à travers la première interface :

$$n_{air} \sin i_1 = n_{liq} \sin i_2 \quad (1.37)$$

où  $n_{liq}$  est l'indice de réfraction de la solution et est égal à 1.33,  $n_{air}$  l'indice de réfraction de l'air et est égal à 1,  $i_1$  l'angle du rayon incident et  $i_2$  l'angle du rayon réfracté. On a donc :

$$\sin i_2 = \frac{\sin i_1}{n_{liq}}. \quad (1.38)$$

Puis il vient :

$$\cos i_2 = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_1}{n_{liq}^2}}. \quad (1.39)$$

La différence de marche entre les rayons réfléchis par les deux interfaces s'écrit :

$$\Gamma = 2en_{liq} \cos i_2 + \frac{\lambda}{2} \quad (1.40)$$

où  $e$  est l'épaisseur de la couche et  $\lambda$  la longueur d'onde. Le premier terme de cette équation 1.40 correspond au déphasage du rayon lumineux traversant la solution et le second terme correspond à un déphasage de  $\pi$  dû à la différence de marche supplémentaire d'un rayon lumineux réfléchi provenant d'un milieu moins réfringent sur un milieu plus réfringent (ici l'interface air-liquide). Avec 1.39, l'équation 1.40 devient :

$$\Gamma = 2e\sqrt{n_{liq}^2 - \sin^2 i_1} + \frac{\lambda}{2}. \quad (1.41)$$

Les rayons lumineux arrivent de manière confondue à la normale de la surface, donc la différence de marche devient :

$$\Gamma = 2en_{liq} + \frac{\lambda}{2}. \quad (1.42)$$

Une raie d'interférence est constructive lorsque deux ondes sont en phase, la condition d'existence est que la différence de marche soit  $\Gamma = k\lambda$  où  $k$  est le nombre entier qui correspond à l'ordre d'interférence de la raie. Nous pouvons alors écrire l'égalité :

$$2en_{liq} + \frac{\lambda_k}{2} = k\lambda_k. \quad (1.43)$$

Il vient alors :

$$\frac{1}{\lambda_k} = \frac{k}{2n_{liq}e} - \frac{1}{4n_{liq}e}. \quad (1.44)$$

Nous pouvons en déduire l'épaisseur en traçant la régression linéaire de la fonction  $1/\lambda_k = f(k)$ . Le graphe de la figure 1.24 (c) montre un exemple d'une telle mesure d'épaisseur dans le cas d'un film mince de liquide savonneux sur une lame de verre.

## 5 Sujets abordés dans ce manuscrit

Après avoir abordé, dans ce chapitre d'introduction, les notions essentielles de physique de la matière molle et de mécanique des fluides utiles dans cette thèse, nous rapportons les études et les expériences menées durant cette thèse dans les chapitres suivants. Chacun de ces trois chapitres débute par une section qui permet de placer l'étude dans un contexte scientifique. Nous y mentionnons des exemples de travaux réalisés par d'autres équipes de recherche dont le système expérimental ou encore le développement d'un modèle ont inspiré le travail que nous présentons.

- Dans le **second chapitre**, nous nous intéressons à la formation d'une bulle interfaciale lorsqu'un film liquide impacte à vitesse constante la surface d'un bain du même liquide. Ce film est maintenu par un cadre circulaire horizontal qui est mis en mouvement par translation verticale par l'intermédiaire d'un moteur. Grâce à ce dispositif, nous pouvons contrôler la vitesse d'impact et l'accélération d'un film pendant son mouvement.
- Le **troisième chapitre** est consacré à l'étude de la vidange d'un réservoir déformable, c'est-à-dire une bulle interfaciale<sup>12</sup> qui est formée sur un substrat solide percé d'un orifice circulaire. Nous étudions dans cette expérience l'évolution de la géométrie de la bulle pendant le processus de vidange en fonction d'un rapport entre la taille d'une bulle et celle d'un orifice et les propriétés physicochimiques du liquide. Pour ce faire, nous mesurons les variations temporelles de trois observables caractérisant une bulle : le rayon de courbure, la hauteur et la distance entre le pied et l'orifice.
- Dans le **dernier chapitre**, nous présentons les travaux que nous avons réalisés sur le déplacement spontané d'un film liquide dans un entonnoir. Cette étude est à but éducatif puisque le dispositif expérimental que nous utilisons se compose simplement d'un système de capture vidéo tel qu'un smartphone, un entonnoir et un long tube. Cette expérience pourrait très bien être réalisée en TP. Dans cette investigation, un film de liquide est formé à l'extrémité la plus large d'un entonnoir et se déplace vers la zone la plus étroite où est fixé le tube. Nous établissons dans ce chapitre le modèle de l'écoulement d'air dans un tuyau provoqué par ce déplacement et qui est régi par la loi de Poiseuille.

---

<sup>12</sup>. Une bulle interfaciale est une bulle en contact avec une surface solide ou liquide.

# Bibliographie

- [1] P. G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré. *Gouttes, Bulles, Perles et Ondes*. Belin, 2002.
- [2] E. Mezger. Loi de variation de la tension superficielle avec la température. *Journal de Physique et le Radium*, **7**(10) :303–309, 1946.
- [3] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Laurylsulfate\\_de\\_sodium](https://fr.wikipedia.org/wiki/Laurylsulfate_de_sodium).
- [4] V. Bergeron. Disjoining Pressures and Film Stability of Alkyltrimethylammonium Bromide Foam Films. *Langmuir*, **13**(13) :3474–3482, June 1997.
- [5] A. Hassan, N. Safari, S. Rozali, H. Juahir, and M. Kamarudin. Effect of cetyl trimethyl ammonium bromide (ctab) surfactant on nanofiltration membrane for dye removal. *Malaysian Journal of Applied Sciences*, **2**(2) :29–36, 2017.
- [6] L. Euler. Opera Omnia. *Orell Füssli*, 1952.
- [7] J. L. Lagrange. Mécanique analytique. *Gauthier-Villars*, 1889.
- [8] <https://www.futura-sciences.com/sciences/definitions/mathematiques-calcul-variationnel-10313>.
- [9] [https://fr.wikipedia.org/wiki/H%C3%A9lico%C3%AFde#/media/Fichier:Bulle\\_de\\_savon\\_h%C3%A9lico%C3%AFde.PNG](https://fr.wikipedia.org/wiki/H%C3%A9lico%C3%AFde#/media/Fichier:Bulle_de_savon_h%C3%A9lico%C3%AFde.PNG).
- [10] <https://mathworld.wolfram.com/ScherksMinimalSurfaces.html>.
- [11] <https://mathcurve.com/surfaces/enneper/enneper.shtml>.
- [12] L. Salkin. *Création, Stabilité et Rupture d’Interfaces Fluides*. PhD thesis, Université Rennes 1 : École doctorale Sciences de la Matière, 2014.
- [13] <http://accromath.uqam.ca/2010/01/des-bulles-a-la-piscine>.
- [14] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Stade\\_olympique\\_de\\_Munich#/media/Fichier:Olympiastadion\\_Muenchen.jpg](https://fr.wikipedia.org/wiki/Stade_olympique_de_Munich#/media/Fichier:Olympiastadion_Muenchen.jpg).

- 
- [15] L. Salkin, A. Schmit, P. Panizza, and L. Courbin. Influence of boundary conditions on the existence and stability of minimal surfaces of revolution made of soap films. *American Journal of Physics*, **82** :839–847, 2014.
- [16] D. Quéré, M. Fermigier, and C. Clanet. *Interfaces Mobiles CD-ROM accompagnant le livre : Gouttes, Bulles, Perles et Ondes*. Paris, 2005.
- [17] Photographie réalisée par Laurent Courbin.
- [18] C. Cohen, B. Darbois Texier, E. Reyssat, J. H. Snoeijer, D. Quéré, and C. Clanet. On the shape of giant soap bubbles. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **114**(10) :2515–2519, 2017.
- [19] G. W. Gale, R. J. Small, and K. A. Reinhardt. In Karen A. Reinhardt and Werner Kern, editors, *Handbook of Silicon Wafer Cleaning Technology*, pages 201 – 265. William Andrew Publishing, Norwich, NY, second edition edition, 2008.
- [20] <https://gravitation.ensta.fr/public/img/articles/wine.jpeg>.
- [21] <https://gravitation.ensta.fr/articles>.
- [22] James Jurin. Ii. an account of some experiments shown before the royal society ; with an enquiry into the cause of the ascent and suspension of water in capillary tubes. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **30**(355) :739–747, 1719.
- [23] S. J. Leib and M. E. Goldstein. The generation of capillary instabilities on a liquid jet. *Journal of Fluid Mechanics*, **168** :479–500, 1986.
- [24] C. Clanet and J. C. Lasheras. Transition from dripping to jetting. *Journal of Fluid Mechanics*, **383**(RN058883130) :307–326, 1999.
- [25] J. Eggers and E. Villermaux. Physics of liquid jets. *Reports on Progress in Physics*, **71**(3) :036601–1–79, feb 2008.
- [26] Lazarre, F. Viscosimétrie sous hautes pressions. *J. Phys. Radium*, **11**(12) :S1–S11, 1950.
- [27] C. Molina, L. Victoria, and A. Arenas. Automatic system for directly measuring the dynamic viscosity of liquids. *Review of Scientific Instruments*, **74**(3) :1397–1399, 2003.
- [28] R. M. Digilov and M. Reiner. Weight-controlled capillary viscometer. *American Journal of Physics*, **73**(11) :1020–1022, 2005.

- [29] L. Champougny, M. Roch, W. Drenckhan, and E. Rio. Life and death of not so « bare » bubbles. *Soft Matter*, **12** :5276–5284, (2016).

## Chapitre 2

# Formation d'une bulle interfaciale par impact d'un film liquide mince sur un bain du même liquide

Nous étudions la formation d'une bulle interfaciale créée lors de l'impact d'un film liquide mince sur la surface libre d'un bain du même liquide. Dans nos expériences, un cadre circulaire horizontal supportant un film liquide mince plan est monté sur une platine de translation verticale qui permet de le déplacer à une vitesse constante  $v$  après une phase d'accélération contrôlée. Durant cette phase, le film se déforme sous l'effet de la force d'inertie d'entraînement. Lorsque le régime stationnaire de vitesse est atteint, le film relaxe en effectuant des oscillations amorties autour de la position du cadre. Nous montrons que, du fait de cette dynamique de relaxation, le rayon de la bulle interfaciale formée pour une vitesse fixée varie de manière non monotone (oscillations amorties) avec la distance initiale  $h_0$  du cadre circulaire à la surface du bain. Lorsque la valeur de  $h_0$  est suffisamment grande, le film liquide a relaxé vers sa position d'équilibre avant d'entrer en collision avec la surface libre du bain, le rayon  $R_b^\infty$  de la bulle formée lors de cet impact ne dépend alors plus de  $h_0$  mais seulement de  $v$ . Dans ces conditions, nous montrons l'existence de deux régimes hydrodynamiques, séparés par une vitesse seuil  $v_c$ , pour lesquels  $R_b^\infty$  varie comme  $v^\alpha$  avec des valeurs différentes de l'exposant  $\alpha$ . Lorsque  $v < v_c$ , nous montrons que la taille de la bulle formée résulte d'un mécanisme visco-capillaire et varie alors comme  $R_b^\infty \propto \mathcal{C}^{1/12}$ , où  $\mathcal{C} = \eta_a v / \gamma$  est le nombre capillaire ;  $\eta_a$  et  $\gamma$  sont la viscosité dynamique de l'air et la tension de surface air-liquide. Lorsque  $v > v_c$ , le rayon  $R_b^\infty$  résulte d'un mécanisme inertio-capillaire et varie comme  $R_b^\infty \propto \mathcal{W}_e^{1/3}$ , où  $\mathcal{W}_e = \rho_a v^2 R / \gamma$  est le nombre de Weber ;  $\rho_a$  et la masse volumique de l'air. Ce chapitre s'inscrit dans la continuité de l'étude entamée par Louis Salkin en 2014 au cours de sa thèse. Notre avancée sur le sujet nous a permis de publier un article [1].

## 1 Introduction

De nombreux phénomènes naturels et processus industriels mettent en jeu l'encapsulation d'air. Un gaz peut être piégé de différentes manières et forme un élément fluide que nous appelons communément une bulle. A l'origine de leur formation dans la nature, on peut mentionner l'impact d'une goutte sur une flaque d'eau qui forme une cavité qui se referme en emprisonnant ainsi de l'air. Dans l'industrie, la formation de bulles pose généralement problème, car elles sont à l'origine de défauts esthétiques et/ou mécaniques notamment dans la fabrication de matériaux. Prenons l'exemple du verre fabriqué par fonderie puis moulé et taillé. Si des bulles d'air sont présentes à l'intérieur du matériau, elles entraînent inévitablement des concentrations de contraintes localisées au niveau de chaque bulle ainsi qu'une déformation optique (voir Fig. 2.1). C'est pourquoi, il est important d'anticiper la formation des bulles pour un industriel.

La recherche sur les différents processus d'emprisonnement d'air est une thématique de recherche de la matière molle qui est étudiée pour une grande variété de configurations d'écoulements. Aussi, la littérature documente différentes configurations d'impact (voir Fig. 2.2) permettant la formation de bulles par encapsulation d'air : l'impact de gouttes sur une surface solide ou liquide, l'impact d'un objet solide dans un bain liquide et l'impact d'un jet dans un bain du même liquide. Dans ce qui suit, nous allons discuter plus en détail ces travaux scientifiques.



FIGURE 2.1: Photographie tirée de [2] représentant une sphère de verre dans laquelle des inclusions d'air (bulles d'air) sont présentes.

---

## 1.1 Impact de gouttes

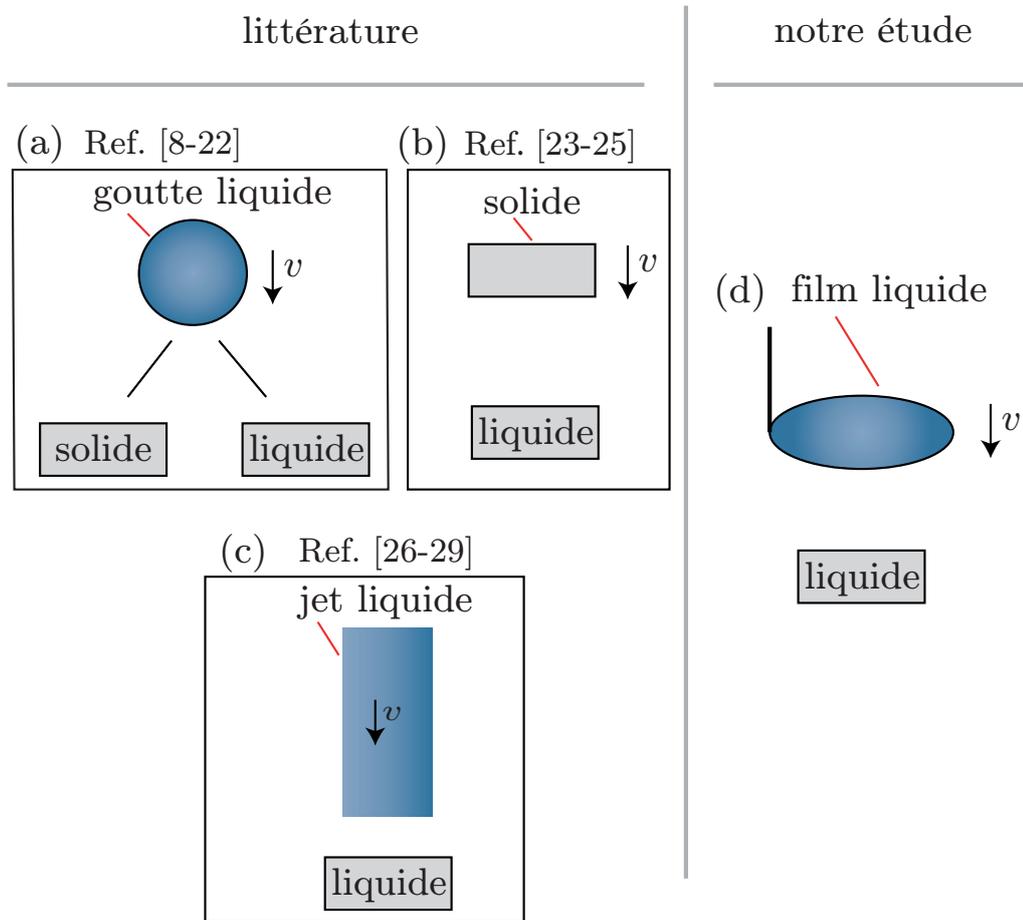


FIGURE 2.2: Schéma récapitulatif des modes de formation de bulles par encapsulation d'air étudiés en laboratoire. A gauche, le schéma représente les modes déjà discutés dans la littérature : en (a) l'impact de gouttes sur une surface solide ou liquide, en (b) l'impact d'un objet solide dans un bain liquide et en (c) l'impact d'un jet liquide dans un bain du même liquide. Notre expérience d'impact d'un film liquide sur un bain est montrée de façon schématique en (d).

On trouve dans la littérature scientifique plusieurs études qui portent sur la chute et la projection de gouttes, les premières publications scientifiques datant de plusieurs siècles. On peut mentionner les travaux réalisés par Worthington qui est un pionnier de l'utilisation des techniques de photographie dans la fin du 19<sup>ème</sup> siècle (voir Fig. 2.2(a) et 2.2(b) et Fig. 2.3). Ce physicien étudia l'impact de gouttes sur des surfaces planes solides ou liquides. Dans sa publication de 1876 [3], Worthington décrit ces observations réalisées sur l'impact de gouttes d'eau et de mercure sur une plaque horizontale de verre fumé (surface non mouillable par ces deux liquides) afin

d'en expliquer les différents phénomènes physiques tel que l'étalement et la contraction d'une goutte à l'impact ainsi que la génération d'éclaboussures, c'est-à-dire un « *splash* ». En considérant comme paramètres la hauteur de chute, la taille de la goutte et le liquide utilisé, Worthington a caractérisé les motifs formés par ces phénomènes physiques [3]. De nos jours, la technologie nous permet l'utilisation de caméras rapides, de réaliser des simulations numériques [4] et d'utiliser des techniques d'interférométrie [5] pour étudier ces phénomènes physiques. De nombreux travaux

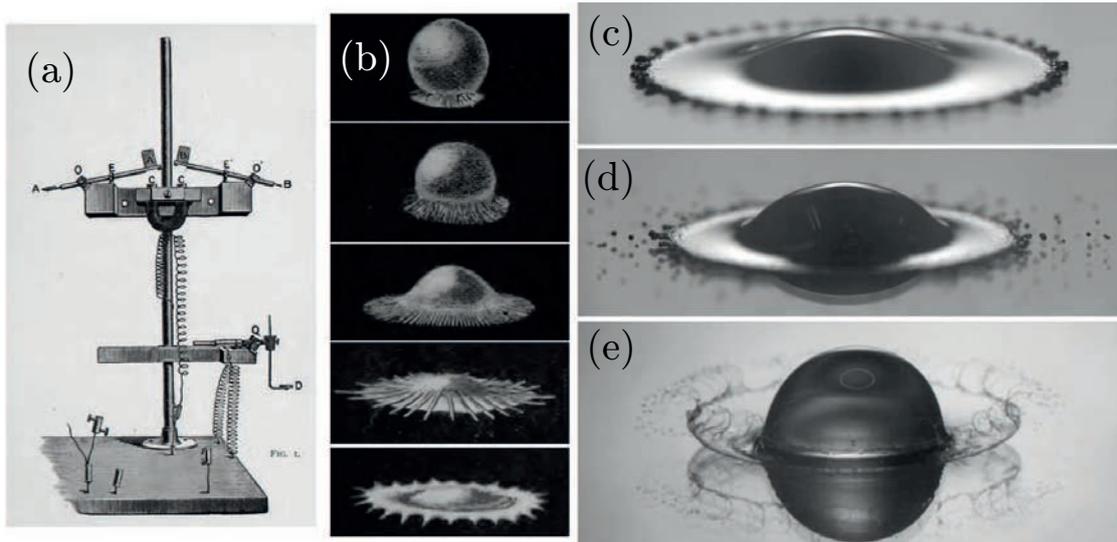


FIGURE 2.3: La figure est tirée de [6]. Le dessin (a) représente le montage expérimental que Worthington utilisait pour étudier la chute de gouttes de liquides et leur impact sur des surfaces solides planes. Le schéma en (b) illustre cette étude sur l'impact d'une goutte de mercure sur une surface en verre et en particulier l'étalement d'une goutte à l'impact [3]. Avec les techniques d'imagerie moderne, on obtient des photographies très nettes de cette même expérience [voir les photographies en (c)-(e)]. La photographie (c) représente l'impact d'une goutte de mercure sur un substrat en verre. La photographie (d) représente l'impact d'une goutte de mercure sur un verre super-hydrophobe. La photographie (e) représente l'impact d'une goutte d'éthanol sur un substrat en verre. Le « *splash* » peut se produire sous différentes formes comme le montrent les photographies (c), (d) et (e). En (c) la goutte s'étale sans se déstabiliser contrairement au cas (d) pour lequel des gouttelettes satellites sont émises du bord de la goutte. En (e), le « *splash* » forme une couronne de très fines gouttelettes.

portent sur l'impact de gouttes sur des surfaces solides planes [7, 8, 9, 10, 11, 12] ou rugueuses [13, 14, 15], mais aussi sur des surfaces liquides [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. Les principaux paramètres en jeu dans l'impact de gouttes sont sa vitesse d'im-

pect, son rayon, la viscosité du liquide constituant la goutte et la tension de surface liquide-gaz. Ces paramètres permettent de construire les nombres adimensionnés de Reynolds et de Weber, qui représentent respectivement le rapport entre les forces inertielles et les forces visqueuses et le rapport entre les forces inertielles et les forces capillaires [voir Chap. 1 section 3]. Suivant les conditions d'impact d'une goutte (valeurs des paramètres susmentionnés), on peut observer différents phénomènes, comme par exemple, la formation d'une bulle par encapsulation d'air [12] (voir Fig. 2.4), la génération d'éclaboussures [14] ou encore le rejaillissement d'un jet de liquide [20]. Ces phénomènes existent dans la nature puisque qu'on les retrouve lorsqu'une goutte de pluie tombe et percute une surface solide ou la surface d'une flaque d'eau.

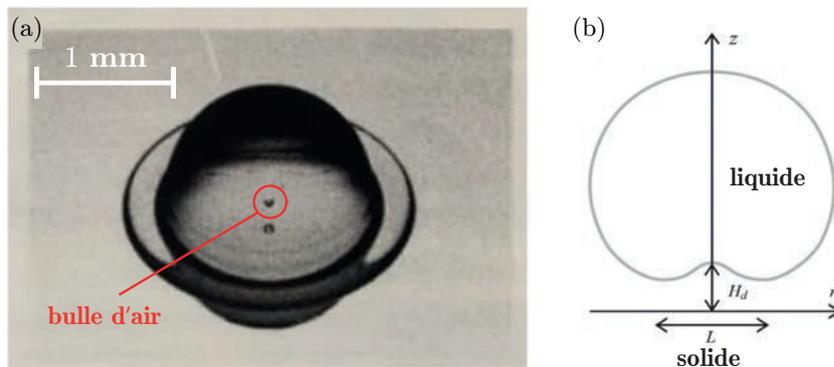


FIGURE 2.4: La photographie en (a) est adaptée de [7] et elle représente l'emprisonnement d'une bulle d'air lors de l'impact d'une goutte sur une surface solide. Le schéma en (b), tiré de [12], représente le principe d'emprisonnement d'air lors de l'impact d'une goutte d'un liquide sur un substrat solide lisse. A proximité de la surface solide, l'augmentation de la pression de la couche d'air présente en dessous de la goutte devient suffisante pour la déformer et ainsi former une cavité.  $H_d$  et  $L$  sont deux observables qui représentent respectivement la position de la cavité par rapport à la surface et sa largeur.

---

## 1.2 Impact d'objets solides dans un bain liquide

Des recherches ont été réalisées sur l'impact d'objets solides sur la surface libre d'un bain liquide. Une équipe s'est intéressée à la cavité transitoire de surface créée par l'impact d'un objet solide sur de l'eau [23] (voir Fig. 2.5). Dans leur expérience, Bergmann et al. plongent un disque à vitesse constante dans une cuve remplie d'eau. Les auteurs ont étudié la formation de la cavité d'air créée par l'impact de l'objet à la surface du bain liquide. Plus précisément, ils ont observé l'effondrement des

parois de la cavité, c'est-à-dire le « *pinch-off* », causé par la pression hydrostatique. Lorsqu'un objet approche la surface libre d'un bain, on peut observer un phénomène de lubrification [24, 25], c'est-à-dire que la fine couche d'air présente sous le solide se trouve être fortement confinée, ce qui a pour conséquence d'augmenter la pression du gaz. Au contact du liquide, le solide piège l'air qui n'aura pas pu s'échapper et forme ainsi une bulle.

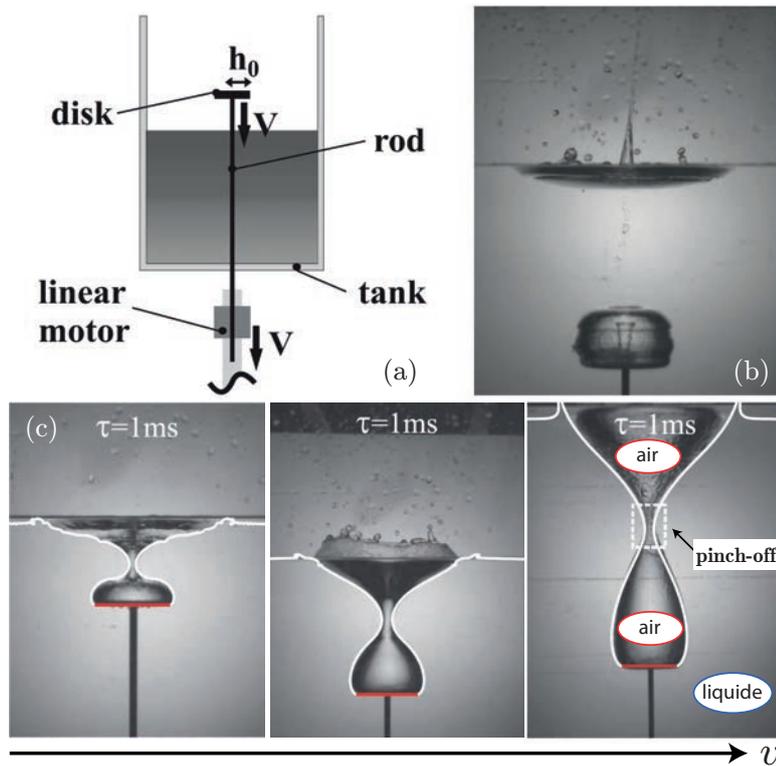


FIGURE 2.5: La figure est adaptée de [23]. Le schéma (a) représente le montage expérimental réalisé par les auteurs pour étudier l'impact d'un disque plongé à vitesse constante dans une cuve remplie d'eau. Le disque est tiré par une corde qui est reliée à un moteur et descend à vitesse constante. La photographie en (b) montre le disque une fois plongé dans le bain liquide. Les trois photographies en (c) montrent trois impacts à des vitesses différentes, à l'instant de l'effondrement. De gauche à droite les vitesses sont 0.5 m/s, 1.0 m/s et 2.0 m/s. L'origine du temps correspond à l'impact du disque avec la surface libre du liquide contenu dans la cuve.

---

### 1.3 Impact de jet liquide

La dernière méthode de formation de bulles par encapsulation d'air, que nous avons évoquée en début de chapitre, concerne l'impact d'un jet liquide sur un bain

composé du même fluide (voir Fig. 2.6). Dans ce cas, le jet sort d'une buse calibrée qui se situe dans l'air et entre en collision avec un bain du même liquide. Si le jet est continu et pourvu que la buse d'où il provient soit parfaitement profilée, il n'emprisonne pas d'air au contact du bain, ceci même pour des nombres de Reynolds élevés. Les travaux réalisés par Y. Zhu et al. dans [26], montrent que si une perturbation, comme une brève augmentation du débit, est enclenchée dans un jet d'eau, une cavité se forme à la surface du bain. Le jet s'enveloppe alors d'un film d'air qui se déstabilise et forme des bulles. La figure 2.6 montre par exemple qu'un changement de débit peut entraîner la formation d'une protubérance sur le jet qui forme une cavité en impactant le bain. A la différence des fluides de faibles viscosités qui ont besoin d'une perturbation, le film d'air, généré par un fluide visqueux, se produit

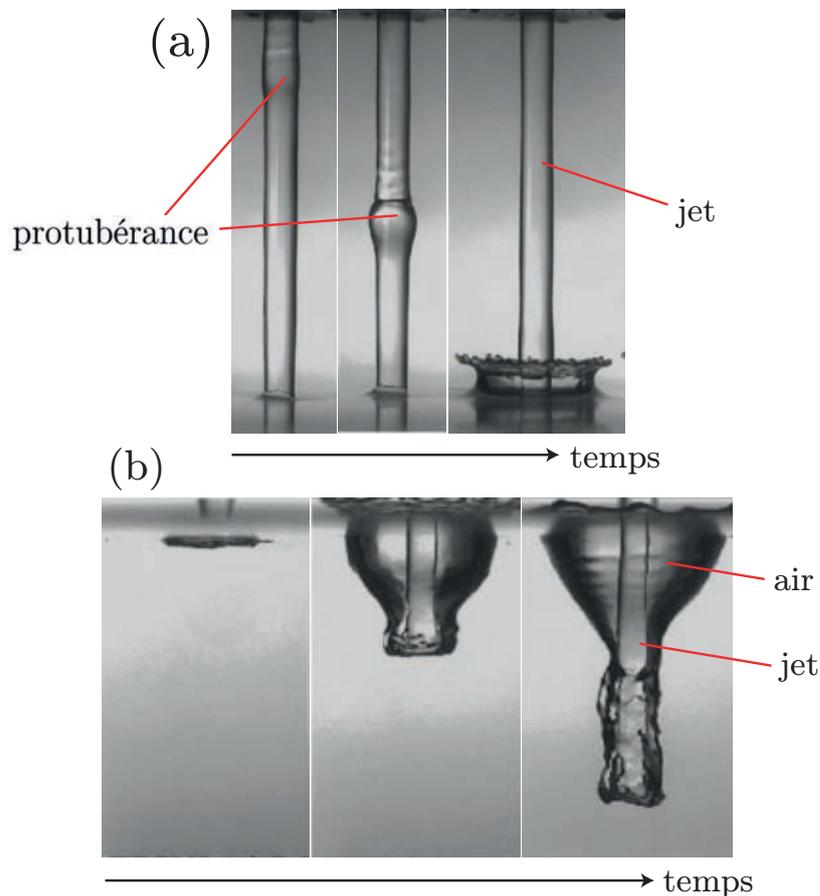


FIGURE 2.6: La figure est adaptée de [26]. La séquence de photographies (a) représente la propagation d'une perturbation engendrée sur un jet d'eau par une brève augmentation de débit. Lorsque la perturbation entre en contact avec la surface libre du bain, une cavité se forme et le jet s'enveloppe d'un film d'air. La séquence de photographies (b) représente l'évolution de la cavité avec le temps.

spontanément et forme également des bulles [27, 28]. Pouligny et al. présentent une méthode différente pour emprisonner de l'air au sein d'un liquide. Ils étudient l'impact d'un jet de silicone plan (le jet a la forme d'un ruban) sur un bain du même fluide [29] et démontrent qu'un jet visqueux plan se plie comme un ruban lorsqu'on le fait s'écouler. Comme cela est visible sur la figure 2.7, cette caractéristique conduit à la formation de bulles mono-disperses selon le mode d'écoulement qui est contrôlé par la hauteur de chute du jet.



FIGURE 2.7: Photographie tirée de [29] montrant la formation de bulles bidisperses (deux populations monodisperses de tailles différentes) lors de l'impact d'un jet de silicone plan (comme un ruban) avec la surface libre d'un bain du même liquide.

---

Dans ce chapitre, nous travaillons sur une situation encore non étudiée d'**impact** à vitesse constante d'un **film liquide mince horizontal avec la surface d'un bain de même solution** (voir Fig. 2.9). Le film liquide mince est porté par un cadre circulaire réalisé en fil de fer. Lorsque le film liquide approche de la surface du bain liquide, de **l'air est emprisonné et forme alors une bulle interfaciale**. Nos expériences montrent que la taille de cette bulle augmente avec la vitesse d'impact et le diamètre du film liquide, mais qu'elle ne dépend pas en revanche de son épaisseur. En variant la vitesse d'impact  $v$  nous observons l'existence de **deux régimes hydrodynamiques** séparés par une vitesse d'impact critique  $v_c$ . Dans le premier

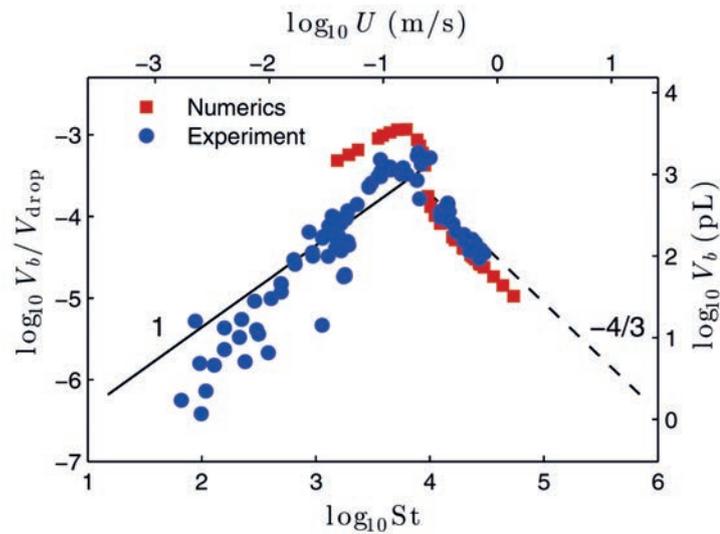


FIGURE 2.8: Le graphique montre l'évolution du volume de la bulle  $V_b$  en fonction de la vitesse d'impact  $U$  d'une goutte sur une surface solide (axe supérieur) et du nombre de Stokes  $St$  (axe inférieur)[Le nombre de Stokes est un nombre adimensionné qui permet de comparer les forces d'inertie d'une particule avec celle de la dissipation visqueuse]. Les cercles bleus correspondent aux mesures expérimentales et les carrés rouges aux simulations numériques. La courbe montre la présence d'une vitesse pour laquelle le volume de la bulle est maximal. Les pentes tracées correspondent aux lois d'échelles du régime capillaire (trait plein) et du régime inertiel (pointillés) avec leur exposant respectif 1 et  $-4/3$ .

régime, observé pour  $v < v_c$ , la taille de la bulle résulte d'une compétition entre effets capillaires et visqueux, tandis que pour le second régime observé pour  $v > v_c$ , elle résulte d'un **mécanisme inertio-capillaire**. Le régime de formation à basse vitesse présente des similitudes avec le phénomène de formation de bulles observé lors d'impact de goutte sur un solide [12]. Dans les travaux de Bouwhuis et al., l'étude porte sur la formation d'une bulle lors de l'impact d'une goutte sur une surface solide plane (voir schéma dans Fig. 2.4). L'existence d'une bulle après un tel impact indique qu'une cavité d'air s'est formée sur la surface inférieure de la goutte due à l'augmentation de la pression dans le film d'air interstitiel entre la goutte et la surface solide lorsque la goutte approche la surface. Cette augmentation de pression déforme la surface de la goutte. Lors de son contact avec la surface, la cavité créée en dessous piège l'air et forme alors une bulle. Les auteurs ont observé que cette bulle présente une taille maximale pour une certaine vitesse (voir Fig.2.8). Pour des vitesses plus élevées que ce seuil, l'inertie de l'air domine ce qui a pour effet d'apla-

tir la goutte lors de l'impact tandis que pour des vitesses moins élevées, les forces capillaires tendent à garder une goutte sphérique. Dans notre cas, nous constatons, comme nous le verrons plus loin, une évolution monotone et croissante de la taille de la bulle en fonction de la vitesse d'impact [12].

## 2 Expérience

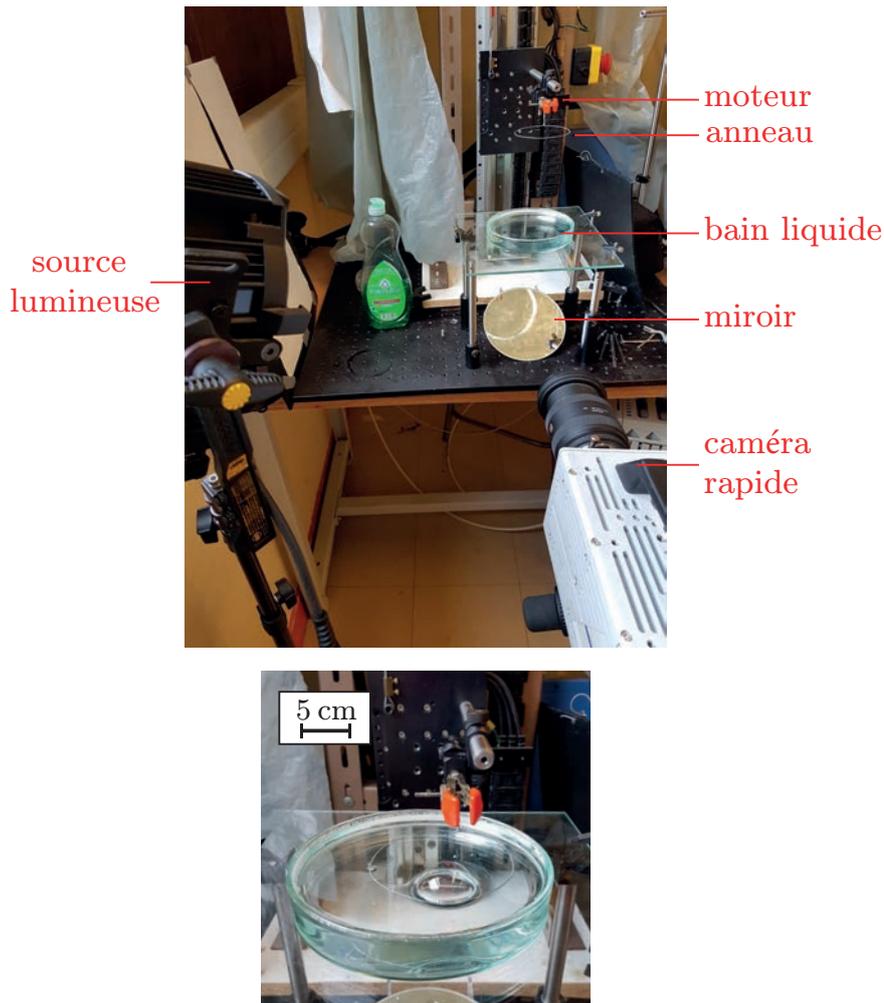


FIGURE 2.9: Photographies de notre dispositif expérimental.

---

Comme représenté dans la figure 2.10, notre dispositif expérimental se compose d'un film liquide mince suspendu horizontalement sur un cadre circulaire de rayon,  $R$ . L'anneau qui constitue ce cadre est fabriqué avec un fil de fer dont le rayon,  $500 \mu\text{m}$ , est négligeable comparé à celui du cadre qui varie dans la gamme  $R = 10 - 80$  mm. Le cadre est monté sur une platine en translation vertical dont un moteur continu (Aerotech ACT115DL), connecté à un contrôleur (Aerotech Soloist HPE)

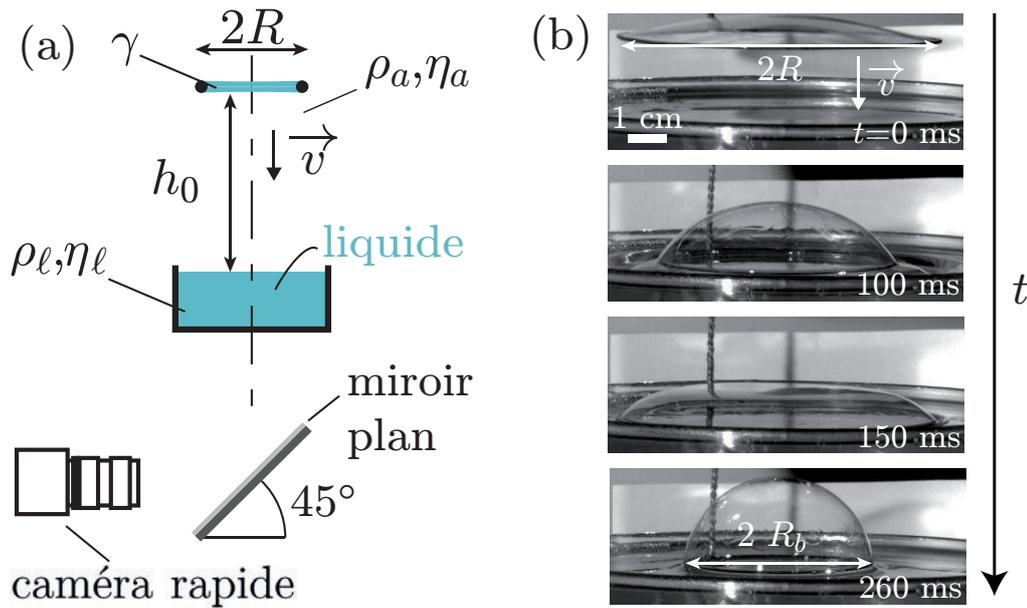


FIGURE 2.10: Le schéma (a) représente le dispositif expérimental mis en place pour étudier l'impact, à vitesse constante  $v$ , d'un film liquide de rayon  $R$  sur un bain liquide de viscosité  $\eta_\ell$ , de masse volumique  $\rho_\ell$ . Le film liquide entre en collision avec le bain après une course  $h_0$  et forme alors une bulle interfaciale de rayon  $R_b$  en piégeant de l'air de viscosité  $\eta_a$  et de masse volumique  $\rho_a$ . La tension de surface air-liquide est  $\gamma$ . Une caméra rapide (Photron SA3) filme la formation de la bulle de rayon  $R_b$  par le dessous à une cadence de 250 images/s en utilisant la réflexion d'un miroir orienté à  $45^\circ$ . La séquence de photographies vue de côté (b) illustre la formation d'une bulle par la méthode décrite dans ce chapitre. Cette expérience est réalisée avec une vitesse d'impact  $v = 0.4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , un rayon de film  $R = 41 \text{ mm}$  et une distance initiale  $h_0 = 95 \text{ mm}$ .

permet de fixer et modifier la vitesse de déplacement. Un programme informatique, réalisé avec le logiciel LABVIEW par Eric Gicquel (ingénieur du laboratoire), permet de contrôler le déplacement du cadre verticalement dans les deux directions à une vitesse constante de l'ordre de  $v = 10^{-3} - 1 \text{ m/s}$  sur une distance  $d \leq 0.5 \text{ m}$  (voir Fig. 2.11). Pendant les phases d'accélération et de décélération la vitesse varie linéairement sur une distance choisie et au-delà de laquelle elle devient constante. Nous imposons donc une accélération constante de l'ordre  $0 - 50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , en sélectionnant la distance d'accélération  $d_a$  et la distance de décélération  $d_d$ . Les valeurs absolues correspondantes à ces deux phases sont respectivement  $a_a = \frac{v^2}{2d_a}$  et  $a_d = \frac{v^2}{2d_d}$  (voir Fig. 2.12). Au début de notre expérience, le cadre est immergé dans le bain liquide. Lorsqu'on le retire parallèlement à la surface libre du bain, un film de li-

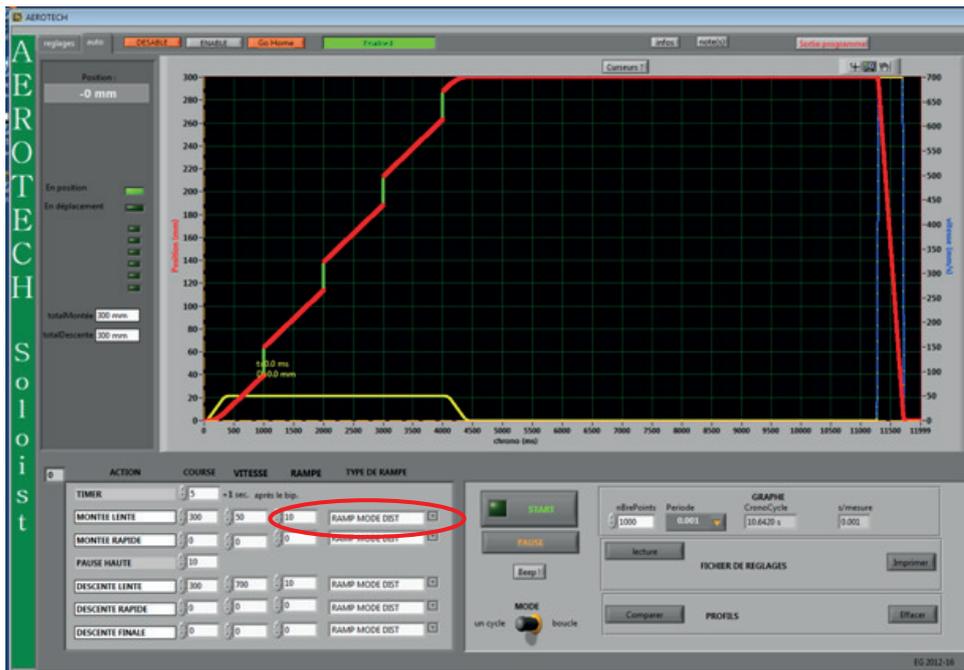


FIGURE 2.11: Cette impression d'écran montre le logiciel que nous utilisons pour contrôler la platine de translation. Nous pouvons régler la course (la distance de déplacement) et la vitesse et l'accélération de l'anneau. Nous fixons une position de référence qui permet de sécuriser l'expérience en empêchant l'anneau de se déplacer au-delà de cette position. La courbe rouge représente la position du cadre circulaire supportant le film liquide plan par rapport à la référence. Les courbes jaunes et bleues représentent respectivement les variations de vitesse de la phase d'accélération et de décélération. Le mode « rampe de distance » (entouré en rouge sur la figure) que nous utilisons indique que l'accélération du moteur est constante le long de la course indiquée. Nous utilisons également ce mode pour la phase de décélération.

guide se forme connectant le cadre à la surface du bain. Du fait de la tension de surface air-liquide, ce film adopte une surface minimale de révolution, qu'on appelle demi-caténoïde [30] (voir Fig. 2.13 et Chap. 1 section 1). La stabilité de cette surface dépend de la distance entre le cadre et la surface libre. Au-delà d'une distance seuil  $h_c \approx 0.66R < h_0$ , la caténoïde devient instable : la surface latérale se pince alors en un point donné, pour former un film liquide plan supporté par le cadre et une bulle interfaciale flottant à la surface libre du bain. Dans nos expériences, nous perçons cette bulle avec une aiguille afin de l'éliminer de la surface du bain. Nous mesurons ensuite l'épaisseur du film plan reposant sur le cadre circulaire avec un spectromètre (Avantes AvaSpec-2048) et la gamme que nous trouvons est de l'ordre  $e = 1 - 10 \mu\text{m}$ . Cette épaisseur dépend en fait de la vitesse de retrait du cadre du bain liquide.

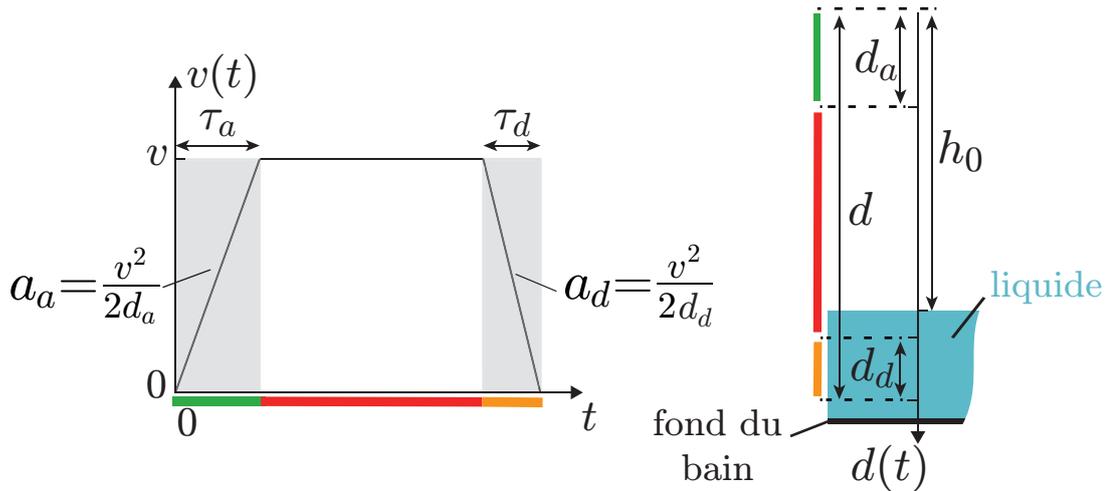


FIGURE 2.12: Le graphique représente l'évolution temporelle de la vitesse d'impact au cours du déplacement du cadre. Nous y décrivons les phases de l'accélération et de la décélération (zones grisées) qui sont imposées à l'anneau. Durant ces deux phases, la vitesse évolue linéairement avec une pente de courbe qui correspond aux accélérations  $a_a$  et  $a_d$ .

---

Le cadre et donc le film liquide plan, positionné à une hauteur  $h_0$  du bain est alors mis en mouvement vers le bas afin d'entrer en collision avec une vitesse constante  $v$  avec la surface libre du bain liquide, comme décrit dans la figure 2.12. Lors de l'impact, un certain volume d'air est emprisonné entre le film et la surface du bain liquide, créant ainsi une bulle interfaciale de rayon  $R_b$ , comme l'illustre la série de photographies de la figure 2.10(b).

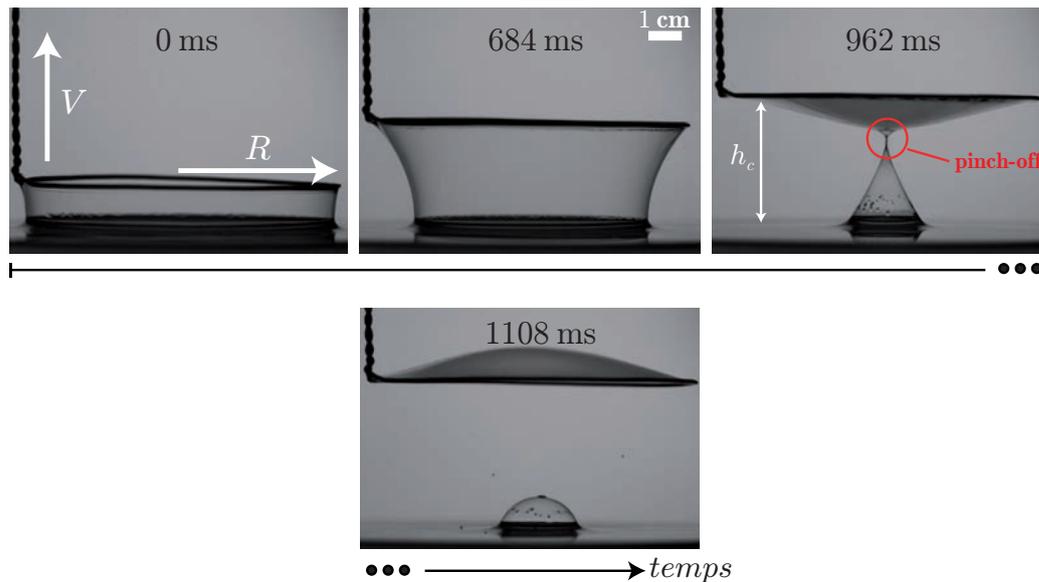


FIGURE 2.13: La séquence de photographies présente la méthode utilisée dans nos expériences pour former un film liquide plan supporté par un cadre circulaire. Ce film est obtenu en tirant le cadre circulaire d'un bain liquide. Ici, le liquide utilisé est une solution savonneuse. Extraire un cadre circulaire d'un bain liquide parallèlement à sa surface forme une surface minimale appelée une demi-caténoïde (nous discutons de son existence et de sa stabilité dans le chapitre 1 section 1). Quand le cadre atteint une distance suffisamment grande par rapport à la surface libre du bain, la demi-caténoïde se déstabilise et les parois s'effondrent provoquant un pincement, un « *pinch-off* » comme indiqué sur la figure. Le phénomène forme un film liquide sur le cadre et une bulle interfaciale sur le bain liquide. Pour cette expérience le cadre est tiré à une vitesse de  $0.3 \text{ m.s}^{-1}$ .

---

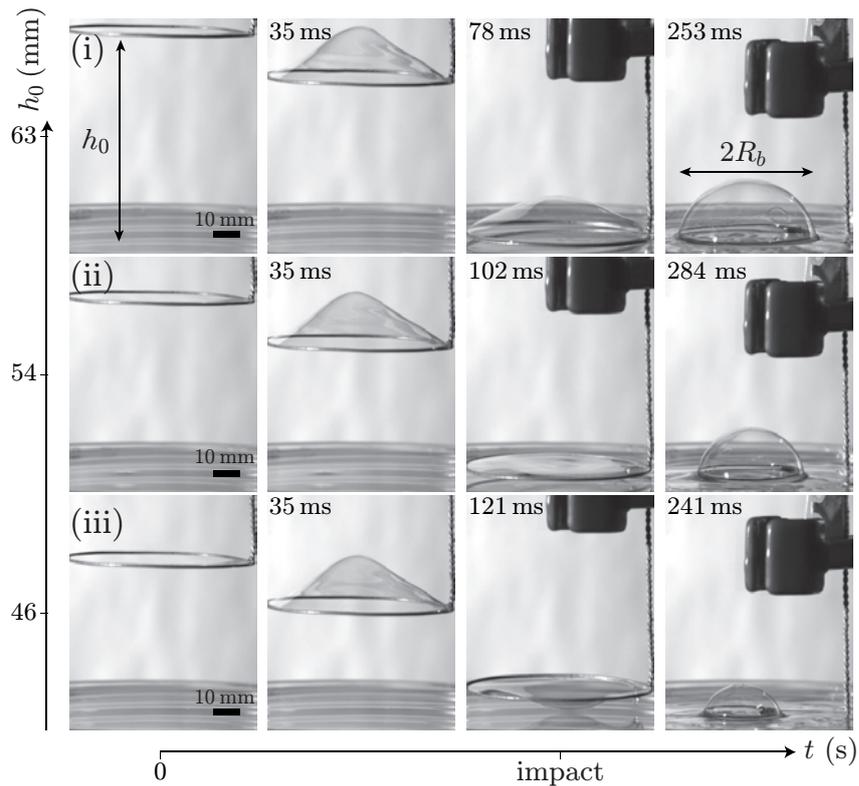


FIGURE 2.14: Cette figure illustre l'influence de l'oscillation amortie d'un film liquide sur la taille des bulles formées. Chaque série horizontale de photographies représente une expérience d'impact d'un film liquide réalisée avec une solution savonneuse. La vitesse d'impact est fixée  $v = 0.6 \text{ m.s}^{-1}$  et nous varions la distance  $h_0$  pour les trois expériences comme indiqué sur la figure, de haut en bas :  $h_0 = 63 \text{ mm}$ ,  $h_0 = 54 \text{ mm}$  et  $h_0 = 46 \text{ mm}$ . Au moment de l'impact, nous remarquons une variation de la courbure du film entre les trois expériences ce qui induit une variation du rayon  $R_b$  de la bulle formée comme indiqué dans le texte principal.

Dans notre étude, les deux systèmes fluides que nous utilisons sont une solution savonneuse composée à 2% de sa masse totale d'une solution commerciale (Palmolive) et 98% d'eau pure et une solution de polydiméthylsiloxane (PDMS) (Sylgard 184, Dow Corning). Ces deux fluides sont Newtoniens et leurs viscosités dynamiques  $\eta_\ell$ , mesurées à 20 °C avec un rhéomètre (Anton Paar MCR 301) sont respectivement  $\eta_\ell = 1 \text{ mPa.s}$  pour la solution savonneuse et  $\eta_\ell = 6.4 \text{ Pa.s}$  pour le PDMS. La masse volumique  $\rho_\ell$  des deux fluides est  $\rho_\ell = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  pour la solution savonneuse et  $\rho_\ell = 965 \text{ kg.m}^{-3}$  pour la solution de PDMS. Pour déterminer la tension de surface liquide-air,  $\gamma$ , nous utilisons la méthode de tensiométrie (Teclis Tracker) de la goutte pendante (décrite dans le chapitre 1 section 4). Les mesures ainsi obtenues sont :  $\gamma = 25 \text{ mN.m}^{-1}$  pour la solution savonneuse et  $\gamma = 20 \text{ mN.m}^{-1}$  pour le PDMS

Symbole	Définition	Unité
$R$	Rayon d'un cadre	}
$R_b$	Rayon d'une bulle qui dépend de la hauteur $h_0$	
$R_b^\infty$	Rayon d'une bulle qui ne dépend pas de la hauteur $h_0$	
$e$	Epaisseur d'un film	
$h_0$	Distance initiale entre un cadre et la surface libre du bain	
$d$	Course d'un cadre	
$d_a$	Course d'accélération d'un cadre	
$d_d$	Course de décélération d'un cadre	
$\Delta h_0$	Distance parcourue entre deux valeurs maximales d'une oscillation	
$H$	Distance maximale entre un film liquide et la surface du bain (voir Fig. 2.21)	
$\kappa^{-1}$	Rayon de courbure d'un film liquide	}
$\varepsilon$	Hauteur d'une calotte sphérique	
$V$	Volume	$\text{m}^3$
$t$	Temps	}
$\tau$	Temps de trajet d'un cadre à vitesse constante	
$T$	Période d'une oscillation	$\text{s}$
$v$	Vitesse d'impact d'un film liquide	$\text{m.s}^{-1}$
$a$	Accélération d'un cadre	$\text{m.s}^{-2}$
$p$	Pression	Pa
$\gamma$	Tension de surface air-liquide	$\text{N.m}^{-1}$
$\rho_a$	Masse volumique de l'air	}
$\rho_\ell$	Masse volumique d'un liquide	
$\eta_a$	Viscosité dynamique de l'air	}
$\eta_\ell$	Viscosité dynamique d'un liquide	
$\mathcal{C}$	Nombre capillaire	
$\mathcal{W}_e$	Nombre de Weber	
$\mathcal{R}_e$	Nombre de Reynolds	

TABLE 2.1: Tableau récapitulatif des variables utilisées dans cette étude.

liquide. Pour mesurer  $R_b$ , le rayon d'une bulle, nous enregistrons une séquence vidéo du processus de formation en le filmant par dessous avec une caméra rapide (Photron SA3) fonctionnant à une cadence de prise de vues de l'ordre de 250 images par

seconde. Le tableau 2.1 présente les variables utilisées dans ce chapitre.

Pour réaliser notre étude nous devons prendre soin d'établir des conditions sur les distances  $d$ ,  $d_a$  et  $d_d$  afin d'obtenir des résultats expérimentaux corrects, c'est-à-dire de s'assurer que le cadre impacte la surface du bain à la bonne vitesse  $v$ . Les valeurs des distances  $d$ ,  $d_a$  et  $d_d$  que nous choisissons pour paramétrer la course du cadre circulaire doivent satisfaire trois conditions. Dans un premier temps, la distance  $d$  totale de la course effectuée par le film doit être supérieure à la hauteur  $h_0$  pour que l'impact se fasse bien à vitesse constante (voir Fig. 2.12), et donc  $d > h_0$ , nous souhaitons une distance d'accélération  $d_a$  inférieure à la hauteur  $h_0$ ,  $d_a < h_0$ . La dernière condition est de positionner la phase de décélération  $d_d$  sous la surface libre du bain liquide,  $d_d < d - h_0$ . Lorsque ces trois conditions sont remplies, l'impact du film sur la surface libre du bain s'effectue à vitesse constante  $v$  et la cadre s'arrête avant d'entrer en collision avec le fond de la cuve contenant le bain liquide. Un graphique et un schéma montrés dans la figure 2.12 permettent de visualiser les différentes phases d'une expérience, depuis la mise en mouvement du cadre circulaire supportant le film liquide plan, jusqu'à son arrêt dans le bain liquide. Quand la vitesse  $v$  est suffisamment grande, supérieure à 0.2 m/s pour un cadre de rayon moyen, l'évolution de  $R_b$  avec  $h_0$  présente des oscillations amorties. En observant latéralement, la forme du film liquide plan lors de son approche et de son impact avec la surface du bain liquide, il est possible de comprendre l'origine physique du comportement oscillatoire de  $R_b$  avec  $h_0$  (voir Fig. 2.14). Lors de la phase d'accélération, le film liquide initialement plan subit une force d'inertie d'entraînement qui tend à le déformer. Lorsque la phase d'accélération cesse, le film déformé qui n'est alors plus soumis à cette force d'inertie relaxe vers sa forme d'équilibre plane avec des oscillations amorties. La taille de la bulle formée dépend donc directement de la position de l'apex du film supporté par le cadre à l'impact. Lorsque la distance initiale  $h_0$  est suffisamment grande,  $h_0 \rightarrow \infty$ , le rayon de la bulle formée ne dépend plus de  $h_0$  et prend une valeur constante, que nous notons par la suite  $R_b^\infty$  (voir la figure 2.15). Sur cette figure, nous pouvons aussi mesurer  $\Delta h_0$  qui représente la distance entre deux maximums consécutifs dans le signal  $R_b$  en fonction de  $h_0$ .

