Dynamique non-linéaire d'une soufflante en rotation

Antoine Mabilia

▶ **To cite this version:**

Antoine Mabilia. Dynamique non-linéaire d'une soufflante en rotation. Autre. Université de Lyon, 2020. Français. NNT : 2020LYSEC026 . tel-03152435

HAL Id: tel-03152435
https://theses.hal.science/tel-03152435

Submitted on 25 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 2020LYSEC26 Année 2020

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE MEGA
MÉCANIQUE - ÉNERGÉTIQUE - GÉNIE CIVIL - ACOUSTIQUE

par

Antoine MABILIA

DYNAMIQUE NON-LINÉAIRE D'UNE SOUFFLANTE EN ROTATION

Soutenue publiquement le 16 octobre 2020, devant le jury d'examen :

R. Dufour	Professeur, INSA de Lyon	Président du jury
J.-F. Deü	Professeur, Conservatoire National des Arts et Métiers	Rapporteur
G. Kerschen	Professeur, Université de Liège	Rapporteur
C. Esteves	Ingénieure, Safran Aircraft Engines	Examinatrice
C. Gibert	Ingénieur de Recherche CNRS, École Centrale de Lyon	Encadrant
F. Thouverez	Professeur, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail de thèse : Monsieur Jean-François Deü et Monsieur Gaëtan Kerschen qui ont rapporté ce long mémoire ainsi que Monsieur Régis Dufour qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je souhaite remercier Fabrice Thouverez qui a été l'instigateur du projet PHARE#1 et qui m'a permis de travailler sur cet ambitieux projet à travers cette thèse. Je souhaite également exprimer mes plus sincères remerciements à Claude Gibert pour son implication colossale dans le développement du banc d'essais PHARE#1 et durant les essais en rotation ; sans lui, le banc d'essais et ainsi ces travaux de thèse n'auraient pu voir le jour. De plus, je tiens également à remercier Claude pour ses conseils avisés, pour m'avoir guidé tout au long de cette thèse et transmis ses nombreuses connaissances aussi bien sur les aspects expérimentaux que numériques contenus dans ce travail de thèse. Je remercie Claude une dernière fois pour la rigueur scientifique qu'il a appliqué dans la relecture du mémoire et qui a permis d'aboutir à un rendu complet et exhaustif.

Je tiens à exprimer ma très grande reconnaissance à Édouard De Jaeghere, ingénieur à Safran Aircraft Engines, pour la confiance qu'il m'a témoigné lorsqu'il m'a confié cette thèse. Je remercie aussi vivement Cécile Esteves, ingénieure à Safran Aircraft Engines, qui a officiellement pris la suite d'Édouard lors des dernières années de thèse mais qui m'encadrait déjà officieusement durant les premières années.

Je souhaite remercier toutes les personnes qui ont contribué à la mise en œuvre du banc d'essais PHARE#1 et particulièrement Laura Giovannoni, Xavier Leblanc et Sandra Dubois ainsi que Lionel Sanchez et Stéphane Lemahieu qui ont été présents durant la totalité de cette thèse et avec qui ce fut un plaisir de travailler et d'échanger.

J'adresse des remerciements tout particulier à Colas Joannin qui a facilité mon intégration dans le laboratoire et m'a guidé durant mes premières simulations en dynamique non-linéaire. De plus, Colas a effectué un travail considérable de réduction de modèle qui a grandement contribué à la réussite de mes investigations numériques.

Un très grand merci à Isabelle Tixier et Olivier Dessombz qui m'ont facilité la vie lors de mes démarches administratives ou lorsque je rencontrais des désagréments informatiques. Par la même occasion, j'adresse une nouvelle fois mes remerciements à Lionel Sanchez qui a accédé à mes nombreuses demandes informatiques.

Qui dit long mémoire, dit relecture fastidieuse et c'est pourquoi je tiens à remercier infiniment Cécile et ma mère qui ont parcouru en long, en large et en travers ce mémoire de thèse (et accessoirement Jean-Paul et mon père qui ont fait l'effort de relire le premier chapitre !).

Je souhaite adresser mes plus profonds et sincères remerciements à ma famille, et en particulier ma mère et mon père (notamment pour ses conseils nocturnes !), ainsi qu'à ma belle-famille pour leur présence et leur soutien sans faille durant ces longues années de thèse ainsi que pour leurs encouragements répétés qui m'ont aidé à conclure ce mémoire.

Un immense merci à tous mes amis avec qui j'ai pu passer de très bons moments et qui m'ont permis de penser à autre chose qu'à une soufflante en rotation. Parmi ceux-ci, je vais particulièrement remercier ceux grâce à qui j'ai pu passer un week-end de soutenance inoubliable : Damien, Dudu, Bruno, Elsa, Quentin, Glenou, Floflo, Paulo, Tonton, Jerem, Jésus (le vrai, pas celui invisible) et Gaillos ! Mais aussi ceux qui n'ont pas pu être présents mais à qui j'ai pensé pendant ce week-end : Tao, Zozo, Gaëtan, Steph, Alex, Jerem, Justine, Ginger, Marty et Pierre-Luc !

Enfin, je ne peux que conclure ce passage en remerciant celle qui partage ma vie depuis de nombreuses années : Cécile. Tu as été avec moi au quotidien dans les bons comme dans les mauvais passages de ces années de thèse, tu as su m'encourager, me soutenir, me supporter, me réconforter et me motiver pour conclure ces travaux et sans toi rien de tout cela n'aurait été possible. Je me rends compte tous les jours de la chance que j'ai de t'avoir à mes côtés.

Je n'oublie pas Mimi, Cannelle et Leia pour qui j'ai une immense pensée et qui m'ont aussi supporté au quotidien durant ces années.

Résumé

Dans une industrie aéronautique de plus en plus concernée par les enjeux environnementaux de notre époque, la maîtrise du comportement dynamique revêt un intérêt tout particulier dans le respect des normes environnementales. En effet, celle-ci permet un dimensionnement au plus juste des structures et donc une optimisation de la masse totale du turboréacteur, tout en permettant de maintenir un niveau exemplaire de fiabilité et de sureté ainsi que d'excellentes performances. S'intégrant pleinement dans cette thématique, les problématiques de désaccordage et de dynamique non-linéaire sont éminemment étudiées par la recherche académique actuelle, aboutissant au développement de méthodes numériques permettant de prendre en compte ces deux effets simultanément. Toutefois, la représentativité de ces méthodes par rapport au comportement en fonctionnement peut difficilement être évaluée en raison du peu d'essais disponibles dans la littérature.

Outre le perfectionnement de la compréhension et de la prédiction des phénomènes vibratoires des roues aubagées, ces travaux de thèse revêtent un double enjeu : expérimental et numérique. Celui-ci vise à étudier la représentativité des modélisations et méthodes numériques, notamment développées au LTDS sur les problématiques de désaccordage et de dynamique non-linéaire, par rapport à des essais en rotation sur une soufflante industrielle de dernière génération en matériau composite. À cet effet, le banc d'essais PHARE#1, développé ces dernières années au LTDS, permet de tester des roues aubagées à l'échelle 1:1, en rotation dans le vide, tout en excitant les aubes au moyen d'actionneurs piézoélectriques. Les méthodes numériques exploitées pour simuler la soufflante reposent sur le concept de sous-structuration associé à une triple synthèse modale, permettant ainsi la prise en compte du désaccordage au sein de problèmes non-linéaires de taille industrielle.

Deux cas d'études, présentant un aspect expérimental et numérique, ont été réalisés et analysés durant ces travaux de thèse. Ces derniers exploitent une excitation au moyen d'actionneurs piézoélectriques dont la modélisation a nécessité le développement d'une technique de condensation des degrés de liberté électriques dans le but d'exploiter les méthodes numériques de réduction et de résolution purement mécaniques. La première étude a été accomplie sur une aube de la soufflante enchâssée dans un mors, ce qui a permis de concentrer les analyses et les comparaisons, entre essais et simulations numériques, sur les aspects non-linéaires de contact et de frottement en pied d'aube. La seconde étude a été réalisée sur la soufflante composite en rotation dans le vide parvenant ainsi à des analyses et comparaisons concernant le désaccordage de la réponse et des formes modales, couplé à des effets non-linéaires. Les résultats obtenus permettent de montrer une très bonne représentativité des simulations numériques par rapport aux essais en rotation en termes de désaccordage, notamment à l'égard des analyses à diamètres et spatiales des réponses et des modes.

Mots-clés : soufflante, dynamique non-linéaire, essais en rotation, excitation piézoélectrique, désaccordage, frottement, réduction de modèle, synthèse modale, sous-structuration

Abstract

In an aeronautics industry increasingly concerned by the environmental issues of our time, the mastery of dynamic behaviour is of particular interest in terms of compliance with the environmental legislation. Indeed, this allows the structures to be designed as accurately as possible and therefore optimizes the total weight of the turbojet engine, while maintaining an exemplary level of reliability and safety as well as excellent performances. Fully integrated into this theme, the problematics of mistuning and nonlinear dynamics are eminently studied by present academic research, leading to the development of numerical methods that allow these two effects to be taken into account simultaneously. However, the representativity of these numerical methods with respect to the behavior of an actual engine can hardly be evaluated because of the few tests available in the literature.

In addition to improving the understanding and prediction of bladed disks vibratory phenomena, this doctoral work has a twofold objective : experimental and numerical. The latter aimed at investigating the representativity of numerical models and methods, particularly developed at the LTDS on the problematics of mistuning and nonlinear dynamics, in comparison with rotating tests on a latest-generation industrial fan made of composite materials. For this purpose, the PHARE#1 test bench, developed over the last few years at the LTDS, allows the testing of bladed disks on a 1:1 scale, rotating in vacuum, while exciting the blades by means of piezoelectric actuators. The numerical methods used to simulate the fan are based on the concept of substructuring associated with a triple modal synthesis, thus allowing the consideration of mistuning within nonlinear problems of industrial size.

Two case studies, both experimental and numerical, were conducted and analyzed during this doctoral work. These studies exploit an excitation by means of piezoelectric actuators whose modeling required the development of an electrical degrees of freedom condensation technique in order to benefit from the numerical methods of purely mechanical reduction and resolution. The first study has been carried out on a fan blade embedded in clamping jaws. This application made possible to focus on the nonlinear aspects of contact and friction at the dovetail by comparing the test results and the numerical simulations. The second study was performed on the composite bladed fan rotating in vacuum, thus achieving analyses and comparisons concerning the mistuning of the response and modal shapes coupled with nonlinear effects. The results obtained show a very good representativity of the numerical simulations with respect to the rotating tests in terms of mistuning, especially with respect to the diameter and spatial analyses of the responses and modes.

Keywords : fan, nonlinear dynamics, rotational testing, piezoelectric excitation, mistuning, friction, model order reduction, modal synthesis, substructuring

Table des matières

Introduction **1**

I Dynamique des roues aubagées **5**
1 Technologies des turboréacteurs . . . 6
1.1 Présentation des turboréacteurs . . . 6
1.2 Évolutions technologiques des soufflantes . . . 9
2 Modélisation des roues aubagées . . . 12
2.1 Équation du mouvement d'une structure en rotation . . . 13
2.2 Non-linéarités des roues aubagées . . . 19
2.3 Structures à symétrie cyclique . . . 23
2.4 Éléments de désaccordage . . . 30
3 Dimensionnement des roues aubagées . . . 32
3.1 Sources de vibration . . . 32
3.2 Outils de dimensionnement . . . 34
4 Bilan . . . 38

II Étude fréquentielle non-linéaire **41**
1 Méthode de l'équilibrage harmonique . . . 42
1.1 Méthodes de résolution du problème dynamique non-linéaire . . . 42
1.2 Aspects théoriques . . . 44
1.3 Implémentation et résolution . . . 45
1.4 Évaluation des termes non-linéaires . . . 47
1.5 Techniques de continuation . . . 49
1.6 Condensation dans le domaine fréquentiel . . . 53
2 Solutions périodiques d'un système non-linéaire autonome . . . 55
2.1 Analyse modale linéaire . . . 56
2.2 Modes normaux non-linéaires . . . 56
2.3 Modes complexes non-linéaires . . . 59
3 Exemple illustratif . . . 63
3.1 Construction du modèle . . . 64
3.2 Réponses forcées du modèle illustratif . . . 67
3.3 Illustration des modes complexes non-linéaires . . . 71
4 Bilan . . . 73

III Méthodes de réduction par synthèse modale **75**
1 Techniques de synthèse modale linéaire . . . 76
1.1 Réduction de modèle par projection de Galerkine . . . 76
1.2 Méthodes classiques de synthèse modale . . . 78
1.3 Méthodes de réduction des frontières . . . 83
2 Synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée . . . 84
2.1 Aspects théoriques . . . 85

2.2 Compléments et précisions . . . 88
2.3 Performances . . . 89
2.4 Limitations . . . 91
3 *Component Nonlinear Complex Mode Synthesis* . . . 92
3.1 Aspects théoriques . . . 93
3.2 Compléments et précisions . . . 97
3.3 Performances . . . 98
3.4 Limitations . . . 102
4 Bilan . . . 103

IV Modélisation piézomécanique 105
1 Éléments de piézoélectricité . . . 106
1.1 Matériaux piézoélectriques . . . 106
1.2 Processus de polarisation . . . 108
1.3 Mécanismes piézoélectriques . . . 109
2 Formulation d'un problème piézomécanique linéaire . . . 110
2.1 Lois de comportement piézoélectrique . . . 110
2.2 Formulation variationnelle . . . 112
2.3 Formulation éléments finis . . . 114
3 Condensation du problème piézomécanique . . . 116
3.1 Condensation des degrés de liberté électriques . . . 116
3.2 Validation de la méthode de condensation . . . 118
4 Bilan . . . 120

V Essais et simulations numériques d'une aube en composite tissé 123
1 Analyse expérimentale non-linéaire . . . 124
1.1 Dispositif expérimental . . . 124
1.2 Système d'excitation piézoélectrique . . . 128
1.3 Méthodes expérimentales . . . 136
2 Simulations numériques non-linéaires . . . 147
2.1 Modélisation numérique . . . 147
2.2 Méthodes numériques non-linéaires . . . 152
2.3 Études d'influence . . . 162
3 Confrontation entre essais vibratoires et simulations numériques . . . 169
3.1 Étude linéaire . . . 169
3.2 Étude non-linéaire . . . 173
4 Bilan . . . 183

VI Essais et simulations numériques d'une soufflante en rotation 185
1 Analyse expérimentale non-linéaire en rotation . . . 186
1.1 Banc d'essais PHARE#1 . . . 186
1.2 Système d'excitation piézoélectrique . . . 195
1.3 Méthodes expérimentales . . . 200
2 Simulations numériques non-linéaires d'une soufflante désaccordée . . . 214
2.1 Modélisation numérique . . . 214
2.2 Méthodes numériques non-linéaires . . . 217
2.3 Influence du désaccordage de la soufflante . . . 224
3 Confrontation entre essais en rotation et simulations numériques . . . 231
3.1 Comparaison des paramètres modaux du système linéaire sous-jacent 231
3.2 Influence du coefficient de frottement sur la réponse non-linéaire . . . 238
3.3 Comparaison des réponses à une excitation localisée . . . 243

3.4 Comparaison des réponses à une excitation à diamètres 252
4 Bilan 272

Conclusion **275**

Références **283**

Annexes **297**

A Méthode des Lagrangiens dynamiques (DLFT) **299**

B Évaluation des matrices jacobiennes analytiques **305**
1 Matrice jacobienne analytique d'un problème non-linéaire et non-autonome 305
1.1 Équations générales 305
1.2 Termes non-linéaires 306
1.3 Équations de continuation 307
2 Matrice jacobienne analytique d'un problème non-linéaire autonome 307
2.1 Équations générales 307
2.2 Termes non-linéaires 308
2.3 Équations de continuation 309
3 Matrice jacobienne semi-analytique de la synthèse modale non-linéaire . . . 309
4 Matrice jacobienne semi-analytique de la CNCMS 311

C Caractéristiques techniques des composants **315**
1 Jauges de déformation 316
2 Patchs piézoélectriques 317

D Figures complémentaires au chapitre VI **319**

Table des figures **340**

Liste des tableaux **347**

Introduction

Contexte industriel et scientifique

Outre le perfectionnement de la fiabilité et de la sureté des appareils, l'enjeu industriel majeur de l'industrie aéronautique, et notamment des motoristes, au XXI^{e} siècle a trait au respect des objectifs environnementaux de plus en plus drastiques, liés à une prise de conscience de l'urgence climatique. Ceux-ci sont fixés au sein de l'Union Européenne par l'*Advisory Council for Aeronautics Research in Europe* (ACARE) qui préconise une réduction de 75 % des émissions de dioxyde de carbone (CO_2), de 90 % des oxydes d'azote (NO_x) et de 65 % du bruit des avions en vol pour l'horizon 2050 à travers le programme de recherche *CleanSky 2*.

Afin de satisfaire ces objectifs de diminution de l'empreinte carbone, les motoristes développent d'ingénieuses solutions technologiques dont la principale consiste à augmenter le diamètre du turboréacteur dans l'optique d'augmenter son taux de dilution (terme défini dans le chapitre I) et ainsi son rendement et ses performances. Toutefois, sans optimisation supplémentaire, cette solution aboutirait également à une augmentation de la masse totale du turboréacteur atténuant ses bénéfices en termes de rejet de gaz à effet de serre.

La soufflante, roue aubagée positionnée en amont du turboréacteur, est directement impactée par cette augmentation du diamètre du turboréacteur tant en termes de masse qu'en termes d'efforts aérodynamiques subis. Par conséquent, celle-ci a largement bénéficié d'innovations technologiques lors des dernières décennies. L'emploi d'aubes à large corde, permettant la réduction du nombre d'aubes composant la soufflante, et leur fabrication en matériaux composites constituent les évolutions technologiques majeures apportées à ce composant primordial. Ces innovations aboutissent à un important allègement de la soufflante, comparé à une soufflante métallique, mais modifient en contrepartie son comportement dynamique. En effet, bien que son amortissement structural soit augmenté, sa souplesse et les chargements aérodynamiques subis par les aubes sont aussi accrus entraînant ainsi des amplitudes vibratoires plus importantes qui complexifient le dimensionnement de la soufflante et engendrent des comportements dynamiques plus ardus à prédire.

C'est dans ce contexte d'innovations technologiques en lien avec le respect des objectifs environnementaux que le banc d'essais PHARE#1 (acronyme pour Plateforme macHines tournantes pour la mAîtrise des Risques Environnementaux) a vu le jour au sein de la plateforme d'essais Dynamique des Machines Tournantes du LTDS. Ce module PHARE#1 s'intègre dans le projet EQUIPEX (signifiant équipements d'excellence) PHARE débuté en 2011 et comprenant deux autres modules nommés PHARE#2 et PHARE#3. Ces différents modules partagent des objectifs communs liés au perfectionnement des moyens de transport et de production d'énergie dans lesquels les machines tournantes, et particulièrement les roues aubagées, occupent une place centrale.

L'objectif du module PHARE#2 est l'étude des instabilités aérodynamiques et aéroélastiques ainsi que l'étude des signatures aéroacoustiques en présence de fluide, nécessitant une approche multiphysique et multiéchelle. Le module numéro trois permet, quant à lui,

d'étudier les instabilités structurelles liées à des charges extérieures extrêmes en exploitant un excitateur hydraulique six axes.

Le module numéro un a été conçu dans la perspective de parfaire la compréhension des phénomènes vibratoires affectant les machines tournantes et particulièrement les roues aubagées. Il s'agit d'un banc d'essais de recherche dédié aux essais vibratoires de structures tournantes à l'échelle 1:1, employées dans l'industrie. L'un des intérêts scientifiques principaux du banc d'essais PHARE#1 est d'étudier les structures tournantes d'un point de vue purement mécanique. À cet effet, celles-ci sont placées dans une cuve sous-vide permettant de supprimer les effets aéroélastiques et aérodynamiques. De plus, la motorisation électrique du banc permet de mettre en rotation ces dernières jusqu'à leur vitesse maximale de fonctionnement.

La conception du banc ainsi que son importante instrumentation sont telles que celui-ci est capable de tester de nombreux types de machines tournantes industrielles mais aussi de répondre à de multiples problématiques posées dans différentes thématiques de recherche et notamment celle relative à la réponse forcée des roues aubagées. Cette thématique de réponse forcée des roues aubagées est par ailleurs au cœur de la première campagne d'essais du banc PHARE#1, débutée en fin d'année 2017, consistant à tester en rotation une soufflante en matériau composite à échelle réelle. De plus, cette première campagne d'essais se trouve au centre des travaux expérimentaux réalisés durant cette thèse.

Compte tenu de la thématique de recherche abordée, la soufflante nécessite d'être excitée, durant la rotation et sous-vide, avec des amplitudes de vibration réalistes par rapport à des situations de fonctionnement. Cette excitation est réalisée au moyen d'un système d'actionneurs piézoélectriques permettant d'exciter de façon indépendante toutes les aubes de la soufflante composite en rotation.

En prime d'être d'un intérêt considérable pour un motoriste aéronautique afin de caractériser finement le comportement vibratoire, linéaire mais aussi non-linéaire, d'une roue aubagée en rotation d'un point de vue structural, le banc PHARE#1 est également un atout primordial pour la recherche académique. En effet, ce dernier permet de constituer une base de données expérimentales importante et précise permettant de valider la représentativité des modélisations et méthodes numériques développées sur la thématique étudiée ; particulièrement en ce qui concerne la thématique de la réponse forcée des roues aubagées puisque la soufflante testée permet de mettre en exergue plusieurs problématiques liées à cette thématique principale.

La première problématique est relative aux effets non-linéaires affectant les réponses forcées des structures. En effet, la technologie à aubes rapportées, exploitée sur les soufflantes actuelles, permet de bénéficier du contact et du frottement entre le pied des aubes et le disque dans l'intention d'atténuer les amplitudes vibratoires subies par la soufflante. Toutefois, ces phénomènes sont par essence non-linéaires et nécessitent de faire fi des hypothèses de linéarité, habituellement employées en bureau d'étude, afin de considérer précisément leur forte influence sur la réponse forcée dynamique.

La seconde concerne le désaccordage des structures, terminologie désignant l'ensemble des disparités structurales ou géométriques existantes entre les différents secteurs d'une roue aubagée, rompant ainsi sa symétrie cyclique. Celui-ci, inhérent à toute roue aubagée, influe fortement la réponse forcée de la soufflante testée ; d'autant plus que cette dernière présente un important désaccordage puisqu'il s'agit d'un démonstrateur de soufflante composite produit en très petite série.

La prise en compte des effets non-linéaires et ceux liés au désaccordage de la soufflante nécessite des outils et méthodes numériques adéquats afin de simuler, le plus finement possible, le comportement vibratoire de la soufflante étudiée et ainsi de parfaire la prédiction

des phénomènes vibratoires. À ce propos, de nombreux travaux effectués au LTDS traitent de ces différentes problématiques liées à la réponse forcée des roues aubagées.

Ainsi, des techniques fréquentielles de résolution de problèmes non-linéaires ont été largement employées pour évaluer des non-linéarités de contact et de frottement [29, 75, 78, 99, 122, 151, 190]. La plupart de ces travaux exploitent la méthode des Lagrangiens dynamiques [151, 152] permettant de résoudre les lois de contact et de frottement au moyen d'une alternance dans les domaines temporel et fréquentiel.

Plus récemment, la problématique du désaccordage a été abordée d'un point de vue linéaire [176] sur des éléments de turboréacteurs, à savoir des redresseurs. Cette problématique requiert l'application de méthodes de réduction dans le but de réduire la taille initiale du modèle numérique étudié, qui plus est, lorsque celui-ci est un modèle exploité dans l'industrie.

Toutefois, la présence de non-linéarités au cœur du problème désaccordé rend la plupart des méthodes classiques de réduction de modèle inadaptées, notamment en termes de temps et de ressources de calcul, c'est pourquoi Joannin [99, 101, 102] a développé une technique appropriée pour résoudre ce problème complexe. Cette méthode de réduction, nommée CNCMS ou triple synthèse modale, exploite la notion de mode complexe non-linéaire, établie par Laxalde [122, 125], comme base de réduction associée aux méthodes de réduction de Craig-Bampton et de synthèse modale des modes d'interface. La CNCMS est au centre des travaux numériques réalisés dans cette thèse aboutissant à l'évaluation de la dynamique non-linéaire d'une soufflante en rotation.

Objectifs des travaux de thèse

Ces travaux de thèse revêtent un double enjeu, expérimental et numérique, s'inscrivant dans la lignée des travaux menés par la recherche, notamment au LTDS, dans le but de perfectionner la compréhension et la prédiction des phénomènes vibratoires des roues aubagées. L'objectif principal de ces travaux de thèse consiste à étudier la représentativité des modélisations et méthodes numériques, notamment développées au LTDS sur les problématiques de désaccordage et de dynamique non-linéaire, par rapport à des essais en rotation sur une soufflante industrielle en matériau composite.

D'un point de vue expérimental, le banc d'essais, l'instrumentation de la soufflante ainsi que le système d'excitation par actionneurs piézoélectriques de cette dernière jouent un rôle prépondérant dans la qualité et la précision des mesures dynamiques. En particulier, le système d'excitation permet de faire ressortir les effets non-linéaires liés au contact et au frottement et dont le développement constitue l'un des objectifs de ces travaux expérimentaux. De même, les méthodes expérimentales, via des outils numériques ou des protocoles expérimentaux, sont indispensables à l'excitation des aubes et au post-traitement des données dynamiques aboutissant à l'analyse des résultats expérimentaux. Aussi, celles-ci nécessitent aussi d'être développées pour cette application.

D'un point de vue numérique, l'exploitation des méthodes liées au problème désaccordé non-linéaire sur un modèle numérique de très grande taille employé dans l'industrie constitue l'un des enjeux principaux de l'étude dynamique de la soufflante. De plus, afin de pouvoir comparer directement les mesures issues du dispositif expérimental et les simulations, la modélisation numérique des actionneurs piézoélectriques et des efforts transmis par ces derniers aux aubes est inéluctable. Or, le couplage piézomécanique intrinsèque à leur comportement ne permet pas d'exploiter les techniques numériques mentionnées précédemment. Par conséquent, il est également essentiel de déployer une méthode qui permette de découpler le problème piézomécanique tout en conservant une excellente représentation mécanique des actionneurs et des efforts associés.

Constitution du mémoire

Ce mémoire de thèse est organisé en six chapitres. Les quatre premiers sont axés sur la théorie des méthodes développées et exploitées tout en proposant des exemples simples permettant leur compréhension et leur validation. Les deux derniers chapitres sont, quant à eux, consacrés à l'application industrielle numérique et expérimentale sur une soufflante.

Le chapitre I introduit largement le sujet des roues aubagées aussi bien technologiquement que numériquement ou en termes de dimensionnement vibratoire.

Le chapitre II est consacré aux méthodes de résolution de problèmes non-linéaires dynamiques et particulièrement les techniques fréquentielles telle la méthode de l'équilibrage harmonique qui permet d'introduire le formalisme propre aux approches fréquentielles, fil conducteur du travail numérique de cette thèse. La notion de mode complexe non-linéaire, exploitée comme base de réduction dans les techniques de réduction du chapitre III, est présentée dans un second temps. Ce chapitre s'achève par un exemple phénoménologique mettant en application ces deux techniques et exposant les principaux phénomènes vibratoires non-linéaires.

Le chapitre III traite des différentes techniques de réduction employées dans ce travail de thèse : des méthodes classiques de synthèse modale linéaire telle la méthode de Craig-Bampton, aux méthodes plus avancées comme la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée qui exploite le calcul des modes complexes non-linéaires pour reconstruire la réponse forcée. Une technique associant synthèse modale non-linéaire et sous-structuration est finalement exposée pour ce qui constitue le cœur de la réduction des roues aubagées de ce travail : la CNCMS pour *Component Nonlinear Complex Mode Synthesis*.

Le chapitre IV est relatif à la modélisation numérique des actionneurs piézoélectriques. La piézoélectricité, les matériaux piézoélectriques ainsi que leurs propriétés sont tout d'abord introduits. Le problème piézomécanique est ensuite mis en équation avant de détailler la technique permettant de découpler ce problème piézomécanique afin d'exploiter les techniques de résolution et de réduction exposées dans les chapitres précédents.

Le chapitre V expose la première application industrielle réalisée sur une aube de soufflante enchâssée dans un mors. La partie expérimentale détaille le montage expérimental mis en œuvre ainsi que le système d'excitation par actionneurs piézoélectriques mais également les méthodes expérimentales développées. La partie numérique est consacrée au modèle numérique exploité, à l'application des méthodes numériques ainsi qu'à des études d'influence portant sur plusieurs paramètres de résolution. Le chapitre se conclut sur la confrontation linéaire et non-linéaire des résultats numériques et expérimentaux.

Le chapitre VI finalise ce mémoire en présentant l'application industrielle principale de ce travail de thèse fondée sur les résultats expérimentaux obtenus lors des essais en rotation de la soufflante composite à l'intérieur de l'enceinte sous vide du banc PHARE#1 et sur les simulations numériques en dynamique non-linéaire d'une soufflante désaccordée. Ce chapitre possède une structure similaire au précédent et reprend une partie des méthodes expérimentales et numériques déployées précédemment mais appliquées à une structure avec une complexité de modélisation et d'analyse accrue.

Chapitre I

Dynamique des roues aubagées

Ce chapitre est destiné à introduire les nombreuses notions déployées dans ce travail de thèse tant d'un point de vue technologique que numérique.

Dans un premier temps, une présentation du principe de fonctionnement d'un turboréacteur est réalisée en se concentrant particulièrement sur la soufflante qui est la pierre angulaire des essais vibratoires en rotation et des simulations dynamiques réalisés durant ce travail de thèse. Dans un second temps, la modélisation numérique des roues aubagées est abordée en formulant les équations du mouvement pour une structure en rotation ainsi qu'en exploitant les hypothèses de modélisation d'une structure présentant des propriétés de symétrie cyclique. Le chapitre est conclu en mettant en avant le dimensionnement des roues aubagées face aux phénomènes vibratoires d'origine mécanique et aéroélastique.

Sommaire

1 Technologies des turboréacteurs 6
1.1 Présentation des turboréacteurs 6
1.2 Évolutions technologiques des soufflantes 9
2 Modélisation des roues aubagées 12
2.1 Équation du mouvement d'une structure en rotation 13
2.2 Non-linéarités des roues aubagées 19
2.3 Structures à symétrie cyclique 23
2.4 Éléments de désaccordage 30
3 Dimensionnement des roues aubagées 32
3.1 Sources de vibration 32
3.2 Outils de dimensionnement 34
4 Bilan 38

1 Technologies des turboréacteurs

Les turbomachines aéronautiques équipent la majorité des aéronefs civils et militaires assurant ainsi leur propulsion. Celle-ci est créée au moyen d'une force, appelée poussée, qui résulte de l'accélération d'une masse d'air en sens opposé du déplacement de l'aéronef. Deux grands types de turbomachines propulsent les aéronefs civils et militaires : les turbopropulseurs et les turboréacteurs représentés respectivement sur les figures I.1a et I.1b.

(a) A400M équipé de turbopropulseurs TP-400 (b) A320neo équipé de turboréacteurs LEAP-1A

FIGURE I.1 – Différences de conception entre turbopropulseurs et turboréacteurs

Le turbopropulseur est particulièrement adapté aux avions dont la vitesse de croisière est inférieure à Mach 0.7, tels les avions de transport régionaux ou les avions militaires de transport et de surveillance. Au-delà, la baisse du rendement aérodynamique de l'hélice (liée à l'écoulement transsonique ou supersonique en bout d'aube) conduit à préférer le turboréacteur.

Le turboréacteur est, quant à lui, particulièrement attractif pour les avions de transport civil qui volent dans le domaine du haut subsonique (entre Mach 0.7 et 0.9) ainsi que les avions militaires supersoniques (vitesse supérieure à Mach 1) grâce à un rapport coût/efficacité inégalable de nos jours dans ce domaine de vol.

Ces deux types de turbomachines ont un fonctionnement similaire bien que leur conception poursuive un objectif diamétralement opposé. En effet, un turbopropulseur doit fournir le maximum de puissance pour la mise en rotation d'une hélice afin de produire le déplacement d'un gros volume d'air le plus efficacement possible. Tandis que le turboréacteur doit produire le maximum de poussée en éjectant le gaz à une vitesse la plus élevée possible. Visuellement, ils se distinguent principalement par la présence d'un carénage autour de l'hélice (ou roue aubagée) principale d'un turboréacteur, aussi appelée soufflante ou *fan* en anglais, comme illustré sur les figures I.1a et I.1b.

Ce travail de thèse est consacré à l'étude d'une soufflante de turboréacteur en rotation, par conséquent la suite de cette section traitera des turboréacteurs, de leur principe de fonctionnement ainsi que des organes principaux les composant, à savoir les roues aubagées et notamment la soufflante.

1.1 Présentation des turboréacteurs

Les premiers turboréacteurs pour aéronefs apparurent en Europe au début du XX$^{\text{ième}}$ siècle. Les premières applications concernèrent exclusivement les avions militaires jusqu'à la fin de la seconde guerre mondiale. À la suite de la guerre, l'utilisation des turboréacteurs se perpétua et s'étendit à l'aviation civile ; c'est en 1952 qu'eut lieu le premier vol

commercial. Le développement des turboréacteurs s'intensifia alors jusqu'à nos jours et entraina de nombreuses métamorphoses dans l'architecture des turboréacteurs.

Quel que soit le type d'architecture, le principe de fonctionnement général d'un turboréacteur reste identique, s'appuyant sur le principe d'action-réaction pour créer une force de poussée au moyen de l'accélération d'une masse d'air ce qui propulse l'avion. Le fonctionnement d'un turboréacteur se décompose en trois phases successives : compression, combustion puis détente. Dans un premier temps, le flux d'air, admis par l'avant du turboréacteur, est accéléré et comprimé par le compresseur dans le but d'être acheminé à l'intérieur de la chambre de combustion dans des conditions optimales de pression et de température. Dans un second temps, l'air comprimé est mélangé à du kérosène et le mélange est enflammé à l'intérieur de la chambre de combustion. Pour finir, les gaz produits par la combustion sont éjectés dans la turbine puis à travers la tuyère, à l'arrière du moteur, pour produire la poussée. Durant le passage des gaz dans la turbine, une partie de l'énergie cinétique du flux est récupérée dans le but d'entraîner le compresseur. Le cheminement du flux d'air à travers le turboréacteur, induisant la poussée de l'appareil, peut être suivi sur le schéma de la figure I.2.

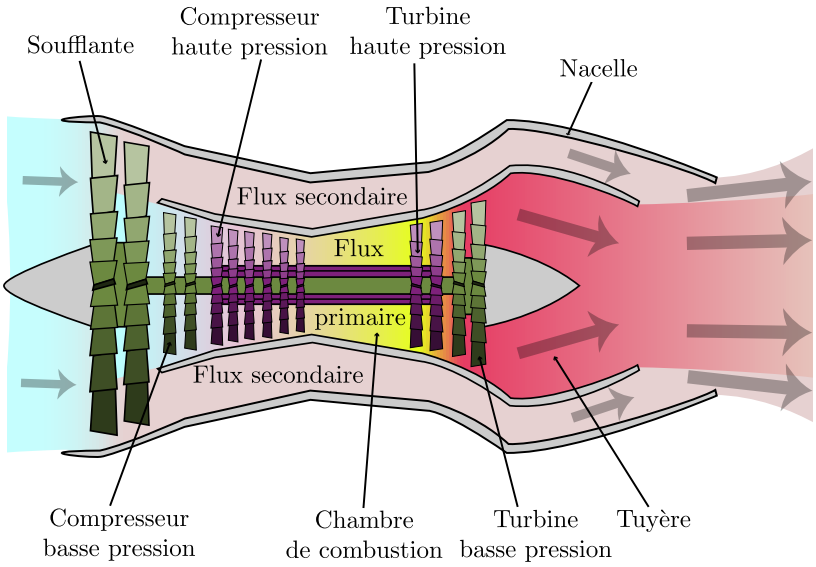


FIGURE I.2 – Schéma d'un turboréacteur double-corps double-flux

Les premiers turboréacteurs furent qualifiés de moteur simple corps car l'ensemble du réacteur était entrainé par un unique rotor. Actuellement, la majorité des turboréacteurs sont composés de plusieurs corps, entrainés à des vitesses de rotation différentes, ce qui augmente leur efficacité et réduit ainsi la consommation en carburant du moteur. Les moteurs double corps, équipant la majorité de la flotte actuelle des avions civils, sont composés de deux corps distincts : le corps basse pression (BP) et le corps haute pression (HP). Le corps basse pression, intervenant en premier sur le flux d'air, se compose d'une soufflante, d'un compresseur basse pression aussi appelé *booster* et d'une turbine basse pression. Le corps haute pression, quant à lui, est constitué d'un compresseur et d'une turbine haute pression. Les compresseurs basse et haute pressions sont tous deux reliés, respectivement, aux turbines basse et haute pression par l'intermédiaire d'un arbre intermédiaire. Certains turboréacteurs, par exemple la famille Trent produit par Rolls-Royce et équipant notamment l'Airbus A380, proposent une architecture triple corps comprenant un corps intermédiaire permettant des régimes de rotation mieux adaptés pour chaque

zone de pression du compresseur et de la turbine. Les différents composants d'un turboréacteur sont représentés sur le schéma de la figure I.2 et peuvent être identifiés sur la vue en coupe d'un turboréacteur de la figure I.3.

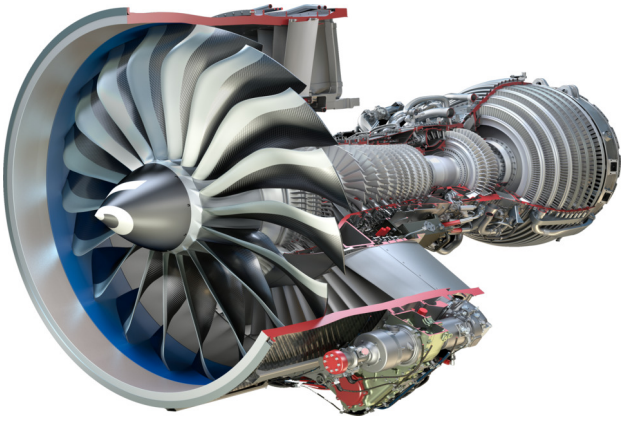


FIGURE I.3 – Vue en coupe du LEAP-1A

Un compresseur axial résulte d'un empilage d'étages, chacun composé d'un aubage mobile et d'un aubage fixe nommés respectivement roue aubagée et redresseur. Un étage de compresseur est représenté en figure I.4. L'aubage mobile est constitué d'un disque sur lequel sont attachées des aubes. Cette roue aubagée est en rotation en amont de l'aubage fixe, également constitué d'aubes. Le flux d'air est accéléré par la roue aubagée mais aussi dévié par rapport à l'axe de rotation du moteur. Le redresseur permet alors de ramener le flux dans l'axe du moteur, tout en le ralentissant pour convertir cette diminution d'énergie cinétique en pression via la forme du stator. L'ordre de la roue aubagée et du redresseur est inversé dans le cas d'un étage de turbine.

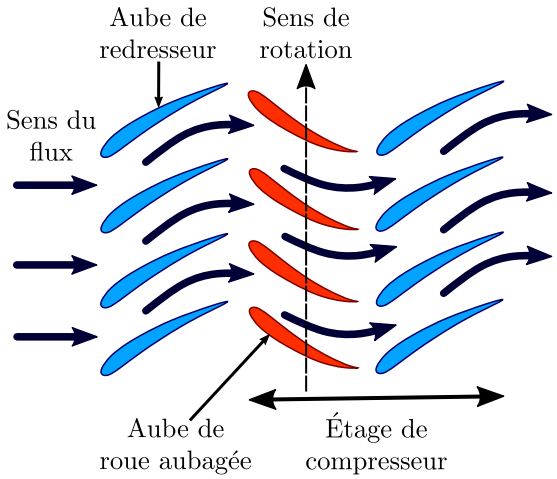


FIGURE I.4 – Schéma d'un étage de compresseur

Les turboréacteurs modernes, en plus de comporter deux corps, séparent le flux d'air en deux flux distincts après le franchissement de la soufflante : le flux primaire et le flux secondaire. Le flux primaire (aussi nommé flux d'air chaud) effectue le parcours décrit ci-dessus au sein des composants du turboréacteur pendant que le flux secondaire (nommé flux d'air froid) contourne l'intérieur du moteur tout en restant contenu dans la nacelle (voir figure I.2). Le flux d'air secondaire ne subit alors qu'une accélération. Cette séparation induit une réduction du bruit lié à l'échappement des gaz puisque le flux d'air secondaire, moins accéléré que le primaire (émettant donc plus de bruit), entoure ce dernier.

La poussée est générée à 80 % par le flux secondaire dans les turboréacteurs équipant les avions civils modernes. Il est alors important de parler de taux de dilution ou *by-pass ratio* en anglais pour la conception de ces nouveaux réacteurs. En effet, le taux de dilution se définit comme le rapport entre le débit du flux secondaire sur celui du flux primaire. Pour limiter la consommation des moteurs, il est prescrit d'augmenter le taux de dilution tout en tenant compte des contraintes aérodynamiques et mécaniques. Par conséquent, les moteurs actuels contiennent une soufflante de très grand diamètre induisant un fort taux de dilution, jusqu'à onze pour le LEAP-1A par exemple.

1.2 Évolutions technologiques des soufflantes

La soufflante est une roue aubagée critique d'un turboréacteur de part sa position amont par rapport aux étages de compression, ses dimensions imposantes mais aussi ses fonctions principales. En effet, en plus d'assurer une première compression du flux d'air en association avec les OGV, pour *Outlet Guide Vanes* en anglais qui sont les redresseurs du flux secondaire, cette dernière participe également à la séparation du flux d'air entre primaire et secondaire. En préambule de cette sous-section consacrée aux évolutions technologiques passées, présentes et futures de la soufflante, un schéma décrivant les différentes parties [1] [2] de la soufflante et les termes associés est présenté en figure I.5.

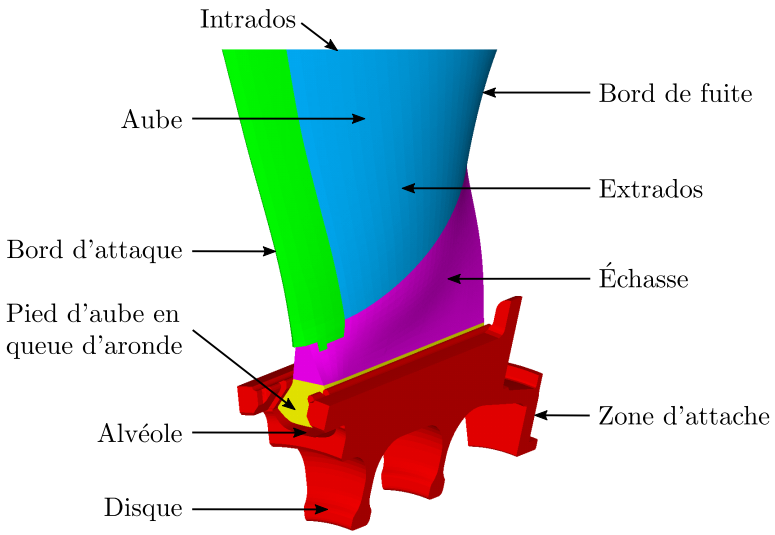


FIGURE I.5 – Description d'un secteur de soufflante

Bien que la soufflante ne soit pas essentielle au fonctionnement fondamental d'un turboréacteur, celle-ci permet d'augmenter le volume d'air entrant ainsi que le taux de dilution et offre donc un meilleur rendement propulsif à la turbomachine [4]. Par ailleurs, les premiers turboréacteurs conçus ne comprenaient ni d'architecture à double flux ni de soufflante. Ce n'est que dans les années soixante que ces évolutions technologiques sont apparues sur les aéronefs civils. Cette première technologie de turboréacteur avec soufflante est nommée turbosoufflante à faible taux de dilution en raison du faible diamètre de la soufflante et du faible volume d'air composant le flux secondaire. Avec pour objectifs d'économiser du kérosène et de réduire le bruit lié aux turboréacteurs, les motoristes aé-

1. L'échasse est la zone de couleur mauve comprise entre le pied d'aube et la plateforme (pièce permettant de fermer la veine).

2. Un clinquant est positionné dans la zone de contact entre l'alvéole du disque et le pied d'aube en queue d'aronde afin de limiter l'usure de ces deux éléments.

ronautiques ont augmenté la taille de la soufflante ce qui accroît le taux de dilution. Cette seconde évolution technologique est appelée turbosoufflante à haut taux de dilution.

L'allongement des aubes de la soufflante a entrainé une modification du comportement structural de ces dernières. Pour compenser cela, des nageoires, placées en milieu d'aubes sur la figure I.6a, sont ajoutées aux aubes afin de rigidifier la structure. Ces nageoires, *shrouds* en anglais, perturbent cependant le flux aérodynamique qui contourne les aubes ce qui réduit l'efficacité du moteur.

Dans les années quatre-vingt, les aubes utilisées jusqu'alors sur les soufflantes, nommées aubes à corde étroite, ont été remplacées par des aubes à large corde. Ces nouvelles formes d'aube éliminent l'emploi de nageoires pour rigidifier l'aube tout en améliorant la capacité de la soufflante à résister aux ingestions d'oiseaux, de glace ou de sable par exemple. De plus, l'introduction des aubes à large corde a permis la réduction du nombre d'aubes sur la soufflante ; par exemple le LEAP-1A, illustré en figure I.3 et conçu conjointement par Safran Aircraft Engines et General Electric, ne comporte que dix-huit aubes tandis que l'une des versions de son ancêtre, le CFM56-5B représenté en figure I.6a, en contient le double.

(a) Soufflante du CFM56-5B

(b) Soufflante du Rolls-Royce Trent XWB

FIGURE I.6 – Soufflante à corde étroite (a) comparée à une soufflante à large corde (b)

Compte tenu de la taille importante de la soufflante, une structure monobloc, comme il est possible de rencontrer sur les roues aubagées de compresseur ou de turbine, est inconcevable à cause de la perte de matière que cela engendrerait. Il est alors nécessaire de fabriquer séparément les aubes et le disque puis de les assembler. Cet assemblage entre les aubes de la soufflante et le disque est alors effectué au moyen d'une attache en queue d'arronde, représentée en figure I.5, pouvant être droite ou arrondie. Cette dernière est exploitée afin de retenir l'aube pendant la rotation de la soufflante ce qui en fait une zone importante de contrainte, d'usure liée à la friction et de propagation de fissures. Le frottement du pied d'aube dans l'alvéole du disque n'a pas uniquement un effet néfaste puisque ce dernier engendre aussi un apport d'amortissement à la structure permettant une réduction des amplitudes de vibration : l'un des sujets d'étude de ce travail de thèse.

Les dimensions des soufflantes actuelles, jusqu'à 3.5 m de diamètre pour le GE-9X, font de celles-ci des organes imposants possédant une masse non-négligeable : le choix du matériau composant la soufflante est alors essentiel. En effet, une réduction de la masse des aubes implique des composants moteurs (tels le disque, les paliers ou les supports de paliers) plus légers ce qui est ainsi directement répercuté sur les éléments de l'avion comme le fuselage, les ailes et les pylônes attachant les moteurs à l'avion.

Outre la densité, le coût, l'efficacité aérodynamique et les caractéristiques structurales constituent les principaux défis dans la sélection du matériau. Ces différents arguments

ont fait du titane un matériau de choix pour la composition des aubes de soufflantes : son excellente résistance à la traction et sa limite d'élasticité élevée combinées à une faible densité aboutissent au rapport résistance/masse le plus élevé de tous les métaux actuels [4]. Notamment, certains alliages de titane peuvent être aussi résistants que l'acier, tout en présentant une densité presque deux fois moindre par rapport à l'acier.

Une nouvelle fois dans le but de réduire la masse des aubes de soufflante en titane, Rolls-Royce proposa des aubages à larges cordes creuses, illustrées en figure I.6b, apportant ainsi une diminution de la masse de l'aube de l'ordre de 50 % par rapport à une aube en titane pleine [205]. Ces aubes creuses peuvent contenir un nid d'abeille métallique en son cœur afin d'optimiser le rapport rigidité flexurale/poids de l'aube et proposer une meilleure résistance à l'ingestion.

La dernière avancée technologique sur la soufflante en termes de matériau repose sur l'emploi de composite pour fabriquer les aubes [3]. Introduit par General Electric sur la soufflante de son GE-90, l'emploi de matériau composite continue de se développer avec notamment le LEAP, représenté en figure I.3, dont la soufflante est entièrement en composite tissé 3D avec un bord d'attaque en titane. Cette technologie permet de diminuer la masse de chaque moteur LEAP jusqu'à 450 kg mais aussi d'augmenter l'amortissement de la soufflante ce qui a pour effet de réduire l'amplitude des vibrations tout en conservant des propriétés de résistance satisfaisantes.

Le processus de fabrication de ces aubes en composite tissé 3D est particulier [41]. En effet, celui-ci est composé de quatre phases distinctes :

— Tout d'abord, l'aube est constituée d'un renfort tissé dans les trois dimensions. Ce renfort est essentiellement composé de fibres de carbone et de fibres de carbure de silicium. Le tissage de ce renfort s'effectue à l'aide d'un métier à tisser Jacquard modifié afin de pouvoir réaliser une maille en trois dimensions et équipé d'une commande numérique. Il est important de noter que le tissage ainsi que sa densité ne sont pas pas uniformes sur toute l'aube : ils diffèrent en fonction des contraintes estimées sur chacune des zones de l'aube. À la fin de cette étape de tissage, la préforme de l'aube obtenue est découpée au moyen de jets d'eau sous pression pour se rapprocher de sa forme finale.

— Dans un deuxième temps, la préforme tissée et découpée est déformée puis compactée dans un moule afin que celle-ci prenne une forme proche de la forme finale de l'aube. Ce moule compacte la préforme pour atteindre un taux volumique de fibres de l'ordre de 55 % à 58 %, ce qui correspond approximativement au taux volumique de la pièce finale.

— La troisième phase consiste à mouler la préforme selon le procédé RTM (*Resin Transfer Modeling* en anglais), moulage par injection de résine. Une résine de faible viscosité est injectée par une pompe basse pression dans le moule fermé, chauffé et sous-vide permettant ainsi de diminuer la pression d'injection. Après démoulage, l'aube possède sa forme définitive, aux corrections par usinage près.

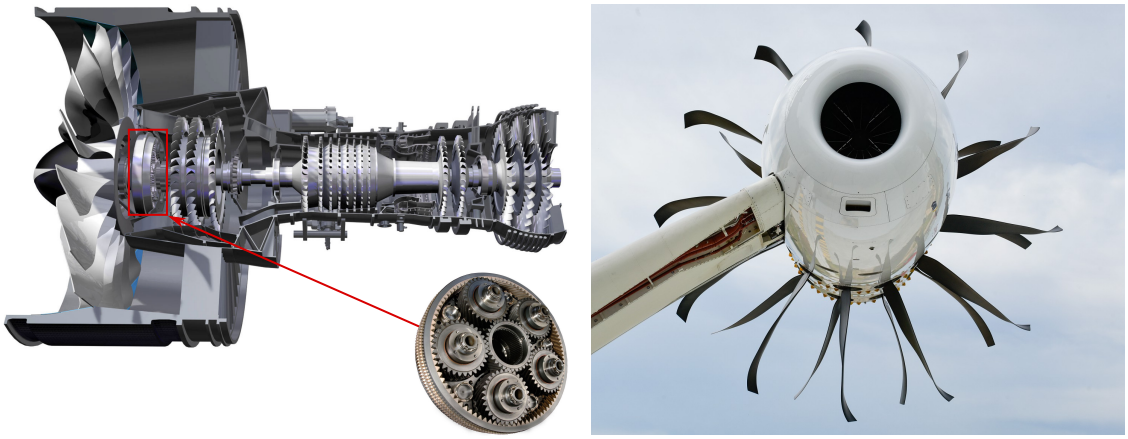
— Lors de la dernière phase de fabrication, le bord d'attaque en titane est collé sur l'aube. De plus, un film de protection en polyuréthane est appliqué sur l'aube à l'exception du bord d'attaque, de l'échasse et du pied d'aube ; celui-ci protégeant l'aube contre l'érosion et lissant la surface de l'aube de manière à ne pas perturber le flux d'air.

3. À noter que, contrairement aux aubes, peu d'évolutions sur le matériau du disque ont été accomplies : celui-ci étant toujours réalisé en titane.

En parallèle de ces évolutions sur le matériau, une architecture moteur comprenant une soufflante à engrenages, c'est-à-dire une soufflante dont la vitesse de rotation est réduite par rapport à l'arbre basse-pression grâce à l'emploi d'une boîte à engrenages réducteurs à train épicycloïdal, a été développée. Cette technologie est actuellement employée sur le PW1000G de Pratt & Whitney, illustré en figure I.7a, moteur évoluant sur le même marché que le LEAP. La vitesse de rotation réduite de la soufflante permet ainsi d'atteindre des taux de dilution plus élevés menant à une consommation en carburant plus faible et à une réduction de bruit plus importante.

L'objectif des motoristes aéronautiques à moyen terme est de combiner ces deux dernières évolutions technologiques sur la soufflante, à savoir les aubes composites et la boîte à engrenages.

À plus long terme, un autre concept de turboréacteur dit à soufflante non-carénée est en développement, notamment chez Safran Aircraft Engines avec son *Open Rotor* exposé en figure I.7b. L'*Open Rotor* est constitué d'un générateur de gaz conventionnel et d'une turbine qui entraîne un couple d'hélices contra-rotatives, non carénées de quatre mètres de diamètre. Chacune de ces hélices est composées de 12 aubes composites.



(a) Système de réduction du PW1000G de P&W (b) Open Rotor de Safran Aircraft Engines

FIGURE I.7 – Technologies de soufflantes présente et future

L'historique du développement des soufflantes révèle que de nombreux progrès dans l'architecture moteur, la géométrie des aubes, et les matériaux ont été réalisés au fil des années afin de concevoir des aubes plus résistantes et de plus en plus légères contribuant ainsi au développement de turboréacteurs plus efficients.

L'une des dernières évolutions en termes de matériau, à savoir un démonstrateur de la soufflante en composite tissé 3D du LEAP, est étudiée aussi bien numériquement qu'expérimentalement dans ce travail de thèse.

2 Modélisation des roues aubagées

Les composants des turboréacteurs, et particulièrement les roues aubagées, sont des éléments complexes nécessitant une modélisation précise et exhaustive afin de représenter numériquement leur comportement dynamique. La modélisation de celles-ci conduit généralement à des modèles mathématiques se présentant sous la forme de systèmes d'équations aux dérivées partielles, linéaires ou non-linéaires, dont la résolution analytique n'est pas concevable pour des systèmes industriels. Afin de contourner cette difficulté, il est envisageable d'employer des techniques de discrétisation des formulations variationnelles, telle la méthode des éléments finis théorisée dans de nombreux ouvrages [12, 240].

Tout d'abord, cette section permettra de développer l'équation du mouvement pour une structure en rotation, comme une roue aubagée, qui sera abondamment manipulée dans la suite de ce mémoire ainsi que les différentes non-linéarités pouvant affecter une roue aubagée en rotation et notamment les non-linéarités de contact / frottement. La suite de cette section abordera la formulation particulière employée pour modéliser les structures présentant des symétries cycliques. Pour conclure, la notion de désaccordage, non prise en compte dans la formulation du problème en symétrie cyclique mais néanmoins essentielle dans le domaine des roues aubagées et dans ce travail de thèse, est introduite.

2.1 Équation du mouvement d'une structure en rotation

Cette sous-section est consacrée à la formalisation de l'équation du mouvement matricielle d'un solide élastique en rotation [61, 67]. Pour aboutir à cette équation, la cinématique d'une particule d'un solide élastique en rotation sera rigoureusement écrite. Celle-ci conduira à la formulation variationnelle discrète du problème obtenue en s'appuyant sur les équations de Lagrange. Pour conclure, la formulation éléments finis du problème sera posée aboutissant à l'équation matricielle régissant le comportement dynamique d'une structure en rotation.

2.1.1 Cinématique d'une particule d'un solide élastique

Soit un solide déformable $\mathcal{S}$ occupant un volume Ω et défini dans un repère fixe inertiel orthonormé $\mathcal{R}_\mathrm{f}$. Chaque particule de ce solide est repérée dans sa configuration de référence par ses coordonnées $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}^\mathrm{T}$ exprimées dans $\mathcal{R}_\mathrm{f}$. À l'instant $t = 0$, le solide est soumis à un champ de déplacement $\mathbf{u}_0$, le plaçant dans une configuration dite initiale. Une particule située au point P_ref dans la configuration de référence se retrouve alors au point P_0 dans cette nouvelle configuration, et est repérée par le vecteur

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \tag{I.1}$$

À un instant $t > 0$, le solide est porté dans une nouvelle configuration, dite déformée. La particule située initialement en P_0 se retrouve au point P de coordonnées $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \{y_1, y_2, y_3\}^\mathrm{T}$ exprimées dans $\mathcal{R}_\mathrm{f}$. Le repère mobile non-galiléen orthonormé $\mathcal{R}_\mathrm{m}$ lié au solide est défini, ce dernier étant confondu avec $\mathcal{R}_\mathrm{f}$ à $t = 0$. Dans ce nouveau repère, la position d'une particule est définie par le vecteur

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \tag{I.2}$$

dans lequel $\mathbf{u}$ est le vecteur déplacement de la particule au temps t.

Le passage du repère $\mathcal{R}_\mathrm{f}$ au repère $\mathcal{R}_\mathrm{m}$ peut se décomposer en une translation représentée par le vecteur**s** reliant les origines des deux repères, et une rotation dont la vitesse angulaire dans $\mathcal{R}_\mathrm{m}$ est donnée par le vecteur $\boldsymbol{\omega}(t) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}^\mathrm{T}$. Dans la suite, les vecteurs $\mathbf{s}$ et $\boldsymbol{\omega}$ sont supposés connus. Le changement de repère est caractérisé par la matrice orthogonale [4] $\mathbf{R}$ dont les colonnes sont les vecteurs de base du repère mobile $\mathcal{R}_\mathrm{m}$ exprimés dans le repère fixe $\mathcal{R}_\mathrm{f}$. Ces différentes transformations sont illustrées en figure I.8.

4. Une matrice carrée $\mathbf{R}$ de taille n à coefficients réels est dite orthogonale lorsqu'elle vérifie la relation $\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathrm{T} = \mathbf{I}$, avec $\mathbf{I}$ la matrice identité de taille n. De plus, il vient la relation $\mathbf{R}^\mathrm{T} = \mathbf{R}^{-1}$.

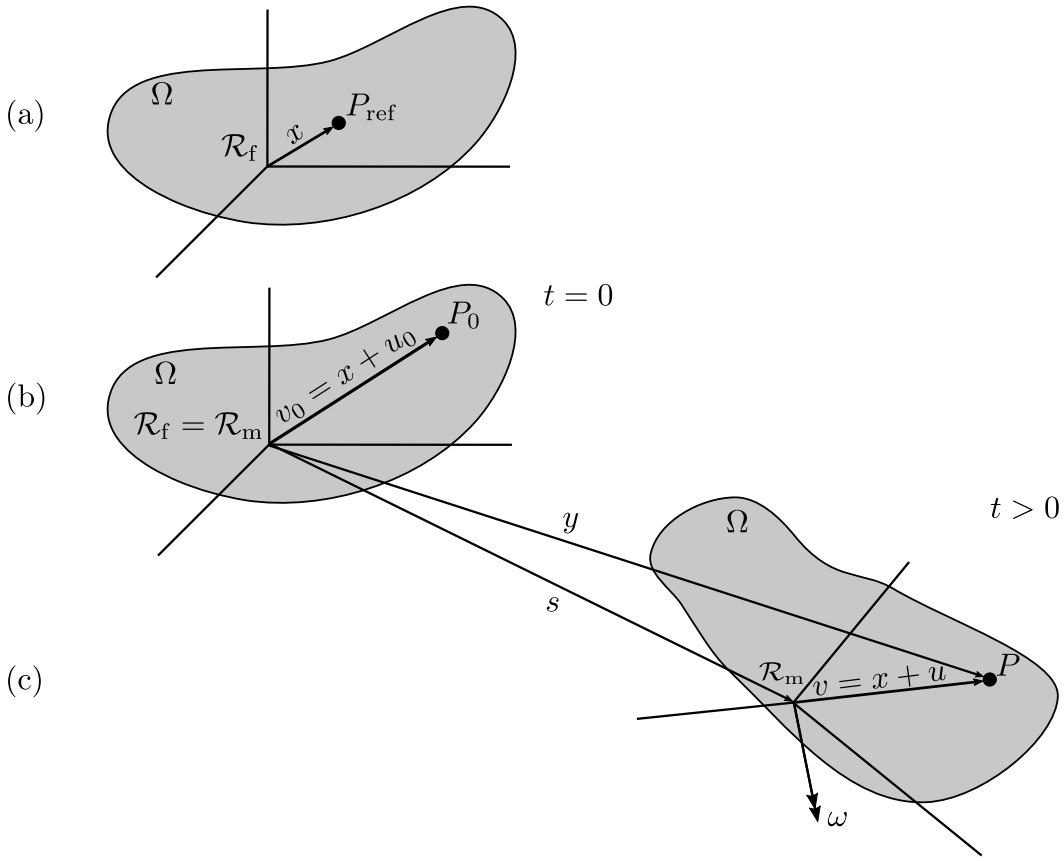


FIGURE I.8 – Configurations d'un système continu : (a) Configuration de référence ; (b) Configuration initiale ; (c) Configuration déformée (adaptée de [67])

Le vecteur position repérant une particule du solide $\mathcal{S}$ à l'instant t dans le repère $\mathcal{R}_f$ s'exprime alors

$$\mathbf{y}(\mathbf{x},t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t)(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x},t)) \tag{I.3}$$

Afin d'étudier la dynamique d'une particule P, il est essentiel d'établir sa vitesse par rapport au repère fixe calculée en dérivant le vecteur $\mathbf{y}$ selon le temps ce qui conduit à l'expression

$$\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x},t) = \dot{\mathbf{s}}(t) + \dot{\mathbf{R}}(t)(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x},t)) + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) \tag{I.4}$$

avec $\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)\boldsymbol{\Omega}$, la dérivée temporelle de la matrice de rotation et $\boldsymbol{\Omega}$ la matrice antisymétrique formée des composantes du vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$, définie telle que

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{I.5}$$

2.1.2 Formulation discrète de l'équation du mouvement

Tout d'abord, les notations et les hypothèses du problème sont rappelées et illustrées sur la figure I.9. Une structure élastique, occupant un domaine Ω, est considérée. La structure élastique subit un déplacement imposé $\mathbf{u}_d$ sur une partie de sa frontière Γ_u. Elle est aussi soumise à une densité volumique d'effort $\mathbf{g}_v$ sur la totalité de son volume Ω ainsi qu'à une densité surfacique d'efforts $\mathbf{g}_s$ sur une portion de sa frontière Γ_s.

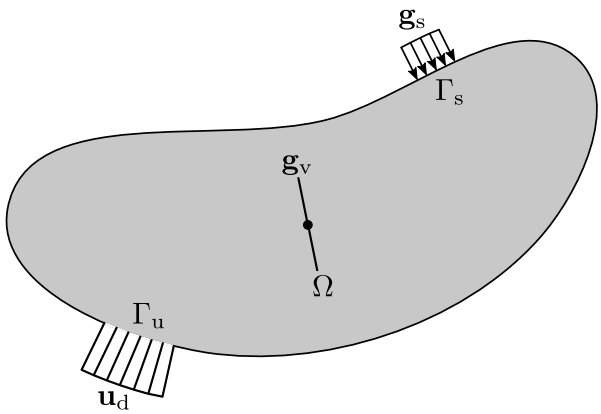


FIGURE I.9 – Définition des conditions aux limites et du chargement du problème d'élasticité de la structure

Comme il est d'usage dans les nombreux ouvrages traitant de la méthode des éléments finis [12, 240] les équations de cette sous-section sont écrites en respectant la convention de notation de Voigt.

Le principe d'Hamilton affirme que [67] :

« La somme des variations d'énergie cinétique et potentielle et de la variation du travail effectué par les forces non-conservatives, prise pendant un intervalle de temps quelconque t_1 à t_2, est identiquement nulle. »

Cette stationnarité de l'énergie totale du système se traduit par l'équation

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{V}) \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{W} \mathrm{d}t = 0 \tag{I.6}$$

où $\mathcal{T}$ représente l'énergie cinétique du système, $\mathcal{V}$ regroupe l'énergie de déformation et le potentiel des efforts conservatifs, $\mathcal{W}$ symbolise le travail effectué par les forces dissipatives et δ dénote la variation subie durant l'intervalle de temps t_1 à t_2. La différence $\mathcal{T} - \mathcal{V}$ est définie comme le Lagrangien du système noté $\mathcal{L}$.

Le principe d'Hamilton (I.6) revient à vérifier les équations de Lagrange [67]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_i} = \mathbf{0} \tag{I.7}$$

dans lesquelles $\mathcal{F}$ représente la fonction de dissipation de Rayleigh, soit la demi-puissance totale consommée par le système définie telle que

$$\delta \mathcal{W} = -\delta \mathbf{u}_i^\mathrm{T} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_i} \tag{I.8}$$

où $\delta \mathbf{u}_i$ désigne la variation arbitraire du vecteur des déplacements généralisés et l'exposant $\bullet^\mathrm{T}$ symbolise la transposée du vecteur.

Les différentes énergies sont alors définies en commençant par l'énergie cinétique. Cette dernière, exprimée dans le repère fixe inertiel $\mathcal{R}_\mathrm{f}$, s'écrit

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho \dot{\mathbf{y}}^\mathrm{T} \dot{\mathbf{y}} \mathrm{d}\Omega \tag{I.9}$$

avec ρ, la masse volumique du solide. La dépendance en temps des variables est volontairement omise afin d'alléger les équations. Cette omission volontaire sera poursuivie dans la suite de cette sous-section.

En insérant l'expression (I.4) dans l'équation (I.9), l'énergie cinétique en fonction des déplacements exprimés dans le repère mobile $\mathcal{R}_\mathrm{m}$ peut s'exprimer

$$\begin{aligned}\mathcal{T} = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\dot{\mathbf{u}}^\mathrm{T}\dot{\mathbf{u}}\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \rho\dot{\mathbf{u}}^\mathrm{T}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{u}\mathrm{d}\Omega - \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\mathbf{u}^\mathrm{T}\boldsymbol{\Omega}^\mathrm{T}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{u}\mathrm{d}\Omega \\ - \int_\Omega \rho\mathbf{u}^\mathrm{T}\boldsymbol{\Omega}\left(\mathbf{R}^\mathrm{T}\dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \rho\dot{\mathbf{u}}^\mathrm{T}\left(\mathbf{R}^\mathrm{T}\dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\Omega \\ + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\left(\dot{\mathbf{s}}^\mathrm{T}\dot{\mathbf{s}} + 2\dot{\mathbf{s}}^\mathrm{T}\mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x} - \mathbf{x}^\mathrm{T}\boldsymbol{\Omega}^\mathrm{T}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{I.10}$$

L'énergie potentielle du système, composée de l'énergie de déformation interne et du travail des forces volumiques et surfaciques externes, a pour expression

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{T}\mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \mathbf{u}^\mathrm{T}\mathbf{g}_\mathrm{v}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_\mathrm{s}} \mathbf{u}^\mathrm{T}\mathbf{g}_\mathrm{s}\mathrm{d}\Gamma_\mathrm{s} \tag{I.11}$$

où $\mathbf{c}$ est le tenseur des constantes élastiques d'ordre deux exprimé en Pa (de dimension physique $[\mathrm{M.L}^{-1}.\mathrm{T}^{-2}]$). Par ailleurs, la loi de comportement (aussi nommée loi de Hooke) relie le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, exprimé en Pa, au tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, sans dimension, via le tenseur des constantes élastiques

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{I.12}$$

dans laquelle $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^\mathrm{T}$ et $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}\}^\mathrm{T}$.

De plus, dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, il est possible de considérer une relation linéaire entre les déformations et les déplacements

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}\mathbf{u} \tag{I.13}$$

avec $\mathcal{D}$, l'opérateur différentiel défini ainsi

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{I.14}$$

L'énergie potentielle du système peut alors être réécrite en introduisant l'équation (I.13) dans l'expression de l'énergie potentielle (I.11) pour aboutir à

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathcal{D}\mathbf{u})^\mathrm{T}\,\mathbf{c}\,(\mathcal{D}\mathbf{u})\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \mathbf{u}^\mathrm{T}\mathbf{g}_\mathrm{v}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_\mathrm{s}} \mathbf{u}^\mathrm{T}\mathbf{g}_\mathrm{s}\mathrm{d}\Gamma_\mathrm{s} \tag{I.15}$$

Enfin, l'énergie de dissipation relative aux amortissements visqueux cinématique et constitutif admet la décomposition

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\int_\Omega \eta_\mathrm{a}\dot{\mathbf{u}}^\mathrm{T}\dot{\mathbf{u}}\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega \eta_\mathrm{b}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\mathrm{T}\mathbf{c}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathrm{d}\Omega \tag{I.16a}$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \eta_\mathrm{a}\dot{\mathbf{u}}^\mathrm{T}\dot{\mathbf{u}}\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega \eta_\mathrm{b}\,(\mathcal{D}\dot{\mathbf{u}})^\mathrm{T}\,\mathbf{c}\,(\mathcal{D}\dot{\mathbf{u}})\,\mathrm{d}\Omega \tag{I.16b}$$

avec η_a et η_b, respectivement le coefficient d'amortissement visqueux et le coefficient d'amortissement interne visqueux [67].

Les formes continues des énergies sont ainsi définies. Or, dans l'optique de formuler les équations du mouvement discrètes au moyen des équations de Lagrange et de permettre la résolution du problème dans le cas général, une démarche de discrétisation spatiale du problème est utilisée. La méthode de discrétisation exploitée est l'approximation de Galerkine qui consiste à approcher le champ de déplacement $\mathbf{u}$ par une combinaison linéaire de fonctions de forme cinématiquement admissibles regroupées en colonne dans la matrice $\mathcal{N}$, ainsi

$$\mathbf{u} = \mathcal{N}\mathbf{u}_i \tag{I.17}$$

De plus, le champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ est aussi lié aux déplacements généralisés au moyen de la matrice $\mathcal{B}$ regroupant les fonctions de forme dérivées. Celle-ci est définie par

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}\mathcal{N}\mathbf{u}_i = \mathcal{B}\mathbf{u}_i \tag{I.18}$$

En insérant les expressions des énergies (I.10), (I.15) et (I.16) dans les équations de Lagrange (I.7) ainsi qu'en substituant les déplacements continus par les déplacements généralisés à l'aide des équations (I.17) et (I.18), il vient alors l'équation matricielle élémentaire régissant le comportement dynamique du système exprimé dans le repère mobile $\mathcal{R}_\mathrm{m}$

$$\mathbf{M}^{(k)}\ddot{\mathbf{u}}_i(t) + (\mathbf{C}^{(k)} + \mathbf{G}^{(k)})\dot{\mathbf{u}}_i(t) + (\mathbf{K}^{(k)} + \mathbf{P}^{(k)} + \mathbf{N}^{(k)})\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{g}^{(k)}(t) + \mathbf{r}^{(k)}(t) \tag{I.19}$$

avec les différentes matrices élémentaires exprimées ainsi

$$\mathbf{M}^{(k)} = \int_\Omega \rho\mathcal{N}^\mathrm{T}\mathcal{N}\mathrm{d}\Omega \tag{I.20}$$

$$\mathbf{C}^{(k)} = \int_\Omega \eta_\mathrm{a}\mathcal{N}^\mathrm{T}\mathcal{N}\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \eta_\mathrm{b}\mathcal{B}^\mathrm{T}\mathbf{c}\mathcal{B}\mathrm{d}\Omega \tag{I.21}$$

$$\mathbf{G}^{(k)} = \int_\Omega 2\rho\mathcal{N}^\mathrm{T}\boldsymbol{\Omega}\mathcal{N}\mathrm{d}\Omega \tag{I.22}$$

$$\mathbf{K}^{(k)} = \int_\Omega \mathcal{B}^\mathrm{T}\mathbf{c}\mathcal{B}\mathrm{d}\Omega \tag{I.23}$$

$$\mathbf{P}^{(k)} = \int_\Omega \rho\mathcal{N}^\mathrm{T}\dot{\boldsymbol{\Omega}}\mathcal{N}\mathrm{d}\Omega \tag{I.24}$$

$$\mathbf{N}^{(k)} = \int_\Omega \rho\mathcal{N}^\mathrm{T}\boldsymbol{\Omega}^\mathrm{T}\boldsymbol{\Omega}\mathcal{N}\mathrm{d}\Omega \tag{I.25}$$

$$\tag{I.26}$$

Les matrices $\mathbf{M}^{(k)}$, $\mathbf{C}^{(k)}$, $\mathbf{K}^{(k)}$, et $\mathbf{N}^{(k)}$ sont symétriques par construction et correspondent respectivement aux matrices élémentaires de masse, d'amortissement visqueux linéaire, de raideur linéaire élastique, et d'assouplissement centrifuge. Les matrices $\mathbf{G}^{(k)}$ et $\mathbf{P}^{(k)}$ sont quant à elles antisymétriques et correspondent respectivement à la matrice élémentaire de Coriolis et à la matrice élémentaire d'accélération angulaire.

De plus, le vecteur élémentaire $\mathbf{g}^{(k)}$ représentant les efforts extérieurs appliqués au solide et le vecteur élémentaire $\mathbf{r}^{(k)}$ symbolisant les efforts inertiels qui résultent de l'entraînement du système de coordonnées s'écrivent

$$\mathbf{g}^{(k)} = \int_{\Omega} \mathcal{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{g}_{\mathrm{v}} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{\mathrm{s}}} \mathcal{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{g}_{\mathrm{s}} \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{s}} \tag{I.27}$$

$$\mathbf{r}^{(k)} = -\int_{\Omega} \rho \mathcal{N}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{\Omega}} \mathbf{x} + \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Omega} \mathbf{x} \right) \mathrm{d}\Omega \tag{I.28}$$

Dans la méthode des éléments finis, les déplacements généralisés $\mathbf{u}_i$ sont assimilés aux déplacements nodaux. Après assemblage des matrices et vecteurs élémentaires de l'équation (I.19), il vient l'expression

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{P} + \mathbf{N})\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}(t) + \mathbf{r}(t) \tag{I.29}$$

représentant la formulation matricielle régissant le comportement dynamique du système exprimé dans le repère mobile $\mathcal{R}_{\mathrm{m}}$.

Pour un solide en rotation à vitesse constante et sans mouvement de translation, le système d'équations peut se simplifier tel que

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}(t) + \mathbf{r} \tag{I.30}$$

dans lequel le vecteur contenant les efforts inertiels est dorénavant constant et égal à un chargement centrifuge

$$\mathbf{r} = -\int_{\Omega} \rho \mathcal{N}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Omega} \mathbf{x} \right) \mathrm{d}\Omega \tag{I.31}$$

Dans l'étude d'un solide en rotation, il est usuel d'étudier le comportement de la structure au voisinage de l'état d'équilibre induit par le chargement centrifuge $\mathbf{r}$. Cet état est caractérisé par un champ de contraintes initial $\boldsymbol{\sigma}_0$ associé à un champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, dont la prise en compte dans les équations induit l'apparition d'une matrice de raideur géométrique ou de précontrainte [61]. Cette dernière résulte du couplage entre le champ de déformation initial $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ et la partie quadratique du tenseur des déformations au voisinage de cet état d'équilibre.

En supposant un solide animé d'une vitesse de rotation constante, le système d'équations prenant en compte cet état initial précontraint s'écrit

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{T})\mathbf{u}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{u}_0 = \mathbf{g}(t) + \mathbf{r} \tag{I.32}$$

avec $\mathbf{T}$, la matrice de raideur géométrique et $\mathbf{u}_0$ le vecteur des degrés de liberté associé à cet état de précontrainte dont le terme associé n'est autre que la réponse du système au chargement centrifuge, ainsi il vient

$$(\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{u}_0 = \mathbf{r} \tag{I.33}$$

En prenant en compte cette équation (I.33), le système matriciel d'équations régissant la dynamique du solide au voisinage de cet état de précontrainte peut s'écrire

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{T})\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}(t)} \tag{I.34}$$

La matrice d'assouplissement centrifuge $\mathbf{N}$ apporte au système un effet assouplissant sur les modes de la structure, comme son nom l'indique, tandis que la matrice de raideur géométrique $\mathbf{T}$ confère un effet rigidifiant au système. Dans un système en rotation, l'influence de la précontrainte est généralement prépondérante par rapport à la matrice

d'assouplissement centrifuge, par conséquent, le système subit, en pratique, une augmentation de ses fréquences de résonance avec la vitesse de rotation.

Bien que la plupart des modélisations et des dimensionnements de structures industrielles soient effectués en ne sortant pas du cadre de la dynamique linéaire, des non-linéarités peuvent se présenter dans les structures complexes assemblées telles que les roues aubagées. La sous-section suivante met en évidence les principales non-linéarités se manifestant en dynamique des roues aubagées et particulièrement des soufflantes de dernière génération.

2.2 Non-linéarités des roues aubagées

Les turboréacteurs sont des structures de plus en plus complexes d'un point de vue technologique et particulièrement les roues aubagées qui forment une importante partie des éléments rotatifs de la machine. Cette conception complexe des composants constituant les turboréacteurs peut induire des comportements non-linéaires dans les composants eux-mêmes et dans leurs liaisons. Afin de modéliser le plus fidèlement possible la structure, il est essentiel d'incorporer ces non-linéarités dans les modèles et les intégrer dans les simulations dynamiques numériques. Un terme non-linéaire $\mathbf{f}_{\text{nl}}$ est alors ajouté à l'équation du mouvement (I.34) pour former l'équation matricielle non-linéaire

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) = \mathbf{g}(t) \tag{I.35}$$

où les notations employées sont identiques à celles de la sous-section précédente. Les termes dépendant de la rotation du solide ne sont pas explicitement écrits mais peuvent être directement ajoutés à l'équation (I.35).

Dans un turboréacteur, les effets figurant dans le terme non-linéaire $\mathbf{f}_{\text{nl}}$ demeurent d'origines diverses. Cette sous-section se concentre sur les non-linéarités pouvant affecter les roues aubagées et notamment les soufflantes à large corde, à savoir les non-linéarités géométriques en grands déplacements et les non-linéarités de contact / frottement.

2.2.1 Non-linéarités géométriques en grands déplacements

En dynamique des structures, les simulations numériques sont fondées, dans la plupart des cas, sur une linéarisation du modèle au moyen de l'hypothèse des petites perturbations. Néanmoins, les vibrations des roues aubagées peuvent atteindre des amplitudes importantes invalidant cette hypothèse des petites perturbations. Il est alors nécessaire de considérer l'expression complète du tenseur des déformations pour décrire précisément la structure. Les efforts non-linéaires contenus dans le terme $\mathbf{f}_{\text{nl}}$ font alors intervenir des termes polynomiaux cubiques et quadratiques et engendrent une nouvelle phénoménologie par rapport au cas linéaire [72, 73] abordée dans le chapitre II.

De nombreux travaux en dynamique des structures traitant des non-linéarités géométriques en grands déplacements ont été accomplis sur des structures minces ou élancées [40, 214] mais peu sur des problèmes nécessitant une modélisation en trois dimensions [72] à cause de la part de degrés de liberté de la structure affectée par la non-linéarité et de la difficulté engendrée par la réduction du modèle numérique.

2.2.2 Non-linéarités de contact / frottement

Les phénomènes de contact / frottement sont une source de non-linéarité très importante en mécanique et en dynamique puisque ceux-ci sont présents dans tout système assemblé. Ces phénomènes de contact / frottement peuvent paraître néfastes puisqu'ils entraînent une perte d'énergie (minime comparée à l'énergie de propulsion) et donc de rendement, cependant ils s'avèrent être prépondérants en termes de contrôle vibratoire des structures telles que les roues aubagées grâce à l'amortissement apportée à la structure.

Le contact / frottement peut prendre différentes formes sur une roue aubagée : il peut être subi dans le cas d'un contact entre l'aube et le carter (voir section I.3) ou être intentionnel afin d'apporter un amortissement maîtrisé plus important à la structure. Ce second cas peut se rencontrer lors d'un contact frottant entre aubes adjacentes par l'intermédiaire de nageoires ou encore dans le cas d'un contact frottant entre le pied de l'aube et le disque. Il est d'intérêt pour les travaux rapportés dans ce mémoire de thèse puisque la soufflante composite à large corde, étudiée et testée pendant la campagne d'essais réalisée sur le module structure PHARE#1, présente ce type de non-linéarité.

Les roues aubagées à aubes rapportées, telle la soufflante étudiée dans ces travaux, se présentent comme un assemblage d'aubes montées sur un disque. La zone d'attache entres les aubes et le disque est une région où de fortes contraintes s'exercent en plus d'un contact frottant. Ce dernier est assuré par la force centrifuge qui vient caler le pied de l'aube dans l'alvéole du disque. En fonction du type d'aubes (soufflante, compresseur ou turbine), ces zones de contact peuvent être de formes différentes : en pied de sapin [99] ou en queue d'aronde (comme présentée en section I.1). Il s'agit principalement du nombre de surfaces de contact, aussi nommées portées, qui différencie ces deux technologies d'attache : deux pour la queue d'aronde et quatre ou plus pour le pied de sapin.

La modélisation des phénomènes de contact / frottement est un enjeu considérable afin d'optimiser l'amortissement de la structure [29] ou prévoir l'usure qu'ils engendrent [190]. À la différence des non-linéarités géométriques en grands déplacements (explicitées ci-dessus), le contact / frottement est une non-linéarité localisée ce qui signifie que celle-ci n'affecte pas tous les degrés de liberté de la structure permettant ainsi de réduire plus facilement le modèle numérique de la structure tout en conservant les degrés de liberté non-linéaires. Cette technique est notamment employée dans le chapitre III dans un dessein de réduction du modèle numérique. De plus, le contact / frottement est aussi une non-linéarité non-régulière puisque les efforts de contact sont discontinus. De multiples lois de contact et de frottement ont été développées dans la littérature, certaines discontinues se rapprochant de la physique réelle d'un contact frottant, d'autres régularisées afin d'améliorer l'intégration dans les méthodes de résolution et la convergence de l'algorithme de résolution. Parmi ces lois, plusieurs sont présentées dans la suite de cette sous-section en dissociant contact et frottement.

Lois de contact. Les lois de contact permettent d'identifier le statut du contact, à savoir la séparation ou la jonction entre les deux solides (voire l'amplitude de pénétration pour certaines lois). À partir de ce statut, les efforts de contact peuvent être évaluées au moyen de ces mêmes lois de contact. Ces dernières font intervenir les déplacements et les efforts normaux au contact entre les deux sous-structures.

La représentation classique du contact demeure la loi de contact unilatéral qui assure la non-pénétration entre les solides. Cette loi, fortement non-régulière, est difficilement implémentable dans les différentes méthodes de résolution numérique d'un problème non-linéaire et ne peut être utilisée qu'à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Cette loi de contact unilatéral est illustrée en figure I.10a et décrite par l'équation

$$\begin{cases} f_\mathrm{n} = 0 & \text{si } \delta_\mathrm{n} < 0 \\ \delta_\mathrm{n} = 0 & \text{si } f_\mathrm{n} > 0 \end{cases} \tag{I.36}$$

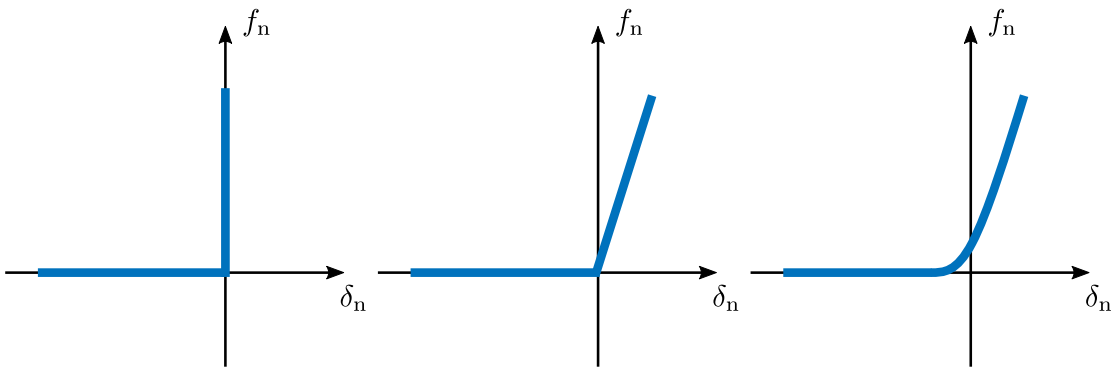
dans laquelle f_n est l'effort normal au contact et δ_n représente la pénétration entre les solides.

Dans le but de s'affranchir des problèmes numériques causés par les lois non-régulières, la loi de contact unilatéral peut être régularisée linéairement par morceaux en ajoutant une raideur à l'interface de contact [175]. Cette dernière est couramment employée puisqu'elle permet le calcul direct de la force de contact en fonction du déplacement relatif grâce à la raideur de contact. Cette loi régularisée est représentée en figure I.10b et explicitée à l'aide de l'équation

$$f_\mathrm{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_\mathrm{n} < 0 \\ k_\mathrm{n}\delta_\mathrm{n} & \text{si } \delta_\mathrm{n} \geq 0 \end{cases} \tag{I.37}$$

dans laquelle k_n est la raideur de contact.

D'autres lois régularisées ont été développées parmi lesquelles la loi exponentielle comportant plus de paramètres mais qui est aussi plus régulière que la loi linéaire par morceaux. La loi exponentielle est illustrée en figure I.10c.



(a) Unilatérale (b) Linéaire par morceaux (c) Exponentielle

FIGURE I.10 – Lois de contact

Lois de frottement. Les lois de frottement permettent d'exprimer la valeur de l'effort de frottement en fonction de l'effort de contact normal à la surface de l'interface entre les sous-structures. Ces lois font intervenir les déplacements et les efforts tangentiels, à savoir ceux contenus dans le plan du contact entre les deux sous-structures.

La loi de Coulomb est la loi classique régissant un frottement entre solides. Le modèle standard de Coulomb indique qu'aucun mouvement relatif n'est possible si l'effort tangentiel équivalent $f_{\mathrm{t_{eq}}}$ est inférieur à l'effort limite de Coulomb $f_{\mathrm{t_{cou}}}$. Son cycle d'hystérésis est donné en figure I.11a. De plus, elle est définie à l'aide de l'équation

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{t}} = \mathbf{0} & \text{si } f_{\mathrm{t_{eq}}} \leq f_{\mathrm{t_{cou}}} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{t}} = -\mu |f_{\mathrm{n}}| \frac{\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{t}}}{\|\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{t}}\|} & \text{si } \|\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{t}}\| > 0 \end{cases} \tag{I.38}$$

où $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{t}}$ est le vecteur des déplacements relatifs tangentiels, $\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{t}}$ le vecteur des vitesses relatives tangentielles, $\mathbf{f}_{\mathrm{t}}$ le vecteur des efforts tangentiels, μ le coefficient de frottement, $f_{\mathrm{t_{eq}}} = \|\mathbf{f}_{\mathrm{t}}\|$ l'effort tangentiel équivalent et $f_{\mathrm{t_{cou}}} = \mu |f_{\mathrm{n}}|$, l'effort limite de Coulomb.

À l'image des lois de contact, il est possible de régulariser la loi de Coulomb en ajoutant une raideur tangentielle supplémentaire ce qui autorise un déplacement relatif tangentiel non nul ($\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{t}}$) lorsque l'effort tangentiel est inférieur à la limite de Coulomb. La formulation du problème devient alors

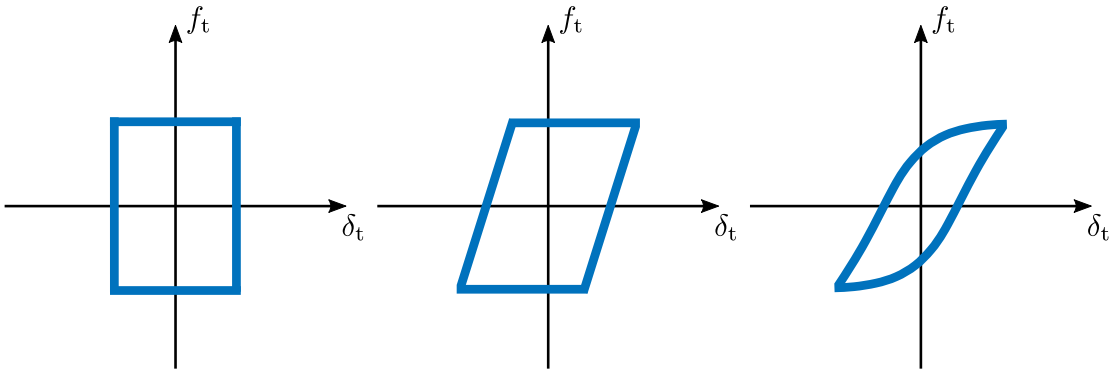
$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\mathrm{t}} = -k_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{t}} - \mathbf{z}) & \text{si } f_{\mathrm{t_{eq}}} \leq f_{\mathrm{t_{cou}}} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{t}} = -\mu |f_{\mathrm{n}}| \frac{\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{t}}}{\|\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{t}}\|} & \text{si } \|\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{t}}\| > 0 \end{cases} \tag{I.39}$$

avec $\mathbf{z}$ le vecteur correspondant au déplacement relatif tangentiel du point de contact et k_{t} la raideur tangentielle. Ces deux variables sont déterminées afin que la force de frottement ainsi exprimée n'excède pas la force limite de Coulomb.

Cette formulation permet ainsi un glissement élastique lorsque l'effort tangentiel à l'interface est inférieur à la limite de Coulomb. Son cycle d'hystérésis est illustré en figure I.11b.

La loi de frottement suivant une évolution arc-tangente permet aussi de régulariser facilement la loi de Coulomb. Cette dernière sera détaillée puis exploitée sur un modèle phénoménologique dans le chapitre II.

De nombreux autres modèles de frottement enrichissent la littérature sur le sujet parmi lesquels le modèle différentiel de Bouc-Wen [20, 233], dont le cycle d'hystérésis est représenté en figure I.11c, et qui permet de représenter des comportements microscopiques (de type micro-glissement) par l'intermédiaire de modélisations macroscopiques. Il est aussi possible de citer les lois de Dahl ou de LuGre utilisées principalement en dynamique des structures et se présentant sous une forme différentielle plus simple que celle du modèle de Bouc-Wen.



(a) Coulomb (b) Glissement élastique (c) Bouc-Wen

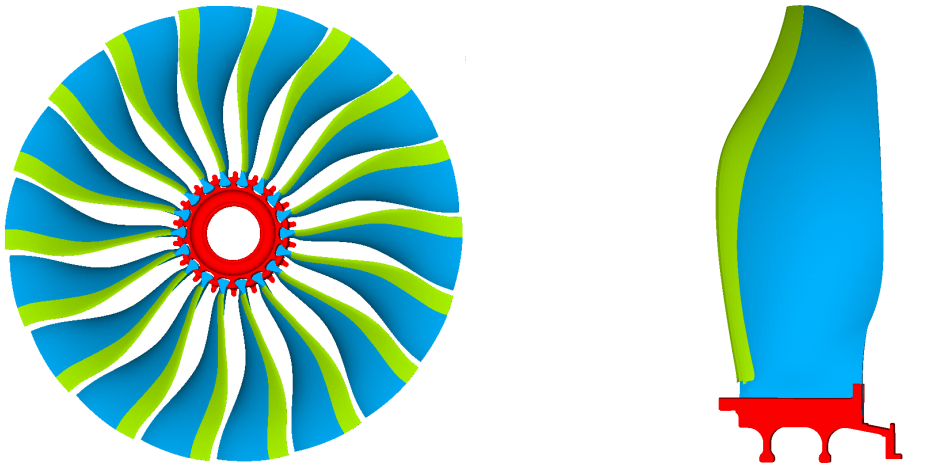
FIGURE I.11 – Lois de frottement

Les codes de calcul éléments finis, tel ANSYS®, emploient des méthode de résolution de ces lois de contact / frottement complexes pour des modèles numériques en trois dimensions comme la méthode de pénalité ou des Lagrangiens augmentés, tous deux décrits dans la thèse de Salles [190].

La méthode de résolution employée sur des modèles numériques de taille industrielle dans la suite de ce travail est la méthode des Lagrangiens dynamiques (aussi connue sous le nom de DLFT pour *Dynamic Lagrangian Frequency-Time method* en anglais) proposée par Nacivet *et al.* [151, 152]. Celle-ci est inspirée des stratégies de résolution de problèmes contraints par multiplicateurs de Lagrange assurant l'exactitude de la solution convergée. Le calcul des composantes fréquentielles des déplacements et efforts non-linéaires de contact et de frottement est effectué au moyen d'une méthode d'alternance fréquence / temps (présentée en détail dans le chapitre II) selon les lois de contact unilatéral et de Coulomb, respectivement pour le contact et le frottement. L'utilisation de cette méthode permet ainsi de s'affranchir de la régularisation de l'interface de contact par l'ajout de raideurs de pénalité, généralement difficilement quantifiables, grâce à son formalisme exploitant des multiplicateurs de Lagrange. À la suite de son développement, la technique des Lagrangiens dynamiques fut notamment reprise pour étudier l'apport des amortisseurs non-linéaires sur les roues aubagées monoblocs [122], pour l'étude du frottement en pied d'aube [29] ainsi que l'étude de l'usure liée au frottement en pied d'aube [190]. La méthode des Lagrangiens dynamiques est explicitée plus en détails en annexe A.

2.3 Structures à symétrie cyclique

Les roues aubagées présentent la particularité d'être réparties circulairement autour de l'axe de rotation grâce à une répétition de sous-structures identiques, désignées comme secteurs, se refermant sur elles-même pour constituer la structure complète : cette propriété géométrique est nommée symétrie cyclique [83, 213, 234] et illustrée en figure I.12.



(a) Soufflante complète (b) Secteur de référence

FIGURE I.12 – Géométrie du modèle numérique de la soufflante

Cette propriété de symétrie permet d'étudier ces structures à l'aide d'un formalisme particulier, reposant sur une modélisation mixte physique et ondulatoire, qui autorise l'exploitation de modèles numériques largement réduits par rapport au modèle numérique représentant la roue aubagée complète. Ce formalisme particulier permet une restriction de la modélisation à un seul et unique secteur de la structure, appelé secteur de référence,

auquel sont appliquées des conditions aux limites représentatives du type d'onde étudié. Grâce à ce formalisme, il est possible de reconstruire de façon exacte la réponse de la structure toute entière.

2.3.1 Définition des composantes cycliques

Une roue aubagée, constituée de N secteurs distribués cycliquement selon un angle $\alpha = {}^{2\Pi}/_{N}$ et numérotés en débutant par zéro, est définie en vue des développements de cette sous-section. La condition de périodicité de la structure cyclique peut être écrite telle que

$$\mathbf{u}_{j+N} = \mathbf{u}_j, \quad \forall j \in [\![0, N-1]\!] \tag{I.40}$$

dans laquelle $\mathbf{u}_j$ est le champ de déplacement du secteur j.

Selon la théorie de représentation linéaire des groupes cycliques introduite par Valid et Ohayon [227], il est possible de représenter le champ de déplacement du secteur j comme une superposition finie de fonctions harmoniques d'expression

$$\mathbf{u}_j = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{u}}^k \mathrm{e}^{ijk\alpha} \tag{I.41}$$

où $\tilde{\mathbf{u}}^k$ représente les composantes complexes harmoniques d'ordre k, aussi nommées composantes cycliques. La relation inverse, permettant d'exprimer ces composantes cycliques en fonction du champ de déplacement physique $\mathbf{u}_j$, s'écrit

$$\tilde{\mathbf{u}}^k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}_j \mathbf{e}^{-ijk\alpha} \tag{I.42}$$

Les relations (I.41) et (I.42) liant champ de déplacement et composantes cycliques sont au final des transformées de Fourier discrètes. Par ailleurs, il est possible d'utiliser un formalisme mathématique réel pour ces transformations ce qui permet alors d'exprimer le champ de déplacement $\mathbf{u}_j$ ainsi

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\mathbf{u}}^0 + \sum_{k=1}^{K} \Big(\tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{c},k} \cos(jk\alpha) + \tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{s},k} \sin(jk\alpha) \Big) + (-1)^j \tilde{\mathbf{u}}^{N/2} \tag{I.43}$$

avec la valeur du paramètre K dépendant de la parité du nombre de secteurs N

$$K = \begin{cases} \frac{N}{2} - 1 & \text{si } N \text{ est pair} \\ \frac{(N-1)}{2} & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases} \tag{I.44}$$

et le dernier terme de l'expression (I.43) uniquement pris en compte si N est pair.

La réciproque reliant les composantes cycliques réelles au champ de déplacement $\mathbf{u}_j$ est donnée par

$$\tilde{\mathbf{u}}^0 = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\mathbf{u}_j \tag{I.45a}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{c},k} = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\mathbf{u}_j\cos(jk\alpha) \tag{I.45b}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{s},k} = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\mathbf{u}_j\sin(jk\alpha) \tag{I.45c}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{N/2} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(-1)^j\mathbf{u}_j \tag{I.45d}$$

L'équation (I.43) peut aussi s'énoncer sous une forme matricielle plus compacte

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{u}} \tag{I.46}$$

où les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\tilde{\mathbf{u}}$, composés respectivement du champ de déplacement et des composantes cycliques de chaque secteur, ont pour expression

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_j & \cdots & \mathbf{u}_{N-1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{I.47}$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{u}}^0 & \tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{c},1} & \tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{s},1} & \cdots & \tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{c},k} & \tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{s},k} & \cdots & \tilde{\mathbf{u}}^{N/2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{I.48}$$

et la matrice réelle de transformée de Fourier discrète

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & \cos(2\alpha) & \cdots & \sin(K\alpha) & -1 \\ 1 & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & \cos(4\alpha) & \cdots & \sin(2K\alpha) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\left((N-1)\alpha\right) & \sin\left((N-1)\alpha\right) & \cos\left((N-1)2\alpha\right) & \cdots & \sin\left((N-1)K\alpha\right) & -1 \end{pmatrix} \tag{I.49}$$

Toute grandeur physique, notamment le champ de déplacement $\mathbf{u}_j$, d'une structure cyclique peut donc être décrite exactement par l'intermédiaire des composantes cycliques $\tilde{\mathbf{u}}^k$, définies sur un secteur de référence, et par un indice harmonique k. Contrairement à un système cyclique décrit en base physique pour lequel la structure entière est représentée, une modélisation en base cyclique permet de ne traiter que des sous-problèmes du problème intégral, indépendants les uns des autres. Chacun de ces sous-problèmes est associé à un indice harmonique k et donc à un type d'onde se propageant dans la structure cyclique ce qui permet de ne résoudre que les types d'onde d'intérêt pour l'étude de la structure. Le problème à résoudre se trouve alors être de taille significativement réduite par comparaison à celui exprimé en base physique.

2.3.2 Formulation d'un problème en symétrie cyclique

La formulation d'un problème en symétrie cyclique revient à exprimer le problème, à savoir les matrices structurales en plus des vecteurs solutions, en base cyclique et à compléter chaque sous-problème par des conditions aux limites. Ces dernières traduisent la

fermeture de la structure sur elle-même et le déphasage spatial qui caractérisent l'onde correspondant à l'indice harmonique k considéré.

Dans un premier temps, chaque matrice structurale s'exprime en base cyclique par l'intermédiaire de la matrice de transformée de Fourier discrète $\mathbf{F}$ ainsi

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}\mathbf{F} \tag{I.50}$$

avec $\mathbf{Z}$, une matrice générique représentant les matrices structurales de masse, de raideur ou d'amortissement et $\tilde{\mathbf{Z}}$, cette même matrice exprimée en base cyclique.

La forme de la matrice de transformée de Fourier discrète $\mathbf{F}$ et les relations d'orthogonalité des fonctions trigonométriques [99] impliquent une matrice $\tilde{\mathbf{Z}}$ diagonale par blocs telle que

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \mathrm{diag}(\tilde{\mathbf{Z}}^k) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{Z}}^k = N\mathbf{Z}_0 & \text{pour } k \in \{0, {}^N\!/_2\} \\ \tilde{\mathbf{Z}}^k = \frac{N}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_0 \end{pmatrix} & \text{pour } k \in [\![1, K]\!] \end{cases} \tag{I.51}$$

La forme de la matrice $\tilde{\mathbf{Z}}$, diagonale par blocs, équivaut à un ensemble de sous-problèmes indépendants correspondant à chaque indice harmonique k comme écrit plus haut. De plus, il est possible de remarquer que, pour les harmoniques 0 et ${}^N\!/_2$, la taille du problème est équivalente au nombre de degrés de liberté du secteur, tandis que, pour les autres harmoniques, la taille du système matriciel est doublée en raison des termes en cosinus et en sinus caractérisant l'onde considérée.

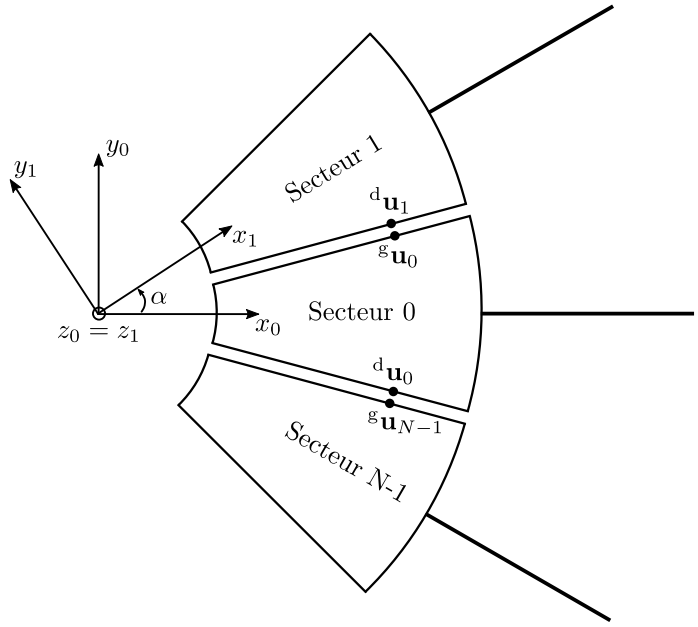


FIGURE I.13 – Représentation de la partition d'un secteur d'un système cyclique

Dans un second temps, afin d'appliquer les conditions aux limites appropriées, il est primordial de partitionner le vecteur du champ de déplacement du secteur de référence $\mathbf{u}_0$ ainsi

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{g}}\mathbf{u}_0 & {}^{\mathrm{d}}\mathbf{u}_0 & {}^{\mathrm{i}}\mathbf{u}_0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{I.52}$$

dans laquelle les exposant ${}^{\mathrm{g}}\bullet$, ${}^{\mathrm{d}}\bullet$ et ${}^{\mathrm{i}}\bullet$ correspondent respectivement aux degrés de liberté de frontière à gauche et à droite ainsi qu'aux degrés de liberté internes de chaque secteur. Ces notations sont illustrées en figure I.13.

En base physique, les conditions aux limites traduisent la continuité du champ de déplacement $\mathbf{u}$ aux interfaces entre les différents secteurs. Le couple équation (I.53) traduit cette condition appliquée au secteur de référence et ses secteurs adjacents.

$$ {}^{\mathrm{g}}\mathbf{u}_0 = {}^{\mathrm{d}}\mathbf{u}_1 \tag{I.53a} $$

$$ {}^{\mathrm{d}}\mathbf{u}_0 = {}^{\mathrm{g}}\mathbf{u}_{N-1} \tag{I.53b} $$

En insérant la relation (I.41) dans le couple équation (I.53), les conditions de continuité à l'interface s'expriment en base cyclique pour chaque harmonique k

$$ {}^{\mathrm{g}}\tilde{\mathbf{u}}_0^k = {}^{\mathrm{d}}\tilde{\mathbf{u}}_0^k \mathrm{e}^{ik\alpha} \tag{I.54a} $$

$$ {}^{\mathrm{d}}\tilde{\mathbf{u}}_0^k = {}^{\mathrm{g}}\tilde{\mathbf{u}}_0^k \mathrm{e}^{i(N-1)k\alpha} \tag{I.54b} $$

Ces deux relations de propagation, exprimées en base cyclique, permettent de relier les degrés de liberté des deux frontières du secteur de référence. Ces expressions sont équivalentes, par conséquent une seule de ces équations suffit à formuler le problème en base cyclique. Par souci de concision, la relation (I.54a) est généralement conservée. Il est aussi possible d'écrire cette relation en employant un formalisme réel pour aboutir aux expressions

— pour $k = 0$

$$ {}^{\mathrm{g}}\tilde{\mathbf{u}}^0 = {}^{\mathrm{d}}\tilde{\mathbf{u}}^0 \tag{I.55} $$

— pour $k \in [\![1, K]\!]$

$$ \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{g}}\tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{c},k} \\ {}^{\mathrm{g}}\tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{s},k} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k\alpha) & \sin(k\alpha) \\ -\sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{d}}\tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{c},k} \\ {}^{\mathrm{d}}\tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{s},k} \end{bmatrix} \tag{I.56} $$

— pour $k = {}^{N}/_{2}$

$$ {}^{\mathrm{g}}\tilde{\mathbf{u}}^{N/2} = -{}^{\mathrm{d}}\tilde{\mathbf{u}}^{N/2} \tag{I.57} $$

Les sous-problèmes, définis dans un premier temps puis complétés de ces conditions aux limites cycliques, permettent de formuler le problème en base cyclique et autorisent ainsi la modélisation d'un système possédant des propriétés géométriques de symétrie cyclique à partir d'un seul et unique secteur de référence.

La section suivante traite de la résolution de problèmes structuraux classiques en employant ce formalisme cyclique à savoir l'analyse modale et la réponse forcée.

2.3.3 Problèmes structuraux en base cyclique

L'équation régissant la dynamique d'un solide, définie en sous-section I.2.1, peut être reformulée en base cyclique grâce aux développements présentés dans cette sous-section de la manière suivante

$$ \tilde{\mathbf{M}}^k \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^k(t) + \tilde{\mathbf{C}}^k \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^k(t) + \tilde{\mathbf{K}}^k \tilde{\mathbf{u}}^k(t) = \tilde{\mathbf{g}}^k(t) \quad \forall k \in [\![0, {}^{N}/_{2}]\!] \tag{I.58} $$

où les notations employées sont identiques à celles de la sous-section I.2.1. Afin d'alléger les équations, les termes dépendant de la rotation du solide ne sont pas explicitement écrits mais peuvent être ajoutés simplement à l'équation (I.58). Chacun de ces sous-problèmes est augmenté d'équations de contrainte correspondant aux relations de continuité entre les secteurs définis par les expressions (I.55), (I.56) et (I.57).

Analyse modale. L'analyse modale linéaire d'une structure converge vers l'obtention des fréquences propres et de la déformée des modes propres de la structure étudiée (plus de détails sur l'analyse modale linéaire sont fournis dans le chapitre II). En base physique, cette analyse modale linéaire nécessite la résolution du problème aux valeurs propres suivant

$$(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M})\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{0} \tag{I.59}$$

où $\mathbf{\Phi}_i$ est la déformée du $i^{\text{ème}}$ mode linéaire du système qui en comporte n et Ω est la pulsation propre associée au $i^{\text{ème}}$ mode normal linéaire.

La formulation de ce problème aux valeurs propres en base cyclique mène à la résolution des sous-problèmes aux valeurs propres associés à chaque indice harmonique k et contenus dans l'équation

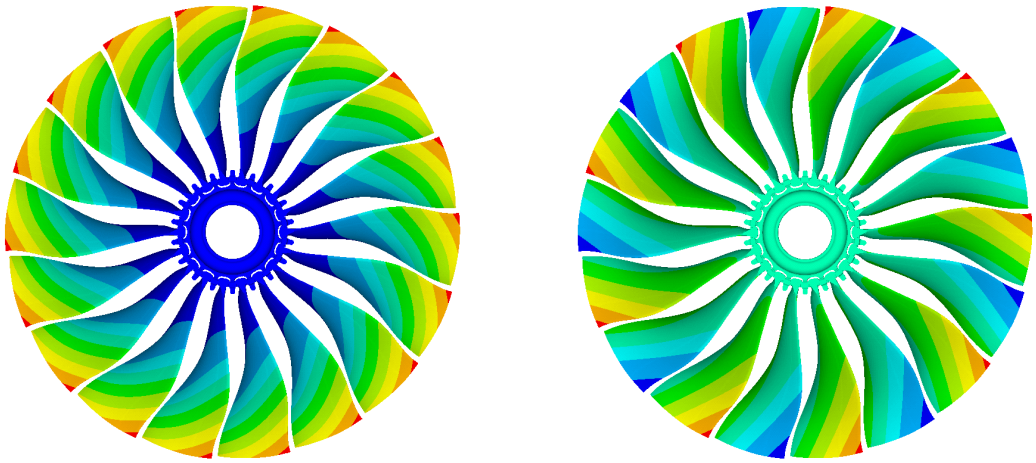
$$(\tilde{\mathbf{K}}^k - \Omega^2\tilde{\mathbf{M}}^k)\tilde{\mathbf{\Phi}}_i^k = \mathbf{0} \tag{I.60}$$

Les solutions de ces sous-problèmes peuvent être réparties en deux catégories. La première est constituée des solutions définies comme non-dégénérées pour lesquelles la valeur propre Ω^2 est simple. Ces solutions sont associées aux indices harmoniques $k = 0$ et $k = {}^N/_2$ (lorsque N est pair pour ce dernier cas). La seconde catégorie est formée par les solutions dites dégénérées et dont la valeur propre Ω^2 est double. Cette dégénérescence de certains modes propres permet de reconstruire, à partir des deux vecteurs propres linéairement indépendants, associés à la même fréquence propre Ω, une onde dite tournante. Cette onde se propage dans la structure dans l'une ou l'autre des directions : une onde se propageant dans le sens de rotation de la roue aubagée est dite co-rotative tandis qu'une onde se déplaçant dans le sens opposé est dite contra-rotative. Une combinaison linéaire entre une onde co-rotative et une autre contra-rotative dans des proportions identiques aboutit à une onde dite stationnaire.

Les déformées $\tilde{\mathbf{\Phi}}_i^k$ des modes propres comportent des diamètres nodaux se rapportant aux lignes le long desquelles le champ de déplacement de la structure est nul. Le nombre de diamètres nodaux de la déformée est égal à l'indice harmonique k du mode exprimé en base cyclique. Grâce au formalisme cyclique employé, il est possible d'évaluer uniquement les modes possédant le nombre de diamètres nodaux souhaités puisque ce formalisme permet de découpler les différents sous-problèmes aux valeurs propres correspondant à des indices harmoniques k différents.

La figure I.14 illustre les modes non-dégénérés de la soufflante composite à dix-huit secteurs étudiée dans les travaux de ce mémoire. Il est possible de remarquer sur la figure I.14a que la totalité des secteurs du mode à zéro diamètre nodal vibrent en phase. Tandis que sur la figure I.14b, les secteurs adjacents du mode à neuf diamètres nodaux (${}^N/_2$ diamètres) vibrent en opposition de phase.

Les modes dégénérés à deux diamètres nodaux, représentés sur la figure I.15, permettent d'identifier clairement les positions des diamètres. Il est alors possible de remarquer que ces deux modes propres dégénérés sont orthogonaux. La représentation de la déformée du mode à deux diamètres comme illustrée sur la figure I.15 ne permet d'identifier le type d'onde (stationnaire, co-rotative ou contra-rotative) se propageant dans la structure cyclique. D'autres représentations, proposées dans le chapitre VI, peuvent alors mettre en évidence graphiquement le type de l'onde.



(a) Zéro diamètre nodal (b) Neuf diamètres nodaux

FIGURE I.14 – Déformées modales non-dégénérées du premier mode de flexion (déplacements minimum ■ et maximum ■)

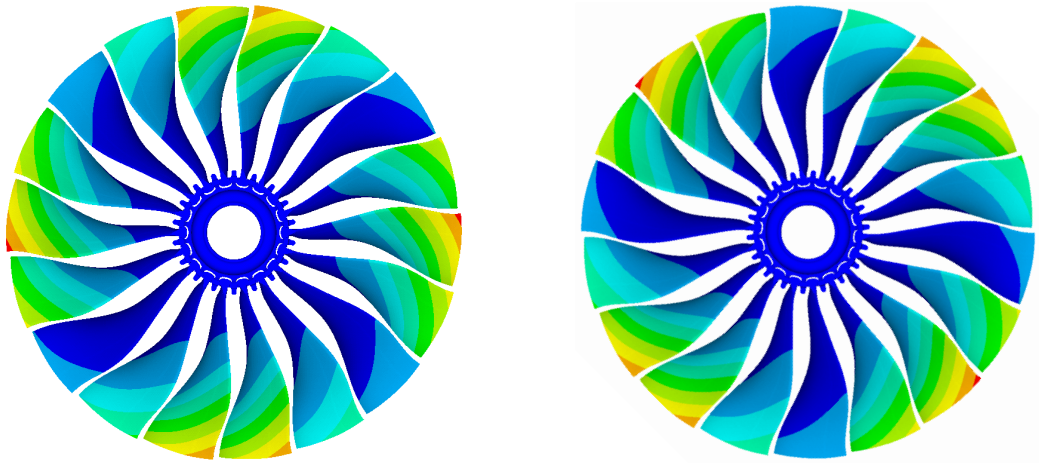


FIGURE I.15 – Déformées du premier mode de flexion dégénéré à deux diamètres nodaux (déplacements minimum ■ et maximum ■)

Réponse forcée. À partir de l'équation du mouvement formulée en base cyclique (I.58), la réponse forcée linéaire du système peut être évaluée. Les sous-problèmes associés à chaque indice harmonique k restant toujours indépendants, les équations d'intérêt, à savoir celles possédant un terme d'excitation $\tilde{\mathbf{g}}^k(t)$ non nul, peuvent être résolues indépendamment les unes des autres ce qui permet de réduire la taille du système à résoudre.

Cette sous-section, en plus de développer la formulation d'un problème en symétrie cyclique, a principalement permis d'introduire les notions de modes à diamètres (dégénérés et non-dégénérés) et de propagation de l'onde (stationnaire, co-rotative et contra-rotative) dans la structure cyclique. Ces notions seront amplement exploitées dans le chapitre VI consacré aux essais en rotation de la soufflante dans le module structure PHARE#1.

Néanmoins, l'hypothèse de symétrie cyclique de la structure implique l'uniformité de tous les secteurs. Or, des imperfections liées à la fabrication ou à l'usure des différents secteurs et en particulier des aubes sont inévitables. Par conséquent, cette méthode de

symétrie cyclique n'est pas adaptée lorsque la roue aubagée doit être modélisée le plus fidèlement possible à la réalité. Ce phénomène de disparité entre les secteurs est nommé désaccordage et sera développé plus en détails dans la sous-section suivante.

2.4 Éléments de désaccordage

Le désaccordage mécanique désigne l'ensemble des différences structurales ou géométriques existant entre les secteurs d'une roue aubagée. Bien que les roues aubagées soient conçues de manière cyclique, c'est-à-dire en considérant l'ensemble des secteurs identiques (qu'il est alors possible de désigner comme accordés), la fabrication d'une roue à aubes rapportées ou même monobloc n'aboutit jamais à une roue purement cyclique. En effet, les procédés de fabrication induisent inévitablement des dispersions matérielles sur le disque et les aubages. Celles-ci sont principalement liées aux tolérances d'usinage ou de mise en forme auxquelles peuvent s'ajouter des disparités induites par l'usure des composants. Ce phénomène de désaccordage est nommé involontaire ou aléatoire par opposition au désaccordage intentionnel exposé dans la suite de cette sous-section.

Afin de minimiser les écarts entre les résultats expérimentaux et numériques et donc d'augmenter la fiabilité des simulations numériques, la prise en compte de ce phénomène de désaccordage est nécessaire. Il est alors inévitable de travailler sur un modèle complet de roue aubagée et non un modèle bénéficiant d'une hypothèse de symétrie cyclique. Des techniques de réduction de modèle numérique, appliquées au cas des roues aubagées désaccordées, peuvent ainsi être employées dans le but de travailler sur des modèles de taille raisonnable. Ces dernières peuvent s'appuyer sur une base de modes propres linéaires [15, 144, 238] ou plus récemment non-linéaires [101, 102] ce qui est le cas dans la suite de ce travail de thèse.

D'un point de vue numérique, les disparités structurales et géométriques des différents secteurs affectent les matrices de masse $\mathbf{M}$, d'amortissement $\mathbf{C}$ et de raideur $\mathbf{K}$ de chaque secteur. Pour intégrer ces disparités à la modélisation, il est possible de modifier le module de Young ainsi que la densité de chaque secteur. Cependant, il est plus commun de modifier la fréquence propre [18, 19, 57] et le taux d'amortissement modal [106, 200] des différents secteurs en employant une répartition aléatoire ou intentionnelle par rapport à la valeur nominale. Cette dernière méthode sera employée pour prendre en compte le phénomène de désaccordage dans la suite de ce travail de thèse et notamment dans le chapitre VI.

Le désaccordage involontaire de la roue, même pour de faibles niveaux, est susceptible de perturber significativement la réponse dynamique de la structure. Les premiers travaux consacrés à ce phénomène [50, 52, 229] ont permis d'observer que l'amplitude de réponse de certains secteurs était plus importante que celle des autres secteurs pour une excitation périodique donnée. Cette constatation indique que certains modes possèdent une localisation de l'énergie [181, 231, 232] sur quelques secteurs, brisant ainsi la symétrie de la réponse à diamètres et pouvant entraîner une amplification de la réponse maximale jusqu'à un facteur de l'ordre de deux comme le révèle la figure I.16. Les courbes représentant l'évolution typique du facteur d'amplification pour une structure désaccordée au comportement linéaire, telles celles de la figure I.16 comportent généralement deux zones : une première pour laquelle le facteur d'amplification croît en suivant une pente raide puis une seconde, à la suite du maximum de la courbe, où le facteur diminue à mesure que le taux de désaccordage augmente.

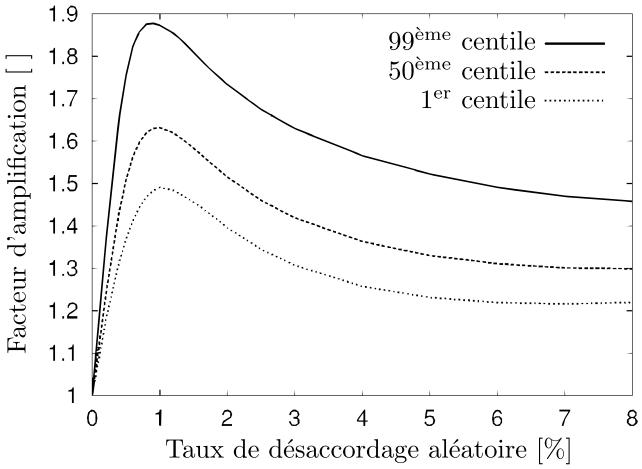


FIGURE I.16 – Facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage aléatoire [27]

Le désaccordage aléatoire, résultant des disparités structurales et géométriques ainsi que de l'usure des composants, conduit généralement à des facteurs d'amplification contenus dans la première zone de la courbe de la figure I.16, zone dans laquelle de faibles imperfections conduisent à des variations significatives du facteur d'amplification. En termes de robustesse de dimensionnement, il semble plus avantageux de se placer dans la seconde zone de la courbe où la variation du facteur d'amplification est plus faible et engendre donc une erreur moindre sur les amplitudes prédites. Cette constatation a donné naissance au concept de désaccordage intentionnel [26, 31, 143] consistant à briser volontairement la symétrie cyclique de la roue pour se positionner au delà du maximum d'amplification, dans la zone permettant un dimensionnement plus robuste.

Par ailleurs, plusieurs travaux [26, 52, 71] se sont intéressés à l'optimisation du schéma de désaccordage d'une roue aubagée en modifiant les caractéristiques modales des aubes et leur répartition autour du disque afin de réduire le facteur d'amplification. Plus récemment, des études [137, 165] se sont aussi souciées des très grandes valeurs de désaccordage induites, par exemple, par l'endommagement d'une ou plusieurs aubes.

Le désaccordage induit un second effet sur la réponse forcée d'une roue aubagée se rapportant à l'excitabilité de celle-ci. En effet, pour une structure purement cyclique, l'excitabilité des modes est régie par deux conditions : une condition fréquentielle et une condition d'appropriation modale (évoquée en section I.3 avec le diagramme zig-zag). Néanmoins, l'excitabilité des modes d'une structure désaccordée n'est plus régie que par la condition fréquentielle ce qui engendre une très grande densité modale sur les réponses forcées de la structure. De plus, des travaux [53, 54] sur les propriétés des structures accordées et désaccordées ont révélé que les modes dégénérés (voir section I.2.3) des roues aubagées se scindent en modes de fréquences propres différentes à cause du désaccordage, enrichissant potentiellement encore plus le spectre des réponses forcées.

Cependant, le désaccordage ne présente pas que des inconvénients. En effet, le désaccordage intentionnel peut octroyer, dans certaines conditions, des effets stabilisant à la structure vis-à-vis du phénomène de flottement aéroélastique en permettant d'augmenter les marges au flottement [108, 112, 139].

Les états de l'art de Slater *et al.* [203] et Castanier et Pierre [27] sont susceptibles d'apporter plus de précisions au lecteur intéressé par le désaccordage aléatoire et intentionnel des structures et particulièrement des roues aubagées.

3 Dimensionnement des roues aubagées

Le dimensionnement des roues aubagées face aux phénomènes vibratoires est une étape cruciale du développement industriel de nouvelles technologies dans les turboréacteurs. En effet, ces phénomènes vibratoires peuvent endommager voire détruire les aubages. Cette section souligne particulièrement les aspects mécaniques du dimensionnement et notamment le dimensionnement en dynamique des structures.

Pour débuter cette section, les sources d'excitation des aubages sont détaillées. Les différents outils permettant un développement efficace des roues aubagées en dynamique des structures sont ensuite présentés.

3.1 Sources de vibration

Les origines des phénomènes vibratoires affectant les roues aubagées sont multiples et souvent complexes. Les principales sources de vibration et les phénomènes associés sont décrits dans cette sous-section en distinguant les phénomènes d'origine aéroélastique de ceux d'origine mécanique.

3.1.1 Phénomènes d'origine aéroélastique

Les phénomènes d'origine aéroélastique peuvent, eux-mêmes, être différenciés selon deux types de problématiques : les phénomènes synchrones par rapport à la vitesse de rotation de l'arbre et les phénomènes asynchrones.

Les réponses forcées aéroélastiques des aubes constituent la majeure partie des phénomènes synchrones.

Réponse forcée. Les réponses forcées aéroélastiques demeurant un phénomène synchrone, la fréquence d'excitation est alors un harmonique de la vitesse de rotation de l'arbre. Ces réponses forcées sont causées par les perturbations en amont et en aval de l'aubage considéré, perturbations induites par les obstacles fixes dans la veine d'air, tels que les distributeurs, les redresseurs, ou les bras de carter. Ces perturbations se traduisent par des fluctuations du champ de pression dans le fluide ; les aubages sont alors excités par ce type de perturbation un nombre de fois égal à la fréquence de rotation de l'arbre multipliée par le nombre d'obstacles. Les aubes peuvent alors entrer en résonance si l'une de leurs fréquences propres coïncide avec un harmonique de l'excitation (soit un harmonique de la vitesse de rotation de l'arbre). Les phénomènes synchrones sont, de manière générale, correctement prédits et les aubages sont ainsi dimensionnés pour prévenir leur entrée en résonance, notamment à l'aide des outils présentés en sous-section I.3.2.

Les principaux phénomènes asynchrones sont dans la plupart des cas des phénomènes auto-entretenus résultant de l'interaction entre les vibrations des aubes et le fluide. Ceux-ci sont plus difficilement prédictibles et donc difficilement modélisables ce qui peut conduire à de coûteuses re-conceptions.

Flottement. Le phénomène de flottement est une instabilité dynamique d'origine aérodynamique qui se manifeste au voisinage d'une fréquence de résonance de la roue aubagée et pendant laquelle les vibrations des aubages et les forces aérodynamiques instationnaires s'auto-entretiennent [82]. Plusieurs phénomènes de flottement aéroélastique peuvent être rencontrés sur des aubes de turboréacteur, comme par exemple le couplage entre les modes de flexion et de torsion de l'aube par l'intermédiaire du fluide. Cependant les profils et les matériaux des aubes actuelles, notamment ceux de la soufflante, peuvent conduire à un

type de flottement particulier se caractérisant par un amortissement aérodynamique (qualifié de négatif) supérieur, en valeur absolue, à l'amortissement structural : l'énergie dissipée par la structure est alors inférieure à l'énergie apportée par le fluide. Ce phénomène est redoutable pour les structures puisque les niveaux vibratoires se révèlent incontrôlables, nécessitant alors de sortir de la zone d'instabilité en modifiant le point de fonctionnement du moteur.

Décollement tournant. Ce phénomène peut se ranger dans la catégorie des instabilités d'écoulement tournant. Le décollement tournant se produit à basse vitesse de rotation et se caractérise par la présence de poches de fluide décollées de la structure se déplaçant à une vitesse inférieure à celle du rotor. Il en résulte généralement de fortes différences de pression entre les différentes aubes d'une roue mobile ce qui génère de forts niveaux de vibration [70]. Ce phénomène peut parfois être à l'origine d'instabilités plus importantes comme le pompage.

Le pompage se caractérise par l'apparition de fortes fluctuations de pression pouvant conduire à une inversion globale du sens de l'écoulement. Ce phénomène instable est très énergétique et s'accompagne de fortes sollicitations mécaniques pouvant avoir des conséquences désastreuses pour un turboréacteur.

3.1.2 Phénomènes d'origine mécanique

Bien que les principales sources de vibration dans les turboréacteurs soient d'origine aéroélastique, des vibrations d'origine mécanique sont aussi présentes. Parmi ces dernières, les effets de balourd ainsi que le contact entre le rotor et le stator sont prépondérants.

Balourd. Les effets de balourd sont les sollicitations mécaniques principales des machines tournantes. Ceux-ci résident en des efforts d'inertie générés par une position du centre de gravité du rotor en décalage par rapport à son axe de symétrie ou une direction différente de l'axe principal d'inertie du rotor par rapport à son axe de rotation. La présence de balourd conduit à une force d'excitation synchrone dont l'amplitude est proportionnelle à sa masse, son excentrement et au carré de la vitesse de rotation de l'arbre. Les sources de balourd sont diverses et peuvent être dues à une répartition hétérogène de la masse autour de l'axe de rotation, en raison par exemple des dispersions de matériau qui résultent de l'imperfection des techniques de fonderie et d'usinage, ou bien d'un mauvais assemblage des composants. Pour le minimiser, les constructeurs imposent des tolérances de fabrication très sévères. De plus, des équilibrages, par ajout de masselottes ou retrait de matière par usinage, sont réalisés à de multiples reprises pendant le montage.

Un balourd peut aussi apparaître au cours de l'exploitation du moteur à la suite de la fatigue vibratoire de certains composants pouvant amener une perte d'aube. Le rotor et notamment les aubes peuvent aussi être endommagés lors de l'ingestion de corps étrangers tels que des grêlons ou des oiseaux. De tels évènements peuvent causer d'importants dommages et entrainer la perte d'une ou plusieurs aubes générant ainsi un important balourd. Pour anticiper ces dommages et donc ces balourds, les essais de certification des turboréacteurs permettent de contrôler la résistance de la machine à ces éventualités. Les essais d'ingestion de corps étrangers de taille plus ou moins importante (oiseaux et glace par exemple) ainsi que les essais de perte d'une aube mobile, induisant tous deux de sérieux balourds, constituent des étapes indispensables avant la certification.

Contact rotor / stator. Les phénomènes de contact rotor / stator prennent une importance grandissante dans la dynamique des roues aubagées principalement à cause de la réduction des jeux de fonctionnement entre la tête des aubes et le carter. Cette minimisa-

tion des jeux a pour objectif d'améliorer l'efficacité en fonctionnement de la roue aubagée en question en réduisant les pertes de flux par fuites de l'écoulement entre le carter et la tête des aubes. Le contact rotor / stator induit une importante contrainte tangentielle appliquée en tête d'aube, entraînant la flexion de celle-ci de façon continue ou intermittente. Des travaux tendent à montrer que des phénomènes d'instabilités vibratoires et d'interactions modales peuvent résulter de ce contact [126]. Afin de pallier ces problèmes, certaines machines sont pourvues de couches de matériau abradable dans les zones où le contact est susceptible de survenir. Par ailleurs, de plus en plus de travaux s'intéressent à ce domaine particulier de la dynamique des roues aubagées que ce soit d'un point de vue expérimental [3, 168] ou numérique [169].

La rotation de la machine n'entraîne pas seulement des efforts dynamiques tels que ceux présentés précédemment. En effet, en plus d'un raidissement centrifuge (détaillé dans le développement de l'équation du mouvement de la section I.2), un effet géométrique non-négligeable se manifeste. Les aubes ont alors tendance à se dévriller sous les effets combinés de la rotation et des chargements liés au fluide. Les changements de géométrie des aubes sont d'autant plus importants que les géométries sont complexes, particulièrement en ce qui concerne les aubes à large corde. Ces effets statiques sont, au même titre que les effets aérodynamiques mentionnés ci-dessus, essentiels à prendre en compte dans le dimensionnement et la modélisation numérique des aubes.

La connaissance de ces différentes sources de vibration aéroélastiques et mécaniques permet ainsi le dimensionnement de la structure concernée à l'aide des outils exposés dans la sous-section suivante.

3.2 Outils de dimensionnement

Comme présenté dans la sous-section précédente, les roues aubagées sont astreintes à de nombreux phénomènes de vibration pouvant entrainer de la fatigue vibratoire voire, dans le pire des cas, la rupture de la pièce et donc la perte d'une aube. Afin de prédire ces phénomènes vibratoires et ainsi la ruine par fatigue des aubages, plusieurs outils de dimensionnement vibratoire linéaire sont employés. Ceux-ci visent principalement à dimensionner la structure face aux excitations synchrones qui sont plus aisées à prédire que les excitations asynchrones pour lesquelles le dimensionnement se base davantage sur le retour d'expérience du motoriste et les essais.

3.2.1 Diagramme fréquences / diamètres

Le diagramme fréquences / diamètres permet de suivre l'évolution des fréquences propres de chaque mode de vibration d'une roue aubagée en fonction du nombre de diamètres nodaux pour une vitesse de rotation fixée ; la notion de diamètre nodal ayant été abordée en section I.2. Le diagramme fréquences / diamètres théorique de la soufflante exploitée pendant la campagne d'essais réalisée sur le module structure PHARE#1 pour une vitesse de rotation de 50 % est donné en figure I.17. À noter que les vitesses de rotation sont exprimées en pourcentage du régime nominal de la soufflante et que les fréquences propres de celle-ci sont normalisées pour des raisons de confidentialité industrielle.

Dans le cas de cette soufflante composite, il est possible de remarquer que les fréquences propres varient très peu en fonction du nombre de diamètres nodaux. Contrairement au diagramme fréquences / diamètres d'autres types de roues aubagées, par exemple un disque aubagé monobloc (à l'instar de celui présenté dans le mémoire de thèse de Laxalde [122])

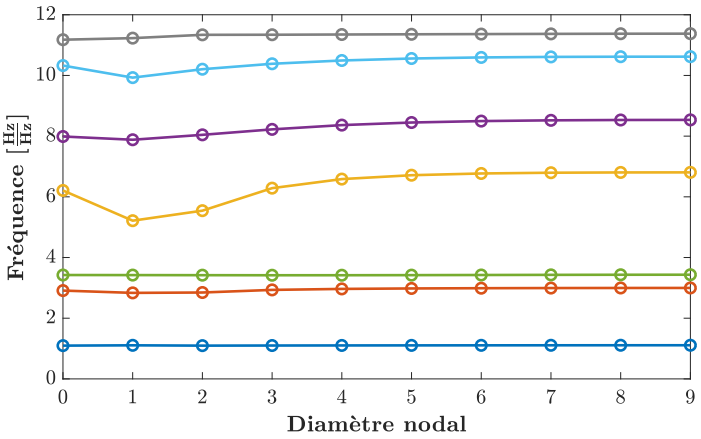


FIGURE I.17 – Diagramme fréquences / diamètres théorique de la soufflante étudiée

pour lequel les fréquences propres peuvent fortement varier en fonction du nombre de diamètres nodaux et particulièrement pour les premiers diamètres nodaux. Cette forte évolution traduit l'importante contribution en raideur du disque pour les déformées correspondant aux premiers diamètres nodaux.

Sur ce type de représentation, il est également possible d'identifier des zones de *veering* qui correspondent à un rapprochement des courbes associées à deux familles de modes de vibration. Ce phénomène de *veering* entraîne un couplage entre les modes en question et peut entraîner d'importantes amplitudes de vibration pouvant rapidement mener à la destruction de l'aubage.

3.2.2 Diagramme de Campbell

Afin d'anticiper tout risque de coïncidence fréquentielle entre l'une des fréquences propres de la roue aubagée et la fréquence d'excitation des sources de vibration, développées en sous-section I.3.1, le tracé du diagramme de Campbell de la roue demeure un outil indispensable pour le dimensionnement des aubages face aux phénomènes d'excitation synchrone qu'ils soient mécaniques ou aéroélastiques. Ce diagramme représente l'évolution des fréquences propres de la roue aubagée pour un diamètre nodal fixé en fonction de sa vitesse de rotation ainsi que les harmoniques de la vitesse de rotation, appelés ordres moteur (*engine order* en anglais). Ce type de représentation permet de mettre en évidence les risques de résonance lorsqu'une des droites représentant les ordres moteur croise une ou plusieurs fréquences propres dans la plage de fonctionnement de la turbomachine. Il est ainsi préférable de ne pas positionner un point de fonctionnement du moteur aux abords de l'une des coïncidences. Le diagramme de Campbell théorique de la soufflante, exploitée en essais, est tracé pour un mode à deux diamètres nodaux en figure I.18 ; les vitesses de rotation étant toujours exprimées en pourcentage du régime nominal de la soufflante et les fréquences propres de celle-ci toujours normalisées.

La coïncidence entourée sur le diagramme I.18 représente l'interaction entre le premier mode de flexion (1F) et le deuxième harmonique moteur de la soufflante. Compte tenu de l'importante densité modale des structures à symétrie cyclique, il est possible qu'un grand nombre de coïncidences fréquentielles apparaissent sur le diagramme de Campbell. Cependant, toutes les coïncidences fréquentielles ne sont pas nécessairement menaçantes pour la

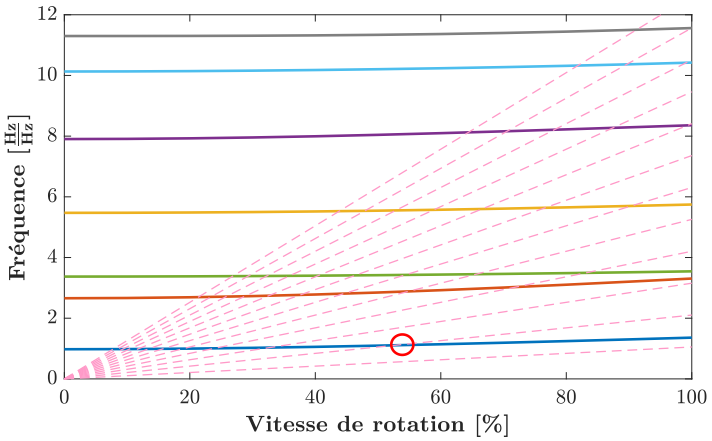


FIGURE I.18 – Diagramme de Campbell théorique de la soufflante du banc PHARE#1 (— mode de vibration et - - ordre moteur)

machine. Pour qu'une coïncidence soit considérée dangereuse, la condition d'appropriation modale doit également être satisfaite. Cette condition est représentée graphiquement par le diagramme zigzag.

3.2.3 Diagramme zigzag

Le diagramme zigzag, aussi nommé diagramme *SAFE* [201] (pour *Singh's Advanced Frequency Evaluation*), représente la condition d'excitabilité d'un mode de vibration par un ordre moteur. Dans le cas d'une roue aubagée, cette condition est nommée condition d'appropriation modale et correspond à la règle de repliement de spectre des harmoniques spatiales en nombre de diamètres nodaux équivalents [234]. Plus directement, pour qu'un mode à diamètres d'une roue parfaitement symétrique, comprenant N secteurs identiques, soit excité par un ordre moteur EO, la relation (I.61) nécessite d'être satisfaite.

$$\mathrm{EO} \pm k = pN \tag{I.61}$$

avec k le nombre de diamètres du mode et p un entier naturel.

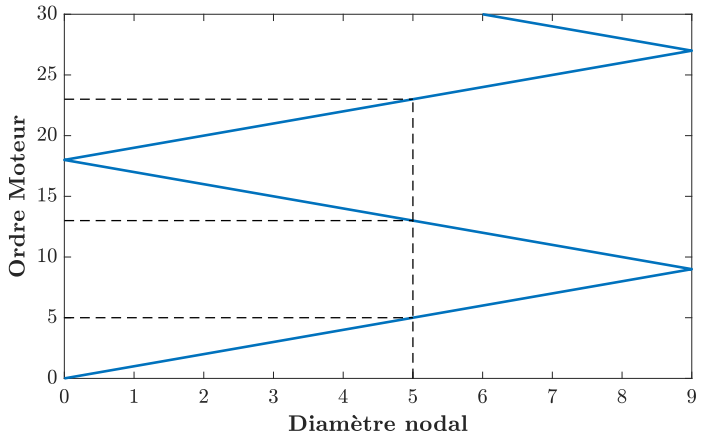


FIGURE I.19 – Diagramme zigzag de la soufflante du banc PHARE#1

L'expression (I.61) peut se représenter graphiquement sur un diagramme zigzag, celui de la soufflante comprenant 18 secteurs et exploitée en essais est donné en figure I.19. Cet exemple permet de constater le phénomène de repliement qui permet aux modes à diamètres d'être excités par les ordres moteurs supérieurs à $N/2$ et qui réduit grandement le nombre de coïncidences susceptibles d'être préjudiciables pour la roue aubagée.

3.2.4 Diagrammes de dimensionnement en fatigue vibratoire

Bien que les outils à disposition soient performants pour dimensionner les roues aubagées face aux vibrations et ainsi anticiper les risques de résonance en fonctionnement dans le cas de phénomènes de vibration synchrone, la rupture par fatigue vibratoire reste l'une des causes principales d'endommagement des aubes. Il est donc nécessaire de dimensionner les roues aubagées par rapport à ce phénomène de fatigue vibratoire. Ce dimensionnement repose principalement sur deux outils empiriques : les courbes de Wöhler et le diagramme de Haigh qui sont brièvement abordés dans la suite de cette sous-section.

Courbe de Wöhler. Les courbes de Wöhler permettent de caractériser le phénomène de fatigue vibratoire à travers la représentation du niveau de contrainte alternée σ_a en fonction du nombre de cycles N_r jusqu'à la rupture du matériau. Ces courbes sont issues de campagnes de caractérisations expérimentales reflétant le comportement statistique en fatigue vibratoire d'un matériau donné. Compte tenu de leur aspect statistique, les courbes de Wöhler sont tracées pour un certain niveau de probabilité de rupture, en général 95%. Il est donc possible d'extraire la durée de vie théorique ou limite d'endurance théorique d'un matériau à l'aide de ces courbes. La figure I.20 propose un exemple de courbe de Wöhler sur laquelle apparaît une limite d'endurance σ_∞, représentant la valeur de contrainte alternée en deçà de laquelle le matériau ne rompt théoriquement pas. Cette propriété est caractéristique de certaines familles de matériaux telles que les aciers.

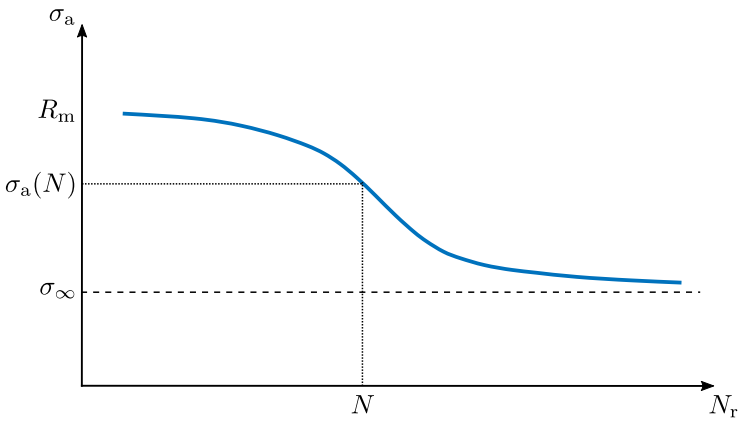


FIGURE I.20 – Courbe de Wöhler

Cependant, les travaux de Wöhler ne prennent pas en compte le chargement statique induit par le champ centrifuge dû à la rotation de la roue aubagée, nommé contrainte statique ou moyenne σ_m. Dans le cas de roues aubagées subissant une contrainte moyenne non-négligeable, la limite d'endurance obtenue à l'aide des courbes de Wöhler n'est plus admissible. Par conséquent, d'autres modèles sont employés et sont consignés dans le paragraphe suivant.

Diagramme de Haigh. Plusieurs modèles permettent de contourner la limitation principale des courbes de Wöhler. En effet, les modèles de Goodman, Soderberg, ou Gerber autorisent l'estimation de l'effet de la contrainte moyenne sur la durée de vie du matériau. Ces différents modèles sont généralement représentés sur un diagramme de Haigh. Celui-ci trace la contrainte alternée σ_a, entraînant la rupture de la structure, en fonction de la contrainte moyenne σ_m pour un nombre fixé de cycles. Comme représentée sur la figure I.21, la droite de Goodman relie la limite d'endurance à contrainte moyenne nulle σ_d à la limite de rupture statique R_m. De même, la droite de Soderberg joint cette même limite d'endurance à contrainte moyenne nulle σ_d à la limite élastique statique R_e et offre ainsi une marge de sécurité plus grande que la droite de Goodman. La courbe de Gerber est une parabole qui raccorde les mêmes points que la droite de Soderberg. Un point de fonctionnement est acceptable lorsqu'il se situe sous la courbe du modèle considéré. En pratique, un coefficient de sécurité, plus ou moins important selon la criticité de la pièce, est appliqué en complément de ce critère.

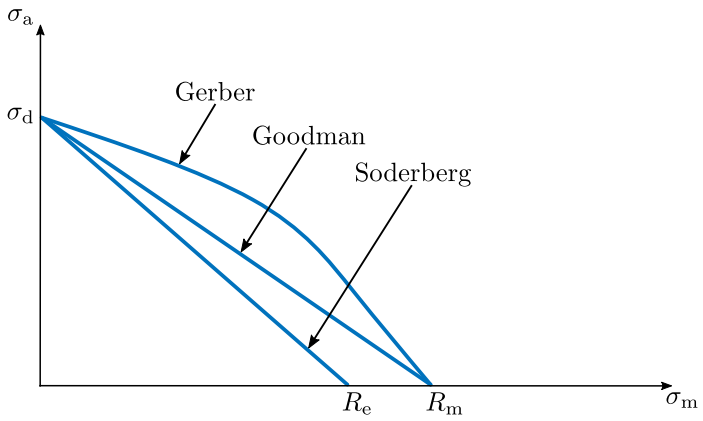


FIGURE I.21 – Diagramme de Haigh

Bien que ces différents outils soient performants pour dimensionner une roue aubagée dont le comportement dynamique a été linéarisé, le développement d'un turboréacteur requiert de nombreux essais au sol et en vol afin d'obtenir une autorisation de vol qui est délivrée par l'une des autorités de régulation à la suite d'essais de certification, ces derniers marquant la fin du développement du turboréacteur.

4 Bilan

Ce chapitre introductif a permis de poser le cadre de ce travail de thèse concernant la dynamique des roues aubagées de turboréacteur et plus particulièrement de la soufflante. Les turboréacteurs, dont le principe de fonctionnement a été exposé en début de chapitre, demeurent des structures complexes dont la conception et la modélisation impliquent de nombreux domaines d'étude en plus de la mécanique. La modélisation dynamique de leurs parties tournantes fondamentales, à savoir les roues aubagées, a ainsi été abordée à travers la mise en équation d'un problème dynamique en rotation et des différentes non-linéarités pouvant affecter la dynamique du système. D'un point de vue plus technologique, les outils de dimensionnement vibratoire des roues aubagées face aux phénomènes vibratoires synchrones ont été dévoilés permettant de dimensionner les roues aubagées face aux phénomènes vibratoires d'origine aéroélastique et mécanique. La notion de désaccordage de la structure a aussi été abordée afin de souligner les effets que celle-ci peut occasionner sur la dynamique de la structure.

La présence de non-linéarités dans la structure implique une modélisation particulière de celles-ci, décrite dans ce chapitre, mais surtout une résolution spécifique du problème faisant appel à un solveur itératif. Ces différentes méthodes de résolution sont détaillées dans le chapitre suivant en mettant en évidence la méthode de l'équilibrage harmonique, employée dans la suite de ce mémoire pour évaluer des réponses forcées en dynamique non-linéaire ainsi que les solutions du problème non-linéaire autonome.

Chapitre II

Étude fréquentielle non-linéaire

Ce chapitre est consacré à l'emploi des techniques de recherche de solutions périodiques ou pseudo-périodiques dans le cas de systèmes non-linéaires autonomes et non-autonomes. Les équations non-linéaires possédant ce type de solutions sont décrites dans le chapitre I.

Les travaux exposés dans ce mémoire exploitent une technique fréquentielle très performante et polyvalente, dont la théorie et l'implémentation numérique sont détaillées : la méthode de l'équilibrage harmonique. La notion de mode non-linéaire, fortement associée à la résolution de systèmes non-linéaires autonomes, est exposée dans la troisième sous-section ainsi que le calcul des modes complexes non-linéaires. Cette technique de calcul permet d'évaluer les modes non-linéaires de systèmes non-conservatifs à partir d'une technique de résolution dérivée de la méthode de l'équilibrage harmonique. Un exemple illustratif, employant ces deux méthodes, permet de mettre en lumière certains phénomènes non-linéaires pouvant apparaître dans le cas d'aubes de soufflante.

Sommaire

1 Méthode de l'équilibrage harmonique 42
1.1 Méthodes de résolution du problème dynamique non-linéaire 42
1.2 Aspects théoriques 44
1.3 Implémentation et résolution 45
1.4 Évaluation des termes non-linéaires 47
1.5 Techniques de continuation 49
1.6 Condensation dans le domaine fréquentiel 53
2 Solutions périodiques d'un système non-linéaire autonome 55
2.1 Analyse modale linéaire 56
2.2 Modes normaux non-linéaires 56
2.3 Modes complexes non-linéaires 59
3 Exemple illustratif 63
3.1 Construction du modèle 64
3.2 Réponses forcées du modèle illustratif 67
3.3 Illustration des modes complexes non-linéaires 71
4 Bilan 73

1 Méthode de l'équilibrage harmonique

Plusieurs méthodes de résolution permettent d'évaluer la solution de l'équation matricielle différentielle du second ordre régissant la dynamique non-linéaire d'un système non-autonome, développée dans le chapitre I et rappelée dans l'équation (II.1) [1].

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{g}(t) \tag{II.1}$$

Ces diverses techniques permettent d'évaluer la solution périodique non-linéaire du régime permanent en exploitant une approche temporelle ou fréquentielle. Un état de l'art de celles-ci est proposé dans la première partie de cette section. La suite de cette section est consacrée au développement des aspects théoriques de la méthode de l'équilibrage harmonique ainsi qu'à son implémentation pratique en programmation. La résolution du système d'équations y est notamment décrite ainsi que la procédure d'évaluation des termes non-linéaires nécessaire au calcul de la solution. Différentes méthodes de continuation sont présentées, celles-ci permettant de suivre l'évolution de la solution du système en fonction d'un paramètre. De plus, deux méthodes de condensation dans le domaine fréquentiel, permettant de réduire le nombre d'équations à résoudre, sont détaillées dans la dernière sous-section.

1.1 Méthodes de résolution du problème dynamique non-linéaire

Tout d'abord, les méthodes permettant de rechercher la solution périodique non-linéaire dans le domaine temporel sont exposées. L'emploi de ces méthodes temporelles dépend du type de solution étudiée, de la taille des modèles et de la nature des phénomènes envisagés. Celles-ci peuvent ainsi être regroupées en deux catégories, à savoir les méthodes dites analytiques et les méthodes numériques.

Les méthodes analytiques incluent, entre autres, les techniques de perturbation qui sont fondées sur l'hypothèse considérant les termes non-linéaires $\mathbf{f}_{\text{nl}}$ petits et proportionnels à un petit paramètre ϵ.

Plusieurs techniques de perturbation ont été développées et perfectionnées au cours du temps et notamment des techniques permettant de rechercher directement les solutions périodiques du problème parmi lesquelles se trouvent la méthode de la moyenne [76] et la méthode des échelles multiples [163] imposant toutes deux une solution périodique ou bien la méthode de Lindstedt [146] qui ferme le système d'équations en imposant une condition de périodicité pour déterminer la fréquence (et donc la période) de la solution.

Cependant, les techniques de perturbation présentent l'inconvénient de n'être valables que pour des non-linéarités très faibles ($\epsilon << 1$) et régulières.

Les méthodes numériques nécessitent, quant à elle, une résolution itérative mais permettent d'obtenir une approximation de la solution. Parmi ces méthodes, l'intégration temporelle est une approche classique. Sa simplicité d'utilisation, sa capacité à résoudre un grand nombre de problèmes et le peu d'hypothèses formulées en font l'une des approches les plus plébiscitées pour résoudre l'équation du mouvement (II.1).

1. Par souci de concision, les matrices associées à la rotation du solide et développées dans le chapitre I ne sont pas inclues dans les équations du mouvement de cette section. Néanmoins, leur introduction dans les méthodes exposées dans ce chapitre demeure directe.

Un grand nombre de schémas d'intégration temporelle sont conçus pour des systèmes d'équations différentielles du premier ordre, il est alors nécessaire de réécrire le problème en formulation d'état

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}_{\mathrm{e}}(\mathbf{y}(t)) \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix} \tag{II.2}$$

avec $\mathbf{y}$ le vecteur d'état et $\mathbf{f}_{\mathrm{e}}$ la fonction permettant de mettre le système d'équation sous la forme (II.2).

Cette formulation permet d'utiliser les intégrateurs du premier ordre en réduisant l'ordre du problème à 1, en contrepartie la taille du système est doublée. Les schémas d'Euler rentrent dans cette catégorie ainsi que ceux de Runge-Kutta qui améliorent la précision des résultats en dépit d'un temps de calcul rallongé et dont le plus employé est le schéma d'ordre 4 (RK4).

Des méthodes itératives permettant de résoudre directement des équations différentielles du second ordre existent dans la littérature, les plus répandues étant les intégrateurs de la famille des algorithmes de Newmark [61] dont l'intérêt est de permettre d'approximer les dérivées temporelles à l'aide de la méthode des différences finis.

Bien que peu d'hypothèses soient posées lors d'une intégration temporelle ce qui entraîne une précision accrue de la solution, ces méthodes requièrent le calcul du régime transitoire dont le temps de calcul peut s'avérer prohibitif en particulier si la structure est faiblement amortie. Cependant, des techniques de résolution telles que la méthode de tir ou des différences finies couplées à des schémas d'intégration temporelle permettent d'estimer directement la solution périodique de l'équation du mouvement.

L'objectif de la méthode de tir est de s'affranchir du calcul de la réponse transitoire du système en corrigeant de manière itérative les conditions initiales du problème. Chaque étape comporte une intégration temporelle sur une période $[0, T]$ permettant l'évaluation de la solution $\mathbf{y}$ sous forme de système d'état à l'aide de l'un des schémas présentés précédemment. L'intégration temporelle est suivie d'une correction des conditions initiales du problème $(t_0, \mathbf{y}_0)$. La méthode de tir permet généralement de réduire le temps de calcul par rapport à une intégration temporelle directe. Cependant, elle comporte des limitations inhérentes aux méthodes de résolution temporelle, notamment en termes de stabilité.

