



HAL
open science

Dynamique des étoiles massives proches de la rotation critique

Damien Gagnier

► **To cite this version:**

Damien Gagnier. Dynamique des étoiles massives proches de la rotation critique. Astrophysique [astro-ph]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2020. Français. NNT : 2020TOU30159 . tel-03156069

HAL Id: tel-03156069

<https://theses.hal.science/tel-03156069>

Submitted on 2 Mar 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

FACULTÉ DES SCIENCES
Département d'astronomie

THÈSE

en vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*
Cotutelle internationale avec *l'Université de Genève*

Présentée et Soutenue le *30/09/2020* par :

Damien Gagnier

Dynamique des étoiles massives proches de la rotation critique

JURY

FRANÇOIS LIGNIÈRES
ISABELLE BARAFFE
CORINNE CHARBONNEL
SYLVIA EKSTRÖM
THIERRY FOGLIZZO
RAPHAEL HIRSCHI
FABRICE MARTINS
MICHEL RIEUTORD

Directeur de recherche
Professeure
Professeure associée
Collaboratrice scientifique
Directeur de recherche
Professeur
Chargé de recherche
Professeur

Président du jury
Examinatrice
Co-directrice de thèse
Examinatrice
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Directeur de thèse

École doctorale et spécialité :

SDU2E : Astrophysique, Sciences de l'Espace, Planétologie

Unité de Recherche :

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (UMR 5277)

Directeur(s) de Thèse :

Michel RIEUTORD et Corinne CHARBONNEL

Rapporteurs :

Thierry FOGLIZZO et Raphael HIRSCHI

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Département d'astronomie

FACULTÉ DES SCIENCES
Professeure Corinne Charbonnel

UNIVERSITÉ DE TOULOUSE
Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie

FACULTÉ DES SCIENCES
Professeur Michel Rieutord

Dynamique des étoiles massives proches de la rotation critique

THÈSE

en cotutelle
présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de Docteur ès sciences,
mention astronomie et astrophysique

par

Damien Gagnier

de

Oloron-Sainte-Marie (France)

Thèse N° 5498

GENÈVE

Observatoire Astronomique de l'Université de Genève

2020

Avant-propos

Ce manuscrit est le produit de mes quatre années de thèse sous la direction de Michel Rieutord et de Corinne Charbonnel, en cotutelle entre l’université de Toulouse et l’université de Genève, et porte sur la dynamique des étoiles massives proches de la rotation critique.

Toutes les étoiles sont en rotation et ont une atmosphère en expansion, et ce durant chacune des phases de leur évolution, de leur formation jusqu’à leur fin de vie. Dans certains cas, ces phénomènes contrôlent le cours même de l’évolution, la structure, et la dynamique des étoiles. Pourtant, la rotation des étoiles a longtemps été considérée comme étant d’importance secondaire sur leur évolution séculaire, et l’expansion de leur atmosphère sous forme de vent n’est, à l’heure actuelle, implémentée dans les codes d’évolution stellaire que sous forme de prescriptions plus ou moins réalistes pour les pertes de masse et de moment cinétique associées.

Les étoiles massives, c’est-à-dire les étoiles dont la masse est typiquement supérieure à $7 M_{\odot}$, sont souvent des rotateurs rapides, et l’expansion de leur atmosphère, résultant d’une forte pression de radiation à leur surface, prend la forme d’un vent radiatif qui expulse continûment une grande quantité de masse et de moment cinétique dans le milieu interstellaire. Ces étoiles massives sont donc les candidats idéaux à l’étude de ces deux phénomènes, de la manière dont ils interagissent, et de l’effet de cette interaction sur leur évolution séculaire. Outre le rôle de ces pertes de masse et de moment cinétique sur l’évolution séculaire des étoiles massives en rotation rapide, il est intéressant de questionner l’effet du couplage entre leur vent radiatif et la dynamique de leur enveloppe radiative. Il semble en effet vraisemblable, par le besoin de transporter le moment cinétique de l’intérieur jusqu’à la surface de l’étoile, qu’une circulation méridienne puisse émerger d’une telle perte de moment cinétique, et qu’une rotation différentielle se mette en place pour s’ajuster à cet écoulement méridien.

Dans ce manuscrit, nous chercherons à comprendre l’interaction entre les vents radiatifs et la rotation des étoiles massives, et essaierons de déterminer les effets de ces vents sur la dynamique de leur enveloppe radiative. Nous présenterons les résultats obtenus durant cette thèse à travers les différents chapitres, tout en introduisant les concepts nécessaires à leur compréhension et, lorsque nous l’estimerons utile, en présentant quelques développements analytiques.