### 3 Oscillations amorties d'un film liquide mince

Durant la phase d'accélération, le cadre circulaire supportant le film liquide plan est dans un référentiel non inertiel qui est accéléré par rapport à celui du laboratoire. Ce phénomène place le film hors de sa position d'équilibre plane. La force d'inertie d'entraînement agit alors sur le film qui se déforme. Cette force qui est proportionnelle à l'accélération appliquée disparaît quand le cadre atteint sa vitesse

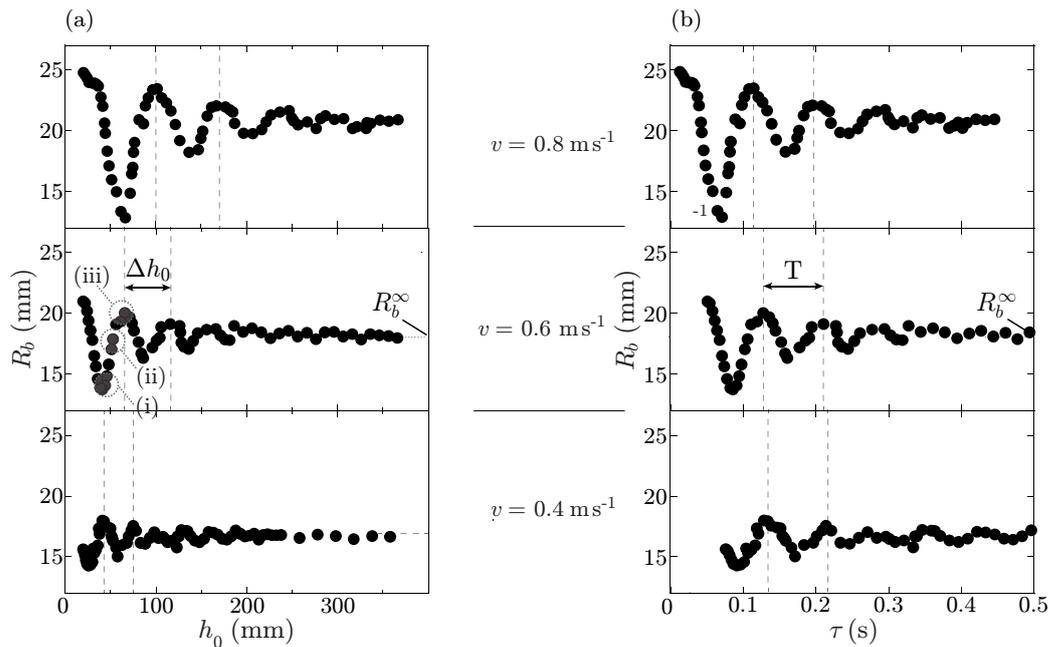


FIGURE 2.15: Cette figure présente les profils oscillatoires qu'effectue le film liquide pendant la descente du cadre circulaire vers le bain liquide. En (a), les graphiques représentent le rayon de la bulle  $R_b$  obtenue après immersion du cadre, en fonction de la distance  $h_0$ . A droite, en (b), les graphiques représentent la rayon de la bulle  $R_b$  en fonction du temps  $\tau$  mis par le film liquide pour se déplacer entre la fin de la distance d'accélération  $d_a$  et l'impact,  $\tau = \frac{h_0 - d_a}{v}$ .  $T$  est la période de l'oscillation. Dans ces expériences nous avons fixé le rayon du film  $R = 31 \text{ mm}$  et les distances  $d_a = 10 \text{ mm}$  et  $d_d = 8 \text{ mm}$ . Nous avons fait varier la vitesse d'impact, de haut en bas  $v = 0.8 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $v = 0.6 \text{ m.s}^{-1}$  et  $v = 0.4 \text{ m.s}^{-1}$  comme indiqué. Les points (i), (ii) et (iii) sont trois valeurs obtenues par les expériences réalisées en Figure 2.14.

stationnaire. Le film liquide relaxe ensuite vers une nouvelle position stable. Cette relaxation induite par la tension de surface provoque de la friction avec l'air sur le film liquide causant l'oscillation amortie que nous observons sur la figure 2.14 et reportées dans la figure 2.15. Cette oscillation provoque alors une variation du rayon  $R_b$  de la bulle formée qui dépend de l'état dans lequel se trouve le film liquide à l'impact. En modifiant la hauteur  $h_0$  de l'impact, nous pouvons reconstituer le profil oscillatoire du film liquide. En effet, lorsque l'anneau entre en collision avec la surface libre du bain, le volume d'air emprisonné dépend de la courbure du film. Le volume d'air emprisonné est maximal quand la déflexion du film vers le haut est maximale (voir la première série de photographies horizontale sur Fig 2.14). A l'inverse, le volume d'air est minimal lorsque la déflexion vers le dessous est maxi-

male (voir la dernière série de photographies horizontale sur Fig 2.14). D'après la publication de G.I. Taylor [31], de 1959, il existe deux modes d'oscillation pour un film liquide mince qui sont : symétrique et antisymétrique. Le mode symétrique se distingue par le fait que les deux interfaces oscillent en opposition de phase [voir Fig. 2.16(a)] et le mode antisymétrique que les deux interfaces sont en phase [voir Fig. 2.16(b)]. Comme montré dans ce qui suit, pour les paramètres propres à notre expérience, nous n'observons que le cas d'une oscillation antisymétrique. Une publication de Couder et al. [32], traitant également des oscillations de films liquides minces, indique que le mode d'oscillation symétrique pour lequel les vibrations sont en opposition de phase implique un écoulement visqueux du liquide dans le film qui se propage du nœud<sup>1</sup> vers le centre du film. En réalisant une expérience comparative des profils d'oscillation des films liquides formés par les deux systèmes fluides de notre expérience, nous pouvons vérifier cette hypothèse. Leurs viscosités étant différentes, si nous constatons une modification entre les deux réponses oscillatoires, cela indiquera la présence d'un phénomène de dissipation visqueuse dépendant de la valeur de la viscosité du liquide.

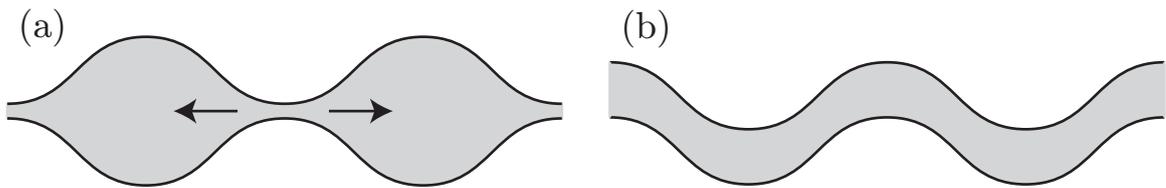


FIGURE 2.16: Schémas représentant le mode d'oscillation symétrique en (a) et antisymétrique en (b) dans un film liquide mince. Les flèches indiquent le sens de d'écoulement du fluide provoqué par le mode d'oscillation symétrique.

---

Nous utilisons deux systèmes fluides différents, une solution de PDMS et une solution savonneuse, pour créer un film liquide mince sur un cadre. Comme mentionné au début du chapitre, la viscosité du premier liquide est environ 6000 fois plus grande que celle du second. Pour étudier la variation temporelle du point central de déflexion d'un film liquide, nous utilisons une expérience différente que celle présentée depuis le début de ce chapitre pour des raisons pratiques. Comme évoqué précédemment dans ce chapitre, nous formons le film liquide en retirant un cadre circulaire d'un bain liquide. Ce processus crée, comme nous l'avons vu précédemment, une demi-caténoïde qui se déstabilise en laissant un film liquide sur ce cadre si la distance entre le cadre et la surface libre du bain est suffisamment grande. Lorsque les

---

1. Ce que Y. Couder et al. appellent nœud dans leur article, est la zone de contact entre le film liquide et le cadre circulaire.

parois de la demi-caténoïde s'effondrent, le film formé sur le cadre se met à osciller de manière similaire au cas observé dans notre expérience lors de la mise en mouvement d'un cadre. Cette similitude nous permet d'étudier l'oscillation plus simplement en observant directement la variation de la déflexion centrale du film en fonction du temps  $t$  (voir Fig. 2.17) et de comparer ainsi les réponses des films créés avec les deux systèmes fluides que nous utilisons. En effet, pour visionner l'oscillation dans le cas de notre expérience, nous aurions besoin d'une caméra se déplaçant à la même vitesse que le cadre circulaire supportant le film liquide. Avec notre méthodologie, nous pouvons observer les oscillations du film liquide lorsque le cadre est immobile. La figure 2.17 montre les résultats obtenus pour une telle expérience réalisée avec un film de savon puis avec un film de PDMS. Nous remarquons que les oscillations amorties observées pour ces deux systèmes se superposent. Les deux fluides utilisés possèdent des masses volumiques relativement proches mais la période d'oscillation est principalement donnée par l'inertie de l'air, la masse volumique du fluide n'est donc pas un paramètre essentiel de la variation de la réponse oscillante du film liquide. Les résultats observés en Fig. 2.17 montrant la superposition des signaux pour des fluides de différentes viscosités nous permettent d'affirmer que le mode d'oscillation est le mode antisymétrique. La similitude de la réponse mécanique observée pour les deux fluides suggère que la dissipation visqueuse à l'intérieur du film liquide n'est pas le phénomène prépondérant expliquant l'amortissement. Il apparaît alors que pour le cas de l'oscillation engendrée par l'accélération, la période d'oscillation est imposée uniquement par l'inertie de l'air dépendant directement de l'accélération appliquée au cadre. La figure 2.15 présente des expériences d'impact à différentes vitesses  $v$  :  $0.8 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $0.6 \text{ m.s}^{-1}$  et  $0.4 \text{ m.s}^{-1}$ , le rayon de l'anneau utilisé est  $R = 31 \text{ mm}$  et les paramètres d'accélération sont  $d_a = 10 \text{ mm}$  et  $d_d = 8 \text{ mm}$ . Les graphiques disposés en Fig. 2.15(a) affichent l'évolution du rayon de la bulle  $R_b$ , en fonction de la distance initiale,  $h_0$  entre le cadre et la surface libre du bain liquide.  $\Delta h_0$  représente la différence entre deux valeurs maximales consécutives de  $R_b$ . Comme nous pouvons le remarquer, cette valeur dépend de la vitesse d'impact  $v$ . Par la suite, nous traçons l'évolution de  $R_b$  en fonction du temps  $\tau = \frac{h_0 - d_a}{v}$  qui définit l'intervalle de temps entre la fin de la phase d'accélération et le contact entre le cadre circulaire et le bain liquide. Cette approche nous permet d'établir la pseudo-période  $T$  de l'oscillation amortie qui est indépendante de la vitesse dans la gamme  $v_c < v < 1 \text{ m.s}^{-1}$  dans laquelle nous travaillons. Plus précisément, la figure 2.18 montre que  $T$  correspond à la période de résonance  $\sqrt{\frac{\rho_a R^3}{\gamma}}$  du mode antisymétrique d'oscillation d'un film de savon circulaire que nous trouvons dans la littérature [32, 33]. Il est intéressant de mentionner que l'expression de la première période de résonance est généralement trouvée sous une forme prenant en compte

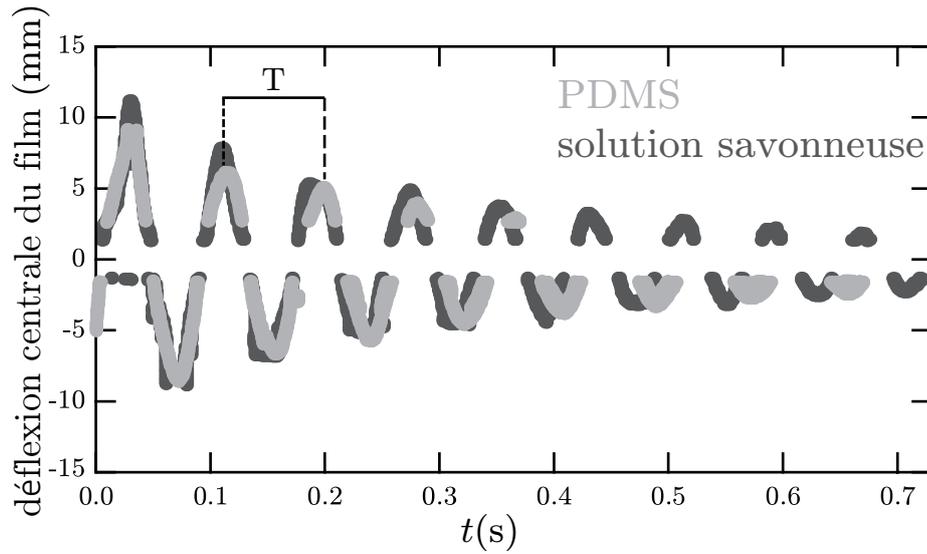


FIGURE 2.17: Evolution de la déflexion centrale de films oscillants sur un cadre circulaire de rayon  $R = 30$  mm pour les solutions de PDMS et de savon comme indiqué sur la figure. Dans cette expérience, nous retirons un cadre circulaire d'un bain liquide de manière à créer un film de liquide connectant ce cadre à la surface libre du bain adoptant la forme d'une demi-caténoïde (voir Fig. 2.13). Ces résultats sont obtenus en filmant de côté l'oscillation d'un film liquide obtenue après l'effondrement de cette demi-caténoïde lorsque la distance entre le cadre circulaire et la surface du bain liquide est suffisamment importante pour que la caténoïde devienne instable et s'effondre. Cette expérience permet de déterminer le mode d'oscillation du film liquide avec un cadre immobile. Ici, la superposition de ces deux oscillations amorties correspond au mode antisymétrique.

l'inertie du liquide  $T = \frac{2\pi}{m_0} R \sqrt{\frac{\rho_\ell e + (2\pi/m_0)\rho_a R}{2\gamma}}$  [32], où  $e$  est l'épaisseur du film,  $\rho_\ell$  est la masse volumique du liquide et  $m_0 \approx 2.4$  est le premier zéro de la fonction de Bessel de première espèce  $J_0(r)$  qui se situe à une distance radiale  $r = R$ .  $T$  doit donc être indépendant de la masse volumique du liquide  $\rho_\ell$  et varier comme  $R^{3/2}$  plutôt que de varier linéairement en fonction du rayon du cadre,  $R$  pour des cadres plus grands qu'un seuil  $R_c \sim \rho_\ell e / \rho_a$ . Dans notre expérience, le rayon seuil est de l'ordre de  $R_c = 1 - 10$  mm et la gamme des rayons des cadres  $R$  que nous utilisons est supérieure au centimètre. Nous pouvons donc négliger l'inertie du liquide par rapport à l'inertie de l'air, dans le cadre de nos expériences. Comme montre la figure 2.19, si la vitesse d'impact et le rayon du cadre sont fixés et que nous varions la valeur de l'accélération  $a_a$  en modifiant la distance d'accélération  $d_a$ , nous remarquons que ce paramètre n'affecte que l'amplitude de la réponse oscillatoire et pas la pseudo-

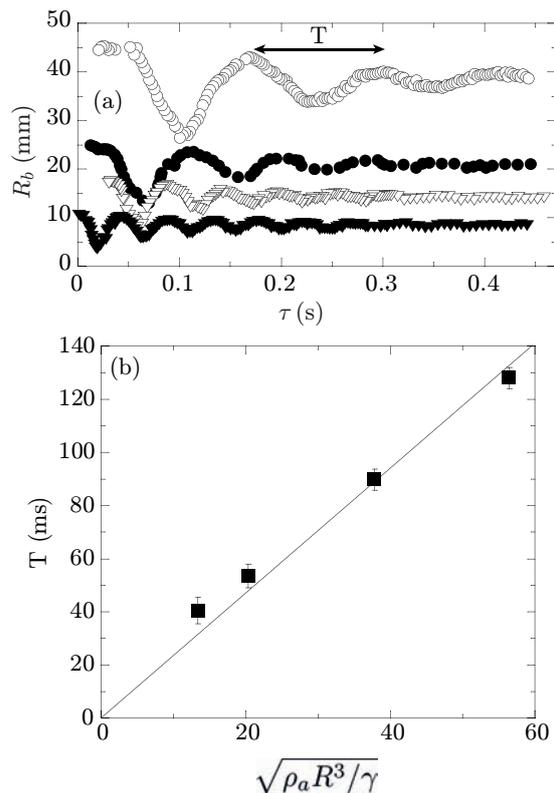


FIGURE 2.18: Le graphique (a) représente la variation du rayon de la bulle formée  $R_b$  en fonction du temps  $\tau$  pour des films de savon de différents rayons  $R$  : 41 mm (o), 31 mm (●), 21 mm (∇) et 15 mm (▼). Le graphique (b) compare la pseudo-période mesurée en (a) et celle prédite par  $\sqrt{\rho_a R^3 / \gamma}$ . La ligne tracée correspond au meilleur ajustement linéaire  $T = 2.35 \sqrt{\rho_a R^3 / \gamma}$ . Les barres d'erreurs sont déterminées par l'écart de mesure obtenu par dix expériences successives. Les paramètres d'accélération et de décélération sont respectivement  $d_a = 10$  mm et  $d_d = 8$  mm. La vitesse d'impact est fixée  $v = 0.8$  m.s<sup>-1</sup>.

période. En effet seules les valeurs maximales et les minimales de  $R_b$  changent dans le graphique représentant  $R_b$  en fonction de la distance  $h_0$ . Pour la suite de notre étude, nous prenons donc une distance initiale  $h_0$  suffisamment grande pour éviter que le film n'entre en contact avec le bain pendant sa phase d'oscillation, c'est-à-dire avant qu'il n'ait relaxé vers sa forme d'équilibre. Ainsi, nous pouvons caractériser les variations du rayon de la bulle  $R_b^\infty$ , qui ne dépend alors plus de  $a_a$  et de  $h_0$ . Les variations de  $R_b^\infty$  en fonction de  $v$  pour les deux systèmes fluides montrent l'existence de deux régimes hydrodynamiques séparés par une vitesse critique  $v_c$ . Pour chacun de ces deux régimes,  $R_b^\infty$  suit une loi de puissance  $R_b^\infty \propto v^\alpha$  avec une valeur de l'exposant  $\alpha$  qui diffère entre les deux régimes (voir Fig. 2.20). Expérimentalement, les valeurs que l'on détermine pour  $\alpha$  sont  $0.08 \pm 0.02$  et  $0.66 \pm 0.1$  pour  $v < v_c$  et

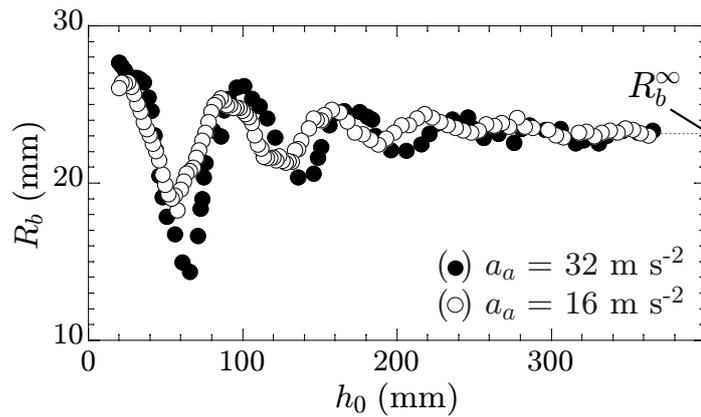


FIGURE 2.19: Evolution du rayon d'une bulle interfaciale  $R_b$  en fonction de la distance  $h_0$  pour un cadre circulaire de rayon  $R = 31$  mm et une vitesse d'impact  $v = 0.8$  m.s<sup>-1</sup>. Nous avons fait varier l'accélération comme indiqué sur la figure en modifiant la rampe de la variation de vitesse :  $d_a = 10$  mm (●) et  $d_a = 20$  mm (○). Lorsque la hauteur initiale  $h_0$  est suffisamment grande,  $R_b$  prend une valeur notée  $R_b^\infty$  qui est indépendante de  $h_0$  et de l'accélération  $a_a$

$v > v_c$ , respectivement. Comme mentionné précédemment, en contraste avec l'impact de goutte [12],  $R_b^\infty$  augmente dans nos expériences de manière monotone avec la vitesse  $v$ . Les résultats montrés en figure 2.20 suggèrent que ces exposants sont indépendants du rayon du cadre  $R$  et de la nature du fluide et que la vitesse seuil  $v_c$  décroît avec le rayon  $R$ .

## 4 Résultats

Pour comprendre ces résultats expérimentaux, il convient d'identifier les variables pertinentes du système. Comme le montre la figure 2.20, pour les deux régimes hydrodynamiques observés, les valeurs des exposants  $\alpha$  des lois de puissance semblent être indépendantes des propriétés du liquide que nous utilisons, que ce soit la viscosité dynamique  $\eta_\ell$  ou la masse volumique  $\rho_\ell$ . Par contre, du fait de la déflexion du film, on s'attend à ce que la tension de surface qui tend à s'opposer aux déformations du film soit un paramètre important dans nos expériences. Par conséquent, le rayon de la bulle  $R_b^\infty$  devrait donc dépendre de la vitesse  $v$ , du rayon du cadre  $R$ , de la tension de surface air-liquide  $\gamma$ , la masse volumique du fluide dans lequel il évolue (ici l'air)  $\rho_a$  et la viscosité du même fluide  $\eta_a$ . Nous pouvons nous interroger sur l'influence de l'épaisseur du film  $e$  dans le mécanisme de formation des bulles. Pour caractériser l'influence de  $e$  sur  $R_b^\infty$ , nous avons effectué des expériences d'impact dont les films

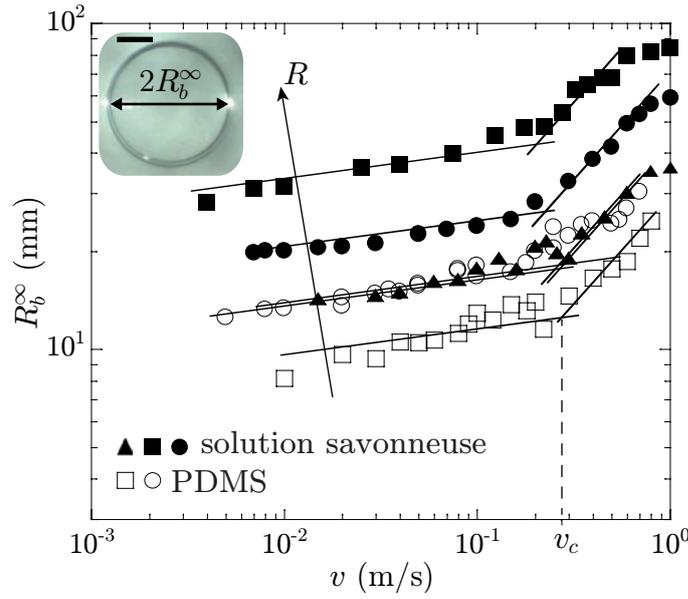


FIGURE 2.20: Graphique représentant l'évolution du rayon de la bulle  $R_b^\infty$  en fonction de la vitesse d'impact  $v$  pour différents rayons  $R$  : 82 mm (■), 51 mm (●), 36 mm (▲), 35 mm (○) et 25 mm (□). Les séries de résultats dont les symboles sont remplis en noir correspondent aux expériences réalisées avec une solution savonneuse. À l'inverse, les symboles vides correspondent aux expériences réalisées avec une solution de PDMS. Pour chaque solution et rayon de cadre  $R$ , nous observons une variation en loi de puissance  $R_b^\infty \propto v^\alpha$  avec un exposant  $\alpha$  de l'ordre de  $0.08 \pm 0.03$  pour des vitesses d'impact inférieures à la vitesse seuil  $v_c$  de transition entre les deux régimes. Lorsque la vitesse d'impact est supérieure à  $v_c$ , la valeur de l'exposant  $\alpha = 0.66 \pm 0.1$  est plus importante. Les lignes correspondent à ces lois de puissances. L'image insérée dans le graphique rappelle la définition de la mesure du rayon de la bulle  $R_b^\infty$  ; échelle : 5 mm.

liquides ont été formés en tirant le cadre du bain à différentes vitesses. Du fait de la loi de Frankel sur les films minces qui définit son épaisseur en fonction du nombre capillaire  $\mathcal{C}$  et de la courbure moyenne du film  $\kappa^{-1}$  comme  $e \sim \kappa^{-1} \mathcal{C}^{2/3}$  avec  $\mathcal{C} = \eta \ell v / \gamma$ . Ces films possèdent différentes épaisseurs, dans l'intervalle  $e = [1 - 10 \mu\text{m}]$  pour nos expériences ; ces mesures ayant été déterminées par mesures interférométriques avec notre spectromètre uv-visible commercial (Avantes AvaSpec-2048) [voir Chapitre 1 section 4]. En réalisant avec ces différents films plans, des expériences systématiques de formation de bulles, nous avons pu établir que pour une vitesse  $v$  et un rayon de cadre,  $R$  donnés,  $R_b^\infty$  ne dépend pas de l'épaisseur du film plan. Bien que l'épaisseur du film,  $e$ , ne semble pas être un paramètre pertinent dans nos expériences, nous pouvons néanmoins imaginer que l'accélération de la pesanteur puisse

jouer un rôle, en déformant le film avant l'impact avec la surface. La force de gravité ( $\propto \pi R^2 e \rho_l g$ ) s'exerçant sur le film plan devrait devenir importante devant la force capillaire ( $\propto 2\pi R\gamma$ ) pour les films très épais, c'est-à-dire, lorsque  $e > 2\gamma/(\rho_l g R)$ . Ceci correspond à des films d'une épaisseur d'environ 100  $\mu\text{m}$ , bien plus larges que les films utilisés dans nos expériences. Une rapide analyse dimensionnelle montre que  $R_b^\infty$  est une fonction du nombre capillaire  $\mathcal{C} = \eta_a v / \gamma$  et du nombre de Weber  $\mathcal{W}_e = \rho_a v^2 R / \gamma$ , deux quantités sans dimension faisant intervenir les propriétés de l'air ( $\rho_a$  et  $\eta_a$  étant respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique de l'air) et la tension de surface air-liquide  $\gamma$ . En d'autres termes, cette analyse prédit que  $R_b^\infty / R$  varie comme  $\mathcal{W}_e^\beta \mathcal{C}^\delta$  où  $\beta$  et  $\delta$  sont deux constantes numériques à déterminer. Comme nous allons le démontrer dans ce qui suit, la formation des bulles est contrôlée soit par un mécanisme visco-capillaire ( $v < v_c$ ,  $\beta = 0$  et  $\delta = \alpha$  où  $\alpha$  est une valeur numérique) ou par un mécanisme inertio-capillaire ( $v > v_c$ ,  $\beta = \alpha/2$  et  $\delta = 0$ ). Nous nous attendons à ce que le mécanisme comparant l'inertie du gaz à la tension de surface contrôle la reponse quand le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e = \mathcal{W}_e / \mathcal{C}$  est grand. C'est le cas pour le régime hydrodynamique observé pour  $v > v_c$  (voir Fig. 2.20), le nombre de Reynolds prend une valeur  $\mathcal{R}_e \approx 1000$  lorsque le rayon du cadre circulaire est  $R = 50$  mm et la vitesse d'impact est  $v = 0.3$  m.s<sup>-1</sup>. Quand nous travaillons dans le régime  $v > v_c$ , le film liquide dans son référentiel lié au cadre rencontre un flux d'air uniforme de vitesse constante  $v$  qui crée une déformation de courbure moyenne  $\kappa^{-1}$ . En utilisant le principe de Bernoulli, cela se traduit mathématiquement par  $\rho_a v^2 / 2 = 4\gamma\kappa$  donc  $\kappa^{-1} = 8R / \mathcal{W}_e$ . Si nous admettons que la déformation prend la forme d'une calotte sphérique dont le volume en coordonnées sphériques  $(\rho, \theta, \varphi)$  (voir Fig. 2.22) est :

$$V_{cal} = \int_{\frac{\sqrt{\kappa^{-2} - R^2}}{\cos \theta}}^{\kappa^{-1}} \int_0^{\arcsin R\kappa} \int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\rho \, \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (2.1)$$

Après avoir effectué les calculs des intégrales portant sur  $\rho$  et  $\varphi$  nous obtenons :

$$V_{cal} = \frac{2\pi\kappa^{-3}}{3} \int_0^{\arcsin R\kappa} \left[ 1 - \frac{(1 - R^2\kappa^2)^{\frac{3}{2}}}{\cos^3 \theta} \right] \sin \theta \, d\theta. \quad (2.2)$$

Puis nous calculons séparément les deux termes  $V_1$  et  $V_2$  de cette intégrale sur  $\theta$  tel que  $V_{cal} = V_1 - V_2$  :

$$V_1 = \frac{2\pi\kappa^{-3}}{3} \int_0^{\arcsin R\kappa} \sin \theta \, d\theta, \quad (2.3)$$

$$V_2 = \frac{2\pi\kappa^{-3}}{3} \left( 1 - \sqrt{1 - R^2\kappa^2} \right). \quad (2.4)$$

Nous remarquons que  $\sin \theta d\theta = -d(\cos \theta)$ , l'expression du volume  $V_2$  s'intègre en effectuant un changement de variable  $u = \cos \theta$  et on écrit alors :

$$V_2 = \frac{2\pi\kappa^{-3} (1 - R^2\kappa^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \int_{\cos(\arcsin R\kappa)}^1 \frac{du}{u^3}, \quad (2.5)$$

$$V_2 = \frac{\pi\kappa^{-3} \sqrt{1 - R^2\kappa^2}}{3} (R\kappa)^2. \quad (2.6)$$

Nous obtenons finalement le volume de la calotte au moment de l'impact ( $\kappa = \kappa_i$  voir Fig.2.22) :

$$V_{cal} = V_1 - V_2 = \frac{2\pi\kappa_i^{-3}}{3} \left[ 1 - \sqrt{1 - R^2\kappa_i^2} \left( 1 + \frac{1}{2}R^2\kappa_i^2 \right) \right]. \quad (2.7)$$

Du fait de la conservation du volume d'air emprisonné, le volume de la calotte sphérique calculé précédemment (Eq. (2.7)) est égal au volume d'air présent dans la bulle formée de rayon  $R_b$  qui est supposée hémisphérique,  $V_b = 2\pi(R_b^\infty)^3/3$ . Nous pouvons alors écrire :

$$R_b^\infty = \kappa_i^{-1} \left[ 1 - \sqrt{1 - R^2\kappa_i^2} \left( 1 + \frac{1}{2}R^2\kappa_i^2 \right) \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (2.8)$$

Nous avons établi précédemment que  $\kappa_i^{-1} = \frac{8R}{\mathcal{W}_e}$ . L'équation (2.8) peut s'écrire :

$$\frac{R_b^\infty}{R} = \frac{8}{\mathcal{W}_e} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{\mathcal{W}_e^2}{64}} \left( 1 + \frac{\mathcal{W}_e^2}{128} \right) \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (2.9)$$

Dans nos expériences, comme  $\mathcal{W}_e = 10^{-5} - 3$ , il semble légitime de tenter de chercher une forme plus simple de l'équation 2.9 en effectuant un développement limité autour de  $\mathcal{W}_e = 0$ . En écrivant un tel développement limité à l'ordre 2, nous obtenons :

$$\frac{R_b^\infty}{R} \simeq \frac{3^{1/3}}{4} \mathcal{W}_e^{1/3}. \quad (2.10)$$

Le graphe 2.21 montre les prédictions de l'équation exacte 2.9 et de sa forme simplifiée 2.10 pour la gamme des nombres de Weber  $\mathcal{W}_e$  expérimentaux pour le régime inertiel. Nous remarquons qu'il est difficile de distinguer la taille des bulles entre ces deux prédictions. Tracer le rayon de la bulle normalisé par celui du cadre en fonction de l'équation 2.9 plutôt que l'équation 2.10 n'apporterait alors rien. Nos expériences montrent que ce rayon normalisé tend à ne plus croître lorsqu'il atteint une valeur autour de 1 alors que le modèle, qui prédit le contraire, ne décrit plus l'expérience.

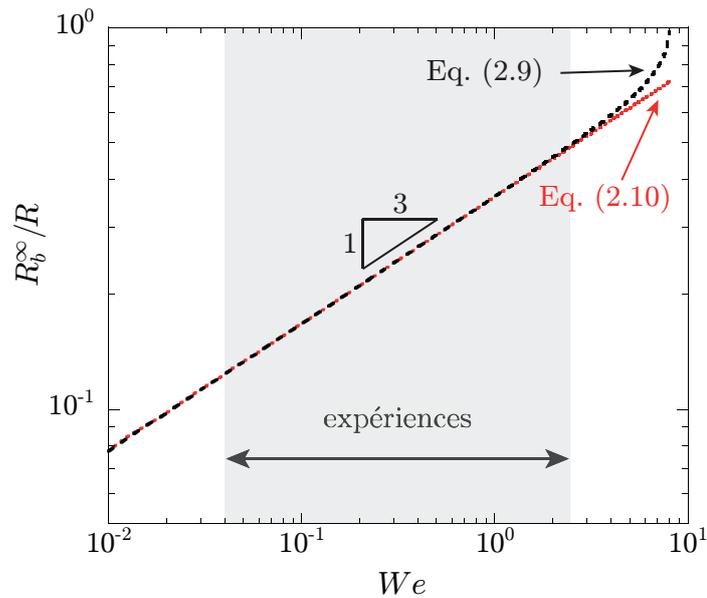


FIGURE 2.21: Graphique représentant la variation de rayon normalisé de la bulle en fonction du nombre de Weber  $\mathcal{W}_e$ . La courbe noire représente la prédiction de l'équation 2.9 et la courbe rouge celle de l'équation 2.10. La zone grisée désigne la plage de variation de  $\mathcal{W}_e$  dans nos expériences.

Comme le démontre la figure 2.23, les prédictions de ce modèle physique simple sont en excellent accord avec nos résultats expérimentaux obtenus pour  $v > v_c$ . Lorsque nous traçons  $R_b^\infty/R$  en fonction de  $\mathcal{W}_e^{1/3}$ , nos données expérimentales se regroupent sur la courbe maîtresse prédite théoriquement : la valeur du préfacteur,  $\frac{3^{1/3}}{4} = 0.36$  est très proche de la valeur déterminée expérimentalement  $\approx 1$ . Il convient néanmoins de remarquer que lorsque  $R_b^\infty$  devient proche ou plus grand que  $R$  au plus grands  $\mathcal{W}_e$  correspondant aux données expérimentales incluses dans la partie encadrée en rouge sur la figure 2.23 les résultats expérimentaux prennent des valeurs inférieures à celles prédites par le modèle. Ceci n'est pas surprenant dans la mesure où notre modèle est établi pour des valeurs de  $\mathcal{W}_e$  proches de zéro et la zone en rouge se situe plutôt dans une zone  $\mathcal{W}_e \approx 1$ .

Lorsque  $v < v_c$ , la déformation du film résulte du drainage du film d'air interstitiel lorsque le cadre circulaire entre en contact avec le bain liquide. Nous modélisons ce flux radial par l'approximation de lubrification de l'équation de Stokes :

$$\frac{\partial p_a(r, t)}{\partial r} \sim \eta_a \frac{\partial^2 u_r(r, t)}{\partial z^2} \quad (2.11)$$

où  $u_r$  est la composante radiale de la vitesse de l'air,  $z$  est la direction verticale et  $p_a$  est la pression de l'air (voir Fig. 2.22). La pression de l'air à travers un film liquide

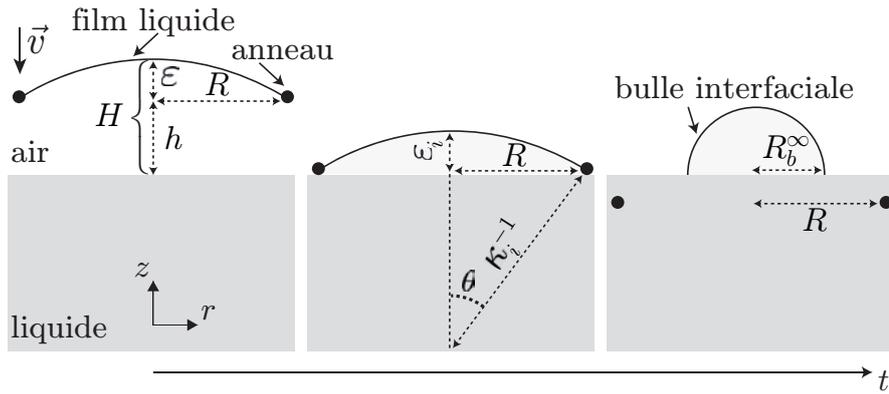


FIGURE 2.22: Ce schéma (pas à l'échelle) représente l'expérience d'impact d'un film liquide sur un bain du même liquide et définit tous les observables de l'expérience :  $H$  la distance maximale entre le film liquide et la surface du bain,  $\varepsilon$  la hauteur de la calotte,  $h$  la hauteur de l'anneau par rapport à la surface du bain,  $\kappa_i$  le rayon de courbure de la calotte à l'impact,  $R$  le rayon du film liquide,  $R_b^\infty$  le rayon de la bulle créée.

$\delta p_a$  est une fonction de la courbure moyenne du film  $\kappa(r, t)$  :

$$\delta p_a(r, t) = p_a(r, t) - p_0 = 4\gamma\kappa(r, t) \quad (2.12)$$

avec  $p_0$  la pression atmosphérique.  $\kappa(r, t)$  et le profil du film  $\varepsilon(r, t)$  (voir Fig. 2.22) sont par reliés par géométrie :

$$2\kappa(r, t) = \left[ 1 + \left( \frac{\partial \varepsilon(r, t)}{\partial r} \right)^2 \right]^{\frac{-3}{2}} \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon(r, t)}{\partial r^2} + \frac{\frac{\partial \varepsilon(r, t)}{\partial r} \left[ 1 + \left( \frac{\partial \varepsilon(r, t)}{\partial r} \right)^2 \right]}{r} \right]. \quad (2.13)$$

L'équation de lubrification décrivant le flux de gaz présent en dessous du film s'écrit :

$$\frac{\partial H(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{rH(r, t)^3}{12\eta_a} \frac{\partial p_a(r, t)}{\partial r} \right) \quad (2.14)$$

où  $H(r, t) = h(t) + \varepsilon(r, t)$  est petit devant les autres dimensions du problème, c'est-à-dire,  $H \ll R$ ,  $H(r, t) \ll R$ ,  $h(t)$  étant la distance entre cadre circulaire et la surface libre du bain à l'instant  $t$ .

En utilisant ces arguments physiques simples pour modéliser l'écoulement, nous allons maintenant rationaliser nos résultats expérimentaux, obtenus pour  $v < v_c$ , en loi d'échelle. Une analyse en ordre de grandeur de l'équation (2.11) et la conservation

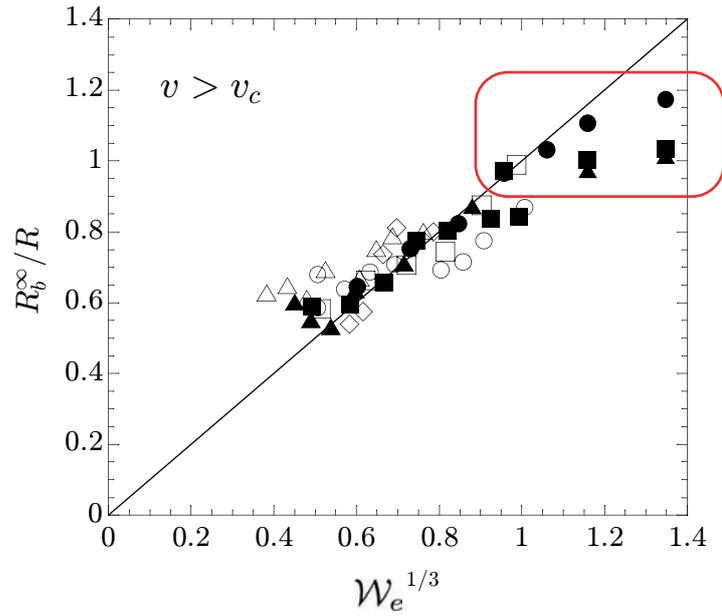


FIGURE 2.23: Le graphique représente la variation du rayon de la bulle  $R_b^\infty$  normalisé par le rayon du cadre circulaire  $R$  en fonction de  $W_e^{1/3}$  dans le cas du régime inertio-capillaire ( $W_e$  est le nombre de Weber). Le rayon  $R$  du cadre : 82 mm (■), 51 mm (●), 36 mm (▲), 35 mm (○), 25 mm (□), 15 mm (△) et 10 mm (◇). Comme défini dans la figure 2.20 les symboles noirs correspondent aux expériences réalisées avec une solution de PDMS et les symboles blancs sont les résultats des expériences faites avec une solution savonneuse. Comme expliqué dans le texte, la partie encadrée désigne les résultats expérimentaux en dessous de la prédiction du fait de la limite de notre modèle écrit autour de  $W_e = 0$ . La droite de pente 1 est un guide pour les yeux.

de la masse nous donnent respectivement  $\delta p_a \sim \eta_a \frac{R u_r}{H^2}$  et  $u_r \sim \frac{vR}{H}$ . Par conséquent,  $\delta p_a \sim \eta_a \frac{vR^2}{H^3}$ . En admettant que la déformation du film prend la forme d'une calotte sphérique de rayon  $\kappa_i^{-1}$  quand le cadre circulaire rencontre la surface libre du bain, c'est-à-dire lorsque  $h = 0$ , le maximum de déflexion du film à l'impact  $\varepsilon_i \ll R$  peut être écrit  $\varepsilon_i \sim R^2 \kappa_i$ . L'augmentation de la pression dans la couche d'air coincée sous le film liquide le déforme, tandis que les forces capillaires tendent à vouloir le maintenir plan. La compétition entre ces deux effets se traduit mathématiquement par un équilibre entre la pression dans l'air ( $\eta_a R^2 v / \varepsilon_i^3$ ) au moment de l'impact et la pression de Laplace ( $\gamma \kappa_i \sim \gamma \varepsilon_i / R^2$ ), qui donne  $\varepsilon_i \sim RC^{1/4}$ . Dans nos expériences  $C^{1/4} \approx 0.03 - 0.18$ , l'approximation  $\varepsilon_i \ll R$  que nous avons faite semble donc raisonnable. En utilisant la conservation du volume entre la calotte sphérique et la bulle formée,  $\varepsilon_i R^2 \sim R_b^\infty{}^3$ , nous obtenons alors une prédiction pour la variation du

rayon de la bulle normalisée  $R_b^\infty/R \sim C^{1/12}$ . Comme le démontre la figure 2.24, cette prédiction théorique est en excellent accord avec nos résultats expérimentaux obtenus dans le régime  $v < v_c$ . En rassemblant les deux expressions trouvées pour  $R_b^\infty/R$  dans les deux régimes, nous obtenons une expression de la vitesse seuil  $v_c$  :

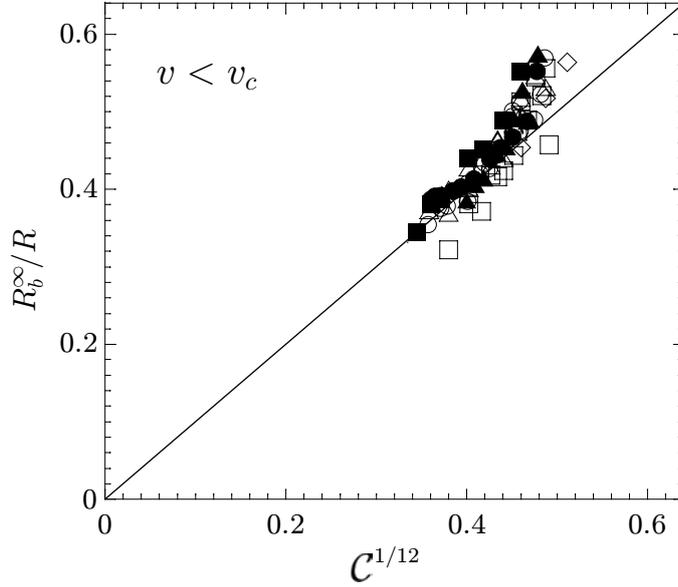


FIGURE 2.24: Le graphique représente la variation du rayon de la bulle  $R_b^\infty$  normalisé par le rayon du cadre  $R$  en fonction de  $C^{1/12}$  dans le cas du régime visco-capillaire ( $C$  est le nombre capillaire). Le rayon  $R$  du cadre varie dans cette expérience : 82 mm (■), 51 mm (●), 36 mm (▲), 35 mm (○), 25 mm (□), 15 mm (△) et 10 mm (◇). Comme défini dans la figure 2.20 les symboles noirs correspondent aux expériences réalisées avec une solution de PDMS et les symboles blancs sont les résultats des expériences réalisées avec la solution savonneuse. La droite noire de pente 1 est un guide pour les yeux.

---

$$v_c \sim \left( \frac{\eta_a \gamma^3}{\rho_a^4 R^4} \right)^{1/7} \quad (2.15)$$

qui correspond à celle mesurée (voir Fig. 2.25). Outre la nature de la masse volumique du fluide dans l'équation (2.15), nous pouvons noter que l'expression de la vitesse seuil  $v_c$  possède une forme similaire à la vitesse à laquelle la taille de la bulle est maximale pour l'expérience d'impact de goutte sur un solide [12]. Aussi, si nous adimensionnons l'équation (2.15), nous obtenons une prédiction de transition entre les deux régimes observés sous une forme sans dimension. Le rayon de la bulle formée,  $R_b^\infty$ , est ainsi contrôlé par le mécanisme inertio-capillaire lorsque  $(W_e^4/C)^{1/7} > 1$  et par le mécanisme visco-capillaire dans le cas contraire.

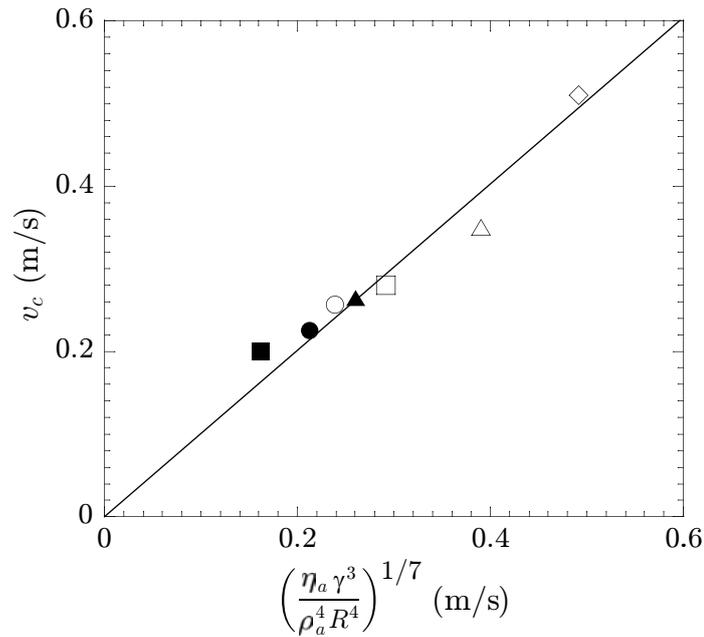


FIGURE 2.25: Graphique de comparaison entre les mesures expérimentales et la prédiction théorique donnée par l'équation 2.15 de la vitesse seuil de transition  $v_c$  séparant les deux régimes hydrodynamiques observés dans nos expériences. Comme défini dans la Fig. 2.20 les symboles noirs correspondent aux expériences réalisées avec une solution de PDMS et les symboles blancs sont les résultats des expériences faites avec une solution savonneuse. Dans ces expériences les rayons de film sont : 82 mm (■), 51 mm (●), 36 mm (▲), 35 mm (○), 25 mm (□), 15 mm (△) et 10 mm (◇). La régression linéaire indique une intersection avec l'axe des ordonnées en 0 et une pente de 1.005.

---

## 5 Conclusion

Nous allons conclure ce chapitre avec trois remarques.

1. Dans la limite de la vitesse  $v$  tend vers 0, nous pensons que la formation d'une bulle est uniquement contrôlée par des variables géométriques. En régime quasi-statique, un film liquide reste assez plat pour que le volume d'air emprisonné soit celui d'un cylindre ayant une hauteur de  $b/2$  et un rayon  $R$ . Le rayon de la bulle normalisé dans ce cas  $R_b^\infty/R \sim \left(\frac{3b}{4R}\right)^{1/3}$ ; dans nos expériences, cette taille limite de bulle en régime quasi-statique est dans la gamme  $R_b^\infty = 3.3 - 13.4$  mm. Malheureusement, la validation de cette simple prédiction est difficile expérimentalement car une légère inclinaison de l'anneau, pour de très faibles vitesses d'impact, peut causer de grandes variations dans la mesure de la taille des bulles.

2. Pour des vitesses plus élevées que la valeur  $\sqrt{\frac{8\gamma}{\rho_a R}}$  (1.3 – 4 m.s<sup>-1</sup> dans nos expériences), la pression dynamique de l'air  $\frac{\rho_a v^2}{2}$  est supérieure à la pression de Laplace  $4\gamma R^{-1}$  requise pour transformer le film liquide en une bulle de rayon  $R$  avant que le cadre circulaire n'entre en contact avec la surface libre du bain liquide [1]. Nous n'avons cependant pas observé ce régime dans nos expériences car la vitesse maximale imposée par le moteur avec notre montage expérimental est de 1 m/s.
  
3. Nous pourrions supposer qu'une bulle pourrait se former avant que l'anneau n'atteigne une vitesse constante, durant la phase d'accélération. Il est possible de former des bulles dans le cas où la pression dynamique  $\frac{\rho_\ell v^2}{2} \frac{e}{d_a}$ , produite par la force inertielle sur le film au moment de l'accélération, dépasse le seuil de la pression capillaire  $4\gamma R^{-1}$ . Par conséquent, des bulles volantes seraient produites durant la phase d'accélération pour des vitesses supérieures à  $\sqrt{\frac{8\gamma}{\rho_a R}} \sqrt{\frac{\rho_a d_a}{\rho_\ell e}}$ ; il est intéressant de voir que contrairement au seuil en vitesse requis pour former des bulles par soufflage sur un film liquide [34, 35], ce seuil de vitesse de création d'une bulle est une fonction de l'épaisseur du film. Les vitesses seuils nécessaires pour former les bulles sont de l'ordre de 1.3 – 12 m/s, nous n'avons donc pas non plus observé de création de bulles pendant la phase d'accélération.

# Bibliographie

- [1] L. Salkin, A. Schmit, R. David, A. Delvert, E. Gicquel, P. Panizza, and L. Courbin. Interfacial bubbles formed by plunging thin liquid films in a pool. *Physical Review Fluids*, **2** :063604, 2017.
- [2] internet (site hors service).
- [3] A. M. Worthington. On the forms assumed by drops of liquids falling vertically on a horizontal plate. *Proceedings of the Royal Society of London*, **25**(171-178) :261–272, 1876.
- [4] D. Fuster, G. Agbaglah, C. Josserand, S. Popinet, and S. Zaleski. Numerical simulation of droplets, bubbles and waves : state of the art. *Fluid Dynamics Research*, **41**(6) :065001, 2009.
- [5] R. C. A. van der Veen, T. Tran, D. Lohse, and C. Sun. Direct measurements of air layer profiles under impacting droplets using high-speed color interferometry. *Physical Review E*, **85** :026315, 2012.
- [6] C. Josserand and S. Thoroddsen. Drop impact on a solid surface. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **48** :365–391, 2016.
- [7] S. Chandra and C. T. Avedisian. On the collision of a droplet with a solid surface. *Proceedings of the Royal Society A*, **432** :13–41, 1991.
- [8] M. Rein. Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces. *Fluid Dynamics Research*, **12** :61–93, 1993.
- [9] S. T. Thoroddsen, T. G. Etoh, K. Takehara, N. Ootsuka, and Y. Hatsuki. The air bubble entrapped under a drop impacting on a solid surface. *Journal of Fluid Mechanics*, **545** :203–212, 2005.
- [10] S. Mandre, M. Mani, and M. P. Brenner. Precursors to splashing of liquid droplets on a solid surface. *Physical Review Letters*, **102**(13) :134502, 2009.

- [11] J. M. Kolinski, S. M. Rubinstein, S. Mandre, M. P. Brenner, D. A. Weitz, and L. Mahadevan. Skating on a film of air : drops impacting on a surface. *Physical Review Letters*, **108** :074503, 2012.
- [12] W. Bouwhuis, C. A. Roeland van der Veen, T. Tran, D. L. Keij, K. G. Winkels, I. R. Peters, D. van der Meer, C. Sun, J. H. Snoeijer, and D. Lohse. Maximal air bubble entrainment at liquid-drop impact. *Physical Review Letters*, **109** :264501, 2012.
- [13] L. Courbin, J. C. Bird, M. Reyssat, and H. A. Stone. Dynamics of wetting : from inertial spreading to viscous imbibition. *Journal of Physics : Condensed Matter*, **21**(46) :464127, 2009.
- [14] P. Tsai, R. C. A. van der Veen, M. van de Raa, and D. Lohse. How micropatterns and air pressure affect splashing on surfaces. *Langmuir*, **26**(20) :16090–16095, 2010.
- [15] R. C. A. van der Veen, M. H. W. Hendrix, T. Tran, C. Sun, P. A. Tsai, and D. Lohse. How microstructures affect air film dynamics prior to drop impact. *Soft Matter*, **10** :3703–3707, 2014.
- [16] L. Esmailizadeh and R. Mesler. Bubble entrainment with drops. *Journal of Colloid and Interface Science*, **110**(2) :561–574, 1986.
- [17] H. N. Oguz and A. Prosperetti. Bubble entrainment by the impact of drops on liquid surfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, **219** :143–179, 1990.
- [18] S. T. Thoroddsen, T. G. Etoh, and K. Takehara. Air entrapment under an impacting drop. *Journal of Fluid Mechanics*, **478** :125–134, 2003.
- [19] M. M. Driscoll and S. R. Nagel. Ultrafast interference imaging of air in splashing dynamics. *Physical Review Letters*, **107** :154502, 2011.
- [20] Q. Deng, A. V. Anilkumar, and T. G. Wang. The role of viscosity and surface tension in bubble entrapment during drop impact onto a deep liquid pool. *Journal of Fluid Mechanics*, **578** :119–138, 2007.
- [21] D. L. Keij, K. G. Winkels, H. Castelijns, M. Riepen, and J. H. Snoeijer. Bubble formation during the collision of a sessile drop with a meniscus. *Physics of Fluids*, **25**(8) :082005, 2013.
- [22] T. Tran, H. de Maleprade, C. Sun, and D. Lohse. Air entrainment during impact of droplets on liquid surfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, **726** :R3, 2013.

- 
- [23] R. Bergmann, D. Van Der Meer, S. Gekle, A. Van Der Bos, and D. Lohse. Controlled impact of a disk on a water surface : cavity dynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, **633** :381–409, 2009.
- [24] J. Marston, I. Vakarelski, and S. Thoroddsen. Bubble entrapment during sphere impact onto quiescent liquid surfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, **680** :660 – 670, 2011.
- [25] A. Marchand, T. S. Chan, J. H. Snoeijer, and B. Andreotti. Air entrainment by contact lines of a solid plate plunged into a viscous fluid. *Physical Review Letters*, **108** :204501, 2012.
- [26] Y. Zhu, H. N. Öguz, and A. Prosperetti. On the mechanism of air entrainment by liquid jets at a free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, **404** :151–177, 2000.
- [27] J. Eggers. Air entrainment through free-surface cusps. *Physical Review Letters*, **86**(19) :4290–4293, 2001.
- [28] E. Lorenceau, D. Quéré, and J. Eggers. Air entrainment by a viscous jet plunging into a bath. *Physical Review Letters*, **93** :254501, 2004.
- [29] B. Pouligny and M. Chassande-Mottin. Air ingestion by a buckled viscous jet of silicone oil impacting the free surface of the same liquid. *Physical Review Letters*, **100** :154501, 2008.
- [30] L. Salkin, A. Schmit, P. Panizza, and L. Courbin. Influence of boundary conditions on the existence and stability of minimal surfaces of revolution made of soap films. *American Journal of Physics*, **82** :839–847, 2014.
- [31] G. I. Taylor. The dynamics of thin sheets of fluid ii. waves on fluid sheets. *Proceedings of the Royal Society of London A*, **253**(1274) :296–312, 1959.
- [32] Y. Couder, J.M. Chomaz, and M. Rabaud. On the hydrodynamics of soap films. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, **37**(1) :384–405, 1989.
- [33] V. O. Afenchenko, A. B. Ezersky, S. V. Kiyashko, M. I. Rabinovich, and P. D. Weidman. The generation of two-dimensional vortices by transverse oscillation of a soap film. *Physics of Fluids*, **10**(2) :390–399, 1998.
- [34] L. Salkin, A. Schmit, P. Panizza, and L. Courbin. Generating soap bubbles by blowing on soap films. *Physical Review Letters*, **116** :077801, 2016.
- [35] P. Panizza and L. Courbin. Bubble blowing by the numbers. *Physics Today*, **69** :78–79, 2016.

## Chapitre 3

# Vidange d'une bulle interfaciale

En étudiant une bulle interfaciale, on peut caractériser différents stades de sa vie comme sa formation, sa stabilité ou encore sa destruction. Ici, nous nous intéressons à la destruction d'une bulle interfaciale s'effectuant du fait de la vidange de l'air piégé en son sein, à travers un orifice. La vidange d'un réservoir est un vieux problème, puisque Torricelli [1] avait déjà abordé l'étude de ce phénomène il y a plusieurs siècles. Il s'agit d'un problème classique de mécanique des fluides que l'on traite en général en premier cycle universitaire (voir Annexe I). Plus récemment, une étude a montré l'influence des effets de mouillage sur la dynamique de vidange d'un réservoir [2]. Dans notre étude, notre système est composé d'une bulle interfaciale hémisphérique, reposant sur une surface plane solide, en guise de réservoir déformable et notre fluide est de l'air. Contrairement au problème classique de vidange d'un réservoir indéformable, la surpression à l'origine de la vidange est ici due à des effets capillaires et non pas gravitaires. Sur le substrat, on perce un orifice circulaire placé sous l'apex de la bulle, permettant l'écoulement de l'air lorsqu'il est ouvert. Le caractère déformable de la bulle va permettre à la zone de contact entre le film liquide et le substrat de se déplacer ou de modifier l'angle de contact entre la bulle et le substrat. L'étude expérimentale de ce phénomène révèle différentes dynamiques de vidange pour lesquels nous proposons un modèle basé sur des ingrédients physiques simples. *Ce travail a été effectué en collaboration avec Mattéo Clerget dans le cadre de son stage de L3.*

## 1 Introduction

La vidange d'un réservoir rigide rempli d'un fluide est un problème commun qui impacte plusieurs domaines d'activité comme les industries agroalimentaires et pétrolières. Ce sujet a été étudié initialement il y a de nombreux siècles lors des travaux pionniers de Torricelli [1] qui a établi la loi de vitesse des fluides non visqueux s'écoulant d'un réservoir à travers un orifice (Fig. 3.1). Ce vieux problème reste pourtant un sujet actif de recherche. En effet, très récemment, des travaux ont été publiés pour montrer l'importance des effets de mouillage sur la vitesse de la vidange du réservoir [2]. Ici, nous nous intéresserons à un cas particulier dans lequel le réservoir est déformable puisque le contenant est une bulle interfaciale<sup>1</sup> posée sur un substrat solide pourvu d'un orifice positionné sous l'apex de la bulle. Dans l'expérience, l'air s'évacue par l'orifice et la surpression à l'origine de la vidange est d'origine capillaire et non pas gravitaire.



FIGURE 3.1: A gauche, un portrait représentant Evangelista Torricelli (1608-1647), un inventeur, physicien, mathématicien du XVIIème siècle qui a notamment inventé le baromètre (portrait tiré de [3]). On lui attribue la découverte du baromètre au mercure. Sur la droite, un schéma de son invention extrait de [4] qui représente un baromètre au mercure.

Les bulles de savon sont importantes pour différentes raisons. Les bulles flottantes de taille centimétrique créées par soufflage d'air sur un film de savon sont

1. Il s'agit de bulles en contact avec une surface liquide ou solide.

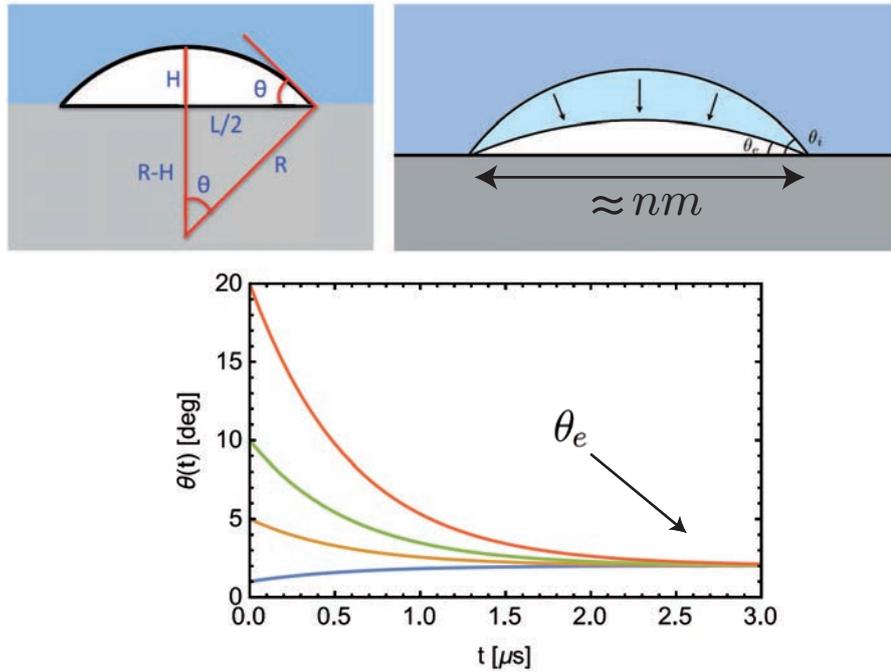


FIGURE 3.2: Le schéma (a) est adapté de [5], il représente les paramètres géométriques d'une calotte sphérique, forme que prend une nanobulle de surface et qui possède une zone de contact ancrée. La surface latérale de la bulle ne change pas au cours de la dynamique. Le graphique (b) montre l'évolution temporelle de l'angle de contact de quatre bulles dont les angles de contact initiaux sont  $\theta_i(t=0) = 1^\circ$  pour la courbe bleue,  $\theta_i(t=0) = 5^\circ$  pour la courbe orange,  $\theta_i(t=0) = 10^\circ$  pour la courbe verte et  $\theta_i(t=0) = 20^\circ$  pour le courbe rouge. Pour ces quatre bulles, l'angle de contact tend vers un angle d'équilibre  $\theta_e$ .

ludiques, divertissantes, mais également un objet physique très intéressant à étudier. Par conséquent, elles sont analysées depuis plusieurs siècles [6, 7], mais pourtant, leur mécanisme de formation n'a été expliqué que très récemment [8, 9]. Ces bulles existent également à d'autres échelles, millimétriques voire micrométriques. Elles sont par exemple utilisées dans des applications diverses dans des domaines tels que la médecine ou la biologie [10]. A une échelle encore plus petite, nanométrique, les nanobulles de surface, restant en contact avec une eau sursaturée en gaz, possèdent une très grande stabilité dont on cherche à comprendre l'origine en laboratoire depuis une vingtaine d'années [11, 12, 13]. Il a été montré récemment que cette stabilité est due à une très forte cohésion du pied de la bulle avec le substrat [5]. Intuitivement, on aurait plutôt pensé que les nanobulles auraient une durée de vie de quelques millisecondes en considérant leur taille très petite et la grande valeur de la pression de Laplace en leur sein. Un modèle avait été proposé en 1950 par Epstein

et Plesset [14] pour calculer le temps de vie de bulles de toutes les tailles et pour toutes concentrations de gaz en utilisant l'équation de la diffusion, la pression de Laplace et la loi d'Henry. Pourtant, pour les bulles de très petites tailles, ce modèle ne fonctionne plus car la dynamique de diffusion change : la ligne de contact entre la bulle et la surface solide ne bouge pas et la bulle s'effondre sur elle-même. Il semble que l'évolution temporelle de l'angle de contact tend vers un équilibre qui est instable (voir Fig. 3.2) et qui dépend de la zone de contact entre la surface solide et la bulle. Dans la nature on peut également observer la formation de bulles d'une taille

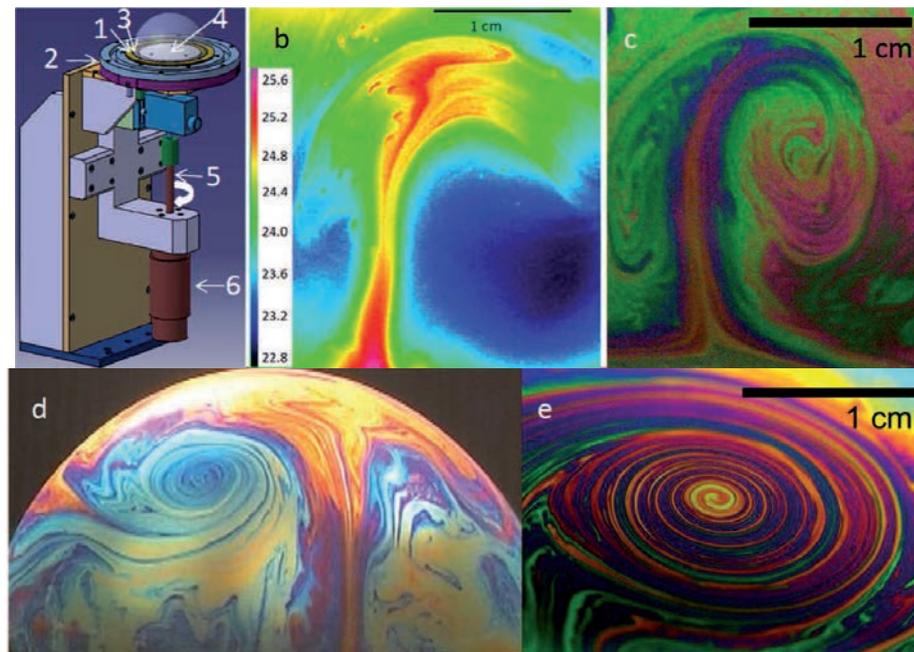


FIGURE 3.3: Figure tirée de [15]. Le schéma (a) représente le dispositif expérimental utilisé par les auteurs. Une bulle est formée par soufflage sur un plateau circulaire rainuré qui peut être mis en rotation par un moteur continu. Ce plateau est chauffé par la présence à proximité d'un système d'anneaux connectés à un bain d'eau. La température au pied de la bulle est contrôlée par la température de l'eau du bain. Les images (b) et (c) montrent la formation de plumes thermiques proches du pied de la bulle qui partent en direction de l'apex de la bulle. L'image (b) est capturée avec une caméra infrarouge et permet de visualiser les variations de la température en tous points d'une bulle (l'échelle de température est en °C). La photographie (c) est réalisée avec une caméra couleur CCD. Les photographies (d) et (e) montrent la formation d'un large vortex. Ces formes rappellent la formation de cyclones dans l'atmosphère.

la surface des océans, il y a des échanges gazeux importants pour le climat résultant de l'éclatement de telles bulles produisant des gouttes contribuant à la formation des embruns [16, 17]. Les bulles interfaciales peuvent servir de modèle pour d'autres types d'écoulements que nous voyons dans la nature. Effectivement, les propriétés d'écoulements de vortex isolés qui peuvent apparaître sur de telles bulles montrent des similarités avec ceux qui forment les ouragans [15, 18] (voir Fig. 3.3).