La méthode des différences finies est une technique très générale d'intégration des systèmes différentiels et en particulier des problèmes d'évolution. Contrairement à une intégration temporelle classique qui nécessite de calculer, en général, le régime transitoire de la réponse avant d'obtenir le régime permanent, la méthode des différences finies associée à une condition de périodicité permet de calculer uniquement le régime permanent. Cette méthode nécessite toutefois une formulation du problème sous forme d'un système d'état (II.2), impliquant un nombre d'inconnues doublées, ce qui peut très vite mener à des systèmes algébriques de très grande taille et ainsi augmenter en conséquence le temps de calcul.

Les méthodes numériques de résolution dans le domaine temporel permettent d'évaluer directement la solution périodique de l'équation non-linéaire du mouvement (II.1) et présentent l'avantage de ne nécessiter aucun développement analytique particulier avant résolution en fonction du problème étudié. Cependant, ces techniques génèrent des systèmes de très grande taille et nécessitent donc un temps de calcul conséquent pour des modèles numériques de taille industrielle. D'autre part, l'utilisation de schémas d'intégration temporelle confère à ces méthodes des problèmes de stabilité.

Pour pallier les inconvénients de ces techniques temporelles numériques, des méthodes de résolution dans le domaine fréquentiel peuvent être exploitées et en particulier la méthode de l'équilibrage harmonique dont la théorie et l'implémentation numérique sont largement abordées dans la suite de cette section.

La méthode de l'équilibrage harmonique aussi appelée balance harmonique ou bien HBM (pour *Harmonic Balance Method* en anglais) est la méthode emblématique de recherche de solutions périodiques dans le domaine fréquentiel. La méthode de l'équilibrage harmonique n'est autre qu'une méthode de résidus pondérés, telle que la procédure de Galerkine, pour laquelle la convergence a été notamment établie par Urabe [222]. Cette méthode a été améliorée grâce à de nombreuses variantes parmi lesquelles l'équilibrage harmonique multi-fréquentiel [78], incrémental [121] ou adaptatif [74]. La méthode de l'équilibrage harmonique a été employée dans de nombreux domaines et particulièrement en génie électrique et génie mécanique. Dans ce dernier domaine, de récents travaux étudiant les non-linéarités de contact et de frottement des roues aubagées [29, 122], l'usure liée au frottement en pied d'aubes [190], les non-linéarités géométriques en grands déplacements des roues aubagées [72] ou bien encore la réduction de modèle appliquée au désaccordage de ces mêmes roues [99] ont exploité avec succès la méthode de l'équilibrage harmonique.

1.2 Aspects théoriques

Le principe fondamental de la méthode de l'équilibrage harmonique consiste à rechercher la solution T-périodique du système (II.1) sous la forme d'une série de Fourier à coefficients réels tronquée à l'ordre n_h

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{n_\mathrm{h}} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \tag{II.3}$$

avec n_h le nombre d'harmoniques conservés dans la décomposition de la solution, a_k et b_k représentant les coefficients de Fourier et a_0 le coefficient de la composante continue de la série.

Sous l'hypothèse de l'existence d'une solution périodique au système (II.1), cette solution est donc une approximation puisque tronquée à un certain ordre. Comme il peut être intuité, plus le nombre d'harmoniques contenus dans la réponse est élevé, plus la solution approchée sera proche de la solution exacte.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) = &\sum_{k=1}^{n_\mathrm{h}} \left[\left(\mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{a}_k + (k\omega \mathbf{C})\, \mathbf{b}_k \right] \cos(k\omega t) \\
&+ \sum_{k=1}^{n_\mathrm{h}} \left[\left(\mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{b}_k - (k\omega \mathbf{C})\, \mathbf{a}_k \right] \sin(k\omega t) \\
&+ \mathbf{K}\mathbf{a}_0 + \mathbf{f}_\mathrm{nl}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{g}(t)
\end{aligned} \tag{II.4}$$

L'équation (II.4) contient le vecteur des efforts non-linéaires $\mathbf{f}_\mathrm{nl}$ ainsi que le vecteur des efforts extérieurs d'excitation $\mathbf{g}$, aussi exprimés sous la forme d'une série de Fourier analogue à l'expression de la solution dans l'équation (II.3)

Il est nécessaire d'éliminer la dépendance temporelle du résidu (II.4) afin de ne conserver qu'une dépendance fréquentielle, c'est pourquoi le résidu est projeté sur la base $\boldsymbol{\tau}$ des fonctions trigonométriques (II.5).

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & s_1 & \cdots & c_k & s_k & \cdots & c_{n_\mathrm{h}} & s_{n_\mathrm{h}} \end{bmatrix}^\mathrm{T} \tag{II.5}$$

Afin de rendre les équations plus intelligibles, les notations $c_0 = 1$, $c_k = \cos(k\omega t)$ et $s_k = \sin(k\omega t)$ sont utilisées.

Le résidu est orthogonalisé par rapport à cette même base $\boldsymbol{\tau}(t)$ grâce à l'utilisation du produit scalaire (II.6) défini sur l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0, T]$ de $\mathbb{R}$.

$$\langle f|g\rangle = \frac{2}{T}\int_0^{\mathrm{T}} f(t)g(t)dt \tag{II.6}$$

En prenant en considération l'orthogonalité des fonctions de base par rapport au produit scalaire choisi, l'équation (II.4) peut se simplifier pour parvenir au système d'équations (II.7).

$$\begin{cases} \langle \mathbf{r}|c_0\rangle = (2\mathbf{K})\mathbf{a}_0 + \langle \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}|c_0\rangle - \langle \mathbf{g}|c_0\rangle \\ \langle \mathbf{r}|c_k\rangle = \left(\mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M}\right)\mathbf{a}_k + (k\omega\mathbf{C})\,\mathbf{b}_k + \langle \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}|c_k\rangle - \langle \mathbf{g}|c_k\rangle \\ \langle \mathbf{r}|s_k\rangle = \left(\mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M}\right)\mathbf{b}_k - (k\omega\mathbf{C})\,\mathbf{a}_k + \langle \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}|s_k\rangle - \langle \mathbf{g}|s_k\rangle \end{cases} \tag{II.7}$$

Dans le but de résoudre le système d'équations (II.7), il est nécessaire de le reformuler sous une forme plus adaptée à la résolution numérique au moyen d'un calculateur. La sous-section suivante détaille cette nouvelle mise en équation et s'attarde sur les éléments de résolution de l'équation de la méthode de l'équilibrage harmonique, en particulier les méthodes de résolution de type Newton-Raphson.

1.3 Implémentation et résolution

Une écriture matricielle, et donc plus compacte, du système (II.7) est nécessaire afin de l'implémenter dans les algorithmes de résolution des différents langages de programmation tels que MATLAB® ou Python™. Il s'écrit alors

$$\boxed{\mathbf{r}_{\mathrm{h}}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{x}_{\mathrm{h}} + \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_{\mathrm{h}}}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}}, \omega) - \mathbf{g}_{\mathrm{h}}} \tag{II.8}$$

où $\mathbf{x}_{\mathrm{h}}$, $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}_{\mathrm{h}}}$ et $\mathbf{g}_{\mathrm{h}}$ contiennent les coefficients harmoniques des développements en série de Fourier des vecteurs $\mathbf{x}$, $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}$ et $\mathbf{g}$ respectivement.

Dans le cas d'une réponse forcée, l'excitation est périodique et harmonique : les coefficients harmoniques du vecteur des efforts extérieurs $\mathbf{g}_{\mathrm{h}}$ sont donc donnés. La procédure de calcul des composantes harmoniques des efforts non-linéaires $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}_{\mathrm{h}}}$ est explicitée dans la sous-section II.1.4. Le vecteur solution $\mathbf{x}_{\mathrm{h}}$ (II.9) ainsi que les autres vecteurs mentionnés sont de taille $(2n_{\mathrm{h}} + 1)n$.

$$\mathbf{x}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{\mathrm{T}} & \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} & \cdots & \mathbf{a}_k^{\mathrm{T}} & \mathbf{b}_k^{\mathrm{T}} & \cdots & \mathbf{a}_{n_{\mathrm{h}}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{b}_{n_{\mathrm{h}}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{II.9}$$

La matrice $\mathbf{Z}$ désigne la matrice de rigidité dynamique multi-harmonique

$$\mathbf{Z}(\omega) = \begin{pmatrix} 2\mathbf{K} & & & & & & \\ & \mathbf{Z}_1(\omega) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \mathbf{Z}_k(\omega) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \mathbf{Z}_{n_{\mathrm{h}}}(\omega) & \end{pmatrix} \tag{II.10}$$

dont chaque bloc $\mathbf{Z}_k$, constitué par une combinaison linéaire des matrices structurelles, s'écrit :

$$\mathbf{Z}_k(\omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} & k\omega\mathbf{C} \\ -k\omega\mathbf{C} & \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} \end{pmatrix} \tag{II.11}$$

La forme matricielle du système d'équation (II.8) permet ainsi d'aborder numériquement la résolution de celui-ci. La présence d'un terme non-linéaire ne permet cependant pas de le résoudre directement : il est donc nécessaire d'employer un solveur itératif. De nombreuses méthodes de résolution permettant de résoudre des équations algébriques non-linéaires existent dans la littérature, notamment la méthode du gradient ou la méthode de Newton [58]. La méthode de Newton-Raphson appartient à cette catégorie de solveur. Elle est l'une des méthodes les plus exploitées et est à la base de nombreux algorithmes de résolution. Cette dernière suit le schéma itératif

$$\mathbf{x}_\mathrm{h}^{(m+1)} = \mathbf{x}_\mathrm{h}^{(m)} + \Delta\mathbf{x}_\mathrm{h} \tag{II.12}$$

dans lequel $\mathbf{x}_\mathrm{h}^{(m+1)}$ fait référence à la solution recherchée à l'itération $m+1$, $\mathbf{x}_\mathrm{h}^{(m)}$ est la solution, connue, à l'itération m et $\Delta\mathbf{x}_\mathrm{h}$ est l'incrément à ajouter pour se rapprocher de la solution.

Dans le cadre de la méthode de Newton-Raphson, l'incrément est calculé à partir du développement de Taylor au premier ordre (II.13) de l'équation (II.8). Il est intéressant de remarquer que l'équation (II.14), permettant le calcul de l'incrément $\Delta\mathbf{x}_\mathrm{h}$, fait apparaître la matrice jacobienne $\mathbf{J}_{\mathbf{r}_\mathrm{h}}$ du résidu $\mathbf{r}_\mathrm{h}$ évaluée au point $\left(\mathbf{x}_\mathrm{h}^{(m)}, \omega\right)$.

$$\mathbf{r}_\mathrm{h}\left(\mathbf{x}_\mathrm{h}^{(m)} + \Delta\mathbf{x}_\mathrm{h}, \omega\right) = \mathbf{r}_\mathrm{h}\left(\mathbf{x}_\mathrm{h}^{(m)}, \omega\right) + \mathbf{J}_{\mathbf{r}_\mathrm{h}}\left(\mathbf{x}_\mathrm{h}^{(m)}, \omega\right)\Delta\mathbf{x}_\mathrm{h} + o\left(\Delta\mathbf{x}_\mathrm{h}\right) \tag{II.13}$$

$$\Delta\mathbf{x}_\mathrm{h} = -\mathbf{J}_{\mathbf{r}_\mathrm{h}}\left(\mathbf{x}_\mathrm{h}^{(m)}, \omega\right)^{-1}\mathbf{r}_\mathrm{h}\left(\mathbf{x}_\mathrm{h}^{(m)}, \omega\right) \tag{II.14}$$

L'initialisation de la procédure est effectuée à partir d'une valeur $\mathbf{x}_\mathrm{h}^{(0)}$ qu'il est nécessaire de choisir avec soin afin de garantir la convergence du solveur. La solution du problème linéaire ou une prédiction à l'aide d'une extrapolation des précédents points calculés (de plus amples détails sont donnés dans la sous-section II.1.5) peut être utilisée comme valeur d'initialisation. Le schéma présenté en figure II.1 résume le déroulement de la procédure de Newton-Raphson jusqu'à l'obtention de la solution.

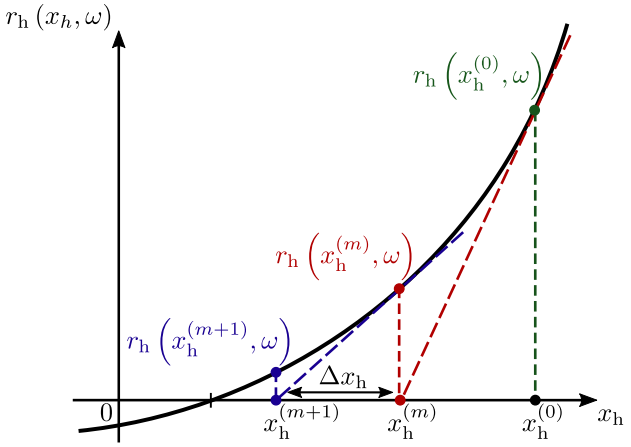


FIGURE II.1 – Procédure de Newton-Raphson (adaptée de [72])

La solution approchée est obtenue lorsqu'un ou plusieurs test d'arrêt sont vérifiés. Parmi ceux-ci, les tests sur la valeur absolue ou relative sont couramment utilisés (II.15).

$$\left\|\mathbf{r}_\mathrm{h}\left(\mathbf{x}_\mathrm{h}^{(m)},\omega\right)\right\| < \epsilon_1 \qquad \text{ou} \qquad \left\|\mathbf{r}_\mathrm{h}\left(\mathbf{x}_\mathrm{h}^{(m+1)},\omega\right) - \mathbf{r}_\mathrm{h}\left(\mathbf{x}_\mathrm{h}^{(m)},\omega\right)\right\| < \epsilon_2 \tag{II.15}$$

avec ϵ_1 et ϵ_2 les tolérances des tests d'arrêt du processus itératif respectivement sur la valeur absolue et relative.

Dans les travaux présentés dans ce mémoire, la résolution du système d'équations non-linéaires a été accomplie à l'aide d'un algorithme à région de confiance implémenté dans la fonction `fsolve` de MATLAB®. Cette prodédure de recherche de solutions, semblable à celle Newton-Raphson, est un algorithme d'optimisation différentiable basé sur l'optimisation de la direction de recherche pour une approximation (souvent quadratique) du système à résoudre. La norme du vecteur de recherche (appellée le rayon de confiance) est fixée. Cependant, elle est ajustée à chaque itération en fonction de la qualité de l'approximation du système d'équation. Ce type d'algorithme est plus robuste mais aussi plus complexe à mettre en oeuvre que l'algorithme de Newton-Raphson. Plus d'informations sur les algorithmes à région de confiance peuvent être obtenues dans l'ouvrage de Conn *et al.* [34].

Il est important de noter que cet algorithme de résolution nécessite aussi la connaissance de la Jacobienne du système à résoudre à chaque itération. C'est pourquoi, il est capital de connaître une expression analytique de la matrice jacobienne afin de s'épargner une évaluation numérique de celle-ci à chaque itération ce qui augmenterait considérablement le temps de calcul de la solution. L'évaluation analytique de la matrice jacobienne du système d'équation (II.8) est détaillée en annexe B.1.

1.4 Évaluation des termes non-linéaires

La résolution du système d'équations algébriques (II.8) requiert la connaissance du vecteur $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}$ renfermant les coefficients harmoniques des efforts non-linéaires. Or, les lois permettant d'évaluer ce vecteur $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}$ ne sont pas, dans la plupart des cas, exprimées dans le domaine fréquentiel, autrement dit avec les grandeurs $\mathbf{x}_\mathrm{h}$ et ω, mais souvent dans le domaine temporel avec $\mathbf{x}$ et $\dot{\mathbf{x}}$ ce qui est notamment le cas pour des non-linéarités en frottement sec ou polynomiale. Plusieurs techniques permettent de remédier à cette difficulté, parmi lesquelles la méthode de collocation trigonométrique [153] ou la méthode d'alternance temps-fréquence [24] aussi nommée AFT (pour *Alternate Frequency-Time* en anglais). L'efficacité de ces deux méthodes étant semblable, le choix de la procédure s'est porté sur l'AFT pour son utilisation courante dans le laboratoire.

De même que le vecteur solution $\mathbf{x}$ et le vecteur des efforts extérieurs $\mathbf{g}$, le vecteur des efforts non-linéaires $\mathbf{f}_\mathrm{nl}$ doit être décomposé en série de Fourier tronquée à l'ordre n_h

$$\mathbf{f}_\mathrm{nl}(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t)) \approx \mathbf{c}_0 + \sum_{k=1}^{n_\mathrm{h}} (\mathbf{c}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{d}_k \sin(k\omega t)) \tag{II.16}$$

le vecteur $\mathbf{f}_{nl_h}(\mathbf{x}_h,\omega)$ s'écrit alors

$$\mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h},\omega) = \begin{bmatrix}\mathbf{c}_0^\mathrm{T} & \mathbf{c}_1^\mathrm{T} & \mathbf{d}_1^\mathrm{T} & \cdots & \mathbf{c}_k^\mathrm{T} & \mathbf{d}_k^\mathrm{T} & \cdots & \mathbf{c}_{n_\mathrm{h}}^\mathrm{T} & \mathbf{d}_{n_\mathrm{h}}^\mathrm{T}\end{bmatrix}^\mathrm{T} \tag{II.17}$$

où c_k et d_k représentent les coefficients de la décomposition en série de Fourier du vecteur $\mathbf{f}_\mathrm{nl}$ et c_0, le coefficient de la composante continue.

Le principe général de la méthode d'alternance temps-fréquence repose sur la transformation du vecteur des efforts non-linéaires vers le domaine temporel afin d'y évaluer les efforts non-linéaires à l'aide de l'expression temporelle de la non-linéarité pour finalement le basculer de nouveau dans le domaine fréquentiel afin d'y résoudre le système d'équation régissant la méthode de l'équilibrage harmonique (II.8). La transformation depuis le domaine fréquentiel vers le domaine temporel est accomplie par l'intermédiaire d'une matrice de transformée de Fourier discrète inverse $\overline{\mathbf{F}}$ et permet ainsi de déterminer le vecteur déplacement $\mathbf{x}$ discrétisé pour n_t pas de temps

$$\mathbf{x} = \overline{\mathbf{F}}\mathbf{x}_{\mathrm{h}} \tag{II.18}$$

où la matrice $\overline{\mathbf{F}}$ est construite telle que

$$\overline{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) & \cdots & \cos(n_{\mathrm{h}}\omega t_1) & \sin(n_{\mathrm{h}}\omega t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega t_i) & \sin(\omega t_i) & \cdots & \cos(n_{\mathrm{h}}\omega t_i) & \sin(n_{\mathrm{h}}\omega t_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega t_{n_{\mathrm{t}}}) & \sin(\omega t_{n_{\mathrm{t}}}) & \cdots & \cos(n_{\mathrm{h}}\omega t_{n_{\mathrm{t}}}) & \sin(n_{\mathrm{h}}\omega t_{n_{\mathrm{t}}}) \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \tag{II.19}$$

avec $\otimes$, le produit de Kronecker et $\mathbf{I}_n$, la matrice identité de taille $n \times n$

Une fois les efforts non-linéaires évalués dans le domaine temporel à l'aide de la loi adéquate $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}$, le retour dans le domaine fréquentiel est réalisé par le biais d'une matrice de transformée de Fourier discrète directe $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \frac{2}{n_{\mathrm{t}}} \begin{pmatrix} 1/2 & \cdots & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ \cos(\omega t_1) & \cdots & \cos(\omega t_i) & \cdots & \cos(\omega t_{n_{\mathrm{t}}}) \\ \sin(\omega t_1) & \cdots & \sin(\omega t_i) & \cdots & \sin(\omega t_{n_{\mathrm{t}}}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cos(n_{\mathrm{h}}\omega t_1) & \cdots & \cos(n_{\mathrm{h}}\omega t_i) & \cdots & \cos(n_{\mathrm{h}}\omega t_{n_{\mathrm{t}}}) \\ \sin(n_{\mathrm{h}}\omega t_1) & \cdots & \sin(n_{\mathrm{h}}\omega t_i) & \cdots & \sin(n_{\mathrm{h}}\omega t_{n_{\mathrm{t}}}) \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \tag{II.20}$$

En pratique, ces matrices de transformée de Fourier discrète sont indépendantes de la pulsation ω, car $\omega t_k = 2k\pi/n_{\mathrm{t}}$: il n'est donc pas nécessaire de les construire à chaque itération. La discrétisation de la période T en n_{t} instants t_k nécessaire dans la construction de ces matrices est un compromis entre convergence du solveur itératif, temps de calcul et capture des effets non-linéaires. Il est aussi essentiel de vérifier que la discrétisation de la période de la solution satisfait les critères du théorème de Nyquist-Shannon [2]. Il est possible d'utiliser les algorithmes de transformée de Fourier rapide directe et inverse (FFT et IFFT) [35] qui sont très performants et permettent ainsi de minimiser le temps de calcul de cette procédure AFT.

La procédure AFT peut être résumée par l'équation (II.21) mais aussi graphiquement par la figure II.2.

$$\mathbf{f}_{\mathrm{nl_h}}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}}, \omega) = \mathbf{F}\mathbf{f}_{\mathrm{nl}}\left(\overline{\mathbf{F}}\mathbf{x}_{\mathrm{h}}, \overline{\mathbf{F}}\boldsymbol{\nabla}(\omega)\mathbf{x}_{\mathrm{h}}\right) \tag{II.21}$$

2. Le théorème de Nyquist-Shannon [196], aussi appelé théorème de Whittaker-Nyquist-Shannon, spécifie que la représentation discrète d'un signal exige des échantillons régulièrement espacés à une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale d'intérêt présente dans ce signal.

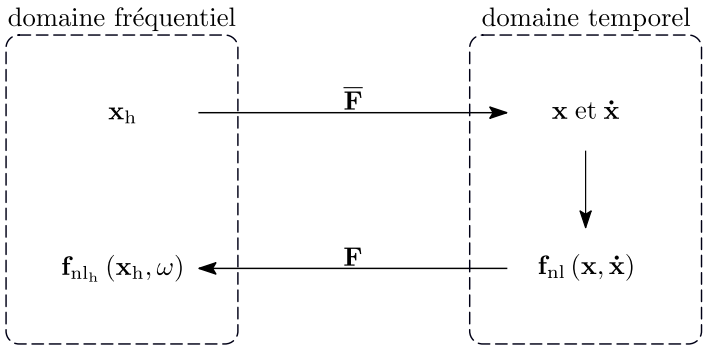


FIGURE II.2 – Procédure d'alternance temps-fréquence (adaptée de [43])

Toutes les lois non-linéaires ne dépendent pas explicitement du déplacement $\mathbf{x}$. Certaines lois, telles que celles modélisant le frottement sec, sont fonction de la vitesse $\dot{\mathbf{x}}$. Une méthode efficace permettant de remonter aux grandeurs de vitesse $\dot{\mathbf{x}}$ et d'accélération $\ddot{\mathbf{x}}$ discrétisée dans le domaine temporel consiste à employer l'opérateur différentiel $\boldsymbol{\nabla}$ directement dans le domaine fréquentiel

$$\dot{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{F}}\boldsymbol{\nabla}(\omega)\mathbf{x}_\mathrm{h} \tag{II.22a}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{F}}\boldsymbol{\nabla}(\omega)^2\mathbf{x}_\mathrm{h} \tag{II.22b}$$

l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$ étant défini tel que

$$\boldsymbol{\nabla}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & & & \\ & \boldsymbol{\nabla}_1(\omega) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \boldsymbol{\nabla}_k(\omega) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boldsymbol{\nabla}_{n_\mathrm{h}}(\omega) \end{pmatrix} \tag{II.23}$$

où chaque bloc $\boldsymbol{\nabla}_k$ s'écrit

$$\boldsymbol{\nabla}_k(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & k\omega \\ -k\omega & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \tag{II.24}$$

La procédure d'alternance temps-fréquence permet de traiter tous types de non-linéarités. De plus, elle permet d'évaluer aisément la matrice jacobienne des efforts non-linéaires requise pour la résolution du système d'équation. Des éléments permettant le calcul de la matrice jacobienne des efforts non-linéaires sont fournis en annexe B.1.

1.5 Techniques de continuation

L'analyse dynamique d'un système n'implique pas seulement de calculer la réponse du système pour un paramètre ω fixé : elle nécessite de suivre l'évolution de ce paramètre de part en part d'une plage de variation discrète $[\omega_1, \omega_2]$. Le paramètre de suivi de l'évolution est noté ici ω, en référence à la pulsation, puisque la section courante traite des réponses forcées fréquentielles. Néanmoins, ce paramètre physique peut être une coordonnée (du déplacement $\mathbf{x}$, par exemple) ou l'énergie cinétique du système E_c : ces derniers étant couramment employés dans le cadre de la réponse dynamique d'un système autonome. D'autres paramètres, tels que la vitesse de rotation employée en dynamique des rotors ou

bien encore le taux d'amortissement modal du système, peuvent aussi être adoptés pour décrire l'évolution du système. Ces paramètres de suivi sont généralement nommés paramètres de contrôle, de bifurcation ou de continuation.

Contrairement à l'étude dynamique d'un système linéaire, une analyse non-linéaire peut rencontrer le cas où il existe plusieurs solutions pour une même valeur donnée du paramètre de contrôle ce qui est notamment dû à des phénomènes de bifurcations représentés sur un tracé par des points de retournement (voir section II.3) ou d'embranchement. Afin de suivre l'évolution de la solution à travers ces phénomènes de bifurcation, de multiples techniques de continuation se trouvent dans la littérature [1]. Celles-ci peuvent être classifiées en deux principales catégories : les Méthodes Asymptotiques Numériques [32] aussi appelées MAN et les méthodes de prédiction-correction. Les premières reposent sur une approximation du problème par des séries entières tronquées à des ordres relativement élevées tandis que les secondes se fondent sur une approche plus classique au moyen d'une approximation tangente. Ce sont les méthodes de prédiction-correction qui ont sont utilisées dans ce travail de thèse de part leur facilité d'implémentation et leur forte utilisation dans le laboratoire. Comme leur nom l'indique, ces procédures comportent deux étapes à savoir une étape de prédiction et une de correction. Les principaux prédicteurs et correcteurs, qui seront utilisés dans ces travaux, sont exposés dans les sous-sections suivantes.

1.5.1 Prédiction

L'utilisation d'un prédicteur a pour but d'améliorer la convergence de la méthode à l'itération $j+1$ en procurant au correcteur une estimation du couple de solution $(\mathbf{x}_{h_{j+1}}^{(0)}, \omega_{j+1}^{(0)})$ à partir des solutions précédentes. Le couple estimé est alors utilisé comme condition initiale de la résolution itérative du système.

Une première approche consiste à discrétiser l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$ en n_ω valeurs ω_j puis à fixer le paramètre de contrôle à chaque itération, ce qui est illustré en figure II.3a. Ce procédé est utilisé classiquement pour une analyse linéaire. Cependant, des méthodes plus efficaces permettant une approximation plus précise du problème non-linéaire telles que le prédicteur tangent et le prédicteur sécant sont présentées dans cette sous-section.

Prédicteur tangent. Une prédiction tangente consiste à utiliser le gradient du résidu (II.8) évalué au dernier point calculé pour déterminer la direction de la prédiction. Un seul point de calcul est donc nécessaire afin de bénéficier d'une prédiction tangente. A partir du couple solution $(\mathbf{x}_{\mathrm{h}_j}, \omega_j)$, il est nécessaire d'obtenir les incréments du paramètre de contrôle $\Delta\omega_j$ et du vecteur solution $\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{h}_j}$ afin d'estimer le couple solution à l'itération $j+1$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\mathrm{h}_{j+1}}^{(0)} = \mathbf{x}_{\mathrm{h}_j} + \Delta\mathbf{x}_{\mathrm{h}_j} \\ \omega_{j+1}^{(0)} = \omega_j + \Delta\omega_j \end{cases} \tag{II.25}$$

Ces incréments s'obtiennent par différentiation de l'équation (II.8)

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\mathrm{h}}}{\partial \mathbf{x}_{\mathrm{h}}}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}}, \omega)\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{h}_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathrm{h}}}{\partial \omega}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}}, \omega)\Delta\omega_j = \mathbf{0} \tag{II.26}$$

avec $\partial\mathbf{r}_{\mathrm{h}}/\partial\mathbf{x}_{\mathrm{h}}$ et $\partial\mathbf{r}_{\mathrm{h}}/\partial\omega$, les dérivées partielles de $\mathbf{r}_h$ par rapport à $\mathbf{x}_h$ et ω respectivement.

L'expression (II.26) peut se simplifier et s'écrire

$$\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{h}_j} = -\left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\mathrm{h}}}{\partial \mathbf{x}_{\mathrm{h}}}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}}, \omega)\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}_{\mathrm{h}}}{\partial \omega}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}}, \omega)\Delta\omega_j = \mathbf{Z}\Delta\omega_j \tag{II.27}$$

L'incrément du paramètre de contrôle $\Delta\omega$ s'exprime en insérant l'équation de normalisation de la longueur de la tangente $(\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{h}_j})^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{h}_j}^2 + \Delta\omega_j = 1$ dans l'équation (II.27)

$$\Delta\omega_j = \pm\left(\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z} + 1\right)^{-1/2} \tag{II.28}$$

Deux sens différents de prédiction sont possibles d'après l'expression de l'incrément du paramètre de contrôle (II.28). Afin de préserver le sens de parcours de la courbe solution et ainsi éviter de revenir sur des solutions déjà calculées, le sens de la tangente doit suivre le signe du déterminant (II.29) : positif dans le cas d'une évolution croissante du paramètre de contrôle.

$$\det\begin{pmatrix} \partial\mathbf{r}_{\mathrm{h}}/\partial\mathbf{x}_{\mathrm{h}}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}},\omega) & \partial\mathbf{r}_{\mathrm{h}}/\partial\omega(\mathbf{x}_{\mathrm{h}},\omega) \\ \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}\Delta\omega_j > 0 \tag{II.29}$$

À proximité d'un point de retournement, l'évaluation de la matrice jacobienne $\mathbf{J}_{\mathbf{r}_{\mathrm{h}}}$ peut être difficile voire impossible à réaliser dû au mauvais conditionnement de la matrice. L'augmentation du système par une équation de normalisation (imposant une relation entre les deux incréments) permet de contourner ce problème [43] comme dans la méthode de la longueur d'arc détaillée ci-dessous.

Prédicteur sécant. Le prédicteur sécant est une interpolation linéaire fondée sur les deux derniers couples solutions calculés : $(\mathbf{x}_{\mathrm{h}_j}, \omega_j)$ et $(\mathbf{x}_{\mathrm{h}_{j-1}}, \omega_{j-1})$. L'estimation du couple solution à l'aide d'un prédicteur sécant est régie par la relation

$$\mathbf{x}_{\mathrm{h}_{j+1}}^{(0)} = \mathbf{x}_{\mathrm{h}_j} + (\omega_{j+1} - \omega_j)\frac{\mathbf{x}_{\mathrm{h}_j} - \mathbf{x}_{\mathrm{h}_{j-1}}}{\omega_j - \omega_{j-1}} \tag{II.30}$$

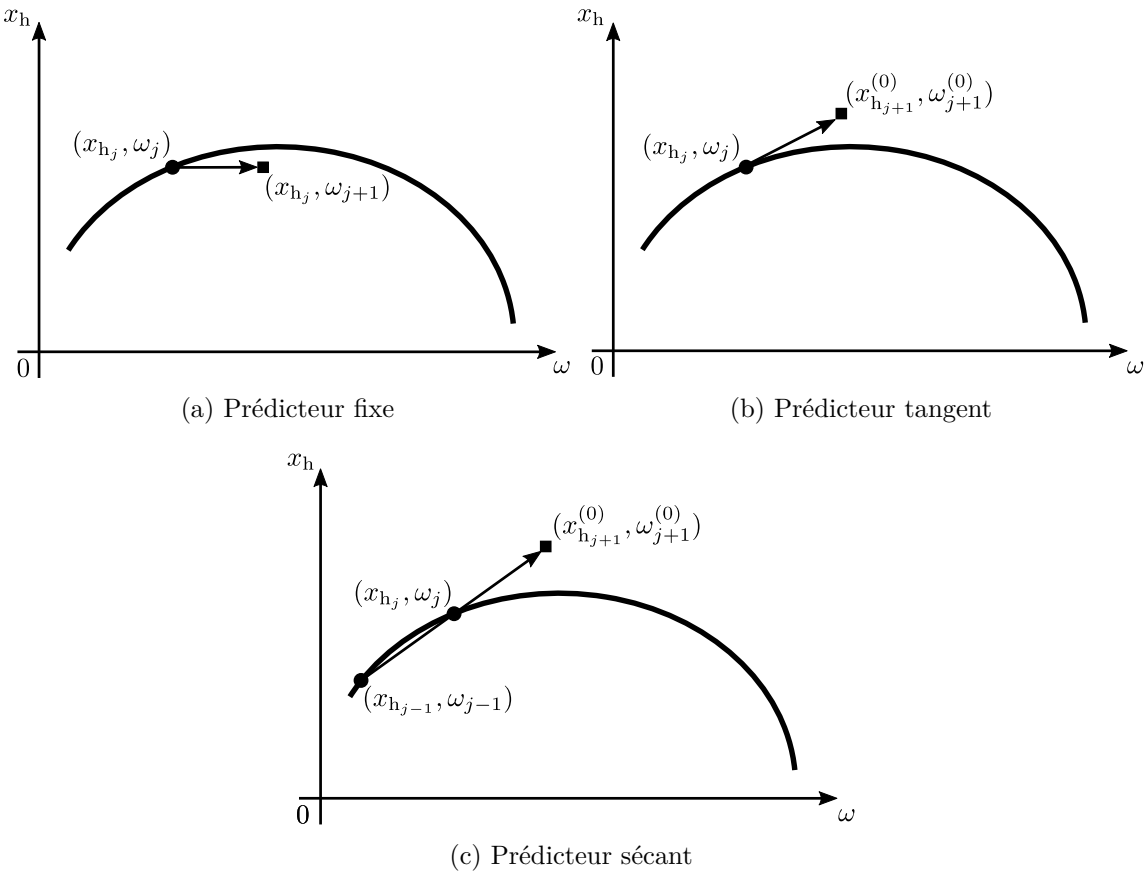
avec ω_{j+1} le paramètre de contrôle à l'itération $j+1$.

Cette méthode de prédiction est simple à implémenter puisqu'elle ne nécessite pas l'évaluation de la matrice jacobienne. Cependant, cette méthode nécessite au moins deux pas précédents afin d'être utilisée. L'initialisation de la première itération est fréquemment effectuée à l'aide de la solution linéaire du système d'équation et la seconde au moyen de la méthode de la tangente.

Des méthodes d'interpolation polynomiale d'ordre supérieur [75] peuvent également être employées comme prédicteur afin d'améliorer l'estimation, toutefois ces dernières nécessitent davantage de points d'interpolation. La figure II.3 illustre les techniques de prédiction tangente et sécante.

1.5.2 Correction

Dans la majorité des cas, l'estimation apportée par le prédicteur ne satisfait pas le système d'équation (II.8). Il est alors nécessaire de rectifier cette estimation à l'aide d'un correcteur qui permet d'obtenir le couple solution $(\mathbf{x}_{\mathrm{h}_{j+1}}, \omega_{j+1})$ vérifiant les tests d'arrêt (II.15) à partir de l'estimation $(\mathbf{x}_{\mathrm{h}_{j+1}}^{(0)}, \omega_{j+1}^{(0)})$. Le correcteur n'est autre qu'un algorithme de résolution, de type Newton-Raphson (présenté en sous-section II.1.3) par exemple, augmentée au moyen d'une stratégie de paramétrisation (telle une paramétrisation sélective ou par longueur d'arc présentée dans les paragraphes suivants) du système d'équations. Celle-ci autorise la fermeture du système d'équations jusqu'alors sous-déterminé ($n_{\mathrm{h}} \times n$ équations pour $n_{\mathrm{h}} \times (n+1)$ inconnues).



(a) Prédicteur fixe

(b) Prédicteur tangent

(c) Prédicteur sécant

FIGURE II.3 – Principaux prédicteurs (— courbe solution, • couple solution approché au pas j, ■ prédiction)

Continuation séquentielle. La continuation séquentielle est une méthode utilisant une stratégie de paramétrisation sélective ce qui signifie que l'un des paramètres est fixé. Dans le cas d'une continuation séquentielle, il s'agit du paramètre de contrôle, comme par exemple la pulsation, qui est fixé à sa valeur de prédiction $\omega_{j+1} = \omega^{(0)}_{j+1}$. Le système d'équation (II.8) n'est alors plus dépendant du paramètre de contrôle ω, il peut donc être réécrit

$$\mathbf{r}_{\mathrm{h}}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}}) = \mathbf{Z}\mathbf{x}_{\mathrm{h}} + \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_{\mathrm{h}}}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}}) - \mathbf{g}_{\mathrm{h}} \tag{II.31}$$

où l'incrément de la solution $\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{h}_j}$ est alors l'unique inconnue du système.

Le correcteur est ordinairement initialisé à l'aide de la solution à l'itération précédente. Néanmoins, il est possible d'améliorer la continuation séquentielle en employant un prédicteur plus performant tel que le prédicteur sécant ou le prédicteur tangent. Ce type de continuation, très simple à mettre en œuvre, est toutefois peu efficace en présence d'un point de retournement qu'il est possible de rencontrer dans le cas de non-linéarités géométriques en grands déplacements ou polynomiales. Le schéma II.4a synthétise le principe de la continuation séquentielle associée à une prédiction sécante.

Continuation sur la longueur d'arc ou de type *arc-length*. Cette technique de continuation exploite une paramétrisation par longueur d'arc (*arc-length* en anglais) qui fait intervenir l'abscisse curviligne s sur la courbe de réponse dont l'incrément est défini par l'équation (II.32).

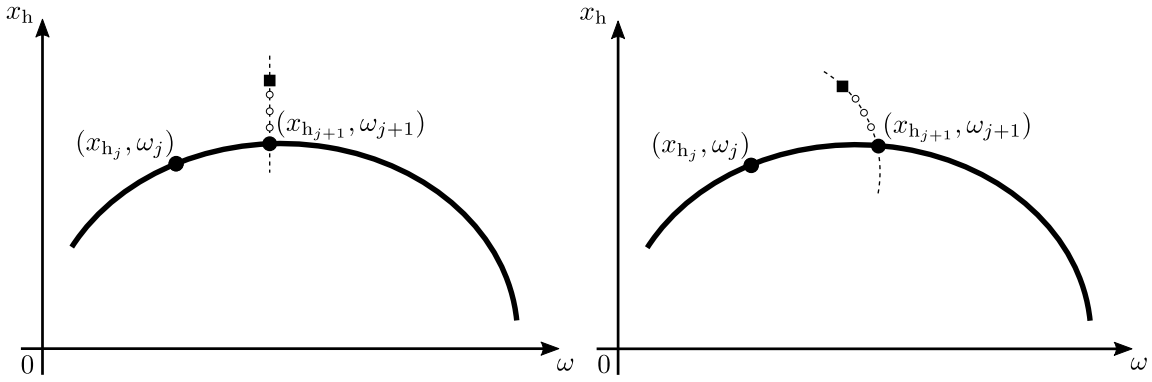
$$\Delta {s_j}^2 = \|\mathbf{x}_{\mathrm{h}_{j+1}} - \mathbf{x}_{\mathrm{h}_j}\|^2 + (\omega_{j+1} - \omega_j)^2 \tag{II.32}$$

Le principe d'une continuation de type *arc-length* est de rechercher le couple solution sur une hypersphère de rayon Δs ayant pour centre la solution précédente $(\mathbf{x}_{\mathrm{h}_j}, \omega_j)$. Pour cela, le système d'équations (II.8) est fermé en l'augmentant d'une équation $\mathbf{r}_{\mathrm{a}}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}}, \omega)$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{\mathrm{h}}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{x}_{\mathrm{h}} + \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_{\mathrm{h}}}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}}, \omega) - \mathbf{g}_{\mathrm{h}} \\ r_{\mathrm{a}}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}}, \omega) = \|\mathbf{x}_{\mathrm{h}} - \mathbf{x}_{\mathrm{h}_j}\|^2 + (\omega - \omega_j)^2 - \Delta s^2 \end{cases} \tag{II.33}$$

Bien que plus ardue à mettre en œuvre et nécessitant un remaniement de la matrice jacobienne (voir en annexe B.1), la continuation par longueur d'arc permet de suivre l'évolution du système lors d'un phénomène de retournement. Un schéma résumant le principe de la continuation par longueur d'arc bénéficiant d'un prédicteur sécant est donné en figure II.4b.

Des perfectionnements ont permis d'enrichir ces méthodes de continuation notamment la gestion du pas du paramètre de contrôle ou de l'abscisse curviligne [43, 72] ou bien encore la détection d'un retour sur un point déjà obtenu aux itérations précédentes [72].



(a) Continuation séquentielle (b) Continuation *arc length*

FIGURE II.4 – Principaux correcteurs (— courbe solution, - - axe de correction, • couple solution approché, ■ prédiction, ○ itération du solveur)

1.6 Condensation dans le domaine fréquentiel

Dans le cas d'une structure industrielle, telle qu'une roue aubagée, la méthode de l'équilibrage harmonique s'applique à des systèmes comprenant un très grand nombre de degrés de liberté. Dans le but de réduire cette grande quantité de degrés de liberté, deux méthodes de condensation distinctes peuvent s'appliquer grâce à l'écriture de l'équation du mouvement (II.1) sous forme fréquentielle (II.8). La première est une méthode de condensation sur les degrés de liberté non-linéaires [43, 99, 122] s'appliquant sur des systèmes comprenant des non-linéarités localisées, comme une non-linéarité de type contact entre deux composants. La seconde se consacre à certains problèmes dont les lois non-linéaires font intervenir une formulation nœud à nœud du contact, il s'agit d'une condensation sur les degrés de liberté relatifs [99, 122, 190].

1.6.1 Condensation sur les degrés de liberté non-linéaires

Les degrés de liberté du problème (II.8) peuvent être partitionnés en deux classes : les degrés de liberté linéaires, notés $\bullet_{\mathrm{a}}$, et les degrés de liberté non-linéaires, notés $\bullet_{\mathrm{c}}$. Il est alors envisageable de réécrire l'équation (II.8) sous la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{\mathrm{aa}}(\omega) & \mathbf{Z}_{\mathrm{ac}}(\omega) \\ \mathbf{Z}_{\mathrm{ca}}(\omega) & \mathbf{Z}_{\mathrm{cc}}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\mathrm{a_h}} \\ \mathbf{x}_{\mathrm{c_h}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{c_h}}(\mathbf{x}_{\mathrm{c_h}}, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{\mathrm{a_h}} \\ \mathbf{g}_{\mathrm{c_h}} \end{pmatrix} \tag{II.34}$$

Le développement du système (II.34) fournit les équations (II.35a) et (II.35b).

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{aa}}(\omega)\mathbf{x}_{\mathrm{a_h}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{ac}}(\omega)\mathbf{x}_{\mathrm{c_h}} = \mathbf{g}_{\mathrm{a_h}} \tag{II.35a}$$

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{ca}}(\omega)\mathbf{x}_{\mathrm{a_h}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{cc}}(\omega)\mathbf{x}_{\mathrm{c_h}} + \mathbf{f}_{\mathrm{c_h}}(\mathbf{x}_{\mathrm{c_h}}, \omega) = \mathbf{g}_{\mathrm{c_h}} \tag{II.35b}$$

Ces deux équations peuvent être condensées sur les degrés de liberté non-linéaires pour former un système algébrique (II.36) de taille potentiellement réduite par rapport au système initial (II.8). Mathématiquement, cette technique de condensation revient à déterminer le complément de Schur du bloc $\mathbf{Z}_{\mathrm{aa}}$ correspondant à la partie linéaire de la matrice de rigidité dynamique ((II.37a) et (II.37b)).

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{cond}}(\omega)\mathbf{x}_{\mathrm{c_h}} + \mathbf{f}_{\mathrm{c_h}}(\mathbf{x}_{\mathrm{c_h}}, \omega) = \mathbf{g}_{\mathrm{cond_h}} \tag{II.36}$$

où

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{cond}}(\omega) = \mathbf{Z}_{\mathrm{cc}}(\omega) - \mathbf{Z}_{\mathrm{ca}}(\omega)\mathbf{Z}_{\mathrm{aa}}(\omega)^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{ac}}(\omega) \tag{II.37a}$$

$$\mathbf{g}_{\mathrm{cond_h}} = \mathbf{g}_{\mathrm{c_h}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{ca}}(\omega)\mathbf{Z}_{\mathrm{aa}}(\omega)^{-1}\mathbf{g}_{\mathrm{a_h}} \tag{II.37b}$$

Cette méthode de condensation, exacte aux erreurs d'arrondis près, permet de diminuer drastiquement le nombre de degrés de liberté dans le cas d'une structure industrielle dès lors que le système d'équations à résoudre soit écrit sous une forme fréquentielle (II.8) et que les non-linéarités du système soient localisées. En outre, plus le nombre de degrés de liberté linéaires est important par rapport au nombre de degrés de liberté non-linéaires, plus la méthode de condensation est efficace.

Cependant, l'application de cette procédure nécessite l'inversion de la matrice $\mathbf{Z}_{\mathrm{aa}}$ de taille non-négligeable. Couplée à une méthode de continuation II.1.5, l'inversion de la matrice doit être réalisée à chaque pas du paramètre de continuation ce qui constitue la principale limitation de cette technique de condensation. C'est pourquoi, il peut être avantageux de coupler cette méthode avec l'une des méthodes de réduction par sous-structuration développée dans le chapitre III.

Il est important de noter que l'équation (II.35a) permet de restituer l'ensemble des variables fréquentielles du système initial.

1.6.2 Condensation sur les degrés de liberté relatifs

Dans le cas de systèmes présentant uniquement des lois non-linéaires faisant intervenir une formulation nœud à nœud du contact, une seconde étape de condensation est alors applicable. Celle-ci est nommée condensation sur les degrés de liberté relatifs et consiste à exprimer les termes non-linéaires en fonction de variables relatives. En partant de la formulation de la condensation sur les degrés de liberté non-linéaires (II.36), il est possible de réécrire le problème en séparant le système en deux sous-systèmes reliés à l'aide de la non-linéarité de contact

$$\mathbf{Z}^{(1)}_{\text{cond}}(\omega)\mathbf{x}^{(1)}_{\text{c}_\text{h}} + \mathbf{f}^{(1)}_{\text{c}_\text{h}}(\mathbf{x}^{(1)}_{\text{c}_\text{h}}, \omega) = \mathbf{g}^{(1)}_{\text{cond}_\text{h}} \tag{II.38a}$$

$$\mathbf{Z}^{(2)}_{\text{cond}}(\omega)\mathbf{x}^{(2)}_{\text{c}_\text{h}} + \mathbf{f}^{(2)}_{\text{c}_\text{h}}(\mathbf{x}^{(2)}_{\text{c}_\text{h}}, \omega) = \mathbf{g}^{(2)}_{\text{cond}_\text{h}} \tag{II.38b}$$

D'après le principe des actions réciproques, les efforts non-linéaires de contact vérifient la relation

$$\mathbf{f}^{(1)}_{\text{c}_\text{h}}(\mathbf{x}^{(1)}_{\text{c}_\text{h}}, \omega) + \mathbf{f}^{(2)}_{\text{c}_\text{h}}(\mathbf{x}^{(2)}_{\text{c}_\text{h}}, \omega) = \mathbf{0} \tag{II.39}$$

De plus, le vecteur des déplacements relatifs s'exprime tel que

$$\mathbf{x}_{\text{r}_\text{h}} = \mathbf{x}^{(1)}_{\text{c}_\text{h}} - \mathbf{x}^{(2)}_{\text{c}_\text{h}} \tag{II.40}$$

Le système (II.38) peut alors se mettre sous la forme

$$\mathbf{Z}_{\text{r}}(\omega)\mathbf{x}_{\text{r}_\text{h}} + \mathbf{f}_{\text{r}_\text{h}}(\mathbf{x}_{\text{r}_\text{h}}, \omega) = \mathbf{g}_{\text{r}_\text{h}} \tag{II.41}$$

avec, par convention,

$$\mathbf{f}_{\text{r}_\text{h}}(\mathbf{x}_{\text{r}_\text{h}}, \omega) = \mathbf{f}^{(1)}_{\text{c}_\text{h}}(\mathbf{x}^{(1)}_{\text{c}_\text{h}}, \omega) \tag{II.42}$$

et

$$\mathbf{Z}_{\text{r}}(\omega) = \left(\left(\mathbf{Z}^{(1)}_{\text{cond}}(\omega)\right)^{-1} + \left(\mathbf{Z}^{(2)}_{\text{cond}}(\omega)\right)^{-1}\right)^{-1} \tag{II.43a}$$

$$\mathbf{g}_{\text{r}_\text{h}} = \mathbf{Z}_{\text{r}}(\omega)\left(\left(\mathbf{Z}^{(1)}_{\text{cond}}(\omega)\right)^{-1}\mathbf{g}^{(1)}_{\text{cond}_\text{h}} - \left(\mathbf{Z}^{(2)}_{\text{cond}}(\omega)\right)^{-1}\mathbf{g}^{(2)}_{\text{cond}_\text{h}}\right) \tag{II.43b}$$

Cette seconde étape de condensation permet d'exprimer le système à l'aide de variables relatives (II.41) et ainsi de réduire la taille de ce dernier par deux ce qui peut être décisif, en termes de temps de calcul, dans le cas d'un système de taille industriel.

Il est important de noter que les équations (II.38a) et (II.38b) couplées à l'équation (II.40) permettent de restituer l'ensemble des variables fréquentielles du système avant condensation sur les degrés de liberté relatifs.

2 Solutions périodiques d'un système non-linéaire autonome

Contrairement à l'étude de la réponse forcée d'un système non-linéaire gouverné par l'équation (II.1), l'étude d'un système non-linéaire autonome est régie par une équation ne comportant pas de terme d'excitation (II.44).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{0} \tag{II.44}$$

La résolution de cette équation est intimement associée à la notion de mode non-linéaire qui en sont des solutions particulières. Néanmoins, le concept de mode de vibration est plus facilement associé aux systèmes linéaires qu'aux systèmes non-linéaires, notamment en bureau d'étude. En effet, les modes linéaires présentent des propriétés dynamiques très intéressantes ainsi qu'une évaluation aisée, ces aspects sont rappelés dans la sous-section suivante. Contrairement aux modes linéaires, les modes non-linéaires ne sont pas aussi aisés à calculer et ne présentent pas de propriété dynamique aussi attrayantes. Cependant, ils permettent de conserver des informations sur le système très utiles pour des applications de réduction de modèle [102, 118] ou d'identification modale expérimentale non-linéaire [62,

110]. Les deuxième et troisième sous-sections aborderont la notion de modes normaux non-linéaires ainsi qu'une technique d'évaluation des modes non-linéaires pour un système non-conservatif : les modes complexes non-linéaires.

2.1 Analyse modale linéaire

Cette sous-section aborde des rappels d'analyse modale linéaire qu'il est intéressant d'évoquer à l'approche de sous-sections traitant des modes non-linéaires.

Dans un cas conservatif, un système linéaire autonome est défini par l'équation (II.45).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \tag{II.45}$$

Les modes normaux linéaires, couramment nommés modes linéaires, sont alors définis comme étant les solutions du problème aux valeurs propres

$$(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M})\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{0} \tag{II.46}$$

où $\mathbf{\Phi}_i$ est le $i^{\text{ème}}$ mode normal linéaire du système qui en comporte n et Ω est la pulsation propre associée au $i^{\text{ème}}$ mode normal linéaire.

Ces modes normaux linéaires $\mathbf{\Phi}_i$ sont orthogonaux deux à deux par rapport à la matrice de masse et de rigidité, ce qui permet de diagonaliser les matrices $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ et donc de découpler l'équation du mouvement en n équations normales à une seule variable. Deux propriétés remarquables découlent directement de cette diagonalisation :

— *L'invariance et l'isochronisme.* Les formes modales ainsi que les pulsations propres des modes normaux linéaires sont indépendants de l'amplitude de vibration.

— *La superposition.* La réponse du système autonome ou forcé peut être exprimée comme une combinaison linéaire des solutions des n équations normales.

Ces propriétés ne sont, en général, plus vérifiées dans le cas de modes normaux non-linéaires ce qui réduit grandement leur utilisation. Cependant, la linéarité est le plus souvent une hypothèse, une idéalisation de la nature du problème : la plupart des structures étudiées comportent des non-linéarités. L'évaluation des modes normaux non-linéaires est une approche adéquate pour analyser le comportement d'une structure en tentant de conserver une vision modale.

2.2 Modes normaux non-linéaires

La notion de mode non-linéaire est un concept récent datant du milieu du XX$^{\text{ème}}$ siècle et qui a finalement pris son essor au début des années 1990. Dès lors, des définitions ont ainsi été proposées dans la littérature et des travaux portant sur l'évaluation de ces modes non-linéaires ont commencé à voir le jour.

2.2.1 Définitions

Bien que les contributions de Lyapunov [132] servent de fondement aux travaux portant sur les Modes Normaux Non-linéaires (MNN), les premiers articles traitant du sujet sont souvent attribuées à Rosenberg [187–189] notamment grâce à sa définition des modes normaux non-linéaires qu'il décrit comme

« Une vibration à l'unisson du système »

dans son article écrit en 1960 [187]. Les modes normaux non-linéaires tels que définis par Rosenberg entraînent une oscillation synchrone de tous les degrés de liberté du système ce qui signifie que tous les points du système atteignent leurs extremums respectifs simultanément, vibrent à la même fréquence et tous les déplacements peuvent être exprimés en fonction du déplacement d'un point de référence.

Cette notion d'unisson induit que les trajectoires modales sont des lignes dans l'espace des configurations. Dans le cas général, le mode non-linéaire est représenté par une courbe, il est nommé non-similaire et est alors dépendant de l'énergie totale du système. Cependant, pour certains systèmes (énumérés par Gibert [63]), le mode non-similaire peut alors être dégénéré en un mode non-dépendant de l'énergie du système à l'instar d'un mode linéaire : le mode est alors défini comme similaire et est représenté par une droite. La figure II.5 permet de schématiser la définition de modes normaux non-linéaires énoncée par Rosenberg.

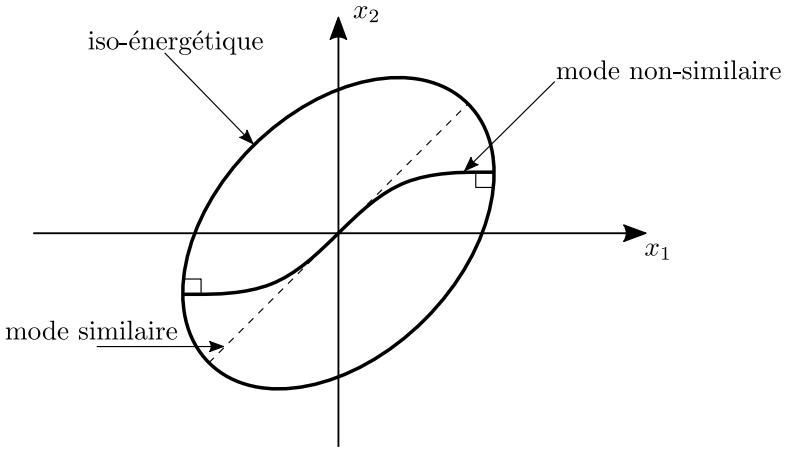


FIGURE II.5 – Mode normal non-linéaire de Rosenberg (adaptée de [63])

Deux propriétés géométriques remarquables des modes non-linéaires sont illustrées sur la figure II.5. Premièrement, la courbe représentative d'un mode non-similaire est tangente à la droite représentative de ce même mode linéarisé autour du point d'équilibre considéré pour une non-linéarité suffisamment régulière. Cependant, la notion de Mode Normal Non-linéaire peut être étendue aux systèmes irréguliers. Deuxièmement, cette courbe est orthogonale (i.e. normale) aux surfaces iso-énergétiques de l'espace des configurations.

Dans leurs multiples travaux en commun, Shaw et Pierre [197–199] proposèrent une généralisation de la définition des modes normaux non-linéaires de Rosenberg en l'étendant aux systèmes amortis. Shaw et Pierre, dans leur article datant de 1993 [197], définissent les modes normaux non-linéaires comme

« Une variété invariante bidimensionnelle de l'espace des phases. »

Cette approche, similaire à celle de Rosenberg et inspirée de la méthode de réduction de la variété centrale [25, 76], est paramétrée par une paire de variables d'état : le déplacement x et la vitesse $\dot{x}$ qui sont choisis en tant que degrés de liberté maîtres. Les degrés de liberté résiduels sont alors esclaves et exprimés en fonction des degrés de liberté maîtres.

2.2.2 État de l'art des techniques d'analyse modale non-linéaire

De même que les méthodes de recherche de solutions périodiques d'un système non-linéaire et non-autonome abordées en sections II.1, les techniques d'évaluation des modes normaux non-linéaires peuvent être ordonnées en deux catégories : les méthodes dites

analytiques et les méthodes numériques. Des ouvrages dressant un état de l'art complet sur la notion de mode non-linéaire et leur évaluation peuvent être consultés pour plus de détails, notamment Vakakis *et al.* [226] qui résument les développements élaborés jusqu'aux années 1990 ou, plus récemment, Kerschen *et al.* [109] et Peeters *et al.* [172] dans leur article en deux parties ainsi que Renson *et al.* [186].

Les méthodes dites analytiques. Rosenberg [187–189] fut le premier à développer des techniques d'évaluation de modes normaux non-linéaires sur des systèmes conservatifs composés de n oscillateurs discrets utilisant une approche fondée sur une formulation énergétique du problème. Plusieurs auteurs employèrent cette même approche dont Rand [185] et Vakakis *et al.* [223, 225] dans leurs travaux sur les modes normaux de vibration de structures à symétrie cyclique soumises à des non-linéarités conservatives polynomiales.

Comme mentionné précédemment, Shaw et Pierre [197–199] adoptèrent une approche basée sur le concept de variétés invariantes, similaire dans l'esprit à l'approche de Rosenberg. Cette technique fut reformulée par Nayfeh *et al.* en adoptant une formulation complexe pour étudier des systèmes continus [162] ou des systèmes soumis à des résonances internes [161].

De nombreuses méthodes analytiques furent manipulées pour calculer les modes normaux non-linéaires parmi lesquelles la méthode des échelles multiples exploitée par Vakakis *et al.* [224] et Lacarbonara *et al.* [119, 120] ainsi que la méthode des formes modales complexes proposée par Jézéquel et Lamarque [98].

Bien que permettant de comprendre les phénomènes liés aux non-linéarités, les approches analytiques sont pour la plupart restreintes à des systèmes de taille relativement faible et sont fortement tributaires de l'approximation faite sur les efforts non-linéaires dont la précision a tendance à décroître à mesure que l'énergie totale du système augmente. Afin de contourner ces limitations, Pesheck [173, 174] proposa une reformulation de la méthode de Shaw et Pierre permettant d'aborder la résolution du problème de manière numérique. Cette approche numérique permet ainsi de pallier les difficultés des approches analytiques à traiter les systèmes de grande taille et fortement non-linéaires.

Les méthodes numériques. Les techniques numériques employées pour évaluer les modes normaux non-linéaires permettent dans la plupart des cas de résoudre les problèmes dont la solution est considérée comme *la solution périodique d'un système dynamique non-linéaire autonome et conservatif*. Ces méthodes numériques sont utilisées pour résoudre le système (II.47) qui ne présente pas de matrice d'amortissement C, ni de non-linéarités dissipatives

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{0} \tag{II.47}$$

Les méthodes numériques nécessitent l'utilisation de solveurs itératifs (détaillés en section II.1) qui eux-mêmes requièrent des ressources de calculs importantes dépendant de la taille du problème à résoudre. Ces moyens de calcul sont en plein essor depuis le début du XXI$^{\text{ème}}$ siècle, il n'est donc pas surprenant de ne trouver que peu de travaux évaluant des modes normaux non-linéaires à l'aide de méthodes numériques. L'une des premières approches numériques est à mettre au crédit de Slater [202] qui s'appuya sur la définition des modes normaux non-linéaires de Rosenberg pour intégrer directement le système

d'équations régissant un système autonome et conservatif (II.47) à l'aide d'algorithmes itératifs tels que les algorithmes de Runge-Kutta et Newmark.

La méthode de tir (mentionnée en section II.1) fut elle-aussi employée dans le cadre du calcul de modes non-linéaires. Les travaux de Peeters [171, 172], abordant des aspects théoriques, numériques et expérimentaux, peuvent servir de référence pour le calcul des modes non-linéaires à l'aide de la méthode de tir.

Récemment, Grolet et Thouverez [72, 73] recoururent à la méthode de l'équilibrage harmonique pour étudier les modes non-linéaires des structures à symétrie cyclique, montrant l'existence de modes localisés pour des systèmes accordés et confirmant ainsi les conclusions de Vakakis *et al.* [223–225] démontrées à l'aide de méthodes analytiques.

Le potentiel des méthodes numériques dans le contexte d'une analyse modale non-linéaire n'est plus à démontrer. Toutefois ces méthodes ne s'appliquent que dans le cas de système conservatif, ne comportant donc pas de matrice d'amortissement $\mathbf{C}$. Bien que la dynamique d'un système non-linéaire amorti s'extrapole volontiers du système conservatif sous-jacent, lorsque la dissipation émane de la non-linéarité, comme il est envisageable en présence de frottement, les approches numériques citées ne sont plus adaptées en raison du trop peu d'informations contenues dans le mode non-linéaire du système conservatif sous-jacent. Pour lever cette restriction et ainsi étendre l'évaluation des modes non-linéaires aux systèmes dissipatifs, Laxalde et Thouverez [125] proposèrent une nouvelle méthode de calcul inspirée de la technique de l'équilibrage harmonique et du calcul des modes complexes linéaires. Cette technique est décrite dans la sous-section II.2.3 et constitue l'un des éléments centraux de la méthode de réduction exploitée dans la partie numérique de ce travail de thèse.

2.3 Modes complexes non-linéaires

Un mode complexe non-linéaire est défini par Laxalde et Thouverez [125] comme étant *une solution périodique ou pseudo-périodique d'un système dynamique non-linéaire autonome*. La dissipation de l'énergie d'un système, via la matrice d'amortissement $\mathbf{C}$ ou une non-linéarité dissipative, est incluse dans cette définition par le biais du terme *pseudo-périodique* qui fait référence à une solution oscillante amortie. Laxalde et Thouverez ont naturellement employé cette notion de mode complexe non-linéaire dans leurs travaux sur l'étude des interfaces frottantes des roues aubagées [122–125]. Ces travaux ont été repris par Krack *et al.* [114–118] et plus récemment Joannin *et al.* [99–102] qui ont appliqué cette méthode dans leurs travaux de réduction de modèle.

2.3.1 Aspects théoriques

L'objectif est de calculer les modes complexes d'un système non-linéaire, autonome et non-conservatif régi par l'équation (II.48).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{0} \tag{II.48}$$

Afin de considérer l'éventuelle dissipation de l'énergie du système et par analogie avec la définition des modes complexes d'un système linéaire, les valeurs propres de l'équation (II.48) sont recherchées sous forme complexe

$$\lambda = -\beta + i\Omega \tag{II.49}$$

où $\Omega = \Omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ est la pulsation propre amortie, Ω_0 représente la pulsation propre du système et $\zeta = {}^{\beta}/_{\Omega_0}$ est le taux d'amortissement modal.

La solution périodique ou pseudo-périodique du système d'équations (II.48) est étroitement reliée à la notion de mode complexe non-linéaire. Dans le but d'évaluer l'approximation de la solution, une méthode de Galerkine analogue à la technique de l'équilibrage harmonique,détaillée en section II.1, est mise en œuvre. Toujours afin de prendre en compte une éventuelle dissipation de l'énergie du système, un terme exponentiel intégrant le paramètre β et caractérisant l'amortissement issu de la dissipation permet d'enrichir la solution périodique sous forme d'une série de Fourier à coefficients réels (II.3) communément employée dans la méthode de la balance harmonique

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{n_\mathrm{h}} \mathrm{e}^{-k\beta t}(\mathbf{a}_k \cos(k\Omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\Omega t)) \tag{II.50}$$

La solution pseudo-périodique (II.50) ainsi que ses dérivées première et seconde par rapport au temps sont introduites dans l'équation (II.48) pour aboutir au résidu dynamique (II.51).

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) = &\sum_{k=1}^{n_\mathrm{h}} \left[\left((k^2\beta^2 - k^2\Omega^2)\mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\mathbf{a}_k - \left(2k^2\Omega\beta\mathbf{M} - k\Omega\mathbf{C}\right)\mathbf{b}_k\right]\mathrm{e}^{-k\beta t}\cos(k\Omega t)\\ &+ \sum_{k=1}^{n_\mathrm{h}} \left[\left(2k^2\Omega\beta\mathbf{M} - k\Omega\mathbf{C}\right)\mathbf{a}_k + \left((k^2\beta^2 - k^2\Omega^2)\mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\mathbf{b}_k\right]\mathrm{e}^{-k\beta t}\sin(k\Omega t)\\ &+ \mathbf{K}\mathbf{a}_0 + \mathbf{f}_\mathrm{nl}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\end{aligned} \tag{II.51}$$

L'ajout du terme de décroissance dans la forme de la solution (II.50) rend caduc l'exploitation de la méthode de Galerkine. En effet, le produit scalaire, utilisé dans la méthode de l'équilibrage harmonique et rappelé dans l'équation (II.52), ne permet plus d'éliminer totalement la dépendance temporelle du résidu.

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0,T]), \forall g \in \mathcal{C}^0([0,T]), \quad \langle f|g\rangle = \frac{2}{T}\int_0^\mathrm{T} f(t)g(t)dt \tag{II.52}$$

Pour contourner cette difficulté, la formulation d'une hypothèse est alors essentielle : la décroissance de la solution est négligée sur la période d'oscillation T au cours de l'étape d'orthogonalisation du résidu. En raisonnant en termes mathématiques, l'hypothèse consiste à supposer le temps caractéristique de décroissance très grand par rapport à la période fondamentale des oscillations soit $\beta << \Omega$ [122, 125]. Cette hypothèse est licite dans le cadre des travaux contenus dans ce mémoire : les premiers modes de vibration d'une aube de soufflante composite à large corde. En prenant en considération l'hypothèse formulée ainsi que l'orthogonalité des fonctions de base (II.5) par rapport au produit scalaire (II.52), le résidu (II.51) peut se simplifier pour parvenir au système d'équations (II.53).

$$\begin{cases} \langle\mathbf{r}|c_0\rangle = (2\mathbf{K})\mathbf{a}_0 + \langle\mathbf{f}_\mathrm{nl}|c_0\rangle \\ \langle\mathbf{r}|c_k\rangle = \left[(k^2\beta^2 - k^2\Omega^2)\mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} + \mathbf{K}\right]\mathbf{a}_k - \left(2k^2\Omega\beta\mathbf{M} - k\Omega\mathbf{C}\right)\mathbf{b}_k + \langle\mathbf{f}_\mathrm{nl}|c_k\rangle \\ \langle\mathbf{r}|s_k\rangle = \left(2k^2\Omega\beta\mathbf{M} - k\Omega\mathbf{C}\right)\mathbf{a}_k + \left[(k^2\beta^2 - k^2\Omega^2)\mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} + \mathbf{K}\right]\mathbf{b}_k + \langle\mathbf{f}_\mathrm{nl}|s_k\rangle \end{cases} \tag{II.53}$$

2.3.2 Implémentation et résolution

Pareillement à la méthode de la balance harmonique, le résidu (II.53) peut être remanié en une écriture matricielle, plus commode à implémenter numériquement

$$\boxed{\mathbf{r}_\mathrm{h}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \Omega, \beta) = \mathbf{Z}(\Omega, \beta)\mathbf{x}_\mathrm{h} + \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \Omega, \beta)} \tag{II.54}$$

où les notations sont identiques à celles adoptées en section II.1.

Le vecteur solution $\mathbf{x}_\mathrm{h}$ est toujours constitué des coefficients harmoniques du développement en série de Fourier (II.9). La structure de la matrice de rigidité multi-harmonique $\mathbf{Z}$, exprimée en section II.1, est maintenue. Cependant, la composition des blocs $\mathbf{Z}_k$ s'enrichit du paramètre d'amortissement β telle que représentée par l'équation (II.55).

$$\mathbf{Z}_k(\Omega, \beta) = \begin{pmatrix} (k^2\beta^2 - k^2\Omega^2)\mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} + \mathbf{K} & -2k^2\Omega\beta\mathbf{M} - k\Omega\mathbf{C} \\ 2k^2\Omega\beta\mathbf{M} - k\Omega\mathbf{C} & (k^2\beta^2 - k^2\Omega^2)\mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} + \mathbf{K} \end{pmatrix} \tag{II.55}$$

La résolution du système d'équation (II.54) peut être effectuée à l'aide du type de solveurs itératifs détaillé en section II.1. Dans la suite de ce mémoire de thèse, les modes complexes non-linéaires sont évalués au moyen d'un algorithme à région de confiance [34]. Les solveurs itératifs, pouvant être exploités pour résoudre ce type de système, nécessitent la connaissance de la matrice jacobienne $\mathbf{J}_{\mathbf{r}_\mathrm{h}}$ du système d'équation (II.54). L'évaluation numérique de la matrice jacobienne, par le biais de différences finies par exemple, augmenterait considérablement le temps de calcul : il est donc quasi-indispensable de fournir au solveur itératif une expression analytique de la matrice jacobienne. Les développements analytiques de la matrice jacobienne sont présentés en annexe B.2.

De même qu'une évaluation de la solution d'une réponse forcée d'un système non-linéaire, l'initialisation de la première itération du solveur pour un système autonome est accomplie à l'aide du mode linéaire sous-jacent, à ceci près que le mode linéaire permettant d'initialiser la résolution itérative est un mode complexe ce qui permet ainsi d'initialiser les paramètres Ω et β. Les itérations suivantes du paramètre de contrôle sont initialisées grâce aux prédicteurs présentés en section II.1.

2.3.3 Évaluation des termes non-linéaires

Afin de prendre en compte l'éventuelle partie dissipative de la non-linéarité, le vecteur des efforts non-linéaires $\mathbf{f}_\mathrm{nl}$ est supposé être de la forme

$$\mathbf{f}_\mathrm{nl}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \approx \mathbf{c}_0 + \sum_{k=1}^{n_\mathrm{h}} \mathrm{e}^{-k\beta t}(\mathbf{c}_k \cos(k\Omega t) + \mathbf{d}_k \sin(k\Omega t)) \tag{II.56}$$

L'hypothèse formulée précédemment implique que la décroissance des efforts non-linéaires soit la même que celle des autres paramètres. Cette conséquence semble raisonnable et il est alors possible de déterminer les composantes du vecteur $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}$ à l'aide de la méthode AFT détaillée en section II.1. Une modification de la méthode AFT est cependant nécessaire afin de l'appliquer au calcul d'un mode complexe non-linéaire. Celle-ci intervient dans la construction des blocs diagonaux de l'opérateur différentiel ∇ qui intègrent le paramètre dissipatif β

$$\boldsymbol{\nabla}_k(\Omega, \beta) = \begin{pmatrix} -k\beta & k\Omega \\ -k\Omega & -k\beta \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \tag{II.57}$$

2.3.4 Continuation

Les techniques de continuation abordées en section II.1 requièrent un remaniement afin de pouvoir maîtriser l'ajout d'un paramètre supplémentaire à savoir β. Dans le cadre d'une non-linéarité dissipative telle que le frottement, les exemples présentés dans la littérature consultée dans le cadre de cette thèse ne montrent pas de point de retournement ou d'embranchement : une continuation séquentielle est alors suffisante pour traiter ce type de non-linéarité affectant un système autonome et non-conservatif.

Pour un système autonome, l'amplitude de l'un des harmoniques d'un degré de liberté (choisi arbitrairement) peut être adoptée comme paramètre de continuation séquentielle. L'introduction du paramètre dissipatif β dans le système d'équations contraint à fixer un autre paramètre afin de fermer complètement le système, celui-ci pouvant être la phase de l'harmonique de ce même degré de liberté. En termes d'implémentation numérique, cela revient alors à fixer les coefficients harmoniques a_k et b_k de l'un des harmoniques du degré de liberté choisi. En vue de remédier aux importantes différences de facteur d'échelle qui peuvent apparaître entre les paramètres (pulsation Ω , paramètre de dissipation β et déplacements $\mathbf{x}_h$), Laxalde et Thouverez [122, 125] proposèrent une reformulation de l'étape de prédiction en deux sous-problèmes, avec d'un côté l'évaluation des paramètres liés à la valeur propre et de l'autre les déplacements puis une résolution du système complet.

Il est possible d'exploiter une continuation de type *arc-length* pour anticiper certains comportements non-linéaires. Deux équations supplémentaires sont alors impératives afin que le système comporte un nombre équivalent d'équations et d'inconnues. Joannin *et al.* [99] proposent de fermer le système à l'aide d'une condition de phase, similaire à (II.33) étoffée du paramètre de dissipation β (II.58). Une telle continuation nécessite d'augmenter le système (II.54) au moyen de l'équation

$$r_{\mathrm{a}}(\mathbf{x}_{\mathrm{h}}, \Omega, \beta) = \|\mathbf{x}_{\mathrm{h}} - \mathbf{x}_{\mathrm{h}_j}\|^2 + (\Omega - \Omega_j)^2 + (\beta - \beta_j)^2 - \Delta s^2 = 0 \tag{II.58}$$

2.3.5 Condensation dans le domaine fréquentiel

Les deux méthodes de condensation, abordées dans la section II.1, sont transposables dans le calcul des modes complexes non-linéaires moyennant quelques transformations. Les termes du second membre relatifs à l'excitation, $\mathbf{g}_{\mathrm{cond_h}}$ et $\mathbf{g}_{\mathrm{r_h}}$, n'apparaissent évidemment pas dans l'une ou l'autre des condensations pour ce type de calculs.

Condensation sur les degrés de liberté non-linéaires. En fonction du type de continuation employé pour suivre l'évolution de la solution, les expressions des condensations sur les degrés de liberté non-linéaires diffèrent.

Dans le cas du calcul d'un mode complexe non-linéaire augmenté d'une continuation séquentielle, le paramètre de continuation est l'amplitude de l'un des harmoniques d'un degré de liberté du système. Les coefficients harmoniques, a_k et b_k, de l'harmonique du degré de liberté concerné sont fixés. Le partitionnement des degrés de liberté linéaires est alors remanié afin de faire apparaître cette subtilité. Ainsi, les degrés de liberté linéaires, notés $\bullet_{\mathrm{a}}$ dans l'équation (II.34), sont partitionnés en deux catégories : les coefficients

harmoniques de l'harmonique du degré de liberté (choisi comme coordonnée de contrôle) notés $\bullet_{\mathrm{d}}$, et les autres degrés de liberté linéaires, notés $\bullet_{\mathrm{l}}$. Le système d'équation (II.8) peut alors se réécrire

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{\mathrm{dd}}(\Omega) & \mathbf{Z}_{\mathrm{dl}}(\Omega) & \mathbf{Z}_{\mathrm{dc}}(\Omega) \\ \mathbf{Z}_{\mathrm{ld}}(\Omega) & \mathbf{Z}_{\mathrm{ll}}(\Omega) & \mathbf{Z}_{\mathrm{lc}}(\Omega) \\ \mathbf{Z}_{\mathrm{cd}}(\Omega) & \mathbf{Z}_{\mathrm{cl}}(\Omega) & \mathbf{Z}_{\mathrm{cc}}(\Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\mathrm{d_h}} \\ \mathbf{x}_{\mathrm{l_h}} \\ \mathbf{x}_{\mathrm{c_h}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{c_h}}(\mathbf{x}_{\mathrm{c_h}}, \Omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{II.59}$$

Le développement du système (II.59) amène aux équations

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{dd}}(\Omega)\mathbf{x}_{\mathrm{d_h}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{dl}}(\Omega)\mathbf{x}_{\mathrm{l_h}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{dc}}(\Omega)\mathbf{x}_{\mathrm{c_h}} = \mathbf{0} \tag{II.60a}$$

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{ld}}(\Omega)\mathbf{x}_{\mathrm{d_h}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{ll}}(\Omega)\mathbf{x}_{\mathrm{l_h}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{lc}}(\Omega)\mathbf{x}_{\mathrm{c_h}} = \mathbf{0} \tag{II.60b}$$

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{cd}}(\Omega)\mathbf{x}_{\mathrm{d_h}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{cl}}(\Omega)\mathbf{x}_{\mathrm{l_h}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{cc}}(\Omega)\mathbf{x}_{\mathrm{c_h}} + \mathbf{f}_{\mathrm{c_h}}(\mathbf{x}_{\mathrm{c_h}}, \Omega) = \mathbf{0} \tag{II.60c}$$

L'équation (II.60b) permet de condenser le vecteur déplacement de la partie linéaire du problème $\mathbf{x}_{\mathrm{l_h}}$. En insérant le résultat de cette condensation dans les équations (II.60a) et (II.60c), il vient le système d'équations

$$\begin{cases} \left(\mathbf{Z}_{\mathrm{dc}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{dl}}\mathbf{Z}_{\mathrm{ll}}^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{lc}}\right)\mathbf{x}_{\mathrm{c_h}} + \left(\mathbf{Z}_{\mathrm{dd}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{dl}}\mathbf{Z}_{\mathrm{ll}}^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{ld}}\right)\mathbf{x}_{\mathrm{d_h}} = \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{Z}_{\mathrm{cc}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{cl}}\mathbf{Z}_{\mathrm{ll}}^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{lc}}\right)\mathbf{x}_{\mathrm{c_h}} + \left(\mathbf{Z}_{\mathrm{cd}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{cl}}\mathbf{Z}_{\mathrm{ll}}^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{ld}}\right)\mathbf{x}_{\mathrm{d_h}} + \mathbf{f}_{\mathrm{c_h}}(\mathbf{x}_{\mathrm{c_h}}, \Omega) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{II.61}$$

dans lequel les dépendances en Ω de chacun des blocs de la matrice de rigidité dynamique ont été omis afin d'alléger les équations.

Les deux équations du système (II.61) constituent les deux sous problèmes précédemment évoqués dans la sous-section (2.3.4). Celles-ci permettent une prédiction des paramètres liés à la valeur propre pour la première équation et du vecteur des déplacements de la partie non-linéaire du problème pour la seconde [122, 125]. L'étape de correction de la méthode de continuation séquentielle est ensuite réalisée à l'aide des deux équations couplées.

D'un point de vue programmation, les termes contenant les coefficients harmoniques de l'harmonique du degré de liberté $\mathbf{x}_{\mathrm{d_h}}$ sont considérés comme des termes d'efforts extérieurs puisque ces coefficients harmoniques sont imposés dans la continuation séquentielle.

Il est important de noter que l'équation (II.60b) permet de restituer l'ensemble des variables fréquentielles du système initial.

Dans le cas du calcul d'un mode complexe non-linéaire augmenté d'une méthode de continuation de type *arc-length*, la méthode de condensation sur les degrés de liberté non-linéaires est identique à la procédure présentée en section II.1

Condensation sur les degrés de liberté relatifs. La technique de condensation sur les degrés de liberté relatifs dans le cadre du calcul d'un mode complexe non-linéaire est analogue à celle présentée en section II.1.

3 Exemple illustratif

Afin d'illustrer la phénoménologie liée à la réponse forcée d'un système non-linéaire ainsi que la notion de mode complexe non-linéaire pour un système comprenant une non-linéarité dissipative, un exemple est présenté dans cette section. Un système à deux degrés

de liberté, soumis à des non-linéarités de type frottement sec et polynomiale, est utilisé pour mettre en lumière ces concepts. Les paramètres structuraux et non-linéaires de ce système sont recalés en fonction des caractéristiques modales et non-linéaires d'un modèle industriel d'un secteur de soufflante astreint à un chargement centrifuge. La construction de ce modèle ainsi que le recalage des paramètres sont exposés dans la première sous-section. Les réponses forcées de ce modèle illustratif sont révélées et analysées dans la sous-section suivante. Pour achever cette section, les résultats du calcul des modes complexes non-linéaires de ce même système sont présentés et discutés.

3.1 Construction du modèle

Le modèle utilisé est un système à deux degrés de liberté dont les paramètres structuraux et non-linéaires sont recalés afin que la réponse dynamique du modèle soit comparable à celle du premier mode de flexion d'un secteur de soufflante composite soumis à un chargement centrifuge. Une représentation schématique du modèle est donnée en figure II.6.

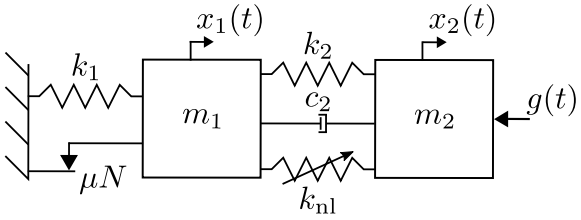


FIGURE II.6 – Modèle illustratif à deux degrés de liberté

Les masses ponctuelles m_1 et m_2 ainsi que la raideur k_2 reliant ces deux masses représentent mécaniquement l'aube de soufflante en composite du secteur en question. La raideur k_1 reliant m_1 au bâti peut être comparée à la raideur de contact entre le pied d'aube et le disque en titane de la soufflante. L'amortissement c_2 du modèle est introduit entre les masses représentant l'aube. Le modèle comporte à deux non-linéarités. La première est une non-linéarité en frottement sec insérée parallèlement à la raideur k_1 et représentant le frottement à l'interface de contact entre le pied d'aube et le disque. La seconde est une non-linéarité polynomiale intercalée entre les masses m_1 et m_2 pouvant être interprétée comme une non-linéarité géométrique en grands déplacements (définie dans le chapitre I) propre aux objets minces et élancés tels qu'une aube de soufflante à large corde. L'effort $\mathbf{g}$ est appliqué au second degré de liberté et est de nature sinusoïdale.

Les caractéristiques structurales de ces oscillateurs sont recalées de la manière suivante :

— *La masse* m_2 est définie à l'aide du déplacement en tête d'aube du premier mode linéaire de flexion $\mathbf{\Phi}_1$. L'analyse modale est réalisée sur une aube encastrée au niveau de ses portées et mis en rotation à la vitesse d'intérêt. Le mode $\mathbf{\Phi}_1$ est normé par la matrice de masse $\mathbf{M}$ du système. Les propriétés des modes linéaires données en section II.2 permettent d'écrire l'équation

$$\mathbf{\Phi}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_1 = 1 \tag{II.62}$$

La masse modale est alors unitaire. De plus, le premier mode linéaire de flexion normé par sa valeur maximale, soit la valeur du déplacement en tête de pale, peut s'écrire

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}_1} = \frac{1}{\delta}\mathbf{\Phi}_1 \tag{II.63}$$

avec δ le déplacement en tête d'aube pris au degré de liberté présentant le maximum sur $\mathbf{\Phi}_1$.
En insérant l'équation (II.63) dans l'équation (II.62), il vient

$$m_2 = \widetilde{\mathbf{\Phi}_1}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \widetilde{\mathbf{\Phi}_1} = \frac{1}{\delta^2} \tag{II.64}$$

m_2 peut être interprétée comme la masse apparente vu du point d'excitation lorsque l'aube répond sur le mode considéré. Il s'agit alors de la masse modale associée au déplacement modal choisi, c'est-à-dire le déplacement physique du degré de liberté de la tête de pale.

— *La raideur* k_2 est calculée à partir de l'oscillateur composé de la masse m_2 et de la raideur k_2 encastrée au bâti et représenté par la figure II.7.Sa pulsation propre est assimilée à celle du premier mode de flexion de l'aube préchargée en rotation et encastrée au niveau des portées.

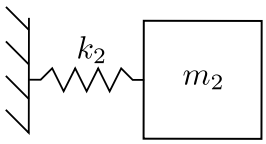


FIGURE II.7 – Oscillateur représentatif de l'aube encastrée

— *La masse* m_1 est recalée de façon analogue à la raideur k_2 à partir d' oscillateurs libres constitués des masses m_1 et m_2 reliées par la raideur k_2 comme le dépeint la figure II.8. La première pulsation propre du système est prise égale à celle du premier mode de flexion de l'aube préchargée en rotation avec des conditions aux limites libres.

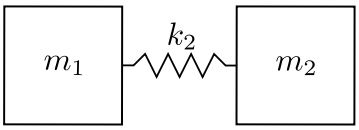


FIGURE II.8 – Système représentatif de l'aube libre

— *La raideur* k_1 est recalée directement sur le modèle complet à deux degrés de liberté décrit sur la figure II.6. La première pulsation propre du modèle complet est assimilée à celle du secteur {aube+disque} de la soufflante préchargée et comportant des liaisons parfaites. L'arrière du disque est bloqué axialement et orthoradialement [3].

— *L'amortisseur* c_2 est estimé dans le but de recaler l'amortissement modal estimé du premier mode de flexion du secteur de soufflante préchargé.

La non-linéarité polynomiale insérée dans le modèle est recalée par rapport à la non-linéarité géométrique statique calculée de l'aube composite. En effet, un effort suivant la déflexion de l'aube est appliqué de la tête d'aube jusqu'à l'échasse (décrite dans le chapitre I) en suivant une répartition uniforme. Pour plusieurs valeurs d'effort positives et négatives, le déplacement statique en tête d'aube est relevé et consigné en figure II.9. Ces données sont interpolées par un polynôme de degré trois dans le but d'estimer les coefficients polynomiaux de la non-linéarité. L'interpolation est représentée en figure II.9. Le coefficient quadratique du polynôme étant très faible devant le coefficient cubique, celui-

3. Cette condition aux limites est explicitée dans le chapitre VI

ci est donc négligé dans l'équation (II.65) représentative de la non-linéarité polynomiale. Il est possible d'observer sur la figure II.9 un décalage par rapport au zéro sur l'axe des ordonnées qui est dû à la précharge centrifuge contraignant préalablement la pale.

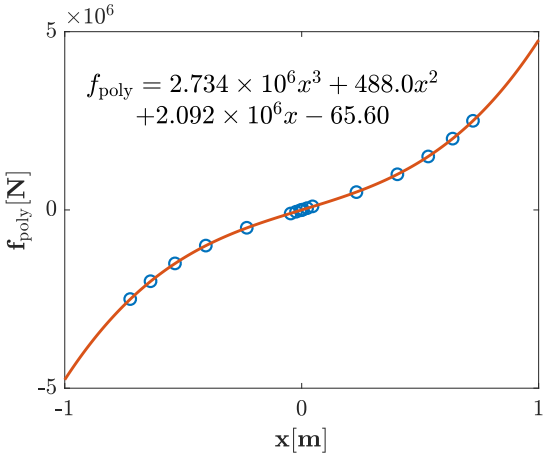


FIGURE II.9 – Évaluation des coefficients polynomiaux (○ données du modèle éléments finis, — interpolation polynomiale)

$$\mathbf{f}_{\text{poly}}(\mathbf{x}(t)) = k_{\text{nl}}\mathbf{x}(t)^3 \tag{II.65}$$

La non-linéarité en frottement sec est modélisée au moyen de la loi de Coulomb (définie dans la chapitre I) régularisée par une fonction tangente hyperbolique. Cette stratégie permet d'améliorer la convergence du système pour des vitesses relatives à l'interface de frottement entraînant de fortes non-linéarités. La régularisation de la fonction signe de la loi de Coulomb facilite aussi l'évaluation de la matrice jacobienne de la fonction non-linéaire (voir annexes B.1 et B.2). La loi gouvernant la non-linéarité en frottement sec dans le domaine temporel est explicitée par l'équation

$$\mathbf{f}_{\text{frot}}(\dot{\mathbf{x}}(t)) = \mu N \tanh\left(\frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\varepsilon}\right) \tag{II.66}$$

Le paramètre μ correspond au coefficient de frottement, il dépend notamment des caractéristiques matériaux des interfaces en contact. Dans cet exemple, le coefficient est fixé à 0.1 qui est un coefficient de frottement typique pour une aube composite en contact avec un disque en titane. Ce coefficient de friction est lié au paramètre N qui est l'effort normal à l'interface de contact. Ce dernier est ici égal à l'effort centrifuge agissant sur la pale. Le paramètre ε gouverne la régularisation de la fonction non-linéaire : plus le paramètre ε est petit, plus la loi peut-être comparée à la fonction signe comme illustré par la figure II.10. La valeur de ε est ajustée en fonction de l'activation de la non-linéarité et donc du déplacement afin d'assurer un bon compromis entre temps de calcul et précision.

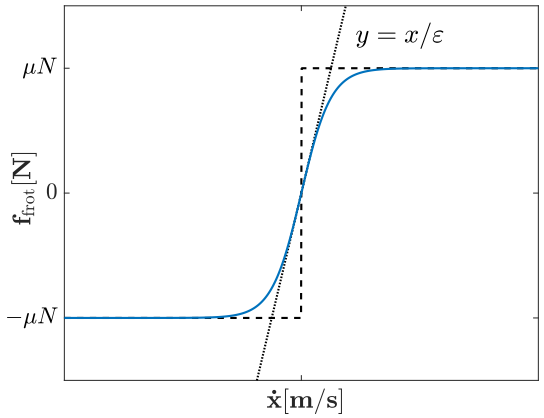


FIGURE II.10 – Loi non-linéaire de frottement sec régularisée (— loi de frottement en tangente hyperbolique, - - fonction signe, ⋯ linéarisation en zéro)

Ce modèle illustratif à deux degrés de liberté est gouverné par l'équation (II.67) et les valeurs des caractéristiques structurales et non-linéaires du système sont précisées dans les tableaux II.1 et II.2 respectivement.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t})) = \mathbf{g}(t) \tag{II.67}$$

avec

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \tag{II.68}$$

et

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t})) = \mathbf{f}_{\text{poly}}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{f}_{\text{frot}}(\dot{\mathbf{x}}(t)) = k_{\text{nl}}\mathbf{x}(t)^3 + \mu N \tanh(\frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\varepsilon}) \tag{II.69}$$

	m [kg]	c [N.s.m^{-1}]	k [N.m^{-1}]
degré de liberté n$^{\text{o}}$ 1	0.080	0	1.642×10^6
degré de liberté n$^{\text{o}}$ 2	0.617	1.05	1.334×10^5

TABLEAU II.1 – Caractéristiques de la partie linéaire du modèle illustratif

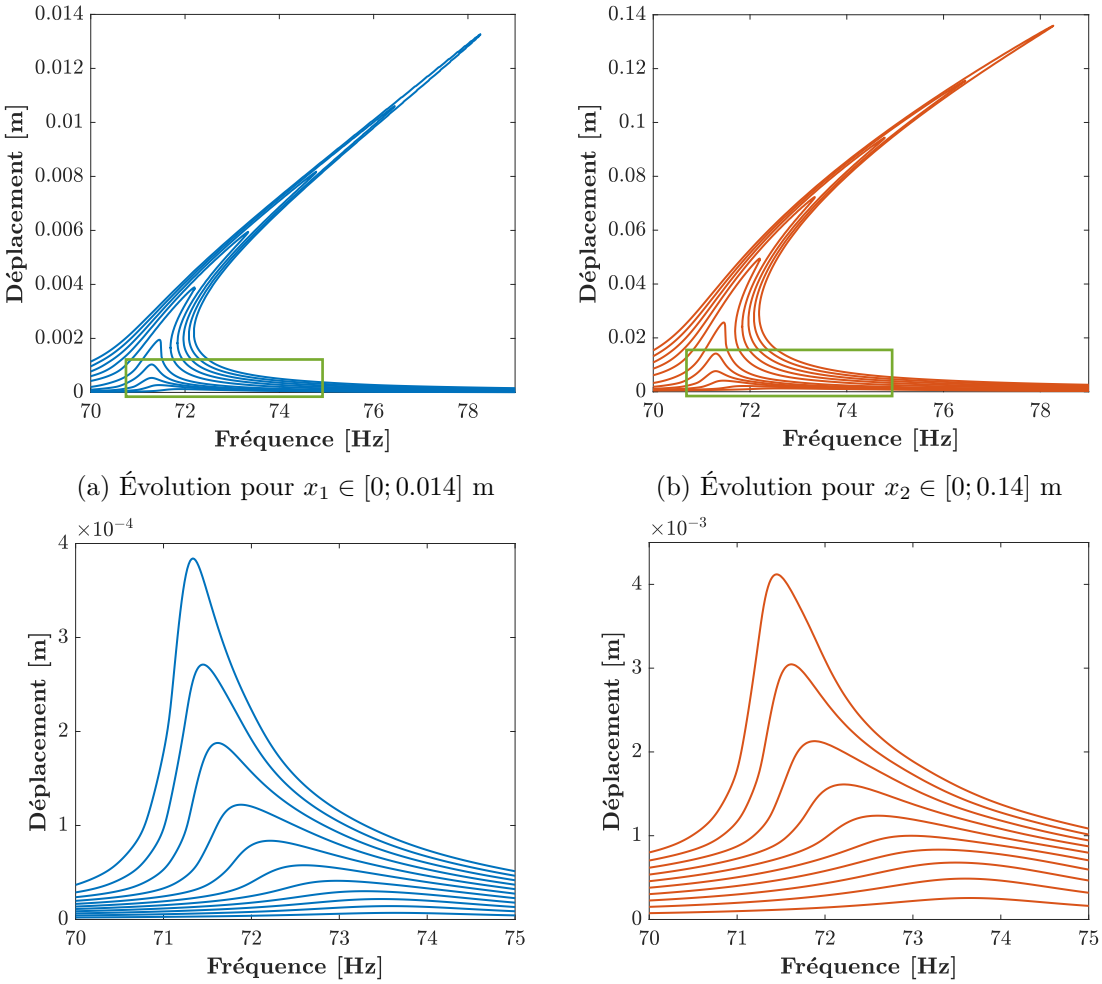
k_{nl} [N.m^{-3}]	μ [ ]	N [N]	ε [ ]
2.734×10^6	0.1	1000	10^{-5} à 10^{-2}

TABLEAU II.2 – Caractéristiques de la partie non-linéaire du modèle illustratif

3.2 Réponses forcées du modèle illustratif

La résolution du système d'équations dynamiques (II.67) du modèle illustratif à deux degrés de liberté est exécutée à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique décrite dans la section II.1. L'un des paramètres les plus importants de cette méthode est le

nombre d'harmoniques n_h retenus dans l'approximation de la solution. Dans le cas d'un système comportant peu de degrés de liberté, un nombre important d'harmoniques peuvent être conservés dans le calcul de la solution sans impacter sensiblement le temps de calcul : $n_\mathrm{h} = 20$ harmoniques ont été retenus. Cependant, pour un système comportant un nombre important de degrés de liberté et dans le but de sélectionner le meilleur compromis entre temps de calcul et précision de la solution, une étude d'influence doit être exécutée afin de déterminer le nombre optimal d'harmoniques à conserver.



(a) Évolution pour $x_1 \in [0; 0.014]$ m

(b) Évolution pour $x_2 \in [0; 0.14]$ m

(c) Évolution pour $x_1 \in [0; 4 \times 10^{-4}]$ m

(d) Évolution pour $x_2 \in [0; 4 \times 10^{-3}]$ m

FIGURE II.11 – Réponses forcées du modèle illustratif pour $\mathbf{g} \in [1; 70]$ N

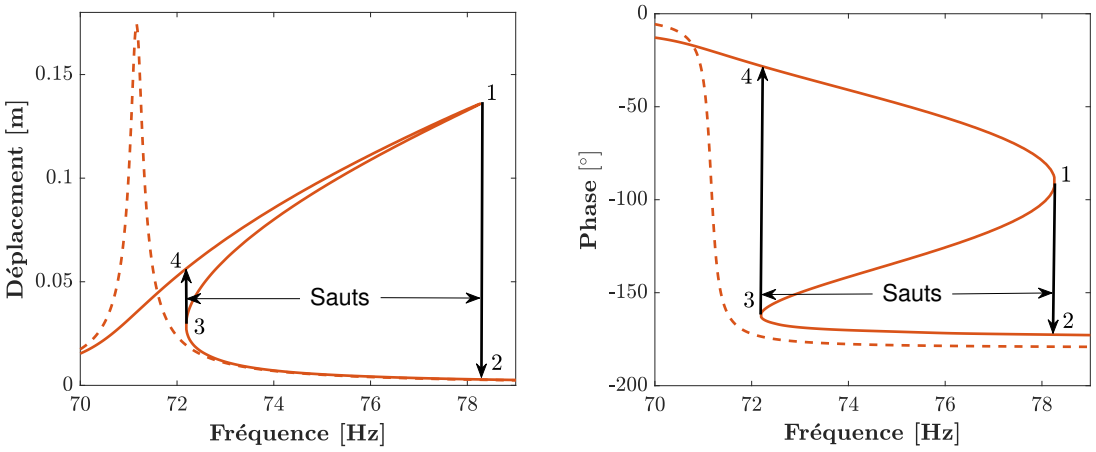
L'évaluation de la fonction non-linéaire $\mathbf{f}_\mathrm{nl}$ est effectuée au moyen d'une procédure d'alternance temps-fréquence. Comme exposé dans la section II.1, des matrices discrètes réalisent la transformation d'un domaine vers l'autre. Il est alors nécessaire de fixer le nombre d'échantillons n_t constituant la période fondamentale du signal temporel formée à partir de l'expression temporelle de la non-linéarité : $n_\mathrm{t} = 128$ échantillons sont utilisés dans le cas de ce modèle illustratif. À l'instar de la sélection du nombre d'harmoniques, une étude d'influence doit être effectuée pour des systèmes comprenant un grand nombre de degrés de liberté afin de choisir un nombre optimal d'échantillons.

Dans le but de suivre l'évolution du système lors d'un phénomène de retournement apporté par la non-linéarité cubique lors de réponses à grandes amplitudes, la réponse forcée est tracée à l'aide d'une continuation de type *arc-length* augmentée d'un prédicteur

tangent.

Les méthodes de condensation exposées en section II.1 ne sont pas appliquées dans cet exemple illustratif car le modèle associé ne comprend pas un nombre suffisant de degrés de liberté pour garantir l'efficacité de ces méthodes.

Les réponses forcées des déplacements des deux degrés de liberté x_1 et x_2 du modèle illustratif sont tracées en figure II.11. Les figures II.11a et II.11b représentent les courbes de réponse en fréquence pour de fortes amplitudes d'excitation. L'évolution de la forme du pic de résonance, dont la fréquence propre progresse vers les hautes fréquences lorsque l'amplitude de déplacement augmente, est caractéristique d'une non-linéarité de type cubique. Ce comportement dynamique est appelé raidissant. Ce raidissement est distinct lorsque les réponses forcées du système non-linéaire sont superposées avec celles du système linéarisée à l'état glissant (cet état étant le point de départ de la non-linéarité cubique pour ce modèle) comme exposé sur les figures II.12a et II.12b. Ces représentations en amplitude et en phase font apparaître des phénomènes de saut typiques des non-linéarités cubiques. La continuation de type *arc-length* permet de franchir les points de retournement, en 1 et 3 sur les figures II.12a et II.12b, et ainsi de reconstituer la réponse forcée entière.



(a) Amplitude (b) Phase

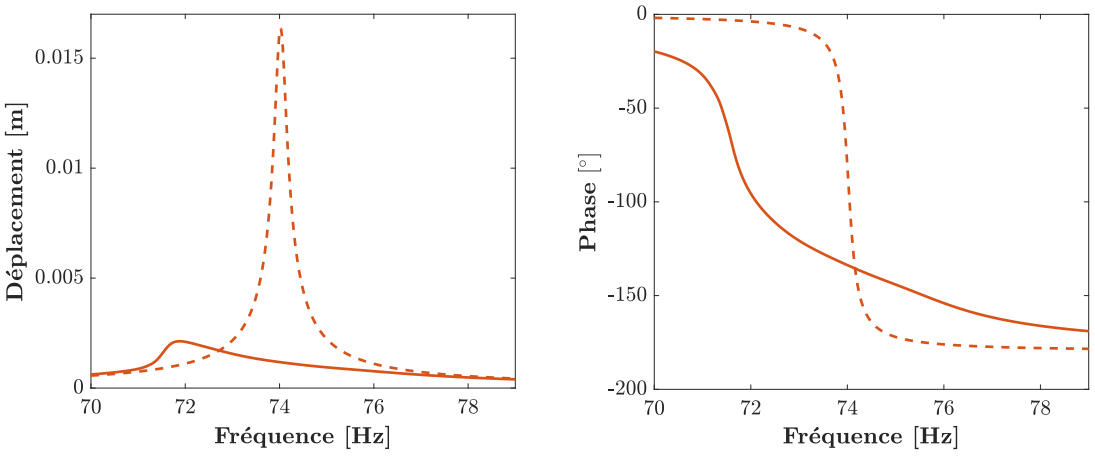
FIGURE II.12 – Comparatif des réponses forcées du système linéarisé (- - -) et du système non-linéaire (—) pour $\mathbf{g} = 70\,\mathrm{N}$

Cependant, pour tracer des réponses forcées lors d'essais dynamiques pilotés en fréquence d'excitation, deux balayages sont nécessaires. Le premier se dirige vers les fréquences croissantes jusqu'au point de retournement 1 où une brusque diminution d'amplitude et de phase survient amenant la solution au point 2. Le second balayage est inversé et suit les fréquences décroissantes jusqu'au point de retournement 3 où un saut d'amplitude et de phase amène le système en 4. Les solutions comprises entre les points 1 et 3 ne sont pas atteignables avec ce type d'essais dynamiques car celles-ci sont instables. Des études de stabilité locale peuvent être menées, à l'aide de la théorie de Floquet [59] ou de la méthode de Hill [87], sur des systèmes présentant ce type de comportement afin de déterminer numériquement les portions de courbe correspondant à des solutions stables ou instables.

Des courbes de réponses en fréquence pour de plus faibles amplitudes d'excitation et de déplacement sont exposées dans les figures II.11c et II.11d. Ces réponses forcées permettent de remarquer une évolution de la forme du pic de la réponse ainsi qu'un dé-

placement des fréquences propres vers les basses fréquences contrairement aux graphiques précédents. Ce comportement est caractéristique d'une non-linéarité en frottement sec et traduit l'effet assouplissant de la non-linéarité vis-à-vis du système. Les figures II.11c et II.11d permettent d'apercevoir les différentes phases du comportement du frottement en fonction de l'activation de la non-linéarité qui dépend de l'amplitude de déplacement :

1. *Une phase pseudo-collée* pendant laquelle le degré de liberté n° 1 ne se déplace que très peu par rapport au bâti, le frotteur étant placé entre ceux-ci. Il est important de noter qu'avec une loi de frottement de Coulomb non-régularisée, le degré de liberté n° 1 ne se déplacerait pas du tout mais, ici, la loi régulière utilisée autorise un déplacement même si les efforts tangentiels du contact sont inférieurs au seuil de glissement μN. Cette phase se caractérise par des pics de résonance situés à la même fréquence et des augmentations d'amplitude proportionnelles à l'excitation. Ce comportement est apparent sur la figure II.11c. La réponse forcée de cet état collé (visible en figures II.13a et II.13b) est considérée comme linéaire, les paramètres modaux sont indépendants de l'amplitude de vibration.
2. *Une phase glissante avec frottement* où la forme de la réponse forcée évolue fortement. La fréquence propre du système varie entre la fréquence propre de l'état collé et la fréquence propre de l'état totalement glissant en fonction de l'amplitude de déplacement. Il est aussi possible de constater une variation de l'amortissement du mode traduit par l'aplanissement des pics de réponse très marqué sur les figures II.13a et II.13b qui superposent les réponses forcées du système quasi-linéaire de la phase collée avec la réponse du système non-linéaire pour une même amplitude d'excitation.
3. *Une phase glissante* au cours de laquelle le frotteur a peu d'influence sur le comportement de la structure. Les caractéristiques modales n'évoluent plus en fonction de l'amplitude d'excitation, cette nouvelle phase peut alors être considérée comme une seconde phase quasi-linéaire. Elle n'est cependant pas tout à fait atteinte sur les figures II.11c et II.11d.



(a) Amplitude (b) Phase

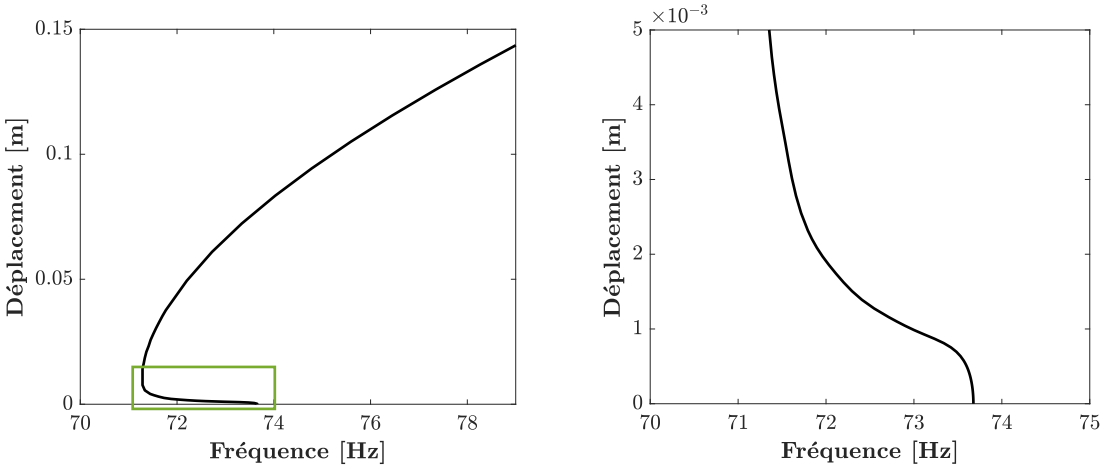
FIGURE II.13 – Comparatif des réponses forcées du système linéarisé (- - -) et du système non-linéaire (—) pour $\mathbf{g} = 8\,\mathrm{N}$

L'effet sur la réponse forcée des non-linéarités cubiques et en frottement sec de ce modèle illustratif apparaissent distinctement en fonction de l'amplitude. La non-linéarité en frottement sec est activée pour une amplitude de déplacement d'environ $5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$

en dessous duquel la liaison demeure à l'état collé. La non-linéarité polynomiale est alors négligeable et le système est proche d'un état linéaire. La non-linéarité cubique devient prépondérante à la suite de l'état glissant du système, pour une amplitude de vibration de 2×10^{-2} m.

3.3 Illustration des modes complexes non-linéaires

L'évolution fréquence du mode complexe non-linéaire tracée sur les figures II.14a et II.14b est évalué à partir de la technique des modes complexes non-linéaires présentée en section II.2.



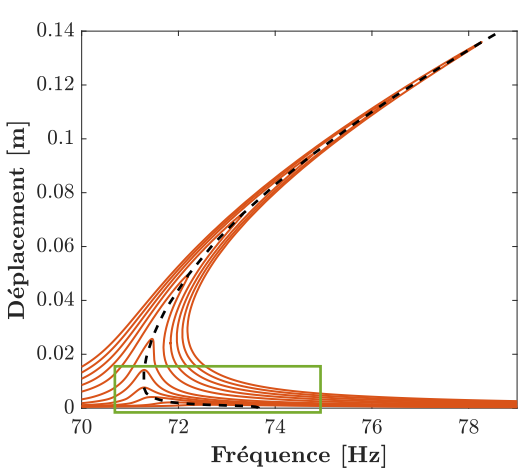
(a) Évolution pour $x_2 \in [0; 0.14]$ m (b) Évolution pour $x_2 \in [0; 4 \times 10^{-3}]$ m

FIGURE II.14 – Évolution de la fréquence propre du mode complexe non-linéaire du modèle illustratif

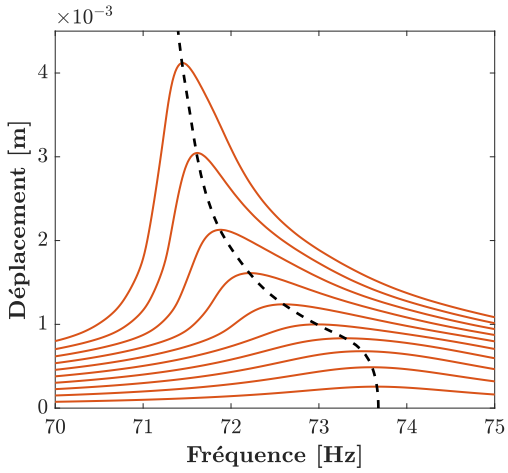
Les paramètres utilisés dans le calcul de ce mode complexe non-linéaire, à savoir le nombre d'harmoniques retenus dans le calcul de la solution ainsi le nombre d'échantillons contenus dans la période fondamentale de la procédure AFT sont identiques à ceux employés dans le calcul des réponses forcées précédentes, à savoir $n_{\mathrm{h}} = 20$ et $n_{\mathrm{t}} = 128$. La continuation de la solution du système d'équations autonome est aussi assurée à l'aide d'une méthode de continuation de type *arc-length* augmentée d'une prédiction tangente. Les motifs mis en avant dans le calcul des réponses forcées conduisent à ne pas employer les méthodes de condensation présentées en section II.2.

Les tracés de l'amplitude du mode non-linéaire en fonction de la fréquence de résonance de celui-ci sur les figures II.14a et II.14b confirment les observations énoncées en sous-section II.3.2. Les figures II.15a et II.15b permettent de remarquer que le tracé de l'évolution de la fréquence propre du mode non-linéaire relie les maximums des réponses forcées pour plusieurs amplitudes d'excitation comme pour un modèle d'amortissement hystérétique [63]. Il est intéressant d'observer que l'allure des réponses forcées et du mode non-linéraire obtenus est semblable à celle obtenue par Gibert *et al.* [65] dans leur papier rapportant l'analyse modale numérique et expérimentale non-linéaire qu'ils effectuèrent sur un train d'atterrissage d'aéronef.

La figure II.16 représente l'évolution de la fréquence propre et de l'amortissement modal ζ en fonction de l'amplitude de déplacement d'un degré de liberté pour de faibles amplitudes d'excitation. Le tracé de l'amortissement modal avec une prépondérance de la non-linéarité en frottement sec permet de préciser les remarques exposées dans la sous-



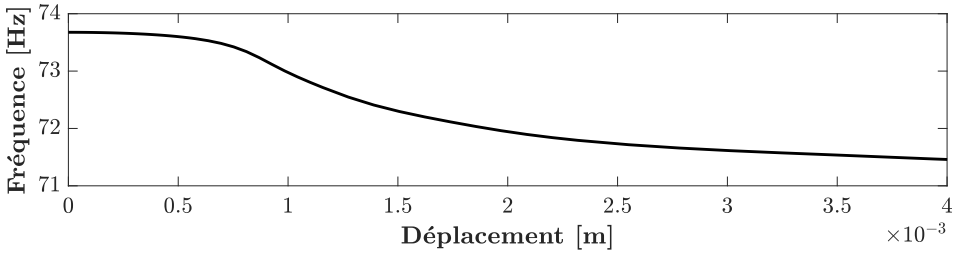
(a) Évolution pour $x_2 \in [0; 0.14]$ m



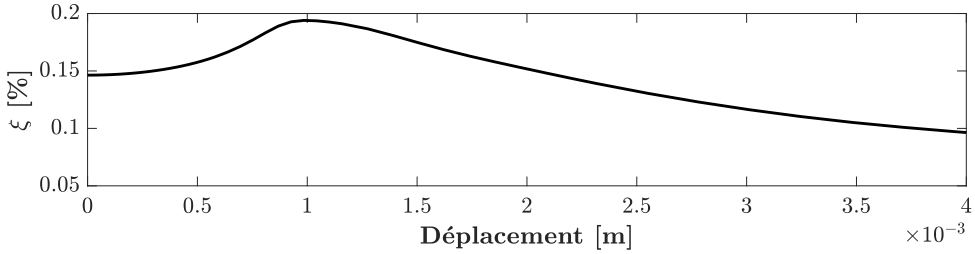
(b) Évolution pour $x_2 \in [0; 4 \times 10^{-3}]$ m

FIGURE II.15 – Superposition de l'évolution de la fréquence propre du mode non-linéaire (- -) et des réponses forcées (—) du modèle illustratif pour $\mathbf{g} \in [1; 70]$ N

section précédente, à savoir que l'évolution de l'amortissement passe par un maximum pour une amplitude de déplacement du degré de liberté n° 2 de 1×10^{-3} m. Ce phénomène d'optimum est intéressant puisqu'il permet ainsi de diminuer les vibrations d'une aube dès la conception de celle-ci pour peu que la non-linéarité soit correctement prise en compte.



(a) Évolution de la fréquence propre pour $x_2 \in [0; 4 \times 10^{-3}]$ m



(b) Évolution du taux d'amortissement pour $x_2 \in [0; 4 \times 10^{-3}]$ m

FIGURE II.16 – Évolution des paramètres modaux en fonction de l'amplitude du second degré de liberté

En plus de mettre en lumière certains phénomènes non-linéaires qu'il est possible de rencontrer sur une soufflante de turbomachine, cet exemple illustratif permet de mettre en place des méthodes de résolution pour des systèmes d'équations autonomes et non-autonomes qui sont réutilisées sur des modèles industriels dans la suite de ce mémoire. De plus, ce modèle à deux degrés de liberté, dont les paramètres structuraux et non-linéaires sont recalés par rapport à un modèle industriel de secteur de soufflante en composite,

produit des réponses dynamiques représentatives d'un secteur industriel. Cet exemple a aussi permis d'estimer l'ordre de grandeur des déplacements permettant d'obtenir des effets en grands déplacements observables. Pour ceci, le déplacement nécessaire en tête d'aube de 2×10^{-2} m, qui ne sera pas atteint dans les essais du banc PHARE#1 exploités dans cette thèse, indique que les non-linéarités attendues seraient plutôt dominées par le frottement. La suite de ce mémoire et notamment les méthodes de réduction se concentrent donc sur des non-linéarités localisées de type frottement sec.

4 Bilan

Ce chapitre a permis d'explorer plusieurs méthodes de résolution de l'équation différentielle du second ordre régissant la dynamique non-linéaire d'un système non-autonome aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. L'approche fréquentielle, grâce à la méthode de l'équilibrage harmonique, s'est avérée très efficace et polyvalente pour résoudre tout type de système quelque soit l'intensité de la non-linéarité pour peu que le solution soit périodique. L'exemple illustratif proposé comportait peu de degrés de liberté mais a permis de mettre en évidence les phénomènes non-linéaires pouvant être observés sur des aubes de turboréacteur.

L'efficacité des méthodes proposées dans ce chapitre est notable pour des systèmes de taille réduite. Cependant, pour des modèles éléments finis destinés aux bureaux d'études industriels et comportant des centaines de milliers de degrés de liberté, il est nécessaire de réduire la taille du modèle afin de conserver des temps de calcul raisonnables. Pour cela, des techniques de sous-structurations classiques appartenant à la famille des méthodes de Galerkine existent dans la littérature telles que la méthode de Craig-Bampton [10]. Des techniques de réduction plus élaborées [99, 117] permettent de réduire la taille du système étudié à partir d'un mode complexe non-linéaire [122], dont la procédure d'évaluation est détaillée dans ce chapitre, pour systèmes soumis à des non-linéarités dissipatives de type frottement sec par exemple. De plus, afin d'aborder le désaccordage d'une roue aubagée dans le cadre de la dynamique non-linéaire, Joannin *et al.* [101, 102] ont développé une technique de réduction associant sous-structuration et modes complexes non-linéaires. Ces différentes méthodes de réduction sont abordées dans le chapitre suivant.

Chapitre III

Méthodes de réduction par synthèse modale

Les structures rencontrées dans l'industrie telles que les roues aubagées ou les soufflantes de turboréacteur sont, en pratique, discrétisées au moyen de la méthode des éléments finis aboutissant à des problèmes de taille importante qui comportent quelques centaines de milliers voire plusieurs millions de degrés de liberté. De plus, ces derniers peuvent renfermer des non-linéarités, dont l'étude fait partie intégrante de ce travail de thèse, qui nécessitent une résolution itérative du système d'équations. Dans le but d'étudier la dynamique non-linéaire de ces structures, il est impératif de réduire la taille du modèle numérique afin de résoudre le système non-linéaire dans des délais raisonnables.

Ce chapitre traite des différentes techniques de réduction employées dans ce travail de thèse : des méthodes classiques de synthèse modale linéaire telle la méthode de Craig-Bampton, aux méthodes plus avancées comme la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée qui exploite le calcul des modes complexes non-linéaires pour reconstruire la réponse forcée. Une technique associant synthèse modale non-linéaire et sous-structuration est finalement exposée pour ce qui constitue le cœur de la réduction des roues aubagées de ce travail : la CNCMS pour *Component Nonlinear Complex Mode Synthesis*.

Sommaire

1 Techniques de synthèse modale linéaire 76
1.1 Réduction de modèle par projection de Galerkine 76
1.2 Méthodes classiques de synthèse modale 78
1.3 Méthodes de réduction des frontières 83
2 Synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée 84
2.1 Aspects théoriques 85
2.2 Compléments et précisions 88
2.3 Performances 89
2.4 Limitations 91
***3 Component Nonlinear Complex Mode Synthesis* 92**
3.1 Aspects théoriques 93
3.2 Compléments et précisions 97
3.3 Performances 98
3.4 Limitations 102
4 Bilan 103

1 Techniques de synthèse modale linéaire

Afin de résoudre des systèmes d'équations non-linéaires issus de structures présentant des géométries complexes telles celles existantes dans le domaine industriel, à partir des maillages éléments finis employés en bureau d'étude, il est nécessaire de réduire le nombre de degrés de liberté du modèle numérique. Dans cette optique, des techniques de synthèse modale, tirant parti de la sous-structuration du problème, sont employées. Ces méthodes découpent la structure principale en plusieurs entités délimitées par leurs frontières respectives, appelées sous-structures, afin de réduire indépendamment chacune d'entre elles. Chacune de ces sous-structures réduites forme ce qui est nommé un super-élément. Au final, ces super-éléments sont réassemblés pour aboutir au problème réduit final. La résolution itérative du problème, qui est l'étape centrale du calcul, est alors exécutée sur un modèle fortement réduit par rapport au modèle numérique original. Ces techniques sont connues sous le nom de méthodes de synthèse modale ou bien de sous-structuration (CMS pour *Component Mode Synthesis* en anglais).

De nombreuses méthodes de synthèse modale ont été développées et certaines implémentées dans les codes commerciaux éléments finis. Cette section est destinée à introduire ces différentes méthodes en débutant par une présentation de la méthode de Galerkine dont sont dérivées les techniques classiques de synthèse modale et notamment la méthode de réduction de Craig-Bampton qui sera exposée dans la seconde sous-section. Pour conclure, des techniques de réduction des frontières seront illustrées. Ces dernières permettent de compenser les limitations de la sous-structuration en réduisant les degrés de liberté de frontière entre les sous-structures.

1.1 Réduction de modèle par projection de Galerkine

Tout d'abord, l'équation linéaire discrétisée du mouvement contenant les termes résultant de la rotation du système par rapport à un référentiel galiléen, dit repère fixe, est rappelée

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(t) \tag{III.1}$$

en conservant les notations matricielles identiques à celles arrêtées dans le chapitre I. Les matrices $\mathbf{G}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{T}$ sont volontairement omises dans les équations de ce chapitre dans l'intention d'alléger celles-ci bien qu'il soit parfaitement possible de les conserver, notamment dans l'équation réduite du mouvement et dans l'équation réduite régissant un système non-autonome.

Les techniques de réduction de modèle par synthèse modale, exposées dans cette section, appartiennent à la famille des méthodes de réduction par résidus pondérés, et plus particulièrement à la famille des méthodes dites de Galerkine ou d'approximation. En plus d'être intensément exploitée dans la discrétisation spatiale des problèmes numériques ou par approximation dans le domaine temporel comme c'est le cas de la méthode de l'équilibrage harmonique du chapitre II, cette famille est l'une des plus employées en termes de réduction de modèle numérique en dynamique des structures. La réduction de modèle à l'aide de la méthode de Galerkine est qualifiée de technique de réduction de modèle par projection. Cette dernière se décompose en deux étapes distinctes.

La première étape est l'étape dite de réduction. Celle-ci consiste à chercher une solution approchée $\tilde{\mathbf{x}}$ de la solution exacte $\mathbf{x}$ de l'équation linéaire du mouvement (III.1) dans un sous-espace $\mathcal{V}$ contenu dans l'espace initial $\mathbb{R}^n$. Ce sous-espace $\mathcal{V}$ est appelé espace de réduction.

$$\mathbf{x}(t) \approx \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}\mathbf{q}(t) \tag{III.2}$$

où la matrice $\mathbf{V}$ est une base du sous-espace $\mathcal{V}$ et $\mathbf{q}$ est le vecteur contenant les amplitudes modales de la solution approchée $\tilde{\mathbf{x}}$ écrite dans la base $\mathbf{V}$.

Les colonnes de la matrice $\mathbf{V}$, de taille $n \times r$ avec n et r respectivement le nombre de degrés de liberté du problème initial et du problème réduit, sont les vecteurs de la base de réduction. Cette dernière permet de réduire la dimension du problème de n à r degrés de liberté ($1 \leq r \leq n$).

En substituant l'approximation (III.2) dans l'équation linéaire du mouvement (III.1), il vient

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{V}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{q}(t) - \mathbf{g}(t) \tag{III.3}$$

avec $\mathbf{r}$, le résidu de l'opération d'approximation compte tenu que la solution cherchée n'est pas exacte.

La seconde étape est l'étape dite d'orthogonalisation qui consiste à rendre le résidu $\mathbf{r}$ orthogonal à un sous-espace $\mathcal{W}$, engendré par la matrice $\mathbf{W}$ contenant une famille libre d'éléments, selon le produit scalaire euclidien ou hermitien dans ce même espace. La condition d'orthogonalité s'écrit alors

$$\langle \mathbf{r}(t) | \mathbf{W} \rangle = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}(t) = \mathbf{0} \tag{III.4}$$

Le sous-espace $\mathcal{W}$ est nommé espace de projection tandis que la matrice $\mathbf{W}$, de taille $n \times r$, constitue une base de ce sous-espace appelée base de projection.

En prémultipliant l'équation (III.3) par la matrice de projection $\mathbf{W}$ et en tenant compte de la condition d'orthogonalité (III.4), il est possible d'écrire le système carré d'équations (III.5) constituant le système réduit du problème initial, celui-ci régissant l'évolution temporelle des amplitudes modales $\mathbf{q}$.

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{V}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{q}(t) = \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}(t) \tag{III.5}$$

En résumé, la méthode de Galerkine aboutit à la réduction du problème initial au moyen d'une projection sur le sous-espace $\mathcal{V}$ "parallèlement" à $\mathcal{W}^{\perp}$. Les méthodes présentées dans le chapitre II peuvent être employées pour résoudre l'équation réduite (III.5) selon les variables $\mathbf{q}$, dans le but d'obtenir l'approximation $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}\mathbf{q}(t)$ du problème initial.

De manière classique, la méthode de Galerkine est définie en choisissant les sous-espaces $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ identiques. Lorsque $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ diffèrent, il s'agit de la méthode de Petrov-Galerkine.

Les deux étapes d'une méthode de type Galerkine induisent des erreurs liées à l'approximation et à la projection réalisées.

Dans le cadre d'une méthode de Galerkine classique, l'erreur de réduction ε peut se décomposer en une erreur $\varepsilon_{\mathbf{V}^{\perp}}$ orthogonale à $\mathbf{V}$ et une erreur $\varepsilon_{\mathbf{V}}$ parallèle à cette même base [56]. Les erreurs induites par cette technique sont illustrées en figure III.1 et dans l'équation (III.6).

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t) && \text{(III.6a)}\\
&= \mathbf{x}(t) - \mathbf{V}\mathbf{q}(t) && \text{(III.6b)}\\
&= (\mathbf{I}_n - \mathbf{\Pi}_{\mathbf{V},\mathbf{V}})\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{V}\left(\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t) - \mathbf{q}(t)\right) && \text{(III.6c)}\\
&= \varepsilon_{\mathbf{V}^\perp}(t) + \varepsilon_{\mathbf{V}}(t) && \text{(III.6d)}
\end{aligned}$$

avec $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{V},\mathbf{V}} = \mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$, une matrice représentative du projecteur [1] orthogonal à $\mathcal{V}$ et $\mathbf{I}_n$, la matrice identité de taille n.

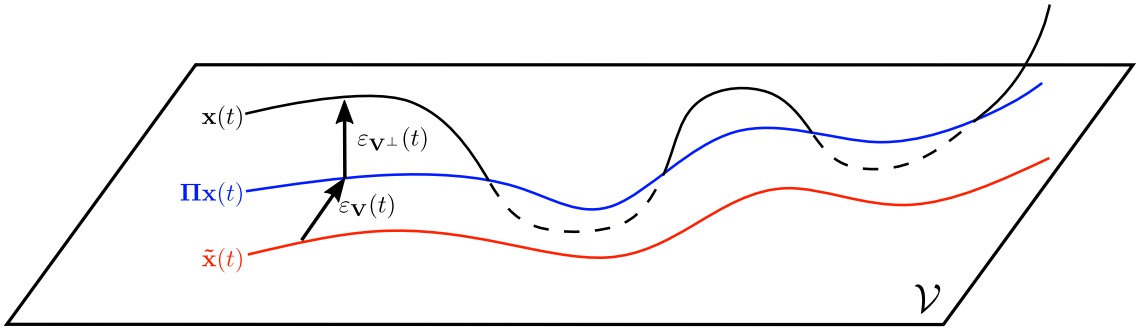


FIGURE III.1 – Erreurs induites par la méthode de Galerkine (adaptée de [56])

La qualité de l'approximation de la technique de synthèse modale considérée est directement liée à la base de réduction employée. La section suivante expose différentes méthodes classiques de synthèse modale linéaire présentant des bases de réduction adaptées à différents cas en dynamique des structures.

1.2 Méthodes classiques de synthèse modale

Comme énoncé en introduction de ce chapitre, de nombreuses méthodes de synthèse modale ont été développées depuis les années soixante. Parmi les techniques appartenant à la famille des méthodes de Galerkine, deux grands types peuvent être distingués : les méthodes dites à interfaces fixes et les méthodes dites à interfaces libres.

Les travaux emblématiques portant sur les méthodes de réduction à interfaces fixes ont été accomplis par Craig et Bampton [10] en s'inspirant des travaux de Hurty [91, 92]. La méthode consiste à réduire chacune des sous-structures sur la base de ses modes propres calculés pour des interfaces fixes. La base de réduction est complétée par les déformées statiques définies à partir du déplacement unitaire des degrés de liberté d'interface. Benfield et Hruda [15] adaptèrent cette méthode à interfaces fixes en employant le principe de substitution modale qui autorise un potentiel de réduction théoriquement plus élevé que la méthode de Craig et Bampton puisque le modèle réduit ne présente alors plus de degrés de liberté d'interface mais des amplitudes modales.

Les premiers travaux traitant des méthodes de synthèse modale à interfaces libres ont été initiés par Goldman [68] et Hou [90]. MacNeal a repris ces travaux pour établir ce qui constitue toujours la méthode de réduction à interfaces libres de référence. Ces méthodes de réduction sont fondées sur une base de modes propres libres augmentée de modes d'attache couplant les sous-structures entre elles. Il est aussi possible de citer les travaux de Craig et Chang [36] ainsi que ceux de Martinez *et al.* [140] qui diffèrent principalement au niveau de la méthode de réassemblage des sous-structures réduites.

Plus de détails sur ces différentes méthodes peuvent être obtenus dans les thèses de

1. Un projecteur π est une application linéaire vérifiant $\pi^2 = \pi$

Batailly [11] et Philippe [176]. De plus, un état de l'art récent sur la réduction de modèle numérique par synthèse modale peut être obtenu dans le papier de Klerk *et al.* [113].

Le point commun des méthodes dites à interfaces fixes et celles dites à interfaces libres réside dans le partitionnement des degrés de liberté de chaque sous-structure :

— Les degrés de liberté maîtres, notés $\bullet_{\mathrm{m}}$ regroupent les degrés de liberté d'interface, de frontière et potentiellement d'observation.
Les degrés de liberté de frontière et d'interface sont distingués dans ce travail de thèse. En effet, les degrés de liberté d'interface se situent au niveau des interfaces entre les portées de l'aube et du disque. Ceux-ci sont notés $\bullet_{\mathrm{n}}$ dans la suite de ce mémoire et interviendront dans l'évaluation des non-linéarités. Les degrés de liberté de frontière, qui ne sont pas exploités dans toutes les méthodes de réduction exploitées dans ces travaux de thèse, sont présents au niveau de la jonction entre les différents secteurs du disque et sont notés $\bullet_{\mathrm{b}}$. Ces deux types de degrés de liberté peuvent cohabiter dans la partition des degrés de liberté maîtres et sont illustrés sur la figure III.2.
Les degrés de liberté d'observation, appelés $\bullet_{\mathrm{o}}$ dans la suite de ce mémoire, autorisent le suivi de l'évolution du système étudié sans nécessiter la phase de reconstruction sur les degrés de liberté dits esclaves. Ceux-ci peuvent aussi servir de degrés de liberté de contrôle dans le cas de la résolution d'un système autonome à l'aide de la méthode des modes complexes non-linéaires par exemple.
Dans l'optique de simplifier les équations de cette sous-section, les degrés de liberté maîtres seront considérés uniquement formés par les degrés de liberté d'interface entre les portées de l'aube et du disque.

— Les degrés de liberté esclaves, notés $\bullet_{\mathrm{s}}$ renferment les autres degrés de liberté ne comportant pas de degrés de liberté non-linéaires ou n'intervenant pas le réassemblage de la structure et qui sont les degrés de liberté internes de chaque sous-structure notés $\bullet_{\mathrm{i}}$ dans la suite de ce mémoire et illustrés sur la figure III.2.

Le vecteur déplacement $\mathbf{x}^{(j)}$ peut alors se réécrire ainsi

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\mathrm{s}}^{(j)}(t) \\ \mathbf{x}_{\mathrm{m}}^{(j)}(t) \end{pmatrix} \tag{III.7}$$

tout comme les matrices de masse et de raideur

$$\mathbf{M}^{(j)} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\mathrm{ss}}^{(j)} & \mathbf{M}_{\mathrm{sm}}^{(j)} \\ \mathbf{M}_{\mathrm{ms}}^{(j)} & \mathbf{M}_{\mathrm{mm}}^{(j)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}^{(j)} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\mathrm{ss}}^{(j)} & \mathbf{K}_{\mathrm{sm}}^{(j)} \\ \mathbf{K}_{\mathrm{ms}}^{(j)} & \mathbf{K}_{\mathrm{mm}}^{(j)} \end{pmatrix} \tag{III.8}$$

où j fait référence à la sous-structure concernée.

Cette décomposition du domaine en sous-structures est illustrée sur le schéma III.2 représentant une roue aubagée et son secteur fondamental.

La suite de cette section expose la méthode emblématique de synthèse modale à interfaces fixes, à savoir la méthode de Craig-Bampton. Par ailleurs, celle-ci constitue l'une des étapes de réduction du modèle numérique de l'aube et de la soufflante composite des chapitres V et VI.

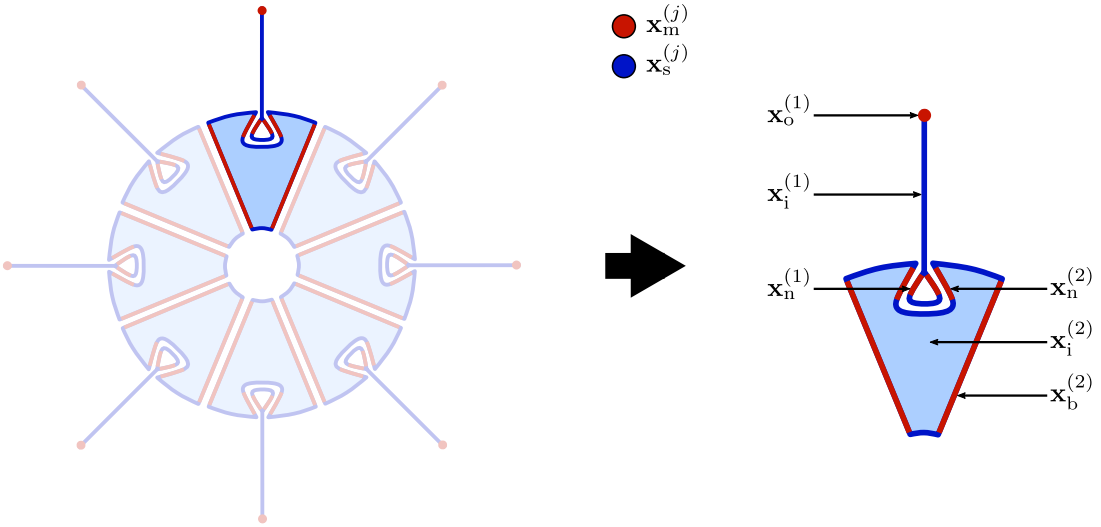


FIGURE III.2 – Sous-structuration d'une roue aubagée et son secteur fondamental

Méthode de Craig-Bampton. La base de réduction de la méthode de Craig-Bampton nécessite le calcul de deux types de mode pour chacune des sous-structures composant le système.

Les premiers modes introduits dans la base de réduction sont les modes propres linéaires calculés pour des interfaces fixes, obtenus en encastrant les degrés de liberté d'interface. Ceux-ci vérifient la relation

$$\left(\mathbf{K}_{\mathrm{ss}}^{(j)} - {\boldsymbol{\Lambda}^{(j)}}^2 \mathbf{M}_{\mathrm{ss}}^{(j)}\right) \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(j)} = \mathbf{0} \tag{III.9}$$

avec $\boldsymbol{\Lambda}^{(j)} = diag\left({\Omega^{(j)}}^2\right)$, la matrice diagonale regroupant les pulsations propres de la sous-structure j et $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(j)}$, la matrice rassemblant la totalité des modes du problème aux valeurs propres (III.9) de la sous-structure j.

La base des modes propres linéaires contenus dans la matrice $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{(j)}$ est tronqué pour former la matrice $\boldsymbol{\Phi}^{(j)}$ qui constitue une partie de la base de réduction. Les modes propres retenus sont généralement sélectionnés en utilisant un critère fréquentiel, exposé dans le chapitre V.

Les autres modes contenus dans la base de réduction sont les modes statiques de liaison qui sont obtenus en imposant successivement un déplacement unitaire sur chaque degré de liberté d'interface et en encastrant les degrés de liberté d'interface restant. Le calcul de ces modes revient à résoudre le problème statique (III.10) négligeant les effets d'inertie de la sous-structure.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\mathrm{ss}}^{(j)} & \mathbf{K}_{\mathrm{sm}}^{(j)} \\ \mathbf{K}_{\mathrm{ms}}^{(j)} & \mathbf{K}_{\mathrm{mm}}^{(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{(j)} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_{\mathrm{m}}^{(j)}(t) \end{pmatrix} \tag{III.10}$$

où $\mathbf{g}_m^{(j)}$ sera le vecteur des efforts de réactions sur la frontière fixe et représentera les efforts appliqués sur la sous-structure j par la sous-structure connexe via l'interface commune dans le système assemblé par la suite.

En isolant les modes statiques de liaison $\mathbf{\Psi}^{(j)}$ de la sous-structure j dans l'équation précédente, il advient

$$\mathbf{\Psi}^{(j)} = -\mathbf{K}_{\mathrm{ss}}^{(j)}\mathbf{K}_{\mathrm{sm}}^{(j)} \tag{III.11}$$

Par ailleurs, les modes statiques de liaison et la méthode de calcul associée sont le cœur de la méthode de condensation statique de Guyan [2].

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la matrice représentative de la base du sous-espace de réduction pour chaque sous-structure est alors donnée par

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\mathrm{s}}^{(j)}(t) \\ \mathbf{x}_{\mathrm{m}}^{(j)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}^{(j)} & \mathbf{\Psi}^{(j)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}^{(j)}(t) \\ \mathbf{x}_{\mathrm{m}}^{(j)}(t) \end{pmatrix} \tag{III.12}$$

Une fois assemblée, la matrice de réduction $\mathbf{V}$ de la structure initiale est explicitée par la relation

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\mathrm{s}}^{(1)}(t) \\ \mathbf{x}_{\mathrm{s}}^{(2)}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{\mathrm{s}}^{(j)}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{\mathrm{s}}^{(n_{\mathrm{ss}})}(t) \\ \mathbf{x}_{\mathrm{m}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}^{(1)} & & & & & & \mathbf{\Psi}^{(1)} \\ & \mathbf{\Phi}^{(2)} & & & & & \mathbf{\Psi}^{(2)} \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & \mathbf{\Phi}^{(j)} & & & \mathbf{\Psi}^{(j)} \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \mathbf{\Phi}^{(n_{\mathrm{ss}})} & \mathbf{\Psi}^{(n_{\mathrm{ss}})} \\ & & & & & & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}^{(1)}(t) \\ \mathbf{q}^{(2)}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{q}^{(j)}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{q}^{(n_{\mathrm{ss}})}(t) \\ \mathbf{x}_{\mathrm{m}}(t) \end{pmatrix} \tag{III.13}$$

avec n_{ss} le nombre de sous-structures contenues dans le système.

Grâce à cette matrice de réduction $\mathbf{V}$, il est possible de réduire les matrices de masse $\mathbf{M}$ et de raideur $\mathbf{K}$ ainsi

2. L'hypothèse de base de la méthode de Guyan [79] est de négliger les efforts d'inertie de la structure. $\mathbf{\Psi}$ est alors la base de réduction de cette méthode. Cependant, comme son nom l'indique, cette méthode est très restrictive et est utilisée le plus souvent pour des problèmes statiques

$$\mathbf{M}_{\text{red}} = \mathbf{V}^{\text{T}}\mathbf{M}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\Phi}^{(1)} & & & & & & \mathbf{M}_{\Phi\Psi}^{(1)} \\ & \mathbf{M}_{\Phi}^{(2)} & & & & & \mathbf{M}_{\Phi\Psi}^{(2)} \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & \mathbf{M}_{\Phi}^{(j)} & & & \mathbf{M}_{\Phi\Psi}^{(j)} \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \mathbf{M}_{\Phi}^{(n_{\text{ss}})} & \mathbf{M}_{\Phi\Psi}^{(n_{\text{ss}})} \\ \mathbf{M}_{\Psi\Phi}^{(1)} & \mathbf{M}_{\Psi\Phi}^{(2)} & \cdots & \mathbf{M}_{\Psi\Phi}^{(j)} & \cdots & \mathbf{M}_{\Psi\Phi}^{(n_{\text{ss}})} & \mathbf{M}_{\Psi} \end{pmatrix} \tag{III.14}$$

$$\mathbf{K}_{\text{red}} = \mathbf{V}^{\text{T}}\mathbf{K}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\Phi}^{(1)} & & & & & & \\ & \mathbf{K}_{\Phi}^{(2)} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \mathbf{K}_{\Phi}^{(j)} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \mathbf{K}_{\Phi}^{(n_{ss})} & \\ & & & & & & \mathbf{K}_{\Psi} \end{pmatrix} \tag{III.15}$$

dans lesquelles les indices $\bullet_{\Phi}$, $\bullet_{\Psi}$ et $\bullet_{\Phi\Psi}$ correspondent respectivement aux blocs réduits à l'aide de la base des modes propres de la méthode de Craig-Bampton, au bloc réduit à l'aide de la base des modes statiques de liaison et aux termes extra-diagonaux.

La formalisation de l'équation (III.15) permet de remarquer que la matrice de raideur réduite $\mathbf{K}_{\text{red}}$ est une matrice diagonale par blocs. Cette propriété est due à l'expression des modes statiques de liaison dans l'équation (III.11).

La taille de la base de réduction dépend directement de la troncature de la base des modes propres de chaque sous-structure calculés à interfaces fixes et du nombre de degrés de liberté contenus dans la partition maître. La méthode de Craig-Bampton est la plus couramment utilisée pour sa convergence rapide, sa robustesse et sa stabilité vis à vis des troncatures modales. En effet, une réduction importante de la base des modes propres permet d'obtenir d'excellents résultats pour les premiers modes du système initial. C'est pourquoi la méthode de Craig-Bampton est exploitée dans les travaux présentés dans ce mémoire, aux dépens d'une autre méthode de synthèse modale linéaire comme celle de MacNeal par exemple.

Il est important de remarquer que les méthodes de synthèse modale linéaire peuvent aussi être employées afin de réduire un modèle numérique non seulement en vue de l'évaluation d'une réponse forcée mais aussi en vue du calcul d'un mode non-linéaire et particulièrement dans le cas d'un mode complexe non-linéaire, présenté dans le chapitre II.

Les méthodes classiques de synthèse modale, à l'instar de la méthode de Craig-Bampton, possèdent néanmoins l'inconvénient majeur de présenter une forte dépendance au nombre de degrés de liberté renfermés dans la partition maître. En effet, les systèmes industriels tels que les roues aubagées peuvent contenir plusieurs centaines de milliers de degrés de liberté dans ces zones rendant alors les méthodes de réduction classiques peu efficaces. Il est toutefois possible de compléter ces techniques de réduction avec des méthodes de réduction des frontières permettant de réduire le nombre de degrés de liberté aux jonctions entre les sous-structures et donc dans la partition maître. Ces méthodes sont exhibées dans la sous-section suivante.

1.3 Méthodes de réduction des frontières

La section précédente a mis en lumière les bénéfices de la méthode de réduction de Craig-Bampton mais aussi les limites de celle-ci. En effet, les bases de réduction de cette méthode sont fortement tributaires du nombre de degrés de liberté maîtres et en particulier des degrés de liberté contenus dans les frontières des sous-structures. Pour remédier à cet inconvénient majeur dans le cas de structures industrielles, des techniques de réduction de ces degrés de liberté de frontière, notés $\bullet_b$, ont été mises au point et proposées dans la littérature. Ces méthodes portent, dans le cas de ce mémoire, sur les degrés de liberté de frontière au niveau de la jonction entre les différents secteurs du disque.

Aussi appelée double synthèse modale ou réduction par modes d'interface, la réduction des degrés de liberté de frontière a fait l'objet de plusieurs travaux et notamment les travaux de Jezequel [97] consistant à introduire des modes de branches pour réduire les degrés de liberté de frontière, travaux repris par Setio [193] puis Brizard [22]. Il est aussi possible de citer les travaux de Craig et Chang [37] ou, plus récemment, Zhang *et al.* [239] ainsi que Tran [219, 220] qui réduisirent avec succès les degrés de liberté contenus dans les frontières des sous-structures.

Dans la suite de ce travail de thèse, une méthode de synthèse modale des modes d'interface est exploité dans le but de réduire les degrés de liberté de frontière du modèle réduit. Celle-ci repose sur une réduction des frontières du système sur la base des modes d'interface évalués grâce au problème aux valeurs propres (III.16).

$$\left(\mathbf{K}_\Psi - \mathbf{\Lambda}_\Psi^2 \mathbf{M}_\Psi\right) \tilde{\mathbf{\Phi}}_\Psi = \mathbf{0} \tag{III.16}$$

Les matrices $\tilde{\mathbf{\Phi}}_\Psi$ et $\mathbf{\Lambda}_\Psi$ regroupent respectivement la totalité des modes d'interface et la totalité des pulsations propres du problème aux valeurs propres (III.16). Les notations des matrices de masse et de raideur réduites par la méthode de Craig-Bampton ((III.14) et (III.15)) apparaissent dans cette équation sous la forme des sous-blocs $\mathbf{M}_\Psi$ et $\mathbf{K}_\Psi$.

Afin de réduire les degrés de liberté de frontière, une étape de sélection des modes d'interface $\tilde{\mathbf{\Phi}}_\Psi$ est nécessaire. Celle-ci est accomplie en conservant uniquement les modes d'interface dont les fréquences sont du même ordre de grandeur que celles des modes propres sauvegardés dans la méthode de réduction de Craig-Bampton [37, 219, 220]. Une fois cette sélection réalisée, les matrices réduites sont projetées sur cette nouvelle base grâce à la matrice de transformation $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{(1)} & & & & & & \\ & \mathbf{I}^{(2)} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \mathbf{I}^{(j)} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \mathbf{I}^{(n_{ss})} & \\ & & & & & & \mathbf{\Phi}_\Psi \end{pmatrix} \tag{III.17}$$

avec $\mathbf{\Phi}_\Psi$, la matrice contenant les modes d'interface du problème (III.16) tronqués puis ordonnés en colonne.

L'utilisation d'une méthode de réduction de Craig et Bampton associée à une méthode de réduction des degrés de liberté de frontière par synthèse modale des modes d'interface apparaît comme une combinaison très efficace de réduction notamment pour des systèmes

de taille industrielle. Cependant dans le cas de systèmes renfermant une non-linéarité à l'interface entre les sous-structures, tel du frottement entre le pied d'aube et l'alvéole du disque, les degrés de liberté non-linéaires d'interface ne peuvent être réduits à l'aide de ces différentes méthodes puisque ceux-ci sont nécessaires à l'évaluation de la non-linéarité.

Dans le but de réduire ces degrés de liberté non-linéaires d'interface, il est possible d'employer des techniques de réduction plus évoluées, bénéficiant de l'évaluation des modes complexes non-linéaires (exposées dans le chapitre II), pour réduire la totalité du problème non-linéaire. Cette technique est nommée synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée et sera abordée dans la section suivante.

2 Synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée

Cette section aborde la question de la synthèse modale de la réponse forcée qui exploite les notions de superposition modale et d'orthogonalité dans sa variante linéaire. Les techniques classiques de superposition modale exploitent les modes propres [3] de chaque sous-système et en particulier leur propriété d'orthogonalité par rapport aux matrices structurelles dans le but de découpler les équations du mouvement et ainsi en faciliter la résolution. Cette propriété d'orthogonalité, intrinsèque aux modes propres et aux modes complexes des systèmes considérés comme linéaires, n'est en général pas vérifiée (sauf pour quelques cas comportant des symétries particulières) par les modes non-linéaires et les modes complexes non-linéaires. La faisabilité d'une méthode de superposition modale à partir de modes non-linéaires peut alors sembler compromise. Toutefois, plusieurs méthodes s'inspirant des techniques classiques de superposition modale et ayant recourt à une base de modes non-linéaires ont été développées et ont abouti à des résultats attrayants en termes de précision de la solution et de temps de calcul. De surcroît, ces techniques autorisent la reconstruction de différentes réponses forcées présentant un comportement non-linéaire à partir des modes non-linéaires évalués ce qui est l'un des objectifs principaux de cette section.

Le principe de superposition modale peut être appliqué avec une bonne approximation dans le cadre non-linéaire lorsque les modes sont bien séparés fréquentiellement ou lorsque le système possède encore des propriétés d'orthogonalité malgré les non-linéarités. Dans ce cas, au voisinage des résonances, la réponse forcée est dominée par la contribution du "mode non-linéaire résonnant" (*single non-linear mode* dans le texte) de Szemplinska [206] introduisant le principe de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée. Entre les résonances, compte tenu des faibles amplitudes, les effets non-linéaires sont négligeables et le système se comporte alors de la même façon que son système linéaire sous-jacent.

Dans le cadre de systèmes dissipatifs, Setio [193] a formulé une technique permettant de généraliser les modes normaux (du système conservatifs) exploités par Szemplinska [206] au moyen de modes complexes non-linéaires. Plus tard, Setio *et al.* [194] puis Gibert [62] ont utilisé de façon inverse cette approche dans le cadre de l'identification modale non-linéaire expérimentale. Récemment, Laxalde *et al.* [125] ont employé une technique de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée augmentée à l'aide de modes complexes non-linéaires dans le but de synthétiser la réponse forcée d'un secteur de roue aubagée comportant une non-linéarité dissipative. Krack *et al.* [116, 117] réutilisèrent cette notion de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée couplée à des modes complexes non-linéaires pour étudier des structures cycliques telles que des roues aubagées, de même que

3. Les modes propres sont évalués à partir du système conservatif, comme explicité dans le chapitre II. Néanmoins, lorsque la matrice d'amortissement n'est pas diagonalisable dans cette base de vecteurs propres, il est nécessaire d'introduire les modes complexes pour découpler le système en équations normales

Joannin *et al.* [99, 101, 102] dans le cadre de la réduction de modèle et en particulier de roues aubagées désaccordées.

La méthode employée par Joannin *et al.* [99] est fondée sur le principe de substitution spectrale des termes non-linéaires de l'équation du mouvement (III.18). Cette technique de synthèse modale non linéaire de la réponse forcée par substitution spectrale est détaillée dans cette section en débutant par la mise en équation de la méthode. Quelques précisions concernant la technique numérique sont ensuite fournis avant de discuter des performances et des limitations de cette méthode.

2.1 Aspects théoriques

Comme énoncé en introduction, cette méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée repose sur le principe de substitution spectrale qui consiste à remplacer les termes non-linéaires $\mathbf{f}_{\text{nl}}$ de l'équation du mouvement (III.18) par le mode complexe non-linéaire issu de l'équation du système autonome sous-jacent. Dans la suite de cette section, il sera considéré qu'un ou plusieurs modes non-linéaires de la structure étudiée ont préalablement été évalués, par exemple à l'aide de la méthode des modes complexes non-linéaires proposée au chapitre II.

Avant de développer cette étape de substitution spectrale, la technique de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée requiert la formulation de l'équation du mouvement puis de l'équation dynamique d'un système non-linéaire autonome sous forme de problèmes aux valeurs propres. Ces étapes sont réalisées dans le but de parvenir au système d'équations permettant de synthétiser les différentes réponses forcées du système non-linéaire complet à partir des modes non-linéaires évalués précédemment.

Dans un premier temps, l'équation discrète du mouvement du système forcé est rappelée (III.18), les notations étant identiques à celles employées dans le chapitre II.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{g}(t) \tag{III.18}$$

La synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée ne nécessite pas de partitionner la structure (bien que celle-ci pourrait être réalisée après une première réduction comme celles explicitées en section III.1), les différentes étapes de cette méthode sont donc réalisées sur une structure complète telle la roue aubagée du schéma III.2. Par conséquent, le vecteur solution $\mathbf{x}$ ne requiert pas de transformation. Un formalisme complexe est employé pour écrire les différentes équations ainsi que la solution. Cette dernière s'écrit alors comme une oscillation multi-harmonique de fréquence fondamentale ω (III.19), identique à la fréquence d'excitation des efforts extérieurs $\mathbf{g}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \text{Re}\left\{\sum_{k=0}^{n_{\text{h}}} \mathbf{x}_k \text{e}^{ik\omega t}\right\} \tag{III.19}$$

où $\mathbf{x}_k$ est le vecteur contenant les composantes complexes, indépendantes du temps, du k-ième harmonique de manière semblable aux coefficients harmoniques de la méthode de l'équilibrage harmonique exposée au chapitre II. n_{h} est le nombre d'harmoniques conservés dans la solution.

Il est aussi essentiel de définir un produit scalaire adapté à une formulation complexe tel que le produit scalaire hermitien défini sur l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{C}$ sur l'intervalle $[0, T]$, ainsi

$$\langle f|g\rangle = \frac{2}{T}\int_0^{\text{T}} f(t)\overline{g(t)}dt \tag{III.20}$$

avec $T = {}^{2\pi}/_{\omega}$, la période d'une oscillation de la solution et $\bar{\bullet}$, le complexe conjugué.

L'expression (III.19) de la solution est alors insérée dans l'équation du mouvement (III.18) puis projetée sur la base constituée par les fonctions de base $\left\{e_k = \mathrm{e}^{ik\omega t}\right\}$ au moyen du produit scalaire (III.20). L'équation (III.18) est alors exprimée telle que

$$\Big((ik\omega)^2\mathbf{M} + (ik\omega)\mathbf{C} + \mathbf{K}\Big)\,\mathbf{x}_k + \langle \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}(\cdots, \mathbf{x}_k, \cdots, \omega)|e_k\rangle = \mathbf{g}_k \tag{III.21}$$

avec $\mathbf{g}_k = \langle \mathbf{g}|e_k\rangle$, le k-ième harmonique du vecteur des efforts extérieurs obtenu par projection sur le k-ième élément de la base des fonctions e_k.