Foreword

This thesis is the product of my four years of PhD directed by Michel Rieutord and Corinne Charbonnel, in joint supervision between the University of Toulouse and the University of Geneva, and focuses on the dynamics of massive stars at rotation rates close to criticality.

All stars are rotating and have an expanding atmosphere during each phase of their evolution, from their formation to the end of their life. In some cases, these phenomena control the very course of evolution, the structure, and the dynamics of stars. However, the rotation of stars has long been considered to be of secondary importance on their secular evolution, and, at this time, the expansion of their atmosphere under the form of winds is only implemented as more or less realistic prescriptions for mass and angular momentum losses in stellar evolution codes.

Massive stars, that is stars more massive than typically $7M_{\odot}$, are often fast rotators, and the expansion of their atmosphere, resulting from strong radiation pressure at their surface, takes the form of a radiation-driven wind that continuously expels large amount of mass and angular momentum into the interstellar medium. These massive stars are therefore ideal candidates for the study of these two phenomena, the way they interact, and the effects of such interaction on their secular evolution. In addition to the role of these mass and angular momentum losses on the secular evolution of rapidly rotating massive stars, it is interesting to consider the effects of the coupling between their radiation-driven wind and the dynamics of their radiative envelope. It seems indeed likely, by the need to transport the angular momentum from the interior to the surface of the star, that a meridional circulation could arise from such an angular momentum loss, and that a differential rotation would simply adjust to this meridional flow.

In this thesis, we shall investigate the interaction between the radiation-driven winds and the rotation of massive stars, and determine the effects of these winds on the dynamics of their radiative envelope. Our results will be detailed in the various chapters, the required concepts for their understanding will be introduced, and, when considered useful, some analytical developments will be presented.

Table des matières

Avant-propos	iii
Foreword	iv
Table des figures	xxi
Liste des tableaux	xxiii
1 Introduction	1
2 Vitesse angulaire critique et limite $\Omega\Gamma$	7
2.1 Définitions et introduction de la problématique	7
2.2 Une première clarification du débat	9
2.3 Quelques remarques	13
2.4 Le modèle ω	15
2.5 Vitesse angulaire critique et limite $\Omega\Gamma$	19
2.5.1 Latitude critique : l'équateur	19
2.5.2 Solution unique pour la vitesse angulaire critique	20
2.5.3 Vitesse angulaire critique d'après le modèle ω	21
2.5.4 En résumé	23
2.6 La limite $\Omega\Gamma$ avec les modèles 2D ESTER	23
2.6.1 Retour sur les observations interférométriques	23
2.6.2 Précision du modèle ω	24
2.6.3 La limite $\Omega\Gamma$ avec les modèles 2D ESTER	26
2.7 Résumé	29
3 Vents radiatifs isotropes	31
3.1 Bref historique	32
3.2 L'accélération radiative	33
3.2.1 Diffusion Thomson de la radiation sur les électrons libres	33
3.2.2 Diffusion sur les raies spectrales	37
3.2.3 La théorie de Sobolev	40
3.2.4 Paramétrisation de l'accélération radiative par CAK	43
3.3 Perte de masse globale à 1D	44
3.4 Correction du disque fini de l'étoile et du degré d'ionisation du vent	47
3.4.1 Correction du disque fini	47