Sans surprise, la rupture de bulles interfaciales et les phénomènes qui en découlent ont largement été étudié par la communauté physicienne ces dix dernières années [12, 13, 19]. La formation de bulles interfaciales à la surface de flaques d'eau peut être observée lors d'épisodes de fortes pluies. Lorsqu'une goutte vient impacter la surface d'une flaque, une bulle peut se former, on lui donne alors le nom de bulle d'orage. En laboratoire, il existe plusieurs manières de créer une bulle interfaciale sur un bain liquide. Par exemple, inspiré par la nature, on peut la créer en faisant impacter une goutte sur un bain liquide. Nous avons étudié une autre manière de réaliser une bulle interfaciale en faisant impacter à vitesse constante un film de savon sur la surface d'un bain liquide (voir Fig. 3.4 et Chap. 2). Une bulle interfaciale est composée de

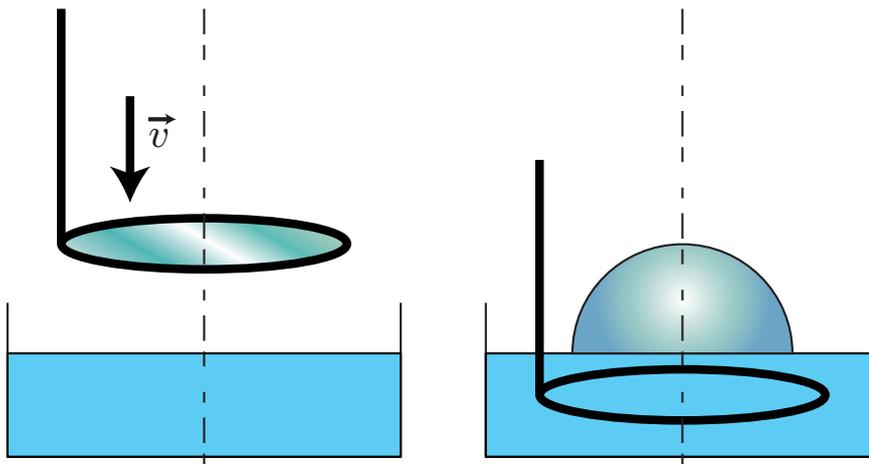


FIGURE 3.4: Schéma représentant l'expérience de formation d'une bulle interfaciale par impact d'un film liquide à vitesse constante  $v$  sur un bain du même liquide [20].

deux interfaces air-liquide à l'intérieur desquelles un liquide s'écoule avec le temps par l'action de la gravité. En fin de vie, une bulle se perce à l'endroit où l'épaisseur du film est la plus faible, amorçant son éclatement [21]. Dans cet article, Champougny et al. ont montré que la dynamique de drainage est plus lente lorsque la concentration en tensioactifs est augmentée. Pour décrire ce phénomène, un modèle plus détaillé a été proposé par Hermans et al. (dans leur article [22]) qui inclut plus explicitement les effets Marangoni dans la description théorique. La position de la rupture du

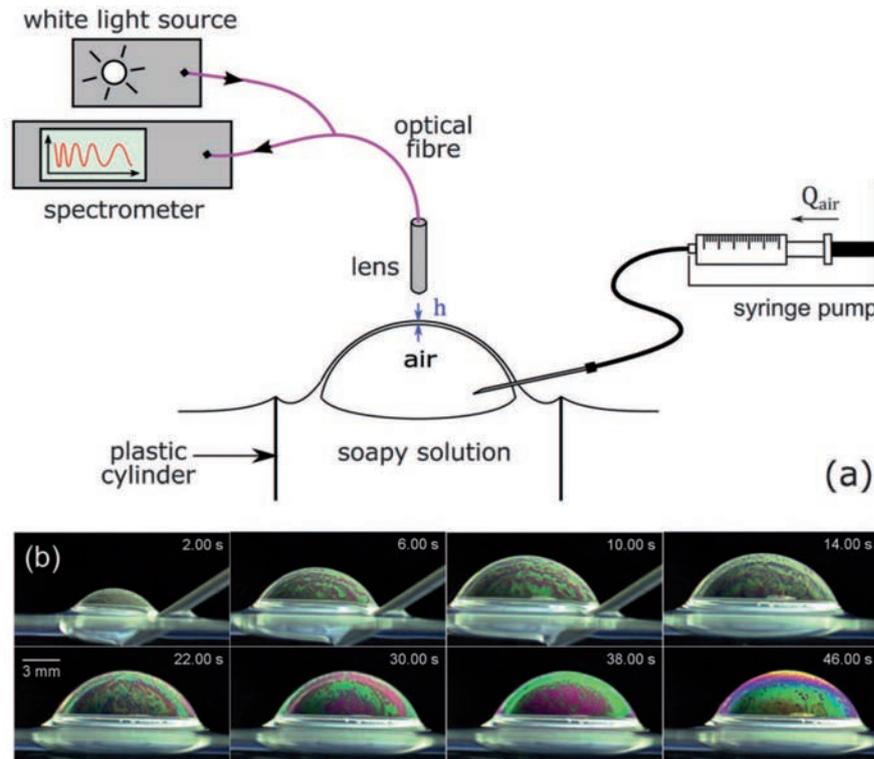


FIGURE 3.5: Figure tirée de [21]. La figure (a) montre le dispositif expérimental utilisé pour étudier le drainage d'une bulle par interférométrie. Une bulle est créée en injectant de l'air avec une seringue (le volume injecté est contrôlé avec un contrôleur de débit) sous la surface libre d'un bain liquide et on mesure l'épaisseur du film liquide par interférométrie en utilisant une source lumineuse et un spectromètre. Nous avons aussi utilisé cette technique (voir Chap. 1). La figure (b) montre l'évolution du drainage d'une bulle contenant un surfactant, du tetradecyltriméthylammonium bromide (TTAB), avec une concentration de 10 fois la cmc.

film dépend elle aussi de la concentration en surfactants, puisque pour une solution dont la concentration est supérieure à la cmc<sup>2</sup>, la rupture se situe toujours à l'apex de la bulle. En diminuant la concentration, Champougny et al. ont montré que la position de la rupture pouvait descendre progressivement vers le pied de la bulle. Pour réaliser l'étude décrite dans [21], les auteurs ont utilisé le dispositif expérimental représenté dans la figure 3.5. Dans ces expériences, une bulle interfaciale est produite sur un bain liquide en injectant de l'air sous la surface libre avec une seringue. Les auteurs caractérisent l'évolution temporelle de l'épaisseur du film liquide avec une technique d'interférométrie (voir Fig. 3.5 et Chap. 1). Comme dans cette étude,

2. la cmc est la concentration micellaire critique, c'est-à-dire la concentration en surfactants au delà de laquelle se crée des micelles en volume.

nous utiliserons également un spectromètre UV-visible pour mesurer les épaisseurs des films constituant les bulles de savon.

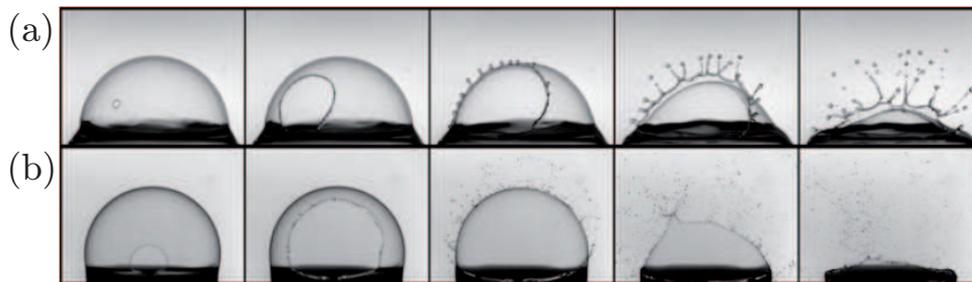


FIGURE 3.6: Deux séquences de photographies tirées de [19] qui représentent l'éclatement d'une bulle et la projection des gouttelettes qui se forment alors. Pour la séquence (a), la bulle a un rayon de 14 mm et le film liquide a une épaisseur de  $36 \mu\text{m}$ . Pour la séquence (b), la bulle a un rayon 11.5 mm et le film liquide a une épaisseur de  $1.2 \mu\text{m}$ .

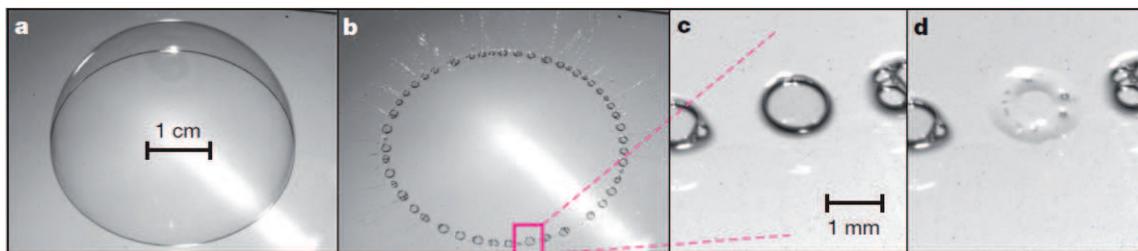


FIGURE 3.7: Cette séquence de photographies tirée de [12] représente la succession d'éclatement d'une bulle initialement de taille centimétrique en (a) en anneau de petites bulles d'une taille millimétrique (b) puis l'éclatement d'une de ces bulles secondaires en un anneau de bulles encore plus petites.

Une autre conséquence intéressante de la rupture d'une bulle interfaciale de taille centimétrique est le fait qu'elle donne naissance à d'autres bulles interfaciales mais de plus petites tailles [12]. L'éclatement d'une bulle interfaciale forme un tore d'air à sa base en quelques millisecondes [12]. Après une centaine de millisecondes, ce filament fin de fluide se déstabilise par une instabilité de type *Rayleigh-Plateau* pour former un anneau de bulles qui sont environ dix fois plus petites que la bulle initiale. Chacune de ces bulles millimétriques peut à son tour éclater pour donner naissance à un anneau de bulles encore dix fois plus petites (Fig. 3.7). Bird et al. ont ainsi observé une cascade d'éclatement de bulles interfaciales (Fig. 3.7). Ils ont également

montré que ces phénomènes sont importants pour la formation des embruns quand ils surviennent à la surface des océans.

L'éclatement d'une bulle a de plus des conséquences importantes dans la transmission de maladies car le phénomène de dispersion de gouttes émanant de la rupture d'une bulle peut alors transporter les micro-organismes qu'elles peuvent contenir (voir Fig. 3.6) [23, 24, 19].

Dans ce chapitre, nous travaillons avec des **bulles interfaciales** de taille centimétrique qui sont omniprésentes dans la nature comme évoqué précédemment mais aussi dans nos vies de tous les jours car on les aperçoit parfois dans nos cuisines et nos salles de bain. Elles sont également plus faciles à manipuler que celles qui existent aux échelles de longueur plus petites. Nous avons décrit un processus de formation de ces bulles dans le chapitre 2. Ici, nous étudions leur destruction par vidange.

Dans notre expérience, nous montrons l'existence de trois différents régimes de vidange qui dépendent des caractéristiques géométriques et physico-chimiques en jeu. Dans les deux premiers régimes, une bulle initialement hémisphérique conserve une forme quasi-hémisphérique ou se transforme en une calotte sphérique pendant la vidange. Dans ces cas, le pied de la bulle se déplace sur la surface du solide initialement humidifiée. Dans le troisième scénario, nous avons observé un phénomène d'immobilisation du pied de la bulle qui s'effondre alors sur elle-même, de façon similaire au phénomène observé sur les nanobulles [5, 25]. En combinant le principe de Bernoulli, la conservation du débit d'air et la friction visqueuse agissant au pied de la bulle, nous développons un modèle qui décrit correctement nos résultats expérimentaux. L'expérience que nous proposons peut être mise en perspective de celle réalisée par P. D. Jackson et S. Sleyman en 2010 [26]. Il existe cependant deux différences majeures entre notre expérience et celle décrite dans [26] :

- *Le pied de la bulle* : dans le cas de l'expérience de Jackson et Sleyman, celui-ci est ancré sur le tube sur lequel elle repose. Dans notre cas, le pied de la bulle est libre de se mouvoir sur le substrat percé d'un orifice.
- *La loi décrivant l'écoulement* : dans l'expérience de Jackson et Sleyman, la bulle repose sur un tube relié à une paille d'un plus faible diamètre que le tube (voir Fig. 3.8). Ainsi l'écoulement de l'air peut être décrit par la loi de Poiseuille. Dans notre expérience, la bulle est posée sur un substrat percé dont on néglige l'épaisseur et nous montrerons dans ce cas que l'écoulement de l'air peut être modélisé en utilisant le théorème de Bernoulli.

Nous décrivons ci-dessous les résultats principaux de l'expérience discutée dans [26] et dont le dispositif expérimental est décrit dans la figure 3.8. Dans ces travaux, les auteurs gonflent une bulle de savon posée à l'extrémité d'un tube. L'air est insufflé

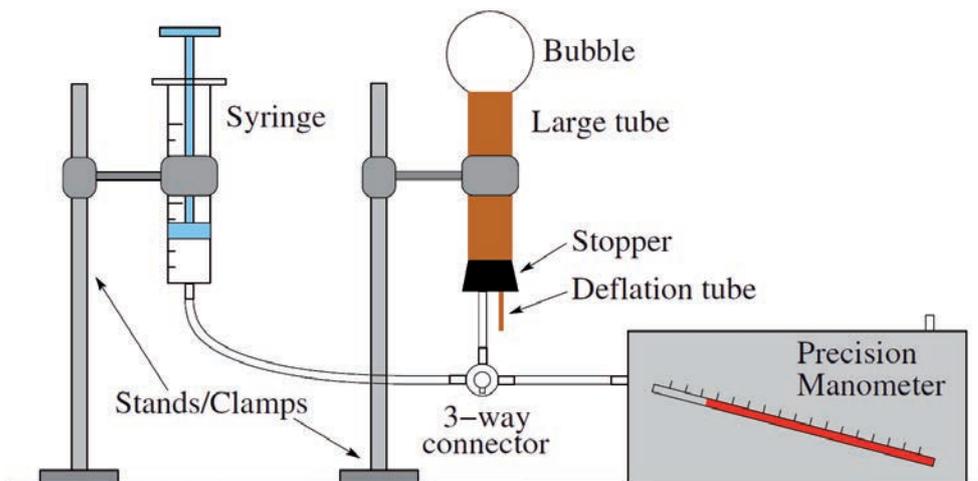


FIGURE 3.8: Schéma du montage de l'expérience de David P. Jackson et Sarah Sleyman [26]. Une bulle positionnée au bout d'une paille est gonflée par une seringue, le manomètre mesure la pression entre l'intérieur et l'extérieur de la bulle.

par une seringue qui contrôle le débit de l'écoulement du fluide. Un manomètre est ajouté pour mesurer la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la bulle (voir Fig. 3.8). La paille possède un mécanisme permettant à l'air d'entrer par un tuyau et de sortir par un autre tuyau lorsque la bulle se dégonfle. Jackson et Sleyman étudient l'évolution temporelle du rayon de la bulle quand elle se dégonfle. Le moteur physique du dégonflement est à l'instar du nôtre la pression de Laplace :

$$\Delta P = P_{in} - P_{out} = \frac{4\gamma}{r} \quad (3.1)$$

où  $P_{in}$  est la pression à l'intérieur de la bulle,  $P_{out}$  la pression à l'extérieur de la bulle (pression atmosphérique),  $\gamma$  la tension de surface air-liquide et  $r$  le rayon de la bulle. Leur théorie s'appuie sur le fait que le flux passant à travers le tuyau de vidange est laminaire. Si on gonfle une bulle avec de la fumée et qu'on observe le tuyau de sortie du système, il est possible de déterminer la nature du flux en visualisant les motifs de l'écoulement. Si le flux est laminaire, cela signifie que le nombre de Reynolds associé est faible. Ce nombre sans dimension permet de comparer les effets des forces inertielles et des forces visqueuses dans un fluide. En l'occurrence un faible nombre de Reynolds permet de constater que les forces visqueuses dominent. A travers un tube, le débit volumique  $Q$  du fluide s'échappant de la paille est alors

donné par l'équation de Poiseuille pour un cylindre de longueur  $L$  et de section  $s$  :

$$Q = \frac{\pi s^4 |\Delta P|}{8\eta L} \quad (3.2)$$

où  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide. Pour analyser le dégonflement d'une bulle, les auteurs de [26] ont commencé par étudier le cas d'une sphère parfaite. En effet, lorsque la bulle repose sur un tube de section sphérique, celle-ci n'est que partiellement sphérique puisqu'elle est coupée en partie. Nous considérons la géométrie parfaitement sphérique pour simplifier l'étude. Cette approximation constitue une première approche pertinente. L'équation de la pression de Young-Laplace, l'équation de Poiseuille pour un écoulement laminaire et l'incompressibilité de l'air, permettent d'établir la relation suivante :

$$Q = \frac{\pi s^4 \gamma}{2\eta L r} = -\frac{dV_s}{dr} \frac{dr}{dt} \quad (3.3)$$

où  $V_s$  est le volume de la sphère et  $t$ , le temps. On peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\left( r \frac{dV_s}{dr} \right) dr = -\frac{\pi s^4 \gamma}{2\eta L} dt. \quad (3.4)$$

Comme  $V_s = 4\pi r^3/3$ , en intégrant cette équation, on obtient :

$$r(t) = r_0 \left[ 1 - \frac{s^4 \gamma t}{2\eta L r_0^4} \right]^{1/4} \quad (3.5)$$

où  $r_0 = r(t=0)$  est le rayon initial de la bulle. Si on analyse la forme de la solution,  $r(t)$ , prédite par l'Eq. 3.5 on s'aperçoit que  $r$  décroît tout au long du temps de façon monotone. Si la sphère était parfaite, on pourrait voir le rayon de la bulle diminuer jusqu'à zéro. Ce cas n'est pas possible expérimentalement puisque la bulle est posée sur un tube. Pour valider cette analyse sur le temps complet de la dynamique, on a besoin d'écrire les variations de  $r$  en se basant sur le volume pour une sphère partielle  $V_{ps}$ . Pour se faire il faut intégrer un élément de volume  $dV = \pi \rho^2 dz$  sur la hauteur de la bulle (Fig.3.9).

$$V_{ps} = \int_{h-r}^r \pi \rho^2 dz = \int_{h-r}^r \pi (r^2 - z^2) dz = \frac{2}{3} \pi r^3 - \pi (h-r) \left[ r^2 - \frac{1}{3} (h-r)^2 \right] \quad (3.6)$$

Nous pouvons remarquer que dans cette équation, si  $h$  tend vers 0, nous retrouvons le volume d'une sphère complète ( $V_{ps} = V_s$ ). Au contraire, lorsque  $h$  tend vers  $2r$ ,  $V_{ps}$  tend vers 0. Il est plus intéressant d'éliminer  $h$  de l'équation, pour écrire  $V_{ps}$  en fonction  $r$  uniquement. En utilisant des relations trigonométriques, il est montré

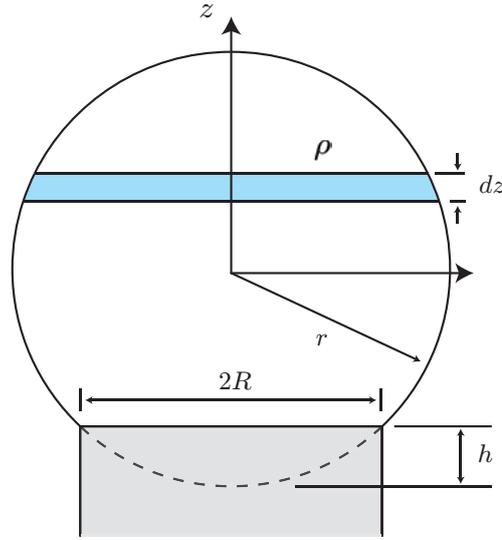


FIGURE 3.9: Représentation schématique de la bulle fixée à l'extrémité de la paille qui a un rayon  $r$  et se transforme au cours du temps en un disque plat de rayon  $R$ . La partie bleue représente l'intégration de la surface  $\pi\rho^2$  sur l'axe  $z$  pour une bulle partiellement sphérique.

---

dans [26] que :

$$V_{ps} = \frac{\pi}{3} \left[ 2r^3 \pm (2r^2 + R^2)\sqrt{r^2 - R^2} \right] \quad (3.7)$$

Il suffit maintenant de remplacer  $V_s$  par  $V_{ps}$  dans l'Eq. 3.4 et d'intégrer avec ce nouveau volume. De plus, Jackson et Sleyman montrent que pour effectuer ce calcul, il est plus simple d'utiliser des variables sans dimension en normalisant les distances par la taille caractéristique,  $R$  (voir Fig. 3.9) et le temps,  $t$  par un temps caractéristique,  $\tau = 2\eta L / (\gamma \tilde{s}^4)$ . On travaille alors avec le rayon de bulle  $\tilde{r} = r/R$ , le rayon initial  $\tilde{r}_0 = r_0/R$ , le rayon de la paille  $\tilde{s} = s/R$  et le temps normalisé  $\tilde{t} = t/\tau$ . On obtient l'équation sans dimension :

$$\tilde{t}_{\pm}(\tilde{r}) = I_{+}(\tilde{r}_0) - I_{\pm}(\tilde{r}) \quad (3.8)$$

où,

$$4I_{\pm}(x) \equiv 2x^4 \pm \left[ (2x^2 + 1)x\sqrt{x^2 - 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right] \quad (3.9)$$

Dans cette équation Jackson et Sleyman utilisent  $\tilde{t}_{+}(\tilde{r})$  quand la bulle sera plus grande qu'un hémisphère, c'est-à-dire quand  $r$  est plus grand que  $R$  et  $\tilde{t}_{-}(\tilde{r})$  quand la bulle sera plus petite qu'un hémisphère. Ces équations ne peuvent pas être réarrangées pour obtenir la fonction  $\tilde{r}(\tilde{t})$ , il faut donc tracer  $\tilde{t}_{+}$  et  $\tilde{t}_{-}$  comme des fonctions de  $\tilde{r}$ . Le graphique dans la figure 3.10 représente les variations tempo-

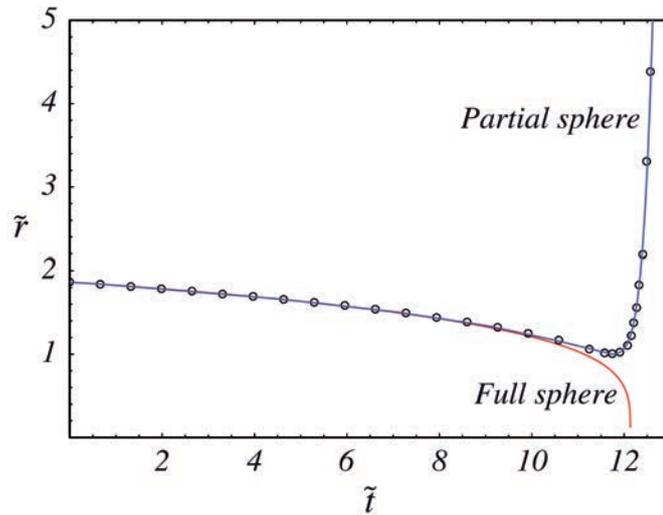


FIGURE 3.10: Graphique montrant l'évolution temporelle du rayon théorique d'une bulle partiellement sphérique en ligne continue bleue donnée par l'Eq. 3.8 et Eq. 3.9 est entièrement sphérique en ligne rouge donnée par l'Eq. 3.5 en comparaison aux données expérimentales ; tiré de [26].

relles du rayon normalisé de la bulle correspondant aux prédictions théoriques et aux résultats expérimentaux tirés de [26]. La courbe bleue correspond à la prédiction théorique des équations Eq. 3.8 et Eq. 3.9 définissant la dynamique d'une bulle partiellement sphérique. En fin de dynamique, on remarque que le rayon augmente et tend vers l'infini. En effet, comme la bulle est coincée par le bord du tube, elle s'effondre et le rayon augmente indéfiniment jusqu'à l'obtention d'un film liquide plan. Nous verrons que nous obtenons, sous certaines conditions expérimentales, ce genre de signature dans nos expériences réalisées sur des bulles interfaciales. À l'inverse, la courbe représentée en rouge sur le graphique de la figure 3.10 qui correspond à l'évolution théorique prédite par l'équation 3.5 montre que le rayon tend vers zéro.

## 2 Expérience

Le principe de l'expérience est d'étudier comment une bulle interfaciale se vide de l'air qu'elle contient à travers un orifice de taille fixée. Dans notre expérience, nous nous intéressons à une bulle hémisphérique déposée sur un substrat solide, le fluide à l'intérieur et à l'extérieur de cette bulle sont les mêmes, il s'agit d'air. On commence par créer une bulle interfaciale de taille contrôlée à la surface d'un substrat solide à travers lequel un orifice circulaire a été percé, puis, on observe les dynamiques associées à une gamme de paramètres géométriques, physicochimiques et physiques

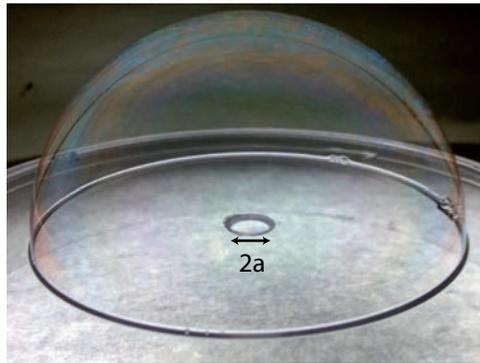


FIGURE 3.11: Photographie représentant une bulle de savon interfaciale posée sur une surface percée d'un orifice de 3 mm de rayon.

---

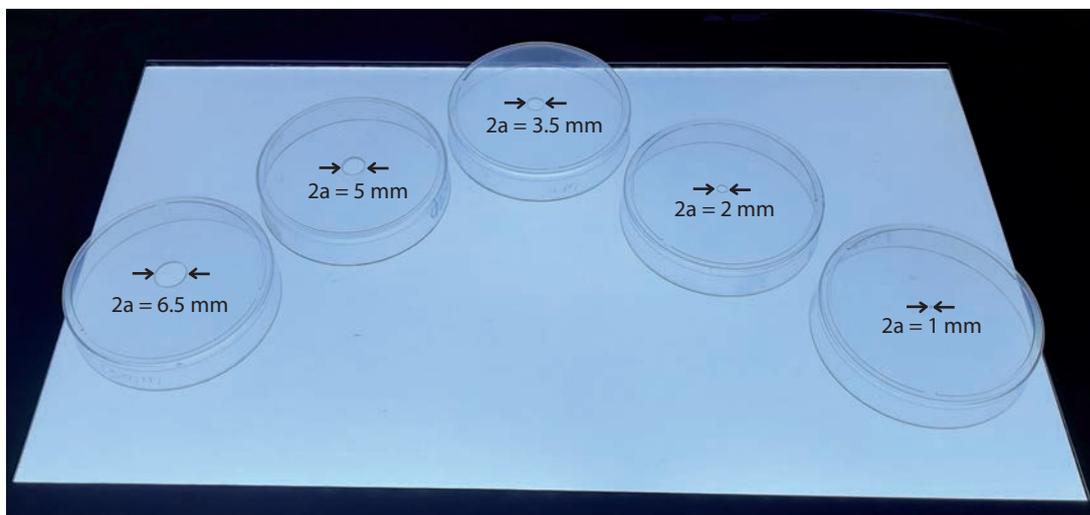


FIGURE 3.12: Photographies illustrant la gamme des trous percés dans des boîtes de Petri de 88 mm de diamètre. Pour réaliser un perçage précis nous avons utilisé différentes dimensions de foret sur un tour. Ces perçages furent réalisés à l'atelier mécanique du laboratoire. De gauche à droite sont positionnées des surfaces ayant des trous de différents diamètres comme indiqué : 6.5 mm, 5 mm, 3.5 mm, 2 mm et 1 mm.

---

donnée dont la liste sera discutée par la suite. La bulle est créée par soufflage d'air sur un film de savon se trouvant à l'extrémité d'une buse de 1 cm d'ouverture. Avec un système de contrôle de flux d'air nommé Fluigent et d'une paille, on peut gérer la pression délivrée en sortie. La différence de pression entre les deux faces externes du film de savon crée une bulle qui entre en contact avec le substrat. Par ce processus nous arrivons à obtenir un rayon initial de bulle  $R_0 = 10 - 35$  mm.

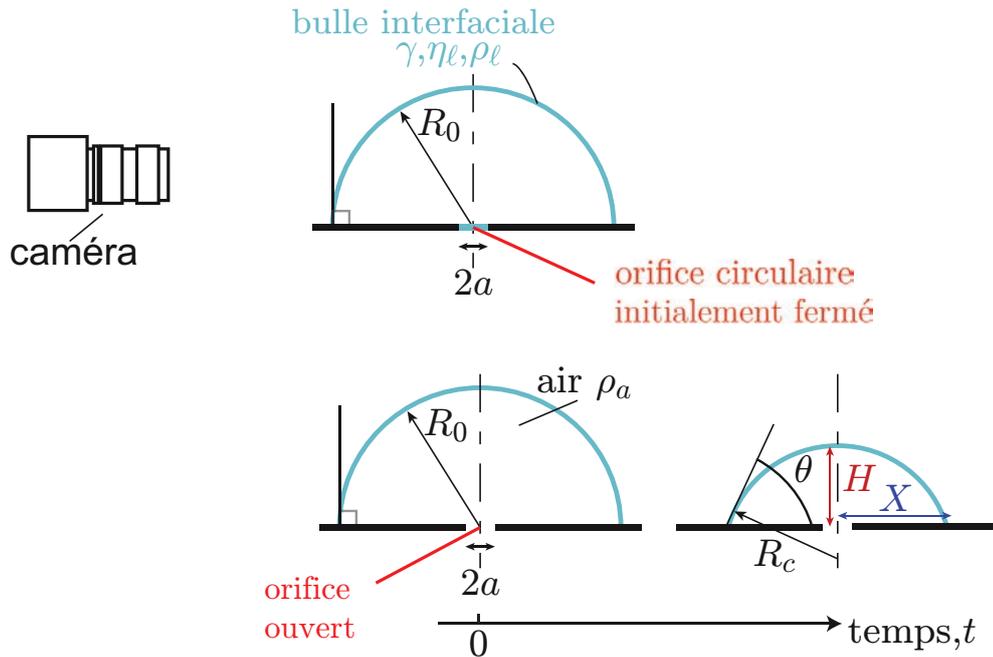


FIGURE 3.13: Schéma représentant notre dispositif expérimental et les différents paramètres qui entrent en jeu. Pour préparer une expérience, on souffle une bulle sur la surface percée d'un orifice de rayon  $a$ , jusqu'à obtenir le rayon initial de la bulle  $R_0$  souhaité. Ce processus a pour effet de créer un film de savon au niveau de l'orifice servant d'opercule. Le moment où l'on ouvre l'opercule, en perçant le film de savon, définit l'origine du temps  $t$  de notre expérience. Nous filmons l'expérience avec une caméra rapide afin d'enregistrer la variation sur le temps du rayon de courbure de la bulle  $R_c$ , la hauteur  $H$  au centre de la bulle et la distance entre centre du trou et pied de la bulle  $X$ .

Le support solide est préalablement mouillé en le recouvrant d'une mince couche de la solution utilisée. Nous prenons soin d'éviter la présence de mousse ou de petites bulles qui pourraient se déposer au niveau de la zone de contact entre la bulle et le substrat. La bulle créée est hémisphérique et connecte donc perpendiculairement le substrat solide sur lequel elle repose [27]. Les bulles sont produites avec une solution savonneuse composée de 98 % (en masse) d'eau pure et 2 % (en masse) d'une solution de liquide vaisselle (Palmolive Original, Colgate-Palmolive) à laquelle on ajoute 0 %, 40 % ou 70 % de glycérol (Sigma-Aldrich). La viscosité dynamique  $\eta_\ell$  et la tension de surface liquide-air  $\gamma$  sont répertoriées dans le tableau 3.1 pour les solutions savonneuses contenant différentes concentrations en glycérol. La viscosité de l'air et sa masse volumique sont symbolisées respectivement par  $\eta_a$  et  $\rho_a$ . Le sommet de la bulle se situe au dessus du centre de l'orifice percé au préalable avec

un foret adapté au rayon  $a = 0.5 - 6.5$  mm. Ces perçages ont été réalisés à l'atelier mécanique du laboratoire. Dans notre expérience, nous pouvons négliger l'épaisseur du substrat solide par rapport au rayon du trou. La paroi de la bulle possède une épaisseur de  $2 - 10 \mu\text{m}$  et l'épaisseur de la couche de liquide présente sur le substrat, à l'intérieur de la bulle, est de  $15 - 25 \mu\text{m}$ . Nous les avons mesurées en utilisant un spectromètre (Avantes AvaSpec-2048). Nous avons testé la reproductibilité de

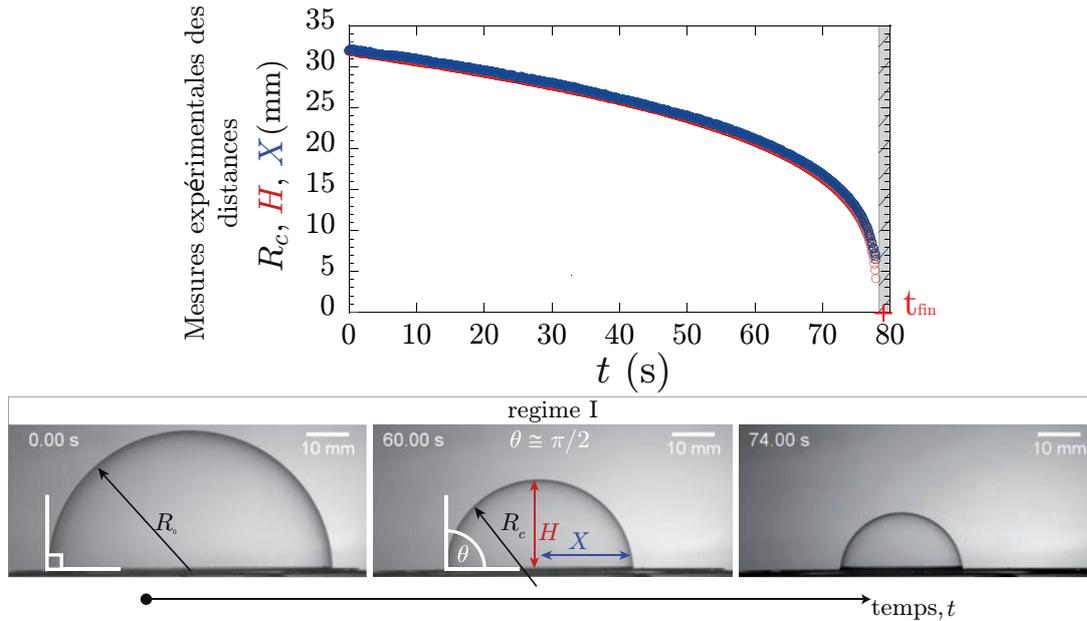


FIGURE 3.14: Série de photographies d'une expérience et graphique d'évolution des dimensions mesurées en fonction du temps dans le régime I pour lequel la bulle reste hémisphérique durant la vidange : les distances  $R_c, H, X$  restent égales. Notre programme d'analyse d'image ne nous permet pas d'observer la fin de la dynamique de vidange. Cette partie non analysable est représentée par la zone grisée du graphique. La fin de la dynamique et le temps final  $t_{fin}$  sont déterminés par observation directe de la séquence vidéo de l'expérience. L'orifice a un rayon  $a = 1$  mm, la viscosité de la solution est de  $1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  et le rayon initial de la bulle est  $32 \pm 1$  mm.

l'expérience pour une même taille de bulle et un orifice de rayon constant, nous avons observé que l'épaisseur du film de la bulle ne modifiait pas la dynamique, en tout cas dans notre échelle de variation. Avec une aiguille recouverte d'une huile de silicone nous perçons l'opercule formé au niveau de l'orifice. Le temps initial de l'expérience ( $t = 0$ ) correspond à l'ouverture de l'orifice, l'air commence alors à s'échapper et la bulle s'effondre. A ce moment, nous démarrons l'enregistrement vidéo (à l'aide d'une caméra rapide Photron Fastcam SA3) du phénomène. Les images obtenues analysées avec un programme réalisé avec le logiciel MATLAB (voir

annexe 2 en section 6.2) permettent alors de remonter aux évolutions temporelles des trois principales variables de l'expérience, à savoir, la hauteur  $H$  de la bulle, mesurée entre le sommet de la bulle et le centre de l'orifice, le rayon de courbure de la bulle  $R_c$  et la distance  $X$  décrivant la position du pied de la bulle (voir les Fig. 3.13 et 3.14 définissant les variables de l'expérience). Dans notre étude, l'angle de contact que fait la bulle avec le substrat au niveau du pied de la bulle est noté,  $\theta$ . La table 3.2 répertorie l'ensemble des variables utilisées dans ce chapitre.

glycerol concentration (wt.%)	$\eta_\ell$ (m Pas)	$\gamma$ (m N/m)
0	1	25
40	4	25
70	22	30

TABLE 3.1: Viscosité dynamique et tension de surface liquide-air des trois solutions préparées avec différentes concentrations en glycérol. A  $20^\circ\text{C}$  nous avons les résultats suivant.

Symbole	Définition	Unité
$a$	Rayon d'un orifice	} m
$R_c$	Rayon de courbure d'une bulle	
$H$	Hauteur au centre de la bulle	
$X$	Distance entre le centre d'un orifice et le pied d'une bulle	
$e$	Epaisseur d'un film liquide	} $\text{m}^3$
$V$	Volume	
$t$	Temps	} s
$\tau$	Temps caractéristique d'une expérience	
$\tau_{in}$	Temps inertiel	
$\tau_{vis}$	Temps visco-capillaire	} $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$v$	Vitesse de l'air au centre d'un orifice	
$\theta$	Angle de contact que fait la bulle avec le solide	°
$P$	Pression	Pa
$\eta_a$	Viscosité dynamique de l'air	} Pa.s
$\eta_\ell$	Viscosité dynamique d'un liquide	
$\gamma$	Tension de surface liquide-air	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$
$\rho_\ell$	Masse volumique d'un liquide	} $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
$\rho_a$	Masse volumique de l'air	

TABLE 3.2: Tableau récapitulatif des variables avec dimension qui sont utilisées dans cette étude.

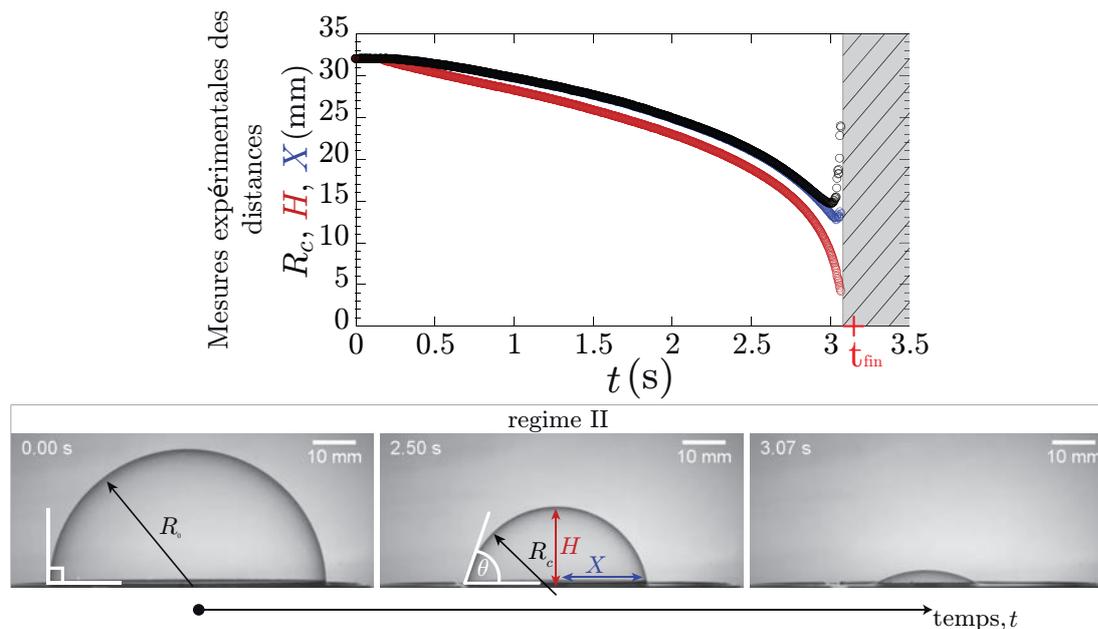


FIGURE 3.15: Série de photographies d'une expérience et graphique d'évolution des dimensions mesurées en fonction du temps illustrant le régime II, pour lequel la bulle initialement hémisphérique se transforme en une calotte sphérique. La taille de la bulle initiale est égale à  $R_0 = 32 \pm 1$  mm. L'orifice a un rayon  $a = 2$  mm et la viscosité de la solution est de 1 mPa.s.

Comme le montrent les figures 3.14, 3.15 et 3.16, pour trois expériences réalisées avec une bulle de rayon défini  $R_c = 32 \pm 1$  mm, deux des trois solutions savonneuses et trois trous de différents rayons, nous observons trois scénarios distincts de vidange. Pour une expérience menée avec la plus petite viscosité et le plus petit orifice, soit le plus grand rapport entre la taille initiale de la bulle et le rayon du trou, la bulle reste quasi-hémisphérique pendant la durée du procédé de vidange. Ce régime noté, I, est observable dans la figure 3.14. Dans cette expérience, l'angle de contact,  $\theta = 89 \pm 1^\circ$ , reste constant au cours de la dynamique. Dans notre étude on se réfère aux bulles quasi-hémisphériques vues dans le régime I comme des bulles hémisphériques pour une plus grande simplicité. Comme montré dans la figure 3.15, une bulle faite de la même solution prend la forme d'un calotte sphérique pendant le processus de vidange quand la taille de l'orifice augmente. Ce régime est noté régime II, dans ce qui suit. Comme discuté dans l'introduction de ce chapitre, ces deux régimes peuvent être perçus comme l'expérience de dégonflement d'une bulle [26] dans laquelle le déplacement du pied de la bulle est permis. Dans un troisième régime (régime III) vu pour un liquide possédant la plus grande viscosité couplée à un orifice ayant la plus grande valeur de  $a$  dans la figure 3.16; comme l'air s'échappe à travers

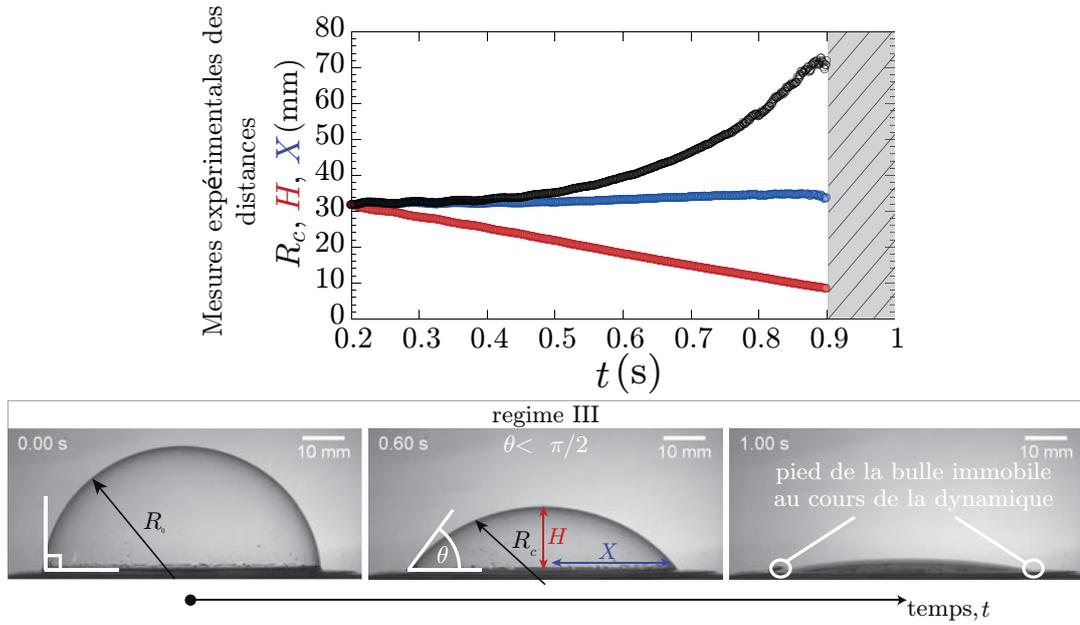


FIGURE 3.16: Série de photographies d'une expérience et graphique d'évolution des dimensions mesurées en fonction du temps illustrant le régime III, pour lequel la bulle s'effondre sur elle-même avant que la zone de contact au niveau du pied n'ait le temps de se déplacer sur la surface mouillée de la boîte de Petri. La taille de la bulle initiale est égal à  $R_0 = 32 \pm 1$  mm. L'orifice a un rayon  $a = 5$  mm et la viscosité de la solution est de 22 mPa.s.

l'orifice, la dynamique est caractérisée par l'effondrement de la bulle sur elle-même avec une immobilisation du pied de la bulle (voir Fig. 3.16). Pour l'ensemble de l'étude, on adimensionne le problème avec  $R_c = R_0 r_c$ ,  $H = R_0 h$ ,  $X = R_0 x$  et  $t = \tau \varepsilon$  où  $\tau$  est le temps caractéristique de notre expérience et  $\varepsilon$  est le temps adimensionné. Nous définirons cette valeur dans la section 3.1. Les figures 3.17 3.18 et 3.20 montrent l'évolution temporelle des distances normalisées, définies sur les figures 3.14, 3.15 et 3.16. Pour cette investigation, le traitement d'image permet de capturer des dynamiques dans chacun des trois régimes (voir Fig. 3.17, 3.18 et 3.20) mais cela ne fonctionne pas pour étudier les derniers instants de vie de la bulle dans notre expérience. Le temps expérimental  $t_{fin}$ , lorsque la vidange est finie, est obtenu par observation direct du film d'une expérience. Ce temps  $t_{fin}$  est défini dans les figures 3.14, 3.15.

### 3 Modélisation de l'écoulement

Dans cette section nous allons proposer un modèle permettant de décrire les différentes dynamiques de vidange observées expérimentalement (Fig. 3.14, 3.15 et 3.16 et Fig. 3.17, 3.18 et 3.20). Dans un premier temps, dans la section 3.1, nous allons nous intéresser au régime I pour lequel une bulle reste hémisphérique pendant la vidange. Deuxièmement, nous allons rationaliser en section 3.2 les dynamiques vues dans le régime II, qui est, le régime dans lequel la forme de la bulle est une calotte sphérique pendant le procédé de vidange. Puis nous étudierons le cas spécifique du régime III pour lequel le pied de la bulle reste immobile dans l'expérience. Pour chacun des trois régimes vus expérimentalement, nous modélisons les dynamiques en supposant que le flux d'air obéit au principe de Bernoulli. En effet, pour la configuration d'écoulement de l'air de notre expérience, il est raisonnable de considérer le gaz inviscide (c'est-à-dire un gaz dont la viscosité est nulle) et donc de négliger les effets de dissipation visqueuse de l'air. Cette hypothèse nous permet alors d'utiliser l'équation de Bernoulli. Nous définissons  $v_0$  la vitesse de l'air au centre de l'orifice qui peut être déterminée par la conservation du débit de l'air expulsé de la bulle de volume  $V = 2\pi R_c^3/3$  dans le régime I, et donne :  $\dot{V} = 2\pi R_c^2 \dot{R}_c = -\pi a^2 v_0$ .

A la différence de l'écoulement d'air, nous constatons que le déplacement du pied de la bulle est impacté par un effet dissipatif provoqué par la viscosité de la solution savonneuse et nous pouvons définir un nombre de Reynolds associé à cet écoulement. Ce nombre  $\mathcal{R}_e$  peut être écrit  $e\rho_\ell \dot{X}/\eta_\ell$  où  $\eta_\ell$  et  $e$  représentent respectivement la masse volumique du liquide et l'épaisseur du film liquide en dessous de la bulle. Pour la figure illustrant le régime II (Fig 3.15), on trouve que  $\mathcal{R}_e$  est  $O(10^{-1})$  qui indique l'importance des effets visqueux situés au niveau du pied de la bulle. Pour calculer ce nombre de Reynolds, nous avons utilisé une valeur moyenne de l'épaisseur du film liquide  $e = 20 \mu\text{m}$ . Cette épaisseur moyenne est obtenue en mesurant avec une technique d'interférométrie la couche de liquide présente sur le support solide en dessous de la bulle.

#### 3.1 $\theta \cong \pi/2$ , régime I : le cas d'une bulle hémisphérique

Pour la bulle hémisphérique vue dans le régime I (voir Fig. 3.14), la relation de Bernoulli écrite le long de la ligne de courant verticale allant de l'apex de la bulle au centre de l'orifice s'écrit  $P_0 + \frac{4\gamma}{R_c} + \frac{\rho_a \dot{R}_c^2}{2} = P_0 + \frac{\rho_a v_0^2}{2}$  où  $P_0$  est la pression atmosphérique. On peut noter que contrairement au problème de Torricelli [1] pour lequel le phénomène physique moteur de la vidange est la pression hydrostatique, ici c'est la pression de Laplace qui est le moteur de la vidange. La relation de Bernoulli peut être réécrite comme  $v_0^2 = \dot{R}_c^2 + \frac{8\gamma}{\rho_a R_c}$ . Nous avons mentionné la conservation du

débit de l'air qui devient alors  $\dot{V} = 2R_c^2\dot{R}_c = -a^2v_0$ . En utilisant la relation de la vitesse  $v_0$  obtenue par le principe de Bernoulli, on trouve une équation différentielle ordinaire du premier ordre pour  $R_c$  :

$$\dot{R}_c = \frac{dR_c}{dt} = 2\sqrt{2}a^2\sqrt{\frac{\gamma}{\rho_a R_c}} \frac{1}{\sqrt{4R_c^4 - a^4}} \quad (3.10)$$

En utilisant  $\tau = \mathcal{G}\tau_{in}$ , où  $\mathcal{G} = \left(\frac{R_0}{a}\right)^2$  est un paramètre géométrique adimensionné défini comme le rapport du rayon initial de la bulle par celui de l'orifice et  $\tau_{in} = \sqrt{\frac{\rho_a R_0^3}{\gamma}}$  un temps inertio-capillaire, l'équation décrivant les variations de  $R_c$  (Eq. 3.10) peut être réécrite pour  $r_c$  :

$$\dot{r}_c = \frac{dr_c}{d\varepsilon} = 2\sqrt{\frac{2}{r_c}} \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{4\mathcal{G}^2 r_c^4 - 1}} \quad (3.11)$$

qui peut être résolue numériquement. Il est intéressant de voir que cette Eq. 3.11

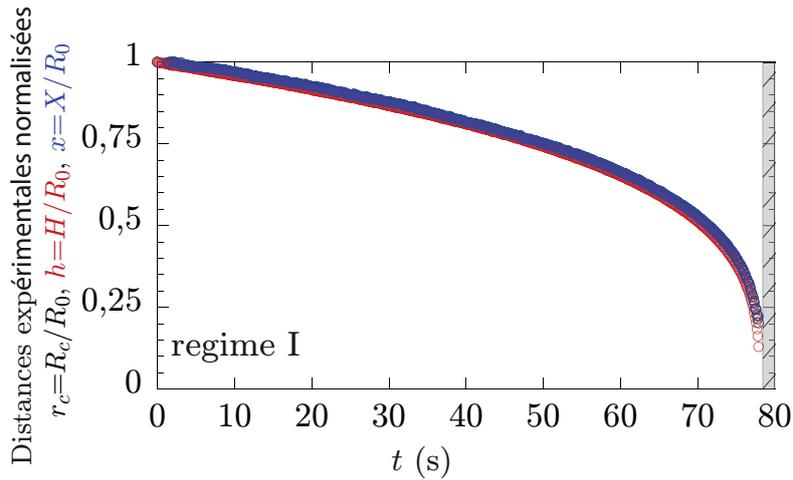


FIGURE 3.17: Résultat expérimental du Régime I correspondant à la séquence de photographies de la figure 3.14. On y voit la variation temporelle des observables géométriques normalisées : le rayon de courbure  $r_c = R/R_0$ , la hauteur  $h = H/R_0$  et la distance  $x = X/R_0$  qui sont confondus car la bulle reste hémisphérique pendant la dynamique. L'orifice a un rayon  $a = 1$  mm, la viscosité de la solution est de 1 mPa.s et le rayon initial de la bulle est  $32 \pm 1$  mm.

peut prendre une forme encore plus simple qui peut être résolue analytiquement quand on fait une supposition qui est facilement obtenue expérimentalement. Dans la limite de  $\mathcal{G} = \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 = -\frac{v_0}{2\dot{R}_c} \gg 1$ , il est en effet raisonnable de considérer le terme  $\dot{R}_c^2$  négligeable par rapport à  $v_0^2$  dans la relation de Bernoulli. Alors, la conservation

du débit d'air s'écrit  $R_c^2 \dot{R}_c = -a^2 \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho_a R_c}}$  et Eq. 3.11 devient :

$$\dot{r}_c r_c^{5/2} = -\sqrt{2} \quad (3.12)$$

dont la solution analytique est  $r_c^{7/2}$  qui décroît linéairement avec le temps normalisé  $\varepsilon = t/\tau$  comme

$$r_c^{7/2} = 1 - \frac{7}{\sqrt{2}} \varepsilon \quad (3.13)$$

En d'autres mots, quand  $\mathcal{G} = \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \gg 1$ , la prédiction du temps  $t_{fin}$  est  $t_{fin} = \frac{\sqrt{2}}{7} \mathcal{G} \tau_{in} \simeq 0.202 \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{\rho_a R_0^3}{\gamma}}$ .

### 3.2 $\theta < \pi/2$ , régime II : cas d'une calotte sphérique avec mobilité du pied de la bulle (voir Fig. 3.15)

Lorsque  $\theta < \pi/2$ , cela signifie que la forme de la bulle devient une calotte sphérique de volume  $\frac{\pi}{3} H^2 (3R_c - H)$ . La relation de conservation du débit de l'air devient  $v_0 = -\frac{H}{a^2} [\dot{H}(2R_c - H) + H\dot{R}_c]$ . Le principe de Bernoulli écrit pour la ligne de courant verticale allant de l'apex de la bulle au centre de l'orifice s'écrit à présent  $v_0^2 = \frac{8\gamma}{\rho_a R_c} + \dot{H}^2$ . En combinant les deux expressions de la vitesse de l'air, en adimensionnant comme mentionné précédemment et en utilisant le paramètre géométrique  $\tau = \mathcal{G} \tau_{in}$  comme dans le cas d'une bulle hémisphérique, on obtient alors la relation suivante :

$$h \left[ \dot{h}(2r_c - h) + h\dot{r}_c \right] = -\frac{1}{\mathcal{G}} \sqrt{\dot{h}^2 + \frac{8\mathcal{G}^2}{r_c}}. \quad (3.14)$$

Pour fermer le problème on a besoin d'écrire une seconde équation mettant en relation  $\dot{r}_c$ ,  $r_c$ ,  $\dot{h}$  et  $h$ . Cette équation provient de la dissipation visqueuse qui se produit pendant le déplacement du pied de la bulle sur la surface humide. En effet, la friction explique le changement de dynamique que l'on observe entre les régimes I et II (voir Fig. 3.15). Une bulle initialement hémisphérique va se transformer en calotte sphérique qui tendra à s'aplatir plus rapidement que le pied de la bulle ne se déplace. Autrement dit, la hauteur  $h$  diminue plus rapidement que  $x$ . En conséquence, contrairement au régime I,  $h$  est plus petit que  $r_c$  et  $x$  à chaque instant dans le régime II. On voit aisément cela en comparant les graphiques des figures 3.14 et 3.15. Au niveau de la zone de contact, la force de frottement visqueux qui agit sur le pied de la bulle s'oppose au mouvement du pied de la bulle, et son amplitude varie comme  $\beta\gamma \left[\frac{\eta}{\gamma} |\dot{X}|\right]^{2/3}$  [28, 29], où  $\beta$  est un paramètre qui dépend des conditions aux limites. Une force capillaire d'ordre de grandeur  $2\gamma$  agit sur le pied la bulle comme représenté sur la figure 3.19. En considérant que le déplacement s'effectue

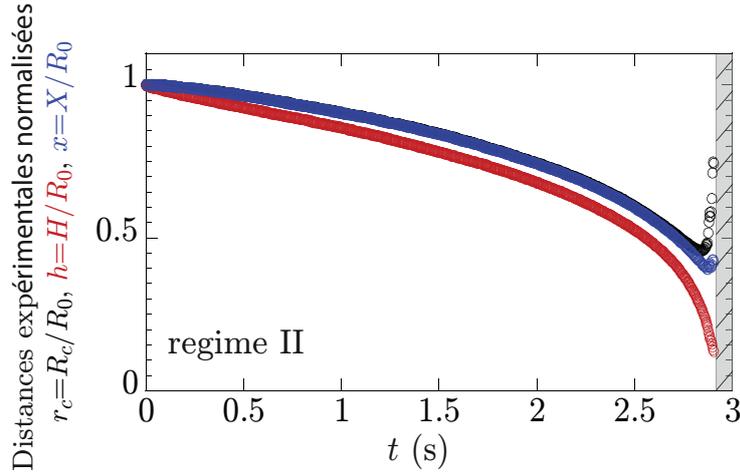


FIGURE 3.18: Résultat expérimental du Régime II correspondant à la séquence de photographies de la figure 3.15. On rapporte ici la variation temporelle des observables géométriques normalisées par le rayon initial : le rayon de courbure  $r_c = R/R_0$ , la hauteur  $h = H/R_0$  et la distance  $x = X/R_0$ . L'orifice a un rayon  $a = 2\text{mm}$ , la viscosité de la solution est de  $1\text{ mPa}\cdot\text{s}$  et le rayon initial de la bulle est  $R_0 = 32 \pm 1\text{mm}$ .

de manière quasi-statique, la projection des forces à l'équilibre sur la paroi plane mouillée donne  $2 \cos \theta = \beta \left[ \frac{\eta}{\gamma} |\dot{X}| \right]^{2/3}$ . Comme  $X$  décroît avec le temps dans le régime II, on a  $|\dot{X}| = -\dot{X}$ . La géométrie du problème nous permet aussi d'écrire que  $\cos \theta = (R_c - H)/R_c$  et  $X^2 + (R_c - H)^2 = R_c^2$ . La dérivée de la dernière équation donne  $\dot{X} = (\dot{R}_c H + \dot{H} R_c - \dot{H} H) / \sqrt{2R_c H - H^2}$ . En combinant cette expression avec celle de l'équilibre des forces et en adimensionnant comme dans la section 3.1, on trouve alors la seconde équation différentielle recherchée :

$$h \dot{r}_c + \dot{h}(r_c - h) = -2\sqrt{2}\mathcal{T} \left(1 - \frac{h}{r_c}\right)^{3/2} \sqrt{h(2r_c - h)} \quad (3.15)$$

où  $\mathcal{T}$  est le rapport  $\mathcal{T} = \tau/\tau_{vis}$  avec le temps visco-capillaire  $\tau_{vis} = \beta^{3/2}\eta_\ell R_0/\gamma$ . En combinant les équations Eq. 3.14 et Eq. 3.15, on trouve :

$$\left(h^2 r_c^2 - \frac{1}{\mathcal{T}^2}\right) \dot{h}^2 - 2I r_c h^2 \dot{h} + \left(h^2 I^2 - \frac{8}{r_c}\right) = 0 \quad (3.16)$$

où  $I = 2\sqrt{2}\mathcal{T} \left(1 - \frac{h}{r_c}\right)^{3/2} \sqrt{h(2r_c - h)}$ . Nous comparerons ce modèle avec nos résultats expérimentaux dans la section 4.

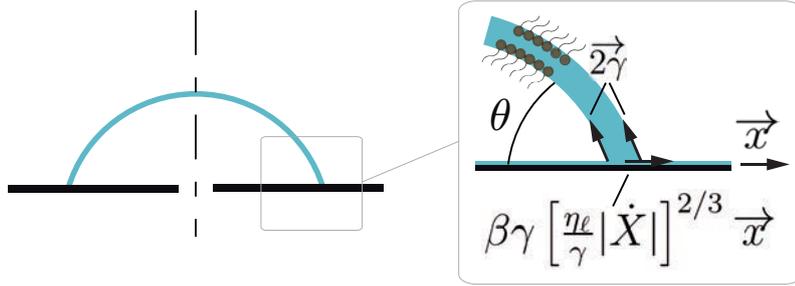


FIGURE 3.19: Schéma d'une bulle de savon interfaciale (à gauche) que nous étudions dans ce chapitre avec un zoom (à droite) sur le pied de la bulle illustrant les forces en action. Pour plus de clarté le schéma est simplifié et ne montre pas les quatre tensions de surface qui agissent sur le pied de la bulle parallèlement au substrat. Il y a les deux tensions des surfaces liquide-gaz et liquide-solide de chaque côté de la paroi de la bulle. Ces forces étant égales et opposées, elles s'annulent l'une avec l'autre.

### 3.3 $\theta < \pi/2$ , régime III : cas de la vidange d'une calotte sphérique avec le pied immobile

Comme nous pouvons le voir dans la figure 3.16, dans le régime III, observé pour les plus petits rapports  $(R_0/a)^2$  et/ou le liquide de plus grande viscosité, le pied de la bulle ne se déplace que très peu au cours de la vidange. Dans ce régime, nous écrivons alors que le pied de la bulle est ancré, soit  $X = R_0$  et  $\dot{X} = 0$ . Comme dans le régime II, la bulle a une forme de calotte sphérique et le volume est écrit comme une fonction de  $H$  et  $X$  en utilisant la relation géométrique  $R_c = (X^2 + H^2)/2H$  : ce volume est  $\frac{\pi}{2}H(\frac{H^2}{3} + X^2)$ . La relation de conservation du débit de l'air où la vitesse  $v_0$  obtenu comme précédemment avec le principe de Bernoulli  $v_0^2 = \frac{8\gamma}{\rho_a R_c} + \dot{H}^2$ . Contrairement au cas du régime II dans lequel le terme  $\dot{H}^2$  ne peut être négligée, quand on la compare à la pression de Laplace  $\frac{8\gamma}{\rho_a R_c}$ , dans le régime III ce terme est plus petit de plus de trois ordres de grandeur que précédemment (voir Fig. 3.21). En conséquence on peut écrire  $v_0 = \sqrt{\frac{8\gamma}{\rho_a R_c}} = 4\sqrt{\frac{\gamma H}{\rho_a(X^2 + H^2)}}$  et la conservation du débit  $\dot{H} = -8a^2\sqrt{\frac{\gamma}{\rho_a}}\frac{\sqrt{H}}{(H^2 + X^2)^{3/2}}$ . En utilisant la condition  $X = R_0$  et en adimensionnant la relation, on trouve un temps de vidange  $t_{fin} = \frac{1}{8}\mathcal{G}\tau_{in}\int_0^1\frac{(h^2+1)^{3/2}}{\sqrt{h}}dh$ . On peut calculer la valeur de cette intégrale numériquement et on obtient alors  $t_{fin} \simeq 0.334\mathcal{G}\tau_{in}$ .