Dans un objectif de réduction du système d'équations, le problème (III.21) est projeté sur l'espace de réduction engendré par les modes non-linéaires $\mathbf{\Phi}$ (préalablement évalués). Cette réduction revient à supposer que le k-ième harmonique des degrés de liberté $\mathbf{x}_k$ de la structure peut être décomposé par le k-ième harmonique des modes non-linéaires $\mathbf{\Phi}_k$, avec les amplitudes modales complexes $\mathbf{q}$ des modes non-linéaires qui sont alors les nouvelles inconnues. Cette hypothèse a été mise en œuvre avec succès dans [101, 102, 117]. En admettant donc que $\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_k(\mathbf{q})\mathbf{q}$ [4], il vient

$$\Big((ik\omega)^2\mathbf{M} + (ik\omega)\mathbf{C} + \mathbf{K}\Big)\,\mathbf{\Phi}_k(\mathbf{q})\mathbf{q} + \langle \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}(\cdots, \mathbf{\Phi}_k(\mathbf{q})\mathbf{q}, \cdots, \omega)|e_k\rangle = \mathbf{g}_k \tag{III.22}$$

Dans un deuxième temps, l'équation dynamique d'un système non-linéaire, autonome et non-conservatif, rappelée dans l'équation (III.23), doit être exprimée sous la forme d'un problème aux valeurs propres complexes, ceci dans le but de substituer le terme $\langle \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}|e_k\rangle$ de l'équation (III.22).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{0} \tag{III.23}$$

La procédure permettant de formuler l'équation (III.23) sous la forme d'un problème aux valeurs propres complexes est semblable à celle utilisée pour l'obtention du problème précédent. Les solutions libres du système sont donc cherchées sous la forme de combinaisons de modes non-linéaires approchées par la méthode de l'équilibrage harmonique au moyen de l'équation (III.24).

$$\Big((k\mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}))^2\mathbf{M} + (k\mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}))\mathbf{C} + \mathbf{K}\Big)\,\mathbf{\Phi}_k(\mathbf{q})\mathbf{q} + \langle \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}(\cdots, \mathbf{\Phi}_k(\mathbf{q})\mathbf{q}, \cdots, \mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}))|e_k\rangle = \mathbf{0} \tag{III.24}$$

L'expression (III.24) est généralisée à plusieurs modes ce qui explique la présence de $\mathbf{\Lambda}$, la matrice spectrale non-linéaire renfermant les valeurs propres complexes $\lambda = -\beta + i\Omega$ des modes non-linéaires (avec $\Omega = \Omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$, la pulsation propre amortie, Ω_0, la pulsation propre du mode et $\zeta = {}^{\beta}/_{\Omega_0}$, le taux d'amortissement modal), distribuées sur sa diagonale.

Il est important de remarquer que la projection est accomplie par rapport aux fonctions de base $\{e_k = \mathrm{e}^{k\lambda t}\}$ au moyen du produit scalaire défini dans l'équation (III.20). Comme exploitée lors du calcul des modes complexes non-linéaires, la décroissance de la solution, liée à β, sur la période d'oscillation T doit être négligée afin que la condition d'orthogonalité des fonctions de base puisse s'appliquer [101, 117, 125].

Le k-ième harmonique des modes non-linéaires contenu dans la matrice $\mathbf{\Phi}_k$ ainsi que la matrice spectrale non-linéaire $\mathbf{\Lambda}$ dépendent tous deux des amplitudes modales complexes des modes non-linéaires contenues dans le vecteur $\mathbf{q}$. Dans le but d'alléger les équations de cette section, cette dépendance ne sera plus explicitement écrite mais reste tout de même présente dans la théorie.

4. À noter que le n-ième mode non-linéaire contenu dans la matrice $\mathbf{\Phi}$ est uniquement décrit par la variable $\mathbf{q}_n$ associée à ce mode non-linéaire.

À partir de l'équation (III.24), il est aisé d'isoler le terme des efforts non-linéaires projetés sur la base des fonctions e_k,

$$\langle \mathbf{f}_{\text{nl}}(\cdots, \boldsymbol{\Phi}_k\mathbf{q}, \cdots, \boldsymbol{\Lambda}) | e_k \rangle = -\mathbf{F}_k(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{\Phi}_k\mathbf{q} \tag{III.25}$$

dans laquelle

$$\mathbf{F}_k(\boldsymbol{\Lambda}) = (k\boldsymbol{\Lambda})^2\mathbf{M} + (k\boldsymbol{\Lambda})\mathbf{C} + \mathbf{K} \tag{III.26}$$

Pour conclure cette méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée, la substitution du terme $\langle \mathbf{f}_{\text{nl}} | e_k \rangle$ de l'équation (III.22) par l'expression contenue dans l'équation (III.25) constitue l'opération de substitution spectrale

$$\left((ik\boldsymbol{\omega})^2\mathbf{M} + (ik\boldsymbol{\omega})\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\boldsymbol{\Phi}_k\mathbf{q} - \mathbf{F}_k(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{\Phi}_k\mathbf{q} = \mathbf{g}_k \tag{III.27}$$

Cette opération permet d'exploiter pleinement toute l'information contenue dans les modes non-linéaires en faisant intervenir explicitement les valeurs propres complexes non-linéaires dans le système d'équations (III.27). Les effets non-linéaires d'assouplissement, de raidissement ou de dissipation sont alors contenus dans les modes non-linéaires et essentiellement dans les variations de leurs valeurs propres complexes. De plus, cette substitution permet de s'affranchir de l'évaluation des efforts non-linéaires, par exemple à l'aide de la méthode d'alternance temps-fréquence présentée au chapitre II, dont le temps de calcul peut s'avérer prohibitif.

Finalement, l'équation (III.27) est projetée sur la base des modes non-linéaires associés à l'harmonique k contenus dans la matrice $\boldsymbol{\Phi}_k$ au moyen du produit scalaire hermitien (III.20).

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi}_k^{\text{H}}\left(\mathbf{Z}_k(\omega) - \mathbf{F}_k(\boldsymbol{\Lambda})\right)\boldsymbol{\Phi}_k\mathbf{q} = \boldsymbol{\Phi}_k^{\text{H}}\mathbf{g}_k} \tag{III.28}$$

L'équation (III.28) [5] est ainsi écrite sous une forme compacte dont les différents termes sont :

- $\mathbf{Z}_k(\omega) = \left((ik\boldsymbol{\omega})^2\mathbf{M} + (ik\boldsymbol{\omega})\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)$, la matrice de rigidité dynamique complexe du système associée à l'harmonique k ;
- $\mathbf{F}_k(\boldsymbol{\Lambda}) = \left((k\boldsymbol{\Lambda})^2\mathbf{M} + (k\boldsymbol{\Lambda})\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)$, la matrice non-linéaire résultant de l'étape de substitution du problème aux valeurs propres complexes associée à l'harmonique k ;
- $\mathbf{g}_k = \langle \mathbf{g} | e_k \rangle$, le vecteur colonne contenant le k-ième harmonique du vecteur des efforts extérieurs obtenu par projection sur le k-ième élément de la base des fonctions e_k ;
- $\boldsymbol{\Phi}_k(\mathbf{q})$, la matrice non-linéaire, dépendante de l'amplitude, constituée du k-ième harmonique des n modes non-linéaires formant la base de réduction ;
- $\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{q})$, la matrice spectrale non-linéaire, dépendante de l'amplitude, renfermant les valeurs propres complexes λ des n modes non-linéaires distribuées sur sa diagonale ;
- $\mathbf{q}$, le vecteur colonne des inconnues du problème renfermant les amplitudes modales complexes des n modes non-linéaires retenus dans la base de réduction.

Cette étape de substitution n'est pas équivalente à une hypothèse d'orthogonalité des modes non-linéaires ce qui implique la présence de termes de couplage après projection traduit par la présence de termes extra-diagonaux dans l'expression $\boldsymbol{\Phi}_k^{\text{H}}\left(\mathbf{Z}_k(\omega) - \mathbf{F}_k(\boldsymbol{\Lambda})\right)\boldsymbol{\Phi}_k$.

5. $\bullet^{\text{H}}$ correspond à la transposée du conjugué de la matrice complexe associée

À partir de l'équation (III.28), la réponse forcée du système étudié peut être reconstituée. Néanmoins, il est nécessaire de remarquer que cette reconstitution implique d'admettre une hypothèse supplémentaire. En effet, lors de l'étape de substitution spectrale, les efforts non-linéaires sont évalués aux fréquences propres Ω des modes non-linéaires contenus dans la base de réduction et non à la fréquence d'excitation ω. Les résultats obtenus par Joannin *et al.* [99] et Krack *et al.* [117] dans leurs travaux, employant la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée sur des non-linéarités de type frottement / contact, permettent de considérer que cette hypothèse n'impacte que très peu la précision du résultat ce qui est confirmé dans la sous-section suivante.

2.2 Compléments et précisions

Comme énoncé dans la sous-section précédente, les paramètres modaux non-linéaires $\mathbf{\Phi}_k$ et $\mathbf{\Lambda}$ sont dépendants des amplitudes modales complexes contenues dans le vecteur $\mathbf{q}$. Cette dépendance rend indispensable l'interpolation de ces paramètres à chaque itération de l'algorithme de résolution dans le but d'évaluer $\mathbf{\Phi}_k$ et $\mathbf{\Lambda}$ pour la valeur courante de l'amplitude de $\mathbf{q}$, soit $|\mathbf{q}|$. En fonction de la discrétisation des modes non-linéaires lors de leur évaluation, une interpolation linéaire par morceaux est satisfaisante dans la majorité des cas. Dans le cas d'une discrétisation plus grossière, une interpolation cubique par morceaux permet de faciliter la convergence.

Lorsque plus d'un harmonique est conservé dans le calcul des modes non-linéaires ce qui est couramment le cas pour des raisons de précision de la solution, le système d'équations (III.28) devient sur-déterminé et comporte donc plus d'équations que d'inconnues. En effet, l'ensemble des harmoniques $k \in [\![1, n_\mathrm{h}]\!]$ des modes non-linéaires sont associés aux mêmes amplitudes modales complexes $\mathbf{q}$ ce qui n'est pas le cas dans la méthode d'équilibrage harmonique dans laquelle les coefficients des harmoniques sont des variables indépendantes. Afin de résoudre ce système rectangulaire, deux possibilités sont envisageables.

La première repose sur la résolution du système d'équations complet à l'aide de techniques de résolution adaptées et notamment l'algorithme de Levenberg-Marquardt [128, 138]. Une telle résolution est chronophage, c'est pour cette raison que la deuxième option sera préférée dans la suite de ce travail, bien que moins rigoureuse mathématiquement.

La deuxième s'applique dans le cas d'une excitation mono-harmonique, soit mathématiquement $\forall\, k \neq 1,\ \mathbf{g}_k = \mathbf{0}$. Il est alors possible de négliger les équations ne correspondant pas à l'harmonique fondamental ($k = 1$), soit les équations ne comportant pas de termes d'excitation. Cette hypothèse permet de ramener le système d'équations en un système carré et donc de le résoudre à l'aide des algorithmes évoqués dans le chapitre II.

Pour autant, même en employant la seconde option, la solution $\mathbf{x}$ n'est pas mono-harmonique puisque cette dernière est reconstituée en utilisant l'ensemble des harmoniques contenus dans les modes non-linéaires, constituant la base de réduction et de projection, à l'aide de l'équation

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{Re}\left\{ \mathbf{q} \sum_{k=0}^{n_\mathrm{h}} \mathbf{\Phi}_k \mathrm{e}^{ik\omega t} \right\} \tag{III.29}$$

Les non-linéarités étudiées dans ce travail de thèse étant dissipatives (et particulièrement des non-linéarités de contact avec frottement), une classique continuation séquentielle augmentée d'un prédicteur fixe, tous deux illustrés dans le chapitre II, est suffisante pour décrire l'évolution du système. Néanmoins, des méthodes de continuation plus élaborées,

telle la continuation sur la longueur l'arc, peuvent être utilisées dans le cas de non-linéarités pouvant, par exemple, occasionner des points de retournement.

Dans le but de réduire le temps de calcul de l'ensemble de la procédure de réduction par synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée, l'équation du système non-linéaire autonome, aboutissant à l'évaluation des modes et des valeurs propres non-linéaires, peut être préalablement réduite à l'aide d'une méthode de synthèse modale linéaire classique telle que la méthode de Craig-Bampton comme exposé dans le logigramme de la figure III.3.

Les algorithmes de résolution itératifs, tels que l'algorithme de Newton-Raphson ou à région de confiance exhibés dans le chapitre II, exploités pour résoudre des systèmes d'équations non-linéaires utilisent un formalisme arithmétique réel. Il est donc nécessaire de reformuler le problème en distinguant les parties réelle et imaginaire de l'équation (III.28).
Comme consigné dans le chapitre II, ces algorithmes de résolution nécessitent la connaissance de la matrice jacobienne du système d'équation à évaluer. Le calcul de l'expression analytique de cette dernière, semi-analytique dans ce cas de figure en raison de sa dépendance vis-à-vis de l'interpolation utilisée pour déterminer les paramètres modaux à chaque itération de l'algorithme de résolution, est alors inéluctable avant d'envisager la résolution de systèmes de taille industrielle.
Ces deux derniers points sont exposés en détail dans l'annexe B.3.

2.3 Performances

L'efficacité de cette technique de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée a été démontrée par Joannin *et al.* [99] sur un modèle phénoménologique de roue aubagée comprenant vingt-quatre secteurs accordés incluant le secteur fondamental. L'expression de la non-linéarité de contact / frottement est identique à celle employée dans l'exemple illustratif du chapitre II. Un unique mode non-linéaire est retenu dans la base de réduction, celui-ci a été évalué à l'aide de la méthode des modes complexes non-linéaires II.2 en conservant cinq harmoniques dans la résolution. Plus de précisions sur les paramètres et les détails de ce modèle phénoménologique sont donnés par Joannin [99, 100].

Les réponses forcées pour plusieurs niveaux d'excitation, présentées en figure III.4, correspondent à la superposition d'une réponse forcée évaluée à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique (cinq harmoniques sont conservés) et d'une seconde réponse forcée évaluée au moyen de la méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée. Les réponses forcées tracées correspondent à l'excitation co-rotative du sixième diamètre nodal de la famille du premier mode de vibration de la structure.

Une quasi-coïncidence est observable entre les résultats fournis par ces deux méthodes sur la figure III.4. De plus, un comparatif entre une réponse forcée évaluée par méthode de l'équilibrage harmonique et une seconde calculée par synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée pour un système de taille industrielle est présenté dans le chapitre V.

En plus d'une excellente précision, cette méthode de synthèse modale non-linéaire permet une évaluation de la réponse forcée du système vingt à trente fois plus rapide [99] qu'une évaluation classique par équilibrage harmonique pour ce modèle phénoménologique, en omettant le temps requis pour calculer les modes non-linéaires. De plus, la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée permet l'évaluation de multiples réponses forcées à différentes amplitudes d'excitation à partir d'une même base de réduction tant que l'amplitude maximale de la réponse forcée est contenue dans la plage d'amplitude des

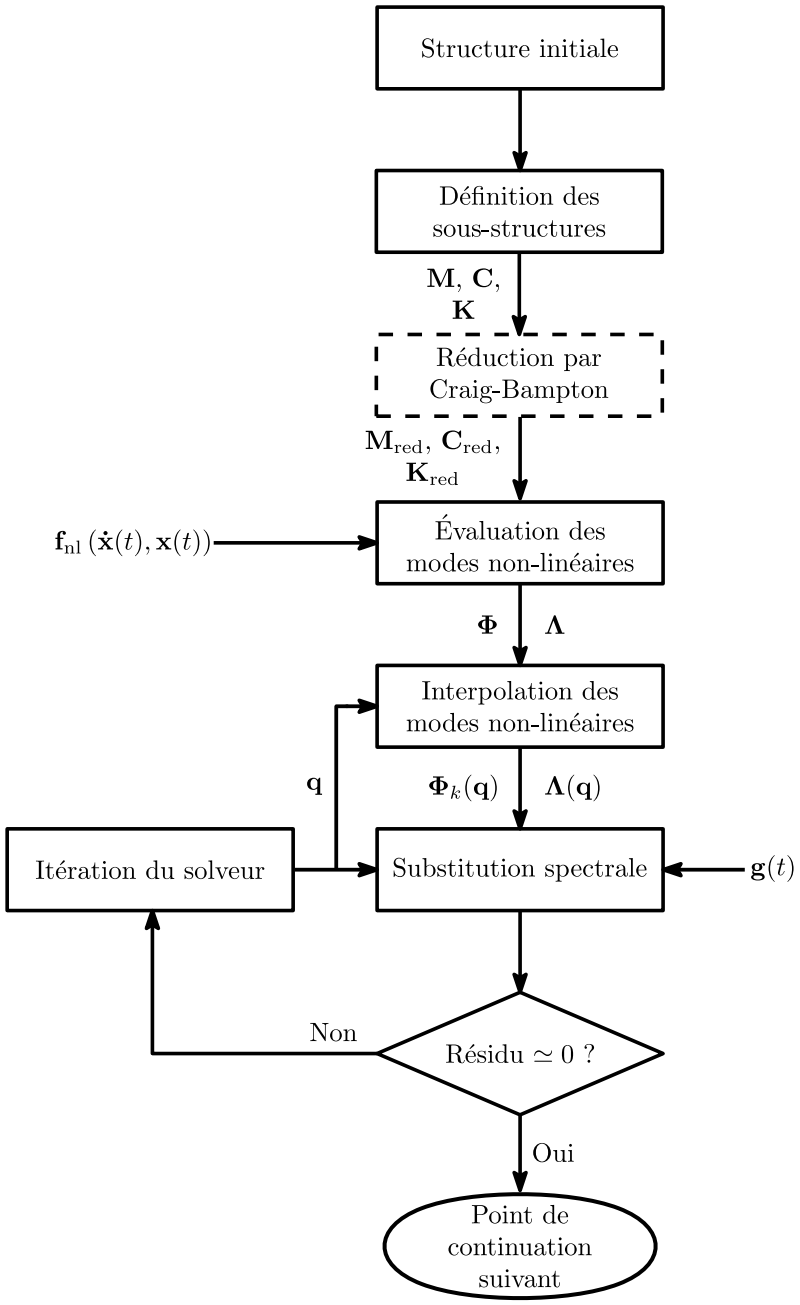


FIGURE III.3 – Logigramme de la méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée

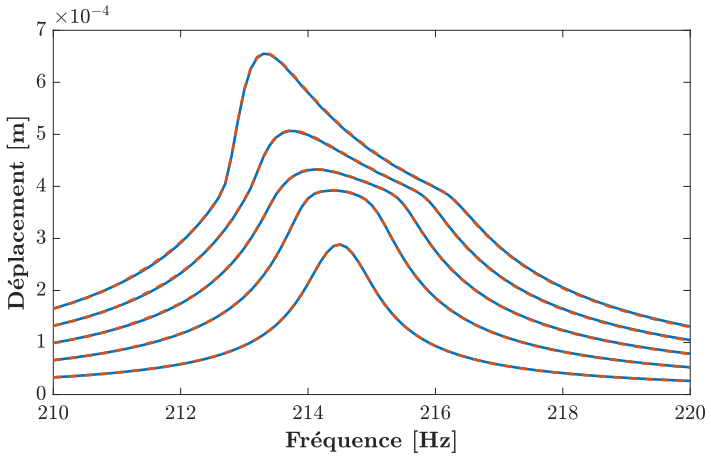


FIGURE III.4 – Comparatif des réponses forcées évaluées au moyen de la HBM (—) et de la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée (- -) pour $\mathbf{g}_k \in [1;5]$ N [99]

modes non-linéaires. Ces constatations font de la méthode de synthèse modale non-linéaire une méthode idéale pour reconstruire la réponse forcée d'un système à partir de modes non-linéaires.

2.4 Limitations

Malgré une excellente précision ainsi qu'une reconstitution quasi-immédiate de la réponse forcée du système, cette méthode présente plusieurs limitations majeures la rendant inadaptée au calcul de réponses forcées sur des roues aubagées désaccordées présentant un comportement non-linéaire. Ceci étant dommageable puisqu'il s'agit de l'objectif numérique principal dans le but de corréler les résultats expérimentaux en rotation sur le banc PHARE#1.

La première limitation de cette technique est illustrée en figure III.5. Cette dernière représente la superposition de réponses forcées du modèle phénoménologique à vingt-quatre secteurs évaluées à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique et au moyen de la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée. Les cinquième et douzième diamètres nodaux de la famille du premier mode de vibration du système sont excités au moyen d'une onde tournante co-rotative.

Il est alors possible de constater que, proche du domaine linéaire, les résultats sont très satisfaisants. Néanmoins, plus les non-linéarités sont importantes, plus la méthode se montre inefficace pour reconstruire la réponse forcée avec une précision appropriée. Les écarts observés dans cette comparaison (voir figure III.5) sont attribuables à l'hypothèse principale de la méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée qui n'est plus vérifiée dans le cas de modes voisins, à savoir l'étape de substitution spectrale du problème aux valeurs propres qui permet d'obtenir l'approximation de la projection des efforts non-linéaires. Bien qu'aucune condition d'orthogonalité ne soit supposée, la substitution spectrale ne permet pas de rendre compte de façon satisfaisante du couplage qui intervient entre des modes fréquentiellement proches à travers la non-linéarité.

La seconde limitation se rapporte au calcul des modes non-linéaires. En effet, quand bien même la méthode de synthèse modale non-linéaire permettrait de reconstituer la réponse forcée comprenant plusieurs résonances voisines, celle-ci nécessiterait l'évaluation des modes non-linéaires de la structure complète (sans prendre en compte des éventuelles

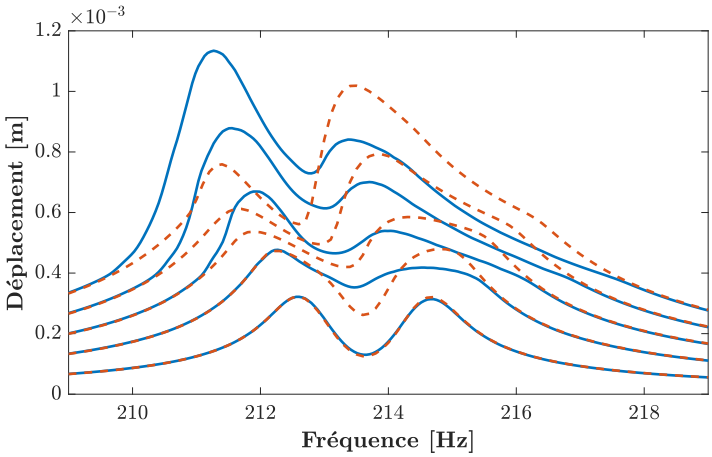


FIGURE III.5 – Comparatif des réponses forcées comprenant deux résonances voisines évaluées au moyen de la HBM (—) et de la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée (- -) pour $\mathbf{g}_k \in [1;5]$ N [99]

symétries ou des répartitions sectorielles pouvant réduire le problème). L'intérêt de cette méthode en termes de temps de calcul serait alors grandement restreinte puisque des structures telles que des roues aubagées peuvent atteindre plusieurs millions de degrés de liberté. Par ailleurs, il serait préjudiciable de ne pas prendre en compte la répartition sectorielle des roues aubagées.

Ces deux limitations majeures rendent cette méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée incapable de traiter le cas de roues aubagées désaccordées présentant des non-linéarités localisées. Avec pour objectif de résoudre ce type de problèmes, Joannin *et al.* [99, 101, 102] améliorèrent cette méthode en lui associant le concept de sous-structuration. Cette méthode sera illustrée dans la section suivante.

Bien qu'inefficace pour traiter les problèmes comportant du désaccordage, cette méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée reste efficiente dans le cas d'une structure présentant des propriétés de symétrie cyclique ou dans le cas d'une structure non-sectorielle telle qu'une aube de soufflante composite engagée dans un mors. Ce dernier cas sera étudié numériquement puis corrélé avec des résultats expérimentaux dans le chapitre V.

3 *Component Nonlinear Complex Mode Synthesis*

Afin de remédier aux limitations de la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée, notamment dans le cas de systèmes désaccordés présentant des résonances voisines que la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée est inapte à traiter précisément, Joannin *et al.* [99, 101, 102] ont développé une méthode permettant de résoudre ce cas de figure. En effet, cette nouvelle méthode intègre une stratégie de sous-structuration à frontières fixes (à la manière de la méthode de Craig-Bampton exposée en section III.1) à la synthèse modale non-linéaire ce qui permet de mettre à profit la répartition sectorielle des roues aubagées et ainsi intégrer la notion de désaccordage.

Néanmoins, les méthodes de sous-structuration présentent une très forte dépendance à la quantité de degrés de liberté contenus dans les frontières ce qui peut s'avérer préjudiciable dans le cadre de systèmes de taille industrielle. Partant de ce constat, cette

nouvelle méthode est enrichie de modes d'interface, présentés en section III.1, pour former la CNCMS [99, 101, 102], *Component Nonlinear Complex Mode Synthesis* en anglais.

La mise en équation de la CNCMS ainsi que quelques commentaires concernant cette technique seront développées dans les deux sous-sections suivantes pour discuter ensuite des performances et des limitations de cette nouvelle méthode.

3.1 Aspects théoriques

La CNCMS repose sur le même principe de substitution spectrale employé dans la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée. L'association de cette substitution spectrale avec une stratégie de sous-structuration à frontières fixes constitue le cœur de cette nouvelle méthode. Le cheminement de la CNCMS reste donc similaire à la méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée, à savoir la formulation de l'équation du mouvement puis de l'équation dynamique d'un système non-linéaire autonome sous forme de problèmes aux valeurs propres et enfin l'étape de substitution spectrale. Après coup, la méthode est enrichie à l'aide d'une réduction par modes d'interface.

Dans un premier temps, l'équation du mouvement (III.30), déclinée pour chaque sous-structure, est rappelée.

$$\mathbf{M}^{(j)}\ddot{\mathbf{x}}^{(j)}(t) + \mathbf{C}^{(j)}\dot{\mathbf{x}}^{(j)}(t) + \mathbf{K}^{(j)}\mathbf{x}^{(j)}(t) + \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{(j)}(\mathbf{x}^{(j)})(t), \dot{\mathbf{x}}^{(j)})(t)) = \mathbf{g}^{(j)}(t) \tag{III.30}$$

Les notations sont ici identiques à celles employées dans le chapitre II, l'exposant j indiquant la sous-structure concernée.

La partitionnement (III.31) de chaque sous-structure permet, de manière analogue à la méthode de Craig-Bampton, d'anticiper le réassemblage de la structure entière (dans le cas des travaux de ce mémoire de thèse, la soufflante complète).

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\mathrm{i}}^{(j)}(t) \\ \mathbf{x}_{\mathrm{b}}^{(j)}(t) \end{pmatrix} \tag{III.31}$$

avec $\bullet_{\mathrm{b}}$ faisant référence aux degrés de liberté de frontière, au niveau de la jonction entre les différents secteurs du disque (toujours dans le cadre de ces travaux de thèse) et $\bullet_{\mathrm{i}}$ correspondant aux autres degrés de liberté de la sous-structure. Pour plus de clarté et ainsi faire référence au schéma III.2, la partition $\bullet_{\mathrm{i}}$ renferme les degrés de liberté

$$\mathbf{x}_{\mathrm{i}}^{(j)}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\mathrm{s}}^{(j)}(t) \\ \mathbf{x}_{\mathrm{n}}^{(j)}(t) \end{pmatrix} \tag{III.32}$$

où $\bullet_{\mathrm{s}}$ et $\bullet_{\mathrm{n}}$ se rapportent aux degrés de liberté illustrés dans le schéma III.2 de la section III.1.

En partant des équations (III.30) et (III.32) ainsi qu'en exploitant la procédure suivie dans la section III.2, l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme

$$\left((ik\omega)^2\,\mathbf{M}^{(j)} + (ik\omega)\,\mathbf{C}^{(j)} + \mathbf{K}^{(j)}\right)\mathbf{x}_k^{(j)} + \langle \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{(j)}\left(\cdots, \mathbf{x}_k^{(j)}, \cdots, \omega\right)|e_k\rangle = \mathbf{g}_k^{(j)} \tag{III.33}$$

dans laquelle les notations sont identiques à celles de la section III.1.

De manière analogue à la méthode de réduction de Craig-Bampton, la base de réduction est définie de la manière suivante

$$\mathbf{V}_k^{(j)}(\mathbf{q}^{(j)}) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_k^{(j)}(\mathbf{q}^{(j)}) & \mathbf{\Psi}^{(j)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{III.34}$$

où les matrices $\mathbf{\Phi}_k^{(j)}$ et $\mathbf{\Psi}^{(j)}$ contiennent respectivement les modes non-linéaires associés à l'harmonique k et les modes statiques.

Pareillement à la procédure de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée, le vecteur contenant les coefficients du k-ième harmonique des degrés de liberté de la j-ième sous-structure $\mathbf{x}_k^{(j)}$ est approximé par le k-ième harmonique des modes non-linéaires $\mathbf{\Phi}_k^{(j)}$ couplé aux amplitudes modales complexes $\mathbf{q}^{(j)}$ des modes non-linéaires, ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^{(j)} =& \mathbf{V}_k^{(j)}(\mathbf{q}^{(j)})\mathbf{y}_k^{(j)} \\ =& \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_k^{(j)}(\mathbf{q}^{(j)}) & \mathbf{\Psi}^{(j)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}^{(j)} \\ \mathbf{x}_{k_\mathrm{b}}^{(j)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{III.35}$$

Les modes statiques $\mathbf{\Psi}^{(j)}$ sont évalués de façon analogue aux modes statiques de liaison de la méthode de Craig-Bampton sur le système linéarisé sous-jacent. Dans le cadre de ce travail de thèse, le système contient une non-linéarité de contact / frottement à l'interface entre les deux composants de la sous-structure : les surfaces en contact sont alors couplées par des liaisons parfaites pour le calcul des modes statiques linéaires. Cette procédure revient à considérer les degrés de liberté internes $\bullet_\mathrm{i}$ comme degrés de liberté esclaves et $\bullet_\mathrm{b}$ comme degrés de liberté maîtres. Les modes statiques $\mathbf{\Psi}^{(j)}$ sont alors évalués au moyen de l'expression

$$\mathbf{\Psi}^{(j)} = -{\mathbf{K}_\mathrm{ii}^{(j)}}^{-1}\mathbf{K}_\mathrm{ib}^{(j)} \tag{III.36}$$

En insérant l'expression (III.35) dans l'équation (III.33), il vient alors

$$\begin{aligned} \left((ik\omega)^2\,\mathbf{M}^{(j)} + (ik\omega)\,\mathbf{C}^{(j)} + \mathbf{K}^{(j)}\right)\mathbf{V}_k^{(j)}(\mathbf{q}^{(j)})\mathbf{y}_k^{(j)} \\ + \langle \mathbf{f}_\mathrm{nl}^{(j)}\left(\cdots, \mathbf{V}_k^{(j)}(\mathbf{q}^{(j)})\mathbf{y}_k^{(j)}, \cdots, \omega\right)|e_k\rangle = \mathbf{g}_k^{(j)} \end{aligned} \tag{III.37}$$

Dans un deuxième temps, l'équation d'un système non-linéaire autonome exprimée sous la forme d'un problème aux valeurs propres (III.38), préalablement développée dans la section III.2, est réemployée ici afin de substituer le terme $\langle \mathbf{f}_\mathrm{nl}^{(j)}|e_k\rangle$ de l'équation (III.37) grâce à la technique de substitution spectrale.

Par ailleurs, La dépendance des modes non-linéaires $\mathbf{\Phi}_k^{(j)}$ et de la matrice spectrale $\mathbf{\Lambda}^{(j)}$ par rapport aux amplitudes modales complexes $\mathbf{q}^{(j)}$ ne sera plus explicitement écrite dans cette section dans le but d'alléger les équations mais reste tout de même présente dans la théorie.

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M}_\mathrm{ii}^{(j)}\mathbf{\Phi}_k^{(j)}\left(k\mathbf{\Lambda}^{(j)}\right)^2 + \mathbf{C}_\mathrm{ii}^{(j)}\mathbf{\Phi}_k^{(j)}\left(k\mathbf{\Lambda}^{(j)}\right) + \mathbf{K}_\mathrm{ii}^{(j)}\right)\mathbf{y}_k^{(j)} \\ + \langle \mathbf{f}_\mathrm{nl}^{(j)}\left(\cdots, \mathbf{\Phi}_k^{(j)}\mathbf{y}_k^{(j)}, \cdots, \mathbf{\Lambda}^{(j)}\right)|e_k\rangle = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{III.38}$$

Similairement à la méthode de réduction de Craig-Bampton, les modes non-linéaires $\mathbf{\Phi}_k^{(j)}$ formant une partie de la base de réduction sont évalués pour des frontières bloquées, c'est pourquoi les matrices de masse $\mathbf{M}_\mathrm{ii}^{(j)}$, d'amortissement $\mathbf{C}_\mathrm{ii}^{(j)}$ et de raideur $\mathbf{K}_\mathrm{ii}^{(j)}$ sont

uniquement considérées par rapport à leurs degrés de liberté internes (il s'agit donc des matrices du j-ième secteur encastré à la frontière inter-secteurs).

Le terme des efforts non-linéaires projetés sur la base des fonctions e_k peut alors être isolé à partir de l'équation (III.38)

$$\langle \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{(j)} \left(\cdots, \mathbf{\Phi}_k^{(j)} \mathbf{y}_k^{(j)}, \cdots, \mathbf{\Lambda}^{(j)} \right) | e_k \rangle = -\mathbf{F}_k^{(j)}(\mathbf{\Lambda}^{(j)}) \mathbf{y}_k^{(j)} \tag{III.39}$$

dans laquelle

$$\mathbf{F}_k^{(j)}(\mathbf{\Lambda}^{(j)}) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\mathrm{ii}}^{(j)} \mathbf{\Phi}_k^{(j)} \left(k\mathbf{\Lambda}^{(j)} \right)^2 + \mathbf{C}_{\mathrm{ii}}^{(j)} \mathbf{\Phi}_k^{(j)} \left(k\mathbf{\Lambda}^{(j)} \right) + \mathbf{K}_{\mathrm{ii}}^{(j)} \mathbf{\Phi}_k^{(j)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{III.40}$$

La substitution du terme $\langle \mathbf{f}_{\mathrm{nl}}^{(j)} | e_k \rangle$ par l'expression contenue dans l'équation (III.40), pour ce qui constitue l'étape de substitution spectrale, est réalisé dans l'équation (III.41).

$$\left((ik\omega)^2 \mathbf{M}^{(j)} + (ik\omega) \mathbf{C}^{(j)} + \mathbf{K}^{(j)} \right) \mathbf{V}_k^{(j)} \mathbf{y}_k^{(j)} - \mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda}^{(j)}) \mathbf{y}_k^{(j)} = \mathbf{g}_k^{(j)} \tag{III.41}$$

Finalement, l'équation (III.41) est orthogonalisée par rapport à la base de réduction $\mathbf{V}_k^{(j)}$ au moyen du produit scalaire hermitien (III.20) puis les super-éléments associés à chaque sous-structure sont assemblés au moyen des degrés de liberté de frontière $\mathbf{x}_{\mathrm{b}}$ pour former l'équation algébrique du mouvement de la structure réduite complète. Le résultat de ces opérations est exprimé par l'équation (III.42) sous forme compacte.

$$\boxed{\mathbf{V}_k^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k(\omega) \mathbf{V}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda}) \right) \mathbf{y}_k = \mathbf{V}_k^{\mathrm{H}} \mathbf{g}_k} \tag{III.42}$$

La forme développée de l'équation de la CNCMS (III.42) permet une meilleure compréhension de la CNCMS puisque tous les termes de cette méthode sont alors présents dans l'expression (III.43).

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k(\omega) \mathbf{\Phi}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda}) \right) & \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \mathbf{Z}_k(\omega) \mathbf{\Psi} \\ \mathbf{\Psi}^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k(\omega) \mathbf{\Phi}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda}) \right) & \mathbf{\Psi}^{\mathrm{H}} \mathbf{Z}_k(\omega) \mathbf{\Psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{x}_{k_{\mathrm{b}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \mathbf{g}_k \\ \mathbf{\Psi}^{\mathrm{H}} \mathbf{g}_k \end{pmatrix}} \tag{III.43}$$

Chaque terme contenu dans l'expression (III.43) est défini pour une structure complète réassemblée :

- $\mathbf{Z}_k(\omega) = \left((ik\boldsymbol{\omega})^2 \mathbf{M} + (ik\boldsymbol{\omega}) \mathbf{C} + \mathbf{K} \right)$, la matrice de rigidité dynamique complexe associée à l'harmonique k ;
- $\mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda}) = \mathbf{M}_{\mathrm{ii}} \mathbf{\Phi}_k \left(k\mathbf{\Lambda} \right)^2 + \mathbf{C}_{\mathrm{ii}} \mathbf{\Phi}_k \left(k\mathbf{\Lambda} \right) + \mathbf{K}_{\mathrm{ii}} \mathbf{\Phi}_k$, la matrice non-linéaire résultant de l'étape de substitution du problème aux valeurs propres complexes associée à l'harmonique k ;
- $\mathbf{g}_k$, le vecteur colonne contenant le k-ième harmonique du vecteur des efforts extérieurs obtenu par projection sur le k-ième élément de la base des fonctions e_k ;
- $\mathbf{\Phi}_k(\mathbf{q})$, la matrice non-linéaire, dépendante de l'amplitude, constituée du k-ième harmonique des n modes non-linéaires formant une partie de la base de réduction ;
- $\mathbf{\Psi}$, la matrice linéaire, indépendante de l'amplitude, constituée des modes statiques ;
- $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{q})$, la matrice spectrale non-linéaire, dépendante de l'amplitude, renfermant les valeurs propres complexes λ des n modes non-linéaires distribuées sur sa diagonale ;

— $\mathbf{q}$, le vecteur colonne renfermant les amplitudes modales complexes des n modes non-linéaires retenus dans la base de réduction ;

— $\mathbf{x}_{k_\mathrm{b}}$, le vecteur colonne contenant la projection des degrés de liberté de frontière sur la base des fonctions e_k.

L'assemblage des super-éléments étant réalisé par l'intermédiaire des degrés de liberté de frontière de chaque sous-structure, la totalité de ces derniers sont donc présents dans le système final d'équations. Le potentiel de réduction de la CNCMS est donc tributaire au premier ordre du nombre de degrés de liberté de frontière de chaque sous-structure. Dans le cas d'une structure de taille industrielle, le nombre total de degrés de liberté de frontière peut atteindre plusieurs millions ce qui conduit à un modèle réduit de taille trop importante pour permettre une résolution en des temps raisonnables ce qui restreint donc considérablement l'intérêt de cette technique.

La dépendance de la méthode de réduction par rapport aux degrés de liberté de frontière a déjà été mentionnée dans ce mémoire de thèse à propos de la méthode de réduction de Craig-Bampton. Pour pallier cette limitation, de nombreuses méthodes ont été développées et certaines d'entre elles présentées en section III.1, notamment la méthode de synthèse modale des modes d'interface qui permet de rendre la CNCMS applicable à des modèles éléments finis de grande taille comme les roues aubagées.

Comme énonce en section III.1, la nouvelle base de réduction $\mathbf{W}_k^{(j)}$ de la CNCMS contenant les modes d'interface ainsi que l'approximation du vecteur renfermant les inconnues sont alors données par

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^{(j)} =& \mathbf{W}_k^{(j)}\mathbf{z}_k^{(j)} \\ =& \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}_k^{(j)} & \boldsymbol{\Phi}_\Psi^{(j)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{q}^{(j)} \\ \mathbf{p}^{(j)}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{III.44}$$

où $\boldsymbol{\Phi}_\Psi^{(j)}$ est la matrice comportant les modes d'interface tronqués de chaque sous-structure, $\mathbf{p}^{(j)}$ est le vecteur contenant les amplitudes modales complexes associées aux modes d'interface de chaque sous-structure.

Contrairement aux modes statiques $\boldsymbol{\Psi}$, les modes d'interface sont préalablement évalués sur l'ensemble des degrés de liberté de frontière de la structure complète assemblée et linéarisée à faible amplitude (dans le cas d'une non-linéarité de contact / frottement, les interfaces de contact sont collées) selon la technique décrite en section III.1. Ces modes d'interface sont ensuite séparés pour chaque sous-structure puis sélectionnés selon le critère fréquentiel défini en section III.1 pour former la matrice $\boldsymbol{\Phi}_\Psi^{(j)}$.

L'assemblage des différentes sous-structures ne peut être exécuté comme précédemment à l'aide des degrés de liberté de frontière $\mathbf{x}_\mathrm{b}$ puisque, après réduction des frontières à l'aide des modes d'interface, ce sont les amplitudes modales $\mathbf{p}$ qui gouvernent le déplacement aux frontières. Les sous-matrices de chaque sous-structure associées aux amplitudes modales $\mathbf{p}$ sont alors simplement sommées ensemble dans le processus d'assemblage, dans le but de constituer le super-élément final [219].

L'expression compacte finale de la CNCMS pour une structure complète réassemblée et incluant la réduction au moyen des modes d'interface est donnée dans l'équation (III.45).

$$\boxed{\mathbf{W}_k^\mathrm{H}\left(\mathbf{Z}_k(\omega)\mathbf{W}_k - \mathbf{F}_k(\boldsymbol{\Lambda})\right)\mathbf{z}_k = \mathbf{W}_k^\mathrm{H}\mathbf{g}_k} \tag{III.45}$$

Comme précédemment, le système d'équations développé est exprimé

$$\boxed{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k(\omega)\boldsymbol{\Phi}_k - \mathbf{F}_k(\boldsymbol{\Lambda})\right) & \boldsymbol{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \mathbf{Z}_k(\omega)\boldsymbol{\Phi}_\Psi \\ \boldsymbol{\Phi}_\Psi^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k(\omega)\boldsymbol{\Phi}_k - \mathbf{F}_k(\boldsymbol{\Lambda})\right) & \boldsymbol{\Phi}_\Psi^{\mathrm{H}} \mathbf{Z}_k(\omega)\boldsymbol{\Phi}_\Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \mathbf{g}_k \\ \boldsymbol{\Phi}_\Psi^{\mathrm{H}} \mathbf{g}_k \end{pmatrix}} \tag{III.46}$$

Chaque terme contenu dans l'expression (III.46) est défini pour une structure complète réassemblée :

- $\mathbf{Z}_k(\omega) = \left((ik\boldsymbol{\omega})^2\mathbf{M} + (ik\boldsymbol{\omega})\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)$, la matrice de rigidité dynamique complexe associée à l'harmonique k ;
- $\mathbf{F}_k(\boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{M}_{\mathrm{ii}}\boldsymbol{\Phi}_k \left(k\boldsymbol{\Lambda}\right)^2 + \mathbf{C}_{\mathrm{ii}}\boldsymbol{\Phi}_k \left(k\boldsymbol{\Lambda}\right) + \mathbf{K}_{\mathrm{ii}}\boldsymbol{\Phi}_k$, la matrice non-linéaire résultant de l'étape de substitution du problème aux valeurs propres complexes associée à l'harmonique k ;
- $\mathbf{g}_k$, le vecteur colonne contenant le k-ième harmonique du vecteur des efforts extérieurs obtenu par projection sur le k-ième élément de la base des fonctions e_k ;
- $\boldsymbol{\Phi}_k(\mathbf{q})$, la matrice non-linéaire, dépendante de l'amplitude, constituée du k-ième harmonique des n modes non-linéaires formant une partie de la base de réduction ;
- $\boldsymbol{\Phi}_\Psi$ la matrice linéaire, indépendante de l'amplitude, comportant les modes d'interface tronqués ;
- $\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{q})$, la matrice spectrale non-linéaire, dépendante de l'amplitude, renfermant les valeurs propres complexes λ des n modes non-linéaires distribuées sur sa diagonale ;
- $\mathbf{q}$, le vecteur colonne renfermant les amplitudes modales complexes des n modes non-linéaires retenus dans la base de réduction ;
- $\mathbf{p}$, le vecteur colonne contenant les amplitudes modales associées aux modes d'interface tronqués.

3.2 Compléments et précisions

Les nombreuses similitudes dans le développement de la CNCMS et de la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée, notamment dans les équations compactes finales (III.28) et (III.45) de ces deux méthodes, rendent les commentaires réalisés à propos de la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée, énoncés en section III.2, également valables pour la CNCMS. Parmi ces commentaires, l'interpolation par morceaux des modes non-linéaires $\boldsymbol{\Phi}_k$ et de la matrice spectrale $\boldsymbol{\Lambda}$ ainsi que la résolution du système d'équations sur l'harmonique fondamentale sont également mis en pratique dans la cadre de la CNCMS.

Une méthode de réduction par synthèse modale linéaire, dont l'une de celles présentées en section III.1, peut être employée afin de réduire un modèle de taille industrielle. Cette réduction permet ainsi de diminuer grandement le temps de calcul des modes non-linéaires formant une partie de la base de réduction. La combinaison de ces trois méthodes de réduction (Craig-Bampton, substitution spectrale et modes d'interface) est employée par Joannin *et al.* [102] et nommée triple synthèse modale non-linéaire.

De plus, la CNCMS permet d'évaluer de multiples réponses forcées pour plusieurs amplitudes d'excitation et différents diamètres nodaux à partir d'une même base de réduction tant que l'amplitude maximale de la réponse forcée est contenue dans la plage d'amplitude des modes non-linéaires.

La matrice jacobienne de la CNCMS, elle aussi semi-analytique, est développée en annexe B.4 en distinguant la partie réelle et la partie imaginaire de la solution comme l'imposent les algorithmes de résolution exploités.

Tout comme la méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée, une continuation séquentielle augmentée d'un prédicteur fixe, tous deux illustrés dans le chapitre II, est suffisante pour décrire l'évolution d'un système comportant une non-linéarité de type contact avec frottement. Néanmoins, il est aussi possible d'employer des méthodes de continuation plus élaborées, comme pour la continuation sur la longueur l'arc.

La procédure de la CNCMS est représentée schématiquement en figure III.6.

3.3 Performances

La limitation majeure de la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée réside dans son imprécision pour reconstruire une réponse forcée en présence de plusieurs résonances voisines dans le cas général non-linéaire comme confirmée dans la section III.2 et plus particulièrement sur la figure III.5. C'est dans le but de reconstituer une réponse forcée d'un système non-linéaire comportant plusieurs résonances voisines, telle la réponse forcée d'une structure cyclique désaccordée, que la CNCMS a été développée.

Afin de prouver l'efficacité de la CNCMS dans le cas de résonances non-linéaires voisines, le modèle phénoménologique à vingt-quatre secteurs est repris. Une excitation tournante co-rotative contenant les composantes à cinq et douze diamètres nodaux de la famille du premier mode de vibration est appliquée au système accordé. Un seul mode complexe non-linéaire (évalué en conservant cinq harmoniques dans la résolution) est toujours retenu dans la base de réduction de chaque sous-structure. La réduction par modes d'interface n'est pas employée dans la procédure puisque chaque secteur du modèle phénoménologique ne comporte que deux degrés de liberté de frontière. Les modes statiques complètent donc la base de réduction en s'appuyant sur le système d'équations (III.43).

La figure III.7 comprend une comparaison des réponses forcées pour plusieurs amplitudes d'excitation évaluées au moyen de la CNCMS, de la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée et d'une méthode classique d'équilibrage harmonique (5 harmoniques sont conservés).

La réponse forcée obtenue par CNCMS, tracée sur la figure III.7 produit des résultats très satisfaisants malgré la présence de deux résonances non-linéaires voisines, notamment par rapport à la méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée.

Le modèle phénoménologique traité jusqu'à présent est purement accordé ce qui signifie que les secteurs du système complet ne diffèrent pas les uns des autres. De façon à tester et valider la CNCMS sur un modèle phénoménologique désaccordé, un second secteur dont les caractéristiques structurales [101] sont différentes du premier est inséré à plusieurs reprises de façon aléatoire dans la répartition sectorielle du modèle phénoménologique. Après assemblage des super-éléments pour former la structure réduite, une excitation tournante co-rotative à six diamètres nodaux d'amplitude $\mathbf{g}_k = 5\,\mathrm{N}$, amplitude induisant un amortissement non-linéaire optimum (défini dans le chapitre II) de la structure, est appliquée au modèle phénoménologique désaccordé. La figure (III.8) illustre ce

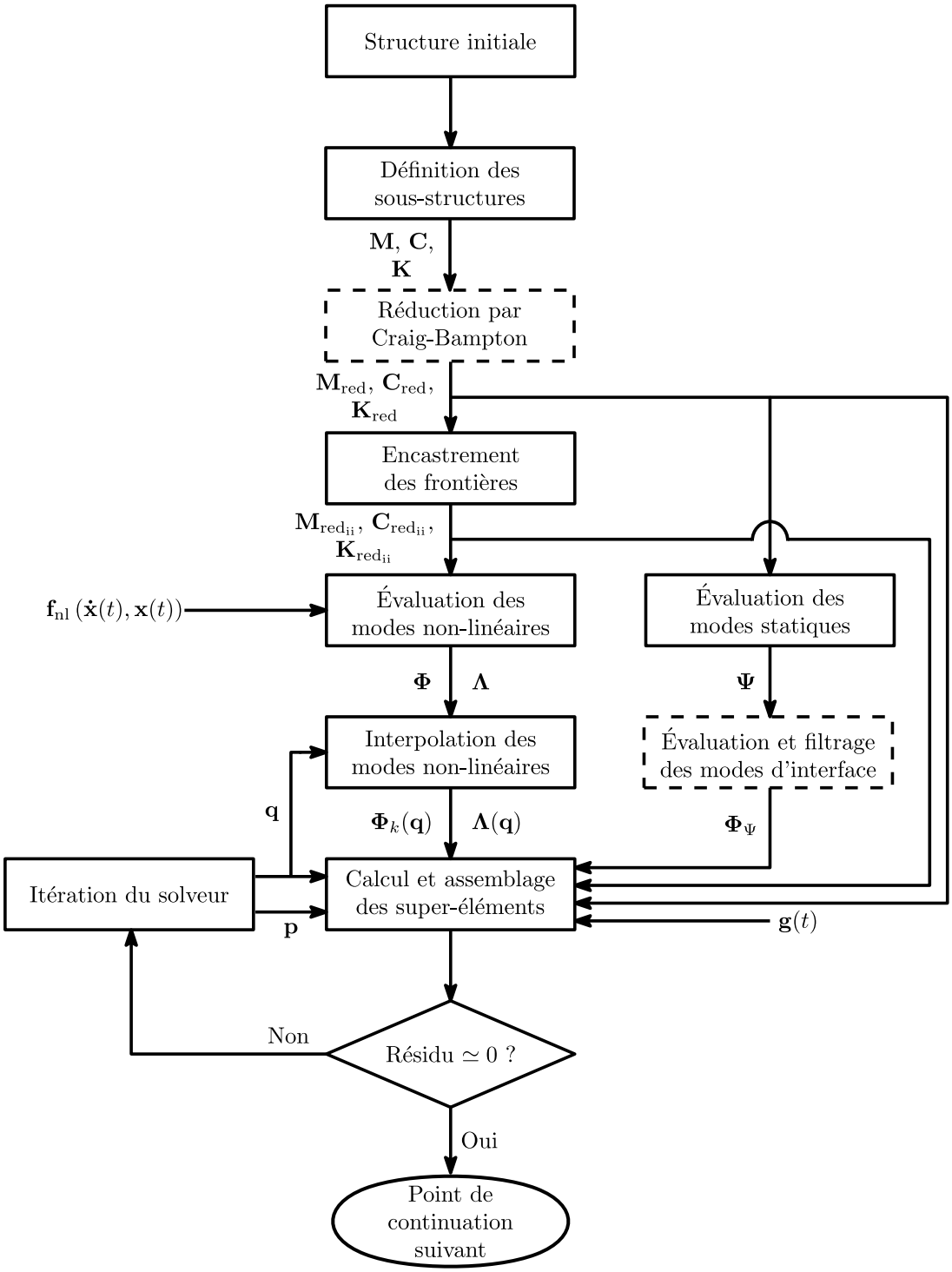


FIGURE III.6 – Logigramme de la CNCMS (adaptée de [101])

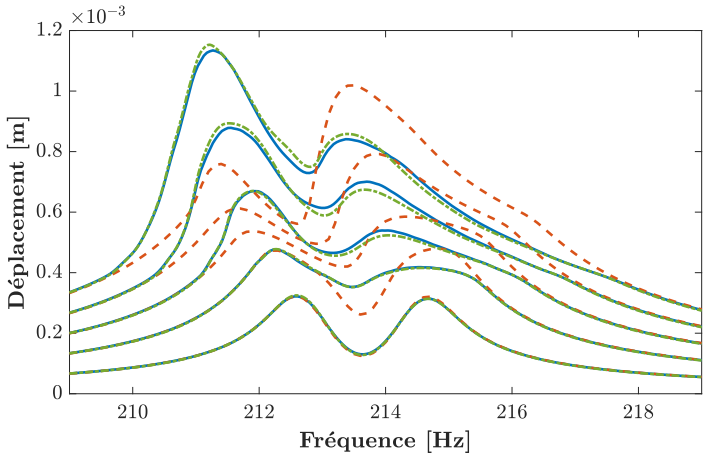


FIGURE III.7 – Comparatif des réponses forcées comprenant deux résonnances voisines évaluées au moyen de la HBM (—), de la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée (- -) et de la CNCMS (···) pour $\mathbf{g}_k \in [1;5]$ N [101]

cas d'étude évalué par l'intermédiaire de la CNCMS et de la méthode de l'équilibrage harmonique.

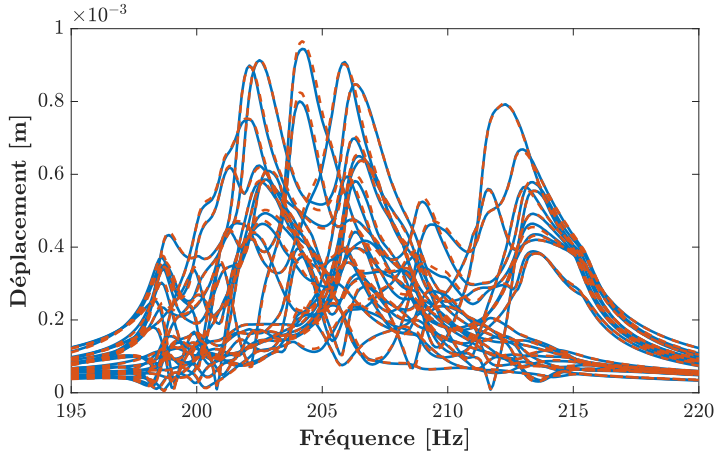


FIGURE III.8 – Comparatif des réponses forcées d'un système désaccordé évaluées au moyen de la HBM (—) et de la CNCMS (- -) pour $\mathbf{g}_k = 5\,\mathrm{N}$ [99]

Comme attendu, de multiples résonances sont observables sur la réponse forcée de chaque secteur. De plus, les écarts entre les réponses forcées évaluées au moyen de la CNCMS et de la méthode de l'équilibrage harmonique sont minimes, restant inférieurs à 3 % sur toute la plage de fréquence. Ces résultats illustrent la qualité de la réduction en termes de précision, néanmoins cette méthode s'avère encore plus avantageuse lorsque le temps de calcul des deux méthodes est comparé.

Dans le but d'évaluer la performance en termes de temps de calcul de la CNCMS, le rapport entre le temps de calcul de la méthode de l'équilibrage harmonique et de la CNCMS est tracé en figure III.9. Cette comparaison est réalisée à partir d'une structure désaccordée aléatoirement ayant comme base le secteur fondamental du modèle phénoménologique dont le nombre de secteurs a été porté à soixante-douze dans le but de manipuler

une quantité de degrés de liberté non-linéaires significative par rapport à un modèle éléments finis. Le tracé III.9 est effectué pour des amplitudes d'excitation $\mathbf{g} \in [1, 10]$ N.

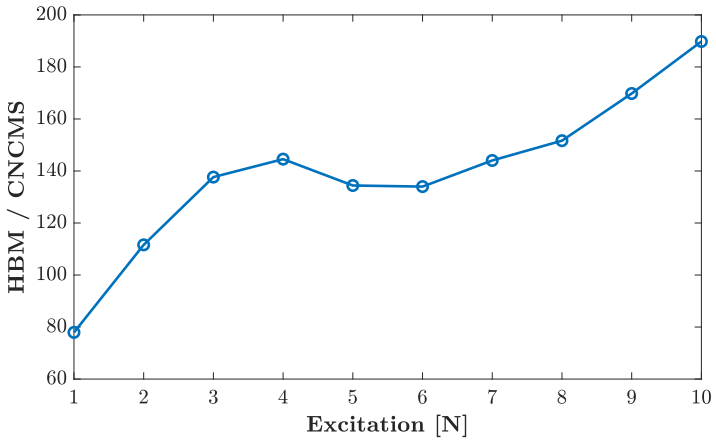


FIGURE III.9 – Rapport entre le temps de calcul de la HBM et de la CNCMS pour plusieurs amplitudes d'excitation [99]

Cette comparaison permet de remarquer que la CNCMS est bien plus performante en termes de temps de calcul que la méthode de l'équilibrage harmonique. En effet, même proche du domaine linéaire ($\mathbf{g}_k$ =1 N), la CNCMS est environ quatre-vingt fois plus rapide que la méthode de l'équilibrage harmonique, ce rapport peut presque atteindre deux cents pour d'importantes amplitudes d'excitation ($\mathbf{g}_k$ =10 N).

Cette diminution drastique du temps de calcul est indubitablement amenée grâce à la réduction du nombre de degrés de liberté du système par la méthode de CNCMS mais aussi grâce la substitution spectrale qui permet d'éluder l'évaluation des efforts non-linéaires en la remplaçant par une interpolation par morceaux des modes non-linéaires beaucoup moins coûteuse en temps de calcul.

En ce qui concerne la réduction de modèle, celle-ci n'est pas considérable dans le cas de cet exemple comportant soixante-douze secteurs. En effet, la CNCMS ne propose qu'un facteur de réduction du nombre de degrés de liberté de cinq. Cependant, sur une structure de taille industrielle comportant davantage de degrés de liberté non-linéaires, la réduction obtenue grâce à la CNCMS sera bien plus importante. Cette réduction de modèle pour une structure de taille industrielle sera développée dans le chapitre VI et les gains en termes de réduction et de temps de calcul seront exposés.

Le modèle phénoménologique à vingt-quatre secteurs utilisé par Joannin *et al.* pour valider la CNCMS ne permet pas d'exploiter la CNCMS avec la réduction par modes d'interface puisque celui-ci ne comporte que trop peu de degrés de liberté de frontière. Afin de comparer les réponses forcées obtenues avec et sans réduction par modes d'interface, Joannin *et al.* [99] ont exploité un modèle éléments finis à vingt-quatre secteurs désaccordés dont le maillage des frontières a volontairement été dégradé pour permettre une résolution sans mode d'interface dans des temps de calcul convenables. De plus amples détails sur ce modèle éléments finis dégradé sont exposés dans le mémoire de thèse de Joannin [99].

La base de réduction de la structure complète réduite comprend vingt-quatre modes complexes non-linéaires (un par secteur) de la première famille de modes de vibration ainsi que cent modes d'interface. Cette réduction par modes d'interface permet une diminution

de l'ordre de cinquante des degrés de liberté de frontière de la structure. Le désaccordage du système est effectué par ajout d'une perturbation aléatoire de faible amplitude sur la fréquence propre des modes non-linéaires de chaque sous-structure. La comparaison des réponses forcées obtenues par CNCMS avec et sans réduction par modes d'interface, pour une excitation co-rotative à six diamètres nodaux d'amplitude $\mathbf{g}_k$ =0.02 N, est consignée dans la figure III.10.

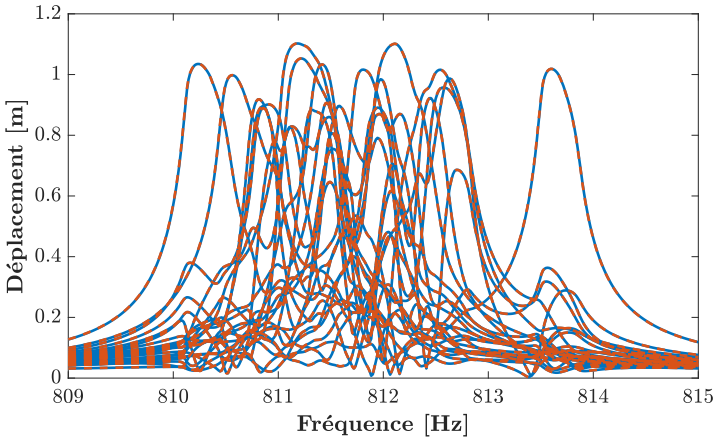


FIGURE III.10 – Comparatif des réponses forcées évaluées au moyen de la CNCMS avec (—) et sans (- -) réduction par modes d'interface pour $\mathbf{g}_k$ =0.02 N [99]

La superposition entre les réponses forcées évaluées à l'aide de la CNCMS avec et sans modes d'interface de la figure III.10 est quasi-parfaite pour chacune des 24 aubes du modèle éléments finis dégradé bien que la réduction des degrés de liberté grâce à ce complément à la CNCMS soit significative. En termes de temps de calcul, le rapport entre les deux évaluations est de huit en faveur de la CNCMS augmentée de modes d'interface.

3.4 Limitations

Les limitations induites par la méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée ont été ainsi résolues par la CNCMS. Néanmoins, la CNCMS présente, elle-aussi, quelques inconvénients notamment concernant les modes linéaires d'interface.

En effet, le mouvement des frontières entre les sous-structures a été approximé par des modes linéaires ce qui peut limiter la qualité des résultats fournis par la CNCMS. Pour des structures dont la non-linéarité est différente d'un frottement en pied d'aube, la méthode peut nécessiter une approximation des frontières plus élaborée à l'aide de modes non-linéaires.

La procédure complète aboutissant à la CNCMS appliquée à une structure de taille industrielle comportant quelques centaines de milliers voire plusieurs millions de degrés de liberté peut s'avérer chronophage. En particulier si les sous-structures du secteur nécessitent d'être réduites par une technique de synthèse modale linéaire (telle la méthode de Craig-Bampton) préalablement au calcul des modes non-linéaires.

Les degrés de liberté maîtres de chaque sous-structure sont alors constitués des degrés de liberté d'observation, d'interface et de frontière soit un nombre pouvant être considérable dans le cas d'une structure industrielle. Le calcul des modes statiques constituant une partie de la base de réduction de Craig-Bampton peut alors se révéler très long en

termes de temps de calcul. Les ordres de grandeurs temporels des différentes étapes de réduction menant à la CNCMS sont livrés dans le chapitre VI pour une structure de taille industrielle.

4 Bilan

Ce chapitre a permis d'exposer la théorie des méthodes de réduction de modèle numérique qui seront employées dans les travaux de corrélation entre les simulations numériques et les essais dynamiques. La méthode de Craig-Bampton, technique de synthèse modale à interface fixe, utilise une procédure de sous-structuration pour permettre une réduction efficace de la structure. Cependant, cette méthode présente une forte dépendance par rapport aux degrés de liberté contenus dans les frontières des sous-structures pouvant altérer son efficacité et ainsi aboutir à un modèle réduit comportant un trop grand nombre de degrés de liberté. La méthode de réduction par synthèse modale des modes d'interfaces permet de prévenir ces limitations inhérentes aux méthodes exploitant la sous-structuration puisqu'elle permet de réduire le nombre de degrés de liberté contenus dans les frontières. Des techniques de réduction de modèle plus avancé ont aussi été présentées et notamment la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée, qui exploite le calcul des modes complexes non-linéaires (développé dans le chapitre II), pour permettre la substitution spectrale des termes non-linéaires de l'équation du mouvement. Parmi ces techniques avancées, la CNCMS, développée par Joannin *et al.* [99, 101, 102], associe la substitution spectrale à une technique de sous-structuration pour permettre une réduction efficace et précise des roues aubagées. De plus, il est possible de coupler celle-ci à une technique de réduction des frontières par modes d'interfaces pour augmenter son gain en termes de réduction.

La technique de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée est employée dans le chapitre V sur un modèle numérique d'aube composite enchassée dans un mors, le tout préalablement réduit par la méthode de Craig-Bampton. Tandis que la CNCMS, augmentée d'une réduction par synthèse modale des modes d'interface, est exploitée dans le chapitre VI sur un modèle numérique de soufflante composite en rotation, également réduite préalablement à l'aide de la méthode de Craig-Bampton. Ces réductions autorisent ainsi la corrélation de ces résultats numériques avec les résultats expérimentaux des différents essais présentés dans les chapitres V et VI. De nombreuses réponses forcées issues de ces modèles réduits à l'aide des méthodes présentées dans ce chapitre sont ainsi exhibées dans les chapitres V et VI.

Pour le moment, l'excitation des aubes à l'aide d'actionneurs piézoélectriques n'a été que très peu abordée dans la modélisation et la résolution numérique du problème posé. Cependant, celle-ci est une part importante de ce travail de thèse puisqu'elle permet d'obtenir expérimentalement les réponses forcées des structures étudiées. Il est donc primordial de définir précisément l'intensité et la position des efforts dynamiques injectés par les actionneurs piézoélectriques pour permettre une corrélation précise des essais. Par conséquent, cet aspect est abordé dans le chapitre IV et notamment l'étape de condensation du problème piézomécanique qui permet de continuer à exploiter les méthodes de résolution et de réduction proposées dans les chapitres II et III sans remaniement de celles-ci.

Chapitre IV

Modélisation piézomécanique

L'objectif principal du système d'excitation du module structure PHARE#1 de la plateforme Dynamique des Machines Tournantes du LTDS et associée à ce travail de recherche est d'exciter dynamiquement la soufflante en rotation dans la cuve sous vide avec une intensité représentative des efforts aérodynamiques subis en conditions de vol permettant ainsi de caractériser l'effet des non-linéarités sur les paramètres modaux. Afin de remplir cet objectif, une excitation au moyen d'éléments piézoélectriques fixés sur chaque aube de la soufflante a été choisie (plus de détails sur le choix du moyen d'excitation sont donnés dans le chapitre V. Dans le but de caractériser l'apport dynamique sur la structure en termes de raideur et de masse mais aussi pour définir précisément l'intensité et la position des efforts dynamiques injectés par les actionneurs piézoélectriques, il est nécessaire de coupler la modélisation de ces derniers au modèle mécanique de la soufflante.

Ce chapitre introduit les matériaux piézoélectriques ainsi que leurs propriétés. La formulation variationnelle et éléments finis des équations couplées du problème piézomécanique linéaire est explicitée dans la deuxième section. La dernière section détaille la condensation exacte des degrés de liberté électriques permettant de convertir le problème couplé mécanique et piézoélectrique en un problème exclusivement mécanique.

Sommaire

1 Éléments de piézoélectricité 106
1.1 Matériaux piézoélectriques 106
1.2 Processus de polarisation 108
1.3 Mécanismes piézoélectriques 109
2 Formulation d'un problème piézomécanique linéaire 110
2.1 Lois de comportement piézoélectrique 110
2.2 Formulation variationnelle 112
2.3 Formulation éléments finis 114
3 Condensation du problème piézomécanique 116
3.1 Condensation des degrés de liberté électriques 116
3.2 Validation de la méthode de condensation 118
4 Bilan 120

1 Éléments de piézoélectricité

La piézoélectricité est la propriété que possèdent certains matériaux de se polariser électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique et réciproquement de se déformer lorsqu'un champ électrique leur est appliqué. Le premier effet est appelé effet piézoélectrique direct et le second, effet piézoélectrique inverse.

La première démonstration de l'effet piézoélectrique direct est le résultat des travaux des frères Curie, Jacques et Pierre, présenté en 1880 [38]. L'existence de l'effet inverse fut prouvée l'année suivante par Gabriel Lippmann qui s'est appuyé sur les lois de la thermodynamique [130]. La même année, les frères Curie démontrèrent expérimentalement cet effet sur des cristaux piézoélectriques [38].

Les matériaux piézoélectriques ont trouvé de nombreuses applications au fil du temps en commençant par l'utilisation de leurs effets direct et inverse dans un sonar sous-marin développé par Paul Langevin pendant la première guerre mondiale. Cette utilisation eut pour effet de catalyser la recherche sur le sujet. L'effet direct des matériaux piézoélectriques est utilisé dans de nombreux capteurs, par exemple des capteurs de pression ou d'accélération utilisés dans des applications diverses et variées. Des actionneurs et moteurs piézoélectriques bénéficient de l'effet inverse de ces matériaux et sont utilisés pour effectuer des mouvements précis dans des microscopes, des imprimantes à jet d'encre ou des appareils photos.

Les activités de recherche actuelles sur les applications piézoélectriques sont axées sur la récupération de l'énergie des vibrations mécaniques sous forme électrique (*piezoelectric energy harvesting* en anglais) [184], les micro et nano résonateurs (MEMS et NEMS) [209] ainsi que la réduction des vibrations [131], par *shunt* piézoélectrique par exemple [81, 217].

1.1 Matériaux piézoélectriques

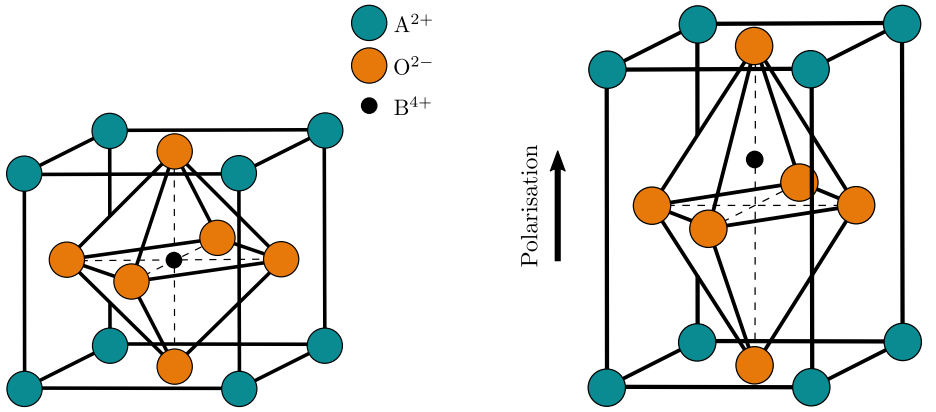
Il existe plusieurs types de matériaux piézoélectriques pouvant présenter des propriétés piézoélectriques à l'état naturel tels que les cristaux ou à la suite d'un processus de polarisation induite tels les céramiques, les polymères ou les composites.

Les cristaux. Les premiers matériaux piézoélectriques découverts furent les cristaux car offrant des propriétés piézoélectriques à l'état naturel tels que le quartz, la tourmaline, le sel de Seignette ou encore le sucre. Leurs caractéristiques piézoélectriques sont liées à leur structure asymétrique ainsi qu'à la présence de liaisons ioniques entre leurs atomes.

Les cristaux furent au départ la source exclusive de matériaux piézoélectriques. Cependant leur fragilité, la difficulté à les mettre en forme ainsi que leur faible couplage piézomécanique pose problème pour la plupart des applications et particulièrement celles ayant pour objectif d'exciter dynamiquement une structure, c'est pourquoi d'autres matériaux sont privilégiés de nos jours.

Les céramiques. Une céramique est composée de grains soudés entre eux par frittage, ce processus de fabrication permet de façonner le matériau piézoélectrique sous une variété de formes et de tailles bien plus importante que pour les cristaux. Les céramiques présentent un couplage piézomécanique élevé, en contrepartie, ces dernières sont fragiles. De plus, la majorité de leurs paramètres piézoélectriques sont sensibles à la température [88], et sont susceptibles d'évoluer au cours du temps. Cependant, il est possible de les repolariser (voir sous-section IV.1.2) périodiquement afin de compenser ce vieillissement. Actuellement, les céramiques sont la forme de matériaux piézoélectriques majoritairement fabriquée et utilisée.

L'une des principales familles de céramiques piézoélectriques est celle des PZT (aussi appelée Lead Zirconate Titanate en anglais) dont la composition contient de l'oxyde de plomb, du zirconium et du titane. Leur formule générale s'écrit $A^{2+}B^{4+}O_3^{2-}$ où A est un ion métallique bivalent (comme le plomb ou le baryum) et B est un ion métallique tétravalent (tel que le titane ou le zirconium). Les PZT sont en général formés de cristaux de zirconate de plomb $Pb^{2+}Zr^{4+}O_3^{2-}$ et de titanate de plomb $Pb^{2+}Ti^{4+}O_3^{2-}$ frittés dont la proportion dépend du fabricant. Ces céramiques peuvent être dopées, en remplaçant certains ions Zr^{4+}/Ti^{4+} par des ions de valence différente, Fe^{3+} ou Nb^{5+}, pour obtenir des céramiques dites respectivement dures ou douces, ayant des propriétés piézoélectriques différentes [89]. Ces termes sont empruntés au magnétisme, où l'on classe de la même manière les matériaux ferromagnétiques. Une cellule élémentaire d'un matériau céramique PZT est représentée sur la figure IV.1.



(a) Structure cubique non-polarisée ($T > T_C$) (b) Structure tétragonale polarisée ($T < T_C$)

FIGURE IV.1 – Cellule élémentaire d'un matériau céramique PZT (adaptée de [211])

Les matériaux céramiques PZT sont caractérisés par deux états cristallins qui diffèrent en fonction de la température du matériau. Au-dessus d'une température appelée température de Curie notée T_C (entre 200°C et 350°C pour les PZT [88, 178]), les cellules élémentaires ont une structure cristalline cubique, illustrée sur la figure IV.1a, dans laquelle les centres de gravité des charges positives et négatives coïncident : elles ne sont alors pas polarisées. Néanmoins, pour un milieu polarisé et une température en dessous du point de Curie, ces cellules ont une structure tétragonale, exposée en figure IV.1b, dans laquelle l'ion B^{4+} n'est plus au centre de la structure. L'effet piézoélectrique provient de cette propriété de polarisation.

Après frittage du PZT et à température ambiante, les directions de polarisation des cellules élémentaires sont réparties aléatoirement [1] et la polarisation est statistiquement nulle à l'échelle macroscopique. Pour être utilisable, le matériau céramique doit alors être polarisé dans son intégralité. Cette étape est décrite dans la sous-section IV.1.2.

Les polymères. Les matériaux polymères et principalement le polyfluorure de vinylidène (PVDF de formule chimique générale $\dagger CH_2{-}CF_2\ddagger_n$ et ses dérivés sont utilisés dans l'industrie pour leurs propriétés piézoélectriques. Comme les céramiques, il est nécessaire de soumettre les polymères à un processus de polarisation afin de bénéficier de leurs caractéristiques piézoélectriques.

Le PVDF est plus souple, plus léger, et supporte des déformations plus importantes que

1. Plus précisément, le matériau est organisé en plusieurs grains. Chaque grain comporte plusieurs domaines ferroélectriques (ou domaines de Weiss) qui, eux mêmes, incluent plusieurs cellules élémentaires contiguës de même direction de polarisation.

les céramiques et les cristaux, ce qui les rend propice à une utilisation en tant que capteur grâce à l'effet direct. Cependant, les coefficients piézoélectriques et les couplages piézomécaniques de ces polymères restent modestes et ne permettent pas facilement l'utilisation de leur effet piézoélectrique inverse en tant qu'actionneur.

Les composites. Les matériaux composites, comme leur nom l'indique, sont un assemblage de plusieurs matériaux : un matériau piézoélectrique, souvent sous forme de céramique, et un non-piézoélectrique pouvant être une résine époxy. Les assemblages les plus courants sont composés de fibres en matériau piézoélectrique céramique noyées dans une résine époxy ou d'un empilement de couches de céramique et de résine tel que le patch piézoélectrique MIDÉ QuickPack10W [210] constitué d'une couche de céramique PZT encapsulée entre deux couches de polymide. Les propriétés mécaniques et piézoélectriques de l'assemblage composite dépendent alors de la répartition et des liaisons mécanique entre les différents matériaux.

1.2 Processus de polarisation

Au contraire des cristaux qui présentent une polarisation naturelle, les matériaux céramiques et plus particulièrement les PZT nécessitent d'être polarisés afin de bénéficier des effets direct et inverse de la piézoélectricité. Comme énoncé précédemment, après frittage du matériau et à température inférieure à la température de Curie, le matériau céramique ne présente pas de direction de polarisation privilégiée. Cet état est illustré sur la figure IV.3a et est le point de départ n° 1 du cycle d'hystérésis décrit ci-dessous faisant intervenir la polarisation $\mathbf{P}$ (exprimée en $\mathrm{C.m^{-2}}$) en fonction du champ électrique $\mathbf{E}$ (exprimé en $\mathrm{V.m^{-1}}$) de la figure IV.2a et l'évolution du tracé "papillon" de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ (sans dimension), dans la direction d'application du champ électrique, en fonction du champ électrique $\mathbf{E}$ de la figure IV.2b.

Un important champ électrique est appliqué au matériau par l'intermédiaire d'une tension v aux bornes des électrodes, placées de part et d'autres de celui-ci et représentées en vert sur la figure IV.3. Par ailleurs, la disposition de ces dernières par rapport au milieu piézoélectrique définit la direction de polarisation du matériau. La polarisation $\mathbf{P}$ à l'intérieur du matériau croît non-linéairement tel qu'indiqué sur la courbe rouge de la figure IV.2a.

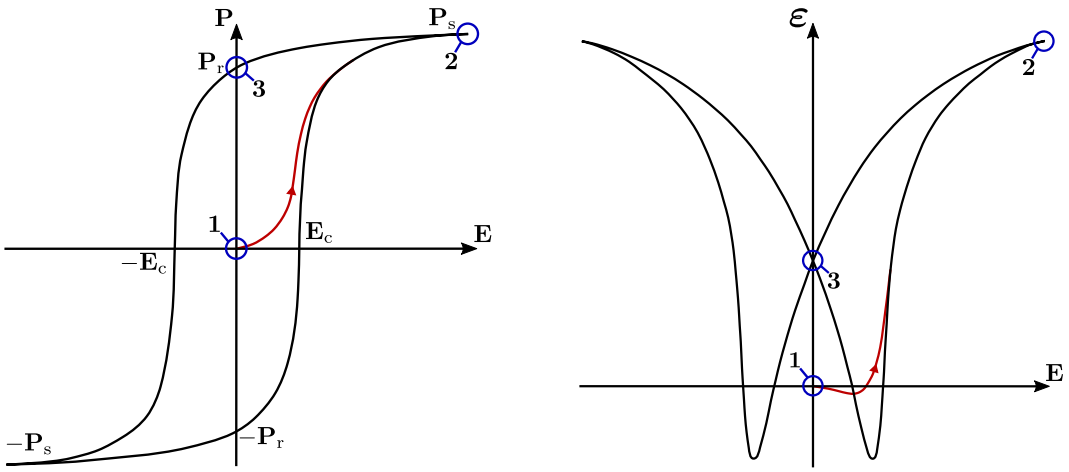
La polarisation ainsi que le champ de déplacement électrique $\mathbf{D}$ (exprimé en $\mathrm{C.m^{-2}}$) augmente à l'intérieur du matériau jusqu'à ce que chaque cellule élémentaire soit polarisée dans la même direction que le champ électrique $\mathbf{E}$. À l'intérieur de chaque cellule élémentaire, les ions $\mathrm{B^{4+}}$ se déplacent dans la direction de l'électrode négative. Des charges électriques q s'accumulent dans les électrodes et un transfert de charges s'opère entre les électrodes pendant ce processus. L'état de saturation du matériau, dépeint par la figure IV.3b, est alors atteint. À l'approche de cet état de saturation, la polarisation cesse de croître en fonction du champ électrique appliqué pour atteindre le point n° 2 de la figure IV.2a. La valeur de polarisation de saturation $\mathbf{P}_s$ est alors atteinte. Dans le même temps, le matériau s'étire dans la direction d'application du champ pour parvenir au point n° 2 de la figure IV.2b, tout en se rétractant dans les directions orthogonales.

Par la suite, la différence de potentiel v entre les électrodes est diminuée jusqu'à zéro. Les cellules élémentaires ne s'organisent pas comme à l'état initial n° 1 : la plupart conservent leur orientation avec une polarisation vers l'électrode négative. Il subsiste ainsi une polarisation rémanente $\mathbf{P}_\mathrm{r}$, un déplacement électrique rémanent $\mathbf{D}_\mathrm{r}$ à l'intérieur du matériau ainsi que des charges libres rémanentes q_r à la surface des électrodes assurant

un champ électrique nul. Un état de déformation rémanente longitudinale et transverse dans le matériau est aussi observé. La figure IV.3c explicite cet état se situant au point n° 3 des figures IV.2a et IV.2b.

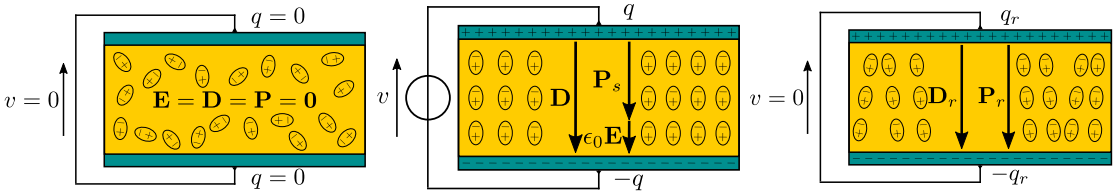
Pour de petites variations du champ électrique autour de cet état de polarisation rémanente, une déformation linéaire du matériau est crée autour de la déformation rémanente (point n° 3) ce que décrit la figure IV.2b. Au niveau macroscopique, le matériau présente désormais un couplage piézoélectrique.

Il est utile de remarquer qu'il est possible d'inverser la polarité du matériau ou de le dépolariser électriquement (et donc d'enlever ses propriétés de couplage piézomécanique) si un fort champ électrique de direction opposée à la polarisation est appliqué [178, 211]. Le champ électrique permettant cette dépolarisation est nommé champ coercitif et noté $\mathbf{E}_c$; celui-ci est représenté sur la figure IV.2a.



(a) Cycle d'hystérésis diélectrique (b) Tracé papillon

FIGURE IV.2 – Courbes caractéristiques d'un cycle de polarisation piézoélectrique (adaptée de [178])



(a) État non-polarisé (b) État saturé (c) État polarisé

FIGURE IV.3 – États de polarisation d'un élément piézoélectrique (adaptée de [48])

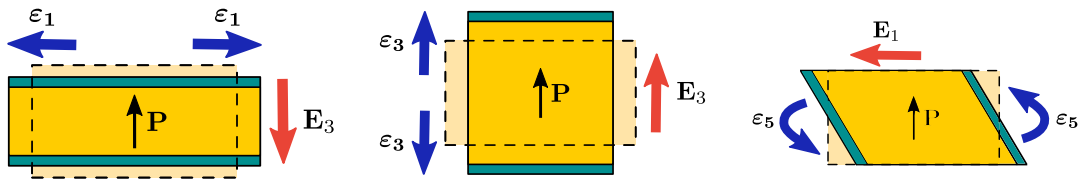
1.3 Mécanismes piézoélectriques

Les différentes caractéristiques des matériaux piézoélectriques sont définies dans un repère cartésien adoptant la notation de Voigt, utilisée dans le chapitre I pour définir les équations de la dynamique d'un solide en rotation et dans le standard de la piézoélectricité [95]. Dans la plupart des articles sur la piézoélectricité, la direction 3 (selon l'épaisseur du matériau piézoélectrique) est fixée comme direction de polarisation de l'élément piézoélectrique. En partant de cette direction de polarisation, trois effets piézoélectriques macroscopiques, dépeints sur la figure IV.4, peuvent être observés :

— L'effet « 31 » est principalement mis à profit dans les applications d'excitation de structure élastique. Un champ électrique est imposé suivant la direction de polarisation, des déformations sont alors induites grâce au matériau piézoélectrique dans les deux directions orthogonales (1 et 2). Cet effet permet ainsi de coupler le mouvement de flexion de la structure aux grandeurs électriques lorsque le matériau piézoélectrique est placé sur la peau de la structure élastique. Cet effet est notamment employé expérimentalement par Charleux *et al.* [28] sur des aubes de compresseur en rotation dans le but d'exciter les premiers modes de flexion puis Laxalde *et al.* [123] pour exciter les modes d'ensemble à diamètres d'un disque aubagé monobloc (DAM) en rotation.

— L'effet « 33 » lie le champ électrique appliqué dans la direction de polarisation et la déformation de la structure selon cette même direction. Swedowicz *et al.* [207] l'ont employé dans le cadre de l'excitation d'aubes de turbine en rotation.

— L'effet « 15 » provoque un cisaillement de l'élément piézoélectrique : un champ électrique est imposé orthogonalement à la direction de polarisation de l'élément piézoélectrique qui est alors soumis à du cisaillement [44] (selon la direction 5, toujours en utilisant les notations de Voigt). Afin que cet effet soit efficace, l'élément piézoélectrique doit être placé au cœur de la structure.



(a) Effet « 31 » (b) Effet « 33 » (c) Effet « 15 »

FIGURE IV.4 – Mécanismes piézoélectriques classiques (adaptée de [215])

2 Formulation d'un problème piézomécanique linéaire

À la suite de la section présentant les propriétés, le comportement et les effets des matériaux piézoélectriques, une modélisation de ces derniers est primordiale afin de les intégrer à la modélisation numérique des aubes composites étudiées sur le module d'expérience PHARE#1. Cette modélisation permet ainsi une représentation plus complète d'un matériau piézoélectrique à partir de ses propriétés mécaniques et piézoélectriques, par rapport à d'autres modélisations simulant l'effet piézoélectrique inverse au moyen d'une contrainte de type thermique ou à partir d'efforts ponctuels et de raideurs ajoutées [29, 64].

La finalité de cette sous-section est de détailler les équations permettant l'obtention d'une formulation éléments finis piézoélectriques autorisant un couplage piézomécanique entre une structure élastique et des composants piézoélectriques. Cette formulation éléments finis repose sur une formulation variationnelle des équations couplées du problème piézomécanique linéaire qui elle-même est développée à partir des lois de comportement linéaire de la piézoélectricité [95].

2.1 Lois de comportement piézoélectrique

Cette sous-section est consacrée aux lois de comportement d'un matériau piézoélectrique en fonctionnement, c'est-à-dire après l'application du processus de polarisation (détaillé en section IV.1). Au repos, le composant piézoélectrique est dans son état polarisé, noté 3 sur la figure IV.2. Il est alors supposé que toutes les grandeurs varient autour de

cet état d'équilibre polarisé avec de très petites amplitudes, de sorte qu'il est possible de considérer le comportement des matériaux piézoélectriques autour de cet état comme linéaire. Cette hypothèse donne lieu à des lois de comportement linéaire utilisées dans la plupart des formulations variationnelles et éléments finis. Bien que des formulations non-linéaires de ces lois aient été développées [17, 107, 142], celles-ci restent peu utilisées dans les versions actuelles des codes éléments finis [7].

Dans le domaine élastique linéaire et pour un matériau présentant des caractéristiques piézoélectriques, la première loi de la thermodynamique [130, 141], stipulant l'existence de l'énergie interne $\mathcal{U}$, et le principe de la conservation d'énergie [218], pour une température constante, permettent d'aboutir aux expressions contenues dans l'équation (IV.1).

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{E}} \tag{IV.1}$$

Dans l'équation (IV.1), $\boldsymbol{\sigma}$ représente le champ des contraintes exprimé en Pa et $\boldsymbol{\varepsilon}$ symbolise le champ des déformations, sans dimension. Pour rappel, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$ sont respectivement le champ électrique exprimé en $\mathrm{V.m^{-1}}$ et le champ de déplacement électrique exprimé en $\mathrm{C.m^{-2}}$. Les grandeurs susmentionnées sont des tenseurs d'ordre un. Par souci de concision, les dépendances en fonction du temps des variables mécaniques et électriques n'apparaissent pas dans les équations intermédiaires de cette section. L'enthalpie électrique, notée $\mathcal{H}$ dans l'équation (IV.1), est définie par

$$\mathcal{H} = \mathcal{U} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \tag{IV.2}$$

Dans le cadre d'une théorie mécanique et piézoélectrique linéaire, l'enthalpie $\mathcal{H}$ s'écrit sous forme quadratique et dépend uniquement des tenseurs $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\mathbf{E}$ [218]. Par conséquent, en utilisant les notations avec indices contractés de Voigt-Kelvin [95] et les propriétés de symétrie des différentes constantes [95, 218], les lois de comportement piézoélectrique s'écrivent alors

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^E & -\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e} & \boldsymbol{\epsilon}^{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \tag{IV.3}$$

où $\mathbf{c}^E$ est le tenseur des constantes élastiques à champ électrique constant d'ordre deux exprimé en Pa (de dimension physique $[\mathrm{M.L^{-1}.T^{-2}}]$), $\mathbf{e}$ est le tenseur piézoélectrique en tension d'ordre deux exprimé en $\mathrm{N.m^{-1}.V^{-1}}$, l'indice $\bullet^{\mathrm{T}}$ symbolise la transposée de la matrice et $\boldsymbol{\epsilon}^{\varepsilon}$ est le tenseur diélectrique à déformation constante d'ordre deux exprimé en $\mathrm{F.m^{-1}}$. Il est intéressant de remarquer qu'en l'absence de champ électrique, la ligne supérieure de l'expression des lois de comportement piézoélectrique (IV.3) correspond à la loi de Hooke appliquée à un solide élastique.

La forme utilisée pour représenter les lois de comportement piézoélectrique (IV.3) est celle majoritairement utilisée dans la littérature. Cependant, il existe plusieurs variantes équivalentes de ces lois, résumées dans le standard de la piézoélectricité de l'IEEE [95] mais aussi dans le chapitre V.

Dans le but d'illustrer les nombreux tenseurs utilisés dans la loi de comportement, la notation développée de cette dernière est donnée dans l'équation (IV.4).

$$\left(\begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \hline D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{14}^E & c_{15}^E & c_{16}^E & -e_{11} & -e_{12} & -e_{13} \\ c_{21}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{24}^E & c_{25}^E & c_{26}^E & -e_{21} & -e_{22} & -e_{23} \\ c_{31}^E & c_{32}^E & c_{33}^E & c_{34}^E & c_{35}^E & c_{36}^E & -e_{31} & -e_{32} & -e_{33} \\ c_{41}^E & c_{42}^E & c_{43}^E & c_{44}^E & c_{45}^E & c_{46}^E & -e_{41} & -e_{42} & -e_{43} \\ c_{51}^E & c_{52}^E & c_{53}^E & c_{54}^E & c_{55}^E & c_{56}^E & -e_{51} & -e_{52} & -e_{53} \\ c_{61}^E & c_{62}^E & c_{63}^E & c_{64}^E & c_{65}^E & c_{66}^E & -e_{61} & -e_{62} & -e_{63} \\ \hline e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & \epsilon_{11}^\varepsilon & \epsilon_{12}^\varepsilon & \epsilon_{13}^\varepsilon \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & \epsilon_{21}^\varepsilon & \epsilon_{22}^\varepsilon & \epsilon_{23}^\varepsilon \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} & \epsilon_{31}^\varepsilon & \epsilon_{32}^\varepsilon & \epsilon_{33}^\varepsilon \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \hline E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\right) \tag{IV.4}$$

En pratique, l'équation matricielle développée des lois de comportement piézoélectrique (IV.4) est très peu utilisée sous sa forme complète. En effet, celle-ci peut se simplifier dans la majorité des cas en fonction des axes de symétrie de l'élément piézoélectrique étudié. Un exemple pour un élément piézoélectrique de la forme d'un patch polarisé selon son épaisseur est donné dans le chapitre V. De plus, quelques détails à propos des paramètres piézoélectriques sont fournis dans ce même chapitre et dans l'annexe C.

2.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle des équations couplées du problème piézomécanique peut être dérivée du principe d'Hamilton dans le cas où le Lagrangien $\mathcal{L}$ est adapté afin d'inclure aussi bien les contributions électriques que mécaniques. L'application du principe d'Hamilton équivaut à vérifier les équations de Lagrange [67], utilisées pour former les équations de la dynamique dans le chapitre I. Dans l'optique d'établir la formulation variationnelle d'un milieu piézoélectrique, Eer Nisse [51] et Tiersten [218] généralisèrent le principe d'Hamilton à la piézoélectricité linéaire en enrichissant l'énergie potentielle $\mathcal{V}$ du système avec l'énergie électrostatique de l'élément piézoélectrique.

Bien que cette approche soit la plus utilisée, d'autres existent et notamment des techniques permettant de travailler avec des variables discrètes telles que la différence de potentiel et la charge libre contenue sur une électrode [45, 48, 215, 216]. L'emploi de ces variables est adapté pour une application de type *shunt* piézoélectrique dans le but de réduire les vibrations d'une structure [47, 191, 192].

Dans un premier temps, les notations et les hypothèses du problème sont rappelées et illustrées sur la figure IV.5. Une structure élastique, occupant un domaine Ω_s, équipée de n_p éléments piézoélectriques occupant un domaine $\Omega^{(p)}$ ($p \in \mathbb{N}$), est considérée. Ω_s et $\Omega^{(p)}$ appartiennent au domaine total Ω.

La structure élastique subit un déplacement imposé $\mathbf{u}_\mathrm{d}$ sur une partie de sa frontière Γ_u. Elle est aussi soumise à une densité volumique d'effort $\mathbf{g}_\mathrm{v}$ sur la totalité de son volume Ω_s ainsi qu'à une densité surfacique d'efforts $\mathbf{g}_\mathrm{s}$ sur une portion de sa frontière Γ_s.

L'élément piézoélectrique p subit un potentiel électrique imposé ϕ_d sur un morceau de sa frontière Γ_ϕ tandis que l'élément $p+1$ est soumis à une densité surfacique de charge q_s sur un tronçon sa frontière Γ_q ; ceci dans le but de généraliser les cas à potentiels imposés et les cas à charges imposées.

La structure élastique n'étant pas constituée par un matériau piézoélectrique, la matrice de couplage piézoélectrique $\mathbf{e}$ est donc nulle dans le domaine Ω_s. Le matériau piézoélectrique est considéré comme isolant, ce qui implique qu'aucune charge volumique libre

ne circule à l'intérieur d'un élément piézoélectrique, et donc que $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$. Les charges libres sont alors toujours considérées comme une densité surfacique de charge concentrée sur les électrodes de l'élément piézoélectrique.

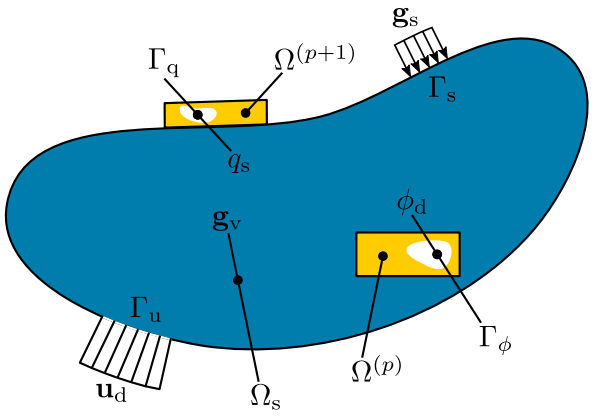


FIGURE IV.5 – Définition des conditions aux limites et du chargement d'une structure élastique munie de deux éléments piézoélectriques (adaptée de [39])

Le principe d'Hamilton, explicité dans le chapitre I, permet d'exprimer la stationnarité de l'énergie totale du système traduit par l'équation

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{V})\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{W}\mathrm{d}t = 0 \tag{IV.5}$$

où $\mathcal{T}$ représente l'énergie cinétique du système, $\mathcal{V}$ regroupe l'énergie de déformation et le potentiel des efforts conservatifs, $\mathcal{W}$ symbolise le travail effectué par les forces dissipatives et δ dénote la variation subie durant l'intervalle de temps t_1 à t_2. La différence $\mathcal{T} - \mathcal{V}$ est définie comme le Lagrangien du système noté $\mathcal{L}$. L'énergie potentielle $\mathcal{V}$, en plus de l'énergie de déformation du système et du potentiel des efforts conservatifs, inclut l'énergie diélectrique liée aux éléments piézoélectriques qui découle de l'expression (IV.2) de l'enthalpie électrique [218].

L'énergie cinétique du système s'écrit

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\dot{\mathbf{u}}^\mathrm{T}\dot{\mathbf{u}}\mathrm{d}\Omega \tag{IV.6}$$

avec ρ la masse volumique du solide élastique.

L'énergie potentielle du système composée de l'énergie de déformation, de l'énergie diélectrique et du potentiel des efforts volumiques et surfaciques externes (mécaniques et électriques) a pour expression

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}\int_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{T}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{E}^\mathrm{T}\mathbf{D})\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \mathbf{u}^\mathrm{T}\mathbf{g}_\mathrm{v}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_\mathrm{s}} \mathbf{u}^\mathrm{T}\mathbf{g}_\mathrm{s}\mathrm{d}\Gamma_\mathrm{s} + \int_{\Gamma_\mathrm{q}} \phi^\mathrm{T} q_\mathrm{s}\mathrm{d}\Gamma_\mathrm{q} \tag{IV.7}$$

Le travail de l'amortissement visqueux s'exprime

$$\delta\mathcal{W} = -\int_\Omega \eta_\mathrm{a}\delta\mathbf{u}^\mathrm{T}\dot{\mathbf{u}}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \eta_\mathrm{b}\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\mathrm{T}\mathbf{c}^E\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathrm{d}\Omega \tag{IV.8}$$

avec η_a et η_b, respectivement le coefficient d'amortissement visqueux et le coefficient d'amortissement interne visqueux définis dans le chapitre I.

La formulation variationnelle des équations couplées du problème piézomécanique peut alors être obtenue en prenant en compte les lois de comportement linéaire d'un matériau piézoélectrique (IV.3) dans l'équation de l'énergie potentielle (IV.7) ainsi qu'en intégrant par partie l'énergie cinétique (IV.6) sur l'intervalle de temps t_1 à t_2 [180] puis enfin, en incluant les équations (IV.6), (IV.7) et (IV.8) dans l'équation du principe d'Hamilton (IV.5). Il vient alors

$$\int_\Omega (\rho\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\ddot{\mathbf{u}} + \eta_{\mathrm{a}}\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{u}} + \eta_{\mathrm{b}}\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}^E\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}^E\boldsymbol{\varepsilon} - \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\mathbf{E} - \delta\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon} - \delta\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\epsilon}^{\varepsilon}\mathbf{E})\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}_{\mathrm{v}}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_{\mathrm{s}}} \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{s}} + \int_{\Gamma_{\mathrm{q}}} \delta\phi^{\mathrm{T}}q_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{q}} = 0 \quad \text{(IV.9)}$$

La formulation variationnelle des équations couplées du problème piézomécanique consiste à trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_{\mathrm{u}}$ tel que $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathrm{d}}$ sur Γ_{u} et $\phi \in \mathcal{C}_{\phi}$ tel que $\phi = \phi^d$ sur Γ_{ϕ} satisfaisant l'équation (IV.9) pour toutes les fonctions test continues $\delta\mathbf{u}$ et $\delta\phi$ en tenant compte des conditions initiales.

2.3 Formulation éléments finis

Grâce à la formulation variationnelle du problème piézomécanique (IV.9), il est maintenant possible de discrétiser ces équations à l'aide de la méthode des éléments finis.

Les premières modélisations éléments finis d'un système couplant piézoélectricité et mécanique trouvent leur origine au début des années 1970 grâce à Allik et Hughes [2] qui proposèrent un élément volumique tétraédrique prenant en compte les effets piézoélectriques. Par la suite de nombreux auteurs eurent recours à cette technique tels que Lerch [127] ou Tzou et Tseng [221] par exemple. Des ouvrages dressant une revue complète des développements dans ce domaine jusqu'à la fin des années 2000 peuvent être consultés pour plus de détails, notamment Benjeddou [16], Mackerle [135, 136] et Collet et Cunefare [33].

De la même manière qu'au chapitre I, des fonctions de forme sont nécessaires afin de discrétiser les équations de la formulation variationnelle (IV.9). Le déplacement $\mathbf{u}$ et le potentiel électrique ϕ sont liés à leurs valeurs nodales $\mathbf{u}_i$ et $\boldsymbol{\phi_i}$ par l'intermédiaire des fonctions de forme $\mathcal{N}_u$ et $\mathcal{N}_{\phi}$.

$$\mathbf{u} = \mathcal{N}_{\mathrm{u}}\mathbf{u}_i \quad \text{(IV.10a)}$$
$$\phi = \mathcal{N}_{\phi}\boldsymbol{\phi}_i \quad \text{(IV.10b)}$$

De plus, le champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et le champ électrique $\mathbf{E}$ sont aussi liés aux déplacements et potentiels nodaux au moyen des fonctions de forme dérivées $\mathcal{B}_u$ et $\mathcal{B}_{\phi}$ définies par

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}\mathcal{N}_{\mathrm{u}}\mathbf{u}_i \quad = \mathcal{B}_u\mathbf{u}_i \quad \text{(IV.11a)}$$
$$\mathbf{E} = -\nabla\mathcal{N}_{\phi}\boldsymbol{\phi}_i = -\mathcal{B}_{\phi}\boldsymbol{\phi}_i \quad \text{(IV.11b)}$$

où ∇ est l'opérateur gradient et $\mathcal{D}$ l'opérateur dérivation défini au chapitre I tel que $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}\mathbf{u}$.

En incorporant les équations (IV.10) et (IV.11), dans les équations de la formulation variationnelle (IV.9), il vient

$$\begin{aligned}
&\delta\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\int_\Omega \rho\mathcal{N}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathcal{N}_{\mathrm{u}}\mathrm{d}\Omega\ddot{\mathbf{u}}_i &&+\delta\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\int_\Omega \eta_{\mathrm{a}}\mathcal{N}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathcal{N}_{\mathrm{u}}\mathrm{d}\Omega\dot{\mathbf{u}}_i\\
&+\delta\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\int_\Omega \eta_{\mathrm{b}}\mathcal{B}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}^E\mathcal{B}_{\mathrm{u}}\mathrm{d}\Omega\dot{\mathbf{u}}_i &&+\delta\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\int_\Omega \mathcal{B}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}^E\mathcal{B}_{\mathrm{u}}\mathrm{d}\Omega\mathbf{u}_i\\
&+\delta\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\int_\Omega \mathcal{B}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\mathcal{B}_{\phi}\mathrm{d}\Omega\boldsymbol{\phi}_i &&+\delta\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}}\int_\Omega \mathcal{B}_{\phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathcal{B}_{\mathrm{u}}\mathrm{d}\Omega\mathbf{u}_i\\
&-\delta\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}}\int_\Omega \mathcal{B}_{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\epsilon}^{\varepsilon}\mathcal{B}_{\phi}\mathrm{d}\Omega\boldsymbol{\phi}_i &&-\delta\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\int_\Omega \mathcal{N}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}_{\mathrm{v}}\mathrm{d}\Omega\\
&-\delta\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\int_{\Gamma_{\mathrm{s}}} \mathcal{N}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{s}} &&+\delta\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}}\int_{\Gamma_{\mathrm{q}}} \mathcal{N}_{\phi}^{\mathrm{T}}q_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{q}}=0
\end{aligned} \tag{IV.12}$$

A partir de l'équation (IV.12), la formulation éléments finis élémentaire du problème piézomécanique sous forme matricielle peut être explicitée

$$\begin{pmatrix}\mathbf{M}^{(k)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\mathbf{u}}_i(t)\\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_i(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{C}^{(k)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{u}}_i(t)\\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_i(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{K}_{\mathrm{uu}}^{(k)} & \mathbf{K}_{\mathrm{u}\phi}^{(k)}\\ \mathbf{K}_{\phi\mathrm{u}}^{(k)} & \mathbf{K}_{\phi\phi}^{(k)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_i(t)\\ \boldsymbol{\phi}_i(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{g}^{(k)}(t)\\ \mathbf{q}^{(k)}(t)\end{pmatrix} \tag{IV.13}$$

avec les différentes matrices élémentaires exprimées telles que

$$\mathbf{M}^{(k)}=\int_\Omega \rho\mathcal{N}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathcal{N}_{\mathrm{u}}\mathrm{d}\Omega \tag{IV.14}$$

$$\mathbf{C}^{(k)}=\int_\Omega \eta_{\mathrm{a}}\mathcal{N}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathcal{N}_{\mathrm{u}}\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega \eta_{\mathrm{b}}\mathcal{B}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}^E\mathcal{B}_{\mathrm{u}}\mathrm{d}\Omega \tag{IV.15}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{uu}}^{(k)}=\int_\Omega \mathcal{B}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}^E\mathcal{B}_{\mathrm{u}}\mathrm{d}\Omega \tag{IV.16}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{u}\phi}^{(k)}=\int_\Omega \mathcal{B}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\mathcal{B}_{\phi}\mathrm{d}\Omega \tag{IV.17}$$

$$\mathbf{K}_{\phi\mathrm{u}}^{(k)}=\mathbf{K}_{\mathrm{u}\phi}^{(k)^{\mathrm{T}}} \tag{IV.18}$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^{(k)}=-\int_\Omega \mathcal{B}_{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\epsilon}^{\varepsilon}\mathcal{B}_{\phi}\mathrm{d}\Omega \tag{IV.19}$$

qui sont respectivement, la matrice élémentaire de masse, d'amortissement visqueux, de raideur élastique, de raideur piézomécanique et de raideur diélectrique. De plus, les vecteurs d'efforts mécaniques et de charges électriques s'écrivent respectivement

$$\mathbf{g}^{(k)}=\int_\Omega \mathcal{N}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}_{\mathrm{v}}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{\mathrm{s}}} \mathcal{N}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{s}} \tag{IV.20}$$

$$\mathbf{q}^{(k)}=\int_{\Gamma_{\mathrm{q}}} \mathcal{N}_{\phi}^{\mathrm{T}}q_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{q}} \tag{IV.21}$$

Après assemblage des matrices élémentaires de la méthode éléments finis (IV.13), il vient

$$\begin{pmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\mathbf{u}}(t)\\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{u}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{\phi}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{K}_{\mathrm{uu}} & \mathbf{K}_{\mathrm{u}\phi}\\ \mathbf{K}_{\phi\mathrm{u}} & \mathbf{K}_{\phi\phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \boldsymbol{\phi}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{g}(t)\\ \mathbf{q}(t)\end{pmatrix} \tag{IV.22}$$

L'équation matricielle (IV.22) représente la formulation éléments finis d'un système élastique amorti équipé de composants piézoélectriques sur sa frontière. Par souci de concision, le système n'est pas considéré en rotation contrairement à la formulation éléments

finis purement élastique du chapitre I. Cependant, dans le but d'écrire cette formulation éléments finis piézomécanique dans une configuration mobile, il est possible d'ajouter les matrices $\mathbf{G}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{T}$ à la partie mécanique de l'équation matricielle (IV.22) en admettant que les grandeurs électriques ne sont pas affectées par la rotation de la structure. Les efforts non-linéaires $\mathbf{f}_{\text{nl}}$ peuvent aussi être introduits dans l'équation (IV.22).

3 Condensation du problème piézomécanique

La formulation éléments finis du problème piézomécanique couplé (IV.22) contient aussi bien des variables mécaniques $\mathbf{u}$ qu'électriques $\boldsymbol{\phi}$. Or, afin de pouvoir employer les méthodes de résolution détaillées dans le chapitre II et les méthodes de réduction de modèle numérique exposées dans le chapitre III, il est nécessaire de s'affranchir des variables électriques. C'est pourquoi une méthode de condensation des degrés de liberté électriques est présentée dans la suite de cette section ainsi que la validation de cette méthode sur un secteur de soufflante composite équipé d'actionneurs piézoélectriques.

3.1 Condensation des degrés de liberté électriques

A partir de la formulation matricielle piézomécanique (IV.22), de nombreuses méthodes de condensation ont été utilisées dans le but de réduire la taille du problème et notamment une méthode de condensation analogue à une méthode de condensation statique de Guyan décrite dans le chapitre III mais aussi analogue à l'évaluation du complément de Schur utilisée dans les techniques de condensation du chapitre II. Cette procédure permet ainsi de transformer le problème couplé en un problème purement élastique [2, 93, 221] et donc de découpler les effets direct et inverse de la piézoélectricité. Cependant, celle-ci est uniquement exploitable lorsqu'un des deux effets piézoélectriques est employé. Dans le cadre d'applications nécessitant les deux effets piézoélectriques, telles les méthodes de réduction des vibrations par *shunt* piézoélectrique, il est primordial de conserver ce couplage. Par conséquent, de nouvelles méthodes de condensation ont été développées [33, 39, 212].

L'application faite des éléments piézoélectriques dans le cadre de cette thèse, soit l'excitation des aubes composites d'une soufflante en rotation, nécessite uniquement l'emploi de l'effet piézoélectrique inverse. Il est donc envisageable d'exploiter une méthode de condensation de type Guyan. Cette condensation des degrés de liberté électriques nécessite une transformation de la formulation (IV.22) en vue de la simplifier compte tenu de la forme des patchs piézoélectriques.

Les actionneurs utilisés pour mettre en vibration les aubes de la soufflante composite ont la forme de patchs parallélépipédiques d'épaisseur constante et faible comparée à leurs autres dimensions. Un schéma du patch est représenté en figure IV.6. Il est alors possible de considérer que :

- les surfaces supérieures et inférieures des patchs piézoélectriques sont équipées d'électrodes conductrices très fines ;
- le matériau piézoélectrique est polarisé dans la direction transverse du patch ;
- les surfaces latérales des patchs ne contiennent aucune charge électrique libre [48].

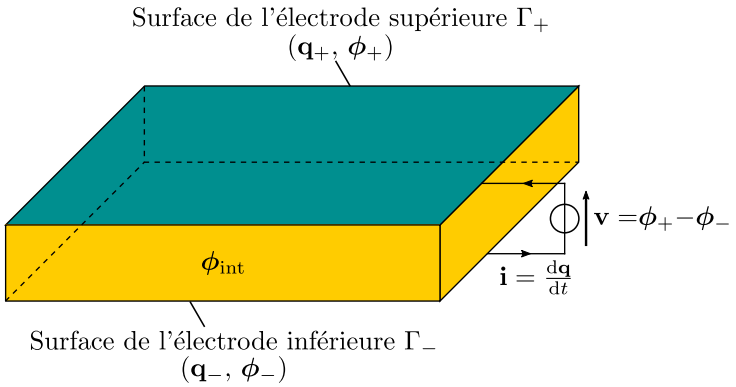


FIGURE IV.6 – Schéma d'un patch piézoélectrique

La formulation éléments finis du problème piézomécanique (IV.22) devient alors

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_+(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_{\mathrm{int}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_-(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_+(t) \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_{\mathrm{int}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_-(t) \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\mathrm{uu}} & \mathbf{K}_{\mathrm{u}\phi_+} & \mathbf{K}_{\mathrm{u}\phi_{\mathrm{int}}} & \mathbf{K}_{\mathrm{u}\phi_-} \\ \mathbf{K}_{\phi_+\mathrm{u}} & \mathbf{K}_{\phi_+\phi_+} & \mathbf{K}_{\phi_+\phi_{\mathrm{int}}} & \mathbf{K}_{\phi_+\phi_-} \\ \mathbf{K}_{\phi_{\mathrm{int}}\mathrm{u}} & \mathbf{K}_{\phi_{\mathrm{int}}\phi_+} & \mathbf{K}_{\phi_{\mathrm{int}}\phi_{\mathrm{int}}} & \mathbf{K}_{\phi_{\mathrm{int}}\phi_-} \\ \mathbf{K}_{\phi_-\mathrm{u}} & \mathbf{K}_{\phi_-\phi_+} & \mathbf{K}_{\phi_-\phi_{\mathrm{int}}} & \mathbf{K}_{\phi_-\phi_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \boldsymbol{\phi}_+(t) \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{int}}(t) \\ \boldsymbol{\phi}_-(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{q}_+(t) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_-(t) \end{pmatrix} \quad \text{(IV.23)}$$

avec $\boldsymbol{\phi}_+$, $\boldsymbol{\phi}_-$, $\mathbf{q}_+$ et $\mathbf{q}_-$, respectivement, les vecteurs des potentiels et des charges électriques des électrodes supérieures et inférieures et $\boldsymbol{\phi}_{int}$, le vecteur des potentiels électriques des nœuds entre les deux électrodes comme spécifié sur le schéma de la figure IV.6.

Lorsque le système est à l'équilibre électrostatique, la forme intégrale du théorème de Gauss appliquée à la surface fermée d'un patch piézoélectrique implique que les charges à la surface des électrodes soient opposées [216], il vient alors $\mathbf{q}_+ = -\mathbf{q}_- = \mathbf{q}$. De plus, l'électrode inférieure du patch piézoélectrique étant reliée à la masse de l'amplificateur linéaire de puissance, il est possible d'écrire $\boldsymbol{\phi}_- = \mathbf{0}$ et donc $\mathbf{v} = \boldsymbol{\phi}_+$ avec $\mathbf{v}$ la différence de potentiel entre l'électrode supérieure et l'électrode inférieure. L'équation (IV.23) peut se réécrire

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(t) \\ \ddot{\mathbf{v}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}_{\mathrm{int}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_{\mathrm{int}}(t) \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\mathrm{uu}} & \mathbf{K}_{\mathrm{uv}} & \mathbf{K}_{\mathrm{u}\phi_{\mathrm{int}}} \\ \mathbf{K}_{\mathrm{vu}} & \mathbf{K}_{\mathrm{vv}} & \mathbf{K}_{\mathrm{v}\phi_{\mathrm{int}}} \\ \mathbf{K}_{\phi_{\mathrm{int}}\mathrm{u}} & \mathbf{K}_{\phi_{\mathrm{int}}\mathrm{v}} & \mathbf{K}_{\phi_{\mathrm{int}}\phi_{\mathrm{int}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{int}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{(IV.24)}$$

La différence de potentiel aux bornes étant imposée, le but de l'étape de condensation est donc d'éliminer les degrés de liberté de tension interne. Après condensation des degrés de liberté de tension interne des patchs piézoélectriques, le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(t) \\ \ddot{\mathbf{v}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}^*_{\mathrm{uu}} & \mathbf{K}^*_{\mathrm{uv}} \\ \mathbf{K}^*_{\mathrm{vu}} & \mathbf{K}^*_{\mathrm{vv}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{pmatrix} \quad \text{(IV.25)}$$

où

$$\mathbf{K}^*_{\mathrm{uu}} = \mathbf{K}_{\mathrm{uu}} - \mathbf{K}_{\mathrm{u}\phi_{\mathrm{int}}}\mathbf{K}^{-1}_{\phi_{\mathrm{int}}\phi_{\mathrm{int}}}\mathbf{K}_{\phi_{\mathrm{int}}\mathrm{u}} \tag{IV.26}$$

$$\mathbf{K}^*_{\mathrm{uv}} = \mathbf{K}_{\mathrm{uv}} - \mathbf{K}_{\mathrm{u}\phi_{\mathrm{int}}}\mathbf{K}^{-1}_{\phi_{\mathrm{int}}\phi_{\mathrm{int}}}\mathbf{K}_{\phi_{\mathrm{int}}\mathrm{v}} \tag{IV.27}$$

$$\mathbf{K}^*_{\mathrm{vu}} = \mathbf{K}^{*^{\mathrm{T}}}_{\mathrm{uv}} \tag{IV.28}$$

$$\mathbf{K}^*_{\mathrm{vv}} = \mathbf{K}_{\mathrm{vv}} - \mathbf{K}_{\mathrm{v}\phi_{\mathrm{int}}}\mathbf{K}^{-1}_{\phi_{\mathrm{int}}\phi_{\mathrm{int}}}\mathbf{K}_{\phi_{\mathrm{int}}\mathrm{v}} \tag{IV.29}$$

L'équation matricielle peut être écrite en deux équations distinctes

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}^*_{\mathrm{uu}}\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}^*(t)} \tag{IV.30}$$

$$\mathbf{K}^*_{\mathrm{vu}}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}^*_{\mathrm{vv}}\mathbf{v}(t) = \mathbf{q}(t) \tag{IV.31}$$

avec $\mathbf{g}^*(t) = \mathbf{g}(t) - \mathbf{K}^*_{\mathrm{uv}}\mathbf{v}(t)$ contenant les efforts mécaniques et les efforts piézoélectriques proportionnels à la tension aux bornes des patchs piézoélectriques.

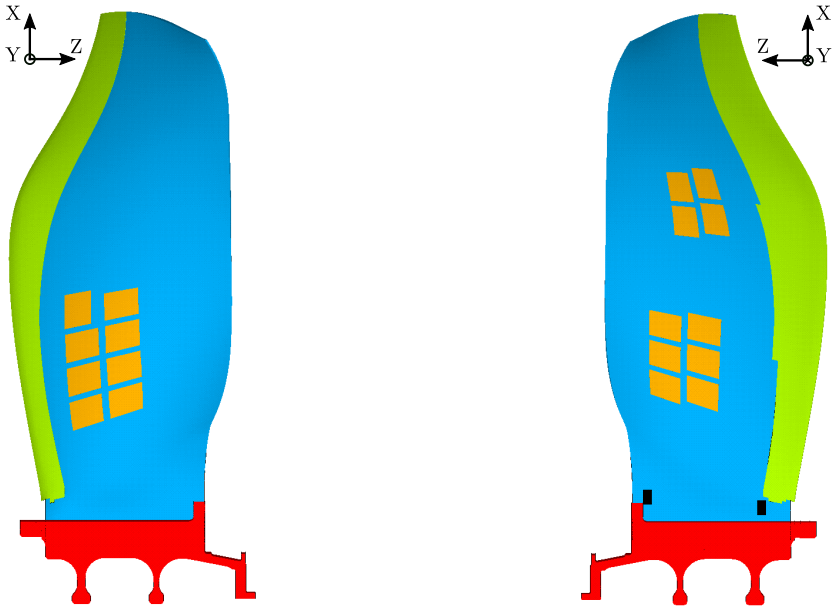
L'équation (IV.30) s'apparente à l'équation fondamentale de la dynamique linéaire incluant les efforts piézoélectriques et une raideur piézoélectrique contenue dans le second terme de $\mathbf{K}^*_{\mathrm{uu}}$. L'équation (IV.31) permet quant-à elle d'exprimer les charges électriques contenues à la surface de l'électrode supérieure (et donc l'intensité électrique) en fonction de la tension $\mathbf{v}$ et du déplacement $\mathbf{u}$.

Bien que l'objectif principal de cette méthode de condensation soit de découpler les équations piézomécaniques ce qui permet d'inclure directement l'effet piézoélectrique inverse (convertissant l'énergie électrique en énergie mécanique) dans les méthodes de résolution du chapitre II et les méthodes de réduction de modèle numérique exposées dans le chapitre III, elle permet aussi de réduire le modèle piézomécanique puisque tous les degrés de liberté électriques sont éliminés. De plus, cette méthode de condensation est exacte, aux erreurs d'arrondis près, puisqu'aucune "inertie" ou terme d'ordre de dérivée supérieure ne sont associés aux degrés de liberté piézoélectriques. Il est néanmoins intéressant de valider la théorie et l'implémentation de cette méthode sur un modèle éléments finis d'une aube de soufflante préchargée en rotation.

3.2 Validation de la méthode de condensation

La validation numérique de la méthode de condensation des degrés de liberté électriques est réalisée à l'aide d'un secteur de soufflante identique à celle exploitée en rotation dans le banc PHARE#1 et dans les chapitres suivant consacrées à la corrélation entre simulations et essais. À savoir, un secteur de soufflante dont l'aube est en composite tissé 3D (le procédé de modélisation est décrit dans le chapitre I) et intégrant un bord d'attaque en titane. Le disque est en titane, ses frontières présentent des conditions aux limites associées à un diamètre nodal zéro (cf. chapitre I) et l'arrière de ce dernier est bloqué axialement et orthoradialement (cf. chapitre VI). Un amortissement visqueux modal forfaitaire de 0.1 % est appliqué à l'ensemble de la structure élastique. Le secteur entier est soumis à une précharge en rotation à une vitesse correspondant à 50 % de la vitesse de rotation maximale de la soufflante. Les nœuds de contact à l'interface entre le disque et l'aube sont considérés comme collés : la validation de cette méthode est donc réalisée dans le cadre de la dynamique linéaire ce qui est suffisant puisque la formulation piézomécanique décrite dans ce chapitre est linéaire.

Dix-huit patchs piézoélectriques (en jaune sur la figure IV.7) sont positionnés à la surface du modèle numérique de l'aube composite ; 8 patchs sont placés sur l'extrados et 10 sur l'intrados. Les patchs sont câblés en parallèle, c'est-à-dire qu'ils reçoivent tous la même tension. Les caractéristiques piézoélectriques et mécaniques du matériau piézoélectrique des actionneurs sont communiquées en annexe C.2. Les patchs sur chacune des faces sont connectés en opposition de phase afin d'additionner les effets. Plus de détails sur le positionnement de ces dix-huit patchs ainsi que leur fixation sur l'aube sont donnés dans le chapitre V. La figure IV.7 fournit une représentation de l'intrados et de l'extrados du modèle numérique du secteur de soufflante équipé des actionneurs piézoélectriques. L'ensemble du secteur et des actionneurs est soumis à une précharge centrifuge décrite dans le chapitre I.

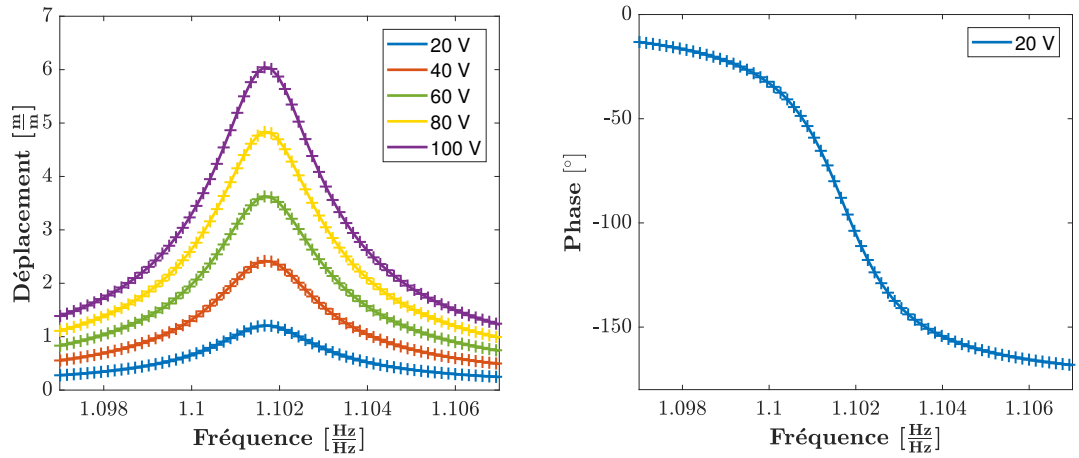


(a) Extrados (b) Intrados

FIGURE IV.7 – Géométrie du modèle numérique d'un secteur {aube+disque} de soufflante équipé de patchs piézoélectriques

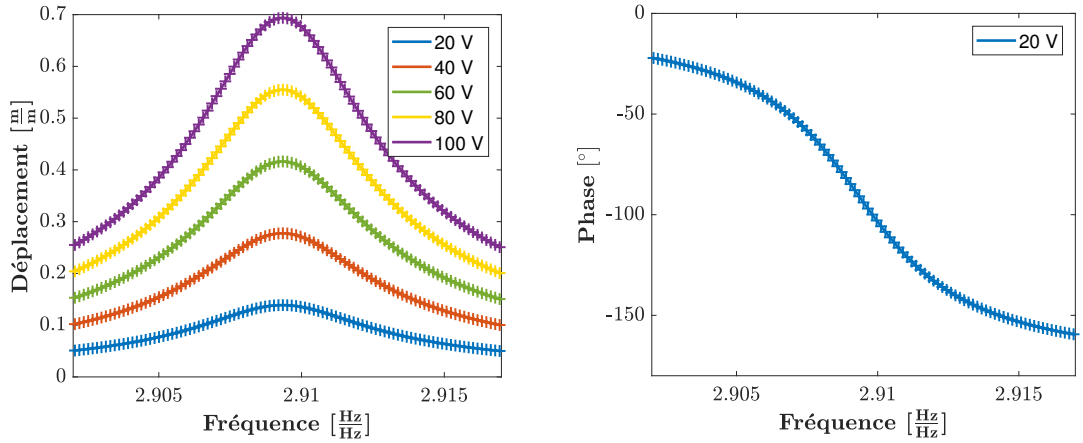
La méthode de condensation des degrés de liberté électriques est appliquée avant la résolution du système linéaire (décrite au chapitre II) pour les modes de vibration ciblés, soit le premier mode de flexion (1F) et le deuxième mode de flexion (2F). Ces réponses forcées obtenues à l'aide d'une résolution linéaire utilisant préalablement la méthode de condensation sont comparées avec les réponses forcées acquises grâce au logiciel éléments finis ANSYS® (version 16.1) par l'intermédiaire d'une analyse harmonique et d'une résolution de type *full* conservant toutes les variables électriques. Plusieurs tensions de 20 V à 100 V sont appliquées successivement aux bornes des éléments piézoélectriques. Les résultats en amplitude et en phase de cette comparaison sont placés en figure IV.8 pour le premier mode de flexion et en figure IV.9 pour le deuxième mode de flexion. Pour plus de clarté, une seule courbe de réponse forcée en phase est tracée sur les figures IV.8b et IV.9b. La fréquence d'excitation ainsi que l'amplitude de déplacement sont normalisées dans ces figures pour des raisons de confidentialité industrielle.

Comme attendu, puisque la condensation des degrés de liberté électriques est exacte, les courbes des réponses forcées en amplitude et en phase IV.8 et IV.9, pour une même tension d'excitation, se superposent aux erreurs d'arrondis près. La méthode de condensation ainsi que son implémentation numérique sont donc validées.



(a) Amplitude (b) Phase

FIGURE IV.8 – Comparatif des réponses forcées du mode premier mode de flexion évaluées au moyen d'une résolution couplée (—) et d'une résolution avec condensation (+)



(a) Amplitude (b) Phase

FIGURE IV.9 – Comparatif des réponses forcées du mode deuxième mode de flexion évaluées au moyen d'une résolution couplée (—) et d'une résolution avec condensation (+)

4 Bilan

Ce chapitre a permis d'introduire les principes fondamentaux de la piézoélectricité tels que les processus de polarisation des matériaux piézoélectriques, notamment des céramiques PZT, ainsi que les différents effets piézoélectriques macroscopiques résultant du couplage piézomécanique. À la suite de cette introduction physique sur la piézoélectricité, les lois de comportement piézoélectrique ont été exposées pour permettre de développer la formulation variationnelle d'un milieu piézomécanique grâce au principe d'Hamilton. Les

équations de la formulation variationnelle ont été discrétisées à l'aide de la méthode des éléments finis pour obtenir les équations couplées matricielles du problème piézomécanique.

La formulation éléments finis piézomécanique comprend des variables mécaniques et électriques. C'est pourquoi, afin de pouvoir utiliser les techniques de résolution d'un système non-linéaire abordées dans le chapitre II et de réduction de modèle numérique exposées dans le chapitre III, il a été nécessaire de se ramener à une formulation ne comprenant que des degrés de liberté mécaniques. Pour cela, une méthode de condensation des degrés de liberté électriques, analogue à une méthode de condensation statique de Guyan, a été mise en place. Celle-ci a permis de formuler le problème piézoélectrique inverse uniquement en fonction des variables mécaniques sans perdre d'informations puisque cette méthode de condensation est exacte.

Grâce aux méthodes de résolution d'un système non-linéaire, aux techniques de réduction de modèle numérique par sous-structuration ainsi qu'à la modélisation des actionneurs piézoélectriques exposées dans ce chapitre et les deux chapitres précédents, les outils numériques nécessaires à l'analyse dynamique de la soufflante sont réunis. Outre la présentation des essais menés sur la soufflante, des méthodes expérimentales et des résultats obtenus grâce à ces essais, les deux derniers chapitres de cette thèse sont consacrés à la corrélation entre les simulations et les essais. Des simulations, utilisant notamment les méthodes présentées dans les chapitres précédents, sur des aubes composites encastrées dans un mors (cf. chapitre V) et sur la soufflante composite complète en rotation (cf. chapitre VI) sont donc révélées.

Chapitre V

Essais et simulations numériques d'une aube en composite tissé

Ces essais sur mors ont été réalisés dans un premier temps avec pour objectifs principaux de valider le système d'excitation et l'instrumentation des dix-huit aubes de la soufflante. Ces essais permettent également une caractérisation modale de chaque aube ainsi qu'une estimation de la dispersion des caractéristiques dynamiques sur un échantillon de 18 spécimens en vue d'essais sur la roue complète. La qualité et la quantité des mesures, permettant notamment de faire ressortir les non-linéarités de contact et de frottement des aubes de façon représentative par rapport à des essais en rotation grâce au système de serrage du pied d'aube, ont par la suite permis d'effectuer des comparaisons entre les résultats expérimentaux et les simulations numériques non-linéaires pour les deux premiers modes de flexion de la structure. Une partie des essais vibratoires et des simulations numériques proposés dans ce chapitre sont issus d'un papier présenté à l'IMAC [133].

Les essais réalisés dans le cadre de cette étude sur mors sont détaillés dans la première section de ce chapitre en soulignant les méthodes expérimentales exploitées ainsi que le dispositif expérimental et le système d'excitation des aubes mis en place. La deuxième section traite des simulations numériques non-linéaires réalisées à partir du modèle numérique éléments finis du système {aube+mors}. Le processus préparatoire des simulations numériques est détaillé dans cette même section, préalablement aux études d'influence permettant de fixer plusieurs paramètres liés à la modélisation et aux simulations numériques. Pour conclure ce chapitre, les confrontations en dynamique linéaire et surtout non-linéaire entre les essais vibratoires et les simulations numériques sont exposées.

Sommaire

1 Analyse expérimentale non-linéaire 124
1.1 Dispositif expérimental 124
1.2 Système d'excitation piézoélectrique 128
1.3 Méthodes expérimentales 136
2 Simulations numériques non-linéaires 147
2.1 Modélisation numérique 147
2.2 Méthodes numériques non-linéaires 152
2.3 Études d'influence 162
3 Confrontation entre essais vibratoires et simulations numériques 169
3.1 Étude linéaire 169
3.2 Étude non-linéaire 173
4 Bilan 183

Il est important de mentionner que pour des raisons de confidentialité industrielle, les grandeurs (fréquence, amplitudes de déplacement et de déformation, taux d'amortissement et courant) exposées dans ce chapitre sont normalisées.

1 Analyse expérimentale non-linéaire

Les essais en réponse forcée abordés dans cette section ont été menés individuellement sur chacune des dix-huit aubes en composite tissé 3D constituant la soufflante testée en rotation sur le module structure PHARE#1 de la plateforme Dynamique des Machines Tournantes du LTDS, essais en rotation abordés dans le chapitre VI. Ces essais ont été réalisés dans le référentiel fixe, c'est-à-dire sans rotation de la structure. À cet effet, chaque aube a été enchâssée dans un mors de serrage dans le but d'étudier la réponse forcée des aubes. La particularité de cette expérimentation réside dans le moyen d'excitation des aubes par le biais de patchs piézoélectriques, judicieusement positionnés sur les aubes, qui permettent ainsi d'exciter les aubes jusqu'à des amplitudes significatives par rapport à celles observées sur moteur et pour lesquelles les effets non-linéaires peuvent être évalués.

L'un des objectifs principaux de ces essais sur mors demeure la validation des amplitudes vibratoires provoquées au moyen des actionneurs piézoélectriques. L'évaluation de la dispersion des caractéristiques dynamiques de chaque aube, permettant la prise en compte du désaccordage de la soufflante en vue d'essais en rotation sur la soufflante complète, ainsi que l'estimation des non-linéarités, liées au contact et au frottement en pied d'aube, constituent les autres objectifs principaux de cette première étude expérimentale.

Cette section débute par une présentation du montage expérimental et de l'instrumentation employée. La deuxième sous-section détaille le système d'excitation par actionneurs piézoélectriques en se focalisant particulièrement sur les patchs et leur positionnement sur l'aube. Pour conclure cette section, les méthodes expérimentales concernant le protocole expérimental, le dépouillement des résultats par identification modale et les incertitudes de mesures sont abordées.

1.1 Dispositif expérimental

En plus du système d'excitation, deux autres éléments constituent l'essentiel de la manipulation à savoir le montage expérimental en lui-même ainsi que le système d'acquisition permettant de collecter les données dynamiques. Ces deux éléments sont présentés dans les paragraphes suivants.

1.1.1 Montage expérimental

Les structures testées durant ces essais en réponse forcée sont des aubes de soufflante en composite tissé 3D, matériau dont la fabrication a été abordée dans le chapitre I, arborant un bord d'attaque en titane. Celles-ci sont similaires à celles exploitées dans les turboréacteurs de dernière génération tel le LEAP, conçu et produit par Safran Aircraft Engines et General Electric Aviation. Ces aubes sont illustrées dans les figures V.1 et V.5. Toutes les aubes de la soufflante (soit dix-huit), prévues pour le montage de la soufflante complète, ont successivement été testées dans le référentiel fixe avec pour objectif initial de valider le montage et le câblage des actionneurs piézoélectriques ainsi que son instrumentation avant d'être toutes montées sur le banc d'essais PHARE#1 pour subir des essais en rotation qui sont l'objet du chapitre VI.

Afin d'étudier la dynamique de l'aube dans des conditions expérimentales proches de celles endurées sur disque, le pied de l'aube, en forme de queue d'aronde, est inséré dans l'alvéole d'un mors. Ce dernier est un massif parallélépipédique rectangulaire en acier, représenté en figure V.1, dont la masse d'environ cent cinquante kilogrammes permet de restituer la fréquence moyenne de résonance du premier mode de flexion mesurée sur disque. Un clinquant (fine plaque métallique décrite dans le chapitre I) est inséré à l'interface de contact entre le pied d'aube et le mors pour se rapprocher des montages rencontrés sur disque.

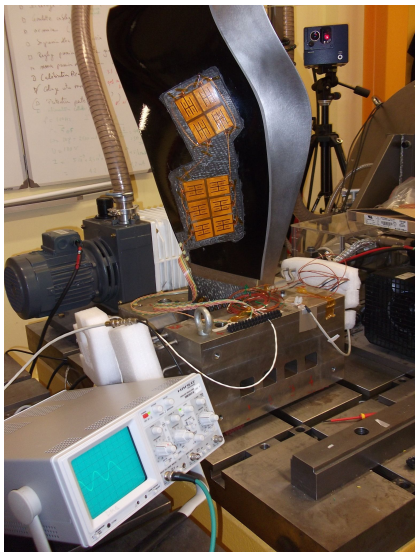


FIGURE V.1 – Illustration du montage expérimental

Dans le but de le découpler du sol, l'ensemble {mors+aube} est positionné sur des suspensions élastiques, le tout placé sur un massif d'isolation en béton de plusieurs tonnes, lui-même suspendu. Les fréquences de résonance des modes de suspension (liés aux suspensions élastiques) du système {aube+mors} ont été mesurées. Celles-ci sont toutes inférieures à dix Hertz et de dix à vingt fois plus faibles que la fréquence du premier mode de flexion de la structure ce qui garantit une isolation correcte du système par rapport au massif. Ainsi, ce massif n'est pas pris en compte dans la modélisation numérique et est considéré comme infiniment rigide.

Par ailleurs, quatre vis, accessibles via la partie inférieure du mors et réparties régulièrement selon la longueur du pied d'aube, assurent la mise en contact et le serrage de l'aube dans l'alvéole du mors par l'intermédiaire d'une cale, comme représenté sur le schéma de la figure V.2. Le couple de serrage des quatre vis est défini afin que les efforts de contact entre les portées de l'alvéole et de l'aube soient représentatifs des efforts de contact induits par les efforts centrifuges d'une aube en rotation à 70 % de la vitesse de rotation nominale de la soufflante.

Le serrage des vis est effectué au moyen d'une clé dynamométrique en respectant le même protocole de serrage pour chaque aube en termes d'ordre de serrage des vis et d'intensité progressive de serrage : 60 % puis 80 % pour finir avec deux serrages à 100 % du couple nominal. Ce protocole permet une bonne répétabilité du serrage et ainsi de la mesure de la dynamique du système, quantifiée en sous-section V.1.3. Par ailleurs, l'incertitude de répétabilité est inférieure à la dispersion observée entre les aubes ce qui autorise à imputer cette dispersion aux aubes en elles-mêmes et non au montage.

Toutefois, il est d'ores et déjà possible de noter d'importantes différences entre les conditions expérimentales sur mors et sur disque. Premièrement, la précharge de l'aube au moyen du système de serrage est localisée en pied d'aube : celle-ci n'est donc pas contrainte comme lorsqu'elle est centrifugée en rotation. De plus, des efforts supplémentaires sont exercés par le système de serrage sous le pied de l'aube. Enfin, sur disque, les différentes aubes montées sont susceptibles d'être couplées entre elles, tandis que sur mors l'aube est isolée et ne se couple éventuellement qu'avec la masse de celui-ci.

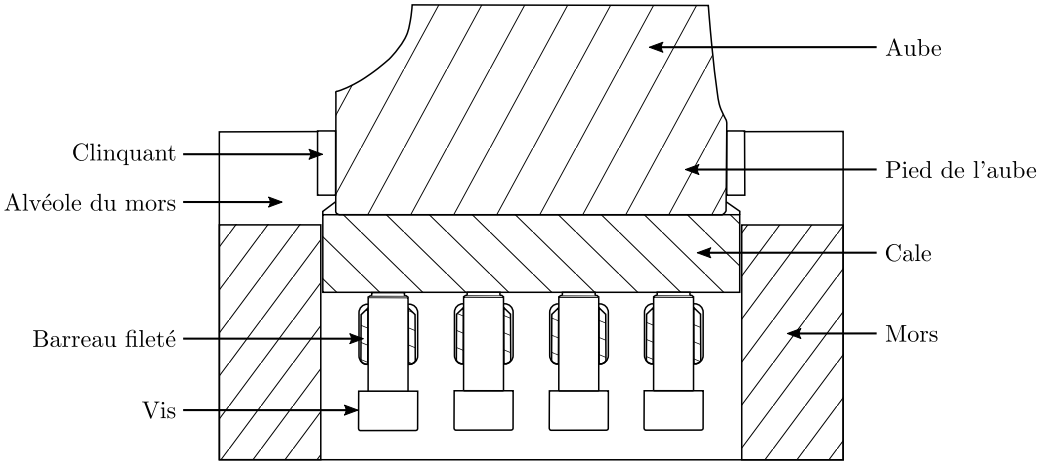


Figure V.2 – Schéma en coupe du système de serrage du mors

1.1.2 Instrumentation et système d'acquisition

La mesure de la dynamique de l'aube dans cette campagne d'essais sur mors est réalisée par l'intermédiaire de deux techniques différentes : la première par extensométrie à l'aide de jauges de déformation et la seconde par interférométrie au moyen d'un vibromètre laser. Le positionnement de ces capteurs est donné en figure V.3.

La mesure par extensométrie permet d'évaluer les déformations dans une zone fixe de la structure étudiée, au moyen de jauges de déformation. Le principe de mesure des jauges est de convertir la déformation de la zone ciblée de la structure en variation de résistance électrique. Ces dernières sont constituées d'une trame [9, 228] fabriquée à partir d'une mince feuille métallique de quelques micromètres d'épaisseur et d'un isolant électrique recouvrant cette trame. Cette série d'essais sur les dix-huit aubes a ainsi permis de valider le bon fonctionnement et la calibration des jauges dans le but de les employer, par la suite, en rotation sur le banc PHARE#1.

Les jauges de déformation employées sont des jauges uniaxiales à trame pelliculaire Vishay - Micro Measurements de référence CEA-00-250UW-350 dont la documentation technique est proposée en annexe C.1. Deux jauges de déformation ont été collées, à même le composite, sur chacune des dix-huit aubes, toutes deux au dessus du pied d'aube du côté intrados et orientées selon l'axe X. La première jauge est proche du bord d'attaque et la seconde du bord de fuite comme représentées en noir sur la figure V.3b. Les emplacements des jauges correspondent à un compromis entre les zones de fortes déformations, selon l'axe X, des différentes vitesses de rotation prévues sur le banc d'essais PHARE#1. Le nombre de deux jauges a été choisi afin de pouvoir différencier certains modes, dont les fréquences de résonance sont proches, à l'aide de la forme du mode et donc du rapport entre les deux jauges. Ce cas de figure se présente notamment entre le deuxième mode

de flexion de l'aube et son premier mode de torsion, cas de figure perceptible sur le diagramme fréquences / diamètres de la soufflante dans le chapitre I.

Le conditionnement des jauges de déformations fait appel à un montage en pont de Wheatstone. Le conditionneur utilisé dans ces essais sur mors est un Vishay - Micro Measurements de référence 2060B [228] comportant deux ponts de jauges.

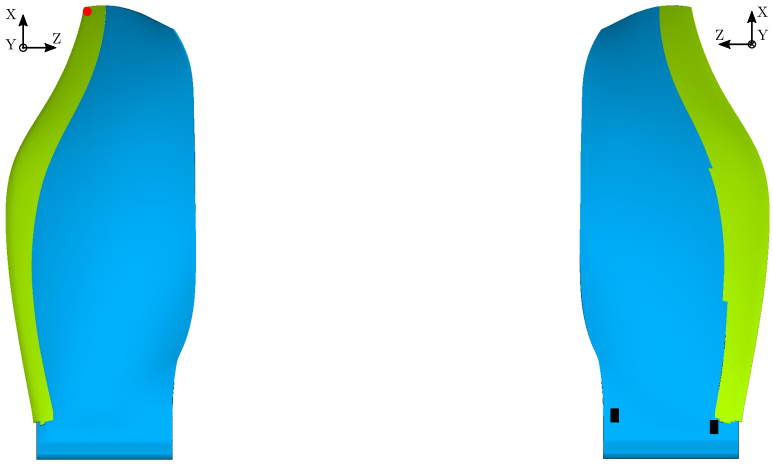
Ces ponts de Wheatstone sont montés en quart de pont à trois fils, l'un des trois fils permettant de compenser en partie les variations de résistance des cheminements jusqu'aux éléments sensibles. L'étalonnage de ces derniers est préalablement accompli à l'aide de la méthode de l'étalonnage *shunt* [13] permettant de calibrer la sortie tension du conditionneur de jauge lorsqu'une résistance de valeur Ohmique connue avec précision est insérée dans le pont de Wheatstone [9]. De plus, préalablement à la mesure, les ponts de jauges nécessitent un équilibrage de l'une des résistances du pont [228].

La tension d'alimentation des jauges est fixée à 2 V ce qui représente un bon compromis entre la puissance maximale dissipable par les jauges [228] et l'amplitude du signal de mesure. Le composite de l'aube dissipant très peu la chaleur, le choix de la tension d'alimentation des jauges est notable. La tension du signal de mesure est convertie en déformation par l'intermédiaire de l'expression

$$\varepsilon = \frac{4 v_\mathrm{s}}{v_\mathrm{e} K_\mathrm{j} G_\mathrm{pont}} \tag{V.1}$$

avec ε la déformation mécanique moyenne subie par les jauges, v_s la tension du signal de mesure, $v_\mathrm{e} = 2\,\mathrm{V}$ la tension d'alimentation du pont, $K_\mathrm{j} = 2,065$ le facteur de jauge à température ambiante et $G_\mathrm{pont} = 2000$ le gain en tension fourni par le conditionneur.

Les effets liés à la non-linéarité des jauges de déformation [13] sont négligés puisque les variations de résistance sont très faibles par rapport à la résistance initiale de la jauge. La sensibilité transverse de la jauge est, quant à elle, corrigée numériquement et explicitée en section V.2.



(a) Extrados (b) Intrados

FIGURE V.3 – Instrumentation sur une aube composite

La mesure par interférométrie permet d'évaluer la vitesse ou le déplacement de la structure étudiée en un point précis sans contact au moyen, par exemple, d'un vibromètre laser. Le principe de la mesure par vibromètre laser utilise l'effet Doppler et le phénomène

d'interférence afin de mesurer l'amplitude, la fréquence et la phase du signal. Un vibromètre laser est principalement constitué d'une source de lumière monochromatique (laser de longueur d'onde 633 nm) et d'un interféromètre. Ce type de mesure permet d'obtenir une résolution de l'ordre du femtomètre jusqu'à de très hautes fréquences (supérieures au gigaHertz). De plus, la mesure étant effectuée sans contact, la dynamique de la structure n'est pas impactée par ce type de mesure.

Le laser du vibromètre est pointé en direction de la tête de l'aube sur le bord d'attaque en titane du côté extrados, comme représenté en rouge sur la figure V.3a. Cette zone est visée car elle permet de mesurer les déplacements maximaux des deux premiers modes de flexion de l'aube qui sont les modes cibles des travaux de ce mémoire de thèse. La direction de mesure est normale à la surface visée ce qui constitue un bon compromis pour l'observation de ces premiers modes de flexion. Un fin adhésif réfléchissant (dont la masse est négligeable) est fixé dans cette zone afin d'améliorer la qualité du retour du laser vers le vibromètre.

La mesure par vibrométrie laser est réalisée au moyen d'un vibromètre laser Polytec de référence PSV-400 [182], visible en arrière-plan sur la figure V.1, piloté par un contrôleur Polytec de référence OFV-5000 [183] décodant les signaux de mesure acquis en temps réel.

Les données dynamiques analogiques des jauges et du laser sont converties en données numériques à l'aide de cartes d'acquisition Hewlett-Packard de référence HP 35652B [85], une pour chaque capteur, enfichées dans un châssis Hewlett-Packard de référence HP 35650B [85]. Les données dynamiques sont ensuite traitées, affichées et sauvegardées à l'aide d'un logiciel Hewlett-Packard de référence HP 3566/67A [86].

L'architecture du montage expérimental et du système d'acquisition des données dynamiques est proposée en figure V.4. Le système d'excitation par actionneurs piézoélectriques est également représenté puis détaillé dans la sous-section suivante.

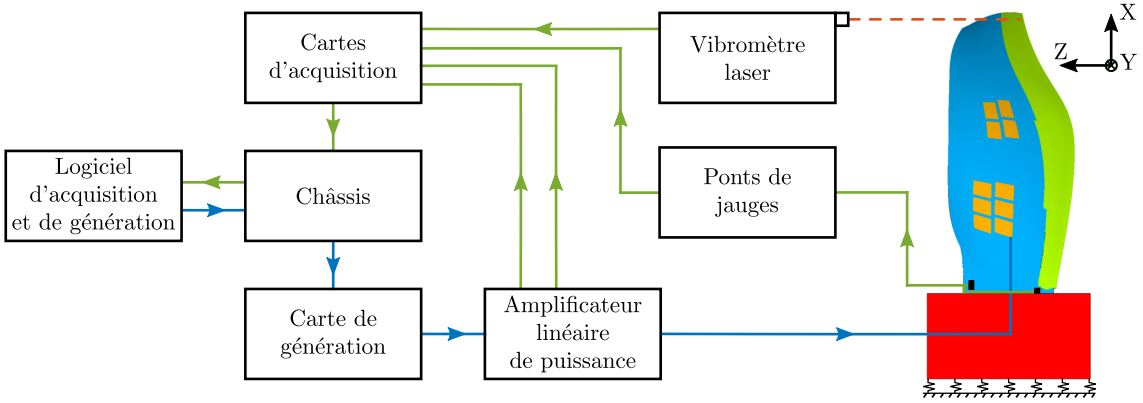


Figure V.4 – Architecture du montage expérimental (— signal d'excitation, — signaux d'acquisition et - - laser)

1.2 Système d'excitation piézoélectrique

Toujours avec pour objectif final d'étudier la dynamique non-linéaire des aubes en rotation et donc la réponse forcée de la soufflante en rotation à l'intérieur du module structure PHARE#1, il est alors indispensable de disposer d'un moyen d'excitation efficace des

aubes. Celui-ci est soumis à deux contraintes majeures à savoir son fonctionnement pendant la rotation de la soufflante à sa vitesse maximale et dans des conditions proches du vide atmosphérique.

Bien que le choix du moyen d'excitation se soit porté sur les patchs piézoélectriques, d'autres systèmes d'excitation auraient pu être exploités dans ces conditions d'essais complexes : ceux-ci sont répertoriés dans la première partie de cette sous-section. De plus, la sélection du type et du matériau des patchs piézoélectriques est aussi évoquée dans cette même partie. La suite de cette sous-section explicite la composition et le dimensionnement du système d'excitation de ces essais sur mors et, particulièrement, de ses deux éléments principaux que sont les actionneurs piézoélectriques et l'amplificateur de puissance.

1.2.1 Moyens d'excitation et actionneurs piézoélectriques

Les conditions expérimentales, en rotation et sous-vide, dans le banc d'essais PHARE#1 n'autorisent pas l'emploi des moyens classiques d'excitation en réponse forcée. Néanmoins, d'autres systèmes permettent l'excitation de la soufflante dans ces conditions.

Parmi ceux-ci, les techniques fondées sur la projection de fluide, comme de l'air [208] ou de l'huile [204] directement sur la structure en rotation, peuvent être une solution. Ces procédés se rapprochent de l'excitation subie par les aubes en fonctionnement, néanmoins ceux-ci présentent plusieurs inconvénients. La projection d'air sur la structure en rotation induit de faibles niveaux d'excitation ainsi que des temps d'essais sous vide limités. La projection d'huile implique, quant à elle, des niveaux d'excitation plus importants que la projection d'air, cependant cette technique a été peu employée et peut entraîner un phénomène d'érosion sur les aubes [204]. De plus, ces solutions par projection de fluide apporteraient des effets aérodynamiques non maîtrisés ainsi qu'un amortissement lié au flux d'air contraire à l'un des desseins principaux des essais sous-vide qui est de dissocier les effets aérodynamiques des effets purement mécaniques. Par ailleurs, ces systèmes couplent également la fréquence et le niveau d'excitation avec la vitesse de rotation et nécessitent un contrôle précis de la motorisation du banc d'essais afin de maîtriser convenablement la fréquence et la vitesse de balayage de l'excitation [46].

Une seconde solution d'excitation consiste à stimuler la soufflante en rotation au moyen d'aimants [195] ou d'électroaimants [103]. L'amplitude d'excitation ainsi produite est plus importante comparée aux autres solutions. Néanmoins, cette dernière nécessite des aubes métalliques possédant des propriétés magnétiques ce qui n'est pas le cas des aubes composites testées. À défaut, il serait possible d'ajouter des revêtements métalliques mais ceux-ci perturberaient la dynamique de l'aube car il est nécessaire de les positionner en tête d'aube, endroit où l'effet de masse ajoutée est le plus important et où la tenue au centrifuge est la plus difficile à assurer. De plus, une excitation non-synchrone par rapport à la vitesse de rotation de la soufflante n'est pas réalisable au moyen d'aimants permanents, elle serait envisageable avec des électroaimants moyennant une installation complexe directement embarquée sur la partie tournante [103].

D'autres possibilités comme faire vibrer l'arbre ou le banc d'essais [23] ou en exploitant des haut-parleurs [129] existent dans la littérature mais celles-ci demeurent peu compatibles avec l'encombrement et l'environnement du banc d'essais PHARE#1.

Le procédé d'excitation le plus employé lors d'essais en rotation et exploité dans le cadre du banc PHARE#1 afin de faire vibrer la soufflante est constitué de multiples actionneurs piézoélectriques. Ces derniers permettent d'exciter la structure en rotation sur

une large bande fréquentielle, jusqu'au mégahertz. Il est aussi possible de produire des vibrations dont l'amplitude est représentative de celles perçues par la soufflante en fonctionnement nominal en additionnant l'efficacité de plusieurs patchs sur une même aube. De plus, les actionneurs piézoélectriques se fixent directement sur la soufflante ce qui permet aisément de procéder à une excitation non-synchrone par rapport à la vitesse de rotation. D'autre part, les patchs ajoutent de la masse et de la raideur à la soufflante mais l'effet de masse associé est faible car les actionneurs sont placés dans des zones de forte déformation correspondant donc à des zones de faible accélération. Par ailleurs, des calculs et essais vibratoires avec et sans actionneurs ont montré que les fréquences propres sont perturbées de façon négligeable par ces actionneurs qui présentent donc une propriété de discrétion intéressante. Toutefois, les actionneurs piézoélectriques nécessitent une imposante installation électrique qui comprend notamment un slip-ring multivoie permettant le passage du courant dans le repère tournant.

Les actionneurs piézoélectriques ont largement été exploités au LTDS ces dernières années comme excitateurs de roues aubagées en rotation sous-vide [28, 29, 64, 122, 123, 134] mais aussi par d'autres équipes [14, 49, 69]. En prime de leurs nombreux avantages explicités dans le paragraphe précédent, l'expérience acquise au LTDS ces dernières années sur les actionneurs piézoélectriques a aussi permis d'aboutir à ce choix d'excitateur.

Parmi les formes et matériaux très diversifiés des actionneurs piézoélectriques, décrits par ailleurs dans les papiers de Niezrecki *et al.* [164] et Williams *et al.* [235], les actionneurs QuickPack [210] développés par Midé proposent un compromis attrayant dans le but d'exciter de façon optimale les aubes de la soufflante en rotation dans le vide.