TABLE DES MATIÈRES

3.4.2	Correction du degré d'ionisation du vent	49
3.5	La limite de bi-stabilité	50
3.6	Paramétrisation des paramètres α et k	51
3.7	Résumé	56
4	Vents radiatifs anisotropes	57
4.1	Dépendances latitudinales du flux de masse et de moment cinétique .	57
4.2	Les effets de la rotation sur les taux de perte de masse et de moment cinétique	60
4.3	Observation du saut de bi-stabilité local	63
4.4	Le rôle de la métallicité	65
5	Évolution de la rotation des étoiles de type précoce au cours de la séquence principale	67
5.1	Evolution temporelle et approximation quasi- stationnaire	68
5.2	Evolution à masse et moment cinétique constants	69
5.2.1	Evolution des paramètres stellaires de surface	69
5.2.2	Vitesse angulaire initiale minimale pour atteindre la rotation critique durant la séquence principale	75
5.3	Evolution avec pertes de masse et de moment cinétique	76
5.3.1	Vitesse angulaire à la limite $\Omega\Gamma$	78
5.3.2	Perte de masse sans évolution nucléaire	80
5.3.3	L'exemple d'un modèle 2D de $15 M_{\odot}$ avec $\omega_i = 0.5$	80
5.4	Résumé	88
6	Généralités sur les fluides en rotation	91
6.1	Les équations du mouvement	91
6.2	L'écoulement géostrophique	97
6.3	Couches limites horizontales et circulation d'Ekman	100
6.3.1	Couche limite plane	100
6.3.2	Couche limite sphérique	103
6.4	Couches verticales de cisaillement	109
6.4.1	La couche d'épaisseur $E^{1/3}$	111
6.4.2	La couche d'épaisseur $E^{1/4}$	113
6.4.3	La couche d'épaisseur $E^{2/7}$	114
6.5	Instabilités hydrodynamiques liées à la rotation	115
6.5.1	Instabilité de cisaillement	116
6.6	Stabilité des couches limites horizontales et verticales	124
6.6.1	Stabilité des couches d'Ekman	124
6.6.2	Stabilité des couches limites verticales	125

TABLE DES MATIÈRES

6.7	Résumé	126
7	Écoulement de spin-down généré par un vent radiatif	129
7.1	Formulation générale	130
7.2	Méthode numérique	133
7.2.1	Méthodes pseudo-spectrales	133
7.2.2	Projection des équations sur la base des harmoniques sphériques	135
7.2.3	Schéma temporel	138
7.3	L'écoulement incompressible	138
7.3.1	L'écoulement transitoire	139
7.3.2	L'écoulement stationnaire	142
7.3.3	En résumé	162
7.4	Le rôle de la stratification thermique	162
7.4.1	Formulation du problème	162
7.4.2	Couches limites horizontales	164
7.4.3	Régime pertinent pour les étoiles massives	167
7.4.4	Régime de stratification asymptotiquement faible	168
7.4.5	Régime de stratification asymptotiquement forte	171
7.4.6	En résumé	175
7.5	L'écoulement dans une enveloppe polytropicque	176
7.5.1	Formulation du problème	176
7.5.2	L'écoulement transitoire	177
7.5.3	L'écoulement stationnaire	178
7.5.4	En résumé	179
7.6	Transport d'un scalaire passif	180
7.7	Résumé	194
8	Conclusions et perspectives	195
Annexes		
Annexe A Le code ESTER		
A.1	Les équations à résoudre	201
A.2	Schéma temporel simplifié	204
A.3	Méthode numérique	207
A.3.1	Coordonnées sphéroïdales	208
A.3.2	Algorithme de Newton	210
A.3.3	Contrôle qualité	212
Annexe B Les instabilités centrifuges et baroclines		
B.1	Instabilité centrifuge	215
B.2	Instabilité barocline	219
B.2.1	Instabilité de Solberg-Høiland	219

TABLE DES MATIÈRES

B.2.2	Instabilité GSF	221
B.2.3	Instabilité ABCD	222
Annexe C Tests de convergence et de dissipation		223
C.1	Test de convergence	223
C.2	Test de dissipation	223
Annexe D L'écoulement de Taylor-Couette sphérique		227
Annexe E Approximation linéaire		233
E.1	Condition de validité	233
E.2	Application aux étoiles massives	236
Annexe F Force d'Euler		239
Annexe G Analyse de la couche limite d'Ekman		241
Annexe H Formulaire		243
H.1	Les harmoniques sphériques	243
H.1.1	Relations de composition	246
H.1.2	Opérateurs vectoriels	246
H.1.3	Autres relations utiles	248
H.2	Transformations de Legendre	252
H.3	L'approximation de Tchebyshev	254
H.3.1	Les polynômes de Tchebyshev	254
H.3.2	Transformation de Tchebyshev	255
H.3.3	Quelques opérations	256
Publications		261
Références		267