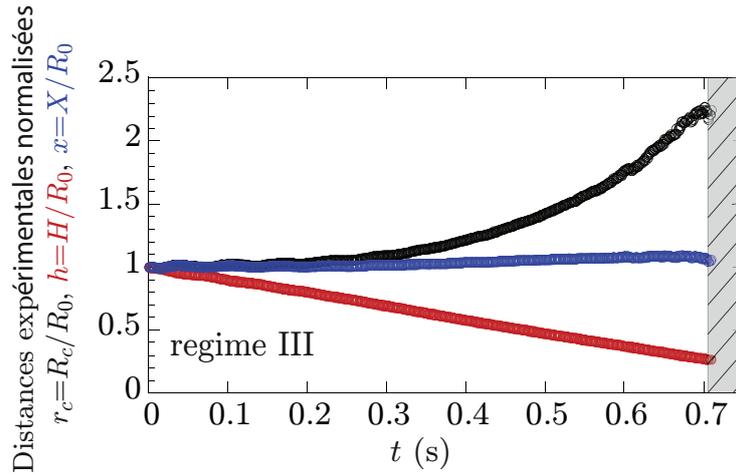


FIGURE 3.20: Résultat expérimental du Régime III correspondant à la séquence de photographies de la figure 3.15. On y voit la variation temporelle des observables géométriques normalisées : le rayon de courbure  $r_c = R/R_0$ , la hauteur  $h = H/R_0$  et la distance  $x = X/R_0$ . Comme vu sur la séquence d'images,  $h$  diminue et  $r_c$  augmente décrivant l'effondrement de la bulle sur elle-même. La distance  $x$  reste quasi-constante montrant que le pied de la bulle est quasi-immobile. Le rayon de l'orifice est  $a = 5$  mm, la viscosité de la solution est de 22 mPa.s et le rayon initial de la bulle est  $R_0 = 32 \pm 1$  mm.

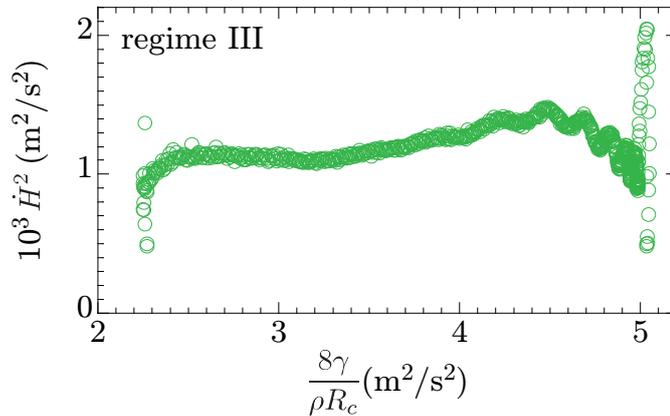


FIGURE 3.21: Evolution de  $\dot{H}^2$  avec  $\frac{8\gamma}{\rho a R_c}$  dans le régime III pour les données correspondantes à la figure 3.20.

### 3.4 Drainage et évaporation du film liquide

Intéressons nous aux cas particuliers des régimes I et II pour lesquels le temps de vidange d'une bulle peut dépasser la minute. En effet, comme nous pouvons

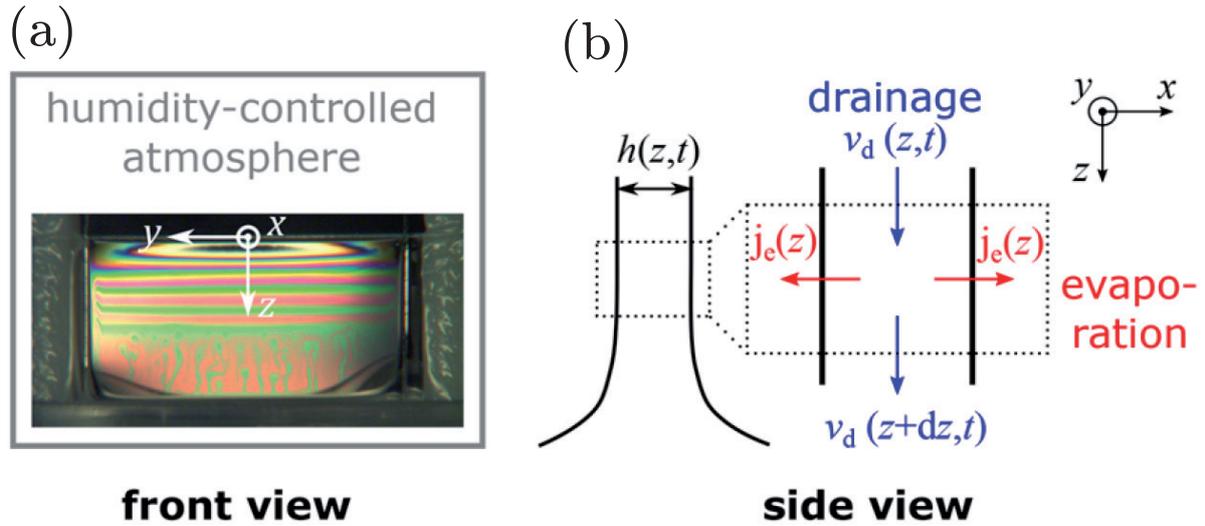


FIGURE 3.22: Figure tirée de [30] qui représente l'expérience que Champougny et al. ont réalisée pour étudier l'influence d'un environnement humide sur la stabilité d'un film liquide. En (a) nous voyons un cadre extrait d'un bain liquide contenant une solution savonneuse. Le film est tiré verticalement vers le haut. Le schéma (b) illustre les phénomènes de drainage et d'évaporation observés.

le voir sur la figure 3.17 la vidange d'une bulle peut être un processus très long jusqu'à 80 s pour le cas illustrant le régime I dans cette figure. Cet intervalle étant conséquent, nous pouvons nous demander, si pendant la dynamique de vidange, la bulle peut être affectée par des phénomènes d'évaporation et de drainage [30]. Les travaux réalisés par Champougny et al. s'articulent autour de l'étude de la stabilité d'un film liquide dans un environnement contrôlé. L'expérience que les auteurs proposent consiste à tirer un cadre à vitesse constante hors d'un bain liquide, l'humidité de l'atmosphère entourant l'expérience étant contrôlée (voir Fig. 3.22). Il se forme alors un film liquide de savon sur le cadre. Le fait de tracter ce cadre a pour effet d'exercer une contrainte verticale sur le film liquide. De plus, le film étant positionné dans l'air subit de l'évaporation. Pour rationaliser leurs résultats, les auteurs suggèrent que l'éclatement du film liquide se produit lorsque la diminution de l'épaisseur provoquée par l'évaporation devient comparable à la diminution de l'épaisseur provoquée par le drainage du liquide. Ces deux phénomènes surviennent également dans nos expériences et nous devons nous assurer que le temps passé par la bulle dans l'atmosphère du laboratoire n'affecte pas la dynamique de vidange. Pour cela, nous avons réalisé une série d'expériences dans lesquelles les paramètres de taille de bulle et de solution sont les mêmes et nous faisons varier le temps d'attente  $t_{attente}$  (dans la gamme  $t_{attente} = 5 - 80$  s) que passe la bulle en contact avec l'air entre

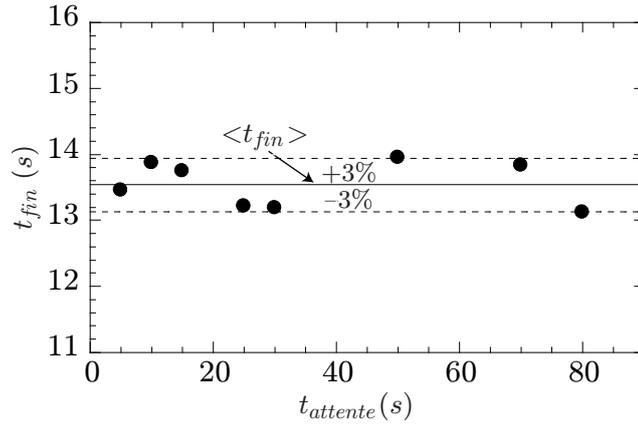


FIGURE 3.23: Variation du temps de vidange  $t_{fin}$  en fonction du temps d'attente  $t_{attente}$  écoulé entre la préparation de la bulle et le début de la vidange à l'ouverture de l'orifice. Le rayon initial de la bulle est fixé et est égal à  $R_0 = 34 \pm 1$  mm. Les valeurs du rayon de l'orifice  $a$  et de la viscosité du fluide  $\eta_\ell$  sont respectivement 1 mm et 4 mPa.s.

sa préparation et l'ouverture de l'orifice par lequel la bulle se vide. La figure 3.23 montre que la variabilité du temps de vidange  $t_{fin}$  est assez faible, de l'ordre de  $\pm 3\%$  et qu'elle paraît indépendante du temps d'attente  $t_{attente}$ . Nous pouvons donc en conclure que l'évaporation et le drainage ne sont pas des phénomènes physiques générant des modifications dans les dynamiques observées des régimes I et II. Nous négligerons donc cet aspect dans la suite de notre étude.

## 4 Résultats et discussion

Dans cette section, nous allons comparer le modèle présenté en section 3 et les résultats des expériences systématiques réalisées. Nous allons commencer par expliquer les résultats trouvés dans le régime I pour lequel la bulle possède une forme hémisphérique pendant toute la durée de la vidange et  $r_c = h = x$  (voir Fig. 3.17). La figure 3.24 montre la variation temporelle du rayon de courbure pour des solutions de viscosité différentes et différents rayons de l'orifice. Pour les résultats présentés dans la figure 3.24, nous travaillons avec des orifices assez petits et des bulles suffisamment larges pour satisfaire la condition  $\mathcal{G} = (\frac{R_0}{a})^2 \gg 1$  ( $\mathcal{G} = 700 - 4200$ ), ce qui nous permet d'écrire l'approximation de l'équation différentielle ordinaire Eq. 3.11. La dynamique suit les prédictions de l'Eq. 3.13. Dans ce résultat l'évolution temporelle de  $r_c$  doit décroître comme la solution de l'Eq.3.11, soit Eq.3.12. Comme prédit par la dernière équation, quand  $r_c^{7/2}$  est tracé en fonction du temps normalisé  $\varepsilon$ ,

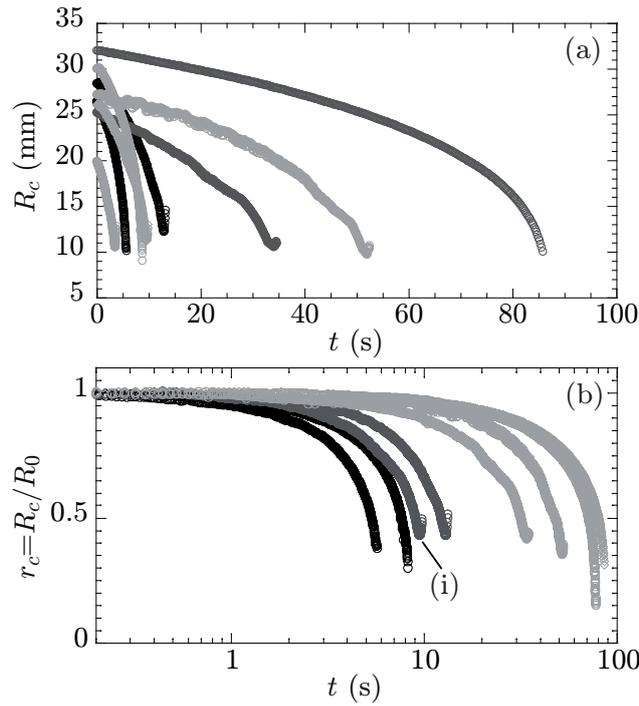


FIGURE 3.24: Sur le graphique en (a), nous avons tracé les dynamiques obtenues pour différentes valeurs de  $R_0$  et  $a$ , avec deux solutions dont les viscosités dynamiques respectives sont 1 mPa.s et 4 mPa.s. Le rayon initial de la bulle  $R_0$  et la taille de l'orifice  $a$  sont choisis suffisamment grands pour obtenir une valeur du paramètre sans dimension  $\mathcal{G} = (\frac{R_0}{a})^2 \gg 1$ . Le rapport géométrique  $(\frac{R_0}{a})^2$  varie de 700 à 4200. Le graphique (b) représente ces résultats dans une forme normalisée pour les distances.  $R_c/R_0$  est rapporté en fonction du temps. Les différents niveaux de gris représentent différentes valeurs de  $a$  ( $\bullet$   $a = 0.5$ ,  $\bullet$   $a = 0.75$ ,  $\bullet$   $a = 1$ ) et les symboles  $\circ$  et  $\diamond$  représentent respectivement les viscosités de 1 mPa.s et de 4 mPa.s de la solution.

cette quantité est une fonction linéairement décroissante de  $\varepsilon$  et ce pour toutes les données (voir Fig. 3.24). Pourtant, ces données ne se rassemblent pas sur une seule et même courbe comme attendu. Pour chaque jeu de données, le temps pour lequel les courbes auraient du couper l'axe des abscisses ( $\frac{\sqrt{2}}{7} \approx 0.202$ ) a été sous-estimé. Cependant, il est possible d'apporter une correction aux données permettant d'obtenir le résultat escompté. En effet si nous utilisons une valeur effective  $a^*$  du rayon de notre orifice  $a$  et que l'on calcule à nouveau  $\tau$ , on retrouve la valeur de temps prédite. En utilisant cette valeur effective du rayon tel que  $a = a^*$ , on peut tracer une courbe illustrant un temps expérimental de vidange, pour le régime I, pouvant varier dans notre étude sur deux ordres de grandeur, est bien décrit par l'Eq. 3.12 qui prédit  $t_{fin} = \frac{\sqrt{2}}{7}\tau \approx 0.202\tau$ . Comme on a vu dans la figure 3.26,

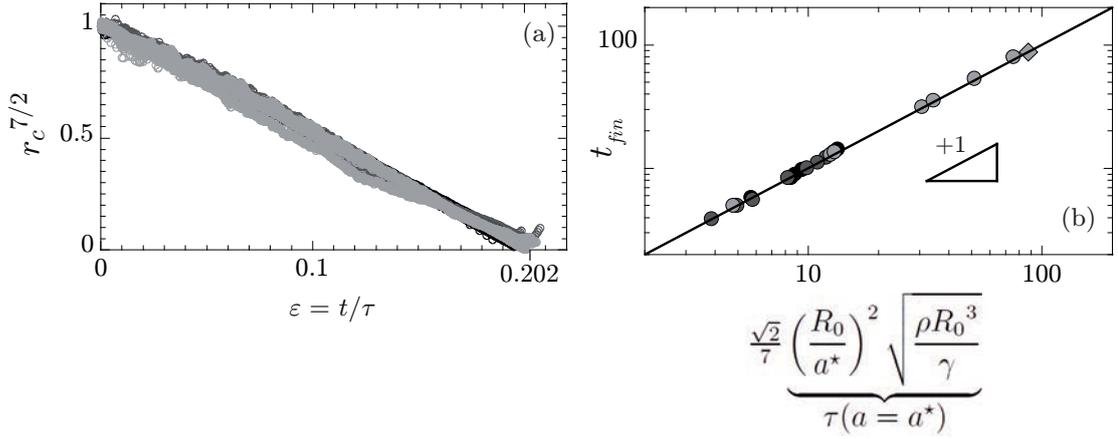


FIGURE 3.25: En utilisant les données de la figure 3.24 nous traçons  $r_c^{7/2}$  en fonction du temps normalisé  $\varepsilon$ . Le graphique en (a) montre que ces dernières se regroupent sur une seule et même courbe, comme attendu dans l'Eq. 3.13. L'air s'est totalement échappé de la bulle au temps  $t_{fin} = \frac{\sqrt{2}}{7} \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{\rho_a R_0^3}{\gamma}}$ . Les solutions utilisées ont une viscosité de 1 mPa.s et 4 mPa.s et le rapport géométrique  $\left(\frac{R_0}{a}\right)^2$  varie de 700 à 4200. Les différents niveaux de gris représentent différentes valeurs de  $a$  ( $\bullet$   $a = 0.5$ ,  $\bullet$   $a = 0.75$ ,  $\bullet$   $a = 1$ ) et les symboles  $\circ$  et  $\diamond$  représentent respectivement les viscosités de 1 mPa.s et de 4 mPa.s de la solution.

le rayon effectif  $a^*$  qui est ajusté pour comparer les résultats expérimentaux et le modèle présenté, apparaît comme étant légèrement plus petit que  $a$ . Ce rayon effectif est une fonction qui varie faiblement avec la solution de savon utilisée et qui varie linéairement avec  $a$  : nos expériences montrent que  $a^*$  vaut environ  $0.75a$  (voir Fig. 3.26). Il semble raisonnable de trouver un rayon effectif de l'orifice plus petit que le rayon mesuré puisque nous calculons la vitesse de l'air au centre de l'orifice avec la relation de Bernoulli. Dans la réalité, rien ne garantit que la vitesse de l'air est uniforme sur la totalité de la surface de l'orifice. Pour résumer, avec les paramètres d'une bulle hémisphérique et une taille d'orifice donnant un paramètre géométrique sans dimension  $\mathcal{G}$  suffisamment grand, la figure 3.25 démontre que les dynamiques de vidange sont complètement définies par une simple loi d'équation 3.13 et que l'expression théorique du temps de vidange  $t_{fin}$  décrit correctement les résultats expérimentaux en remplaçant la rayon de l'orifice  $a$  par une valeur effective  $a^*$ . Par la suite le temps  $\tau$  sera estimé en utilisant  $a^*$ .

La figure 3.27 montre l'évolution temporelle des trois longueurs caractéristiques normalisées correspondant aux données nommées (i) dans la figure 3.24. Pour ce jeu de paramètres, la réponse est celle du régime I pour la plupart des dynamiques,  $r_c = h = x$  jusqu'à ce que la valeur de  $\varepsilon$  soit de 0.18. La friction au pied de la bulle

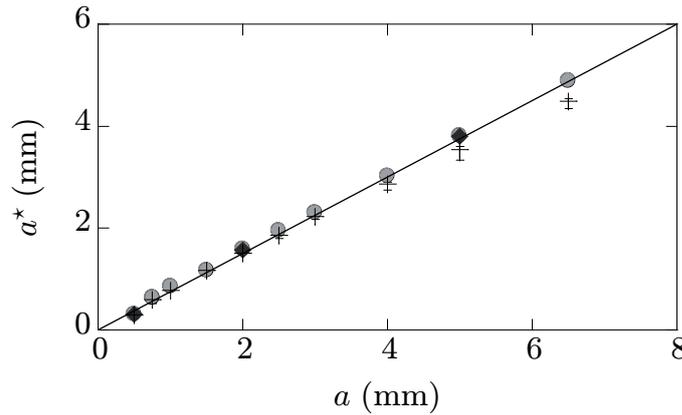


FIGURE 3.26: Courbe représentant la variation du rayon effectif de l'orifice  $a^*$  en fonction de la valeur mesurée  $a$  pour les trois solutions que nous utilisons dans l'expérience qui ont des viscosités  $\eta_\ell$  de 1 mPa.s (●), 4 mPa.s (+) et 22 mPa.s (◆). La droite est un guide pour les yeux et correspond à l'équation  $a^* = 0.75a$ .

commence alors à jouer un rôle dans les derniers instants comme l'illustre la zone grisée de la figure 3.25. Dans les derniers instants, nous observons une variation des valeurs des longueurs caractérisant le régime I,  $r_c \neq h \neq x$  donc  $\cos \theta = 1 - \frac{h}{r_c} > 0$ . Précédemment, nous avons vu que la bulle restait hémisphérique tout le long de la dynamique dans le régime I. Dans ce régime, le paramètre  $\mathcal{G}$  est très grand au début de la dynamique et alors que  $R_c$  diminue, on peut transiter vers un régime II du fait de la grande diminution de  $\mathcal{G}$ . Cette diminution est assez importante pour diminuer également  $\tau/\tau_{vis}$  pour tout autre paramètre fixe. Nous pouvons constater sur la figure 3.28 que l'angle de contact  $\theta$  vaut  $89 \pm 1^\circ$  pendant les 74 premières secondes, ce qui correspond environ à 95% du temps de la dynamique et nous identifions parfaitement le régime I. Dans le temps, un régime I peut transiter en II car la condition initiale  $\theta = 90^\circ$  est respectée, cela est similaire au démarrage d'un régime II,  $t = 0$ . En revanche, cela n'est pas le cas quand  $X$  reste constant à la fin d'une dynamique qui a démarrée en régime I : on ne peut pas appeler cela un régime III car  $\theta$  était différent de  $\theta = 90^\circ$  au moment de l'arrêt de  $X$ . Ce phénomène étant très rapide, il n'affecte pas le temps de la vidange.

Comme nous avons pu voir dans la section 4.10, pour analyser les dynamiques de vidange nous utilisons le logiciel MATLAB pour résoudre numériquement l'Eq. 3.16 et déterminer  $\dot{h}$ . L'équation 3.15 est utilisée pour obtenir  $r_c$ . Le programme d'analyse que nous utilisons a été écrit avec MATLAB afin de déterminer les valeurs de  $h$  et  $r_c$  en utilisant la méthode d'Euler. La valeur de  $x$  est déterminée en utilisant simplement les relations géométriques entre les trois longueurs caractéristiques,

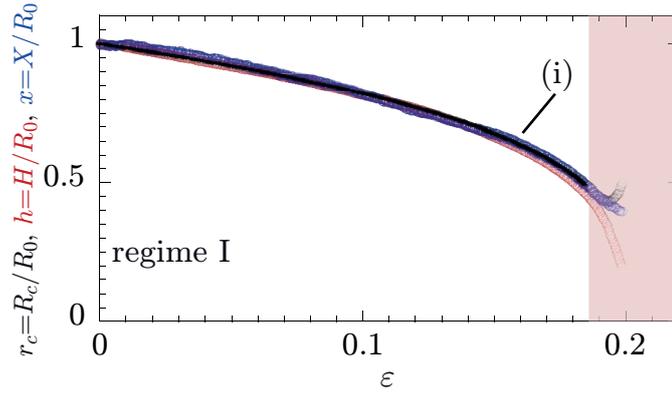


FIGURE 3.27: Graphique montrant la variation temporelle du rayon de la bulle  $r_c$ , de la hauteur  $h$  et de la distance  $x$ . Le jeu de données utilisé pour ce graphique correspond à une des expériences de la figure 3.24, dénotées (i). On peut observer dans la zone rouge que la dynamique n'est pas celle du régime I à la fin du temps de vidange. La ligne pleine correspond à la prédiction pour le régime I qui est  $r_c = \left(1 - \frac{7}{\sqrt{2}}\varepsilon\right)^{2/7}$ , donnée par l'Eq. 3.12 avec  $a = a^*$ .

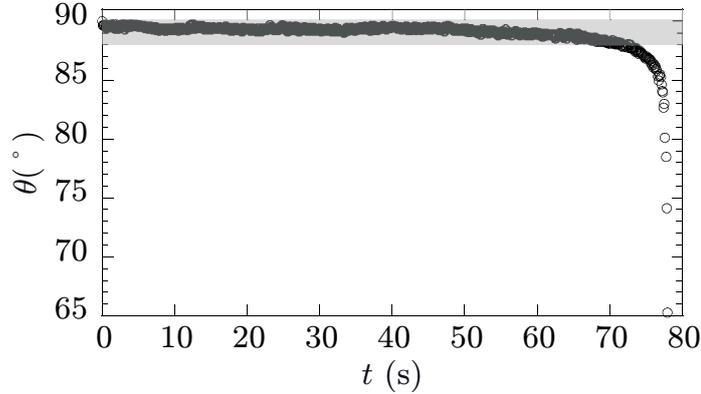


FIGURE 3.28: Evolution temporelle de l'angle de contact  $\theta$  pour les données de la figure 3.17. Dans la bande grisée, l'angle  $\theta$  varie entre  $88^\circ$  et  $90^\circ$  avant une rapide diminution observée dans les derniers instants de la dynamique.

$x = \sqrt{h(2r_c - h)}$ . La figure 3.29 montre l'évolution temporelle des trois longueurs caractéristiques  $r_c$ ,  $h$  et  $x$  avec  $\varepsilon$  pour trois différents rapports géométriques  $\left(\frac{R_0}{a}\right)^2$  (axe horizontal de la figure) et pour les trois différentes solutions (axe vertical de la figure), présentées en début de chapitre. Elles possèdent des concentrations en glycérol différentes et donc des valeurs de viscosité dynamique différentes également. La combinaison de ces neuf graphiques résume assez correctement l'étude que nous avons réalisée et témoigne des transitions entre les différents régimes en fonction de la

valeur du rapport géométrique et de la viscosité dynamique du fluide. La figure 3.29 montre la comparaison entre les données expérimentales représentées par des symboles de différentes couleurs, comme précédemment, et les prédictions théoriques de notre modèle en lignes continues déterminées numériquement. Pour obtenir une meilleure adéquation entre les résultats expérimentaux et les prédictions théoriques, nous ajoutons un paramètre libre supplémentaire  $\beta$  au modèle. Nous trouvons une valeur de  $\beta = 40 \pm 8$ , ce paramètre est indépendant de la solution et du régime considéré. La valeur de  $\beta$  que nous avons trouvée reste plus élevée que ce qu'on a l'habitude d'observer dans la littérature, la valeur de  $\beta$  dépend de la nature de l'interface qui peut être plus ou moins mobile ou rigide, on trouve généralement  $\beta \simeq 5 - 6$ . Dans notre expérience la haute valeur de  $\beta$  peut être expliquée par le fait que la solution de détergent commercial que nous utilisons augmente la rigidité de l'interface. Cette caractéristique a pour effet d'augmenter la dissipation visqueuse au niveau du pied de la bulle. L'équation. 3.15 révèle au final que le paramètre sans dimension qui gouverne le problème est  $\mathcal{T} = \frac{\tau}{\tau_{vis}} = \frac{\tau_{in}\mathcal{G}}{\tau_{vis}}$  qui ne contient pas seulement le rapport géométrique  $\mathcal{G} = \left(\frac{R_0}{a}\right)^2$  et la viscosité dynamique  $\eta_\ell$  utilisée dans la figure 3.29 mais aussi d'autres paramètres du problème via les échelles de temps inertio-capillaire ( $\tau_{in} = \sqrt{\rho_a R_0^3 / \gamma}$ ) et visco-capillaire ( $\tau_{vis} = \beta^{3/2} \eta_\ell R_0 / \gamma$ ). Comme le montre la figure 3.30,  $\mathcal{T}$  est un paramètre à adapter pour modifier la réponse du régime I, au régime II, au régime III. En effet, cette figure montre les variations de  $t_{fin}/\tau$  avec  $\mathcal{T}$  et rapporte pour l'ensemble des résultats des 200 expériences que nous avons pu réaliser et analyser en trois régimes. De plus, bien qu'il soit difficile de réaliser des expériences quand  $\mathcal{T}$  est plus petit que  $10^{-1}$ , nous trouvons que l'expression de la prédiction  $t_{fin}/\tau \approx 0.334$  déterminée en section 3.16 sort d'une simulation numérique et est corrélée avec les données expérimentales.

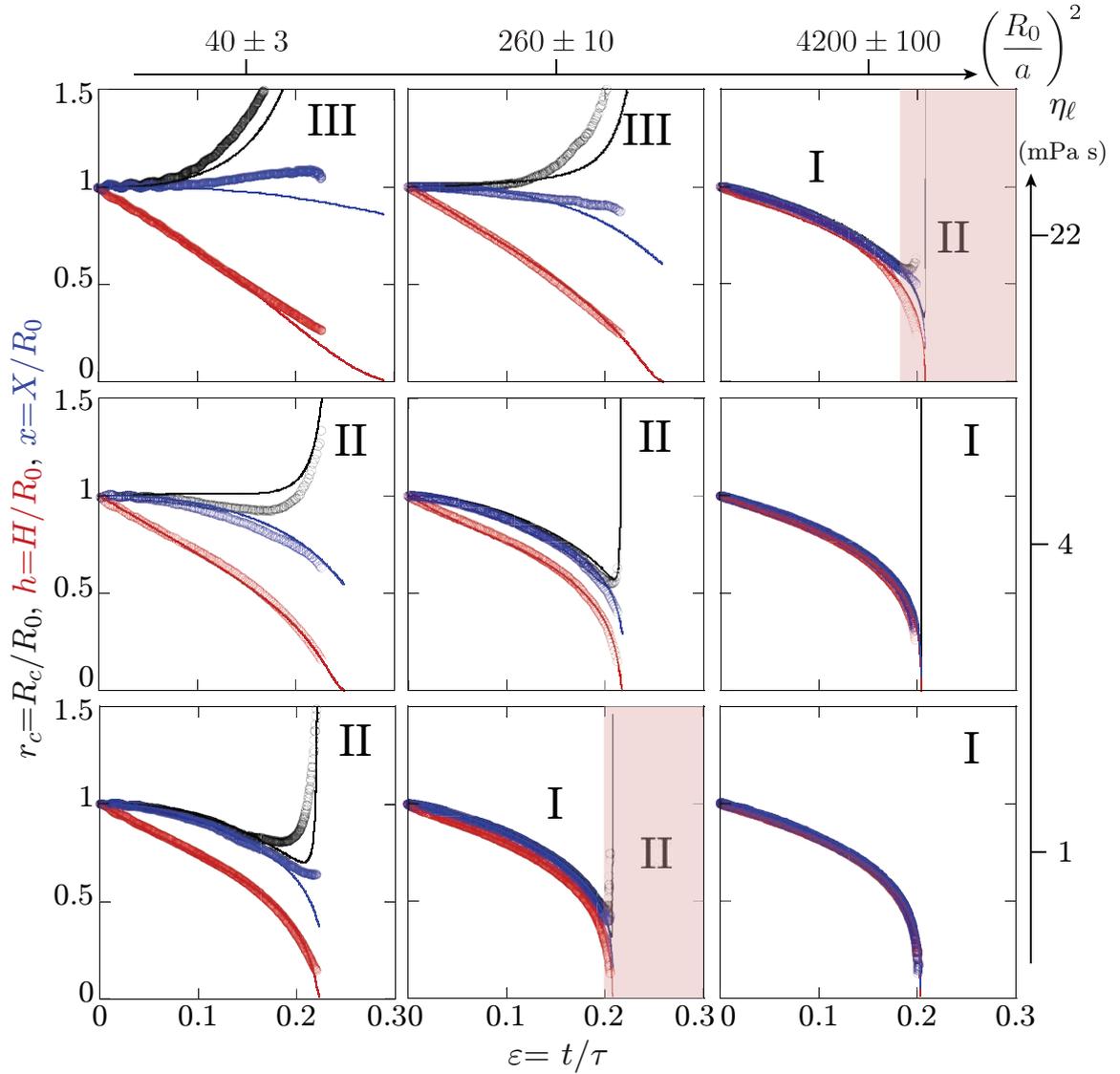


FIGURE 3.29: Dans chaque rectangle est présentée une expérience de vidange de bulle. Comme dans la figure 3.27, on y voit la variations temporelle des observables géométriques (rayon de la bulle  $r_c$ , hauteur  $h$  et distance  $x$ ) pour différentes viscosités dynamiques  $\eta_\ell$  et différents rapports géométriques  $\mathcal{G} = \left(\frac{R_0}{a}\right)^2$ . Les lignes continues représentent les résultats théoriques déterminés avec l'Eq. 3.16. Les cercles de couleurs représentent les résultats expérimentaux. Les lignes verticales rouges représentent la transition du régime I vers le régime II. La modification de la viscosité dynamique et du rapport géométrique permettent de changer le régime de la vidange.

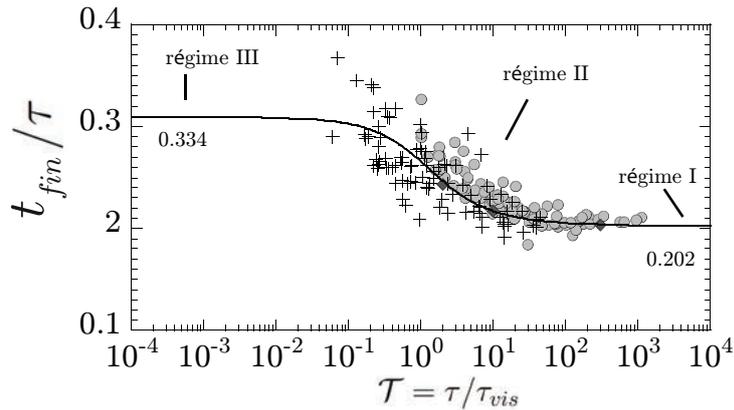


FIGURE 3.30: Graphique récapitulatif montrant la variation du rapport du temps de vidange  $t_{fin}$  par le temps caractéristique  $\tau$ , en fonction du paramètre de contrôle sans dimension  $\mathcal{T} = \tau / \tau_{vis}$ . Superposer la prédiction, en trait continu, avec les données expérimentales démontre que notre modèle est permet de rationaliser l'ensemble des expériences. Nous distinguons les deux régimes de plateau I et III ainsi que la transition par le régime II. Cependant, il reste difficile d'obtenir des valeurs proches du plateau du régime III car en augmentant la viscosité de la solution, il devient difficile de former des bulles.

## 5 Conclusion

Nous avons étudié la **vidange de bulles interfaciales** de tailles centimétriques posées sur un substrat solide qui est dotée d'un orifice par lequel l'air s'échappe. Nous avons pu observer **trois différents régimes** de vidange, qui sont pilotés par un paramètre sans dimension qui est fonction de la **physico-chimie du fluide** permettant de créer la bulle et des **variables géométriques** de la bulle et de l'orifice. Dans les deux premières dynamiques, le pied de la bulle peut se déplacer sur la couche de solution présente sur la socle troué. Dans un cas, la bulle conservera **une forme hémisphérique** pendant tout le temps de la vidange et dans l'autre la bulle prend la forme d'**une calotte sphérique** pendant le processus. Dans le troisième régime, on observe un phénomène **d'immobilisation du pied de la bulle** qui s'effondre sur elle-même. Contrairement au problème classique de la vidange d'un réservoir pour lequel l'élément physique moteur de cette dynamique est la pression hydrostatique, pour notre sujet nous avons vu que c'est **la pression de Laplace entraine la vidange de la bulle**. Nous avons également montré que l'importance de la dissipation visqueuse au niveau du pied de la bulle. En combinant cette argument physique avec la conservation du débit on obtient le modèle présenté dans ce chapitre qui explique les vidanges observés dans les trois scénarios possibles.

## 6 Annexe

### 6.1 Annexe 1 : La vidange d'un réservoir, loi de Torricelli

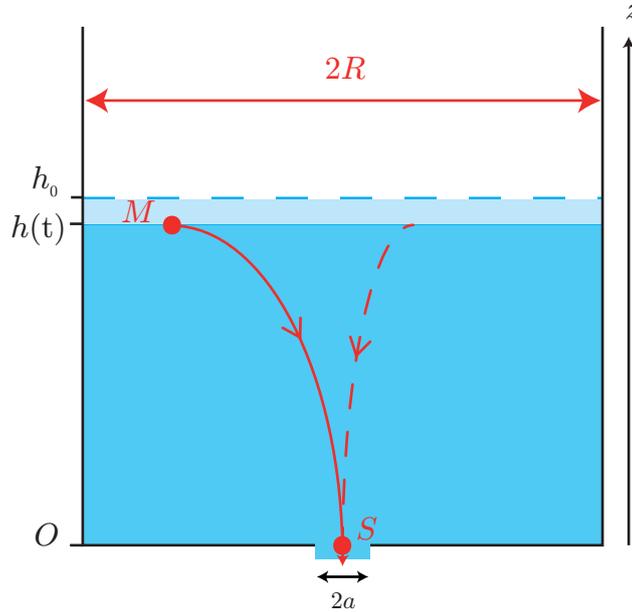


FIGURE 3.31: Ce schéma illustre l'expérience classique de la vidange d'un réservoir.

La vidange d'un réservoir est un exercice classique de mécanique des fluides qui est étudié en premier cycle universitaire. Nous allons faire la démonstration de la vidange d'un réservoir rigide de forme cylindrique et de section  $S = 4\pi R^2$  constante contenant un fluide liquide considéré incompressible. Le récipient est percé sur la surface du dessous pour garder une similarité avec la vidange de la bulle qui est présentée dans ce chapitre. L'orifice est de forme circulaire de rayon  $a$  et est très petit devant le rayon  $R$  du réservoir, on considère alors que la variation de la hauteur  $h(t)$  de la surface libre est très faible et la vitesse de descente pourra être négligée. Dans ce problème comme dans notre expérience, nous considérons le fluide comme inviscide pour pouvoir écrire le théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant joignant le point  $M$  au niveau de la surface libre au point  $S$  au niveau de l'orifice (la vitesse du fluide vaut  $v_S$ ) (voir Fig. 3.31). On pose la pression atmosphérique à la surface libre du liquide  $P_0$ , la masse volumique  $\rho_a$  et le temps  $t$ , on écrit alors :

$$P_0 + \rho_a g h(t) = P_0 + \frac{\rho_a v_S(t)^2}{2}. \quad (3.17)$$

Le jet en sortie de l'orifice est en chute libre car simplement soumis au champ de pesanteur, la vitesse est donc obtenue par transformation de l'énergie potentielle en

énergie cinétique. On peut ainsi écrire la formule de Torricelli :

$$v_S(t) = \sqrt{2gh(t)}. \quad (3.18)$$

La hauteur du fluide diminuant avec le temps, cette vitesse est également une fonction du temps. Nous pouvons écrire la relation de conservation du débit avec  $v_M$  la vitesse de la surface libre pour exprimer les variations temporelles de  $h$  :

$$v_M(t) = -\frac{dh}{dt} = \left(\frac{a}{R}\right)^2 v_S(t) = \left(\frac{a}{R}\right)^2 \sqrt{2gh(t)}. \quad (3.19)$$

Nous obtenons alors l'équation différentielle du premier ordre qui donne l'évolution de la hauteur de liquide  $h$  en fonction du temps  $t$  :

$$\frac{dh}{dt} + \left(\frac{a}{R}\right)^2 \sqrt{2gh(t)} = 0. \quad (3.20)$$

Nous intégrons cette équation en séparant les variables :

$$\int_{h_0}^{h(t)} \frac{dh'}{\sqrt{h'}} = -\left(\frac{a}{R}\right)^2 \sqrt{2g} \int_0^{t'} dt' \quad (3.21)$$

$$\sqrt{h_0} - \sqrt{h(t)} = \left(\frac{a}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{g}{2}} t. \quad (3.22)$$

Enfin :

$$h(t) = \left( \sqrt{h_0} - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{g}{2}} t \right)^2. \quad (3.23)$$

Nous obtenons le temps de vidange  $t_{fin}$  du réservoir quand  $h(t)$  tend vers 0

$$\left( \sqrt{h_0} - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{g}{2}} t \right)^2 = 0 \quad (3.24)$$

$$t_{fin} = \sqrt{2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{h_0}{g}}. \quad (3.25)$$

## 6.2 Annexe 2 : Programme d'analyse vidéo réalisé dans le cadre de l'expérience de la vidange d'une bulle interfaciale.

Pour obtenir les variations temporelles des différents observables géométriques dans les films des expériences réalisées, nous avons utilisé un programme informatique développé sur MATLAB. Le but de ce code est d'obtenir les différentes variations temporelles de toutes les grandeurs géométriques caractérisant une bulle : le rayon de courbure, la hauteur et de la distance décrivant la position du pied de la bulle. Dans un premier temps nous présentons le principe de fonctionnement de l'analyse d'image avant de fournir le code du programme.

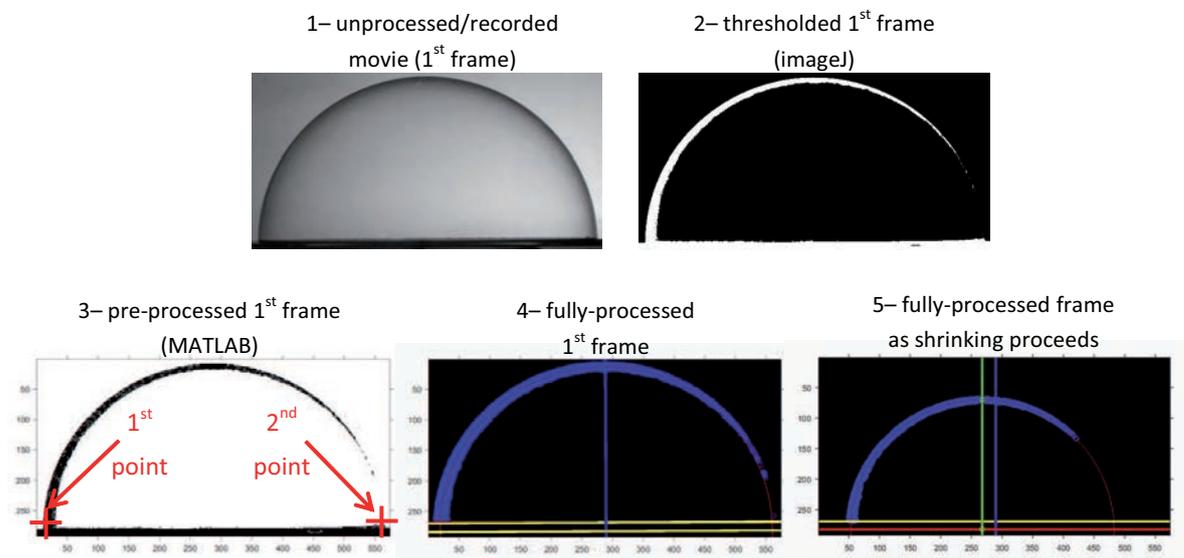


FIGURE 3.32: Ce schéma représente une bulle avant (en a) et après (en b) l'ouverture de l'orifice. En (a) la pression interne de la bulle  $P_i$  est donnée par la pression de Laplace

Les 5 étapes mentionnées ci-dessous sont illustrées par les 5 images de la figure 3.32 :

- 1- Image non traitée du film d'une expérience ;
- 2- Le film de l'expérience est transformé en une séquence d'images sur lesquelles nous avons appliqué un seuil pour binariser l'image avec le logiciel ImageJ. Ces images sont chargées sous la forme d'un film au format "avi" avec le programme écrit sur MATLAB ;
- 3- Le programme MATLAB convertit la première image de la vidéo résultant de l'étape 2 en un objet de niveau de gris sur un fond blanc et invite l'utilisateur

à choisir deux points proches du pied de la bulle en cliquant deux fois sur l'image comme indiqué par les deux croix rouges sur l'image ;

4- L'image en étape trois est traitée par le programme, la position de la hauteur maximum de la bulle est déterminée au fil du temps (ligne bleue verticale), le contour de la bulle est ajusté par un cercle (ligne rouge). Un utilisateur doit cliquer sur la première image traitée ce qui déclenche la lecture du programme ;

5- Un nombre sélectionné d'images sont analysées et ceux jusqu'à la dernière image choisie également par l'utilisateur. Le programme garde la trace de la position de la bulle qui peut glisser sur la surface humide ce qui modifie le position de l'apex, la hauteur de la bulle et ces autres caractéristiques géométriques sont correctement déterminées. On voit sur l'image la correction qui est la ligne verte indiquant toujours la position de l'apex de la nouvelle image ;

Les deux points choisis par l'utilisateur et matérialisés par les deux croix rouges sur l'image 3 définissent une ligne. Cette ligne doit être choisie de façon à ce que le pied de la bulle soit contenu entièrement sous elle. L'analyse est effectuée au dessus de cette ligne qui doit contenir entièrement le pied de la bulle au dessus duquel l'analyse sera effectuée.

```
%%%Image processing software for shrinking surface soap bubbles%%%
%The software ensures a bubble is hemispherical at the beginning of
shrinking.
```

```
It then %determines the values of the maximum bubble height,
radius of curvature, position of the %bubble foot and the shrinking
time.
```

```
It accounts for a possible tilt %angle of the support %surface and
sliding motion of the bubble on the surface while shrinking
```

```
close all;
```

```
clear all;
```

```
clc;
```

```
answer=inputdlg({'video filename (without file extension)';
```

```
'frame rate in frames/sec';'process video every n frames';
```

```
'number of frames to analyze';
```

```
'spatial calibration distance in mm/distance in pixels';
```

```
'radius a of the orifice in mm'});
```

```
path='C:\Replace by the directory where the movies to analyze
can be found\';
```

```
film=answer{1};
```

```

framesec=str2double(cell2mat(answer(2)));
n=str2double(cell2mat(answer(3)));
%a user might not want to analyze all frames
stop=str2double(cell2mat(answer(4)));
%the last analyzed frame might not be the last %frame of a movie
gamma=str2double(cell2mat(answer(5)));
%ratio of a known distance in mm/distance in pixels
a=str2double(cell2mat(answer(6)));

%txt file where the results of the analysis will be stored
file=[film 'cin.txt'];
file=[path file];
%%jpeg file showing a plot of the results
filepwt=[path film 'cin.jpeg'];

%loading the movie in MATLAB
film=[path film '.avi'];
info=VideoReader(film);
VerticalSize=info.Height;
LateralSize=info.Width;

B=rgb2gray(read(info,1));
figure(1);
for i=1:VerticalSize
for j=1:LateralSize
if (B(i,j)>240)
B(i,j)=0;
else
B(i,j)=255;
end;
end;
end;

%Display a processed image to get the coordinates of two points
defining a line right above the bubble's foot. Analysis will be
conducted above this line
imshow(B);
[xa,ya]=ginput(1);

```

```

[xb,yb]=ginput(1);

%ya and yb define an approximate ordinate of the support surface
ysurf=floor((ya+yb)/2);

%dt is the slope of the line passing through the two selected
points and defining the %position of the support surface
dt=(yb-ya)/(xb-xa);

%dn is the slope of the line perpendicular to the line of slop dt
if (yb>ya)
dn=(xb-xa)/(yb-ya);
cas=1;
end;
if(yb==ya)
cas=0;
end;
if(yb<ya)
cas=-1;
dn=(xb-xa)/(yb-ya);
end;
hold on;

for i=1:LateralSize
%A corresponds the horizontal line of the support surface at ysurf
A(i,1)=i;
A(i,2)=ysurf;
%C corresponds to the position of the support surface
accounting for possible tilting
C(i,1)=i;
C(i,2)=ya+dt*(i-xa);
end;
close(figure(1));

%Before the for-loop analyzing all frames, we compare below the
shape of the bubble on %the first frame with a circle
y=[],x=[];data=[];D=[];
im=struct('cdata',zeros(VerticalSize,LateralSize,3,'uint8'));

```

```

im(1).cdata=rgb2gray(read(info,1));
B=rgb2gray(read(info,1)); %8 bit/greyscale first image of the movie
[y,x]=find(B==255);
data(:,1)=x;
data(:,2)=y;
W=uint8(zeros(VerticalSize,LateralSize));
for k=1:length(y)
if(y(k)<ysurf)
W(y(k),x(k))=255; %Binary first image of the movie
(white bubble on black background)
else
;
end;
end;

imshow(W);
hold on
X=[];Y=[];
for k=1:length(y);
if(y(k)<ysurf)
X=cat(1,X,x(k));
Y=cat(1,Y,y(k));
else
;
end;
end;
scatter(X,Y,'b','LineWidth',1);

%The scattered data (X,Y) are adjusted with a circle,
center (xfit2,yfit2)
%radius Rfit2
b=[X Y ones(size(X))]\[-(X.^2+Y.^2)];
xfit2 = -.5*b(1);
yfit2 = -.5*b(2);
Rfit2 = sqrt((b(1)^2+b(2)^2)/4-b(3));
[Xc, Yc]=cylinder(Rfit2,100);
hold on;
for i=1:LateralSize

```

```

%line perpendicular to the support surface passing through
the center of the bubble
if(cas~=0)
D(i,1)=i;
D(i,2)=yfit2-(i-xfit2)*dn;
%coordinates of the apex of the bubble
xs=xfit2+cas*(Rfit2)/sqrt(1+dn*dn);
ys=yfit2-dn*(xs-xfit2);
else
D(i,1)=xfit2;
D(i,2)=i;
xs=xfit2;
ys=yfit2-Rfit2;
end;
E(i,1)=i;
E(i,2)=yfit2+dt*(i-xfit2);
end

plot(Xc(1,:)+xfit2,Yc(1,:)+yfit2,'r','LineWidth',1);
plot(A(:,1),A(:,2),'r','LineWidth',2);
plot(C(:,1),C(:,2),'y','LineWidth',3);
plot(D(:,1),D(:,2),'b','LineWidth',3);
plot(E(:,1),E(:,2),'y','LineWidth',3);

R0=Rfit2*gamma;%Initial radius of the bubble in mm
waitforbuttonpress;

%for-loop analyzing all frames until selected stop
(similar to the for-loop used for first frame)
Radius=[];h=[];XX=[];xxc=[];yyc=[];TimeExp=[];

for i=1:n:stop
y=[],x=[];data=[];
im(i).cdata=rgb2gray(read(info,i));
B=rgb2gray(read(info,i));
[y,x]=find(B==255);
data(:,1)=x;
data(:,2)=y;

```

```

W=uint8(zeros(VerticalSize,LateralSize));
for k=1:length(y)
if(y(k)<ysurf)
W(y(k),x(k))=255;
else
;
end;
end;

imshow(W);
hold on
X=[];Y=[];
for k=1:length(y);
if(y(k)<ysurf)
X=cat(1,X,x(k));
Y=cat(1,Y,y(k));
else
;
end;
end;
scatter(X,Y,'b','LineWidth',1);

b=[X Y ones(size(X))]\[-(X.^2+Y.^2)];
xfit2 = -.5*b(1);
yfit2 = -.5*b(2);
Rfit2 = sqrt((b(1)^2+b(2)^2)/4-b(3));
[Xc, Yc]=cylinder(Rfit2,100);
%A new normal line F to the surface passing through
the center of the bubble is calculated
%might be different than initial normal D if bubble slides
on the surface.
if(cas~=0)
for k=1:LateralSize
F(k,1)=k;
F(k,2)=yfit2-(k-xfit2)*dn;
end;
else
for k=1:LateralSize

```

```

F(k,1)=xfit2;
F(k,2)=k;
end;
end;
hold on;
plot(Xc(1,:)+xfit2,Yc(1,:)+yfit2,'r','LineWidth',1);
plot(C(:,1),C(:,2),'y','LineWidth',3);
plot(D(:,1),D(:,2),'b','LineWidth',3);
plot(E(:,1),E(:,2),'r','LineWidth',3);
plot(F(:,1),F(:,2),'g','LineWidth',3);

```

```

%Determination of the temporal variations of the
geometric quantities

```

```

xxc(i)=xfit2;
yyc(i)=yfit2;
Radius(i)=Rfit2;
TimeExp(i)=i/framesec;
N=n;

```

```

%coordinates of the apex of the bubble

```

```

if(cas~=0)
xs=xfit2+cas*(Rfit2)/((1+dn*dn)^(1/2));
ys=yfit2-(xs-xfit2)*dn;
else
xs=xfit2;
ys=yfit2-Rfit2;
end;

```

```

%determination of the height of the bubble accounting
for possible bubble sliding

```

```

delta=[];
for k=1:LateralSize
delta(k)=(E(k,1)-xs)^2+(E(k,2)-ys)^2;
end;
I=find(delta==min(delta));
xm=E(I,1);
ym=E(I,2);
haut=sqrt(min(delta));

```



```
legend({'r_{c}', 'h', 'x'}, 'FontSize', 16, 'fontname', 'cmmi10');  
legend('boxoff');  
saveas(F, filepwt);  
waitforbuttonpress;  
close(figure(2));
```

### 6.3 Annexe 3 : Echange thermique survenant pendant la détente du gaz contenu dans la bulle

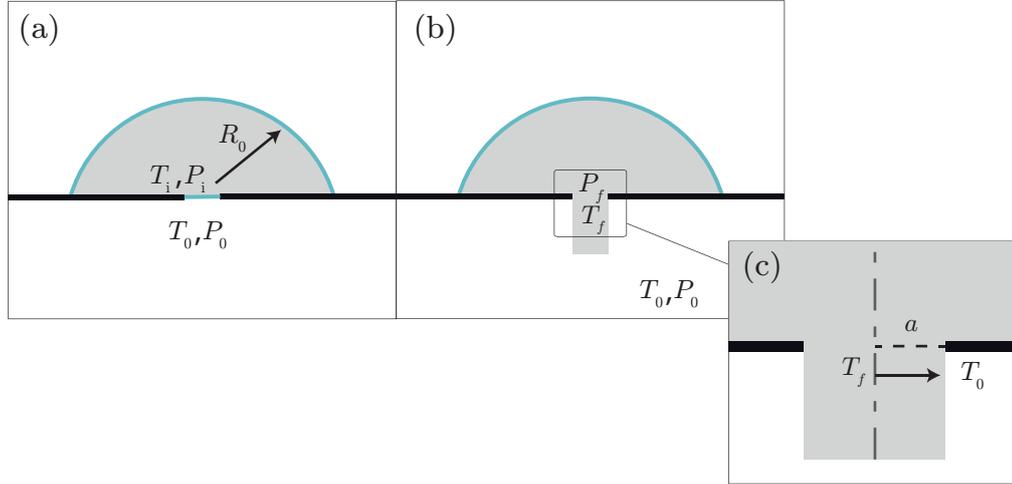


FIGURE 3.33: Schéma représentant la détente d'un gaz contenu dans la bulle (zone grise) à travers un orifice de rayon  $a$ . En position initiale (a), l'air de la bulle de rayon  $R_0$  est à pression  $P_i$  et température  $T_i$  dans une atmosphère de température  $T_0$  et de pression  $P_0$ . Après l'ouverture de l'orifice en (b), la température et la pression évoluent vers de nouvelles valeurs  $T_f$  et  $P_f$ . Le zoom sur la zone de l'orifice en (c) montre l'échange de température à travers la couche d'air  $a$  transversalement au sens d'écoulement de l'air.

Nous allons nous intéresser dans cette annexe à la variation de la température due à la détente d'un gaz sous pression. En effet, dans notre expérience l'air sous pression à l'intérieur de la bulle s'écoule par l'orifice percé sur le substrat ce qui a pour conséquence d'entraîner une variation de la température. La diffusion de chaleur dans l'air étant très rapide, nous allons observer deux cas possibles :

- si le temps de vidange de la bulle est supérieur au temps de diffusion de la chaleur,  $t_{fin} > t_{eq}$ , le système est isotherme et la température au niveau de l'orifice est égale à celle du laboratoire.
- si le temps de vidange de la bulle est inférieur au temps de diffusion de la chaleur,  $t_{fin} < t_{eq}$ , nous pourrions observer une différence de température entre l'air sortant de la bulle et l'atmosphère ambiant du laboratoire qu'il est possible de quantifier.

Comme discuté dans ce chapitre, nous avons établi les relations de temps de vidange que nous pouvons résumer comme  $t_{fin} = p\mathcal{G}\tau_{in} = p\tau$  où  $p$  est une fonction dont la valeur varie entre 0.202 (régime I) et 0.334 (régime III) (voir Fig. 3.30). La diffusion

de chaleur dans l'air s'effectue transversalement à l'écoulement au niveau de l'orifice d'évacuation comme le montre la figure 3.33. L'épaisseur de la couche à travers laquelle l'échange thermique se fait correspond au rayon de l'orifice par lequel l'air s'échappe et le temps de diffusion s'écrit  $t_{eq} \approx a^2/D_{air}$ , en supposant que le jet d'air en sorti de l'orifice est cylindrique. Dans cette équation  $D_{air}$  est le coefficient de diffusion de chaleur dans l'air des molécules d'azote ( $N_2$ ) et  $D_{air} \approx 0.2 \text{ cm}^2/\text{s}$ . Dans le régime I, le temps  $t_{fin}$  est donné par l'équation suivante :

$$t_{fin} \approx 0.202 \left( \frac{R_0}{a} \right)^2 \tau_{in} \quad (3.26)$$

où  $\tau_{in} = \sqrt{\frac{\rho_\ell R_0^3}{\gamma}}$ . Nous allons maintenant comparer  $t_{eq}$  et  $t_{fin}$  en utilisant des valeurs typiques des paramètres de l'expérience. Avec un rayon de bulle initial  $R_0 = 35 \text{ mm}$ , un orifice  $a = 0.5 \text{ mm}$ , une tension de surface  $\gamma = 25 \text{ mN/m}$  et une masse volumique  $\rho_\ell = 1000 \text{ kg/m}^3$ , nous obtenons un temps de vidange  $t_{fin} \approx 41 \text{ s}$ . En comparaison, si nous calculons le temps de diffusion, nous trouvons une valeur d'équilibre  $t_{eq} \approx 12.5 \text{ ms}$ . Comme  $t_{fin} > t_{eq}$ , nous pouvons conclure que le système est isotherme dans le cas du régime I, c'est-à-dire que la température à la sortie de l'orifice est égale à la température du laboratoire  $T_0$ . Dans le cas du régime III où le temps de vidange est plus court que le régime I avec un rapport entre le rayon de la bulle et le rayon de l'orifice qui est petit, nous avons l'équation :

$$t_{fin} \approx 0.334 \left( \frac{R_0}{a} \right)^2 \tau_{in}. \quad (3.27)$$

En calculant le temps de vidange théorique  $t_{fin}$  de cette équation avec un rayon de bulle initial  $R_0 = 10 \text{ mm}$ , un orifice  $a = 6.5 \text{ mm}$ , une tension de surface  $\gamma = 25 \text{ mN/m}$  et une masse volumique  $\rho_\ell = 1000 \text{ kg/m}^3$ , nous obtenons  $t_{fin} \approx 0.16 \text{ s}$ . Le temps de diffusion calculé avec ces paramètres est  $t_{eq} \approx 2 \text{ s}$ . Comme  $t_{fin} < t_{eq}$ , nous pouvons conclure que les échanges thermiques entre l'écoulement d'air à la sortie de l'orifice et l'atmosphère du laboratoire ne peuvent pas se faire sur le temps de l'expérience. Nous pouvons supposer que cette détente est adiabatique réversible. Il peut être intéressant de calculer la différence de température créée par cette détente entre l'écoulement d'air et l'atmosphère du laboratoire. Nous supposons que ce gaz est parfait et incompressible, nous pouvons alors écrire l'équation :

$$PV = n\mathcal{N}_a k_b T \quad (3.28)$$

où  $P$  est la pression dans le gaz,  $V$  le volume,  $n$  le nombre de moles,  $k_b$  la constante de Boltzmann,  $T$  la température du gaz et  $\mathcal{N}_a$  le nombre d'Avogadro. L'hypothèse

de la détente adiabatique réversible permet d'écrire l'équation de Laplace :

$$PV^\gamma = \text{Constante} \quad (3.29)$$

où  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  est le rapport des capacités calorifiques du gaz à pression constante  $C_p$  et à volume constant  $C_v$  (**Attention ! Contrairement à l'étude présentée dans ce chapitre, la tension de surface portera le symbole  $\sigma$** ). En s'aidant de l'égalité  $P = \frac{nRT}{V}$  de l'équation (3.28) et de l'équation (3.29) nous pouvons écrire :

$$nRTV^{\gamma-1} = \text{Constante} \quad (3.30)$$

$$P \left( \frac{nRT}{P} \right)^\gamma = \text{Constante} \quad (3.31)$$

enfin

$$P^{1-\gamma}(nRT)^\gamma = \text{Constante} \quad (3.32)$$

La température et la pression du gaz dans la bulle varient à l'ouverture de l'orifice. L'égalité de cette variation entre le temps initial  $T_i$  et le temps final  $T_f$  après avoir percé l'opercule présent sur l'orifice s'écrit :

$$P_f^{1-\gamma}T_f^\gamma = P_i^{1-\gamma}T_i^\gamma \quad (3.33)$$

et

$$\frac{T_f}{T_i} = \left( \frac{P_i}{P_f} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \quad (3.34)$$

La pression initiale  $P_i = P_0 + 4\gamma/R_0$  à l'intérieur de la bulle correspond à la pression de Laplace où  $R_0$  est le rayon initial de la bulle et  $\sigma$  la tension de surface et  $P_0$  la pression atmosphérique. La pression finale  $P_f$  est égale à  $P_0$  donc l'équation (3.34) peut s'écrire :

$$\frac{T_f}{T_i} = \left( 1 + \frac{4\sigma}{P_0 R_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad (3.35)$$

Nous supposons que la température  $T_f$  change d'une petite quantité  $\delta T$  :

$$T_f = T_i + \delta T \quad (3.36)$$

d'où

$$\frac{T_f}{T_i} = \left( 1 + \frac{\delta T}{T_i} \right). \quad (3.37)$$

D'après les équations 3.35 et 3.37 nous pouvons écrire :

$$1 + \frac{\delta T}{T_i} = \left(1 + \frac{4\sigma}{P_0 R_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \quad (3.38)$$

En prenant  $R_0 = 35$  mm,  $P_0 \simeq 10^5$  Pa et  $\sigma = 25$  mN/m, nous avons  $4\sigma/P_0 R_0 \sim 4 \cdot 10^{-5} \ll 1$ . Nous effectuons un développement limité du premier ordre en 0 :

$$\left(1 + \frac{4\sigma}{P_0 R_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \approx 1 + \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) \left(\frac{4\sigma}{P_0 R_0}\right). \quad (3.39)$$

En considérant le gaz parfait et diatomique,  $\gamma = \frac{7}{5} = 1.4$  et  $\frac{1-\gamma}{\gamma} = -0.28$ . D'après l'équation 3.38 il vient :

$$\delta T \approx -0.28 \left(\frac{4\sigma}{P_0 R_0}\right) T_i \quad (3.40)$$

Cette équation 3.40 présente l'écart de température obtenu après l'ouverture de l'orifice. En prenant un rayon de bulle  $R_0$  de 35 mm, une tension superficielle de 25 mN/m, une pression atmosphérique  $P_0 = 10^5$  Pa et une température initiale  $T_i = 300$  K, nous obtenons une différence  $\delta T \approx 2$  mK et pour un rayon de bulle  $R_0$  de 10 mm,  $\delta T \approx 8$  mK. Cette variation est très faible et est donc négligeable.

# Bibliographie

- [1] Evangelista Torricelli. *Opera Geometrica, De sphaera et Solidis Sphaeralibus ; De Motu Gravium ; De Dimensione Parabolae*. (Amadoro Massa & Lorenzo de Landis, Florence, 1644), 1644.
- [2] J. Ferrand, L. Favreau, S. Joubaud, and E. Freyssingeas. Wetting Effect on Torricelli's Law. *Physical Review Letters*, **117** :248002–1–5, (2016).
- [3] <https://cdn-0.anniversaire-celebrite.com/upload/250x333/evangelista-torricelli-250.jpg>.
- [4] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Evangelista\\_Torricelli#/media/Fichier:Baro\\_0.png](https://fr.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli#/media/Fichier:Baro_0.png).
- [5] D. Lohse and X. Zhang. Pinning and gas oversaturation imply stable single surface nanobubbles. *Physical Review E*, **91** :031003–1–5, (2015).
- [6] J. Plateau. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier-Villars, Paris, (1873).
- [7] P. G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré. *capillarity and wetting phenomena : drops, bubbles, pearls, waves*. Springer, Springer, New-York, 2004, 2004.
- [8] L. Salkin, A. Schmit, P. Panizza, and L. Courbin. Generating soap bubbles by blowing on soap films. *Physical Review Letters*, **116** :077801–1–5, (2016).
- [9] P. Panizza and L. Courbin. Bubble blowing by the numbers. *Physics Today*, **69**(7) :78–79, (2016).
- [10] B. Dollet, P. Marmottant, and V. Garbin. Bubble dynamics in soft and biological matter. *Annual Review of Fluid Mechacnics*, **55** :331–355, 2019.
- [11] F. Seychelles, Y. Amarouchene, M. Bessa, and H. Kellay. Thermal Convection and Emergence of Isolated Vortices in Soap Bubbles. *Physical Review Letters*, **100** :144501–1–4, (2008).