En effet, ces actionneurs piézoélectriques composites Midé sont composés d'une céramique PZT-5 orthotrope sous forme de plaque, surmontée d'électrodes et le tout encapsulé entre deux films Kapton. Leur forme de patch assure une importante surface de collage et une très faible épaisseur améliorant ainsi la tenue de l'actionneur aux efforts centrifuges, contrairement aux actionneurs piézoélectriques empilés [164].

De plus, ce matériau composite, incluant une plaque en céramique piézoélectrique, possède les caractéristiques piézomécaniques des céramiques : une souplesse permettant le collage des actionneurs sur une surface courbe et leur maintien lors du dévrillage des aubes durant la rotation ainsi qu'un excellent pouvoir d'excitation en flexion. Leur encapsulage entre deux films Kapton confère aussi aux QuickPack une isolation électrique par rapport à la structure hôte et dans l'environnement de vide partiel.

D'autres actionneurs piézoélectriques tels les MFC (pour *Macro Fiber Composites* en anglais) ou les AFC (pour *Active Fiber Composites* en anglais) présentent une souplesse et un pouvoir d'excitation supérieurs aux QuickPack et sont, par ailleurs, employés dans des applications similaires [14]. Néanmoins, ceux-ci nécessitent une tension et un courant d'alimentation importants et donc un dispositif électrique imposant lorsque plusieurs patchs sont fixés sur une même aube contrairement aux actionneurs QuickPack de Midé. Ces derniers (les QuickPack de Midé) ont été finalement collés sur les aubes pour exciter la soufflante en rotation dans le banc PHARE#1.

1.2.2 Composants du système d'excitation

Chacune des aubes composites de la soufflante est équipée de dix-huit patchs piézoélectriques MIDÉ de référence QuickPack10W rev.1A [210] dont le dessin technique est fourni en annexe C.2. Le matériau piézoélectrique composant la partie active du patch est le PZH-5H 3203STD, ses caractéristiques matériaux sont proposées en annexe C.2. En

mode actionneur, ces patchs peuvent être alimentés par un signal électrique de puissance dont la tension est comprise entre $[-200\,,\,200]$ V.

Les patchs sont collés sur les aubes selon une procédure de collage développée au LTDS, déployant une bâche à vide pour améliorer l'adhérence des patchs sur les surfaces courbes des aubes. Il est notable d'indiquer que la résistance du collage des actionneurs aux efforts centrifuges a été préalablement testée expérimentalement. Les connecteurs de chaque actionneur, visible sur le dessin technique en annexe C.2, sont remplacés par des connections directes sur les pistes dénudées du patch et une soudure à l'étain, préalablement au collage. Cette procédure permet ainsi de limiter leur encombrement sur les aubes.

Concernant le câblage de ceux-ci, les actionneurs d'une même face (intrados ou extrados) sont connectés en parallèle afin d'être en phase les uns avec les autres et ainsi de sommer l'excitation de chacun. Les deux faces sont reliées en opposition de phase dans ce même objectif de sommation des effets d'excitation sur les modes de flexion. Un film thermodurcissable, en rose sur la figure V.5, est mis en place sur les câbles électriques et les jauges de déformation afin d'accroître leur résistance face aux efforts centrifuges lors de la rotation sur le banc d'essais PHARE#1. Une illustration des faces intrados et extrados d'une aube composite équipée des dix-huit patchs piézoélectriques est fournie en figure V.5.

(a) Extrados (b) Intrados

FIGURE V.5 – Positionnement des patchs piézoélectriques sur une aube composite

Un amplificateur de puissance permet d'alimenter les actionneurs piézoélectriques en énergie à partir d'une tension de consigne fournie en entrée. En rotation sur le banc d'essais PHARE#1, chacune des dix-huit aubes de la soufflante nécessite d'être excitée individuellement afin de forcer les différents modes à diamètres (notion explicitée dans le chapitre I). Un amplificateur de puissance comprenant dix-huit voies indépendantes est donc essentiel. Néanmoins, une seule voie est employée pour ces essais sur mors puisque les aubes sont excitées une à une.

L'amplificateur de puissance comprenant dix-huit voies a été développé spécialement pour cette application par l'entreprise CEDRAT Technologies. L'amplificateur est un amplificateur linéaire de puissance pouvant délivrer une tension de puissance comprise entre $[-200\,,\,200]$ V pour un gain entre le signal de consigne et le signal de puissance de $\times 20$. Chacune des voies est monitorée en tension et en courant afin de surveiller en temps réel les

paramètres électriques (tension et courant) du système d'excitation et son intégrité. Par ailleurs, le retour de la tension est aussi employé comme signal de référence des fonctions de réponse fréquentielle.

Le signal de consigne numérique est généré par l'intermédiaire du logiciel Hewlett-Packard de référence HP 3566/67A [86] aussi utilisé pour l'acquisition des données dynamiques. Ce signal de consigne numérique est converti en signal analogique, pour être distribué à l'amplificateur linéaire de puissance, à l'aide d'une carte de génération Hewlett-Packard de référence HP 35653C [85] enfichée dans le même châssis [85] que les cartes d'acquisition.

Le schéma V.4 de la sous-section précédente illustre le système d'excitation et son intégration dans le montage expérimental.

La justification du nombre et du positionnement des patchs piézoélectriques ainsi que le dimensionnement de l'amplificateur sont abordés dans la sous-section suivante.

1.2.3 Dimensionnement du système d'excitation

Le dimensionnement des deux éléments principaux du système d'excitation des aubes composites, à savoir les actionneurs piézoélectriques et l'amplificateur linéaire de puissance, est détaillé dans cette sous-section en commençant par les actionneurs piézoélectriques.

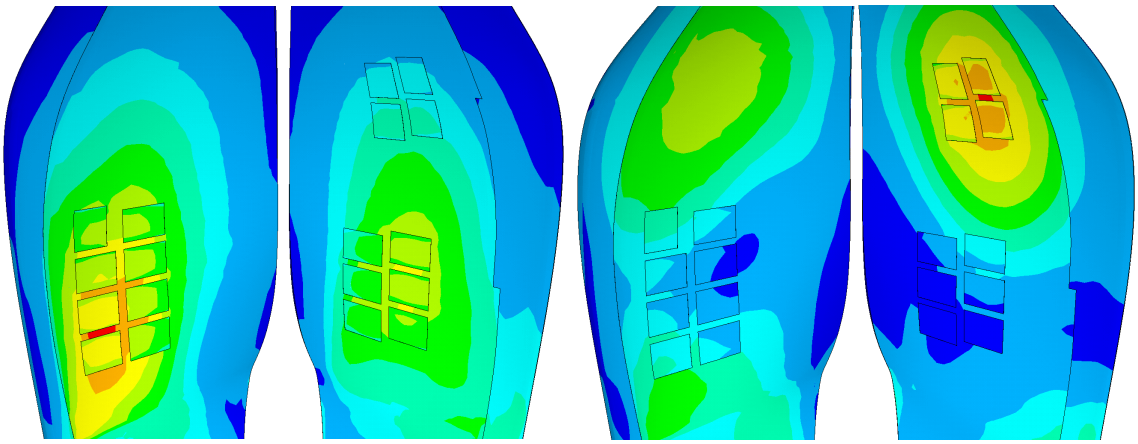
Actionneurs piézoélectriques. Afin d'exploiter le plus efficacement possible l'excitation par actionneurs piézoélectriques, plusieurs études préliminaires ont été menées afin de quantifier le nombre de patchs à poser et leur positionnement sur les aubes dans le but d'exciter la soufflante avec des amplitudes représentatives de ses conditions de fonctionnement.

Le nombre de dix-huit actionneurs piézoélectriques par aube a été déterminé par un compromis entre pouvoir d'excitation, encombrement sur l'aube et diverses considérations d'ordre pratique.

Les actionneurs piézoélectriques sont plus efficaces lorsqu'ils sont positionnés dans les zones de plus grandes déformations de la structure [49] pour un mode donné. Le positionnement des actionneurs piézoélectriques résulte d'un compromis entre la répartition des déformations des différents modes de vibration ciblés, à savoir le premier et le deuxième mode de flexion, et les différentes vitesses de rotation envisagées lors des essais sur le banc d'essais PHARE#1 dans le but d'étudier l'influence de ces paramètres sur la dynamique de la soufflante dans une plage de variation suffisante. Il est supposé que la répartition des déformations ne varie que très peu en fonction des différents diamètres nodaux pour un même mode et une même vitesse de rotation afin de limiter le nombre de paramètres de cette étude. Les calculs, accomplis lors de cette étude de positionnement (sur le logiciel éléments finis ANSYS® 16.1), sont donc réalisés pour des modes à zéro diamètre nodal. Un exemple de répartition des déformations équivalentes de Von Mises est donné en figure V.6 pour les deux premiers modes de flexion du secteur {aube+disque} (en agrandissant l'illustration autour des actionneurs) en rotation à une vitesse médiane.

Huit actionneurs ont été positionnés sur la face extrados des aubes dans le but d'exciter essentiellement le premier mode de flexion, comme illustré sur la gauche des figures V.6a et V.6b. De plus, dix actionneurs sont répartis sur la face intrados en deux groupes : le premier groupe de six actionneurs, le plus proche du pied de l'aube, a pour objectif d'exciter principalement le premier mode de flexion tandis que le second groupe de quatre

actionneurs, proche de la tête de l'aube, est placé dans cette zone pour exciter le deuxième mode de flexion, comme représenté sur la droite des figures V.6a et V.6b.



(a) Premier mode de flexion (b) Deuxième mode de flexion

FIGURE V.6 – Répartition des déformations équivalentes de Von Mises (déformations min. ■ et max. ■)

Il est important de remarquer que l'efficacité de l'excitation des actionneurs diffère en fonction des vitesses de rotation sur le banc PHARE#1 puisque la fréquence propre, l'amortissement de la structure ainsi que la répartition des déformations sont différents en fonction du régime.

Amplificateur linéaire de puissance. Le dimensionnement des caractéristiques de l'amplificateur a été réalisé par rapport au courant maximal nécessaire pour maintenir l'excitation des actionneurs piézoélectriques lorsque le deuxième mode de flexion est excité à la tension maximale admissible par les actionneurs (soit deux cent volts). En supposant que les actionneurs piézoélectriques puissent être modélisés électriquement par l'intermédiaire d'un schéma électrique équivalent composé d'un unique condensateur, il vient

$$i_{\max} = \omega_{\max} v_{\max} C \tag{V.2}$$

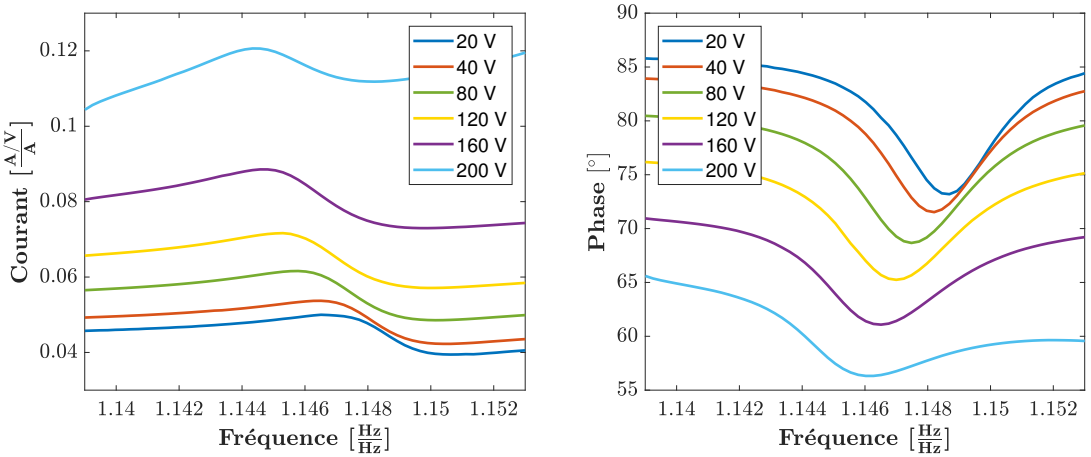
où $i_{\max}$ est le courant maximal nécessaire pour alimenter les actionneurs piézoélectriques, $\omega_{\max}$ la pulsation d'excitation du deuxième mode de flexion de la soufflante, $v_{\max} = 200\,\mathrm{V}$ la tension maximale délivrée par l'amplificateur et $C = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{act}}} C_i = 18 \times 170 = 3.06\,\mu\mathrm{F}$ la capacité totale des actionneurs câblés en parallèle sur une aube.

Dans la pratique, le courant $i_{\max}$, dimensionnant l'amplificateur, a été majoré en employant la fréquence d'excitation du premier mode de torsion afin de conserver une marge.

Par ailleurs, il a été mesuré une diminution moyenne de l'ordre de 20 % de la capacité des actionneurs avant et après collage de ces derniers. Cette diminution de la capacité est due aux contraintes exercées par le collage sur la surface courbe des aubes [179] et permet ainsi, non-volontairement, d'augmenter la marge par rapport au courant maximal préalablement dimensionné.

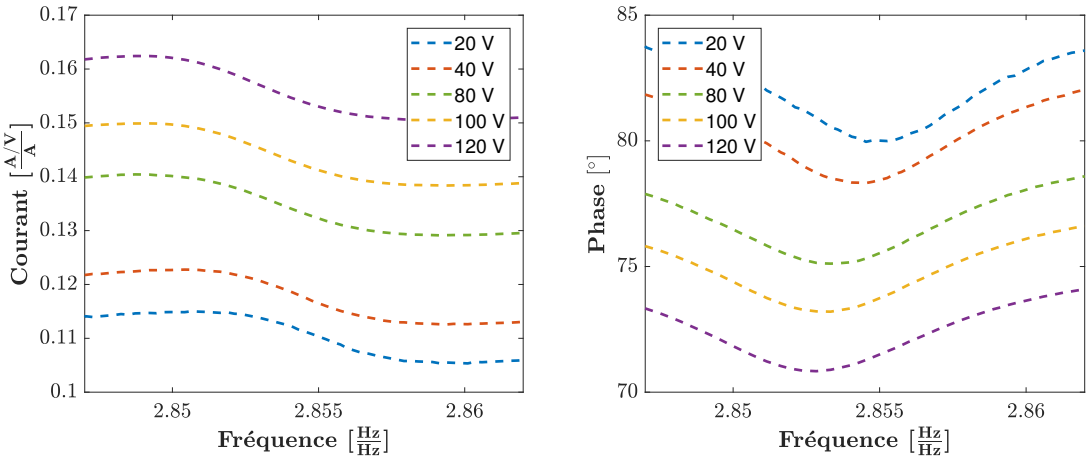
Néanmoins, les premiers essais en réponse forcée d'une aube dans son mors ont abouti à des surcharges en courant de l'amplificateur pour des tensions très inférieures à celles calculées lors du dimensionnement de l'amplificateur. La surveillance et l'enregistrement des grandeurs électriques de l'amplificateur durant les essais ont permis d'explorer les

causes de cette surcharge. À cet effet, les fonctions de réponse fréquentielle, en amplitude et en phase, du courant normalisées par la tension d'excitation pour les deux premiers modes de flexion du système {aube+mors} sont exposées en figure V.7 et V.8. Afin de visualiser l'évolution du courant jusqu'à une tension de 200 V (au moins pour le premier mode de flexion), l'excitation a été effectuée en ne connectant qu'une seule face (dans ce cas : l'intrados).



(a) Amplitude (b) Phase

FIGURE V.7 – Fonction de réponse fréquentielle du courant du premier mode de flexion



(a) Amplitude (b) Phase

FIGURE V.8 – Fonction de réponse fréquentielle du courant du deuxième mode de flexion

Les figures V.7 et V.8 soulèvent plusieurs remarques. En effet, bien qu'une seule face excite la structure, le deuxième mode de flexion ne peut être excité à la tension maximale de 200 V sans surcharge de l'amplificateur pourtant dimensionné, c'est pourquoi les réponses forcées de la figure V.8 ne dépassent pas 120 V.

De plus, il est possible de remarquer que le courant fourni par l'amplificateur n'est pas linéaire par rapport à la tension . Effectivement, selon l'expression (V.2), les réponses forcées en amplitude V.7a et V.8a, normalisées par la tension pour plusieurs valeurs de tensions d'excitation, auraient dû être superposées. Cette évolution du courant délivré aux actionneurs implique donc un effet non-linéaire en fonction de la tension générée par

l'amplificateur.

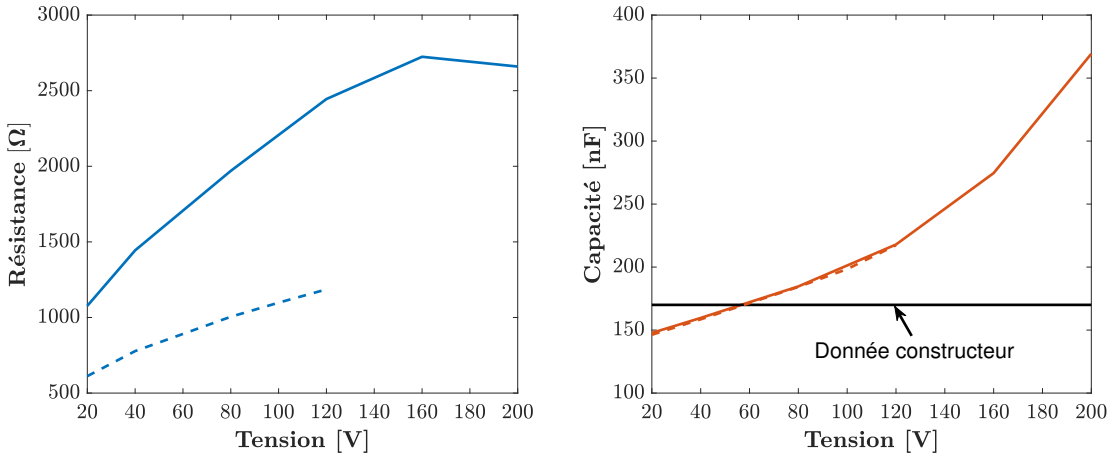
Une troisième remarque peut être formulée en observant les courbes de la phase du courant par rapport à la tension V.7b et V.8b, l'expression (V.2) modélisant électriquement les actionneurs comme un condensateur devrait théoriquement aboutir à un déphasage constant de 90 ° du courant par rapport à la tension. Or le déphasage décroit en fonction de la tension d'excitation ce qui implique la présence d'une partie résistive.

La modélisation électrique des actionneurs nécessite donc d'être modifiée pour prendre en compte la partie résistive présente dans le courant. L'actionneur est dorénavant représenté électriquement comme un condensateur et une résistance en série, comme réalisé notamment par Jordan *et al.* [105]. L'impédance de ce schéma électrique équivalent s'écrit

$$Z = R - \frac{j}{\omega C} \tag{V.3}$$

avec $Z = v/i$ l'impédance électrique complexe des actionneurs et j désignant l'unité imaginaire pur des physiciens (notée j dans cette sous-section pour ne pas confondre avec le courant i).

Par identification des parties réelles et imaginaires de l'impédance complexe, il est possible d'obtenir directement la résistance ainsi que la capacité du circuit électrique équivalent. Ces deux paramètres électriques sont tracés en figure V.9a et V.9b en fonction de la tension d'excitation pour les deux premiers modes de flexion. La résistance et la capacité équivalentes ont été évaluées à distance des résonances mécaniques (sur les fonctions de réponse fréquentielle des figures V.7 et V.8) de la structure afin que la dynamique affecte peu ces paramètres électriques. Par ailleurs, il est possible de remarquer l'effet de la résonance mécanique sur l'amplitude et la phase du courant dans les figures V.7 et V.8.



(a) Résistance (b) Capacité

FIGURE V.9 – Évolution des paramètres électriques des patchs piézoélectriques en fonction de la tension d'excitation (— premier et - - deuxième mode de flexion)

La figure V.9b montre un très fort accroissement de la capacité équivalente d'un actionneur en fonction de la tension d'excitation, jusque deux fois et demie sa valeur initiale pour une tension de 200 V. Son évolution par rapport à la fréquence d'excitation du premier et du deuxième mode de flexion est négligeable. De même, la résistance équivalente d'un actionneur augmente très fortement en fonction de la tension comme le révèle la figure V.9a, jusque deux fois et demie la résistance évaluée à 20 V pour atteindre un palier à une tension d'excitation de 160 V. Contrairement à la capacité équivalente, cette même

figure V.9a dévoile une diminution de la résistance équivalente de l'actionneur en fonction de la fréquence d'excitation interprétée par Jordan *et al.* [105] comme un effet de conductivité ou de résistivité aussi nommé *Universal dielectric response* [104] faisant référence à l'évolution de la résistivité et de la conductivité en fonction de la fréquence du signal (donc en courant alternatif) pour un matériau présentant des propriétés diélectriques tels les patchs piézoélectriques.

Très peu de documents dans la littérature évoquent les différents phénomènes quantifiés dans cette sous-section. Néanmoins, Pi Ceramic [179] indique une évolution de la capacité équivalente, d'un actionneur en céramique PZT, en fonction de la tension à ses bornes, de la température et des contraintes mécaniques subies par l'actionneur : la capacité pouvant être amplifiée jusqu'à 200 %. Brennan et McGowan [21] et Warkentin [230] abordent aussi cette augmentation de la capacité en fonction de la tension appliquée aux actionneurs piézoélectriques dans leurs travaux tandis que Jordan *et al.* [105] extrapolent la variation de la capacité et de la résistance équivalentes afin d'écrire une loi d'évolution empirique en fonction de la tension d'excitation.

Ces différentes publications corroborent les résultats relatifs à l'alimentation électrique des actionneurs piézoélectriques, présentés dans cette sous-section. Pour conclure, afin de dimensionner un amplificateur linéaire de puissance destiné à alimenter des actionneurs piézoélectriques, il est impératif de fortement majorer le courant nécessaire à l'excitation de la structure, ceci dans le but de compenser les effets électriques non-linéaires tels que l'augmentation de la capacité et de la résistance équivalentes en fonction de la tension.

Cette application sur mors et les essais en rotation présentés dans le chapitre VI voient la tension maximale d'alimentation des actionneurs limitée à 140 V pour le premier mode de flexion et à 80 V pour le deuxième mode de flexion à cause de l'augmentation de courant résultant de cette effet, atteignant les limites de l'amplificateur prévu.

1.3 Méthodes expérimentales

Les méthodes expérimentales sont indispensables aux essais vibratoires et notamment au suivi de ceux-ci ainsi qu'à l'analyse des résultats expérimentaux. En effet, un protocole expérimental clair et concis permet de faciliter le suivi d'essais et d'en limiter la durée. L'analyse des résultats d'essais nécessite, quant à elle, une grande précision de dépouillement, pouvant être réalisée par identification modale des signaux expérimentaux, qu'elle soit accomplie sur des données expérimentales temporelles ou fréquentielles. De plus, des incertitudes de mesures sont inévitablement induites par l'ensemble de la chaine d'acquisition des mesures. Une évaluation de celles-ci permet ainsi une meilleure compréhension des écarts lors de la confrontation entre les essais et les simulations numériques.

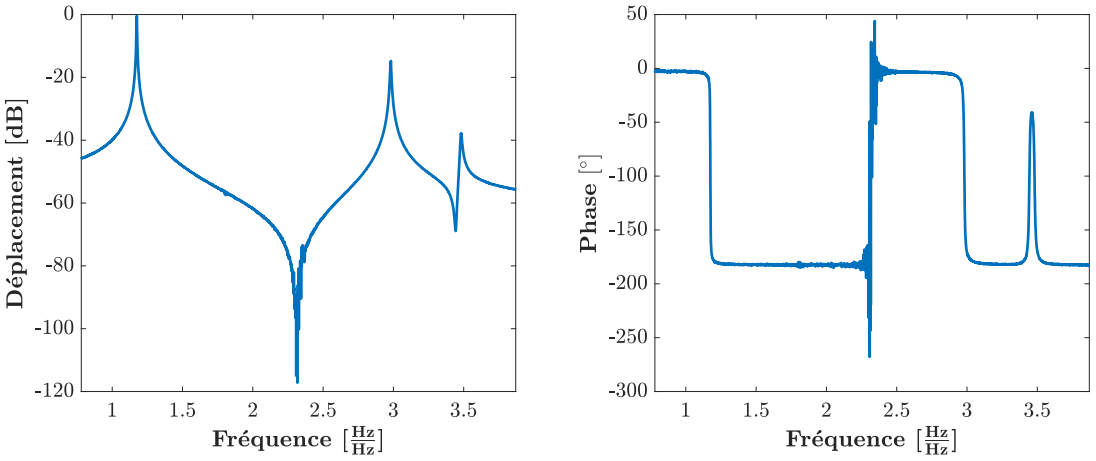
1.3.1 Protocole expérimental

Les essais vibratoires sur chacune des aubes sont accomplis en deux phases principales successives : la première phase consiste à rechercher les fréquences de résonance de l'aube afin de cibler la plage fréquentielle d'une série de réponses forcées au voisinage des résonances ; ces réponses forcées au voisinage des résonances constituant la seconde phase des essais.

Le recherche des fréquences de résonance est effectuée au moyen d'un signal d'excitation large bande de type aléatoire continu [84]. Le principe d'un signal large bande est de répartir l'énergie d'excitation sur toute la bande fréquentielle de façon à limiter le temps

de mesure. L'énergie étant répartie sur les différentes fréquences considérées, l'amplitude de déplacement de l'aube demeure faible ce qui permet d'obtenir une réponse dynamique proche de la réponse purement linéaire. Ces essais, combinés à une méthode de dépouillement par identification modale, permettent ainsi d'obtenir les fréquences propres et les taux d'amortissement visqueux de chaque mode à faible amplitude (et donc proche du comportement linéaire de l'aube) ce qui est bénéfique en vue de la comparaison entre les essais dynamiques sur mors et les simulations numériques de la section V.3.

D'un point de vue traitement du signal, le signal de mesure acquis est fenêtré au moyen d'une fenêtre de Hann afin d'optimiser la précision fréquentielle de la mesure puis moyenné dix fois linéairement dans le but d'améliorer le rapport signal sur bruit. L'intervalle entre deux raies fréquentielles est de 0.06 Hz. La réponse à une excitation large bande, pour une tension de 120 V répartie sur 3200 raies fréquentielles, de l'une des aubes testées est tracée en figure V.10. Il est aisé de distinguer les trois premiers modes de vibration sur cette figure, dans l'ordre : le premier mode de flexion (1F), le deuxième mode de flexion (2F) puis le premier mode de torsion (1T). Cette réponse est mesurée au moyen du vibromètre laser.



(a) Amplitude (b) Phase

FIGURE V.10 – Réponse de la structure {aube+mors} à une excitation large bande

La deuxième phase de ces essais vibratoires, à savoir la mesure des réponses forcées au voisinage de la résonance de chaque mode d'intérêt, est accomplie au moyen d'un signal sinus balayé discret. Par opposition à un sinus balayé continu dont le balayage est, comme son nom l'indique, continu, le sinus balayé discret parcourt le spectre fréquentiel fréquence par fréquence. Lorsque le temps d'excitation consacré à chaque fréquence est suffisant, le régime transitoire vibratoire de chaque fréquence s'estompe pour se rapprocher du régime permanent : le rapport en phase et amplitude de la réponse sur l'excitation permet alors d'obtenir un point de la réponse fréquentielle.

Cette technique nécessite une précaution dans le but de prévenir les distorsions de la réponse fréquentielle pouvant apparaître lorsque le balayage est trop rapide, ceci afin d'obtenir la réponse fréquentielle en régime permanent à l'instar de celle calculée au moyen de la méthode de l'équilibrage harmonique dans l'approche numérique. En effet, il est très important de ne pas induire d'artefacts par la méthode de balayage qui pourraient être interprétés comme des phénomènes dynamiques propres à l'aube. Précisément, l'effet non-linéaire associé au contact et au frottement se manifeste par le glissement en fréquence des pics de résonance et de leur amplitude en fonction du niveau d'excitation. Or la vitesse incrémentale du sinus balayé discret a également un effet sur ces mêmes paramètres [66, 80].

Par conséquent, une étude d'influence, dont les résultats du premier mode de flexion sont exposés en figure V.11, a été menée afin d'optimiser le temps d'excitation tout en maintenant l'effet lié au balayage au moins d'un ordre de grandeur plus faible que l'effet mesuré lors de ces essais, à savoir les distorsions de réponses dues aux non-linéarités. Le temps d'excitation par fréquence est exprimé en nombre de cycles d'attente, n_{a}, un cycle correspondant à une période d'excitation.

Les distorsions liées au balayage dépendent du taux d'amortissement, la vitesse de balayage doit donc être adaptée à ce paramètre. Dans le cas de ces essais, les études d'influence sont effectuées pour une faible tension d'excitation afin de minimiser le taux d'amortissement. Le nombre de cycles ainsi déterminé est conservé pour les autres tensions d'excitation bien que cette démarche ne soit pas optimale en termes de durée d'essais [60].

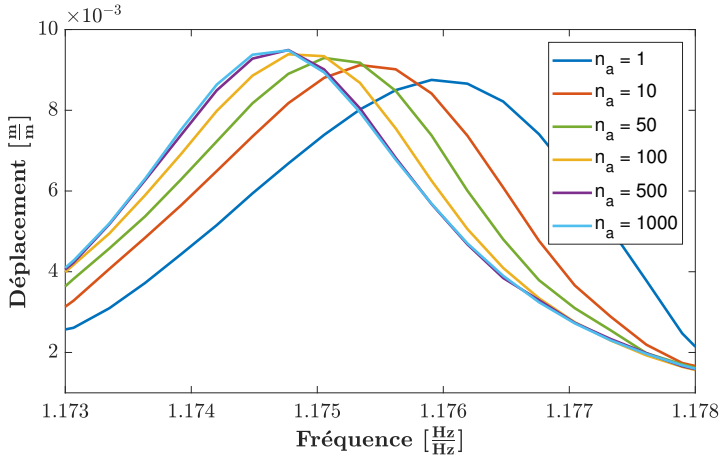
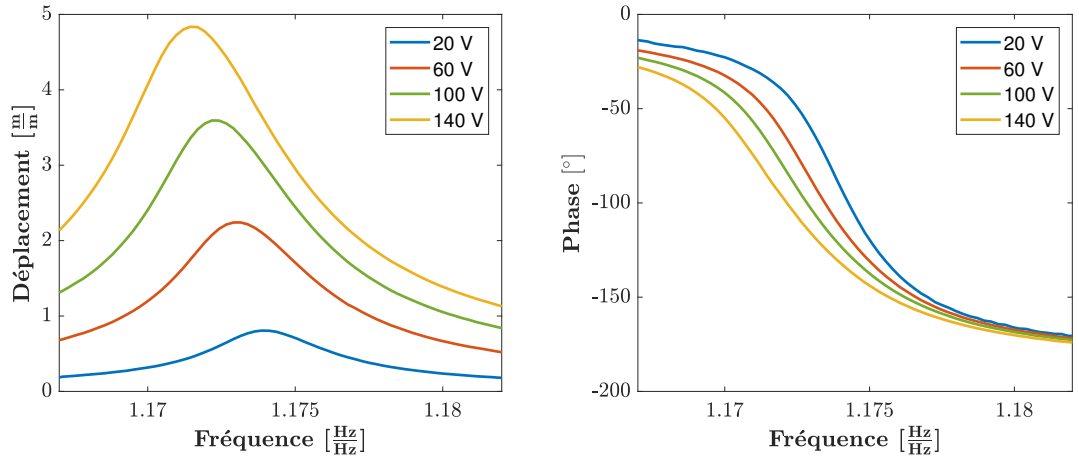


Figure V.11 – Influence du nombre de cycles d'attente sur la réponse forcée pour $v = 2\,\mathrm{V}$

La figure V.11 permet ainsi d'illustrer les distorsions de balayage introduites dans le paragraphe précédent. Il est possible de remarquer un décalage en fréquence dans la direction du balayage mais aussi une différence de largeur des pics qui pourrait s'interpréter comme des variations d'amortissement en fonction du nombre de cycles d'attente. Conformément aux résultats de cette étude d'influence, cinq cents cycles sont joués pour chaque fréquence d'excitation avant d'effectuer la mesure. L'évaluation de la fonction de réponse fréquentielle est effectuée à partir du signal temporel au moyen d'une transformée de Fourier discrète, explicitée dans le chapitre II, sur huit périodes d'excitation. L'intervalle entre deux raies fréquentielles des réponses forcées des deux premiers modes de flexion est de $0.004\,\mathrm{Hz}$ (qui est le pas fréquentiel minimal possible sur le système d'acquisition exploité).

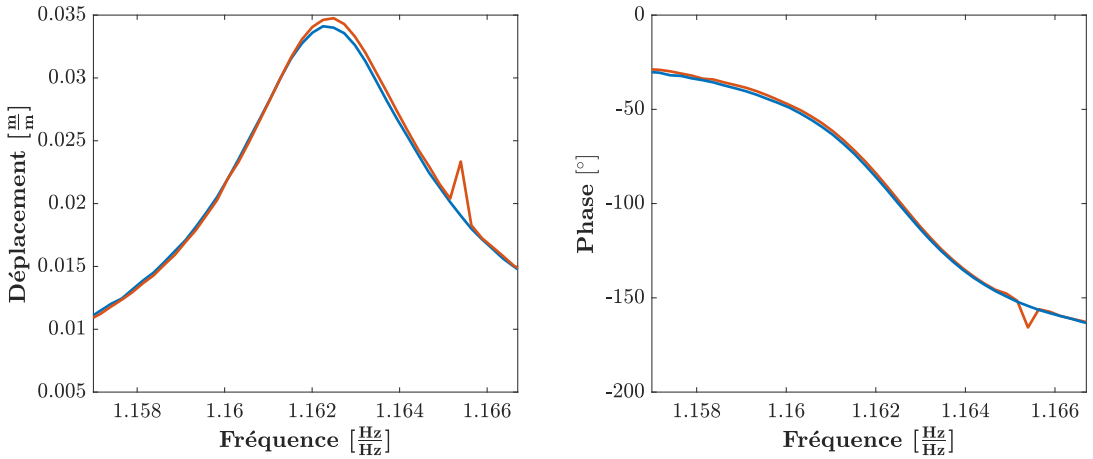
L'objectif premier de cette campagne d'essais sur mors étant la vérification du bon fonctionnement de l'instrumentation et du système d'excitation par actionneurs piézoélectriques de chacune des aubes composites de la soufflante, la plupart des essais en réponse forcée au voisinage des résonances ne comportent qu'une seule tension d'excitation : $20\,\mathrm{V}$. Néanmoins, des essais plus poussés ont été menés sur quelques aubes en excitant chaque mode avec plusieurs tensions afin d'évaluer la sensibilité de la non-linéarité en friction en fonction de l'amplitude de vibration. Ces essais plus poussés autorisent ainsi la comparaison avec des simulations numériques non-linéaires. Une représentation en amplitude et en phase de ces essais en réponse forcée au voisinage de la résonance du premier mode de flexion est fournie en figure V.12 sur laquelle l'effet de glissement, classiquement observé pour des systèmes frottants, est constaté.



(a) Amplitude (b) Phase

FIGURE V.12 – Réponses forcées au voisinage de la résonance du premier mode de flexion de la structure {aube+mors}

La répétabilité des essais a été contrôlée après démontage puis remontage de l'ensemble du dispositif expérimental et ceci pour plusieurs aubes. L'un de ces essais de répétabilité pour le premier mode de flexion et une tension d'excitation de 20 V est démontrée en figure V.13.



(a) Amplitude (b) Phase

FIGURE V.13 – Comparatif entre les réponses forcées avant (—) et après (—) démontage puis remontage du dispositif expérimental

Une fois les essais dynamiques menés à bien, le dépouillement des mesures est nécessaire afin d'extraire les paramètres modaux. Leur estimation peut être obtenue par identification modale des fonctions de réponse fréquentielle expérimentales. De nombreuses méthodes d'identification modale ont été développées dans la littérature. Les techniques majeures d'identification modale linéaire, dont celle employée dans ce travail de thèse, sont ainsi abordées dans le paragraphe suivant.

1.3.2 Identification modale

L'identification modale comprend un ensemble de techniques permettant d'extraire les paramètres modaux de la structure étudiée à partir d'essais dynamiques réalisés sur celle-ci. Les paramètres modaux évalués au moyen de ces techniques sont les fréquences propres, les taux d'amortissement, les déformées modales, les facteurs de participation modale ainsi que les amplitudes modales.

De nombreuses méthodes d'identification modale ont été développées dans la littérature, celles-ci sont consultables dans des ouvrages traitant d'analyse modale expérimentale tels que [55, 61, 145]. La plus populaire et la plus accessible d'entre elles est la méthode dite à $-3\,\mathrm{dB}$, aussi appelée *peak-picking* [55] en anglais. Cette technique fréquentielle [1] et locale [2] peut être considérée comme une méthode graphique. En effet, cette dernière consiste à relever la fréquence de résonance f_r, localisée à l'amplitude maximale locale, puis les deux fréquences situées à $-3\,\mathrm{dB}$, soit environ $1/\sqrt{2}$, de l'amplitude de résonance. Ces deux dernières fréquences correspondent aux fréquences de demi-puissance et sont notées f_1 et f_2 sur le schéma contenu en figure V.14 récapitulant cette méthode à $-3\,\mathrm{dB}$.

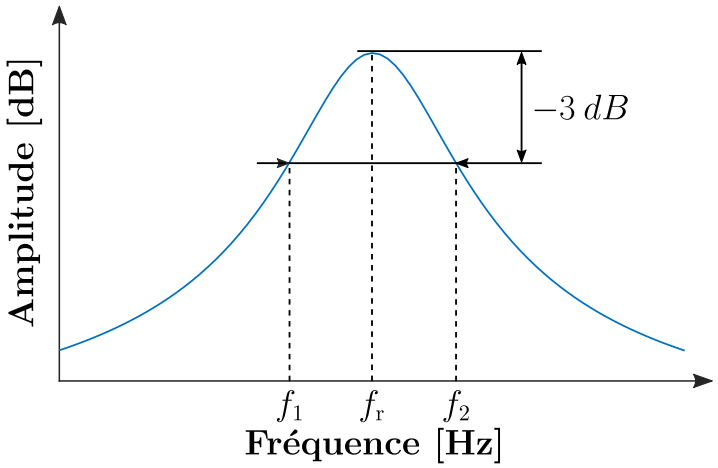


Figure V.14 – Méthode à $-3\,\mathrm{dB}$

Finalement, le taux d'amortissement visqueux ζ est estimé au moyen de l'équation

$$\zeta = \frac{f_2 - f_1}{2f_\mathrm{r}} = \frac{\Delta f}{2f_\mathrm{r}} \tag{V.4}$$

Cette méthode, aisément et promptement applicable sur une fonction de réponse fréquentielle expérimentale, nécessite néanmoins des modes séparés en fréquence (ou dits découplés) et assez amortis pour être suffisamment précise [55]. De plus, la qualité de l'identification du taux d'amortissement est très dépendante de la discrétisation fréquentielle de la fonction de réponse fréquentielle. Ces désavantages majeurs ainsi que son utilisation locale (fréquentiellement et spatialement) débouchent sur l'emploi d'autres méthodes numériques plus complexes lors d'identifications modales globales ou de données présentant des modes proches les uns des autres ce qui est le cas des essais dynamiques en rotation du banc PHARE#1 exposés dans le chapitre VI.

1. Les méthodes fréquentielles s'emploient sur des données expérimentales fréquentielles telles des fonctions de réponse fréquentielle, par opposition aux techniques temporelles

2. Les techniques locales ne considèrent qu'un seul degré de liberté ou une seule fonction de réponse fréquentielle à la fois, contrairement aux méthodes globales pouvant identifier les modes associés à plusieurs degrés de liberté simultanément

Ces méthodes numériques d'identification modale sont fondées sur l'hypothèse, *a priori*, d'un modèle analytique (linéaire la plupart du temps) pertinent par rapport à la structure testée. Les paramètres de ce modèle analytique sont optimisés afin d'approcher au mieux les données expérimentales. Les techniques numériques d'identification modale, plus connues sous leur dénomination anglo-saxonne, sont divisées en deux catégories : les techniques exploitant des données temporelles et celles traitant des données fréquentielles.

Les méthodes temporelles d'identification modale, dont les méthodes *Least Square Complex Exponential* (LSCE) [147] et *Ibrahim Time Domain* (ITD) [149], ne sont pas traitées dans ce mémoire mais sont détaillées dans les ouvrages cités dans cette sous-section.

Les méthodes fréquentielles d'identification modale reposent sur une décomposition modale de l'équation linéaire du mouvement (I.34), explicitée dans l'équation (V.5), aboutissant au modèle analytique linéaire dans lequel apparaissent les paramètres modaux a identifier et permettant d'approcher au mieux les données expérimentales.

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{k=1}^{n_\mathrm{m}} \left(\frac{\boldsymbol{\rho}_k}{i\omega - \lambda_k} + \frac{\overline{\boldsymbol{\rho}_k}}{i\omega - \overline{\lambda_k}} \right) - \frac{\boldsymbol{\rho}_0}{\omega^2} + \boldsymbol{\rho}_\infty \tag{V.5}$$

où $\mathbf{H}$ est la matrices des fonctions de réponse fréquentielle de taille $n_\mathrm{O} \times n_\mathrm{I}$ (n_O représente le nombre de réponses mesurées et n_I, le nombre d'excitations), n_m est le nombre de modes à identifier, λ_k est le pôle du système associé au mode k, ω représente la pulsation d'excitation considérée, $\boldsymbol{\rho}_k$ est la matrice des résidus associés au mode k de taille $n_\mathrm{O} \times n_\mathrm{I}$ et $\boldsymbol{\rho}_0$ ainsi que $\boldsymbol{\rho}_\infty$ sont les matrices regroupant les termes résiduels en basse et haute fréquence respectivement. En outre, il est possible de décomposer la matrice $\boldsymbol{\rho}_k$ de la façon suivante

$$\boldsymbol{\rho}_k = \boldsymbol{\phi}_k \otimes \boldsymbol{\ell}_k^\mathrm{T} \tag{V.6}$$

dans laquelle $\boldsymbol{\phi}_k$ représente le vecteur contenant les déformées modales associées au mode k de taille n_O et $\boldsymbol{\ell}_k$ représente le vecteur renfermant les facteurs de participation modale du mode k de taille n_I (intégrant les facteurs d'échelle modaux [177]). $\otimes$ est le produit dyadique qui est un cas particulier du produit de Kronecker pour des vecteurs. De plus, lorsque l'amortissement de la structure est considérée comme visqueux, les pôles s'écrivent

$$\lambda_k = -\zeta_k \Omega_k \pm i\Omega_k \sqrt{1 - {\zeta_k}^2} \tag{V.7}$$

avec

$$\Omega_k = |\lambda_k| \qquad \text{et} \qquad \zeta_k = \frac{-Re(\lambda_k)}{|\lambda_k|} \tag{V.8}$$

où ζ_k est le taux d'amortissement et Ω_k est la pulsation propre, associés au mode k.

Parmi les multiples méthodes fréquentielles, *Least Square Complex Frequency* (LSCF) et plus récemment *Least Square Rational Function* (LSRF) sont largement exploitées dans la littérature. Par ailleurs, une variante polyréférence (permettant de considérer des références multiples) de la méthode LSCF [77] est commercialisée dans le logiciel LMS Test Lab sous le nom de PolyMax.

Le choix de la technique d'identification employée dans ces travaux de thèse, aussi bien pour identifier les essais sur mors présentés dans ce chapitre que les essais en rotation détaillés dans le chapitre suivant, s'est porté sur la méthode *Least Square Rational Function*

(LSRF) développée par Ozdemir *et al.* [167] et implémentée dans la fonction `modalfit` de MATLAB®. LSRF est une méthode fréquentielle et globale, ces deux éléments faisant partie des critères de sélection de la méthode d'identification modale puisque les essais en rotation PHARE#1 nécessitent l'extraction simultanée des paramètres modaux des fonctions de réponse fréquentielle, émanant des différentes aubes de la soufflante.

L'objectif de la méthode LSRF est d'extraire les paramètres modaux des données expérimentales en minimisant, au sens des moindres carrées, la fonction coût e ainsi

$$e = \sum_{i=1}^{n_\omega} \|\mathbf{H}_{\text{synth}}(\omega_i) - \mathbf{H}_{\text{exp}}(\omega_i)\|^2 \tag{V.9}$$

dans laquelle $\mathbf{H}_{\text{synth}}$ et $\mathbf{H}_{\text{exp}}$ représentent, respectivement, les fonctions de réponse fréquentielle synthétisée et expérimentale. De plus, n_ω est le nombre de fréquences d'excitation.

Cette fonction coût à minimiser est commune à la grande majorité des méthodes fréquentielles ainsi la méthode LSRF partage la mise en équation de nombreuses techniques fréquentielles et notamment LSCF. Afin de minimiser la fonction coût (V.9) dans le but d'évaluer les paramètres modaux, il est nécessaire de formuler la fonction de transfert $\mathbf{H}_{\text{synth}}$ sous la forme d'une fraction rationnelle

$$\mathbf{H}_{\text{synth}}(\omega_i) = \frac{\mathbf{N}(\omega_i)}{d(\omega_i)} = \frac{\sum_{k=0}^{2n_{\text{m}}-1} \mathbf{A}_k (i\omega_i)^k}{\sum_{k=0}^{2n_{\text{m}}-1} b_k (i\omega_i)^k + (i\omega_i)^{2n_{\text{m}}}} \tag{V.10}$$

où $\mathbf{N}$ et d sont respectivement le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert $\mathbf{H}_{\text{synth}}$. De plus, $\mathbf{A}_k$ représente la matrice renfermant des coefficients réels et b_k sont des coefficients réels résultant des termes complexes conjugués de la décomposition modale (V.5). En insérant (V.10) dans la fonction coût e (V.9), il vient

$$e = \sum_{i=1}^{n_\omega} \left\| \frac{\mathbf{W}(\omega_i)}{d(\omega_i)} \right\|^2 \|\mathbf{N}(\omega_i) - d(\omega_i)\mathbf{H}_{\text{exp}}(\omega_i)\|^2 \tag{V.11}$$

avec $\mathbf{W}$ une matrice de pondération de taille $n_{\text{O}} \times n_{\text{I}}$.

Il est important de remarquer que la fonction coût e de la méthode LSRF est non-linéaire ce qui la différencie des autres méthodes fréquentielles comme LSCF. C'est pourquoi des techniques d'optimisation sont ensuite employées pour minimiser au sens des moindres carrés la fonction coût e. Cette étape d'optimisation n'est pas détaillée dans ce mémoire, le lecteur intéressé peut consulter le papier de Ozdemir *et al.* [167] pour plus de précisions. Toutefois trois éléments d'optimisation sont à souligner dans cette technique : l'emploi d'une méthode dite *Orthogonal Vector Fitting* améliorant le conditionnement numérique, l'utilisation d'une méthode d'optimisation non-linéaire au sens des moindres carrés procédant à des itérations de type *Sanathanan-Koerner* et enfin un raffinement grâce à une recherche de minima locaux au moyen d'itérations de type *Instrumental Variable*.

À la suite de cette étape de minimisation de la fonction coût e, les pôles λ_k de l'équation (V.7) de la fonction de transfert $\mathbf{H}$, écrite dans l'équation (V.5), sont évalués en tant que racines du dénominateur d (exprimé sous forme polynomiale dans l'équation (V.10)).

Les résidus $\boldsymbol{\rho}_k$, $\boldsymbol{\rho}_0$ et $\boldsymbol{\rho}_\infty$, exprimés dans l'équation (V.6), sont évalués dans un second temps à partir de l'équation (V.5) écrite sous forme matricielle telle que

$$\begin{pmatrix} H(\omega_1) \\ H(\omega_2) \\ \dots \\ H(\omega_{n_\omega}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{I}_{n_\mathrm{O}}}{i\omega_1-\lambda_1} & \frac{\mathbf{I}_{n_\mathrm{O}}}{i\omega_1-\lambda_2} & \dots & \frac{\mathbf{I}_{n_\mathrm{O}}}{i\omega_1-\lambda_{n_\mathrm{m}}} & -\frac{\mathbf{I}_{n_\mathrm{O}}}{\omega_1^2} & \mathbf{I}_{n_\mathrm{O}} \\ \frac{\mathbf{I}_{n_\mathrm{O}}}{i\omega_2-\lambda_1} & \frac{\mathbf{I}_{n_\mathrm{O}}}{i\omega_2-\lambda_2} & \dots & \frac{\mathbf{I}_{n_\mathrm{O}}}{i\omega_2-\lambda_{n_\mathrm{m}}} & -\frac{\mathbf{I}_{n_\mathrm{O}}}{\omega_2^2} & \mathbf{I}_{n_\mathrm{O}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\mathbf{I}_{n_\mathrm{O}}}{i\omega_{n_\omega}-\lambda_1} & \frac{\mathbf{I}_{n_\mathrm{O}}}{i\omega_{n_\omega}-\lambda_2} & \dots & \frac{\mathbf{I}_{n_\mathrm{O}}}{i\omega_{n_\omega}-\lambda_{n_\mathrm{m}}} & -\frac{\mathbf{I}_{n_\mathrm{O}}}{\omega_{n_\omega}^2} & \mathbf{I}_{n_\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_1 \\ \boldsymbol{\rho}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{\rho}_{n_\mathrm{m}} \\ \boldsymbol{\rho}_0 \\ \boldsymbol{\rho}_\infty \end{pmatrix} \tag{V.12}$$

dans laquelle $\mathbf{I}_{n_\mathrm{O}}$ est la matrice identité de taille n_O.

Les résidus $\boldsymbol{\rho}_0$ et $\boldsymbol{\rho}_\infty$, aussi nommés résidus extra-bande, permettent classiquement de représenter la participation des modes non résonants dans la bande fréquentielle d'analyse mais permettent aussi d'identifier des phénomènes indépendants des résonances dynamiques du système et pouvant polluer la mesure tels les phénomènes de compatibilité électromagnétique (CEM) explicités dans le chapitre VI.

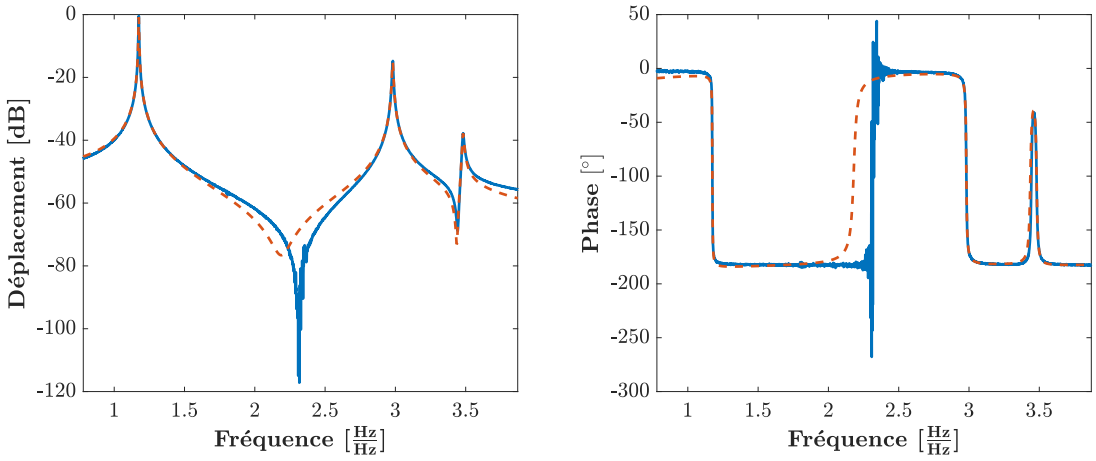
Dans un troisième temps, les déformées modales $\boldsymbol{\phi}_k$ ainsi que les facteurs de participation modale $\boldsymbol{\ell}_k$ sont déduits des résidus en considérant $\boldsymbol{\phi}_k = \boldsymbol{\ell}_k$ dans l'équation (V.6). Finalement, à partir du vecteur contenant les facteurs de participation modale, le vecteur des amplitudes modales $\boldsymbol{\alpha}_k$ est évalué au moyen de l'équation

$$\boldsymbol{\alpha}_k = \left| \frac{\boldsymbol{\ell}_k}{i\Omega_k - \lambda_k} + \frac{\overline{\boldsymbol{\ell}_k}}{i\Omega_k - \overline{\lambda_k}} \right| \otimes \mathbf{v}^\mathrm{T} \tag{V.13}$$

avec $\mathbf{v}$ est le vecteur contenant les tensions d'alimentation des aubes.

Dans ce mémoire, l'amplitude modale peut être définie comme l'amplitude à la résonance du mode étudié.

La superposition entre les fonctions de réponse fréquentielle expérimentale et synthétisée (cette dernière est aussi nommée lissage) d'un essai large bande est présentée en figure V.15.

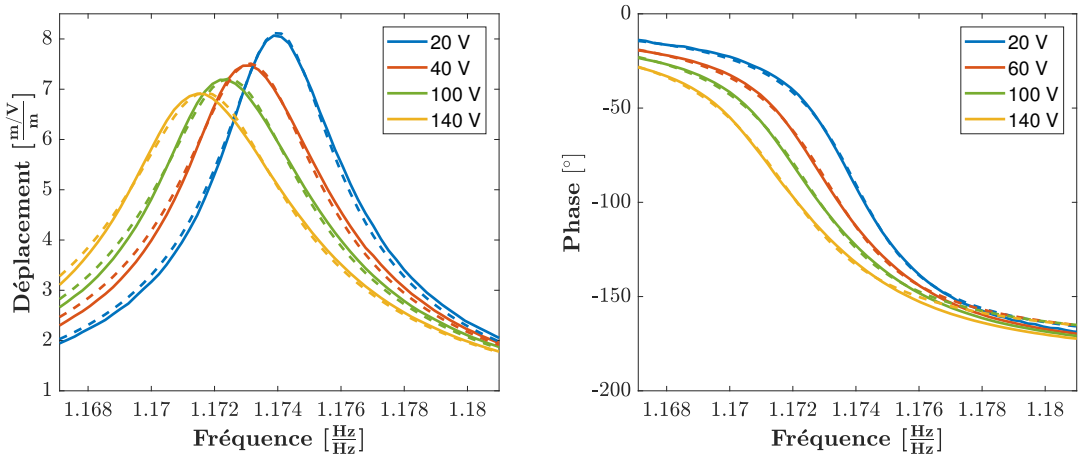


(a) Amplitude (b) Phase

FIGURE V.15 – Superposition d'une fonction de réponse fréquentielle expérimentale (—) issue d'un essai large bande et de son lissage (- -)

Trois modes sont recherchés et identifiés pour toutes les fonctions de réponse fréquentielle simultanément, à savoir celle provenant du laser et celles émanant des deux jauges ; seule la réponse fournie par le vibromètre est présentée dans un souci de concision. Il est possible de remarquer sur cette figure que le lissage (ici, évalué sans prise en compte des termes résiduels) est quasiment superposé avec la fonction de réponse fréquentielle expérimentale et particulièrement au voisinage des résonances. L'incertitude de lissage de la fonction de réponse fréquentielle associée à l'essai large bande est déduite de l'équation (V.9) et est égale à 0.003 %.

Les fonctions de réponse fréquentielle expérimentales et celles synthétisées pour des essais au voisinage de la résonance des deux premiers modes de flexion sont tracées en figures V.16 et V.17.

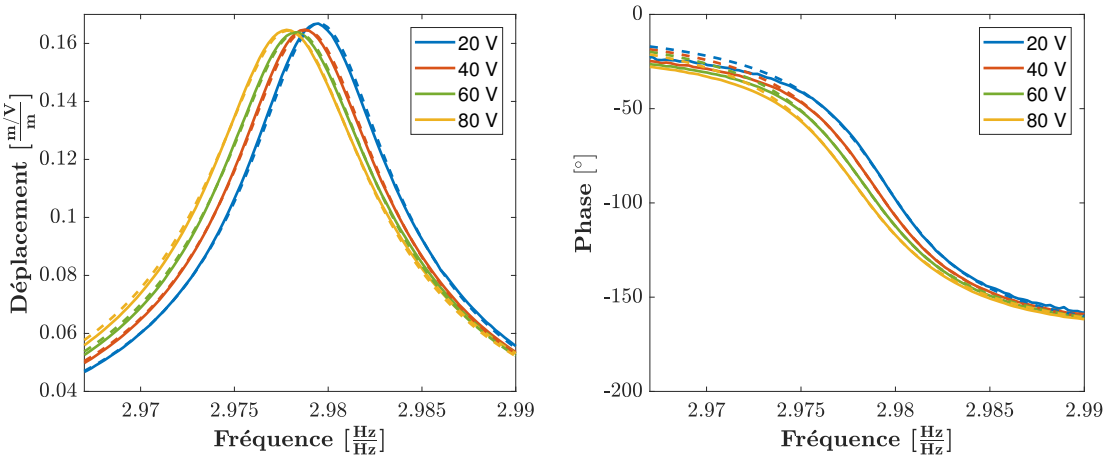


(a) Amplitude (b) Phase

Figure V.16 – Superposition des fonctions de réponse fréquentielle expérimentales (—) issues d'essais en sinus balayé par échelon, au voisinage de la résonance du premier mode de flexion et de ses lissages (- -)

Un seul mode est recherché et identifié pour toutes les fonctions de réponse fréquentielle simultanément. Il est possible de constater sur ces deux figures que le lissage se superpose quasi-parfaitement avec la réponse expérimentale aussi bien pour le premier mode de flexion V.16 que pour le deuxième V.17. Toutefois, le lissage s'écarte très légèrement de la fonction de réponse fréquentielle expérimentale au voisinage de la résonance lorsque l'intensité de la non-linéarité augmente ce qui est observable sur la plus importante excitation du premier mode de flexion en figure V.16. Par ailleurs, une seconde identification modale est accomplie à l'aide de la méthode à -3 dB afin de valider les paramètres modaux identifiés. Les incertitudes de lissage sont, au maximum, de 0.03 % pour la fonction de réponse fréquentielle au voisinage du premier mode de flexion et de 0.01 % pour celle au voisinage du deuxième mode de flexion.

Cette incertitude de lissage, intervenant lorsque le comportement non-linéaire du système s'amplifie, permet de se remémorer que l'identification modale présentée dans cette sous-section est fondée sur un modèle analytique linéaire : l'extraction des paramètres modaux effectuée dans les travaux de ce mémoire de thèse restent des approximations linéaires. Néanmoins, des méthodes d'identification modale non-linéaire ont déjà été développées dans la littérature [62, 110].



(a) Amplitude (b) Phase

FIGURE V.17 – Superposition des fonctions de réponse fréquentielle expérimentales (—) issues d'essais en sinus balayé par échelon, au voisinage de la résonance du deuxième mode de flexion et de ses lissages (- -)

1.3.3 Incertitudes de mesure

Quelque soit le type d'essais, une mesure expérimentale est systématiquement entachée d'incertitudes de mesure. Chacun des composants intervenant dans la chaîne de mesure est susceptible d'ajouter des incertitudes, plus ou moins importantes en fonction du composant concerné. Le bruit de mesure des composants est négligé car celui-ci est faible en comparaison des signaux de mesure et, de surcroît, ardu à déterminer précisément car pouvant intervenir dans la quasi-totalité des composants de la chaîne d'acquisition. Dans le cadre des réponses forcées fréquentielles, ces dernières interviennent conjointement sur la fréquence et l'amplitude de la réponse.

Les incertitudes de mesure sur la fréquence du signal mesuré sont, en très grande partie, imputées à la discrétisation fréquentielle de la réponse car la précision des composants est intimement liée à la cadence de leur processeur qui est très au-delà de la gamme de fréquence étudiée. Ces incertitudes sont équivalentes à $\pm\Delta f/2$, Δf étant le pas fréquentiel. Dans le cas de ces essais sur mors, l'incertitude de mesure sur la fréquence est à différencier en fonction du type d'excitation : large bande ou sinus balayé discret (pour lesquels la discrétisation fréquentielle est différente). L'excitation large bande induit une incertitude absolue de mesure sur la fréquence de ± 0.03 Hz tandis que la discrétisation de l'excitation en sinus balayé discret est plus précise puisqu'elle aboutit à une incertitude absolue de ± 0.002 Hz.

Contrairement aux incertitudes sur la fréquence, les incertitudes de mesure sur l'amplitude du signal mesuré sont dépendantes de la précision des composants mais aussi de la résolution de ces derniers. Les incertitudes de mesure sur l'amplitude de la réponse liées aux chaînes d'acquisition du vibromètre laser et des jauges de déformation sont consignées dans les tableaux V.1 et V.2, respectivement.

Composant	Origine	Incertitude relative [%]	Incertitude cumulée [%]
Carte d'acquisition	Précision du matériel [85]	±0.01	≈ ± 0.02
	Résolution [85]	±0.02	
Contrôleur du vibromètre	Résolution [183]	$\pm 5 \times 10^{-6}$	
Vibromètre laser	Précision du laser [182]	$< \pm 1 \times 10^{-6}$	

Tableau V.1 – Incertitudes de mesure en amplitude de la chaîne d'acquisition du vibromètre laser

Composant	Origine	Incertitude relative [%]	Incertitude cumulée [%]
Carte d'acquisition	Précision du matériel [85]	±0.01	≈ ± 1.1
	Résolution [85]	±0.02	
Pont de jauges [3]	Tension d'alimentation [228]	±0.2	
	Gain [228]	±0.5	
	Résistance d'étalonnage [228]	±0.1	
Jauges	Résistance de la jauge C.1	±0.3	

Tableau V.2 – Incertitudes de mesure en amplitude de la chaîne d'acquisition des jauges

De plus, des incertitudes peuvent aussi s'introduire dans la mesure du signal de retour d'excitation provenant de l'amplificateur. Ce signal permet de surveiller en temps réel la tension et le courant de l'excitation mais est aussi employé comme référence de la réponse forcée afin de pouvoir identifier les paramètres modaux : celles-ci impactent donc directement les résultats. Les incertitudes relatives de mesure sur le retour d'excitation en tension et en courant sont identiques et sont consignées dans le tableau V.3.

Composant	Origine	Incertitude relative [%]	Incertitude cumulée [%]
Carte d'acquisition	Précision du matériel [85]	±0.01	≈ ± 1
	Résolution [85]	±0.02	
Amplificateur	Précision	±1	

Tableau V.3 – Incertitudes de mesure en amplitude du retour de l'excitation

Ces multiples incertitudes de mesure sur l'amplitude sont à ajouter aux incertitudes de lissage provoquées lors de l'identification modale des fonctions de réponse fréquentielle et évaluées dans la sous-section V.1.3. Néanmoins, ces différentes incertitudes sur la fréquence ou sur l'amplitude du signal sont minimes en comparaison de l'effet de la non-linéarité sur

3. Les incertitudes de mesure induites par la résistance des fils sont compensées par la calibration du pont de jauges

les paramètres modaux mais aussi par rapport à la dispersion des paramètres modaux entre les dix-huit aubes testées durant ces essais sur mors. Cette dispersion et ces effets non-linéaires sont abordés en section V.3 lors de la confrontation entre les essais et les résultats numériques.

2 Simulations numériques non-linéaires

Comme énoncé en introduction de ce chapitre, les essais sur mors ont été réalisés dans un premier temps avec pour objectif premier de valider le fonctionnement de l'instrumentation et du système d'excitation par actionneurs piézoélectriques des dix-huit aubes de la soufflante. Toutefois, les mesures dynamiques effectuées au voisinage de la résonance pour plusieurs tensions d'excitation, permettant notamment de faire ressortir les non-linéarités en friction, donnent l'opportunité d'accomplir des comparaisons entre ces résultats expérimentaux et les simulations numériques non-linéaires accomplies à l'aide des méthodes de modélisation, de réduction et de résolution présentées dans les chapitres précédents. Ces comparaisons autorisent notamment le recalage du modèle numérique et des paramètres de contact et de frottement en vue de la comparaison des essais en rotation et des simulations de la soufflante complète.

Dans un premier temps, cette section apporte des précisions sur le modèle numérique éléments finis employé pour représenter le système {aube+mors}. Dans un deuxième temps, les méthodes numériques non-linéaires sont abordées et notamment la réduction mécanique et piézoélectrique du modèle numérique. Pour achever cette section, plusieurs études d'influence, faisant notamment varier les paramètres du modèle et des simulations numériques, sont exposées.

2.1 Modélisation numérique

À l'instar de la composition du moyen d'essais sur mors, la modélisation numérique du dispositif expérimental comporte deux éléments primordiaux : le modèle numérique de l'aube et du mors, incluant le contact entre les deux éléments, les conditions aux limites du modèle et le système de serrage, ainsi que la modélisation des actionneurs piézoélectriques.

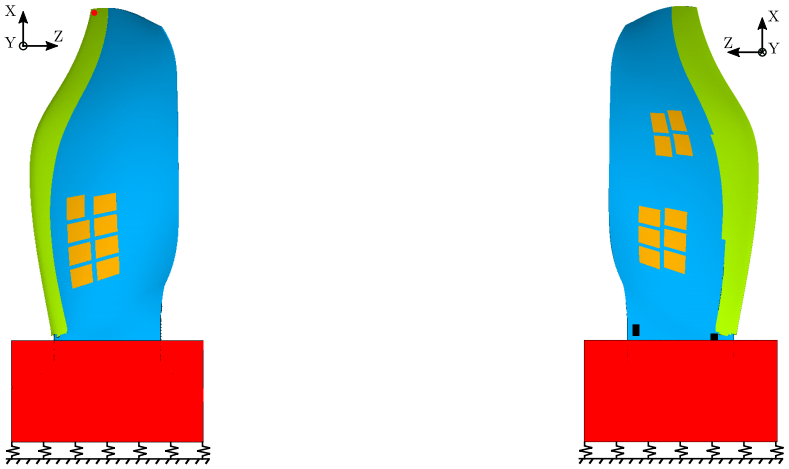
2.1.1 Modèle numérique

Les modèles numériques de l'aube et du mors, discrétisés par l'intermédiaire de la méthode des éléments finis, sont des modèles directement exploités dans l'industrie et dont les maillages ont été créés au moyen du logiciel éléments finis ANSYS® (version 16.1). Les maillages des deux structures sont indépendants : les deux structures ne contiennent donc aucun nœud en commun.

Une représentation des faces extrados et intrados du modèle numérique du système {aube+mors} est présentée en figures V.18a et V.18b respectivement.

Le maillage de l'aube est constitué d'éléments de type hexaédrique linéaire nommés `SOLID185` [6] dans le logiciel ANSYS®. 24 758 de ces éléments (sans compter les éléments modélisant les actionneurs piézoélectriques) composent le maillage de l'aube comprenant 30 286 nœuds et produisant 90 858 degrés de liberté mécaniques.

D'un point de vue du matériau, le composite tissé 3D constituant l'aube nécessite l'emploi de techniques d'homogénéisation du matériau afin de généraliser le comportement microscopique du composite au niveau macroscopique. Sans rentrer dans les détails d'un vaste sujet de recherche actuel, une revue de ces techniques appliquées au composite tissé 3D est proposée par Ansar *et al.* [5]. Ces techniques d'homogénéisation du composite



(a) Extrados (b) Intrados

Figure V.18 – Modèle numérique de l'ensemble {aube+mors}

tissé 3D aboutissent à des caractéristiques matériaux orthotropes, ces dernières sont appliquées dans des repères locaux, eux aussi déterminés par l'intermédiaire de ces techniques. En pratique dans les logiciels éléments finis, l'orientation des repères liés aux éléments est modifiée pour appliquer les propriétés matériaux. Comme énoncé dans le chapitre I, le tissage de l'aube n'est pas uniforme et est réparti en différentes zones en fonction des contraintes appliquées à la zone en question, c'est pourquoi l'aube et tout particulièrement son pied sont décomposés en de nombreuses zones de caractéristiques matériaux différentes. Les matériaux du bord d'attaque en titane et de la colle fixant celui-ci sur le matériau composite sont quant à eux décrits par des caractéristiques isotropes.

Le maillage du mors est constitué de 36 086 éléments de type héxaédrique linéaire qui engendrent 40 388 nœuds et 121 164 degrés de liberté mécaniques. Le mors est réalisé en acier, matériau décrit par des caractéristiques isotropes dans ce modèle numérique. La géométrie du mors a été simplifiée : les alésages et les tuyaux de refroidissement, visibles sur la figure V.1, ne sont pas représentés sur le modèle numérique afin de faciliter la représentation de la pièce et la convergence de son maillage.

Le serrage de l'aube dans l'alvéole du mors, effectué expérimentalement au moyen de quatre vis et d'une cale (décrit en section V.1), est réalisé numériquement par dilatation de la cale selon l'axe X. En effet, le système de serrage par vis nécessitant la modélisation d'un grand nombre de pièces, celui-ci a été remplacé numériquement par le phénomène de dilatation. Un coefficient de dilatation thermique uniaxial équivalent à celui de l'acier ($\alpha_{\text{acier}} = 12.0 \times 10^{-6}\,\text{K}^{-1}$) est affecté à la cale selon l'axe X. Afin de calibrer numériquement l'effort appliqué à l'aube, la température locale de la cale est choisie en fonction des efforts évalués expérimentalement. La base de la cale étant fixée à la base du mors, ce processus de dilatation permet ainsi de conserver l'équilibre statique dans l'ensemble {aube+mors} lors de la phase de précharge du système et aboutit à des efforts appliqués à l'aube par la cale (en jaune sur la figure V.19) représentatifs de ceux produits expérimentalement, comme révélé en figure V.19.

238 nœuds composent chacune des portées du modèle numérique, soit 476 nœuds par structure pour un total de 1428 degrés de liberté. La liaison entre les portées des deux structures que sont l'aube et le mors est réalisée sur ANSYS® par les éléments de contact `CONTA173` [6] et `TARGET170` [6] localisés à la surface des éléments hexaédriques linéaires

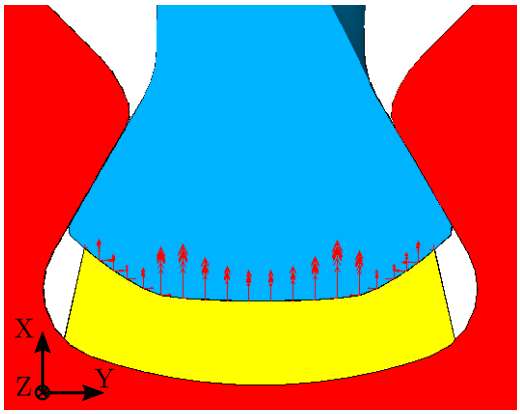


FIGURE V.19 – Efforts appliqués à l'aube par la cale

respectivement de l'aube et du mors. Ces éléments permettent ainsi de simuler un contact frottant à l'interface entre les deux structures. Par ailleurs, en vue des simulations non-linéaires, il est important de préciser que les maillages des portées de contact de l'aube et du mors coïncident afin de résoudre ce problème de contact / frottement par la méthode des Lagrangiens dynamiques (DLFT) qui emploie une formulation nœuds à nœuds explicitée dans le chapitre I et en annexe A.

Le clinquant, mentionné dans la section V.1 et positionné entre les portées de l'aube et du mors, n'est pas compris dans la modélisation des essais sur mors afin de simplifier le modèle numérique et les simulations résultant de ce modèle.

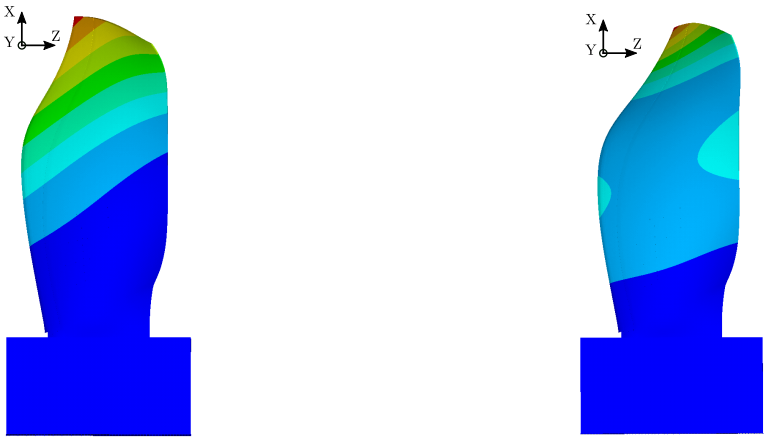
La liaison entre l'aube et la cale est effectuée par l'intermédiaire de ces mêmes éléments. Néanmoins, le frottement à l'interface de ces éléments est considéré comme totalement glissant puisque le but est uniquement d'extraire les efforts normaux de précharge engendrés par ce contact. En effet, cette liaison n'est pas considérée comme un contact frottant dans la suite des simulations non-linéaires comme détaillé dans la sous-section suivante.

Les suspensions élastiques permettant d'isoler l'ensemble {aube+mors} sont modélisées au moyen de ressorts placés sur chacun des nœuds de la base du mors. Chaque nœud est pourvu de trois ressorts : un dans chaque direction X, Y et Z. La raideur de ces ressorts est recalée afin que les fréquences des modes de suspension du modèle numérique de la structure soient proches à ceux mesurés expérimentalement.

Par ailleurs, les cartes du déplacement total superposées sur les déformées modales du premier et du deuxième mode de flexion du système {aube+mors} sont consignées en figures V.20a et V.20b.

2.1.2 Actionneurs piézoélectriques

Les actionneurs piézoélectriques sont discrétisés au moyen de 890 éléments hexaédriques quadratiques, nommés `SOLID226` [6] dans le logiciel éléments finis ANSYS®, possédant des propriétés piézoélectriques. Ces éléments contiennent 5355 nœuds, chacun renfermant trois degrés de liberté mécaniques et un degré de liberté électrique ce qui porte le nombre de degrés de liberté décrivant les actionneurs piézoélectriques à 21 420. Le nombre d'éléments contenus dans l'épaisseur de chaque patch fait l'objet d'une étude d'influence en sous-section V.2.3, les nombres d'éléments, de nœuds et de degrés de liberté étant donnés pour deux éléments dans l'épaisseur de chaque patch. Les propriétés piézoélectriques des éléments employés résultent directement des équations matricielles représentant la formu-



(a) Premier mode de flexion (b) Deuxième mode de flexion

Figure V.20 – Cartes du déplacement total superposées sur les déformées modales de la structure {aube+mors} (amplitudes min. ■ et max. ■ en valeur absolue)

lation éléments finis d'un système élastique amorti équipé de patchs piézoélectriques sur sa frontière. Cette formulation est développée dans le chapitre IV.

Afin de simplifier la modélisation des actionneurs, seule leur partie active définie sur le dessin technique en annexe C et constituée par le matériau piézoélectrique, est modélisée : les films encapsulant la céramique ne sont donc pas considérés dans la modélisation. Les actionneurs sont positionnés le plus précisément possible par rapport à leur position réelle sur l'aube, tout en coïncidant avec le maillage de l'aube. La liaison entre les patchs piézoélectriques et l'aube est supposée parfaite, les nœuds formant la base des actionneurs sont fusionnés avec les nœuds qui coïncident sur la surface de l'aube. La colle fixant les actionneurs n'est donc pas intégrée dans le modèle car l'épaisseur de la couche de colle est la plus fine possible ce qui rend difficile le maillage.

Les hypothèses de modélisation, effectuées sur le modèle numérique des actionneurs piézoélectriques et mentionnées ci-dessus, ainsi que les incertitudes liées au positionnement réel des actionneurs sur les aubes de soufflante, influent nécessairement l'amplitude de réponse des aubes. C'est pourquoi ces hypothèses et ces incertitudes seront compensées en calibrant le pouvoir d'excitation des actionneurs par rapport aux essais sur mors exécutés avec une faible tension d'excitation aboutissant à un comportement de la structure très proche du linéaire. Cette calibration des actionneurs est détaillée en sous-section V.3.1.

D'un point de vue du matériau, il est important de rappeler que les lois de comportement piézoélectrique peuvent prendre de nombreuses formes [95]. Cette abondance de variantes peut être complexe à manier lorsqu'il s'agit de définir les propriétés matériaux des éléments piézoélectriques. En effet, les composantes des lois de comportement employées peuvent être distinctes des caractéristiques matériaux fournies par le constructeur.

Les éléments possédant des propriétés piézoélectriques dans le logiciel ANSYS® permettent de décrire le matériau piézoélectrique au moyen de deux formulations différentes.

La première est dite en e (par rapport à la notation du tenseur piézoélectrique) et est un mélange entre la formulation des lois de comportement piézoélectrique dites intensive et extensive [48]. Cette formulation en e est employée dans le chapitre IV et rappelée ici

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^E & -\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e} & \boldsymbol{\epsilon}^{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \tag{V.14}$$

Pour rappel, $\boldsymbol{\sigma}$ représente le champ des contraintes exprimé en Pa et $\boldsymbol{\varepsilon}$ symbolise le champ des déformations, sans dimension. $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$ sont respectivement le champ électrique exprimé en $\mathrm{V.m^{-1}}$ et le champ de déplacement électrique exprimé en $\mathrm{C.m^{-2}}$. Les grandeurs susmentionnées sont des tenseurs d'ordre un. De plus, $\mathbf{c}^E$ est le tenseur des constantes élastiques à champ électrique constant d'ordre deux exprimé en Pa, $\mathbf{e}$ est le tenseur piézoélectrique en tension d'ordre deux exprimé en $\mathrm{N.m^{-1}.V^{-1}}$, $\boldsymbol{\epsilon}^{\varepsilon}$ est le tenseur diélectrique à déformation constante d'ordre deux exprimé en $\mathrm{F.m^{-1}}$ et l'indice $\bullet^{\mathrm{T}}$ symbolise la transposée de la matrice.

La seconde formulation des lois de comportement est dite en d ou intensive. Celle-ci est décrite dans l'équation

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}^E & \mathbf{d}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{d} & \boldsymbol{\epsilon}^{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \tag{V.15}$$

dans laquelle $\mathbf{s}^E$ est le tenseur des constantes de souplesse à champ électrique constant d'ordre deux exprimé en $\mathrm{Pa^{-1}}$, $\mathbf{d}$ est le tenseur piézoélectrique en charge d'ordre deux exprimé en $\mathrm{C.N^{-1}}$ et $\boldsymbol{\epsilon}^{\sigma}$ est le tenseur diélectrique à contrainte constante d'ordre deux exprimé en $\mathrm{F.m^{-1}}$.

Les caractéristiques matériaux pourvues par Midé pour ses patchs QuickPack10W rev.1A [210] et consignées en annexe C procurent les constantes des tenseurs de la formulation en d. Ces dernières peuvent donc être directement insérées dans le logiciel ANSYS® pour décrire le matériau piézoélectrique. Ces tenseurs sont convertis au sein du logiciel au moyen des équations consignées dans le tableau V.4 pour se ramener à la formulation des lois de comportement en e employée dans le logiciel ANSYS® pour la formulation éléments finis.

Élastique	Piézoélectrique	Diélectrique
$\mathbf{c}^E = \left(\mathbf{s}^E\right)^{-1}$	$\mathbf{e} = \mathbf{d}\mathbf{c}^E$	$\boldsymbol{\epsilon}^{\varepsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^{\sigma} - \mathbf{e}\mathbf{d}^{\mathrm{T}}$

Tableau V.4 – Relation de passage entre les tenseurs [95]

Comme il est possible de le remarquer en annexe C, toutes les constantes des tenseurs ne sont pas nécessaires pour décrire le matériau dans le cas d'un patch (épaisseur très faible par rapport aux autres directions) piézoélectrique polarisé selon son épaisseur. En effet, une céramique piézoélectrique sous forme de patch et polarisée dans une direction donnée est, en général, considérée comme un matériau isotrope transverse dans lequel le

plan d'isotropie est orthogonal à la direction de polarisation. La forme en e des lois de comportement pour une polarisation selon Z (équivalente à la composante 3 dans l'équation (V.16)) peut alors se simplifier telle que

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \hline D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & & & & & & -e_{31} \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & & & & & & -e_{31} \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & & & & & & -e_{33} \\ & & & c_{44}^E & & & & -e_{15} & \\ & & & & c_{44}^E & & -e_{15} & & \\ & & & & & c_{66}^E & & & \\ \hline & & & & e_{15} & & \epsilon_{11}^\varepsilon & & \\ & & & e_{15} & & & & \epsilon_{11}^\varepsilon & \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & & & & & & \epsilon_{33}^\varepsilon \end{array}\right) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \hline E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \tag{V.16}$$

La direction de polarisation permet d'expliquer les composantes nulles du tenseur $\mathbf{e}$ car seule la composante 3 du champ électrique $\mathbf{E}$ engendre des contraintes normales. Inversement, seule la composante 3 du déplacement électrique $\mathbf{D}$ est influencée par des déformations normales. Le matériau d'un patch piézoélectrique polarisé selon son épaisseur est alors caractérisé par 10 constantes indépendantes [4] (5 élastiques, 3 piézoélectriques et 2 diélectriques), toutes proposées en annexe C.

Pour finir, dans le but de prendre en compte la direction de polarisation des patchs dans le modèle numérique éléments finis, l'orientation des repères de chaque élément modélisant les actionneurs est modifiée afin que l'axe Z soit orienté selon l'épaisseur de l'actionneur en question. Les axes X et Y sont donc contenus dans le plan d'isotropie.

Le modèle numérique éléments finis représentant le système {aube + mors} ainsi que les actionneurs piézoélectriques est maintenant mis en place. Un récapitulatif des degrés de liberté de chacun des composants du modèle est proposé dans le tableau V.5.

Nombre de DdL	Aube	Mors	{Aube+Mors}
Internes	88 929	119 736	208 665
Piézomécaniques	21 420	—	21 420
Contact	1428	1428	2856
Total	111 777	121 164	232 941

TABLEAU V.5 – Récapitulatif des dimensions du modèle numérique

2.2 Méthodes numériques non-linéaires

Une fois le modèle numérique éléments finis élaboré, celui-ci nécessite d'être réduit dans le but d'évaluer le comportement non-linéaire de la structure. En effet, le modèle numérique non-linéaire de taille industrielle ne peut être résolu en l'état au moyen des méthodes exposées dans le chapitre II en raison de son nombre important de degrés de liberté. Ainsi, les méthodes de réduction, détaillées dans le chapitre III, sont appliquées au modèle numérique éléments finis.

Néanmoins, la structure discrétisée numériquement contient des degrés de liberté électriques liés à la présence des actionneurs piézoélectriques ce qui n'autorise pas l'emploi

4. L'isotropie implique $c_{66}^E = {}^{c_{11}^E - c_{12}^E}/_2$

direct de ces méthodes de réduction et de résolution. Afin de lever ce problème, la technique de condensation des degrés de liberté électriques, développée dans le chapitre IV, permettant ainsi de travailler avec un modèle purement mécanique, est appliquée au modèle numérique.

L'exploitation de ces différentes méthodes constituant la phase préparatoire des réponses forcées du système {aube+mors} est exposée dans cette sous-section par ordre chronologique d'application en commençant par la méthode de condensation des degrés de liberté électriques puis la réduction par synthèse modale linéaire au moyen de la méthode de Craig-Bampton. Les modes complexes non-linéaires sont ensuite évalués, comme dépeint dans le chapitre II, pour finalement reconstituer les réponses forcées non-linéaires pour plusieurs tensions d'excitation au moyen de la méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée.

Dans un premier temps, la précharge statique du système, permettant la prise en compte des efforts de la cale sur l'aube dans le modèle numérique, est présentée. Il est important de noter que cette précharge statique est effectuée au moyen du logiciel ANSYS® version 16.1, au contraire des étapes suivantes qui sont réalisées au moyen de programmes [5] développés sous MATLAB® et exploitant les matrices de masse, de raideur et le vecteur des efforts extérieurs extraits du logiciel éléments finis à la suite de la précharge statique.

2.2.1 Précharge statique

Dans le but de précontraindre numériquement le système {aube+mors} de façon similaire aux essais vibratoires, une température uniforme est appliquée à la cale contenue dans le mors. La dilatation dans sa longueur (selon l'axe X) de cette dernière presse les portées de l'aube contre l'alvéole du mors contraignant ainsi le contact entre l'aube et le mors (de façon similaire au contact entre une aube et son disque en rotation). En raison des non-linéarités de contact entre l'aube et le mors, une analyse statique non-linéaire permettant de converger itérativement vers un point d'équilibre du système est effectuée afin d'évaluer l'état de contraintes en résultant. Le champ de précontrainte équivalente de Von Mises, obtenu à la suite de cette analyse statique non-linéaire, est représenté en figure V.21.

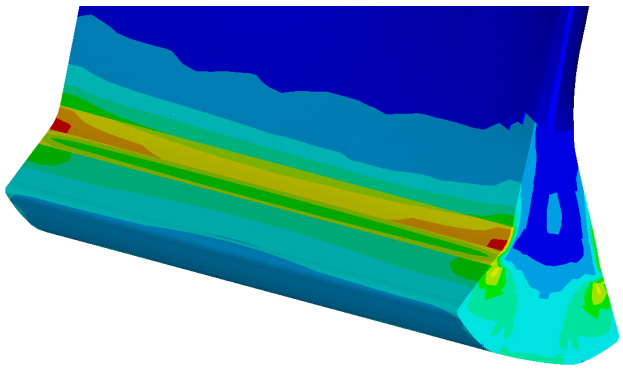


FIGURE V.21 – Champ de précontrainte du pied d'aube (contraintes min. ■ et max. ■)

Ce processus de précharge est mis en équation dans le chapitre I et aboutit au système d'équations matricielles (I.34) régissant la dynamique d'un solide au voisinage de cet état de précontrainte (en ne tenant pas compte des termes liés à la rotation de la structure).

5. Ces programmes ont été développés au LTDS, certains spécialement dans le cadre de ce travail de thèse tandis que d'autres ont été modifiés dans le but de prendre en considération les particularités de cette application et notamment l'excitation par actionneurs piézoélectriques.

La matrice **T**, contenue dans ce système d'équations, est la matrice contenant ces effets de précontrainte géométrique (en grand déplacement) qui confèrent un effet rigidifiant au système.

L'état d'équilibre résultant de cette procédure de précharge est employé comme état initial des simulations en dynamique non-linéaire. Les efforts dynamiques initiaux de contact entre les portées de l'aube et l'alvéole du mors résultent donc directement de cette phase de précharge statique.

Néanmoins, avec pour objectif de réduire le nombre de degrés de liberté maîtres à résoudre lors des simulations dynamiques, le contact entre l'aube et la cale n'est plus considéré comme tel après cette phase de précharge. En effet, les efforts de contact entre l'aube et la cale sont relevés après la phase d'analyse statique non-linéaire, puis le contact est ensuite relâché pour la suite des étapes préparatoires aux simulations numériques non-linéaires. Ce contact est alors remplacé par les efforts relevés qui sont appliqués à l'aube et à la cale afin de conserver l'équilibre statique du système nécessaire pour les simulations en dynamique non-linéaire à partir de cet état de précontrainte.

Le temps de calcul [6] de cette procédure de précharge statique sur le système {aube+mors} est estimé à 10 min.

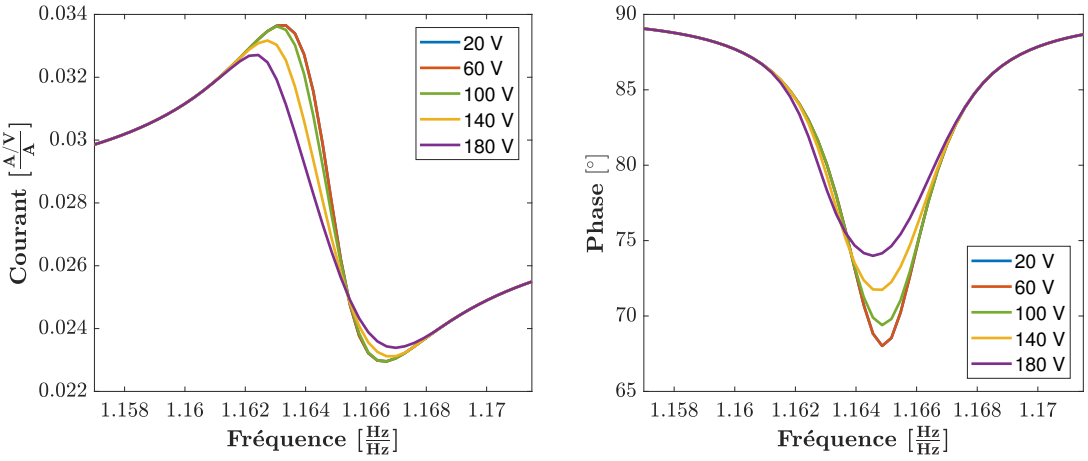
2.2.2 Condensation des degrés de liberté électriques

Cette procédure de condensation des degrés de liberté électriques des actionneurs piézoélectriques aboutit à l'élimination de ces degrés de liberté électriques ainsi qu'à une légère réduction du modèle liée à cette suppression. Cette technique de condensation, détaillée dans le chapitre IV, consiste à séparer les degrés de liberté électriques des patchs piézoélectriques en trois portions :

- le potentiel des degrés de liberté électriques des nœuds des électrodes inférieures des actionneurs est fixé à 0 V comme réalisé expérimentalement par l'amplificateur linéaire de puissance lors de ces essais sur mors ;
- les degrés de liberté électriques des nœuds entre les deux électrodes des actionneurs sont condensés selon la procédure décrite dans le chapitre IV modifiant ainsi la matrice de raideur **K** du système et la matrice de couplage piézomécanique $\mathbf{K}^*_{\text{uv}}$;
- le potentiel (et donc la tension entre les électrodes inférieures et supérieures des actionneurs) est fixé en fonction de l'amplitude de la tension alternative (ou harmonique) délivrée par l'amplificateur linéaire de puissance. Cette tension est transformée en effort mécanique au moyen de la matrice de couplage piézomécanique $\mathbf{K}^*_{\text{uv}}$. Cet effort est connu puisque la tension est fixée : ce terme est donc placé dans le second membre de l'équation parmi les efforts extérieurs purement mécaniques comme exposé dans l'équation (IV.30).

En plus de l'équation (IV.30) employée jusqu'à maintenant, la procédure de condensation aboutit à une seconde équation (IV.31) liant la charge électrique **q** au déplacement **u** et à la tension **v**. L'intensité électrique apportée aux actionneurs par l'amplificateur peut donc être déduite de cette équation. Afin d'illustrer l'application de cette seconde équation, les réponses forcées numériques non-linéaires en courant au voisinage de la résonance mécanique du premier mode de flexion, pour plusieurs tensions d'excitation, du système {aube+mors} sont tracées en figure V.22.

6. Les temps de calcul, donnés dans ce chapitre, ont été évalués sur une machine possédant quatre cœurs physiques Intel® Core™ i7-6700K CPU @ 4.00 GHz et 32 Go de mémoire vive



(a) Amplitude (b) Phase

FIGURE V.22 – Fonctions de réponse fréquentielle numérique non-linéaire du courant au voisinage de la résonance premier mode de flexion

D'un point de vue qualitatif, la diminution subite (saut), à la même fréquence que la résonance mécanique, de l'amplitude et de la phase du courant (fourni aux actionneurs par l'amplificateur) est observable sur les fonctions de réponse fréquentielle expérimentale de la figure V.7 et celles numériques de la figure V.22. Cette diminution peut être interprétée comme la conséquence électrique de la résonance mécanique. En effet, à la résonance mécanique, les déformations subies par les actionneurs sont plus importantes ce qui créent des charges additionnelles à la surface des électrodes supérieures des actionneurs. Ces charges sont introduites dans le circuit électrique de puissance réduisant ainsi l'intensité électrique devant être fournie par l'amplificateur résultant en une diminution du courant électrique.

De plus, il est possible de remarquer l'effet de la non-linéarité de contact / frottement sur les fonctions de réponse fréquentielle du courant : un décalage fréquentiel du saut de courant ainsi qu'une diminution de l'amplitude et de la phase du saut sont en effet constatés sur les figures V.22a et V.22b. Ces derniers sont liés respectivement au décalage fréquentiel de la résonance mécanique et à l'augmentation de l'amortissement mécanique en fonction de l'amplitude de déplacement, déjà constatés sur les résultats expérimentaux de la figure V.7.

D'un point de vue quantitatif, les intensités numérique et expérimentale du courant, pour une même tension d'excitation, sont du même ordre de grandeur. De même, l'amplitude et la phase du saut de courant sont du même ordre de grandeur expérimentalement et numériquement. Néanmoins, l'effet non-linéaire de la capacité équivalente des actionneurs piézoélectriques en fonction de la tension, estimée en section V.1, n'est pas pris en compte dans cette modélisation des actionneurs puisque cette dernière est linéaire.

Ces différentes constatations électriques aussi bien d'un point de vue qualitatif que quantitatif permettent d'illustrer les effets électriques modélisés au moyen de l'équation (IV.31) issue de la méthode de condensation des degrés de liberté électriques des actionneurs piézoélectriques.

Bien que la réduction du modèle numérique ne soit pas l'objectif principal de cette technique, celle-ci permet une réduction de 5355 degrés de liberté, équivalente aux degrés de liberté électriques des actionneurs piézoélectriques (toujours pour deux éléments dans l'épaisseur de chaque actionneur).

La technique de condensation des degrés de liberté électriques des actionneurs piézo-

électriques, développée sous MATLAB®, est exécutée en amont des étapes de réduction purement mécanique. Le temps de calcul [7] de cette dernière est de l'ordre de la seconde dans le cas de ce modèle numérique de taille industrielle. Par ailleurs, ce temps de calcul est négligeable par rapport à la suite de la procédure de réduction.

2.2.3 Synthèse modale linéaire par la méthode de Craig-Bampton

À l'issue des étapes de précharge statique et de condensation des degrés de liberté électriques, les modèles numériques de l'aube et du mors sont réduits au moyen d'une procédure classique de synthèse modale linéaire à interfaces fixes, telle la méthode de Craig-Bampton dont la théorie a été abordée dans le chapitre III. Cette étape de réduction autorise ainsi la résolution d'un problème non-linaire de taille raisonnable lors de l'étape d'évaluation des modes complexes non-linéaires. Les deux structures composant le système {aube+mors} sont réduites séparément l'une de l'autre ce qui aboutit à la création de deux super-éléments : un pour l'aube et un second pour le mors incorporant tous deux l'état de précontrainte résultant de la précharge statique.

Les degrés de liberté définis comme maîtres pour le mors, c'est-à-dire ceux conservés pour décrire la structure à la suite de cette étape de réduction en plus des modes propres linéaires, sont les degrés de liberté des nœuds représentant les portées de contact soit un total de 1428 degrés de liberté.

Ceux de l'aube sont plus nombreux puisqu'en prime de ces 1428 degrés de liberté de contact [8], des degrés de liberté d'observation sont ajoutés à la partition des degrés de liberté maîtres. Parmi ces derniers, 3 sont dédiés au post-traitement des déplacements mesurés par le vibromètre laser tandis que 60 sont consacrés au post-traitement des déformations mesurées par les jauges. La localisation des nœuds contenant ces degrés de liberté est montrée en figure V.18. Par ailleurs, l'étape de post-traitement des résultats des simulations non-linéaires est explicitée en sous-section 2.2.6. Tous les autres degrés de liberté sont considérés comme degrés de liberté esclaves.

L'un des degrés de liberté dédié au laser est aussi retenu comme coordonnée de contrôle lors de l'évaluation des modes complexes non-linéaires et donc comme amplitude modale de la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée.

Le critère permettant la sélection du nombre de modes propres linéaires à conserver est un critère de type fréquentiel qui consiste à retenir tous les modes dont les fréquences propres sont inférieures à trois fois la fréquence propre maximale des modes étudiés [99]. Ce critère aboutit au choix de 25 et 10 modes propres linéaires pour l'aube et le mors, respectivement.

Le super-élément de l'aube est ainsi construit à partir des 25 premiers modes propres linéaires à interfaces fixes et de 1491 modes statiques de liaison liés aux 1428 degrés de liberté de contact et aux 63 degrés de liberté d'observation. Le super-élément du mors est quant à lui composé des 10 premiers modes propres linéaires à interfaces fixes et de 1428 modes statiques de liaison. Les fréquences calculées au moyen de ces super-élements sont approchées avec moins de 1 % d'erreur pour les modes conservés et moins de 0.05 % d'erreur pour les modes étudiés.

7. Voir note de bas de page 6 (p. 154)

8. Il est important de remarquer que les degrés de liberté de contact entre l'aube et la cale ne sont pas retenus comme degrés de liberté maîtres comme expliqué en sous-section 2.3.1

Les temps de calcul [9] de cette procédure de réduction sont de 23 min pour l'aube et de 11 min pour le mors. À noter que lors de la construction des super-éléments, les étapes les plus coûteuses sont le calcul des modes statiques de liaison, dont l'expression est donnée par l'équation (III.11), et la construction des matrices réduites.

2.2.4 Évaluation des modes complexes non-linéaires

À partir des données matricielles préchargées puis condensées et réduites, les modes complexes non-linéaires sont évalués afin de constituer la base de réduction de la méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée. La procédure de calcul employée est décrite dans le chapitre II et bénéficie d'une expression analytique de la matrice jacobienne du système définie en annexe B.

Les termes non-linéaires sont résolus au moyen de la méthode des Lagrangiens dynamiques (DLFT) détaillée en annexe A. Pour rappel, cette méthode permet de résoudre la loi de frottement sec de Coulomb associée à des conditions de non-pénétration entre les solides en contact par l'intermédiaire d'une technique d'alternance temps / fréquence. La méthode des Lagrangiens dynamiques exploite un formalisme de contact nœud à nœud ce qui permet d'employer les techniques de condensation sur les degrés de liberté non-linéaires et sur les degrés de liberté relatifs, détaillées dans le chapitre II. Ces techniques de condensation aboutissent à un problème final à résoudre contenant uniquement 1428 degrés de liberté.

Chacune des structures est amortie au moyen d'une matrice d'amortissement visqueux $\mathbf{C}$. Cette matrice est construite sur la base d'un taux d'amortissement modal ξ_i propre à chacun des modes de vibration ce qui permet d'utiliser les taux d'amortissement modal identifiés à partir des résultats des essais sur mors. La construction de cette matrice est fondée sur la formulation modale du problème linéaire amorti dans lequel la matrice d'amortissement diagonalisée s'écrit

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = diag\left(2\xi_i\Omega_i\right) \tag{V.17}$$

où $\mathbf{\Phi}$ est la matrice contenant les n modes propres linéaires de la structure, $\bullet^{\mathrm{T}}$ est le signe correspondant à la transposée de la matrice et Ω_i est la pulsation propre du mode propre linéaire i.

Par la suite, en exprimant $\mathbf{\Phi}$ et $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}$ en fonction de la matrice de masse $\mathbf{M}$, l'expression modale de la matrice d'amortissement peut alors s'écrire telle que

$$\mathbf{C} = 2\xi_i\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Omega}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\left(\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\right)^{-1} \tag{V.18}$$

avec $\mathbf{\Omega}$ le vecteur contenant les n pulsations propres associées aux n modes propres linéaires.

Cette expression peut se simplifier en supposant les modes propres linéaires contenus dans la matrice $\mathbf{\Phi}$ normés par la matrice de masse $\mathbf{M}$. Il vient alors

$$\mathbf{C} = 2\xi_i\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Omega}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} \tag{V.19}$$

L'équation (V.19) est l'expression employée pour construire la matrice d'amortissement visqueux dans le cadre de l'évaluation des modes complexes non-linéaires mais aussi, plus généralement, pour construire chacune des matrices d'amortissement exploitées dans les travaux contenus dans ce mémoire de thèse.

9. Voir note de bas de page 6 (p. 154)

La coordonnée de contrôle employée durant l'évaluation des modes complexes non-linéaires est le degré de liberté selon Y du nœud correspondant à la position pointée par le laser et représentée en figure V.18a. Le suivi de l'évolution de ce paramètre sur la plage d'amplitude est réalisé au moyen d'une continuation séquentielle épaulée par un prédicteur à pas fixe, tous deux décrits dans le chapitre II.

À noter que le coefficient de pénalité, employé dans la méthode de résolution des Lagrangiens dynamiques, est défini comme étant égal au rayon spectral [10] de la matrice de rigidité dynamique $\mathbf{Z}$, comme étudié par Charleux dans son mémoire de thèse [29].

Les paramètres associés à la résolution harmonique et à la méthode d'alternance temps / fréquence, à savoir le nombre d'harmoniques n_h et le nombre de pas de temps n_t discrétisant la période de la méthode d'alternance temps / fréquence, sont fixés à la suite d'études d'influence présentées dans la sous-section V.2.3.

De même, les paramètres liés aux lois de contact / frottement, c'est-à-dire le coefficient de frottement isotrope μ ainsi que l'effort normal de contact (déduit de la procédure de précharge statique et dépendant donc directement de la température appliquée à la cale), sont sélectionnés après des études d'influence exposées en sous-section V.3.2.

En raison du nombre d'inconnues à résoudre, cette étape du processus de réduction est la plus longue en termes de temps de calcul. À titre d'exemple, l'évaluation du premier mode non-linéaire (*ie.* le premier mode de flexion) pour $n_\mathrm{h} = 5$ harmoniques et $n_\mathrm{t} = 32$ discrétisations dure sept heures et trente minutes. Ce temps de calcul [11] est dépendant au premier ordre du nombre de points pour lesquels le mode complexe non-linéaire est évalué et de l'importance de la partie non-linéaire : ici, 76 points discrétisent la plage d'amplitude et le coefficient de frottement isotrope est égal à 0.1. Le mode complexe non-linéaire du premier mode de flexion du système {aube+mors}, dont le temps de calcul est donné dans cette sous-section, est illustré en figure V.23a.

2.2.5 Synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée

Cette étape de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée, dont l'aspect théorique est développé dans le chapitre III, est la dernière étape de ce processus préparatoire aux simulations non-linéaires. Celle-ci permet de reconstituer la réponse forcée non-linéaire, pour un vecteur donné d'efforts extérieurs (dans ce cas il s'agit des efforts piézoélectriques issus de la condensation des degrés de liberté électriques), à partir de l'évaluation des modes complexes non-linéaires précédemment réalisée. Les inconnues du problème final à résoudre sont uniquement les amplitudes modales associées aux modes complexes non-linéaires évalués (un seul mode est évalué dans ce cas) ce qui procure une résolution quasi-instantanée.

Cette synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée ainsi que l'étape d'évaluation du mode complexe non-linéaire sont équivalentes à un calcul de réponse forcée non-linéaire au moyen de la méthode de l'équilibrage harmonique décrite dans le chapitre II. Toutefois, le processus associé à la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée est plus rapide dès lors que plus de deux réponses forcées sont évaluées. En effet, une réponse forcée évaluée au moyen de la méthode de l'équilibrage harmonique pour $n_\mathrm{h} = 5$ harmoniques et $n_\mathrm{t} = 32$ discrétisations est résolue en moyenne en 4 h tandis qu'une réponse forcée [12] synthétisée par l'intermédiaire de la synthèse modale non-linéaire consomme en moyenne

10. En dimension finie, pour un endomorphisme de valeurs propres complexes λ_i, le rayon spectral est égal à $\rho = max|\lambda_i|$

11. Voir note de bas de page 6 (p. 154)

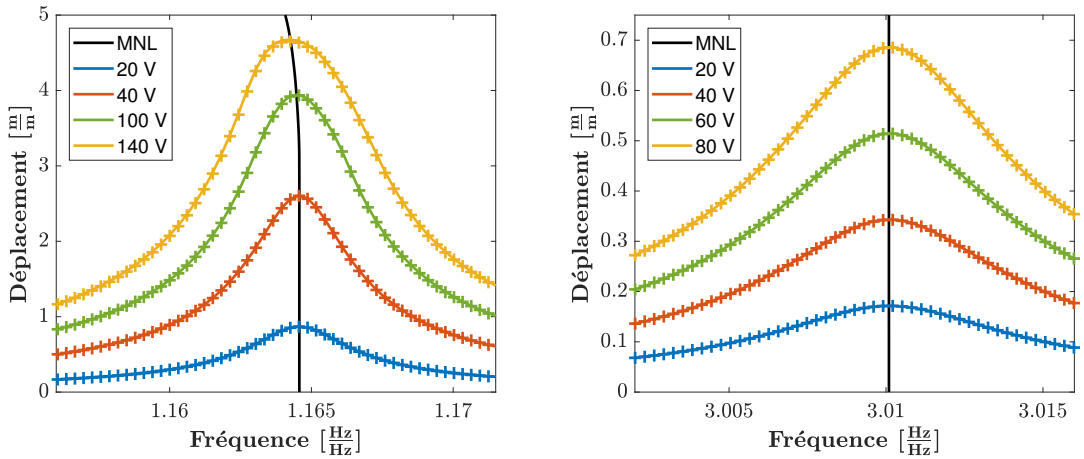
12. La réponse forcée évaluée au moyen des deux méthodes comprend 51 discrétisations fréquentielles.

25 s auquel il faut ajouter le temps d'évaluation du mode non-linéaire. La synthèse modale non-linéaire est donc avantageuse à partir de deux réponses forcées évaluées dans le cas de ce système {aube+mors}.

Le second avantage de cette procédure de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée, comparée à une réponse forcée évaluée au moyen de la méthode de l'équilibrage harmonique, réside dans l'évaluation du mode-complexe non-linéaire. En effet, cette dernière permet d'obtenir directement les paramètres modaux (fréquences propres et taux d'amortissement) sans nécessiter une identification des réponses forcées.

La précision de cette méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée est exposée en figure III.4 sur un modèle phénoménologique dont le mode étudié est séparé fréquentiellement.

Dans le cas d'un modèle numérique plus complexe, à savoir le modèle numérique {aube+mors} (toujours pour un mode séparé fréquentiellement des autres), la précision de cette méthode est proposée en comparant les réponses forcées obtenues au moyen de la méthode de l'équilibrage harmonique et de la synthèse modale non-linéaire pour le premier et le deuxième mode de flexion, respectivement en figures V.23a et V.23b. Les réponses forcées calculées au moyen de la méthode de l'équilibrage harmonique et le mode complexe non-linéaire permettant d'exploiter la méthode de la synthèse modale de la réponse forcée sont évalués pour $n_{\mathrm{h}} = 5$ harmoniques, $n_{\mathrm{t}} = 32$ discrétisations et un coefficient de frottement $\mu = 0.1$.



(a) Premier mode de flexion (b) Deuxième mode de flexion

FIGURE V.23 – Comparaison entre les réponses forcées évaluées au moyen de la méthode de l'équilibrage harmonique (—) et de la synthèse modale non-linéaire (+)

Il est possible de remarquer que les réponses forcées, obtenues au moyen de ces deux méthodes, sont quasi parfaitement superposées. L'erreur liée à la réduction du modèle par la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée est infime pour le deuxième mode de flexion (<0.1 %) ce qui est rationnel car la réponse du système est linéaire pour chacune des tensions d'excitation. L'erreur liée à l'emploi de cette méthode est plus importante concernant le premier mode de flexion : celle-ci est aussi inférieure à 0.1 % pour la réponse du système à une tension de 20 V mais augmente avec la tension d'excitation, et donc avec l'intensité de la non-linéarité, pour atteindre à 0.5 % à une tension de 140 V. Ces faibles erreurs entre les deux réponses forcées peuvent être issues de la limitation principale de la méthode de synthèse modale de la réponse forcée, à savoir la résolution du problème sur un seul harmonique (comme explicité dans le chapitre III). Bien que la résolution du

problème soit effectuée avec un seul harmonique, il est cependant nécessaire de rappeler que le vecteur solution est reconstitué en utilisant l'ensemble des harmoniques contenus dans les modes complexes non-linéaires.

Les tableaux V.6 et V.7 récapitulent, respectivement, les gains en termes de réduction ainsi que le temps de calcul des différentes étapes du processus aboutissant à la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée.

Nombre de DdL restants	Aube	Mors	{Aube+Mors}
Modèle initial	111 777	121 164	232 941
Condensation des DdL électriques	106 422	121 164	227 586
Craig-Bampton	1516	1438	2954
Modes complexes non-linéaires	1		1

Tableau V.6 – Récapitulatif des gains du processus de réduction

Temps de calcul [13]	Aube	Mors
Précharge statique	10 min	
Condensation des DdL électriques	<2 s	—
Craig-Bampton	23 min	11 min
Modes complexes non-linéaires	7 h30 min	
Synthèse modale non-linéaire	25 s	
Total	≈8 h	

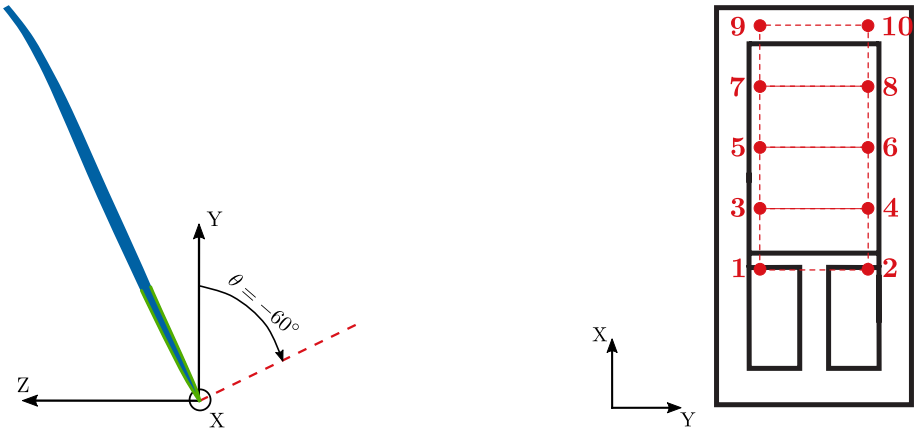
Tableau V.7 – Récapitulatif du temps de calcul du processus de réduction

2.2.6 Post-traitement des données de simulation

Une fois le vecteur solution, contenant notamment les degrés de liberté d'observation, reconstruit à partir des amplitudes modales et des modes complexes non-linéaires, il est nécessaire de post-traiter ces résultats afin de les comparer avec les mesures fournies par les capteurs employés durant les essais, à savoir le vibromètre laser et les jauges de déformation.

Un nœud, localisé en tête d'aube près du bord d'attaque et représenté sur la figure V.18a, est sélectionné afin d'évaluer les déplacements mesurés par le vibromètre laser. La direction de mesure du vibromètre laser ne correspondant pas à l'un des axes du repère cartésien global dans lequel les déplacements du nœud en question sont exprimés, il est alors nécessaire d'écrire les déplacements de ce nœud dans un repère dont l'une des directions est équivalente à celle de la mesure du vibromètre laser. Pour rappel, la mesure réalisée par le vibromètre laser est normale (avec une légère incertitude expérimentale) à la surface visée et contenue dans le plan (YZ). Une rotation des déplacements des degrés de liberté de la direction Y est alors effectuée selon un seul angle θ au moyen d'une matrice de rotation afin d'évaluer les déplacements selon la même direction que le vibromètre laser. Cet angle de rotation est égal à $\theta = -60\,°$. La procédure est illustrée en figure V.24a.

13. Voir note de bas de page 6 (p. 154)



(a) Incidence du faisceau laser (b) Jauge

FIGURE V.24 – Post-traitement des résultats numériques liés au vibromètre laser et aux jauges

Chacune des deux jauges est discrétisée numériquement au moyen de quatre éléments linéaires alignés dans la longueur de chaque jauge. Dix nœuds soit trente degrés de liberté forment la surface de ces quatre éléments ; cinq nœuds discrétisent la jauge dans sa longueur et deux dans sa largeur (selon l'axe Y) comme l'illustre le schéma contenu dans la figure V.24b. Quatre de ces nœuds ne sont pas contenus dans la trame (zone assurant la mesure des déformations) de la jauge afin de moyenner les déformations sur une plus grande aire et ainsi compenser les incertitudes expérimentales de positionnement de cette dernière.

À l'image du post-traitement des données numériques liées au laser, l'orientation du repère des nœuds représentant la jauge est modifiée afin que les axes X et Y soient contenus dans le plan de la jauge ; l'axe X étant orienté dans la longueur de la jauge, qui est aussi sa direction de mesure, et l'axe Y dans la direction transverse comme représenté en figure V.24b.

Les éléments modélisant les jauges étant linéaires, les lois d'interpolation des déplacements nodaux sont donc linéaires. Il est alors aisé d'extraire la déformation moyenne ε_i selon X, évaluée sur la surface active de la jauge i, au moyen de l'équation

$$\varepsilon_i = \frac{1}{n_\mathrm{g} - n_\ell} \sum_{j=1}^{n_\mathrm{g}-n_\ell} \frac{x_k - x_j}{d_{kj}} \tag{V.20}$$

dans laquelle $k = j + 2$, n_g est le nombre de nœuds contenus dans le modèle numérique de la jauge i, n_ℓ est le nombre de nœuds contenus dans la largeur de la jauge i, x_j est le déplacement du nœud j selon X et d_{kj} est la distance initiale entre les nœuds k et j.

Néanmoins, la mesure effectuée au moyen d'une jauge uniaxiale n'est pas uniquement sensibles aux déformations de la structure selon sa direction de mesure puisqu'une partie de celles-ci sont issues de la mesure des déformations selon la direction transverse de mesure. Afin de compenser cet effet, l'évaluation numérique des déformations issues de la direction transverse est ajoutée au post-traitement des déformations des jauges telle que

$$\varepsilon_i = \frac{1}{n_\mathrm{g} - n_\ell} \sum_{j=1}^{n_\mathrm{g}-n_\ell} \frac{x_k - x_j}{d_{kj}} + \frac{K_\mathrm{t}}{n_\mathrm{g}/n_\ell} \sum_{m=1}^{n_\mathrm{g}/n_\ell} \frac{y_q - y_p}{d_{qp}} \tag{V.21}$$

où $k = j + 2$, $p = 2m - 1$ et $q = p + 1$. De plus, $K_t = 0.003$ est le facteur de sensibilité transverse de la jauge et y_p est le déplacement du nœud p selon Y.

À noter que les déformations transverses évaluées sur les jauges collées sur l'aube sont faibles, de l'ordre de 3 % et 6 % de la déformation évaluée dans la direction de mesure, respectivement pour les jauges n°1 et n°2. Pondérées par le facteur de sensibilité transverse, ces déformations transverses sont finalement négligeables par rapport aux déformations de la direction principale de mesure. Les effets non-linéaires de mesure extensométrique [13] sont, quant à eux, négligés car d'un ordre de grandeur très inférieur.

2.3 Études d'influence

L'objectif des études d'influence, présentées dans cette sous-section, est d'évaluer l'effet des paramètres de discrétisation spatio-temporelle du modèle et des simulations numériques sur la réponse dynamique de la structure et ainsi déterminer la valeur optimale du paramètre en question ou évaluer l'erreur pouvant être engendrée par ce dernier. Les paramètres concernés par ces études d'influence sont la discrétisation spatiale (n_e) de l'épaisseur des actionneurs piézoélectriques, le nombre de nœuds (n_c) retenus pour discrétiser l'interface de contact entre les deux sous-structures, la discrétisation temporelle (n_t) de la période de la méthode d'alternance temps / fréquence permettant de calculer l'effort non-linéaire ainsi que le nombre d'harmoniques (n_h) retenus pour évaluer les modes complexes non-linéaires. Ces études d'influence sont réalisées sur le premier mode de flexion de la structure puisque l'effet non-linéaire est plus important que sur le deuxième mode de flexion.

2.3.1 Discrétisation spatiale de l'épaisseur des actionneurs piézoélectriques

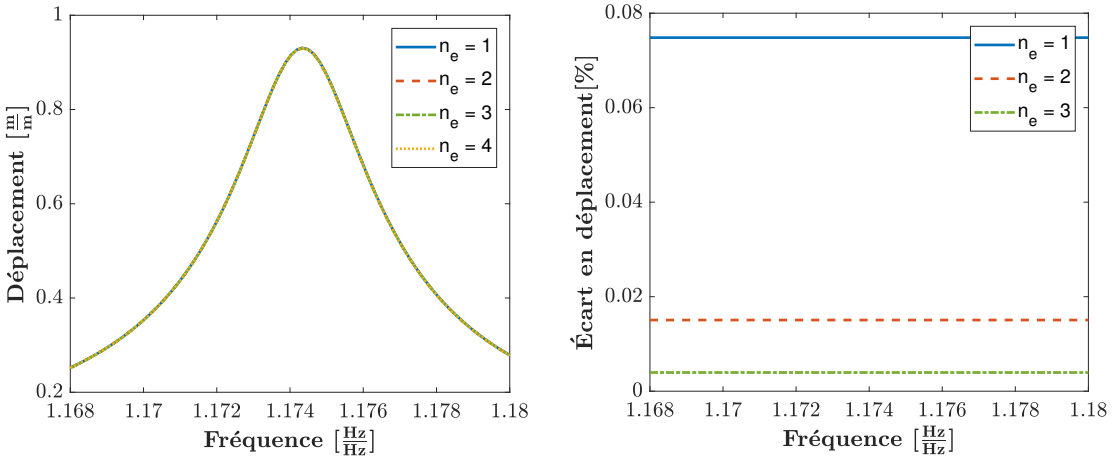
Cette étude d'influence sur le nombre d'éléments, n_e, contenus dans l'épaisseur de chaque actionneur piézoélectrique est l'unique étude menée sur la discrétisation du modèle numérique éléments finis.

En effet, les paramètres géométriques ou matériaux du modèle numérique ainsi que le maillage de l'aube en composite tissé 3D ne sont pas modifiés dans ces travaux de thèse de façon à travailler sur la base d'un modèle numérique fourni par l'industriel (la discrétisation des actionneurs selon les deux autres directions est imposée par le maillage de l'aube). D'autres paramètres, tels que la masse volumique du mors ou le coefficient d_{31} du matériau piézoélectrique des actionneurs, sont recalés numériquement afin de compenser certaines simplifications du modèle, exposées en sous-section V.2.1 et quantifiées en section V.3.

La réalisation de cette étude d'influence est motivée par la thèse de Thierry [212] dans laquelle il est mentionné que le nombre d'éléments quadratiques, n_e, discrétisant l'épaisseur de l'actionneur n'a pas d'influence sur la dynamique du système et sur le couplage piézomécanique entre l'aube et les patchs piézoélectriques ; néanmoins, peu de justifications sont apportées pour étayer ce propos.

Les résultats de cette première étude d'influence sont consignés dans les figures V.25a et V.25b. La figure V.25a représente les réponses forcées en dynamique linéaire au voisinage du premier mode de flexion du système {aube+mors} dont l'aube est équipée de dix-huit actionneurs piézoélectriques excités par une tension de 20 V, ceci pour plusieurs discrétisations de l'épaisseur des actionneurs. Il est important de préciser que ces réponses forcées sont évaluées après l'étape de condensation des degrés de liberté électriques des

actionneurs. La figure V.25b représente les écarts entre les différentes réponses forcées de la figure V.25a en choisissant comme référence la réponse forcée évaluée avec le plus d'éléments dans l'épaisseur des actionneurs, soit quatre.



(a) Réponses forcées en amplitude

(b) Écarts entre les réponses forcées V.25a

FIGURE V.25 – Étude d'influence sur la discrétisation de l'épaisseur des actionneurs piézoélectriques

La figure V.25a permet de constater que les réponses forcées, pour différentes discrétisations de l'épaisseur des actionneurs, sont superposées et donc que l'influence de cette discrétisation est faible. Néanmoins, des écarts, minimes (avec une tendance à la diminution de l'amplitude de la réponse forcée en fonction du nombre d'éléments), subsistent entre les réponses forcées et notamment entre les réponses forcées évaluées pour un et deux éléments dans l'épaisseur des actionneurs, comme exposé en figure V.25b. En comparant ces différents écarts, il est possible de déclarer que la discrétisation est suffisante à partir de deux éléments dans l'épaisseur.

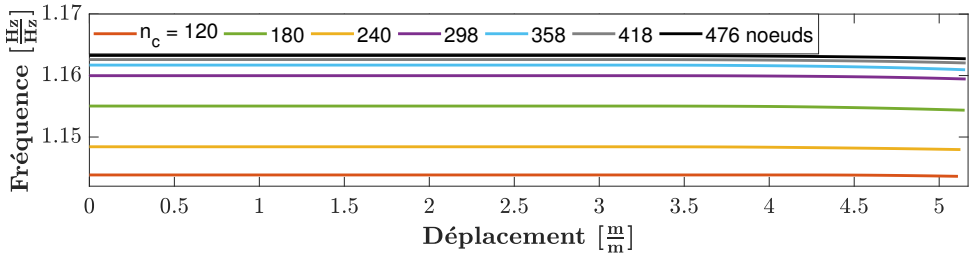
Bien que l'influence du nombre d'éléments sur le temps de calcul du processus de simulation non-linéaire reste négligeable, seuls deux éléments discrétisent l'épaisseur de l'actionneur dans la suite de ce travail de thèse afin de restreindre le nombre de nœuds du modèle, déjà conséquent.

2.3.2 Nombre de nœuds de contact retenus

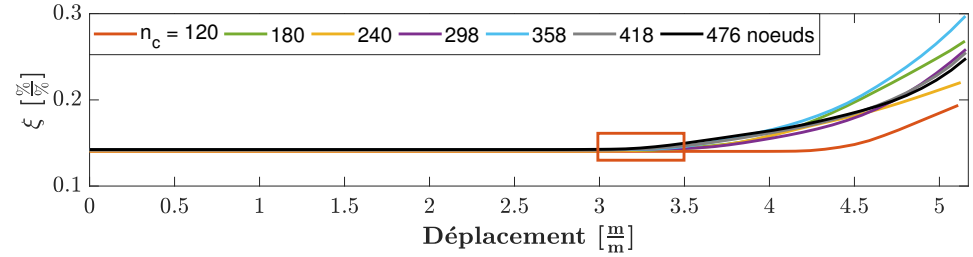
Le nombre de nœuds de contact n_c retenus comme nœuds maîtres lors de la réduction du modèle numérique par la méthode de Craig-Bampton impacte directement l'évaluation de la non-linéarité de contact / frottement en termes de précision mais aussi en temps de calcul. Dans le but de trouver un compromis pertinent entre précision de l'évaluation de la non-linéarité et son temps de calcul, une étude d'influence est menée sur le nombre de nœuds retenus à l'interface de contact.

Pour réaliser cette étude, une sélection des nœuds contenus dans les portées de contact est retenue comme nœuds maîtres dans les super-éléments. Cette sélection est choisie de façon à répartir le mieux possible les nœuds sur la surface des portées en fonction du nombre de nœuds souhaités. Les paramètres modaux des modes complexes non-linéaires ainsi évalués sont représentés en figure V.26 pour différentes sélections de nœuds de contact, n_c. Ces modes complexes non-linéaires, associés au premier mode de flexion, sont tracés pour un effet non-linéaire proche de celui obtenu lors des essais sur mors ($\mu = 0.1$). De plus,

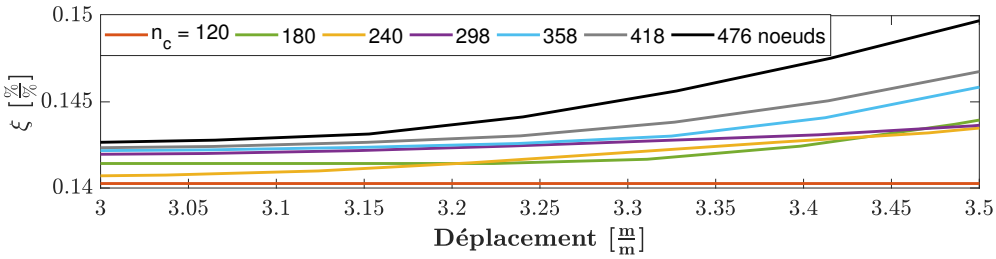
les valeurs des paramètres de simulations sont fixées à $n_{\mathrm{h}} = 5$ harmoniques, $n_{\mathrm{t}} = 32$ discrétisations temporelles, $n_{\mathrm{e}} = 2$ éléments dans l'épaisseur des actionneurs et 51 points composant la plage d'amplitude du mode complexe non-linéaire.



(a) Fréquence propre



(b) Taux d'amortissement

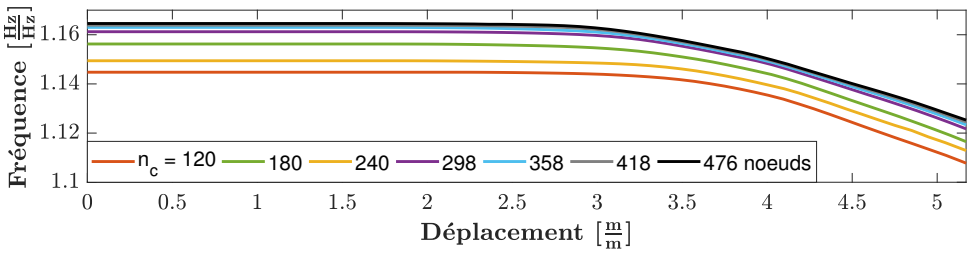


(c) Agrandissement de l'évolution du taux d'amortissement autour du décollement

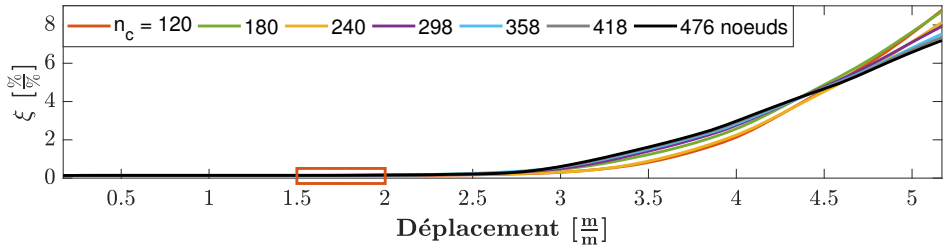
FIGURE V.26 – Étude d'influence sur le nombre de nœuds de contact retenus pour $\mu = 0.1$ ($n_{\mathrm{h}} = 5$, $n_{\mathrm{t}} = 32$ et $n_{\mathrm{e}} = 2$)

Grâce à ces figures, il est possible d'observer que l'évolution du taux d'amortissement en fonction du nombre de nœuds retenus n'est pas monotone ce qui permet difficilement de conclure sur la convergence de ce paramètre. De même, la variation du point de décollement qui initie la phase de glissement de la non-linéarité, aboutissant à une augmentation du taux d'amortissement et une diminution de la fréquence propre en fonction de l'amplitude de déplacement et perceptible en figure V.26c, n'est également pas monotone. Cependant, les modes complexes non-linéaires évalués pour $n_{\mathrm{c}} = 418$ et 478 nœuds retenus semblent aboutir à une évolution semblable des paramètres modaux aussi bien en fréquence propre qu'en taux d'amortissement. Par ailleurs, il est possible de remarquer que la fréquence propre linéaire (pour de faibles amplitudes de déplacement) diffère en fonction du nombre de nœuds de contact retenus : cette différence est due à l'augmentation de la rigidité de la liaison entre les deux sous-structures plus le nombre de nœuds sélectionnés est important (ces nœuds sont répartis uniformément sur la surface de contact).

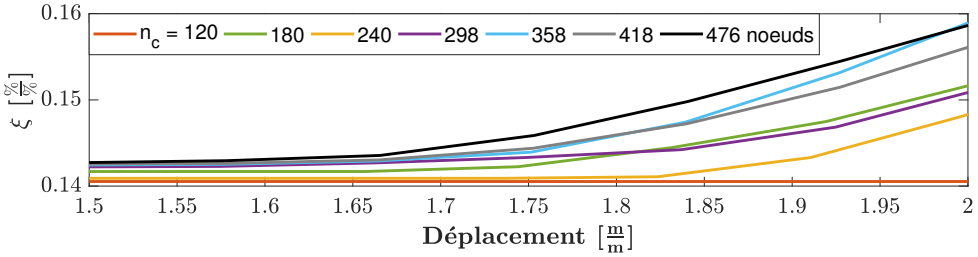
Afin de pouvoir conclure sur la convergence de ce paramètre, le coefficient de frottement est diminué de moitié ($\mu = 0.05$)dans le but d'augmenter les effets non-linéaires comme proposé en figure V.27.



(a) Fréquence propre



(b) Taux d'amortissement



(c) Agrandissement de l'évolution du taux d'amortissement autour du décollement

FIGURE V.27 – Étude d'influence sur le nombre de nœuds de contact retenus pour $\mu = 0.05$ ($n_h = 5$, $n_t = 32$ et $n_e = 2$)

L'évolution de la fréquence propre sur la figure V.27 est monotone à partir de $n_c = 298$ nœuds retenus, dans toute la gamme d'amplitude. Par ailleurs, l'évolution du taux d'amortissement est également monotone mais seulement pour l'amplitude de déplacement maximale ce qui n'est pas vérifié pour d'autres amplitudes de déplacement. Ce dernier paramètre semble se rapprocher de sa valeur convergée à partir de $n_c = 400$ nœuds de contact par sous-structure ce qui est aussi remarquable sur la figure représentant l'évolution de la fréquence propre.

En figure V.27, l'évolution du point de décollement suit une évolution monotone et survient pour des amplitudes de déplacement de plus en plus faibles. Ce paramètre ne semble pas encore convergé puisqu'il varie jusqu'au nombre de nœuds de contact maximal. Toutefois, cette évolution est faible en comparaison de celle provoquée par le coefficient de frottement μ, exposée en figure V.34. Par ailleurs, la répartition de ces nœuds de contact sur la portée est homogène et limitée en nombre par la constitution du modèle numérique. Il serait néanmoins intéressant de pouvoir mailler les portées de contact plus finement dans les zones où le glissement est le plus important (ces zones variant en fonction du mode de vibration excité) de façon à se rapprocher d'un mode complexe non-linéaire convergé en termes de point de décollement.

Les temps de calcul [14] de l'évaluation de ces modes complexes non-linéaires en fonction du nombre de nœuds de contact retenus sont proposés en figure V.28. Il est important de noter que le temps de réduction du modèle numérique par la méthode de Craig-Bampton est aussi influencé par le nombre de nœuds de contact retenus, toutefois ce temps de réduction est faible comparé au temps de calcul du mode complexe non-linéaire.

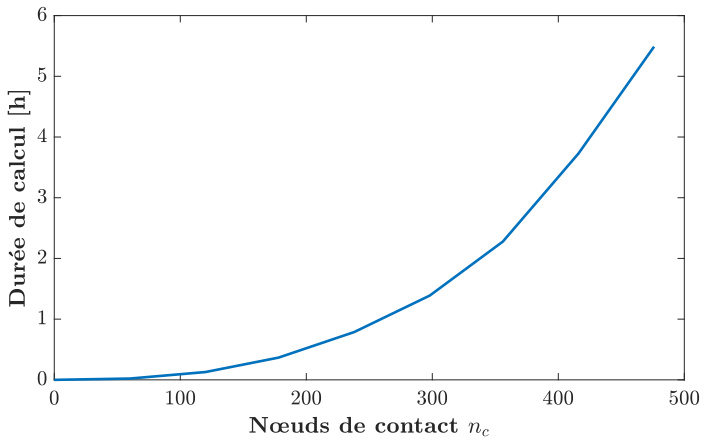


Figure V.28 – Évolution du temps de calcul en fonction du nombre de nœuds de contact retenus

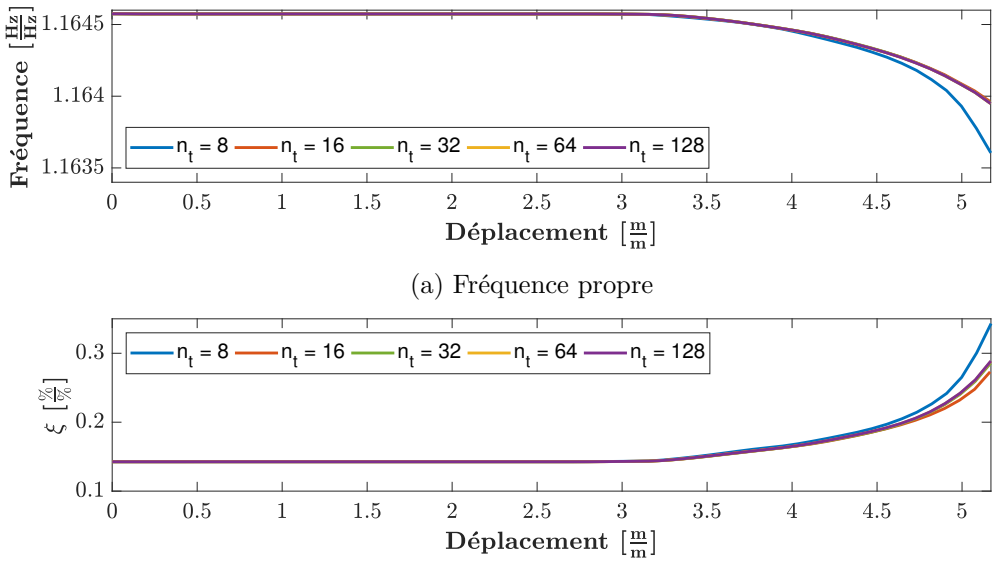
L'évolution du temps de calcul en fonction du nombre de nœuds de contact retenus n'est pas linéaire : celle-ci se rapproche d'une évolution semblant polynomiale. Afin de réduire de façon non-négligeable le temps de calcul tout en conservant une précision élevée sur l'évaluation de la non-linéarité de frottement, il serait possible de ne conserver que $n_c = 400$ nœuds. Toutefois, l'objectif de ce travail de thèse est aussi de travailler sur un modèle éléments finis employé dans l'industrie afin de conserver la précision mais aussi les temps de calcul liés à ce type de modèle numérique. Dans ce chapitre, $n_c = 476$ nœuds de contact par sous-structure sont donc conservés dans la partition des nœuds maîtres.

2.3.3 Discrétisation temporelle de la période de la méthode d'alternance temps / fréquence

Similairement au nombre de nœuds de contact retenus, la discrétisation temporelle de la période de la méthode d'alternance temps / fréquence influence l'évaluation de la non-linéarité de contact / frottement en termes de précision et dans une moindre mesure en termes de temps de calcul. La figure V.29 représente la superposition de l'évolution des paramètres modaux en fonction de l'amplitude du déplacement du point de référence (coïncidant avec le point de mesure du vibromètre laser), évalués numériquement pour plusieurs échantillonnages temporels. Ces différents modes complexes non-linéaires sont évalués en employant les mêmes paramètres que les modes complexes non-linéaires de la sous-section précédente, à savoir $\mu = 0.1$, $n_h = 5$ harmoniques et $n_e = 2$ éléments, tout en conservant $n_c = 476$ noeuds de contact dans la partition des nœuds maîtres de chaque sous-structure.

D'après la figure V.29, ce paramètre de discrétisation permet de stabiliser l'approximation dès $n_t = 16$ échantillons. De plus, la figure V.29 permet de remarquer que ce paramètre ne produit aucune variation du point de décollement.

14. Voir note de bas de page 6 (p. 154)



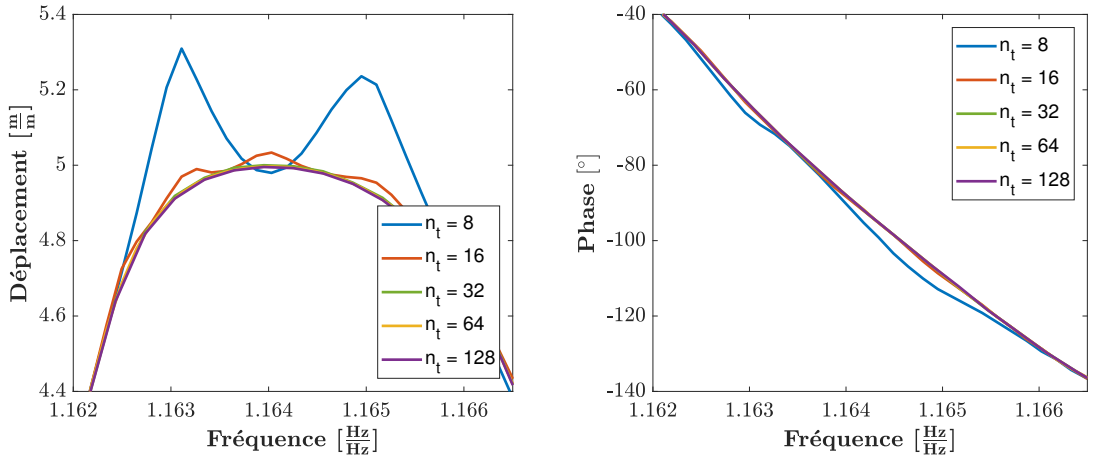
(a) Fréquence propre

(b) Taux d'amortissement

FIGURE V.29 – Influence de la discrétisation temporelle de la période de la méthode d'alternance temps / fréquence ($\mu = 0.1$, $n_\mathrm{h} = 5$, $n_\mathrm{e} = 2$ et $n_\mathrm{c} = 476$)

Il est possible de noter que la discrétisation temporelle de la période de la méthode d'alternance temps / fréquence ne doit pas inévitablement être une puissance de deux puisque le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel n'est pas réalisé au moyen d'une transformée de Fourier rapide [35].

Cependant, l'effet de l'échantillonnage temporel de la période de la méthode d'alternance temps / fréquence est aussi manifeste sur les réponses forcées présentées en figure V.30. Celles-ci sont évaluées au moyen des mêmes paramètres que les modes complexes non-linéaires précédents et pour une tension d'excitation de 180 V permettant un effet non-linéaire important.



(a) Amplitude

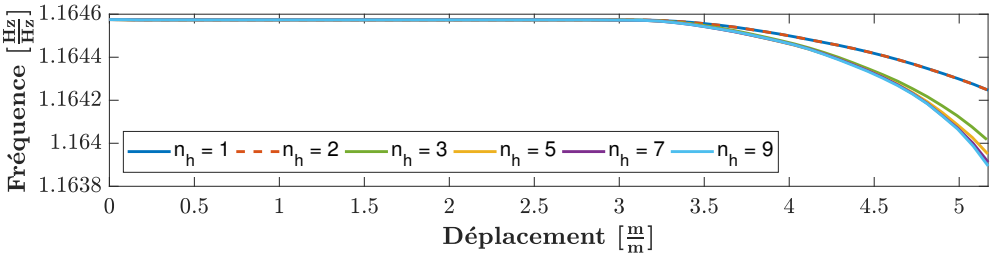
(b) Phase

FIGURE V.30 – Influence de la discrétisation temporelle de la période de la méthode d'alternance temps / fréquence sur la résonance de la réponse forcée ($\mu = 0.1$, $n_\mathrm{h} = 5$, $n_\mathrm{e} = 2$ et $n_\mathrm{c} = 476$)

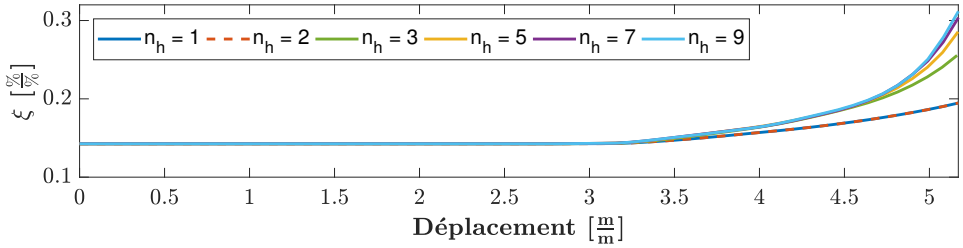
L'agrandissement au voisinage de la résonance des réponses forcées de la figure V.30 permet de remarquer la présence d'oscillations sur les réponses forcées évaluées pour $n_t < 32$ discrétisations aussi bien en amplitude V.30a qu'en phase V.30b. Afin de prévenir ces distorsions sur les réponses forcées, les simulations de la suite de ce chapitre sont évaluées pour un paramètre $n_t = 32$ discrétisations.

2.3.4 Nombre d'harmoniques retenus

Le nombre d'harmoniques retenus est un paramètre prépondérant des simulations en dynamique non-linéaire exposées dans ce mémoire de thèse. En effet, contrairement à la dynamique linéaire des structures dont la réponse fréquentielle est contenue dans le premier harmonique, la réponse du système non-linéaires en dynamique des structures peut avoir un spectre fréquentiel plus large contenant des harmoniques supérieurs qu'il est nécessaire de prendre en compte pour plus de précision. De plus, l'ajout d'un harmonique dans la solution augmente le nombre d'inconnues de deux, une composante en $\mathbf{a}_k$ et une seconde en $\mathbf{b}_k$ comme détaillé dans le chapitre II. Il est donc nécessaire de sélectionner ce nombre d'harmoniques de façon optimale afin d'identifier le meilleur compromis entre précision de l'évaluation de la solution et temps de calcul. Pour cela, une étude d'influence est conduite sur ce paramètre et proposée en figure V.31. Les paramètres employés sont identiques aux études d'influence précédentes, à savoir $\mu = 0.1$, $n_c = 476$ nœuds de contact et $n_e = 2$ éléments, tout en conservant $n_t = 32$ discrétisations temporelles de la période de la méthode d'alternance temps / fréquence.



(a) Fréquence propre



(b) Taux d'amortissement

Figure V.31 – Étude d'influence sur le nombre d'harmoniques retenus ($\mu = 0.1$, $n_c = 476$, $n_e = 2$ et $n_t = 32$)

Plusieurs constations peuvent être dressées en analysant cette figure V.31. La première concerne les harmoniques pairs : ceux-ci n'apportent aucune contribution dans la réponse dynamique comme il est possible de le distinguer entre les tracés des évolutions des paramètres modaux du mode complexe non-linéaire contenant un et deux harmoniques. Les autres harmoniques pairs ne sont pas représentés en figure V.31 pour des considérations pratiques, néanmoins leur effet est identique à celui du deuxième harmonique. Ces harmoniques pairs pourraient donc être éliminés de la résolution de ce problème d'une aube enchâssée dans un mors, ceci dans le but de réduire le temps de calcul de la simulation.

La seconde constatation permet de sélectionner le nombre optimal d'harmoniques : à partir de cinq harmoniques, l'évolution (ici monotone) des paramètres modaux ne varie presque plus aussi bien en fréquence propre qu'en taux d'amortissement dans cet intervalle d'amplitude de déplacement. Les simulations numériques exécutées dans la suite de ce chapitre sont donc réalisées pour un nombre d'harmoniques $n_{\mathrm{h}} = 5$. De plus, il est possible de remarquer que l'influence de ce paramètre sur l'évolution du point décollement est négligeable en comparaison de l'influence du nombre de nœuds discrétisant les portées de contact, exposée en figures V.26 et V.27, ou du coefficient de frottement μ, proposée dans la section suivante.

3 Confrontation entre essais vibratoires et simulations numériques

La section finale de ce chapitre contient les comparaisons entre les essais en dynamique non-linéaire réalisés sur le système {aube+mors} et les simulations numériques non-linéaires issues du modèle numérique de ce même système.

Cette section est scindée en deux parties. La première aborde la comparaison essais / calculs pour de faibles amplitudes de déplacement et donc pour des simulations et essais sur un système pouvant être considéré comme linéaire. Cette linéarité supposée permet ainsi de recaler plusieurs paramètres numériques afin de compenser certaines hypothèses de modélisation considérées en section V.2. La seconde partie s'intéresse à l'aspect non-linéaire de cette comparaison, c'est-à-dire pour des amplitudes d'excitation activant les effets non-linéaires de contact / frottement. Dans un premier temps, les paramètres de contact / frottement, à savoir le coefficient de frottement isotrope et l'effort normal de précharge [15], sont sélectionnés de manière à obtenir la meilleure corrélation des effets non-linéaires entre les essais vibratoires sur mors et les simulations non-linéaires. Dans un second temps, une analyse et une interprétation des résultats obtenus pour les deux premiers modes de flexion sont proposées.

3.1 Étude linéaire

Une comparaison des paramètres modaux et des amplitudes à la résonance dans le cas d'un système linéarisé est effectuée dans cette sous-section afin de s'assurer de la fidélité du modèle numérique par rapport à la structure testée. Précédemment à ces comparaisons, certains paramètres du modèle numérique nécessitent d'être recalés, notamment la masse du mors et le coefficient d_{31} des actionneurs piézoélectriques.

3.1.1 Recalage des paramètres du modèle numérique

Le modèle éléments finis du système {aube+mors}, réalisé sur le logiciel ANSYS®, contient quelques simplifications volontaires par rapport au montage expérimental [16] :

— Les alésages et les tuyaux de refroidissement du mors, visibles sur la figure V.1, ainsi que les éléments du système de serrage (vis et barreaux), représentés en figure V.2, ne sont pas considérés dans le modèle numérique afin de faciliter la représentation

15. Dans le cadre des essais sur mors, cette étude d'influence sur l'effort normal de précharge se justifie par l'imprécision du système de serrage via les vis. Toutefois, lors des essais en rotation et donc pour une précharge centrifuge, ce paramètre ne nécessite pas de recalage.

16. Pour rappel, le modèle numérique de l'aube en composite tissé 3D représente le plus fidèlement possible l'aube composite de façon à travailler avec un modèle numérique employé dans l'industrie.

de la pièce et la convergence de son maillage. Ces simplifications aboutissent à une augmentation de la masse du mors et donc une diminution de ses fréquences de résonance.

— Les films Kapton encapsulant la céramique ne sont pas représentés dans la modélisation des patchs piézoélectriques ainsi que la colle fixant ces derniers sur les aubes. Ces deux dernières simplifications entraînent une surestimation du couplage entre les actionneurs piézoélectriques et l'aube par rapport aux résultats expérimentaux résultant ainsi en de plus fortes amplitudes de déplacement.

Afin de compenser ces hypothèses de modélisation, deux paramètres du modèle numérique sont recalés :

— Pour contrebalancer la simplification de la géométrie du mors, la masse volumique du matériau du mors est ajustée de façon à ce que la masse du mors évaluée numériquement soit identique à celle pesée précisément à la suite de la campagne d'essais sur mors. Ainsi, la masse volumique du matériau du mors est diminuée de 8 %.

— Pour compenser les simplifications réalisées sur la modélisation des actionneurs piézoélectriques, le coefficient d_{31} (dont la valeur initiale est donnée en annexe C.2), prépondérant dans le couplage piézomécanique en flexion des actionneurs, est modifié. Celui-ci est recalé afin que le déplacement évalué numériquement en tête d'aube pour le premier mode de flexion soit équivalent à celui mesuré expérimentalement au moyen du vibromètre laser pour une tension d'excitation de 20 V. Pour cette opération, le modèle numérique du système {aube+mors} est linéarisé en collant les portées à l'interface entre le mors et l'aube. De plus, l'amortissement modal numérique est recalé par rapport au taux amortissement modal identifié expérimentalement sur les réponses forcées obtenues pour une tension de 20 V. Le coefficient d_{31} est alors diminué de 35 % par rapport à sa valeur initiale dans le but de compenser les hypothèses de modélisation considérées mais aussi les dispersions dans le positionnement expérimental des actionneurs sur l'aube ainsi que les dispersions liées à l'homogénéisation des caractéristiques piézoélectriques fournies par le fabriquant MIDÉ ou bien encore les dispersions d'efficacité entre les actionneurs. Ce recalage peut paraître important, néanmoins les hypothèses prises en compte dans la modélisation des actionneurs ainsi que les incertitudes sur le coefficient d_{31} fourni par le fabriquant peuvent occasionner une augmentation de l'amplitude de déplacement de cet ordre de grandeur.

3.1.2 Comparaison des paramètres modaux du système linéaire sous-jacent

Les écarts relatifs entre les fréquences propres et les taux d'amortissement expérimentaux et numériques linéaires pour les deux premiers modes de flexion sont consignés dans le tableau V.8. Les paramètres modaux expérimentaux du système linéaire sous-jacent sont identifiés à partir des essais large bande au moyen de la méthode LSRF (exposée en section V.1). Par ailleurs, ces paramètres modaux expérimentaux linéaires sont similaires à ceux obtenus en extrapolant les paramètres modaux issus des essais non-linéaires jusqu'à l'ordonnée à l'origine. Les paramètres modaux numériques sont, quant à eux, évalués au moyen d'une analyse modale linéaire pour un système {aube+mors} dont les portées à l'interface des deux sous-structures sont collées.

Afin de donner un ordre de grandeur de la précision de la corrélation linéaire essais / calculs, les écarts relatifs donnés dans le tableau V.8 sont comparés aux dispersions expérimentales de ces mêmes paramètres identifiés grâce aux essais sur mors, dont l'ex-

citation est réalisée au moyen d'un signal large bande, menés sur les dix-huit spécimens du même type d'aube. Ces dispersions sont consignées dans le tableau V.8 sous forme d'écarts-types.

	Écart [%] [17]	Dispersion [%]
1F	−0.87	1.13
2F	0.94	0.96

(a) Fréquences propres

	Écart [%]	Dispersion [%]
1F	0.00	7.16
2F	0.00	9.05

(b) Taux d'amortissement

Tableau V.8 – Comparaison des paramètres modaux expérimentaux et numériques considérés linéaires

Les écarts relatifs entre les fréquences propres expérimentales et numériques considérées linéaires des deux premiers modes de flexion sont inférieurs aux dispersions mesurées sur les fréquences propres des dix-huit aubes de soufflante testées sur mors. Cette corrélation des fréquences propres linéaires peut donc être considérée comme correcte voire même très bonne si les très faibles écarts relatifs sont pris en compte ($< 1\,\%$).

De plus, la fréquence propre du premier mode de torsion (le mode suivant les deux premiers modes de flexion) a été mesurée expérimentalement sur les dix-huit aubes et, en particulier, sur celle pour laquelle la corrélation est réalisée : l'écart relatif entre l'essai et la simulation linéaire est alors de $-0.55\,\%$, très inférieur à la dispersion des fréquences propres du premier mode de torsion évaluée à $1.16\,\%$.

Il est donc possible de considérer que le modèle numérique éléments finis du système {aube+mors} reflète fidèlement la dynamique de la structure testée sur la gamme de fréquence étudiée dans ces travaux de thèse, particulièrement en prenant en compte que l'unique recalage du modèle a été réalisé sur la masse volumique du mors afin que la masse numérique du mors soit égale à celle pesée.

L'écart entre le taux d'amortissement identifié expérimentalement et celui évalué numériquement est nul puisque ce dernier est directement intégré dans l'évaluation des modes complexes linéaires et non-linéaires à partir de la valeur expérimentale du mode considéré. Il est néanmoins possible de remarquer que la dispersion des taux d'amortissement identifiés expérimentalement sur les dix-huit aubes de la soufflante est faible ($< 10\,\%$).

3.1.3 Comparaison des amplitudes à la résonance du système linéaire sous-jacent

Les écarts relatifs entre les amplitudes expérimentales et numériques linéaires à la résonance (du déplacement en tête d'aube et des déformations en pied d'aube) pour les deux premiers modes de flexion sont consignés dans le tableau V.9. Les amplitudes expérimentales maximales sont mesurées au moyen du vibromètre laser pour le déplacement en tête d'aube et des deux jauges pour les déformations en pied d'aube, ceci pour une excitation de 20 V au voisinage de la résonance aboutissant à une réponse dynamique proche d'une réponse linéaire. Les amplitudes numériques sont, quant à elles, évaluées au moyen d'un modèle numérique linéarisé, dont les portées à l'interface entre le mors et l'aube sont collées. De plus, le modèle numérique est réduit au moyen de la technique de Craig-Bampton et les déplacements et déformations sont extraits au moyen des techniques de post-traitement présentées en section V.2. Pour cette comparaison des amplitudes de la

17. Le signe des écarts est défini en comparant les résultats numériques par rapport aux résultats expérimentaux

réponse forcée linéaire, l'amortissement modal numérique est recalé par rapport à l'amortissement modal identifié sur les réponses forcées obtenues pour une tension de 20 V, comme expliqué précédemment.

	Écart [%]	Dispersion [%]
1F	−0.33	9.85
2F	0.41	15.41

(a) Déplacements mesurés par le vibromètre

	Écart [%]	Dispersion [%]
1F	−0.38	17.64
2F	3.36	34.83

(b) Déformations mesurées par la jauge n°1

	Écart [%]	Dispersion [%]
1F	−1.61	52.59
2F	−41.14	89.86

(c) Déformations mesurées par la jauge n°2

Tableau V.9 – Comparaison des déplacements et des déformations expérimentaux et numériques considérés linéaires à la résonance pour une tension de 20 V

Tout d'abord, il est important de constater que les écarts entre les amplitudes expérimentales et numériques à la résonance sont tous largement inférieurs aux dispersions mesurées expérimentalement sur les aubes de la soufflante aussi bien pour le premier que pour le deuxième mode de flexion. De plus, il est possible de constater que ces dispersions en amplitude sont très supérieures aux incertitudes de mesure expérimentales évaluées en section V.1 ; ces incertitudes de mesure sont donc négligées par rapport à ces dispersions.