Table des figures

2.1	Coefficient d'assombrissement gravitationnel β en fonction de l'aplatissement de l'étoile ϵ . Trait plein : β calculé à partir du modèle ω (Espinosa Lara & Rieutord, 2011). Croix : modèles ESTER à la ZAMS. Triangles : modèles ESTER lorsqu'il reste 50% de l'abondance initiale en hydrogène dans le coeur convectif. Les rectangles représentent les valeurs de β et les erreurs correspondantes obtenues par observations interférométriques de plusieurs étoiles en rotation possédant une enveloppe radiative : Altair (Monnier <i>et al.</i> , 2007), α Cephei (Zhao <i>et al.</i> , 2009), β Cassiopeiae, et α Leonis (Che <i>et al.</i> , 2011). Source : Espinosa Lara & Rieutord (2011).	15
2.2	Variations latitudinales de F_ω à la surface pour différentes valeurs de $\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_K$. F_ω est une fonction croissante de la colatitude, en particulier lorsque ω approche l'unité.	20
2.3	Gravité totale, gravité effective et accélération radiative à l'équateur et sans dimension en fonction de ω , pour $\Gamma_{\text{eq}} = 0.5$. La gravité totale équatoriale possède deux zéros ; le premier correspond à $\Gamma_\Omega(\pi/2) = 1$, le second à $g_{\text{eff}}(\pi/2) = 0$. Source : Gagnier <i>et al.</i> (2019a).	22
2.4	Comparaison entre l'assombrissement gravitationnel calculé à partir du modèle ω (trait plein), de la loi de von Zeipel (1924) (tirets), et à partir des modèles ESTER à 2D (croix). Gauche : modèle d'étoile de $3 M_\odot$ à la ZAMS avec $\omega = 0.7$. Centre : même modèle mais avec une abondance en hydrogène dans le cœur convectif égale à la moitié de celle dans l'enveloppe radiative. Droite : comme au centre, mais pour $\omega = 0.9$. Source : Espinosa Lara & Rieutord (2011).	24
2.5	Différence relative entre le flux radiatif prédit par le modèle ω et celui calculé par les modèles ESTER 2D, en fonction de la colatitude, pour un modèle de $15 M_\odot$ (gauche) et un modèle de $40 M_\odot$ (droite), à la ZAMS et pour différentes valeurs de ω . Le trait noir correspond au modèle de $15 M_\odot$ avec $\omega = 0.9$ et $X_{\text{core}}/X_0 = 0.5$. X_0 est la fraction de masse initiale en hydrogène à la ZAMS. La valeur minimale de chaque courbe correspond à un changement de signe de la quantité $F_{\text{ESTER}} - F$. Source : Gagnier <i>et al.</i> (2019a).	25

TABLE DES FIGURES

2.6	Paramètre d'Eddington local $\Gamma_{\Omega}(\theta)$ en fonction de la colatitude pour plusieurs fractions de la vitesse angulaire képlérienne et pour les modèles ESTER de $15 M_{\odot}$ (gauche) et de $40 M_{\odot}$ (droite) à la ZAMS, avec $Z = 0.02$. La zone grisée correspond à une région où la rotation est supercritique. Source : Gagnier et al. (2019a)	26
2.7	Paramètre d'Eddington $\Gamma(\theta)$ en fonction de la colatitude pour plusieurs fractions de la vitesse angulaire képlérienne et pour les modèles ESTER de $15 M_{\odot}$ (gauche) et de $40 M_{\odot}$ (droite) à la ZAMS, avec $Z = 0.02$. Source : Gagnier et al. (2019a)	28
2.8	Γ_{eq} et $\Gamma_{\Omega}(\pi/2)$ en fonction de la fraction massique d'hydrogène dans le cœur convectif rapportée à sa valeur initiale, pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ ayant une vitesse angulaire à la ZAMS $\omega_i = 0.5$. La courbe noire correspond à l'évolution de Γ_{eq} pour un modèle sans rotation. Source : Gagnier et al. (2019a)	29
3.1	Gauche : profil de raie P Cygni consistant en une large raie d'émission et en une raie d'absorption un peu plus étroite et décalée vers bleu. Droite : Schéma de la formation d'une raie P Cygni. l'atmosphère stellaire en expansion est photo-ionisée par l'étoile et produit des raies d'émission élargies par l'accélération du vent, et l'absorption dans la région du vent entre l'étoile et l'observateur produit la raie d'absorption décalée vers le bleu. Reproduit à partir de la Fig. 10.2 de Robinson (2007)	33
3.2	Image de la nébuleuse en émission Sh2-308 autour de l'étoile Wolf-Rayet WR 6, formée de la superposition des images à bandes étroites $H\alpha$ (rouge) et [OIII] (bleu). Source : Jason Jennings	34
3.3	Diagramme vitesse-rayon correspondant aux solutions de l'équation du mouvement pour un vent isotherme et stationnaire résultant de la diffusion Thomson de la radiation sur les électrons libres. Seules deux solutions sont transsoniques, l'une correspond à un vent, l'autre à une accréation.	36
3.4	Paramètre α du multiplicateur de force en fonction de la température effective T_{eff} d'après (3.68) (avec l'aimable autorisation de J. Puls). Les traits noirs situent les valeurs de α imposées. Source : Gagnier et al. (2019a)	53
3.5	Paramètre k du multiplicateur de force calibré en fonction de la température effective T_{eff} , pour plusieurs modèles ESTER à 1D dont la masse est comprise entre 5 et $60 M_{\odot}$, à la ZAMS, et pour $Z = 0.02$. Le trait rouge correspond au fit correspondant, c'est-à-dire $k'(T_{\text{eff}})$. Source : Gagnier et al. (2019a)	55