- [12] J. C. Bird, R. de Ruiter, L. Courbin, and H. A. Stone. Daughter bubble cascades produced by folding of ruptured thin films. *Nature*, **465** :759–762, (2010).
- [13] S. Poulain, E. Villermaux, and L. Bourouiba. Ageing and burst of surface bubbles. *Journal of Fluid Mechanics*, **851** :636–671, (2018).
- [14] P. S. Epstein and M. S. Plesset. On the stability of gas bubbles in liquid-gas solutions. *Journal of Chemical Physics*, **18**(11) :1505–1509, (1950).
- [15] T. Meuel, Y. L. Xiong, P. Fischer, C. H. Bruneau, M. Bessa, and H. Kellay. Intensity of vortices : from soap bubbles to hurricanes. *Science Report*, **3** :3455–1–7, (2013).
- [16] J. Wu. Evidence of sea spray produced by bursting bubbles. *Science.*, **212** :324–326, (1981).
- [17] F. MacIntyre. Flow patterns in breaking bubbles. *Nature*, **77** :5211–5228, (1972).
- [18] F. Seychelles, Y. Amarouchene, M. Bessa, and H. Kellay. Thermal convection and emergence of isolated vortices in soap bubbles. *Physical Review Letters*, **100** :144501–1–4, (2008).
- [19] H. Lhuissier and E. Villermaux. Bursting bubble aerosols. *Journal of Fluid Mechanics*, **696** :5–44, (2012).
- [20] L. Salkin, A. Schmit, R. David, A. Delvert, E. Gicquel, P. Panizza, and L. Courbin. Interfacial bubbles formed by plunging thin liquid films in a pool. *Physical Review Fluids*, **2** :063604–1–10, (2017).
- [21] L. Champougny, M. Roch, W. Drenckhan, and E. Rio. Life and death of not so "bare" bubbles. *Soft Matter*, **12** :5276–5284, (2016).
- [22] E. Hermans, M. S. Bhamla, P. Kao, G. G. Fuller, and J. Vermant. Lung surfactants and different contributions to thin film stability. *Soft Matter*, **11**(41) :8048–8057, (2015).
- [23] P. L. L. Walls, J. C. Bird, and L. Bourouiba. Moving with Bubbles : a review of the interactions between bubbles and the microorganisms that surround them. *Integrative and Comparative Biology*, **54** (6) :1014–1025, (2014).
- [24] S. Poulain and L. Bourouiba. Disease transmission via drops and bubbles. *Physics Today*, **72**(5) :70–71, (2019).

- [25] D. Lohse and X. Zhang. Surface nanobubbles and nanodroplets. *Review of Modern Physics*, **87** :981–1027, (2015).
- [26] D. P. Jackson and S. Sleyman. Analysis of a deflating soap bubble. *American Journal of Physics*, **78** :990–994, (2010).
- [27] L. Salkin, A. Schmit, P. Panizza, and L. Courbin. Influence of boundary conditions on the existence and stability of minimal surfaces of revolution made of soap films. *American Journal of Physics*, **82**(9) :839–847, (2014).
- [28] B. Dollet and I. Cantat. Deformation of soap films pushed through tubes at high velocity. *Journal of Fluid Mechanics*, **652** :529–539, (2010).
- [29] I. Cantat. Liquid meniscus friction on a wet plate : Bubbles, lamellae and foams. *Physics of Fluids*, **25** :301–303, (2013).
- [30] L. Champougny, J. Miguet, R. Henaff, F. Restagno, F. Boulogne, and E. Rio. Influence of evaporation on soap film rupture. *Langmuir*, **34**(10) :3221–3227, 2018.

## Chapitre 4

# Déplacement spontané d'un film liquide mince dans un entonnoir

La mesure de la viscosité d'un gaz requiert un dispositif expérimental qui peut à la fois être sophistiqué et onéreux. Nous proposons dans ce chapitre une expérience simple et réalisable avec un matériel que chacun peut trouver chez soi pour mesurer la viscosité de l'air. Le principe est d'étudier le déplacement spontané d'un film liquide dans une géométrie de révolution de section non constante, c'est-à-dire un cône, connecté à un long tube. Du fait de sa courbure, le film liquide initialement formé sur la partie la plus large du cône se déplace vers la zone la plus confinée dans le sens inverse de la gravité. Cette expérience, illustrant de manière simple les effets capillaires, peut être utilisée comme un support pour une introduction à un cours de physique sur la capillarité ou comme une activité de travaux pratiques. En effet, le matériel nécessaire à la mise en place du dispositif expérimental se compose d'un entonnoir, d'un tube, d'une solution savonneuse et d'une caméra, que l'on peut trouver sur tout smartphone, pour filmer la dynamique du déplacement. La physique associée au phénomène de mouvement spontané du film intègre des effets de viscosité de l'air et de tension de surface liquide-air. Le déplacement du film liquide est engendré par une différence de pression de chaque côté du film créant un écoulement d'air. Nous proposons un modèle simple de la dynamique en utilisant cette différence de pression (la pression de Laplace) et la résistance hydrodynamique de l'air. Nous réalisons des expériences en variant de façon systématiques les paramètres géométriques clefs de l'expérience, la position initiale d'un film, la longueur et le rayon d'un tube et l'angle d'ouverture d'un cône. L'accord obtenu entre les résultats expérimentaux et nos prédictions théoriques est excellent.

## 1 Introduction

Les objets se déplaçant spontanément en ne faisant intervenir aucune force extérieure sont étudiés par les scientifiques depuis plusieurs années. Dans la nature, les êtres vivants développent des caractéristiques physiques leur permettant d'exploiter la capillarité pour interagir avec l'eau en utilisant des gradients d'énergie interfaciale et des variations dans la pression de Laplace pour collecter de l'eau efficacement et la transporter dans une direction désirée. Par exemple, l'araignée *Uloborus walckenaerius* produit une fibre complexe et unique qui se compose d'une séquence de nanofibrilles nouées, séparées par un joint qui capture l'humidité de l'air pour former des gouttes d'eau d'une taille inférieure au millimètre [voir Fig.4.1(a-c)] [1]. Une variété de cactus, le *Opuntia microdasys*, possède des épines et des trichomes permettant de collecter l'humidité dans l'air pour former des gouttes et les véhiculer jusqu'au cactus [voir Fig.4.1(d-f)] [2]. Un autre exemple provenant du monde animal est fourni par un insecte, le *Stenus comma* (aussi nommé « water skater rove beetle ») qui est un coléoptère vivant à la surface des étangs. Cet insecte produit un surfactant, la sténusine (voir Fig. 4.2), qui provoque une diminution locale de la tension de surface eau-air. Le gradient de tension superficielle ainsi généré entre l'avant et l'arrière de l'insecte, permet alors à celui-ci de se mouvoir à la surface de l'eau [3] par effet Marangoni. En laboratoire, les systèmes d'autopropulsions artificiels sont nombreux et offrent la possibilité de manipuler des objets qui peuvent être solides ou liquides, qu'ils flottent, à la surface d'un fluide ou qu'ils soient posés sur un solide. Nous décrivons dans la suite quelques uns de ces systèmes avant de présenter nos travaux qui s'inscrivent dans ce contexte général.

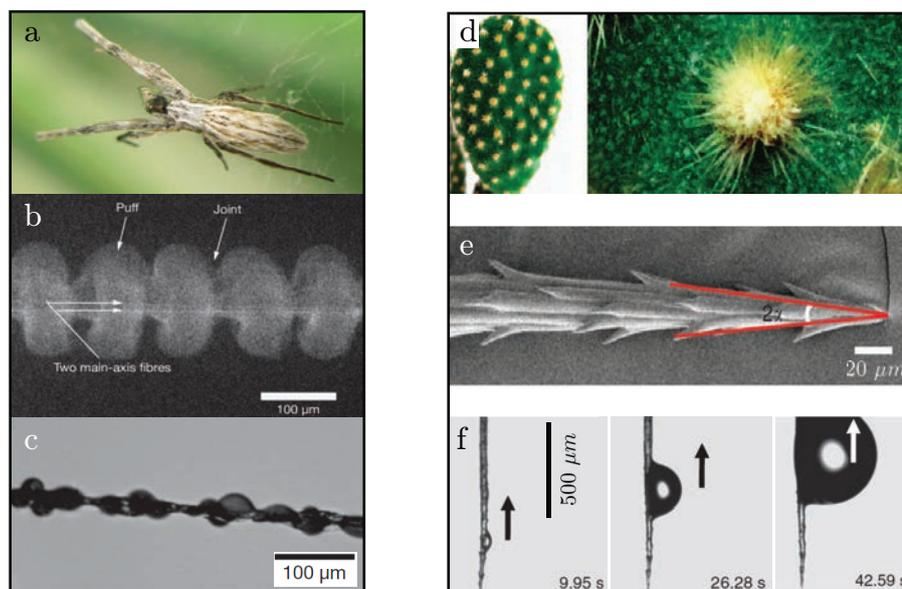


FIGURE 4.1: Cette figure illustre deux méthodes [séries d'images (a)-(c) et (d)-(f)] permettant de véhiculer l'eau grâce à des mécanismes capillaires. A gauche, une photo de l'araignée *Uloborus walckenaerius* (a) qui produit une fibre multistructurale qui se compose d'une séquence de nanofibrilles nouées séparées par un joint (b). Les nanofibrilles capturent l'humidité qui migre par capillarité vers les joints (c). L'image (a) est tirée d'un site internet [4] et les images (b) et (c) sont adaptées de [1]. A droite, une variété de cactus, le *Opuntia microdasys*, qui possède des épines et des trichomes (d-e) permettant de collecter l'humidité dans l'air pour former des gouttes et les véhiculer jusqu'au cactus (f). La séquence de photographies (f) montre la formation d'une goutte qui se déplace dans le sens inverse de la gravité (dirigée vers le bas), les flèches représentant le sens du mouvement. Les images (d-f) sont adaptées de [2].



FIGURE 4.2: Illustrations tirées du site [5]. A gauche, se trouve une photographie du *Stenus comma*. A droite se trouve la formule du composé chimique (la sténusine) produit par l'insecte.

Les systèmes étudiés en laboratoire peuvent prendre diverses formes comme par exemple des gouttes, des micronageurs artificiels, des solides ou des films liquides minces. Comme dans les exemples tirés de la nature que nous avons évoqués précédemment, ces systèmes ont besoin d'une asymétrie de la surface sur laquelle ils progressent pour pouvoir se déplacer dans une direction désirée. Cette asymétrie peut être obtenue, par exemple, par un gradient de température, une chimie aux interfaces contrôlée ou bien une rugosité de surface. Nous décrivons dans la suite quelques exemples de travaux publiés pour placer le contexte de notre sujet d'étude.

### 1.1 Des micronageurs dans la nature et les laboratoires

Depuis que la vie est apparue, les microorganismes biologiques comme les algues ou les bactéries évoluent et développent des mécanismes afin de pouvoir se déplacer. Certains micronageurs utilisent des flagelles pour se propulser dans leur environnement que ce soit pour trouver leur nourriture et s'orienter en fonction de la lumière ou de la gravité [6]. Les micronageurs artificiels sont conçus pour effectuer effi-

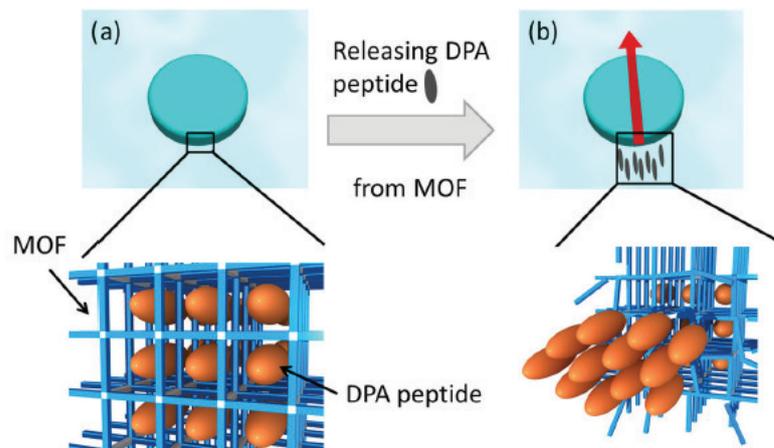


FIGURE 4.3: Ce schéma tiré de [7] représente le principe de stockage des peptides dans une structure métal-organique en (a) et leur libération par dégradation de la structure provoquant la propulsion du système en (b).

---

cacement une tâche précise dans des domaines techniques ou dans des applications médicales, par exemple véhiculer des molécules. Les travaux réalisés par Ikezoe et al. décrivent la conception d'un moteur biochimique autonome utilisant une structure métal-organique et l'auto-assemblage de peptides [7]. Le principe de cette expérience est de créer une cage comportant plusieurs cellules dans lesquelles sont disposées les peptides qui servent de carburant à la propulsion du système qui est positionné à la surface d'une solution aqueuse (voir Fig. 4.3). La libération de ces peptides se fait

par la dégradation progressive de la structure métal-organique par l'ajout d'un acide éthylènediaminetétraacétique. Le mouvement résulte d'un effet Marangoni engendré par les peptides libérés qui forment alors un domaine hydrophobe à la sortie de la structure créant ainsi un gradient de tension de surface.

## 1.2 Mouvement spontané d'une goutte

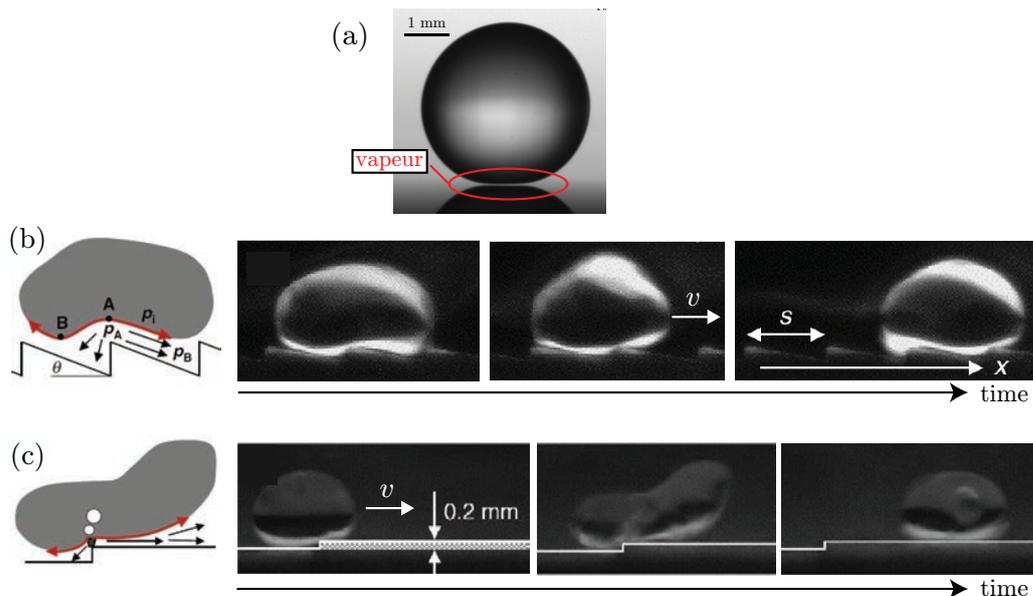


FIGURE 4.4: La photographie (a) tirée de [8] représente l'effet Leidenfrost sur une goutte d'eau. Le substrat sur lequel est posée la goutte est chauffé au dessus de la température d'ébullition du liquide. La goutte lévite alors sur une fine couche de vapeur comme indiqué par la zone en rouge. Les illustrations (b) et (c) sont adaptées de la publication [9] de Linke et al. En (b), la goutte se déplace sur un substrat dont le profil géométrique est en toit d'usine et chauffé au-dessus de la température de Leidenfrost. Le déplacement se fait selon la direction  $X$  à une vitesse  $v$ . En (c) La goutte percute le bord d'une marche qui a pour effet de l'accélérer et générer une bulle à l'intérieur. Les deux schémas décrivent les différences de courbures occasionnées dans chaque expérience ainsi que l'écoulement de la vapeur sous la goutte.

Les gouttes sont des systèmes largement étudiés et nous pouvons trouver une littérature assez riche sur le sujet. Ici, nous nous intéressons au cas particulier du déplacement spontané de gouttes par des mécanismes moteurs différents qui trouvent leur source dans des phénomènes chimiques, thermiques ou encore capillaires. Pour générer du mouvement, on peut utiliser un effet appelé Leidenfrost [8] : une goutte

de liquide peut léviter sur sa propre vapeur lorsqu'elle est déposée sur un solide porté à la température de Leidenfrost<sup>1</sup> [voir Fig. 4.4(a)]. En utilisant des rugosités de surfaces appropriées et lorsque le substrat est porté à la température de Leidenfrost, les auteurs ont montré que l'on pouvait mettre alors la goutte en mouvement dirigé. Les surfaces utilisées sont texturées, avec une topographie de surface asymétrique, et sont chauffées au dessus de la température d'ébullition du liquide, permettant d'observer le déplacement d'une goutte par l'effet Leidenfrost [10]. Dans ce cas, la goutte peut léviter sur une fine couche de sa propre vapeur et se propulser dans la direction donnée par l'asymétrie d'une surface rugueuse en profil en toit d'usine par exemple, comme le montrent les travaux réalisés par Linke et al. publiés dans [9] [voir Fig. 4.4(b)]. Le mécanisme moteur de ce mouvement résulte de la variation de la pression de la vapeur située sous la goutte qui n'est pas uniforme du fait de la topographie de la surface. Comme nous pouvons voir sur la figure 4.4(b), la différence de pression modifie la courbure de la goutte et provoque un écoulement de vapeur qui la propulse. Les auteurs ont étudié par comparaison le comportement d'une telle goutte à l'approche du bord d'une marche. La goutte initialement mise en mouvement par une petite impulsion mécanique accélère en passant sur l'obstacle [voir figure 4.4(c)].

Lagubeau et al. [11] montrent que l'on peut obtenir des résultats similaires si l'objet que l'on souhaite mettre en mouvement est un solide [voir Fig. 4.5(a)]. Les auteurs ont utilisé de la glace carbonique qui dégage de la vapeur par sublimation la faisant léviter et avancer dans la même direction que la goutte de Leidenfrost, l'expérience étant réalisée sur des surfaces similaires à celles employées dans l'étude de Linke et al. [9]. Les expériences que nous venons de présenter utilisent un solide chauffé ayant un profil géométrique en toit d'usine. L'expérience réalisée par Soto et al. démontre que l'on peut forcer la formation d'un écoulement anisotrope de la vapeur pour propulser une goutte [voir Fig. 4.5(b)]. La rugosité de la surface est alors en forme de chevrons [12][voir Fig. 4.5(c)].

Pour une goutte déposée sur un solide, l'asymétrie qui déclenche le mouvement peut également être générée par une chimie de surface qui produit un gradient de tension superficielle [13]. Dans des travaux publiés par Chaudhury et al., une surface de silicone est recouverte par une méthode de diffusion contrôlée d'une vapeur de decyltrichlorosilane [14]. Ce traitement de surface crée un gradient d'hydrophobie. En déposant une goutte d'eau sur la fin de la zone hydrophobe, les auteurs ont observé que la goutte se déplace alors vers les régions hydrophiles du substrat. Ce phénomène s'applique également lorsque le substrat est incliné de manière à ce que

---

1. Cette température est élevée par rapport à la température d'ébullition du liquide considéré, par exemple, environ 200 °C pour l'eau.

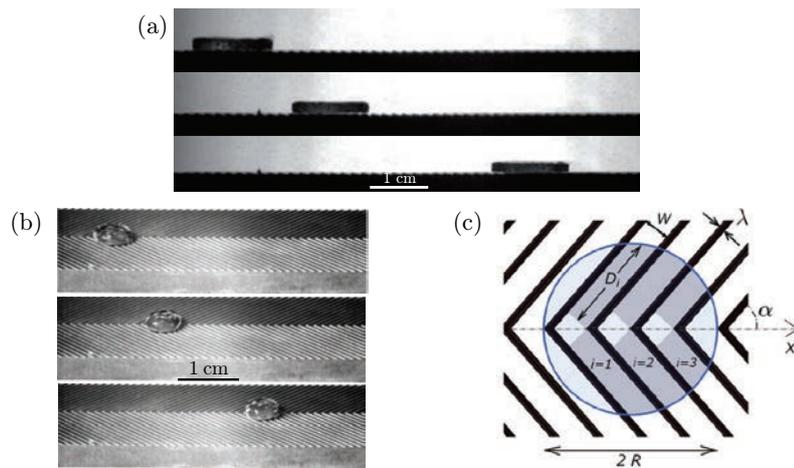


FIGURE 4.5: La photographie (a) adaptée de [11] montre l'expérience réalisée par Lagubeau et al. Un disque (d'épaisseur millimétrique et de rayon centimétrique) constitué de glace carbonique se déplace (vers la droite) sur une surface chauffée à une température de  $350\text{ }^\circ\text{C}$ , par effet Leidenfrost [10]. Le temps entre chacune des photographies successives (de haut en bas) est de 600 ms. Les figures (b) et (c) sont tirées de l'article publié par Soto et al. [12]. En (b), la séquence de photographies montre l'auto-propulsion (vers la droite) d'une goutte de Leidenfrost d'un volume de  $200\text{ }\mu\text{L}$  déposée sur une surface chauffée à une température de  $400\text{ }^\circ\text{C}$ . La rugosité de la surface forme des chevrons. Le schéma (c) montre les différents paramètres géométriques qui caractérisent les chevrons :  $\lambda$  l'épaisseur des parois,  $W$  l'espacement entre deux motifs consécutifs et l'angle  $\alpha$ . Les chevrons forment des canaux dans lesquels la vapeur s'écoule faisant ainsi avancer la goutte dans la direction de  $x$ .

---

la goutte se déplace à une vitesse de l'ordre du millimètre par seconde dans le sens inverse de la gravité (voir Fig. 4.6). Dans ce cas, le mouvement résulte de la modification de la tension de surface induite au niveau de la zone de contact entre la goutte et le substrat.

Les travaux réalisés par Dos Santos et al., publiés dans [15], décrivent le déplacement spontané d'une goutte déposée sur une surface solide induit par un gradient de tension superficielle. La différence avec l'expérience de Chaudhury et al. [13] est que le substrat ne subit aucun traitement au préalable. La goutte contient un additif composé de molécules de silane qui peuvent former des monocouches hydrophobiques sur des substrats en silicone ou en verre (voir Fig. 4.7). La goutte déposée doit subir une légère action mécanique pour amorcer le mouvement. Dos Santos et al. ont montré que cette goutte était susceptible de suivre une piste créée par une variation de l'hydrophobie des surfaces. Une autre étude menée par Sumino et al. montre que

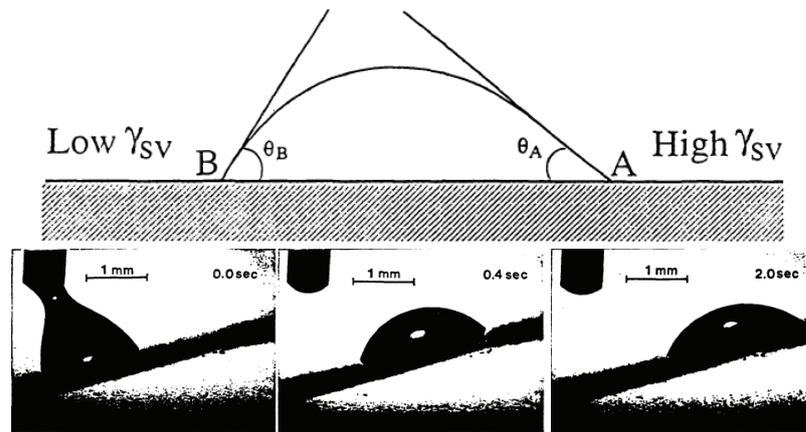


FIGURE 4.6: Le schéma représente une goutte posée sur un substrat traité par du decyltrichlorosilane de manière à générer un gradient d'hydrophobicité et donc de modifier l'angle de contact entre la goutte et le substrat dans la direction de ce gradient. La séquence de photographies illustre l'expérience pour une goutte qui se déplace dans le sens inverse de la gravité (la gravité est dirigée vers le bas de l'image). Les illustrations sont adaptées de [13].

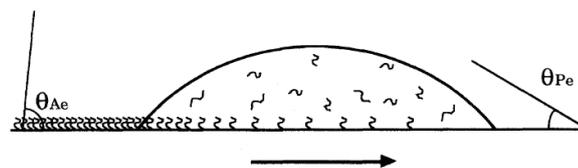


FIGURE 4.7: Schéma tiré de [15] qui représente la course d'une goutte sur un substrat. Le silane contenu dans la goutte se greffe sur le substrat formant ainsi une surface hydrophobe, caractérisée par l'angle de contact  $\theta_{Ae}$  qui dépend de la surface qu'il recouvre. L'angle  $\theta_{Pe}$  représente l'angle de contact initial de la goutte sur le substrat. La flèche orientée vers la droite indique le sens du déplacement de la goutte.

le mouvement spontané d'une goutte peut être obtenu dans un système présentant des conditions chimiques hors-équilibre à l'interface entre des phases aqueuses et huileuses [16]. Le substrat sur lequel est posée une goutte d'huile immergée dans la phase aqueuse est une lame de verre plane n'ayant reçu aucun traitement préalable. Après avoir injecté la goutte, celle-ci entre en mouvement et se déplace de manière aléatoire [voir Fig. 4.8(a)] par effet Marangoni (voir Chapitre 1). Si le mouvement est confiné dans une seule direction par la géométrie du substrat, donc dans le cas d'une configuration 1D, Sumino et al. ont remarqué que le mouvement n'est alors

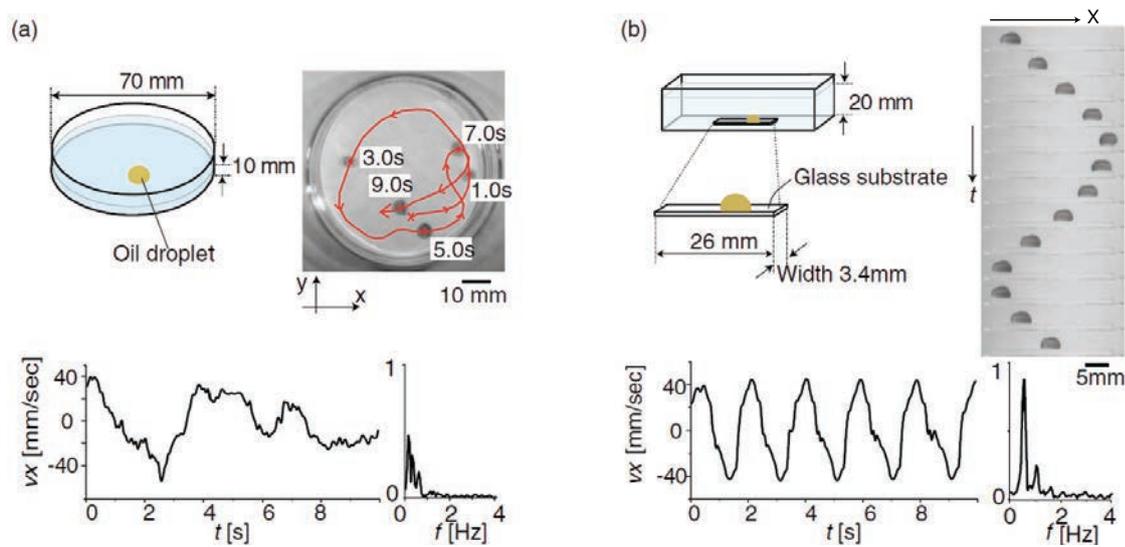


FIGURE 4.8: Cette figure, adaptée de [16], représente l'expérience de mouvement spontané d'une goutte d'huile déposée à la surface d'une solution aqueuse. En haut à gauche, en (a), le schéma et la photographie décrivent le déplacement aléatoire à l'interface air-liquide de la goutte, d'un volume égal à  $30 \mu\text{l}$ . En haut à droite, en (b), un schéma et une séquence de photographies décrivent la même expérience pour une goutte dont le déplacement est confiné dans une seule direction  $x$ . En (a) et (b), en dessous des schémas et séquences de photographies, est affiché le graphique des vitesses selon l'axe  $x$  avec sa transformée de Fourier respectivement pour chacune des expériences. Il est facile de distinguer le caractère périodique du déplacement dans le cas de l'expérience à une dimension.

plus erratique mais devient régulier et périodique comme le montre le signal de la vitesse [voir Fig. 4.8(b)]. La transformée de Fourier du signal donne ainsi un pic en fréquence à  $0.5 \text{ Hz}$  [voir Fig. 4.8(b)].

Ces mécanismes sont également utilisés en microfluidique où là encore, la capillarité joue un rôle majeur. C'est notamment le sujet qu'abordent Dangla et al. dans leur article [17], dans lequel ils décrivent la génération et la manipulation de gouttelettes dans un milieu confiné sans qu'aucun écoulement ne soit appliqué. Ces gouttelettes sont produites par un système comprenant un microcanal rectangulaire connecté à un grand réservoir de section non uniforme. Ce réservoir est rempli au préalable d'un liquide non miscible avec le premier et faisant office de phase continue. Le liquide présent dans le microcanal s'écoule alors spontanément : une langue se forme dans la phase continue puis une gouttelette est expulsée automatiquement à cause du gradient de confinement existant dans le réservoir (voir Fig. 4.9). Le rayon de la goutte formée décroît avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ .

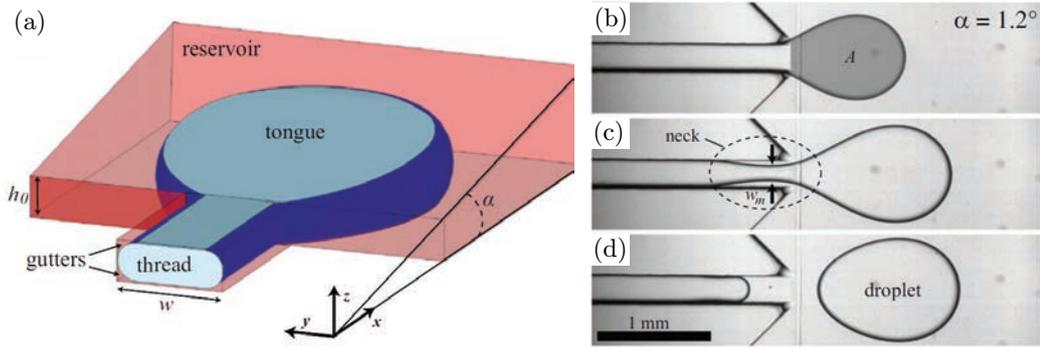


FIGURE 4.9: Schéma (a) tiré de [17] qui représente l'expérience de Dangla et al. dans laquelle une goutte d'eau se forme dans un réservoir contenant une phase d'huile. Les parois du dessus et du dessous sont inclinées d'un angle  $\alpha$ . Le liquide s'écoule du canal micrométrique d'entrée de largeur  $w$  et de hauteur  $h_0$  selon les axes  $x$  et  $z$  vers le réservoir. A droite, les photographies (b), (c) et (d) représentent une expérience de formation d'une goutte d'eau dans de l'huile. L'image en (b) montre la formation d'une langue  $A$  se propageant dans le réservoir. En (c), la distance  $w$  diminue et un pincement s'effectue à la sortie du canal ce qui conduit à la formation d'une goutte (d) propulsée du système. La variation géométrique du réservoir crée un gradient de confinement qui génère un gradient de courbure des interfaces fluide-fluide ce qui forme alors une goutte.

Pour engendrer le mouvement d'une goutte par capillarité, plutôt que d'utiliser des méthodes parfois fastidieuses faisant intervenir chimie et rugosités de surfaces contrôlées, on peut de façon simple employer des supports ou des canaux ayant des sections non-uniformes. Sur une fibre conique par exemple, comme dans le cas du cactus évoqué avant, les gouttes se déplacent spontanément vers les régions de plus petite courbure [18]. En effet, Lorenceau et al. ont remarqué que déposer une goutte, dont la taille est inférieure à la longueur capillaire, sur une telle fibre provoque un gradient de la pression de Laplace à l'intérieur de la goutte entre sa face avant et sa face arrière. Dans la configuration d'une fibre cylindrique comme présenté sur la figure 4.10(a), la pression de Laplace est une fonction de l'épaisseur maximale de la goutte et du rayon de la fibre [19] :

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{r + h}. \quad (4.1)$$

Contrairement au cas d'une fibre cylindrique, une fibre conique de révolution présente une variation de son rayon le long de son axe  $z$  comme le montre la figure 4.10(b). Cette variation de rayon crée un gradient de pression de Laplace dans la

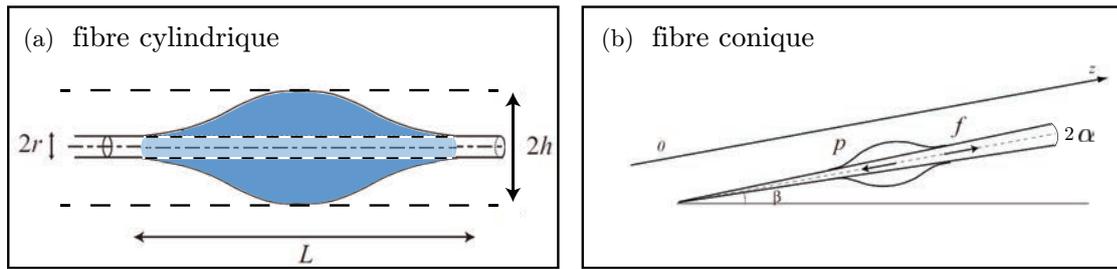


FIGURE 4.10: Ces deux schémas sont adaptés respectivement de [18] et [20]. En (a), le schéma représente une goutte posée sur une fibre cylindrique de rayon  $r$  selon les travaux de Carroll [19]. La distance  $L$  représente l'étalement de la goutte et  $h$  son épaisseur maximale. Le schéma (b) représente l'expérience de Lorenceau et al. [18] consistant à déposer une goutte sur une fibre conique inclinée d'un angle de  $\beta$  par rapport à l'horizontale. La goutte se déplace selon l'axe  $z$  et s'arrête à une position pour laquelle la force capillaire  $f$  et le poids  $P$  s'équilibrent.

goutte. D'après l'équation (4.1), pour un volume  $\Omega$  constant, ce gradient de pression le long de la fibre conique s'écrit :

$$\left. \frac{dP}{dz} \right|_{\Omega} = -\frac{2\gamma}{(r+h)^2} \left( \frac{dr}{dz} + \frac{dh}{dz} \right)_{\Omega}. \quad (4.2)$$

Cette équation permet de comprendre l'origine du mouvement de la goutte et démontre que certains systèmes ne nécessitent pas d'utiliser des traitements de rugosités ou de chimie de surface contrôlés pour manipuler des gouttes.

### 1.3 Mouvement spontané d'un liquide par capillarité dans une géométrie de section non-uniforme

Un liquide confiné dans un canal d'écoulement de section non-uniforme comme un cône ou un coin est susceptible de se déplacer spontanément le long du gradient de confinement. Dans le cas d'un liquide mouillant pénétrant dans un canal d'une largeur millimétrique et présentant un profil conique, le ménisque du fluide progresse vers la partie la plus large du canal mais la réponse diffusive [22] initialement observée aux temps courts est altérée aux temps longs du fait de la variation de section du canal ; une loi en puissance est toujours obtenue pour l'évolution temporelle de la position du ménisque mais la valeur de l'exposant est plus faible [23]. A l'inverse, en observant une goutte ou une bulle confinée dans un coin nous pouvons remarquer que le déplacement spontané s'effectue vers l'apex du coin, ce phénomène a été étudié par E. Reyssat [21]. La figure 4.11(a) montre le dispositif expérimental

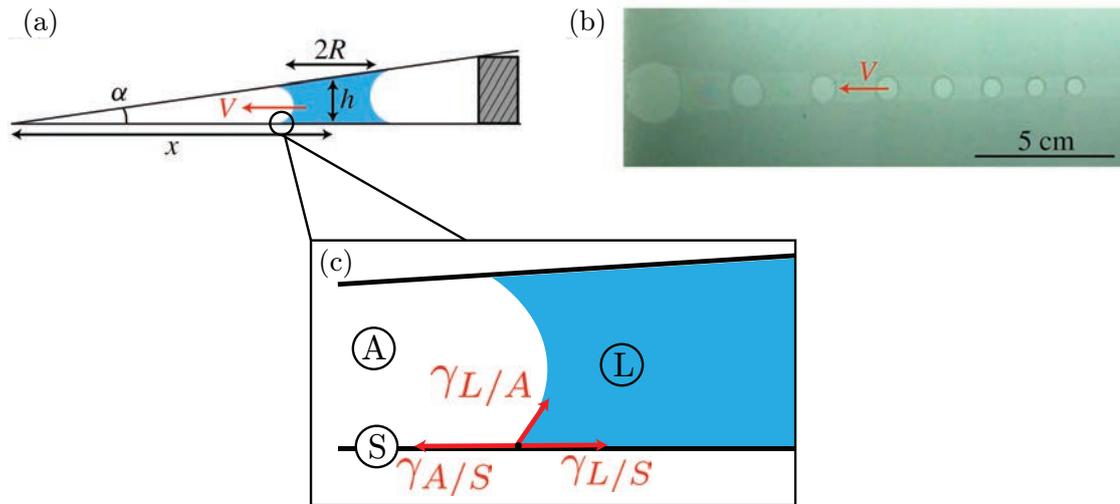


FIGURE 4.11: La figure est tirée de [21]. Le schéma (a) décrit le dispositif expérimental mettant en scène une goutte confinée dans un coin d'angle  $\alpha$  formé par deux lames solides initialement sèches. La goutte de rayon  $R$  se déplace vers l'apex du coin avec une vitesse  $V$  selon la direction du gradient d'épaisseur  $h$ . La distance entre la goutte et l'apex est notée  $x$ . La photographie (b) de l'expérience représente la superposition des positions d'une goutte d'huile de silicone dans un coin en fonction du temps (vue du dessus). La pointe du coin se situe sur la gauche de la photographie et l'intervalle de temps entre chaque position est de 20 secondes. Le schéma (c) représente une vue rapprochée de la zone de contact entre la goutte, l'air et les lames de verre au niveau de laquelle agissent les trois tensions superficielles. Cette zone s'appelle la ligne triple et nous notons les tensions superficielles air-solide, liquide-solide et liquide-air respectivement  $\gamma_{A/S}$ ,  $\gamma_{L/S}$  et  $\gamma_{L/A}$ .

d'une goutte de silicone introduite dans un coin qui se déplace spontanément dans la direction du gradient de confinement. La figure 4.11(b) réalisée par la superposition de photographies représente l'expérience observée par le dessus à différents instants. Nous pouvons remarquer que plus la goutte se rapproche de l'apex du coin, plus elle s'étale du fait de la diminution de son épaisseur à volume constant. Dans une telle géométrie, la goutte préfère augmenter sa surface du mouillage  $\Sigma$  avec les lames puisque le processus est énergétiquement favorable. Le mouvement est donc engendré par l'augmentation de l'énergie capillaire par unité de surface que la goutte gagne en avançant et en s'étalant. Les deux tensions superficielles qui contrôlent le déplacement de la goutte sont les tensions interfaciales air-solide  $\gamma_{A/S}$  et liquide-solide  $\gamma_{L/A}$  [voir Fig. 4.11(c)]. La force  $F_\gamma$  dirigée vers l'apex du coin qui est obtenue le long du gradient de confinement est donnée pour une goutte de

volume  $\Omega$  par l'expression :

$$F_\gamma = -2\gamma \frac{d}{dx} \left( \frac{\Omega}{\alpha x} \right), \quad (4.3)$$

où  $\gamma$  est la tension de surface air-liquide,  $\alpha$ , l'angle d'ouverture du coin, et  $x$  est la direction de l'écoulement (voir Fig. 4.11).

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous intéresser à un phénomène non abordé dans la littérature, à savoir **le déplacement spontané d'un film liquide dans un canal de section circulaire non-uniforme, c'est-à-dire un entonnoir**. Comme dans le cas de la goutte confinée dans un coin décrit précédemment [21], le **film liquide** que nous allons étudier **se déplace dans la direction du gradient de confinement**. Nous allons montrer que cette **expérience d'hydrodynamique** simple qui **peut être réalisée avec des objets de la vie quotidienne** (de l'eau savonneuse, une simple caméra, un entonnoir et un morceau de tuyau d'arrosage) permet de déterminer la viscosité dynamique d'un gaz, une grandeur physique dont la mesure est non-triviale.

## 2 Expérience

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au déplacement spontané d'un film liquide dans une géométrie de révolution de section non constante, c'est-à-dire un cône, connecté à un long tube cylindrique, ce qui est typiquement la forme d'un entonnoir. Comme décrit ci-dessous, nous choisissons des conditions expérimentales (choix de la solution savonneuse, longueurs et rayons de tubes, angles d'ouverture des entonnoirs) pour lesquelles l'écoulement de l'air peut être décrit par un modèle de Poiseuille et le déplacement du film s'effectue de manière quasi-statique. Dans ces conditions, nous montrons que cette expérience simple, mettant en jeu le mouvement spontané d'un film liquide dans un entonnoir, peut être utilisée pour déterminer la valeur de la viscosité dynamique d'un gaz (ici l'air), une quantité habituellement difficile à mesurer.

Les propriétés d'un liquide telles que la viscosité dynamique et la tension de surface liquide-air peuvent être mesurées de façon simple sans appareillage onéreux et sophistiqué. Nous pouvons trouver quelques exemples dans la littérature, par exemple la mesure de la tension de surface par la méthode de la goutte pendante (méthode décrite dans le chapitre 1 section 4) en utilisant la capture vidéo d'un simple smartphone. L'article [24] de Goy et al. présente cette méthode de manière à ce qu'un étudiant puisse la mettre en œuvre avec un matériel aussi rudimentaire qu'un téléphone portable et une règle graduée. Nous pouvons également citer les travaux réalisés par Digilov et Reiner sur la méthode de mesure de la viscosité [25]. Leur expérience consiste à mesurer le changement de masse d'une colonne d'un liquide en fonction du temps, pour cela un réservoir est suspendu à un capteur et le liquide s'écoule du réservoir à travers un tube capillaire.

Un système permettant de mesurer la viscosité d'un gaz a été développé par Y. Shimokawa et al. dans laquelle une sonde, qui est un disque de graphite, lévite au dessus d'un aimant par un effet diamagnétique et est mis en rotation par l'application d'un couple par électromagnétisme [26]. Cette méthode est relativement précise puisqu'elle évite tout frottement autre que celui du gaz. Cependant, un matériel très spécifique est nécessaire dans le dispositif expérimental.

Dans le même esprit éducatif que nous trouvons dans la publication de Goy, nous présentons notre étude sur le déplacement spontané d'un film liquide dans un entonnoir avec des arguments simples.

## 2.1 Dispositif expérimental

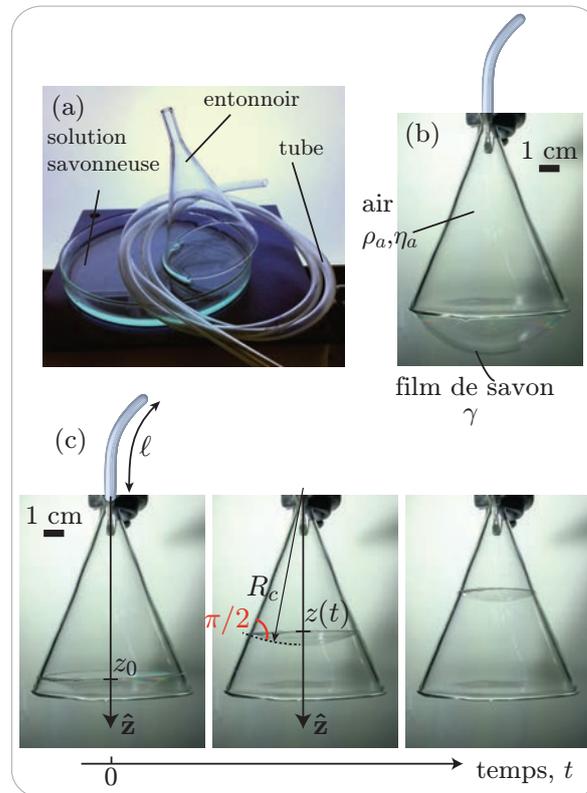


FIGURE 4.12: La photographie en (a) représente le matériel utilisé pour réaliser l'expérience. En (b), nous montrons la géométrie d'écoulement avec un film liquide formé à l'extrémité la plus large du cône.  $\gamma$  est la tension de surface liquide-air.  $\rho_a$  et  $\eta_a$  représentent respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique de l'air. La série de photographies en (c) représente une expérience typique dans laquelle un film liquide initialement en position  $z_0$  se déplace au cours du temps dans le sens inverse de l'axe  $\hat{z}$ . Sur cette série de photographies,  $\ell$  représente la longueur du tube cylindrique connecté à l'entonnoir,  $R_c$  le rayon de courbure du film et  $z(t)$  la position du film liquide à l'instant  $t$ . La gravité est dirigée suivant l'axe  $\hat{z}$ , dans le sens opposé au mouvement.

Le matériel nécessaire à la réalisation de cette expérience se compose simplement d'un entonnoir (un cône de révolution auquel nous adaptons à l'extrémité de plus faible section, un tube cylindrique de longueur variable), d'une solution savonneuse qui permet de former un film liquide mince et d'une caméra [voir Fig. 4.12(a)]. Dans le cadre de notre étude, pour varier les paramètres géométriques des entonnoirs que nous utilisons, nous avons fait appel à Lucie Pitois (souffleur de verre de l'Université de Rennes 1) qui possède les compétences et le matériel requis pour fabriquer des

Symbole	Définition	Unité
$\ell$	Longueur d'un tube	} m
$a$	Rayon intérieur d'un tube	
$h$	Hauteur de la calotte sphérique d'un film liquide	
$R_c$	Rayon de courbure d'un film liquide	
$R$	Rayon de la base d'un cône	
$z$	Position d'un film par rapport au sommet d'un cône (voir Fig. 4.13)	
$Z$	Distance séparant la zone de contact d'un film liquide avec l'entonnoir du sommet d'un cône (voir Fig. 4.13)	
$\kappa^{-1}$	Longueur capillaire	
$e$	Épaisseur d'un film	
$t$	Temps	
$t_f$	Temps de parcourt d'un film liquide entre sa position initiale et sa position finale	
$\hat{z}$	Axe vertical de révolution	o
$\alpha$	Demi-angle d'ouverture d'un cône	o
$\rho_\ell$	Masse volumique d'un liquide	} kg.m <sup>-3</sup>
$\rho_a$	Masse volumique de l'air	
$\eta_a$	Viscosité dynamique de l'air	} Pa.s
$\eta_\ell$	Viscosité dynamique d'un liquide	
$R_h$	Résistance hydrodynamique	Pa.s.m <sup>-3</sup>
$v_m$	Vitesse de montée d'une géométrie d'écoulement	} m.s <sup>-1</sup>
$v$	Vitesse moyenne de l'écoulement d'air	
$S$	Surface	m <sup>2</sup>
$P$	Poids	N
$\Delta p$	Variation de pression (pression de Laplace)	Pa
$g$	Accélération gravitationnelle	m.s <sup>-2</sup>
$\gamma$	Tension de surface air-liquide	N.m <sup>-1</sup>
$q$	Débit volumique de l'air	m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup>
$\mathcal{R}_e$	Nombre de Reynolds	
$\mathcal{C}$	Nombre capillaire	
$\sigma_\eta$	Ecart-type de la série de valeurs de viscosités dynamiques d'air obtenues par les mesures de temps de déplacement	Pa.s

TABLE 4.1: Tableau récapitulatif des variables utilisées dans notre étude.

entonnoirs en verre. Le tube cylindrique positionné à la sortie de l'entonnoir est un

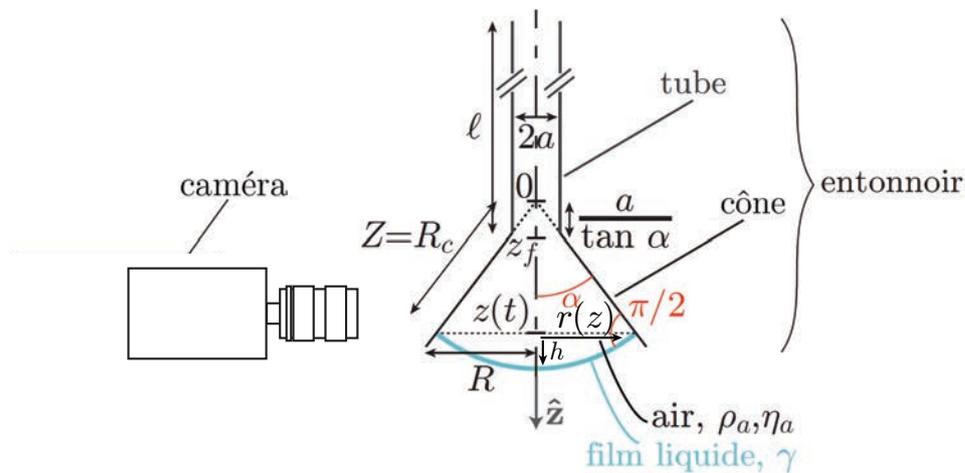


FIGURE 4.13: Schéma du dispositif expérimental définissant les paramètres géométriques et physicochimiques dans notre expérience. Les variables géométriques sont :  $\ell$  la longueur du tube et  $a$  son rayon,  $Z$  la position de la zone de contact entre le film liquide et l'entonnoir par rapport au sommet du cône,  $z(t)$  la position du film liquide par rapport au sommet du cône,  $\alpha$  le demi-angle d'ouverture du cône,  $z_f$  la position finale du film liquide,  $R$  le rayon de la base du cône et  $R_c$  le rayon de courbure du film liquide. Dans les conditions pour lesquelles un film avance de façon quasi-statique, il connecte la paroi intérieure du cône à  $90^\circ$  comme illustré sur le schéma. Les paramètres physicochimiques sont :  $\gamma$  la tension de surface liquide-air,  $\rho_a$  et  $\eta_a$  étant respectivement la masse volumique de l'air et sa viscosité dynamique.

tube flexible (Tygon S3, Saint-Gobain)[voir Fig. 4.12(a)]. Nous avons fait ce choix de matériau par rapport au verre car il est très facile d'en faire varier la longueur  $\ell$  sur une gamme suffisamment large  $\ell = 0.01 - 12$  m. Comme nous le montrerons quantitativement plus loin, nous choisissons des conditions expérimentales (paramètres géométriques et physicochimiques) tels que le nombre de Reynolds associé à l'écoulement de l'air soit suffisamment faible pour que l'on puisse décrire cet écoulement à l'aide d'un modèle de Poiseuille et pour que le déplacement du film se fasse de manière quasi-statique. Dans ce cas, la friction visqueuse agissant au niveau du ménisque liquide connectant le film et la paroi du cône peut être négligée. Dans ces conditions, le film liquide se connecte par son ménisque perpendiculairement à la paroi du cône comme le démontre la figure 4.12(c). Le rayon du tube cylindrique que l'on adapte à une des 2 extrémités du cône,  $a = 1.5 - 5$  mm est identique au rayon de l'extrémité tronquée du cône, de plus faible rayon. Pour ce faire, le sommet d'un cône, auquel nous adaptons un tube, est coupé à une distance  $a/\tan \alpha$  de sa base de rayon  $R = 21 - 56$  mm avec  $\alpha$  son demi-angle d'ouverture  $\alpha = 15 - 30$

°. Les photographies d'une expérience dans la figure 4.12 et le schéma du dispositif expérimental de notre expérience présenté dans la figure 4.13 définissent les variables géométriques et physicochimiques qui entrent en jeu dans le problème étudié. Nous utilisons une solution savonneuse composée en fraction massique de 2% d'une solution commerciale de Palmolive Original (Colgate-Palmolive) et de 98 % d'eau pure. Le mélange homogène ainsi formé est Newtonien et la valeur de sa viscosité dynamique mesurée avec un rhéomètre (Anton Paar MCR 301) est égale à 1 mPa.s. La valeur de la tension de surface air-liquide  $\gamma$  est mesurée en utilisant la méthode de tensiométrie de la goutte pendante (Teclis Tracker) dont le principe est décrit dans le chapitre 1). La valeur obtenue ainsi est de  $25 \text{ mN.m}^{-1}$  pour cette solution savonneuse. Les mesures de rhéologie et de tensiométrie sont réalisées à une température de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Nous filmons le déplacement spontané du film liquide mince avec une caméra Photron SA3 en utilisant une cadence de prise de vue de  $50 - 200$  images par seconde. Nous reportons dans le tableau 4.1 l'ensemble des variables utilisées dans ce chapitre.

## 2.2 Protocole expérimental

Avant de commencer l'expérience, nous humidifions à l'aide d'une pipette les parois intérieures de l'entonnoir avec la solution savonneuse que l'on a préparée. Cette étape nous permet de travailler avec des conditions initiales permettant la reproductibilité de l'expérience. Ensuite, nous utilisons un moteur (Aerotech ACT115DL) contrôlé par un logiciel développé par E. Gicquel (Ingénieur IPR) pour former un film de savon sur l'extrémité la plus large de l'entonnoir. Pour déplacer l'entonnoir par translation verticale, nous utilisons la même méthode décrite dans le chapitre 2. Le moteur est muni d'une pince qui maintient l'entonnoir dont l'extrémité la plus étroite est connectée à un tube cylindrique dirigé vers le haut. L'extrémité la plus grande de l'entonnoir est initialement immergée dans un bain contenant la solution savonneuse. Nous utilisons le moteur pour extraire l'entonnoir du bain perpendiculairement à sa surface libre avec une vitesse relativement faible (de l'ordre de  $1 \text{ mm.s}^{-1}$ ) selon l'axe  $\hat{z}$  [voir Fig. 4.12(b)]. Nous observons alors, comme dans le cas d'un anneau circulaire (voir chapitre 2) [27, 28], la formation d'une surface minimale de révolution : une caténoïde. Celle-ci devient instable lorsque la distance entre la surface du bain et l'anneau dépasse une hauteur seuil (égale à environ  $0.66R$ ,  $R$  étant le rayon de la base du cône) [27, 28]. Lorsque cette surface est créée en retirant un cadre circulaire d'un bain d'eau savonneuse, les parois de la caténoïde s'effondrent alors en laissant un film plan sur l'anneau initialement immergé et une bulle sur la surface du bain. Ce phénomène est décrit en détail dans la publication de Salkin et al. [27]. Dans notre expérience pour laquelle cette surface se forme sur la base de

plus grand diamètre de nos entonnoirs, nous fermons l'extrémité du tube connecté à cet entonnoir juste avant que la hauteur seuil de stabilité ne soit atteinte. Au seuil, on observe alors la formation d'une bulle interfaciale à la surface du bain et un film liquide connecté perpendiculairement à la paroi intérieure du cône sur sa base de plus grand diamètre [voir Fig. 4.12(b)]. L'ouverture du tube amorce alors deux phénomènes successifs :

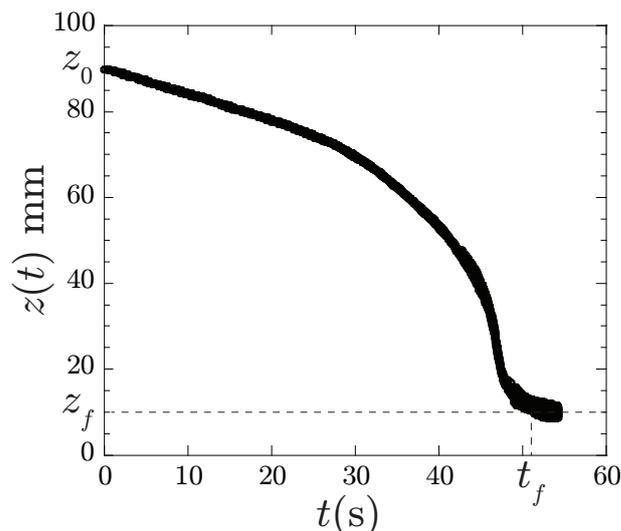


FIGURE 4.14: Ce graphique représente la variation temporelle de la position du film liquide  $z(t)$  lors d'une expérience réalisée en suivant le protocole décrit dans le texte. Le film se déplace d'une position initiale  $z_0$  à  $t = 0$  à une position finale  $z_f$  atteinte à  $t = t_f$  comme représenté sur ce graphique ainsi que sur la figure 4.12(c). La position finale  $z_f$  se situe au niveau de la jonction entre cône et tube comme l'indique le schéma de la figure 4.12(c). Les paramètres géométriques utilisés dans cette expérience sont :  $a = 3.2$  mm,  $\ell = 1$  m et  $\alpha = 21.5$  °.

---

- Dans un premier temps, le film liquide qui s'est formé sur l'entonnoir et dont la forme est une calotte sphérique, se dégonfle sans avancer, c'est-à-dire que son rayon de courbure augmente sans que la position du ménisque sur la paroi intérieure d'un cône ne se déplace [voir Fig.4.12(b)]. Nous pouvons trouver des similitudes entre ce phénomène et celui observé par Jackson et Sleyman [29] dans leur expérience sur le dégonflement d'une bulle positionnée à l'extrémité d'un tube cylindrique. Cette expérience est présentée de façon détaillée dans le chapitre 2.
- Après quelques secondes, le film liquide commence à se déplacer vers les régions de l'entonnoir possédant un rayon plus petit que  $R$ , c'est-à-dire dans le sens du gradient de confinement. Nous contrôlons la position de départ

$z_0$  (distance par rapport au sommet du cône) d'un film, en stoppant le déplacement du film lorsque celui-ci atteint la position initiale souhaitée [voir Fig. 4.12(c)]. Pour se faire il suffit de boucher l'extrémité du tube cylindrique.

Ce protocole expérimental nous permet de travailler avec des conditions initiales reproductibles. Le temps initial de l'expérience,  $t = 0$ , correspond à l'ouverture du tube lorsqu'un film est positionné à  $z_0$  comme nous venons de le décrire. Le film liquide parcourt alors une distance entre sa position initiale et sa position finale  $z_f = a / \tan \alpha$  [voir Fig. 4.12(b)], en une durée,  $t_f$ . La caméra qui filme ce déplacement nous permet de tracer la position du film liquide en fonction du temps  $z(t)$  comme représenté sur la figure 4.14. Expérimentalement, bien que la position  $z$  soit facile à déterminer en filmant le déplacement du film liquide, nous utiliserons plutôt la variable,  $Z = z / \cos \alpha$ , pour rationaliser nos expériences.

Dans la suite, nous décrivons nos observations expérimentales et déterminons théoriquement la dynamique d'avancée du film liquide dans l'entonnoir  $z(t)$  et l'expression du temps de trajet,  $t_f$ . Nous validons nos prédictions théoriques en les comparant à nos mesures expérimentales réalisées en variant de manière systématique, les paramètres pertinents de l'expérience, comme la longueur  $\ell$  et le rayon  $a$  du tube ainsi que le demi-angle d'ouverture du cône  $\alpha$ .

On peut imaginer que l'épaisseur,  $e$ , d'un film peut être un paramètre pertinent pour nos expériences. Pour déterminer l'influence de ce paramètre sur la dynamique d'avancée du film liquide, nous avons réalisé plusieurs expériences avec un entonnoir donné que nous sortons du bain à différentes vitesses. La loi de Frankel définit l'épaisseur du film liquide ainsi formé, en fonction du nombre capillaire  $\mathcal{C}$  et de la longueur capillaire  $\kappa^{-1} \sim \sqrt{\gamma / (\rho_\ell g)}$  ( $\rho_\ell$  et  $g$  sont respectivement la masse volumique du liquide et l'accélération gravitationnelle) comme  $e \sim \kappa^{-1} \mathcal{C}^{2/3}$  avec  $\mathcal{C} = \eta_\ell v_m / \gamma$  où  $\eta_\ell$  est la viscosité dynamique du liquide et  $v_m$  la vitesse de montée de l'entonnoir. Pour obtenir cette expression en loi d'échelle, on suppose que l'écoulement dans le film est donné par l'équation de Navier-Stokes pour laquelle on néglige la gravité et que l'on écrit en ordre de grandeur [28]. De plus, dans cette description on néglige les effets d'élasticité dus à des variations de tension de surface. Nous obtenons ainsi des films ayant une épaisseur dans la gamme  $e = 1 - 10 \mu\text{m}$ . Ces épaisseurs sont mesurées avec un spectromètre Avantes AvaSpec-2048 par une méthode d'interférométrie décrite dans le chapitre 1. Comme les expériences systématiques que nous avons réalisées donnent des résultats similaires pour des films liquides dont des épaisseurs sont différentes, nous allons supposer dans ce qui suit que le déplacement d'un film liquide ne dépend pas de son épaisseur dans notre étude. Nous supposons également que la gravité ne joue pas un rôle déterminant dans notre étude. Nous pouvons vérifier cette hypothèse en réalisant un simple calcul comparant la force

de gravité exercée sur le film liquide et la force capillaire au début de l'expérience  $t = 0$  et au cours du temps. Nous considérons que le film a la forme d'une calotte sphérique qui connecte la paroi intérieure du cône avec un angle de  $\frac{\pi}{2}$  donc  $Z_0 = R_c$  et que l'épaisseur du film liquide est très faible devant le rayon de courbure du film liquide. Le poids du film mince liquide  $P$  s'écrit alors :

$$P = 2\pi Z_0 h(t=0) e \rho_\ell g \quad (4.4)$$

où  $S$  et  $h$  sont respectivement la surface et la hauteur de la calotte sphérique,  $e$ , l'épaisseur du film et  $g$ , l'accélération gravitationnelle. Finalement il vient :

$$P = 2\pi e \rho_\ell g Z_0^2 (1 - \cos \alpha). \quad (4.5)$$

Pour établir l'équation précédente, nous avons utilisé les relations géométriques :  $h(t=0) = Z_0(1 - \cos \alpha)$ . En ordre de grandeur, la force capillaire exercée s'écrit :

$$F = 4\pi r(Z = Z_0)\gamma = 4\pi Z_0 \gamma \sin \alpha \quad (4.6)$$

Pour évaluer les ordres de grandeurs de ces deux termes, nous prenons les valeurs des paramètres correspondant à l'expérience présentée en figure 4.14, à savoir,  $Z_0 = 90$  mm,  $\alpha = 21.5^\circ$ ,  $\gamma = 25$  mN.m<sup>-1</sup> et  $g = 9.81$  m.s<sup>-2</sup>. Pour la gamme d'épaisseurs que nous avons mesurées ( $e = 1 - 10$  μm), nous obtenons les valeurs  $P = 3.47 \times 10^{-5} - 3.47 \times 10^{-4}$  N et  $F = 1.11 \times 10^{-2}$  N. Comme  $P \ll F$ , les effets gravitationnels sont donc négligeables devant les effets capillaires à  $t = 0$ . Pour comparer ces deux effets pendant le déplacement d'un film, supposons que l'épaisseur d'un film reste constante quand le film avance, c'est-à-dire que nous supposons que le liquide peut s'échapper via le ménisque vers le film liquide couvrant la paroi intérieure du cône alors que le rayon du film mince liquide diminue pendant son déplacement spontané. Le poids variant comme  $Z^2$  et la force capillaire comme  $Z$  et puisque  $Z$  diminue au cours du temps pendant le mouvement, les effets capillaires dominant donc d'autant plus les effets gravitationnels au cours du temps, c'est-à-dire pendant l'avancée du film mince dans le cône. Pour vérifier expérimentalement cette hypothèse, nous avons observé le déplacement d'un film liquide dans le sens de la gravité, c'est-à-dire vers le bas. Malheureusement, du liquide s'écoule dans le tube lorsque nous réalisons l'expérience dans ces conditions, c'est-à-dire en positionnant la base du cône en haut. C'est pourquoi nous faisons dans la suite de notre étude le choix de travailler avec la base du cône positionnée en bas.