Les écarts entre les amplitudes expérimentales et numériques du déplacement en tête d'aube, fournis dans le tableau V.9a, sont faibles ce qui est logique puisque le coefficient d_{31} du matériau des actionneurs piézoélectriques est recalé par rapport à ces déplacements en tête d'aube. Il est cependant intéressant de constater que le ratio entre les déplacements en tête d'aube du premier et du deuxième mode de flexion est respecté ce qui implique une implémentation correcte de la procédure de post-traitement des déplacements numériques en tête d'aube développée en section V.2.

De même que les écarts entre les déplacements en tête d'aube, les écarts entre les déformations en pied d'aube expérimentales et numériques sont très faibles et largement inférieurs aux dispersions mesurées. Ceci traduit une excellente fidélité du modèle numérique linéarisé par rapport au dispositif expérimental. En effet, celui-ci permet de reconstituer précisément les déformées modales des modes considérés dans cette étude. De plus, ces faibles écarts permettent de valider la procédure numérique de post-traitement des déformations en pied d'aube, développée en section V.2.

Néanmoins, il est possible de constater un écart important entre les déformations mesurées par l'intermédiaire de la jauge n°2 pour le deuxième mode de flexion et celles évaluées numériquement. Cet écart élevé résulte des très faibles déformations mesurées par cette jauge pour ce mode (inférieures à la dizaine de micro-déformations et du même ordre de grandeur que l'incertitude de mesure absolue de la chaîne d'acquisition des jauges de déformation) mais également de la grande sensibilité par rapport à la position de cette jauge pour ce mode de vibration.

Ces comparaisons entre les données expérimentales et numériques du modèle linéarisé aboutissent à d'excellents résultats, aussi bien pour les fréquences propres que pour les amplitudes à la résonance des deux premiers modes de flexion, qui sont les modes ciblés

dans cette étude. Il peut donc être considéré que le modèle numérique linéarisé représente très fidèlement la dynamique linéaire du système {aube+mors} sur la plage fréquentielle étudiée, en termes de fréquences propres et de déformées modales ; ceci en recalant très peu de paramètres numériques.

Cette confrontation en dynamique linéaire offre des fondations solides pour la confrontation entre les résultats expérimentaux et numériques en dynamique non-linéaire qui est l'objectif principal de ce chapitre et qui est exposée en sous-section suivante. De plus, celle-ci permet de valider le modèle numérique de l'aube mais aussi certaines étapes de la phase préparatoire comme la procédure de précharge, la condensation des degrés de liberté électriques, la réduction par la méthode de Craig-Bampton ainsi que les techniques de post-traitement des résultats qui sont réemployées dans le chapitre VI consacré à la comparaison des essais en rotation de la soufflante et ses simulations numériques associées.

3.2 Étude non-linéaire

Les excellents résultats des comparaisons dans le domaine de comportement quasi-linéaire permettent d'aborder les comparaisons en dynamique non-linéaire à partir d'un modèle numérique linéarisé représentant fidèlement la structure testée aussi bien en fréquence propre qu'en déformées modales pour les modes de vibration ciblés.

Afin d'aborder la confrontation dans le cas non-linéaire, il est nécessaire de recaler les paramètres influant la non-linéarité, à savoir le coefficient de frottement isotrope et l'effort normal de précharge, avant de pouvoir comparer et analyser les résultats expérimentaux et numériques.

3.2.1 Influence des paramètres de contact / frottement

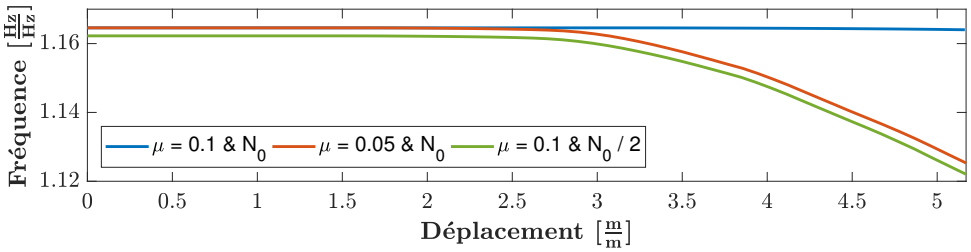
Les effets non-linéaires du contact et du frottement en pied d'aube sont évalués au moyen de la méthode des Lagrangiens dynamiques, décrite en annexe A. Cette technique de résolution de la loi de contact unilatérale et de la loi de frottement de Coulomb, décrit la non-linéarité au moyen de deux paramètres principaux, à savoir l'effort normal de précharge (noté N_0) et le coefficient de frottement isotrope (noté μ).

Dans le cas de ces essais sur mors, ces deux paramètres sont appréhendés avec beaucoup d'incertitudes. En effet, le coefficient de frottement est un paramètre toujours difficile à évaluer en dynamique et qui nécessite, dans la grande majorité des cas, un recalage au moyen d'essais. De plus, ce paramètre présente une variabilité importante en fonction de la température, des états de surface ou de la lubrification. L'effort normal de précharge est aussi un paramètre expérimental mal maîtrisé puisque, bien que le couple de serrage des vis contraignant la cale soit précisément connu, le calcul permettant d'exprimer l'effort de serrage de la cale sur l'aube nécessite la connaissance du coefficient de frottement entre les pas des vis de serrage et les taraudages du mors qui, lui même, dépend des conditions de lubrification entre les deux éléments.

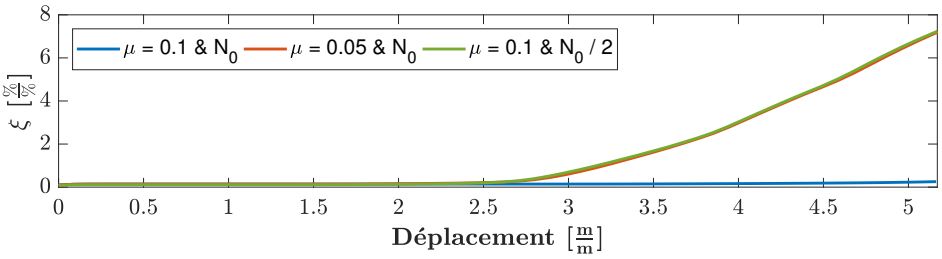
Une étude d'influence sur ces deux paramètres, à comparer aux résultats expérimentaux non-linéaires, est donc nécessaire afin d'effectuer un recalage aussi précis que possible de ces deux paramètres. Ces études d'influence sont réalisées en fixant les paramètres de simulation à $n_\mathrm{h} = 5$ harmoniques, $n_\mathrm{t} = 32$ discrétisations temporelles, $n_\mathrm{e} = 2$ éléments dans l'épaisseur des actionneurs et $n_\mathrm{c} = 476$ nœuds de contact.

Effort normal de précharge. Au regard de la loi de Coulomb, évaluée au moyen de la DLFT, faisant toujours intervenir l'effort normal de précharge et le coefficient de frottement simultanément, il est nécessaire de contrôler la variation de ces deux paramètres

l'un par rapport à l'autre. Dans cette optique, deux simulations non-linéaires pour chaque mode ciblé sont accomplies en divisant par deux l'un des deux paramètres dans chacune d'entre elles. Les évolutions en fonction de l'amplitude en tête d'aube des paramètres modaux des modes complexes non-linéaires ainsi évalués sont exposées en figure V.32.



(a) Fréquence propre



(b) Taux d'amortissement

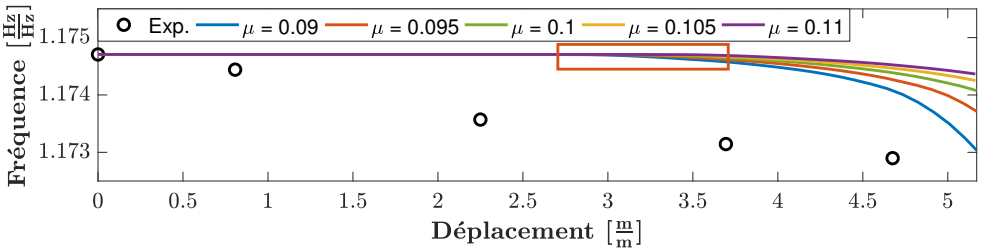
FIGURE V.32 – Étude d'influence sur l'effort normal de précharge

L'étude d'influence présentée en figure V.32 permet d'observer que l'influence du coefficient de frottement et celle de l'effort normal de précharge sur l'évolution des paramètres modaux sont similaires. En effet, les deux courbes représentant l'évolution des paramètres modaux pour un coefficient de frottement et un effort normal de précharge successivement diminués de moitié sont superposées, en taux d'amortissement et en fréquence de résonance (un décalage à l'origine est perceptible pour cette dernière, dû à la rigidité de la liaison entre la cale et le pied d'aube, elle-même dépendante de l'effort de précharge).

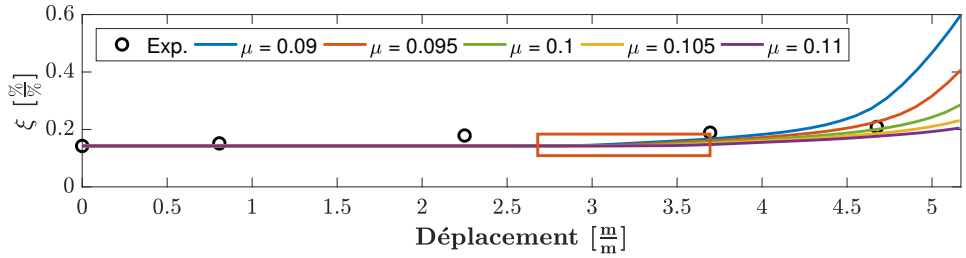
Cette étude d'influence permet de constater que ces deux paramètres sont intimement liés comme le laissait présager la loi de Coulomb. Ainsi, l'étude d'un seul de ces deux paramètres est nécessaire pour recaler les effets dynamiques non-linéaires de la structure. Le coefficient de frottement μ a été sélectionné dans ce dessein puisque celui-ci n'intervient dans le processus de simulation non-linéaire qu'à partir de l'étape d'évaluation du mode complexe non-linéaire tandis que l'effort normal de précharge est présent dès l'étape de précharge statique. Il est donc plus aisé de faire varier le coefficient de frottement, c'est pourquoi l'effort normal de précharge est fixé à sa valeur théorique, pour un frottement considéré comme lubrifié. Cette valeur théorique de précharge aboutit à l'application d'une température locale sur la cale de 170 °C permettant de dilater numériquement cette dernière, comme décrit en section V.2.

Il est important de noter que plusieurs efforts expérimentaux de serrage de l'aube contre l'alvéole du mors auraient permis de recaler plus précisément ce paramètre mais aussi de comparer différents comportements non-linéaires. Néanmoins, comme mentionné précédemment, la comparaison calculs / essais ne faisait pas partie des objectifs initiaux de ces essais sur mors.

Coefficient de frottement. Cette étude d'influence du coefficient de frottement isotrope sur la réponse non-linéaire de la structure est exposée en figures V.33 et V.35 pour les deux premiers modes de flexion.

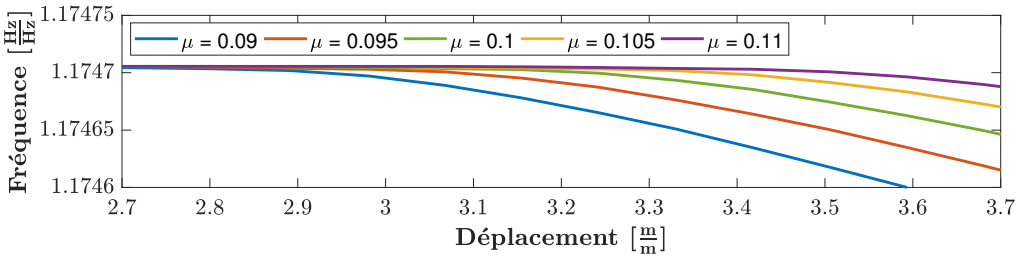


(a) Fréquence propre

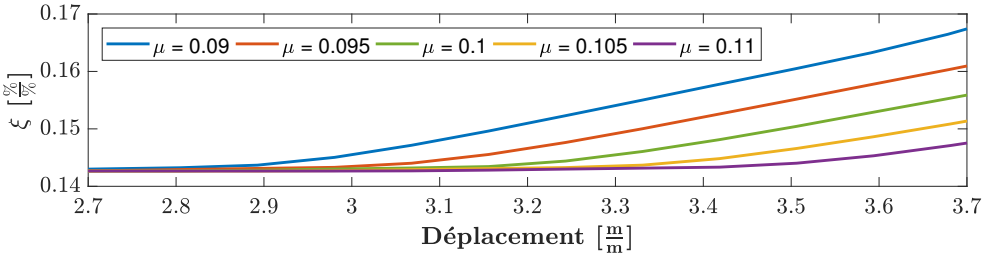


(b) Taux d'amortissement

FIGURE V.33 – Étude d'influence sur le coefficient de frottement pour le premier mode de flexion



(a) Fréquence propre

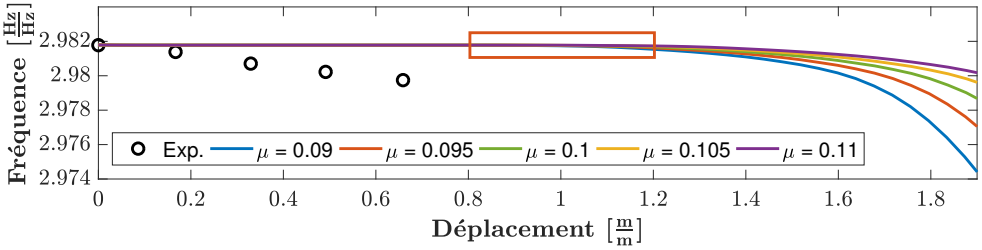


(b) Taux d'amortissement

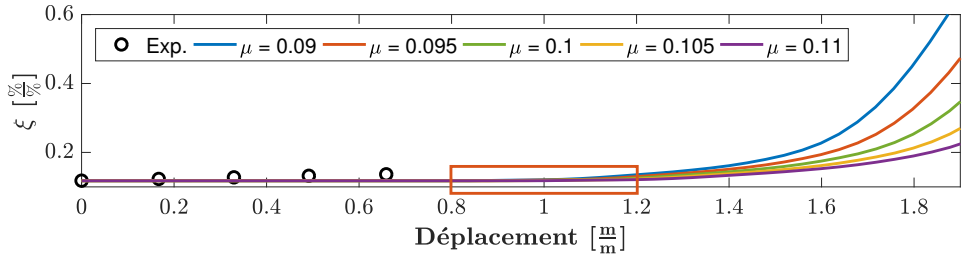
FIGURE V.34 – Agrandissement de l'étude d'influence sur le coefficient de frottement pour le premier mode de flexion autour de la zone de décollement

Ces figures représentent l'évolution des paramètres modaux pour différents coefficients de frottement isotropes (de $\mu = 0,095$ à $\mu = 0,1$). Les évolutions des paramètres modaux évalués numériquement sont comparées aux évolutions des paramètres modaux identifiés expérimentalement (toujours au moyen de la méthode LSRF détaillée en section V.1) en fonction de l'amplitude du déplacement en tête d'aube. Par ailleurs, les fréquences propres

évaluées numériquement à très faible amplitude (linéaire) sont normalisées par rapport aux fréquences propres identifiées expérimentalement dans le but de comparer plus aisément leurs évolutions les unes par rapport aux autres.

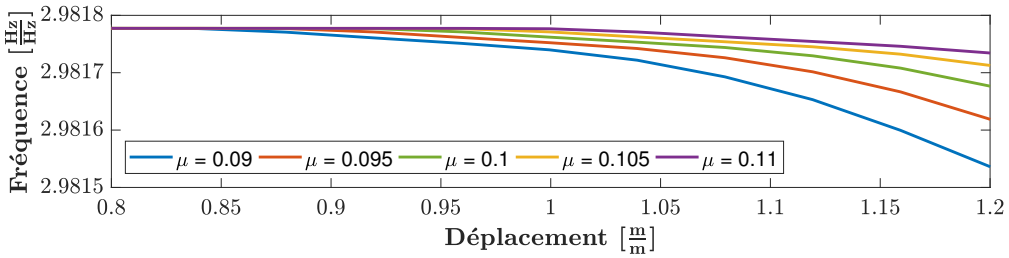


(a) Fréquence propre

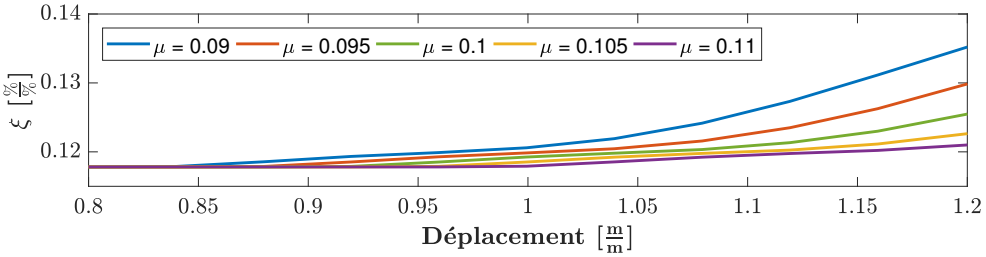


(b) Taux d'amortissement

FIGURE V.35 – Étude d'influence sur le coefficient de frottement pour le deuxième mode de flexion



(a) Fréquence propre



(b) Taux d'amortissement

FIGURE V.36 – Agrandissement de l'étude d'influence sur le coefficient de frottement pour le deuxième mode de flexion autour de la zone de décollement

En se bornant uniquement à la sélection du coefficient de frottement présentant le meilleur compromis entre les effets non-linéaires des deux premiers modes de flexion et aboutissant donc à une minimisation des écarts entre essais et simulations numériques, $\mu = 0,1$ semble être la valeur répondant à ce critère. Cette valeur de $\mu = 0,1$ permet particulièrement d'approcher l'évolution du taux d'amortissement (paramètre modal in-

fluant au premier ordre l'amplitude de la réponse forcée) pour le premier mode de flexion, mode présentant l'effet non-linéaire le plus important. Cependant, les figures V.33 et V.35 permettent de montrer que le point de décollement, initiant la phase de glissement de la non-linéarité, diffère entre essais et simulations numériques. En effet, le glissement débute dès les premiers points de mesure expérimentaux tandis qu'il survient pour des amplitudes bien plus importantes dans le cadre des simulations.

Par ailleurs, comme exposé en figure V.34 et V.36, il est possible de remarquer que le décollement est très sensible aux variations du coefficient de frottement ; plus sensible que les paramètres testés numériquement en section V.2, tels que le nombre de nœuds de contact ou le nombre d'harmoniques retenus, pour lesquels l'influence sur le décollement est relativement faible. Il est aussi possible d'observer que plus le coefficient de frottement est faible, plus le glissement débute à basse amplitude : le comportement dynamique se rapproche ainsi de celui observé expérimentalement.

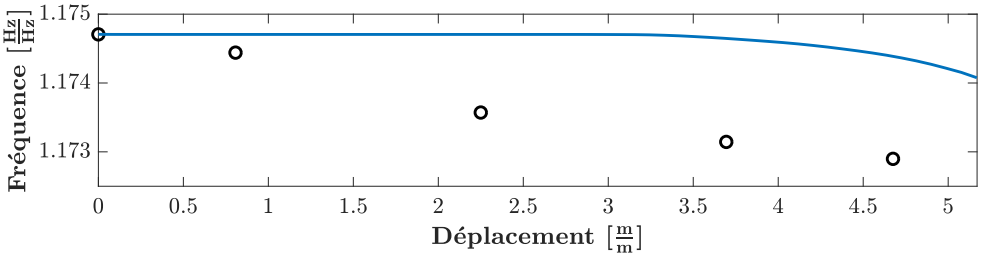
Des remarques et des analyses plus approfondies à propos de la comparaison des résultats expérimentaux et numériques sont présentées dans la sous-section suivante.

3.2.2 Comparaison des paramètres modaux et des amplitudes dans le cas non-linéaire

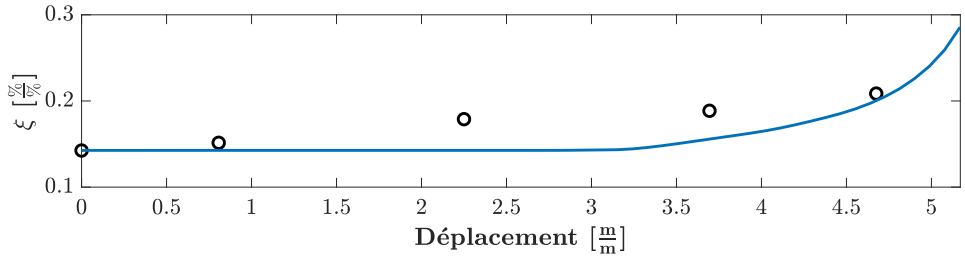
Les figures V.37 et V.38 comparent l'évolution des paramètres modaux expérimentaux et numériques en fonction de l'amplitude du déplacement en tête d'aube pour les deux premiers modes de flexion. Les paramètres de simulation employés pour réaliser ces dernières sont ceux sélectionnés au moyen des études d'influence des sections et sous-sections précédentes, à savoir $\mu = 0.1$, $n_{\mathrm{h}} = 5$ harmoniques, $n_{\mathrm{t}} = 32$ discrétisations temporelles, $n_{\mathrm{e}} = 2$ éléments et $n_{\mathrm{c}} = 476$ nœuds de contact. De surcroît, il est important de noter que les déplacements et les déformations expérimentaux relevés à la résonance sont équivalents aux amplitudes modales identifiées (car un seul mode distinct des autres est étudié dans chacune des réponses forcées au voisinage de la résonance).

La première observation pouvant être extraite de ces différentes comparaisons concerne le faible effet non-linéaire relevé expérimentalement, en particulier pour les fréquences propres. En effet, le décalage fréquentiel maximal observé est de 0.16 % et 0.07 % par rapport à la fréquence propre linéaire, respectivement pour le premier et le deuxième mode de flexion. L'augmentation maximale du taux d'amortissement est, quant à elle, plus importante, celle-ci est de 46 % et 16 % toujours par rapport à la valeur linéaire du premier et du deuxième mode de flexion. Ce faible effet non-linéaire peut être expliqué par le couple de serrage expérimental appliqué sur les vis de serrage de la cale permettant des efforts de contact entre les portées de l'alvéole et de l'aube représentatifs des efforts de contact induits par les efforts centrifuges d'une aube en rotation pour une vitesse de rotation correspondant à 70 % de la vitesse de rotation nominale de la soufflante. Comme explicité précédemment, un second couple de serrage plus faible que celui-ci aurait permis des effets non-linéaires plus importants et ainsi facilité la corrélation essais / calculs. Cependant, des comparaisons de paramètres modaux non-linéaires numériques et expérimentaux avec des efforts normaux de contact plus faibles sont effectuées dans le chapitre VI.

Ces faibles effets non-linéaires, exceptés pour le taux d'amortissement du premier mode de flexion, ne permettent pas d'évaluer précisément les écarts potentiels entre la comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques. Par ailleurs, c'est l'une des raisons

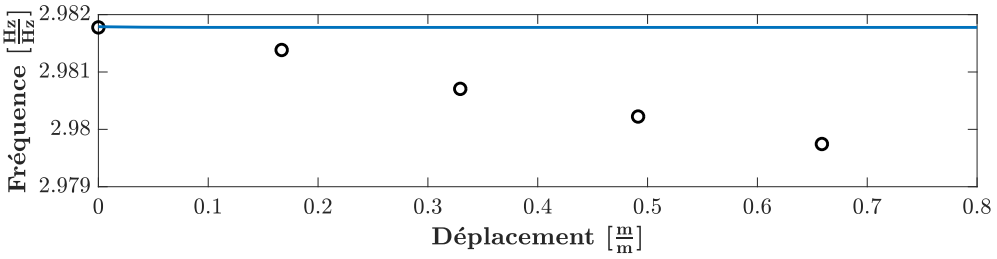


(a) Fréquence propre

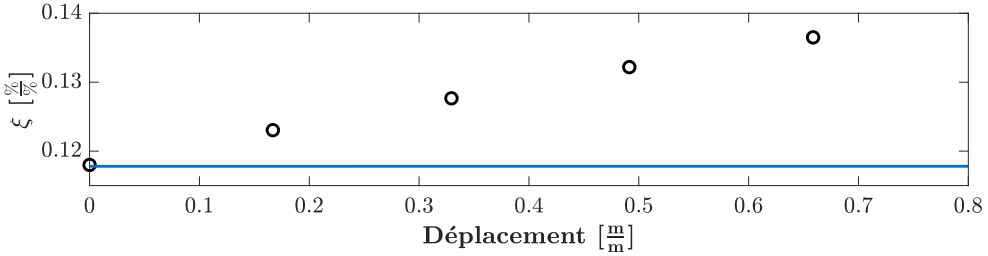


(b) Taux d'amortissement

Figure V.37 – Comparaison de l'évolution des paramètres modaux expérimentaux (o) et numériques (—) pour le premier mode de flexion en fonction de l'amplitude du déplacement en tête d'aube



(a) Fréquence propre



(b) Taux d'amortissement

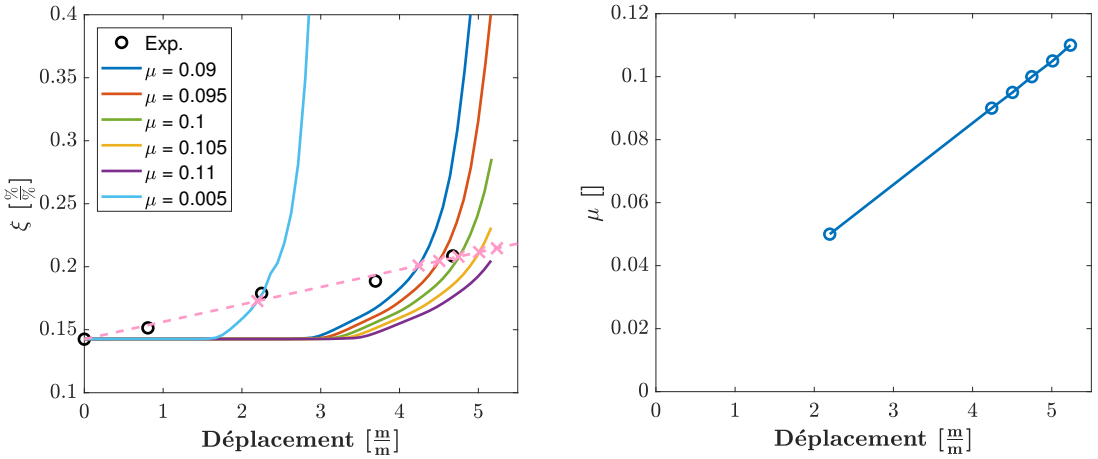
Figure V.38 – Comparaison de l'évolution des paramètres modaux expérimentaux (o) et numériques (—) pour le deuxième mode de flexion en fonction de l'amplitude du déplacement en tête d'aube

pour lesquelles le coefficient de frottement a été calibré par rapport au taux d'amortissement du premier mode de flexion.

Concernant la confrontation des effets non-linéaires entre les résultats expérimentaux et numériques du premier mode de flexion, la première remarque pouvant être émise a trait au très faible décalage fréquentiel numérique comparé à l'augmentation du taux amortissement numérique. En effet, ce dernier est comparable à sa valeur expérimentale pour

l'amplitude la plus forte obtenue en essais tandis que la fréquence propre associée reste très proche de sa valeur linéaire. De plus, en examinant attentivement l'évolution du taux d'amortissement, il est possible de déceler un décalage dans le processus de frottement entre les essais et les simulations non-linéaires. L'augmentation du taux d'amortissement dès le deuxième point expérimental indique que la phase de glissement, explicitée dans le chapitre II, est déjà entamée tandis que cette phase de glissement commence plus tard numériquement comme le révèle la figure V.37.

Dans le but de compenser cet écart dans l'origine du décollement (au moins pour le taux d'amortissement), il serait nécessaire que le coefficient de frottement soit plus petit pour les amplitudes de vibration les plus faibles. Tel que présenté dans les études d'influences précédentes, le coefficient de frottement μ pilote majoritairement le point de décollement initiant le démarrage de la phase de glissement. Il serait ainsi envisageable de faire varier celui-ci en fonction de l'amplitude de déplacement en tête de pale. La figure V.39 permet d'évaluer l'évolution du coefficient de frottement nécessaire au recalage des mesures expérimentales. Dans cette dernière, les intersections entre les évolutions des taux d'amortissement des modes complexes non-linéaires, évalués pour différents coefficients de frottement, et l'interpolation linéaire des mesures expérimentales sont relevées afin de tracer l'évolution du coefficient de frottement μ en fonction de l'amplitude de déplacement en tête d'aube.



(a) Recalage du coefficient de friction μ - interpolation des mesures expérimentales (- -)

(b) Évolution du coefficient de friction μ nécessaire à la corrélation

FIGURE V.39 – Évaluation de l'évolution du coefficient de friction μ en fonction de l'amplitude de déplacement en tête d'aube

Une évolution linéaire croissante du coefficient de frottement μ en fonction du déplacement en tête d'aube permettrait de mieux suivre l'évolution expérimentale des paramètres modaux (et, en particulier, le taux d'amortissement). Ces valeurs du coefficient de frottement semblent réalistes, celles-ci sont cependant uniquement valables pour les amplitudes de déplacement testées puisque les essais sur mors ne permettent pas de tester les simulations numériques au-delà.

Relier les coefficients de frottement obtenus à un déplacement de référence en pied d'aube ou à la moyenne des déplacements sur les portées permettraient de rendre cette évolution plus physique. Toutefois, la forme du mode complexe non-linéaire évolue peu pour cette plage d'amplitudes de déplacement, comme l'expose la figure V.40, il est donc possible de conserver cette relation entre les paramètres. Par ailleurs, une caractérisation

tribologique expérimentale et numérique du contact permettrait de statuer sur la cohérence de cette tendance.

Il est à noter que le nombre de nœuds de contact discrétisant les portées est aussi un paramètre influant le point de décollement mais celui-ci n'a pu être investigué dans une plage importante de variation par limitation du maillage et du temps de calcul. Néanmoins, il pourrait être investigué sur une structure test, de type éprouvette numérique.

Des points expérimentaux supplémentaires pour des tensions d'excitation plus élevées auraient permis de se rendre compte si l'évolution des paramètres modaux s'intensifie comme constaté numériquement. Néanmoins, à cause des limitations de l'amplificateur détaillées en section V.1, ces tensions d'excitations supplémentaires sont inenvisageables.

Concernant le deuxième mode de flexion, les observations sont manifestes. En effet, la fréquence propre et le taux d'amortissement dans le cas des simulations numériques non-linéaires restent constants sur toute la plage d'amplitude étudiée ce qui traduit le fait que les portées de l'aube restent collées à celles du mors. A contrario, un très léger décalage fréquentiel et une faible augmentation du taux d'amortissement dans le cas des essais sur mors impliquent un glissement des portées l'une par rapport à l'autre, ce que ne reflètent donc pas les simulations numériques non-linéaires pour le deuxième mode de flexion. Les simulations numériques ne sont donc pas prédictives entre les deux modes de flexion ce qui peut être dû à une répartition différente des zones de glissement entre ces derniers.

À l'instar du premier mode de flexion, une évolution du coefficient de frottement en fonction de l'amplitude de déplacement en tête d'aube permettrait de se rapprocher du comportement dynamique expérimental. Les valeurs du coefficient de frottement seraient toutefois plus faibles que celles du premier mode de flexion.

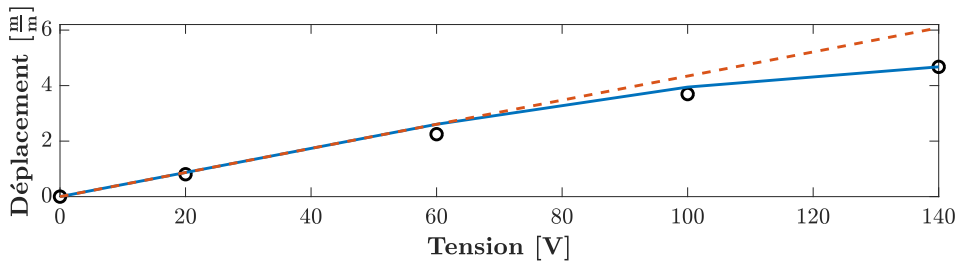
Néanmoins, les écarts entre les amplitudes expérimentales et numériques de déplacement et de déformation ne sont pas importants du fait des faibles effets non-linéaires en jeu dans ces essais sur mors. Ces comparaisons de l'évolution des amplitudes expérimentales et numériques en fonction de la tension d'excitation sont proposées en figure V.40 et V.41 pour le premier et le deuxième mode de flexion, respectivement.

Aussi bien pour le premier mode de flexion que pour le deuxième, les écarts en amplitude sont faibles quelque soit la tension d'excitation située dans la plage admissible par l'amplificateur de puissance.

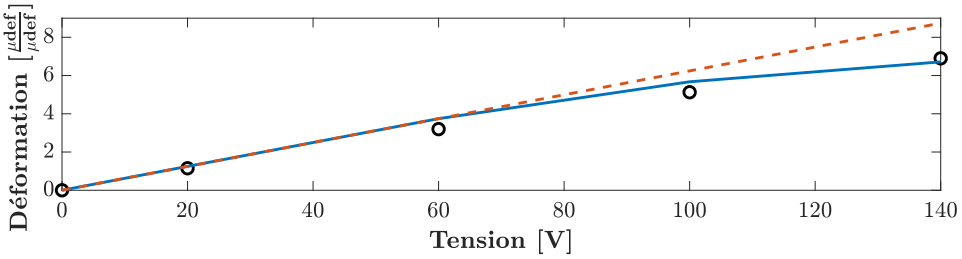
La comparaison entre les déformations mesurées expérimentalement et évaluées numériquement à l'emplacement de la jauge n°2 aboutit à un écart très important, néanmoins, celui-ci n'est pas dû à l'évaluation des effets non-linéaires mais à l'important écart déjà constaté lors des confrontations linéaires dont les résultats sont présentés dans le tableau V.9.

L'écart relatif maximum relevé entre les amplitudes numériques et expérimentales pour le premier mode de flexion est de 15 %. Ce dernier est relevé au point de mesure pour lequel l'écart relatif entre les taux d'amortissement est le plus élevé soit pour une tension de 60 V.

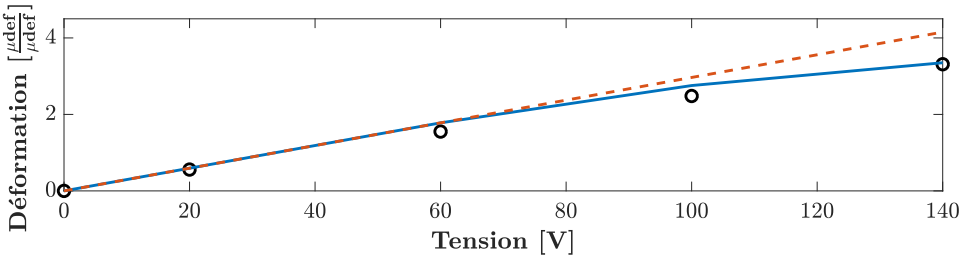
Quant au deuxième mode de flexion, outre la jauge n°2, l'écart relatif maximum relevé est de 4 %. L'écart entre résultats expérimentaux et numériques augmente continuellement en fonction de la tension d'excitation, tout comme l'écart relatif sur le taux d'amortissement. Cependant, ce dernier est quelque peu compensé par l'écart sur la fréquence propre



(a) Déplacements mesurés par le vibromètre laser à la résonance



(b) Déformations mesurées par la jauge n°1 à la résonance



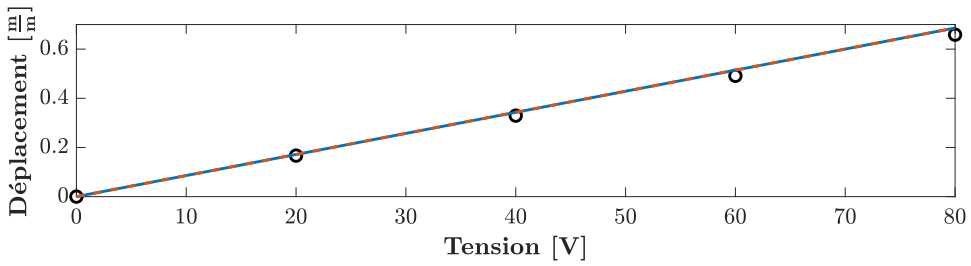
(c) Déformations mesurées par la jauge n°2 à la résonance

FIGURE V.40 – Comparaison de l'évolution des déplacements et des déformations expérimentaux (o) et numériques non-linéaires (—) et linéaires (- -) à la résonance pour le premier mode de flexion en fonction de la tension d'excitation

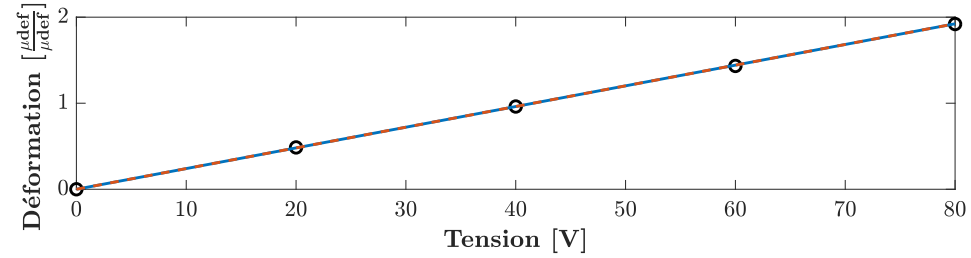
qui, contrairement à l'écart relatif sur le taux d'amortissement, a tendance à réduire l'amplitude des déplacements et des déformations.

Plusieurs éléments peuvent expliquer les écarts obtenus entre les paramètres modaux identifiés lors des essais vibratoires sur mors et ceux évalués au moyen des simulations dynamiques non-linéaires, impactant ainsi les amplitudes de déplacement et de déformation à la résonance.

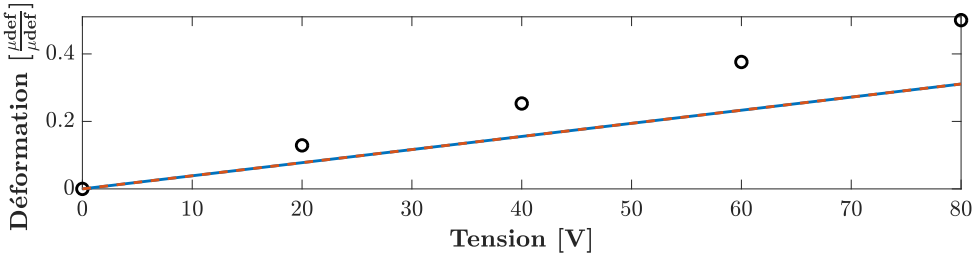
La première cause et certainement celle prépondérante est la loi de contact et de frottement employée pour évaluer les effets non-linéaires du système {aube+mors}. La loi de contact unilatéral et la loi de frottement de Coulomb, évaluées au moyen de la DLFT, sont des lois fortement non-régulières et pouvant être qualifiées de tout ou rien. Des lois plus régulières, comme la loi de contact linéaire par morceaux ou la loi de glissement élastique décrites dans le chapitre I, pourraient permettre une évolution des paramètres modaux plus précoce et plus douce telle celle observée expérimentalement pour les deux modes de flexion. L'ajout de raideurs aux nœuds de contact selon les trois directions, une normale (contact) et deux tangentielles (frottement), à l'interface de contact (principe de la loi de contact linéaire par morceaux et de la loi de glissement élastique) est la technique employée par Charleux [29] et Laxalde [122] afin d'améliorer la corrélation de leurs essais vibratoires non-linéaires en rotation. Cet ajout de raideurs permet aussi de recaler l'effet non-linéaire



(a) Déplacements mesurés par le vibromètre laser à la résonance



(b) Déformations mesurées par la jauge n°1 à la résonance



(c) Déformations mesurées par la jauge n°2 à la résonance

Figure V.41 – Comparaison de l'évolution des déplacements et des déformations expérimentaux (o) et numériques non-linéaires (—) et linéaires (- -) à la résonance pour le deuxième mode de flexion en fonction de la tension d'excitation

du système au moyen de deux ou trois paramètres supplémentaires (en fonction du choix des raideurs tangentielles). Ces raideurs sont néanmoins difficiles à recaler comme le souligne Charleux dans son mémoire de thèse [29]. De plus, l'ajout de ces dernières dans les simulations numériques ne permet pas nécessairement d'améliorer la prédiction du décalage de la fréquence propre en fonction de l'amplitude de vibration qui reste plus faible numériquement qu'expérimentalement [29, 122, 151].

Par ailleurs, l'emploi d'une loi de frottement de Bouc-Wen [20, 233], évoquée dans le chapitre I, pourrait permettre de prendre en compte les phénomènes de micro-glissements à l'interface entre le mors et l'aube et ainsi améliorer la représentation des effets non-linéaires.

Le second élément permettant d'expliquer ces écarts peut provenir des hypothèses de modélisation formulées et plus précisément de l'absence du clinquant à l'interface entre le modèle numérique de l'aube et du mors. En effet, la présence d'un troisième corps de faible épaisseur entre les portées du mors et celles de l'aube, possédant ses propres déplacements et efforts, peut influer sur la dynamique non-linéaire du système {aube+mors}.

Une autre explication possible concerne le contact frottant entre la cale et l'aube, permettant de précharger cette dernière. Ce contact frottant est considéré en tant que tel lors de l'étape de précharge statique mais est relâché par la suite dans le but de réduire

le nombre de degrés de liberté de contact / frottement à résoudre lors des simulations numériques non-linéaires.

Une étude d'influence numérique était initialement envisagée afin d'évaluer l'effet de ce contact entre la cale et l'aube sur la dynamique non-linéaire de la structure. Cependant, le modèle éléments finis fourni ne permet pas d'obtenir une coïncidence entre les nœuds de l'aube et ceux de la cale. Sans cette coïncidence, il n'est pas possible d'employer la DLFT pour évaluer les termes non-linéaires puisque cette dernière exploite un formalisme de contact nœud à nœud.

4 Bilan

Ce chapitre a permis d'effectuer une première comparaison entre essais vibratoires et simulations numériques, faisant apparaître des comportements non-linéaires, sur un sous-système, en apparence, plus facile à aborder qu'une soufflante composite en rotation, à savoir une aube isolée en composite tissé 3D enchassée dans un mors.

Dans un premier temps, les essais vibratoires sur le système {aube+mors} ont été exposés en commençant par le dispositif expérimental pour lequel le montage, l'instrumentation et le système d'excitation au moyen d'actionneurs piézoélectriques ont été détaillés. Les méthodes expérimentales exploitées dans ces essais ont aussi été développées et en particulier l'identification modale des réponses forcées permettant d'extraire les paramètres modaux principaux du système, c'est-à-dire principalement la fréquence propre et le taux d'amortissement du mode identifié.

Dans un deuxième temps, les simulations numériques ont été abordées en présentant le modèle éléments finis de la structure étudiée et des actionneurs piézoélectriques. Les méthodes numériques de condensation, de réduction, de résolution et de post-traitement, exposées dans les chapitres précédents (II, III et IV) et préalables à l'évaluation des réponses forcées numériques non-linéaires, ont été traitées du point de vue de leur application à ce système particulier. De plus, des études d'influence ont été menées sur plusieurs paramètres du modèle et des simulations numériques afin d'obtenir le meilleur compromis entre temps de calcul et précision de la solution.

Dans un dernier temps, la confrontation entre les résultats expérimentaux et numériques pour les deux premiers modes de flexion a été analysée et commentée ; tout abord pour le système excité avec de faibles amplitudes et donc considéré comme linéaire, puis en dynamique non-linéaire.

Cette comparaison essais / simulations numériques a été très concluante dans le cadre linéaire (pour de faibles excitations) en termes de fréquences propres, de taux d'amortissement mais aussi d'amplitudes à la résonance sur les modes étudiés. De plus, les écarts entre les données expérimentales et numériques ont été comparés aux dispersions des paramètres modaux et des amplitudes à la résonance obtenues au moyen des essais sur mors sur les dix-huit aubes de la soufflante. Ces écarts ont tous été inférieurs, voire très inférieurs, aux dispersions pouvant être rencontrées sur les aubes de la soufflante composite.

La comparaison entre les essais et les simulations en dynamique non-linéaire a été moins concluante que dans le cas linéaire. En effet, un décalage dans la phase de frottement entre les effets non-linéaires expérimentaux et numériques a été perceptible sur les évolutions des paramètres modaux des deux modes étudiés. De plus, l'évolution numérique des paramètres modaux présentait une évolution moins régulière contrairement à celle expérimentale plus progressive.

Ces différences d'évolution des paramètres modaux non-linéaires ont été imputées aux

lois de contact et de frottement employées ainsi qu'à certaines simplifications effectuées lors de la modélisation comme détaillée en section V.3.2. Cependant, l'évolution numérique des paramètres modaux (et notamment du taux d'amortissement) a été recalée sur leur évolution expérimentale, au moins sur la plage d'amplitude testée expérimentalement. Ce recalage a été réalisé en augmentant le coefficient de frottement en fonction de l'amplitude de vibration pour permettre de décaler le point de décollement, initiant la phase de glissement de la non-linéarité, vers des amplitudes de vibration plus faibles.

Néanmoins, les écarts en termes d'amplitude de déplacements et de déformations ont été faibles résultant des effets non-linéaires modérés, rencontrés durant ces essais sur mors. Ces derniers ne favorisaient pas la comparaison entre les essais et les simulations non-linéaires, c'est pourquoi des essais complémentaires pour différents efforts normaux de précharge auraient permis d'effectuer la confrontation pour plusieurs effets non-linéaires.

Les essais en rotation exposés dans le chapitre VI peuvent permettre de statuer sur ces différences d'évolution des paramètres modaux de la structure puisque ces essais sont réalisés pour plusieurs vitesses de rotation et donc différents efforts normaux de précharge, précisément connus.

De plus, ces essais en rotation permettent également une comparaison de la dynamique expérimentale non-linéaire d'une soufflante, employée dans l'industrie et donc désaccordée, en rotation avec les simulations numériques réalisées sur un modèle éléments finis de soufflante (également désaccordé) réduit, condensé et résolu au moyen des techniques présentées dans les chapitres II, III et IV.

Par ailleurs, une majorité des techniques expérimentales présentées dans ce chapitre, telles que l'instrumentation employée sur les aubes, le système d'excitation par actionneurs piézoélectriques ainsi que l'identification modale des réponses forcées sont réemployées dans les essais en rotation du chapitre suivant. Tout comme les méthodes numériques telles que le modèle numérique de l'aube composite et des actionneurs piézoélectriques, les méthodes numériques de réduction, de condensation et de résolution mais aussi les études d'influence réalisées sur les paramètres du modèle et des simulations numériques servent de base aux simulations numériques non-linéaires de la soufflante composite en rotation du chapitre VI.

Chapitre VI

Essais et simulations numériques d'une soufflante en rotation

Les essais en rotation sur une soufflante composite de type LEAP à l'intérieur de l'enceinte sous-vide du banc PHARE#1 constituent l'aboutissement expérimental de ce travail de thèse. De même, les simulations numériques non-linéaires d'une soufflante désaccordée de taille industrielle forment le final numérique des différents chapitres de ce mémoire consacrés à la résolution non-linéaire du problème, à la réduction du modèle numérique et à la modélisation piézomécanique des actionneurs piézoélectriques excitant les aubes de la soufflante. La comparaison entre ces essais en rotation et ces simulations numériques en dynamique non-linéaire offre l'opportunité de valider le travail numérique effectué dans le cadre de cette thèse mais permet aussi d'offrir des axes d'amélioration concernant les simulations numériques ainsi que de définir de nouveaux essais permettant de faire évoluer la compréhension de la dynamique roues aubagées en rotation.

Les essais en rotation réalisés sont détaillés dans la première section de ce chapitre en détaillant particulièrement le moyen d'essais PHARE#1 et les méthodes expérimentales exploitées. La deuxième section expose les simulations numériques non-linéaires réalisées à partir du modèle numérique éléments finis de la soufflante et notamment l'influence du désaccordage numérique des aubes de la soufflante sur la réponse vibratoire. Pour conclure ce chapitre, les confrontations entre les essais vibratoires en rotation et les simulations numériques non-linéaires sont présentées.

Sommaire

1 Analyse expérimentale non-linéaire en rotation 186
1.1 Banc d'essais PHARE#1 186
1.2 Système d'excitation piézoélectrique 195
1.3 Méthodes expérimentales 200
2 Simulations numériques non-linéaires d'une soufflante désaccordée 214
2.1 Modélisation numérique 214
2.2 Méthodes numériques non-linéaires 217
2.3 Influence du désaccordage de la soufflante 224
3 Confrontation entre essais en rotation et simulations numériques 231
3.1 Comparaison des paramètres modaux du système linéaire sous-jacent 231
3.2 Influence du coefficient de frottement sur la réponse non-linéaire . . 238
3.3 Comparaison des réponses à une excitation localisée 243
3.4 Comparaison des réponses à une excitation à diamètres 252
4 Bilan 272

Il est important de mentionner que pour des raisons de confidentialité industrielle, les grandeurs (fréquence, taux d'amortissement, amplitudes de déformation et résidus) exposées dans ce chapitre sont normalisées.

1 Analyse expérimentale non-linéaire en rotation

Comme énoncé en introduction de ce mémoire de thèse, les essais vibratoires en rotation présentés dans cette section sont réalisés au moyen du module structure dit PHARE#1 (pour Plateforme macHines tournantes pour la mAîtrise des Risques Environnementaux) de la plateforme Dynamique des Machines Tournantes du LTDS. Le banc PHARE#1 a été conçu et développé au LTDS ces dernières années dans la perspective de parfaire la compréhension des phénomènes vibratoires affectant les machines tournantes et particulièrement les roues aubagées. PHARE#1 est un banc d'essais de recherche dédié aux essais vibratoires de structures tournantes à l'échelle 1:1, employées dans l'industrie. Celui-ci permet d'étudier les structures tournantes d'un point de vue purement mécanique, à cet effet ces dernières sont placées dans la cuve sous-vide du banc.

La conception du banc ainsi que son importante instrumentation sont telles que celui-ci est capable de tester de nombreux types de machines tournantes mais aussi de répondre à de nombreuses problématiques posées dans différentes thématiques de recherche. Parmi ces dernières, il est possible de mentionner la réponse forcée des roues aubagées [14, 46, 64, 69], les instabilités de contact entre les aubes et le carter [3, 150, 168], les phénomènes non-linéaires de friction et d'usure [28, 96] ou bien encore le contrôle vibratoire actif [30, 49] ou passif [123, 131, 207] des structures tournantes pour ne citer que celles-ci.

La première campagne d'essais du banc PHARE#1, aboutissant notamment aux travaux présentés dans ce chapitre, se concentre sur l'étude des réponses forcées d'une soufflante complète en composite tissé 3D en rotation à des vitesses représentatives des régimes de fonctionnement. De surcroît, cette campagne autorise l'étude des effets du désaccordage de la structure en rotation ainsi que l'étude de l'amortissement structural et celui induit par la friction en pied d'aube.

Afin d'exciter la structure sous-vide avec des amplitudes de vibration réalistes, chacune des dix-huit aubes de la soufflante est excitée indépendamment au moyen d'un système composé de plusieurs actionneurs piézoélectriques fixés sur celles-ci. Une partie des composants de cette chaîne d'excitation, à savoir les actionneurs et l'amplificateur multivoie de puissance, ont déjà été exposés dans le chapitre V.

Par ailleurs, un fragment des résultats expérimentaux exposés dans ce chapitre est issu d'un papier présenté à l'IFTOMM [134] durant cette thèse.

Cette section consacrée aux essais en rotation de la soufflante composite se compose de trois parties. La première contient une présentation détaillée du banc d'essais et de la structure testée ainsi que de l'instrumentation de ces deux éléments. Le système d'excitation piézoélectrique est exposé dans la deuxième sous-section. La dernière sous-section traite des méthodes expérimentales employées, parmi lesquelles figurent notamment le post-traitement des données dynamiques, le protocole expérimental déployé ainsi que l'estimation des incertitudes liées à la chaîne d'acquisition des mesures.

1.1 Banc d'essais PHARE#1

Le banc d'essais PHARE#1, largement présenté dans les introductions du mémoire et de ce chapitre, permet de tester une roue aubagée ou plusieurs étages de roues aubagées à des vitesses de rotation réelles grâce à l'installation sous-vide et à la motorisation déployées.

Dans le cas de ces travaux de thèse et de la première campagne d'essais du banc PHARE#1, la roue aubagée testée en rotation est une soufflante en composite tissé 3D de type LEAP, préalablement exposée dans le chapitre I.

La soufflante testée est présentée dans la première partie de cette sous-section en compagnie du banc d'essais PHARE#1 et de ses principaux composants. Dans la seconde partie, l'importante instrumentation surveillant le banc d'essais est exposée de même que le système d'acquisition et les capteurs permettant d'analyser la dynamique de la soufflante.

1.1.1 Constitution du banc d'essais PHARE#1

Le banc PHARE#1 est illustré sur la vue en coupe de la figure VI.1 et sur les clichés des figures VI.2a et VI.2b. À partir de ces figures, les composants du banc PHARE#1 sont détaillés dans la suite de cette sous-section.

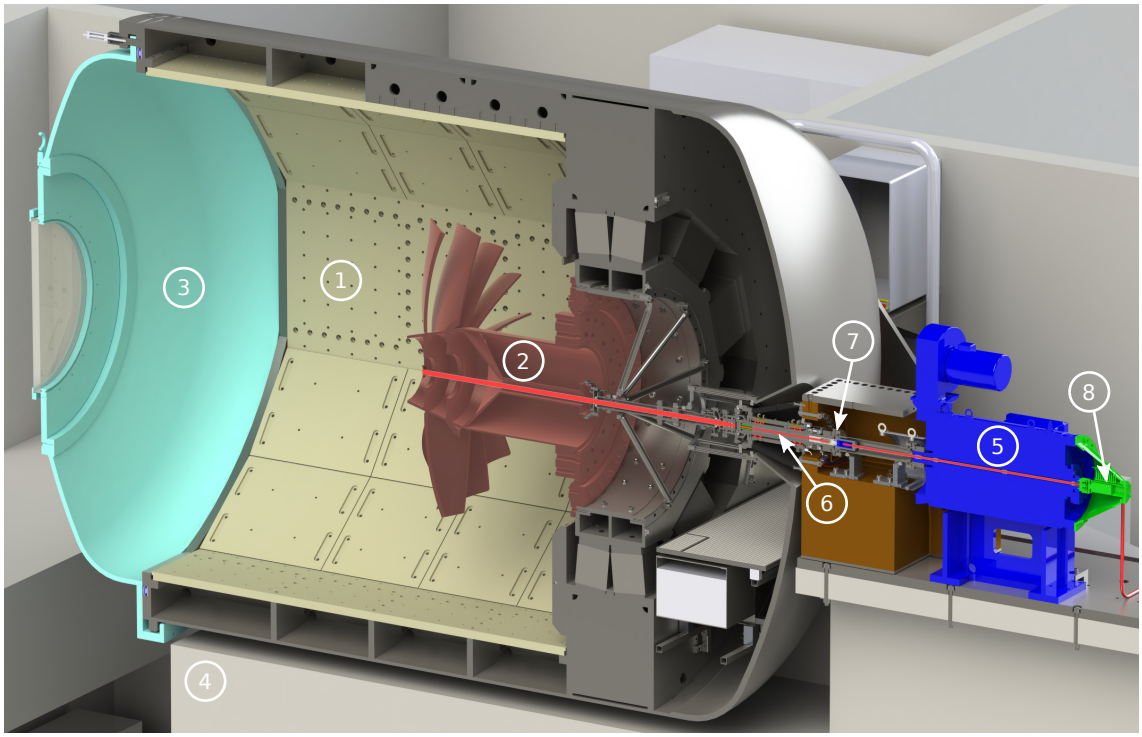


Figure VI.1 – Vue en coupe du banc d'essais PHARE#1

L'élément le plus imposant du banc d'essais demeure l'enceinte sous-vide, représentée par le numéro ① en figure VI.1, permettant de tester les structures tournantes dans un vide primaire. Les dimensions utiles de la cuve sont de trois mètres de diamètre pour quatre mètres de longueur axiale.

Une pompe à palettes à deux étages extrait l'air de la cuve afin d'atteindre une pression de 3 mbar à l'intérieur de l'enceinte dans des conditions d'exploitation. Un *booster* a été ajouté à la pompe à vide afin d'abaisser la pression dans la cuve à moins de 0.1 mbar. Ce niveau de pression résulte de la capacité de pompage et du taux de fuite des étanchéités statiques et dynamiques (passage d'arbre) de l'enceinte à vide. La pression est stable une fois le minimum atteint. La courbe de pompage est donnée à titre indicatif en figure VI.10b.

La cuve est divisée en deux parties distinctes au moyen d'une partie structurale appelée mur. Le véhicule d'essais ②, contenant la roue aubagée testée, est soutenu par ce mur qui est attaché à la cuve par l'intermédiaire d'une suspension en élastomère filtrant ainsi tout couplage dynamique entre la structure testée et la cuve. Les parois de la partie avant de la

(a) Vue depuis l'ouverture amont

(b) Vue de l'aval

Figure VI.2 – Illustrations du banc d'essais PHARE#1

cuve (où se trouve le véhicule d'essais ②) sont renforcées au moyen de plaques de blindage dimensionnées pour les cas de perte accidentelle d'un ou plusieurs éléments rotatifs. La partie arrière de la cuve, accessible via un trou d'homme visible en figure VI.2b, permet notamment l'accès à toutes les interfaces mécaniques, hydrauliques et d'instrumentation entre le banc et le véhicule d'essais.

Une porte ronde escamotable ③, couvrant la totalité de l'ouverture amont de la cuve, permet d'installer le véhicule d'essais ②. Cette porte est guidée en translation au moyen de deux arbres chromés et de douilles à billes. Cette dernière peut être abaissée ou relevée grâce à deux mécanismes de vis à billes entraînés par deux moteurs électriques synchronisés. La porte ③ est sécurisée en position fermée par l'intermédiaire d'un verrou pneumatique. Un joint gonflable assure la préhension par effet de ventouse puis l'étanchéité à l'air lorsque la porte est plaquée contre l'ouverture de l'enceinte.

Cette dernière, en position relevée et abaissée, est illustrée sur les figures VI.1 et VI.2a, respectivement. Le système de guidage (sur les côtés de l'enceinte), le verrou (en haut de la cuve) et le joint gonflable (en rouge, autour de la cuve) sont apparents sur cette dernière figure. L'ensemble du système est une conception originale développée au sein de la Plateforme dynamique des Machines Tournantes du LTDS.

La cuve sous-vide est solidement fixée à un massif inertiel en béton ④ de trois cents tonnes, reposant lui-même sur six boîtes à ressorts et quatre boîtiers amortisseurs placés entre le massif et un berceau support isolé du bâtiment. Le massif inertiel ④ a été dimensionné numériquement en dynamique puis validé expérimentalement dans le but de respecter les normes en termes de niveaux vibratoires en cas de perte accidentelle d'une ou plusieurs aubes.

Un moteur électrique ⑤ de 700 kW permet d'entraîner le véhicule d'essais ② dans le vide. Celui-ci est régulé en vitesse (jusqu'à 8000 tours/min) par un variateur de puissance électrique. Par ailleurs, l'arbre du moteur est creux et supporte un collecteur tournant ⑧ rapporté, destiné à transmettre la puissance aux actionneurs piézoélectriques.

Le palier étanche ⑥ assure la transmission entre le moteur électrique et l'arbre principal. Ce composant essentiel du banc d'essais est équipé d'un joint d'étanchéité circonférentiel en carbone. Ce dernier supporte également le boîtier de télémétrie ⑦ embarqué sur le rotor et assure le passage, dans des conditions étanches au vide, des câbles de puissance alimentant les actionneurs piézoélectriques comme décrit en sous-section 1.1.2 et en section VI.1.2. Il est à noter que la conception du palier étanche a été réalisée au laboratoire.

Pour achever la description du banc d'essais, la lubrification des roulements du véhicule d'essais est assurée par une unité hydraulique spécifique capable de renvoyer et de refroidir l'huile depuis l'intérieur de la cuve sous vide jusqu'au réservoir d'huile principal à pression ambiante. La température de l'huile de lubrification ainsi que le débit d'entrée de chacun des roulements sont régulés par cette même unité hydraulique.

Le variateur de puissance électrique du moteur, la pompe à vide ainsi que l'unité hydraulique de refroidissement sont implantés dans une salle adjacente au banc d'essais, appelée salle des servitudes. Cette dernière est régulée en température afin de maintenir ces différents éléments à une température normale de fonctionnement.

Comme exposé précédemment, la structure testée est une soufflante en composite tissé 3D de type LEAP dont les caractéristiques principales et le processus de fabrication sont présentés dans le chapitre I. Pour être plus précis, cette soufflante est un démonstrateur du LEAP conçu et testé par Safran Aircraft Engines lors d'étapes avancées du développement du LEAP. Des illustrations de la soufflante sont proposées en figures VI.2a et VI.3.

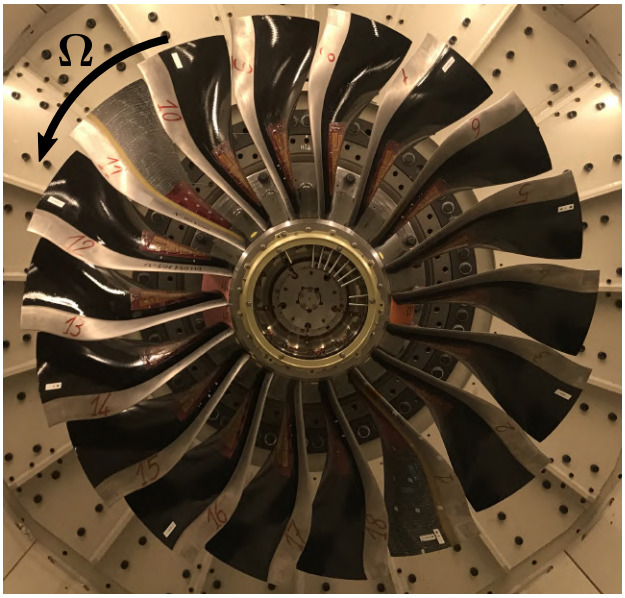


Figure VI.3 – Soufflante installée dans le banc d'essais PHARE#1

La soufflante est constituée de dix-huit aubes et d'un disque en titane. Ces dernières sont décrites dans le chapitre V et sont toutes testées dynamiquement dans le cadre de la campagne d'essais sur mors. Le diamètre total de la soufflante est de 1800 millimètres et celui du disque de 420 millimètres.

Plusieurs configurations de cette soufflante ont été testées durant cette première campagne d'essais sur le banc PHARE#1 dans le but d'évaluer l'influence de ses différents composants sur la dynamique de l'ensemble de la soufflante et notamment l'influence des plateformes (décrites dans le chapitre I et visibles sur la figure VI.3) et des clinquants (décrits dans les chapitres I et V).

Contrairement à ce qu'illustrent les différentes figures, la configuration testée dans les essais exploités dans ce travail de thèse est la plus simple qui puisse être pour cette soufflante, à savoir une configuration sans clinquant ni plateforme. Cette dernière a été choisie dans le but de franchir un premier niveau de difficulté. En effet, ces deux composants peuvent être complexes à modéliser et à simuler dynamiquement puisqu'ils sont tous deux positionnés à des emplacements sensibles : les clinquants à l'interface de contact / frottement entre les aubes et le disque ; les plateformes à la frontière entre les différents secteurs de la soufflante.

Avant d'être insérées dans les alvéoles du disque, les portées de toutes les aubes sont lubrifiées au moyen d'un spray de disulfure de molybdène (de formule chimique MoS_2) afin d'augmenter le glissement entre les structures.

Une fois les aubes enchâssées dans le disque, des cales sont placées au fond des alvéoles, entre le disque et les aubes, de façon à plaquer les portées des aubes contre celles des alvéoles lorsque la soufflante est à l'arrêt ou pour de faibles vitesses de rotation.

Des verrous, positionnés à l'entrée de chaque alvéole, permettent de fermer ces dernières selon l'axe moteur.

En vue d'interpréter correctement la nature des ondes propagatives dans le repère tournant, il est essentiel de remarquer que la rotation de la soufflante s'effectue dans le sens anti-horaire en se plaçant face à cette dernière, comme annoté en figure VI.3. De plus les aubes sont numérotées selon le sens de rotation, cette numérotation étant essentielle à la définition du sens de propagation des ondes à diamètres (excitations et réponses).

Avant les essais exploités dans ce travail de thèse, la machine est équilibrée dynamiquement afin de réduire au mieux les excitations par balourd. Cet équilibrage est réalisé par la méthode des coefficients d'influence sur deux plans, amont et aval du rotor du véhicule d'essais, au moyen de vis de masses différentes placées sur le cône tronqué doré à l'amont de la machine ; cône tronqué exposé en figure VI.3.

1.1.2 Instrumentation du banc d'essais PHARE#1

Le module structure PHARE#1 est instrumenté au moyen d'environ deux cents capteurs. Cette importante instrumentation permet de contrôler le bon fonctionnement des différents composants de servitude, de surveiller les niveaux vibratoires et la thermique du banc et du véhicule d'essais mais aussi de mesurer la dynamique de la roue aubagée testée.

Au sein de ces nombreuses mesures, certaines sont dédiées à l'acquisition des conditions expérimentales de la soufflante telles que la mesure de la pression à l'intérieur de la cuve, de la vitesse de rotation, de la température d'enceinte et des niveaux vibratoires du véhicule d'essais.

De plus, des capteurs tout ou rien permettent aussi de contrôler la position de certains composants comme la porte escamotable de la cuve ou d'assurer des fonctions de sécurité. Toutes les données relatives aux équipements de servitude sont gérées par un automate général.

Des seuils, fixés par calculs et par expérience, sont mis en place pour effectuer la surveillance dynamique du banc et du véhicule d'essais. Le dépassement de l'un de ces seuils nécessite le repli du banc d'essais afin de ne pas entraîner de dommage sur la machine.

Parmi ces mesures de surveillance dynamique, des accéléromètres mesurent la dynamique vibratoire du mur d'isolation mais surtout la dynamique des paliers supportant les arbres en rotation. Des accéléromètres sont aussi employés pour réaliser le suivi vibratoire du moteur électrique. Des capteurs de déplacement Kaman sans contact à courant de Foucault sont exploités pour décrire l'orbite de déplacement de la ligne d'arbre à l'intérieur et à l'extérieur de la cuve.

Les mesures vibratoires effectuées à l'intérieur de la cuve sous-vide sont transférées vers l'extérieur par l'intermédiaire de connecteurs étanches, incorporés dans les parois de la cuve.

Dans certains cas, les capteurs dédiés à la surveillance peuvent mettre en évidence des couplages entre le véhicule d'essais et la soufflante. Ceci a son importance en vue de la corrélation entres les essais en rotation et les simulations numériques puisque ces situations sont, a priori, écartées de la comparaison. Plus de précisions sur ce phénomène sont apportées en section VI.3.

Les principales mesures du banc d'essais et de ces travaux de thèse concernent la soufflante et permettent d'évaluer la dynamique de cette dernière durant la rotation. La figure VI.4 représente l'architecture de la chaîne d'acquisition de l'instrumentation de la soufflante, aussi décrite ci-dessous.

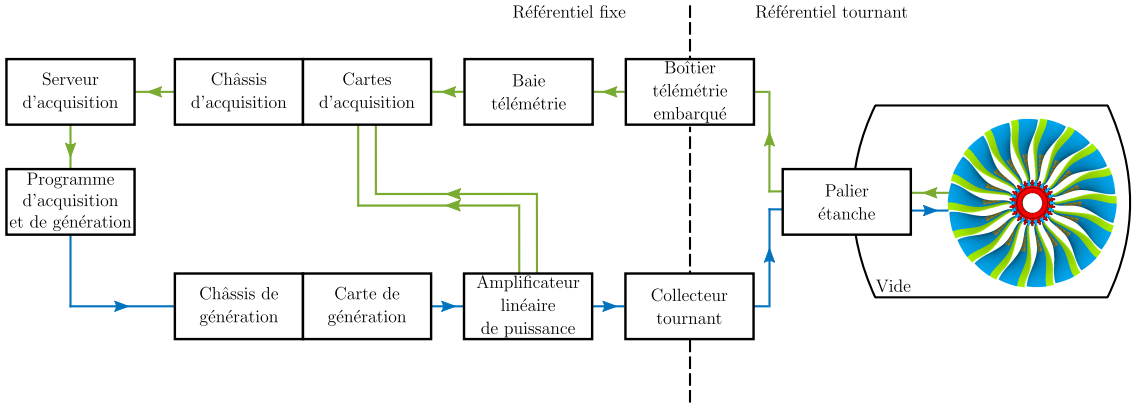


Figure VI.4 – Architecture des systèmes d'acquisition et d'excitation de la soufflante en rotation (— signaux d'excitation, — signaux d'acquisition)

Pareillement aux essais sur mors, chacune des aubes de la soufflante est équipée de deux jauges de déformation (leur documentation technique est proposée en annexe C) dont la position est identique à celle représentée en figure V.3, à savoir au dessus du pied d'aube du côté intrados et orientée selon l'axe X. La première jauge est située près du bord d'attaque et la seconde près du bord de fuite. Trente-six jauges assurent donc la mesure de la dynamique de la soufflante testée en rotation.

Ce type de mesure est très employé lors d'essais en rotation en raison du faible encombrement des jauges supportant ainsi l'effet centrifuge qui leur est appliqué. Néanmoins, lors d'essais en rotation, les jauges de déformation nécessitent l'emploi d'une chaîne d'acquisition complexe permettant notamment le transfert des données du référentiel tournant vers le référentiel fixe.

Ainsi, les données acquises au moyen des jauges de déformation sont acheminées jusqu'au palier étanche via les câbles d'instrumentation. Le palier étanche, décrit en sous-section 1.1.1 et repéré par le numéro ⑥ en figure VI.1, assure le transfert de ces mesures vers l'extérieur de l'enceinte sous-vide grâce à son arbre creux contenant les conducteurs. Il assure également le passage des liaisons nécessaires à l'excitation piézoélectrique en provenance du collecteur tournant et en direction des actionneurs de la soufflante. Pour limiter les perturbations électromagnétiques, tous les câbles d'instrumentation sont blindés, torsadés et reliés à une masse commune.

En plus de permettre l'acheminement des données en dehors de la cuve sous-vide, le palier étanche supporte le boîtier de télémétrie, représenté par le numéro ⑦ en figure VI.1, assurant le transfert des données dans le référentiel fixe. Le boîtier de télémétrie contient notamment des modules garantissant la conversion des données analogiques en échantillons numériques ce qui facilite leur transfert vers le référentiel fixe et permet ainsi de réduire les éventuels problèmes de perturbation électromagnétique lors de ce transfert.

Les modules assurent aussi l'alimentation des jauges via un courant régulé entre zéro et dix milliampères [1]. Ce courant d'alimentation est sélectionné afin d'obtenir le meilleur

1. Les jauges de déformation sont ici conditionnées en courant, contrairement aux ponts de jauges des essais sur mors du chapitre V conditionnant les jauges en tension.

compromis entre plage dynamique maximale et puissance maximale dissipable par la jauge et le composite de l'aube. Les jauges sont reliées aux modules par l'intermédiaire d'un montage en quart de pont à deux fils.

Le transfert des données du référentiel tournant vers le référentiel fixe est effectué par ondes radio entre l'antenne du boîtier de télémétrie embarqué sur le rotor et l'antenne de sa partie fixée sur le stator du palier étanche ; l'antenne du rotor étant en rotation en face de l'antenne de la partie stator [2].

La baie de télémétrie, reliée par deux câbles coaxiaux au boîtier de télémétrie (l'un pour le transfert des données acquises et le second pour l'alimentation du boîtier et des jauges), est constituée de cinq racks assurant plusieurs fonctions primordiales. La fonction principale de la baie de télémétrie consiste à remettre en forme le signal provenant de l'antenne stator afin que celui-ci puisse être décodé puis restitué en sortie de baie sous forme analogique. Le système permet également de définir la calibration des voies de mesure (et notamment des gains), de détecter les éventuels défauts d'intégrité des jauges, de régler le courant d'alimentation mais aussi d'affecter les voies de mesure sur les sorties du rack principal à destination du système d'acquisition. Dans sa configuration actuelle, la télémétrie permet l'acquisition de 44 mesures dynamiques provenant de jauges de déformation et 8 mesures de température issues de thermocouples.

L'ensemble de la télémétrie a été développé par l'entreprise ATCOM spécialement pour le projet PHARE. Son intégration mécatronique dans le banc d'essais résulte d'une co-conception avec le LTDS.

Les données dynamiques analogiques provenant de la baie de télémétrie sont ensuite converties en données numériques à l'aide de trois cartes d'acquisition National Instruments™ de référence PXIe-4499 [156] permettant chacune l'acquisition de seize signaux de mesure de manière synchrone.

Ces cartes d'acquisition sont enfichées dans un châssis National Instruments™ de référence PXIe-1075 [159] assurant la synchronisation des données de toutes les cartes.

Les données temporelles provenant de l'instrumentation de la soufflante mais aussi de tous les capteurs mentionnés précédemment transitent par un serveur d'acquisition. Ce dernier assure la sauvegarde de toutes les données à la volée de façon synchrone dès que le banc est en rotation et les répartit sur les différentes machines (de surveillance vibratoire du banc, de pilotage du banc et celle d'acquisition des données provenant de la soufflante et de génération des signaux d'excitation). La liaison entre le châssis et le serveur d'acquisition est réalisée au moyen d'une fibre optique National Instruments™ de référence PXIe-8375 [154] permettant d'assurer rapidement le transfert d'une importante quantité de données d'acquisition.

De plus, une partie des informations relatives aux conditions d'essais transitent par un réseau de terrain MODBUS entre l'automate de pilotage du banc et le serveur d'acquisition.

Finalement, les données dynamiques issues de la soufflante sont traitées par le programme d'acquisition et de génération de l'excitation. Celui-ci permet le traitement et l'affichage des données dynamiques, la génération des signaux d'excitation de la soufflante (ceux-ci sont détaillés en sous-section VI.1.2), la sauvegarde des données dynamiques temporelles et fréquentielles de chaque excitation ainsi que la surveillance de la dynamique vibratoire de la soufflante. Les données dynamiques provenant de la soufflante sont échan-

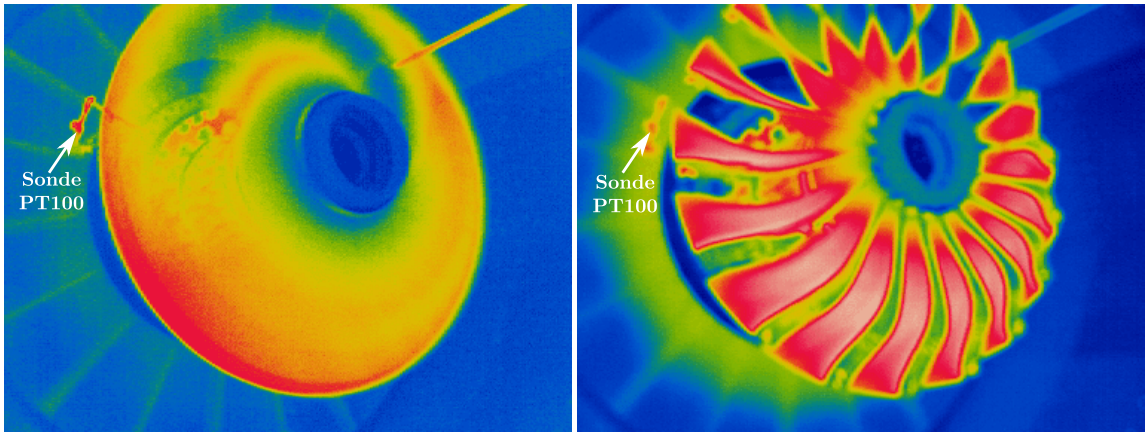
2. Pour information, l'alimentation des modules est réalisée au moyen de bobinages rotor et stator

tillonnées à 2 kHz ce qui permet la conservation de plusieurs harmoniques dans le signal temporel de la réponse tout en limitant la quantité et le flux de données sauvegardées. De plus, il est important de noter que ce programme a été développé sur le logiciel LabView™ au laboratoire.

La soufflante est aussi instrumentée en température par l'intermédiaire de quatre thermocouples[3] dans le but de suivre les conditions thermiques en pied d'aube durant la rotation et l'excitation de la soufflante.

Les mesures de température de la soufflante sont gérées de façon similaire aux jauges, et notamment avec des modules conditionneurs (dans le système de télémétrie) dédiés. Toutefois, la carte d'acquisition diffère de celles employées pour les signaux dynamiques. En effet, les données de température étant échantillonnées à deux hertz, la précision temporelle requise est moindre que pour des données dynamiques, c'est pourquoi la carte employée est une carte d'acquisition National Instruments™ de référence PXIe-6341 [160]. Celle-ci est enfichée dans le châssis d'acquisition.

Même à des régimes de rotation élevés, les thermocouples en pied d'aube mesurent très peu d'évolution. Par conséquent, afin de compléter la description du champ thermique des aubes, une caméra infrarouge Optris de référence PI 400i [166] a été installée à l'intérieur de la cuve avec pour objectif de visualiser et de mesurer la répartition de la température sur les aubes et le disque de la soufflante lors de la rotation. Les figures VI.5a et VI.5b donnent respectivement un aperçu de la répartition de la température sur la soufflante durant et à la suite d'un essai en rotation sous-vide.



(a) Durant la rotation (b) Après la fin de la rotation

Figure VI.5 – Cartographie de la température de la soufflante sous-vide (températures min. ■ et max. ■)

En complément de la caméra thermique, une sonde PT100 est installée dans l'enceinte sous-vide, à l'arrière de la soufflante près de la tête des aubes comme indiqué en figure VI.5. Cette dernière permet ainsi de mesurer la température dans la cuve.

3. Ces thermocouples sont répartis sur deux aubes situées de part et d'autre de la soufflante et sont positionnés près des jauges de déformation

1.2 Système d'excitation piézoélectrique

Le choix du moyen d'excitation employé lors de ces essais en rotation a été discuté dans le chapitre V. Les actionneurs et l'amplificateur, qui sont des éléments essentiels de cette chaîne d'excitation, ainsi que leur dimensionnement y ont aussi été détaillés. Néanmoins, d'autres éléments sont nécessaires afin d'exciter la soufflante dans des conditions de rotation et notamment un collecteur tournant ; ces éléments sont décrits dans un premier temps. De plus, les différents types de signaux gérés par le programme d'acquisition et de génération sont exposés dans un second temps.

1.2.1 Composants matériels du système d'excitation

Les dix-huit aubes de la soufflante sont chacune équipées de dix-huit actionneurs piézoélectriques MIDÉ de référence QuickPack10W rev.1A [210] dont le dessin technique est fourni en annexe C.2. De plus amples détails sur les actionneurs piézoélectriques, leur positionnement ainsi que leur dimensionnement sont proposés dans le chapitre V. Au total, la soufflante est donc équipée de 324 patchs piézoélectriques.

Les actionneurs de chaque aube sont raccordés en parallèle constituant ainsi un macro-actionneur avec une seule entrée en tension par aube. La chaîne d'excitation, décrite dans cette sous-section et représentée en figure VI.1, contient donc dix-huit voies indépendantes.

À la suite de leur génération par le biais du programme d'acquisition et d'excitation, les signaux numériques d'excitation sont convertis en signaux analogiques de consigne par le biais d'une carte de génération National Instruments™ de référence PXIe-6738 [157] comprenant 32 voies indépendantes.

Cette carte de génération est enfichée dans un châssis National Instruments™ de référence PXIe-1073 [155] dédié à la génération.

L'amplificateur de puissance (comprenant dix-huit voies) permet d'appliquer un gain de vingt à la tension des signaux analogiques de consigne. Plus de détails sur l'amplificateur linéaire de puissance et son dimensionnement sont proposés dans le chapitre V. Les limitations de courant de l'amplificateur, associées à la caractéristique courant-tension des actionneurs piézoélectriques, restreignent l'exploitation de toute la plage de la tension de sortie des amplificateurs. Ainsi, la tension maximale d'alimentation des actionneurs est limitée à 140 V pour la famille du premier mode de flexion et à 80 V pour la famille du deuxième mode de flexion.

Pareillement à la chaîne d'acquisition / excitation des essais sur mors, chacune des voies d'excitation est monitorée en tension et en courant. Deux cartes (pour les mesures de tension et de courant) National Instruments™ de référence PXIe-4303 [158] assurent l'acquisition des signaux de retour de la tension et du courant. Celles-ci sont enfichées dans le châssis d'acquisition déjà détaillé en section 1.1.2. Ces trente-six signaux sont enregistrés sur le serveur d'acquisition.

Afin d'obtenir une référence permettant de tracer les fonctions de réponse fréquentielle, le signal de tension de la voie numéro une est dédoublé sur l'une des voies des trois cartes d'acquisition des signaux dynamiques afin d'être synchronisé avec les signaux de mesure provenant des jauges de déformation de la soufflante.

La transition des signaux de puissance du référentiel fixe vers le référentiel tournant est effectuée au moyen d'un collecteur tournant (ou *slip ring* en anglais), de repère ⑧ en figure VI.1, positionné en amont de la ligne d'arbre à l'arrière du moteur électrique. Le principe de fonctionnement d'un collecteur tournant consiste à faire frotter des balais sur

des bagues collectrices en rotation. Ces bagues sont reliées aux câbles de puissance en rotation à l'intérieur de l'arbre d'entraînement.

Le collecteur tournant de la marque Michigan Scientific Corporation de référence SR36M [148] dispose de trente-six connections permettant l'excitation des dix-huit aubes individuellement. Celui-ci a été sélectionné en fonction de la vitesse de rotation maximale de la soufflante, de la tension maximale d'excitation des actionneurs piézoélectriques, du courant maximal nécessaire pour exciter les actionneurs (évoqué dans le chapitre V) mais aussi en fonction de sa durée de vie.

Les câbles de puissance circulent à l'intérieur de l'arbre d'entraînement, au centre du toron contenant aussi les câbles d'instrumentation. Afin de limiter les perturbations électromagnétiques sur la mesure dynamique, les câbles de puissance sont blindés, torsadés et reliés à une masse commune. De plus, la distance entre les conducteurs de faible et fort courant est maximisée dans les limites d'encombrement.

De même que les signaux de mesure dynamique, les signaux d'excitation de la soufflante transitent de la pression atmosphérique au quasi-vide à l'intérieur de la cuve grâce au palier étanche, repéré par le numéro ⑥ en figure VI.1.

1.2.2 Composants logiciels du système d'excitation

Le programme d'acquisition et d'excitation a été développé au laboratoire sous le logiciel LabView™pour exploiter le matériel de la chaine d'excitation et de mesure. Ses fonctionnalités de base sont :

- paramétrage des consignes d'excitation (répartition spatiale à diamètres, plage de fréquence, forme du signal, ...) ;
- récupération des mesures de la télémétrie ;
- surveillance des seuils de déformations, de tension et de courant ;
- calcul et stockage des fonctions de réponse fréquentielle en amplitude et phase ;
- affichage des réponses forcées dans les domaines temporel et fréquentiel ;
- récupération (MODBUS) et affichage des conditions d'essais ;
- déclenchement / arrêt de l'excitation (automatique ou manuel).

Par ailleurs, une vue de l'onglet de contrôle et de l'onglet d'affichage des réponses forcées du programme d'acquisition et d'excitation sont proposées en figures D.1 et D.2 de l'annexe D.

Tout d'abord, la répartition spatiale des signaux d'excitation est explicitée pour une forme temporelle sinusoïdale avant d'aborder les différents types de signaux pouvant être générés ainsi que le choix de ces derniers dans un second temps.

Excitation spatiale à diamètres. La configuration du système d'excitation comprenant dix-huit voies indépendantes permet de générer des ondes d'excitation à diamètres pouvant être propagatives dans le repère tournant de la soufflante (co-rotatives, contra-rotatives ou mixtes) ou stationnaires.

D'un point de vue de l'implémentation dans le logiciel, l'excitation de chacune des aubes j de la soufflante est gouvernée par l'équation (VI.1) quelque soit le diamètre nodal ou le sens souhaité de propagation de l'onde.

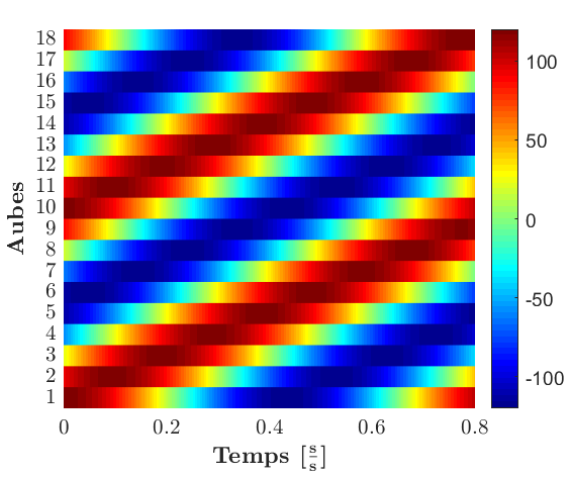
$$v_j(t) = v_{\text{co}} \sin(\omega t - \varphi_j) + v_{\text{contra}} \sin(\omega t + \varphi_j) \qquad \text{avec} \qquad \varphi_j = \frac{2\pi j N_{\text{D}}}{N} \tag{VI.1}$$

dans laquelle v_j est la tension de commande de l'excitation de l'aube j. v_{co} et v_{contra} sont les amplitudes des tensions de commande de l'onde co-rotative et de l'onde contra-rotative, respectivement. ω est la pulsation d'excitation et φ_j, la phase initiale inter-aube dans laquelle $N_{\text{D}} \in [0, 9]$ est le nombre de diamètres nodaux de la répartition spatiale et N est le nombre d'aubes de la soufflante.

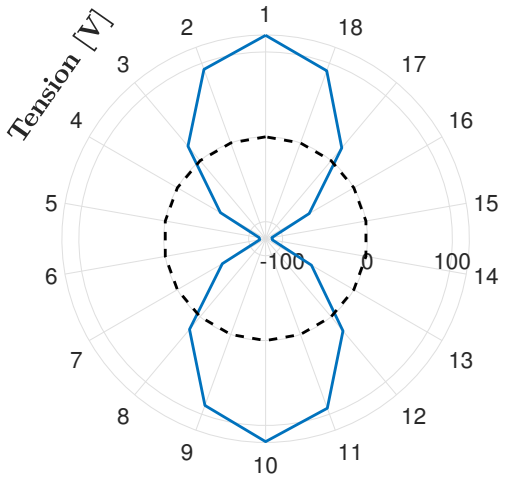
Comme mentionné précédemment, de multiples types d'ondes peuvent être générés à partir de l'équation (VI.1) :

— une onde stationnaire pour $v_{\text{co}} = v_{\text{contra}}$;
— une onde co-rotative pour $v_{\text{contra}} = 0$;
— une onde contra-rotative pour $v_{\text{co}} = 0$;
— une onde mixte (co / contra-rotative) pour $v_{\text{co}} \neq 0$ & $v_{\text{contra}} \neq 0$ & $v_{\text{co}} \neq v_{\text{contra}}$.

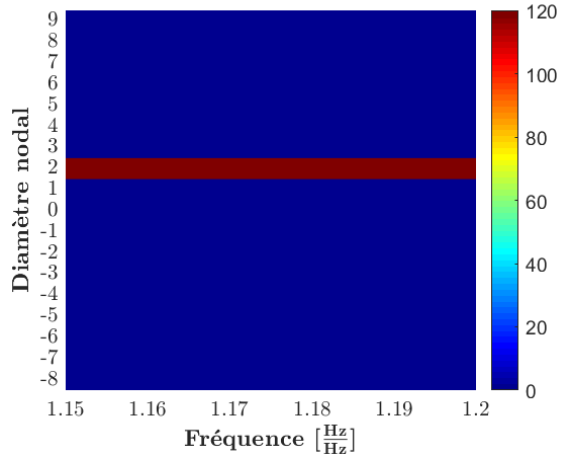
La figure VI.6 ainsi que les figures D.3 et D.4, placées en annexe, dépeignent plusieurs représentations d'excitations à deux diamètres nodaux co-rotative, contra-rotative et stationnaire, respectivement, pour une tension d'excitation sinusoïdale d'amplitude 120 V. Il est important de noter que ces figures sont réalisées à partir des signaux de retour de la tension d'excitation provenant de l'amplificateur au cours d'un essai en rotation afin de valider la qualité des signaux d'excitation aussi bien temporellement que spatialement.



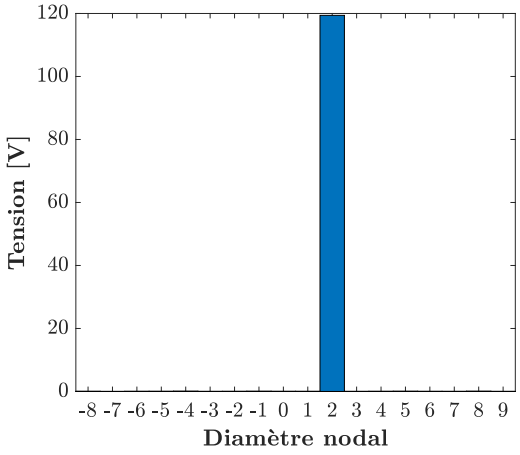
(a) Temporelle



(b) Spatiale



(c) Fréquentielle



(d) Décomposition à diamètres

FIGURE VI.6 – Représentations d'une excitation co-rotative à deux diamètres nodaux

Par ailleurs, une représentation du premier et du deuxième mode de flexion à deux diamètres est proposée plus bas en figure VI.12.

Les deux premières figures VI.6a et VI.6b (mais aussi celles placées en annexe D) sont des représentations dans les domaines temporel et spatial. La première permet de visualiser l'évolution des tensions (ici sinusoïdales d'amplitude 120 V) de chaque voie à travers le temps en mettant en évidence le déphasage inter-voie et le sens de propagation. La seconde expose la répartition spatiale des tensions sur toutes les voies.

La composante à deux diamètres nodaux est identifiable sur la figure VI.6a grâce aux deux maxima et minima pour un même temps. Il en est de même sur la figure VI.6b où les deux diamètres nodaux apparaissent par l'intermédiaire des deux lobes d'amplitudes maximales.

Le sens de l'onde, ici co-rotative, est reconnaissable sur la figure VI.6a grâce à sa propagation selon les numéros d'aube croissants (et inversement pour le sens contra-rotatif qui est représenté en figure D.3a, tandis que l'onde stationnaire est exposée en figure D.4a).

Les deux dernières figures VI.6c et VI.6d (et toujours celles placées en annexe D) sont des représentations fréquentielles de l'excitation. La troisième figure est tracée en exécutant une transformée de Fourier rapide [35] sur chacune des fréquences composant la réponse forcée puis en organisant le résultat pour placer les composantes à diamètres co-rotatives dans la portion positive de l'axe des ordonnées et les composantes à diamètres contra-rotatives dans la portion négative ; l'amplitude de l'excitation étant quantifiée par la couleur du diagramme. La quatrième figure donne l'amplitude de la transformée de Fourier discrète spatiale à fréquence fixée. Celle-ci permet ainsi de visualiser plus facilement l'amplitude de la décomposition à diamètres. Il est important de remarquer que ce dernier diagramme peut aussi être tracé en exploitant les résultats de l'identification modale (déformées modales) afin de déterminer les composantes prépondérantes du mode en question (cette représentation est amplement exploitée en section VI.3).

À la suite des explications sur la méthode de tracé, le diamètre nodal et le type d'onde générée sont aisément identifiables sur les figures VI.6c et VI.6d ainsi que sur celles placées en annexe pour les excitations contra-rotative (D.3c et D.3d) et stationnaire (D.4c et D.4d). De plus, ces différentes figures permettent une meilleure visualisation du lien entre l'équation (VI.1) et la propagation de l'excitation détaillée plus haut dans cette sous-section.

Il est possible de remarquer que ces excitations, issues des retours en tension de l'excitation lors d'essais en rotation, sont quasi-parfaites puisque concentrées sur le diamètre nodal et l'onde souhaités.

Types de signaux d'excitation. En fonction du type d'essais réalisé et du protocole expérimental adopté, décrit en sous-section VI.1.3, plusieurs signaux d'excitation peuvent être nécessaires afin d'optimiser le temps d'essais. À l'instar des signaux permettant l'excitation du système {aube+mors}, deux principaux signaux d'excitation sont générés dans le cas des essais en rotation de la soufflante : le premier est un signal large bande *pseudo-random* permettant l'excitation de la structure sur une plage fréquentielle importante tandis que le second est un sinus balayé discret permettant de concentrer l'excitation sur des fréquences discrètes successives.

Le signal *pseudo-random* permet de répartir l'énergie vibratoire sur une large plage fréquentielle dans le but d'exciter simultanément les différents modes ciblés et ainsi réduire le temps d'essais. Cependant la faible énergie vibratoire délivrée sur chaque raie fréquentielle ne permet pas de révéler les non-linéarités émanant de la soufflante.

Le signal *pseudo-random* est un signal dit multi-sinus à phases aléatoires et est régi par l'équation (VI.2), fondée sur l'équation (VI.1) autorisant une excitation à diamètres de la soufflante.

$$v_j(t) = \sum_{k=\omega_1}^{\omega_2} v_{\text{co}} \sin(\omega_k t - \varphi_j + \phi_k) + v_{\text{contra}} \sin(\omega_k t + \varphi_j + \phi_k) \tag{VI.2}$$

avec $\varphi_j = \frac{2\pi j N_{\text{D}}}{N}$.

De plus, ω_k est l'une des pulsations du multi-sinus comprise entre ω_1 et ω_2. ϕ_k est une phase aléatoire attribuée à chacun des sinus contenus dans le signal *pseudo-random*.

Par rapport aux autres excitations large bande tels les signaux *random* (*pure random*, *burst random*, *continuous random*, *periodic random*, ...), la fonction de réponse fréquentielle acquise à la suite d'une excitation au moyen d'un signal *pseudo-random* est très peu distordue par le phénomène de fuite spectrale et ne nécessite donc pas de fenêtrage du signal de réponse. De plus, grâce à cette excitation, le signal de réponse offre un excellent rapport signal / bruit [170].

D'un point de vue implémentation, les dix-huit signaux *pseudo-random* sont créés dans le domaine fréquentiel avant d'être convertis dans le domaine temporel par l'intermédiaire d'une transformée de Fourier rapide [35].

Néanmoins, ce signal d'excitation n'est pas employé durant les essais en rotation de la soufflante car les signaux de réponse des aubes, excitées au moyen de signaux large bande, ne sont pas exploitables en raison de leur faible amplitude de réponse en comparaison du bruit renfermé dans le signal de réponse. De plus, la faible sensibilité des jauges de déformation positionnées sur la soufflante ne favorise pas l'emploi de ce signal d'excitation.

La recherche des fréquences de résonance des modes de vibration ciblés, objectif principal d'un essai au moyen d'une excitation large bande, est ainsi effectuée au moyen d'un sinus balayé discret, décrit ci-dessous.

À l'image de l'excitation du système {aube+mors} au voisinage des résonances dans le chapitre V, l'excitation de la soufflante est réalisée par l'intermédiaire d'un signal sinus balayé discret afin de concentrer toute l'énergie d'excitation sur une seule raie fréquentielle à la fois. Ce signal d'excitation autorise ainsi l'obtention de réponses forcées permettant de révéler les non-linéarités émanant de la soufflante. En chaque point de fréquence, l'excitation est gouvernée par l'équation (VI.1).

La sélection des différents paramètres des signaux sinus balayé discret, tels que le pas fréquentiel ou le nombre de cycles d'attente, en fonction de la famille du mode de vibration et de la vitesse de rotation de la soufflante est détaillée en sous-section VI.1.3.

Par ailleurs, une seconde méthode d'excitation par sinus balayé discret a été implémentée dans le programme d'acquisition et de génération. Celle-ci, fondée sur le papier de Friswell & Penny [60], permet d'optimiser le nombre de cycles d'attente, n_{a} (paramètre exposé dans le chapitre V et en sous-section VI.1.3), pour chaque raie fréquentielle en exploitant un critère en amplitude. Ce dernier compare l'amplitude de la réponse fréquentielle de chaque cycle d'attente afin de déterminer si le régime quasi-permanent de vibration est atteint et ainsi prévenir les distorsions de la réponse forcée liées à ce phénomène, tout en réduisant le temps d'essais au strict minimum.

En pratique, le bruit contenu dans les signaux provenant des jauges de déformation ne permet pas la validation de ce critère en amplitude pour passer à la fréquence d'excitation suivante. Cette technique d'optimisation du nombre de cycles n'est donc pas exploitable pour cette application.

Plusieurs points généraux peuvent être précisés concernant la génération des signaux d'excitation.

La fréquence d'échantillonnage de génération est de 10 kHz, ce choix étant issu d'un compromis entre la qualité d'excitation des modes de vibration ciblés et la capacité de calcul de la machine accueillant le programme d'acquisition et de génération.

Chaque fréquence contenue dans les signaux d'excitation est un sous-multiple de la fréquence d'échantillonnage d'acquisition des jauges de déformation de la soufflante (pour rappel, celle-ci est de 2 kHz). Cette pratique permet de concentrer l'énergie de vibration sur la raie fréquentielle excitée et ainsi ne pas la répartir sur les raies fréquentielles adjacentes.

De plus, au début d'une excitation, l'amplitude du signal est progressivement augmentée (de façon sinusoïdale) jusqu'à la consigne demandée. À la fin de celle-ci, l'amplitude du signal est progressivement diminuée jusqu'à zéro.

1.3 Méthodes expérimentales

L'objectif des méthodes expérimentales demeure l'obtention de mesures fiables, précises et comparables avec les résultats issus des simulations numériques non-linéaires exposées en section VI.2. Les méthodes détaillées dans ce chapitre reprennent la majorité des techniques exposées dans le chapitre V de manière plus approfondie que précédemment en raison de la plus grande complexité des essais réalisés.

Dans un premier temps, le protocole expérimental employé durant ces essais en rotation est exposé. Dans un deuxième temps, l'analyse des données par identification modale, au moyen de la méthode LSRF développée dans le chapitre V, des fonctions de réponse fréquentielle expérimentales est appliquée dans le cadre de ces essais en rotation. Pour conclure la qualité des mesures est explicitée et mise en avant dans cette dernière sous-section.

1.3.1 Protocole expérimental

Cette sous-section concernant le protocole expérimental employé durant ces essais en rotation est divisée en trois parties. La première explicite les essais productifs réalisés ainsi que les différents paramètres contrôlés et étudiés, susceptibles d'influencer la dynamique de la soufflante. La deuxième partie détaille les essais de prospection permettant de fixer les paramètres d'excitation. La dernière partie décrit les essais de répétabilité validant les essais productifs et les critères de répétabilité employés.

Essais productifs et paramètres d'influence. Le nombre de paramètres influençant la dynamique de la soufflante en rotation conditionne la quantité d'essais à réaliser dans le but de caractériser dynamiquement la soufflante de façon complète. Afin de conserver une quantité raisonnable d'essais à réaliser, des choix quant à la plage de variation des paramètres à étudier et le nombre de points de mesure pour chacun de ces paramètres sont nécessaires. Parmi ceux-ci, la famille du mode de vibration, la vitesse de rotation, le diamètre nodal excité, le sens de propagation de l'excitation ainsi que l'amplitude de

vibration sont considérés. Dans la suite de ce mémoire, un essai est considéré comme la mesure d'une réponse forcée pour un jeu donné de paramètres.

De plus, dans le but de caractériser finement la dynamique linéaire et non-linéaire de la soufflante en rotation, deux types d'essais sont réalisés.

Le premier consiste à exciter la soufflante au moyen d'une excitation permettant de forcer un mode particulier de la soufflante et ainsi étudier sa réponse non-linéaire. Ce type d'essais avec excitations multipoints est nommé essai à diamètres.

Le second permet à la fois d'étudier l'interaction dynamique entre les aubes mais aussi d'exciter tous les diamètres de concert (à la manière d'une excitation large-bande spatiale). Cet essai est exécuté en excitant une seule aube tout en mesurant la réponse sur toutes les aubes de la soufflante en rotation. Ce type d'essais avec excitation localisée est nommé essai aube par aube.

Pour ces deux types d'essais, tous les paramètres expérimentaux à étudier sont proposés dans le tableau VI.1.

	Essais à diamètres	Essais aube par aube
Famille de mode de vibration	1F, 2F	1F, 2F
Vitesse de rotation [%]	30, 50, 70	30, 50, 70
Diamètre nodal	2, 3, 4	—
Tension d'excitation [V]	1F : 20, 40, 80, 120 2F : 20, 40, 60, 80	1F : 40, 80, 120 2F : 40, 60, 80

Tableau VI.1 – Récapitulatif des paramètres expérimentaux étudiés

Chaque famille de modes de vibration (familles du premier et du deuxième mode de flexion) est testée pour trois vitesses de rotation et trois diamètres nodaux (dans le cas des essais à diamètres). Quatre tensions différentes sont appliquées aux actionneurs piézoélectriques excitant la soufflante (trois dans le cas des essais aube par aube).

La plage de vitesse de rotation étudiée est située au centre de la plage de vitesse admissible par la soufflante. Cette gamme de vitesse de rotation permet ainsi de réaliser des essais pour plusieurs efforts centrifuges et plusieurs efforts de contact entre les aubes et le disque.

Les vitesses de rotation inférieures à 30 % du régime nominal de fonctionnement de la soufflante ne sont pas étudiées puisque plusieurs modes de suspension de la machine sont présents dans cette plage. Les vitesses de rotation au-delà de 70 % sont exploitées au minimum afin de préserver l'instrumentation. D'autre part, les effets non-linéaires sont moins prononcés au-delà.

De plus, les vitesses de rotation sélectionnées ne sont pas proches de coïncidences fréquentielles, comme indiqué en figure I.18 du chapitre I, ce qui permet de ne pas perturber la dynamique de la soufflante par une excitation supplémentaire.

Seuls les diamètres nodaux deux, trois et quatre sont étudiés dans cette configuration. En effet, les fréquences propres de ces diamètres nodaux sont susceptibles d'être situées dans des zones de coïncidence fréquentielle avec un harmonique moteur du turboréacteur en fonctionnement. De plus, certains de ces diamètres nodaux ont été identifiés par Safran Aircraft Engines lors de l'apparition de phénomènes de flottement et de décollement tournant (exposés dans le chapitre I) durant des essais moteurs. Il est donc intéressant d'étudier la réponse de la soufflante lorsque celle-ci est excitée par un schéma à deux, trois

ou quatre diamètres nodaux.

En pratique, les diamètres nodaux zéro et un ont été testés mais écartés de l'étude puisque leurs fréquences de résonance (plus élevées que celle des autres diamètres) ainsi que la surveillance de la dynamique du véhicule d'essais ont révélé un fort couplage avec le véhicule. En effet, ces modes à diamètres nécessiteraient une modélisation de la soufflante étendue jusqu'au véhicule d'essais afin de pouvoir effectuer une comparaison rigoureuse entre les essais et les simulations.

Il est possible de remarquer dans le tableau VI.1 que le type d'onde n'est pas mentionné. Dans l'intention de réduire la quantité d'essais à réaliser, seules des excitations co-rotatives sont exécutées durant cette campagne. Ce choix est guidé par la volonté de reproduire une excitation de même nature que celle rapportée par Safran Aircraft Engines en fonctionnement.

Par ailleurs, quelques excitations contra-rotatives et stationnaires ont été toutefois générées dans le but de comparer les réponses forcées.

Les tensions maximales d'excitation, à savoir 140 V et 80 V respectivement pour les familles du premier et du deuxième mode de flexion, résultent des limites de l'amplificateur (exposées dans le chapitre V). Quatre excitations sont réalisées pour chaque diamètre nodal étudié ce qui permet de discrétiser correctement l'intervalle d'amplitude d'excitation possible et ainsi évaluer plus précisément la dynamique non-linéaire de la soufflante en rotation. Les essais aube par aube contiennent moins de tensions d'excitation puisque l'étude de la dynamique non-linéaire n'est pas l'objectif principal de ces derniers.

Les essais aube par aube sont réalisés pour une excitation de l'aube n°16 (en respectant la numérotation de la figure VI.3). De plus, ces essais sont reproduits pour une excitation de l'aube n°2 afin d'étudier de manière plus approfondie l'interaction dynamique entre les aubes. Ces deux aubes ont été sélectionnées pour leur importante amplitude de réponse à une excitation localisée, évaluée durant la précédente configuration testée, ainsi que pour la distance entre celles-ci sur la soufflante.

Essais de prospection. En amont des essais productifs détaillés dans le paragraphe précédent, les paramètres associés aux signaux d'excitation, tels que l'intervalle fréquentiel d'excitation, le pas fréquentiel ou le nombre de cycles d'attente, nécessitent d'être optimisés durant des essais de prospection afin de déceler le meilleur compromis entre précision de la solution et temps d'expérimentation.

Tout d'abord, à l'instar des essais de prospection exécutés durant la campagne d'essais sur mors, il est nécessaire de définir la plage d'excitation au voisinage des résonances de l'essai en question.

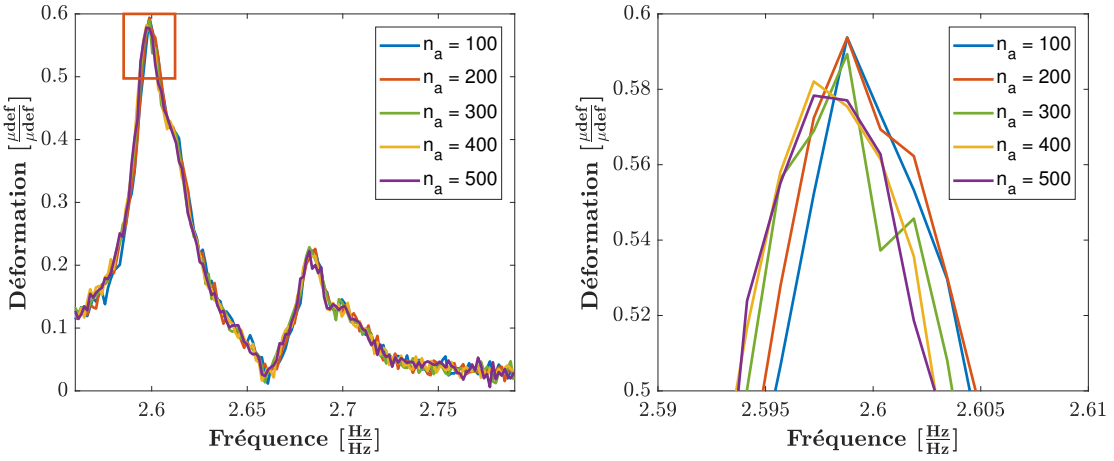
Cette étape de prospection des résonances est réalisée par l'intermédiaire d'un sinus balayé discret dont le pas fréquentiel (différence entre deux fréquences d'excitation successives) est grossier afin de réduire le temps de prospection. Cette étape est réalisée pour chaque diamètre nodal de chaque vitesse de rotation et chaque famille de mode de vibration.

L'application correcte de la méthode du sinus balayé discret est compatible avec la comparaison de simulations numériques en régime permanent, telles celles réalisées au moyen de la méthode de l'équilibrage harmonique, mais nécessite des paramètres de balayage adaptés [55, 66, 80]. Toutefois, aucune référence dans la littérature ne permet d'évaluer

ces paramètres dans le cas non-linéaire. Par conséquent, il est nécessaire de réaliser des essais de prospection qui permettent d'obtenir le pas fréquentiel et le nombre optimal de cycles d'attente [4] n_a.

Le critère de sélection du pas fréquentiel consiste à estimer le nombre de points de mesure contenus dans la bande à $-3\,\mathrm{dB}$ du pic de résonance dont l'amplitude est prépondérante par rapport aux autres. Afin que le pas fréquentiel soit validé pour l'essai en question, au moins cinq points de mesure doivent être compris dans la bande à $-3\,\mathrm{dB}$; en moyenne huit points sont retenus. Ce critère permet une description minimale des résonances afin de permettre l'identification des paramètres modaux, détaillée en sous-section suivante.

La recherche du nombre de cycles d'attente optimal permet de prévenir les distorsions de la réponse forcée pouvant apparaître lorsque le balayage est trop rapide tout en optimisant le temps d'essais requis. Cette prospection est effectuée en excitant la structure en rotation durant un nombre important de cycles (un cycle correspondant à une période d'excitation) avant de dépouiller *a posteriori* la réponse dynamique de cet essai pour chaque centaine de cycle d'attente. Le nombre de cycles n_a est validé lorsque la différence en fréquence et en amplitude de vibration (du mode dont l'amplitude de réponse est la plus importante de la réponse) entre chaque centaine de cycle d'attente est inférieure à un seuil défini. Ce seuil est choisi afin que les variations en fréquence et en amplitude soient très inférieures à celles des phénomènes étudiés. La sensibilité de la réponse forcée par rapport au nombre de cycles est exposée en figure VI.7.



(a) Amplitude (b) Agrandissement au voisinage de la résonance

FIGURE VI.7 – Influence du nombre de cycles d'attente sur la réponse forcée de l'aube présentant la plus forte amplitude de déformation (pour la famille du deuxième mode de flexion et $\Omega = 30\,\%$)

Les prospections de paramètres d'excitation optimaux (pas fréquentiel et nombre de cycles d'attente) sont réalisées pour chacune des vitesses de rotation de chaque famille de modes. Il a été validé durant ces essais en rotation que le diamètre nodal excité n'influence pas le nombre de cycles d'attente. De plus, la soufflante est excitée au moyen d'une tension de faible amplitude, aboutissant donc à un amortissement modal de la structure le plus faible possible, ce qui majore théoriquement le nombre de cycles d'attente nécessaires en

4. Le nombre de cycles d'attente est un paramètre défini dans le chapitre V

fonction du niveau d'excitation.

Le tableau VI.2 contient le pas fréquentiel et le nombre de cycles d'attente joués pour chacune des vitesses de rotation de chaque famille de modes de vibration. Ces paramètres sont proposés pour les essais à diamètres ; les paramètres pour les essais aube par aube ont aussi été optimisés et sont similaires à ces premiers mais ne sont pas proposés dans ce mémoire.

	famille du mode 1F			famille du mode 2F		
	30 %	50 %	70 %	30 %	50 %	70 %
Pas fréquentiel [Hz]	0.05	0.05	0.04	0.1	0.1	0.1
Nombre de cycles n_a	300	300	400	400	400	400

Tableau VI.2 – Paramètres des signaux d'excitation employés

Le tableau VI.2 permet de noter que le nombre de cycles d'attente augmente et que le pas fréquentiel diminue en fonction de la vitesse de rotation, ce qui est dû à la diminution du taux d'amortissement (exposée en section VI.3) en fonction de ce même paramètre.

À la suite de cette étape de prospection des paramètres d'excitation optimaux, les essais productifs peuvent être réalisés. D'un point de vue terminologique, lorsqu'un essai productif est réalisé au moyen des paramètres optimaux déterminés par l'intermédiaire des essais de prospection, à savoir la plage fréquentielle, le pas fréquentiel et le nombre de cycles d'attente, cet essai est dit validé.

Essais de répétabilité. Les essais de répétabilité sont réalisés à la suite des essais productifs (de quelques heures ou jusqu'à plusieurs jours après ceux-ci). Ceux-ci sont motivés par le besoin d'évaluer la fiabilité des résultats ainsi que la maîtrise des conditions, le suivi de l'évolution du système et donc, finalement, la cohérence de l'ensemble des résultats recueillis au cours de la campagne. L'évolution possible est liée au fait d'étudier un système frottant donc potentiellement sujet à une usure et une modification dans le temps.

La répétabilité des essais est vérifiée pour chacun des diamètres nodaux de chaque vitesse de rotation des familles de modes de vibration ciblées à une valeur médiante du niveau d'excitation. Pour valider cette répétabilité, un critère arbitraire en amplitude a été mis en place : la différence d'amplitude entre les réponses forcées des deux essais doit être inférieure à 10 %. Ce seuil permet de catégoriser les essais comme répétables ou non-répétables. L'essai de répétabilité peut être reconduit en cas d'échec après une recherche de causalité et dans une certaine limite. Seuls les essais répétables sont exploités et comparés avec les simulations numériques.

Afin d'illustrer ce critère, les réponses forcées en amplitude d'un essai de répétabilité et sa mesure initiale sont superposées en figure annexe D.5 pour un essai répétable et en figure annexe D.6 pour un essai non-répétable.

Au total, plus de 130 essais productifs validés et catégorisés comme répétables ont été réalisés pour cette configuration de la soufflante. À ces essais productifs, s'ajoutent plus de 60 essais de prospection des paramètres d'excitation et plus de 60 essais de répétabilité. Il est à noter que la totalité des essais contenus dans la matrice d'essais, exposée dans le tableau VI.1, a été validée et répétée.

40 heures de rotation de la machine ont été nécessaires afin de compléter la matrice

d'essais de cette configuration. Naturellement, ces 40 heures n'incluent ni la mise en route du banc, ni la mise sous-vide de celui-ci, ni les dépouillements des essais dont l'étape d'identification des paramètres modaux est abordée dans la sous-section suivante.

1.3.2 Identification modale

L'identification des paramètres modaux [55, 61, 145] issus des nombreux essais productifs réalisés sur la soufflante en rotation est une étape cruciale du dépouillement des résultats de la campagne d'essais. En effet, la précision de l'extraction des paramètres modaux, qui sont principalement la fréquence propre Ω, le taux d'amortissement ξ, les facteurs de participation modale $\boldsymbol{\ell}$ et les amplitudes modales $\boldsymbol{\alpha}$, doit permettre de mettre en évidence les sensibilités par rapport aux grandeurs d'influence et de confronter ces données avec les simulations numériques. Pour rappel, les objectifs principaux de cette campagne demeurent la caractérisation de l'amortissement (structural et non-linéaire) et du désaccordage de la soufflante en rotation.

Une méthode classique d'identification à $-3\,\mathrm{dB}$ [55] n'est pas efficace afin d'extraire les paramètres modaux des essais dynamiques réalisés sur la soufflante en rotation puisque cette méthode ne permet pas d'identifier globalement (toutes les voies simultanément) ces derniers. De plus, la densité modale des réponses mesurées expérimentalement permet rarement de distinguer particulièrement une résonance ce qui est rédhibitoire dans l'emploi de cette technique à $-3\,\mathrm{dB}$.

La méthode LSRF [167], exposée en détail dans le chapitre V, est plus adaptée afin d'extraire précisément les paramètres modaux des fonctions de réponse fréquentielle résultant des essais en rotation. En effet, cette technique permet d'extraire les paramètres modaux globalement en prenant en compte plusieurs modes (aussi appelée technique MIMO pour *Multiple-Input Multiple-Output* en anglais). Ainsi, il est possible d'identifier les paramètres modaux de tous les modes d'intérêt contenus dans la bande fréquentielle étudiée ainsi que leur décomposition à diamètres puisque ceux-ci sont identifiés globalement.

Tous les essais productifs et les essais de répétabilité sont dépouillés au moyen de la méthode LSRF sur toute la plage fréquentielle excitée. Les fonctions de réponse fréquentielle des jauges n°2 ne sont pas traitées car celles-ci présentent un rapport signal sur bruit plus faible que celles des jauges n°1 pour les familles de modes ciblées (familles du premier et du deuxième mode de flexion), c'est pourquoi les fonctions de réponse fréquentielle des jauges n°1 sont privilégiées.

Le choix du nombre de modes à identifier pour chaque essai dépouillé est déterminant. Cette sélection peut être difficile à effectuer puisque tous les modes ne sont pas repérables au premier aperçu des fonctions de réponse fréquentielle [5]. De plus, le nombre de modes à identifier est différent pour chaque essai vibratoire analysé. Toutefois, les modes dont la composante à diamètres prépondérante correspond à celle de l'excitation sont identifiés en priorité. Par exemple, le(s) mode(s) à deux diamètres nodaux sont identifiés en priorité lors du dépouillement d'un essai réalisé au moyen d'une excitation à deux diamètres nodaux.

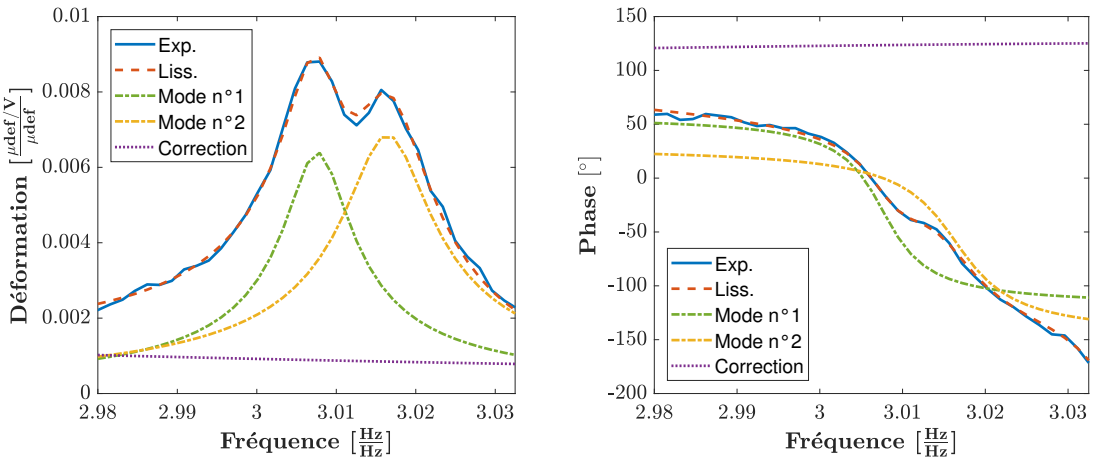
Une illustration du lissage des fonctions de réponse fréquentielle, correspondant à l'essai dans la plage fréquentielle de la famille du deuxième mode de flexion pour une excitation à trois diamètres nodaux à une tension de $60\,\mathrm{V}$ et une vitesse de rotation de $70\,\%$, est présentée en amplitude et en phase dans les figures D.7 et D.8, respectivement. Il est

5. Il est à noter qu'il existe des techniques d'indicateur modal, telle la méthode MMIF [236] (pour *Multivariate Mode Indicator Function* en anglais), qui n'ont pas été exploitées ici

possible de remarquer une parfaite superposition des fonctions de réponse fréquentielle expérimentales et lissées sur ces deux figures traduisant une faible incertitude de lissage et permettant ainsi de constater la capacité du modèle de réponse à bien représenter les données expérimentales.

À ces fonctions de réponse fréquentielle expérimentales et lissées sont ajoutées les fonctions de réponse fréquentielle lissées sans prendre en compte les résidus extra-bande. Comme indiqué dans l'équation (V.5), ces résidus extra-bande incluent classiquement un terme en basse fréquence ρ_0/ω^2 et un terme en haute fréquence $\boldsymbol{\rho}_\infty$. Ceux-ci permettent de prendre en compte les participations modales des modes non-résonnants en dehors de la bande mais aussi des participations parasites tels les effets de perturbation électromagnétique [9, 42] (notamment au moyen du terme constant car la plage de fréquence excitée est étroite). Il est possible de remarquer en figures D.7 et D.8 que des écarts apparaissent entre les deux fonctions de réponse fréquentielle lissées avec et sans résidus extra-bande pouvant ainsi révéler la présence de parasites tels les phénomènes de perturbation électromagnétique, exposés en sous-section 1.3.3.

Par ailleurs, une décomposition des modes identifiés lors du dépouillement de l'essai en figures D.7 et D.8 est exposée en figure VI.8 pour l'aube n°12. Les fonctions de réponse fréquentielle sont agrandies au voisinage des modes présentant les amplitudes de déformation les plus importantes, notés respectivement mode n°1 et mode n°2. De plus, la correction du lissage au moyen des résidus extra-bande en haute et basse fréquence (dont la participation est faible pour cette aube) est tracée.



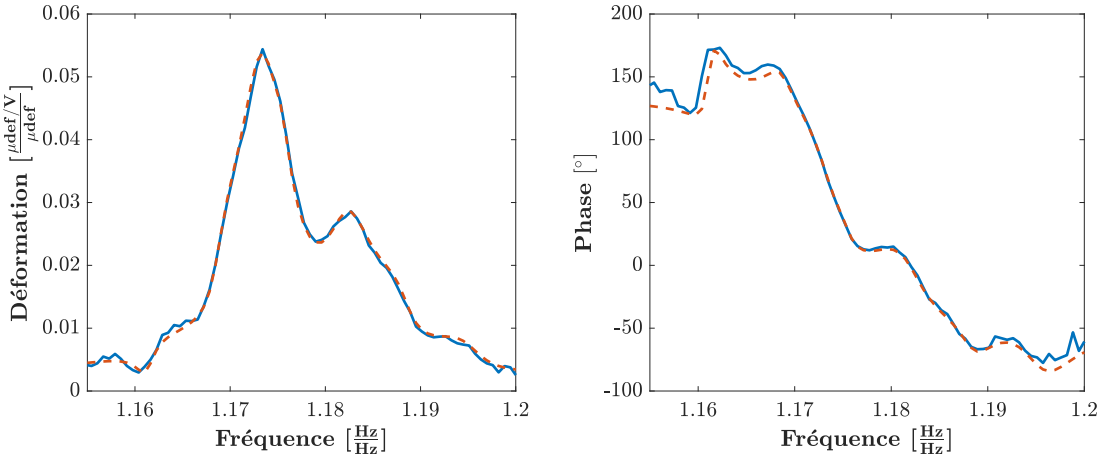
(a) Amplitude (b) Phase

Figure VI.8 – Analyse modale de la fonction de réponse fréquentielle de l'aube n°12 de l'essai traité en figure D.7 (7 pôles identifiés)

Comme illustrée en amplitude et en phase, respectivement en figures D.9 et D.10, pour un essai dans la plage fréquentielle de la famille du premier mode de flexion pour une excitation à deux diamètres nodaux à une tension de 80 V et une vitesse de rotation de 70 %, l'identification des paramètres modaux des modes de la famille du premier mode de flexion est plus complexe que celle du deuxième mode de flexion. En effet, l'incertitude de lissage est beaucoup plus importante. Cette difficulté d'identification peut être attribuée à la très forte densité modale de la famille du premier mode de flexion ainsi qu'à l'effet non-linéaire (plus important pour dette dernière) pouvant mettre en défaut le modèle linéaire de réponse fréquentielle. Par ailleurs, la densité modale des familles des deux premiers modes de flexion est abordée en section VI.3.

Pour pallier cette difficulté d'identification des modes de la famille du premier mode

de flexion, une seule aube est identifiée localement : celle dont l'amplitude de déformation est la plus importante pour chaque essai dépouillé. Cette stratégie d'identification pour les modes de la famille du premier mode de flexion permet ainsi d'améliorer l'identification modale de la fonction de réponse fréquentielle présentant l'amplitude de déformation la plus élevée de toutes comme le révèle la figure VI.9 (faisant partie du même essai identifié en figures D.9 et D.10) sur laquelle les fonctions de réponse fréquentielle expérimentale et lissée sont superposées. Cependant, cette stratégie n'autorise pas l'étude de la décomposition à diamètres des modes identifiés puisque le dépouillement ainsi réalisé est local.



(a) Amplitude (b) Phase

FIGURE VI.9 – Superposition des fonctions de réponse fréquentielle expérimentale (—) et lissée (- -) de l'aube n°2 de la figure D.9 pour la famille du premier mode de flexion (11 pôles identifiés)

Pour conclure cette sous-section consacrée à l'identification modale des essais en rotation, il est nécessaire de mentionner l'incertitude liée à l'identification des paramètres modaux. En effet, l'incertitude de lissage entre les fonctions de réponse fréquentielle expérimentale et lissée ne suffit pas à décrire l'incertitude issue de l'évaluation des paramètres modaux. Afin d'évaluer cette dernière, plusieurs méthodes sont envisagées.

La première technique consiste à identifier les essais de répétabilité puis à les confronter aux paramètres modaux obtenus avec les essais productifs. Toutefois, cette technique d'estimation porte sur des échantillons de taille très réduite et n'offre donc pas une représentativité robuste de l'incertitude liée à l'identification modale.

La seconde stratégie d'évaluation de l'incertitude d'identification modale, et celle privilégiée ici, repose sur l'identification modale de la fonction de réponse fréquentielle de chaque aube localement. Chacune d'entre elles est lissée en faisant intervenir un nombre de modes différents permettant de minimiser l'incertitude de lissage sur chacune des aubes. Dix-huit fréquences propres et taux d'amortissement sont ainsi extraits des dix-huit identifications modales locales, les modes étant regroupés en fonction de la proximité de leur fréquence propre et de leur amplitude modale maximale. En théorie, les mêmes fréquences propres et taux d'amortissement devraient être estimés sur la fonction de réponse fréquentielle de chaque aube. Les dispersions de chaque paramètre modal résultant de cette stratégie d'évaluation sont exploitées comme l'incertitude d'identification modale qui est, par la suite, évaluée au moyen de l'écart-type de chacun des paramètres modaux (l'écart-type permet de pondérer les valeurs incohérentes au contraire de la méthode min-max). Toutefois, ces dispersions ne proviennent pas seulement de l'identification modale mais peuvent aussi comprendre d'autres effets, comme une dispersion au niveau de l'instrumen-

tation entre chaque aube, qui sont donc inclus dans cette incertitude.

Il est à noter que l'incertitude issue de l'identification de l'amplitude modale maximale $\boldsymbol{\alpha}$ est évaluée par rapport aux essais de répétabilité (bien que le nombre de mesures répétées soit faible).

Ces estimations de l'incertitude d'identification sont effectuées pour chaque diamètre nodal excité (de chaque vitesse de rotation, de chaque famille de modes excitée). Ces incertitudes sont donc généralisées pour les différentes tensions d'excitation.

Les incertitudes évaluées sur les fréquences propres identifiées sont très faibles : celles-ci sont inférieures à 0.2 % de la valeur moyenne de toutes les aubes pour la famille du premier mode de flexion et inférieures à 0.1 % pour la famille du deuxième mode de flexion.

Toutefois, elles sont bien plus importantes concernant le taux d'amortissement : celles-ci sont inférieures à 35 % et 25 % de la valeur moyenne de toutes les aubes pour la famille du premier mode de flexion et la famille du deuxième mode de flexion, respectivement.

Concernant les amplitudes modales, les incertitudes sont inférieures à 15 % de la valeur moyenne pour la famille du premier mode de flexion et inférieures à 10 % pour la famille du deuxième mode de flexion.

Il est possible de remarquer que les incertitudes d'identification sont plus faibles pour la famille du deuxième mode de flexion comparées à la famille du premier mode de flexion. Cette différence est imputable à la forte densité modale de la famille du premier mode de flexion ainsi qu'à l'effet non-linéaire (plus important pour la famille du premier mode de flexion) pouvant mettre en défaut le modèle linéaire d'identification, comme explicité plus haut.

Les différentes incertitudes, incluant celle d'identification modale (estimée dans cette sous-section) et celle de mesure (évaluée en sous-section 1.3.3), sont tracées sur les figures de comparaison entre les essais en rotation et les simulations numériques de la section VI.3.

1.3.3 Qualité de la mesure

La qualité des résultats expérimentaux dépend en majeure partie de la qualité des mesures réalisées au même titre que de l'identification modale des réponses. En plus d'un protocole expérimental précis et complet, proposé en sous-section 1.3.1, permettant de limiter les distorsions de la réponse liées à l'excitation et d'assurer la validité et la répétabilité des résultats, une excellente qualité de mesure résulte de la maîtrise des conditions et des perturbations expérimentales, associées à l'essai et à l'excitation de la structure. Quand bien même certaines grandeurs ne sont pas maîtrisées, il est essentiel d'évaluer si leur influence sur la dynamique peut être considérée comme négligeable par rapport aux effets étudiés, tel l'effet non-linéaire par exemple.

Cette sous-section permet ainsi d'aborder les conditions expérimentales dans laquelle la soufflante en rotation est testée ainsi que les perturbations pouvant affecter la mesure et notamment les perturbations électromagnétiques. La dernière partie de cette sous-section traite des incertitudes expérimentales liées à la mesure expérimentale

Conditions expérimentales. La vitesse de rotation, la pression de l'air et la température demeurent les principales conditions expérimentales affectant la soufflante à l'intérieur de l'enceinte du banc PHARE#1.

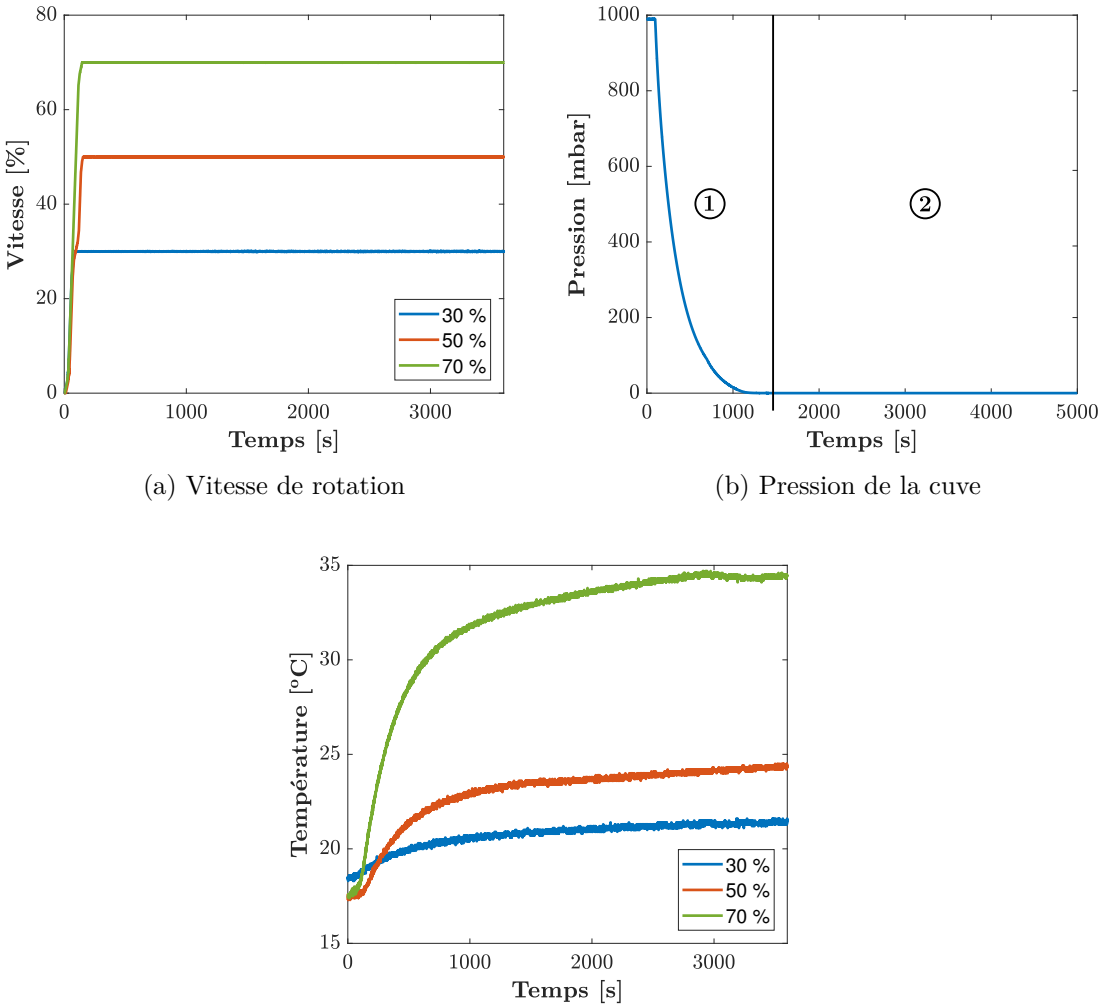
La vitesse de rotation est contrôlée par le variateur du banc d'essais dont la précision est de l'ordre de 1 ‰. La vitesse mesurée et sauvegardée est évaluée au moyen d'un Top-Tour et d'un codeur incrémental. Les mesures sont effectuées à vitesse constante dans la plage autorisée par l'ensemble du système {véhicule d'essais + soufflante}. Par ailleurs, les mesures successives sont toujours effectuées par ordre croissant de régime lors d'une

session.

La pression n'est pas régulée mais poussée à la limite de la performance du banc. Celle-ci dépend de la capacité de pompage ainsi que du taux de fuite de l'enceinte et du joint tournant. La mesure de la pression à l'intérieur de l'enceinte est réalisée au moyen de deux capteurs de pression avec cellule de mesure capacitive. Ces deux capteurs permettent ainsi de couvrir toute la gamme de pression : de la pression ambiante à la pression minimale.

La température de la soufflante n'est pas régulée. Elle est mesurée par les thermocouples et la caméra infrarouge, décrits précédemment. De plus, la sonde PT100, dont la position est indiquée en figure VI.5, permet d'évaluer la température à l'intérieur de la cuve. La température de la soufflante dépend directement du niveau de pression, du régime et du temps de rotation. De surcroît, la dissipation thermique au niveau des roulements du véhicule d'essais apporte un flux de chaleur négligeable à la soufflante.

L'évolution de ces principales conditions expérimentales à l'intérieur de l'enceinte sous-vide du banc PHARE#1 durant un essai en rotation d'une heure est représentée en figure VI.10.



(a) Vitesse de rotation

(b) Pression de la cuve

(c) Température de la cuve

FIGURE VI.10 – Évolution des conditions expérimentales du banc PHARE#1

La figure VI.10a permet de constater la stabilité de la vitesse de rotation pour chacun des paliers. En effet, les dispersions, caractérisées par l'écart-type, de cette dernière à partir du palier de vitesse ne dépassent pas 1×10^{-5} % de la vitesse de la rotation après atteinte du palier quelque soit la valeur de celle-ci dans la plage de vitesse de rotation étudiée. Compte-tenu de la sensibilité des fréquences de résonance par rapport à cette grandeur (exposée en section VI.3), la vitesse de rotation peut ainsi être considérée comme constante pendant la mesure.

Le vide minimal de 0.1 mbar à l'intérieur de la cuve est atteint après 23 minutes de pompage comme présenté dans la partie ① de la figure VI.10b ; une fois atteint, celui-ci demeure constant.

Selon des résultats obtenus à partir d'une précédente campagne d'essais sur mors sur une aube de soufflante en composite, l'influence de l'air ambiant sur l'amortissement modal des modes de la famille du premier mode de flexion est faible (différence inférieure à 10 % entre la pression atmosphérique et 0.01 mbar). À partir de ces résultats d'essais, il est possible de conclure que l'influence de la pression résiduelle dans l'enceinte du banc d'essais PHARE#1 est négligeable. Ainsi, l'hypothèse que la soufflante est testée dans des conditions de vide total peut être introduite ce qui permet notamment de simplifier les simulations numériques en négligeant la présence du fluide.

Néanmoins, le résidu d'air peut également donner lieu à des efforts aérodynamiques autres que ceux pris en compte dans les simulations numériques. Il serait intéressant d'évaluer (numériquement ou expérimentalement) leur évolution en fonction de la vitesse de rotation et de la densité du fluide afin de quantifier leur effet sur la dynamique de la soufflante en rotation et comparer celui-ci par rapport aux efforts centrifuges.

La figure VI.10c expose l'évolution de la température à l'intérieur de la cuve (mesurée par la sonde PT100) pour plusieurs vitesses de rotation de la soufflante. La caméra infrarouge indique que la température des aubes de la soufflante (dont la réponse dynamique, et notamment les fréquences de résonance, peuvent être influencées par cette grandeur) est quelques degrés au-dessus de celle de l'air. De surcroît, celle-ci évolue et se stabilise légèrement moins vite que la température mesurée par la sonde PT100. L'indication de la sonde PT100 permet donc de conclure à propos de l'évolution et l'influence de la température sur la soufflante.

La température à l'intérieur de l'enceinte n'étant pas régulée, il est inévitable d'observer une augmentation de celle-ci en fonction du temps. Cette évolution peut être imputée au résidu d'air dans la cuve, air s'échauffant lorsque brassé par la soufflante dans un environnement où l'air est peu renouvelé. De plus, Il est possible de remarquer que plus la vitesse de rotation de la soufflante est importante, plus l'évolution de la température à l'intérieur de l'enceinte l'est aussi. Par ailleurs, un palier de température peut être considéré atteint sur les évolutions de la température de la figure VI.10c.

Bien que la température entre les régimes de rotation soit différente, la sensibilité de la dynamique de la soufflante, et notamment de sa fréquence de résonance [6], à l'évolution de la température est négligeable en comparaison du raidissement de la soufflante en fonction de la vitesse de rotation.

De plus, à l'échelle de temps d'une mesure de la réponse fréquentielle, d'une durée maximale de dix minutes, l'échauffement de l'air dans la cuve est au final peu élevé : inférieur à dix degrés pour une vitesse de 70 %. Compte tenu de cette faible évolution, la sensibilité des fréquences de résonance à la température est aussi négligeable en com-

6. La sensibilité des fréquences propres à l'évolution de la température de la soufflante a été évaluée durant ces essais pour les deux familles de modes étudiées

paraison du décalage fréquentiel lié à la non-linéarité que ces essais (à différents niveaux d'excitation) permettent de mettre en évidence.

En plus des trois grandeurs tracées et étudiées dans cette sous-section, les niveaux vibratoires transverses du rotor ainsi que ceux de la soufflante sont contrôlés avant la mesure pour chaque vitesse de rotation, comme précisé en sous-section VI.1.1. Il est vérifié que la valeur de ceux-ci reste en dessous de seuils, fixés empiriquement, afin de garantir la sécurité de la machine ainsi qu'un impact négligeable de ces niveaux vibratoires sur la mesure et l'étude réalisées. Par ailleurs, les niveaux vibratoires de la soufflante pour un régime de rotation étudié sans excitation sont visibles en figure D.2 placée en annexe D.

Perturbations électromagnétiques. Tous les systèmes électriques et électroniques sont soumis à des perturbations provenant de l'énergie parasite qui franchit d'une manière non intentionnelle leurs frontières. Cette énergie parasite est appelée perturbation électromagnétique [9, 42]. Ces perturbations peuvent se manifester sous la forme d'un bruit électromagnétique, d'un signal non désiré ou d'une modification du milieu de propagation. De plus, celles-ci peuvent provenir de sources diverses et variées.

En effet, tout conducteur traversé par un courant électrique rayonne un champ magnétique $\mathbf{H}$. Si un second conducteur électrique est traversé par ce champ magnétique $\mathbf{H}$, toute variation de $\mathbf{H}$ va induire une force électromotrice dans ce second conducteur, entraînant la circulation d'un courant de perturbation dans celui-ci. Cette perturbation est alors proportionnelle à la variation $^{\mathrm{d}\mathbf{H}}/_{\mathrm{d}t}$.

La compatibilité électromagnétique est la discipline dont l'objectif demeure l'étude des sources (nommées circuits agresseurs dans la discipline) de ces perturbations électromagnétiques ainsi que leur mode de couplage et de propagation mais aussi leurs effets sur les victimes (nommées circuits susceptibles). La modélisation et la prédiction des causes et effets liés à la compatibilité électromagnétique sont des sujets complexes faisant l'objet d'intenses recherches actuellement. Néanmoins, la plupart des résultats sont, pour l'instant, obtenus au moyen d'expérimentations.

En ce qui concerne le banc d'essais PHARE#1, les principales et majeures potentielles victimes de ces perturbations électromagnétiques sont les signaux de mesure et notamment les signaux de mesure de la dynamique des jauges de déformations fixées sur la soufflante. Plusieurs sources sont susceptibles de perturber les signaux de mesure des jauges dynamiques, notamment le moteur électrique entraînant le véhicule d'essais et les signaux de puissance des actionneurs piézoélectriques excitant la soufflante.

Le premier, à savoir le moteur électrique, est à distance des câbles et des systèmes de mesure des jauges. De plus, des essais permettant d'évaluer l'influence du moteur électrique sur les signaux de mesure ont été menés, en comparant les réponses dynamiques pour plusieurs régimes de rotation du moteur et à l'arrêt, sans révéler de perturbations électromagnétiques notables.

Les seconds cheminent à côté des câbles contenant les signaux de mesure pendant une grande partie du trajet (du palier étanche jusqu'aux aubes de la soufflante, comme l'indique le schéma VI.4). Ceux-ci sont donc susceptibles d'apporter des perturbations aux signaux de mesure des jauges.

Des précautions ont été prises dans le but de limiter les perturbations électromagnétiques, notamment de blinder, torsader et relier à une même masse tous les câbles de mesure et de puissance mais aussi de les espacer au mieux malgré les contraintes d'encombrement au sein du toron. Des essais ont, tout de même, été menés afin de contrôler

l'influence des perturbations électromagnétiques dues aux signaux d'excitation sur les signaux de mesure des jauges.

Ces essais sont réalisés pour une soufflante à l'arrêt, un sinus balayé discret parcourt successivement les plages fréquentielles des famille du premier puis du deuxième mode de flexion pour un diamètre nodal de zéro [7] et une même tension d'excitation de 80 V. Les mesures dynamiques effectuées sur les deux jauges sont consignées en figures D.11 et D.12, respectivement pour les familles du premier et du deuxième mode de flexion.

Plusieurs constatations peuvent être extraites de ces figures. Premièrement, les aubes n°4, 5 et 15 présentent d'importants parasites sur les réponses forcées mesurées aussi bien pour la famille du premier mode de flexion que pour celle du deuxième. Il est possible de remarquer sur les figures D.11 et D.12 que l'amplitude des parasites augmente proportionnellement avec la fréquence d'excitation ce qui est caractéristique des perturbations électromagnétiques (celles-ci étant dépendantes du courant d'excitation qui est lui-même proportionnel à la fréquence d'excitation). Un problème d'isolation de ces aubes pourrait être à l'origine de ces perturbations mais une investigation plus approfondie serait nécessaire pour déterminer la cause exacte.

Deuxièmement, sur les aubes en question, les jauges n°2 sont plus soumises aux perturbations électromagnétiques que les jauges n°1. Une explication possible à ce phénomène est le cheminement des câbles des jauges n°2 qui est plus proche des câbles de puissance notamment lors du passage sur les aubes.

Troisièmement, l'amplitude maximale des perturbations électromagnétiques sur les jauges n°1 peut être assimilée à 5 μdef pour la famille du premier mode de flexion tandis qu'elle est de l'ordre de 17 μdef pour la famille du deuxième mode de flexion, tous deux pour une tension d'excitation de 80 V. Ces perturbations sont considérées comme faibles pour la famille du premier mode de flexion car les amplitudes de déformation pour cette famille de modes de vibration sont élevées. Celles-ci sont bien plus importantes en proportion pour la famille du deuxième mode de flexion car les amplitudes de déformation sont plus faibles.

L'identification modale demeure plus complexe sur les aubes les plus touchées par les perturbations électromagnétiques ce qui occasionne une incertitude de lissage plus importante sur les fonctions de réponse fréquentielle de ces mêmes aubes, comme exposé sur les courbes de lissage sans correction extra-bande en figures D.7 et D.8. Toutefois, la correction de l'identification des paramètres modaux au moyen des résidus extra-bande en haute et basse fréquence permet d'évaluer ces perturbations électromagnétiques lors de l'identification modale et ainsi de corriger le lissage, ce qu'il est possible d'observer sur les courbes avec correction extra-bande de ces mêmes figures.

Incertitudes de mesure. De même qu'au chapitre précédent, les incertitudes de mesure sur la fréquence et l'amplitude entachant la mesure de la réponse forcée sont évaluées dans cette sous-section. Le bruit de mesure des composants est une nouvelle fois négligé car celui-ci est faible en comparaison des signaux de mesure et, de surcroît, ardu à déterminer précisément car pouvant intervenir dans la quasi-totalité des composants de la chaîne d'acquisition.

Les incertitudes de mesure sur la fréquence du signal mesuré sont, en très grande partie, imputées à la discrétisation fréquentielle de la réponse car la précision des composants est intimement liée à la cadence de leur processeur qui est très au-delà de la

7. Des essais ont été réalisés pour différents diamètres nodaux : les réponses forcées obtenues sont similaires.

gamme de fréquence étudiée. Comme explicité dans le chapitre précédent, ces incertitudes sont équivalentes à $\pm^{\Delta f}/_{2}$, Δf étant le pas fréquentiel. Dans le cadre de ces essais en rotation, l'incertitude de mesure sur la fréquence est à différencier en fonction des essais réalisés puisque le pas fréquentiel diffère pour chacun d'entre-eux comme indiqué par le tableau VI.2. L'incertitude absolue de mesure est d'environ $\pm 0.025\,\text{Hz}$ pour les essais dans lesquels la famille du premier mode de flexion est excitée tandis qu'elle est de $\pm 0.05\,\text{Hz}$ pour les essais sur la famille du deuxième mode de flexion.

Contrairement aux incertitudes sur la fréquence, les incertitudes de mesure sur l'amplitude du signal mesuré sont dépendantes de la précision des composants mais aussi de la résolution de ces derniers. Les incertitudes de mesure sur l'amplitude de la réponse, liées à la chaîne d'acquisition des jauges de déformation, sont consignées dans le tableau VI.3.

Composant	Origine	Incertitude relative [%]	Incertitude cumulée [%]
Carte d'acquisition	Précision du matériel [156]	$< \pm 1 \times 10^{-5}$	$\approx \pm 0.5$
	Résolution [156]	$< \pm 1 \times 10^{-7}$	
Télémétrie	Tension d'alimentation	± 0.1	
	Précision du matériel [8]	± 0.1	
	Résolution	$< \pm 1 \times 10^{-4}$	
Jauges	Résistance de la jauge C.1	± 0.3	

Tableau VI.3 – Incertitudes de mesure en amplitude de la chaîne d'acquisition des jauges

De plus, des incertitudes peuvent aussi s'introduire dans la mesure du signal de retour d'excitation provenant de l'amplificateur et impactent ainsi directement les fonctions de réponse fréquentielle normalisées par la source de l'excitation (soit le signal de retour en tension de la voie d'excitation de l'aube n°1). Les incertitudes relatives de mesure sur le retour d'excitation en tension et en courant sont toutes deux identiques et sont consignées dans le tableau VI.4.

Composant	Origine	Incertitude relative [%]	Incertitude cumulée [%]
Carte d'acquisition	Précision du matériel [158]	± 0.02	$\approx \pm 1$
	Résolution [158]	$< \pm 1 \times 10^{-7}$	
Amplificateur	Précision	± 1	

Tableau VI.4 – Incertitudes de mesure en amplitude du retour de l'excitation

Bien que ces incertitudes de mesure en fréquence et en amplitude soient faibles par rapport aux incertitudes évaluées lors de l'identification des paramètres modaux, celles-ci sont incluses à celles évaluées en sous-section 1.3.2 et tracées sur les figures de comparaison entre les essais en rotation et les simulations numériques en section VI.3.

8. Donnée non précisée par le constructeur de la télémétrie mais estimée à 0.1 %

2 Simulations numériques non-linéaires d'une soufflante désaccordée

L'aboutissement de ce travail de thèse consiste à confronter les essais en dynamique non-linéaire de la soufflante en rotation à l'intérieur de l'enceinte sous-vide du banc d'essais PHARE#1 avec des simulations numériques en dynamique non-linéaire d'une soufflante complète désaccordée dont le modèle numérique est réduit au moyen de plusieurs techniques. À la suite d'une première section consacrée à la partie expérimentale de cette confrontation, la deuxième section traite nécessairement de l'aspect numérique de cette comparaison.

Le modèle numérique employé ainsi que la phase préparatoire aux simulations numérique sont semblables en de multiples points à ceux exposés dans le chapitre V. De plus, les paramètres fixés grâce aux études d'influence réalisées dans le chapitre précédent sont réemployés dans les simulations numériques en dynamique non-linéaire de cette confrontation.

Le déroulé de cette section se rapproche du plan utilisé dans la deuxième section du chapitre V abordant les simulations numériques non-linéaires d'une aube enchâssée dans un mors. En effet, dans un premier temps, cette section apporte des précisions sur le modèle numérique éléments finis exploité pour représenter le secteur {aube+disque}. Dans un second temps, les méthodes numériques non-linéaires sont abordées et notamment les étapes de réduction des degrés de liberté mécaniques au moyen de la synthèse modale des modes d'interface et de la CNCMS. Pour achever cette section, plusieurs études d'influence avec des distributions de paramètres permettant de désaccorder le modèle numérique (fréquence propre, taux d'amortissement et excitation des aubes) sont proposées.

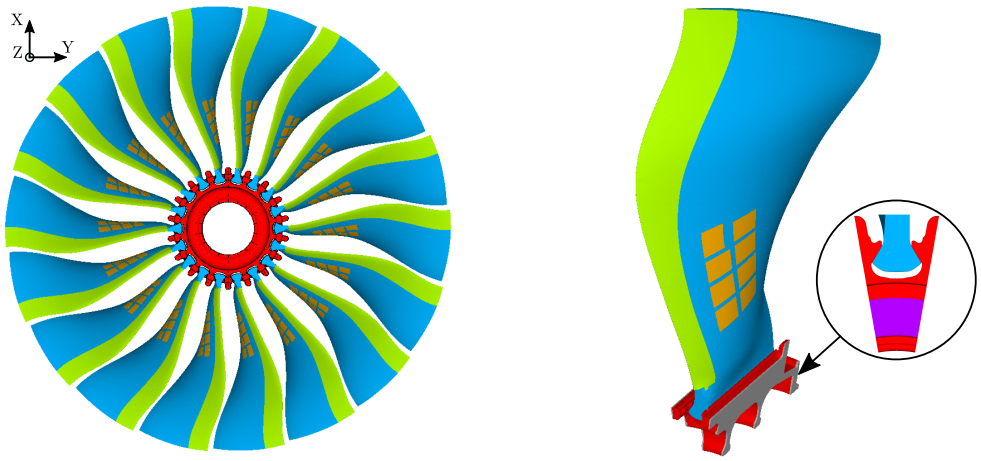
2.1 Modélisation numérique

De façon similaire au modèle numérique du système {aube+mors}, les modèles des aubes composites et du disque, discrétisés au moyen de la méthode des éléments finis, sont des modèles directement exploités dans l'industrie et dont les maillages ont été créés au moyen du logiciel éléments finis ANSYS® (version 16.1).

Une représentation des faces extrados et intrados du modèle numérique du secteur {aube+disque} équipé de ses dix-huit actionneurs piézoélectriques est, respectivement, présentée dans les figures IV.7a et IV.7b du chapitre IV. De plus, le modèle numérique de la soufflante complète munie de ses actionneurs piézoélectriques est représenté en figure VI.11a.

Il est important de noter que seule la soufflante, c'est-à-dire les aubes et le disque, est représentée dans ce modèle numérique. Le véhicule d'essais, permettant de lier la soufflante au banc d'essais PHARE #1 et étant principalement composé d'une ligne d'arbre et de paliers, n'est pas modélisé afin de limiter la taille du modèle numérique, déjà conséquente, comme exposé dans le tableau récapitulatif VI.5.

Le modèle numérique d'une aube dotée de ses actionneurs piézoélectriques est strictement identique à celui décrit dans le chapitre V en termes de géométrie, de matériaux, de discrétisation ou de choix d'éléments aussi bien pour l'aube que pour les actionneurs piézoélectriques. La quantité de degrés de liberté du modèle numérique des aubes et de ses actionneurs est réécrite dans le tableau VI.5.



(a) Soufflante (b) Secteur {aube+disque}

FIGURE VI.11 – Modèles numériques de la soufflante et du secteur {aube+disque} munis des actionneurs piézoélectriques

Le modèle numérique éléments finis du secteur du disque est, quant à lui, composé de 30 892 éléments de type hexaédrique linéaire qui engendrent 37 320 nœuds et 111 960 degrés de liberté mécaniques. Les données matériau du disque correspondent au titane, matériau décrit par des caractéristiques isotropes dans ce modèle numérique. Les conditions aux limites du disque se résument à un blocage des déplacements axiaux et orthoradiaux à l'arrière de celui-ci, zone violette dans l'agrandissement en figure VI.11b.

Les frontières du disque, interfaces entre les différents secteurs et grisées sur la figure VI.11b, sont chacune discrétisées au moyen de 1729 nœuds générant 5187 degrés de liberté mécaniques, soit un total de 3458 nœuds et 10 374 degrés de liberté mécaniques par secteur.