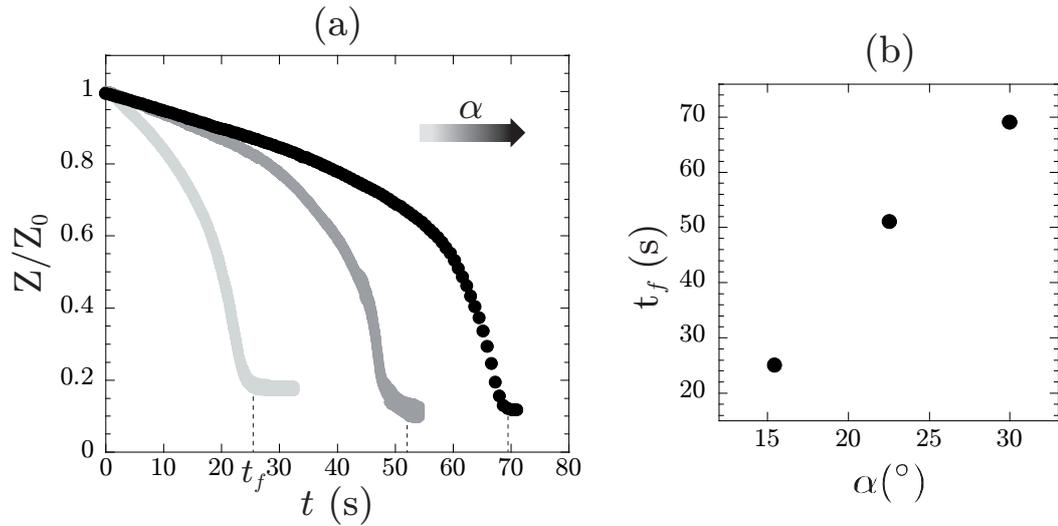


FIGURE 4.15: (a) Evolution temporelle de la position  $Z$  d'un film liquide normalisée par sa position initiale  $Z_0$  pour trois valeurs du demi-angle d'ouverture  $\alpha$  indiquées par les différents tons de gris : (•) 15.5 °, (•) 22.5 °, (•) 30 °. (b) Variations du temps de déplacement du film  $t_f$  en fonction de  $\alpha$  pour les expériences montrées en (a). Le tube a une longueur de  $\ell = 1$  m et un rayon  $a = 3.2$  mm et  $Z_0$  est à une valeur fixée à  $93 \pm 3$  mm. Les traits verticaux en pointillés indiquent le temps final  $t_f$  du film.

## 2.3 Résultats

Dans cette section, nous présentons nos résultats expérimentaux. Comme nous avons pu le mentionner auparavant, les paramètres ajustables du système dans le cadre de notre expérience sont : le demi-angle d'ouverture  $\alpha$  du cône, la longueur  $\ell$  et le rayon  $a$  du tube cylindrique. Nous avons donc réalisé des expériences systématiques en faisant varier ces trois paramètres de manière indépendante, en prenant soin de travailler pour chaque série d'expériences avec une même position initiale du film liquide ; nous fixons donc la valeur de  $Z_0$  qui à priori peut être un paramètre pertinent de l'expérience. Nous nous intéressons dans un premier temps aux résultats obtenus en faisant varier le demi-angle d'ouverture  $\alpha$ . Pour cette série d'expériences, nous avons fixé la position initiale  $Z_0 = 93 \pm 3$  mm et nous avons utilisé un tube de longueur  $\ell = 1$  m et de rayon  $a = 3.2$  mm. La figure 4.15(a) montre les résultats obtenus de la variation temporelle de la position  $Z(t)$  normalisée par la position initiale  $Z_0$ . Nous remarquons que l'évolution de la position en fonction du temps est semblable à la figure 4.14. En traçant le graphe du temps de déplacement  $t_f$  en fonction de  $\alpha$ , nous pouvons remarquer une augmentation de  $t_f$  avec  $\alpha$ . La figure 4.16 montre les résultats obtenus pour des expériences réalisées en faisant varier la longueur du tube et en fixant le demi-angle d'ouverture de l'entonnoir à

21.25 °, le rayon du tube  $a = 3.2$  mm et la position  $Z_0$  est fixée à la valeur  $104 \pm 2$  mm. Nous retrouvons le même type de variation de la position  $Z(t)$  normalisée par la position initiale  $Z_0$  [voir Fig. 4.16(a)] et le temps de déplacement augmente avec la longueur du tube. Enfin, nous étudions l'influence du dernier paramètre, à savoir

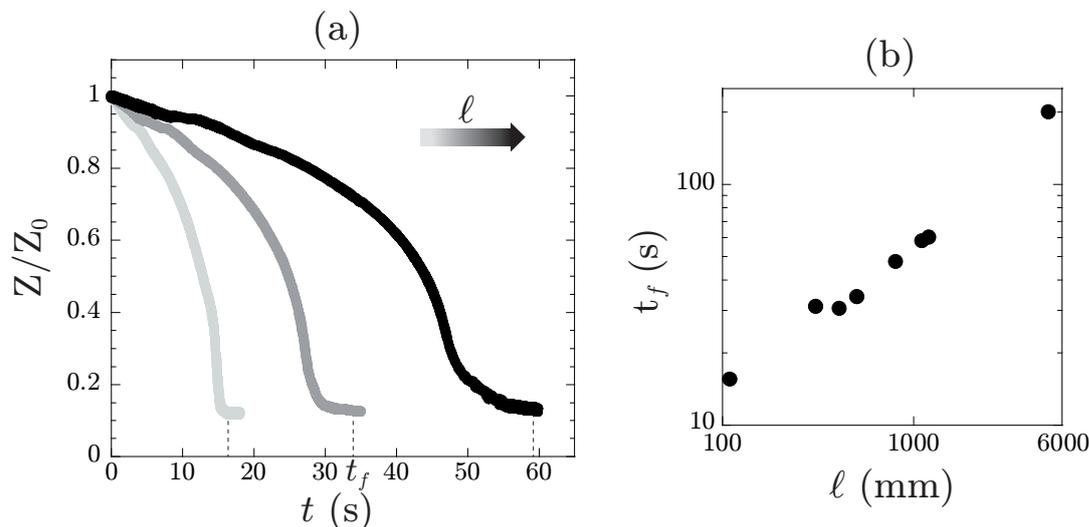


FIGURE 4.16: (a) Evolution temporelle de la position  $Z$  d'un film liquide normalisée par sa position initiale  $Z_0$  pour trois valeurs de la longueur du tube  $\ell$  indiquées par les tons de gris : (●) 110 mm, (●) 410 mm, (●) 1110 mm. (b) Variations du temps de déplacement du film  $t_f$  en fonction de  $\ell$  pour différentes expériences dont celles montrées en (a). Le demi-angle d'ouverture  $\alpha$  de l'entonnoir est égal à 21.25 °, le rayon du tube est  $a = 3.2$  mm et la position  $Z_0$  est fixée à la valeur  $104 \pm 2$  mm.

---

le rayon du tube,  $a$ . Pour cela nous avons réalisé des expériences en fixant le demi-angle d'ouverture  $\alpha$  de l'entonnoir à  $21.75 \pm 0.5$  °, la longueur du tube à  $\ell = 1$  m et la position initiale  $Z_0$  à  $109 \pm 7$  mm. La figure 4.17 montre que nous obtenons la même allure typique de la variation de  $Z(t)$ . Cependant, nous pouvons remarquer que le temps de déplacement est une fonction fortement décroissante de  $a$  ce qui contraste fortement avec les variations de ce temps avec l'angle du cône  $\alpha$  et la longueur du tube  $\ell$ .

Nous remarquons que la variation du rayon du tube cylindrique,  $a$ , a une plus forte influence sur la durée du trajet du film mince dans le cône puisqu'en divisant la rayon du tube par deux, la durée du déplacement,  $t_f$ , est multipliée par quinze environ (voir Fig. 4.17). Par contraste, pour obtenir le même type de variations pour  $t_f$  en changeant la longueur du tube, la figure 4.16 montre qu'il faut multiplier ce paramètre par un facteur 60, environ.

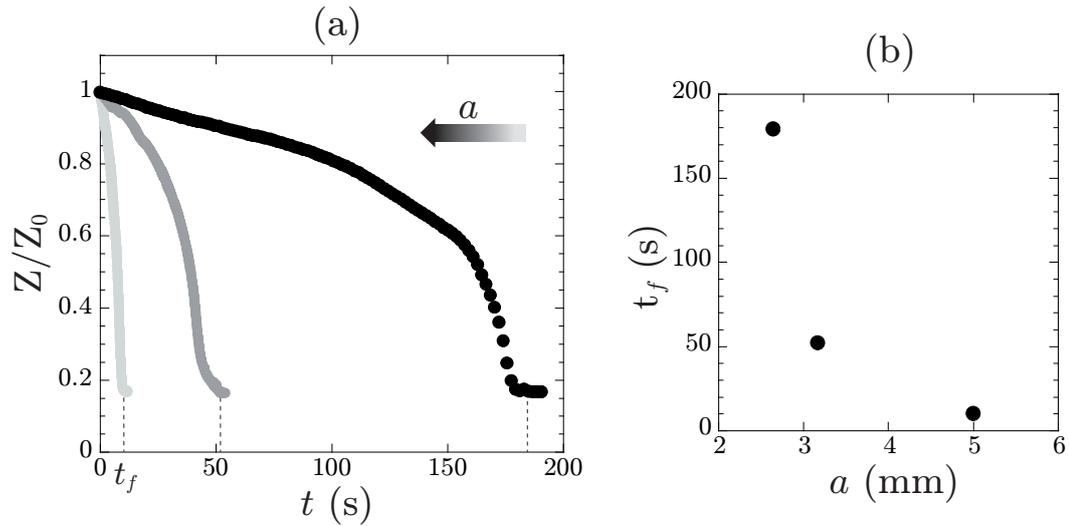


FIGURE 4.17: (a) Evolution temporelle de la position  $Z$  d'un film liquide normalisée par sa position initiale  $Z_0$  pour trois valeurs du rayon du tube  $a$  comme indiquées par les tons de gris : (●) 2.65 mm, (●) 3.2 mm, (●) 5 mm. (b) Variations du temps de déplacement du film  $t_f$  en fonction de  $a$  pour les expériences montrées en (a). Le demi-angle d'ouverture  $\alpha$  de l'entonnoir est égal à  $21.75 \pm 0.5^\circ$ , la longueur du tube est  $\ell = 1$  m et  $Z_0$  est fixe a la valeur  $109 \pm 7$  mm.

### 3 Modélisation

#### 3.1 Conditions expérimentales et approximations

Dans cette expérience, nous faisons plusieurs approximations nous permettant de décrire et d'interpréter nos résultats de façon simple. Nous définissons et justifions dans cette section l'ensemble de ces approximations.

- 1) Nous considérons que l'air est incompressible et le film liquide imperméable au gaz pendant la durée de l'expérience. Le débit volumique de l'écoulement de l'air  $q$  est donc supposé constant.
- 2) Nous supposons que le déplacement du film mince de liquide s'effectue de manière quasi-statique. Cette hypothèse nous permet de négliger la traînée visqueuse agissant au niveau du bord de Plateau entre le film liquide et la paroi intérieure du cône. Dans ce cas, l'angle de contact entre le film liquide et la paroi est égal à  $\frac{\pi}{2}$  à chaque instant de la dynamique et le rayon de courbure du film liquide se déplaçant est égal à la distance  $Z$  séparant la position du ménisque et le sommet du cône, c'est dire  $R_c = Z$ . Nos observations expérimentales semblent valider cette hypothèse [voir Fig. 4.12(c)].

Il est intéressant de noter qu'une approche similaire a été utilisée pour étu-

dier le mouvement de films liquides s'écoulant à travers un système poreux modèle [30] par l'application d'un gradient de pression [30, 31].

- 3) Le modèle que nous proposons considère un volume d'air emprisonné correspondant au volume d'un cône entier plutôt que celui d'un cône tronqué. Nous ajoutons donc en excès un volume d'air  $\frac{\pi}{3} \frac{a^3}{\tan \alpha}$  correspondant à la partie supérieure du cône tronqué dont la base est de rayon  $a$  (le rayon du tube) et la hauteur  $z_f = \frac{a}{\tan \alpha}$  comme indiqué sur la figure 4.13. Ainsi, le volume d'air considéré est  $V = \frac{2\pi}{3} Z^3 (1 - \cos \alpha)$ . Cette approximation semble raisonnable puisque le volume en excès est constant et le modèle de l'écoulement que nous proposons dans cette la section 3.2 utilise la dérivée du volume, c'est-à-dire le débit. Nous discutons plus loin de façon plus quantitative cette approximation en comparant les durées de déplacements mesurées expérimentalement aux valeurs prédites théoriquement par notre modèle.
- 4) Nous montrons dans la section 3.2 que l'écoulement d'air peut être décrit par un modèle de Poiseuille qui prend en compte la résistance hydrodynamique de l'entonnoir. Pour définir cette résistance, nous faisons une approximation. En effet, la géométrie du système étudié se présente comme l'association en série d'un cône et d'un tube cylindrique. La résistance hydrodynamique totale,  $R_h$ , est donc égale à la somme des résistances hydrodynamiques de ces deux géométries, soit  $R_h = R_{h-c} + R_{h-t}$  avec  $R_{h-c}$  et  $R_{h-t}$  respectivement la résistance hydrodynamique du cône et celle du tube cylindrique. Les hypothèses précédemment mentionnées et le faible nombre de Reynolds (nous discutons du nombre de Reynolds dans la section suivante)  $\mathcal{R}_e$  permettent de supposer que cet écoulement est régi par l'équation de Stokes. Notre modèle prend donc en compte la résistance hydrodynamique du tube qui est donnée par la relation bien connue  $R_{h-t} = \frac{8\eta_a \ell}{\pi a^4}$ . La résistance du cône est donnée, quant à elle, par la relation  $R_{h-c} = - \int_Z^{Z_f} \frac{8\eta_a \cos \alpha}{\pi r(Z')^4} dZ' = \frac{8\eta_a \cos \alpha}{3\pi (\sin \alpha)^4} \left( \frac{1}{Z_f^3} - \frac{1}{Z^3} \right)$  avec  $r(Z) = Z \sin \alpha$  le rayon du film liquide en fonction de sa position par rapport au sommet du cône (voir Fig. 4.13). En comparant la valeur du terme principal de cette résistance  $\left( \frac{8\eta_a}{3\pi a^3 \tan \alpha} \right)$  avec celle de la résistance du tube cylindrique, nous trouvons que la résistance du cône  $R_{h-c}$  peut être négligée par rapport à celle du tube,  $R_{h-t}$ , dès que la longueur du tube excède une longueur seuil,  $\ell \gg \frac{a}{3 \tan \alpha}$ . Dans notre expérience, pour un entonnoir typique possédant un angle  $\alpha = 22^\circ$ , cette condition est respectée si la longueur du tube  $\ell \gg 0.825a$  (la gamme de rayons du tube étant  $a = 1.5 - 5$  mm). Comme la gamme des longueurs  $\ell$  que nous utilisons dans nos expériences est  $\ell = 0.1 - 10$  m, nous pouvons donc admettre que la résistance hydrodynamique totale est donnée par  $R_h \sim R_{h-t}$ .

## 3.2 Modèle de l'écoulement et de la durée du trajet du film liquide dans le cône

Nous considérons que le déplacement spontané du film mince à travers le cône est engendré par la différence de pression de Laplace qui existe de chaque coté de ce film du fait de sa courbure non nulle. Cette variation de pression de Laplace s'écrit  $\Delta p = \frac{4\gamma}{Z}$ . La dynamique de déplacement du film liquide est limitée par l'écoulement de l'air que nous supposons unidirectionnel et dominé par les effets de la viscosité de ce gaz. L'écoulement de l'air est donc supposé laminaire et nous devrions alors pouvoir le décrire à l'aide d'un modèle de Poiseuille,  $\Delta p = R_h q$ , où  $\Delta p$  est la perte de charge dans l'air contenu, entre la surface du film liquide mince courbé et l'extrémité libre du tube cylindrique, qui est placée à la pression atmosphérique. Ces hypothèses sont satisfaites si le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e$  associé à l'écoulement est inférieur à 2000 [32]. Le nombre de Reynolds est obtenue en comparant les forces inertielles ( $\propto \rho_a v^2 / (2a)$ ) et visqueuses ( $\propto \eta_a v / (2a)^2$ ), on obtient alors  $\mathcal{R}_e = \frac{2a\rho_a v}{\eta_a}$  où  $v$  est la vitesse moyenne de l'écoulement de l'air et  $\rho_a$  la masse volumique de l'air [29]. La vitesse,  $v$ , peut être écrite  $q / (\pi a^2)$  où  $q$ , le débit volumique, est donné par  $q = 4\gamma / (ZR_h)$  comme montré plus haut. Le nombre de Reynolds s'écrit alors  $\mathcal{R}_e = 8\rho_a \gamma / (\pi a Z R_h \eta_a)$ . Comme nous avons montré qu'il est raisonnable d'approximer la résistance hydrodynamique,  $R_h$ , par celle du tube cylindrique,  $R_{h-t}$ , le nombre de Reynolds se réduit alors à  $\mathcal{R}_e = \frac{\gamma \rho_a a^3}{\eta_a^2 Z \ell}$ . Au début du mouvement,  $Z = Z_0$  est typiquement égal à 0.1 m dans nos expériences. Pour la solution savonneuse utilisée, la tension de surface air-liquide est  $\gamma = 25 \text{ mN.m}^{-1}$ . Ainsi, la condition pour que l'écoulement soit laminaire,  $\mathcal{R}_e < 2000$ , est satisfaite lorsque la longueur du tube vérifie  $\ell > 4 \text{ mm}$  pour un tube de rayon,  $a = 2 \text{ mm}$ , et  $\ell > 6.25 \text{ cm}$  pour un tube de rayon,  $a = 5 \text{ mm}$ .

En travaillant avec des paramètres respectant ces conditions et en utilisant les arguments décrits auparavant, l'égalité des différences de pression donne :

$$\frac{4\gamma}{Z} = \frac{8\eta_a \ell}{\pi a^4} q. \quad (4.7)$$

Le débit, correspondant au signe près à la dérivée temporelle du volume d'air total emprisonné, nous obtenons donc la relation suivante :

$$q = -\frac{dV}{dt} = -2\pi Z^2 \frac{dZ}{dt} (1 - \cos \alpha). \quad (4.8)$$

Nous pouvons alors écrire l'équation suivante :

$$Z^3 dZ = -\frac{\gamma a^4}{4\eta_a \ell (1 - \cos \alpha)} dt. \quad (4.9)$$

En intégrant cette équation différentielle, nous pouvons écrire la dynamique d'avancée du film mince à travers le cône :

$$\left(\frac{Z(t)}{Z_0(t=0)}\right)^4 = 1 - \frac{\gamma a^4}{\eta_a \ell Z_0^4 (1 - \cos \alpha)} t = 1 - \frac{t}{t_f}. \quad (4.10)$$

La durée du déplacement du film mince à travers le cône correspondant au temps que met l'air à s'évacuer du cône est donc donnée par l'équation :

$$t_f = \frac{\eta_a \ell Z_0^4}{\gamma a^4} (1 - \cos \alpha). \quad (4.11)$$

Le film liquide se déplace d'une position initiale,  $z_0$ , à une position finale,  $z_f$ , en un temps,  $t_f$ . Connaissant les paramètres géométriques d'une expérience et la valeur de la tension de surface liquide-air, la mesure de la durée du trajet,  $t_f$ , devrait donc permettre de facilement déduire la viscosité de l'air. Notre modèle théorique simple décrivant la dynamique du film mince à travers le cône (Eq. 4.10) prédit que la position d'un film normalisée par sa valeur initiale à la puissance quatre  $(Z/Z_0)^4$  décroît linéairement avec le temps. Les résultats de la figure 4.18 représentant les dynamiques des expériences mentionnées en figures 4.15, 4.16, 4.17 à la puissance quatre montrent bien une décroissance linéaire avec le temps, ce qui est en excellent accord qualitatif avec nos prédictions théoriques. Nous pouvons remarquer que cette décroissance est observable pour chaque paramètre varié. Dans ce qui suit, nous allons comparer de façon plus quantitative nos prédictions théoriques et nos résultats expérimentaux.

### 3.3 Comparaison théorie-expérience

La figure 4.19 montre un graphe comparant les temps d'arrêt d'un film liquide mesuré expérimentalement,  $t_f^{exp}$ , en fonction de la prédiction théorique,  $t_f^{th}$ , de notre modèle. L'ensemble de nos mesures prédit à 20% près la valeur tabulée de la viscosité dynamique de l'air pour la température de mesure et plus de 80% de nos données prédisent cette propriété du gaz à 10% près. Il est également important de remarquer que l'ensemble des points expérimentaux obtenus permettent d'obtenir une moyenne de mesure qui est tout juste 2.5% inférieure à la valeur tabulée ce qui est remarquable (voir Fig. 4.20). L'écart-type qui reflète la dispersion des données de cette série statistique est  $\sigma_\eta = 0.154 \times 10^{-5}$  Pa.s. Cette série de mesures statistiques permettant d'estimer la valeur de la viscosité dynamique de l'air peut également être représentée à l'aide d'un histogramme comme le montre la figure 4.21.

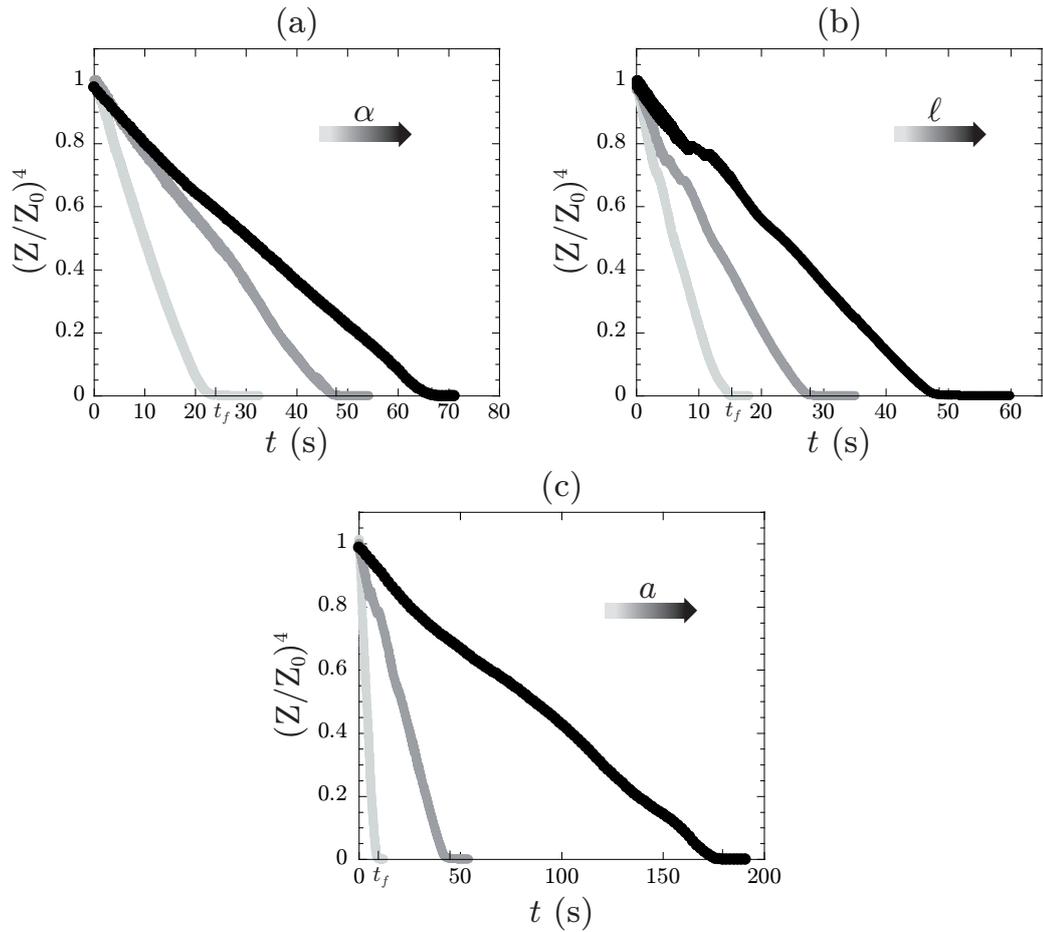


FIGURE 4.18: Evolutions temporelles de  $(Z(t)/Z_0)^4$  pour (a) trois demi-angles d'ouverture de cône [données de Fig. 4.15(a)], (b) trois valeurs de la longueur du tube [données de Fig. 4.16(a)] et (c) trois valeurs du rayon du tube [données de Fig. 4.17(a)]. Les autres paramètres de ces expériences sont identiques aux Figures 4.15(a), 4.16(a) et 4.17(a).

### 3.4 Fiabilité du modèle

Pour connaître la fiabilité de notre modèle, nous devons comparer les valeurs théoriques des durées de déplacement (ou temps de trajet) des films liquides à travers le cône, aux valeurs déterminées expérimentalement. Pour cela nous déterminons une équation permettant de mettre ces deux quantités en relation. Nous notons  $t_f^{exp}$  et  $t_f^{th}$  respectivement le temps expérimental et le temps théorique.

Pour commencer, nous pouvons écrire l'égalité suivante d'après l'équation (4.9) :

$$\frac{dt}{dZ} = -4Z^3 \frac{\eta_a \ell (1 - \cos \alpha)}{\gamma a^4}. \quad (4.12)$$

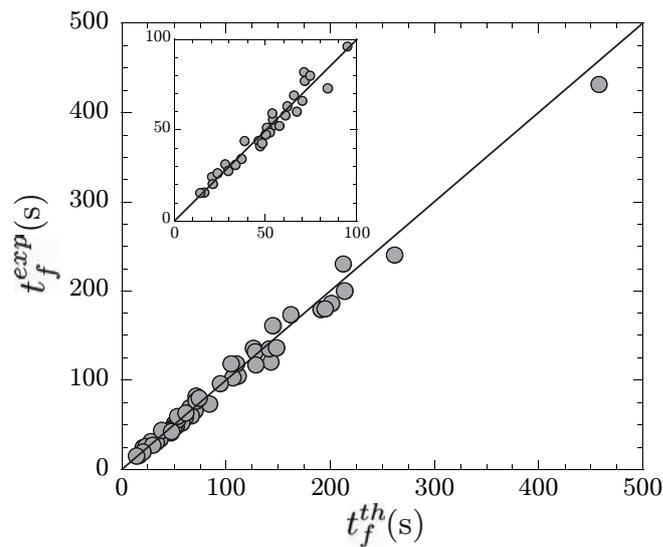


FIGURE 4.19: Variations du temps d'arrêt d'un film liquide mesuré expérimentalement  $t_f^{exp}$  en fonction de la prédiction théorique  $t_f^{th}$  de notre modèle. En insert : zoom sur les données pour les temps inférieurs à 100 s. Les droites correspondent aux meilleurs ajustements linéaires donnés par notre modèle,  $t_f^{exp} = t_f^{th}$ . Chaque point expérimental sur ce graphe provient de l'ensemble de nos données pour lesquelles  $\ell = 0.01 - 12$  m,  $a = 1.5 - 5$  mm,  $\alpha = 15 - 30$  °, et  $Z_0 = 60 - 120$  mm.

---

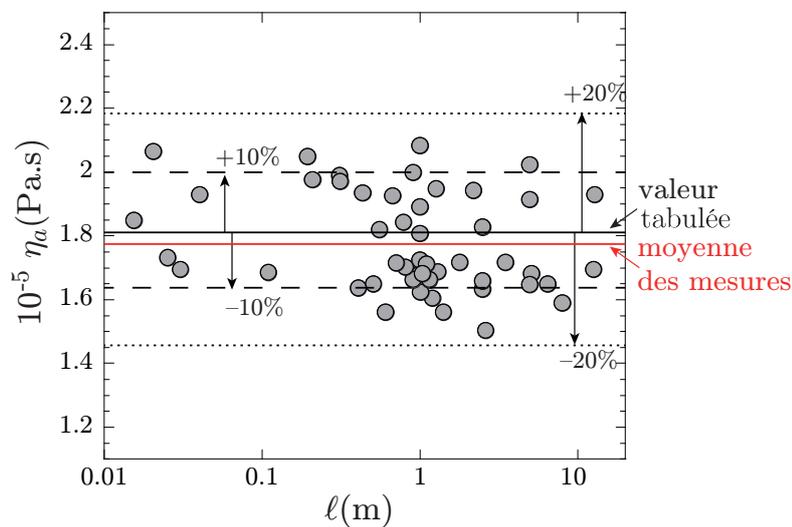


FIGURE 4.20: Evolution de la viscosité déduite de nos expériences en fonction de la longueur  $\ell$  d'un tube. Les paramètres utilisés pour ces données correspondent à ceux de la figure 4.19.

---

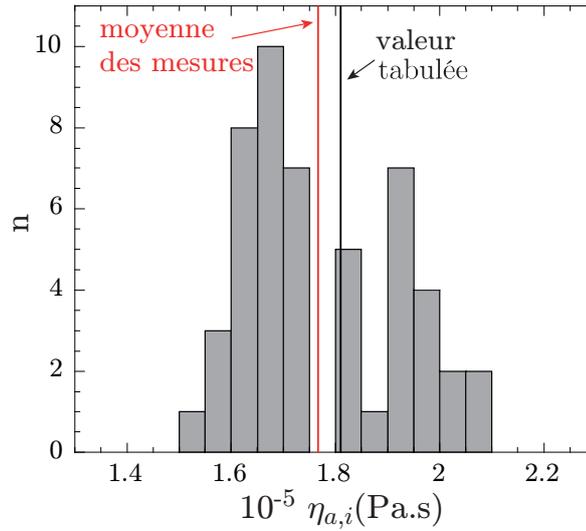


FIGURE 4.21: Histogramme des viscosités dynamiques de l'air  $\eta_{air}$  déterminées pour chaque expérience  $i$  rapportée dans la figure 4.20 avec les valeurs des paramètres clefs données dans la légende de cette figure. La valeur tabulée de la viscosité de l'air dans les conditions de notre expérience est  $1.81 \times 10^{-5}$  Pa.s comme l'indique la ligne continue en noir. La ligne continue en rouge montre la moyenne des valeurs obtenues pour cette série statistique ( $1.775 \times 10^{-5}$  Pa.s) dont l'écart-type qui reflète la dispersion des données est  $\sigma_\eta = 0.154 \times 10^{-5}$  Pa.s.

Nous avons déterminé précédemment le temps de déplacement théorique d'un film liquide  $t_f = \frac{\eta_a \ell Z_0^4}{\gamma a^4} (1 - \cos \alpha)$ . En remplaçant dans (4.12) cette égalité peut se réécrire :

$$\frac{dt}{dZ} = -4Z^3 \frac{t_f^{th}}{Z_0^4}. \quad (4.13)$$

Le temps de déplacement expérimental peut s'écrire sous la forme d'une intégrale :

$$t_f^{exp} = \int_0^{t_f} dt = \int_{Z_0}^{Z_f} \left( \frac{dt}{dZ} \right). \quad (4.14)$$

D'après les équations (4.13) et (4.14), l'équation comparant les deux temps de déplacement s'écrit :

$$t_f^{exp} = -t_f^{th} \frac{4}{Z_0^4} \int_{Z_0}^{Z_f} Z^3 dZ = t_f^{th} \left[ 1 - \left( \frac{Z_f}{Z_0} \right)^4 \right]. \quad (4.15)$$

Les ordres de grandeur des valeurs de nos expériences sont  $Z_f \sim 10^{-2}$  m pour la position finale d'un film et  $Z_0 \sim 10^{-1}$  m pour sa position initiale. Dans l'équation

(4.15), le terme  $\left(\frac{Z_f}{Z_0}\right)^4$  vaut donc typiquement  $10^{-4}$  et nous pouvons donc déduire que  $t_f^{exp} \sim 99.99\% t_f^{th}$ . Cette comparaison montre une différence très fine entre les deux temps et nous permet de conclure que les approximations faites pour établir un modèle simple décrivant la dynamique semblent raisonnables.

## 4 Conclusion

Nous traitons dans ce chapitre une méthode simple de mesure de la viscosité de l'air qui est directement applicable en salle de classe puisque les expériences sont faciles à mettre en œuvre et à analyser. Le coût de l'expérience est relativement faible, le matériel utilisé se compose uniquement d'un entonnoir, d'un tube et d'une caméra (que nous pouvons trouver sur tous les smartphones). La physique associée est également adaptée à l'enseignement prodigué à des étudiants lors d'un cours d'introduction sur la capillarité et les écoulements visqueux. De plus, en utilisant le dispositif expérimental décrit dans ce chapitre, les étudiant(e)s auront l'opportunité d'observer l'auto-propulsion d'un film de savon dans le sens inverse de la gravité. Au final c'est une expérience simple mais relativement précise pour mesurer la viscosité d'un gaz.

# Bibliographie

- [1] Y. Zheng, H. Bai, Z. Huang, X. Tian, F. Q. Nie, Y. Zhao, J. Zhai, and L. Jiang. Directional water collection on wetted spider silk. *Nature*, **463**(7281) :640–643, 2010.
- [2] J. Ju, H. Bai, Y. Zheng, T. Zhao, R. Fang, and L. Jiang. A multi-structural and multi-functional integrated fog collection system in cactus. *Nature Communications*, **3**(1) :1247–1–4, 2012.
- [3] R. E. White. *Beetles*. Houghton Mifflin Company, 1983.
- [4] <http://www.dipode-vie.net/Arachnides/Uloboridae/Uloborus/walckenaerius.html>.
- [5] [https://de.wikipedia.org/wiki/Stenus\\_comma](https://de.wikipedia.org/wiki/Stenus_comma).
- [6] J. Elgeti, R. G. Winkler, and G. Gompper. Physics of microswimmers—single particle motion and collective behavior : a review. *Reports on Progress in Physics*, **78**(5) :056601–1–54, 2015.
- [7] Y. Ikezoe, G. Washino, T. Uemura, S. Kitagawa, and H. Matsui. New Autonomous Motors of Metal-Organic Framework (MOF) Powered by Reorganization of Self-Assembled Peptides at interfaces. *Nature materials*, **11**(3) :853–858, 2012.
- [8] <https://www.ladhyx.polytechnique.fr/media/larecherche/transport-sans-contact2.png>.
- [9] H. Linke, B. J. Alemán, L. D. Melling, M. J. Taormina, M. J. Francis, C. C. Dow-Hygelund, V. Narayanan, R. P. Taylor, and A. Stout. Self-Propelled Leidenfrost Droplets. *Physical Review Letters*, **96** :154502–1–4, 2006.
- [10] J. G. Leidenfrost. *De aquae communis nonnullis qualitatibus tractatus*. Duisburg, 1756.

- [11] G. Lagubeau, M. Le Merrer, C. Clanet, and D. Quéré. Leidenfrost on a ratchet. *Nature Physics*, **7**(5) :395–398, 2011.
- [12] D. Soto, G. Lagubeau, C. Clanet, and D. Quéré. Surfing on a herringbone. *Physical Review Fluids*, **1** :013902–1–10, 2016.
- [13] M. K. Chaudhury and G. M. Whitesides. How to Make Water Run Uphill. *Science*, **256**(5063) :1539–1541, 1992.
- [14] H. Elwing, S. Welin, A. Askendal, U. Nilsson, and I. Lundström. A wettability gradient method for studies of macromolecular interactions at the liquid/solid interface. *Journal of Colloid and Interface Science*, **119**(1) :203–210, 1987.
- [15] F. D. Dos Santos and T. Ondarçuhu. Free-Running Droplets. *Physical Review Letters*, **75** :2972–2975, 1995.
- [16] Y. Sumino, N. Magome, T. Hamada, and K. Yoshikawa. Self-Running Droplet : Emergence of Regular Motion from Nonequilibrium Noise. *Physical Review Letters*, **94** :068301–1–4, 2005.
- [17] R. Dangla, S. Cagri Kayi, and C. N. Baroud. Droplet microfluidics driven by gradients of confinement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **110**(3) :853–858, 2013.
- [18] E. Lorenceau and D. Quéré. Drops on a conical wire. *Journal of Fluid Mechanics*, **510** :29–45, 2004.
- [19] B. J. Carroll and J. Lucassen. Effect of surface dynamics on the process of droplet formation from supported and free liquid cylinders. *Journal of The Chemical Society*, **70** :1228–1239, 1974.
- [20] E. Lorenceau. *Interfaces en grande déformation : oscillations, impacts, singularités*. PhD thesis, 2003.
- [21] E. Reyssat. Drops and bubbles in wedges. *Journal of Fluid Mechanics*, **748** :641–662, 2014.
- [22] E. W. Washburn. The Dynamics of Capillary Flow. *Physical Review*, **17** :273–283, 1921.
- [23] M. Reyssat, L. Courbin, E. Reyssat, and H. Stone. Imbibition in geometries with axial variations. *Journal of Fluid Mechanics*, **615** :335–344, 2008.

- 
- [24] N. A. Goy, Z. Denis, M. Lavaud, A. Grolleau, N. Dufour, A. Deblais, and U. Delabre. Surface tension measurements with a smartphone. *The Physics Teacher*, **55**(8) :498–499, 2017.
- [25] R. M. Digilov and M. Reiner. Weight-controlled capillary viscometer. *American Journal of Physics*, **73**(11) :1020–1022, 2005.
- [26] Y. Shimokawa, Y. Matsuura, T. Hirano, and K. Sakai. Gas viscosity measurement with diamagnetic-levitation viscometer based on electromagnetically spinning system. *Review of Scientific Instruments*, **87**(12) :125105–1–4, 2016.
- [27] L. Salkin, A. Schmit, P. Panizza, and L. Courbin. Influence of boundary conditions on the existence and stability of minimal surfaces of revolution made of soap films. *American Journal of Physics*, **82** :839–847, 2014.
- [28] L. Salkin. *Création, stabilité et rupture d’interfaces fluides*. PhD thesis, Rennes 1, 2014.
- [29] D. P. Jackson and S. Sleyman. Analysis of a deflating soap bubble. *American Journal of Physics*, **78** :990–994, (2010).
- [30] D. J. Ferguson and S. J. Cox. The motion of a foam lamella traversing an idealised bi-conical pore with a rounded central region. *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects*, **438** :56–62, 2013. A collection of papers presented at the 9th EUFOAM Conference, Lisbon, Portugal, 8-11 July 2012.
- [31] W. R. Rossen. Theory of mobilization pressure gradient of flowing foams in porous media : I. incompressible foam. *Journal of Colloid and Interface Science*, **136**(1) :1–16, 1990.
- [32] E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, and C. D. Mitescu. *Physical Hydrodynamics*. Oxford University Press, 2015.

# Conclusion générale et perspectives

## 5 Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce manuscrit trois sujets d'études qui ont abouti à la publication de trois articles scientifiques (un article soumis, un article à paraître et un article paru). Ces travaux concernent des processus de formation, transport et destruction de bulles interfaciales et de films minces liquides.

Nous avons commencé par un travail s'inscrivant dans la continuité d'une étude débutée lors de la thèse (2012-2015) de L. Salkin et qui vise à comprendre la formation d'une bulle interfaciale lorsqu'un film liquide plan impacte à vitesse constante la surface libre d'un bain du même liquide. L'écoulement de l'air établi par le déplacement d'un film plan le déforme créant une calotte sphérique, la bulle est formée par l'air piégé entre le film liquide courbé et la surface du bain. Le volume de la bulle correspond à celui de l'air piégé sous la calotte sphérique avant l'impact. La taille d'une bulle formée dépend de la vitesse d'impact. Nous montrons l'existence de deux régimes hydrodynamiques séparés par une vitesse seuil. En dessous de cette vitesse, la taille de la bulle résulte d'un mécanisme visco-capillaire. Dans ce régime, le rayon normalisé de la bulle augmente avec le nombre capillaire à la puissance  $\frac{1}{12}$ . Le modèle établi dans ce régime considère l'écoulement d'air latéral survenant lorsqu'un film approche de la surface libre, un écoulement que nous décrivons en utilisant l'approximation de la lubrification. Au dessus de la vitesse seuil, nous montrons que la taille de la bulle résulte d'un mécanisme inertio-capillaire dans lequel l'écoulement frontal de l'air sur le film va être responsable de sa déformation. Le rayon normalisé de la bulle augmente de façon plus importante avec la vitesse que dans le premier régime. Plus précisément, elle croît comme le nombre de Weber à la puissance  $\frac{1}{3}$ .

Dans le cadre d'un co-encadrement de stage de L3 de M. Clerget, nous avons mené des travaux sur la vidange d'une bulle interfaciale (voir Chapitre 3) posée sur un substrat solide percé d'un orifice circulaire. L'air en surpression dans une bulle, du fait de la pression de Laplace, s'échappe par l'orifice créant un écoulement d'air que l'on peut décrire à l'aide du théorème de Bernoulli. Nos expériences montrent

qu'il existe trois régimes pilotés par un paramètre sans dimension construit avec les propriétés physico-chimiques d'un liquide et des variables géométriques pertinentes du problème. La bulle, initialement hémisphérique, diminue de taille au fur et à mesure que l'air s'en échappe. Le pied de la bulle a la capacité de se déplacer sur le substrat et l'angle de contact peut varier au cours du temps. La première dynamique s'observe dans le cas où le paramètre géométrique adimensionné, le rapport entre la taille de la bulle et celle de l'orifice, est grand et/ou la viscosité du liquide faible. Dans ce premier régime, la bulle reste hémisphérique le temps de la vidange. Dans le second régime, nous observons un changement de l'angle de contact entre la bulle et le substrat, le pied de la bulle se déplace en diminuant sa distance avec l'orifice. Pour modéliser cette dynamique, nous prenons en compte la friction visqueuse agissant au pied de la bulle lorsque cette dernière se meut. Dans le troisième régime, le pied de la bulle est quasiment immobile, la bulle s'effondre sur elle-même pendant un temps parfois inférieur à la seconde. Ce régime est vu pour les rapports géométriques entre la taille de la bulle et celle de l'orifice les plus petits et/ou les viscosités du liquide les plus grandes. Les temps les plus longs sont obtenus dans le premier régime et ils ne cessent de décroître lorsque la réponse transite vers le second régime puis le troisième.

Enfin, nous avons proposé une expérience permettant de mesurer la viscosité de l'air en caractérisant l'écoulement généré par le mouvement spontané d'un film liquide dans un cône qui est connecté à son extrémité la plus étroite par un tube circulaire long et fin. C'est la pression de Laplace qui est le mécanisme physique moteur de ce mouvement et l'écoulement d'air généré est régi par la loi de Poiseuille. Nous avons étudié de façon systématique le temps de déplacement d'un film en fonction des paramètres géométriques clés du problème : la longueur et le rayon d'un tube, l'angle d'ouverture d'un cône et la position initiale du film. Malgré les approximations utilisées pour établir un modèle simple, les valeurs obtenues de la viscosité de l'air sont en bon accord avec la valeur tabulée. Cette expérience facile à mettre en œuvre et compréhensible à l'aide de notions de physique simples pourrait trouver sa place en travaux pratiques au niveau Licence.

## 6 Perspectives

Une étude possible qui s'inscrirait dans la continuité de cette thèse pourrait être la formation et de la stabilité d'un onduloïde. Une étude préliminaire a été réalisée dans le cadre du stage de M1 de M. Clerget. Un onduloïde est une forme géométrique que peut adopter une bulle lorsqu'elle est pressée entre deux surfaces [deux surfaces solides ou une surface solide et une surface liquide (voir Fig. 4.22)]. Nous avons eu

l'occasion de présenter à plusieurs reprises l'évolution du profil d'une caténoïde et les limites de sa stabilité. Dans le même esprit, nous pouvons modifier la distance entre deux plaques parallèles et observer les variations géométriques de l'onduloïde. Nous pouvons mesurer la variation de son rayon au niveau des surfaces mais également les variations de son profil. A partir d'une certaine distance, l'onduloïde devient instable et s'effondre pour former deux bulles interfaciales, une sur chacune des surfaces, qui sont de tailles différentes. Une autre expérience consisterait à observer le déplacement d'un tel objet créé en imposant un angle entre deux surfaces solides dans le même esprit que l'expérience de la référence [21] discutée dans le chapitre 4. Des études préliminaires ont montré que l'onduloïde se déplace spontanément vers l'apex de l'angle formé entre les deux plaques.

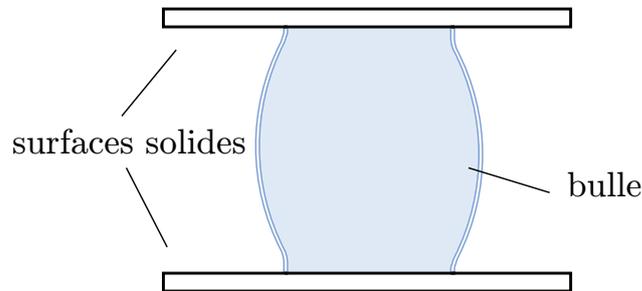


FIGURE 4.22: Schéma représentant la vue en coupe d'une bulle prenant la forme d'un onduloïde lorsqu'elle est pressée entre deux surfaces solides. Une forme similaire est observée si la surface inférieure est la surface libre d'un bain liquide.

---

Une autre étude s'inscrivant dans la continuité des investigations de vidanges de bulles et de mouvements de films dans des entonnoirs concerne le mouvement spontané d'un film liquide dans un cône tronqué, c'est-à-dire les entonnoirs présentés dans le chapitre 4 auxquels nous aurions coupé le long tube. Nos premières observations montrent qu'un régime de déplacement quasi-statique peut être obtenu comme dans le cas de la vidange et du mouvement spontané de films. Il apparaît également un second régime similaire à celui vu dans l'étude de la vidange dans lequel nous devons prendre en compte la dissipation visqueuse. Cette étude pourrait être vue comme le cas général d'une vidange de bulle. En effet, si nous considérons le demi-angle d'ouverture  $\alpha$  du cône comme défini dans le chapitre 4, la vidange d'une bulle (Chap. 2) serait un cas spécifique où  $\alpha = \pi/2$ .

# Annexe : Articles réalisés au cours de la thèse

Cette annexe contient les trois articles rédigés pendant cette thèse.

Le premier article publié en 2017 dans « *Physical Review Fluids* » concerne les travaux que nous avons réalisés sur la formation de bulles par l'impact, à vitesse constante, d'un film sur la surface libre d'un bain liquide. Cette publication correspond au chapitre 2 de la thèse.

Le second article est en cours de publication dans un volume du journal « *American Journal of Physics* » en 2020. Le sujet de cette publication concerne l'étude de la vidange d'une bulle interfaciale qui est en lien avec le chapitre 3.

Le dernier article, soumis en 2020, traite du déplacement spontané d'un film liquide dans un entonnoir correspond au chapitre 4.

## Interfacial bubbles formed by plunging thin liquid films in a pool

Louis Salkin,<sup>1</sup> Alexandre Schmit,<sup>1,2</sup> Richard David,<sup>1</sup> Alexandre Delvert,<sup>1</sup> Eric Gicquel,<sup>1</sup>  
Pascal Panizza,<sup>1</sup> and Laurent Courbin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*IPR, UMR CNRS 6251, Campus Beaulieu, Université de Rennes 1, 35042 Rennes, France*

<sup>2</sup>*NANO, UR1268, BIA, INRA, rue de la Géraudière, 44316 Nantes, France*

(Received 17 November 2016; published 20 June 2017)

We show that the immersion of a horizontally suspended thin film of liquid in a pool of the same fluid creates an interfacial bubble, that is, a bubble at the liquid-air interface. Varying the fluid properties, the film's size, and its immersion velocity, our experiments unveil two formation regimes characterized by either a visco-capillary or an inertio-capillary mechanism that controls the size of a produced bubble. To rationalize these results, we compare the pressure exerted by the air flow under a plunging film with the Laplace pressure needed to generate film dimpling, which subsequently yields air entrapment and the production of a bubble. This physical model explains the power-law variations of the bubble size with the governing dimensionless number for each regime.

DOI: [10.1103/PhysRevFluids.2.063604](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.2.063604)

### I. INTRODUCTION

Air entrapment is a commonly observed phenomenon in free surface flows [1]. It occurs in both natural phenomena such as falling raindrops [2,3] and industrial processes, e.g., coating, ink-jet printing, and spray cooling. The creation of air bubbles is generally detrimental to such processes and their applications in industry. For instance, it often changes for the worse both optical and mechanical properties of final products such as paint or molten glass. For these reasons, air entrapment is an active research topic that has been investigated for a wide variety of flow configurations. Examples of these include drops impacting smooth [4–13] or rough [14–16] solids and liquid surfaces [17–24], solid objects plunged into a pool [25–28], liquid jets either poured into fluids [29–31] or impacting solid surfaces [32], and collapsing interfacial bubbles [33,34]. For all these situations, studies share the common goal of identifying the key variables at play, obtaining a physical understanding of the problem, and predicting the formation of bubbles and their size.

Here we study an uninvestigated situation where the impact at constant velocity of an horizontal thin film of liquid with a pool of the same fluid produces film dimpling, air entrapment, and an interfacial bubble. Our experiments show that the size of such a bubble increases with both the impact velocity and size of a plunging film; by contrast, it does not depend on a film's thickness. Varying the impact speed, we observe two possible formation regimes. The bubble size results from either a visco-capillary (small enough speed) or an inertio-capillary (sufficiently large speed) mechanism. The regime at low speeds bears analogies with drop impact on solids [12]. In contrast with this case, however, the evolution of the bubble size with the speed is monotonic for plunging films, and we do not observe a maximum bubble size for an intermediate impact speed [12].

### II. EXPERIMENTS

#### A. Setup, materials, and methods

As depicted in Fig. 1(a), our setup consists of a thin-liquid film suspended horizontally on a ring (radius  $R$ ) mounted on a vertical linear motor stage (Aerotech ACT115DL) that is connected to a controller (Aerotech Soloist HPE). A ring is made of wire with a radius  $b = 500 \mu\text{m}$  that is negligible compared to  $R = 10\text{--}80 \text{ mm}$ . House-made Labview software controls the motion of

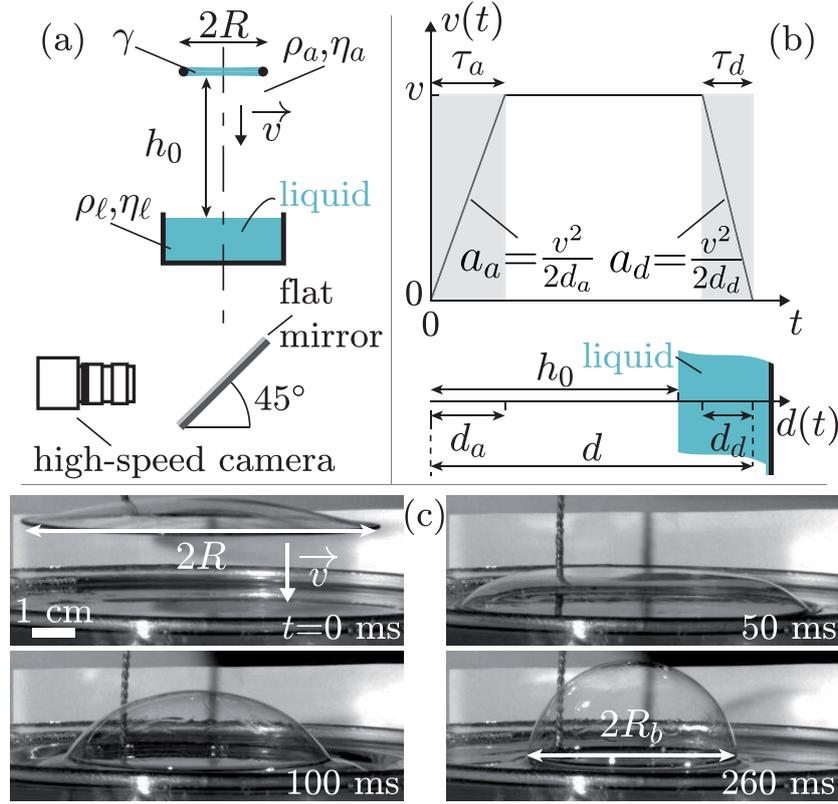


FIG. 1. Schematics of (a) the setup and (b) the temporal evolution of the impact speed defining the experimental variables. The shaded areas in (b) indicate acceleration and deceleration phases. (c) Side-view images illustrating the creation of a bubble for  $v = 0.4 \text{ m s}^{-1}$ ,  $R = 41 \text{ mm}$ , and  $h_0 = 95 \text{ mm}$ .

a ring upwards or downwards at constant speed  $v = 10^{-3} - 1 \text{ m s}^{-1}$  over a distance  $d \leq 0.5 \text{ m}$ . Imposing a constant speed to a stationary ring or stopping a moving one requires acceleration and deceleration phases, respectively. We impose a constant acceleration ( $0 - 50 \text{ m s}^{-2}$ ) during these two phases by selecting the distances  $d_a$  and  $d_d$  over which the ring accelerates and decelerates, respectively; the corresponding absolute values of the accelerations are  $a_a = \frac{v^2}{2d_a}$  and  $a_d = \frac{v^2}{2d_d}$  [see Fig. 1(b)].

In our experiments, a ring, which is first immersed in the liquid bath, is withdrawn quasistatically at a height  $h_0$  from the free surface. As discussed in Ref. [35], because of surface tension, withdrawing the ring creates a minimal surface of revolution, i.e., a catenoid. Above a critical height  $h_c \approx 0.66R < h_0$ , this shape becomes unstable and collapses to leave a planar film on the ring and an interfacial bubble on the bath [36]. This bubble is then punctured with a needle to remove it from the free surface. We measure the thickness ( $e = 1 - 10 \text{ }\mu\text{m}$ ) of the planar film with a spectrometer (Avantes AvaSpec-2048). This film is then moved downward so that it impacts the free surface at constant velocity  $v$  (see Fig. 1). A certain amount of air (density  $\rho_a$  and dynamic viscosity  $\eta_a$ ) is trapped between film and liquid surface upon impact, creating an interfacial bubble of radius  $R_b$ , as illustrated by the series of high-speed images in Fig. 1(c).

The liquid is either a soap solution [2 wt% Fairy (P&G) and 98 wt% water] or polydimethylsiloxane (PDMS) (Sylgard 184, Dow Corning). Both fluids are Newtonian and their dynamic viscosities  $\eta_\ell$  measured at  $20^\circ \text{C}$  with an Anton Paar MCR 301 rheometer are  $1 \text{ mPa s}$  (soap solution) and  $6.4 \text{ Pa s}$  (PDMS).  $\rho_\ell$  herein denotes the liquid density:  $\rho_\ell = 965 \text{ kg m}^{-3}$  (PDMS) and  $\rho_\ell = 1000 \text{ kg m}^{-3}$  (soap solution). We use pendant drop tensiometry (Teclis Tracker) to determine the liquid-air surface tension  $\gamma$ . We find  $25 \text{ mN m}^{-1}$  (soap solution) and  $20 \text{ mN m}^{-1}$  (PDMS). To measure a bubble's radius, we record its formation from below with a high-speed camera (Photron SA3) working at  $250 - 2000 \text{ frames s}^{-1}$ .

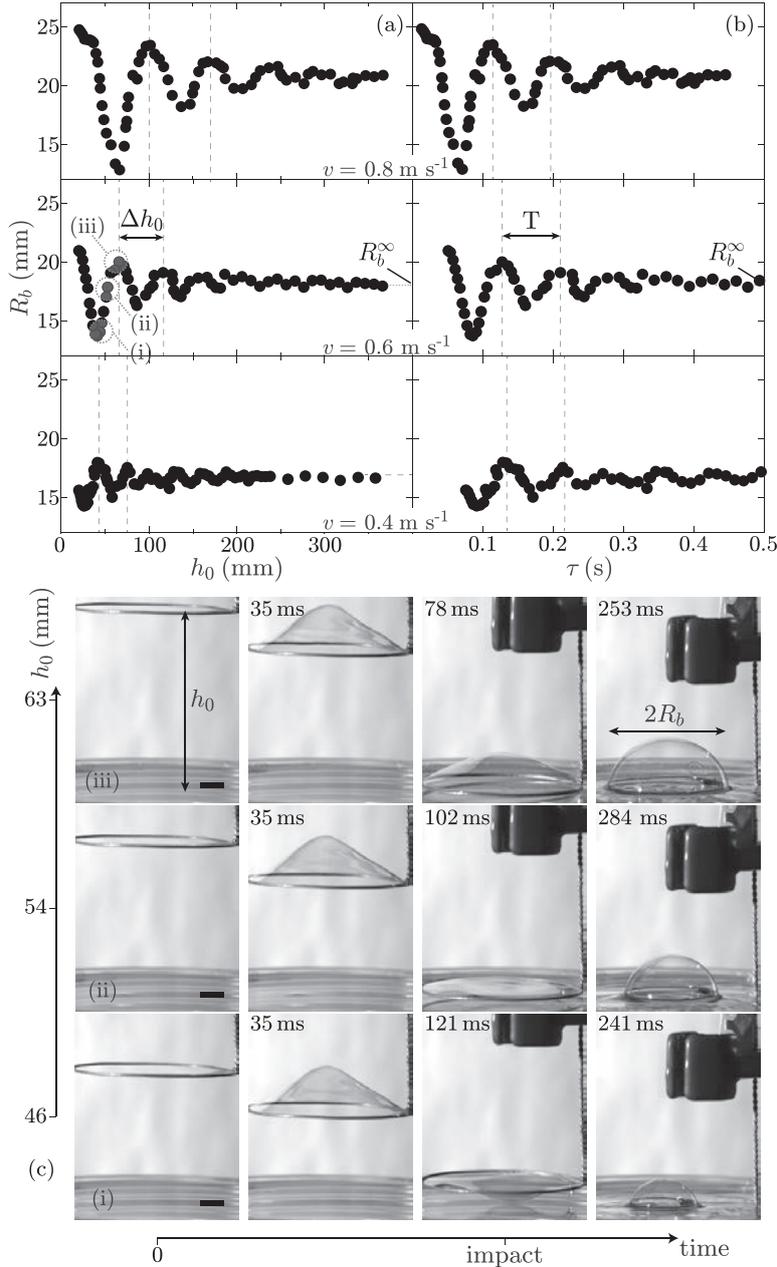


FIG. 2. Radius of the interfacial bubble  $R_b$  vs (a) height  $h_0$  and (b)  $\tau = \frac{h_0 - d_a}{v}$  for a ring of radius  $R = 31 \text{ mm}$  and three impact speeds  $v$  as indicated. Other parameters are  $d_a = 10 \text{ mm}$  and  $d_d = 8 \text{ mm}$  so that the acceleration  $a_a$  is (top graph)  $32 \text{ m s}^{-2}$ , (middle graph)  $16 \text{ m s}^{-2}$ , and (bottom graph)  $8 \text{ m s}^{-2}$ . (c) Series of photographs illustrating the influence of the position at impact of an oscillating film on the size of a produced bubble in the case of  $v = 0.6 \text{ m s}^{-1}$  in Fig. 1(a) for three different heights  $h_0$  as indicated [(i)–(ii)]. Scale bar: 1 cm. The liquid is the soap solution.

### B. Oscillations at small heights

We begin by studying the variations of  $R_b$  with the initial height  $h_0$  for different impact speeds, all other variables remaining constant (Fig. 1 defines the variables at play). We select values of  $d$ ,  $d_a$ , and  $d_d$  that satisfy the three conditions  $d > h_0$ ,  $d_a < h_0$ , and  $d_d < d - h_0$  so that  $v$  is constant when the ring impacts the liquid pool [see Fig. 1(b)];  $d_d$  is smaller than the depth of the pool.

When  $v$  is large enough, i.e., larger than about  $0.2 \text{ m s}^{-1}$  for a medium ring size, the evolution of  $R_b$  with  $h_0$  is characterized by damped oscillations for any speed [see Fig. 2(a)].  $R_b^\infty$  and  $\Delta h_0$  denote,

respectively, the constant bubble radius found within the limit  $h_0 \rightarrow \infty$  and the distance between two consecutive maxima in the signal  $R_b$  versus  $h_0$ . Both quantities increase with  $v$  [Fig. 2(a)]. The amplitude of the observed oscillations, i.e., the size of a produced bubble for small  $h_0$ , is in fact a function of the applied acceleration  $a_a$  (see Fig. S3 and related discussion in Ref. [37]).

Side-view videos of plunging films under conditions similar to those of Fig. 2 help to understand the oscillatory signal  $R_b$  versus  $h_0$ . For both PDMS and the soap solution, they indeed reveal that a film oscillates vertically as it moves towards the pool (see Ref. [37] for Movie S1 and a brief discussion of the oscillations of a film). In what follows, we discuss the forces acting on a film in the noninertial reference frame of the ring that is accelerated with regard to that of the laboratory. In this reference frame, during the acceleration phase, a fictitious force deflects the film upward from its horizontal equilibrium position, surface tension being a resisting force that opposes this deflection. Air friction also acts on the film, and the combination of the three forces give the shape of the film. The fictitious force vanishes when the ring reaches a stationary velocity. No longer at equilibrium, the film then relaxes to a new steady state position. This surface-tension driven relaxation induces air friction on the film, which causes the damped oscillatory variations of  $R_b$  with  $h_0$ . When a ring impacts the pool, the volume of entrapped air is maximal (resp. minimal) when the film presents a maximal deflection above (resp. below) the ring. Figure 2(c) shows a series of photographs that illustrate how the position at impact of an oscillating film influences the size of a produced bubble. To validate the above scenario, we plot in Fig. 2(b) the evolution of  $R_b$  with the time  $\tau = \frac{h_0 - d_a}{v}$  elapsed between the end of the acceleration phase and the contact between ring and pool. As indicated by the dashed vertical lines in Fig. 2(b), the distance between two consecutive maxima corresponds to the constant period of oscillations  $T$ , which we manually measure using the first two maxima, which are easier to define than those found at higher heights. The period  $T$  of the damped oscillations, which does not depend on  $v_c < v < 1 \text{ m s}^{-1}$ , is an intrinsic parameter of the soap film. We show in Ref. [37] that this time corresponds to the first antisymmetric mode of oscillation of a film [38,39].

### C. Bubble size in the high height regime

Hereafter  $h_0$  is large enough so that nonoscillating films impact the pool and  $R_b^\infty$  is independent of both  $h_0$  and  $a_a$  (see Fig. S3 in Ref. [37]). The variations of  $R_b^\infty$  with  $v$  for both fluid systems unveil two formation regimes, each characterized by a power-law response (see Fig. 3). As mentioned earlier, in contrast with drop impact on solids [12],  $R_b^\infty$  is increasing monotonically with  $v$ . The exponent of the power law above a threshold speed  $v_c$  is larger than at small  $v$ . In addition, the results shown in Fig. 3 suggest that these exponents are independent of both  $R$  and the nature of the fluid and that  $v_c$  decreases with  $R$ . Also, the curves shown in Fig. 3 tend to flatten out for the largest speeds when  $R_b^\infty$  gets close to  $R$ .

## III. DISCUSSION AND MODEL

Understanding our findings requires to identify the variables controlling the response. As indicated above, the power laws seem to be independent of the liquid properties [40], i.e.,  $\rho_\ell$  and  $\eta_\ell$ . By contrast, to account for film dimpling, we expect the surface tension  $\gamma$  to be a controlling variable. Hence,  $R_b^\infty$  should depend on  $v$ ,  $R$ ,  $\gamma$ ,  $\rho_a$ , and  $\eta_a$ . One could speculate that the film thickness  $e$  also plays a role in the formation of bubbles. To characterize the influence of  $e$ , we have performed experiments with plunging films prepared by withdrawing a ring at different speeds. Because of Frankel's law of film thickness, such films have different thicknesses, in the range  $e = 1\text{--}10 \mu\text{m}$  for our experiments. We have found that the impact of these films with the pool for a fixed speed  $v$  produces bubbles having the same radius in both regimes. One could also consider that gravity influences the formation of bubbles. However, in our experiments, gravity ( $\propto \pi R^2 e \rho_\ell g$ ) should dominate effects of surface tension ( $\propto 2\pi R \gamma$ ) when the films are sufficiently thick, that is,  $e > \frac{2\gamma}{\rho_\ell g R}$ . This estimate corresponds to films larger than about  $100 \mu\text{m}$ , which is an order of magnitude larger than the thicknesses of the films that we use. Hence, one can consider that surface tension dominates gravity for the whole study.