À l'instar de l'aube et des actionneurs, le nombre de degrés de liberté du disque est consigné dans le tableau VI.5.

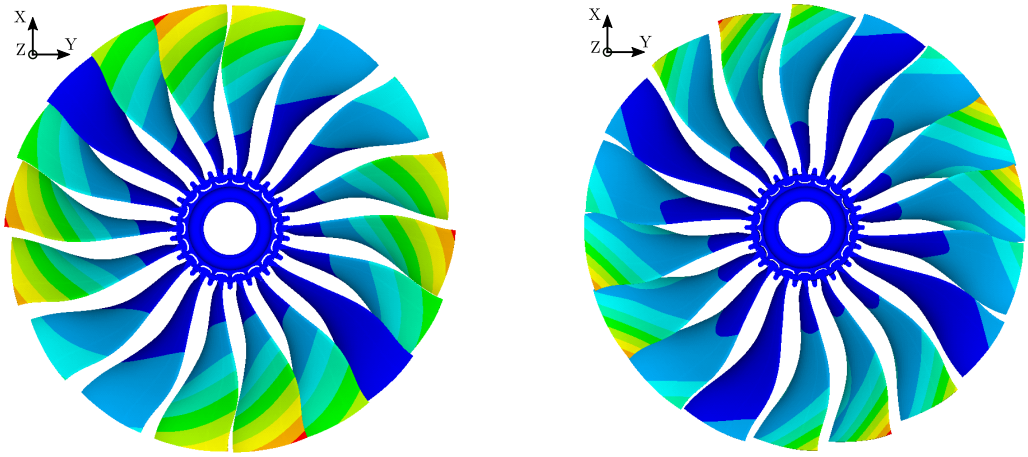
La surface de contact entre l'aube et le disque d'un secteur de la soufflante est plus importante que celle entre l'aube et le mors dans le chapitre précédent. Une rangée supplémentaire de nœuds de contact, n_c, est ainsi insérée selon l'axe Z dans la zone de contact portant le nombre de nœuds composant chacune des portées du modèle numérique éléments finis à 306, soit $n_c = 612$ nœuds par secteur pour un total de 1836 degrés de liberté.

Les éléments employés dans le logiciel ANSYS® pour modéliser le contact sont identiques à ceux de la confrontation essais / calculs du chapitre précédent, à savoir `CONTA173` [6] et `TARGET170` [6] localisés à la surface des éléments hexaédriques linéaires respectivement de l'aube et du disque. De plus, les maillages des portées de contact d'une aube et d'un secteur de disque coïncident afin de résoudre ce problème de contact / frottement grâce à la méthode des Lagrangiens dynamiques (DLFT).

Les cales, décrites en section VI.1 et placées au fond des alvéoles entre le disque et les aubes de façon à plaquer les portées des aubes contre celles des alvéoles lorsque la soufflante est à l'arrêt, ne sont pas prises en compte dans la modélisation numérique. Néanmoins, leur effet sur les aubes lors de la rotation de la machine est reproduit au moyen d'efforts radiaux répartis uniformément sur le dessous des pieds d'aube. Ces efforts radiaux sont égaux aux efforts centrifuges des cales en rotation et sont donc dépendants de la vitesse de

rotation de la soufflante. Ces derniers sont cependant négligeables devant l'effort centrifuge résultant de la rotation de la soufflante.

Par ailleurs, les cartes du déplacement total superposées sur les déformées modales des familles du premier et du deuxième mode de flexion de la soufflante sont exposées en figures VI.12a et VI.12b. Celles-ci sont tracés pour le deuxième diamètre nodal de ces familles de modes de vibration à une vitesse de rotation de 70 % du régime nominal de fonctionnement.



(a) Famille du premier mode de flexion (b) Famille du deuxième mode de flexion

Figure VI.12 – Cartes du déplacement total superposées sur les déformées modales de la soufflante, tracées pour le deuxième diamètre nodal à $\Omega = 70\,\%$ (amplitudes min. ■ et max. ■ en valeur absolue)

Comme exposé en section VI.1, la configuration de la soufflante testée ne contient ni clinquant ni plateforme, ces derniers ne sont donc pas représentés dans le modèle numérique. Par ailleurs, les verrous, permettant de fermer les alvéoles du disque selon l'axe moteur et présents dans cette configuration, ne sont pas modélisés puisque ceux-ci participent très peu à la dynamique de la soufflante. En effet, ceux-ci sont supportés par le disque et ne sont pas en contact avec les aubes.

Nombre de DdL	Aube	Disque	Secteur	Soufflante
Internes	88 521	99 750	188 271	3 388 878
Piézomécaniques	21 420	—	21 420	385 560
Contact	1836	1836	3672	66 096
Frontière	—	10 374	10 374	93 366
Total	111 777	111 960	223 737	3 933 900

Tableau VI.5 – Récapitulatif des dimensions du modèle numérique

Le nombre conséquent de degrés de liberté contenus dans le modèle complet de la soufflante, consigné dans le tableau VI.5, permet d'affirmer que la simulation des réponses forcées non-linéaires d'un tel système par équilibrage harmonique s'avèrerait extrêmement coûteux en termes de temps de calcul. Plusieurs étapes de réduction sont donc nécessaires dans l'obtention de ces réponses forcées et notamment une première réduction au moyen de la méthode de Craig-Bampton, permettant de réduire les degrés de liberté internes. En

outre, compte tenu du nombre de degrés de liberté non-linéaires et de ceux situés sur les frontières, il apparaît qu'une seconde étape de réduction est indispensable. La CNCMS avec double synthèse modale, détaillée dans le chapitre III permet ainsi d'envisager la simulation des réponses forcées non-linéaires en exploitant les ressources de calcul mises à disposition.

2.2 Méthodes numériques non-linéaires

Les différentes méthodes de réduction et de condensation, appliquées au modèle numérique du secteur {aube+disque} et à la soufflante complète, sont exposées dans cette section par ordre chronologique d'application. Ces différentes étapes constituent la phase préparatoire à l'obtention des réponses forcées de la soufflante complète désaccordée en rotation. Par ailleurs, les théories de ces différentes méthodes sont explicitées dans les chapitres III et IV.

Les résultats des études d'influence réalisées sur le système {aube+mors} sont réexploités dans ce chapitre afin de fixer les paramètres des différentes méthodes numériques, notamment en ce qui concerne la discrétisation spatiale de l'épaisseur des actionneurs piézoélectriques, le nombre de nœuds de contact retenus (avec une rangée de nœds en plus), la discrétisation temporelle de la période de la méthode d'alternance temps / fréquence ainsi que le nombre d'harmoniques retenus.

Les premières méthodes exposées dans cette sous-section, jusqu'à l'évaluation des modes complexes non-linéaires, sont similaires à celles appliquées au système {aube+mors} et sont réalisées sur le secteur {aube+disque}. L'étape de réduction des frontières au moyen d'une technique de synthèse modale des modes d'interface et l'étape de réduction de la soufflante complète grâce à la CNCMS sont, quant à elles, décrites dans les dernières parties de cette sous-section pour une application au modèle numérique de la soufflante.

Il est important de signaler que l'intégralité de cette phase préparatoire doit être rejouée pour chaque vitesse de rotation étudiée, à savoir pour des régimes de rotation équivalents à 30 %, 50 % et 70 % du régime nominal de fonctionnement de la soufflante.

2.2.1 Précharge statique

Pareillement au système {aube+mors} du chapitre V, la précharge statique du secteur {aube+disque} est également réalisée au moyen du logiciel ANSYS® version 16.1, au contraire des étapes suivantes qui sont réalisées au moyen de programmes [9] développés sous MATLAB® et exploitant les matrices de masse, de raideur et le vecteur des efforts extérieurs extraits du logiciel éléments finis à la suite de l'étape de précharge statique.

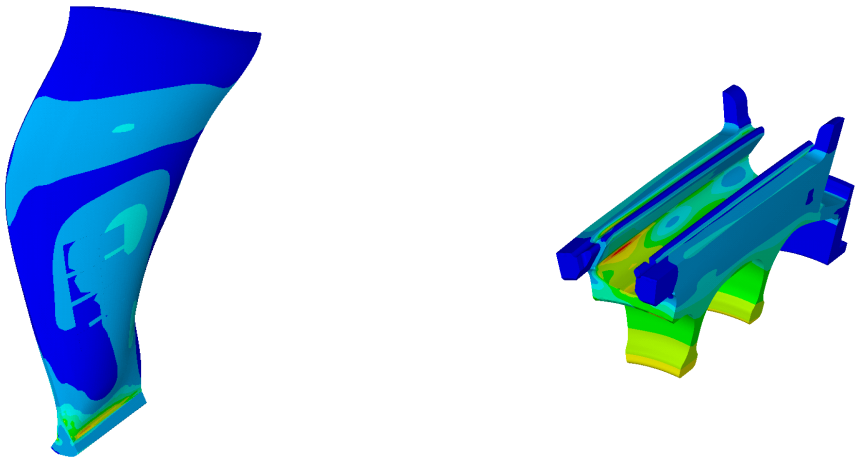
Afin de précontraindre numériquement le secteur, un champ d'accélération centripète correspondant à la vitesse de rotation souhaitée, est appliqué à la structure autour de l'axe de symétrie de la roue. En raison des non-linéarités de contact entre l'aube et le disque, l'état contraint résultant est déterminé par l'intermédiaire d'une analyse statique non-linéaire permettant de converger de façon itérative vers un point d'équilibre du système.

Les conditions aux limites de blocage des déplacements axiaux et orthoradiaux à l'arrière du disque, comme explicitées en figure VI.11b, sont conservées. De plus, des conditions de symétrie cyclique sont imposées (uniquement pour cette phase de précharge statique)

9. Pour rappel, ces programmes ont été développés au LTDS, certains spécialement dans le cadre de ce travail de thèse tandis que d'autres ont été modifiés dans le but de prendre en considération les particularités de cette application et notamment l'excitation par actionneurs piézoélectriques.

sur les frontières du disque afin de s'approcher des conditions aux limites d'une soufflante complète. Par ailleurs, aucun chargement aérodynamique n'est appliqué à l'aube dans les simulations statiques et dynamiques car celles-ci sont exécutées dans des conditions de vide numérique, comme exposée en section VI.1.

Le champ de précontrainte équivalente de Von Mises, obtenu à la suite de cette analyse statique non-linéaire sur le secteur {aube+disque} pour une vitesse de rotation de 70 % du régime nominal de fonctionnement de la soufflante, est représenté en figure VI.13.



(a) Aube (b) Disque

Figure VI.13 – Champ de précontrainte du secteur {aube+disque}, évalué pour $\Omega = 70\,\%$ (contraintes min. ■ et max. ■)

Ce processus de précharge est mis en équation dans le chapitre I et aboutit au système d'équations matricielles (I.34) régissant la dynamique d'un solide au voisinage de cet état de précontrainte. Les matrices d'assouplissement centrifuge $\mathbf{N}$ et de raideur géométrique $\mathbf{T}$ sont prises en compte dans ce système ce qui confère un effet rigidifiant au système puisque la deuxième matrice prime sur la première dans le cas de cette structure, comme exposé dans les diagrammes de Campbell numérique et expérimental de la section VI.3.

Par ailleurs, l'état d'équilibre résultant de cette procédure de précharge statique non-linéaire est employé comme état initial des simulations en dynamique non-linéaire. Les efforts dynamiques initiaux de contact entre les portées de l'aube et l'alvéole du mors résultent donc directement de cette phase de précharge.

Le temps de calcul [10] de cette procédure de précharge statique non-linéaire sur le secteur {aube+disque} est dépendant du champ centrifuge appliqué : de cinq minutes pour un régime équivalent à 30 % du régime nominal de fonctionnement jusqu'à quinze minutes pour une vitesse de rotation de 70 %.

2.2.2 Condensation des degrés de liberté électriques

La procédure de condensation des degrés de liberté électriques est strictement identique à celle explicitée dans le chapitre V pour le système {aube+mors} en termes d'application de la technique, de gain en termes de réduction et de temps de calcul. L'étude d'influence

10. Les temps de calcul indiqués dans ce chapitre ont été évalués sur un calculateur (plus puissant que celui employé dans le chapitre V) possédant seize cœurs Intel® Xeon® E5-2690 CPU @ 2.90 GHz et 256 Go de mémoire vive

concernant la discrétisation de l'épaisseur des actionneurs piézoélectriques, exposée dans le chapitre V, permet de fixer le nombre d'éléments contenus dans l'épaisseur des actionneurs à deux.

Il est à noter que, comme la phase de précharge statique, cette étape est accomplie sur un seul secteur de la soufflante.

Le gain en termes de réduction de la méthode et son temps de calcul [11] sont consignés dans les tableaux VI.6 et VI.7.

2.2.3 Synthèse modale linéaire par la méthode de Craig-Bampton

À l'issue des étapes de précharge statique non-linéaire et de condensation des degrés de liberté électriques, les modèles numériques de l'aube et du disque sont réduits au moyen de la méthode de Craig-Bampton dont la théorie a été abordée dans le chapitre III. L'application de cette méthode est identique à celle exposée dans le chapitre précédent, toutefois le nombre de degrés de liberté maîtres du secteur {aube+disque} diffère du système {aube+mors}.

En effet, afin de permettre l'évaluation des modes d'interface dans l'optique de réduire la taille des frontières du modèle numérique, il est nécessaire de conserver les degrés de liberté de frontière comme degrés de liberté maîtres.

Les degrés de liberté définis comme maîtres pour l'aube, c'est-à-dire ceux conservés pour décrire la structure à la suite de cette étape de réduction (en plus des modes propres linéaires), sont les degrés de liberté des nœuds représentant les portées de contact et ceux des nœuds d'observation. Au total, 1836 degrés de liberté maîtres forment la zone de contact entre les portées, 3 degrés de liberté sont retenus en tête d'aube dont l'un est employé comme degré de liberté de contrôle lors de l'évaluation des modes complexes non-linéaires et 60 autorisent le post-traitement des déformations mesurées par les jauges (l'étape de post-traitement des résultats des simulations non-linéaires est explicitée en sous-section 2.2.7).

Ceux retenus pour le disque sont plus nombreux puisqu'à ces 1836 degrés de liberté de contact, s'ajoutent les 10 374 degrés de liberté de frontière du secteur de disque.

Tous les autres degrés de liberté des deux sous-structures sont considérés comme degrés de liberté esclaves.

Le nombre de modes propres sélectionnés pour construire chaque super-élément est de 25 pour l'aube et de 10 pour le disque. Le critère fréquentiel [99] de sélection des modes est identique à celui employé dans le chapitre précédent.

Le super-élément de l'aube est ainsi construit à partir des 25 premiers modes propres linéaires à interfaces fixes et de 1899 modes statiques de liaison associés aux 1836 degrés de liberté de contact et aux 63 degrés de liberté d'observation.

Le super-élément du disque est, quant à lui, composé des 10 premiers modes propres linéaires à interfaces fixes et de 12 210 modes statiques de liaison : 1836 correspondant aux degrés de liberté de contact et 10 374 aux degrés de liberté de frontière.

Les fréquences calculées au moyen de ces super-élements sont approchées avec moins de 1 % d'erreur pour tous les modes conservés et moins de 0.05 % d'erreur pour les modes étudiés.

11. Voir note de bas de page 10 (p. 218)

Le temps de calcul [12] du super-élément de l'aube est de 23 minutes, comparable à celui du chapitre V. Celui du disque est de 17 heures, beaucoup plus important que précédemment en raison du nombre considérable de degrés de liberté de frontière.

2.2.4 Évaluation des modes complexes non-linéaires

À partir des données matricielles préchargées puis condensées et réduites, les modes complexes non-linéaires sont évalués afin de constituer une partie de la base de réduction de la CNCMS. Ces derniers sont calculés à partir des super-éléments de l'aube et du disque décrits en section 2.2.3. Néanmoins, les degrés de liberté de frontière du super-élément du disque sont encastrés afin d'employer la CNCMS qui est, pour rappel, une technique de réduction à frontières fixes (à l'instar de la méthode de Craig-Bampton). Outre cette précision, la procédure de calcul employée est identique à celle appliquée dans le chapitre précédent.

En effet, cette évaluation des modes complexes non-linéaires du secteur {aube+disque} bénéficie aussi d'une expression analytique de la matrice jacobienne du système définie en annexe B, les termes non-linéaires sont résolus au moyen de la méthode des Lagrangiens dynamiques (DLFT) détaillée en annexe A et les techniques de condensation du problème non-linéaire, décrites dans le chapitre II, sont employées. Ces techniques de condensation aboutissent à un problème final à résoudre contenant uniquement 1836 degrés de liberté.

De plus, la même coordonnée de contrôle est conservée, à savoir l'amplitude d'un degré de liberté en tête d'aube selon l'axe Y. Le suivi de l'évolution de ce paramètre sur la plage d'amplitude est réalisé au moyen d'une continuation séquentielle épaulée par un prédicteur à pas fixe, tous deux décrits dans le chapitre II.

Chacune des structures est amortie au moyen d'une matrice d'amortissement visqueux $\mathbf{C}$, construite sur la base d'un taux d'amortissement modal ξ propre à chacune des familles de modes de vibration comme détaillé dans le chapitre V.

Par ailleurs, il est important de noter que les effets de Coriolis, représentés par la matrice $\mathbf{G}$ dans l'équation (I.34) du chapitre I, ne sont pas pris en compte dans l'évaluation des modes complexes non-linéaires bien que le système soit en rotation ; ceci dans le but de simplifier les simulations du système.

Les paramètres associés à la résolution harmonique et à la méthode d'alternance temps / fréquence, à savoir le nombre d'harmoniques n_h et le nombre de pas de temps n_t discrétisant la période de la méthode d'alternance temps / fréquence, sont fixés respectivement à $n_\mathrm{h} = 5$ harmoniques et $n_\mathrm{t} = 32$ discrétisations grâce aux études d'influence réalisées sur le modèle numérique {aube+mors}.

Le coefficient de frottement isotrope μ agissant directement sur la non-linéarité de contact / frottement est, quant à lui, évalué au moyen d'études d'influence comparées à l'évolution des paramètres modaux expérimentaux pour plusieurs vitesses de rotation de la soufflante et plusieurs familles de modes de vibration. Ces études d'influence sont exposées en section VI.3.

En raison du nombre important d'inconnues à résoudre, cette étape du processus de réduction est l'une des plus longues en termes de temps de calcul. Le temps de calcul [13] d'un mode complexe non-linéaire est dépendant au premier ordre du nombre de points pour lesquels le mode complexe non-linéaire est évalué et de l'intensité de la non-linéarité.

À titre d'exemple, celui de la famille du premier mode de flexion pour une vitesse de

12. Voir note de bas de page 10 (p. 218)
13. Voir note de bas de page 10 (p. 218)

rotation de 30 % du régime nominal de la soufflante est le plus long à évaluer en raison de la forte intensité de la non-linéarité et du nombre important de pas de calcul (60 points). Son évaluation nécessite environ 10 heures de calcul.

2.2.5 Synthèse modale linéaire des modes d'interface

Une fois le mode complexe non-linéaire évalué, le modèle réduit de la soufflante n'est plus constitué que d'un mode complexe non-linéaire par aube, soit dix-huit, et des degrés de liberté de frontière de la soufflante permettant d'assembler les différents secteurs {aube+disque}. Néanmoins ces derniers, au nombre de 93 366 comme indiqué dans le tableau VI.5, n'autorisent pas une résolution du problème en un temps de calcul raisonnable étant donné le nombre très important de degrés de liberté de frontière restant. C'est pourquoi il est nécessaire de réduire ces degrés de liberté de frontière au moyen de la méthode de la synthèse modale linéaire des modes d'interface, dont la théorie et l'intégration à la CNCMS sont exposées dans le chapitre III.

À partir des super-éléments, évalués en sous-section 2.2.3, de l'aube et du disque pour lequel les degrés de liberté de frontière sont conservés, un nouveau super-élément représentant le secteur complet (aube insérée dans le secteur de disque) est construit en collant les degrés de liberté de contact. Il est fondamental de travailler sur le modèle réduit linéaire associé à un contact collé afin que l'information en provenance des frontières du secteur puisse circuler librement et se transmettre aux aubes. Dans le cas contraire, le couplage des aubes par le disque ne serait plus assuré.

Les super-éléments de chaque secteur sont ensuite assemblés par l'intermédiaire des degrés de liberté de frontière pour aboutir au modèle réduit linéaire de la soufflante. La base de réduction des frontières est ensuite déterminée par résolution du problème aux valeurs propres généralisé sur le modèle réduit linéaire de la soufflante, en tronquant cette base pour ne conserver que les 200 premiers modes.

Cette troncature permet ainsi une très grande réduction des degrés de liberté de frontière tout en conservant une bonne précision du modèle. En effet, les 100 premiers modes d'interface de la soufflante sont approchés avec moins de 0.1 % d'erreur en fréquence tandis que celle-ci reste inférieure à 0.5 % pour la totalité des modes. L'évaluation de ces 200 modes d'interface requiert un temps de calcul [14] d'environ 3 heures.

Il est important de mentionner que l'assemblage des différents secteurs linéaires de la soufflante incorpore les éventuels schémas de désaccordage aléatoires et intentionnels appliqués à la roue aubagée. Ces différents schémas peuvent être affectés au modèle réduit linéaire de la soufflante de plusieurs façons.

La première consiste à perturber la raideur modale équivalente au moyen d'une valeur (représentant le désaccordage fréquentiel aléatoire ou intentionnel). Cette valeur est directement appliquée sur le coefficient correspondant au mode désaccordé dans la matrice de raideur modale réduite.

La seconde nécessite de modifier certaines caractéristiques (matériau ou géométrique, par exemple) des modèles éléments finis de chaque secteur préalablement au calcul des super-éléments puis de les répartir aléatoirement ou intentionnellement sur la roue aubagée.

La première méthode de désaccordage est employée dans ces travaux de thèse et ses

14. Voir note de bas de page 10 (p. 218)

effets sur la réponse forcée de la soufflante sont illustrés en sous-section VI.2.3. La seconde méthode est employée et illustrée par Joannin dans son mémoire de thèse [99] mais n'est pas exploitée dans le cadre de ces travaux de thèse.

2.2.6 CNCMS

La CNCMS, dont l'aspect théorique est développé dans le chapitre III, est la dernière étape de ce processus préparatoire aux simulations non-linéaires de la soufflante désaccordée. Celle-ci permet d'évaluer la réponse forcée non-linéaire, pour un vecteur donné d'efforts extérieurs, à partir de l'évaluation des modes complexes non-linéaires et des modes d'interface précédemment réalisée.

Le nombre total de degrés de liberté du modèle final correspond aux 200 modes d'interface retenus complétés du mode complexe non-linéaire évalué (famille du premier ou du deuxième mode de flexion) pour chacun des dix-huit secteurs, soit 218 degrés de liberté à résoudre itérativement. Plusieurs modes complexes non-linéaires auraient pu être retenus pour chaque secteur afin d'affiner les réponses forcées, toutefois les familles de mode de vibration sont bien séparées fréquentiellement les unes des autres et n'influent que très peu les réponses forcées faisant majoritairement intervenir un autre mode [15] ce qui permet de ne retenir qu'un seul et unique mode non-linéaire par simulation.

Les efforts piézoélectriques, issus de la condensation des degrés de liberté électriques, sont appliqués à chacune des dix-aubes aubes de la soufflante en tant qu'efforts extérieurs. Les excitations numériques à diamètres sont générées au moyen de l'équation (VI.1), précédemment employée lors de la génération des excitations expérimentales à diamètres, et permettent ainsi la génération d'ondes co-rotatives, contra-rotatives, stationnaires ou mixtes.

Comme exposé dans la sous-section précédente, seule la technique de désaccordage consistant à perturber les paramètres modaux de chaque secteur est employée. Dans le cas d'une simulation non-linéaire, ce désaccordage fréquentiel consiste à perturber la valeur du paramètre modal associé à la fréquence propre (Ω dans l'équation (II.49)) du mode complexe non-linéaire de chaque secteur.

Le schéma de désaccordage employé dans les travaux de comparaison entre essais en rotation et simulations non-linéaires est un schéma intentionnel issu des essais sur mors : la dispersion fréquentielle des aubes testées sur mors est ainsi réemployée dans ce schéma de désaccordage intentionnel.

De plus, une autre paramètre modal peut être désaccordée grâce à une technique similaire : le taux d'amortissement. Le paramètre modal correspondant à l'amortissement modal (β dans l'équation (II.49)) du mode complexe non-linéaire est ainsi perturbé pour désaccorder l'amortissement de chaque secteur.

Par ailleurs, un coefficient est appliqué sur l'excitation de chaque aube afin de rompre la symétrie de l'excitation à diamètres pour ce qui pourrait s'apparenter à un désaccordage de l'excitation. Ce schéma d'excitation permet aussi d'exciter une seule et unique aube et ainsi étudier l'influence de l'excitation de celle-ci sur la réponse forcée des autres aubes de la soufflante. Cette excitation mono-aube (et donc localisée) permet ainsi une comparaison avec les essais aube par aube menés en section VI.1.

L'influence de ces différents types de désaccordage est étudiée en sous-section VI.2.3,

15. Cette assomption a été validée numériquement pour les familles du premier et du deuxième mode de flexion

notamment en prenant en compte les schémas de désaccordage (en fréquence propre, taux d'amortissement et excitation) issus des essais sur mors.

Les simulations numériques sur le modèle réduit de la soufflante en rotation sont exécutées pour des pas fréquentiels de 0.02 Hz et de 0.04 Hz, respectivement pour les familles du premier et du deuxième mode de flexion. Entre 150 et 200 pas fréquentiels de calcul sont requis pour tracer la réponse forcée d'un modèle numérique de soufflante désaccordée.

Afin de fournir un ordre de grandeur du temps de calcul [16], 5 h sont nécessaires pour obtenir la réponse forcée de la famille du premier mode de flexion de la soufflante désaccordée (au moyen de la dispersion extraite lors des essais sur mors) en rotation à 30 % du régime nominal de la soufflante, ceci pour une tension d'excitation égale à 80 V (soit un effet non-linéaire important) et 150 pas fréquentiels de calcul.

Les tableaux VI.6 et VI.7 récapitulent, respectivement, les gains en termes de réduction ainsi que le temps de calcul des différentes étapes du processus aboutissant aux réponses forcées de la soufflante complète désaccordée en rotation.

Nombre de DdL restants	Aube	Disque	Secteur	Soufflante
Modèle initial	111 777	111 960	223 737	3 933 900
Condensation des DdL électriques	106 422	111 960	218 382	3 837 510
Craig-Bampton	1924	12 220	14 144	161 226
Modes complexes non-linéaires	—	—	10 374	93 384
Modes d'interface	—	—	—	218

Tableau VI.6 – Récapitulatif des gains du processus de réduction

Temps de calcul [17]	Aube	Mors	Soufflante
Précharge statique	15 min		—
Condensation des DdL électriques	<2 s	—	—
Craig-Bampton	23 min	17 h	—
Modes complexes non-linéaires	10 h		—
Modes d'interface	—		3 h
CNCMS	—		5 h
Total	≈35 h		

Tableau VI.7 – Récapitulatif du temps de calcul du processus de réduction

2.2.7 Post-traitement des données de simulation

L'étape de post-traitement numérique des jauges de déformation de la soufflante est identique à celle proposée dans le chapitre V, celle-ci devant être réalisée pour chacune des jauges des dix-huits aubes.

Contrairement aux simulations du chapitre précédent, les paramètres modaux numériques ne peuvent être directement extraits du mode complexe non-linéaire (car ce dernier est évalué sur un secteur encastré de la soufflante). Il est alors nécessaire d'identifier les

16. Voir note de bas de page 10 (p. 218)
17. Voir note de bas de page 10 (p. 218)

fonctions de réponse fréquentielle obtenues au moyen de la CNCMS. Cette identification globale est réalisée par l'intermédiaire de la méthode LSRF, employée lors de l'identification des essais sur mors et en rotation.

Par comparaison avec l'identification des données expérimentales, celle réalisée sur les données numériques nécessite d'identifier un nombre de modes plus important puisque les modes à zéro et un diamètres nodaux sont contenus dans la plage fréquentielle étudiée (ceci est détaillé en section VI.3).

Le pas fréquentiel d'excitation, plus faible numériquement qu'expérimentalement, permet de mieux séparer les résonances et donc de mieux distinguer les différents modes ce qui facilite le lissage, notamment dans les zones de forte densité modale comme la famille du premier mode de flexion. De plus, les fonctions de réponse fréquentielle numériques ne contiennent pas de parasites (comme les perturbations électromagnétiques exposées en section VI.1), ni de bruit de fond facilitant aussi le lissage de celles-ci.

Ainsi, dans le cas général (et notamment dans le cas de la famille du premier mode de flexion), il est plus aisé de lisser les fonctions de réponse fréquentielle numériques que celles expérimentales. Malgré l'importante densité modale de la famille du premier mode de flexion, les fonctions de réponse fréquentielle numériques de cette famille de mode sont identifiées globalement. Toutefois, dès que l'effet non-linéaire est important (pour une vitesse de rotation de 30 %, par exemple), il est nécessaire d'exploiter la technique employée sur les fonctions de réponse fréquentielle expérimentales, à savoir une identification modale locale sur l'aube dont l'amplitude de réponse est maximale, car certains pics de résonance fusionnent entre eux perturbant l'identification modale globale.

2.3 Influence du désaccordage de la soufflante

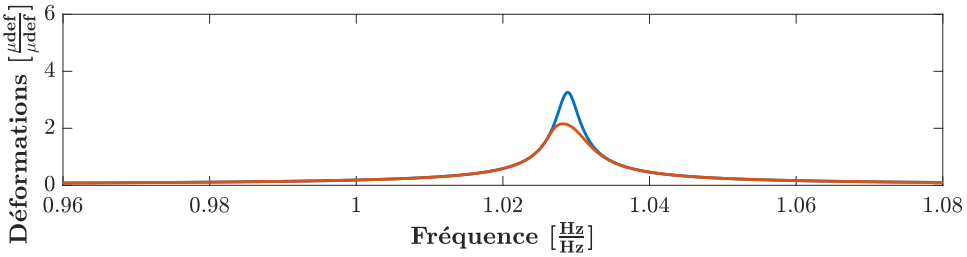
Comme présenté dans le chapitre I, le désaccordage des aubes d'une roue aubagée aboutit à des évolutions significatives de la réponse de la soufflante aussi bien en termes de fréquence propre qu'en amplitude de réponse. L'influence de ce désaccordage numérique sur la fréquence propre mais aussi le taux d'amortissement ou l'excitation de la soufflante est étudiée dans cette sous-section.

2.3.1 Désaccordage fréquentiel

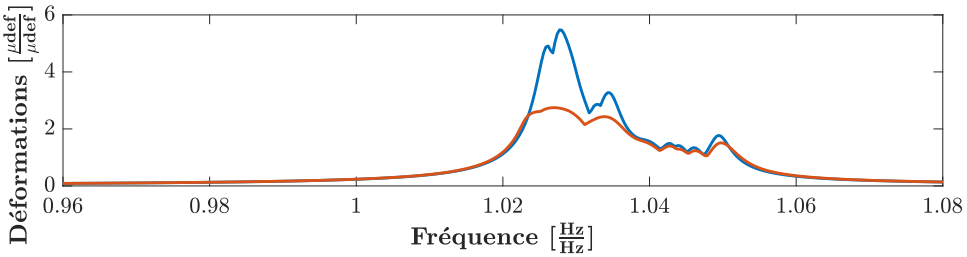
L'étude du désaccordage fréquentiel, dont l'implémentation numérique dans la CNCMS est détaillée en sous-section VI.2.2, est d'autant plus importante que ce désaccordage est particulièrement notable dans le cas de la soufflante testée dans ce travail de thèse. En effet, les causes de cet important désaccordage sont multiples :

— Ces aubes sont issues de démonstrateurs du LEAP dont la production n'a pas été réalisée en série, au contraire des aubes équipant les turboréacteurs LEAP en fonctionnement ;
— Ces aubes ont été prélevées sur plusieurs démonstrateurs (de la même version) ce qui implique qu'elles ont subi des essais différents et présentent donc des niveaux d'usure ou d'endommagement disparates ;
— L'instrumentation de ces aubes au moyen d'actionneurs piézoélectriques a été effectuée avec une certaine tolérance dans le positionnement de ceux-ci. De plus, ces actionneurs présentent eux-mêmes des disparités matérielles et structurelles.

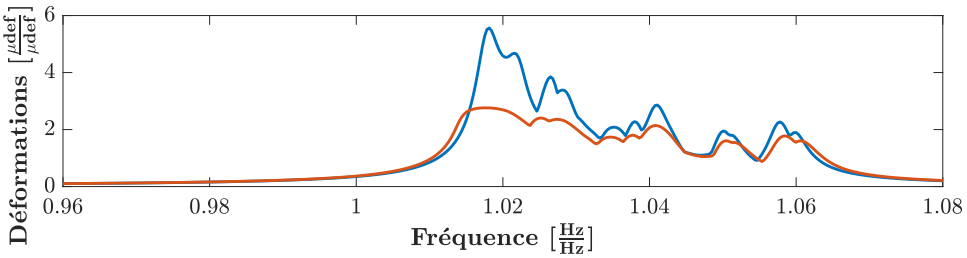
L'influence du désaccordage fréquentiel sur le spectre de la réponse forcée ainsi que sur son analyse en diamètres est étudiée grâce aux figures VI.14 et VI.15.



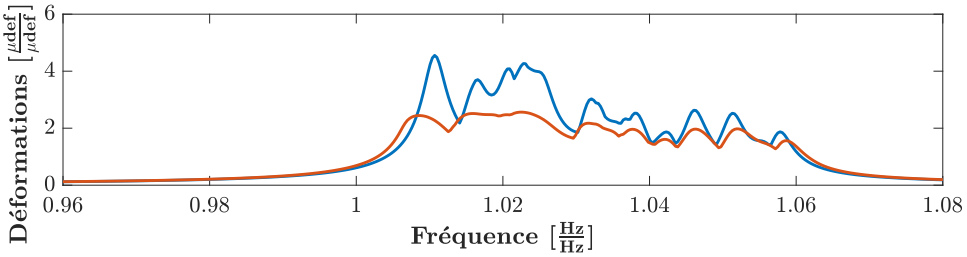
(a) $\sigma = 0.00\,\%$



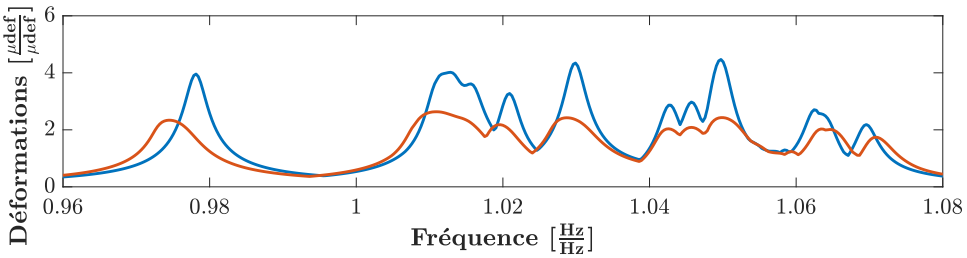
(b) $\sigma = 0.50\,\%$



(c) $\sigma = 1.13\,\%$ (essais sur mors)

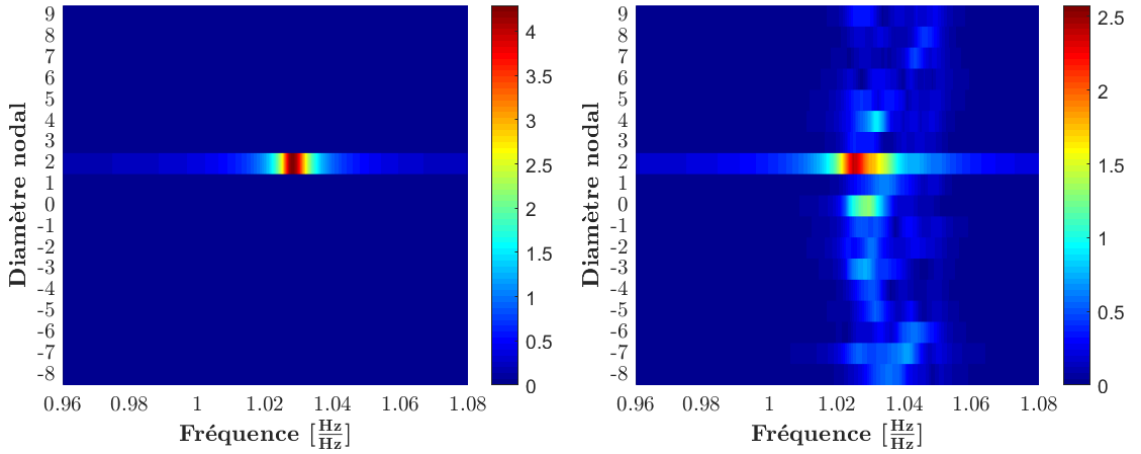


(d) $\sigma = 1.50\,\%$



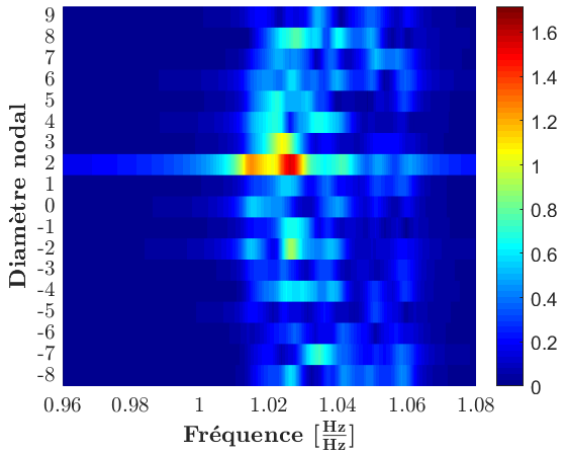
(e) $\sigma = 2.00\,\%$

FIGURE VI.14 – Influence du désaccordage fréquentiel des aubes sur les réponses forcées linéaires (—) et non-linéaires (—) au voisinage de la famille du premier mode de flexion, évaluées pour $v = 60\,\mathrm{V}$ et $\Omega = 30\,\%$

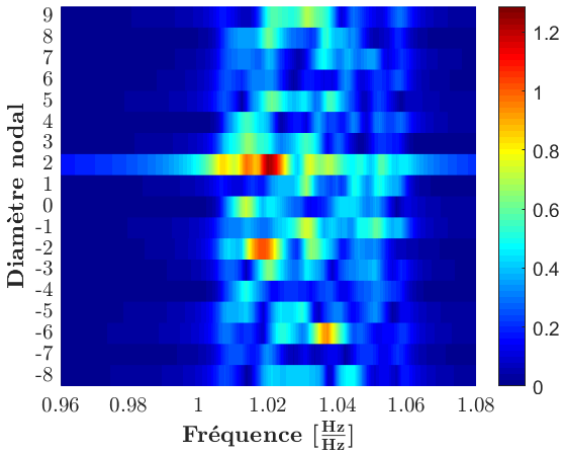


(a) $\sigma = 0.00\,\%$

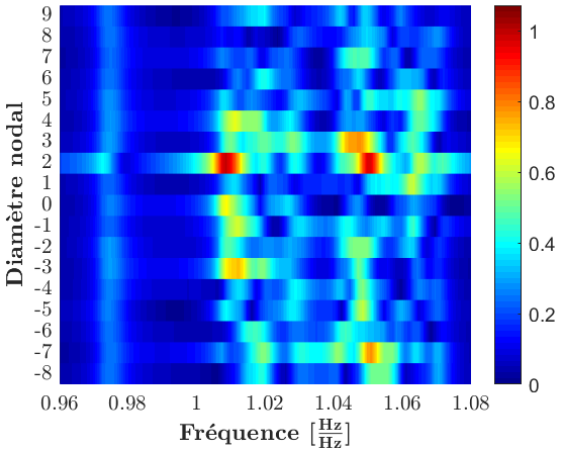
(b) $\sigma = 0.50\,\%$



(c) $\sigma = 1.13\,\%$ (essais sur mors)



(d) $\sigma = 1.50\,\%$



(e) $\sigma = 2.00\,\%$

FIGURE VI.15 – Influence du désaccordage fréquentiel des aubes sur les décompositions à diamètres non-linéaires, au voisinage de la famille du premier mode de flexion, évaluées pour $v = 60\,\mathrm{V}$ et $\Omega = 30\,\%$ (Déformations $[\frac{\mu\mathrm{def}}{\mu\mathrm{def}}]$ min. ■ et max. ■)

Les simulations numériques, permettant de tracer les enveloppes des réponses forcées [18] et les décompositions à diamètres (dont la méthode de tracé est explicitée en section VI.1), sont réalisées au moyen de la CNCMS et des méthodes de réduction détaillées en sous-section VI.2.2 pour une excitation co-rotative à deux diamètres nodaux au voisinage de la famille du premier mode de flexion et une tension de 60 V. Le désaccordage fréquentiel est ici aléatoire suivant une loi normale permettant d'obtenir l'écart-type désiré. Toutefois, le taux de désaccordage correspondant à la dispersion relevée durant les essais sur mors est appliqué de façon intentionnelle, en respectant les dispersions fréquentielles mesurées sur chacune des dix-huit aubes durant les essais sur mors.

Plusieurs remarques peuvent être déduites de l'évolution des réponses forcées en fonction du taux de désaccordage de la soufflante, exposée en figure VI.14.

Premièrement, il est possible de remarquer que plus le taux de désaccordage est grand, plus l'étalement fréquentiel [19] de la réponse est important. Pour un taux de désaccordage correspondant à un écart-type de $\sigma = 2.00\,\%$, l'étalement fréquentiel est égal à 10 % de la fréquence du mode accordé à deux diamètres.

La seconde remarque concerne l'amplitude maximale de la réponse forcée qui semble suivre l'évolution typique de l'amplification de l'amplitude de la réponse forcée linéaire en fonction du taux de désaccordage, reprise en figure I.16 dans le chapitre I. Afin de faciliter la comparaison, les évolutions linéaires et non-linéaires du facteur d'amplification, issues des réponses forcées de la figure VI.14, en fonction du taux de désaccordage sont tracées en figure VI.16. Le facteur d'amplification correspond ici aux amplitudes maximales, linéaires et non-linéaires, relevées parmi les dix-huit réponses forcées puis normalisées par celles (linéaire et non-linéaire) obtenues pour une soufflante accordée.

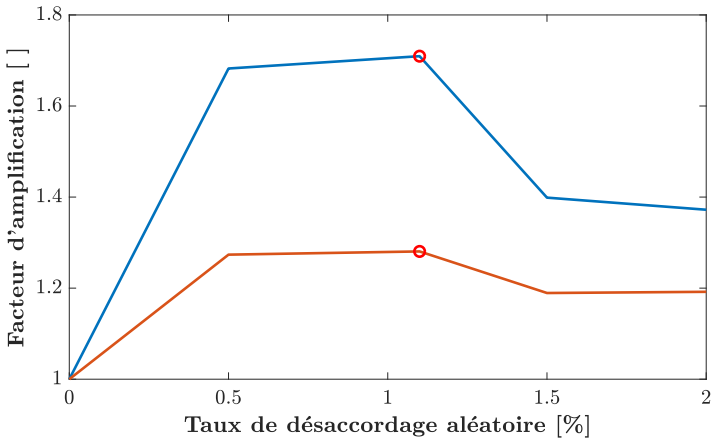


FIGURE VI.16 – Évolution du facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage résultant des réponses forcées linéaire (—) et non-linéaire (—) de la figure VI.14 (o dispersion issue des essais sur mors)

Bien que le nombre de points tracés soient limités et que les graphiques soient le résultat d'un seul et unique tirage aléatoire par taux de désaccordage, il est possible de remarquer que l'évolution linéaire est similaire à celle de la figure I.16. En effet, l'amplitude maximale atteint rapidement un maximum avant de diminuer lentement pour atteindre un palier. De

18. Les enveloppes des réponses forcées, tracées en figure VI.14 et VI.17, sont évaluées en retenant la valeur maximale parmi les dix-huit réponses forcées pour chaque fréquence d'excitation.

19. L'étalement fréquentiel est ici défini comme l'écart entre la fréquence la plus basse et la plus haute des pics observés sur l'ensemble des aubes.

même, l'évolution non-linéaire rappelle les figures tracées par Joannin[99] dans ses travaux de thèse dans lesquelles la courbe est aplanie par rapport à une évolution linéaire.

De plus, il est à noter que la dispersion fréquentielle issue des essais sur mors est positionnée à proximité du maximum du facteur d'amplification ce qui signifie qu'une minime erreur sur le taux de désaccordage peut provoquer un important écart par rapport aux essais en rotation et notamment sur l'amplitude des réponses.

Par ailleurs, il est possible de déceler un léger écart fréquentiel entre les réponses forcées linéaires et non-linéaires de la figure VI.14 dû aux méthodes distinctes de désaccordage employées pour perturber les fréquences propres linéaires et non-linéaires ; méthodes détaillées en sous-sections 2.2.5 et 2.2.6, respectivement.

La figure VI.15 permet de visualiser l'évolution de la décomposition à diamètres de la réponse de la soufflante en fonction du taux de désaccordage.

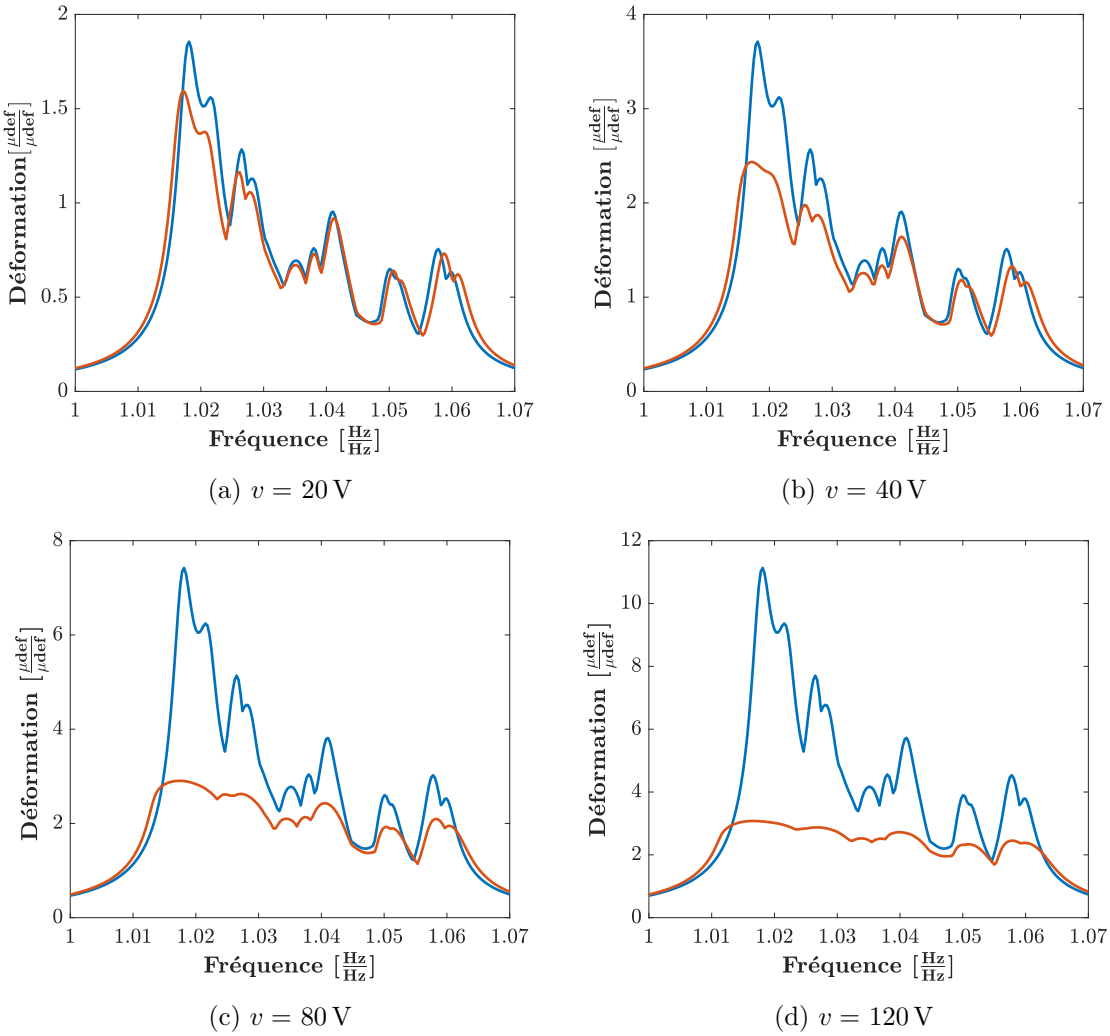
Comme précédemment, il est possible de remarquer une augmentation de l'étalement fréquentiel des différents modes en fonction du taux de désaccordage. Le dédoublement des fréquences des modes dégénérés, en particulier celui à deux diamètres nodaux, est aussi observable sur cette figure. Par ailleurs, l'écart entre les fréquences de ces modes dégénérés augmente en fonction du taux de désaccordage.

De plus, tandis que le mode à deux diamètres nodaux est le seul à répondre sans désaccordage, de plus en plus de fréquences répondent lorsque le taux de désaccordage augmente et, ceci, dans des proportions de plus en plus importantes. Il est aussi possible de constater que les décompositions à diamètres sur les fréquences qui répondent sont de plus en plus riches. Cette répartition de l'énergie vibratoire entre les différentes composantes à diamètres entraîne ainsi une réponse du mode excité de plus en plus faible, ce mode étant de ce fait moins pur dans sa décomposition à diamètres.

D'autre part, les figures VI.14e et VI.15e exhibent, en début du spectre, un mode localisé sur une seule aube (l'aube n°17) qui se traduit par une résonance isolée sur cette aube à la fréquence correspondant à ce mode ainsi qu'une participation de toutes les composantes à diamètres à cette même fréquence.

L'évolution de la réponse forcée en présence de désaccordage fréquentiel pour différentes tensions d'excitation est présentée en figure VI.17. Les enveloppes des réponses forcées sont toujours tracées au moyen de la CNCMS pour une excitation co-rotative à deux diamètres nodaux au voisinage de la famille du premier mode de flexion. Le désaccordage fréquentiel est issu de la dispersion fréquentielle obtenue durant les essais sur mors.

Cette série d'excitations numériques permet ainsi d'observer un aplanissement des pics de résonance non-linéaires par rapport aux pics linéaires ainsi qu'un léger décalage fréquentiel. Comme détaillé dans le chapitre II, cet aplanissement et ce décalage fréquentiel sont dus à la non-linéarité de contact / frottement entre les aubes et le disque : plus la tension d'excitation est importante, plus ceux-ci sont conséquents. De surcroît, l'aplanissement de la réponse forcée entraîne la fusion de plusieurs pics de résonance (chacun associé à un mode de vibration) en un seul pic plus large.



(a) $v = 20\,\mathrm{V}$ (b) $v = 40\,\mathrm{V}$

(c) $v = 80\,\mathrm{V}$ (d) $v = 120\,\mathrm{V}$

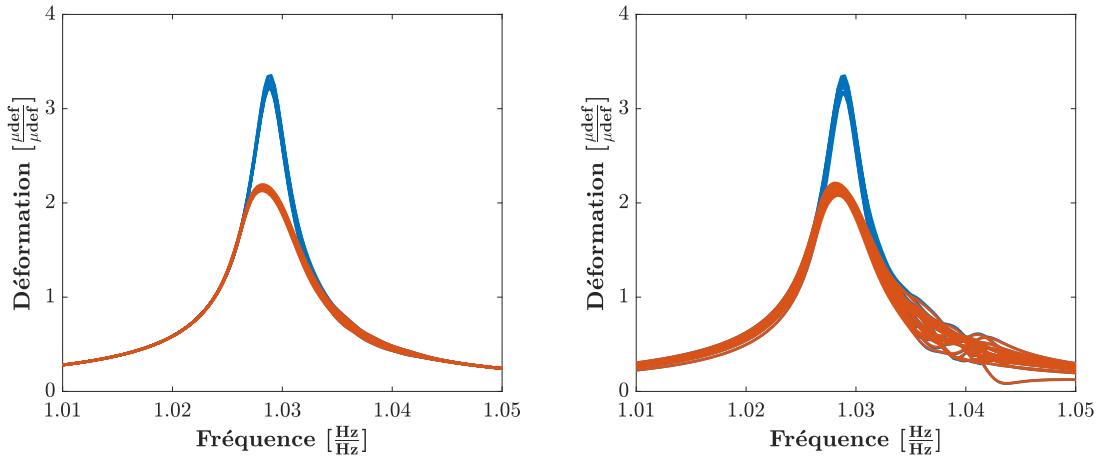
FIGURE VI.17 – Influence de la tension d'excitation sur les réponses forcées linéaires (—) et non-linéaires (—) de la soufflante désaccordée, au voisinage de la famille du premier mode de flexion, évaluées pour $\sigma = 1.13\,\%$ (essais sur mors) et $\Omega = 30\,\%$

2.3.2 Désaccordage de l'amortissement et de l'excitation

Le désaccordage des aubes de la soufflante en taux d'amortissement mais aussi en excitation est étudié en figures VI.18 et VI.19.

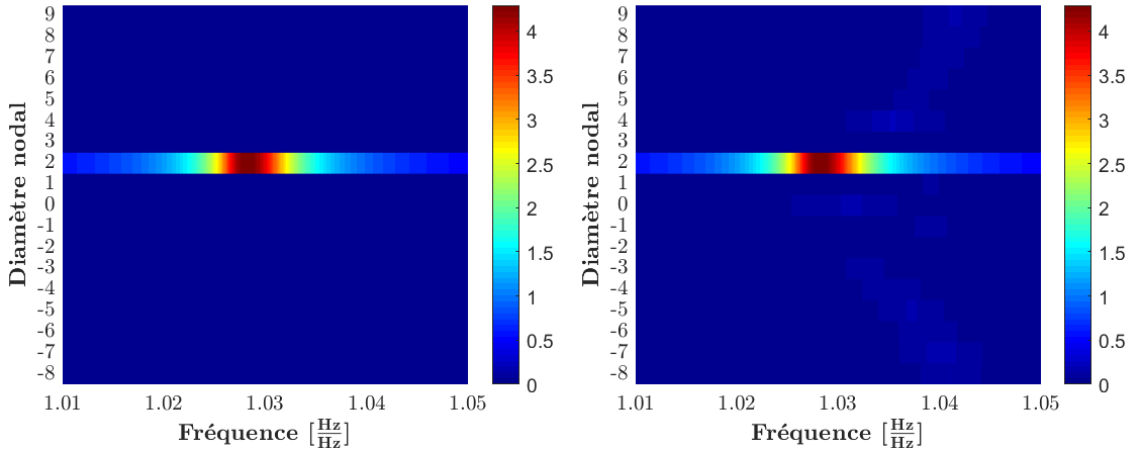
Leur implémentation dans la CNCMS est décrite en section VI.2 tandis que les simulations réalisées sont similaires aux précédentes en substituant le désaccordage fréquentiel par un désaccordage intentionnel sur le taux d'amortissement et l'excitation des aubes de la soufflante. Ces désaccordages intentionnels sont issus des dispersions sur le taux d'amortissement structural et sur les résidus [20] identifiés sur les réponses forcées des dix-huit aubes, obtenues durant les essais sur mors et aboutissant respectivement à un écart-type de 7.16 % et 9.85 %.

20. Les résidus permettent de caractériser l'excitabilité de la structure car ceux-ci sont indépendants de la fréquence propre et du taux d'amortissement. Par conséquent, ces résidus peuvent intégrer un désaccordage de l'excitation mais aussi de la forme modale.



(a) Taux d'amortissement (b) Excitation

Figure VI.18 – Influence du désaccordage du taux d'amortissement et de l'excitation des aubes sur les réponses forcées linéaires (—) et non-linéaires (—), au voisinage de la famille du premier mode de flexion, évaluées pour $v = 60\,\mathrm{V}$ et $\Omega = 30\,\%$



(a) Taux d'amortissement (b) Excitation

Figure VI.19 – Influence du désaccordage du taux d'amortissement et de l'excitation des aubes sur les décompositions à diamètres non-linéaires, au voisinage de la famille du premier mode de flexion, évaluées pour $v = 60\,\mathrm{V}$ et $\Omega = 30\,\%$ (Déformations $[\frac{\mu\mathrm{def}}{\mu\mathrm{def}}]$ min. ■ et max. ■)

Bien que les taux de désaccordage soient très élevés (par exemple, en comparaison au taux de désaccordage fréquentiel), l'influence de ceux-ci sur les réponses forcées, aussi bien sur le taux d'amortissement que sur l'excitation, est minime et concerne essentiellement l'amplitude de ces dernières. De plus, la figure VI.19 permet de constater que leur influence sur la décomposition en composantes à diamètres est aussi mineure.

L'influence du désaccordage intentionnel sur le taux d'amortissement et l'excitation étant faibles, ces désaccordages ne sont pas considérés dans la suite de ce mémoire et notamment dans la comparaison entre les essais en rotation et les simulations numériques de la soufflante désaccordée.

3 Confrontation entre essais en rotation et simulations numériques

La section finale de ce mémoire de thèse expose les comparaisons entre les essais en rotation réalisés à l'intérieur de l'enceinte sous-vide du banc d'essais PHARE#1 et les simulations numériques non-linéaires de la soufflante composite désaccordée. Cette section constitue l'épilogue de ce travail de thèse en faisant intervenir toutes les notions théoriques et pratiques déployées dans ce mémoire d'un point de vue expérimental mais aussi numérique. Les résultats des études à excitations localisées et à diamètres, numériques et expérimentales, occupent une part majeure de cette comparaison permettant ainsi d'étudier tous les aspects de la dynamique de cette soufflante en rotation et particulièrement ses effets non-linéaires.

Cette section est divisée en quatre parties. La première aborde la comparaison des paramètres modaux expérimentaux et numériques du système linéaire sous-jacent. La deuxième sous-section permet d'évaluer le coefficient de frottement isotrope optimal du système grâce à une étude de l'influence de ce paramètre sur l'évolution des paramètres modaux non-linéaires de la soufflante. Pour achever cette section, les deux dernières parties sont largement consacrées à la comparaison des réponses expérimentales et numériques à des excitations localisées et à diamètres.

Il est important de noter que chaque essai de la campagne, dont la matrice d'essais est présentée dans le tableau VI.1, réalisé pour cette étude a son pendant numérique. De surcroît, ces simulations non-linéaires sont accomplies au moyen des paramètres numériques optimaux définis grâce aux études d'influence du chapitre V, à savoir $n_{\mathrm{h}} = 5$ harmoniques, $n_{\mathrm{t}} = 32$ discrétisations temporelles, $n_{\mathrm{e}} = 2$ éléments. Seul le nombre de nœuds de contact diffère pour compter une rangée de plus ce qui porte le total à $n_{\mathrm{c}} = 612$ nœuds de contact, comme exposé précédemment. De plus, les schémas de désaccordage fréquentiel employés pour les familles du premier et du deuxième mode de flexion (respectivement $\sigma = 1.13\,\%$ et $\sigma = 0.96\,\%$) sont issus des résultats des essais sur mors sur les dix-huit aubes composant la soufflante.

3.1 Comparaison des paramètres modaux du système linéaire sous-jacent

À l'image de l'étude linéaire réalisée dans le chapitre V, il est essentiel de comparer les paramètres modaux (fréquences propres et taux d'amortissement) expérimentaux et numériques du système linéaire sous-jacent afin d'évaluer la précision du modèle numérique de la soufflante par rapport aux essais en rotation dans l'enceinte sous-vide du banc PHARE#1. L'évolution expérimentale et numérique des paramètres modaux linéaires en fonction de la vitesse de rotation de la soufflante peut ainsi être comparée préalablement à l'introduction des non-linéarités, ces dernières rendant la comparaison plus complexe.

Il est important de noter qu'aucun recalage du modèle numérique éléments finis n'est réalisé que ce soit pour les aubes ou le disque : celui-ci est identique à un modèle exploité dans l'industrie. Seul le coefficient d_{31}, lié au modèle numérique des actionneurs piézoélectriques, est modifié : sa valeur recalée lors des simulations du système {aube+mors} est ré-employée ici. Pour rappel, la modélisation numérique s'arrête à la soufflante et ne comprend donc pas le véhicule d'essais.

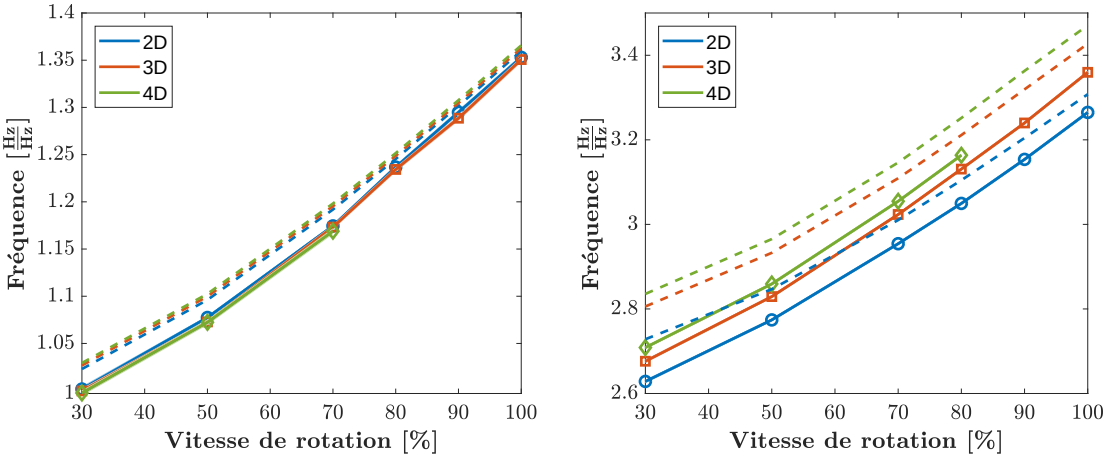
Les paramètres modaux numériques linéaires sont extraits d'une analyse modale du modèle numérique de la soufflante pour lequel toutes les portées de contact / frottement sont collées. Le modèle numérique est réduit de façon similaire à la CNCMS en remplaçant toutefois les modes complexes non-linéaires par des modes complexes linéaires.

Les paramètres modaux expérimentaux linéaires sont, quant à eux, obtenus en extrapolant ceux issus de l'identification modale (par la méthode LSRF) des fonctions de réponse fréquentielle non-linéaires des essais à diamètres jusqu'à l'ordonnée à l'origine. Comme explicité dans le chapitre V, cette technique d'extrapolation produit des résultats similaires à l'identification modale des essais large-bande, engendrant des réponses forcées de faible amplitude et donc très proches d'un comportement linéaire.

3.1.1 Fréquences propres

Pour étudier l'évolution de la fréquence propre en fonction des différents paramètres associés aux roues aubagées en rotation tels que la vitesse de rotation ou le diamètre nodal, le diagramme de Campbell et le diagramme fréquences / diamètres, décrits dans le chapitre I, demeurent des outils efficaces.

Dans un premier temps, les diagrammes de Campbell expérimentaux et numériques des familles des deux premiers modes de flexion de la soufflante sont comparés en figure VI.20a et VI.20b, respectivement. Il est à noter que les incertitudes expérimentales (principalement liées à l'identification des paramètres et à la mesure), évaluées en section VI.1, sont tracées autour des courbes expérimentales. Toutefois, celles-ci sont faibles et donc difficilement perceptibles sur les figures.



(a) Famille du premier mode de flexion

(b) Famille du deuxième mode de flexion

Figure VI.20 – Comparaison entre les diagrammes de Campbell linéaires expérimentaux (—) et numériques (- -)

En prime des vitesses de rotation de l'étude non-linéaire, restreintes à 30 %, 50 % et 70 % du régime nominal de fonctionnement de la soufflante, des vitesses de rotation supérieures à 70 % (80 %, 90 % et 100 %) sont étudiées en figures VI.20a et VI.20b afin d'analyser l'évolution des fréquences propres sur une plage de fonctionnement plus importante.

Pour rappel, les deuxième, troisième et quatrième diamètres nodaux sont étudiés durant ces essais et simulations numériques.

Les figures VI.20a et VI.20b permettent d'observer un raidissement de la structure (se manifestant par une augmentation de la fréquence propre) pour les familles du premier et du deuxième mode de flexion. Ce raidissement est lié à la précontrainte centrifuge, représentée par la matrice $\mathbf{T}$ dans l'équation (I.34), qui prévaut sur l'assouplissement centrifuge,

représenté par la matrice **N** dans l'équation (I.34), dans le cas de cette soufflante.

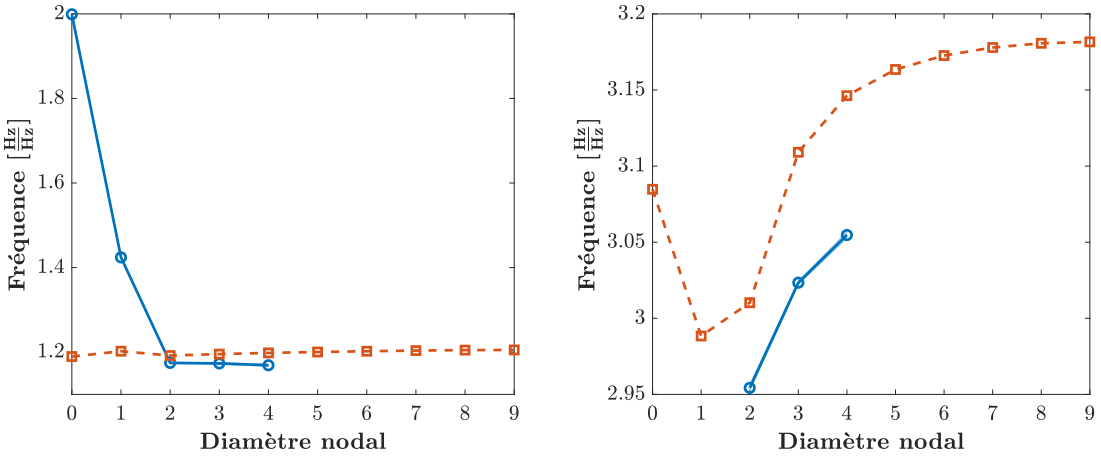
Les évolutions expérimentales et numériques des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation sont similaires pour les deux familles de modes de vibration bien que les écarts semblent plus importants pour les modes de la famille du deuxième mode de flexion. Toutefois, il est possible de remarquer que les simulations numériques ont tendance à surestimer les fréquences propres (ce qui est ordinaire dans le cadre d'une modélisation éléments finis). De plus, la pente des fréquences propres expérimentales est plus importante, l'écart est donc plus important pour les faibles vitesses et se résorbe pour les hautes vitesses.

La différence de pente entre les fréquences propres issues des essais et des simulations numériques peut s'expliquer par le fait que plus la vitesse de rotation de la soufflante est élevée, plus la liaison entre les aubes et le disque est contrainte. Ainsi, le contact se rapproche d'une liaison parfaite ce qui rigidifie la structure et augmente la fréquence de résonance. D'un point de vue expérimental, l'augmentation de la vitesse de rotation entraîne une augmentation de la surface de contact pour ainsi se rapprocher d'une liaison parfaite. Néanmoins, numériquement, le même nombre de points (et donc la même surface) est en contact pour toutes les vitesses et selon la même disposition. Cette hypothèse pouvant expliquer la pente plus importante des fréquences propres expérimentales en fonction de la vitesse de rotation. De plus, cette hypothèse est corroborée par l'analyse du nombre de points de contact n_c en figures V.26 et V.27 du chapitre V puisque plus le nombre de points de contact augmente, plus la fréquence propre des simulations numériques est importante.

Quantitativement, les écarts pour la famille du premier mode de flexion sont compris entre 2 % pour une vitesse de rotation de 30 % et 0.5 % pour une vitesse de rotation de 100 % du régime nominal de fonctionnement de la soufflante. Pour la famille du deuxième mode de flexion, ceux-ci sont compris entre 4 % et 1.5 % pour les mêmes vitesses de rotation. Bien que ces écarts entre les paramètres modaux expérimentaux et numériques du système linéaire sous-jacent soient supérieurs à l'intervalle d'incertitudes, ils indiquent tout de même une bonne corrélation du modèle numérique par rapport aux essais en rotation ; particulièrement en prenant en compte le fait que le modèle numérique n'est pas recalé spécialement pour ces essais.

Une dernière remarque peut être formulée concernant la densité modale des diagrammes de Campbell des figures VI.20a et VI.20b. En effet, les diamètres nodaux étudiés pour la famille du premier mode de flexion sont contenus dans une bande fréquentielle très étroite tandis qu'ils sont nettement séparés pour la famille du deuxième mode de flexion. Les diagrammes fréquences / diamètres des figures VI.21a et VI.21b permettent d'analyser plus finement cette densité modale. Il est à noter que les incertitudes expérimentales sont toujours tracées autour des courbes expérimentales mais sont une nouvelle fois difficilement perceptibles sur les figures.

Les diagrammes fréquences / diamètres VI.21a et VI.21b sont tracés pour des fréquences propres évaluées à une vitesse de rotation de 70 % du régime nominal de fonctionnement de la soufflante, respectivement pour les familles du premier et du deuxième mode de flexion. Cette vitesse de rotation, faisant partie des trois vitesses de l'étude nonlinéaire, a été choisie parce qu'un nombre plus important d'essais ont été réalisés pour celle-ci (particulièrement des essais à zéro et un diamètres nodaux). Toutefois, les évolutions en fonction du diamètre nodal des autres vitesses de rotation suivent les mêmes tendances, ces dernières n'ont pas été représentées afin de ne pas écraser les courbes.



(a) Famille du premier mode de flexion

(b) Famille du deuxième mode de flexion

Figure VI.21 – Comparaison entre les diagrammes fréquences / diamètres linéaires expérimentaux (-o-) et numériques (-□-), tracés pour $\Omega = 70\,\%$

La première observation pouvant être relevée a trait à l'importante différence d'évolution entre les fréquences propres expérimentales et numériques des modes à zéro et un diamètres nodaux de la famille du premier mode de flexion. En effet, les fréquences propres expérimentales de ces deux modes sont bien plus élevées, respectivement de 70 % et 20 %, que celles des autres modes qui sont toutes du même ordre de grandeur. Le diagramme numérique fréquences-diamètres de la famille du premier mode de flexion ne reflète pas les fréquences propres des modes à zéro et un diamètres nodaux. Effectivement, les fréquences propres de tous les modes, zéro et un diamètres compris, sont contenues dans un très faible intervalle fréquentiel.

Ces écarts fréquentiels sur les deux premiers modes sont certainement dus à un important couplage dynamique de la soufflante avec la ligne d'arbre et les paliers du véhicule d'essais, affectant particulièrement ces deux modes. Le mode à zéro diamètre nodal, dont toutes les aubes vibrent en phase, serait ainsi couplé avec la dynamique axiale de la ligne d'arbre tandis que le mode à un diamètre nodal serait, quant à lui, couplé avec la flexion transverse de cette dernière.

Cette assomption est corroborée par le fait que d'importantes vibrations ont été mesurées sur les accéléromètres, localisés sur les paliers supportant la ligne d'arbre, pour les deux premiers modes de la famille du premier mode de flexion. Ces vibrations sont bien plus faibles, voire négligeables, pour les autres modes excités ce qui consolide cette hypothèse.

Il est difficile d'éviter un couplage de ces deux modes avec le véhicule d'essais. Par conséquent, la dynamique des modes dont le couplage est important est simplement surveillée et ces modes exclus de l'étude expérimentale et numérique de la soufflante.

D'un point de vue expérimental, un véhicule d'essais plus rigide et dimensionné à cet effet, permettrait de réduire grandement, voire de supprimer, ce couplage. D'un point de vue numérique, il serait possible de reproduire ce comportement vibratoire des modes à zéro et un diamètres nodaux en incluant la ligne d'arbre ainsi que les paliers du véhicule d'essais à la modélisation numérique. Ces ajouts entraîneraient néanmoins un accroissement du nombre de degrés de liberté du système, déjà considérable. Une autre solution

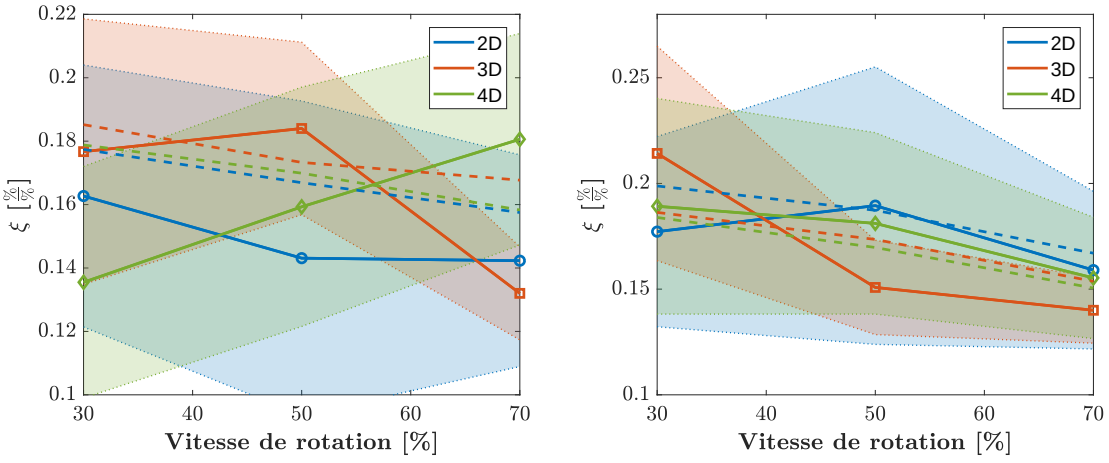
pourrait consister à modéliser l'arbre et les paliers au moyen de ressorts dans les trois directions de l'espace ce qui nécessiterait toutefois un recalage ce ces derniers.

En faisant fi des modes à zéro et un diamètres nodaux, les évolutions des fréquences propres numériques et expérimentales des autres diamètres nodaux étudiés suivent les mêmes tendances pour les familles des deux modes de flexion. Peu de variations de la fréquence propre sont observables en fonction du diamètre nodal pour la famille du premier mode de flexion tandis que la fréquence propre augmente fortement entre les deuxième et quatrième diamètres nodaux de la famille du deuxième mode de flexion. Par ailleurs, cette variation de fréquence propre diminue plus le diamètre du mode excité est grand. Cette importante variation de fréquence propre pour les faibles diamètres nodaux traduit l'importante contribution dynamique du disque dans la réponse, comme mentionné dans le chapitre I.

D'un point de vue quantitatif, les tendances de variation des fréquences propres étant équivalentes expérimentalement et numériquement, les écarts sont sensiblement les mêmes pour les différentes familles de modes étudieés : 1.5 % pour la famille du premier mode de flexion et 2 % pour la famille du deuxième mode de flexion. Comme énoncé précédemment, ces faibles écarts fréquentiels entre les paramètres modaux expérimentaux et numériques du système linéaire sous-jacent indiquent une bonne corrélation du modèle numérique par rapport aux essais en rotation.

3.1.2 Taux d'amortissement

L'étude consacrée au taux d'amortissement du système linéaire sous-jacent est réalisée au moyen d'outils similaires à l'étude des fréquences propres. Tout d'abord, l'évolution du taux d'amortissement linéaire de la soufflante en fonction de la vitesse de rotation est tracée en figures VI.22a et VI.22b, respectivement pour les familles du premier et du deuxième mode de flexion. Les surfaces tracées en transparence autour des courbes expérimentales correspondent aux incertitudes sur l'estimation du taux d'amortissement dont l'évaluation est explicitée en section VI.1.



(a) Famille du premier mode de flexion (b) Famille du deuxième mode de flexion

FIGURE VI.22 – Comparaison entre les évolutions des taux d'amortissement linéaires expérimentaux (—) et numériques (- -) en fonction de la vitesse de rotation

Il est important de noter que l'amortissement structural numérique de la soufflante est recalé par rapport aux taux d'amortissement linéaires (extrapolés à partir des taux d'amortissement identifiés pour plusieurs tensions d'excitation) de chacune des familles de modes de vibration et chacune des vitesses de rotation. Ainsi, pour chaque famille de modes et chaque vitesse de rotation, la moyenne des taux d'amortissement linéaires expérimentaux des trois diamètres nodaux testés est employée comme taux d'amortissement modal numérique. Ces taux d'amortissement modaux numériques sont recalés au moment de l'évaluation du mode complexe non-linéaire, soit sur un secteur de la soufflante dont les frontières du disque sont encastrées.

La première remarque pouvant être formulée concernant les figures VI.22a et VI.22b concerne l'évolution du taux d'amortissement qui décroit en fonction de la vitesse de rotation aussi bien numériquement qu'expérimentalement. Seul le quatrième diamètre nodal de la famille du premier mode de flexion ne suit pas une évolution décroissante. Ces figures permettent aussi d'observer que la décroissance du taux d'amortissement de la famille du deuxième mode de flexion est, en moyenne, plus importante que celle de la famille du premier mode de flexion. En moyenne, celle-ci est de 4 % et 22 % expérimentalement et de 11 % et 18 % numériquement, respectivement pour les familles du premier et du deuxième mode de flexion.

Cette diminution du taux d'amortissement structural en fonction de la vitesse de rotation a été constatée dans d'autres travaux et notamment ceux de Charleux [29], sur une roue aubagée métallique de compresseur dégradée à quatre aubes, permettant d'approcher l'évolution du taux d'amortissement structural expérimental de la famille du premier mode de flexion au moyen d'une loi de type $a/\Omega + b$. Les travaux de Kielb et Abhari [111], sur une roue aubagée métallique de turbine, décrivent, quant à eux, l'évolution du taux d'amortissement structural de la famille du premier mode de flexion en fonction de la vitesse de rotation selon une loi de type $a/\Omega^2 + b$.

Très peu de travaux ont été effectués sur une roue aubagée composite, il est toutefois possible de mentionner Duffy *et al.* [49] qui ont travaillé sur une soufflante composite composée de deux aubes à échelle réduite. Le taux d'amortissement de la famille du premier mode de flexion en fonction de la vitesse de rotation est décroissant dans de faibles proportions (12 % de la valeur initiale), pour une gamme de vitesse de rotation allant de 0 à 5000 tr/min plus importante que celle étudiée dans ces travaux de thèse. Cette évolution du taux d'amortissement de la famille du premier mode de flexion est similaire à celle obtenue dans ce travail de thèse.

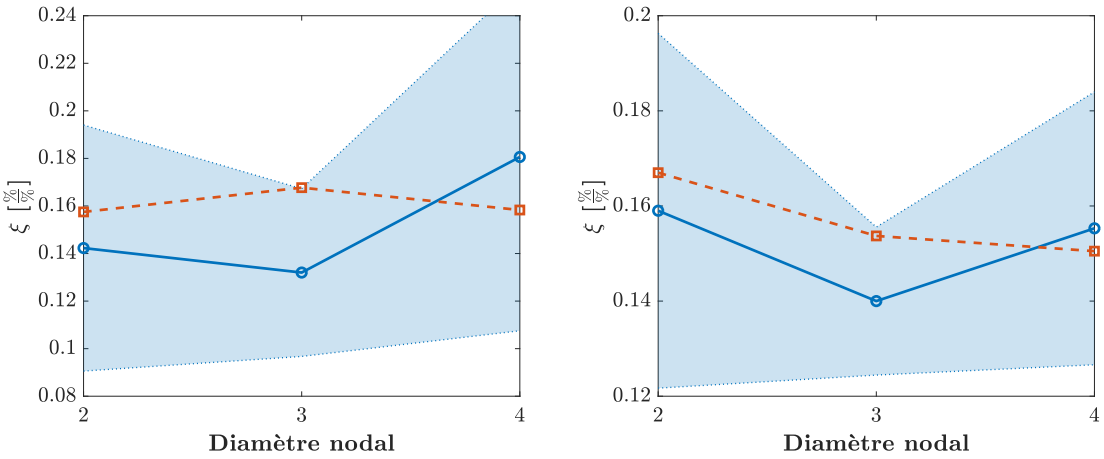
Dans le cas de cette soufflante composite ainsi que dans les travaux de Duffy *et al.*, il est difficile d'extraire une loi empirique de l'évolution du taux d'amortissement en fonction de la vitesse de rotation.

Il est aussi possible de remarquer que le taux d'amortissement linéaire numérique et expérimental de la famille du deuxième mode de flexion est plus élevé, d'environ 16 %, que celui de la famille du premier mode de flexion. Cette observation est opposée à celle réalisée durant la comparaison sur mors pour laquelle le taux d'amortissement du premier mode de flexion était plus important que celui du deuxième d'environ 17 %. L'hypothèse d'une participation dynamique plus importante du disque pour la famille du deuxième mode de flexion peut aussi être avancée dans le cas de l'amortissement, hypothèse préalablement mise en évidence sur les diagrammes fréquences / diamètres.

En plus d'une évolution similaire du taux d'amortissement entre essais et simulations numériques, il est possible de noter que les taux d'amortissement structuraux identifiés à partir des simulations numériques sont contenus dans la plage d'incertitudes de chacun

des tracés expérimentaux. Cette bonne corrélation entre essais et simulations concernant les taux d'amortissement peut sembler logique puisque ces derniers ont été recalés numériquement par rapport aux valeurs identifiées expérimentalement pour une même vitesse, comme explicité plus haut. Toutefois quelques écarts subsistent, ces écarts impactant directement la comparaison non-linéaire entre les amplitudes de vibration expérimentales et numériques de la soufflante.

L'évolution du taux d'amortissement en fonction du mode étudié est représentée en figures VI.23a et VI.23b, respectivement pour les familles du premier et du deuxième mode de flexion, tous deux tracés pour une vitesse de rotation de 70 % du régime nominal de fonctionnement.



(a) Famille du premier mode de flexion (b) Famille du deuxième mode de flexion

FIGURE VI.23 – Comparaison entre les évolutions des taux d'amortissement linéaires expérimentaux (-o-) et numériques (-□-) en fonction du diamètre nodal, tracées pour $\Omega = 70\,\%$

D'un point de vue expérimental, l'évolution des taux d'amortissement en fonction du diamètre nodal ne semble pas monotone pour les deux familles de modes de flexion. Au contraire, les simulations numériques de la famille du premier mode de flexion aboutissent à un taux d'amortissement quasi-constant pour les diamètres nodaux étudiés tandis qu'il est décroissant pour la famille du deuxième mode de flexion. Une diminution d'environ 10 % est perceptible entre le deuxième diamètre nodal et celui du quatrième diamètre nodal, tous deux appartement à la famille du deuxième mode de flexion.

En examinant attentivement les incertitudes expérimentales sur l'évaluation du taux d'amortissement, il serait possible que cette évolution soit monotone aux incertitudes près. De surcroît, il serait intéressant d'étudier l'influence du désaccordage de l'amortissement structural, présenté en section VI.2, sur l'évolution du taux d'amortissement de la soufflante en fonction du diamètre nodal.

En outre, conformément aux observations extraites de la figure VI.22, les taux d'amortissement linéaires numériques sont contenus dans la plage d'incertitudes expérimentales ce qui indique une bonne représentativité du modèle et des simulations numériques par rapport aux essais en rotation.

3.2 Influence du coefficient de frottement sur la réponse non-linéaire

Dans le but de recaler le plus précisément possible l'effet non-linéaire des simulations numériques par rapport aux résultats expérimentaux, il est nécessaire d'évaluer l'influence du coefficient de frottement isotrope μ sur l'évolution des paramètres modaux en fonction de l'amplitude de vibration pour plusieurs vitesses de rotation. À la différence de la comparaison des résultats sur mors, il n'est pas primordial d'évaluer l'influence de l'effort normal de précharge puisque ce dernier est issu des efforts centrifuges appliqués à l'aube en rotation et donc précisément connu.

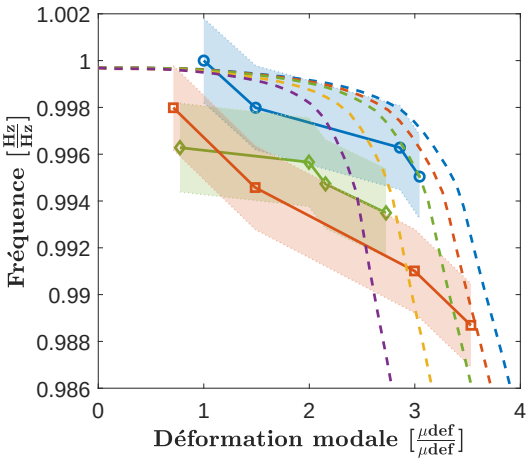
Le recalage du coefficient de frottement est exposé en figures VI.24 et VI.25, respectivement pour les familles du premier et du deuxième mode de flexion. La confrontation entre les paramètres modaux (fréquences propres et taux d'amortissement) expérimentaux et numériques en fonction de l'amplitude de vibration, permettant le recalage du coefficient de frottement, est présentée pour plusieurs vitesses de rotation.

Les résultats numériques de ce recalage du coefficient de frottement sont issus de l'étape d'évaluation du mode complexe non-linéaire qui, pour rappel, est accomplie sur un secteur de la soufflante dont les frontières sont encastrées. Ce recalage à partir des modes complexes non-linéaires est principalement effectué pour des raisons de temps de calcul puisqu'il permet de se soustraire à l'évaluation des modes d'interface et des simulations non-linéaires au moyen de la CNCMS. Bien que cette configuration d'un secteur encastré se rapproche, d'un point de vue dynamique, d'un diamètre nodal de zéro pour une soufflante accordée, ce recalage à partir du mode complexe non-linéaire permet de gagner un temps de calcul considérable. Pour un recalage plus précis de chaque diamètre nodal, ces dernières auraient alors dû être effectuées pour de multiples tensions d'excitation pour chaque diamètre nodal, vitesse de rotation et famille de modes de vibration et naturellement plusieurs valeurs du coefficient de frottement isotrope.

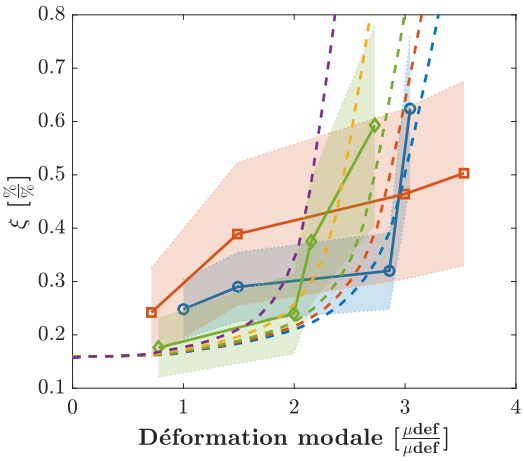
Afin de tracer les évolutions expérimentales des paramètres modaux, il est à noter que l'amplitude modale maximale, ici la déformation modale maximale, $\boldsymbol{\alpha}_k$ (parmi les dix-huit aubes de la soufflante) du mode étudié, définie dans l'équation (V.13) du chapitre V, est retenue comme amplitude de vibration de chaque couple fréquence propre / taux d'amortissement, pour une tension d'excitation donnée.

Par ailleurs, les fréquences propres numériques des figures VI.24 et VI.25 sont normalisées par rapport à la fréquence propre moyenne du système linéaire sous-jacent des trois diamètres nodaux étudiés pour chaque vitesse de rotation et chaque famille de modes de vibration, ceci dans le but de mieux appréhender l'évolution numérique de ce paramètre modal par rapport aux résultats expérimentaux. Toutefois, les écarts entre fréquences propres linéaires expérimentales et numériques demeurent et sont exposés en sections VI.2.1 et VI.3.4.

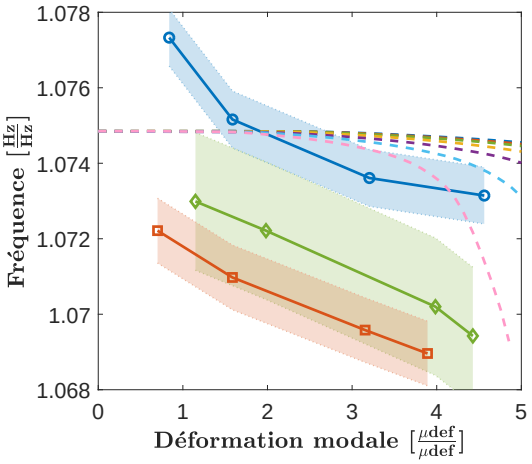
Les légendes des figures VI.24 et VI.25 sont consignées dans le tableau VI.8. De même que précédemment, les surfaces tracées en transparence autour des courbes expérimentales correspondent aux incertitudes de mesure et d'identification modale de la fréquence propre et du taux d'amortissement, dont l'évaluation est explicitée en section VI.1.



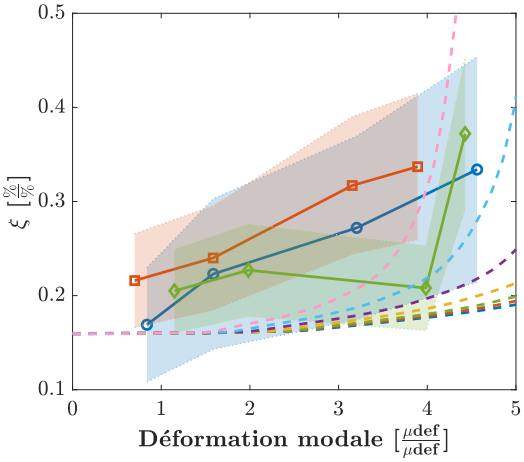
(a) Fréquence propre - $\Omega = 30\,\%$



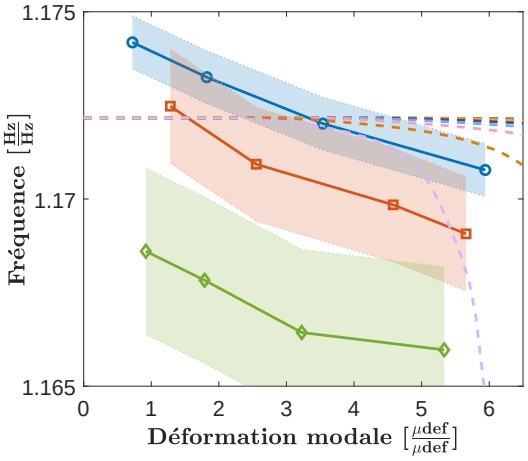
(b) Taux d'amortissement - $\Omega = 30\,\%$



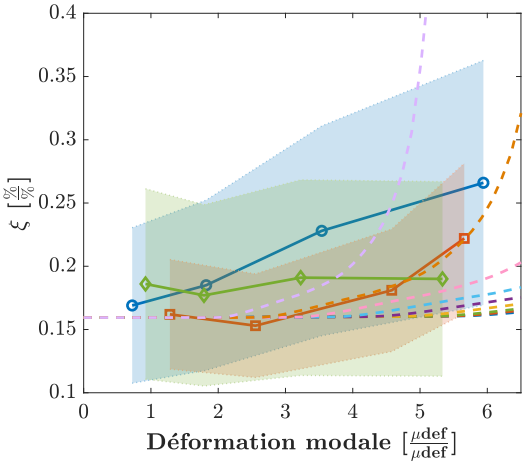
(c) Fréquence propre - $\Omega = 50\,\%$



(d) Taux d'amortissement - $\Omega = 50\,\%$

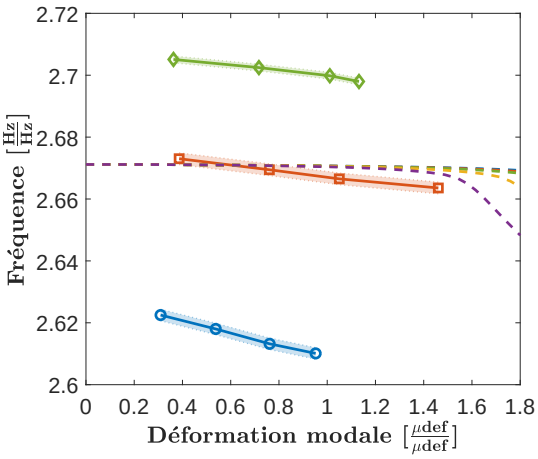


(e) Fréquence propre - $\Omega = 70\,\%$

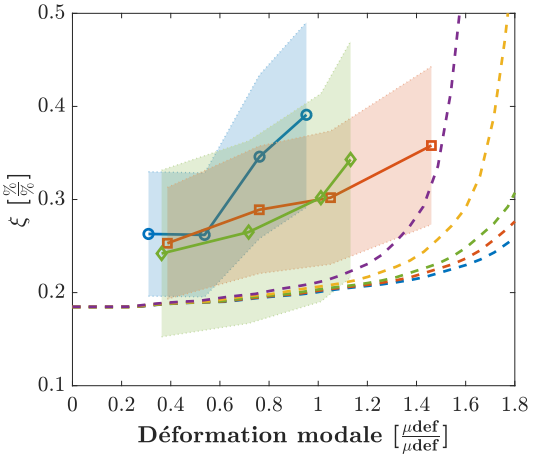


(f) Taux d'amortissement - $\Omega = 70\,\%$

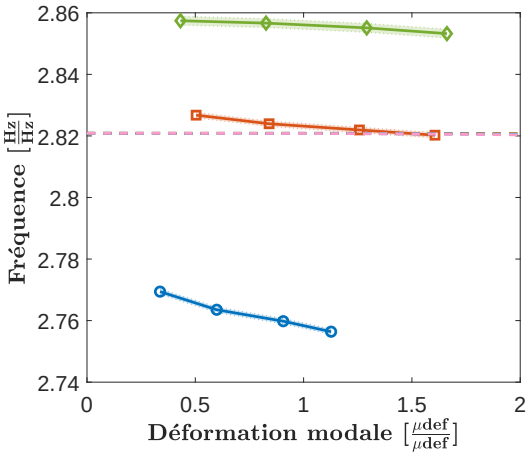
FIGURE VI.24 – Étude d'influence sur le coefficient de frottement pour la famille du premier mode de flexion à différentes vitesses de rotation



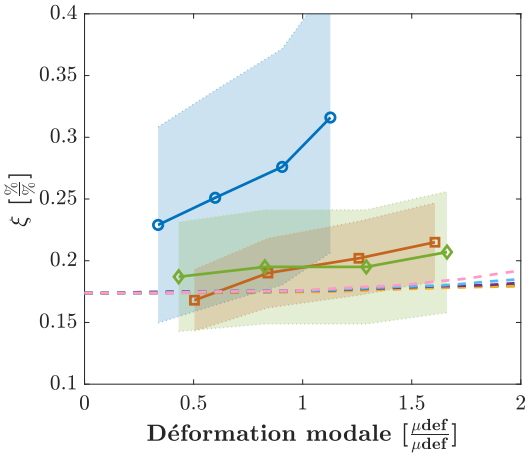
(a) Fréquence propre - $\Omega = 30\,\%$



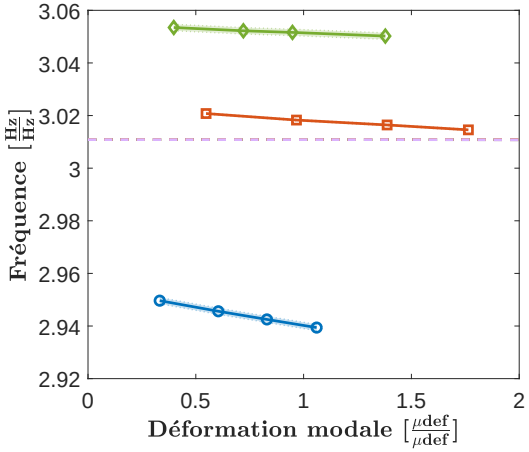
(b) Taux d'amortissement - $\Omega = 30\,\%$



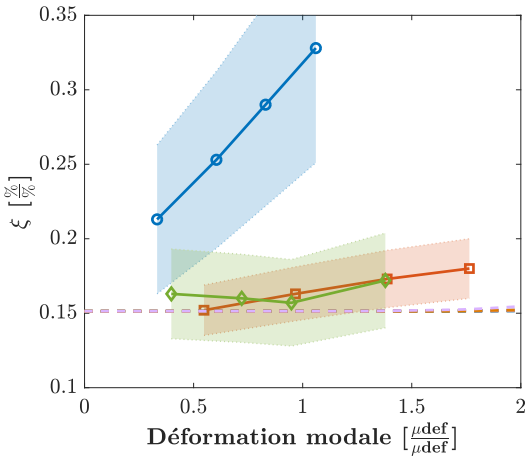
(c) Fréquence propre - $\Omega = 50\,\%$



(d) Taux d'amortissement - $\Omega = 50\,\%$



(e) Fréquence propre - $\Omega = 70\,\%$



(f) Taux d'amortissement - $\Omega = 70\,\%$

Figure VI.25 – Étude d'influence sur le coefficient de frottement pour la famille du deuxième mode de flexion à différentes vitesses de rotation

Expérimental	Diamètre nodal Légende			2D —			3D —			4D —
Numérique	μ Légende	0.20 - -	0.19 - -	0.18 - -	0.16 - -	0.14 - -	0.12 - -	0.10 - -	0.08 - -	0.06 - -

TABLEAU VI.8 – Légendes des figures VI.24 et VI.25

À la première vue de ces différentes figures, les conclusions relatives à l'effet non-linéaire émises sur la comparaison des résultats sur mors semblent s'appliquer à l'étude des paramètres modaux expérimentaux et numériques de la soufflante pour une même vitesse de rotation. En effet, une faible variation de la fréquence propre numérique par rapport à son évolution expérimentale ainsi qu'un décalage du point de décollement initiant la phase de glissement (termes décrits dans le chapitre II) entre les simulations numériques et les essais sont aussi observables dans le cadre de ce recalage de l'effet non-linéaire des simulations numériques.

De plus, pour un coefficient de frottement isotrope identique à celui de la famille du premier mode de flexion, les évolutions des paramètres modaux numériques de la famille du deuxième mode de flexion sont très faibles en comparaison de leurs évolutions expérimentales.

Toutefois, plus l'effet non-linéaire est important, plus ces différences entre l'évolution des paramètres modaux expérimentaux et numériques semblent s'atténuer, comme il peut être observé pour la famille du premier mode de flexion à une vitesse de rotation de 30 % du régime nominal de fonctionnement.

Le but de cette sous-section n'étant pas la comparaison des résultats expérimentaux et numériques mais le recalage de l'effet non-linéaire des simulations numériques, les remarques et les analyses plus approfondies traitant de cette comparaison sont présentées en sous-section VI.3.4.

La comparaison des évolutions des paramètres modaux pour différentes vitesses de rotation permet de remarquer qu'un même coefficient de frottement ne permet pas de recaler de façon satisfaisante l'évolution des paramètres modaux et notamment celle du taux d'amortissement, pour tous les régimes. En effet, afin de recaler précisément l'évolution du taux d'amortissement de la famille du premier mode de flexion, il serait nécessaire de faire varier le coefficient de frottement en fonction de la vitesse de rotation.

Ainsi, plus la vitesse de rotation est importante (et donc plus l'effort normal de précharge est important), plus le coefficient de frottement isotrope diminuerait : de $\mu = 0.19$ pour une vitesse de rotation de 30 % jusqu'à $\mu = 0.075$ pour 70 % du régime nominal de fonctionnement pour la famille du premier mode de flexion, comme l'expose la figure VI.26.

Plusieurs travaux [8, 29, 94, 213] ont aussi noté une diminution du coefficient de frottement en fonction de l'effort normal appliqué au contact. Parmi ceux-ci, Charleux [29], dans ses travaux sur des aubes de compresseur en rotation, exploite une loi régissant cette variation du coefficient de frottement. Cette loi, reprise de l'article d'Ibrahim [94], est consignée dans l'équation

$$\mu = \gamma {N_0}^{\nu} \tag{VI.3}$$

dans laquelle μ est le coefficient de frottement isotrope, N_0 est l'effort normal de précharge appliqué au contact, ν est un paramètre de valeur positive dépendant des états de surface et de la lubrification du contact et γ est une constante.

À partir d'un développement de l'équation (VI.3), exposé dans les travaux de Charleux [29], et d'un couple coefficient de frottement / vitesse de rotation de référence, ici 30 % du régime nominal de fonctionnement, il est possible d'estimer les coefficients de frottement optimaux des différentes vitesses de rotation de la soufflante. La figure VI.26 expose l'évolution de ces coefficients de frottement en fonction de la vitesse de rotation pour différents paramètres ν. Celle-ci est confrontée aux coefficients de frottement optimaux des vitesses de rotation étudiées, obtenus au moyen de la comparaison entre les évolutions du taux d'amortissement expérimental et numérique de la famille du premier mode de flexion de la figure VI.24.

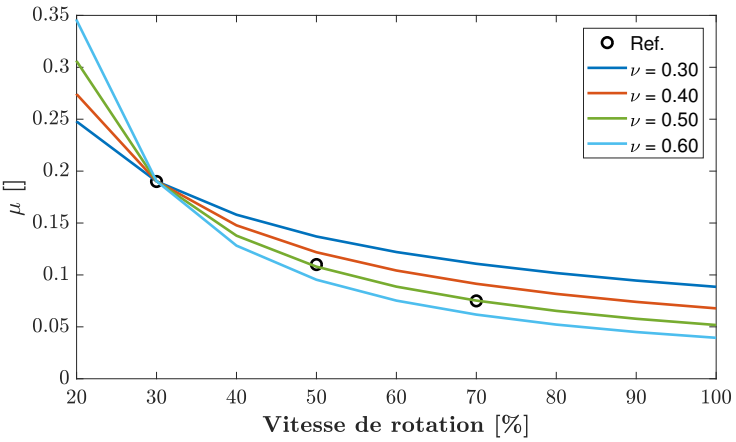


Figure VI.26 – Évolution du coefficient de frottement μ en fonction de la vitesse de rotation pour la famille du premier mode de flexion

La figure VI.26 permet ainsi de constater que l'évolution du coefficient de frottement optimal peut ainsi être estimé au moyen de l'équation (VI.3) dont le paramètre ν est fixé à $\nu = 0.50$. Bien que les deux systèmes soient très différents, un ordre de grandeur du paramètre ν est proposé : Charleux [29] a fixé ce paramètre ν à 0.36 pour un contact entre une aube de turbines en titane et un disque en titane, lubrifié au moyen de disulfure de molybdène (MoS_2).

Par ailleurs, il serait intéressant de coupler cette loi d'évolution du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de rotation avec celle proposée dans le chapitre V consacrée à l'évolution du coefficient de frottement en fonction de l'amplitude de vibration.

Dans la suite de ce travail de comparaison des essais en rotation dans l'enceinte sous-vide du banc PHARE#1 par rapport aux simulations numériques non-linéaires d'une soufflante désaccordée, un unique coefficient de frottement isotrope est employé pour les différentes vitesses de rotation et les différentes familles de modes de vibration. Ce choix d'un unique coefficient de frottement pour toutes les simulations numériques non-linéaires permet ainsi d'évaluer l'erreur commise lorsque le coefficient de frottement est estimé pour une seule vitesse de rotation ; cette pratique étant couramment réalisée en bureau d'étude.

Le coefficient de frottement isotrope est ainsi fixé à $\mu = 0.19$, correspondant au coefficient de frottement permettant de recaler l'évolution du taux d'amortissement de la famille du premier mode de flexion pour une vitesse de rotation égale à 30 % du régime nominal de fonctionnement. Cette combinaison de paramètres a été sélectionnée car elle permet de

mettre en évidence l'effet non-linéaire le plus important de toutes celles étudiées.

Les résultats, post-traitements et analyses expérimentaux et numériques de la suite de ce chapitre sont ainsi principalement focalisés sur cette vitesse de rotation de 30 %. L'évolution de ces derniers en fonction de la vitesse de rotation reste toutefois étudiée.

3.3 Comparaison des réponses à une excitation localisée

Les résultats expérimentaux et numériques aube par aube, exploités dans cette sous-section, sont issus de la réponse des dix-huit aubes de la soufflante à l'excitation localisée d'une seule et unique aube.

L'intérêt d'une excitation localisée spatialement est de faire ressortir tous les modes de la structure à symétrie au moyen d'un seul essai, avec toutefois moins d'énergie (et donc moins d'amplitude de réponse vibratoire) qu'une excitation globale de la soufflante (de type excitation à diamètres exploitée en sous-section VI.3.3) car une seule aube est excitée, révélant ainsi de plus faibles effets non-linéaires. Néanmoins cette propriété spatiale suppose un cas accordé. Pour une structure désaccordée, une excitation localisée permet de faire principalement ressortir les modes localisés. Ces derniers font uniquement participer les aubes couplées avec celle excitée.

La comparaison des réponses, expérimentales et numériques, à une excitation localisée est étudiée, dans un premier temps, en termes d'analyse à diamètres des fonctions de réponse fréquentielle des aubes puis, dans un second temps, en termes de répartition spatiale des amplitudes vibratoires des aubes de la soufflante mais aussi en termes d'interaction dynamique entre les aubes sur les réponses faisant ressortir ces modes localisés.

Tel indiqué en section VI.1, les essais aube par aube sont effectués pour plusieurs aubes excitées localement lors de différents essais (l'aube n°16 puis l'aube n°2 en adoptant la numérotation proposée en figure VI.3) mais aussi pour plusieurs familles de modes de vibration, vitesses de rotation et amplitudes vibratoires. Les simulations numériques sont reproduites pour chacun des cas testés expérimentalement.

3.3.1 Analyse à diamètres de la réponse

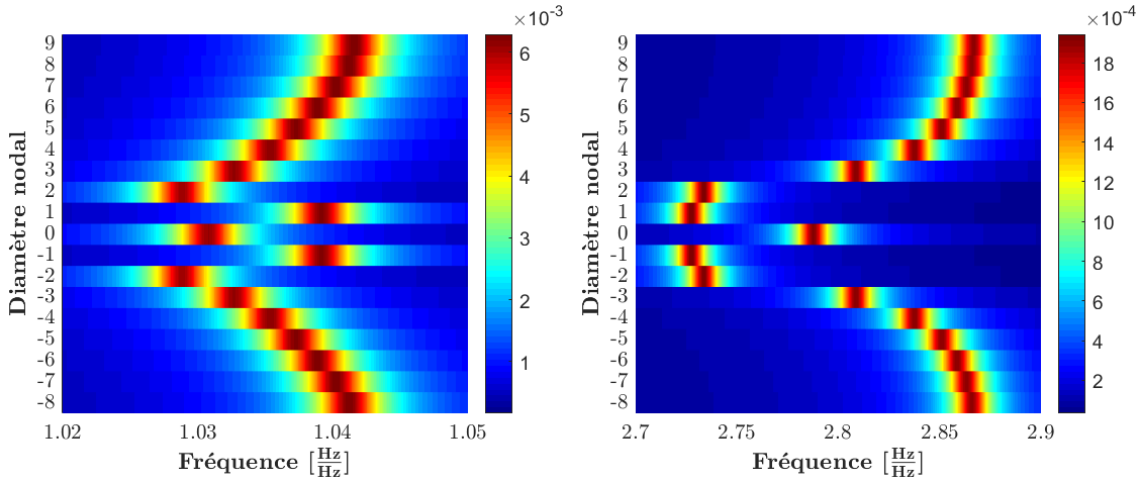
Les post-traitements contenus dans cette sous-section et représentant les répartitions en composantes à diamètres, expérimentales et numériques, sont tracées à partir des fonctions de réponse fréquentielle des aubes de façon similaire à la figure VI.6c.

Dans un premier temps et afin d'offrir un point de comparaison, les décompositions à diamètres résultant de simulations numériques linéaires sur une soufflante accordée pour les familles du premier et du deuxième mode de flexion sont exposées en figure VI.27.

Comme explicité en introduction de cette sous-section, les figures VI.27a et VI.27b permettent d'observer que, dans le cas de la réponse linéaire d'une soufflante accordée issue de simulations linéaires, tous les modes à diamètres répondent à une même amplitude à l'excitation localisée de l'aube n°16. Cette observation est valide pour les familles des deux premiers modes de vibration. De plus, les décompositions en composantes à diamètres d'une soufflante accordée, résultant de simulations dynamiques linéaires, sont identiques quelque soit l'aube excitée.

Tant pour la famille du premier que pour celle du deuxième mode de flexion, il est possible de retrouver la répartition fréquentielle des modes à diamètres exposée en fi-

gures VI.21a et VI.21b, la famille du deuxième mode de flexion étant toujours plus étendue fréquentiellement que celle du premier mode de flexion notamment pour les faibles diamètres nodaux.



(a) Famille du premier mode de flexion (b) Famille du deuxième mode de flexion

Figure VI.27 – Décompositions à diamètres issues de simulations linéaires d'une soufflante accordée, évaluées pour une excitation $v = 40\,\mathrm{V}$ de l'aube n°16, au voisinage des familles des deux premiers modes de flexion à $\Omega = 30\,\%$ (Déformations $[\frac{\mu\mathrm{def/V}}{\mu\mathrm{def}}]$ min. ■ et max. ■)

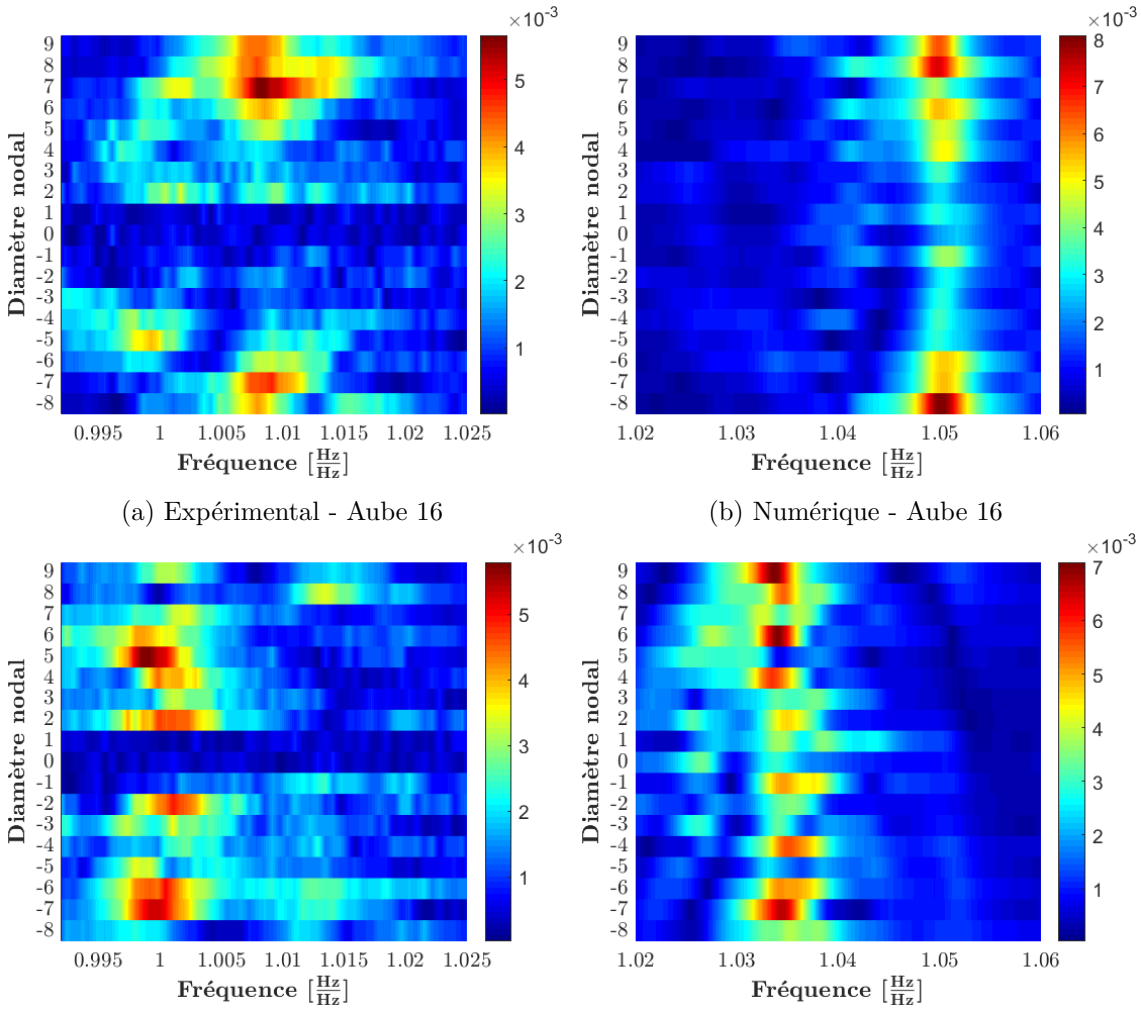
Les figures VI.28 et VI.29 représentent les répartitions des composantes à diamètres des familles du premier et du deuxième mode de flexion, issues d'essais en rotation et de simulations non-linéaires d'une soufflante désaccordée fréquentiellement (à partir des fréquences propres évaluées pour chacun des deux modes de vibration lors des essais sur mors). Ces décompositions à diamètres sont évaluées pour une vitesse de rotation de 30 % du régime nominal de fonctionnement et une tension d'excitation de 40 V qui est la plus faible tension générée lors des essais et simulations à excitations localisées, permettant ainsi de limiter les effets non-linéaires.

Par rapport aux décompositions à diamètres d'une soufflante accordée, il est possible de remarquer que les composantes à diamètres ne répondent pas toutes à la même amplitude sur les décompositions à diamètres d'une soufflante désaccordée. De surcroît, la répartition des composantes à diamètres est différente en fonction de l'aube excitée et dépend ainsi du mode localisé excité, ce qui justifie de tester plusieurs excitations localisées dans le cas désaccordé.

En effet, il est possible de remarquer sur la figure VI.28, exploitant les réponses de la famille du premier mode de flexion, que le mode localisé répondant à l'excitation de l'aube n°16 fait ressortir les composantes à diamètres nodaux d'indice élevé tandis que celui répondant à l'excitation de l'aube n°2 fait ressortir les composantes des premiers diamètres nodaux.

Ces différentes remarques restent valides pour la famille du deuxième mode de flexion comme observé en figure VI.29.

De plus, il est possible de remarquer que les résonances de ces modes localisés (différentes pour les aubes n°16 et n°2) de la famille du deuxième mode de flexion sont situées à des fréquences plus élevées que les modes globaux à deux, trois et quatre diamètres nodaux de la figure VI.25 ou VI.40 de la sous-section suivante. Ces modes localisés possèdent donc des fréquences de résonances similaires à celles des modes à diamètres nodaux élevés



(a) Expérimental - Aube 16

(b) Numérique - Aube 16

(c) Expérimental - Aube 2

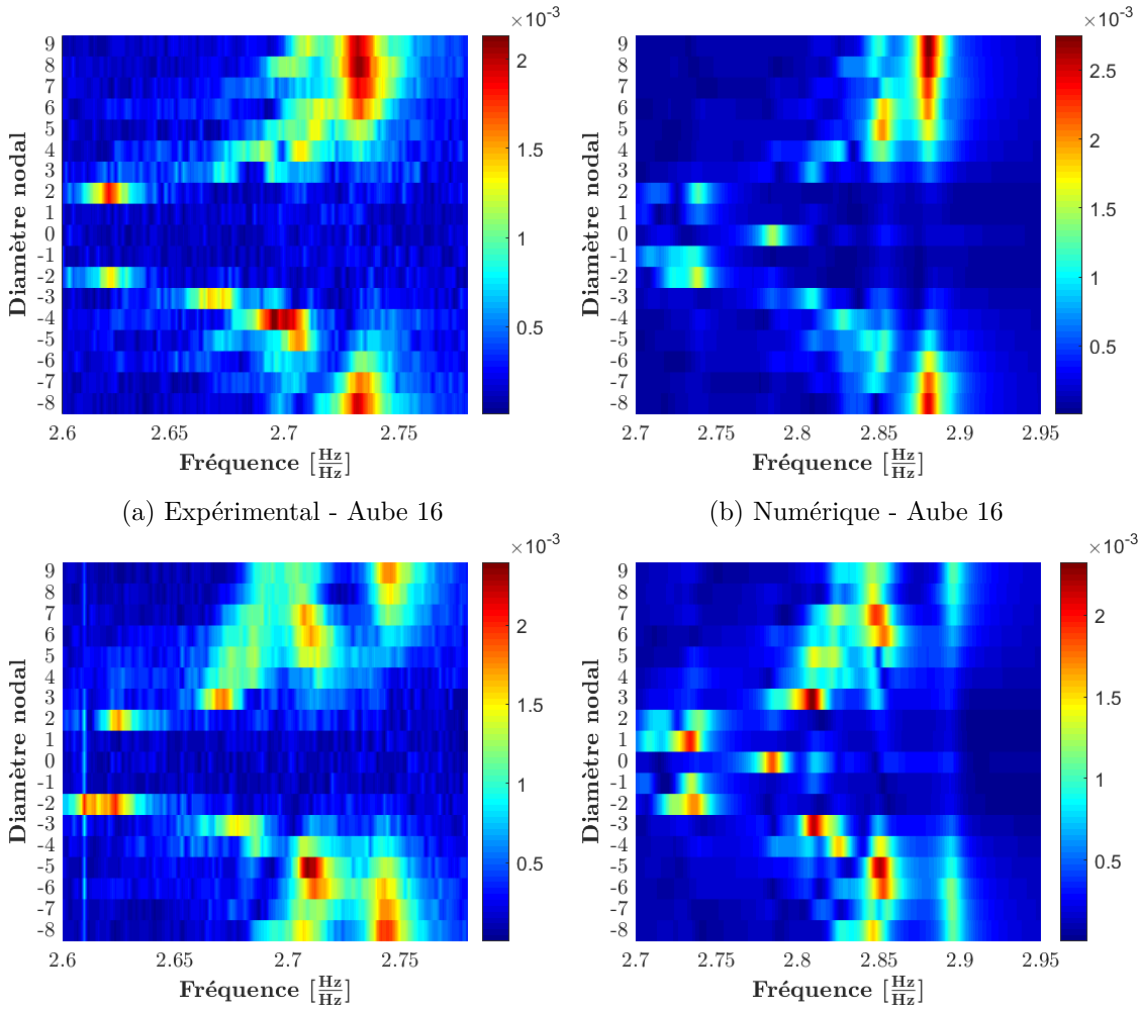
(d) Numérique - Aube 2

FIGURE VI.28 – Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques pour une excitation $v = 40\,\mathrm{V}$ de l'aube n°16 puis n°2, au voisinage de la famille du premier mode de flexion à $\Omega = 30\,\%$ (Déformations $[\frac{\mu\mathrm{def/V}}{\mu\mathrm{def}}]$ min. ■ et max. ■)

pour lesquels le disque participe peu à la dynamique : ceux-ci étant ainsi moins organisés que les premiers modes à diamètres et plus sensibles aux effets de désaccordage, ils offrent ainsi des conditions plus propices au développement de modes localisés.

Pour finir, les décompositions à diamètres des modes localisés de la famille du deuxième mode de flexion semblent plus pures, aussi bien d'un point de vue expérimental que numérique. En effet, les modes à deux et trois diamètres nodaux ressortent distinctement sur la figure VI.29 et paraissent moins perturbés par d'autres composantes que les autres modes car ceux-ci sont plus couplés avec le disque comme indiqué en sous-section VI.3.1 et particulièrement en figure VI.21.

La comparaison entre les répartitions expérimentales et numériques des composantes à diamètres pour les deux familles de modes de flexion étudiées permet de constater que les mêmes tendances sont apparentes. En effet, les amplitudes de réponse des composantes à diamètres diffèrent en fonction de l'aube excitée et les principales composantes à diamètres, ressortant sur les décompositions à diamètres, sont aussi distinctes pour chacun des modes localisés excités (hautes composantes à diamètres nodaux pour l'aube n°16 et



(a) Expérimental - Aube 16

(b) Numérique - Aube 16

(c) Expérimental - Aube 2

(d) Numérique - Aube 2

Figure VI.29 – Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques pour une excitation $v = 40\,\mathrm{V}$ de l'aube n°16 puis n°2, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion à $\Omega = 30\,\%$ (Déformations $[\frac{\mu\mathrm{def/V}}{\mu\mathrm{def}}]$ min. ■ et max. ■)

premières composantes à diamètres pour l'aube n°2).

De plus, une bonne corrélation entre les décompositions à diamètres numériques et expérimentales peut être constatée, et particulièrement pour la famille du deuxième mode de flexion. Toutefois, il est possible de noter que la décomposition en composantes à diamètres est un peu plus riche sur les essais que sur les simulations numériques.

Il est possible de remarquer que l'amplitude maximale des réponses à diamètres est plus élevée numériquement, quelque soit l'aube ou le mode de vibration excité. Ce décalage vers les amplitudes vibratoires plus élevées est, notamment, dû aux écarts entre les paramètres modaux linéaires expérimentaux et numériques (principalement le taux d'amortissement) évalués en sous-section VI.3.1, mais aussi au recalage de l'excitation piézoélectrique, le coefficient d_{31}), par rapport aux essais sur mors et non par rapport à ces essais en rotation.

De plus, les fréquences de résonances des modes localisés étudiés dans cette sous-section sont plus élevées numériquement, à l'instar des comparaisons exposées sous-section VI.3.1.

Les figures D.13 et D.14, placées en annexe, représentent respectivement les évolutions des décompositions à diamètres, expérimentales et numériques, en fonction de la tension d'excitation et en fonction de la vitesse de rotation.

Les répartitions des composantes à diamètres en fonction de la tension d'excitation, en figure D.13, sont tracées au voisinage de la famille du premier mode de flexion afin de maximiser l'effet non-linéaire. Toutefois, il est possible de remarquer que la forme des répartitions à diamètres ne varie que très peu, seuls des pics de résonance plus étendus et décalés vers les basses fréquences peuvent être remarqués. Naturellement, ces variations sont liées à l'effet non-linéaire de contact / frottement de plus en plus important en fonction de l'amplitude de vibration et donc de la tension d'excitation.

Cette tendance est confirmée sur les simulations numériques non-linéaires. De plus, outre une amplitude maximale de réponse toujours plus importante numériquement, il est aussi possible de remarquer que la décroissance de l'amplitude maximale (liée à l'effet non-linéaire) des composantes à diamètres numériques est aussi légèrement plus importante.

De même que la décomposition à diamètres en fonction de la tension d'excitation, la répartition des composantes à diamètres n'évolue pas en fonction de la vitesse de rotation (du moins entre 30 % et 70 % du régime nominal de rotation de la soufflante) tel montré en figure D.14. Toutefois, au contraire de l'évolution précédente, les pics de résonances sont plus étroits ce qui est une conséquence de la diminution du taux d'amortissement en fonction de la vitesse de rotation exposée en figure VI.22.

Comme précédemment, cette tendance est confirmée numériquement. Toutefois, il est possible de remarquer que l'évolution expérimentale de l'amplitude maximale de réponse est différente de celle numérique. En effet, celle-ci croit en fonction de la vitesse de rotation d'un point de vue expérimental tandis qu'elle décroit numériquement.

3.3.2 Analyse spatiale de la réponse

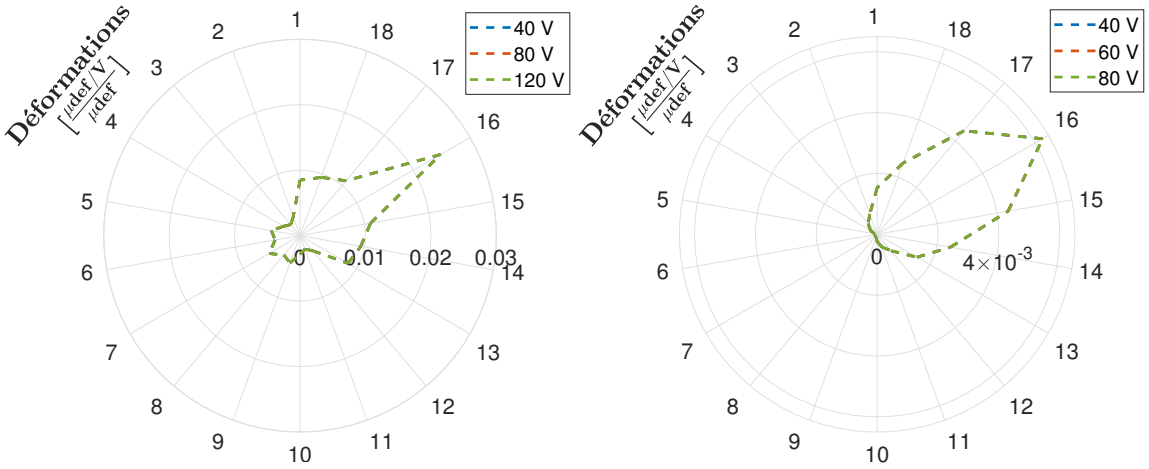
Comme exposé en sous-section 3.3.1, une excitation localisée permet de faire ressortir des modes localisés dans la réponse de la soufflante désaccordée. Ainsi, l'intérêt de cette sous-section réside dans l'étude, expérimentale et numérique, des répartitions spatiales des amplitudes de vibration des aubes (dans le domaine physique) résultant d'une excitation localisée sur une aube. De plus, les différences de propriété de répartition entre un système accordé et désaccordé sont mises en évidence dans cette partie.

Dans la suite de cette sous-section, la sensibilité en vitesse de rotation et amplitude de vibration de ces répartitions spatiales est étudiée pour plusieurs familles de modes de vibration et différents modes localisés d'un point de vue expérimental et numérique.

Les répartitions spatiales des amplitudes vibratoires sont représentées dans cette section par l'intermédiaire de diagrammes polaires évalués à partir des fonctions de réponse fréquentielle des aubes de la soufflante. Ces figures sont tracées à une fréquence donnée, choisie de telle sorte que les amplitudes de déformation des dix-huit aubes sont ainsi tracées à la fréquence d'excitation exhibant l'amplitude maximale de déformation [21]. Comme décrit pour tracer le diagramme polaire de la figure VI.6b, les aubes de la soufflante sont positionnées selon les angles θ du diagramme (en suivant la numérotation de la figure VI.3) et les amplitudes de déformation selon le rayon r associé à chaque aube.

21. La fréquence à laquelle les diagrammes polaires sont tracés n'est donc pas forcément la même en fonction du mode localisé excité.

À l'instar de la sous-section précédente, la première figure VI.30 de cette sous-section résulte de simulations numériques linéaires sur une soufflante accordée au voisinage des familles du premier et du deuxième mode de flexion. Ces figures illustrent uniquement l'excitation localisée de l'aube n°16, toutefois les répartitions spatiales des amplitudes vibratoires sur une soufflante accordée ont cette première propriété d'être identiques pour une excitation localisée différente (naturellement, autour de l'aube en question). Par exemple, la répartition spatiale des amplitudes de vibration résultant de l'excitation localisée de l'aube n°2, peut se déduire de celle avec l'aube n°16 au moyen d'une rotation de 80°.



(a) Famille du premier mode de flexion (b) Famille du deuxième mode de flexion

Figure VI.30 – Répartitions spatiales des amplitudes vibratoires issues de simulations linéaires d'une soufflante accordée pour plusieurs excitations de l'aube n°16, au voisinage des familles des deux premiers modes de flexion à $\Omega = 30\,\%$

La figure VI.30 permet de remarquer une seconde propriété : les répartitions spatiales des amplitudes de réponse des aubes sont parfaitement symétriques autour de l'aube excitée dans le cas de simulations linéaires d'une soufflante accordée. De plus, l'aube excitée présente toujours la plus forte amplitude de vibration de toute les aubes. Ces motifs diffèrent néanmoins en fonction de la famille de mode de vibration excitée. La réponse est plus localisée pour la première famille de mode, ceci peut s'expliquer par le fait que sa densité modale est plus forte et donc que plus de mode à diamètres participent à la fréquence d'excitation. Il est aussi possible de noter que peu d'aubes répondent autour de celle excitée.

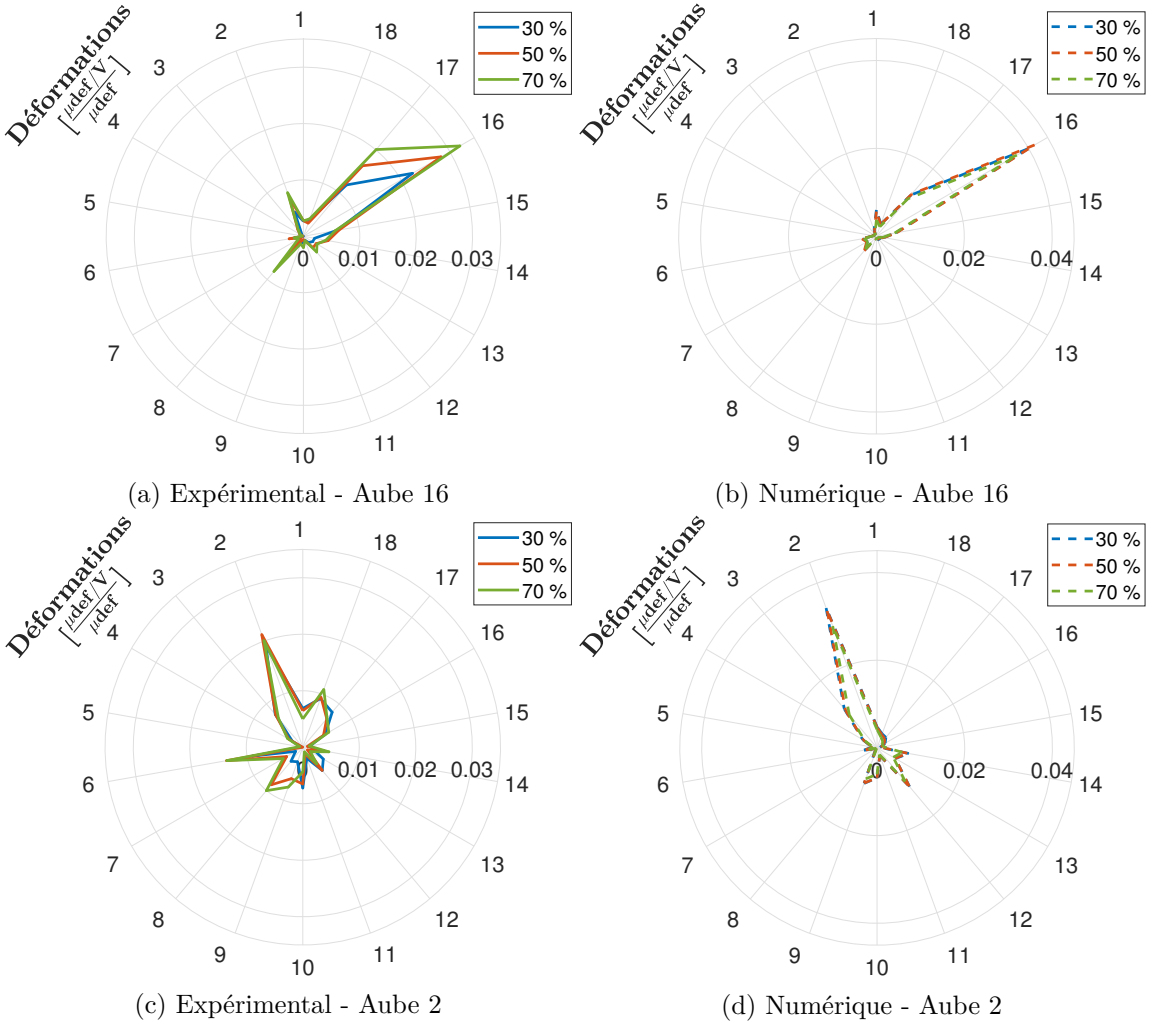
Comme indiqué précédemment, ces répartitions spatiales sont tracées à la fréquence d'excitation pour laquelle l'amplitude de réponse est maximale. Dans le cas de ces deux figures, cette fréquence est située au voisinage des hauts diamètres nodaux de la figure VI.27. Cette répartition est donc une combinaison spatiale des modes à diamètres, participant à la fréquence de tracé. La symétrie spatiale de la réponse forcée résulte ainsi de la symétries des modes à diamètres du système accordé.

Toutefois, en choisissant une fréquence d'excitation à laquelle un seul diamètre nodal participe majoritairement (par exemple le troisième diamètre nodal de la famille du deuxième mode de flexion de la figure VI.27b, qui est le mode le plus isolé), la répartition spatiale des amplitudes de réponse se rapprocherait fortement de la forme du mode en question.

Dans le cas d'un amortissement structural très faible, il serait possible de distinguer une grande majorité des modes à diamètres dans les répartitions spatiales des amplitudes

(naturellement à des fréquences d'excitation différentes) ; les pics de résonances étant alors moins larges (appelés modes non-couplés par l'amortissement selon certains auteurs).

Les figures VI.31 et VI.32 représentent les répartitions spatiales des amplitudes vibratoires des aubes pour les familles du premier et du deuxième mode de flexion, issues d'essais en rotation et de simulations non-linéaires d'une soufflante désaccordée fréquentiellement (à partir des fréquences propres évaluées pour chacun des deux modes de vibration lors des essais sur mors). Ces répartitions spatiales sont évaluées pour une tension d'excitation de 40 V et pour toutes les vitesses de rotation étudiées.



(a) Expérimental - Aube 16

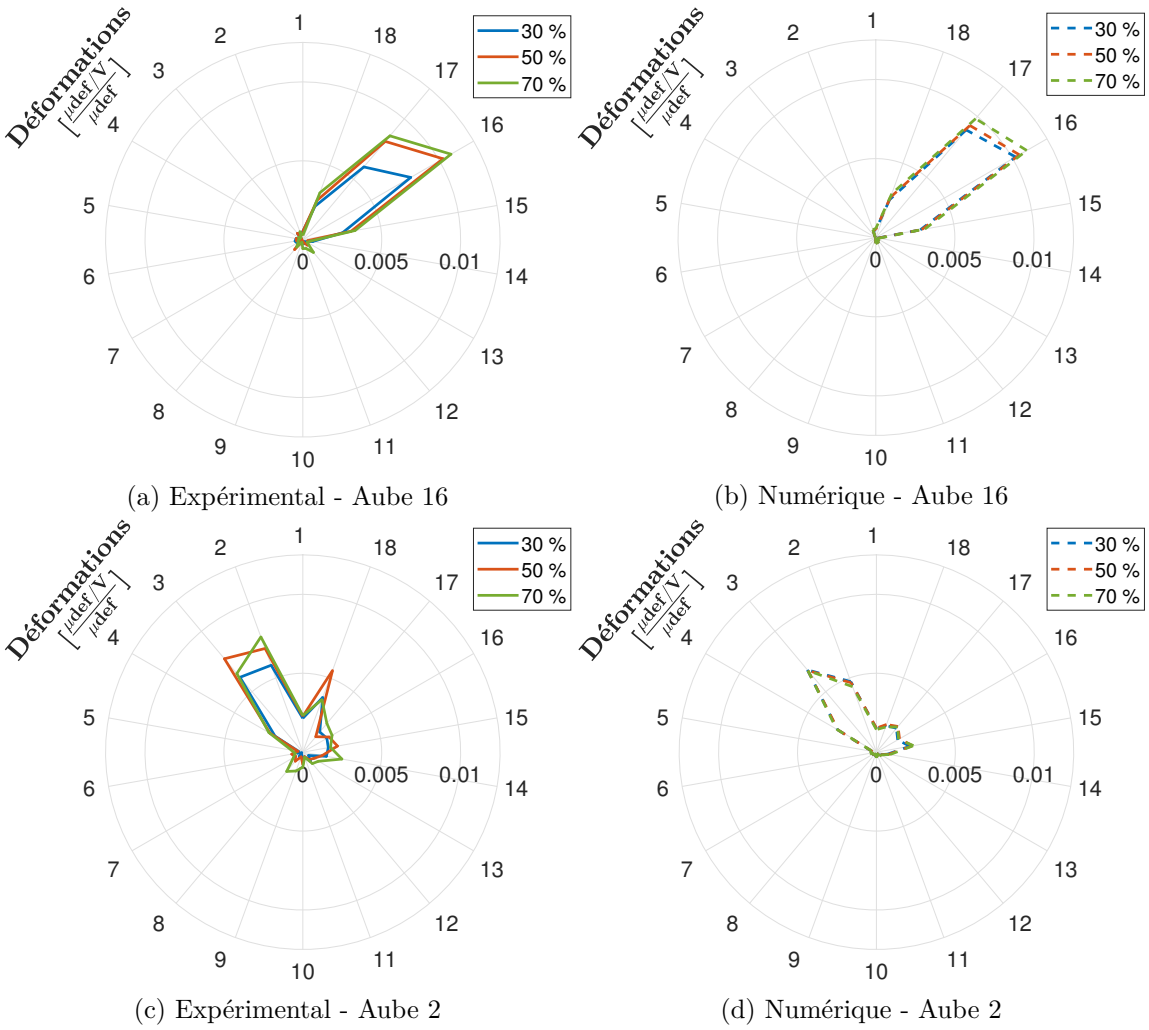
(b) Numérique - Aube 16

(c) Expérimental - Aube 2

(d) Numérique - Aube 2

FIGURE VI.31 – Comparaison des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques pour une excitation $v = 40\,\mathrm{V}$ de l'aube n°16 puis n°2, au voisinage de la famille du premier mode de flexion à plusieurs vitesses de rotation

Dans un premier temps, d'un point de vue expérimental, la première conclusion pouvant être extraite des figures VI.31 et VI.32 concerne la répartition spatiale qui n'est plus symétrique par rapport à l'aube excitée. En effet, quelque soit le mode localisé ou la famille de modes de vibration excitée, une seule aube (en plus de celle excitée) semble répondre de manière significative par rapport aux autres. Celle-ci est positionnée en amont de l'aube excitée, selon le sens de numérotation de la soufflante (défini en figure VI.3), dans tous les cas testés expérimentalement. Les amplitudes de vibration des autres aubes sont faibles voire négligeables en comparaison de celle-ci.



(a) Expérimental - Aube 16

(b) Numérique - Aube 16

(c) Expérimental - Aube 2

(d) Numérique - Aube 2

Figure VI.32 – Comparaison des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques pour une excitation $v = 40\,\mathrm{V}$ de l'aube n°16 puis n°2, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion à plusieurs vitesses de rotation

De plus, il est possible de remarquer que le ratio entre l'amplitude de l'aube adjacente et celle de l'aube excitée est plus important pour le mode localisé excité de la famille du deuxième mode de flexion que pour celui de la première famille. Cette même observation est aussi constatée sur les précédentes répartitions spatiales, en figure VI.30, issues de simulations linéaires sur une soufflante accordée.

Par ailleurs, il est possible d'observer que les répartitions spatiales présentent plusieurs aubes, différentes de l'aube adjacente, produisant des amplitudes vibratoires notables, et particulièrement lorsque l'aube n°2 est excitée. Ces aubes diffèrent en fonction de l'aube excitée (et donc du mode localisé) mais aussi en fonction de la famille de modes excitée. Ces répartitions spatiales sont donc inhérentes au mode localisé excité.

La seconde conclusion pouvant être dégagée de ces figures a trait aux répartitions spatiales issues de l'excitation localisée des aubes n°2 et n°16 qui ne ne déduisent plus l'une de l'autre à partir d'une rotation d'un angle égal à celui séparant ces deux aubes. Cette remarque traduit la perte de symétrie de la répartition spatiale des amplitudes de vibration pour une structure désaccordée.

Dans un second temps, la comparaison entre les essais et les simulations numériques à excitation localisée est abordée. D'un point de vue général, les simulations numériques non-linéaires reflètent de façon très satisfaisante les répartitions spatiales des amplitudes de réponse des aubes observées lors des essais à excitations localisées sur la soufflante en rotation. Il est aussi possible de remarquer que le ratio expérimental en amplitude entre l'aube excitée et l'aube adjacente (répondant de façon notable) est convenablement restitué numériquement et particulièrement la différence de ce même ratio entre la famille du premier mode de flexion et celle du deuxième mode de flexion, mentionnée plus haut.

Toutefois, bien que plusieurs aubes, autres que celle excitée et son aube adjacente, présentent des amplitudes de vibration notable sur les simulations numériques, celles-ci sont différentes de celles observées durant les essais à excitations localisées.

De plus, les figures VI.32c et VI.32d, exhibant les répartitions spatiales des amplitudes vibratoires des aubes, expérimentales et numériques de la famille du deuxième mode de flexion pour une excitation de l'aube n°2, permettent de constater que les simulations numériques reproduisent l'amplitude de réponse plus importante de l'aube adjacente par rapport à celle excitée.

Intuitivement, il serait possible de considérer que l'interaction dynamique entre les aubes pour un mode localisé est plus importante lorsque la vitesse de rotation augmente puisque l'effort normal de contact augmente rigidifiant ainsi la liaison entre le disque et les aubes. Toutefois, à l'instar des décompositions à diamètres exposées en sous-section 3.3.1, les répartitions spatiales des amplitudes vibratoires des aubes, issues des essais à excitations localisées, n'évoluent pas en fonction de la vitesse de rotation (entre 30 % et 70 % du régime nominal de rotation de la soufflante) quelque soient le mode localisé et la famille de modes excités.

Les simulations numériques, associées à ces essais, permettent de reproduire le comportement expérimental. En effet, les répartitions spatiales des amplitudes de vibration des aubes sont similaires quelque soit la vitesse de rotation, parmi les régimes étudiés.

Les figures D.15 et D.16, placées en annexe, présentent la sensibilité des répartitions spatiales des amplitudes de réponse des aubes, expérimentales et numériques, en fonction de la tension d'excitation (et donc du niveau vibratoire) pour plusieurs vitesses de rotation et pour les familles du premier et du deuxième mode de flexion, respectivement.

Bien que l'effet non-linéaire augmente en fonction de l'amplitude de déformation, les répartitions spatiales des amplitudes de déformation des aubes n'évoluent pas en fonction de la tension d'excitation (en termes de rapport d'amplitude entre les différentes aubes), aussi bien numériquement qu'expérimentalement, quelque soient le mode localisé excité et la vitesse de rotation de la soufflante.

Il serait intéressant de tracer la répartition spatiale des amplitudes vibratoires numériques pour un important glissement en pied d'aube (et donc un important niveau vibratoire). Il serait alors probable de visualiser une évolution de la répartition spatiale et ainsi une modification de la forme du mode localisé excité. Pour un important glissement en pied d'aube, l'interaction dynamique entre les aubes pour ce mode localisé devrait être plus faible et il serait ainsi possible d'observer une répartition spatiale des amplitudes vibratoires presque exclusivement sur l'aube excitée.

Les remarques énoncées dans la sous-section précédente, concernant les amplitudes de réponse expérimentales par rapport à celles simulées numériquement, restent valides pour ces comparaisons des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires des aubes en fonction de la vitesse de rotation, de la tension d'excitation ou du mode localisé excité.

L'analyse des réponses de cette sous-section pourrait être complétée par l'analyse modale des modes identifiés afin de confirmer le caractère localisé de ceux-ci dans le cas désaccordé, notamment en ce qui concerne les formes modales.

Par ailleurs, de plus amples remarques et observations concernant la comparaison entre les amplitudes de vibration expérimentales et numériques sont proposées dans la sous-section suivante consacrée aux réponses à une excitation à diamètres.

3.4 Comparaison des réponses à une excitation à diamètres

Contrairement aux essais et simulations numériques réalisés avec une excitation localisée, les réponses forcées obtenues au moyen d'une excitation à diamètres (dont la génération est décrite en section VI.1) révèlent, notamment, un mode possédant une composante à diamètres prépondérante ; celle-ci étant dans la grande majorité des cas, de même indice que celle de l'excitation. Ce mode est ainsi celui principalement étudié dans cette comparaison entre essais et simulations numériques effectués avec une excitation à diamètres. De plus, une excitation de toutes les aubes selon des schémas à diamètres aboutit à des amplitudes de vibration supérieures à celles obtenues pour une excitation localisée, permettant ainsi l'étude d'effets non-linéaires notables.

Le désaccordage de la soufflante fait ressortir plusieurs modes au sein de la réponse forcée, en plus de celui présentant une composante à diamètres prépondérante de même indice que l'excitation. Parmi ceux-ci, le mode dégénéré (terme explicité dans le chapitre I) par rapport à ce dernier, dont la composante dominante est d'indice opposé à celle de l'excitation, se manifeste particulièrement dans les différentes réponses forcées. Celui-ci est mis en évidence dans la section VI.2 traitant de l'influence du désaccordage sur la soufflante. Pour simplifier la désignation de ces modes, le mode présentant une composante prépondérante de même indice que l'excitation est nommé mode principal tandis que son mode dégénéré est nommé mode secondaire (Les modes sont toutefois quasi-stationnaires, la différence d'amplitude des indices de signe opposé étant généralement faible).

Dans un premier temps, la comparaison des réponses à une excitation à diamètres est abordée d'un point de vue du contenu spectral de la réponse. À l'instar de la sous-section précédente, une analyse à diamètres des fonctions de réponse fréquentielle des aubes est réalisée avant d'étudier la répartition spatiale des amplitudes vibratoires des aubes.

Dans un deuxième temps, les modes de la famille du deuxième mode de flexion, dont les paramètres modaux ont été identifiés, sont analysés en composantes à diamètres puis comparés d'un point de vue expérimental et numérique. Par la suite, l'évolution des paramètres modaux (fréquences propres et taux d'amortissement) de ces modes est aussi comparée, expérimentalement et numériquement, en fonction de leur amplitude modale (ici déformation modale).

Pour achever cette sous-section, l'effet de Coriolis de la soufflante en rotation est étudié à partir des modes principaux et secondaires identifiés sur les différentes réponses expérimentales et numériques (pour lesquelles l'effet n'est pas intégré aux simulations) mais aussi à partir de la réponse de la soufflante à une excitation contra-rotative.

Similairement à la sous-section précédente, la sensibilité de la soufflante est testée pour plusieurs familles de modes de vibration, diamètres nodaux excités, vitesses de rotation et tensions d'excitation. Il est à noter que le sens de propagation des excitations à diamètres est, quant à lui, fixé dans le sens co-rotatif car celui-ci est plus représentatif des excitations moteurs en fonctionnement. Toutefois, d'autres types d'excitation ont été testés pour la

caractérisation dynamique de la soufflante et certaines sont proposées en fin de section. Il est à noter que les simulations numériques sont reproduites pour chacun des cas testés expérimentalement.

3.4.1 Contenu spectral de la réponse

Cette sous-section est consacrée à la comparaison expérimentale et numérique du contenu spectral de la réponse des aubes de la soufflante résultant d'une excitation à diamètres. À l'image de la sous-section consacrée aux réponses à une excitation localisée, l'analyse du contenu à diamètres de la réponse ainsi que la répartition spatiale des amplitudes vibratoires sont exploitées pour caractériser le contenu spectral de la réponse.

Analyse à diamètres de la réponse. À l'instar des post-traitements exposés en sous-section VI.3.3, les décompositions à diamètres, expérimentales et numériques, de cette sous-section sont issues de la fonction de réponse fréquentielle des aubes de la soufflante et sont tracées de façon similaire à la figure VI.6c.

L'influence du désaccordage fréquentiel sur la structure et l'évolution de celui-ci en fonction du taux de désaccordage a été étudiée en section VI.2, ceci pour des simulations dynamiques linéaires et non-linéaires.

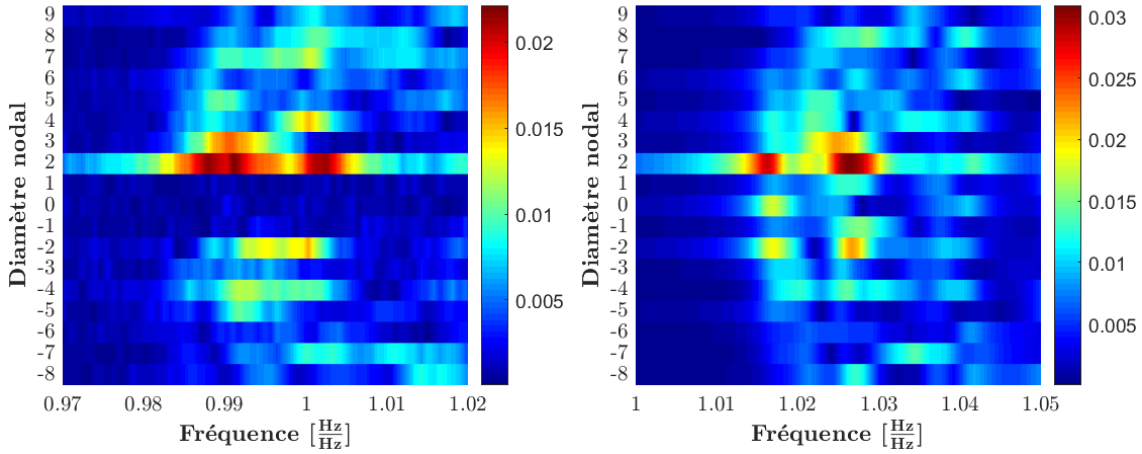
Plusieurs observations et conclusions ont été extraites de celles-ci, notamment une augmentation de l'étalement fréquentiel des différents modes ainsi qu'une répartition de l'énergie vibratoire sur les différentes composantes à diamètres plus importante, lorsque le taux de désaccordage augmente.

De surcroît, le désaccordage fréquentiel [22] désorganise la forme du mode ce qui enrichit la répartition en composantes à diamètres de ce mode. Par conséquent, il est possible de remarquer que le mode principal (dont la composante prépondérante est de même indice que l'excitation) fait ressortir une composante notable d'indice opposé (pour rappel il s'agit d'un mode quasi-stationnaire). Par ailleurs, un mode secondaire (dont la composante prépondérante est, le plus souvent, d'indice opposé à celle de l'excitation) ressort particulièrement dans la réponse forcée et notamment en figure VI.15e. Ce mode est dit dégénéré (terme explicité dans le chapitre I) par rapport au mode principal.

Les figures VI.33 et VI.34 représentent les décompositions à diamètres issues des essais en rotation et des simulations numériques non-linéaires d'une soufflante désaccordée pour la famille du premier et du deuxième mode de flexion, respectivement. Ces décompositions sont évaluées à une vitesse de rotation de 30 % du régime nominal de fonctionnement et pour une tension d'excitation de 20 V qui est la plus faible tension générée lors des essais et simulations avec excitation à diamètres. Cette faible tension permet ainsi de limiter les effets non-linéaires qui, comme exposé en sous-section précédente, perturbent peu les décompositions en composantes à diamètres de la réponse ou alors pour d'importants niveaux vibratoires, non atteints dans cette étude.

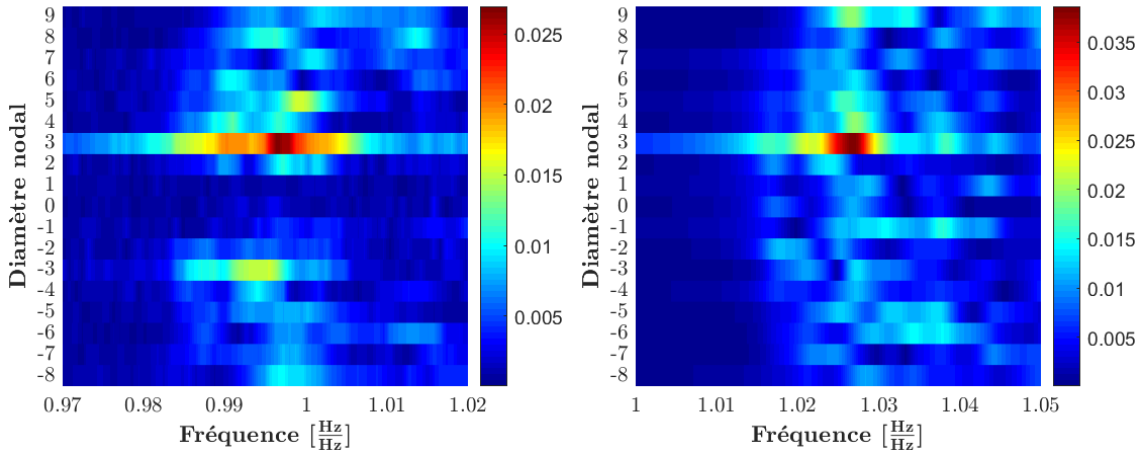
Les figures VI.33 et VI.34 permettent d'observer que les remarques issues des études d'influence de la section VI.2 et condensées ci-dessus restent valides dans cette analyse à diamètres de la réponse.

22. Il est à noter que, dans le cas d'un système accordé et d'un désaccordage de l'excitation, les modes identifiés seraient purement concentrés sur une composante à diamètres mais participeraient tous dans la réponse.



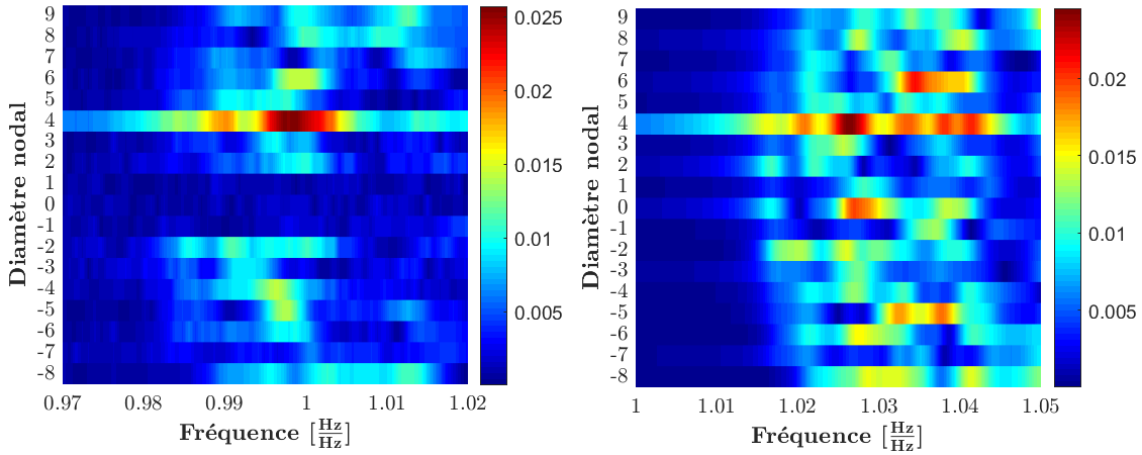
(a) Expérimental - 2D

(b) Numérique - 2D



(c) Expérimental - 3D

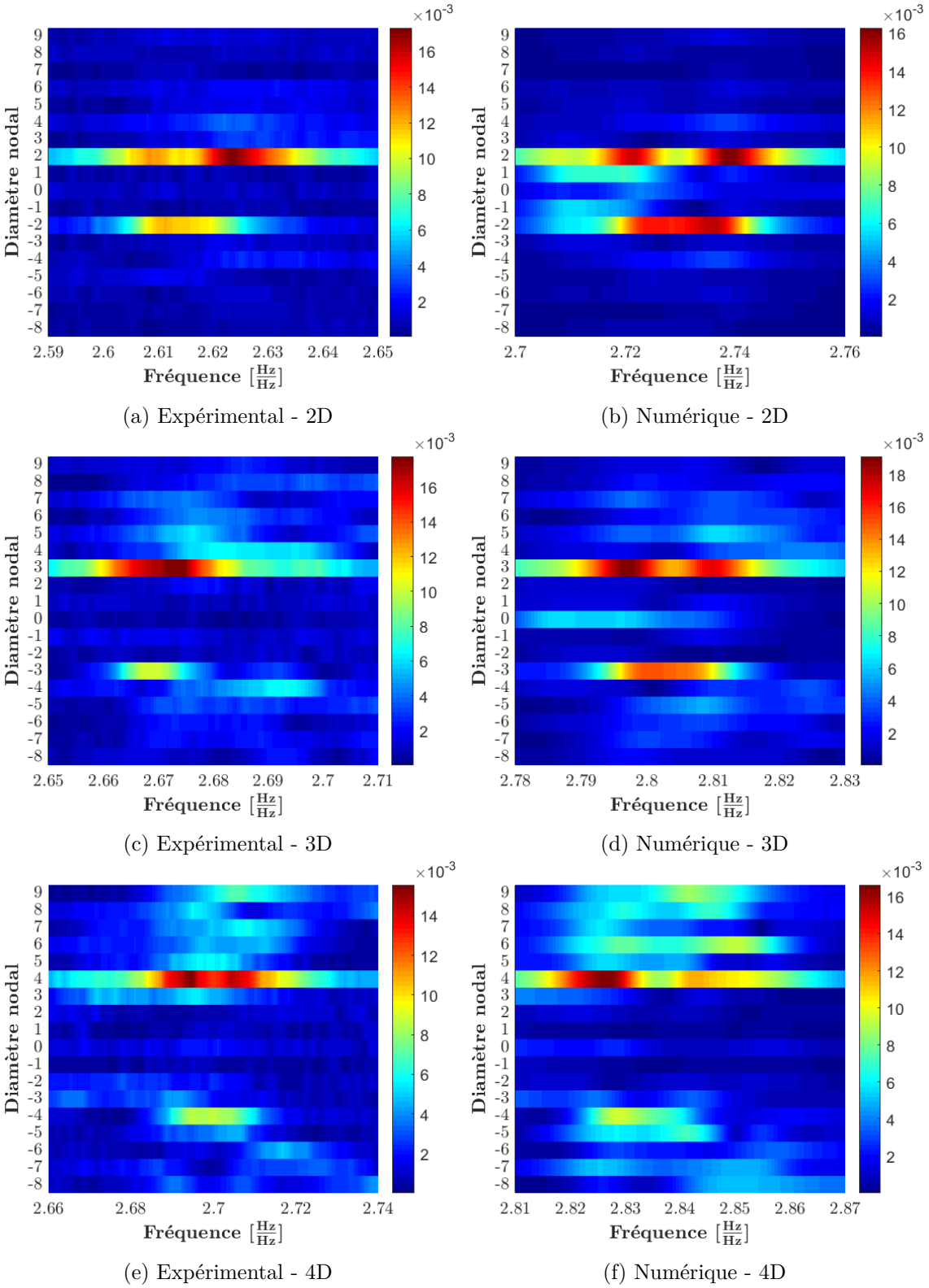
(d) Numérique - 3D



(e) Expérimental - 4D

(f) Numérique - 4D

Figure VI.33 – Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques pour plusieurs excitations à diamètres, au voisinage de la famille du premier mode de flexion pour $v = 20\,\mathrm{V}$ et $\Omega = 30\,\%$ (Déformations $[\frac{\mu\mathrm{def/V}}{\mu\mathrm{def}}]$ min. ■ et max. ■)



(a) Expérimental - 2D

(b) Numérique - 2D

(c) Expérimental - 3D

(d) Numérique - 3D

(e) Expérimental - 4D

(f) Numérique - 4D

FIGURE VI.34 – Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques pour plusieurs excitations à diamètres, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion pour $v = 20\,\mathrm{V}$ et $\Omega = 30\,\%$ (Déformations $[\frac{\mu\mathrm{def/V}}{\mu\mathrm{def}}]$ min. ■ et max. ■)

En ce qui concerne la famille du premier mode de flexion, représentée en figure VI.33, il est possible de distinguer le mode principal et le mode secondaire, à deux fréquences différentes, pour une excitation co-rotative à deux diamètres sur les essais ainsi que sur les simulations numériques. Pour cette même excitation, les composantes d'indice opposé ressortent particulièrement sur les réponses forcées.

L'excitation à trois diamètres fait, quant à elle, ressortir un mode plus pur dont la composante à trois diamètres est plus importante, par rapport aux composantes prépondérantes des autres modes principaux étudiés. Le mode secondaire dégénéré peut être discerné sur la décomposition à diamètres expérimentales mais presque pas sur celle numérique.

L'excitation à quatre diamètres nodaux révèle une réponse plus riche que les autres excitations à diamètres et notamment sur la décomposition à diamètres issues des simulations numériques.

D'un point de vue général, les répartitions en composantes à diamètres numériques sont fortement comparables à celles expérimentales, notamment en termes d'étalement fréquentiel mais aussi d'amplitude de réponse des différentes composantes à diamètres.

Concernant la famille du deuxième mode de flexion, les réponses, résultant des excitations à deux, trois et quatre diamètres, sont nettement plus pures que celles de la famille du premier mode de flexion. En effet, les composantes d'indice identique et opposé à celle de l'excitation ont une amplitude de réponse amplement supérieure à celle des autres composantes.

Les modes principaux de la famille du deuxième mode de flexion, dont les composantes à bas diamètres nodaux sont prépondérantes, sont plus couplés par le disque et moins sensibles aux effets de désaccordage que les modes de la famille du premier mode de flexion ou que les modes de composantes prépondérantes à hauts diamètres nodaux. C'est l'une des raisons pour lesquelles les effets de désaccordage sont moins importants sur les décompositions à diamètres issues d'excitations à deux et trois diamètres nodaux que sur celles issues d'une excitation à quatre diamètres nodaux. L'autre raison résulte directement des répartitions fréquentielles des modes à diamètres proposées en figure VI.21.

La réponse à une excitation à deux diamètres nodaux exhibe très clairement le mode principal et son mode secondaire à des fréquences différentes aussi bien expérimentalement que numériquement. La composante d'indice opposé à l'excitation ressort aussi dans la réponse de ces deux modes et particulièrement numériquement.

Les réponses à des excitations à trois et quatre diamètres nodaux exhibent aussi ces modes principaux et secondaires bien que ces derniers sont plus difficiles à identifier sur les décompositions à diamètres.

L'identification modale globale des fonctions de réponse fréquentielle au voisinage du deuxième mode de flexion peut ainsi permettre d'évaluer la répartition des composantes à diamètres de ces modes principaux et secondaires à partir de leurs déformées modales et ainsi confirmer les remarques exposées dans ce paragraphe. Ces décompositions en composantes à diamètres des déformées modales identifiées sont proposées en sous-section 3.4.2.

À l'instar des décompositions à diamètres au voisinage de la famille du premier mode de flexion, les décompositions en composantes à diamètres numériques des réponses au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion sont fortement comparables à celles expérimentales, que ce soit en termes de répartitions à diamètres ou bien en termes d'amplitude de réponse des différentes composantes à diamètres.

Une dernière remarque peut être mentionnée sur les décompositions à diamètres au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion et particulièrement sur les décompositions résultant d'une excitation à diamètres. En effet, il est possible de noter une légère différence entre les résultats expérimentaux et numériques : les amplitudes de réponse des composantes du mode principal, d'indices identique et opposé à celles de l'excitation, sont similaires sur les simulations tandis que l'amplitude de la composante du mode principal, d'indice identique à celle de l'excitation, est bien plus importante que l'autre sur les résultats d'essais. Cette remarque peut laisser penser que le mode principal semble quasi purement stationnaire sur les simulations tandis qu'il semble contenir une partie propagative (plus ou moins importante en fonction du nombre de diamètres excités) sur les essais.

Cette différence entre essais et simulations numériques peut provenir de l'effet de Coriolis, représenté par la matrice $\mathbf{G}$ dans l'équation (I.34) du chapitre I, qui n'est pas pris en compte dans les simulations numériques. Les décompositions en composantes à diamètres des déformées modales des modes principaux et secondaires ainsi que l'évolution de l'écartement fréquentiel entre ces deux modes en fonction de la vitesse de rotation, étudiés en sous-section 3.4.3, pourront permettre de confirmer cette hypothèse.

Les évolutions de ces décompositions à diamètres de la fonction de réponse fréquentielle en fonction de la vitesse de rotation de la soufflante et de la tension d'excitation ne sont pas proposées dans ce mémoire de thèse. Toutefois, celles-ci sont peu sensibles à la variation de ces paramètres dans les gammes étudiées, à l'image des décompositions à diamètres résultant d'une excitation localisée, tracées en sous-section VI.3.3.

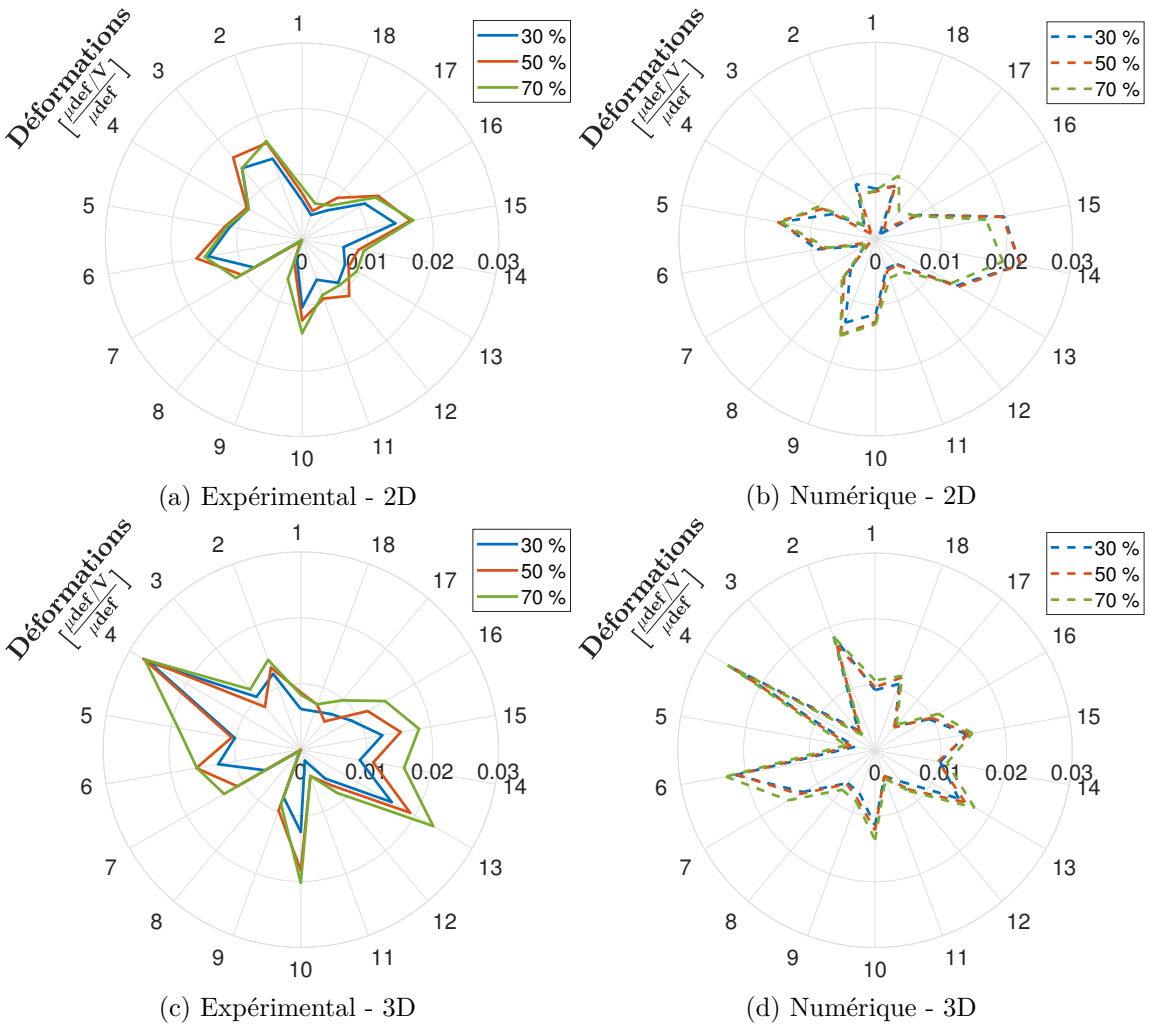
Analyse spatiale de la réponse. En complément des répartitions à diamètres, la figure VI.35, ainsi que la figure D.17 (placée en annexe), exposent les répartitions spatiales des amplitudes vibratoires de la réponse des aubes. Celles-ci sont tracées à la fréquence d'excitation exhibant l'amplitude maximale de déformation, soit à la fréquence de résonance du mode principal (dont la composante prépondérante est de même indice que celle de l'excitation). Ces répartitions des amplitudes de réponse sont tracées pour des excitations co-rotatives à deux et trois diamètres nodaux au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion, pour plusieurs tensions d'excitation et plusieurs vitesses de rotation d'un point de vue expérimental et numérique.

Cette représentation permet de révéler la répartition spatiale de la réponse, qui n'est pas appréciable sur les décompositions à diamètres. Toutefois, l'identification du contenu à diamètres est moins perceptible que sur les décompositions. De plus, il n'est plus possible de constater le caractère propagatif de la réponse, à moins d'une animation de ces diagrammes polaires, fondée sur les phases connues.

Ainsi, les répartitions spatiales des amplitudes vibratoires, résultant d'une excitation à deux diamètres nodaux, exposées en figures VI.35a et VI.35b, permettent de faire ressortir une réponse à quatre lobes soit une forme à deux diamètres nodaux (tracée par rapport au module de la fonction de réponse fréquentielle) aussi bien expérimentalement que numériquement.

De même, les figures VI.35c et VI.35d, issues d'une excitation à trois diamètres nodaux, exhibent une réponse à six lobes correspondant à une forme à trois diamètres nodaux. Toutefois, ces dernières semblent moins pures que les réponses à une excitation à deux diamètres nodaux puisque les lobes sont plus difficilement perceptibles. Ceci est dû à la densité modale au voisinage du deuxième mode de flexion à trois diamètres nodaux qui est plus importante que celle du mode à deux diamètres nodaux, tel exposé en figure VI.34.

Les répartitions spatiales des amplitudes vibratoires résultant d'excitations au voisi-



(a) Expérimental - 2D

(b) Numérique - 2D

(c) Expérimental - 3D

(d) Numérique - 3D

Figure VI.35 – Comparaison des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques à la fréquence de résonance du mode principal pour une excitation $v = 20\,\mathrm{V}$ à deux et trois diamètres nodaux, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion à plusieurs vitesses de rotation

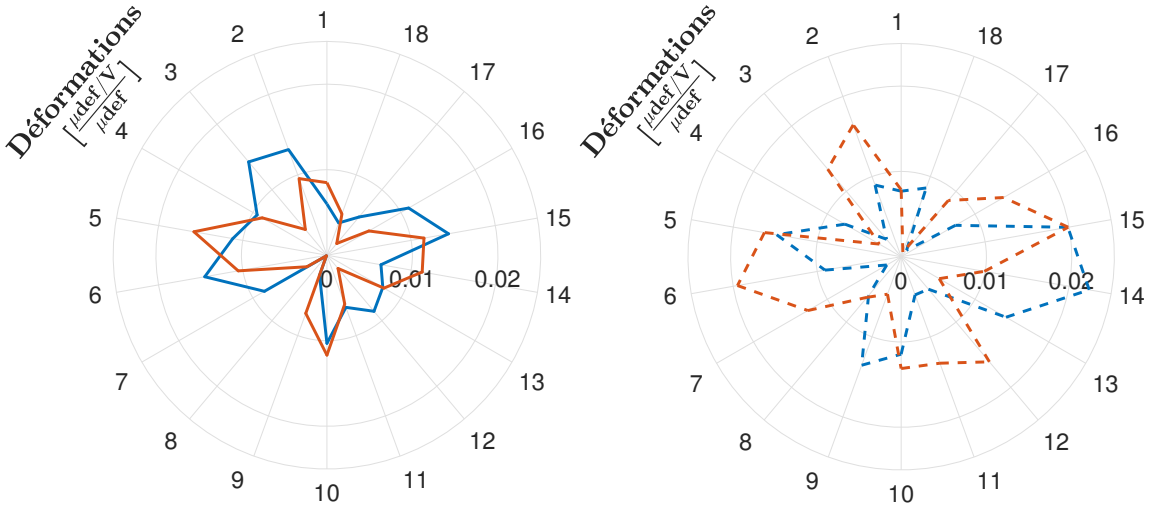
nage de la famille du premier mode de flexion, de même que celles résultant d'excitations à quatre diamètres nodaux au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion ne sont pas proposées dans ce mémoire de thèse puisqu'il est difficile de percevoir les différents lobes à cause de la forte densité modale au voisinage de ces différents modes.

À l'image des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires des aubes pour une excitation localisée, exposées en sous-section VI.3.3, et des répartitions en composantes à diamètres du paragraphe précédent, la forme spatiale des réponses à une excitation à diamètres (du moins, une excitation à deux ou trois diamètres nodaux au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion) évolue très peu en fonction du niveau vibratoire ou en fonction de la vitesse de rotation : les ratios entre les amplitudes de vibration des aubes restent similaires. Il serait toutefois intéressant de simuler l'évolution de la répartition spatiale pour une grande amplitude vibratoire (et donc un important effet non-linéaire) pour des excitations à différents diamètres nodaux.

Les principales observations et conclusions quantitatives et qualitatives concernant les amplitudes de réponse expérimentales et numériques à une excitation à diamètres sont proposées en sous-section 3.4.2.

Toutefois, il est possible de remarquer que les amplitudes maximales de réponse sur ces répartitions spatiales sont entre deux et trois fois supérieures à celles des répartitions spatiales issues d'une excitation localisée, pour un taux d'amortissement similaire dans les deux cas. De plus, toutes les aubes participent dans la réponse de ces modes globaux tandis que seulement deux ou trois aubes participaient dans celle des modes localisés de la sous-section précédente.

La figure VI.36 superpose les répartitions spatiales des amplitudes de réponse des aubes à la fréquence de résonance du mode principal et à celle du mode secondaire. Ces répartitions spatiales sont issues des essais et des simulations numériques pour une excitation à deux diamètres nodaux au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion.



(a) Expérimental - 2D (b) Numérique - 2D

FIGURE VI.36 – Comparaison des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques à la fréquence de résonance du mode principal (—) et du mode secondaire (—) pour une excitation $v = 20\,\mathrm{V}$ à deux diamètres nodaux, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion à $\Omega = 30\,\%$

La figure VI.36 permet ainsi de remarquer que les répartitions des amplitudes de réponse tracées à la fréquence de résonance du mode secondaire est en opposition de phase spatiale par rapport à celles tracées à la fréquence de résonance du mode principal, aussi bien expérimentalement que numériquement. Cette observation illustre la propriété d'orthogonalité spatiale des modes dégénérés.

3.4.2 Analyse modale

Cette sous-section est consacrée à l'analyse modale expérimentale et numérique des modes dont les paramètres modaux (fréquences propres, taux d'amortissement et résidus) ont été identifiés sur les fonctions de réponse fréquentielle issues d'excitations co-rotatives à deux, trois et quatre diamètres nodaux. Le mode principal (dont la composante prépondérante est de même indice que celle de l'excitation) est le mode essentiellement étudié dans cette sous-section, bien que le mode secondaire (dont l'indice de la composante prépondérante est opposé à celui de l'excitation) ait aussi été identifié et pour lequel quelques résultats sont exposés. L'identification des paramètres modaux a été réalisée au moyen de

la méthode LSRF présentée dans le chapitre V et en section VI.2.

Dans un premier temps, l'analyse du contenu à diamètres des formes modales identifiées est abordée au moyen de décompositions en composantes à diamètres. Dans un second temps, l'évolution des paramètres modaux en fonction de la déformation modale, définie dans l'équation (V.13) du chapitre V, est comparée expérimentalement et numériquement.

Analyse à diamètres des déformées modales. Tout d'abord, il est nécessaire de rappeler qu'il n'est pas possible d'extraire directement les déformées modales puisque l'excitation (des actionneurs piézoélectriques sur les aubes) n'est pas directement mesurée, seule la tension d'excitation est mesurée. Par conséquent, l'analyse à diamètres des modes identifiés est réalisée à partir du vecteur $\boldsymbol{\rho}$ contenant les résidus. Ce dernier est défini dans les équations (V.5) et (V.6) du chapitre V et est égal au vecteur contenant les déformées modales à un facteur près ce qui est donc suffisant pour effectuer l'analyse à diamètre des formes modales.

Par ailleurs, le vecteur contenant les résidus étant un paramètre indépendant de la fréquence propre et du taux d'amortissement du mode identifié, à l'instar des déformées modales, les décompositions à diamètres de cette sous-section sont ainsi indépendantes de ces deux paramètres modaux.

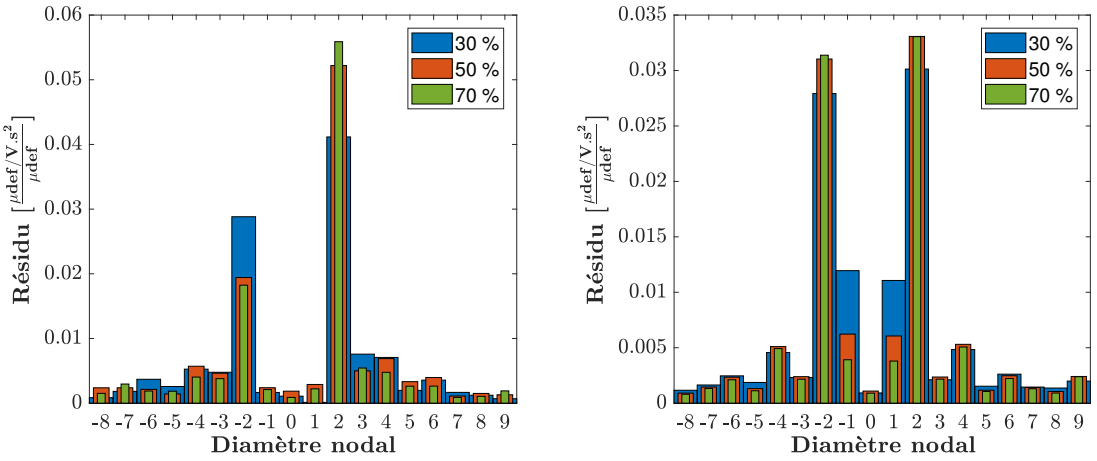
Les décompositions à diamètres, exposées dans cette sous-section, sont tracées de façon analogue à la figure VI.6d en exécutant une transformée de Fourier rapide [35] sur le vecteur $\boldsymbol{\rho}$ contenant les résidus puis en organisant le résultat afin de placer les composantes à diamètres co-rotatives dans la portion positive de l'axe des abscisses et les composantes à diamètres contra-rotatives dans sa portion négative.

Pour rappel, seuls les modes de la famille du deuxième mode de flexion ont été identifiés de façon globale. Ainsi, les décompositions à diamètres de cette sous-section sont uniquement tracées sur les modes étudiés parmi ceux de cette famille pour une excitation co-rotative de la soufflante à deux, trois et quatre diamètres nodaux, numériquement et expérimentalement.

Premièrement, d'un point de vue expérimental, il est possible de remarquer que les composantes co-rotatives et contra-rotatives à deux et trois diamètres ressortent particulièrement pour les modes principaux représentés en figures VI.37a et VI.37c, respectivement. De surcroît, la composante à diamètres co-rotative est prépondérante par rapport à la composante contra-rotative. Ainsi, ces modes principaux contiennent une partie stationnaire et une partie co-rotative plus ou moins importantes en fonction du mode et de la vitesse de rotation étudiés.

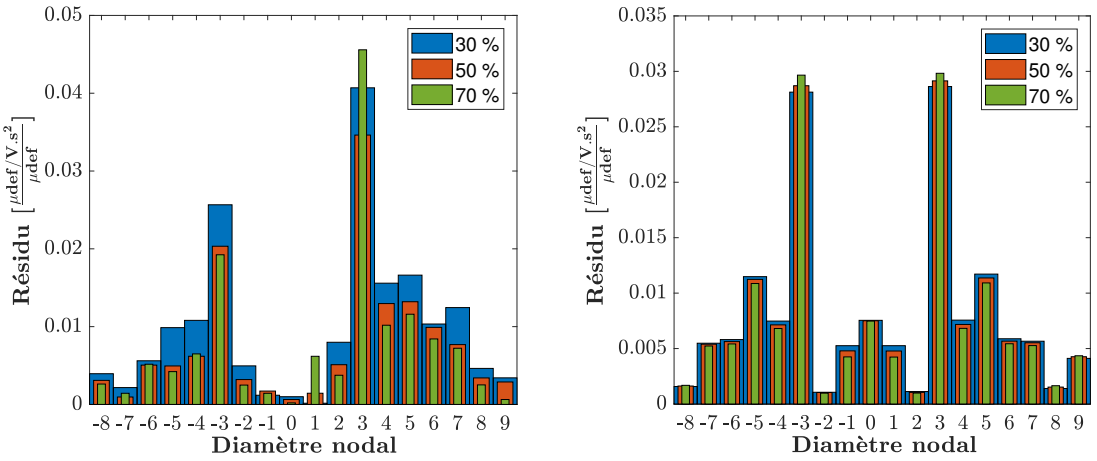
En ce qui concerne le mode principal décomposé en figure VI.37e, les deux composantes co-rotative et contra-rotative à quatre diamètres ressortent peu par rapport aux autres composantes à diamètres. De plus, ces deux composantes ont des amplitudes quasi-équivalentes ce qui indique un mode presque exclusivement stationnaire.

Ces trois représentations à diamètres expérimentales permettent de remarquer que plus l'indice de la composante à diamètre prépondérante augmente, plus la décomposition est riche.



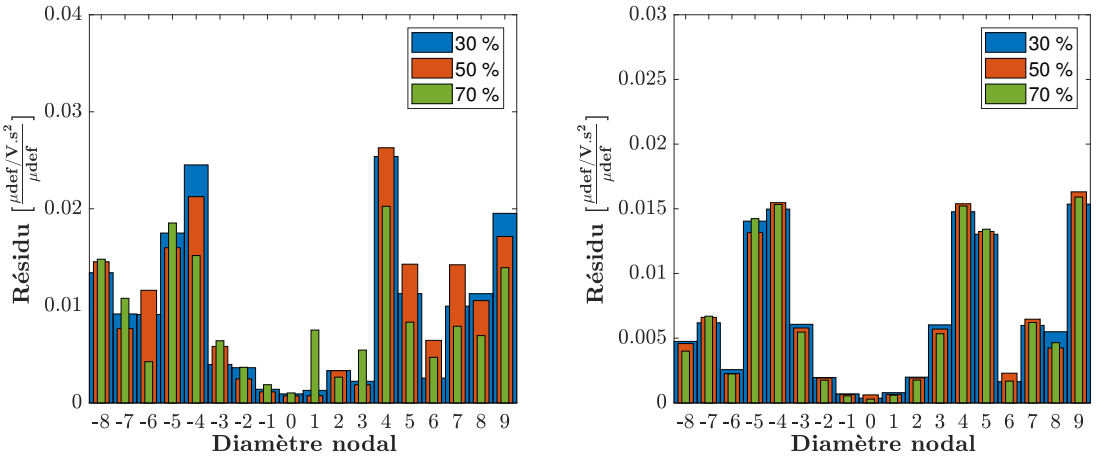
(a) Expérimental - 2D

(b) Numérique - 2D



(c) Expérimental - 3D

(d) Numérique - 3D



(e) Expérimental - 4D

(f) Numérique - 4D

FIGURE VI.37 – Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques de plusieurs modes principaux de la famille du deuxième mode de flexion pour $v = 20\,\mathrm{V}$ et différentes vitesses de rotation

L'emploi d'une excitation co-rotative est justifiée par le fait qu'elle est plus représentative des excitations subies par la soufflante en fonctionnement selon des retours d'expérience de Safran Aircraft Engines. Les décomposition des modes identifiés peuvent amener à se questionner sur les alternatives possibles dans le cadre des tests pour l'analyse modale. Au regard des composantes prépondérantes des différents modes analysés, une excitation stationnaire pourrait être également exploitée afin d'obtenir une amplitude de réponse plus importante. Toutefois, une excitation stationnaire nécessiterait une phase supplémentaire de prospection (voir section VI.1) afin de positionner spatialement le diamètre de l'excitation sur le diamètre du mode excité.

Par ailleurs, une excitation mixte (avec une part co-rotative et une part contra-rotative dans des proportions à définir, voir section VI.1) pourrait permettre d'isoler de façon plus nette un mode particulier.

Deuxièmement, d'un point de vue numérique, les figures VI.37b et VI.37d exposent des modes principaux pour lesquels les composantes co-rotatives et contra-rotatives, respectivement à deux et trois diamètres nodaux, ressortent particulièrement, à l'instar des décompositions expérimentales.

Toutefois, au contraire de ces dernières, les amplitudes des deux composantes prépondérantes sont sensiblement identiques pour ces deux modes principaux numériques : égales en figure VI.37d tandis qu'il est tout de même possible d'observer une légère différence d'amplitude entre ces composantes pour le mode décomposé en figure VI.37b en faveur de la composante de même indice que l'excitation. Ainsi les modes principaux identifiés sur les simulations numériques sont exclusivement stationnaires, avec une légère part co-rotative pour le mode dont les composantes à deux diamètres nodaux sont prépondérantes.

De même qu'expérimentalement, les deux composantes co-rotative et contra-rotative à quatre diamètres du mode principal numérique décomposé en figure VI.37f ressortent peu par rapport aux autres composantes à diamètres. De plus, celles-ci sont d'amplitudes équivalentes.

Numériquement, il est aussi possible de noter que plus l'indice de la composante à diamètres prépondérante du mode augmente, plus la décomposition en composantes à diamètres est riche.

Ces différentes remarques sur les modes principaux, identifiés à partir des fonctions de réponse fréquentielle expérimentales et numériques, confirment les remarques formulées dans les sections et sous-sections précédentes.

D'un point de vue de l'amplitude des composantes à diamètres, il est possible d'observer que la moyenne de l'amplitude des deux composantes prépondérantes de chaque mode principal est similaire entre les essais et les simulations numériques.

Il est aussi possible de remarquer que l'amplitude des deux composantes prépondérantes diminue en fonction du diamètre nodal, ceci aussi bien expérimentalement que numériquement. Cette observation est cohérente avec l'augmentation de la richesse de la décomposition à diamètres en fonction du diamètre nodal du mode.

De plus la forme du mode et donc les décompositions à diamètres des résidus modaux sont peu affectées par l'augmentation du niveau vibratoire (parmi la gamme d'amplitude de cette étude), à l'instar des post-traitements des sections précédentes, c'est pourquoi les évolutions des décompositions à diamètres des résidus modaux en fonction de l'amplitude ne sont pas proposées dans cette sous-section.

Néanmoins, il est intéressant d'observer la sensibilité de ces décompositions à diamètres modales en fonction de la vitesse de rotation. En effet, la figure VI.37a, représentant la décomposition à diamètres du mode dont les composantes à deux diamètres sont prépondérantes, montre que l'amplitude de la composante co-rotative augmente avec la vitesse de rotation tandis que l'amplitude de la composante contra-rotative diminue en fonction de ce même paramètre.

Le mode dont les composantes à trois diamètres sont prépondérantes expose une évolution similaire mais moins marquée et moins monotone que celui à deux diamètres.

Le mode dont les composantes à quatre diamètres sont prépondérantes ne semble pas présenter cette évolution.

Les amplitudes des composantes prépondérantes des modes principaux issus des simulations numériques n'évoluent pas en fonction de la vitesse de rotation : les rapports entre les deux composantes prépondérantes restent identiques quelque soit la vitesse de rotation étudiée.

Le phénomène physique non-pris en compte dans les simulations numériques et pouvant expliquer cet écart de comportement physique est l'effet de Coriolis, représenté par la matrice $\mathbf{G}$ dans l'équation (I.34) du chapitre I. Pour rappel, l'effet de Coriolis engendre une évolution de l'écartement fréquentiel des modes dégénérés croissant en fonction de la vitesse de rotation associée à des modes de plus en plus propagatifs (dans le sens co-rotatif ou contra-rotatif).

L'effet de Coriolis pourrait ainsi éclaircir cette différence de comportement entre essais et simulations numériques sur les bas diamètres. En effet, le papier de Xin et Wang [237], traitant de l'influence de l'effet de Coriolis sur une roue aubagée désaccordée, conclut que l'effet de Coriolis peut être plus marqué sur les modes faisant participer dynamiquement le disque, tel le mode principal dont les composantes à deux diamètres sont prépondérantes.

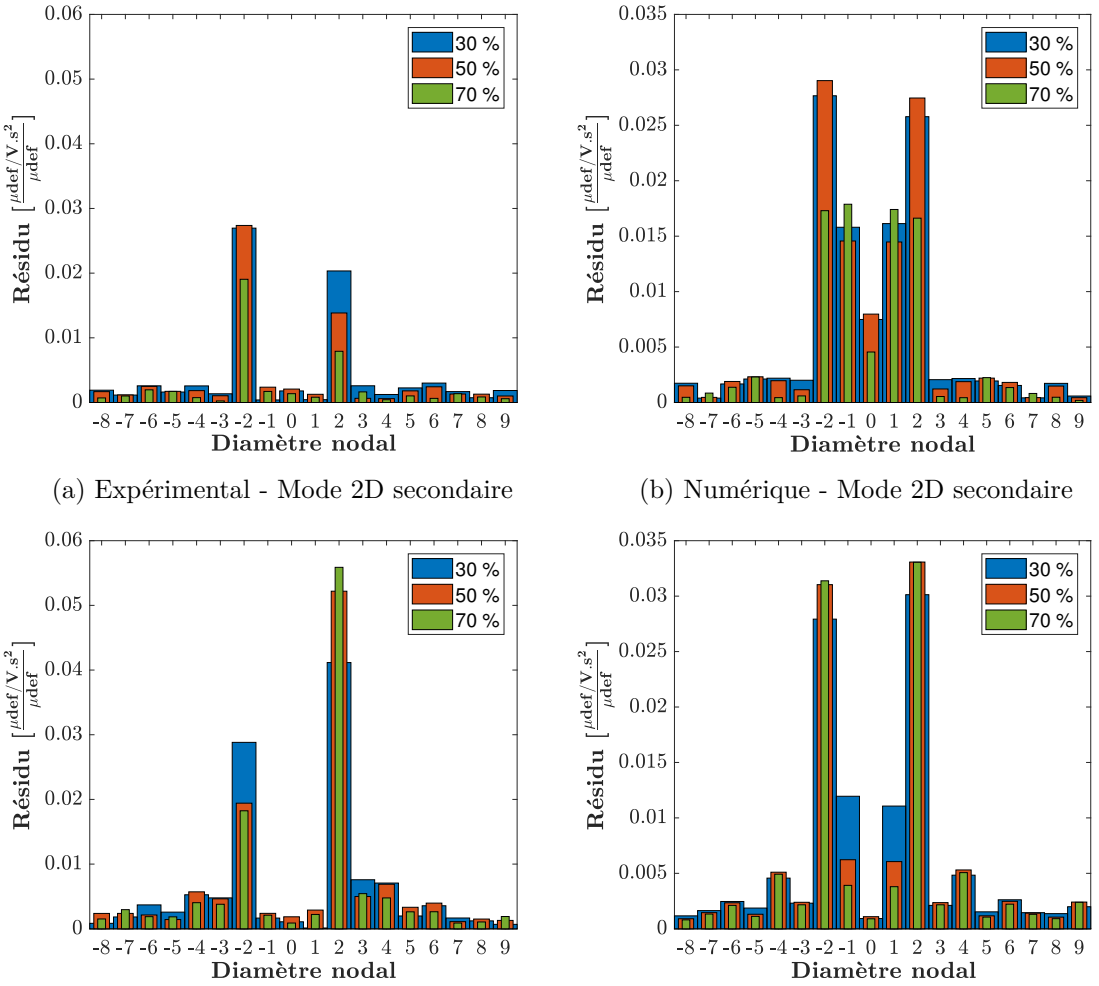
Le couplage avec le disque permet d'organiser le mode mais plus l'indice de la composante à diamètres prépondérante est élevé, moins ce couplage avec le disque est présent. Par conséquent, l'effet de Coriolis serait moins marqué sur les modes dont les composantes à hauts diamètres sont prépondérantes.

Ainsi, afin de compléter cette hypothèse, il serait intéressant d'observer l'écartement fréquentiel des modes principaux et secondaires en fonction de la vitesse de rotation, proposé en sous-section 3.4.3.

Comme indiqué précédemment, le mode principal numérique, exposé en figure VI.37b et dont les composantes à deux diamètres nodaux sont prépondérantes, exhibe une faible différence d'amplitude entre ses composantes co-rotative et contra-rotative au contraire des deux autres modes principaux numériques étudiés pour lesquels les amplitudes des composantes prépondérantes sont égales. L'effet de Coriolis n'étant pas implémenté dans les simulations, il est alors possible de penser que cet écart d'amplitude résulte du désaccordage de la soufflante.

La figure VI.38 expose en parallèle les décompositions, expérimentales et numériques, en composantes à diamètres des modes principaux et secondaires, dont les composantes à deux diamètres sont prépondérantes.

Tout d'abord, le mode secondaire expérimental étudié en figure VI.38a permet d'observer, qu'au contraire du mode principal, la composante contra-rotative est prépondérante. De plus, il est possible de remarquer une diminution monotone de l'amplitude de la composante co-rotative en fonction de la vitesse de rotation. Toutefois, l'amplitude de la composante contra-rotative n'augmente pas monotonement comme cela aurait pu être



(a) Expérimental - Mode 2D secondaire

(b) Numérique - Mode 2D secondaire

(c) Expérimental - Mode 2D principal

(d) Numérique - Mode 2D principal

Figure VI.38 – Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques des modes principaux et secondaires identifiés à partir d'une réponse à une excitation à deux diamètres, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion pour $v = 20\,\mathrm{V}$ et différentes vitesses de rotation

envisagé, par rapport au comportement du mode principal expérimental. Outre les erreurs expérimentales possibles, il est possible d'avancer l'hypothèse d'une superposition des effets de Coriolis et de désaccordage. À cet effet, une simulation comprenant l'effet de Coriolis sans désaccordage de la structure pourrait apporter une confirmation.

En termes d'amplitudes des composantes principales, il est à noter que celles du mode secondaire sont plus faibles que les amplitudes des composantes du mode principal.

D'un point de vue numérique, l'amplitude de la composante contra-rotative du mode secondaire étudié en figureVI.38b est aussi plus importante que sa composante co-rotative. Comme exposé en figure VI.37, le rapport entre les deux composantes prépondérantes n'est pas sensible à la vitesse de rotation.

Au contraire des remarques concernant les figures expérimentales, l'amplitude moyenne des composantes prépondérantes des modes numériques étudiés est similaire entre le mode principal et le mode secondaire.

Il est aussi possible de remarquer que la richesse des décompositions est similaire entre les modes principaux et secondaires, d'un point de vue expérimental et numérique.

Ces différentes remarques et observations à propos des décompositions à diamètres des modes secondaires expérimentaux et numériques confortent les hypothèses formulées sur les décompositions à diamètres des modes principaux, notamment en ce qui concerne le désaccordage et l'effet de Coriolis.

De surcroît, la figure VI.38 permet de confirmer que les modes principaux et secondaires sont des modes dégénérés.

En complément de la figure VI.38, la figure D.18, placée en annexe, représente les décompositions en composantes à diamètres des autres modes secondaires étudiés, expérimentalement et numériquement. Ces décompositions permettent aussi de corroborer les remarques exposées dans cette sous-section, en particulier sur les modes secondaires dont les composantes à trois et quatre diamètres nodaux sont prépondérantes.

Par ailleurs, la figure VI.41 permet de visualiser la position fréquentielle du mode secondaire par rapport au mode principal pour les différentes vitesses et les différents modes étudiés. Il est à noter que la fréquence propre du mode secondaire est majoritairement plus faible que celle du mode principal, exceptée pour les modes numériques dont les composantes à trois et quatre diamètres sont prépondérantes.

Évolution des paramètres modaux. L'évolution des paramètres modaux (fréquences propres et taux d'amortissement) des modes principaux, modes dont la composante prépondérante est de même indice que celle de l'excitation, est étudiée d'un point de vue expérimental et numérique dans cette sous-section. Ces modes principaux ont été identifiés à partir des fonctions de réponse fréquentielle issues d'excitations co-rotatives à deux, trois et quatre diamètres nodaux, au moyen de la méthode LSRF présentée dans le chapitre V et en section VI.2.

Afin de tracer les évolutions expérimentales et numériques des paramètres modaux, il est à noter que la déformation modale[23] $\boldsymbol{\alpha}_k$ maximale (parmi les dix-huit aubes composant la soufflante) du mode étudié, est retenue comme amplitude de vibration de chaque couple fréquence propre / taux d'amortissement, pour une tension d'excitation donnée (l'aube peut ainsi être différente entre les essais et les simulations numériques).

Les simulations en dynamique non-linéaire, permettant de tracer les réponses forcées à partir desquelles les paramètres modaux sont identifiés, sont effectuées au moyen de la CNCMS. La CNCMS est une procédure incluant plusieurs phases de réduction, détaillées dans le chapitre III, permettant de simuler numériquement les réponses forcées d'une soufflante désaccordée fréquentiellement. Au contraire, les simulations exploitées lors de l'étape de recalage du coefficient de frottement, en sous-section VI.3.2, sont réalisées au moyen des modes complexes non-linéaires pour un secteur de soufflante encastré aux frontières, ce qui ne permet pas de prendre en compte le désaccordage.

Pour rappel, ces simulations non-linéaires sont accomplies au moyen des paramètres numériques optimaux définis grâce aux études d'influence du chapitre V, à savoir $n_\mathrm{h} = 5$ harmoniques, $n_\mathrm{t} = 32$ discrétisations temporelles, $n_\mathrm{e} = 2$ éléments. Seul le nombre de nœuds de contact diffère pour compter une rangée de plus ce qui porte le total à $n_\mathrm{c} = 612$ nœuds de contact, comme exposé précédemment. De plus, les schémas de désaccordage fréquentiel employés pour le premier et le deuxième mode de flexion (respectivement $\sigma = 1.13\,\%$ et $\sigma = 0.96\,\%$) sont issus des résultats des essais sur mors sur les dix-huit aubes

23. La déformation modale est définie dans l'équation (V.13) du chapitre V

composant la soufflante.

Les modes complexes non-linéaires exploités comme bases de réduction de la CNCMS sont évalués au moyen des paramètres numériques précédents et par le biais d'un coefficient de frottement $\mu = 0.1$, comme déterminé en sous-section VI.3.2, ceci pour les deux familles de modes de vibration et chacune des vitesses de rotation.

Les figures VI.39 et VI.40 exposent l'évolution de la fréquence propre et du taux d'amortissement des modes principaux de la famille du premier et du deuxième mode de flexion, respectivement. Plusieurs vitesses de rotation (30 %, 50 % et 70 % du régime nominal de fonctionnement) ainsi que plusieurs diamètres nodaux sont étudiés dans ces deux figures.

Il est à noter que les écarts entre les paramètres modaux expérimentaux et numériques du système linéaire sous-jacent, abordés en sous-section VI.3.1, ne sont pas détaillés, une nouvelle fois, bien qu'ils restent présents sur ces figures comparatives.

Tout d'abord, il est possible de remarquer que le recalage du coefficient de frottement, réalisé au moyen des modes complexes non-linéaires évalués sur un secteur de soufflante encastré, en section VI.3.2, est satisfaisant puisque les évolutions des paramètres modaux de la famille du premier et du deuxième mode de flexion sont similaires entre l'étape de recalage et la comparaison proposée dans cette section.

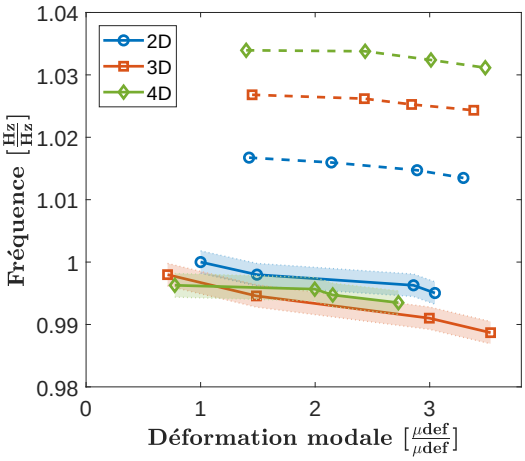
Comme attendu, il est possible d'observer que l'effet non-linéaire, issu du frottement des aubes contre les alvéoles du disque, diminue lorsque la vitesse de rotation augmente et donc lorsque l'effort normal de contact augmente. En effet, cette diminution de l'effet non-linéaire est perceptible sur les fréquences propres et les taux d'amortissement expérimentaux et numériques.

Pour la famille du premier mode de flexion à une vitesse de rotation de 30 % du régime nominal de fonctionnement, il est possible de remarquer que les évolutions numériques du taux d'amortissement des différents modes en fonction de la déformation modale sont cohérentes par rapport aux résultats expérimentaux. Cette remarque est la conséquence du recalage du coefficient de frottement par rapport à ce paramètre modal à cette même vitesse de rotation et pour cette même famille de mode.

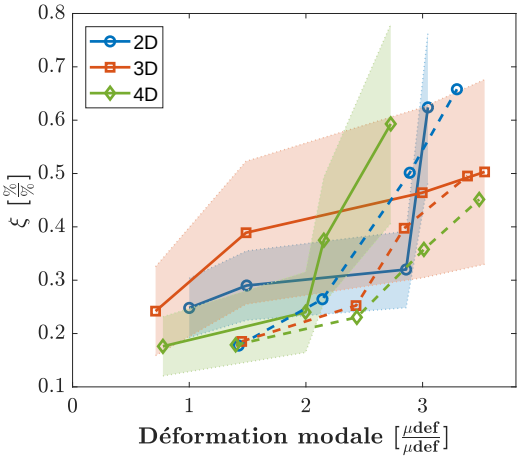
Pour cette même famille de modes de flexion et cette même vitesse de rotation, il est aussi possible de remarquer que les évolutions numériques de la fréquence propre des modes sont légèrement inférieures à celles des fréquences propres expérimentales. Toutefois, l'écart entre les décalages fréquentiels expérimentaux et numériques à cette vitesse de rotation sont moins importants que ceux observés pour le premier mode de flexion lors de l'étude sur mors.

Les points de décollement numériques initiant la phase de glissement des aubes dans l'alvéole du disque semblent plus cohérents par rapport à ceux identifiés expérimentalement, particulièrement en comparaison avec les points de décollement, expérimentaux et numériques, de l'étude sur mors du chapitre V.

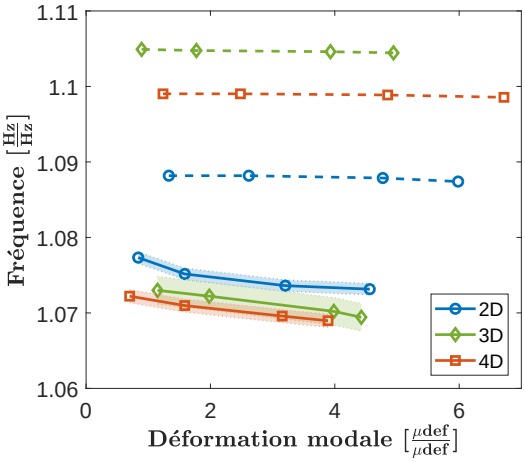
Ainsi, il est possible d'émettre l'hypothèse que les lois de contact / frottement (la loi de contact unilatérale et la loi de frottement de Coulomb) exploitées dans la DLFT permettent de mieux simuler les évolutions des paramètres modaux en fonction de la déformation modale lorsque le glissement est important.



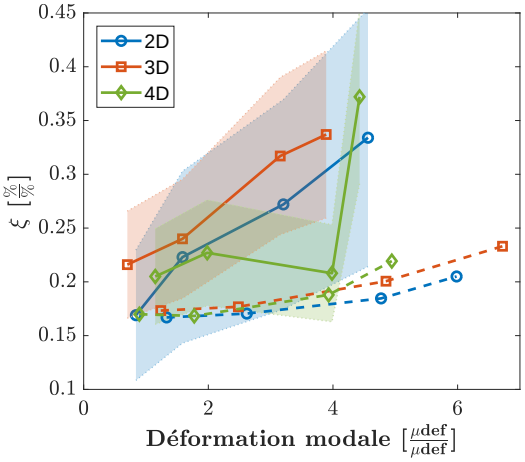
(a) Fréquence propre - $\Omega = 30\,\%$



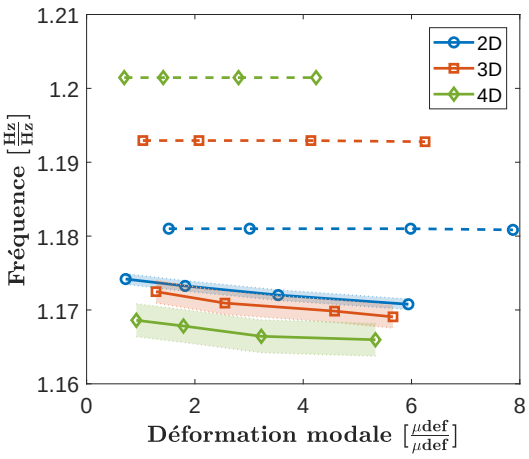
(b) Taux d'amortissement - $\Omega = 30\,\%$



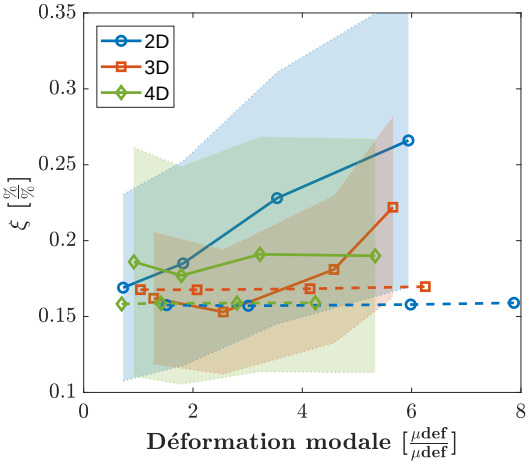
(c) Fréquence propre - $\Omega = 50\,\%$



(d) Taux d'amortissement - $\Omega = 50\,\%$

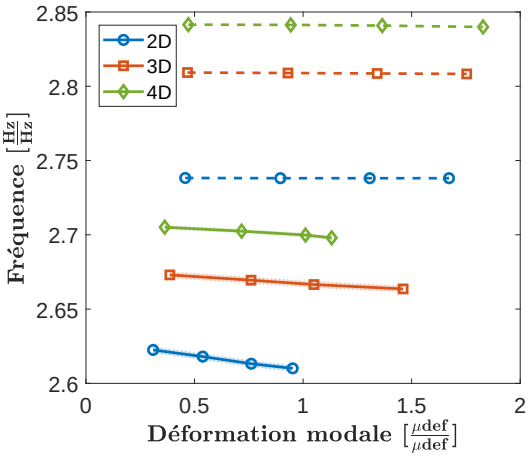


(e) Fréquence propre - $\Omega = 70\,\%$

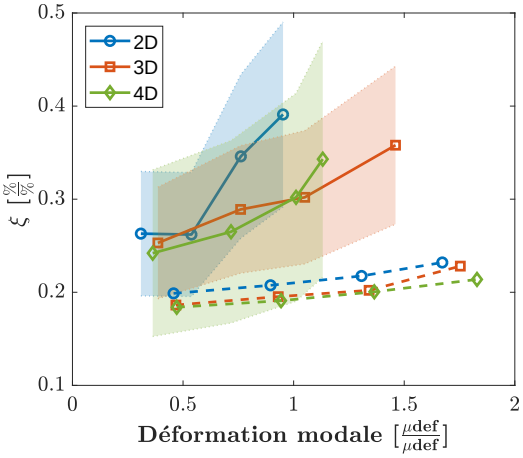


(f) Taux d'amortissement - $\Omega = 70\,\%$

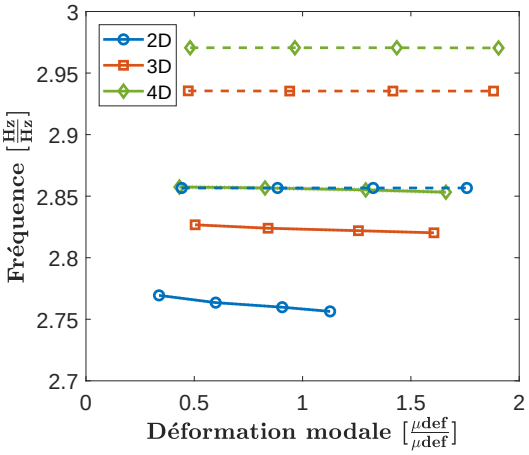
FIGURE VI.39 – Comparaison des évolutions expérimentales (—) et numériques (- -) des paramètres modaux de la famille du premier mode de flexion en fonction de la déformation modale



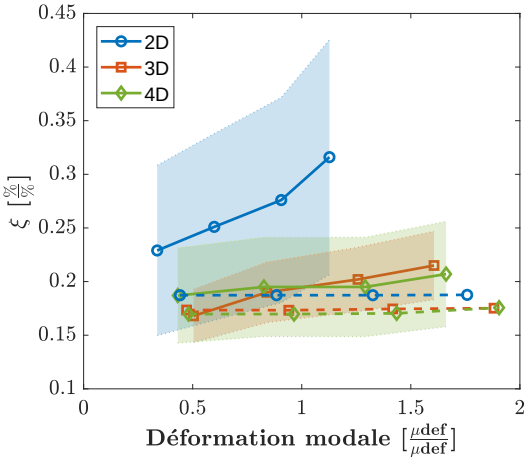
(a) Fréquence propre - $\Omega = 30\,\%$



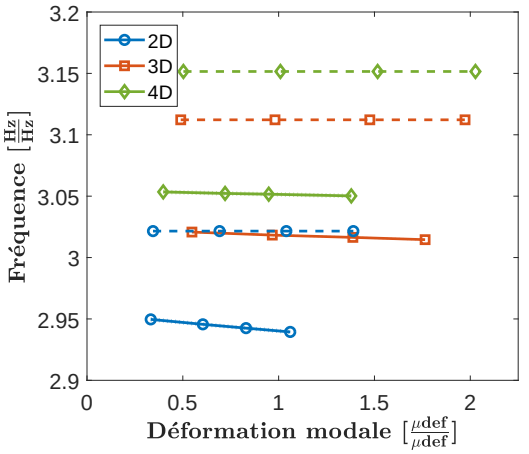
(b) Taux d'amortissement - $\Omega = 30\,\%$



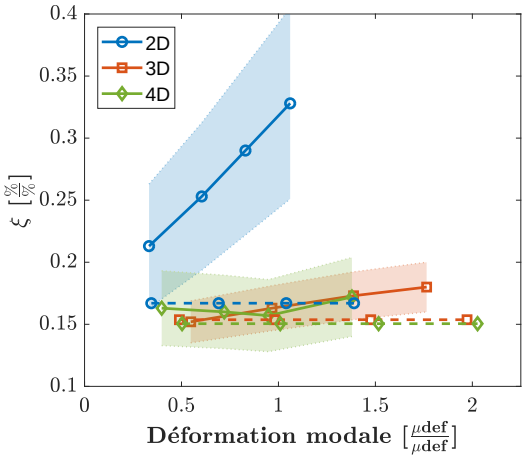
(c) Fréquence propre - $\Omega = 50\,\%$



(d) Taux d'amortissement - $\Omega = 50\,\%$



(e) Fréquence propre - $\Omega = 70\,\%$



(f) Taux d'amortissement - $\Omega = 70\,\%$

FIGURE VI.40 – Comparaison des évolutions expérimentales (—) et numériques (- -) des paramètres modaux de la famille du deuxième mode de flexion en fonction de la déformation modale

Cette hypothèse peut être corroborée par les comparaisons entre les essais et simulations numériques (exploitant ces mêmes lois de contact / frottement) effectuées par Laxalde [122] pour un fort effet non-linéaire et par Charleux [29] et Nacivet [151] pour des effets non-linéaires moins importants, notamment en termes d'évolution de la fréquence propre en fonction de la déformation modale.

Concernant la famille du deuxième mode de flexion pour une vitesse de rotation de 30 %, les évolutions des paramètres modaux numériques, aussi bien les fréquences propres que les taux d'amortissement, sont très faibles en comparaison des évolutions expérimentales. Ce comportement est similaire à celui observé lors des études sur mors, qui ont aussi été réalisés pour un même coefficient de frottement entre le premier et le deuxième mode de flexion, et aboutit aux mêmes conclusions concernant les lois de contact / frottement et le coefficient de frottement.

Il est possible de noter qu'un même coefficient de frottement ne permet pas de corréler les évolutions des paramètres modaux numériques avec celles des paramètres modaux expérimentaux, et notamment les taux d'amortissement. Comme proposé en sous-section VI.3.2, il serait nécessaire de faire varier le coefficient de frottement μ en fonction de la vitesse de rotation afin de corréler précisément les évolutions du taux d'amortissement en fonction de la déformation modale.

Pour la famille du premier mode de flexion, les évolutions des paramètres modaux sont similaires pour chacun des diamètres nodaux, quelque soit la vitesse de rotation. Néanmoins, la figure VI.40, exposant les modes de la famille du deuxième mode de flexion, permet de remarquer que les évolutions du taux d'amortissement et de la fréquence propre du mode dont les composantes à deux diamètres nodaux sont prépondérantes, sont plus importantes que celles des autres modes, ceci pour toutes les vitesses de rotation. Les simulations numériques ne permettent pas de reproduire ce comportement singulier.

En complément de l'évolution des paramètres modaux en fonction de la déformation modale, la figure D.19 présente l'évolution des déformations modales en fonction de la tension d'excitation pour les modes de la famille du premier et du deuxième mode de flexion. Il est notamment possible de noter que plus la vitesse de rotation est importante, plus la relation entre les déformations modales et la tension se rapproche d'un comportement linéaire. Cette remarque est la conséquence directe de l'évolution du taux d'amortissement en fonction de la déformation modale qui, elle-même, évolue peu en fonction de l'amplitude vibratoire.

Il est important de noter que les déformations modales numériques sont, dans la grande majorité des cas, plus élevées que les déformations modales expérimentales ; cette remarque étant aussi liée au premier ordre à l'évolution du taux d'amortissement en fonction de la déformation modale. Il est important de préciser cette observation, notamment en termes de dimensionnement de structure en dynamique vibratoire et en fatigue.

3.4.3 Effet de Coriolis

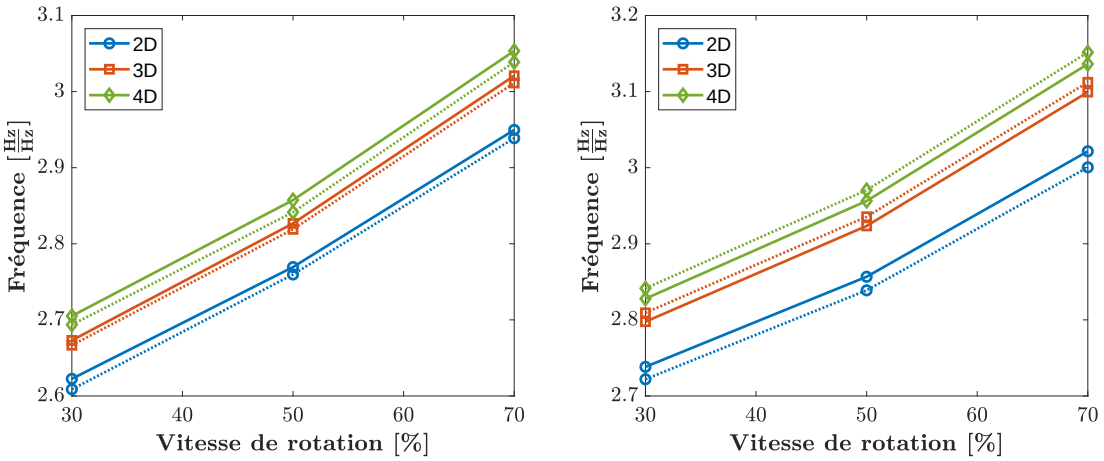
Pour rappel, l'effet de Coriolis, représenté par la matrice $\mathbf{G}$ dans l'équation (I.34) du chapitre I, engendre une augmentation de l'écartement fréquentiel des modes dégénérés en fonction de la vitesse de rotation ce qui aboutit à des modes de plus en plus propagatifs (dans le sens co-rotatif ou contra-rotatif).

L'analyse des décompositions en composantes à diamètres des modes principaux et secondaires expérimentaux, des figures VI.37 et VI.38, a permis de déceler une augmentation

du rapport entre la composante co-rotative à deux diamètres nodaux et sa composante contra-rotative (pour le mode dont les composantes à deux diamètres nodaux sont prépondérantes) en fonction de la vitesse de rotation de la soufflante. Cette évolution des amplitudes des composantes à diamètres prépondérantes co-rotatives et contra-rotatives permet alors d'émettre l'hypothèse que ce comportement est intimement lié à l'effet de Coriolis.

Afin de confirmer cette hypothèse, il est ainsi nécessaire d'examiner l'évolution de l'écartement entre les fréquences propres des modes principaux et secondaires (qui sont tous les deux dégénérés l'un par rapport à l'autre, comme démontré en sous-section précédente) en fonction de la vitesse de rotation. Il est attendu une ouverture de l'écartement fréquentiel entre ces deux modes en fonction de la vitesse de rotation, notamment pour les modes principaux et secondaires expérimentaux présentant des composantes prépondérantes à deux diamètres. Cette ouverture de l'écartement fréquentiel a pu être observé dans les travaux de Gibert *et al.* [64] étudiant un disque aubagé monobloc excité par des actionneurs piézoélectriques.

La figure VI.41 expose les évolutions expérimentales et numériques des fréquences propres du système linéaire sous-jacent en fonction de la vitesse de rotation pour plusieurs diamètres nodaux de la famille du deuxième mode de flexion. À l'instar des résultats précédents, les fréquences propres ont été identifiées sur les fonctions de réponse fréquentielle expérimentales et numériques au moyen de la méthode LSRF.



(a) Expérimental (b) Numérique

Figure VI.41 – Comparaison des évolutions expérimentales et numériques de la fréquence propre du système linéaire sous-jacent des modes principaux (—) et secondaires (·····) de la famille du deuxième mode de flexion en fonction de la vitesse de rotation

L'ouverture de l'écart fréquentiel entre les modes principaux et secondaires n'est pas perceptible en figure VI.41 aussi bien d'un point de vue expérimental que numérique.

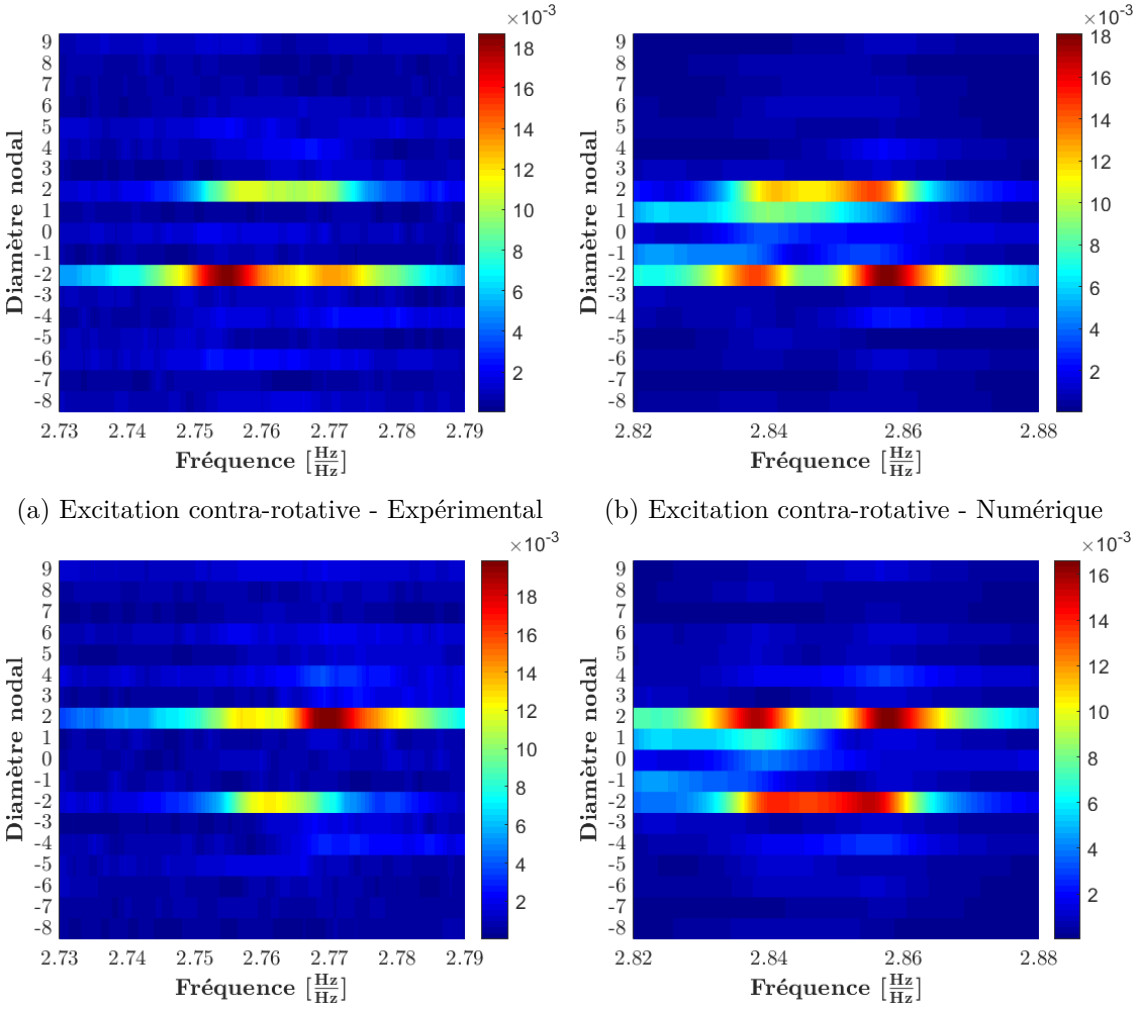
Ce comportement est attendu sur les simulations puisque l'effet de Coriolis n'est pas pris en compte dans les simulations numériques. Toutefois, il est surprenant de ne pas observer d'ouverture de l'écartement fréquentiel entre les modes principaux et secondaires expérimentaux. Il est possible qu'un très léger écartement fréquentiel en fonction de la vitesse de rotation soit présent mais difficilement perceptible en raison des incertitudes de mesure et d'identification.

Néanmoins, les courbes présentant l'évolution des fréquences propres des modes principaux et secondaires en fonction de la vitesse de rotation dans les papiers de Gibert [64]

et Xin [237] montrent une faible évolution de l'écartement fréquentiel par rapport à l'évolution de l'amplitude des composantes à diamètres prépondérantes des modes principaux et secondaires en fonction de la vitesse de rotation, pour les premières vitesses de rotation.

Ainsi, il est toujours possible de penser que l'effet de Coriolis affecte la soufflante dans les essais en rotation réalisés bien que celui-ci semble assez faible. De plus, il est possible de noter que l'effet observé affecte le mode dont la composante prépondérante est à deux diamètres nodaux, se situant dans la zone du diagramme fréquences / diamètres présentant une importante variation correspondant à une forte participation du disque. Or, cette participation du disque contribue à l'apparition de l'effet de Coriolis par ovalisation (et donc par une composante de vitesse vibratoire modale orthogonale au vecteur vitesse angulaire).

Pour conforter les analyses développées à partir des décompositions en composantes à diamètres des formes modales des modes principaux et secondaires de la sous-section 3.4.2, les répartitions des composantes à diamètres des fonctions de réponse fréquentielle expérimentales et numériques sont exposées en figure VI.42.



(a) Excitation contra-rotative - Expérimental

(b) Excitation contra-rotative - Numérique

(c) Excitation co-rotative - Expérimental

(d) Excitation co-rotative - Numérique

FIGURE VI.42 – Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques pour une excitation contra-rotative puis co-rotative du deuxième diamètre nodal, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion pour $v = 20\,\mathrm{V}$ et $\Omega = 50\,\%$ (Déformations $[\frac{\mu\mathrm{def/V}}{\mu\mathrm{def}}]$ min. ■ et max. ■)

Les figures VI.42b et VI.42d sont tracées pour une excitation contra-rotative puis co-rotative du deuxième diamètre nodal de la soufflante à une vitesse de rotation de 50 % du régime nominal de rotation, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion.

Tout d'abord, celles-ci permettent de remarquer que l'amplitude des composantes des modes principaux et secondaires de même indice que l'excitation sont presque équivalentes.

D'un point de vue expérimental, les figures VI.42a et VI.42c montrent que le mode principal (dont la composante principale est co-rotative) ressort principalement dans les réponses à une excitation co-rotative tandis que le mode secondaire (dont la composante principale est contra-rotative) ressort principalement dans les réponses à une excitation contra-rotative.

Ces figures permettent ainsi de confirmer les remarques et observations mentionnées en sous-section 3.4.3 concernant les décompositions en composantes à diamètres des déformées modales des modes principaux et secondaires : les modes principaux et secondaires numériques sont presque exclusivement stationnaires tandis qu'expérimentalement, ces derniers comportent une partie propagative (co-rotative ou contra-rotative) non-négligeable ce qui peut indiquer la présence d'un faible effet de Coriolis lors des essais en rotation de la soufflante.

Dans le but de confirmer la présence de l'effet de Coriolis, il serait intéressant d'introduire cet effet dans les simulations numériques linéaires puis non-linéaires pour différentes vitesses de rotation (dont certaines supérieures à la gamme étudiée). De plus, l'étude de son évolution en fonction de l'intensité de l'effet non-linéaire et du taux de désaccordage sur une roue aubagée de grande taille, telle la soufflante composite étudiée dans ce travail de thèse, serait aussi intéressant.

4 Bilan

Cet ultime chapitre de ce mémoire de thèse a permis de confronter les résultats expérimentaux en dynamique vibratoire d'une soufflante composite, à l'échelle 1:1, en rotation à l'intérieur de l'enceinte sous-vide du banc d'essais PHARE#1 avec les résultats numériques issus des simulations non-linéaires du modèle numérique de cette même soufflante désaccordée fréquentiellement. De plus, le comportement vibratoire spatial et à diamètres de cette dernière a été étudié en présence de désaccordage et de non-linéarités de type contact / frottement pour plusieurs familles de modes de vibration, différents types d'excitation et plusieurs vitesses de rotation.

Avec pour objectif final cette comparaison entre essais et simulations numériques, la partie expérimentale de cette étude a été exposée dans la première section de ce chapitre. Ainsi, le moyen d'essais et la soufflante composite testée ont été largement détaillés, de même que le système d'excitation par actionneurs piézoélectriques et son logiciel de pilotage / acquisition associé (développé au laboratoire durant ces travaux de thèse). Les méthodes expérimentales, comprenant notamment une large partie traitant des techniques mises en place afin d'assurer la qualité des mesures exploitées et l'évaluation des incertitudes en résultant, ont été développées en fin de section.

La deuxième section a été dédiée à la partie numérique de cette étude dans laquelle le modèle éléments finis de la soufflante a été présenté. Les méthodes numériques de condensation, de réduction, de résolution et de post-traitement ont été traitées du point de vue de leur application à ce modèle numérique de soufflante désaccordée dans le cadre de la dynamique non-linéaire ; en particulier les méthodes d'évaluation des modes d'interface et

la CNCMS qui sont spécifiques à cette comparaison. Pour conclure cette section consacrée aux simulations numériques, une étude d'influence du désaccordage fréquentiel de la structure sur les réponses forcées a été proposée ainsi que quelques résultats consacrés au désaccordage en amortissement et de l'excitation.

La section finale de ce mémoire a permis d'analyser et de commenter la confrontation entre les résultats expérimentaux et numériques résultant d'excitations localisées et à diamètres, aboutissant ainsi à une étude complète des deux premières familles de modes de la soufflante.

Dans un premier temps, les paramètres modaux expérimentaux et numériques du système linéaire sous-jacent ont été comparés. Ces derniers ont révélé une très bonne représentativité du modèle numérique de la soufflante par rapport aux essais en rotation tant d'un point de vue des tendances que d'un point de vue des grandeurs, bien que le modèle numérique n'ait pas été spécialement recalé à partir des essais en rotation.

Dans un deuxième temps, les réponses à une excitation localisée, permettant de faire ressortir des modes localisés, ont été étudiées : ce type d'excitation pouvant être considéré comme un moyen de mettre en évidence le désaccordage. Des analyses à diamètres et spatiales sur les fonctions de réponse fréquentielle ont ainsi été menées afin de comparer les réponses expérimentales et numériques de la soufflante ainsi que leur sensibilité à l'évolution de différents paramètres tels que la vitesse de rotation, l'aube excitée ou bien encore l'amplitude de la réponse. Il a ainsi pu être observé que l'effet non-linéaire, dépendant de l'amplitude de la réponse, ainsi que la vitesse de rotation influent peu la répartition spatiale et à diamètres de la réponse de la soufflante à une excitation localisée. De plus, il a été montré que la confrontation entre les réponses expérimentales et numériques engendre des résultats très satisfaisants.

Dans un troisième temps et à la suite du recalage du coefficient de frottement isotrope numérique par rapport à l'évolution des paramètres modaux expérimentaux en fonction de la déformation modale, les réponses à une excitation à diamètres, permettant de faire ressortir des modes globaux, ont été étudiées.

Des premières analyses à diamètres et spatiales des fonctions de réponse fréquentielle, similaires à celles réalisées pour une excitation localisée, ont abouti à une très bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et numériques.

Les paramètres modaux des modes ressortant le plus dans les fonctions de réponse fréquentielle ont été identifiés afin de permettre une analyse modale de ceux-ci. Les décompositions à diamètres des déformées modales ont ainsi révélé la présence d'un faible effet de Coriolis affectant les modes dont la composante prépondérante est à deux diamètres nodaux grâce à la mise en évidence de leur caractéristiques et grâce à la comparaison des comportements expérimentaux et numériques (l'effet de Coriolis n'étant pas simulé numériquement). Toutefois, l'évolution de l'écartement fréquentiel des modes principaux et secondaires en fonction de la vitesse de rotation, probablement très faible dans la plage de vitesse étudiée, n'a pas permis d'affirmer ni de réfuter cette hypothèse. Dans une dernière sous-section, la comparaison des évolutions des paramètres modaux expérimentaux et numériques en fonction de la déformation modale a confirmé les conclusions extraites de l'étude sur mors. En effet, une faible corrélation de l'effet non-linéaire entre les essais et les simulations est observable : notamment, un même coefficient de frottement ne permet pas de simuler l'effet non-linéaire de différentes familles de modes de vibration ou même de plusieurs vitesses de rotation. Toutefois, il semble que les évolutions des paramètres modaux numériques soient plus représentatives de celles des paramètres modaux lorsque les effets non-linéaires sont plus importants.

Conclusion

Ces travaux de thèse se sont inscrits dans la lignée des recherches, menées notamment au LTDS, dans le but de perfectionner la compréhension et la prédiction des phénomènes vibratoires des roues aubagées. Il s'agit ainsi de répondre aux problématiques de fiabilité et de sureté des aéronefs mais aussi de respect des objectifs environnementaux, auxquels sont particulièrement soumis les constructeurs et équipementiers aéronautiques de nos jours. À cet effet, une soufflante composite à large corde de dernière génération a été étudiée en rotation, d'un point de vue expérimental et numérique, permettant d'aborder des thématiques majeures dans la recherche sur les roues aubagées telles que la dynamique non-linéaire et le désaccordage entre les secteurs.

Cette conclusion est composée de deux parties. La première revient en détail sur les principaux résultats et conclusions de ces travaux de thèse. La seconde présente des perspectives dans le but de perfectionner les modélisations et méthodes numériques ainsi que les techniques expérimentales employées, mais aussi des propositions de nouvelles applications et exploitations de ces travaux numériques et expérimentaux.

Résultats

Outre l'amélioration de la compréhension et de la prédiction des phénomènes vibratoires des roues aubagées, l'objectif principal de ces travaux de thèse consistait à étudier la représentativité des modélisations et méthodes numériques, notamment développées au LTDS sur les problématiques de désaccordage et de dynamique non-linéaire, par rapport à des essais en rotation sur une soufflante industrielle en matériau composite. Plusieurs cas d'études, exploitant de multiples méthodes expérimentales et numériques, ont été réalisés et analysés à cet effet : la première étude a été accomplie sur une aube enchâssée dans un mors tandis que la seconde a été effectuée sur une soufflante composite en rotation dans le vide. Dans les deux cas, les aubes ont été excitées au moyen d'actionneurs piézoélectriques, composants majeurs de ces essais et simulations.

Étude sur mors. La première étude, à savoir celle consacrée à une aube enchâssée dans un mors, a permis de focaliser les travaux et les analyses sur la représentativité de la modélisation et des simulations numériques par rapport aux essais sur mors. L'effet non-linéaire de contact et de frottement du pied de l'aube contre l'alvéole du mors a particulièrement été considéré en termes d'évolution des paramètres modaux, que sont la fréquence propre et le taux d'amortissement, en fonction de l'amplitude de vibration.

D'un point de vue expérimental, il a été possible de mettre en évidence des effets non-linéaires, perceptibles grâce à la diminution de la fréquence propre et l'augmentation du taux d'amortissement en fonction du niveau vibratoire qui sont caractéristiques d'effets non-linéaires de contact / frottement. Toutefois, ceux-ci étaient d'intensité modérée car

l'application est réalisée pour une précharge normale appliquée aux portées correspondant à une vitesse de rotation de 70 % du régime nominal de fonctionnement de la soufflante.

D'un point de vue numérique, il a été nécessaire de réduire le modèle numérique du système {aube+mors}, modèle par ailleurs employé dans l'industrie et comprenant un très grand nombre de degrés de liberté, avant de résoudre le problème en dynamique non-linéaire. Une méthode de double synthèse modale a été mise en œuvre dans le but de réduire le modèle : tout d'abord, une technique de synthèse modale à interface fixe de type Craig-Bampton a été appliquée sur chacune des sous-structures puis une méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée a permis de réaliser les simulations numériques non-linéaires à partir d'une base de réduction constituée de modes complexes non-linéaires préalablement évalués. Cette double synthèse modale a ainsi permis de réduire les centaines de milliers de degrés de liberté du modèle numérique à un problème comprenant un nombre d'équations équivalent au nombre de modes complexes non-linéaires retenus dans la base de réduction (soit un ou deux modes), ceci avec une excellente précision.

Afin de représenter le plus précisément possible la structure et les conditions expérimentales, les actionneurs piézoélectriques ont été modélisés. Leur modélisation introduit alors de nouveaux degrés de liberté mécaniques mais aussi électriques. La présence de ces degrés de liberté électriques dans les équations ne permet pas d'exploiter les différentes méthodes de réduction envisagées. Par conséquent, une méthode exacte de condensation de ces degrés de liberté a été développée afin de s'affranchir de ces derniers.

La comparaison entre les essais sur l'aube dans son mors et les simulations numériques associées a, tout d'abord, mis à l'épreuve la modélisation numérique du système {aube+mors} et notamment son système linéaire sous-jacent. Cette comparaison des paramètres modaux linéaires fut très satisfaisante, aboutissant à de très faibles écarts entre les résultats des essais linéarisés et la modélisation numérique, particulièrement en considérant le peu de recalage effectué sur le modèle numérique.

La comparaison entre effets non-linéaires expérimentaux et numériques a, quant à elle, été plus complexe malgré le recalage du coefficient de frottement par rapport à l'évolution du taux d'amortissement du premier mode de flexion (paramètre modal dominant l'amplitude vibratoire à la résonance). En effet, les essais présentaient une évolution plus progressive des paramètres modaux par rapport à celle observée lors des simulations qui est moins régulière, notamment en termes d'évolution de la fréquence propre en fonction de l'amplitude de vibration. L'analyse de sensibilité par rapport au coefficient de friction μ a été exploitée afin de proposer une piste d'amélioration du modèle tribologique qui consisterait à faire varier la valeur du coefficient de frottement en fonction de l'amplitude vibratoire afin de compenser ces différences d'évolution. Il conviendrait cependant de valider le sens physique de ce modèle tribologique. De plus, il a été également observé qu'un même coefficient de frottement numérique ne permettait pas de corréler l'évolution expérimentale des paramètres modaux des différents modes étudiés, à savoir le premier et le deuxième mode de flexion. En effet, l'évolution numérique des paramètres modaux du deuxième mode de flexion était très faible en comparaison de celle observée expérimentalement. Toutefois, l'intensité modérée de l'effet non-linéaire a eu pour effet de limiter les erreurs commises sur l'amplitude vibratoire à la résonance des deux modes étudiés.

Ces différences d'évolution des paramètres modaux entre les essais et les simulations ont pu être imputées aux lois de contact et de frottement (respectivement la loi de contact unilatérale et la loi de frottement de Coulomb) évaluées au moyen de la DLFT. D'autre part, bien que le nombre de nœuds de contact à l'interface de ces deux structures soit important pour une étude en dynamique non-linéaire et qu'une étude de sensibilité ait été réalisée sur ce paramètre, il est possible qu'un maillage encore plus fin aurait permis de

parfaire la représentativité des effets non-linéaires de ce cas d'étude. Par conséquent, ce maillage très fin demanderait alors de mettre au point une méthode permettant de faire face au nombre accru de degrés de liberté à l'interface de contact.

En prime de procurer des premières observations et conclusions quant à la représentativité du modèle numérique de l'aube et des effets non-linéaires de contact / frottement simulés par rapport aux essais, ce premier cas d'étude a été une étape importante en vue des essais et simulations numériques de la soufflante complète puisque ce dernier a permis d'aborder certains points cruciaux, réemployés dans le second cas d'étude.

En effet, d'un point de vue expérimental, les méthodes expérimentales employées pour aboutir à des mesures et post-traitements de qualité ont notamment permis d'utiliser une technique d'identification modale globale, nommée LSRF. Compte tenu du faible effet non-linéaire, le modèle de réponse modale linéaire a constitué une approximation satisfaisante comme ceci a pu être montré sur des modes isolés (notamment sur mors puis avec le zéro diamètre nodal sur la soufflante en rotation) affectés par une dépendance significative de l'amortissement par rapport à l'amplitude vibratoire.

D'un point de vue numérique, les paramètres des différentes méthodes numériques de réduction et de résolution exploitées ont été optimisés au moyen d'études d'influence ayant pour objectif de conserver un temps de calcul raisonnable tout en maximisant la précision des simulations. De surcroît, les dix-huit aubes de la soufflante ont été testées sur mors ce qui a permis d'identifier les paramètres modaux des différentes aubes et ainsi fournir des données quantitatives pour introduire le désaccordage de la soufflante en vue des simulations numériques non-linéaires de celle-ci.

Étude en rotation. La seconde étude, consacrée aux essais en rotation de la soufflante composite, a constitué l'épilogue de ces travaux de thèse. Celle-ci a permis de traiter des problématiques de non-linéarité et de désaccordage des roues aubagées. Par ailleurs, cette étude en rotation a fait intervenir un grand nombre de paramètres d'influence tels que la vitesse de rotation, le diamètre nodal excité, le sens d'excitation ou bien encore l'amplitude vibratoire de la réponse.

Expérimentalement, le banc d'essais PHARE#1, dont il s'agissait de la toute première campagne d'essais, a permis de tester la soufflante composite à l'échelle 1:1, en rotation dans des conditions de vide primaire, autorisant ainsi l'étude de la roue aubagée d'un point de vue purement mécanique. Le système d'excitation de la soufflante, constitué de centaines d'actionneurs piézoélectriques répartis sur chacune des aubes, a été employé dans le dessein d'exciter la soufflante selon des schémas à diamètres particuliers ou au moyen d'une excitation localisée sur une seule aube, avec des amplitudes vibratoires représentatives des conditions de fonctionnement. De plus, le banc d'essais a permis de tester la dynamique non-linéaire de la soufflante à différentes vitesses de rotation et donc pour plusieurs précharges centrifuges des aubes mais aussi plusieurs efforts normaux de contact et ainsi des effets non-linéaires différents en fonction de la vitesse de rotation.

Numériquement, afin d'autoriser l'étude du désaccordage de la soufflante, le problème numérique a été abordé par sous-structuration, en décomposant la roue aubagée en dix-huit secteurs indépendants. À partir d'un secteur {aube+disque} de référence, une réduction du modèle numérique a été réalisée au moyen d'une méthode de triple synthèse modale, aussi nommée CNCMS. Cette dernière comprenait une première réduction du secteur de référence au moyen de la méthode de Craig-Bampton, à l'instar de la réduction du système {aube+mors}. La seconde étape a permis une réduction des degrés de liberté de

contact / frottement, de ce même secteur de référence préalablement réduit, à partir d'une base de réduction constituée de modes complexes non-linéaires préalablement évalués (pour des degrés de liberté de frontière encastrés, similairement aux techniques classiques de synthèse modale à interface fixe). Une fois les dix-huit secteurs de la soufflante assemblés, les degrés de liberté de frontière, ayant permis l'assemblage de la soufflante, ont été réduits grâce à une technique de synthèse modale des modes d'interface, pour ce qui constituait la troisième étape de réduction. Au final, le modèle triplement réduit a été uniquement formé des modes non-linéaires, associés à chacun des secteurs, et des modes d'interface.

Afin de désaccorder numériquement la soufflante, la valeur de la fréquence propre du mode complexe non-linéaire de chaque secteur a été perturbée en fonction de la dispersion mesurée sur les dix-huit aubes lors des essais sur mors pour chaque famille de modes de vibration. Il est à noter que le désaccordage caractérisé à partir de cet échantillon correspond à un cas de désaccordage important.

Par ailleurs, les actionneurs piézoélectriques ont aussi été pris en compte dans la modélisation numérique du secteur {aube+disque} : la technique de condensation a été étendue aux degrés de liberté électriques permettant ainsi d'exploiter la CNCMS en présence des actionneurs.

La comparaison entre essais et simulations numériques de la soufflante composite désaccordée a tout d'abord été effectuée sur le système linéaire sous-jacent. Cette comparaison sur les paramètres modaux linéaires a été particulièrement satisfaisante et notamment la comparaison de leur évolution en fonction de la vitesse de rotation et du diamètre nodal qui exhibait les mêmes tendances expérimentalement et numériquement.

L'effet du désaccordage a principalement été étudié grâce aux réponses non-linéaires à une excitation localisée d'une seule aube, permettant ainsi de faire ressortir des modes localisés, mais aussi en comparant l'étalement spectral des réponses. La décomposition en composantes à diamètres de la réponse de ces modes localisés ainsi que la répartition spatiale des amplitudes vibratoires de chacune des aubes sont grandement dépendantes du désaccordage de la soufflante. La représentativité des simulations numériques en termes de désaccordage a été jugée très satisfaisante grâce à la comparaison des décompositions à diamètres et des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires issues des fonctions de réponse fréquentielle expérimentales et numériques.

Les effets non-linéaires ont été étudiés à partir d'une excitation à diamètres de la soufflante, permettant d'exciter les aubes avec des amplitudes de vibration plus importantes qu'une excitation localisée, plus difficile à approprier. L'excitation à diamètres a permis de faire ressortir les effets non-linéaires sur les modes répondant avec le même indice que la répartition spatiale de l'excitation. La séparation fréquentielle des modes doubles due au désaccordage a aussi été mise en évidence.

La comparaison des évolutions expérimentales et numériques des paramètres modaux en fonction de l'amplitude modale de déformation a abouti à des conclusions similaires à celles évoquées lors de l'étude sur mors : notamment concernant le faible décalage fréquentiel numérique, l'écart dans le point de décollement initiant le glissement ainsi que la faible représentativité numérique de l'évolution des paramètres modaux de la famille du deuxième mode de flexion pour un coefficient de frottement identique à celui de la famille du premier mode de flexion. De plus, une faible représentativité numérique de l'évolution des paramètres modaux en fonction de l'amplitude modale de déformation pour plusieurs vitesses de rotation et pour un même coefficient de frottement a aussi pu être remarqué, l'évolution numérique étant bien plus faible que celle expérimentale. Une loi faisant varier ce coefficient de frottement en fonction de la vitesse de rotation a été ainsi proposée comme piste d'amélioration, celle-ci permettant de corréler les différentes évolutions pour le pre-

mier mode de flexion mais nécessiterait toutefois un recalage initial. Une nouvelle fois, les lois de contact et de frottement ainsi que le nombre de nœuds de contact à l'interface des structures peuvent être associés aux différents défauts de représentation numérique. Toutefois, pour des effets non-linéaires importants, à l'image de ceux obtenus pour la famille du premier mode de flexion à une vitesse de 30 % du régime de fonctionnement, les écarts entre les évolutions des paramètres modaux expérimentaux et numériques se sont atténués. Il a été important de remarquer que les décompositions à diamètres et les répartitions spatiales (du mode et de la réponse) ont été très peu dépendantes de l'amplitude vibratoire et de la vitesse de rotation étudiées dans ces travaux de thèse.

Pour finir, les décompositions à diamètres des formes modales des bas diamètres de la famille du deuxième mode de flexion ont permis de mettre en évidence des effets caractéristiques de l'effet de Coriolis : une émergence de la nature propagative des formes modales en fonction de la vitesse. Toutefois, cette observation n'a pas été confirmée par une importante ouverture des fréquences propres des modes dégénérés en fonction de la vitesse de rotation. Il est néanmoins possible que celle-ci soit faible dans ce cas, ce qui pourrait être vérifié par simulations numérique à condition d'intégrer ces effets dans le modèle. Cet aspect pourrait devenir plus important si les conceptions des disques des soufflantes s'optimisent encore et deviennent plus souples. En effet, l'effet de Coriolis a été appréhendé pour un mode à bas diamètre nodal de la famille du deuxième mode de flexion, pour lequel le couplage avec le disque est mis en évidence sur le diagramme diamètre / fréquence.

D'un point de vue industriel, les essais en rotation entrepris durant ces travaux de thèse ont permis de caractériser, précisément et exhaustivement, la soufflante en composite de dernière génération, dont le comportement vibratoire en rotation a été moins étudié dans la littérature que ses homologues métalliques du fait de son récent développement, pour plusieurs régimes de rotation et différents types d'excitation. Il a notamment été possible d'extraire le taux d'amortissement structural et celui issu des effets non-linéaires, de modes appartenant à plusieurs familles de modes de vibration. Ainsi, en comparaison avec le taux d'amortissement apporté par le fluide pendant le fonctionnement en vol du turboréacteur, celui structural peut être considéré comme faible puisqu'il est près de cinq fois inférieur à ce dernier. Cependant, pour un effet non-linéaire important, l'amortissement mécanique influe bien plus sur la réponse forcée, pouvant même contribuer jusqu'à 40 % de l'amortissement total, dans la gamme d'amplitude vibratoire étudiée durant ces essais.

Par ailleurs, des méthodes de réduction récemment développées et fondées sur le principe de sous-structuration du problème, telle la CNCMS, ont pu être exploitées sur des modèles numériques éléments finis de très grande taille, employés directement dans l'industrie. Ces travaux de thèse ont ainsi permis de conforter le fort pouvoir de réduction de ces méthodes et la précision de celles-ci en termes de représentation du désaccordage de la soufflante. Bien que ces méthodes permettent de résoudre des problèmes de désaccordage en dynamique non-linéaire, ne pouvant être résolus sans importante réduction avec les moyens de calcul disponibles, le temps de calcul de la totalité de la procédure de réduction et de résolution de la CNCMS reste rédhibitoire au niveau d'un bureau d'étude pour des problèmes numériques comportant un très grand nombre de degrés de liberté, tel le modèle numérique de la soufflante étudiée dans ces travaux de thèse.

Perspectives

Les multiples études, aussi bien expérimentales que numériques, réalisées tout au long de ces travaux de thèse ouvrent la voie à de nombreuses perspectives. Cette section expose plusieurs de ces perspectives, proposant ainsi le perfectionnement des méthodes expérimentales et numériques employées et permettant aussi d'élargir le champ d'application de ces travaux.

Tout d'abord, d'un point de vue expérimental, la forte densité modale observée sur les réponses forcées, particulièrement pour la famille du premier mode de flexion, a pu poser quelques difficultés notamment en ce qui concerne l'identification des paramètres modaux. Afin de surmonter ce problème, des techniques particulières d'excitation, telles les méthodes d'appropriation, permettraient uniquement d'isoler le mode étudié. De plus, afin de mieux traiter ces difficultés d'extraction des paramètres modaux, il serait possible de perfectionner les méthodes d'identification modale afin de mieux adresser les problèmes liés à cette forte densité modale.

Par ailleurs, il serait ainsi intéressant d'augmenter les niveaux de sollicitation des aubes dans le but d'étudier des effets non-linéaires plus importants et de comparer ces derniers par rapport à des simulations numériques non-linéaires présentant, elles aussi, de forts effets non-linéaires. Toutefois, d'importantes non-linéarités pourraient nécessiter des techniques d'identification modale non-linéaire afin de conserver une précision satisfaisante d'extraction des paramètres modaux.

De surcroît, l'évaluation des répartitions des efforts normaux aux interfaces de contact à différentes vitesses de rotation serait intéressante. En effet, il serait possible de prévoir les zones d'usure plus importantes en fonction de la répartition des efforts de contact et ainsi simuler l'évolution de la dynamique non-linéaire qui en résulte. D'autre part, l'évaluation des répartitions des efforts de contact pourrait permettre d'adapter le raffinement du maillage dans certaines zones de fort glissement et ainsi perfectionner l'estimation des effets non-linéaires.

D'un point de vue numérique, la principale limitation des simulations numériques non-linéaires de la soufflante en rotation demeure les lois de contact et de frottement qui, comme il a été observé durant ces travaux de thèse, sont peu représentatives des comportements non-linéaires expérimentaux et notamment de l'évolution des paramètres modaux pour de moyennes sollicitations vibratoires. Le perfectionnement de ces lois de contact et de frottement pourraient ainsi permettre d'améliorer la représentativité des simulations numériques vis-à-vis des essais en rotation, particulièrement la prédiction des effets non-linéaires pour les différentes familles de modes de vibration et les multiples vitesses de rotation étudiées, à l'image des lois d'évolution du coefficient de frottement en fonction de l'amplitude vibratoire et de la vitesse de rotation proposées dans ce manuscrit. À des fins de perfectionnement de ces lois, une étude tribologique expérimentale et numérique pourrait être nécessaire afin de caractériser les lois de contact et de frottement en amont.

Par ailleurs, la prise en compte de l'effet de Coriolis dans les simulations numériques pourrait permettre de confirmer celui entrevu expérimentalement grâce aux décompositions en composantes à diamètres des formes modales. Il serait ainsi possible de comparer l'évolution expérimentale et numérique de l'ouverture des fréquences propres des modes dégénérés en fonction de la vitesse de rotation mais aussi d'observer l'évolution de l'effet de Coriolis à partir de la décomposition en composantes co-rotative et contra-rotative. Cette comparaison permettrait de perfectionner la compréhension de cet effet associé à des effets non-linéaires dans le cadre d'une soufflante composite à large corde et ainsi prédire précisément leur comportement dans le cadre d'une évolution de la conception de

la soufflante ; par exemple, pour un disque plus souple, pouvant entraîner des effets de Coriolis plus importants.

Un recalage de la modélisation numérique des actionneurs piézoélectriques a été nécessaire afin de corréler les amplitudes vibratoires obtenues en essais pour un taux d'amortissement structural identique. Afin de se soustraire à cette étape de recalage du modèle numérique des actionneurs (et notamment du coefficient d_{31}), il serait possible de perfectionner le modèle en prenant notamment en compte la couche de colle liant les actionneurs à l'aube ainsi que les films encaspsulant la céramique piézoélectrique. En outre, il serait aussi intéressant de mieux caractériser expérimentalement les actionneurs piézoélectriques sur un système simple (une poutre par exemple) afin de valider les valeurs des paramètres piézoélectriques.

D'un point de vue des applications résultant de ces travaux de thèse, les essais de cette première campagne d'essais sur le banc PHARE#1 ont permis de tester plusieurs configurations de la soufflante composite, autorisant ainsi l'étude de l'influence de différents composants sur la dynamique de la soufflante en rotation, tels les clinquants ou les plateformes (en effet, ces travaux de thèse ont exploité une configuration volontairement dépouillée de la soufflante sans ces composants). Ces essais pourraient ainsi servir de point de comparaison pour développer les modélisations de ces deux composants complexes à prendre en compte numériquement puisque ces derniers sont tous deux positionnés à des emplacements sensibles : les clinquants à l'interface de contact / frottement entre les aubes et le disque ; les plateformes à la frontière entre les différents secteurs de la soufflante.

De même, une technologie d'amortissement des aubes au moyen de patchs viscoélastiques, insérés à la surface des aubes, a pu être testée durant cette première campagne d'essais. Deux aubes parmi les dix-huit que contient la soufflante ont pu être équipées de ces patchs et ont ainsi permis de tester l'efficacité de cette technologie passive de contrôle vibratoire en fonction, notamment, de la vitesse de rotation. Un important désaccordage a donc été introduit sur la configuration de cette soufflante. Outre l'étude de l'influence expérimentale de ces aubes sur la dynamique de la soufflante, il pourrait être intéressant d'intégrer les modèles numériques de ces aubes dans les simulations non-linéaires pour évaluer la représentativité de la procédure de la CNCMS avec un désaccordage en forme (couplé au désaccordage fréquentiel exploité durant ces essais) par rapport à ces essais en rotation.

Pour finir, parmi les applications pouvant résulter de ces travaux de thèse, le *shunt* piézoélectrique, évoqué dans le chapitre VI, permet de prolonger l'étude d'applications impliquant des actionneurs piézoélectriques tout en incorporant une thématique de contrôle vibratoire à celle de la réponse forcée des roues aubagées, étudiée dans ce manuscrit. Cette technique semi-active d'amortissement en fonctionnement est une technologie prometteuse qui pourrait ainsi être étudiée en rotation dans des conditions mécaniques proches de celles de fonctionnement. Par ailleurs, il serait possible de modéliser le système de *shunt* piézoélectrique dans le cadre de la dynamique non-linéaire, ce qui nécessiterait de conserver les degrés de liberté électriques à travers les techniques de réduction et donc de développer des techniques de réduction multiphysiques afin de conserver le couplage piézomécanique dans les simulations numériques non-linéaires.

Références

[1] E. L. Allgower et K. Georg : *Introduction to numerical continuation methods*, vol. 45. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. (cité p. 50)

[2] H. Allik et T. J. Hughes : Finite element method for piezoelectric vibration. *International journal for numerical methods in engineering*, 2(2):151–157, 1970. (cité p. 114, 116)

[3] P. Almeida, C. Gibert, F. Thouverez, X. Leblanc et J.-P. Ousty : Experimental analysis of dynamic interaction between a centrifugal compressor and its casing. *Journal of Turbomachinery*, 137(3):031008, 2015. (cité p. 34, 186)

[4] L. M. Amoo : On the design and structural analysis of jet engine fan blade structures. *Progress in Aerospace Sciences*, 60:1–11, 2013. (cité p. 9, 11)

[5] M. Ansar, W. Xinwei et Z. Chouwei : Modeling strategies of 3D woven composites : a review. *Composite structures*, 93(8):1947–1963, 2011. (cité p. 147)

[6] Ansys Inc. : Ansys® *Mechanical APDL™ Manual*, Release 16.1. (cité p. 147, 148, 149, 215)

[7] Ansys Inc. : Ansys® *Mechanical APDL™ Theory Reference*, Release 16.1. (cité p. 111)

[8] J. Archard : Elastic deformation and the laws of friction. *Proceedings of the Royal Society of London, Serie A : Mathematical and Physical Sciences*, 243(1233):190–205, 1957. (cité p. 241)

[9] G. Asch et B. Poussery : *Les capteurs en instrumentation industrielle*. Dunod, 2017. (cité p. 126, 127, 206, 211)

[10] M. C. C. Bampton et R. R. Craig Jr : Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7):1313–1319, 1968. (cité p. 73, 78)

[11] A. Batailly : *Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2008. (cité p. 79)

[12] K. J. Bathe : *Finite element procedures*. Prentice Hall, 2006. (cité p. 12, 15)

[13] A. Bazergui : *Analyse expérimentale des contraintes*. Recueil de notes de cours, École Polytechnique, Section de mécanique appliquée, 1988. (cité p. 127, 162)

[14] J. Belz, M. May, J. Siemann, J. R. Seume, C. Voigt, H. Böhmer et B. Grüber : Excited blade vibration for aeroelastic investigations of a rotating blisk using piezoelectric macro fiber composites. *In ASME Turbo Expo 2013 : Turbine Technical Conference and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers, 2013. (cité p. 130, 186)

[15] W. Benfield et R. Hruda : Vibration analysis of structures by component mode substitution. *AIAA journal*, 9(7):1255–1261, 1971. (cité p. 30, 78)

[16] A. BENJEDDOU : Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements : a survey. *Computers & Structures*, 76(1-3):347–363, 2000. (cité p. 114)

[17] A. BENJEDDOU : Field-dependent nonlinear piezoelectricity : a focused review. *International Journal of Smart and Nano Materials*, 9(1):68–84, 2018. (cité p. 111)

[18] R. BLADH, M. P. CASTANIER et C. PIERRE : Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks - part i : Theoretical models. *Journal of Engineering for Gas turbines and Power*, 123(1):89–99, 2001. (cité p. 30)

[19] R. BLADH, M. P. CASTANIER et C. PIERRE : Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks - part ii : Application. *Journal of Engineering for Gas turbines and Power*, 123(1):100–108, 2001. (cité p. 30)

[20] R. BOUC : Forced vibrations of mechanical systems with hysteresis. *In Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillations, Prague, 1967*, 1967. (cité p. 22, 182)

[21] M. C. BRENNAN et A.-M. R. MCGOWAN : Piezoelectric power requirements for active vibration control. *In Smart Structures and Materials 1997 : Mathematics and Control in Smart Structures*, vol. 3039, p. 660–670. International Society for Optics and Photonics, 1997. (cité p. 136)

[22] D. BRIZARD : *Contrôle des vibrations de charge utile sur lanceur spatial*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2011. (cité p. 83)

[23] G. V. BROWN, R. E. KIELB, E. H. MEYN, R. E. MORRIS et S. J. POSTA : Lewis research center spin rig and its use in vibration analysis of rotating systems. Rap. tech., NASA Lewis Research Center, 1984. (cité p. 129)

[24] T. M. CAMERON et J. H. GRIFFIN : An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of applied mechanics*, 56(1):149–154, 1989. (cité p. 47)

[25] J. CARR : *Applications of centre manifold theory*, vol. 35. Springer Science & Business Media, 2012. (cité p. 57)

[26] M. P. CASTANIER et C. PIERRE : Using intentional mistuning in the design of turbomachinery rotors. *AIAA journal*, 40(10):2077–2086, 2002. (cité p. 31)

[27] M. P. CASTANIER et C. PIERRE : Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration : current status and emerging directions. *Journal of Propulsion and Power*, 22(2):384–396, 2006. (cité p. 31)

[28] D. CHARLEUX, C. GIBERT, F. THOUVEREZ et J. DUPEUX : Numerical and experimental study of friction damping blade attachments of rotating bladed disks. *International Journal of Rotating Machinery*, 2006. (cité p. 110, 130, 186)

[29] D. CHARLEUX : *Étude des effets de la friction en pied d'aube sur la dynamique des roues aubagées*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2006. (cité p. 3, 20, 23, 44, 110, 130, 158, 181, 182, 236, 241, 242, 269)

[30] B. B. CHOI, J. KAUFFMAN, K. P. DUFFY, A. J. PROVENZA et C. MORRISON : Active vibration reduction of titanium alloy fan blades using piezoelectric materials. *In Propulsion-Safety and Affordable Readiness Conference*, 2010. (cité p. 186)

[31] B.-K. Choi, J. Lentz, A. Rivas-Guerra et M. P. Mignolet : Optimization of intentional mistuning patterns for the reduction of the forced response effects of unintentional mistuning : Formulation and assessment. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 125(1):131–140, 2002. (cité p. 31)

[32] B. Cochelin, N. Damil et M. Potier-Ferry : *Méthode asymptotique numérique*. Hermes Lavoissier, 2007. (cité p. 50)

[33] M. Collet et K. A. Cunefare : Modal synthesis and dynamical condensation methods for accurate piezoelectric systems impedance computation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 19(11):1251–1269, 2008. (cité p. 114, 116)

[34] A. Conn, N. Gould et P. Toint : *Trust region methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. (cité p. 47, 61)

[35] J. W. Cooley et J. W. Tukey : An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90):297–301, 1965. (cité p. 48, 167, 198, 199, 260)

[36] R. R. Craig Jr et C.-J. Chang : Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 14(11):1633–1635, 1976. (cité p. 78)

[37] R. R. Craig Jr et C.-J. Chang : Substructure coupling for dynamic analysis and testing. Rap. tech., NASA, 1977. (cité p. 83)

[38] P. Curie : *Œuvres de Pierre Curie : publiées par les soins de la Société française de physique*. Gauthier-Villars, 1908. (cité p. 106)

[39] L. P. Da Silva : *Atténuation du bruit et des vibrations de structures minces par dispositifs piézoélectriques passifs : modèles numériques d'ordre réduit et optimisation*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2014. (cité p. 113, 116)

[40] M. C. Da Silva : A comprehensive analysis of the dynamics of a helicopter rotor blade. *International Journal of Solids and Structures*, 35(7-8):619–635, 1998. (cité p. 19)

[41] B. Dambrine, O. Molinari et D. Coupe : Turbomachine blade, in particular a fan blade, and its method of manufacture, sept. 5 2006. US Patent 7,101,154. (cité p. 11)

[42] A. Darkawi : La Compatibilité Electromagnétique (CEM), 2016. (cité p. 206, 211)

[43] D. Demailly : *Étude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel - Application à la dynamique rotor*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2003. (cité p. 49, 51, 53)

[44] J.-F. Deü et A. Benjeddou : Free-vibration analysis of laminated plates with embedded shear-mode piezoceramic layers. *International Journal of Solids and Structures*, 42(7):2059–2088, 2005. (cité p. 110)

[45] J.-F. Deü, W. Larbi, R. Ohayon et R. Sampaio : Piezoelectric shunt vibration damping of structural-acoustic systems : Finite element formulation and reduced-order model. *Journal of Vibration and Acoustics*, 136(3):031007, 2014. (cité p. 112)

[46] K. D'Souza, E. Kurstak, K. Ruff et M. G. Dunn : A new experimental facility for characterizing bladed disk dynamics at design speed. *AIAA Journal*, p. 1–9, 2020. (cité p. 129, 186)

[47] J. DUCARNE, O. THOMAS et J.-F. DEÜ : Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction. *Journal of Sound and Vibration*, 331(14):3286–3303, 2012. (cité p. 112)

[48] J. DUCARNE : *Modélisation et optimisation de dispositifs non-linéaires d'amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2009. (cité p. 109, 112, 116, 151)

[49] K. P. DUFFY, B. B. CHOI, A. J. PROVENZA, J. B. MIN et N. KRAY : Active piezoelectric vibration control of subscale composite fan blades. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 135(1):011601, 2013. (cité p. 130, 132, 186, 236)

[50] R. DYE et T. HENRY : Vibration amplitudes of compressor blades resulting from scatter in blade natural frequencies. *Journal of Engineering for Power*, 91(3):182–187, 1969. (cité p. 30)

[51] E. P. EER NISSE : Variational method for eletcroelastic-vibration analysis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 40(5):1260–1260, 1966. (cité p. 112)

[52] D. J. EWINS : The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks. *Journal of Sound and Vibration*, 9(1):65–79, 1969. (cité p. 30, 31)

[53] D. J. EWINS : Vibration characteristics of bladed disc assemblies. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 15(3):165–186, 1973. (cité p. 31)

[54] D. J. EWINS et Z. S. HAN : Resonant vibration levels of a mistuned bladed disk. *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, 106(2):211–217, 1984. (cité p. 31)

[55] D. J. EWINS : *Modal testing : theory, practice and application*. John Wiley & Sons, 2000. (cité p. 140, 202, 205)

[56] C. FARHAT et D. AMSALLEM : Projection-based model reduction. Stanford University, 2011. (cité p. 77, 78)

[57] D. M. FEINER et J. GRIFFIN : A fundamental model of mistuning for a single family of modes. *Journal of turbomachinery*, 124(4):597–605, 2002. (cité p. 30)

[58] R. FLETCHER : *Practical methods of optimization, second edition*. John Wiley & Sons, 2000. (cité p. 46)

[59] G. FLOQUET : Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 12(1883):47–88, 1883. (cité p. 69)

[60] M. FRISWELL et J. PENNY : Stepped sine testing using recursive estimation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 7(6):477–491, 1993. (cité p. 138, 199)

[61] M. GÉRADIN et D. RIXEN : *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Collection Physique fondamentale et appliquée. Masson, 1992. (cité p. 13, 18, 43, 140, 205)

[62] C. GIBERT : Fitting measured frequency response using non-linear modes. *Mechanical systems and signal processing*, 17(1):211–218, 2003. (cité p. 55, 84, 144)

[63] C. GIBERT : *Analyse modale non-linéaire expérimentale*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2001. (cité p. 57, 71)

[64] C. GIBERT, V. KHARYTON, F. THOUVEREZ et P. JEAN : On forced response of a rotating integrally bladed disk : Predictions and experiments. *In ASME turbo expo 2010 : Power for land, sea, and air*. ASME, 2010. (cité p. 110, 130, 186, 270)

[65] C. Gibert, F. Thouverez et L. Jézéquel : Non-linear modal analysis applied to an industrial structure. *In 17th International Modal Analysis Congres, Orlando, Florida*, vol. 2, p. 155–242. American Society of Mechanical Engineers, 1999. (cité p. 71)

[66] G. Gloth et M. Sinapius : Analysis of swept-sine runs during modal identification. *Mechanical systems and signal processing*, 18(6):1421–1441, 2004. (cité p. 137, 202)

[67] T. Gmür : *Dynamique des structures : analyse modale numérique*. Mécanique (Lausanne). Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997. (cité p. 13, 14, 15, 17, 112)

[68] R. L. Goldman : Vibration analysis by dynamic partitioning. *AIAA journal*, 7 (6):1152–1154, 1969. (cité p. 78)

[69] I. Goltz, H. Böhmer, R. Nollau, J. Belz, B. Grüber et J. Seume : Piezoelectric actuation of rotor blades in an axial compressor. *In ETC 2009 - 8th European Conference on Turbomachinery*, 2009. (cité p. 130, 186)

[70] N. Gourdain : *Simulation numérique des phénomènes de décollement tournant dans les compresseurs axiaux*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2005. (cité p. 33)

[71] J. Griffin et T. Hoosac : Model development and statistical investigation of turbine blade mistuning. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 106(2):204–210, 1984. (cité p. 31)

[72] A. Grolet : *Dynamique non-linéaire des structures mécaniques - Application aux systèmes à symétrie cyclique*. Thèse de doctorat, École centrale de Lyon, 2013. (cité p. 19, 44, 46, 53, 59)

[73] A. Grolet et F. Thouverez : Free and forced vibration analysis of a nonlinear system with cyclic symmetry : Application to a simplified model. *Journal of sound and vibration*, 331(12):2911–2928, 2012. (cité p. 19, 59)

[74] A. Grolet et F. Thouverez : On a new harmonic selection technique for harmonic balance method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 30:43–60, 2012. (cité p. 44)

[75] M. Gruin : *Dynamique non-linéaire d'une roue de turbine Basse Pression soumise à des excitations structurales d'un turboréacteur*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2012. (cité p. 3, 51)

[76] J. Guckenheimer et P. Holmes : *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, vol. 42. Springer Science & Business Media, 2013. (cité p. 42, 57)

[77] P. Guillaume, P. Verboven, S. Vanlanduit, H. Van Der Auweraer et B. Peeters : A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator. *In Proceedings of IMAC*, vol. 21, p. 183–192, 2003. (cité p. 141)

[78] M. Guskov : *Dynamique non-linéaire des systèmes multirotors - Études numérique et expérimentale*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2007. (cité p. 3, 44)

[79] R. J. Guyan : Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA journal*, 3(2):380–380, 1965. (cité p. 81)

[80] H.-P. Hackenberg et A. Hartung : An approach for estimating the effect of transient sweep through a resonance. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 138(8):082502, 2016. (cité p. 137, 202)

[81] N. W. HAGOOD et A. von FLOTOW : Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of sound and vibration*, 146(2):243–268, 1991. (cité p. 106)

[82] K. C. HALL, R. E. KIELB et J. P. THOMAS : *Unsteady aerodynamics, aeroacoustics and aeroelasticity of turbomachines*. Springer, 2006. (cité p. 32)

[83] R. HENRY : Calcul des fréquences et modes des structures répétitives circulaires. *Journal de Mécanique appliquée*, 4(1):61–82, 1980. (cité p. 23)

[84] HEWLETT-PACKARD : *HP 35665A Dynamic Signal Analyser - Concepts Guide*, 1991. (cité p. 136)

[85] HEWLETT-PACKARD : *HP 3565S Measurement Hardware - Technical Specifications*, 1998. (cité p. 128, 132, 146)

[86] HEWLETT-PACKARD : *HP 3566A and 3567A - Technical Specifications*, 1998. (cité p. 128, 132)

[87] G. W. HILL : On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta mathematica*, 8(1):1–36, 1886. (cité p. 69)

[88] M. W. HOOKER : Properties of PZT-based piezoelectric ceramics between -150 and 250°C. Rap. tech., NASA Langley Research Center, 1998. (cité p. 106, 107)

[89] N. HORCHIDAN, C. CIOMAGA, R. FRUNZA, C. CAPIANI, C. GALASSI et L. MITOSERIU : A comparative study of hard/soft PZT-based ceramic composites. *Ceramics International*, 42(7):9125–9132, 2016. (cité p. 107)

[90] S. N. HOU : Review of modal synthesis techniques and a new approach. *Shock and Vibration Bulletin*, 40(4):25–39, 1969. (cité p. 78)

[91] W. C. HURTY : Vibrations of structural systems by component mode synthesis. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 86(4):51–70, 1960. (cité p. 78)

[92] W. C. HURTY : Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA journal*, 3(4):678–685, 1965. (cité p. 78)

[93] W.-S. HWANG et H. C. PARK : Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators. *AIAA journal*, 31(5):930–937, 1993. (cité p. 116)

[94] R. A. IBRAHIM : Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos - Part I : mechanics of contact and friction. *ASME Applied Mechanics Review*, 47(7):209–226, 1994. (cité p. 241)

[95] IEEE STD : *IEEE Standard on Piezoelectricity*. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1988. (cité p. 109, 110, 111, 150, 151)

[96] P. JEAN, C. GIBERT, C. DUPONT et J.-P. LOMBARD : Test-model correlation of dry-friction damping phenomena in aero-engines. *In ASME Turbo Expo 2008 : Power for Land, Sea, and Air*, p. 481–491. American Society of Mechanical Engineers, 2008. (cité p. 186)

[97] L. JÉZÉQUEL : *Synthèse modale : théorie et extensions*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon, 1985. (cité p. 83)

[98] L. JEZEQUEL et C.-H. LAMARQUE : Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of sound and vibration*, 149(3):429–459, 1991. (cité p. 58)

[99] C. Joannin : *Réduction de modèle par sous-structuration et modes non-linéaires - Application à la dynamique des roues aubagées*. Thèse de doctorat, École centrale de Lyon, 2017. (cité p. 3, 20, 26, 44, 53, 59, 62, 73, 85, 88, 89, 91, 92, 93, 100, 101, 102, 103, 156, 219, 222, 228, 309)

[100] C. Joannin, B. Chouvion, F. Thouverez, M. Mbaye et J.-P. Ousty : Nonlinear modal analysis of mistuned periodic structures subjected to dry friction. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 138(7):072504, 2016. (cité p. 59, 89)

[101] C. Joannin, B. Chouvion, F. Thouverez, J.-P. Ousty et M. Mbaye : A nonlinear component mode synthesis method for the computation of steady-state vibrations in non-conservative systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 83:75–92, 2017. (cité p. 3, 30, 59, 73, 85, 86, 92, 93, 98, 99, 100, 103)

[102] C. Joannin, F. Thouverez et B. Chouvion : Reduced-order modelling using nonlinear modes and triple nonlinear modal synthesis. *Computers & Structures*, 203:18–33, 2018. (cité p. 3, 30, 55, 59, 73, 85, 86, 92, 93, 97, 103)

[103] K. W. Jones et C. J. Cross : Traveling wave excitation system for bladed disks. *Journal of propulsion and power*, 19(1):135–141, 2003. (cité p. 129)

[104] A. K. Jonscher : The universal dielectric response. *nature*, 267(5613):673, 1977. (cité p. 136)

[105] T. Jordan, Z. Ounaies, J. Tripp et P. Tcheng : Electrical properties and power considerations of a piezoelectric actuator. *MRS Online Proceedings Library Archive*, 604, 1999. (cité p. 135, 136)

[106] A. G. Joshi et B. I. Epureanu : Reduced order models for blade-to-blade damping variability in mistuned blisks. *Journal of Vibration and Acoustics*, 134(5):051015, 2012. (cité p. 30)

[107] S. P. Joshi : Non-linear constitutive relations for piezoceramic materials. *Smart Materials and Structures*, 1(1):80, 1992. (cité p. 111)

[108] K. R. V. Kaza et R. E. Kielb : Vibration and flutter of mistuned bladed-disk assemblies. *Journal of Propulsion and Power*, 1(5):336–344, 1985. (cité p. 31)

[109] G. Kerschen, M. Peeters, J.-C. Golinval et A. F. Vakakis : Nonlinear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1):170–194, 2009. (cité p. 58)

[110] G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis et J.-C. Golinval : Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mechanical systems and signal processing*, 20(3):505–592, 2006. (cité p. 55, 56, 144)

[111] J. Kielb et R. S. Abhari : Experimental study of aerodynamic and structural damping in a full-scale rotating turbine. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 125(1):102–112, 2003. (cité p. 236)

[112] R. E. Kielb et K. R. V. Kaza : Effects of structural coupling on mistuned cascade flutter and response. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 106 (1):17–24, 1984. (cité p. 31)

[113] D. d. Klerk, D. J. Rixen et S. Voormeeren : General framework for dynamic substructuring : history, review and classification of techniques. *AIAA journal*, 46 (5):1169–1181, 2008. (cité p. 79)

[114] M. Krack : *The concept of nonlinear modes applied to friction-damped systems*. Thèse de doctorat, Leibniz University Hannover, 2014. (cité p. 59)

[115] M. KRACK : Nonlinear modal analysis of nonconservative systems : extension of the periodic motion concept. *Computers & Structures*, 154:59–71, 2015. (cité p. 59)

[116] M. KRACK et L. Panning-von SCHEIDT : Nonlinear modal analysis and modal reduction of jointed structures. *In The Mechanics of Jointed Structures*, p. 525–538. Springer, 2018. (cité p. 59, 84)

[117] M. KRACK, L. Panning-von SCHEIDT et J. WALLASCHEK : A method for nonlinear modal analysis and synthesis : application to harmonically forced and self-excited mechanical systems. *Journal of Sound and Vibration*, 332(25):6798–6814, 2013. (cité p. 59, 73, 84, 86, 88)

[118] M. KRACK, L. Panning-von SCHEIDT, J. WALLASCHEK, C. SIEWERT et A. HARTUNG : Reduced order modeling based on complex nonlinear modal analysis and its application to bladed disks with shroud contact. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 135(10):102502, 2013. (cité p. 55, 59)

[119] W. LACARBONARA et G. REGA : Resonant non-linear normal modes - part ii : activation/orthogonality conditions for shallow structural systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(6):873–887, 2003. (cité p. 58)

[120] W. LACARBONARA, G. REGA et A. NAYFEH : Resonant non-linear normal modes - part i : analytical treatment for structural one-dimensional systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(6):851–872, 2003. (cité p. 58)

[121] S. LAU et W.-S. ZHANG : Nonlinear vibrations of piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method. *Journal of Applied Mechanics*, 59(1):153–160, 1992. (cité p. 44)

[122] D. LAXALDE : *Étude d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2007. (cité p. 3, 23, 34, 44, 53, 59, 60, 62, 63, 73, 130, 181, 182, 269, 299, 303)

[123] D. LAXALDE, C. GIBERT et F. THOUVEREZ : Experimental and numerical investigations of friction rings damping of blisks. *In ASME Turbo Expo 2008 : Power for Land, Sea, and Air*, p. 469–479. American Society of Mechanical Engineers, 2008. (cité p. 59, 110, 130, 186)

[124] D. LAXALDE et M. LEGRAND : Nonlinear modal analysis of mechanical systems with frictionless contact interfaces. *Computational Mechanics*, 47(4):469–478, 2011. (cité p. 59)

[125] D. LAXALDE et F. THOUVEREZ : Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of sound and vibration*, 322(4-5):1009–1025, 2009. (cité p. 3, 59, 60, 62, 63, 84, 86)

[126] M. LEGRAND, C. PIERRE et B. PESEUX : Structural modal interaction of a four degree-of-freedom bladed disk and casing model. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 5(4):041013, 2010. (cité p. 34)

[127] R. LERCH : Simulation of piezoelectric devices by two-and three-dimensional finite elements. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 37 (3):233–247, 1990. (cité p. 114)

[128] K. LEVENBERG : A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of applied mathematics*, 2(2):164–168, 1944. (cité p. 88)

[129] J. LI : *Experimental investigation of mistuned bladed disks system vibration*. Thèse de doctorat, University of Michigan-Ann Arbor, 2007. (cité p. 129)

[130] G. Lippmann : Principe de la conservation de l'électricité, ou second principe de la théorie des phénomènes électriques. *Journal de Physique Théorique Appliqué*, 10 (1):381–394, 1881. (cité p. 106, 111)

[131] B. Lossouarn, J.-F. Deü et G. Kerschen : A fully passive nonlinear piezoelectric vibration absorber. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 376(2127):20170142, 2018. (cité p. 106, 186)

[132] A. Lyapunov : The general problem of the stability of motion. *Princeton University Press*, 1947. (cité p. 56)

[133] A. Mabilia, C. Gibert, F. Thouverez et E. De Jaeghere : Nonlinear forced response of a composite fan blade actuated by piezoelectric patches : Simulation and testing. *In Nonlinear Dynamics, Volume 1*, p. 351–362. Springer, 2019. (cité p. 123)

[134] A. Mabilia, C. Gibert, F. Thouverez, E. De Jaeghere, L. Sanchez et L. Giovannoni : Modal testing of a full-scale rotating woven composite fan using piezoelectric excitation. *In International Conference on Rotor Dynamics*, p. 291–305. Springer, 2018. (cité p. 130, 186)

[135] J. Mackerle : Smart materials and structures - a finite-element approach : a bibliography (1986-1997). *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 6(3):293, 1998. (cité p. 114)

[136] J. Mackerle : Smart materials and structures - a finite element approach - an addendum : a bibliography (1997–2002). *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 11(5):707, 2003. (cité p. 114)

[137] A. Madden, B. I. Epureanu et S. Filippi : Reduced-order modeling approach for blisks with large mass, stiffness, and geometric mistuning. *AIAA journal*, 50 (2):366–374, 2012. (cité p. 31)

[138] D. W. Marquardt : An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):431–441, 1963. (cité p. 88)

[139] C. Martel, R. Corral et J. M. Llorens : Stability increase of aerodynamically unstable rotors using intentional mistuning. *Journal of Turbomachinery*, 130(1): 011006, 2008. (cité p. 31)

[140] D. Martinez, T. Carne, D. Gregory et A. Miller : Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis. *In 25th Structural Dynamics and Materials Conference*, p. 941, 1984. (cité p. 78)

[141] W. P. Mason : *Piezoelectric crystals and their applications to ultrasonics*. Van Nostrand, 1950. (cité p. 111)

[142] G. Maugin : *Nonlinear electromechanical couplings*. John Wiley & Sons Incorporated, 1992. (cité p. 111)

[143] M. Mbaye : *Conception robuste en vibration et aéroélasticité des roues aubagées de turbomachines*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2009. (cité p. 31)

[144] M. Mbaye, C. Soize et J.-P. Ousty : A reduced-order model of detuned cyclic dynamical systems with geometric modifications using a basis of cyclic modes. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 132(11):112502, 2010. (cité p. 30)

[145] K. G. McConnell et P. S. Varoto : *Vibration testing : theory and practice*. John Wiley & Sons, 2008. (cité p. 140, 205)

[146] L. MEIROVITCH : *Methods of analytical dynamics*. Courier Corporation, 2010. (cité p. 42)

[147] M. MERGEAY : Least squares complex exponential method and global system parameter estimation used by modal analysis. *In Proceedings of the 8th International Seminar on Modal Analysis*, vol. 3, p. 15. Katholieke Universiteit Leuven, 1983. (cité p. 141)

[148] MICHIGAN SCIENTIFIC CORPORATION : *SR series slip ring assembly*, 2013. (cité p. 196)

[149] E. MIKULCIK et S. IBRAHIM : A method for the direct identification of vibration parameters from the free responses. *Journal of Sound and Vibration*, 113(1):47–57, 1987. (cité p. 141)

[150] A. MILLECAMPS, J.-F. BRUNEL, P. DUFRENOY, F. GARCIN et M. NUCCI : Influence of thermal effects during blade-casing contact experiments. *In ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2009. (cité p. 186)

[151] S. NACIVET : *Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2002. (cité p. 3, 23, 182, 269, 299)

[152] S. NACIVET, C. PIERRE, F. THOUVEREZ et L. JÉZÉQUEL : A dynamic lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, 265(1):201–219, 2003. (cité p. 3, 23, 299)

[153] S. NARAYANAN et P. SEKAR : A frequency domain based numeric–analytical method for non-linear dynamical systems. *Journal of sound and vibration*, 211(3):409–424, 1998. (cité p. 47)

[154] NATIONAL INSTRUMENTS : *NI Fiber-optic MXI-Express x4 for PXI express series user manual and specifications*, 2009. (cité p. 193)

[155] NATIONAL INSTRUMENTS : *NI PXIe-1073 user manual and specifications*, 2011. (cité p. 195)

[156] NATIONAL INSTRUMENTS : *NI 449x specifications*, 2012. (cité p. 193, 213)

[157] NATIONAL INSTRUMENTS : *NI PXIe-6738 device specifications*, 2015. (cité p. 195)

[158] NATIONAL INSTRUMENTS : *NI PXIe-4302/4303 device specifications*, 2016. (cité p. 195, 213)

[159] NATIONAL INSTRUMENTS : *NI PXIe-1075 user manual and specifications*, 2017. (cité p. 193)

[160] NATIONAL INSTRUMENTS : *NI PXIe-6341 specifications*, 2019. (cité p. 194)

[161] A. NAYFEH, C. CHIN et S. NAYFEH : On nonlinear normal modes of systems with internal resonance. *Journal of vibration and acoustics*, 118(3):340–345, 1996. (cité p. 58)

[162] A. NAYFEH et S. NAYFEH : On nonlinear modes of continuous systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116(1):129–136, 1994. (cité p. 58)

[163] A. H. NAYFEH et D. T. MOOK : *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 2008. (cité p. 42)

[164] C. Niezrecki, D. Brei, S. Balakrishnan et A. Moskalik : Piezoelectric actuation : state of the art. *The Shock and Vibration Digest*, 33(4):269–280, 2001. (cité p. 130)

[165] M. Nikolic, E. P. Petrov et D. J. Ewins : Robust strategies for forced response reduction of bladed disks based on large mistuning concept. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 130(2):022501, 2008. (cité p. 31)

[166] Optris : *PI 400i - Technical data*, 2013. (cité p. 194)

[167] A. A. Ozdemir et S. Gumussoy : Transfer function estimation in system identification toolbox via vector fitting. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):6232–6237, 2017. (cité p. 142, 205)

[168] C. Padova, J. Barton, M. G. Dunn et S. Manwaring : Experimental results from controlled blade tip/shroud rubs at engine speed. *Journal of turbomachinery*, 129(4):713–723, 2007. (cité p. 34, 186)

[169] M.-O. Parent : *Prédiction de la stabilité en contact rotor-stator dans les turboréacteurs d'avion*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2015. (cité p. 34)

[170] B. Peeters, A. Carrella, J. Lau, M. Gatto et G. Coppotelli : Advanced shaker excitation signals for aerospace testing. *In Advanced Aerospace Applications, Volume 1*, p. 229–241. Springer, 2011. (cité p. 199)

[171] M. Peeters : *Theoretical and experimental modal analysis of nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 2010. (cité p. 59)

[172] M. Peeters, R. Viguié, G. Sérandour, G. Kerschen et J.-C. Golinval : Nonlinear normal modes, part ii : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical systems and signal processing*, 23(1):195–216, 2009. (cité p. 58, 59)

[173] E. Pesheck : *Reduced order modeling of nonlinear structural systems using nonlinear normal modes and invariant manifolds*. Thèse de doctorat, University of Michigan, 2000. (cité p. 58)

[174] E. Pesheck, C. Pierre et S. Shaw : A new galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds. *Journal of sound and vibration*, 249(5):971–993, 2002. (cité p. 58)

[175] E. P. Petrov et D. J. Ewins : Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed discs. *In ASME Turbo Expo 2002 : Power for Land, Sea, and Air*, p. 899–908. American Society of Mechanical Engineers, 2002. (cité p. 21)

[176] J. Philippe : *Prédiction robuste du comportement vibratoire des redresseurs secteurs désaccordés*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2016. (cité p. 3, 79)

[177] A. W. Phillips et R. J. Allemang : Application of modal scaling to the pole selection phase of parameter estimation. *In Structural Dynamics, Volume 3*, p. 499–518. Springer, 2011. (cité p. 141)

[178] Pi Ceramic : *Piezoelectric ceramic products-fundamentals, characteristics and applications*, 2011. (cité p. 107, 109)

[179] Pi Ceramic : *Piezoelectric Actuators - Components, Technologies, Operation*, 2012. (cité p. 133, 136)

[180] V. PIEFORT : *Finite element modelling of piezoelectric active structures*. Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles, 2001. (cité p. 114)

[181] C. PIERRE : Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *Journal of Sound and Vibration*, 126(3):485–502, 1988. (cité p. 30)

[182] POLYTEC : *PSV-400 Scanning Vibrometer - DataSheet*, 2005. (cité p. 128, 146)

[183] POLYTEC : *OFV-5000 Vibrometer Controller - DataSheet*, 2016. (cité p. 128, 146)

[184] S. PRIYA et D. J. INMAN : *Energy harvesting technologies*, vol. 21. Springer, 2009. (cité p. 106)

[185] R. H. RAND : A direct method for non-linear normal modes. *International journal of Non-linear Mechanics*, 9(5):363–368, 1974. (cité p. 58)

[186] L. RENSON, G. KERSCHEN et B. COCHELIN : Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering. *Journal of Sound and Vibration*, 364:177–206, 2016. (cité p. 58)

[187] R. M. ROSENBERG : Normal modes of nonlinear dual-mode systems. *Journal of Applied Mechanics*, 27(2):263–268, 1960. (cité p. 56, 57, 58)

[188] R. M. ROSENBERG : On normal vibrations of a general class of nonlinear dual-mode systems. *Journal of Applied Mechanics*, 28(2):275–283, 1961. (cité p. 56, 58)

[189] R. M. ROSENBERG : The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of applied Mechanics*, 29(1):7–14, 1962. (cité p. 56, 58)

[190] L. SALLES : *Étude de l'usure par fretting sous chargements dynamiques dans les interfaces frottantes - Application aux pieds d'aubes de turbomachines*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2010. (cité p. 3, 20, 23, 44, 53, 302)

[191] A. SÉNÉCHAL : *Réduction de vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques : application aux turbomachines*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Méiers, 2011. (cité p. 112)

[192] A. SÉNÉCHAL, O. THOMAS et J.-F. DEÜ : Optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction of complex structures : application to a turbojet fan blade. *In ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, p. 695–704. American Society of Mechanical Engineers, 2010. (cité p. 112)

[193] H. D. SETIO : *Synthèse modale des structures assemblées - Extensions aux cas non-linéaires et dissipatifs*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 1990. (cité p. 83, 84)

[194] S. SETIO, H. D. SETIO et L. JEZEQUEL : A method of non-linear modal identification from frequency response tests. *Journal of Sound and Vibration*, 158(3):497–515, 1992. (cité p. 84)

[195] I. A. SEVER, E. P. PETROV et D. J. EWINS : Experimental and numerical investigation of rotating bladed disk forced response using underplatform friction dampers. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 130(4):042503, 2008. (cité p. 129)

[196] C. E. SHANNON : Communication in the presence of noise. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 37(1):10–21, 1949. (cité p. 48)

[197] S. SHAW et C. PIERRE : Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of sound and Vibration*, 150(1):170–173, 1991. (cité p. 57, 58)

[198] S. Shaw et C. Pierre : Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1):85–124, 1993. (cité p. 57, 58)

[199] S. Shaw et C. Pierre : Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 169(3):319–347, 1994. (cité p. 57, 58)

[200] C. Siewert et H. Stuer : Forced response analysis of mistuned turbine bladings. *In ASME Turbo Expo 2010 : Power for Land, Sea, and Air*, p. 1145–1156. American Society of Mechanical Engineers, 2010. (cité p. 30)

[201] M. P. Singh, J. J. Vargo, D. M. Schiffer et J. D. Dello : Safe diagram - a design and reliability tool for turbine blading. *In Proceedings of the 17th Turbomachinery Symposium*. Texas A&M University Turbomachinery Laboratories, 1988. (cité p. 36)

[202] J. C. Slater : A numerical method for determining nonlinear normal modes. *Nonlinear dynamics*, 10(1):19–30, 1996. (cité p. 58)

[203] J. C. Slater, G. R Minkiewicz et A. J Blair : Forced response of bladed disk assemblies - a survey. *The Shock and Vibration Digest*, 31(1):17–24, 1999. (cité p. 31)

[204] H. E. Sonnichsen, P. H. Wawrzonek, R. B. Connell et B. D. Milatovic : Blade vibration test apparatus and method, jan. 20 2004. US Patent 6,679,121. (cité p. 129)

[205] P. Spittle : Gas turbine technology. *Physics education*, 38(6):504, 2003. (cité p. 11)

[206] W. Szemplińska-Stupnicka : The modified single mode method in the investigations of the resonant vibrations of non-linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 63(4):475–489, 1979. (cité p. 84)

[207] J. Szwedowicz, C. Gibert, T. Sommer et R. Kellerer : Numerical and experimental damping assessment of a thin-walled friction damper in the rotating setup with high pressure turbine blades. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 130(1):012502, 2008. (cité p. 110, 186)

[208] J. Szwedowicz, R. Visser, W. Sextro et P. Masserey : On nonlinear forced vibration of shrouded turbine blades. *Journal of turbomachinery*, 130(1):011002, 2008. (cité p. 129)

[209] S. Tadigadapa et K. Mateti : Piezoelectric mems sensors : state-of-the-art and perspectives. *Measurement Science and technology*, 20(9):092001, 2009. (cité p. 106)

[210] Midé : *QuickPack packaged piezoelectric - Actuators And sensors*, 2014. (cité p. 108, 130, 151, 195, 317, 318)

[211] Morgan Electro Ceramics : *Piezoelectric ceramics - Properties & Applications*, 2008. (cité p. 107, 109)

[212] O. Thierry : *Réduction des vibrations de structures composites complexes par dispositifs piézoélectriques shuntés : application aux aubes de turbomachines*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2016. (cité p. 116, 162)

[213] D. L. Thomas : Dynamics of rotationally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(1):81–102, 1979. (cité p. 23, 241)

[214] O. Thomas : *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques-Application aux instruments de percussion*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI ; Telecom ParisTech, 2001. (cité p. 19)

[215] O. THOMAS : *Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques : Instruments de musique, micro/nano systèmes électromécaniques, contrôle de vibration.* Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan, 2011. (cité p. 110, 112)

[216] O. THOMAS, J.-F. DEÜ et J. DUCARNE : Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches : efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients. *International journal for numerical methods in engineering*, 80 (2):235–268, 2009. (cité p. 112, 117)

[217] O. THOMAS, J. DUCARNE et J.-F. DEÜ : Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction. *Smart Materials and Structures*, 21(1):015008, 2011. (cité p. 106)

[218] H. F. TIERSTEN : *Linear piezoelectric plate vibrations.* Plenum Press, 1969. (cité p. 111, 112, 113)

[219] D.-M. TRAN : Component mode synthesis methods using interface modes : Application to structures with cyclic symmetry. *Computers & Structures*, 79(2):209–222, 2001. (cité p. 83, 96)

[220] D.-M. TRAN : Component mode synthesis methods using partial interface modes : Application to tuned and mistuned structures with cyclic symmetry. *Computers & Structures*, 87(17-18):1141–1153, 2009. (cité p. 83)

[221] H. TZOU et C. TSENG : Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems : a piezoelectric finite element approach. *Journal of sound and vibration*, 138(1):17–34, 1990. (cité p. 114, 116)

[222] M. URABE : Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 20(2):120–152, 1965. (cité p. 44)

[223] A. F. VAKAKIS : Dynamics of a nonlinear periodic structure with cyclic symmetry. *Acta Mechanica*, 95(1-4):197–226, 1992. (cité p. 58, 59)

[224] A. F. VAKAKIS, T. NAYFEH et M. KING : A multiple-scales analysis of nonlinear, localized modes in a cyclic periodic system. *Journal of Applied Mechanics*, 60(2):388–397, 1993. (cité p. 58, 59)

[225] A. F. VAKAKIS et C. CETINKAYA : Mode localization in a class of multidegree-of-freedom nonlinear systems with cyclic symmetry. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Applied Mathematics*, 53(1):265–282, 1993. (cité p. 58, 59)

[226] A. F. VAKAKIS, L. I. MANEVITCH et Y. V. MIKHLIN : Normal modes and localization in nonlinear systems. *Wiley*, 1996. (cité p. 58)

[227] R. VALID et R. OHAYON : Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques. *La recherche aérospatiale*, (4):251–263, 1985. (cité p. 24)

[228] VISHAY MICRO-MEASUREMENTS : *Strain Gage Instrumentation*, 2010. (cité p. 126, 127, 146, 316)

[229] J. WAGNER : Coupling of turbomachine blade vibrations through the rotor. *Journal of Engineering for Power*, 89(4):502–512, 1967. (cité p. 30)

[230] D. J. WARKENTIN : *Power amplification for piezoelectric actuators in controlled structures.* Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1995. (cité p. 136)

[231] S.-T. Wei et C. Pierre : Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry part i : free vibrations. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110(4):429–438, 1988. (cité p. 30)

[232] S.-T. Wei et C. Pierre : Localization phenomena in mistuned assemblies with cyclic symmetry part ii : Forced vibrations. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110(4):439–449, 1988. (cité p. 30)

[233] Y.-K. Wen : Method for random vibration of hysteretic systems. *Journal of the engineering mechanics division*, 102(2):249–263, 1976. (cité p. 22, 182)

[234] S. Wildheim : Excitation of rotationally periodic structures. *Journal of Applied Mechanics*, 46(4):878–882, 1979. (cité p. 23, 36)

[235] R. B. Williams, G. Park, D. J. Inman et W. K. Wilkie : An overview of composite actuators with piezoceramic fibers. *In Proceeding of IMAC XX*, vol. 47, 2002. (cité p. 130)

[236] R. Williams, J. Crowley et H. Vold : The multivariate mode indicator function in modal analysis. *In International Modal Analysis Conference*, p. 66–70, 1985. (cité p. 205)

[237] J. Xin et J. Wang : Investigation of coriolis effect on vibration characteristics of a realistic mistuned bladed disk. *In ASME 2011 turbo expo : Turbine technical conference and exposition*, p. 993–1005. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2011. (cité p. 263, 271)

[238] M.-T. Yang et J. Griffin : A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes. *Journal of Engineering for Gas turbines and Power*, 123 (4):893–900, 2001. (cité p. 30)

[239] G. Zhang, M. P. Castanier et C. Pierre : Efficient component mode synthesis with a new interface reduction method. *In Proceedings of IMAC-XXII*, 2004. (cité p. 83)

[240] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor et R. L. Taylor : *The finite element method : solid mechanics*, vol. 2. Butterworth-heinemann, 2000. (cité p. 12, 15)

Annexe A

Méthode des Lagrangiens dynamiques (DLFT)

La DLFT est une méthode de résolution des problèmes de contact / frottement dans le domaine fréquentiel développée par Nacivet *et al.* [151, 152]. Deux formalismes de cette méthode ont été mis en place par Nacivet *et al.* : le premier, basé sur une formulation en déplacements relatifs, permet une évaluation exacte des positions relatives des structures en contact mais nécessite une résolution au moyen d'un schéma itératif ; le second, basé sur une formulation en vitesses relatives, permet un calcul direct. À noter qu'une formulation mixte en vitesses relatives dans les directions tangentielles au contact et en déplacements relatifs dans la direction normale au contact est employée par Laxalde dans sa thèse [122]. Dans ce travail de thèse, le problème en dynamique non-linéaire est formulé en déplacements, c'est pourquoi la formulation retenue et exposée dans cette annexe est en déplacements relatifs.

Il est essentiel de noter que, comme dans la méthode de l'équilibrage harmonique, les efforts et les déplacements sont considérés comme périodiques. De plus, le maillage des structures à l'interface de contact est supposé compatible, c'est-à-dire que les nœuds appairés des structures sont coïncidents, car il s'agit d'une formulation du contact nœud à nœud pour laquelle les déplacements relatifs et les efforts de contact sont évalués selon les lois de contact unilatéral et de frottement de Coulomb.

Le développement de la méthode des Lagrangiens dynamiques débute à partir de l'équation (A.1), reprise de l'équation (II.41) du chapitre II, dans laquelle $\mathbf{Z}_{\mathrm{r}}$ est la matrice condensée de rigidité dynamique, $\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{h}}$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange (correspondant à l'opposé des efforts non-linéaires de contact), $\mathbf{g}_{\mathrm{r_h}}$ est le vecteur condensé des efforts extérieurs et $\mathbf{x}_{\mathrm{r_h}}$ est le vecteur condensé contenant les déplacements relatifs.

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{r}}(\omega)\mathbf{x}_{\mathrm{r_h}} + \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{h}} = \mathbf{g}_{\mathrm{r_h}} \tag{A.1}$$

Les vecteurs condensés contenant les déplacements relatifs et les efforts dans l'équation (A.1) sont formés par les coefficients réels de Fourier tronqués à l'ordre n_h. De plus, les deux condensations, sur les degrés de liberté non-linéaires et sur les degrés de liberté relatifs décrites dans le chapitre II, sont appliquées au problème. Par commodité, l'équation (A.1) est réécrite sous la forme d'une fonction à annuler telle que

$$f(\mathbf{x}_{\mathrm{r_h}}) = \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}(\omega)\mathbf{x}_{\mathrm{r_h}} + \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{h}} - \mathbf{g}_{\mathrm{r_h}} \tag{A.2}$$

Formulation des Lagrangiens dynamiques

Les multiplicateurs de Lagrange sont exprimés comme une pénalisation des équations du mouvement dans le domaine fréquentiel

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{h}} = \mathbf{g}_{\mathrm{r_h}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}(\omega)\mathbf{x}_{\mathrm{r_h}} + \epsilon\left(\mathbf{x}_{\mathrm{r_h}} - \mathbf{u}_{\mathrm{r_h}}\right) \tag{A.3}$$

où ϵ est un coefficient de pénalité et $\mathbf{u}_{\mathrm{r_h}}$ une nouvelle inconnue représentant le déplacement relatif à l'interface.

Par ailleurs, dès lors que l'équation (A.3) est vérifiée, la relation (A.2) se réduit à

$$f(\mathbf{x}_{\mathrm{r_h}}) = \epsilon\left(\mathbf{x}_{\mathrm{r_h}} - \mathbf{u}_{\mathrm{r_h}}\right) \tag{A.4}$$

De plus, lorsque la fonction $f(\mathbf{x}_{\mathrm{r_h}})$ est annulée, il vient $\mathbf{x}_{\mathrm{r_h}} = \mathbf{u}_{\mathrm{r_h}}$ ce qui assure que le couple $(\mathbf{u}_{\mathrm{r_h}}, \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{h}})$ vérifie les lois de contact et de frottement ainsi que l'équation du mouvement.

Dans le paragraphe suivant, cette paire d'inconnue $(\mathbf{u}_{\mathrm{r_h}}, \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{h}})$ sera évaluée au moyen d'une méthode d'alternance temps / fréquence afin d'exploiter les lois de contact et de frottement dans le domaine temporel.

Prédiction et correction dans le domaine temporel

Dans l'intention de faciliter la compréhension de la procédure de prédiction / correction de la DLFT, une seule paire de nœuds sera considérée dans le paragraphe suivant. De plus, l'équation (A.3) est reformulée telle que

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{h}} = \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{x_h}} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{u_h}} \tag{A.5}$$

où

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{x_h}} = \mathbf{g}_{\mathrm{r_h}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{r}}(\omega)\mathbf{x}_{\mathrm{r_h}} + \epsilon\mathbf{x}_{\mathrm{r_h}} \tag{A.6a}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{u_h}} = \epsilon\mathbf{u}_{\mathrm{r_h}} \tag{A.6b}$$

Le but de cette procédure de prédiction / correction est d'évaluer les efforts de contact $\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{h}}$ et les déplacements relatifs $\mathbf{u}_{\mathrm{r_h}}$ au moyen des lois de contact et de frottement et à partir du vecteur $\mathbf{x}_{\mathrm{r_h}}$. Pour cela, le terme $\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{x_h}}$, contenu dans la relation (A.5), est exprimé dans le domaine temporel à l'aide d'une transformée de Fourier discrète inverse et échantillonné sur n_{t} points. Le calcul des multiplicateurs de Lagrange dans le domaine temporel est ensuite effectué grâce à cette stratégie de prédiction-correction pour chaque pas de temps k.

L'étape de prédiction permet d'évaluer un premier effort de contact $\boldsymbol{\lambda}^{k}_{\mathrm{pre}}$. Cette évaluation est réalisée en supposant que l'état des nœuds à l'interface de contact est adhérent ce qui signifie que le vecteur des déplacements relatifs dans les directions tangentielles $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{r_h}}$ est constant entre deux pas de temps et que le déplacement relatif dans la direction normale $u^{\mathrm{N}}_{\mathrm{r_h}}$ est nul. D'après (A.6b), l'étape de prédiction s'écrit alors

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}^{k,\mathrm{T}}_{\mathrm{pre}} = \boldsymbol{\lambda}^{k,\mathrm{T}}_{\mathrm{x}} - \boldsymbol{\lambda}^{k-1,\mathrm{T}}_{\mathrm{u}} \\ \lambda^{k,\mathrm{N}}_{\mathrm{pre}} = \lambda^{k,\mathrm{N}}_{\mathrm{x}} \end{cases} \tag{A.7}$$

dans laquelle les exposants $\bullet^{\mathrm{T}}$ et $\bullet^{\mathrm{N}}$ correspondent respectivement aux composantes tangentielles et à la composante normale. Les termes sont exprimés dans le domaine temporel comme en atteste l'absence de l'indice $\bullet_{\mathrm{h}}$.

Dans un second temps, les efforts de contact $\boldsymbol{\lambda}^k_{\text{pre}}$ prédits sont corrigés (pour devenir $\boldsymbol{\lambda}^k$) en évaluant $\boldsymbol{\lambda}^k_{\text{u}}$ et toujours en respectant les lois de contact et de frottement.

$$\boldsymbol{\lambda}^k = \boldsymbol{\lambda}^k_{\text{x}} - \boldsymbol{\lambda}^k_{\text{u}} \tag{A.8}$$

L'évaluation du terme $\boldsymbol{\lambda}^k_{\text{u}}$ diffère en fonction de l'état du contact entre les nœuds : séparation, adhérence ou glissement.