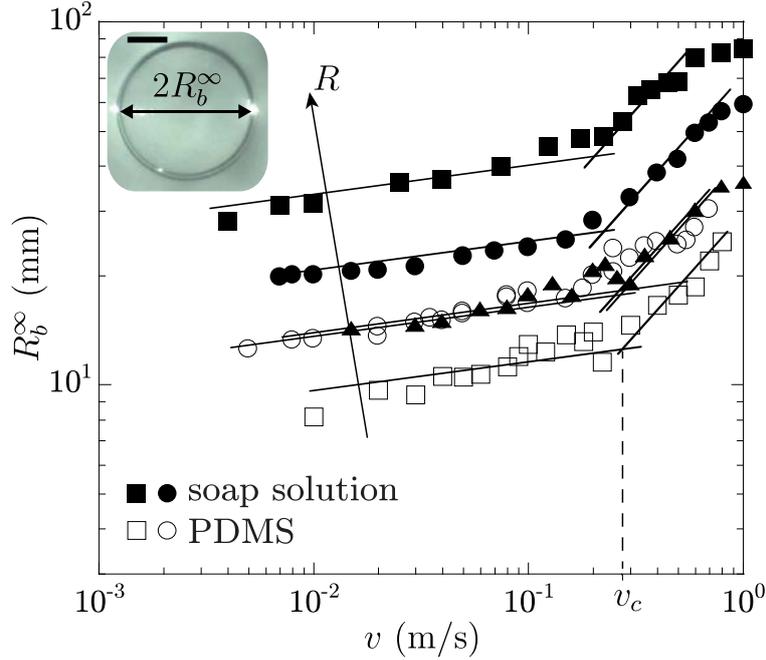


FIG. 3.  $R_b^\infty$  vs  $v$  for different radii  $R$ : 82 mm (■), 51 mm (●), 36 mm (▲), 35 mm (○), and 25 mm (□). Open and closed symbols stand for PDMS and the soap solution, respectively. For any liquid and value of  $R$ , one observes a power-law response with a small (resp. large) exponent when  $v < v_c$  (resp.  $v > v_c$ ) as indicated by the lines that are guides for the eyes. Inset: Bottom-view picture of an interfacial bubble defining the measured bubble radius  $R_b^\infty$ . Scale bar: 5 mm.

A rapid dimensional analysis then shows that  $R_b^\infty/R$  is a function of the capillary number  $\mathcal{C} = \eta_a v / \gamma$  and the Weber number  $We = \rho_a v^2 R / \gamma$ , two dimensionless quantities based on gas properties ( $\rho_a$  and  $\eta_a$ ) and incorporating surface tension. In other words, this analysis predicts that  $R_b^\infty/R$  varies as  $We^\alpha \mathcal{C}^\beta$  where  $\alpha$  and  $\beta$  are two numerical constants to determine. As demonstrated below, the formation of bubbles is in fact controlled by either a visco-capillary ( $\alpha = 0$ ) or an inertio-capillary ( $\beta = 0$ ) mechanism.

We expect the mechanism comparing gas inertia and surface tension to control the response when the Reynolds numbers  $Re = We/\mathcal{C}$  is large. This is the case for the regime seen at speeds above  $v_c$  in Fig. 3;  $Re \approx 1000$  for  $R = 50$  mm and  $v = 0.3$  m s<sup>-1</sup>. When  $v > v_c$ , the film in its reference frame encounters a uniform air flow of constant speed  $v$  that creates a dimple of mean curvature  $\kappa$  in it. Using Bernoulli's principle, this translates to  $\rho_a v^2 / 2 = 4\gamma\kappa$  so that  $\kappa^{-1} = 8R/We$ . We assume the dimple to be a spherical cap whose volume is that of the produced bubble. Then, using geometric considerations to write a first-order approximation of the function  $R_b^\infty/R$  around  $We = 0$ , one readily finds  $R_b^\infty/R \simeq \frac{3^{1/3}}{4} We^{1/3}$ ; in our experiments,  $We = 10^{-5}$ –3. Figure 4 shows that this physical model concurs well with experiments when  $v > v_c$  as it collapses data onto a single curve and the predicted prefactor  $\frac{3^{1/3}}{4} \approx 0.36$  is close to the experimental one ( $\approx 1$ ). Also shown in Fig. 4 and already mentioned when discussing the results reported in Fig. 3, when the Weber number is larger than about 1.33,  $R_b^\infty/R$  gets near to or larger than 1, the data flatten out, and our model written around  $We = 0$  fails to rationalize experiments.

When  $v < v_c$ , film dimpling originates from the viscous flow of the air squeezed under a film as a ring reaches the pool. One can model this radial flow with a lubrication approximation of the Stokes equation:

$$\frac{\partial p_a(r,t)}{\partial r} \sim \eta_a \frac{\partial^2 u_r(r,t)}{\partial z^2} \quad (1)$$

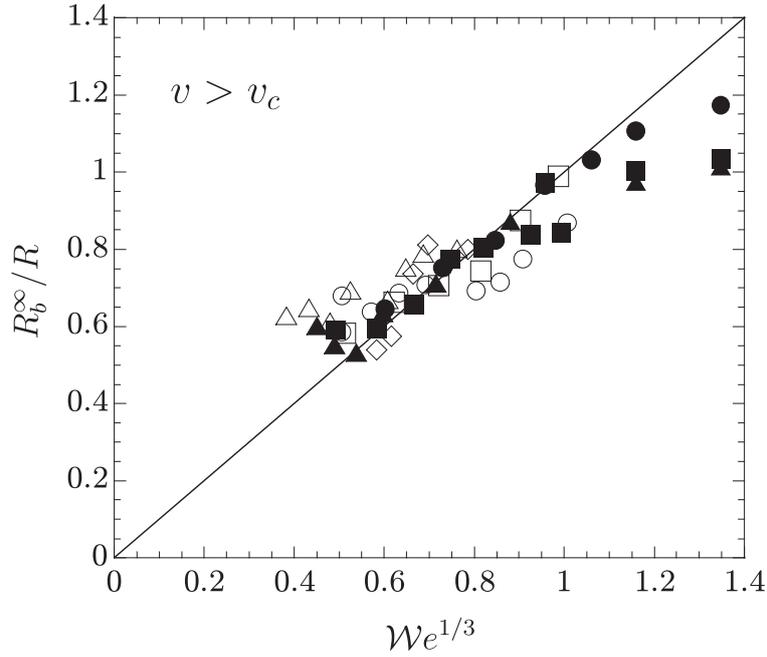


FIG. 4. Variations of  $R_b^\infty/R$  with  $We^{1/3}$  for different values of  $R$ : 36 mm ( $\blacktriangle$ ), 15 mm ( $\triangle$ ), and 10 mm ( $\diamond$ ) and as indicated in Fig. 3 ( $\bullet$ ,  $\blacksquare$ ,  $\circ$ ,  $\square$ ). Open and closed symbols correspond to experiments conducted with PDMS or the soap solution, respectively. The line is a guide for the eyes whose slope is 1.

where  $u_r$  is the radial component of the air velocity,  $z$  is the vertical direction, and  $p_a$  is the air pressure (see Fig. 5). The pressure difference across a dimpled film  $\Delta p_a$  is a function of the film mean curvature  $\kappa(r,t)$ :

$$\Delta p_a(r,t) = p_a(r,t) - p_0 = 4\gamma\kappa(r,t) \quad (2)$$

with  $p_0$  the atmospheric pressure.  $\kappa(r,t)$  and the film's profile  $\varepsilon(r,t)$  (see Fig. 5) are related by the geometry:

$$2\kappa(r,t) = \left\{ 1 + \left[ \frac{\partial \varepsilon(r,t)}{\partial r} \right]^2 \right\}^{\frac{-3}{2}} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon(r,t)}{\partial r^2} + \frac{\frac{\partial \varepsilon(r,t)}{\partial r} \{ 1 + [\frac{\partial \varepsilon(r,t)}{\partial r}]^2 \}}{r} \right). \quad (3)$$

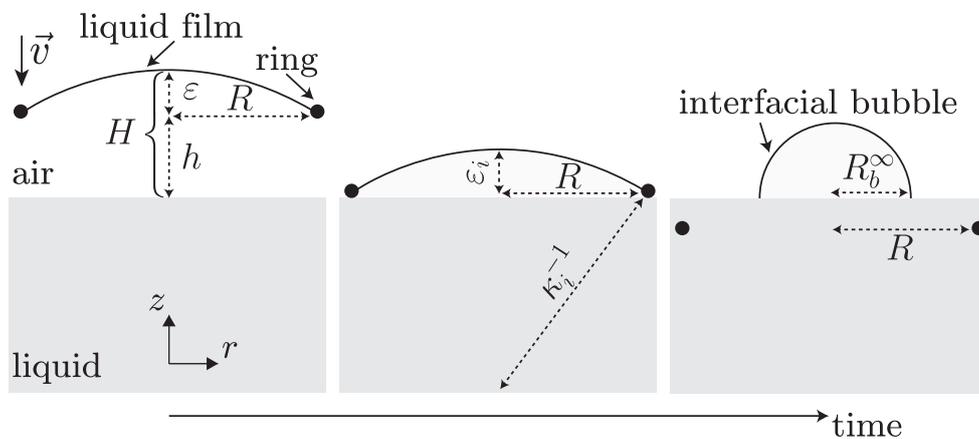


FIG. 5. Schematic (not to scale) of film dimpling as a ring reaches the pool surface. Defined are the geometric variables.

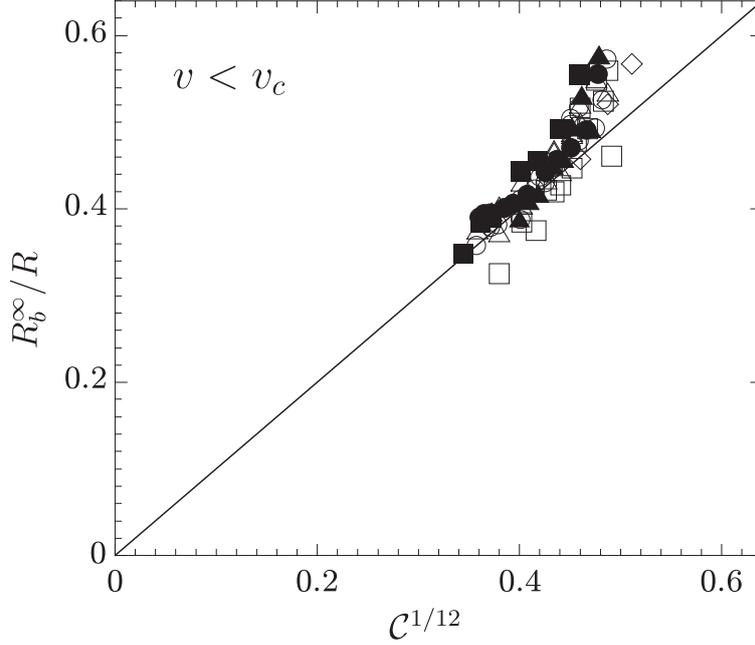


FIG. 6. Shown is  $R_b^\infty/R$  vs  $C^{1/12}$ . Symbols are identical to those of Fig. 4. The line with slope 1 is a guide for the eyes.

The lubrication equation describing the gas flow underneath the film closes the problem:

$$\frac{\partial H(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r H(r,t)^3}{12\eta_a} \frac{\partial p_a(r,t)}{\partial r} \right], \quad (4)$$

where  $H(r,t) = h(t) + \varepsilon(r,t)$  is small compared to the other flow direction, i.e.,  $H(r,t) \ll R$ ,  $h(t)$  being the distance between ring and pool at time  $t$  (see Fig. 5).

Using these basic elements modeling the flow, we now rationalize our findings for  $v < v_c$  at the level of scaling. An order-of-magnitude analysis of Eq. (1) and mass conservation give  $\Delta p_a \sim \eta_a \frac{R u_r}{H^2}$  and  $u_r \sim \frac{vR}{H}$ , respectively. Hence,  $\Delta p_a \sim \eta_a \frac{vR^2}{H^3}$ . Assuming the dimple to be a spherical cap of radius  $\kappa_i^{-1}$  when the ring meets the pool, i.e., when  $h = 0$ , the maximum deflection of the film at impact  $\varepsilon_i \ll R$  can be written  $\varepsilon_i \sim R^2 \kappa_i$  (see Fig. 5). The increase of pressure in the gas layer under the film yields film dimpling, whereas capillary forces tend to maintain the film flat. This translates to a balance between pressure in the gas and Laplace pressure, which provides  $\varepsilon_i \sim RC^{1/4}$ ; as in our experiments  $C^{1/4} \approx 0.03\text{--}0.18$ , our approximation  $\varepsilon_i \ll R$  is reasonable. From volume conservation between the spherical cap and the created bubble,  $\varepsilon_i R^2 \sim R_b^\infty{}^3$ , we then obtain a prediction for the variations of the normalized bubble size  $R_b^\infty/R \sim C^{1/12}$ . As shown in Fig. 6, these physical arguments allow us to understand our results when  $v < v_c$  as this prediction concurs with experimental data.

Equating the two expressions found for  $\frac{R_b^\infty}{R}$  in the two formation regimes, one derives the threshold speed:

$$v_c \sim \left( \frac{\eta_a \gamma^3}{\rho_a^4 R^4} \right)^{1/7}, \quad (5)$$

which mirrors the measured one (see Fig. 7). Besides the nature of the fluid density in Eq. (5), it may be noted that the expression of  $v_c$  is similar to that of the speed at which a bubble size is maximum for drop impact on solids [12]. Also, nondimensionalization of Eq. (5) gives the transition between regimes in terms of dimensionless quantities: the creation of a bubble is controlled by the inertio-capillary mechanism when  $(We^4/C)^{1/7} > 1$  or the visco-capillary mechanism otherwise.

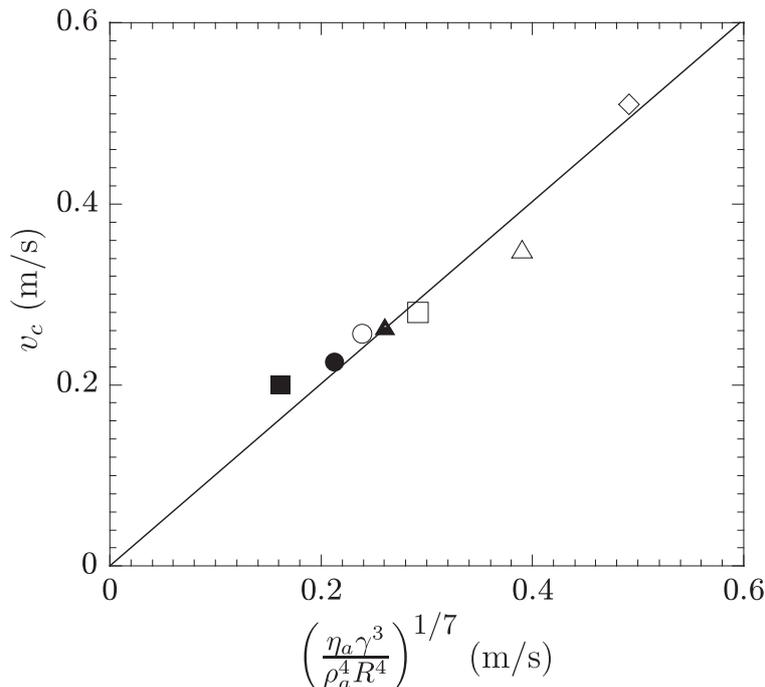


FIG. 7. Comparison between measured and predicted [Eq. (5)] threshold  $v_c$ . Symbols are identical to those of Fig. 4. The line is the best linear fit with  $y$  intercept 0 and slope 1.005.

#### IV. CONCLUSION

We conclude with three remarks. First, within the limit  $v \rightarrow 0$ , we expect the formation of a bubble to be solely controlled by geometric variables. Within this quasistatic limit, a film should indeed remain flat enough for the volume of entrapped air to be that of a cylinder having height  $b/2$  and radius  $R$ . We then anticipate that  $R_b^\infty/R \sim (\frac{3b}{4R})^{\frac{1}{3}}$ ; in our experiments, this quasistatic limit bubble radius is in the  $R_b^\infty = 3.3\text{--}13.4$  mm range. Unfortunately, validating this simple prediction is a difficult task since slight variations in the horizontalness of the ring at very small speeds cause large variations of the measured bubble size. Second, for speeds larger than  $\sqrt{\frac{8\gamma}{\rho_a R}}$  ( $1.3\text{--}4$  m s $^{-1}$  in our experiments), the air dynamic pressure  $\frac{\rho_a v^2}{2}$  overcomes the Laplace pressure  $4\gamma R^{-1}$  required to transform the liquid film into a bubble of radius  $R$  [41–43], bubbles should therefore form. We have not observed this regime because of the limited maximum speed (1 m s $^{-1}$ ) imposed by our motor stage. Last, one might suppose that a bubble could form before a ring reaches a stationary velocity, i.e., during the acceleration phase. This would occur when the dynamic pressure  $\frac{\rho_\ell v^2}{2} \frac{e}{d_a}$  caused by the fictitious force acting on an accelerating film overcomes the threshold in capillary pressure  $4\gamma R^{-1}$ . Hence, bubbles should be produced during the acceleration phase for speeds larger than  $\sqrt{\frac{8\gamma}{\rho_a R} \sqrt{\frac{\rho_a d_a}{\rho_\ell e}}}$ ; interestingly, in contrast with bubbles formed by blowing on soap films [42,43], it is worth noting that this threshold speed for making bubbles is a function of the film thickness. Since in our experiments this threshold speed is in the range  $1.3\text{--}12$  m s $^{-1}$ , we have not observed the creation of bubbles during the acceleration phase either. To validate the predicted thresholds at high speeds, measurements should be conducted for speeds larger than the maximum speed of our motor, which would require developing a new experimental setup. Designing such a setup would be a challenging task since it should offer the same specifications as our vertical linear motor stage (precise control of the speed of a moving frame, the acceleration needed to reach this velocity, and the deceleration required to stop the moving frame) so that previous data can be compared to new ones.

## ACKNOWLEDGMENT

We thank A. Saint-Jalmes for helping us with viscosity and surface tension measurements and J. H. Snoeijer for fruitful discussions.

- 
- [1] A. L. Yarin, Drop impact dynamics: Splashing, spreading, receding, bouncing. . . , *Annu. Rev. Fluid Mech.* **38**, 159 (2006).
  - [2] D. C. Blanchard and A. H. Woodcock, Bubble formation and modification in the sea and its meteorological significance, *Tellus* **9**, 145 (1957).
  - [3] A. Prosperetti, L. A. Crum, and H. C. Pumphrey, The underwater noise of rain, *J. Geophys. Res.* **94**, 3255 (1989).
  - [4] S. Chandra and C. T. Avedisian, On the collision of a droplet with a solid surface, *Proc. R. Soc. Lond. A* **432**, 13 (1991).
  - [5] M. Rein, Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces, *Fluid Dyn. Res.* **12**, 61 (1993).
  - [6] S. T. Thoroddsen, T. G. Etoh, K. Takehara, N. Ootsuka, and Y. Hatsuki, The air bubble entrapped under a drop impacting on a solid surface, *J. Fluid Mech.* **545**, 203 (2005).
  - [7] P. D. Hicks and R. Purvis, Air cushioning and bubble entrapment in three-dimensional droplet impacts, *J. Fluid Mech.* **649**, 135 (2010).
  - [8] S. Mandre, M. Mani, and M. P. Brenner, Precursors to Splashing of Liquid Droplets on a Solid Surface, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 134502 (2009).
  - [9] M. M. Driscoll and S. R. Nagel, Ultrafast Interference Imaging of Air in Splashing Dynamics, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 154502 (2011).
  - [10] J. M. Kolinski, S. M. Rubinstein, S. Mandre, M. P. Brenner, D. A. Weitz, and L. Mahadevan, Skating on a Film of Air: Drops Impacting on a Surface, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 074503 (2012).
  - [11] S. Mandre and M. P. Brenner, The mechanism of a splash on a dry solid surface, *J. Fluid Mech.* **690**, 148 (2012).
  - [12] W. Bouwhuis, R. C. A van der Veen, T. Tran, D. L. Keij, K. G. Winkels, I. R. Peters, D. Van der Meer, C. Sun, J. H. Snoeijer, and D. Lohse, Maximal Air Bubble Entrainment at Liquid-Drop Impact, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 264501 (2012).
  - [13] R. C. A. van der Veen, T. Tran, D. Lohse, and C. Sun, Direct measurements of air layer profiles under impacting droplets using high-speed color interferometry, *Phys. Rev. E* **85**, 026315 (2012).
  - [14] L. Courbin, J. C. Bird, M. Reyssat, and H. A. Stone, Dynamics of wetting: From inertial spreading to viscous imbibition, *J. Phys.: Condens. Matter* **21**, 464127 (2009).
  - [15] P. Tsai, R. C. A. van der Veen, M. van de Raa, and D. Lohse, How micropatterns and air pressure affect splashing on surfaces, *Langmuir* **26**, 16090 (2010).
  - [16] R. C. A. van der Veen, M. H. W. Hendrix, T. Tran, P. A. Tsai, and D. Lohse, How microstructures affect air film dynamics prior to drop impact, *Soft Matter* **10**, 3703 (2014).
  - [17] L. Esmailzadeh and R. Mesler, Bubble entrainment with drops, *J. Colloid Interface Sci.* **110**, 561 (1986).
  - [18] H. N. Oguz and A. Prosperetti, Bubble entrainment by the impact of drops on liquid surfaces, *J. Fluid Mech.* **219**, 143 (1990).
  - [19] S. T. Thoroddsen, T. G. Etoh, and K. Takehara, Air entrapment under an impacting drop, *J. Fluid Mech.* **478**, 125 (2003).
  - [20] M. M. Driscoll, C. S. Stevens, and S. R. Nagel, Thin film formation during splashing of viscous liquids, *Phys. Rev. E* **82**, 036302 (2010).
  - [21] Q. Deng, A. V. Anilkumar, and T. G. Wang, The role of viscosity and surface tension in bubble entrapment during drop impact onto a deep liquid pool, *J. Fluid Mech.* **578**, 119 (2010).
  - [22] M.-J. Thoraval and S. T. Thoroddsen, Contraction of an air disk caught between two different liquids, *Phys. Rev. E* **88**, 061001(R) (2013).

- [23] D. L. Keij, K. G. Winkels, H. Castelijns, M. Riepen, and J. H. Snoeijer, Bubble formation during the collision of a sessile drop with a meniscus, *Phys. Fluids* **25**, 082005 (2013).
- [24] T. Tran, H. de Maleprade, C. Sun, and D. Lohse, Air entrainment during impact of droplets on liquid surfaces, *J. Fluid Mech.* **726**, R3 (2013).
- [25] R. Bergmann, D. van der Meer, S. Gekle, A. van der Bos, and D. Lohse, Controlled impact of a disk on a water surface: Cavity dynamics, *J. Fluid Mech.* **633**, 381 (2009).
- [26] J. O. Marston, I. U. Vakarelski, and S. T. Thoroddsen, Bubble entrapment during sphere impact onto quiescent liquid surfaces, *J. Fluid Mech.* **680**, 660 (2011).
- [27] A. Marchand, T. S. Chan, J. H. Snoeijer, and B. Andreotti, Air Entrainment by Contact Lines of a Solid Plate Plunged into a Viscous Fluid, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 204501 (2012).
- [28] P. D. Hicks, E. V. Ermanyuk, N. V. Gavrilov, and R. Purvis, Air trapping at impact of a rigid sphere onto a liquid, *J. Fluid Mech.* **695**, 310 (2012).
- [29] Y. Zhu, H. N. Oguz, and A. Prosperetti, On the mechanism of air entrainment by liquid jets at a free surface, *J. Fluid Mech.* **404**, 151 (2000).
- [30] J. Eggers, Air Entrainment Through Free-Surface Cusps, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4290 (2001).
- [31] E. Lorenceau, D. Quéré, and J. Eggers, Air Entrainment by a Viscous Jet Plunging into a Bath, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 254501 (2004).
- [32] B. Pouligny and M. Chassande-Mottin, Air Ingestion by a Buckled Viscous Jet of Silicone Oil Impacting the Free Surface of the Same Liquid, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 154501 (2008).
- [33] An interfacial bubble is a bubble at a liquid-air or solid-air interface.
- [34] J. C. Bird, R. de Ruitter, L. Courbin, and H. A. Stone, Daughter bubble cascades produced by folding of ruptured thin films, *Nature (London)* **465**, 759 (2010).
- [35] L. Salkin, A. Schmit, P. Panizza, and L. Courbin, Influence of boundary conditions on the existence and stability of minimal surfaces of revolution made of soap films, *Am. J. Phys.* **82**, 839 (2014).
- [36] L. Salkin, A. Schmit, P. Panizza, and L. Courbin (unpublished).
- [37] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevFluids.2.063604> for a movie illustrating the generation of interfacial bubbles and the vertical oscillations of a film during its motion, a brief discussion about the oscillation of a film, the characteristic time of the damped oscillatory variations of the bubble size, and the effects of the initial acceleration  $a_a$  on the oscillations.
- [38] Y. Couder, J. M. Chomaz, and M. Rabaud, On the hydrodynamics of soap films, *Physica D* **37**, 384 (1989).
- [39] V. O. Afenchenko, A. B. Ezersky, S. V. Kiyashko, M. I. Rabinovich, and P. D. Weidman, The generation of two-dimensional vortices by transverse oscillation of a soap film, *Phys. Fluids* **10**, 390 (1998).
- [40] We have no conclusive evidence concerning the dependence on  $\rho_\ell$  as the two liquids used in our experiments have similar densities.
- [41] H. Bouasse, *Capillarité—Phénomènes superficiels* (Librairie Delagrave, Paris, 1924).
- [42] L. Salkin, A. Schmit, P. Panizza, and L. Courbin, Generating Soap Bubbles by Blowing on Soap Films, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 077801 (2016).
- [43] P. Panizza and L. Courbin, Bubble blowing by the numbers, *Phys. Today* **69**, 78 (2016).

# Different scenarios of shrinking surface soap bubbles

Mattéo Clerget,<sup>\*</sup> Alexandre Delvert,<sup>\*</sup> Laurent Courbin,<sup>†</sup> and Pascal Panizza<sup>‡</sup>  
*Univ Rennes, CNRS, IPR (Institut de Physique de Rennes) - UMR 6251, F-35000 Rennes, France*  
 (Received; Accepted)

We discuss a simple experiment investigating the shrinkage of surface soap bubbles sitting on a thin solid plate with a circular orifice located under the apex of the bubble. We identify three different shrinking regimes, the occurrence of which depends on a combination of key parameters that include the ratio between initial bubble and orifice sizes and physicochemical properties of the fluid system. For low-viscosity liquids and/or large ratios, a bubble remains quasi-hemispherical as shrinking proceeds. By contrast, for liquids with sufficiently large viscosities and/or small geometric ratios, a bubble seeks the shape of a spherical cap while the air inside it escapes through the orifice. In this case, shrinking proceeds with a bubble foot that either recedes over time or does not move for the largest viscosities and/or smallest ratios. We use basic physical arguments to rationalize the three identified regimes and to explain the shrinking dynamics. Specifically, this model which captures observations and measurements is based on Bernoulli's principle for the air flow, volume conservation and a friction law that accounts for viscous dissipation at the moving bubble foot.

## I. INTRODUCTION

The draining of a tank initially filled with a liquid is a common problem that impacts processes in many fields that include food and oil industries. It has been investigated starting from the pioneering work by Torricelli who established a well-known inviscid law for the fluid velocity<sup>1</sup> until a recent work that has revealed the importance of surface wettability on the speed of drainage.<sup>2</sup> Also, students are familiar with this problem which is useful in the classroom to introduce both the notion of free fall and the steady-state Bernoulli's principle. Here, we investigate a variant of the Torricelli's problem, that is, the case of air escaping a deformable tank by working with a soap bubble sitting on a solid substrate that has a circular orifice located under the apex of the bubble. Also, it is worthwhile noting that the experiment described in this article can be seen as a variant of a deflating bubble experiment<sup>3</sup> in which the bubble foot would be allowed to move. In a deflating bubble experiment, a hemispherical bubble formed at the end of a tube deflates with a pinned foot when the tube's other end is opened. Since a long and narrow tube used in this study, another difference between experiments resides in the air flow that satisfies Poiseuille's law<sup>3</sup> rather than the Bernoulli's principle.

Bubbles are important for a variety of reasons. For instance, centimeter-sized floating bubbles made by blowing air onto soap films are useful for entertainment and scientific purposes and they are excellent tools in the classroom that can aid the learning of physics. For these reasons, they have been studied for centuries<sup>4-6</sup> although their formation mechanism has been explained only recently.<sup>7,8</sup> Also, at smaller scales, bubbles with sizes in the  $\mu\text{m}$ -mm range are employed in diverse applications in fields that range from material science to medicine and biology.<sup>9</sup> In Nature, surface bubbles with sizes in the mm-cm range and sitting on a liquid-gas interface play a key role in processes occurring at the surface of oceans. These bubbles are indeed important for climate as their rupture can produce aerosol droplets that contribute to

the formation of sea spray.<sup>10-12</sup>

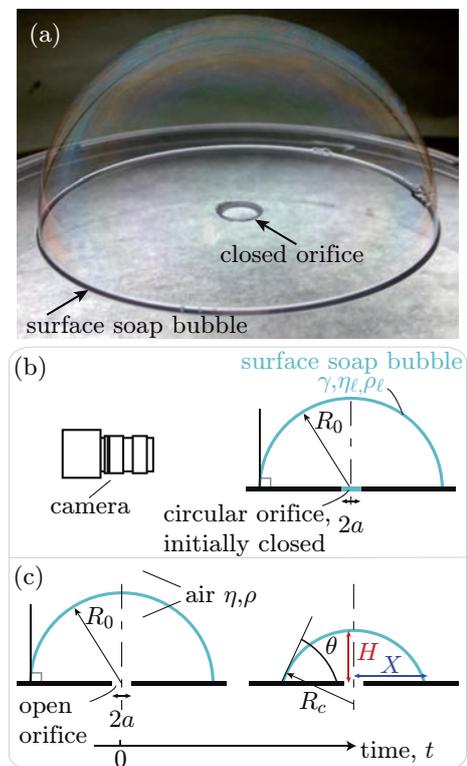


FIG. 1. (a) Photograph illustrating our experiment in which a surface soap bubble sits on a thin plate above an orifice that is initially closed; the 6 mm orifice diameter indicates the scale. Schematic of our (b) setup and (c) experiment defining the variables at play. (b) A bubble is blown on a surface over an orifice of radius  $a$  until it reaches a desired value of its radius  $R_0$ . This process forms a soap film that seals the orifice which is opened (c) at the origin of time  $t$  of an experiment and we record the temporal variations of the bubble's radius of curvature  $R_c$ , its height  $H$  at its center and the distance  $X$  describing the position of the bubble's foot.

Not surprisingly, the rupture of such surface bubbles

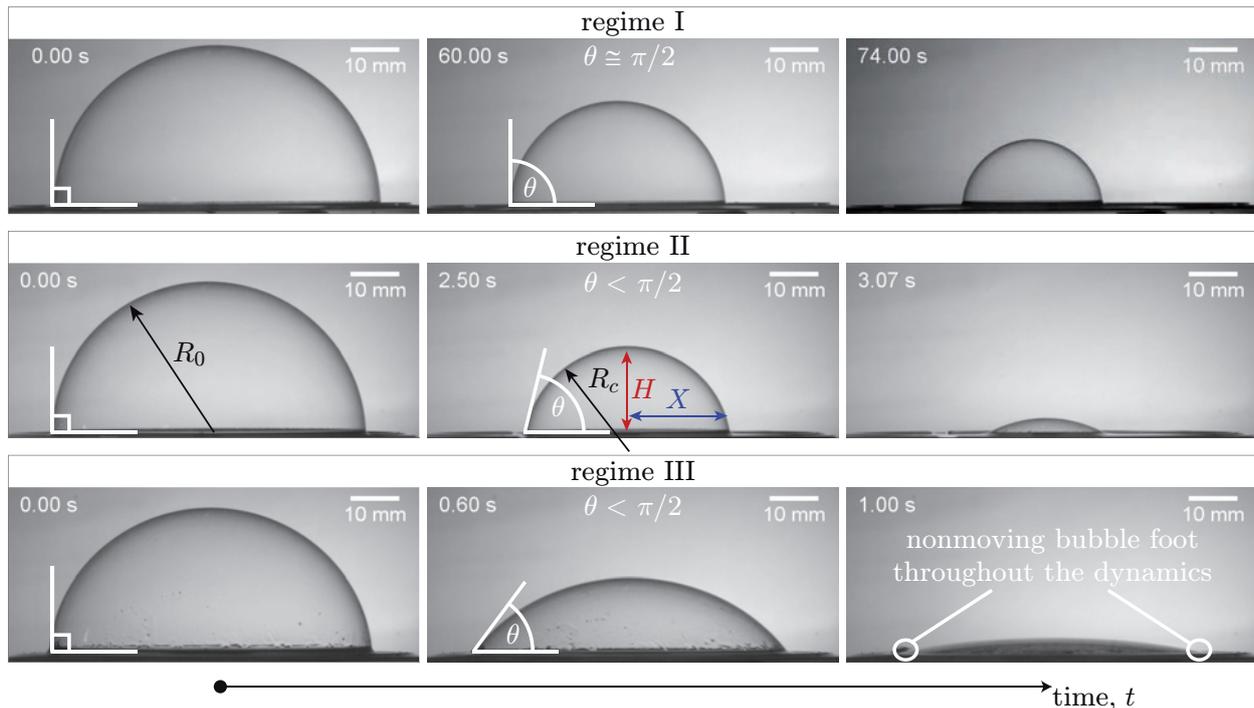


FIG. 2. Sequence of images illustrating from top to bottom the three regimes seen experimentally; these images are taken from the three movies provided as Supplementary Material.<sup>22</sup> Top row: A bubble remains hemispherical as shrinking occurs in regime I. Middle row: A bubble seeks the shape of a spherical cap when shrinking occurs in regime II. Bottom row: In regime III, a bubble collapses on itself with a distance  $X$  that remains unchanged throughout the dynamics. For these experiments, the initial radius of the bubble is fixed and equal to  $R_0 = 32 \pm 1$  mm. The values of the radius  $a$  of the orifice and liquid viscosity  $\eta_l$  are respectively : (top) 0.5 mm and 1 mPa s, (middle) 2 mm and 1 mPa s and (bottom) 5 mm and 22 mPa s.

and subsequent phenomena have been widely studied by the physics community for the past decade.<sup>13–15</sup> Also, centimeter-sized surface bubbles can serve as model systems for other types of flows seen in Nature. Indeed, the flow properties of isolated vortices that can appear on the surface of such bubbles bear analogies with those of hurricanes.<sup>17,18</sup> Here, we work with these surface bubbles which are not only important to understand natural processes but also easier to manipulate than those seen at smaller scales. For instance, we have recently elucidated the formation mechanism of centimeter-sized bubbles produced by plunging thin films of liquid in a pool.<sup>19</sup> In fact, the experiments described in this article do not require sophisticated equipment and they could be easily performed at low cost by students as a laboratory activity. Students would need a solution for blowing bubbles, a straw, a smartphone camera to record the dynamics, Petri dishes that could be used as thin plates and a drill with drill bits of different sizes. In addition, this experiment will give students an opportunity to learn about an intrinsic property of fluid-fluid interfaces, that is, surface tension. This fluid parameter is the interfacial energy required to increase the surface of an interface by one unit. At the curved liquid-air interfaces forming a bubble, surface tension can also be seen as a force per unit length which is at the origin of a pressure difference between the inside and the outside of a bubble. This overpressure

existing inside drops and bubbles is notoriously known as the Laplace pressure. In our study, because of these properties, a bubble empties itself into the atmosphere as the air inside it flows through the open orifice from the high pressure (inside the bubble) to the low pressure (outside the bubble).

In our experiments, three distinct shrinking regimes can be observed depending on the geometric and physicochemical variables at play (see Fig. 1 and Fig. 2 for a description of our experiment and illustrative examples of the different shrinking regimes). In the first two regimes, an initially hemispherical bubble either remains quasi-hemispherical or seeks the shape of a spherical cap as shrinkage proceeds with a bubble foot that recedes throughout the dynamics. In the third shrinking scenario, bubbles flatten over time with a nonmoving bubble foot. Combining Bernoulli's principle for the air flow, conservation of the air flow rate and friction acting on the bubble's foot, our modeling work concurs well with experiments.

## II. EXPERIMENTS

At first glance, these simple experiments seem appropriate for introductory physics laboratories. However, they require knowledge of fluid dynamics, dimensional

analysis and differential equations. Thus they should be more appropriate for upper-division students. The regime in which a bubble remains quasi-hemispherical during an experiment could be a good project for undergraduate physics students. Indeed, we show in this case that the shrinking dynamics is described by a first-order ordinary differential equation that can be solved analytically by making an assumption easily met experimentally. We find an excellent agreement between experimental data and the theoretical predictions determined for the temporal variations of the bubble size and time at which shrinking ends. This regime is easily observed with a large bubble ( $\gtrsim 30$  mm in diameter) shrinking on a plate having a small hole ( $\lesssim 1$  mm in diameter) with a soap solution consisting of a few drops of dishwashing detergent diluted in tap water. The slow dynamics observed in this regime could be recorded with a smartphone video camera. The time at which shrinking ends would then be obtained by a direct observation of a movie and the temporal variations of a bubble's size would be measured using a free image processing program such as Tracker<sup>20</sup> or ImageJ.<sup>21</sup>

The experiments and analysis described in the second part of the article (shrinking spherical caps) might be more appropriate for graduate students. Indeed, in this case, a force accounting for the friction acting on a bubble's foot during shrinkage is introduced in the modeling work so that the calculations get slightly more involved. The resulting ODE describing an experiment is then solved numerically. This would be a good computational exercise for graduate physics students. Also, in the case of shrinking spherical cap, the variations of three different primary outcomes (rather than one) can be measured, which makes a good image analysis program needed.

To summarize, the main purpose of our article is to report experimental findings and modeling work that could be used as a laboratory activity for both undergraduate or graduate physics major courses. The exact content of the activity would depend on the level of experience of the students. The physics teacher would have a choice between several activities discussed throughout this paper and summarized in the four-item list below. These items are sorted in ascending order of required level:

– *Observations:* Least experienced students could try to identify the three different regimes that can be observed with the naked eye. Using different liquids and surfaces with holes of various sizes they could be encouraged to guess which physicochemical properties of a liquid and geometric parameters of the problem control the occurrence of a regime.

– *Building an experimental setup:* After gathering the equipment needed to conduct experiments, i.e. a solution for blowing bubbles, a camera, a light source, thin plates with holes and a needle to puncture a film sealing an orifice, students could build an experimental setup that would allow them to record movies which can be analyzed using a free image processing software. They should pay

particular attention to the position of the camera and lighting conditions and they should make sure the plates are leveled. Students would then be able to visualize on a computer screen the regimes seen experimentally with the naked eye. Focusing on regime I, they could eventually try to analyze a movie with the aforementioned software to obtain the temporal variations of the geometric quantities characterizing a bubble.

– *Regime I, interpretation of the results and the importance of approximations in physics:* Based on their guess of the fluid and geometric key parameters at play (first item on this list), students should be given a chance, and time, to try to explain the physics behind their measurements in regime I. The physics teacher could guide students as they construct their understanding and he/she could introduce the model of the experiment after some time if needed. The students could then be asked to try to find an approximation (as explained in our article) that would make the determined first-order differential equation solvable analytically. Ultimately, they would then conduct several experiments within this limit and try to adjust the results with the analytical solution of the simpler form taken by the ODE.

– *Regime II and III, custom-written image processing and numerical simulations:* More experienced students could pursue the project with the experimental and theoretical investigations of regimes II and III. The script of our image processing program could help as a handout for the image processing.<sup>22</sup> The teacher would likely provide the students with the expression of the viscous force and students would then establish the differential equations driving the dynamics themselves and they could solve them numerically and compare the resulting predictions to their experimental results.

Figure 1 shows the experimental setup and defines the variables at play in our experiment. To prepare a surface bubble (Figure 1(a) shows a photograph of such a bubble), we first place a soap film at the end of a circular nozzle of diameter 1 cm by dipping the nozzle into one of the soap solutions described below. The soap film is then curved by injecting air at controlled pressure through the nozzle with a flow control system (Fluigent). The contact between the curved film and the plate creates a surface bubble which spreads over the substrate that is initially wetted with the same solution until a desired bubble radius  $R_0 = 10 - 35$  mm is reached. As a drilled plate, we use the bottom surface of a  $100 \times 20$  mm Petri dish (Falcon). Wetting the solid substrate with the soap solution produces a thin film of liquid having a homogeneous thickness in the range  $15 - 25 \mu\text{m}$  and a size that is made larger than the prepared bubble; film thicknesses are measured with a spectrometer (Avantes AvaSpec-2048) in our study. The prepared bubble which rests on a liquid film of the soap solution is hemispherical as it is at equilibrium with its surroundings, i.e., the soap film at the level of the bubble's foot is perpendicular to the horizontal wetted substrate.<sup>23,24</sup> A bubble is made of a soap solution consisting of 2 wt.% of dishwashing liq-

uid (Palmolive Original, Colgate-Palmolive) in 98 wt.% Milli-Q water to which an amount (either 0, or 40, or 70 wt.%) of glycerol (Sigma-Aldrich) is added. The liquid dynamic viscosity and density are  $\eta_\ell$  and  $\rho_\ell$ .  $\gamma$  is the air-liquid surface tension. Table I summarizes the values of  $\eta_\ell$  and  $\gamma$  for the three soap solutions containing different amount of glycerol. The air density and dynamic viscosity are  $\rho$  and  $\eta$ , respectively. The apex of the bubble is located over the center of the circular orifice of radius  $a = 0.5 - 6.5$  mm that is initially closed. Indeed, during the formation of a surface bubble, its spreading over the plate leaves a soap film on the orifice which seals it. In our experiments, an orifice is drilled in a thin plate whose thickness is negligible compared to the radius  $a$ . For fixed bubble and hole sizes and a given liquid, we find that experiments conducted with different bubble and film thicknesses give the same shrinking dynamics; the thickness of the film forming a bubble is in the range  $2 - 10 \mu\text{m}$  in our experiments. This point should further facilitate implementing the experiment as a project for students. In addition, we have verified that results obtained with bubbles blown by mouth were identical to those provided by our setup.

TABLE I. Dynamic viscosities and air-liquid surface tensions of the three soap solutions prepared with different amounts of glycerol as indicated. The quantities were measured at  $20^\circ \text{C}$ .

glycerol concentration (wt.%)	$\eta_\ell$ (m Pas)	$\gamma$ (m N/m)
0	1	25
40	4	25
70	22	30

A bubble begins to collapse, i.e., the air begins to escaped out of the bubble, when the orifice is opened (i.e., rapidly punctured with a needle) at the origin of time  $t$  and we record with a camera (Photron Fastcam SA3) the temporal evolution of the three main outcomes of the experiment: The maximal height  $H$  of a bubble measured between its apex and the center of the orifice, the bubble's radius of curvature  $R_c$  and the distance  $X$  describing the position of a bubble's foot (see Fig. 1 and Fig. 2 defining variables at play). Images of an experiment are analyzed using a custom-written MATLAB software; an annotated script of this software is provided as Supplementary Material.<sup>22</sup> In our study, the contact angle that the surface of the bubble makes with the substrate at the level of the bubble's foot is  $\theta$ . As illustrated in Fig. 2 for experiments conducted for a fixed initial bubble radius  $R_0 = 32 \pm 1$  mm, two of the three soap solutions and three holes of different radii, three different shrinkage scenarios described below can be observed.

For an experiment conducted with the liquid having the lowest viscosity and the smallest orifice of the studied set, i.e. the largest ratio between initial bubble and orifice sizes, a bubble remains quasi-hemispherical as shrinking proceeds. This is regime I shown in the top row of images in Fig. 2, an experiment for which  $\theta = 89 \pm 1^\circ$  throughout the dynamics. In our study, we refer to the

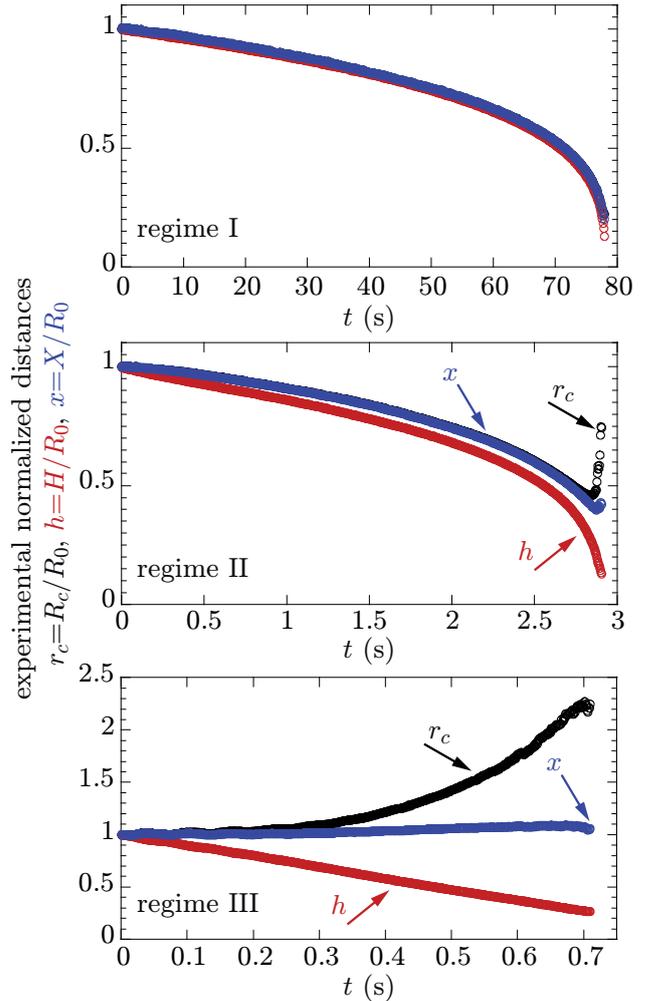


FIG. 3. Experimental variations with time of the normalized geometric characteristics of a bubble: The radius of curvature  $r_c = R/R_0$ , height  $h = H/R_0$  and distance  $x = X/R_0$  that correspond to the three regimes shown in the sequences of images in Fig. 2 and the three movies provided as Supplementary Material.<sup>22</sup> Parameters are identical to those of Fig. 2.

quasi-hemispherical bubbles seen in regime I as hemispherical bubbles for the sake of simplicity. As shown in the middle sequence of photographs in Fig. 2, a bubble made of the same solution seeks the shape of a spherical cap as shrinking proceeds when the size of the orifice is increased. This regime is herein denoted regime II. In a third regime (regime III) seen for the liquid having the largest viscosity and the orifice with the largest value of  $a$  in Fig. 2, as the air escapes through the orifice, the dynamics is characterized by a bubble collapsing on itself with a nonmoving bubble's foot (see bottom row of images in Fig. 2). For the whole study, we non-dimensionalize the problem with  $R_c = R_0 r_c$ ,  $H = R_0 h$ ,  $X = R_0 x$  and  $t = \tau \varepsilon$  where  $\tau$  is a characteristic time of the experiment that is defined in section III A. Figure 3 shows temporal evolutions of the normalized dis-

tances that correspond to the sequences of images reported in Fig. 2. For this investigation, image processing captures most of the shrinking dynamics in any of the three regimes (see Fig. 3) but it fails to describe the last moments of an experiment. As a result, the experimental time  $t_{end}$  at which shrinking ends is obtained by a direct observation of the movie of an experiment.

We rationalize these experimental observations and measurements in section III and we compare the resulting predictions to systematic experiments in section IV.

### III. MODEL OF THE FLOW

In what follows, we model the different shrinking dynamics obtained in the three regimes seen experimentally (Figs. 2 and 3). Firstly, in section III A, we begin by the regime I in which the bubbles remain hemispherical while it shrinks. Secondly, we rationalize in section III B the dynamics seen in regime II, that is, the regime in which the shape of a bubble is a spherical cap as shrinking proceeds. Lastly, we rationalize in section III C our findings in regime III where a bubble's foot is pinned during an experiment. For each of the three regimes seen experimentally, we model the dynamics assuming the air flow satisfies Bernoulli's principle. Indeed, for the investigated flow configuration, it seems reasonable to consider that air is inviscid so that dissipative effects by viscous forces can be neglected and air flow can be described with the Bernoulli's equation as shown below. By contrast, viscous dissipation impacts the motion of a bubble's foot in our experiment and a Reynolds number associated with this flow can be defined. This Reynolds number  $\mathcal{R}_\ell$  can be written  $e\rho_\ell\dot{X}/\eta_\ell$  where  $\rho_\ell$  and  $e$  are the liquid density and thickness of the liquid film under a bubble, respectively. For the plot illustrating Regime II in the middle panel of Fig. 2, we find that  $\mathcal{R}_\ell$  is  $O(10^{-1})$  throughout the dynamics which indicates that viscous effects are indeed important at the bubble's foot; we have used an average film thickness  $e = 20 \mu\text{m}$  to determine this estimate.

#### A. Regime I: the case of hemispherical bubbles ( $\theta \cong \pi/2$ )

For the hemispherical bubbles seen in regime I (see top photographs in Fig. 2 and Movie S1 in the Supplementary Material<sup>22</sup>), Bernoulli's relation written along the vertical streamline between the apex of the bubble and the center of the orifice reads  $P_0 + \frac{4\gamma}{R_c} + \frac{\rho\dot{R}_c^2}{2} = P_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}$  where  $P_0$  is the atmospheric pressure.<sup>6,25</sup> It is worthwhile noticing that in contrast with Torricelli's problem<sup>1</sup> which is driven by the hydrostatic pressure, the dynamics is driven in our case by the Laplace pressure  $\frac{4\gamma}{R_c}$ . The Bernoulli's relation can be rearranged as  $v_0^2 = \dot{R}_c^2 + \frac{8\gamma}{\rho R_c}$ . As mentioned above, the conservation of the air flow rate gives  $\dot{V} = 2R_c^2\dot{R}_c = -a^2v_0$ .

Using this relation in the expression of the velocity  $v_0$  determined using Bernoulli's principle, one readily finds the following first-order ordinary differential equation for  $R_c$ :  $\dot{R}_c = \frac{dR_c}{dt} = 2\sqrt{2}a^2\sqrt{\frac{\gamma}{\rho R_c}}\frac{1}{\sqrt{4R_c^4 - a^4}}$ .

Using  $\tau = \mathcal{G}\tau_{in}$ , where  $\mathcal{G} = \left(\frac{R_0}{a}\right)^2$  is a geometric dimensionless quantity and  $\tau_{in} = \sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\gamma}}$  in an inertio-capillary timescale, the ODE for  $R_c$  can be re-written for  $r_c$

$$\dot{r}_c = \frac{dr_c}{d\varepsilon} = 2\sqrt{\frac{2}{r_c}}\frac{\mathcal{G}}{\sqrt{4\mathcal{G}^2r_c^4 - 1}} \quad (1)$$

which can be solved numerically. Interestingly, the ODE can take an even simpler form that can be solved analytically when we make an assumption easy to meet experimentally. Within the limit  $\mathcal{G} = \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 = -\frac{v_0}{2R_c} \gg 1$ , it is indeed reasonable to consider that the term  $\dot{R}_c^2$  is negligible compared to  $v_0^2$  in the Bernoulli relation so that the ODE takes the form

$$\dot{r}_c r_c^{5/2} = -\sqrt{2} \quad (2)$$

which has an analytical solution, that is,  $r_c^{7/2}$  should decrease linearly with the normalized time  $\varepsilon = t/\tau$  as

$$r_c^{7/2} = 1 - \frac{7}{\sqrt{2}}\varepsilon. \quad (3)$$

In other words, when  $\mathcal{G} = \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \gg 1$ , the time  $t_{end}$  at which all air has escaped out of a hemispherical bubble should be  $t_{end} = \frac{\sqrt{2}}{7}\tau \simeq 0.202 \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\gamma}}$ . These predictions are compared to experiments in section IV.

#### B. Regime II: the case of spherical caps ( $\theta < \pi/2$ ) with a moving bubble's foot

When  $\theta < \pi/2$ , as shrinking proceeds (see middle sequence images in Fig. 2 and Movie S2 in the Supplementary Material<sup>22</sup>), the bubble's shape is a spherical cap having a volume  $\frac{\pi}{3}H^2(3R_c - H)$ . The conservation of the air flow rate now gives the relation  $v_0 = -\frac{H}{a^2}[\dot{H}(2R_c - H) + H\dot{R}_c]$ . Bernoulli's principle written along the vertical streamline between the bubble's apex and the center of the orifice gives  $v_0^2 = \frac{8\gamma}{\rho R_c} + \dot{H}^2$ . Combining the two expressions of the air velocity  $v_0$ , non-dimensionalizing as mentioned in the previous section and using  $\tau = \mathcal{G}\tau_{in}$  as in the case of hemispherical bubbles, one easily obtains

$$h \left[ \dot{h}(2r_c - h) + hr_c \dot{h} \right] = -\frac{1}{\mathcal{G}}\sqrt{\dot{h}^2 + \frac{8\mathcal{G}^2}{r_c}}. \quad (4)$$

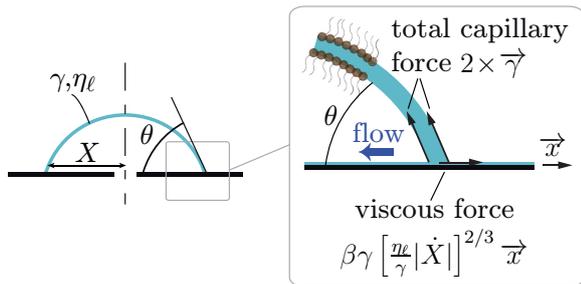


FIG. 4. Schematic of a surface soap bubble used in our study and close-up view of a bubble's foot illustrating the forces per unit foot length acting on it as discussed in the text. For the sake of clarity, this simplified view does not show the four surface tensions (two liquid-gas tensions and two liquid-solid ones) acting on the bubble's foot in the direction of the wetted solid. For each of the two pairs of phases (liquid-solid and liquid-gas), the two acting forces are indeed equal and opposite to each other so that they cancel one another out. The bubble sits on a thin film of liquid which is the same inside and outside the bubble's foot. Hence, it has no effect on the resultant forces. Also partially shown in the close-up view are the soap molecules covering the two liquid-air interfaces of the soap bubble.

To close the problem, one needs to write a second equation relating  $r_c$ ,  $r_c$ ,  $\dot{h}$  and  $h$ . Such an equation is provided by taking into account viscous dissipation that occurs at the bubble foot moving on the wet solid. Viscous friction indeed explains the change in the dynamics seen between regime I and II (see Fig. 2): An initially hemispherical bubble becomes a spherical cap in regime II as its flattening dynamics is faster than the motion of its foot on the solid. Consequently, contrary to its variations in regime I,  $h$  is smaller than  $r_c$  and  $x$  at any time in regime II (see Fig. 3). Written per unit foot length, the viscous force acting on a bubble's foot in the direction of the solid plane varies nonlinearly with the foot's velocity and has the classical form  $\beta\gamma \left[ \frac{\eta_\ell}{\gamma} |\dot{X}| \right]^{2/3}$ , where  $\beta$  is a parameter that depends on boundary conditions.<sup>26,27</sup> A capillary force with magnitude  $2\gamma$  is also acting on a bubble's foot in the direction of the bubble surface. Figure 4 shows a close-up view of a bubble's foot illustrating these forces. Considering quasistatic motion, the projection of the equilibrium forces onto  $\vec{x}$  (Figure 4 defines the x-axis) in the direction of the wet wall plane gives  $2\gamma \cos \theta = \beta\gamma \left[ \frac{\eta_\ell}{\gamma} |\dot{X}| \right]^{2/3}$ . Since  $X$  is decreasing with time in regime II, we have  $|\dot{X}| = -\dot{X}$ . Also, because of geometry,  $\cos \theta = (R_c - H)/R_c$  and  $X^2 + (R_c - H)^2 = R_c^2$ . The derivation of the latter equation gives  $\dot{X} = (\dot{R}_c H + \dot{H} R_c - \dot{H} H) / \sqrt{2R_c H - H^2}$ . Combining this expression and the balance of forces and non-dimensionalizing with dimensionless quantities as in section III A, one finds the second equation

$$hr_c + \dot{h}(r_c - h) = -2\sqrt{2}\mathcal{T} \left(1 - \frac{h}{r_c}\right)^{3/2} \sqrt{h(2r_c - h)} \quad (5)$$

where  $\mathcal{T}$  is the ratio of timescales  $\mathcal{T} = \tau/\tau_{vis}$  with the visco-capillary timescale  $\tau_{vis} = \beta^{3/2}\eta_\ell R_0/\gamma$ .

The combination of Eq. (4) and Eq. (5) gives

$$\left(h^2 r_c^2 - \frac{1}{\mathcal{G}^2}\right) \dot{h}^2 - 2I r_c h^2 \dot{h} + \left(h^2 I^2 - \frac{8}{r_c}\right) = 0 \quad (6)$$

where  $I = 2\sqrt{2}\mathcal{T} \left(1 - \frac{h}{r_c}\right)^{3/2} \sqrt{h(2r_c - h)}$ . This model is confronted to experiments in section IV.

### C. Regime III: the case of spherical caps ( $\theta < \pi/2$ ) with a nonmoving bubble's foot

As illustrated in the bottom images in Fig. 2 and in Movie S3 in the Supplementary Material,<sup>22</sup> our experiments show that in regime III, seen for the smallest ratio  $\left(\frac{R_0}{a}\right)^2$  and/or largest fluid dynamic viscosity  $\eta_\ell$ , the foot of a bubble barely moves throughout the shrinking process [see Fig. 3(a)]. Hence, we assume that it is pinned in this regime:  $X = R_0$  and  $\dot{X} = 0$ . In regimes II and III, a bubble's shape is a spherical cap whose volume written as a function of  $H$  and  $X$  using the geometric relation  $R_c = (X^2 + H^2)/2H$  is  $\frac{\pi}{2}H \left(\frac{H^2}{3} + X^2\right)$ . The conservation of the air flow rate gives  $\dot{H}(H^2 + X^2) = -2a^2 v_0$  where the velocity  $v_0$  is obtained as in previous sections using Bernoulli's principle which reads  $v_0^2 = \frac{8\gamma}{\rho R_c} + \dot{H}^2$ . Contrary to the case of regime II in which the term  $\dot{H}^2$  can take values that are not negligible when compared to the term  $\frac{8\gamma}{\rho R_c}$  given by the Laplace pressure, in regime III the former term is more than three orders of magnitude smaller than the latter; in Appendix B, Fig. B1 illustrates the comparison between the two terms for the data shown in Fig. 3(a). Consequently, one can approximately write  $v_0 = \sqrt{\frac{8\gamma}{\rho R_c}} = 4\sqrt{\frac{\gamma H}{\rho(X^2 + H^2)}}$  in regime III so that the flow rate conservation reads  $\dot{H} = -8a^2 \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}} \frac{\sqrt{H}}{(H^2 + X^2)^{3/2}}$ . Using the condition  $X = R_0$  of the regime III, non-dimensionalizing this relation, we find a prediction for the shrinkage time  $t_{end} = \frac{1}{8}\mathcal{G}\tau_{in} \int_0^1 \frac{(h^2 + 1)^{3/2}}{\sqrt{h}} dh$ . Solving the integral numerically, we find  $t_{end} \simeq 0.334\mathcal{G}\tau_{in}$ . We compare this prediction to experiments at the end of section IV.

## IV. RESULTS AND DISCUSSION

In this section, we compare the modeling work presented in section III to systematic experiments.

We begin by rationalizing the results found in regime I for which a bubble remains hemispherical as shrinking

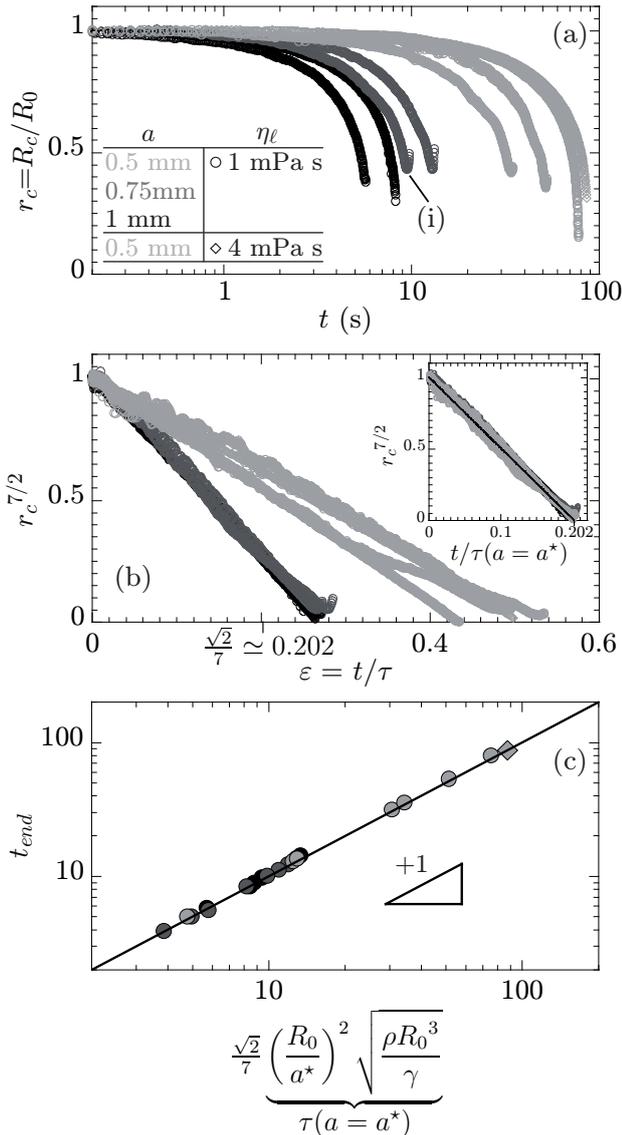


FIG. 5. (a) Variations with time of  $r_c$  in regime I for different orifices and liquid viscosities as indicated. These experiments are performed with large enough bubbles and orifices not larger than a millimeter in radius so that  $\mathcal{G} = \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \gg 1$ . As a result, the solution of Eq. (2) describes the variations of  $r_c$  as, for each set of data,  $r_c^{7/2}$  decreases linearly with the normalized time  $\varepsilon$ . Inset: All curves in the main plot collapse onto a single one when the effective radius  $a^*$  is used to determine  $\tau$ ; this single curve is well-described by the black line which is a prediction calculated using Eq. (3) with  $a = a^*$ . (c) As predicted, when  $\mathcal{G} \gg 1$ , the time at which the air has completely escaped out of the bubble is  $t_{end} = \frac{\sqrt{2}}{7} \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\gamma}}$ . For these experiments,  $\mathcal{G}$  varies in the 700 – 4200 range.

proceeds, i.e.,  $r_c = h = x$  (see the plot in the top panel in Fig. 3). Figure 5(a) shows the variations with time of the normalized radius of curvature  $r_c$  in this regime for different soap solutions and radii of the orifice. For the presented set of experiments in Fig. 5, we work with small

enough orifices and sufficiently large bubbles to fulfill the condition  $\mathcal{G} = \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \gg 1$  which has allowed us to write the approximated ODE Eq. (2); in Fig. 5,  $\mathcal{G} = 700 - 4200$ . As a result, the temporal evolution of  $r_c$  should be described by the solution of Eq. (2), that is, Eq. (3). As predicted by the latter equation, when  $r_c^{7/2}$  is plotted as a function of the normalized time  $\varepsilon$ , this quantity is a linearly decreasing function of  $\varepsilon$  [see Fig. 5(b)] for all data shown in Fig. 5(a). However, these curves do not collapse onto a single one as expected and the x-intercept of the predicted line ( $\frac{\sqrt{2}}{7} \approx 0.202$ ) is overestimated for each set of data [Fig. 5(b)]. Both predicted results are obtained only when an effective radius  $a^*$  is used instead of the real one  $a$  to calculate  $\tau$  [see inset of Fig. 5(b)]. Also, using  $a = a^*$ , figure 5(c) shows that the experimental shrinkage time in regime I which varies over almost two orders of magnitude in our study is well-described by Eq. (3) which predicts  $t_{end} = \frac{\sqrt{2}}{7}\tau \approx 0.202\tau$ .