— **Séparation** : $\lambda^{k,\text{N}}_{\text{pre}} \geq N_0$ (où N_0 est une précharge statique due, dans nos applications, à la rotation du moteur)

Le contact est interrompu entre les deux nœuds : l'effort de contact est donc nul ce qui induit

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\lambda}^{k,\text{T}}_{\text{u}} = \boldsymbol{\lambda}^{k,\text{T}}_{\text{x}} \\ \lambda^{k,\text{N}}_{\text{u}} = \lambda^{k,\text{N}}_{\text{x}} \end{array} \right. \tag{A.9}$$

— **Adhérence** : $\lambda^{k,\text{N}}_{\text{pre}} < N_0$ et $\|\boldsymbol{\lambda}^{k,\text{T}}_{\text{pre}}\| < \mu \mid \lambda^{k,\text{N}}_{\text{pre}} \mid$

Dans ce cas, la prédiction est correcte puisque les déplacements relatifs dans les directions normales et tangentielles sont nuls. Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\lambda}^{k,\text{T}}_{\text{u}} = \boldsymbol{\lambda}^{k-1,\text{T}}_{\text{u}} \\ \lambda^{k,\text{N}}_{\text{u}} = 0 \end{array} \right. \tag{A.10}$$

— **Glissement** : $\lambda^{k,\text{N}}_{\text{pre}} < N_0$ et $\|\boldsymbol{\lambda}^{k,\text{T}}_{\text{pre}}\| \geq \mu \mid \lambda^{k,\text{N}}_{\text{pre}} \mid$

À nouveau, le vecteur des déplacements relatifs dans la direction normale est nul soit

$$\lambda^{k,N}_{\text{u}} = \mathbf{0} \tag{A.11}$$

La correction des efforts de contact dans la direction tangentielle $\boldsymbol{\lambda}^{k,T}_{\text{u}}$ est fondée sur la connaissance de l'effort dans la direction normale $\lambda^{k,N}_{\text{u}}$ grâce à l'équation (A.11) et sur l'hypothèse que le vecteur des vitesses relatives dans les directions tangentielles au contact est défini implicitement tel que

$$\dot{\mathbf{u}}^{k,\text{T}}_{\text{r}} = \frac{\mathbf{u}^{k,\text{T}}_{\text{r}} - \mathbf{u}^{k-1,\text{T}}_{\text{r}}}{t^k - t^{k-1}} \tag{A.12}$$

La loi de Coulomb permet d'écrire le vecteur des efforts de contact dans les directions tangentielles en fonction des vitesses relatives dans ces mêmes directions

$$\boldsymbol{\lambda}^{k,T} = \mu \mid \lambda^{k,\text{N}}_{\text{pre}} \mid \frac{\dot{\mathbf{u}}^{k,\text{T}}_{\text{r}}}{\|\dot{\mathbf{u}}^{k,\text{T}}_{\text{r}}\|} \tag{A.13}$$

D'après (A.7) et (A.8), il est possible d'écrire

$$\boldsymbol{\lambda}^{k,T}_{\text{pre}} - \boldsymbol{\lambda}^{k,T} = \boldsymbol{\lambda}^{k,T}_{\text{u}} - \boldsymbol{\lambda}^{k-1,T}_{\text{u}} \tag{A.14}$$

En combinant les relations (A.12), (A.13), (A.14) et (A.6b), il vient

$$\boldsymbol{\lambda}^{k,T}_{\text{pre}} = \left(\mu \frac{\mid \lambda^{k,\text{N}}_{\text{pre}} \mid}{\|\dot{\mathbf{u}}^{k,\text{T}}_{\text{r}}\|} + \epsilon \left(t^k - t^{k-1} \right) \right) \dot{\mathbf{u}}^{k,\text{T}}_{\text{r}} \tag{A.15}$$

L'équation (A.15) permet de montrer la relation de colinéarité entre les vecteurs $\boldsymbol{\lambda}_{\text{pre}}^{k,T}$ et $\dot{\mathbf{u}}_{\text{r}}^{k,\text{T}}$ (ils ont de plus le même sens) ce qui implique

$$\frac{\dot{\mathbf{u}}_{\text{r}}^{k,\text{T}}}{\|\dot{\mathbf{u}}_{\text{r}}^{k,\text{T}}\|} = \frac{\boldsymbol{\lambda}_{\text{pre}}^{k,T}}{\|\boldsymbol{\lambda}_{\text{pre}}^{k,T}\|} \tag{A.16}$$

et ainsi

$$\boldsymbol{\lambda}^{k,T} = \mu \mid \lambda_{\text{pre}}^{k,\text{N}} \mid \frac{\boldsymbol{\lambda}_{\text{pre}}^{\mathbf{k},\mathbf{T}}}{\|\boldsymbol{\lambda}_{\text{pre}}^{k,T}\|} \tag{A.17}$$

puis en insérant (A.17) dans (A.14), il vient

$$\boldsymbol{\lambda}_{\text{u}}^{k,T} = \boldsymbol{\lambda}_{\text{u}}^{k-1,T} + \boldsymbol{\lambda}_{\text{pre}}^{k,T} \left(1 - \mu \frac{\mid \lambda_{\text{pre}}^{k,N} \mid}{\|\boldsymbol{\lambda}_{\text{pre}}^{k,T}\|}\right) \tag{A.18}$$

Pour résumer, dans le cas d'un contact glissant, les efforts de contact dans les directions normales et tangentielles s'écrivent ainsi

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{\text{u}}^{k,T} = \boldsymbol{\lambda}_{\text{u}}^{k-1,T} + \boldsymbol{\lambda}_{\text{pre}}^{k,T} \left(1 - \mu \frac{|\lambda_{\text{pre}}^{k,N}|}{\|\boldsymbol{\lambda}_{\text{pre}}^{k,T}\|}\right) \\ \lambda_{\text{u}}^{k,N} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{A.19}$$

Pour conclure la procédure d'alternance temps / fréquence, les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ sont rebasculés dans le domaine fréquentiel $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{h}}$ au moyen d'une transformée de Fourier discrète.

Les différentes phases de la méthode des Lagrangiens dynamiques sont résumées dans l'organigramme de la figure (A.1).

Par ailleurs, la matrice jacobienne analytique de la DLFT, nécessaire pour réduire le temps de calcul d'un algorithme de résolution de type Newton-Raphson (voir chapitre II), est explicitée et détaillée dans la thèse de Salles [190].

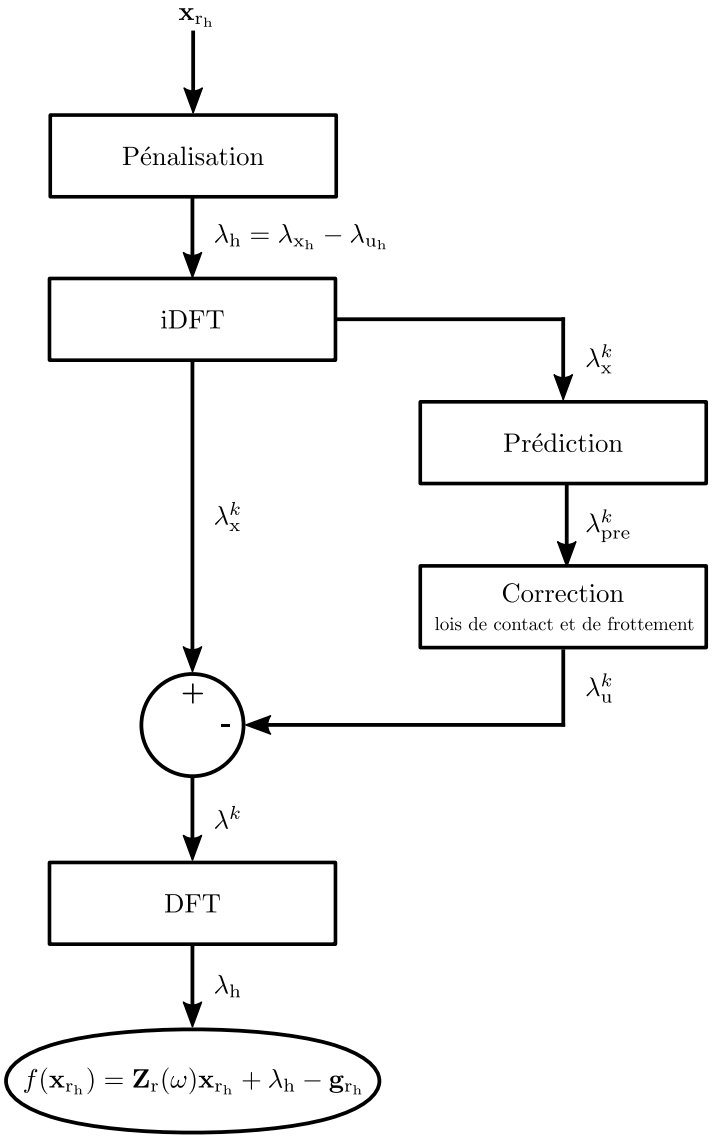


FIGURE A.1 – Logigramme de la DLFT (adaptée de [122])

Annexe B

Évaluation des matrices jacobiennes analytiques

L'emploi d'un solveur itératif tel que l'algorithme de Newton-Raphson ou à région de confiance requiert la connaissance de la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ du système d'équations à résoudre. L'évaluation de la Jacobienne peut être réalisée numériquement à l'aide de la méthode des différences finies par exemple. Cependant, cette opération doit être répétée à chaque itération de l'algorithme de résolution ce qui impacte considérablement le temps de calcul de la solution. Il est donc préférable d'évaluer analytiquement ou au moins semi-analytiquement la matrice jacobienne puisque la connaissance de son expression analytique permet ainsi d'économiser à chaque itération $2n^2$ évaluations de la fonction à annuler, avec n le nombre de degrés de liberté du système. Cette annexe fournit des éléments permettant d'évaluer les expressions analytiques des matrices jacobiennes d'un problème non-linéaire non-autonome, d'un problème non-linéaire autonome ainsi que l'expression semi-analytique de la synthèse modale non-linéaire et de la CNCMS.

1 Matrice jacobienne analytique d'un problème non-linéaire et non-autonome

La matrice jacobienne analytique $\mathbf{J}_{\mathbf{r}_\mathrm{h}}$ de la réponse d'un problème non-linéaire et non autonome est calculée à partir des dérivées partielles du système d'équation compact (B.1) par rapport aux variables $\mathbf{x}_\mathrm{h}$ et ω.

$$\mathbf{r}_\mathrm{h}(\mathbf{x}_\mathrm{h},\omega) = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{x}_\mathrm{h} + \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h},\omega) - \mathbf{g}_\mathrm{h} \tag{B.1}$$

1.1 Équations générales

L'expression générale de la matrice jacobienne est apportée par l'équation (B.2)

$$\mathbf{J}_{\mathbf{r}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h},\omega) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\mathrm{h}}{\partial \mathbf{x}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h},\omega) \quad \frac{\partial \mathbf{r}_\mathrm{h}}{\partial \omega}(\mathbf{x}_\mathrm{h},\omega)\right) \tag{B.2}$$

avec $\partial f/\partial x$, la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x.

Les dérivées partielles du résidu $\mathbf{r}_\mathrm{h}$ s'expriment telles que

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\mathrm{h}}{\partial \mathbf{x}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h},\omega) = \mathbf{Z}(\omega) + \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}}{\partial \mathbf{x}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h},\omega) \tag{B.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\mathrm{h}}{\partial \omega}(\mathbf{x}_\mathrm{h},\omega) = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}(\omega)\mathbf{x}_\mathrm{h} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}}{\partial \omega}(\mathbf{x}_\mathrm{h},\omega) \tag{B.4}$$

dans laquelle les dérivées partielles du vecteur $\mathbf{g}_\mathrm{h}$ n'apparaissent pas dans les équations (B.3) et (B.4) puisque l'excitation ne dépend ni de $\mathbf{x}_h$ ni de ω dans le domaine fréquentiel.

La dérivée partielle de la matrice de rigidité dynamique par rapport à ω conserve la forme diagonale de la matrice $\mathbf{Z}$

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & & \\ & \frac{\partial \mathbf{Z}_1}{\partial \omega}(\omega) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{\partial \mathbf{Z}_k}{\partial \omega}(\omega) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \frac{\partial \mathbf{Z}_{n_\mathrm{h}}}{\partial \omega}(\omega) \end{pmatrix} \tag{B.5}$$

dont chaque bloc a pour expression

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_k}{\partial \omega}(\omega) = \begin{pmatrix} -2k^2\omega\mathbf{M} & k\mathbf{C} \\ -k\mathbf{C} & -2k^2\omega\mathbf{M} \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

1.2 Termes non-linéaires

Les termes de la matrice jacobienne relatifs à la dérivation des efforts non-linéaires $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}$ sont évalués par le biais du théorème de dérivation des fonctions composées permettant ainsi de dériver directement son expression analytique temporelle par rapport aux variables $\mathbf{x}$ et $\dot{\mathbf{x}}$. La dépendance du vecteur $\mathbf{f}_\mathrm{nl}$ par rapport aux variables $\mathbf{x}$ et $\dot{\mathbf{x}}$ est volontairement omise dans les équations de cette sous-section afin d'alléger les équations

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}}{\partial \mathbf{x}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \omega) = \mathbf{F}\frac{\partial \mathbf{f}_\mathrm{nl}}{\partial \mathbf{x}}\overline{\mathbf{F}} + \mathbf{F}\frac{\partial \mathbf{f}_\mathrm{nl}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\overline{\mathbf{F}}\nabla(\omega) \tag{B.7}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}}{\partial \omega}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \omega) = \mathbf{F}\frac{\partial \mathbf{f}_\mathrm{nl}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\overline{\mathbf{F}}\frac{\partial \nabla}{\partial \omega}(\omega)\mathbf{x}_\mathrm{h} \tag{B.8}$$

Les transformées de Fourier discrètes directe $\mathbf{F}$ et indirecte $\overline{\mathbf{F}}$ ne dépendent pas de ω, ces matrices peuvent donc être sorties des dérivées partielles. La dérivée partielle de l'opérateur de dérivation ∇ par rapport à la variable ω possède la même forme diagonale que la dérivée partielle de $\mathbf{Z}$ par rapport à cette même variable. Chacun des blocs s'écrit alors

$$\frac{\partial \nabla_k}{\partial \omega}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \tag{B.9}$$

Dans le cadre de l'exemple illustratif de la section II.3, les dérivées partielles des efforts non-linéaires par rapport aux variables temporelles s'expriment

$$\frac{\partial \mathbf{f}_\mathrm{poly}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) = 3k_\mathrm{nl}\mathbf{x}(t)^2 \tag{B.10}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_\mathrm{frot}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\dot{\mathbf{x}}(t)) = \frac{\mu N}{\varepsilon}\left(1 - \left(\tanh\left(\frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\varepsilon}\right)\right)^2\right) \tag{B.11}$$

les dérivées partielles restantes étant nulles.

1.3 Équations de continuation

L'emploi d'une continuation séquentielle pour suivre l'évolution du paramètre de contrôle ω ne nécessite pas l'évaluation des dérivées partielles de $\mathbf{r}_\mathrm{h}$ selon ω puisque celui-ci est fixé à chaque itération.

Au contraire, une continuation *arc-length*, en plus d'exiger l'évaluation des dérivées partielles de $\mathbf{r}_\mathrm{h}$ selon ω, requiert les dérivées partielles de l'équation de fermeture r_a définie en section 1.5.2 et rappelée dans l'équation (B.12)

$$r_\mathrm{a}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \omega) = \|\mathbf{x}_\mathrm{h} - \mathbf{x}_{\mathrm{h}_j}\|^2 + (\omega - \omega_j)^2 - \Delta s^2 = 0 \tag{B.12}$$

$$\frac{\partial r_\mathrm{a}}{\partial \mathbf{x}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \omega) = 2\mathbf{x}_\mathrm{h} \tag{B.13}$$

$$\frac{\partial r_\mathrm{a}}{\partial \omega}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \omega) = 2\omega \tag{B.14}$$

2 Matrice jacobienne analytique d'un problème non-linéaire autonome

Pour effectuer le calcul d'un mode complexe non-linéaire, la matrice jacobienne analytique $\mathbf{J}_{\mathbf{r}_\mathrm{h}}$ est évaluée à partir des dérivées partielles du système d'équation compact (B.15) par rapport aux variables $\mathbf{x}_\mathrm{h}$, Ω et β. La majorité des équations permettant d'évaluer l'expression de la Jacobienne d'un problème non-linéaire autonome sont analogues à celles d'un problème non-autonome au paramètre β près, ces dernières sont cependant rappelées dans cette section.

$$\mathbf{r}_\mathrm{h}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \Omega, \beta) = \mathbf{Z}(\Omega, \beta)\mathbf{x}_\mathrm{h} + \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \Omega, \beta) \tag{B.15}$$

2.1 Équations générales

La matrice jacobienne d'un problème non-linéaire autonome est gouvernée par l'expression générale (B.16)

$$\mathbf{J}_{\mathbf{r}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \Omega, \beta) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\mathrm{h}}{\partial \mathbf{x}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \Omega, \beta) \quad \frac{\partial \mathbf{r}_\mathrm{h}}{\partial \Omega}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \Omega, \beta) \quad \frac{\partial \mathbf{r}_\mathrm{h}}{\partial \beta}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \Omega, \beta) \right) \tag{B.16}$$

avec $\partial f / \partial x$, la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x.

Les dérivées partielles du résidu $\mathbf{r}_\mathrm{h}$ sont exprimées à travers les équations (B.17), (B.18) et (B.19)

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\mathrm{h}}{\partial \mathbf{x}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \Omega, \beta) = \mathbf{Z}(\Omega, \beta) + \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}}{\partial \mathbf{x}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \Omega, \beta) \tag{B.17}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\mathrm{h}}{\partial \Omega}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \Omega, \beta) = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \Omega}(\Omega, \beta)\mathbf{x}_\mathrm{h} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}}{\partial \Omega}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \Omega, \beta) \tag{B.18}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\mathrm{h}}{\partial \beta}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \Omega, \beta) = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \beta}(\Omega, \beta)\mathbf{x}_\mathrm{h} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}}{\partial \beta}(\mathbf{x}_\mathrm{h}, \Omega, \beta) \tag{B.19}$$

Les dérivées partielles de la matrice de rigidité dynamique par rapport à Ω et β conservent la forme diagonale de la matrice $\mathbf{Z}$

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \Omega}(\Omega,\beta) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & & \\ & \frac{\partial \mathbf{Z}_1}{\partial \Omega}(\Omega,\beta) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{\partial \mathbf{Z}_k}{\partial \Omega}(\Omega,\beta) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \frac{\partial \mathbf{Z}_{n_\mathrm{h}}}{\partial \Omega}(\Omega,\beta) \end{pmatrix} \tag{B.20}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \beta}(\Omega,\beta) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & & \\ & \frac{\partial \mathbf{Z}_1}{\partial \beta}(\Omega,\beta) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{\partial \mathbf{Z}_k}{\partial \beta}(\Omega,\beta) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \frac{\partial \mathbf{Z}_{n_\mathrm{h}}}{\partial \beta}(\Omega,\beta) \end{pmatrix} \tag{B.21}$$

dont les blocs $\dfrac{\partial \mathbf{Z}_k}{\partial \Omega}$ et $\dfrac{\partial \mathbf{Z}_k}{\partial \beta}$ ont pour expression

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_k}{\partial \Omega}(\Omega,\beta) = \begin{pmatrix} -2k^2\Omega\mathbf{M} & -2k^2\beta\mathbf{M} + k\mathbf{C}) \\ 2k^2\beta\mathbf{M} - k\mathbf{C} & -2k^2\Omega\mathbf{M} \end{pmatrix} \tag{B.22}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_k}{\partial \beta}(\Omega,\beta) = \begin{pmatrix} 2k^2\beta\mathbf{M} - k\mathbf{C} & -2k^2\Omega\mathbf{M} \\ 2k^2\Omega\mathbf{M} & 2k^2\beta\mathbf{M} - k\mathbf{C} \end{pmatrix} \tag{B.23}$$

2.2 Termes non-linéaires

En comparaison avec la matrice jacobienne d'un problème non-linéaire non-autonome, une équation comprenant la dérivée partielle des efforts non-linéaires $\mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}$ par rapport au paramètre β est ajoutée. Les termes de la matrice jacobienne analytique sont toujours calculés à l'aide du théorème de dérivation des fonctions composées. La dépendance du vecteur $\mathbf{f}_\mathrm{nl}$ par rapport aux variables $\mathbf{x}$ et $\dot{\mathbf{x}}$ est volontairement omise dans les équations de cette sous-section par souci de concision.

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}}{\partial \mathbf{x}_\mathrm{h}}(\mathbf{x}_\mathrm{h},\Omega,\beta) = \mathbf{F}\frac{\partial \mathbf{f}_\mathrm{nl}}{\partial \mathbf{x}}\overline{\mathbf{F}} + \mathbf{F}\frac{\partial \mathbf{f}_\mathrm{nl}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\overline{\mathbf{F}}\nabla(\Omega,\beta) \tag{B.24}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}}{\partial \Omega}(\mathbf{x}_\mathrm{h},\Omega,\beta) = \mathbf{F}\frac{\partial \mathbf{f}_\mathrm{nl}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\overline{\mathbf{F}}\frac{\partial \nabla}{\partial \Omega}(\Omega,\beta)\mathbf{x}_\mathrm{h} \tag{B.25}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{nl}_\mathrm{h}}}{\partial \beta}(\mathbf{x}_\mathrm{h},\Omega,\beta) = \mathbf{F}\frac{\partial \mathbf{f}_\mathrm{nl}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\overline{\mathbf{F}}\frac{\partial \nabla}{\partial \beta}(\Omega,\beta)\mathbf{x}_\mathrm{h} \tag{B.26}$$

Les transformées de Fourier discrètes directe $\mathbf{F}$ et indirecte $\overline{\mathbf{F}}$ ne dépendent ni de Ω ni de β, ces matrices peuvent donc être sorties des dérivées partielles. Les dérivées partielles de l'opérateur de dérivation ∇ par rapport aux variables Ω et β possèdent la même forme diagonale que les dérivées partielles de $\mathbf{Z}$ par rapport à ces mêmes variables. Chacun des blocs s'écrit alors

$$\frac{\partial \nabla_k}{\partial \Omega}(\Omega, \beta) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \tag{B.27}$$

$$\frac{\partial \nabla_k}{\partial \beta}(\Omega, \beta) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \tag{B.28}$$

Les dérivées partielles des efforts non-linéaires, agissant dans l'exemple illustratif de la section II.3, par rapport aux variables temporelles s'expriment de la même façon qu'un problème non-autonome, à savoir

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{poly}}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) = 3k_{nl}\mathbf{x}(t)^2 \tag{B.29}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{frot}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\dot{\mathbf{x}}(t)) = \frac{\mu N}{\varepsilon}\left(1 - \left(\tanh\left(\frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\varepsilon}\right)\right)^2\right) \tag{B.30}$$

les dérivées partielles restantes étant nulles.

2.3 Équations de continuation

Dans le but de calculer un mode complexe non-linéaire, une continuation séquentielle nécessite de fixer deux paramètres (ici, l'amplitude et la phase de l'un des harmoniques d'un degré de liberté). Ce type de continuation n'exigeant pas d'équation de fermeture, aucune dérivée partielle additionnelle n'est requise. Cependant, contrairement à un problème non-autonome, les dérivées partielles selon Ω et β doivent être évaluées.

Une continuation *arc-length* exige une équation de fermeture r_{a}, définie en section II.2.3 et rappelée dans l'équation (B.31), dont les dérivées partielles par rapport à $\mathbf{x}_{\text{h}}$, Ω et β sont données dans les équations (B.32), (B.33) et (B.34). Une autre équation est nécessaire afin de fermer complètement le système à cause de la présence du paramètre β. Pour cela, Joannin [99] propose une équation de phase dans laquelle la vitesse initiale du DDL de contrôle est nulle et fournit aussi les dérivées partielles associées à cette équation de phase.

$$r_{\text{a}}(\mathbf{x}_{\text{h}}, \Omega, \beta) = \|\mathbf{x}_{\text{h}} - \mathbf{x}_{\text{h}_j}\|^2 + (\Omega - \Omega_j)^2 + (\beta - \beta_j)^2 - \Delta s^2 = 0 \tag{B.31}$$

$$\frac{\partial r_{\text{a}}}{\partial \mathbf{x}_{\text{h}}}(\mathbf{x}_{\text{h}}, \Omega, \beta) = 2\mathbf{x}_{\text{h}} \tag{B.32}$$

$$\frac{\partial r_{\text{a}}}{\partial \Omega}(\mathbf{x}_{\text{h}}, \Omega, \beta) = 2\Omega \tag{B.33}$$

$$\frac{\partial r_{\text{a}}}{\partial \beta}(\mathbf{x}_{\text{h}}, \Omega, \beta) = 2\beta \tag{B.34}$$

3 Matrice jacobienne semi-analytique de la synthèse modale non-linéaire

L'expression de la matrice jacobienne du système d'équations de la synthèse modale non-linéaire (III.28) est qualifiée dans cette annexe de semi-analytique du fait de sa dépendance par rapport à l'interpolation employée pour déterminer les paramètres modaux

à chaque itération de l'algorithme de résolution. La matrice Jacobienne $\mathbf{J}_{\mathbf{r}k}$ est évaluée, pour ω fixé à chaque pas de continuation, à partir des dérivées partielles du résidu $\mathbf{r}_k$ associé à l'harmonique k, exprimé dans l'équation (B.35).

$$\mathbf{r}_k(\mathbf{q}) = \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda})\right) \mathbf{\Phi}_k \mathbf{q} - \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \mathbf{g}_k \tag{B.35}$$

À l'image de la fin de la section III.2, la dépendance de $\mathbf{\Phi}_k$ et $\mathbf{\Lambda}$ par rapport aux coordonnées généralisées $\mathbf{q}$ n'est pas explicitement rappelée dans cette annexe afin d'alléger les équations mais reste bien présente dans la théorie.

Les algorithmes de résolution employés n'autorisent pas la résolution de systèmes d'équations non-linéaires dont les solutions recherchées sont complexes. Il est alors nécessaire de remanier le système afin de distinguer les parties réelle et imaginaire du vecteur solution, respectivement notées $\mathbf{q}^{\mathrm{r}}$ et $\mathbf{q}^{\mathrm{i}}$. À noter que la résolution des problèmes réel et imaginaire est réalisée au sein du même système : la taille du système à résoudre est donc doublée par rapport au système initial complexe. La matrice jacobienne du super élément s'obtient donc en dérivant $\mathbf{r}_k$ par rapport aux variables $\mathbf{q}^{\mathrm{r}}$ et $\mathbf{q}^{\mathrm{i}}$ telle que

$$\mathbf{J}_{\mathbf{r}_k}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(\mathbf{J}(\mathbf{q})\right) \\ \mathrm{Im}\left(\mathbf{J}(\mathbf{q})\right) \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}}(\mathbf{q}) & \dfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \tag{B.36}$$

Les expressions des dérivées partielles de $\mathbf{r}_k$ par rapport à $\mathbf{q}^{\mathrm{r}}$ et $\mathbf{q}^{\mathrm{i}}$ sont révélées dans les équations

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}}\mathbf{q} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}} \tag{B.37}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}}\mathbf{q} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}} \tag{B.38}$$

avec

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda})\right) \mathbf{\Phi}_k \tag{B.39}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \mathbf{g}_k \tag{B.40}$$

Le théorème de dérivation des fonctions composées (B.41) permet d'exprimer ces différentes dérivées partielles en fonction des dérivées partielles par rapport aux coordonnées généralisées complexes $\mathbf{q}$ dont dépendent la matrice des modes non-linéaires $\mathbf{\Phi}_k$ et la matrice spectrale contenant les valeurs propres complexes des modes non-linéaires $\mathbf{\Lambda}$.

$$\frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}} = \frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}} \tag{B.41}$$

$$\frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}} = \frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}} \tag{B.42}$$

Les dérivées partielles des blocs matriciels $\mathbf{A}$ et $\mathbf{a}$ par rapport à $\mathbf{q}$ ont alors pour expressions :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}_k}{\partial \mathbf{q}}\right)^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda})\right) \mathbf{\Phi}_k + \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k - \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{\Lambda})\right) \mathbf{\Phi}_k + \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda})\right) \frac{\partial \mathbf{\Phi}_k}{\partial \mathbf{q}} \tag{B.43}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \mathbf{q}} = 2k^2 \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{M}_{\mathrm{ii}} + k \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{C}_{\mathrm{ii}} \tag{B.44}$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}_k}{\partial \mathbf{q}}\right)^{\mathrm{H}} \mathbf{g}_k \tag{B.45}$$

Les paramètres modaux étant interpolés à chaque itération, les dérivées partielles de $\mathbf{\Phi}_k$ et $\mathbf{\Lambda}$ par rapport à $\mathbf{q}$ sont déterminées en calculant la pente entre les points d'interpolation. Si un ordre d'interpolation supérieur est employé, ces dérivées partielles doivent être ajustées en conséquence.

Finalement, les dérivées partielles du vecteur des coordonnées généralisées $\mathbf{q}$ par rapport à ses parties réelle et imaginaire sont exprimées telles que

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}} = \mathbf{I}_n \tag{B.46}$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}} = i\, \mathbf{I}_n \tag{B.47}$$

avec $\mathbf{I}_n$, la matrice identité de taille n, n le nombre de modes non-linéaires contenus dans la base de réduction et i la notation associée à un nombre imaginaire.

4 Matrice jacobienne semi-analytique de la CNCMS

L'expression de la matrice jacobienne du système d'équations de la CNCMS (III.46) est qualifiée dans cette annexe de semi-analytique du fait de sa dépendance par rapport à l'interpolation employée pour déterminer les paramètres modaux à chaque itération de l'algorithme de résolution. La matrice Jacobienne $\mathbf{J}_{\mathbf{r}k}$ est évaluée, pour ω fixé à chaque pas de continuation, à partir des dérivées partielles du résidu $\mathbf{r}_k$ associé à l'harmonique k, exprimé dans l'équation (B.48).

$$\mathbf{r}_k(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{p} - \mathbf{a} \\ \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{p} - \mathbf{b} \end{pmatrix} \tag{B.48}$$

avec

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda})\right) \mathbf{\Phi}_k \tag{B.49}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \mathbf{Z}_k \mathbf{\Phi}_\Psi \tag{B.50}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}_\Psi^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda})\right) \mathbf{\Phi}_k \tag{B.51}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{\Phi}_\Psi^{\mathrm{H}} \mathbf{Z}_k \mathbf{\Phi}_\Psi \tag{B.52}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \mathbf{g}_k \tag{B.53}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{\Phi}_\Psi^{\mathrm{H}} \mathbf{g}_k \tag{B.54}$$

Le résidu $\mathbf{r}_k$ est directement déduit de l'équation (III.46) dans laquelle les différents termes sont assemblés tel expliqué en section III.3 pour former le système complet réduit.

À l'image de la fin de la section III.3, la dépendance de $\mathbf{\Phi}_k$ et $\mathbf{\Lambda}$ par rapport aux coordonnées généralisées $\mathbf{q}$ n'est pas explicitement rappelée dans cette annexe afin d'alléger les équations mais reste bien présente dans la théorie.

Les algorithmes de résolution employés n'autorisent pas la résolution de systèmes d'équations non-linéaires dont les solutions recherchées sont complexes. Il est alors nécessaire de remanier le système afin de distinguer les parties réelle et imaginaire du vecteur solution, respectivement notées $\mathbf{q}^{\mathrm{r}}$ et $\mathbf{q}^{\mathrm{i}}$. À noter que la résolution des problèmes réel et imaginaire est réalisée au sein du même système après assemblage des super-éléments : la taille du système à résoudre est donc doublée par rapport au système initial complexe. Dans le but de simplifier les notations, la matrice jacobienne est directement évaluée sur le système complet réduit, néanmoins en pratique, les matrices jacobiennes $\mathbf{J}_{\mathbf{r}_k}^{(j)}$ sont évaluées pour chaque super-élément puis assemblées entre elles, comme expliqué en section III.3, pour former la matrice jacobienne du système complet réduit $\mathbf{J}_{\mathbf{r}_k}$. Cette dernière s'écrit telle que

$$\mathbf{J}_{\mathbf{r}_k}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(\mathbf{J}(\mathbf{p},\mathbf{q})\right) \\ \mathrm{Im}\left(\mathbf{J}(\mathbf{p},\mathbf{q})\right) \end{pmatrix} \tag{B.55}$$

avec

$$\mathbf{J}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}}(\mathbf{p},\mathbf{q}) & \dfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}}(\mathbf{p},\mathbf{q}) & \dfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{p}^{\mathrm{r}}}(\mathbf{p},\mathbf{q}) & \dfrac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{p}^{\mathrm{i}}}(\mathbf{p},\mathbf{q}) \end{pmatrix} \tag{B.56}$$

Tout d'abord, les expressions des dérivées partielles de $\mathbf{r}_k$ par rapport à $\mathbf{q}^{\mathrm{r}}$ et $\mathbf{q}^{\mathrm{i}}$ sont révélées dans les équations

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}}\mathbf{q} + \mathbf{A}\dfrac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}} + \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}}\mathbf{p} - \dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}}\mathbf{q} + \mathbf{C}\dfrac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}} \end{pmatrix} \tag{B.57}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}}\mathbf{q} + \mathbf{A}\dfrac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}} + \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}}\mathbf{p} - \dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}}\mathbf{q} + \mathbf{C}\dfrac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}} \end{pmatrix} \tag{B.58}$$

Le théorème de dérivation des fonctions composées (B.59) permet d'exprimer ces différentes dérivées partielles en fonction des dérivées partielles par rapport aux coordonnées généralisées complexes $\mathbf{q}$ dont dépendent la matrice des modes non-linéaires $\mathbf{\Phi}_k$ et la matrice spectrale contenant les valeurs propres complexes des modes non-linéaires $\mathbf{\Lambda}$.

$$\frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}} = \frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}} \tag{B.59}$$

$$\frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}} = \frac{\partial \bullet}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}} \tag{B.60}$$

Les dérivées partielles des blocs matriciels $\mathbf{A}$ et $\mathbf{a}$ par rapport à $\mathbf{q}$ ont alors pour expressions :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}_k}{\partial \mathbf{q}}\right)^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda})\right) \mathbf{\Phi}_k + \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k - \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{\Lambda})\right) \mathbf{\Phi}_k + \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda})\right) \frac{\partial \mathbf{\Phi}_k}{\partial \mathbf{q}} \tag{B.61}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}_k}{\partial \mathbf{q}}\right)^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda})\right) \mathbf{\Phi}_\Psi + \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k - \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{\Lambda})\right) \mathbf{\Phi}_\Psi \tag{B.62}$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{\Phi}_\Psi^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k - \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{\Lambda})\right) \mathbf{\Phi}_k + \mathbf{\Phi}_\Psi^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{\Lambda})\right) \frac{\partial \mathbf{\Phi}_k}{\partial \mathbf{q}} \tag{B.63}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \mathbf{q}} = 2k^2 \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{M}_{\mathrm{ii}} + k \frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{C}_{\mathrm{ii}} \tag{B.64}$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}_k}{\partial \mathbf{q}}\right)^{\mathrm{H}} \mathbf{g}_k \tag{B.65}$$

Les paramètres modaux étant interpolés à chaque itération, les dérivées partielles de $\mathbf{\Phi}_k$ et $\mathbf{\Lambda}$ par rapport à $\mathbf{q}$ sont déterminées en calculant la pente entre les points d'interpolation. Si un ordre d'interpolation supérieur est employé, ces dérivées partielles doivent être ajustées en conséquence.

Les dérivées partielles du vecteur des coordonnées généralisées $\mathbf{q}$ associées aux modes non-linéaires par rapport à ses parties réelle et imaginaire sont exprimées telles que

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{r}}} = \mathbf{I}_n \tag{B.66}$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{i}}} = i\, \mathbf{I}_n \tag{B.67}$$

avec $\mathbf{I}_n$ la matrice identité de taille n, n le nombre de modes non-linéaires contenus dans la base de réduction et i la notation associée à un nombre imaginaire.

Finalement, les expressions des dérivées partielles de $\mathbf{r}_k$ par rapport à $\mathbf{p}^{\mathrm{r}}$ et $\mathbf{p}^{\mathrm{i}}$ sont données dans les équations

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{p}^{\mathrm{r}}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}^{\mathrm{r}}} \\ \mathbf{D} \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}^{\mathrm{r}}} \end{pmatrix} \tag{B.68}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{p}^{\mathrm{i}}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}^{\mathrm{i}}} \\ \mathbf{D} \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}^{\mathrm{i}}} \end{pmatrix} \tag{B.69}$$

Les dérivées partielles du vecteur des coordonnées généralisées $\mathbf{p}$ associées aux modes d'interfaces par rapport à ses parties réelle et imaginaire sont exprimées telles que

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}^{\mathrm{r}}} = \mathbf{I}_m \tag{B.70}$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}^{\mathrm{i}}} = i\, \mathbf{I}_m \tag{B.71}$$

avec $\mathbf{I}_m$ la matrice identité de taille m, m le nombre de modes d'interface contenus dans la base de réduction et i la notation associée à un nombre imaginaire.

Annexe C

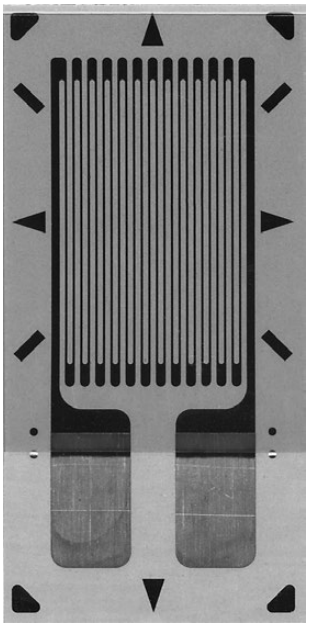
Caractéristiques techniques des composants

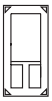
Cette annexe contient les documents techniques de certains des principaux composants utilisés dans les essais vibratoires des travaux de ce mémoire de thèse tels que les jauges de déformations C.1 et les patchs piézoélectriques C.2.

La figure C.1 expose la documentation technique des jauges de déformation employées durant ces campagnes d'essais. Les figures C.2 et C.3 présentent, respectivement, les caractéristiques matériaux ainsi que le dessin technique des actionneurs piézoélectriques utilisés lors des essais de ces travaux de thèse.

1 Jauges de déformation

GAGE PATTERN DATA





actual size

GAGE DESIGNATION See Note 1	RESISTANCE (OHMS)	OPTIONS AVAILABLE See Note 2
CEA-XX-250UW-120	120 ±0.3%	P2
CEA-XX-250UW-175	175 ±0.3%	P2
CEA-XX-250UW-350	350 ±0.3%	P2
CEA-XX-250UW-10C	1000 ±0.3%	P2

DESCRIPTION

General-purpose gage. Exposed solder tab area 0.10 x 0.07 in (2.5 x 1.8 mm). See also 250UN pattern.

GAGE DIMENSIONS

Legend
ES = Each Section
S = Section (S1 = Section 1)
CP = Complete Pattern
M = Matrix

inch
millimeter

Gage Length	Overall Length	Grid Width	Overall Width	Matrix Length	Matrix Width
0.250	0.450	0.180	0.180	0.55	0.27
6.35	11.43	4.57	4.57	14.0	6.9

GAGE SERIES DATA — See Gage Series datasheet for complete specifications

Series	Description	Strain Range	Temperature Range
CEA	Universal general-purpose strain gages.	±5%	–100° to +350°F (–75° to +175°C)

Note 1: Insert desired S-T-C number in spaces marked XX.

Note 2: Products with designations and options shown in bold are not RoHS compliant.

FIGURE C.1 – Caractéristiques techniques des jauges de déformations [228]

2 Patchs piézoélectriques

PZT5H Materials (Soft PZT)

Property	Symbol	Units	Material Type			
			3221HD	3203STD	3203HD	3241HD
Dielectric Constant (1kHz)	ϵ^T_{33}		3450	3250	3800	4100
Dielectric Loss Factor (1kHz)	$\tan\delta_e$		0.02	0.02	0.02	0.02
Dielectric Constant (1kHz)	ϵ^T_{11}		3550	2800	3200	3420
Clamped Dielectric Constant	ϵ^S_{33}		1000	775	1200	1300
Density	ρ	g/cm³	7.87	7.7	7.87	7.88
Curie Point	T_c	ºC	242	225	225	223
Mechanical Quality Factor	Q_m		50	50	50	50
Coercive Field (Measured <1 Hz)	E_c	kV/cm	8.8	10.6	8.0	9.0
Remanent Polarization	P_r	µCoul/cm²	38.5	37.2	39.0	38.5
Coupling Coefficients	k_p		0.74	0.69	0.75	
	k_{33}		0.78	0.70	0.78	0.77
	k_{31}		0.46	0.41	0.43	0.44
	k_t		0.54	0.56	0.55	0.55
	k_{15}		0.78	0.72	0.78	0.75
Piezoelectric Charge (Displacement Coefficient)	d_{31}	Coul/N x 10^{-12} (or) m/V x 10^{-12}	-300	-270	-320	-325
	d_{33}		600	530	650	640
	d_{15}		1000	790	1000	880
Piezoelectric Voltage Coefficient (Voltage Coefficient)	g_{31}	V·m/N x 10^{-3}	-9.8	-9.4	-9.5	-8.9
	g_{33}		19.7	18.4	19.0	17.6
	g_{15}		31.8	31.9	35.3	29.1
Frequency Constants Radial	N_r	Hz·m	1830	1920		
Resonant Thickness	N_{tr}	Hz·m	2020	1870	2000	2000
Anti-Resonant Thickness	N_{ta}	Hz·m	2340	2220	2350	2340
	N_{31}	Hz·m		1400		
Thermal Expansion (Perpendicular to poling)	α	ppm/ºC			3.5	
Specific Heat	C_p	J/kg·ºC			420	
		J/mol·ºC			138	
Thermal Conductivity	K_d	W/cm·ºC			1.9-2.3	
		W/m·ºK			1.45	
with Au Electrodes		W/m·ºK			1.45	
Poisson's Ratio	υ				0.31	0.31
Elastic Constants Short Circuit	s^E_{11}	x 10^{-12}m²/N	16.0	16.7	16.6	15.6
	s^E_{33}		19.8	19.7	21.0	19.2
	s^E_{12}		-4.2	-5.6	-4.2	-4.7
	s^E_{13}		-7.2	-7.6	-8.2	-7.7
	s^E_{55}		54.0	48.5	52.4	45.9
Elastic Constants Open Circuit	s^D_{11}	10^{-12}m²/N	12.6	13.9	13.5	12.5
	s^D_{33}		7.8	10.0	8.2	7.8
	s^D_{55}		21.1	23.4	20.5	20.1
Elastic Constants Short Circuit	c^E_{11}	x 10^{10}N/m²	6.2	5.9	6.0	6.4
	c^E_{33}		5.1	5.1	4.8	5.2
Elastic Constants Open Circuit	c^D_{11}	x 10^{10} N/m²	7.6	7.2	7.5	8.0
	c^D_{33}		12.8	10.0	13.2	12.8

FIGURE C.2 – Caractéristiques matériaux des actionneurs piézoélectriques [210]

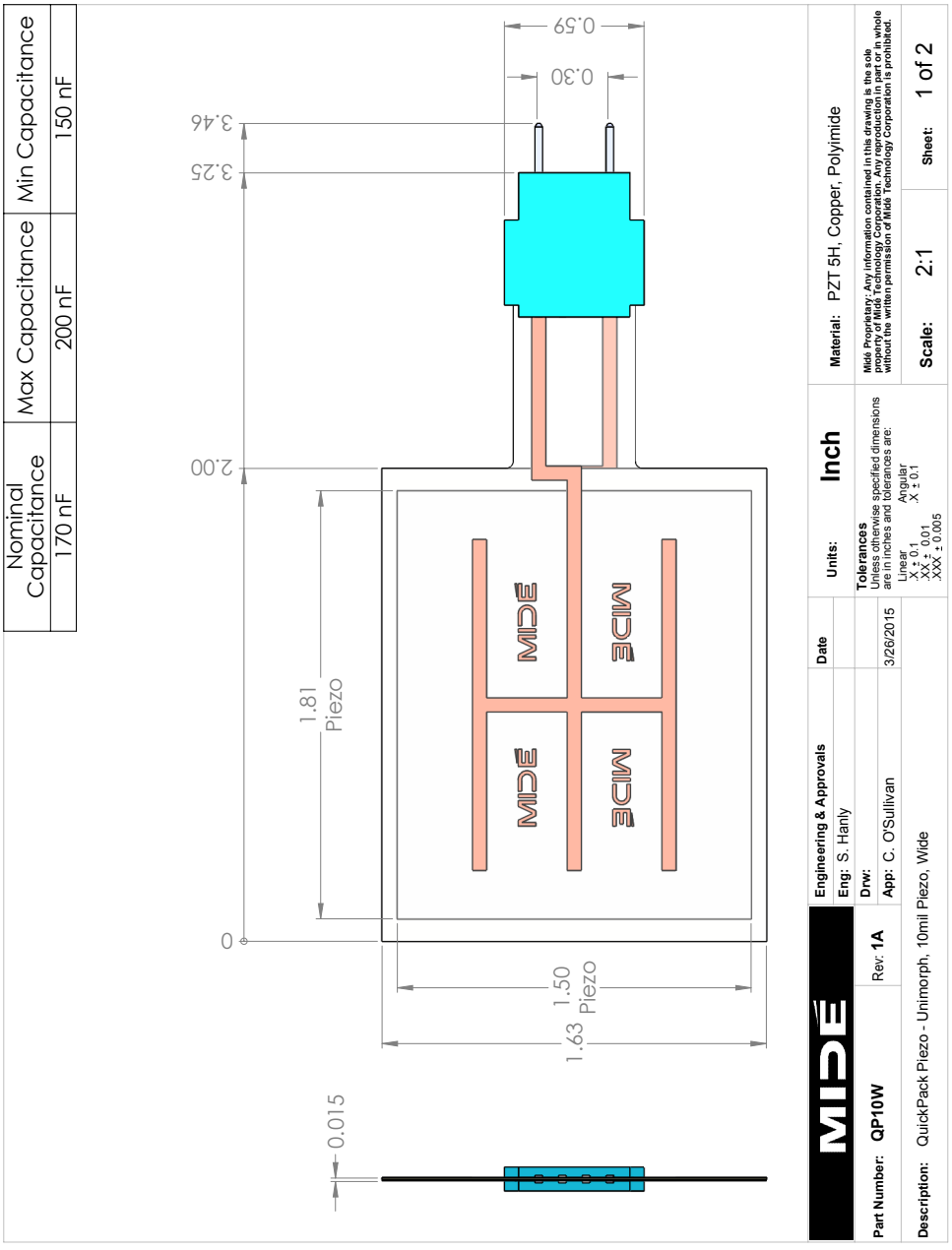


FIGURE C.3 – Dessin technique d'un actionneur piézoélectrique [210]

Annexe D

Figures complémentaires au chapitre VI

Les figures annexes au chapitre VI sont proposées dans cette annexe D. Dans l'ordre d'apparition, cette dernière contient :

- les figures D.1 et D.2 exposant les onglets principaux de l'interface du logiciel d'acquisition et d'excitation ;
- les figures D.3 et D.4 présentant les représentations graphiques d'excitations contra-rotative et stationnaire, respectivement ;
- les figures D.5 et D.6 superposant les réponses forcées d'un essai productif et de son essai de répétabilité pour un cas validé et un cas invalidé, respectivement ;
- les figures D.7 et D.8 montrant le lissage global en amplitude et en phase d'un essai au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion ;
- les figures D.9 et D.9 exhibant le lissage global en amplitude et en phase d'un essai au voisinage de la famille du premier mode de flexion ;
- les figures D.11 et D.12 représentant les effets des perturbations électromagnétiques de la famille du premier et du deuxième mode de flexion, respectivement ;
- les figures D.13 et D.14 offrant les décompositions en composantes à diamètres expérimentales et numériques pour une excitation localisée au voisinage de la famille du premier mode de flexion en fonction, respectivement, de la tension d'excitation et de la vitesse de rotation ;
- les figures D.15 et D.16 proposant les répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques pour une excitation localisée en fonction de la tension d'excitation au voisinage du premier et du deuxième mode de flexion, respectivement ;
- la figure D.17 exposant les répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques pour plusieurs excitations à deux et trois diamètres nodaux, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion ;
- la figure D.18 présentant les décompositions à diamètres expérimentales et numériques de plusieurs modes secondaires de la famille du deuxième mode de flexion pour plusieurs vitesses de rotations ;
- la figure D.19 montrant la comparaison des évolutions expérimentales et numériques de la déformation modale de la famille du premier et du deuxième mode de flexion en fonction de la tension d'excitation ;
- la figure D.20 présentant la comparaison des évolutions des paramètres modaux de la famille du premier et du deuxième mode de flexion, identifiés lors des essais sur mors et en rotation.

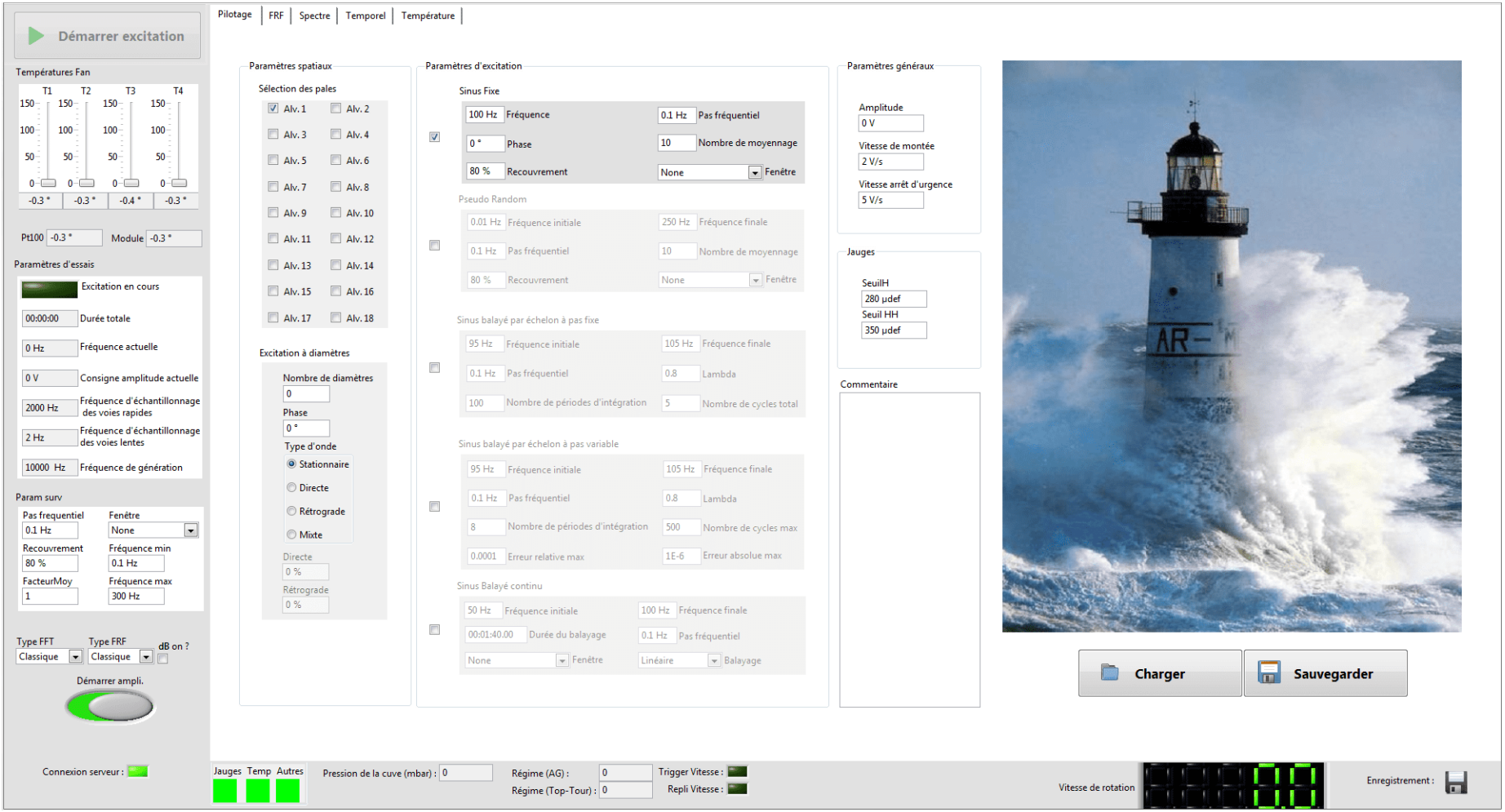


FIGURE D.1 – Vue de l'onglet de contrôle du programme d'acquisition et d'excitation

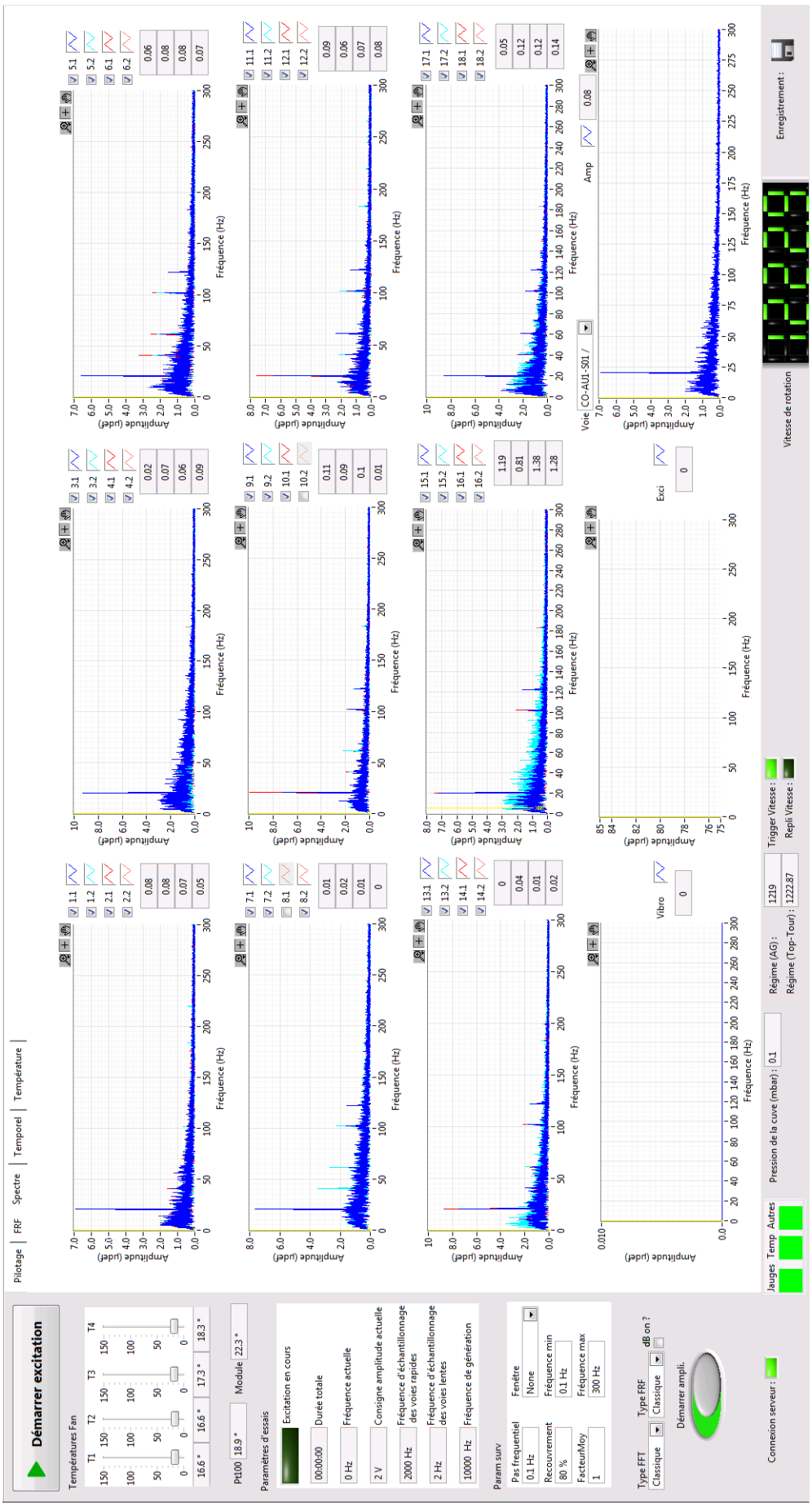
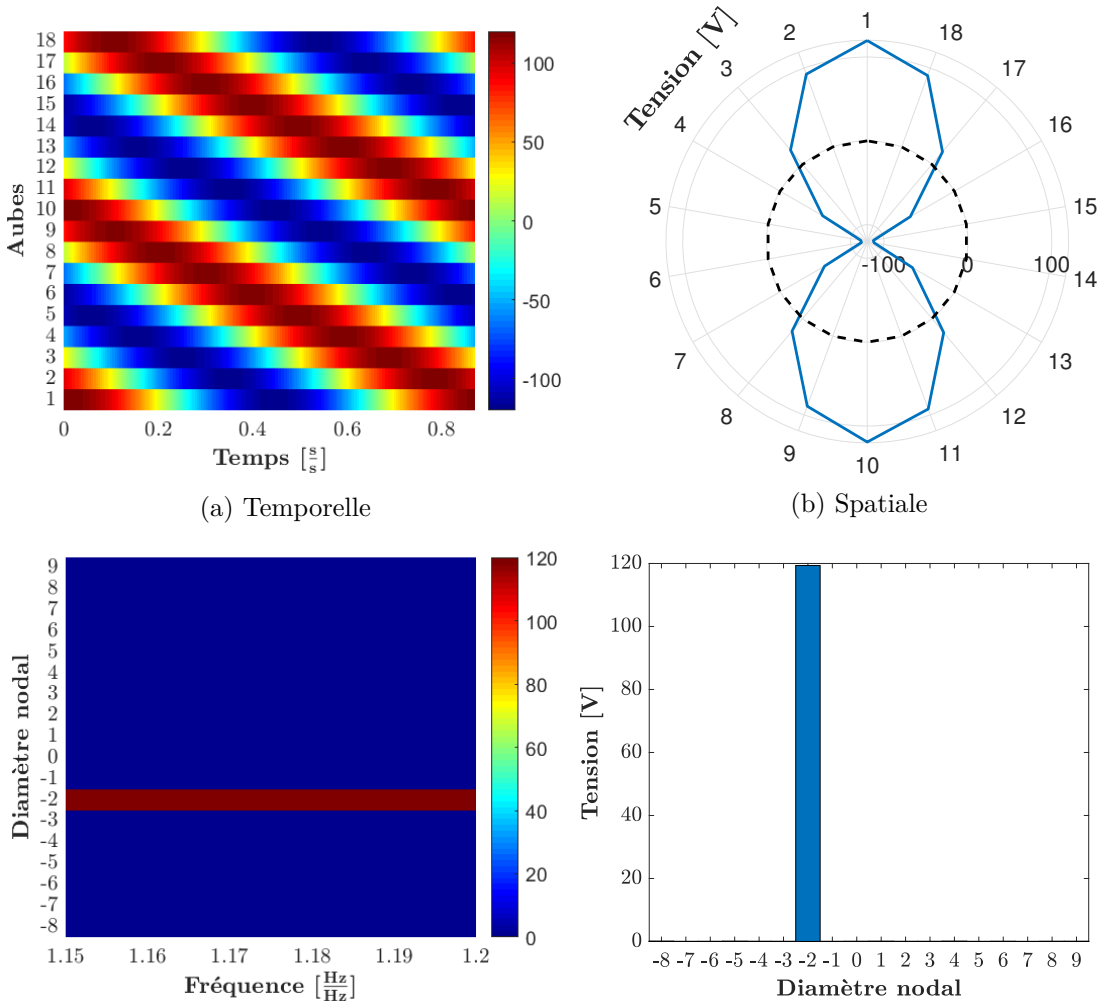


FIGURE D.2 – Vue de l'onglet d'affichage des réponses forcées du programme d'acquisition et d'excitation lors d'une rotation sans excitation



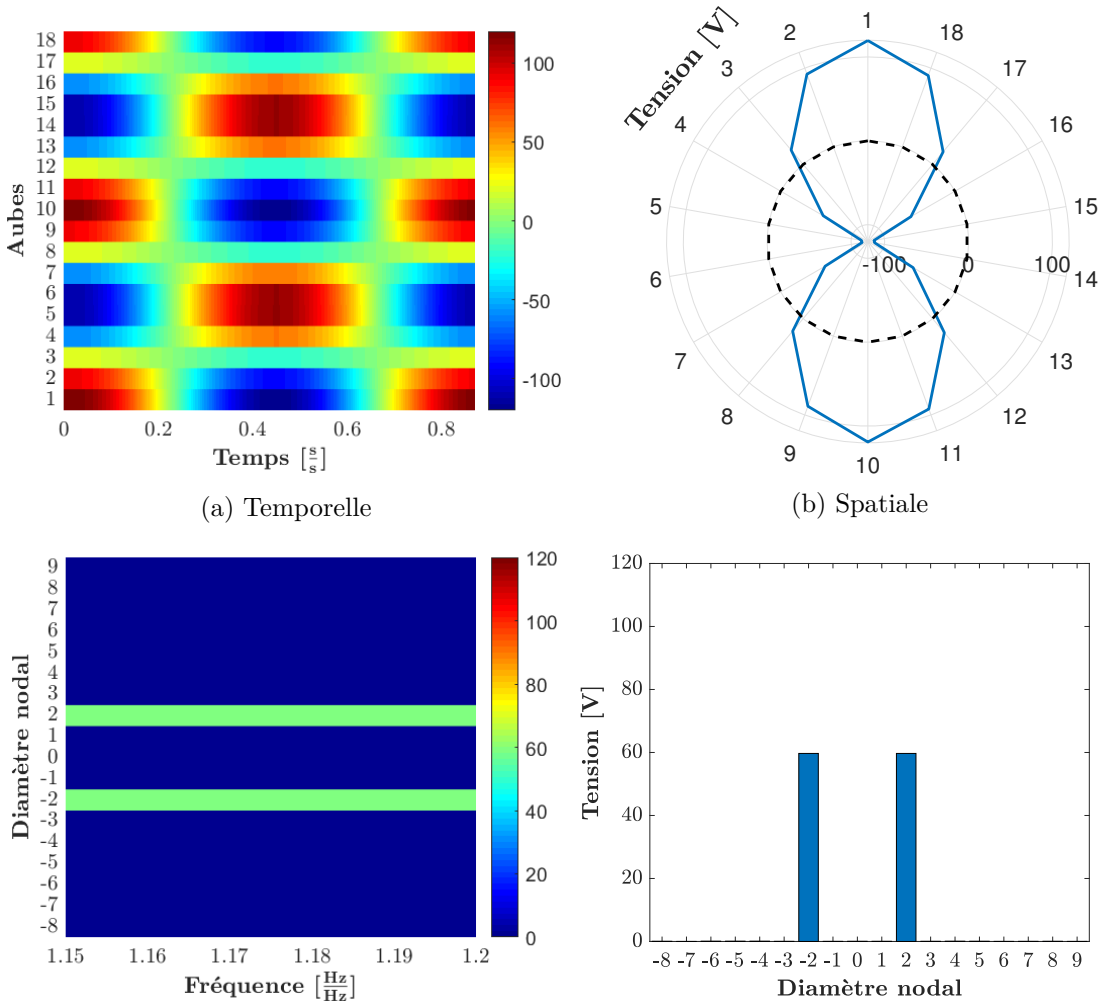
(a) Temporelle

(b) Spatiale

(c) Fréquentielle

(d) Décomposition à diamètres

FIGURE D.3 – Représentations d'une excitation contra-rotative à deux diamètres nodaux



(a) Temporelle

(b) Spatiale

(c) Fréquentielle

(d) Décomposition à diamètres

FIGURE D.4 – Représentations d'une excitation stationnaire à deux diamètres nodaux

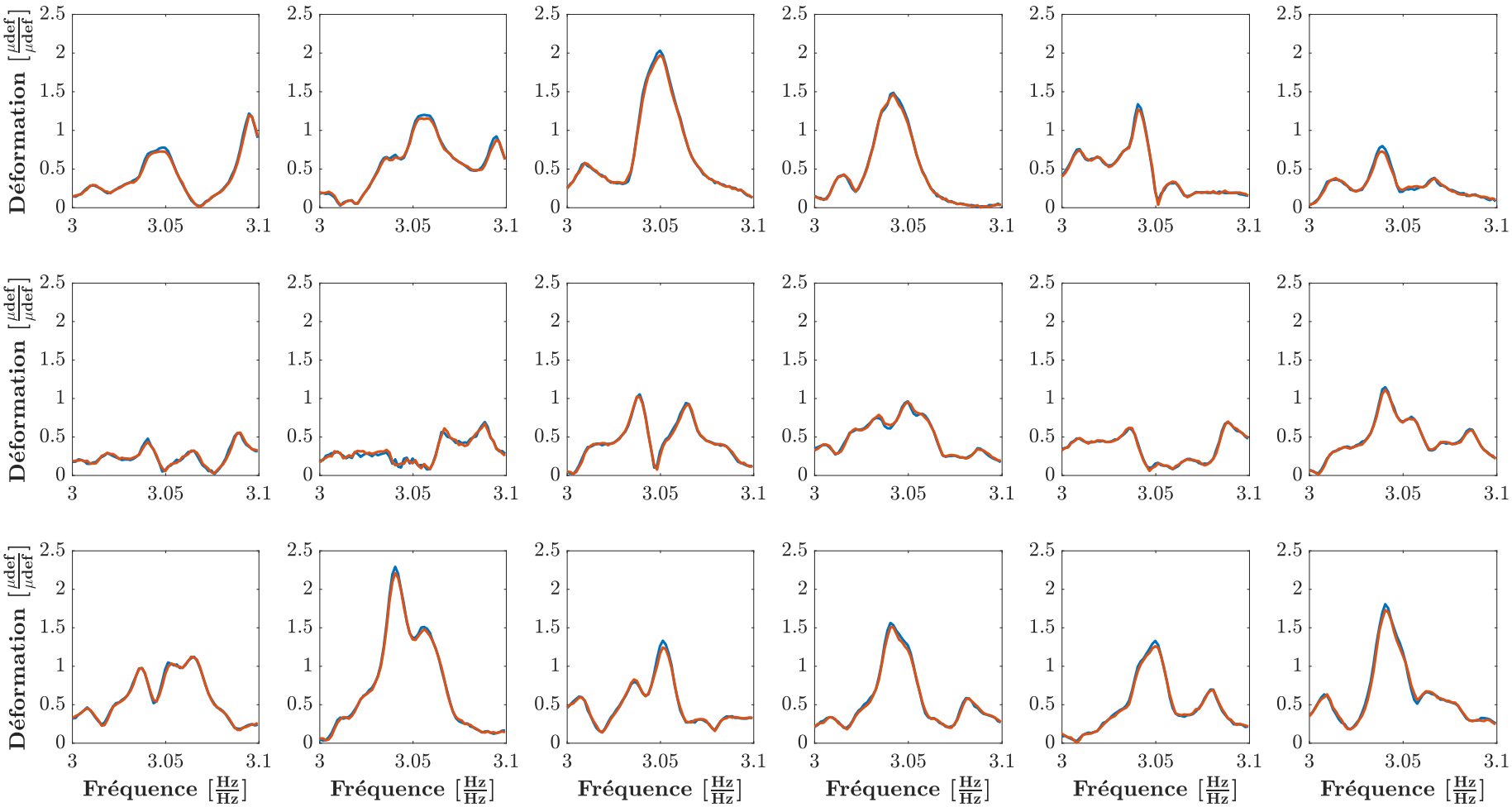


FIGURE D.5 – Comparatif entre les réponses forcées en amplitude d'un essai productif (—) et son essai de répétabilité validé (—)

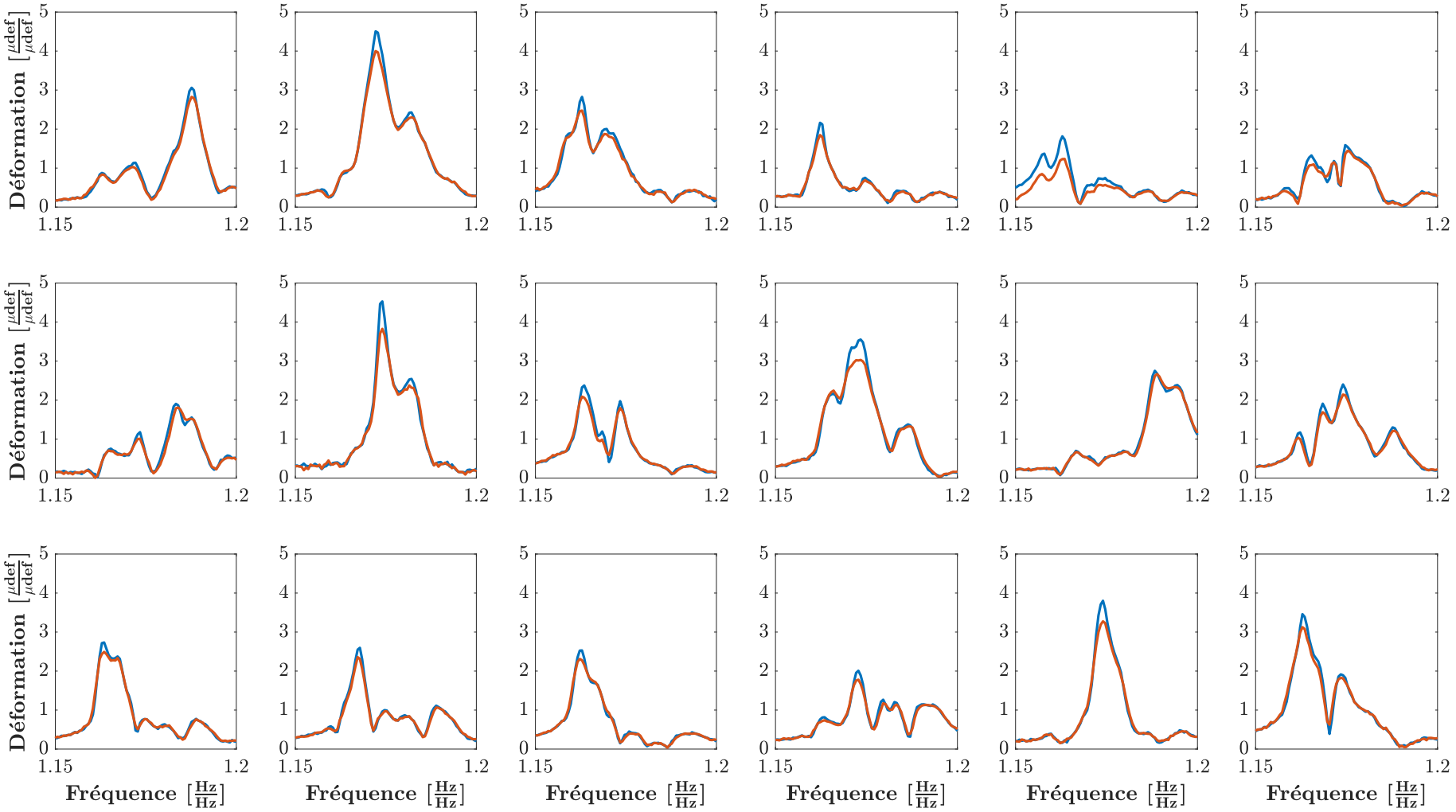


FIGURE D.6 – Comparatif entre les réponses forcées en amplitude d'un essai productif (—) et son essai de répétabilité invalidé (—)

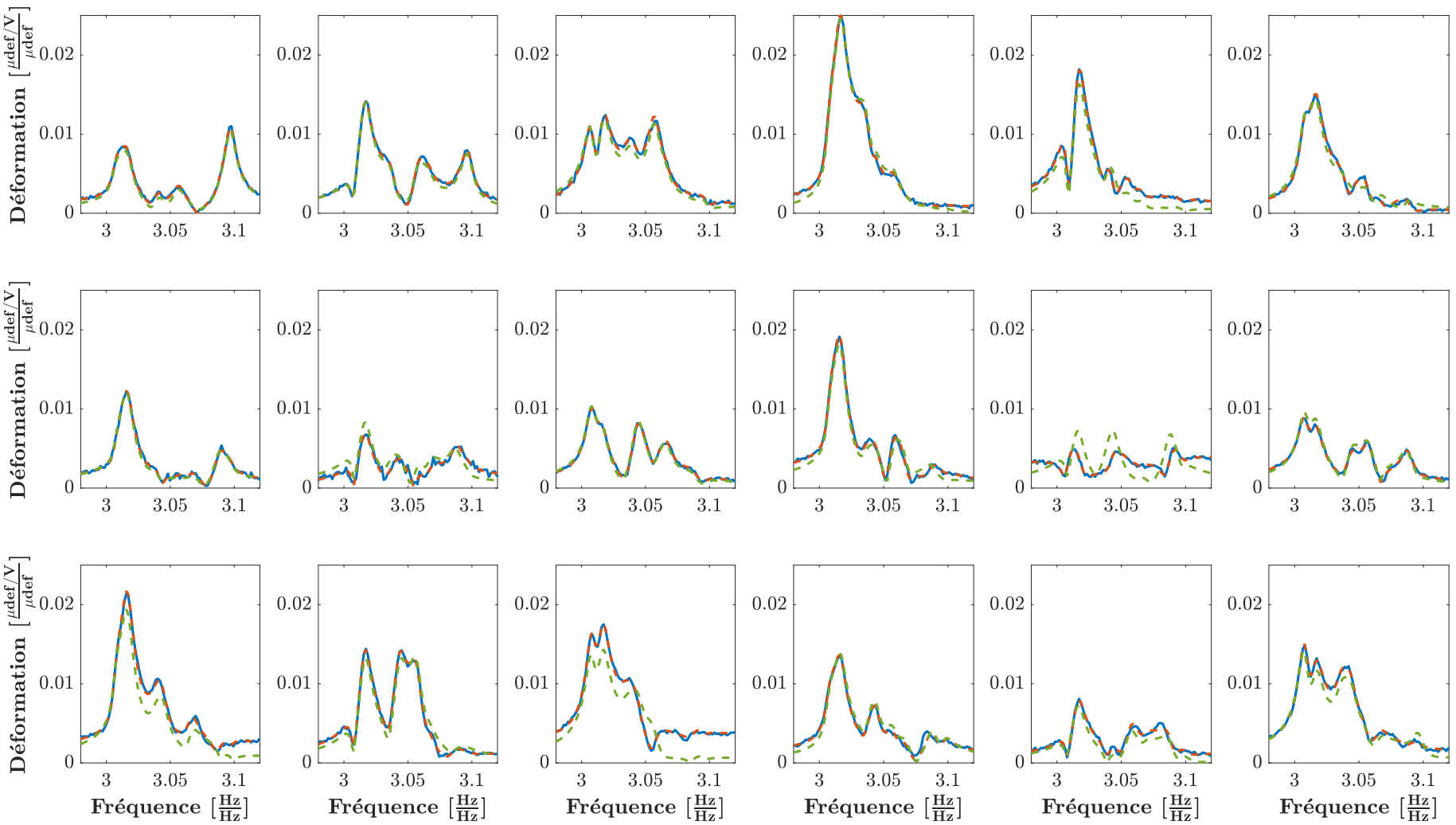


FIGURE D.7 – Comparatif entre les fonctions de réponse fréquentielle expérimentales (—), lissées avec correction extra-bande (- -) et lissées sans correction extra-bande (- -) en amplitude pour la famille du deuxième mode de flexion (7 pôles identifiés)

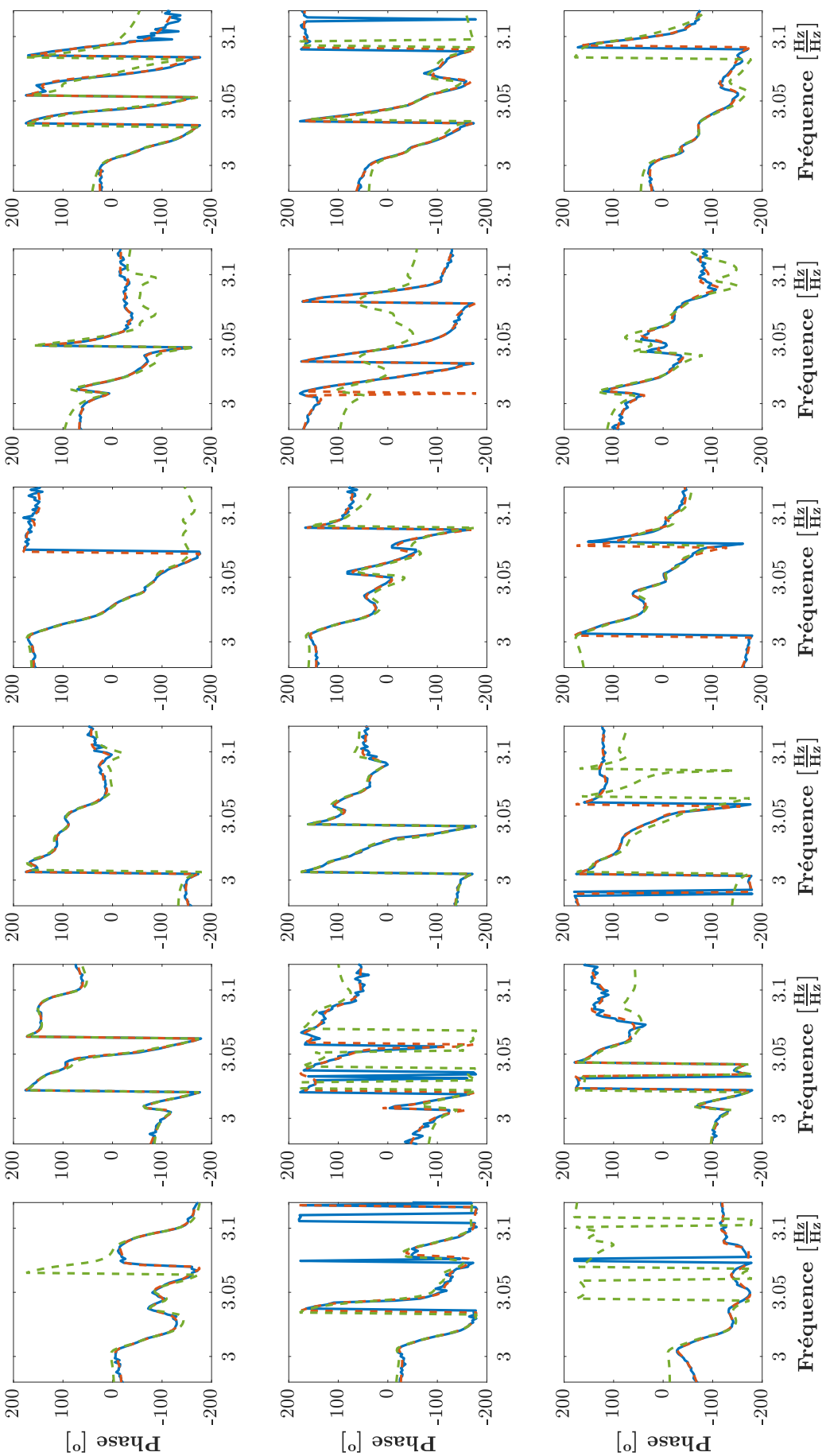


FIGURE D.8 – Comparatif entre les fonctions de réponse fréquentielle expérimentales (—), lissées avec correction extra-bande (- -) et lissées sans correction extra-bande (- -) en phase pour la famille du deuxième mode de flexion (7 pôles identifiés)

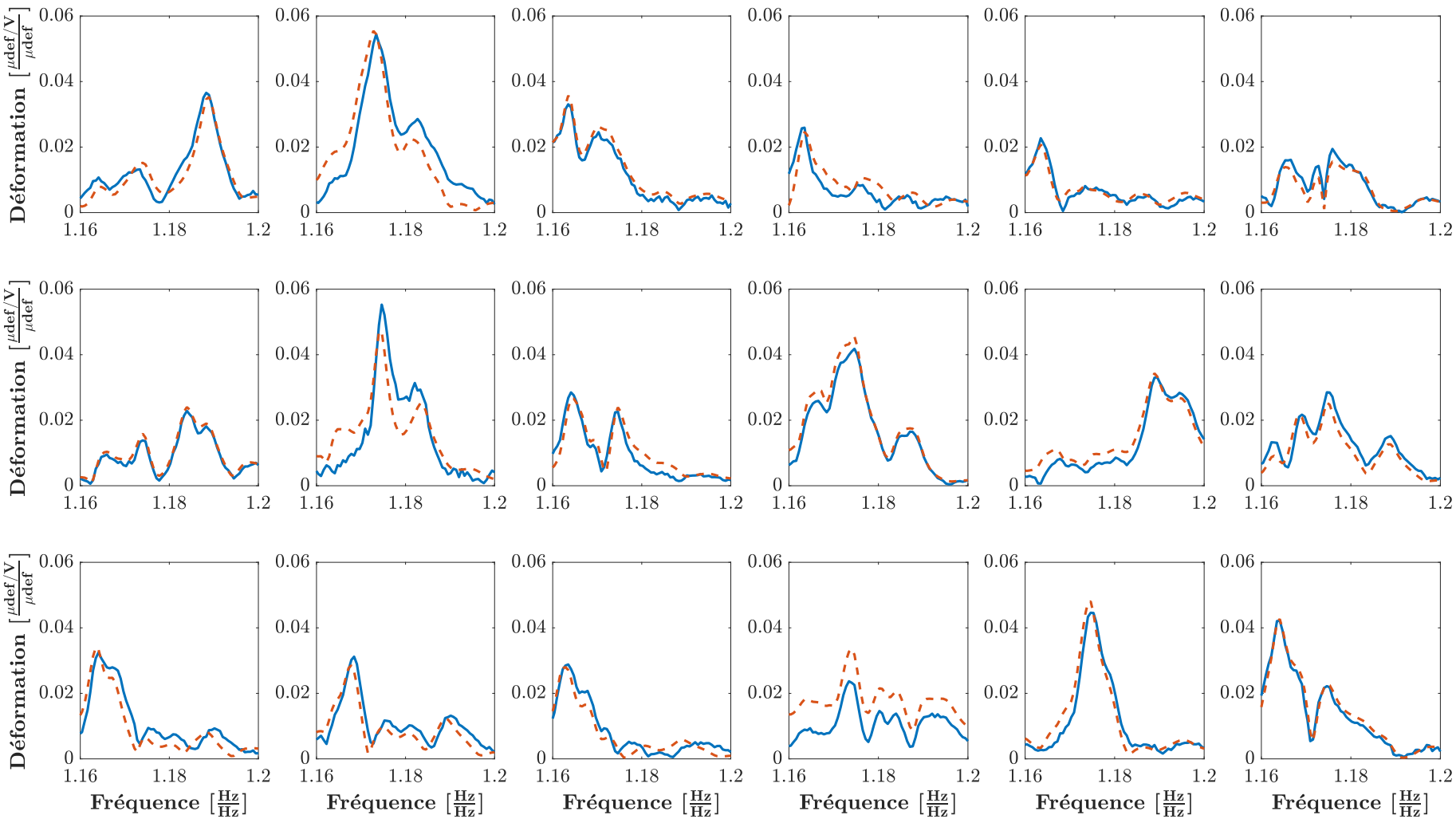


FIGURE D.9 – Comparatif entre les fonctions de réponse fréquentielle expérimentales (—) et lissées (- -) en amplitude pour la famille du premier mode de flexion (11 pôles identifiés)

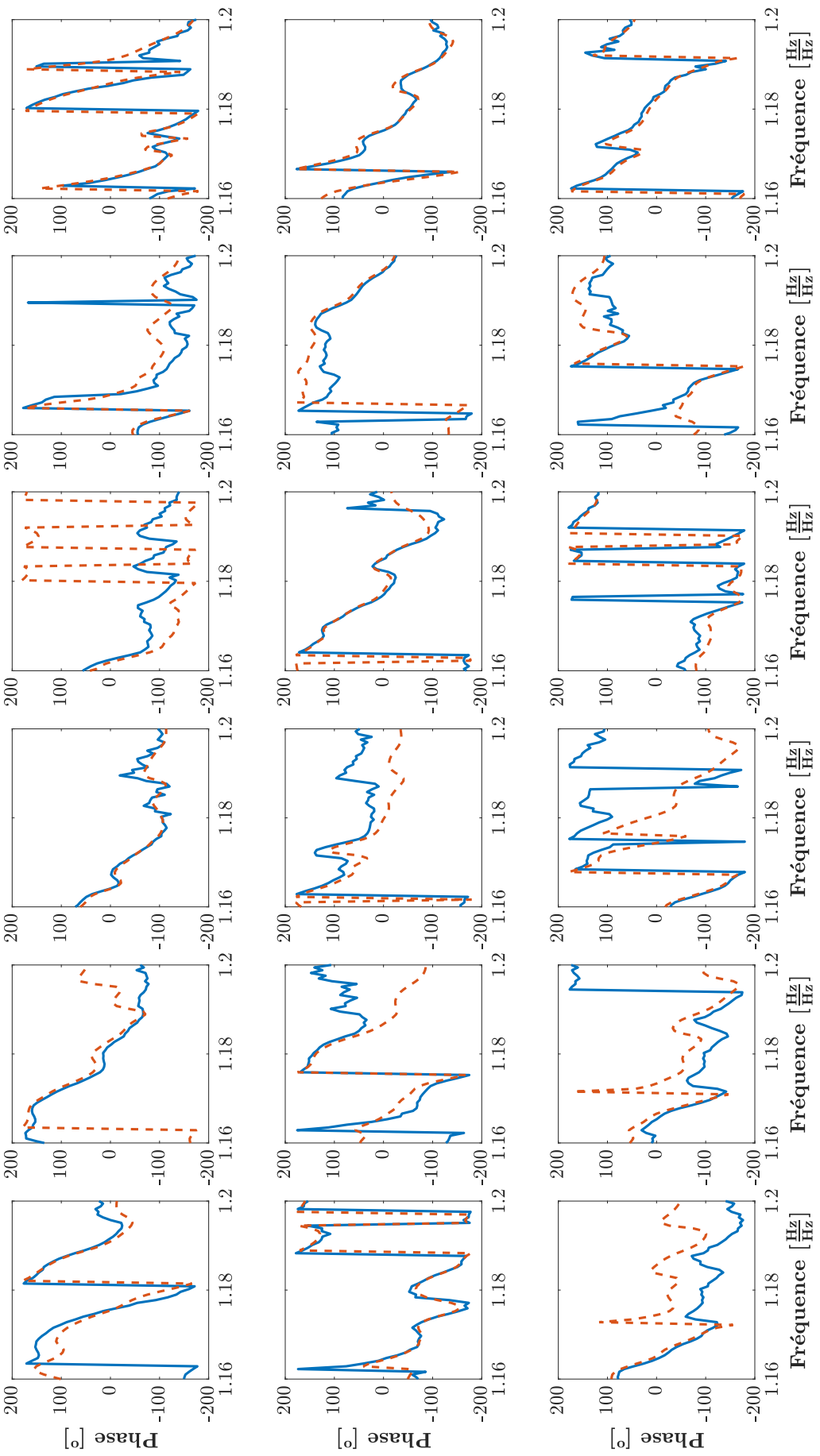


FIGURE D.10 – Comparatif entre les fonctions de réponse fréquentielle expérimentales (—) et lissées (- -) en phase pour la famille du premier mode de flexion (11 pôles identifiés)

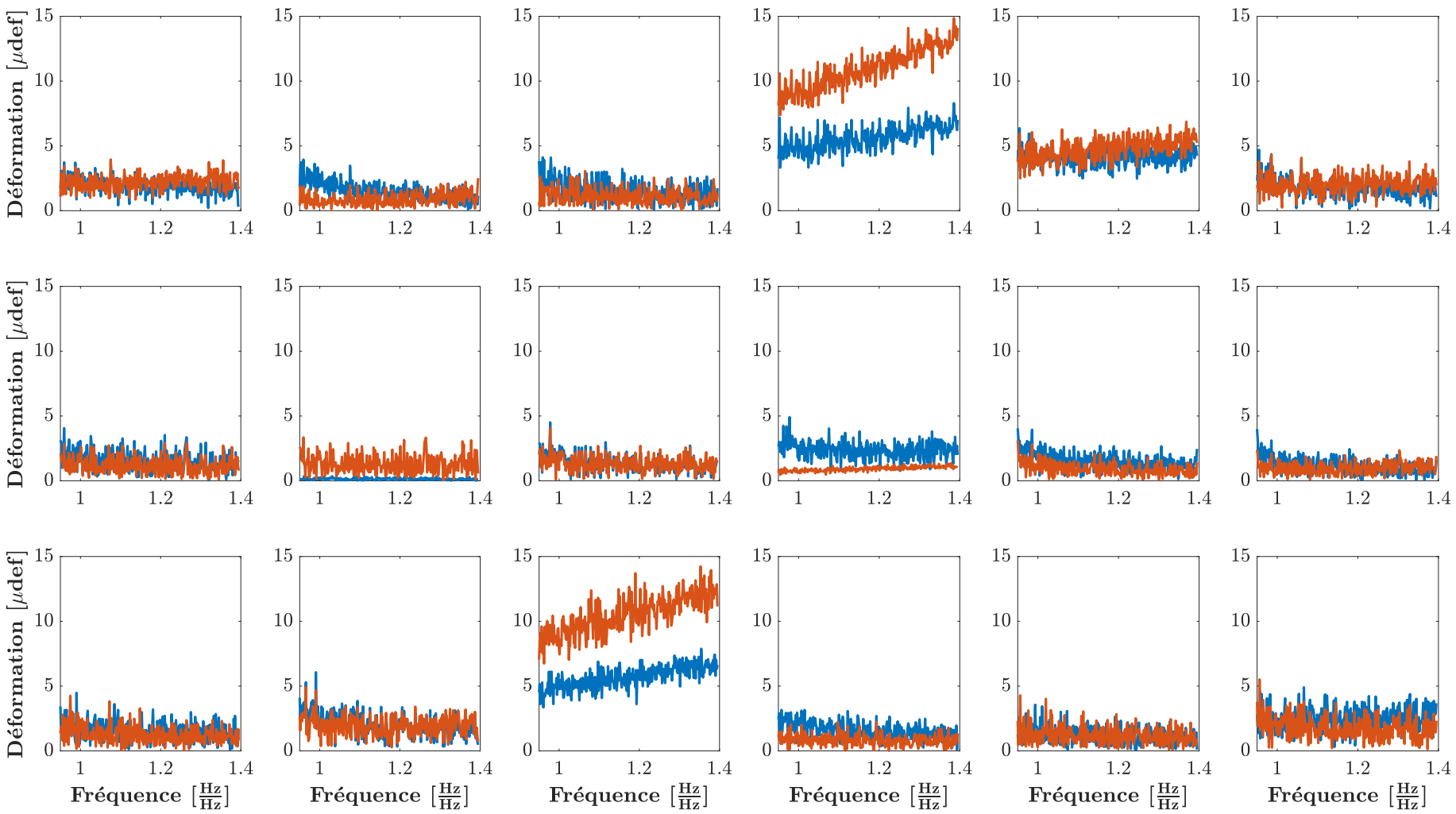


FIGURE D.11 – Effets des perturbations électromagnétiques sur la famille du premier mode de flexion pour la jauge n°1 (—) et la jauge n°2 (—)

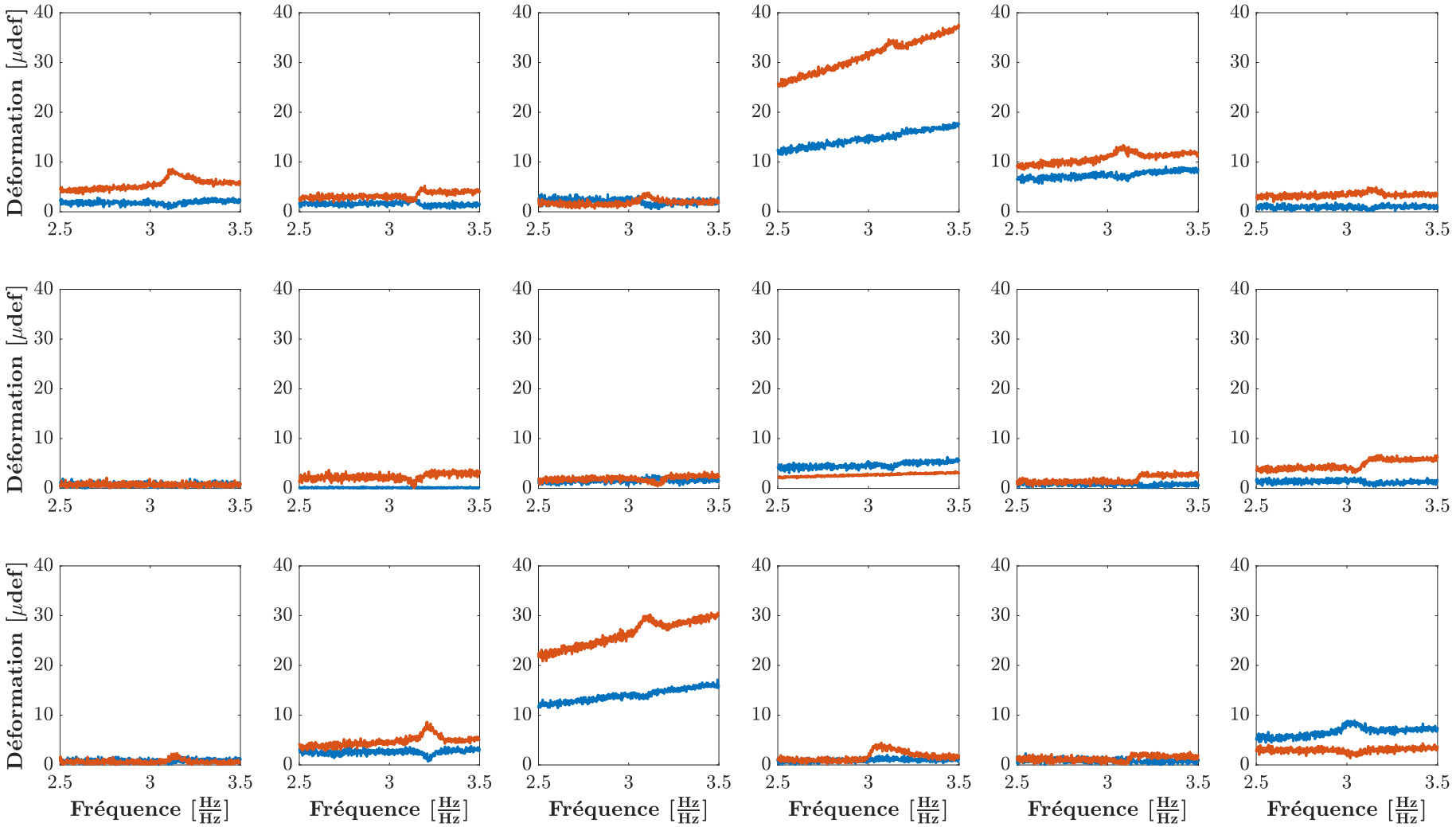
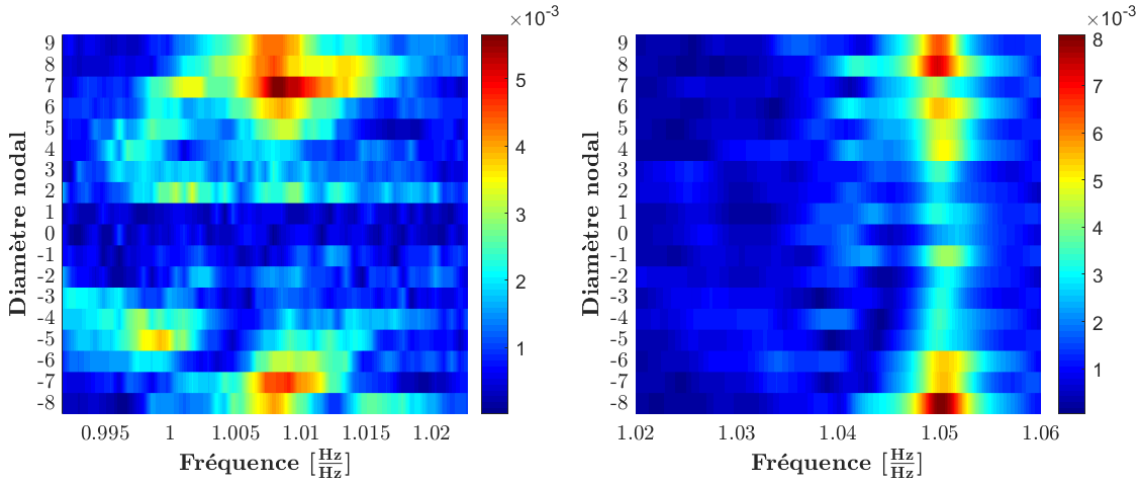
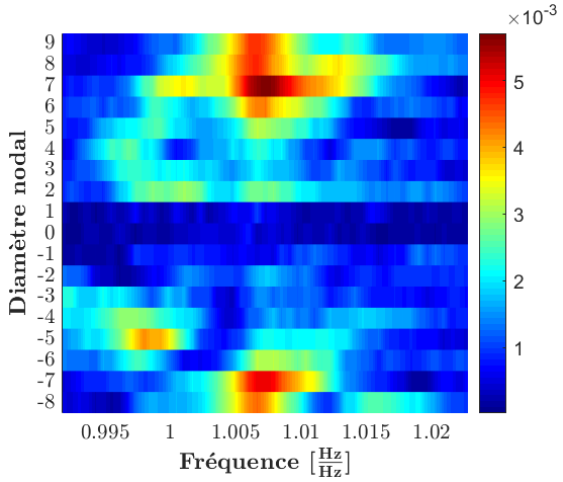


FIGURE D.12 – Effets des perturbations électromagnétiques sur la famille du deuxième mode pour la jauge n°1 (—) et la jauge n°2 (—)

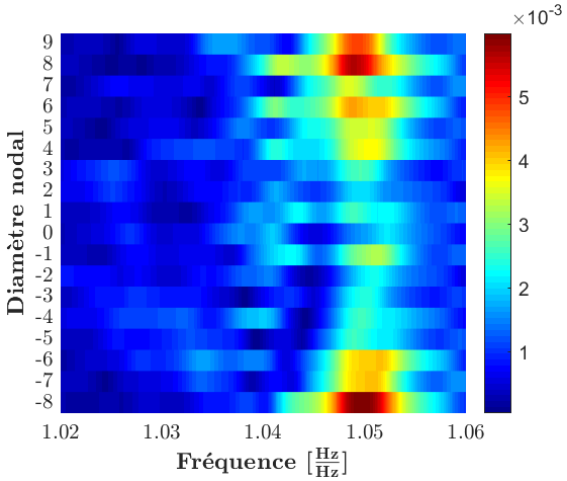


(a) Expérimental - $v = 40\,\mathrm{V}$

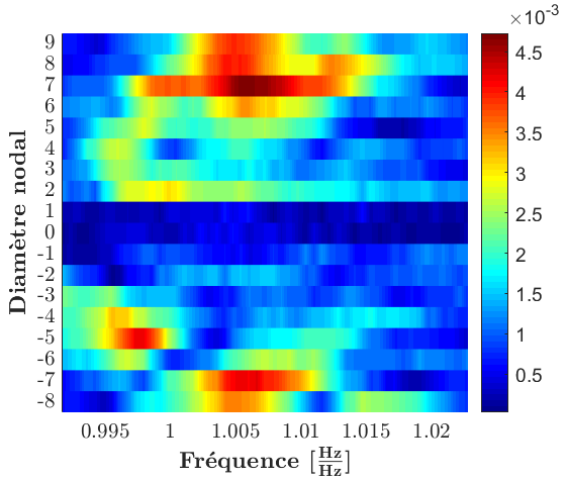
(b) Numérique - $v = 40\,\mathrm{V}$



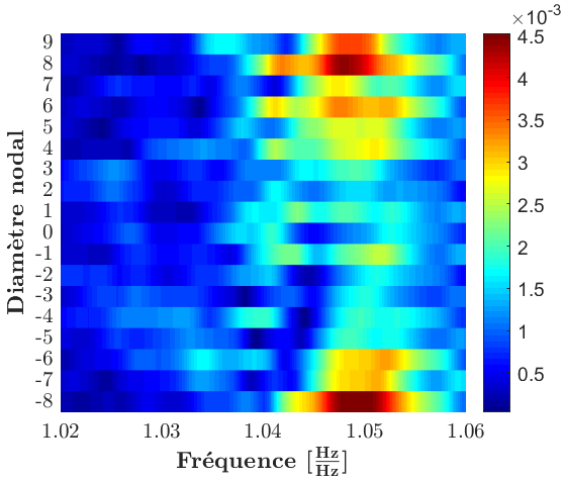
(c) Expérimental - $v = 80\,\mathrm{V}$



(d) Numérique - $v = 80\,\mathrm{V}$

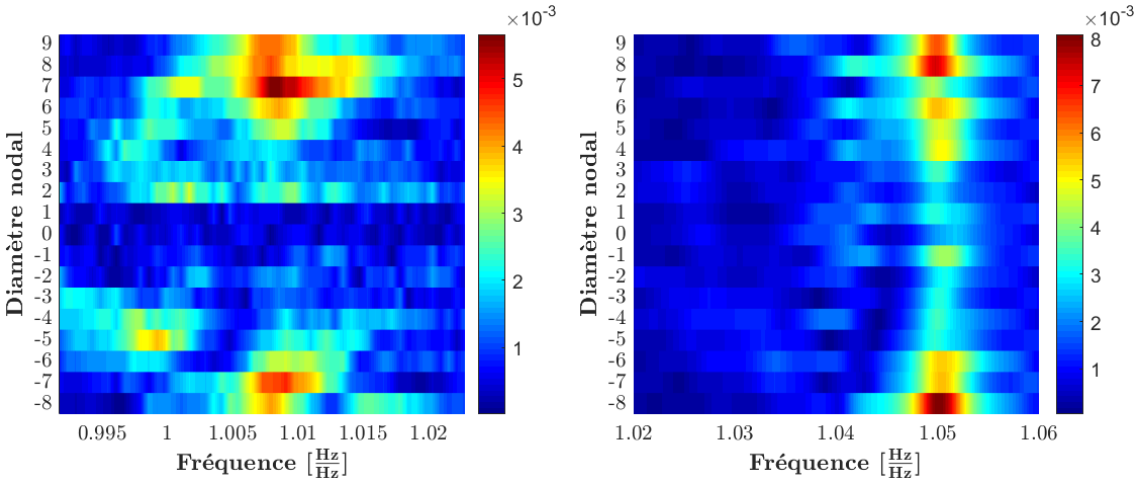


(e) Expérimental - $v = 120\,\mathrm{V}$



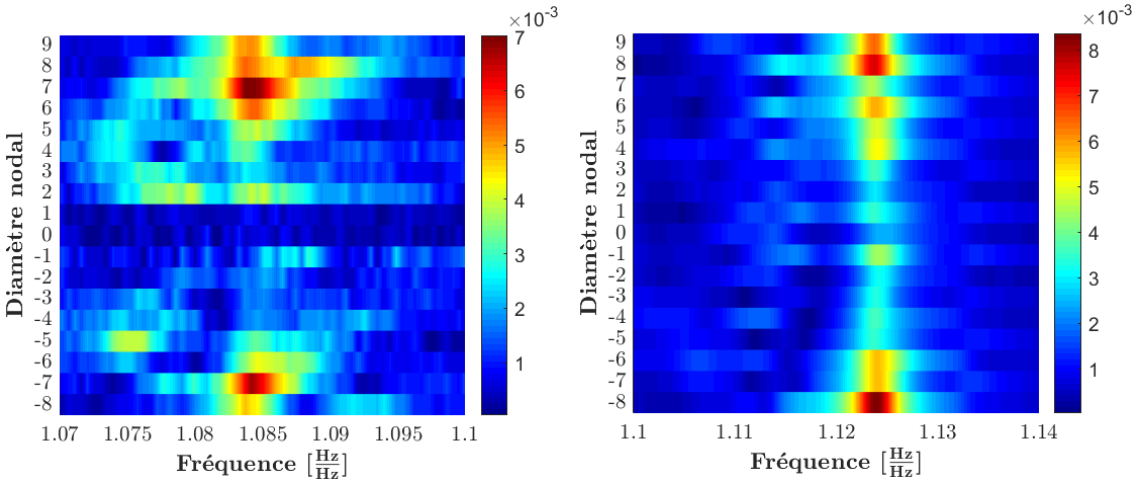
(f) Numérique - $v = 120\,\mathrm{V}$

FIGURE D.13 – Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques pour plusieurs excitations de l'aube 16, au voisinage de la famille du premier mode de flexion à $\Omega = 30\,\%$ (Déformations $[\frac{\mu\mathrm{def/V}}{\mu\mathrm{def}}]$ min. ■ et max. ■)



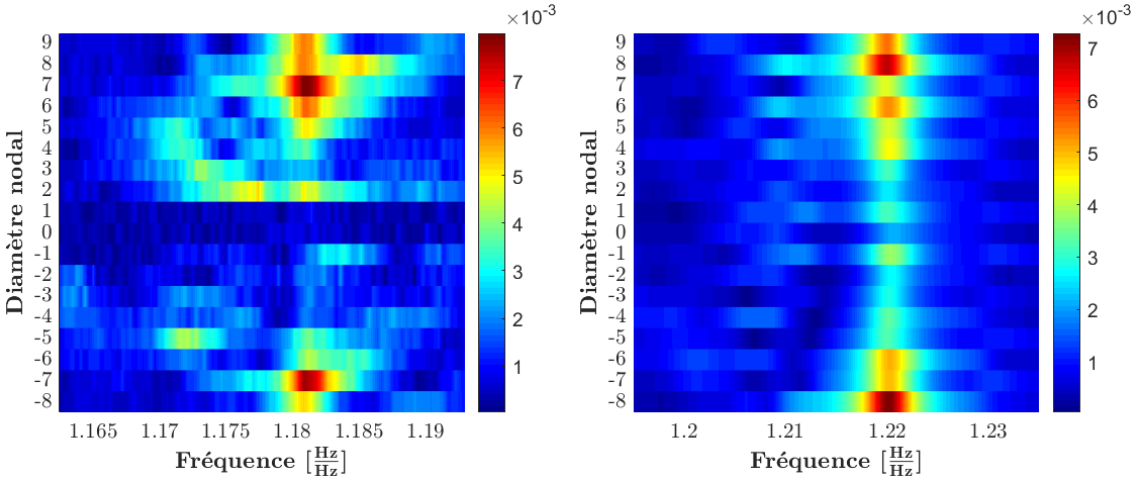
(a) Expérimental - $\Omega = 30\,\%$

(b) Numérique - $\Omega = 30\,\%$



(c) Expérimental - $\Omega = 50\,\%$

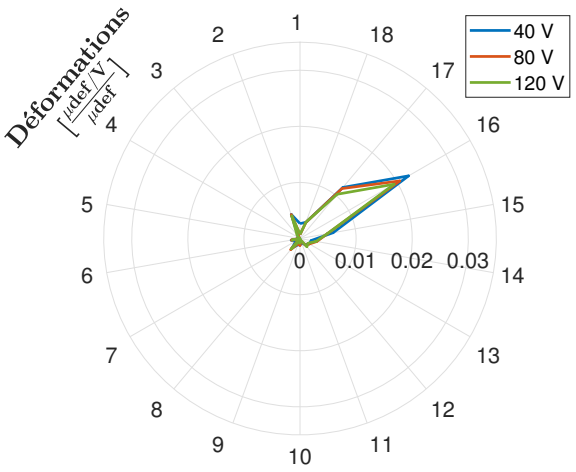
(d) Numérique - $\Omega = 50\,\%$



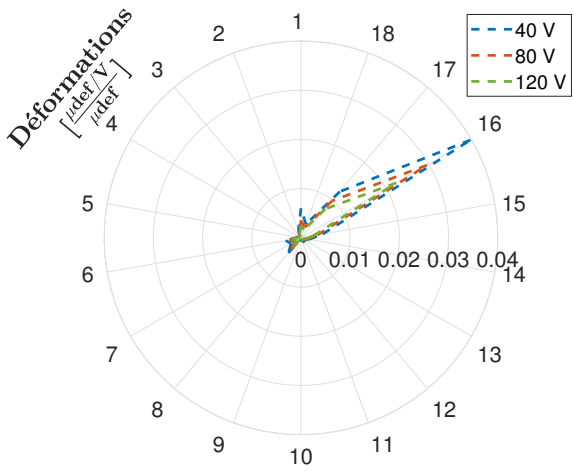
(e) Expérimental - $\Omega = 70\,\%$

(f) Numérique - $\Omega = 70\,\%$

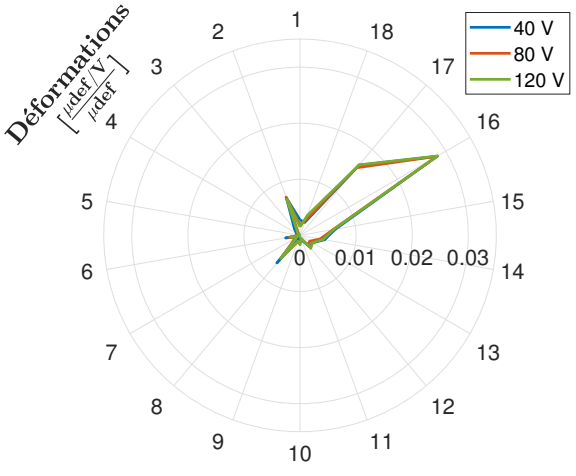
FIGURE D.14 – Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques pour une excitation $v = 40\,\mathrm{V}$ de l'aube 16, au voisinage de la famille du premier mode de flexion à plusieurs vitesses de rotation (Déformations $[\frac{\mu\mathrm{def/V}}{\mu\mathrm{def}}]$ min. ■ et max. ■)



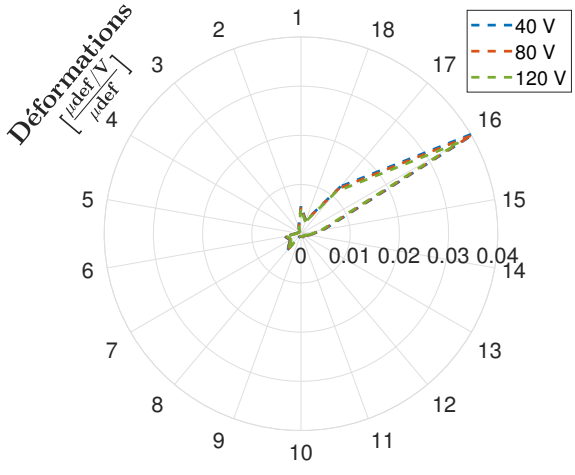
(a) Expérimental - $\Omega = 30\,\%$



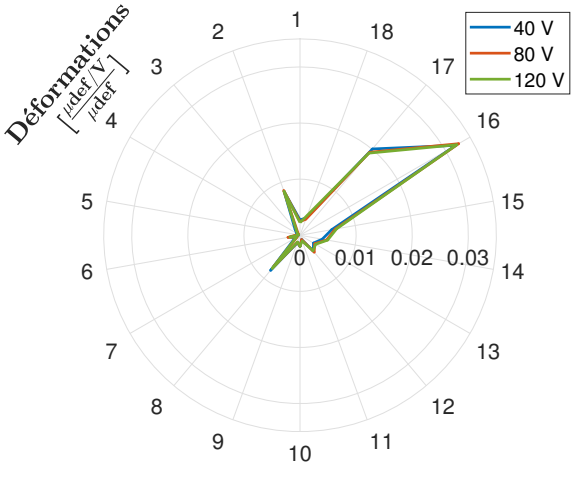
(b) Numérique - $\Omega = 30\,\%$



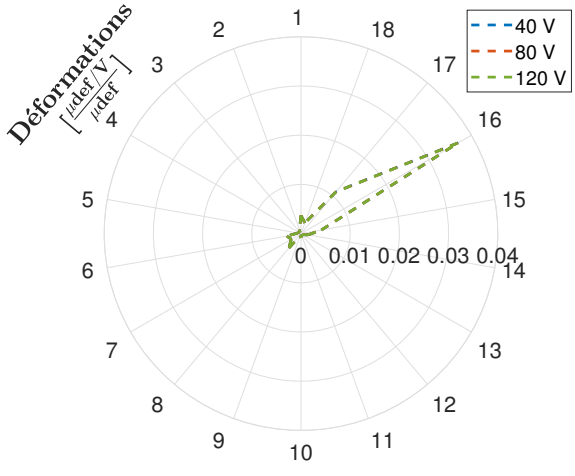
(c) Expérimental - $\Omega = 50\,\%$



(d) Numérique - $\Omega = 50\,\%$

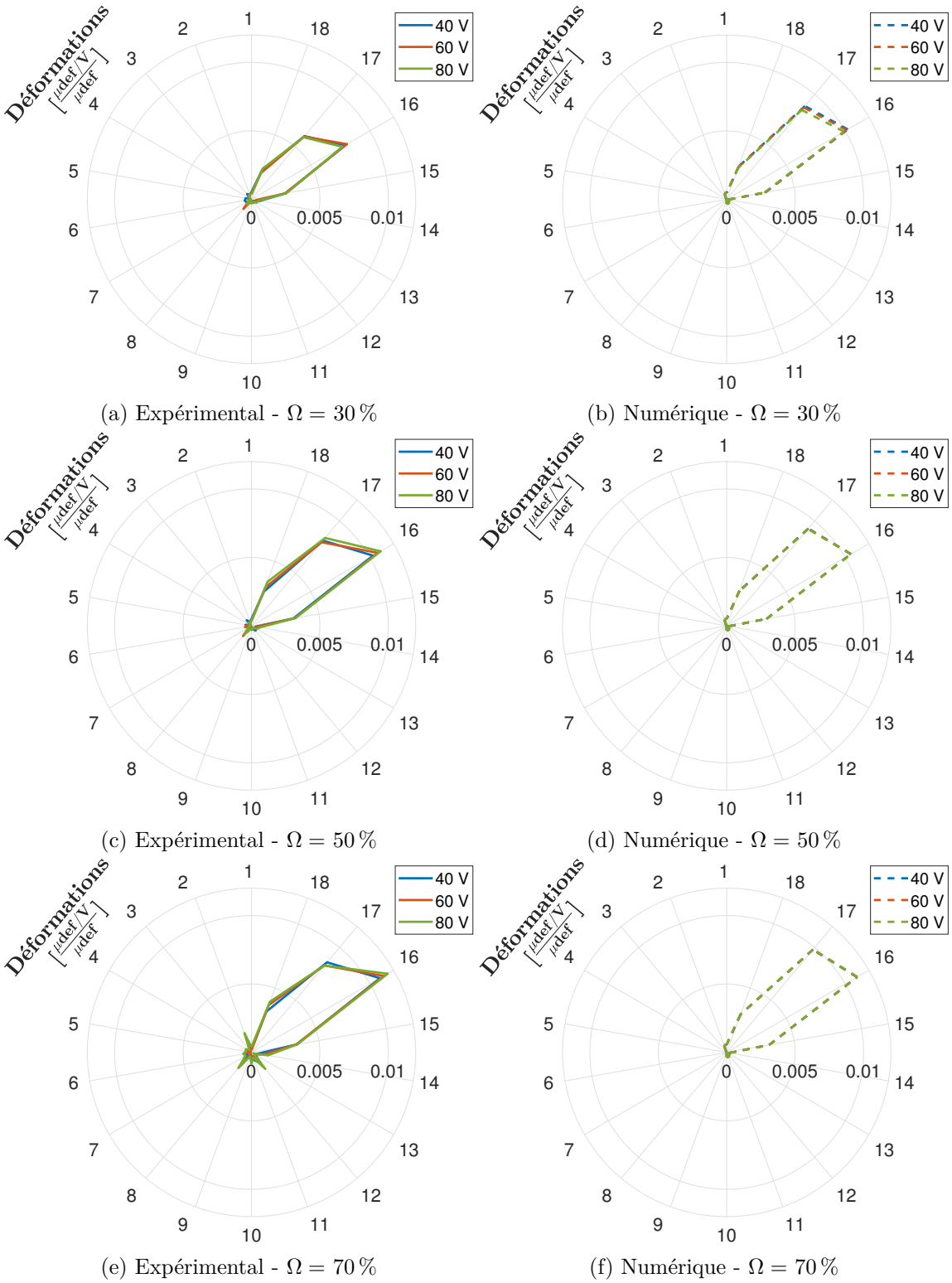


(e) Expérimental - $\Omega = 70\,\%$



(f) Numérique - $\Omega = 70\,\%$

FIGURE D.15 – Comparaison des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques pour plusieurs excitations de l'aube n°16, au voisinage de la famille du premier mode de flexion à différentes vitesses de rotation



(a) Expérimental - $\Omega = 30\,\%$

(b) Numérique - $\Omega = 30\,\%$

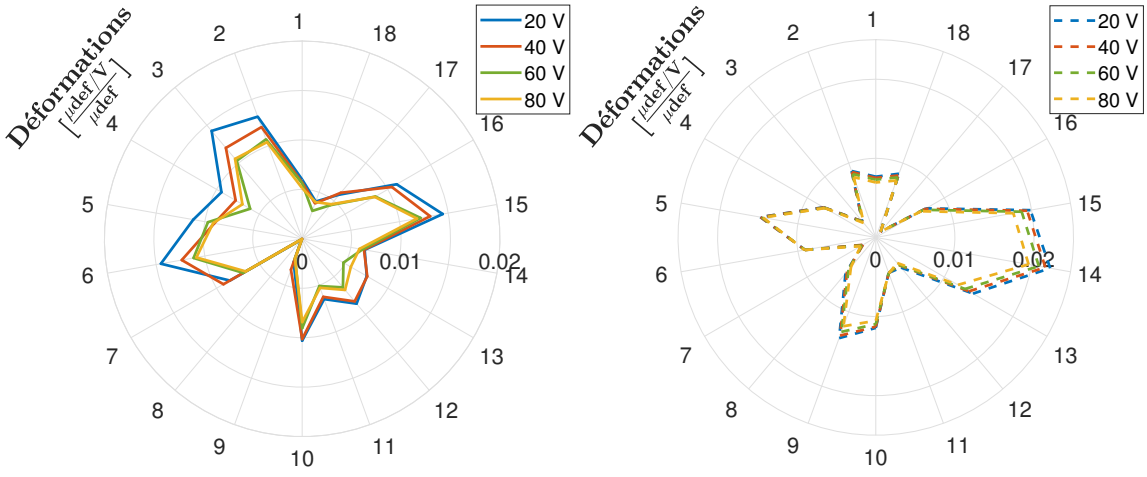
(c) Expérimental - $\Omega = 50\,\%$

(d) Numérique - $\Omega = 50\,\%$

(e) Expérimental - $\Omega = 70\,\%$

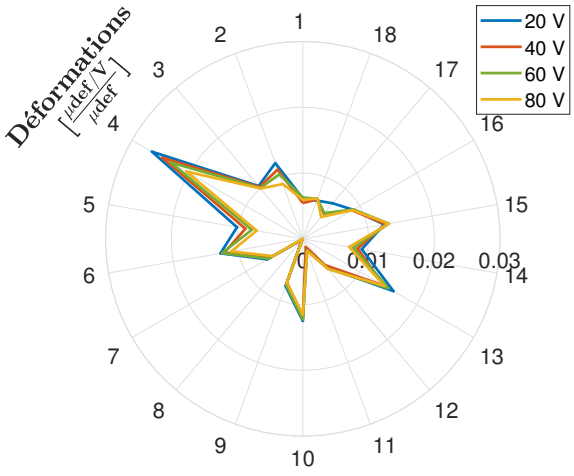
(f) Numérique - $\Omega = 70\,\%$

FIGURE D.16 – Comparaison des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques pour plusieurs excitations de l'aube n°16, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion à différentes vitesses de rotation

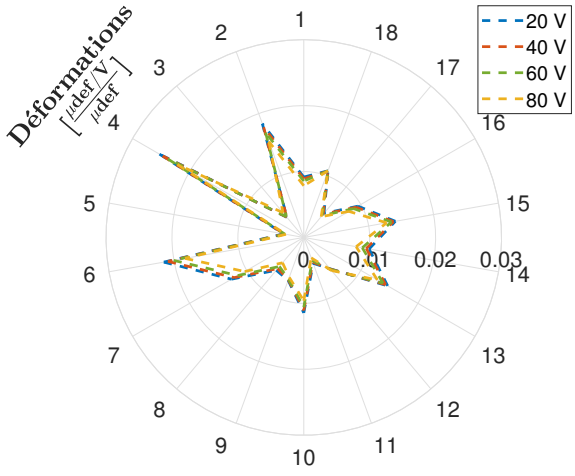


(a) Expérimental - 2D

(b) Numérique - 2D

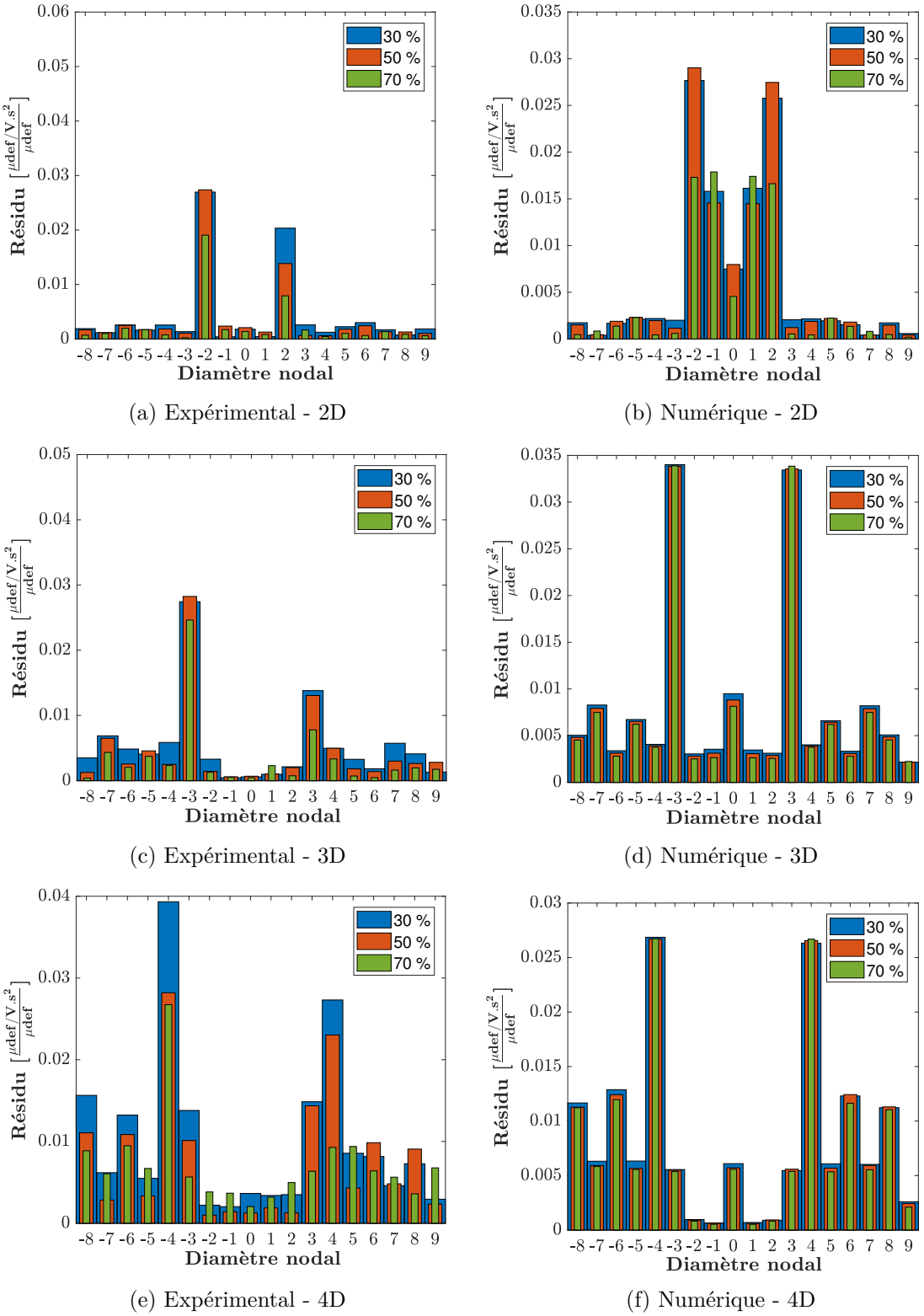


(c) Expérimental - 3D



(d) Numérique - 3D

FIGURE D.17 – Comparaison des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques à la fréquence de résonance du mode principal pour plusieurs excitations à deux et trois diamètres nodaux, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion à $\Omega = 30\,\%$



(a) Expérimental - 2D

(b) Numérique - 2D

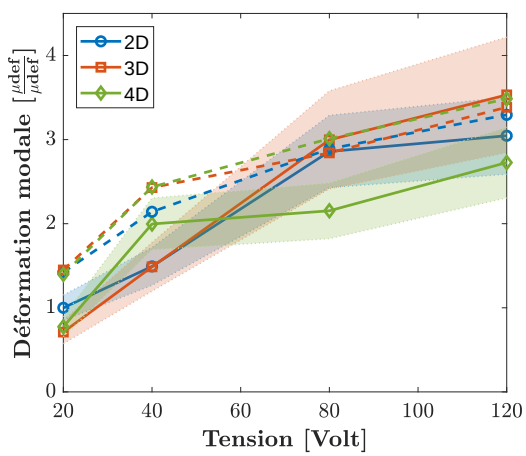
(c) Expérimental - 3D

(d) Numérique - 3D

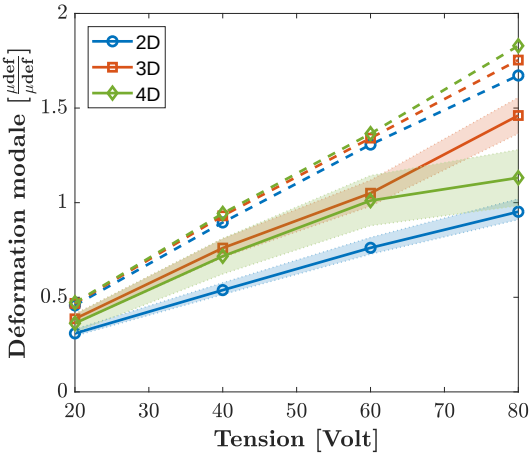
(e) Expérimental - 4D

(f) Numérique - 4D

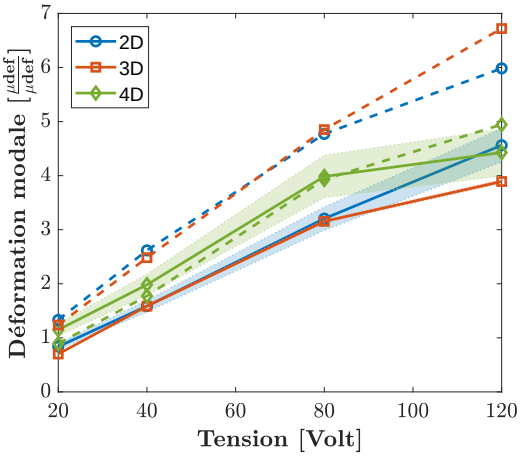
FIGURE D.18 – Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques de plusieurs modes secondaires de la famille du deuxième mode de flexion pour $v = 20\,\mathrm{V}$ et différentes vitesses de rotation



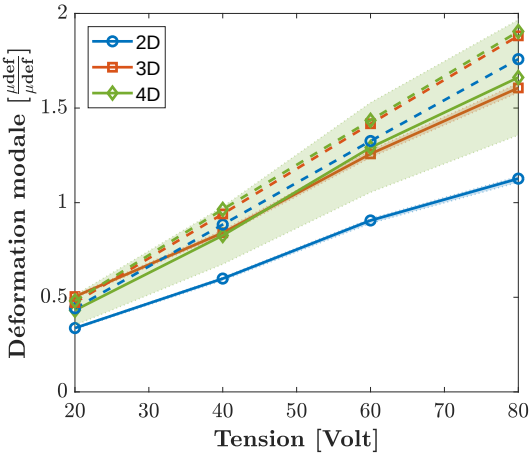
(a) 1F - $\Omega = 30\,\%$



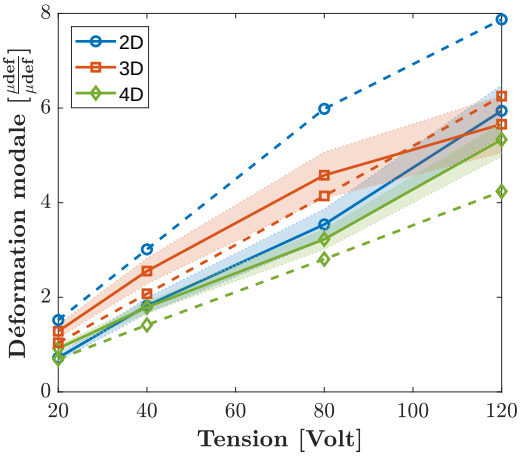
(b) 2F - $\Omega = 30\,\%$



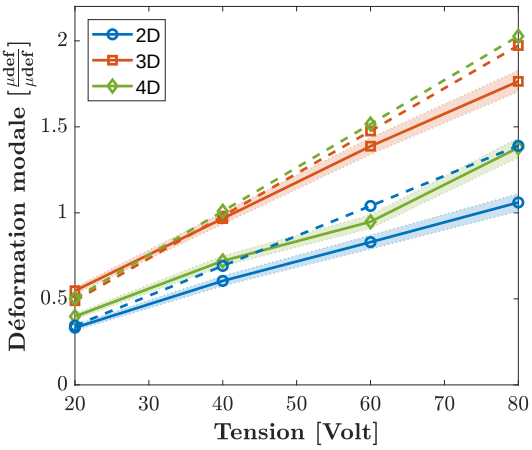
(c) 1F - $\Omega = 50\,\%$



(d) 2F - $\Omega = 50\,\%$

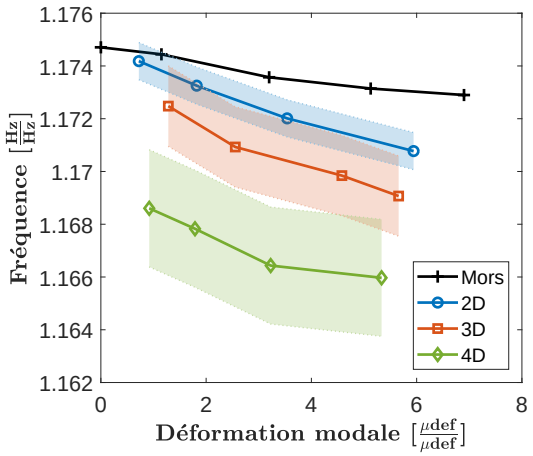


(e) 1F - $\Omega = 70\,\%$

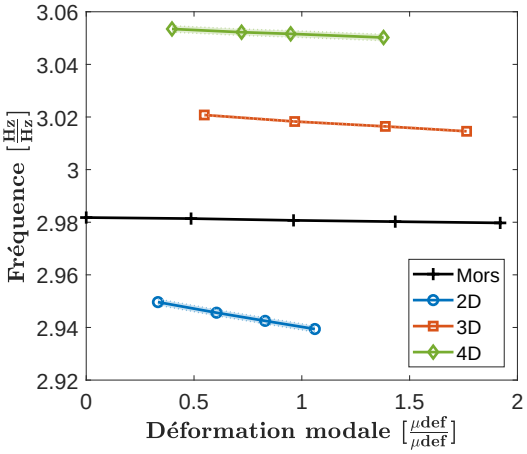


(f) 2F - $\Omega = 70\,\%$

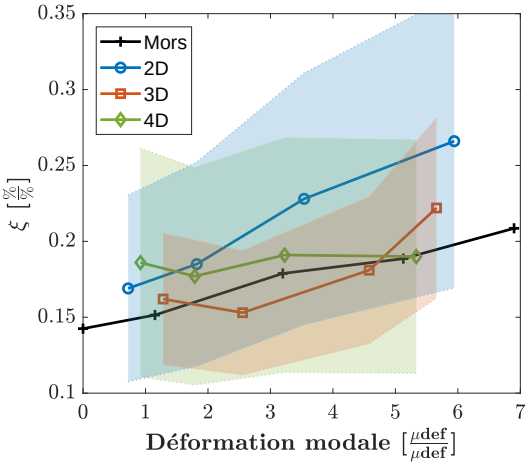
FIGURE D.19 – Comparaison des évolutions expérimentales (—) et numériques (- -) de la déformation modale de la famille du premier et du deuxième mode de flexion en fonction de la tension d'excitation



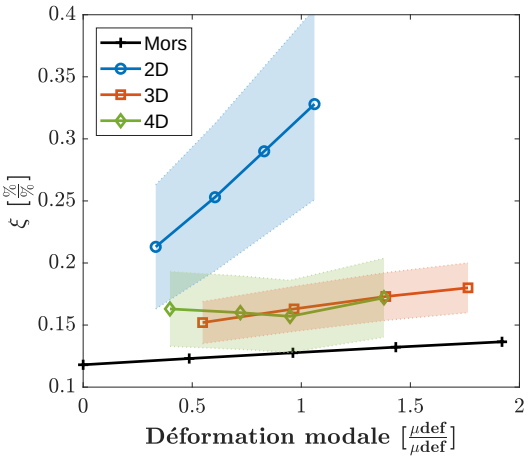
(a) 1F - Fréquence propre



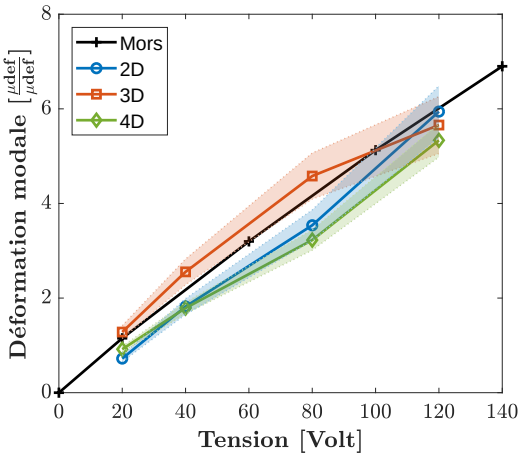
(b) 2F - Fréquence propre



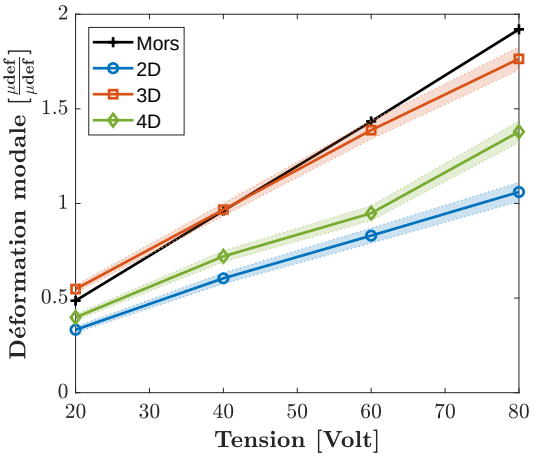
(c) 1F - Taux d'amortissement



(d) 2F - Taux d'amortissement



(e) 1F - Amplitude de déformation



(f) 2F - Amplitude de déformation

FIGURE D.20 – Comparaison des évolutions des paramètres modaux de la famille du premier et du deuxième mode de flexion, identifiés lors des essais sur mors et en rotation à $\Omega = 70\,\%$

Table des figures

I.1 Différences de conception entre turbopropulseurs et turboréacteurs 6
I.2 Schéma d'un turboréacteur double-corps double-flux 7
I.3 Vue en coupe du LEAP-1A 8
I.4 Schéma d'un étage de compresseur 8
I.5 Description d'un secteur de soufflante 9
I.6 Soufflante à corde étroite comparée à une soufflante à large corde 10
I.7 Technologies de soufflantes présente et future 12
I.8 Configurations d'un système continu 14
I.9 Définition des conditions aux limites et du chargement du problème d'élasticité de la structure 15
I.10 Lois de contact 21
I.11 Lois de frottement 22
I.12 Géométrie du modèle numérique de la soufflante 23
I.13 Représentation de la partition d'un secteur d'un système cyclique 26
I.14 Déformées modales non-dégénérées du premier mode de flexion 29
I.15 Déformées du premier mode de flexion dégénéré à deux diamètres nodaux . . 29
I.16 Facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage aléatoire 31
I.17 Diagramme fréquences / diamètres théorique de la soufflante étudiée 35
I.18 Diagramme de Campbell théorique de la soufflante du banc PHARE#1 . . . 36
I.19 Diagramme zigzag de la soufflante du banc PHARE#1 36
I.20 Courbe de Wöhler 37
I.21 Diagramme de Haigh 38

II.1 Procédure de Newton-Raphson 46
II.2 Procédure d'alternance temps-fréquence 49
II.3 Principaux prédicteurs 52
II.4 Principaux correcteurs 53
II.5 Mode normal non-linéaire de Rosenberg 57
II.6 Modèle illustratif à deux degrés de liberté 64
II.7 Oscillateur représentatif de l'aube encastrée 65
II.8 Système représentatif de l'aube libre 65
II.9 Évaluation des coefficients polynomiaux 66
II.10 Loi non-linéaire de frottement sec régularisée 67
II.11 Réponses forcées du modèle illustratif 68
II.12 Comparatif des réponses forcées du système linéarisé et du système non-linéaire pour $g = 70\,\mathrm{N}$ 69
II.13 Comparatif des réponses forcées du système linéarisé et du système non-linéaire pour $g = 8\,\mathrm{N}$ 70
II.14 Évolution de la fréquence propre du mode complexe non-linéaire du modèle illustratif 71

II.15 Superposition de l'évolution de la fréquence propre du mode complexe non-linéaire et des réponses forcées du modèle illustratif . . . 72
II.16 Évolution des paramètres modaux en fonction de l'amplitude du second degré de liberté . . . 72

III.1 Erreurs induites par la méthode de Galerkine . . . 78
III.2 Sous-structuration d'une roue aubagée et son secteur fondamental . . . 80
III.3 Logigramme de la méthode de synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée 90
III.4 Comparatif des réponses forcées évaluées au moyen de la HBM et de la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée . . . 91
III.5 Comparatif des réponses forcées comprenant deux résonances voisines évaluées au moyen de la HBM et de la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée . . . 92
III.6 Logigramme de la CNCMS . . . 99
III.7 Comparatif des réponses forcées comprenant deux résonnances voisines évaluées au moyen de la HBM, de la synthèse modale non-linéaire de la réponse forcée et de la CNCMS . . . 100
III.8 Comparatif des réponses forcées d'un système désaccordé évaluées au moyen de la HBM et de la CNCMS . . . 100
III.9 Rapport entre le temps de calcul de la HBM et de la CNCMS pour plusieurs amplitudes d'excitation . . . 101
III.10 Comparatif des réponses forcées évaluées au moyen de la CNCMS avec et sans réduction par modes d'interface . . . 102

IV.1 Cellule élémentaire d'un matériau céramique PZT . . . 107
IV.2 Courbes caractéristiques d'un cycle de polarisation piézoélectrique . . . 109
IV.3 États de polarisation d'un élément piézoélectrique . . . 109
IV.4 Mécanismes piézoélectriques classiques . . . 110
IV.5 Définition des conditions aux limites et du chargement d'une structure élastique munie de deux éléments piézoélectriques . . . 113
IV.6 Schéma d'un patch piézoélectrique . . . 117
IV.7 Géométrie du modèle numérique d'un secteur {aube+disque} de soufflante équipé de patchs piézoélectriques . . . 119
IV.8 Comparatif des réponses forcées du premier mode de flexion évaluées au moyen d'une résolution couplée et d'une résolution avec condensation . . . 120
IV.9 Comparatif des réponses forcées du deuxième mode de flexion évaluées au moyen d'une résolution couplée et d'une résolution avec condensation . . . 120

V.1 Illustration du montage expérimental . . . 125
V.2 Schéma en coupe du système de serrage du mors . . . 126
V.3 Instrumentation sur une aube composite . . . 127
V.4 Architecture du montage expérimental . . . 128
V.5 Positionnement des patchs piézoélectriques sur une aube composite . . . 131
V.6 Répartition des déformations équivalentes de Von Mises . . . 133
V.7 Fonction de réponse fréquentielle du courant du premier mode de flexion . . . 134
V.8 Fonction de réponse fréquentielle du courant du deuxième mode de flexion . . . 134
V.9 Évolution des paramètres électriques des patchs piézoélectriques en fonction de la tension d'excitation . . . 135
V.10 Réponse de la structure {aube+mors} à une excitation large bande . . . 137
V.11 Influence du nombre de cycles d'attente sur la réponse forcée . . . 138

V.12 Réponses forcées au voisinage de la résonance du premier mode de flexion de la structure {aube+mors} . . . 139
V.13 Comparatif entre les réponses forcées avant et après démontage puis remontage du dispositif expérimental . . . 139
V.14 Méthode à $-3\,\mathrm{dB}$ . . . 140
V.15 Superposition d'une fonction de réponse fréquentielle expérimentale issue d'un essai large bande et de son lissage . . . 143
V.16 Superposition des fonctions de réponse fréquentielle expérimentales issues d'essais en sinus balayé par échelon, au voisinage de la résonance du premier mode de flexion et de ses lissages . . . 144
V.17 Superposition des fonctions de réponse fréquentielle expérimentales issues d'essais en sinus balayé par échelon, au voisinage de la résonance du deuxième mode de flexion et de ses lissages . . . 145
V.18 Modèle numérique de l'ensemble {aube+mors} . . . 148
V.19 Efforts appliqués à l'aube par la cale . . . 149
V.20 Cartes du déplacement total superposées sur les déformées modales de la structure {aube+mors} . . . 150
V.21 Champ de précontrainte du pied d'aube . . . 153
V.22 Fonctions de réponse fréquentielle numérique non-linéaire du courant au voisinage de la résonance premier mode de flexion . . . 155
V.23 Comparaison entre les réponses forcées évaluées au moyen de la méthode de l'équilibrage harmonique et de la synthèse modale non-linéaire . . . 159
V.24 Post-traitement des résultats numériques liés au vibromètre laser et aux jauges 161
V.25 Étude d'influence sur la discrétisation de l'épaisseur des actionneurs piézoélectriques . . . 163
V.26 Étude d'influence sur le nombre de nœuds de contact retenus pour $\mu = 0.1$ . . 164
V.27 Étude d'influence sur le nombre de nœuds de contact retenus pour $\mu = 0.05$. 165
V.28 Évolution du temps de calcul en fonction du nombre de nœuds de contact retenus . . . 166
V.29 Influence de la discrétisation temporelle de la période de la méthode d'alternance temps / fréquence . . . 167
V.30 Influence de la discrétisation temporelle de la période de la méthode d'alternance temps / fréquence sur la résonance de la réponse forcée . . . 167
V.31 Étude d'influence sur le nombre d'harmoniques retenus . . . 168
V.32 Étude d'influence sur l'effort normal de précharge . . . 174
V.33 Étude d'influence sur le coefficient de frottement pour le premier mode de flexion . . . 175
V.34 Agrandissement de l'étude d'influence sur le coefficient de frottement pour le premier mode de flexion autour de la zone de décollement . . . 175
V.35 Étude d'influence sur le coefficient de frottement pour le deuxième mode de flexion . . . 176
V.36 Agrandissement de l'étude d'influence sur le coefficient de frottement pour le deuxième mode de flexion autour de la zone de décollement . . . 176
V.37 Comparaison de l'évolution des paramètres modaux expérimentaux et numériques pour le premier mode de flexion en fonction de l'amplitude du déplacement en tête d'aube . . . 178
V.38 Comparaison de l'évolution des paramètres modaux expérimentaux et numériques pour le deuxième mode de flexion en fonction de l'amplitude du déplacement en tête d'aube . . . 178
V.39 Évaluation de l'évolution du coefficient de friction μ en fonction de l'amplitude de déplacement en tête d'aube . . . 179

V.40 Comparaison de l'évolution des déplacements et des déformations expérimentaux et numériques à la résonance pour le premier mode de flexion en fonction de la tension d'excitation . . . 181
V.41 Comparaison de l'évolution des déplacements et des déformations expérimentaux et numériques à la résonance pour le deuxième mode de flexion en fonction de la tension d'excitation . . . 182

VI.1 Vue en coupe du banc d'essais PHARE#1 . . . 187
VI.2 Illustrations du banc d'essais PHARE#1 . . . 188
VI.3 Soufflante installée dans le banc d'essais PHARE#1 . . . 190
VI.4 Architecture des systèmes d'acquisition et d'excitation de la soufflante en rotation . . . 192
VI.5 Cartographie de la température de la soufflante sous-vide . . . 194
VI.6 Représentations d'une excitation co-rotative à deux diamètres nodaux . . . 197
VI.7 Influence du nombre de cycles d'attente sur la réponse forcée de l'aube présentant la plus forte amplitude de déformation . . . 203
VI.8 Analyse modale de la fonction de réponse fréquentielle de l'aube n°12 de l'essai traité en figure D.7 . . . 206
VI.9 Superposition des fonctions de réponse fréquentielle expérimentale et lissée de l'aube n°2 de la figure D.9 pour la famille du premier mode de flexion . . . 207
VI.10 Évolution des conditions expérimentales du banc PHARE#1 . . . 209
VI.11 Modèles numériques de la soufflante et du secteur {aube+disque} munis des actionneurs piézoélectriques . . . 215
VI.12 Cartes du déplacement total superposées sur les déformées modales de la soufflante tracées pour le deuxième diamètre nodal . . . 216
VI.13 Champ de précontrainte du secteur {aube+disque} . . . 218
VI.14 Influence du désaccordage fréquentiel des aubes sur les réponses forcées linéaires et non-linéaires, au voisinage de la famille du premier mode de flexion 225
VI.15 Influence du désaccordage fréquentiel des aubes sur les décompositions à diamètres non-linéaires au voisinage de la famille du premier mode de flexion . . . 226
VI.16 Évolution du facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage résultant des réponses forcées linéaire et non-linéire de la figure VI.14 . . . 227
VI.17 Influence de la tension d'excitation sur les réponses forcées linéaires et non-linéaires de la soufflante désaccordée au voisinage de la famille du premier mode de flexion . . . 229
VI.18 Influence du désaccordage du taux d'amortissement et de l'excitation des aubes sur les réponses forcées linéaires et non-linéaires au voisinage de la famille du premier mode de flexion . . . 230
VI.19 Influence du désaccordage du taux d'amortissement et de l'excitation des aubes sur les décompositions à diamètres non-linéaires au voisinage de la famille du premier mode de flexion au voisinage de la famille du premier mode de flexion . . . 230
VI.20 Comparaison entre les diagrammes de Campbell linéaires expérimentaux et numériques . . . 232
VI.21 Comparaison entre les diagrammes fréquences / diamètres linéaires expérimentaux et numériques . . . 234
VI.22 Comparaison entre les évolutions des taux d'amortissement linéaires expérimentaux et numériques en fonction de la vitesse de rotation . . . 235
VI.23 Comparaison entre les évolutions des taux d'amortissement linéaires expérimentaux et numériques en fonction du diamètre nodal . . . 237

VI.24 Étude d'influence sur le coefficient de frottement pour la famille du premier mode de flexion à différentes vitesses de rotation 239
VI.25 Étude d'influence sur le coefficient de frottement pour la famille du deuxième mode de flexion à différentes vitesses de rotation 240
VI.26 Évolution du coefficient de frottement μ en fonction de la vitesse de rotation pour la famille du premier mode de flexion 242
VI.27 Décompositions à diamètres issues de simulations linéaires d'une soufflante accordée au voisinage des familles des deux premiers modes de flexion 244
VI.28 Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques au voisinage de la famille du premier mode de flexion 245
VI.29 Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion 246
VI.30 Répartitions spatiales des amplitudes vibratoires issues de simulations linéaires d'une soufflante accordée pour plusieurs excitations de l'aube n°16, au voisinage des familles des deux premiers modes de flexion 248
VI.31 Comparaison des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques au voisinage de la famille du premier mode de flexion à plusieurs vitesses de rotation 249
VI.32 Comparaison des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion . 250
VI.33 Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques pour plusieurs excitations à diamètres, au voisinage de la famille du premier mode de flexion 254
VI.34 Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques pour plusieurs excitations à diamètres, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion 255
VI.35 Comparaison des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques à la fréquence de résonance du mode principal pour une excitation à deux et trois diamètres nodaux, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion à plusieurs vitesses de rotation 258
VI.36 Comparaison des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques à la fréquence de résonance du mode principal et du mode secondaire pour une excitation à deux diamètres nodaux, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion 259
VI.37 Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques de plusieurs modes principaux de la famille du deuxième mode de flexion pour différentes vitesses de rotation 261
VI.38 Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques des modes principaux et secondaires identifiés à partir d'une réponse à une excitation à deux diamètres, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion pour différentes vitesses de rotation 264
VI.39 Comparaison des évolutions expérimentales et numériques des paramètres modaux de la famille du premier mode de flexion en fonction de la déformation modale 267
VI.40 Comparaison des évolutions expérimentales et numériques des paramètres modaux de la famille du deuxième mode de flexion en fonction de la déformation modale 268
VI.41 Comparaison des évolutions expérimentales et numériques de la fréquence propre du système linéaire sous-jacent des modes principaux et secondaires de la famille du deuxième mode de flexion en fonction de la vitesse de rotation 270

VI.42 Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques pour une excitation contra-rotative puis co-rotative du deuxième diamètre nodal, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion 271

A.1 Logigramme de la DLFT 303

C.1 Caractéristiques techniques des jauges de déformations 316
C.2 Caractéristiques matériaux des actionneurs piézoélectriques 317
C.3 Dessin technique d'un actionneur piézoélectrique 318

D.1 Vue de l'onglet de contrôle du programme d'acquisition et d'excitation 320
D.2 Vue de l'onglet d'affichage des réponses forcées du programme d'acquisition et d'excitation lors d'une rotation sans excitation 321
D.3 Représentations d'une excitation contra-rotative à deux diamètres nodaux . . 322
D.4 Représentations d'une excitation stationnaire à deux diamètres nodaux 323
D.5 Comparatif entre les réponses forcées en amplitude d'un essai productif et son essai de répétabilité validé 324
D.6 Comparatif entre les réponses forcées en amplitude d'un essai productif et son essai de répétabilité invalidé 325
D.7 Comparatif entre les fonctions de réponse fréquentielle expérimentales, lissées avec correction extra-bande et lissées sans correction extra-bande en amplitude pour la famille du deuxième mode de flexion 326
D.8 Comparatif entre les fonctions de réponse fréquentielle expérimentales, lissées avec correction extra-bande et lissées sans correction extra-bande en phase pour la famille du deuxième mode de flexion 327
D.9 Comparatif entre les fonctions de réponse fréquentielle expérimentales et lissées en amplitude pour la famille du premier mode de flexion 328
D.10 Comparatif entre les fonctions de réponse fréquentielle expérimentales et lissées en phase pour la famille du premier mode de flexion 329
D.11 Effets des perturbations électromagnétiques sur la famille du premier mode de flexion pour la jauge n°1 et la jauge n°2 330
D.12 Effets des perturbations électromagnétiques sur la famille du deuxième mode de flexion pour la jauge n°1 et la jauge n°2 331
D.13 Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques pour plusieurs excitations de l'aube 16, au voisinage de la famille du premier mode de flexion 332
D.14 Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques au voisinage de la famille du premier mode de flexion à plusieurs vitesses de rotation 333
D.15 Comparaison des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques pour plusieurs excitations de l'aube n°16, au voisinage de la famille du premier mode de flexion à différentes vitesses de rotation 334
D.16 Comparaison des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques pour plusieurs excitations de l'aube n°16, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion à différentes vitesses de rotation . . . 335
D.17 Comparaison des répartitions spatiales des amplitudes vibratoires expérimentales et numériques à la fréquence de résonance du mode principal pour plusieurs excitations à deux et trois diamètres nodaux, au voisinage de la famille du deuxième mode de flexion 336

D.18 Comparaison des décompositions à diamètres expérimentales et numériques de plusieurs modes secondaires de la famille du deuxième mode de flexion pour différentes vitesses de rotation 337
D.19 Comparaison des évolutions expérimentales et numériques de la déformation modale de la famille du premier et du deuxième mode de flexion en fonction de la tension d'excitation 338
D.20 Comparaison des évolutions des paramètres modaux de la famille du premier et du deuxième mode de flexion, identifiés lors des essais sur mors et en rotation 339

Liste des tableaux

II.1 Caractéristiques de la partie linéaire du modèle illustratif 67
II.2 Caractéristiques de la partie non-linéaire du modèle illustratif 67

V.1 Incertitudes de mesure en amplitude de la chaîne d'acquisition du vibromètre laser 146
V.2 Incertitudes de mesure en amplitude de la chaîne d'acquisition des jauges . . 146
V.3 Incertitudes de mesure en amplitude du retour de l'excitation 146
V.4 Relations de passage entre les tenseurs 151
V.5 Récapitulatif des dimensions du modèle numérique 152
V.6 Récapitulatif des gains du processus de réduction 160
V.7 Récapitulatif du temps de calcul du processus de réduction 160
V.8 Comparaison des paramètres modaux expérimentaux et numériques considérés linéaires 171
V.9 Comparaison des déplacements et des déformations expérimentaux et numériques considérés linéaires à la résonance 172

VI.1 Récapitulatif des paramètres expérimentaux étudiés 201
VI.2 Paramètres des signaux d'excitation employés 204
VI.3 Incertitudes de mesure en amplitude de la chaîne d'acquisition des jauges . . 213
VI.4 Incertitudes de mesure en amplitude du retour de l'excitation 213
VI.5 Récapitulatif des dimensions du modèle numérique 216
VI.6 Récapitulatif des gains du processus de réduction 223
VI.7 Récapitulatif du temps de calcul du processus de réduction 223
VI.8 Légendes des figures VI.24 et VI.25 241

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

M. G. KERSCHEN
Professeur - Université de Liège - Bât. B52/3 Laboratoire de structures et systèmes spatiaux
Quartier Polytech 1 - allée de la découverte 9 - 4000 Liège 1 - Belgique

et de

M. J-F. DEU
Professeur - CNAM - Laboratoire LMSSC, Mécanique - case courrier 2D6R10
292 rue Saint-Martin - 75141 Paris cedex 03

Monsieur MABILIA Antoine

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 8 octobre 2020

P/Le directeur de l'E.C.L.
Le directeur des Etudes

ECOLE CENTRALE DE LYON
Service Scolarité
ECULLY

Grégory VIAL