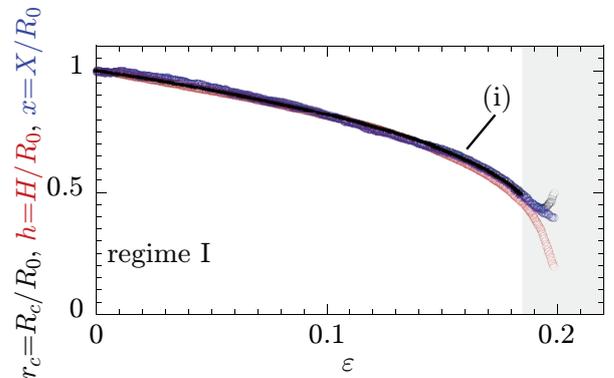


FIG. 6. Temporal evolutions of  $r_c$ , height  $h$  and distance  $x$  that correspond to the experiment denoted (i) in Fig. 4. As indicated by the gray area, the response is not that of regime I at late time: Friction effects come into play and the normalized distance are no longer identical. The line which corresponds to the prediction for regime I,  $r_c = \left(1 - \frac{7}{\sqrt{2}}\varepsilon\right)^{2/7}$ , that is given by Eq. (3) with  $a = a^*$  rationalizes most of the dynamics.

As shown in Fig. C1 in Appendix C, the effective radius  $a^*$  that is adjusted to compare experiments and modeling work appears to be slightly smaller than  $a$ . It is a weakly dependent function of the soap solution and it varies linearly with  $a$  roughly as  $a^* = 0.75a$ . It seems reasonable to find that an effective radius of the orifice smaller than the real one should be used to adjust the data since the speed of the air in the Bernoulli's relation used for each regime is written at the center of the orifice.

To summarize, for sets of hemispherical bubbles and orifices giving sufficiently large geometric dimensionless parameter  $\mathcal{G}$ , Figure 5 (b) and (c) show that the shrinking dynamics are fully captured by the simple law given in Eq. (3) and that the prediction for  $t_{end}$  well describes experimental findings when  $a$  is a free parameter  $a^*$ . The time  $\tau$  will hereafter be estimated using  $a^*$ .

Figure 6 shows the temporal evolution of the three nor-

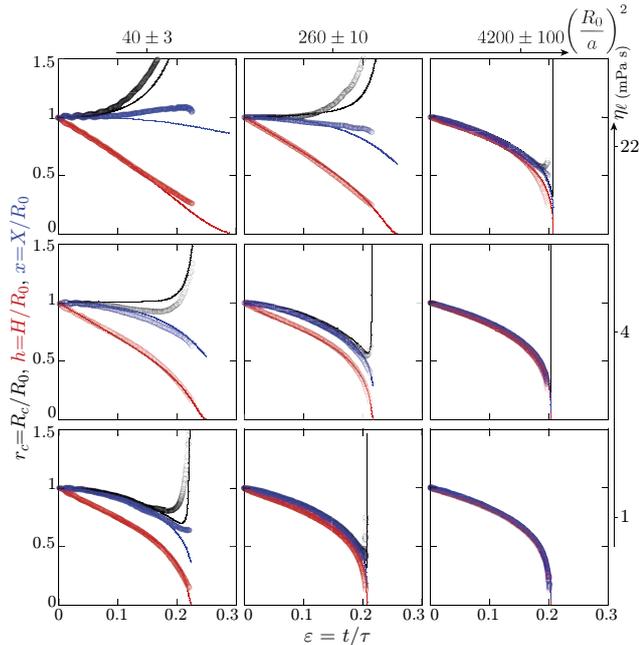


FIG. 7. Temporal variations of  $r_c$ , height  $h$  and distance  $x$  for different fluid dynamic viscosities  $\eta_\ell$  and geometric ratios  $\mathcal{G} = \left(\frac{R_0}{a}\right)^2$  as indicated. Symbols stand for experiments and the lines are calculated using Eq. (6) and the method explained in the text.

malized distances corresponding to the data denoted (i) in Fig. 5(a). For this set of data, the response is that of regime I for most of the dynamics, i.e.,  $r_c = h = x$  from  $\varepsilon = 0$  until the normalized time  $\varepsilon$  is about 0.18 in Fig. 6. Friction at the bubble's foot comes into play at late times as illustrated by the gray domain displayed in Fig. 6. In this temporal domain,  $r_c \neq h \neq x$  so that  $\cos\theta = 1 - h/r_c > 0$ . As discussed in section III B, to rationalize these shrinking dynamics, we use MATLAB to solve numerically Eq. (6) for  $h$ . Equation (5) is then used to determine  $r_c$ . Our software written with MATLAB finds values for  $h$  and  $r_c$  using Euler's method and  $x$  is then determined using the geometric relation between the three distances, i.e.,  $x = \sqrt{h(2r_c - h)}$ . Figure 7 shows the temporal variations of the distance  $r_c$ ,  $h$  and  $x$  with  $\varepsilon$  for three different geometric ratios  $\left(\frac{R_0}{a}\right)^2$  and the three fluids used in this study as indicated in the figure. The combination of these nine plots summarizes our study as they demonstrate the transitions between the three regimes seen experimentally are controlled by both the geometric ratio and the fluid dynamic viscosity. In addition, in Fig. 7, the lines calculated with our model concur well with the experimental data represented by symbols for the three regimes. To obtain a good agreement between experiments and predictions,  $\beta$  is introduced as a second free parameter of the model discussed in section III B. We find that the value taken by  $\beta = 40 \pm 8$  is independent of the liquid used and the investigated regime.  $\beta$  is however larger than the value usually reported in the literature: Depending on whether

the air-liquid interface is mobile or rigid,  $\beta \simeq 5 - 6$ .<sup>26,27</sup> The larger value of  $\beta$  taken in our experiments could be explained by the strongly rigid interfaces often found in commercial detergent solutions which would enhance the viscous dissipation at the moving bubble foot.<sup>28</sup>

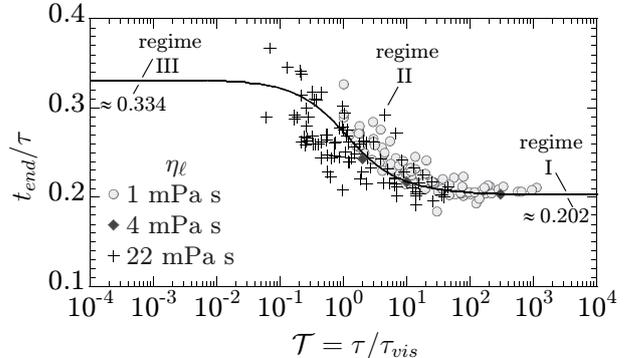


FIG. 8. Variations of the ratio  $t_{end}/\tau$  between experimental shrinkage time and predicted characteristic time with the controlling dimensionless time  $\mathcal{T} = \tau/\tau_{vis}$ . The symbols stand for experimental data and the solid line is calculated using our model.

Equation (5) reveals that in fact the governing dimensionless parameter of the problem is  $\mathcal{T} = \tau/\tau_{vis} = \mathcal{G}\tau_{in}/\tau_{vis}$  which does not only comprise the discussed geometric ratio  $\mathcal{G} = \left(\frac{R_0}{a}\right)^2$  and dynamic viscosity  $\eta_\ell$  used in Fig. 7 but also other parameters of the problem via the inertio-capillary ( $\tau_{in} = \sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\gamma}}$ ) and visco-capillary ( $\tau_{vis} = \beta^{3/2}\eta_\ell R_0/\gamma$ ) timescales. As shown in Fig. 8,  $\mathcal{T}$  is the parameter that should be tuned to modify the response from regime I, to regime II, to regime III. Indeed, this figure showing the variations of  $t_{end}/\tau$  with  $\mathcal{T}$  summarizes well our findings as the roughly 200 experiments that were performed and analyzed in the three shrinking regimes collapse onto a single curve that is well-described by the solid line calculated using our model. Additionally, although it is difficult to perform experiments when  $\mathcal{T}$  is smaller than about  $10^{-1}$ , we find that the predicted expression  $t_{end}/\tau \simeq 0.334$  for regime III (see section III C) emerges from numerical simulations and correlates with experimental data in this regime (i.e., data points in the range  $\mathcal{T} \simeq 0.1-0.3$  in Fig. 8); we could not perform experiments with values of  $\mathcal{T}$  smaller than about  $10^{-1}$  because it is difficult to prepare bubbles with smaller ratios  $R_0/a$  and/or larger liquid viscosities  $\eta_\ell$  than those reported.

## V. CONCLUSIONS

We have studied the hitherto uninvestigated shrinkage of centimeter-sized surface bubbles. Our results have revealed three distinct shrinking scenarios, the occurrence of which is controlled by a dimensionless parameter that is a function of the physicochemistry of the fluid system

and the geometric variables at play. In the first two scenarios, a bubble's foot recedes when shrinking occurs, the bubble either remaining hemispherical or seeking the shape of a spherical cap during the process. In the third shrinking scenario that we have identified, a bubble flattens with a nonmoving bubble's foot as shrinking proceeds. Contrary to the classical problem of the draining of a tank through an orifice controlled by the hydrostatic pressure, the driving force is given by the Laplace pressure in the case of shrinking bubbles and we show that the process is limited by viscous dissipation acting at a bubble's foot. These physical arguments combined with conservation of air flow rate allow us to present a model that rationalizes the shrinking dynamics seen in the three scenarios. As discussed in the article, this experiment would make a great project for undergraduate and graduate physics courses. First of all, experiments can be performed by students without the need for sophisticated equipment. In addition, the first regime is described by an ODE that has an analytical solution when making a reasonable approximation. As the resulting predictions for the temporal variations of a bubble size and time at which shrinking ends concur well with experiments, a project based on the study of the first regime should also teach students the usefulness of well-justified approximations in physics. Also, upper-division students could benefit from the experiment and particularly from the case of shrinking spherical caps. This case is indeed described by an ODE that can be solved numerically making it a good combination of experimental and computational work.

## ACKNOWLEDGMENTS

We thank Franck Artzner for the rheometry that we used to determine the fluid viscosities and Benjamin Reichert and Arnaud Saint-Jalmes for the surface tension measurements. We also thank Isabelle Cantat and Benjamin Dollet for fruitful discussions.

### Appendix A: Description of the movies<sup>22</sup>

- *Movie S1 - Shrinking quasi-hemispherical bubbles in regime I:* A bubble remains quasi-hemispherical as shrinking proceeds in regime I. These observations are made with a low-viscosity fluid soap solution ( $\eta_\ell = 1$  mPa s), a sufficiently large initial bubble ( $R_0 = 32.68$  mm) and a small orifice ( $a = 0.5$  mm).

- *Movie S2 - The case of shrinking spherical caps in regime II:* In regime II, a bubble seeks the shape of a spherical cap as air escapes through the orifice. The viscous effects acting on a bubble's foot are important in this regime illustrated for  $\eta_\ell = 1$  mPa s, a bubble having an initial radius  $R_0 = 31.66$  mm and a value of  $a = 2$  mm that is four times larger than that of Movie S1.

- *Movie S3 - Collapsing bubbles with a nonmoving bubble foot in regime III:* For large enough liquid viscosities

( $\eta_\ell = 22$  mPa s in the experiment shown in Movie S3) and sufficiently small ratio between bubble and orifices radii ( $R_0 = 33.1$  mm and  $a = 5$  mm), Movie S3 shows that the dynamics is characterized by a bubble collapsing on itself with a nonmoving bubble's foot.

### Appendix B: Comparison between the terms $\dot{H}^2$ and $\frac{8\gamma}{\rho R_c}$ of the Bernoulli's relation in regime III

Figure B1 shows that  $\dot{H}^2$  is more than three order of magnitude smaller than the term  $\frac{8\gamma}{\rho R_c}$  given by the Laplace pressure in regime III. These data correspond to the results shown in Fig. 3(a) of the text.

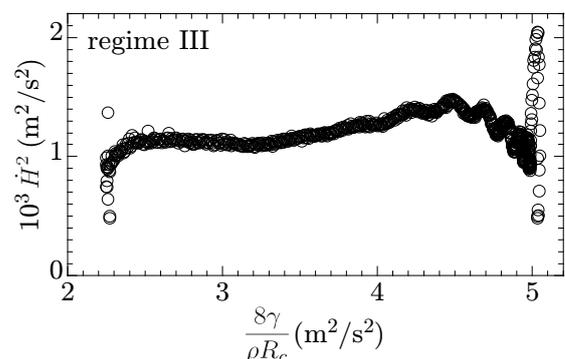


FIG. B1. Evolution of  $\dot{H}^2$  with  $\frac{8\gamma}{\rho R_c}$  in regime III for the data shown in Fig. 3(a).

### Appendix C: Relation between measured radius $a$ and its effective value $a^*$

As shown in Fig. C1 the values taken by the free parameter  $a^*$  collapse onto a single curve when plotted as a function of  $a$ :  $a^*$  which is weakly dependent on the fluid system varies linearly with  $a$  roughly as  $0.75a$ .

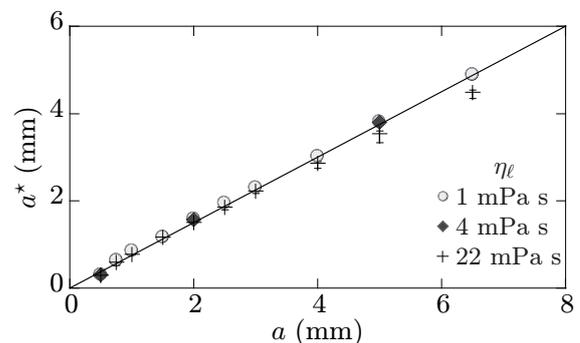


FIG. C1. Variations of the effective radius of the orifice  $a^*$  as a function of its measured value  $a$  for the three soap solutions as indicated. The line is a guide for the eyes that corresponds to the equation  $a^* = 0.75a$ .

- 
- \* These two authors contributed equally to the work
- † [laurent.courbin@univ-rennes1.fr](mailto:laurent.courbin@univ-rennes1.fr)
- ‡ [pascal.panizza@univ-rennes1.fr](mailto:pascal.panizza@univ-rennes1.fr)
- <sup>1</sup> E. Torricelli, *Opera Geometrica, De Sphaera et Solidis Sphaeralibus; De Motu Gravium; De Dimensione Parabolae* (Amadoro Massa & Lorenzo de Landis, Florence, 1644).
  - <sup>2</sup> J. Ferrand, L. Favreau, S. Joubaud, and E. Freyssingas, “Wetting effect on Torricelli’s law,” *Phys. Rev. Lett.* **117**, 248002-1–5 (2016).
  - <sup>3</sup> D.P. Jackson and S. Sleyman, “Analysis of a deflating soap bubble,” *Am. J. Phys.* **78**, 990-994 (2010).
  - <sup>4</sup> J. Plateau, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires* (Gauthier-Villars, Paris, 1873).
  - <sup>5</sup> H. Bouasse, *Capillarité-Phénomènes superficiels* (Librairie Delagrave, Paris, 1924).
  - <sup>6</sup> P. G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré, *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves* (Springer, New-York, 2004).
  - <sup>7</sup> L. Salkin, A. Schmit, P. Panizza, and L. Courbin, “Generating soap bubbles by blowing on soap films,” *Phys. Rev. Lett.* **116**, 077801-1–5 (2016).
  - <sup>8</sup> P. Panizza and L. Courbin, “Bubble blowing by the numbers,” *Phys. Today* **69**(7), 78-79 (2016).
  - <sup>9</sup> B. Dollet, P. Marmottant, and V. Garbin, “Bubble dynamics in soft and biological matter,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* **55**, 331-355 (2019).
  - <sup>10</sup> J. Wu, “Evidence of sea spray produced by bursting bubbles,” *Science* **212**, 324-326 (1981).
  - <sup>11</sup> A. H. Woodcock, C. F. Kientzler, A. B. Arons, and D. C. Blanchard, “Giant condensation nuclei from bursting bubbles,” *Nature* **172**, 1144-1145 (1953).
  - <sup>12</sup> F. MacIntyre, “Flow patterns in breaking bubbles,” *Nature* **77**, 5211-5228 (1972).
  - <sup>13</sup> J. C. Bird, R. de Ruiter, L. Courbin, and H. A. Stone, “Daughter bubble cascades produced by folding of ruptured thin films,” *Nature* **465**, 759-762 (2010).
  - <sup>14</sup> H. Lhuissier and E. Villermaux, “Bursting bubble aerosols,” *J. Fluid Mech.* **696**, 5-44 (2012).
  - <sup>15</sup> L. Champougny, M. Roché, W. Drenckhan, and E. Rio, “Life and death of not so “bare” bubbles,” *Soft Matter* **12**, 5276-5284 (2016).
  - <sup>16</sup> S. Poulain and L. Bourouiba, “Disease transmission via drops and bubbles,” *Phys. Today* **72**(5), 70-71 (2019).
  - <sup>17</sup> F. Seychelles, Y. Amarouchene, M. Bessafi, and H. Kellay, “Thermal Convection and Emergence of Isolated Vortices in Soap Bubbles”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 144501-1–4 (2008).
  - <sup>18</sup> T. Meuel, Y. L. Xiong, P. Fischer, C. H. Bruneau, M. Bessafi and H. Kellay, “Intensity of vortices: from soap bubbles to hurricanes”, *Sci. Rep.* **3**, 3455-1–7 (2013).
  - <sup>19</sup> L. Salkin, A. Schmit, R. David, A. Delvert, E. Gicquel, P. Panizza, and L. Courbin, “Interfacial bubbles formed by plunging thin liquid films in a pool,” *Phys. Rev. Fluids* **2**, 063604-1–10 (2017).
  - <sup>20</sup> <https://physlets.org/tracker/>.
  - <sup>21</sup> <https://imagej.nih.gov/ij/>.
  - <sup>22</sup> An annotated script of the image processing software written with MATLAB and three movies (Movie S1, S2 and S3) that illustrate the three regimes seen experimentally can be found [here](#), i.e., <https://drive.google.com/drive/folders/1W5m3jq9D-gB9Cnm3HU18GVicTtuuFT31?usp=sharing>. We provide a description of these movies in Appendix A.
  - <sup>23</sup> S. Arscott, “Wetting of soap bubbles on hydrophilic, hydrophobic, and superhydrophobic surfaces,” *Appl. Phys. Lett.* **102**, 254103-1–4 (2013).
  - <sup>24</sup> L. Salkin, A. Schmit, P. Panizza, and L. Courbin, “Influence of boundary conditions on the existence and stability of minimal surfaces of revolution made of soap films,” *Am. J. Phys.* **82**(9), 839-847 (2014).
  - <sup>25</sup> In the case of a spherical drop of radius  $R$ , the well-known expression of the Laplace pressure is  $2\gamma/R$ . For bubbles, the factor 2 in the overpressure  $2 \times 2\gamma/R_c$  that appears in the Bernoulli’s relation is due to the presence of two liquid-gas interfaces as illustrated in Fig. 4.
  - <sup>26</sup> B. Dollet and I. Cantat, “Deformation of soap films pushed through tubes at high velocity,” *J. Fluid Mech.* **652**, 529-539 (2010).
  - <sup>27</sup> I. Cantat, “Liquid meniscus friction on a wet plate: Bubbles, lamellae and foams,” *Phys. Fluids* **25**, 031303-1–21 (2013).
  - <sup>28</sup> I. Cantat, private communication.

# Measuring the viscosity of air with soapy water, a smartphone, a funnel and a hose: an experiment for undergraduate physics students

Alexandre Delvert, Pascal Panizza,<sup>\*</sup> and Laurent Courbin<sup>†</sup>

*Univ Rennes, CNRS, IPR (Institut de Physique de  
Rennes) - UMR 6251, F-35000 Rennes, France*

(Received; Accepted)

## Abstract

We investigate the spontaneous motion of a soap film in a conical geometry connected to a long tube. Within proper experimental conditions, we show that this experiment allows one to measure the dynamic viscosity of air. By contrast to other techniques that are often complicated to implement and generally require expensive and sophisticated equipment, the discussed method relies on soapy water and three everyday life objects, a smartphone, a funnel and a hose. More precisely, to determine the viscosity of air, we use a smartphone to record the spontaneous motion of a soap film placed in a funnel for conditions that allow one to assume that the motion of a film is quasistatic and that the flow of air escaping the geometry is viscously dominated. This simple experiment should be of great value to undergraduate physics students as they would learn about (i) effects of both fluid viscosity and surface tension, another fluid property which they could also measure with a smartphone,<sup>1</sup> and (ii) the usefulness of reasonable approximations in physics.

## I. INTRODUCTION

Two of the main parameters associated with fluid dynamics are a fluid's viscosity which characterizes the resistance of a material to flow and surface tension which represents the interfacial energy needed to increase the surface of a fluid-fluid interface by one unit.<sup>2</sup> We regularly see effects of surface tension in our everyday life, e.g., whenever we blow soap bubbles. Because of surface tension, the liquid film forming the bubble indeed minimizes its surface area to seek a spherical shape. Like surface tension, a fluid's viscosity originates from molecular effects and its consequences can be seen at a macroscopic level: when holding a jar of honey, all physics students at any level guess correctly that it is a highly-viscous liquid compared to water. Sophisticated and expensive equipment of tensiometry and rheology can be used to fully characterize those two fluid parameters. It is interesting to note however that the literature documents simple and inexpensive ways to measure an air-liquid surface tension or a the viscosity of a liquid. Therefore, these methods could be useful in introductory-level physics laboratories. For instance, liquid-air surface tension can be determined using the camera of a smartphone and a ruler<sup>1</sup> to characterize the shape of a pendant drop. Also, a liquid viscosity can be measured using a weight-controlled capillary viscometer,<sup>3</sup> measurements being based in this case on the simple determination of the mass of liquid draining from a tank through a capillary tube. These are examples of devices that are suitable for introductory-level physics courses as they are easy to develop and the physics behind their functioning can be readily understood by students. Here, we present such a device that allows one to measure the viscosity of air using affordable everyday life items, that is, a smartphone, soapy water, a funnel and some tubing as illustrated in Fig. 1(a). The method discussed in this paper should be directly applicable to the classroom as a project for undergraduate students.

In sharp contrast with the viscosity of liquids, measuring that of gases is not a trivial task. Indeed, for example, the dynamic viscosity of air  $\eta_a = 18.1 \mu\text{Pa s}$  at 20 °C, which is roughly 50 times smaller than that of water, is too small to be measured with standard rheometry because of the mechanical friction inherent to this type of equipment. Instead, one can use custom-build viscometry that can be complicated to implement, for instance a friction-free electromagnetic spinning system based on the diamagnetic levitation of a graphite.<sup>4</sup> As mentioned above and described in this paper, such measurements can however

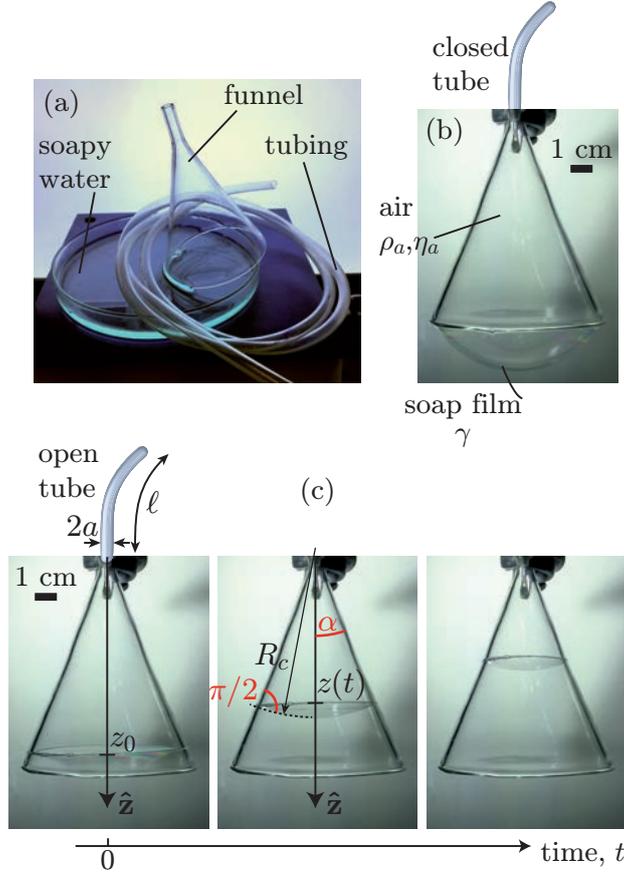


FIG. 1. (a) Photograph take with the camera of a smartphone illustrating three elements needed to perform experiments allowing for the measurement of the viscosity of air: some tubing that can be connected to the narrower end of a funnel and soapy water. (b) Shown is a photograph of the preparation of an experiment: withdrawing the wider end of the funnel from a pool of the soapy water creates a curved soap film on that end. (c) Series of photographs illustrating an experiment, i.e., the motion of a curved soap film in a funnel. In (b) and (c) some of the geometric and physicochemical parameters at play are defined and the geometrical parameters are:  $a = 3.2$  mm,  $\ell = 1$  m, and  $\alpha = 22^\circ$ .

be performed at low cost with simple equipment [see Fig. 1(a)]: soapy water, a funnel, some tubing and the camera of a smartphone.

As discussed below, the experiment consists of recording and analyzing the spontaneous motion of a soap film in a funnel having a long and narrow stem. It is worthwhile noting that the described experiment can also be seen as a simple self-propelling system with which students would observe soap films moving against gravity. Other studies found in the

literature indeed discuss methods that are often costly and difficult to implement and rely on suitable surface chemistry or controlled surface topography to produce the self-propulsion of fluids on solids.<sup>5-7</sup> For example, in a way that reminds us of our observations, the use of controlled gradients of surface chemistry of a solid can make a drop of water run against gravity.<sup>8</sup> Other studies have shown that gradients of cross-sectional areas can also make capillary forces trigger the spontaneous motion of drops, bubbles and menisci in conical wires and tubes and wedges.<sup>9-12</sup> Here, we investigate the hitherto unreported case of soap films.

We present the experiments, first observations and an illustrative example of our measurements in section II. In section III, we justify the assumptions and/or approximation made for the study. The flow is modeled in section IV and we compare the resulting predictions to systematic experiments in section V before finishing with few concluding remarks in section VI.

## II. EXPERIMENTS

Before an experiment begins, the inner wall of the conical geometry is wetted with the soap solution used in our study (2 wt.% Palmolive Original (Colgate-Palmolive) and 98 wt.% deionized water). The wider end of the funnel is then immersed into the solution a few millimeters below the free surface. We then remove the geometry quasistatically with its axis of symmetry perpendicular to the liquid surface. When a circular ring of radius  $R$  is used instead of a funnel we have shown in a previous study that the process creates a surface of revolution,<sup>13</sup> that is, a catenoid, which becomes unstable above a critical height ( $\approx 0.66R$ ) between geometry and free surface and collapses to leave a planar film on the ring and an interfacial bubble on the free surface.<sup>14</sup> Here, the process produces the same surface of revolution. However, in our experiments, the tube is closed before the critical height is reached so that the collapse of the catenoid yields the formation of an interfacial bubble and a curved soap film on the wider end of the cone as shown in Fig. 1(b). Because of surface tension, there is a pressure difference across the curved film making it self-propel from high to low pressure towards the narrow end of the funnel when the tube is reopened at the origin of time of an experiment (Fig. 1(c)). The propulsion of the film sets the air present in the geometry into motion.

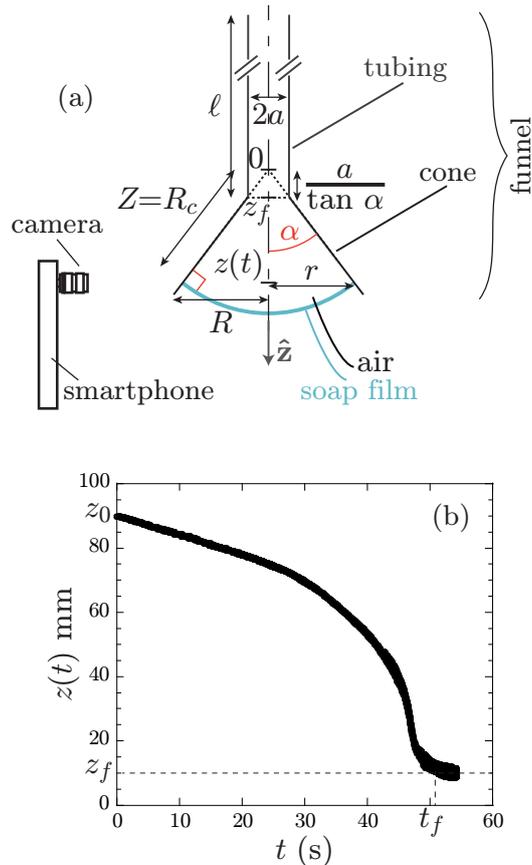


FIG. 2. (a) Schematic of the setup of our experiment defining all geometric and physicochemical parameters at play. (b) Temporal variation of the position of a film  $z$  obtained by processing a movie of an experiment using the method described in the text. As shown, the motion of the film begins at  $z_0$  at the origin of time and  $t = 0$  s and ends after a period of time  $t_f$  at  $z_f$ . This final experimental position is close to the expected value  $a/\tan \alpha = 7.7$  mm. In this illustrative experiment, the geometrical parameters are:  $a = 3.2$  mm,  $\ell = 1$  m, and  $\alpha = 22.5^\circ$ .

During the preparation of our experiment, when the curved film begins to propel towards the narrow end of the funnel, it is stopped by closing the tube when it reaches a desired initial position  $z_0$ ; this is the end of the preparation of an experiment. We reopen the tube at the origin of time  $t$  of an experiment in which the film moves from  $z_0$  ( $t = 0$ ) in the same direction and we record with a smartphone the temporal evolution of its position  $z(t)$  (see Fig. 1(c) and Fig. 2) until it reaches a final one at  $z_f = a/\tan \alpha$  (Fig. 2) where it stops;  $a$  is the radius of a cone and  $\alpha$  is the half of its opening angle. Experimentally it is easy to record the position  $z$  but our results will be discussed in terms of  $Z = z/\cos \alpha$  (see Fig. 2 defining

the variables of the experiment). For the unidimensional motion of a soap film studied here, implemented commands in a free image analysis software<sup>15</sup> suffice to describe the experiment and obtain the temporal variations of  $Z$  shown in this paper. Image processing consists of placing a line on an experimental movie along a soap film's trajectory and creating a single image whose vertical axis is this line plotted for each frame of the movie as a function of time (horizontal axis of the image). Coordinates of each pixel of a binary version of the image can then be saved in a file that is imported with a free graphing software<sup>16</sup> to plot the position of a film as a function of time.

### III. EXPERIMENTAL CONDITIONS, APPROXIMATIONS AND KEY VARIABLES

For these experiments and the interpretation of experimental results, we make several assumptions and/or approximations. This study used a laboratory project for undergraduate students should teach them not only that measurements which are generally non-trivial can be performed with common and inexpensive equipment but also about the importance of reasonable approximations and assumptions in physics. These are discussed in the five-item list below:

- Firstly, we consider that air is incompressible and that a soap film is impermeable to this gas during the time of an experiment; hence, the volumetric flow rate of air  $q$  is constant.
- Secondly, in addition to the geometric and physicochemical quantities defined in Fig. 1 and Fig. 2, one could imagine that a film's thickness  $e$  and the gravitational acceleration  $g$  play a role in the experiment. To determine the influence of  $e$ , we have performed sets of experiments in which funnels are withdrawn at different speeds while other parameters remain unchanged; to that effect, we use a vertical linear stage (Aerotech ACT115DL) whose specifications can be found in a previous study.<sup>17</sup> The produced films have different thicknesses as described by Franckel's law and varying in the  $e = 1\text{--}10\ \mu\text{m}$  range in our experiments; we use a spectrometer (Avantes AvaSpec-2048) to measure the thickness of a film. Our results show that these films exhibit the same dynamics as they spontaneously move in a funnel which demonstrate that  $e$  is not a parameter for our experimental conditions. Also, experiments performed with the same geometry and different thicknesses of the film ( $10\text{--}30\ \mu\text{m}$  in our study) initially deposited on the inner wall of a geometry give the same dynamics.

These results should further facilitate implementing the experiment in a classroom setting. We now discuss the possible influence of gravity on the motion of films. In our study, gravity effects [ $\propto 2\pi Z_0^2 e(1 - \cos \alpha)\rho_\ell g$ ] should dominate over capillary action [ $\propto 4\pi Z_0 \gamma \sin \alpha$ ] when the thickness of a film is larger than a threshold  $\frac{2\kappa^{-2}}{Z_0} \left( \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \right)$  where  $\kappa^{-1} = \sqrt{\gamma/(\rho_\ell g)}$  is the capillary length. Using typical values of the angle  $\alpha = 22^\circ$  and initial position  $Z_0 = 0.1$  m, the threshold thickness is larger than about 700  $\mu\text{m}$  which is hundreds times larger than the thickest films used in our study. Hence, we consider that gravity can be neglected when compared to surface tension in our study at the beginning of an experiment. To compare these two effects when a film moves over time, we assume that  $e$  remains constant between the origin of time and  $t = t_f$ . In other words, we assume that the liquid escapes through the meniscus on the wetted inner wall of the conical geometry as the film moves and its width decreases over time. Since the above expressions of the weight of a film and surface tension vary as  $Z^2$  and  $Z$ , respectively, with  $Z$  decreasing over time, surface tension prevails for the whole dynamics and effects of gravity can be neglected over time. We would have liked to unequivocally demonstrate the unimportance of gravity by showing that films moving in its direction or against it give the same dynamics for the same experimental conditions but unfortunately results are altered when films move in the direction of gravity because some of the liquid move along the walls of the geometry and inside the tube.

– Thirdly, we consider the idealized motion of soap films within a quasistatic limit that neglects the viscous drag acting on the meniscus linking a film to the wall of a cone. In other words, we consider the contact angle the film makes with a wall is  $\pi/2$  at any time so that the radius of curvature of a soap film is  $R_c = Z$  in our study (see Fig. 1(c) and Fig. 2 which define the variables at play). As shown by the illustrative example reported in Fig. 1(c), our experimental observation validate this assumption. Such an approach has been successfully employed to describe the motion of a single foam lamella flowing through a porous medium under applied pressure.<sup>18,19</sup> More recently, we have shown that this quasistatic approach can help rationalize one of the dynamics observed for shrinking surface bubbles.<sup>20</sup>

– Fourthly, our modeling work considers that air is contained inside a complete cone instead of a truncated one attached to a tube. In other words, we model air flow with an excess volume of air  $\frac{\pi}{3} \frac{a^3}{\tan \alpha}$  corresponding to the cone of height  $z_f = \frac{a}{\tan \alpha}$  and base with radius  $a$  whose contour is shown by the dashed lines in Fig. 2. Hence, the volume of air is  $V = \frac{2\pi}{3} Z^3 (1 - \cos \alpha)$ . This approximation seems reasonable since the excess volume is not

a function of time and the model of the flow presented in the next section uses the time derivative of the volume, i.e., the flow rate.

– Lastly, we will show in the next section that the air flow can be described by the Poiseuille’s equation that comprises the hydrodynamic resistance of the funnel for which we make an approximation. The studied geometry is a serial combination of a cone and a cylindrical tube. Hence its total hydrodynamic resistance is  $R_h = R_{h-c} + R_{h-t}$  with  $R_{h-c}$  and  $R_{h-t}$  the resistances of the cone and the tube, respectively. As discussed more quantitatively in the next section, the Reynolds number  $R_e$  associated with the air flow is small enough for this flow to be describe by the Stokes equation so that the resistance of a tube can be expressed in the well-known form  $R_{h-t} = \frac{8\eta_a\ell}{\pi a^4}$ ;  $\ell$  is the length of a tube. The resistance of the conical part of the geometry is  $R_{h-c} = -\int_Z^{Z_f} \frac{8\eta_a \cos \alpha}{\pi r(Z')^4} dZ' = \frac{8\eta_a \cos \alpha}{3\pi(\sin \alpha)^4} \left( \frac{1}{Z^3} - \frac{1}{Z_f^3} \right)$  with  $r(Z) = Z \sin \alpha$  the radius of a film as defined in Fig.2. When comparing the leading term of this resistance ( $\frac{8\eta_a}{3\pi a^3 \tan \alpha}$ ) with that of a tube, we find that  $R_{h-c}$  can be neglected when compared with  $R_{h-t}$  when  $\ell \gg \frac{a}{3 \tan \alpha}$ . In our experiments, for a typical funnel with  $\alpha = 22^\circ$ , this condition which reads  $\ell \gg 0.825a$  with  $a = 1.5 - 5$  mm is easily met experimentally when working with tubes having a length in the range  $\ell = 0.1 - 10$  m. Hence, we can consider that  $R_h \sim R_{h-t}$ .

#### IV. MODEL OF THE FLOW

We consider that the motion of a film is driven by its curvature, i.e., by the Laplace pressure  $\Delta p = \frac{4\gamma}{Z}$  which is the pressure difference across the curved film;  $\gamma$  is the air-liquid surface tension. Also, this dynamics is limited by the air flow that we consider to be one-dimensional and viscously dominated. Hence, the considered laminar air flow should satisfy the Poiseuille’s equation that reads  $\Delta p = R_h q$  where  $\Delta p$  is the pressure difference between the position of a curved film and the narrow end of a funnel which is at atmospheric pressure. For this experiment, as discussed in the previous section, the flow can be considered to be lamellar when the characteristic Reynolds number at play for the air flow  $R_e$  is smaller than 2000.<sup>21,22</sup> In our experiment, this dimensionless quantity is obtained by comparing inertial [ $\propto \rho_a v^2 / (2a)$ ] and viscous [ $\propto \eta_a v / (2a)^2$ ] body forces and reads  $R_e = \frac{2a\rho_a v}{\eta_a}$ ;  $v$  is the average velocity of the air flow and  $\rho_a$  is the air density, as illustrated in Fig.1(b) and Fig.2. The velocity  $v$  can be written  $q / (\pi a^2)$  and, as previously discussed,  $q$  can be written  $4\gamma / (ZR_h)$

so that  $R_e = 8\rho_a\gamma/(\pi aZR_h\eta_a)$ . As we have shown that it is reasonable to approximate the total resistance  $R_h$  by that of the tube  $R_{h-t} = 8\eta_a\ell/(\pi a^4)$ , the Reynolds number reads  $R_e = \frac{\gamma\rho_a}{\eta_a} \frac{a^3}{Z\ell}$ . At the beginning of the motion of a film,  $Z = Z_0$  is typically 0.1 m in our experiments. Also, for the soap solution used in our study, the air-liquid surface tension  $\gamma = 25 \text{ mN}\cdot\text{m}^{-1}$ ; we measure  $\gamma$  with a simple method that involves recording a pendant drop of the soap solution with a smartphone.<sup>1</sup> Hence, the condition for laminar flow  $R_e < 2000$  is satisfied when  $\ell > 1.7 \text{ mm}$  for the tube of smallest radius  $a = 1.5 \text{ mm}$  and  $\ell > 62.5 \text{ mm}$  for the largest tube's radius  $a = 5 \text{ mm}$ .

Working within these limits and using the physical arguments described above we have  $\frac{4\gamma}{Z} = \frac{8\eta_a\ell}{\pi a^4}q$ . The flow rate is given by the temporal variation of the total volume of entrapped air,  $q = -\frac{dV}{dt} = -2\pi Z^2 \frac{dZ}{dt}(1 - \cos \alpha)$ , so that the equation describing the motion of a film is

$$\left(\frac{Z(t)}{Z_0(t=0)}\right)^4 = 1 - \frac{\gamma a^4}{\eta_a \ell Z_0^4 (1 - \cos \alpha)} t = 1 - \frac{t}{t_f} \quad (1)$$

with  $t_f = \frac{\eta_a \ell Z_0^4}{\gamma a^4} (1 - \cos \alpha)$  the time at which air has escaped out of the cone and the film has reached its final position  $z = z_f$ ; as discussed Appendix A, although we model the air flow with an initial volume of air larger than the experimental one, the predicted time  $t_f$  should be very close to its experimental counterpart. Hence, knowing the geometric parameters of an experiment and the values of the liquid-air surface tension, measurements of  $t_f$  should allow one to determine the viscosity of air.

Similar physical arguments are used to determine the collapse time of a bubble in a deflating bubble experiment.<sup>22</sup> In such an experiment, a bubble placed on one end of a cylindrical tube deflates when the other end of the tube is opened and the pressured air in the bubble escapes through the tube.<sup>22</sup> The predicted collapse time can be used to determine the air-liquid surface tension of soap solutions.<sup>23,24</sup> However, these experiments with a non-moving bubble foot require a good image analysis program to obtain accurate data.<sup>22</sup> Here, as discussed at the end of section II, analyzing an experiment only require simple image processing performed with a free software.

## V. EXPERIMENTAL RESULTS AND DISCUSSION

We now validate our model with experiments. We work with geometric parameters of a funnel and fluid properties that make the Reynolds number at play sufficiently small so that

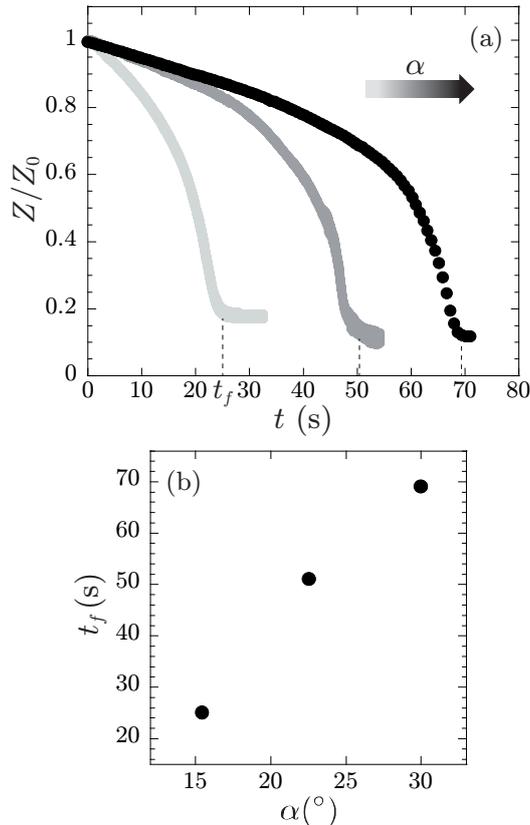


FIG. 3. (a) Temporal evolution of the position  $Z$  (i.e.,  $z/\cos\alpha$ ) of a film normalized by its initial position  $Z_0$  for three values of  $\alpha$  as indicated by the shades of gray of the symbols: (●) 15.5°, (●) 22.5°, and (●) 30°. The vertical dashed lines indicate the time at which the motion of a film ends  $t_f$ . (b) Variations of the time  $t_f$  as a function of  $\alpha$  for the experiments shown in (a). The length and radius of the tube are  $\ell = 1$  m and  $a = 3.2$  mm, and  $Z_0$  has a fixed value of  $93 \pm 3$  mm.

the air flow can be considered viscously dominated as discussed in section IV. Consequently, we should find that the experimental time  $t_f$  can be described by the expression predicted in section IV and that the dynamics can be rationalized by Eq. (1).

We investigate the motion of a film by varying either the half of the opening angle of a cone  $\alpha$  (Fig. 3), or the length of a tube  $\ell$  (Fig. 4), or its radius  $a$  (Fig. 5), while maintaining other parameters fixed. As shown in Fig. 3(a), Fig. 4(a) and Fig. 5(a) which report the temporal variations of the normalized position  $Z/Z_0$  for these sets of experiments, the response qualitatively resembles that of Fig. 2(b) for all varied parameters: the normalized position is a monotonically decreasing and concave function of time until the final position of a film is reached. When the experimental final time  $t_f$  is plotted as a function of  $\alpha$  for given

values of  $Z_0$ ,  $\ell$  and  $a$ , we find experiments correlates well predictions. Indeed, figure 3(b) shows that  $t_f$  increases with  $\alpha$  and its predicted expression derived in section IV varies as  $(1 - \cos \alpha)$  which for small enough  $\alpha$  increases as  $\alpha^2$ . Similar to these results, when the motion of a film is investigated for various  $\ell$  and fixed  $\alpha$ ,  $Z_0$  and  $a$  [see Fig. 4(b)], our data show that  $t_f$  increases with  $\ell$  as predicted. Our experimental findings show much stronger dependence of the time  $t_f$  on the radius  $a$  [see Fig. 5(b) which reports these variations for fixed  $Z_0$ ,  $\ell$  and  $\alpha$ ] when compared to its variation with the length  $\ell$  [Fig. 4(b)]. Indeed, to increase the time at which a film stops by an order of magnitude, one can either increase the length of a tube by a factor of 50 or divide its radius by 2 (see Fig. 4 and Fig. 5). This result is also consistent with the predicted time  $t_f$  which varies both as  $\ell$  and  $1/a^4$ .

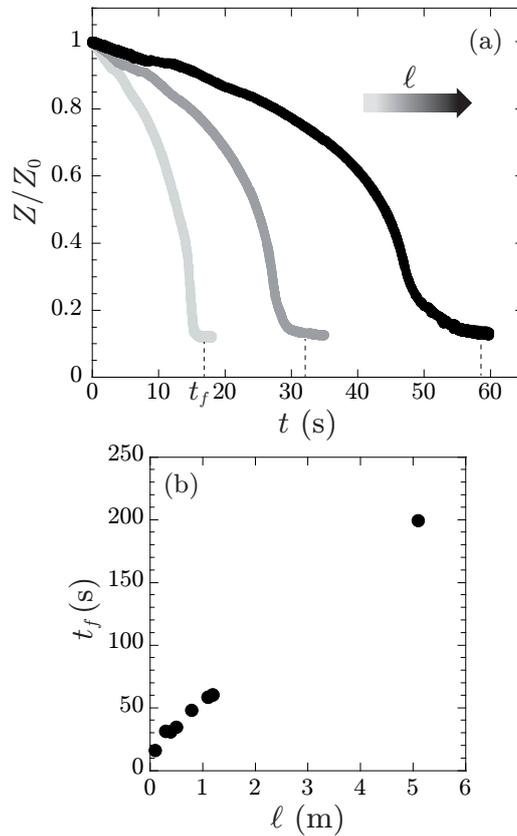


FIG. 4. (a) Evolution with time  $t$  of the normalized position  $Z/Z_0$  for three values of  $\ell$  as indicated by the shades of gray of the symbols: ( $\bullet$ ) 110 m, ( $\bullet$ ) 410 m, and ( $\bullet$ ) 1110 m. The vertical dashed lines indicate the duration of motion  $t_f$ . (b) Variations of the time  $t_f$  as a function of  $\ell$  for various experiments including those shown in (a). For all of these experiments, the half-opening angle  $\alpha$  is  $21.25^\circ$ , the radius of the tube is  $a = 3.2$  mm, and  $Z_0$  has a fixed value of  $104 \pm 2$  mm.

To provide a more quantitative comparison between experiments and modeling, we report in Fig. 6, the variations with time of  $(Z(t)/Z_0)^4$  for the experiments shown in Fig. 3, Fig. 4 and Fig. 5. As expected by the form of Eq. (1), we find that the plotted quantity is a linearly decreasing function of time. Hence, the motion of a film is well-described by the quasistatic model with an air flow that satisfies Darcy's law and we can now compare measurements of the duration of motion with our prediction.

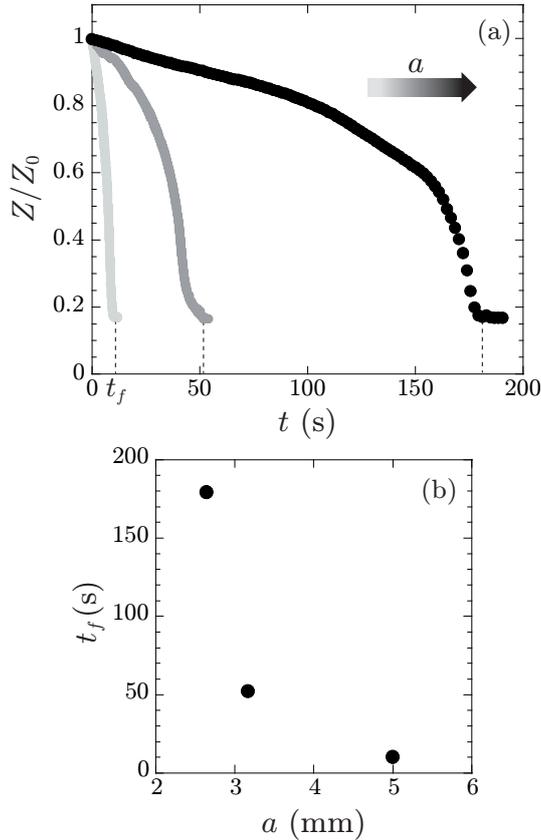


FIG. 5. ((a) Temporal evolution of the position  $Z$  of a film normalized by its initial position  $Z_0$  for three values of the radius of a tube as indicated by the shades of gray of the symbols: ( $\bullet$ ) 2.65 mm, ( $\bullet$ ) 3.2 mm, and ( $\bullet$ ) 5 mm. The vertical dashed lines indicate the time at which the motion of a film ends  $t_f$ . (b) Variations of the time  $t_f$  as a function of  $a$  for the experiments shown in (a). The half-opening angle  $\alpha$  is  $21.75 \pm 0.5^\circ$ , the length of the tube are  $\ell = 1$  m and  $Z_0$  has a fixed value of  $109 \pm 7$  mm.

Figure 7 shows the evolution of the measured time  $t_f^{exp}$  as a function of the prediction  $t_f^{th} = \frac{\eta_a \ell Z_0^4}{\gamma a^4} (1 - \cos \alpha)$  derived in section IV. As shown in this figure, our simple model well-

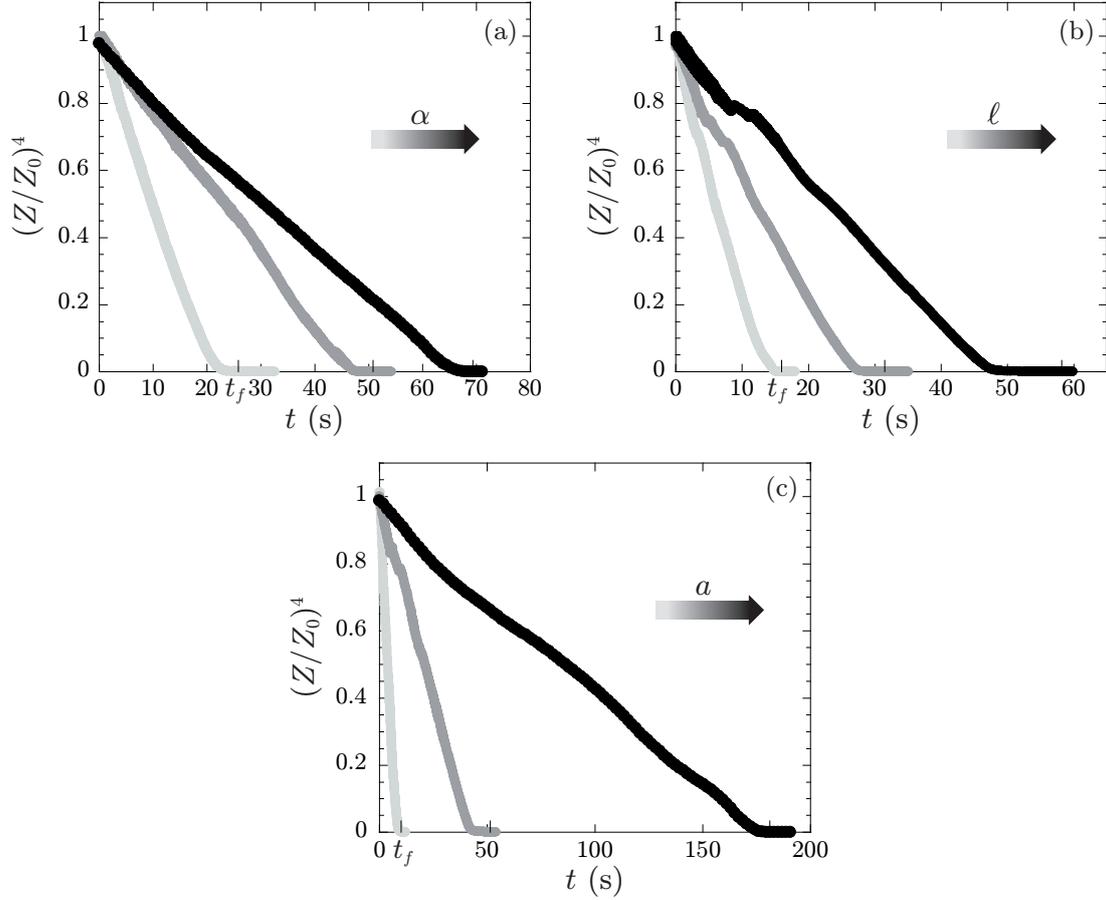


FIG. 6. Variations with time of  $(Z(t)/Z_0)^4$  for (a) three half-opening angles  $\alpha$  (data points correspond to those shown in Fig. 3), (b) three values of  $\ell$  (data points are those of Fig. 4) and (c) three different radii  $a$  (data points are those reported in Fig. 5); other parameters are identical to those of Fig. 3, Fig. 4 and Fig. 5. As predicted by our model, the plotted quantity in the three figures is a linearly decreasing function of time.

describes the duration of motion since experiments mirror predictions for our whole set of data obtained with  $\alpha = 15 - 30^\circ$ ,  $Z_0 = 60 - 120$  mm,  $a = 1.5 - 5$  mm and the length of a tube  $\ell$  that is varied over more than three orders of magnitude (0.01 – 12 m). As shown in Fig. 8, these data can be used to determine the dynamic viscosity of air. All of our data points are within 20 % of the tabulated value of air viscosity ( $\eta_a = 18.1 \mu\text{Pa s}$ ) for the temperature at which data were taken (20 °C); more than 80 % of the data are within 10 % of this expected value (see Fig. 8). It is also important to note that the average value (17.75  $\mu\text{Pa s}$ ) of the air viscosity deduced using our method is only 2.5 % smaller than the tabulated value which is

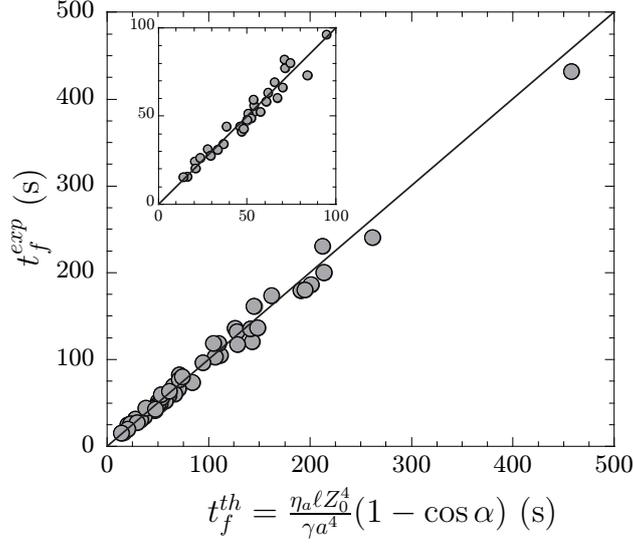


FIG. 7. Variations of the experimental time at which a film stops  $t_f^{exp}$  as a function of its theoretical counterpart  $t_f^{th}$  derived in the main text. Inset: magnification for times smaller than 100 s. The solid lines correspond to the best linear fit predicted by our model:  $t_f^{exp} = t_f^{th}$ . Each data point correspond to a value of  $\ell = 0.01 - 12$  m,  $a = 1.5 - 5$  mm,  $\alpha = 15 - 30$  °, and  $Z_0 = 60 - 120$  mm.

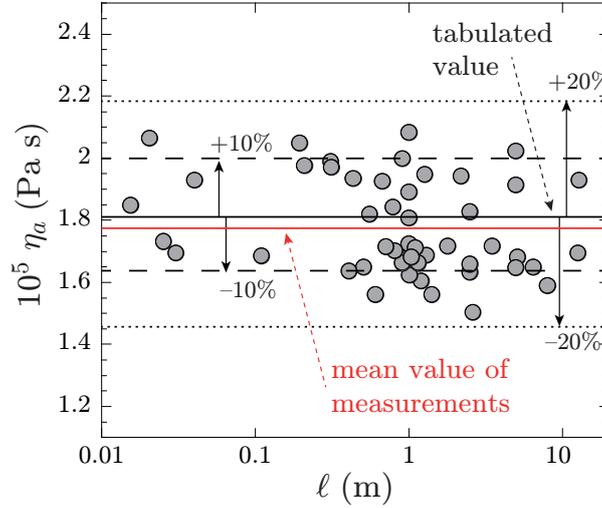


FIG. 8. Evolution with the length of a tube  $\ell$  varied over more than three orders of magnitude of the dynamic viscosity of air  $\eta_a$  deduced from our experimental measurements of the duration of motion of a film in a funnel as explained in the text. Parameters are identical to those of Fig. 7. The tabulated value of the viscosity of air ( $18.1 \mu\text{Pa s}$  at  $20$  °C) is indicated by the black solid line. The average value of these measurements is  $17.75 \mu\text{Pa s}$  (red solid line).

remarkable considering the numerous approximations made to establish our model based on simple physical arguments. It is also worth mentioning that the standard deviation  $\sigma_\eta$  for the measurements shown in Fig. 8 is quite small,  $\sigma_\eta = 1.54 \mu\text{Pa s}$ . Hence, our experiment offers a simple and inexpensive way to measure the dynamic viscosity of air which is not a trivial task as mentioned above.

## VI. CONCLUSION

We have discussed a simple method to measure the viscosity of air which is directly applicable to the classroom since the experiments are easy to perform and analyze at low cost and the physics behind them can be taught to student in undergraduate physics courses. Also, we have devoted a large section of the paper to the description of five assumptions and/or approximations that are made for these experiments and the interpretation of results so that student can also learn about the importance of reasonable approximations in physics research. In addition, using the setup described here, students will have the opportunity to observe a soap film propel itself against gravity.

## ACKNOWLEDGMENTS

We thank Franck Artzner for the rheometry that we used to determine the fluid viscosities and Benjamin Reichert and Arnaud Saint-Jalmes for the surface tension measurements.

## Appendix A: Comparison between predicted and experimental times $t_f$

Here, we discuss the validity of our model which is based on several assumptions and approximations that include a modeled volume of displaced air in a cone that is slightly larger than the experimental one. In what follows,  $t_f^{exp}$  and  $t_f^{th}$  denote experimental and theoretical times, respectively.

Using the physical arguments discussed in the main text, Eq. (1) describing the motion of a film is the solution of the following first-order ordinary differential equation:

$$Z^3 dZ = -\frac{\gamma a^4}{4\eta_a \ell (1 - \cos \alpha)} dt. \quad (\text{A1})$$

Using  $t_f^{th} = \frac{\eta_a \ell Z_0^4}{\gamma a^4} (1 - \cos \alpha)$  the predicted period of time after which a film stops moving, Eq.(A1) can be written

$$\frac{dt}{dZ} = -4Z^3 \frac{t_f^{th}}{Z_0^4}.$$

Hence, the experimental time  $t_f^{exp} = \int_0^{t_f} dt$  reads

$$t_f^{exp} = \int_{Z_0}^{Z_f} \left( \frac{dt}{dZ} \right) dZ = -t_f^{th} \frac{4}{Z_0^4} \int_{Z_0}^{Z_f} Z^3 dZ$$

so that

$$t_f^{exp} = t_f^{th} \left[ 1 - \left( \frac{Z_f}{Z_0} \right)^4 \right]. \quad (\text{A2})$$

In our experiments, typical values of the initial ( $Z_0$ ) and final ( $Z_f$ ) positions of a film are  $10^{-1}$  m and  $10^{-2}$  m, respectively. Hence, the value of the term  $\left( \frac{Z_f}{Z_0} \right)^4$  in Eq. (A2) is  $10^{-4}$  so that  $t_f^{exp}$  should typically be 99.99%  $t_f^{th}$ . To conclude, the assumptions and approximations made to establish our model seem reasonable since the predicted time should compare very well with the measured one.

---

\* [pascal.panizza@univ-rennes1.fr](mailto:pascal.panizza@univ-rennes1.fr)

† [laurent.courbin@univ-rennes1.fr](mailto:laurent.courbin@univ-rennes1.fr)

- <sup>1</sup> N.-A. Goy, Z. Denis, M. Lavaud, A. Grolleau, N. Dufour, A. Deblais, and U. Delabre, “Surface tension measurements with a smartphone,” *Phys. Teach.*, **55**, 498-499 (2017).
- <sup>2</sup> P. G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré, *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves* (Springer, New-York, 2004).
- <sup>3</sup> R. M. Digilov and M. Reiner, “Weight-controlled capillary viscometer,” *Am. J. Phys.*, **73**(11), 1020-1022 (2005).
- <sup>4</sup> Y. Shimokawa, Y. Matsuura, T. Hirano, and K. Sakai, “Gas viscosity measurement with diamagnetic-levitation viscometer based on electromagnetically spinning system,” *Rev. Sci. Instrum.*, **87**, 125105-1–4 (2016).
- <sup>5</sup> F. D. Dos Santos and T. Ondarçuhu, “Free-Running Droplets,” *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 2972-5 (1995).
- <sup>6</sup> Y. Sumino, N. Magome, T. Hamada, and K. Yoshikawa, “Self-Running Droplet: Emergence of Regular Motion from Nonequilibrium Noise,” *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 068301-4 (2005).
- <sup>7</sup> H. Linke, B. J. Alemán, L. D. Melling, M. J. Taormina, M. J. Francis, C. C. Dow-Hygelund, V. Narayanan, R. P. Taylor, and A. Stout, “Self-Propelled Leidenfrost Droplets,” *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 154502-4 (2006).
- <sup>8</sup> M. K. Chaudhury and G. M. Whitesides, “How to make water run uphill,” *Science*, **256**, 1539-41 (1992).
- <sup>9</sup> E. Lorenceau and D. Quéré, “Drops on a conical wire,” *J. Fluid Mech.*, **510**, 29-45 (2004).
- <sup>10</sup> M. Reyssat, L. Courbin, E. Reyssat, and H. A. Stone, “Imbibition in geometries with axial variations,” *J. Fluid Mech.*, **615**, 335-344 (2008).
- <sup>11</sup> P. Renvoisé, J. W. M. Bush, M. Prakash, and D. Quéré, “Drop propulsion in tapered tubes,” *EPL*, **86**, 64003-5 (2009).
- <sup>12</sup> E. Reyssat, “Drops and bubbles in wedges,” *J. Fluid Mech.*, **748**, 641-662 (2014).
- <sup>13</sup> L. Salkin, A. Schmit, P. Panizza, and L. Courbin, “Influence of boundary conditions on the existence and stability of minimal surfaces of revolution made of soap films,” *Am. J. Phys.* **82**(9), 839-847 (2014).

- <sup>14</sup> The formation mechanisms of the interfacial bubbles and the variations of their size with the parameters of the experiment will be published elsewhere.
- <sup>15</sup> <https://imagej.nih.gov/ij/>.
- <sup>16</sup> <http://www.gnuplot.info/>.
- <sup>17</sup> L. Salkin, A. Schmit, R. David, A. Delvert, E. Gicquel, P. Panizza, and L. Courbin, “Interfacial bubbles formed by plunging thin liquid films in a pool,” *Phys. Rev. Fluids* **2**, 063604-1–10 (2017).
- <sup>18</sup> D. J. Ferguson and S. J. Cox, “The motion of a foam lamella traversing an idealised bi-conical pore with a rounded central region,” *Colloids Surf. A* **438**, 56-62 (2013).
- <sup>19</sup> W. R. Rossen, “Theory of mobilization pressure gradient of flowing foams in porous media,” *J. Colloid Interface Sci.* **136**, 1-16 (1990).
- <sup>20</sup> M. Clerget, A. Delvert, L. Courbin, and P. Panizza, “Different scenarios of shrinking surface soap bubbles,” to appear in *Am. J. Phys.*
- <sup>21</sup> E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, and C. D. Mitescu, ‘Physical Hydrodynamics, 2nd ed. (Oxford University Press, 2015).
- <sup>22</sup> D. P. Jackson and S. Sleyman, “Analysis of a deflating soap bubble,” *Am. J. Phys.*, **78**, 990 (2010).
- <sup>23</sup> L. Sibaiya, “Time of collapse of a soap bubble,” *Nature London*, **3784**, 527 (1942).
- <sup>24</sup> Gören Rämme, “Surface tension from deflating a soap bubble,” *Phys. Educ.* **32**, 191(1997).