TABLE DES FIGURES

4.1	Flux de masse \dot{m} (gauche) et flux de moment cinétique $\dot{\ell}$ (droite) en surface en fonction de la colatitude θ , pour un modèle ESTER à 2D de $15 M_{\odot}$ à la ZAMS, avec $Z = 0.02$, et pour plusieurs rapports de vitesse angulaire ω . Pour ce modèle, la limite de bi-stabilité est atteinte à l'équateur pour $\omega \gtrsim 0.85$, induisant ainsi un fort flux de masse et de moment cinétique entre la colatitude critique θ_{jump} et l'équateur. Source : Gagnier et al. (2019a)	59
4.2	Variations du flux de masse \dot{m} avec la colatitude θ , pour un modèle ESTER à 2D de $8 M_{\odot}$ à la ZAMS, avec $Z = 0.02$, et pour plusieurs valeurs de ω . Pour ce modèle, la limite de bi-stabilité est atteinte à l'équateur pour $\omega \lesssim 0.1$, induisant ainsi une forte augmentation du flux de masse dans la région équatoriale.	60
4.3	Taux de perte de masse global \dot{M} (en $M_{\odot} \cdot \text{yr}^{-1}$, à gauche) et échelle de temps de perte de moment cinétique $T_{\mathcal{L}}$ (en années, à droite) en fonction du rapport des vitesses angulaires ω , pour une étoile de $15 M_{\odot}$ à la ZAMS et avec $Z = 0.02$. Les traits en pointillés montrent la même quantité mais avec une valeur de α' réduite de 1%; afin de montrer la sensibilité de \dot{M} et $T_{\mathcal{L}}$ à ses variations. Source : Gagnier et al. (2019a)	62
4.4	Taux de perte de masse global \dot{M} (en $M_{\odot} \cdot \text{yr}^{-1}$) pour un modèle ESTER de $15 M_{\odot}$ (en rouge) et un modèle ESTER de $10 M_{\odot}$ (en vert), en fonction de la température effective moyenne correspondante \bar{T}_{eff} , à la ZAMS, avec $Z = 0.02$, et pour $\omega \in [0, 1[$. Les flèches indiquent le sens de l'augmentation de ω . Source : Gagnier et al. (2019a)	63
4.5	Température effective en fonction de la colatitude pour le modèle ESTER 2D présenté tableau 4.2. Le trait noir pointillé indique la position de la température du saut de bi-stabilité. Le modèle considéré est donc en régime TWR.	65
5.1	Rayon équatorial et rayon polaire en fonction de la fraction massique d'hydrogène dans le cœur convectif pour un modèle ESTER de $5 M_{\odot}$ dont la rotation initiale est telle que $\omega_i = 0.5$, pour $Z = 0.02$ et $Z = 10^{-3}$. L'évolution du rayon dans le cas sans rotation est représentée en traits pleins et pointillés noirs, respectivement pour $Z = 0.02$ et 10^{-3} . Source : Gagnier et al. (2019b)	70
5.2	Evolution du rapport entre vitesse angulaire équatoriale et vitesse angulaire képlérienne $\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_{\text{K}}$, pour les mêmes modèles que ceux représentés en Fig. 5.1. Source : Gagnier et al. (2019b)	71

TABLE DES FIGURES

5.3	Evolution du rapport $A = I/(MR^2)$ en fonction du rayon stellaire pour une étoile de $5 M_{\odot}$ tournant initialement à $\omega_i = 0.1$ et avec $Z = 0.02$. Le “fit” approximatif est représenté par la courbe noire et donne $A \propto R^{-0.76}$. Source : Gagnier et al. (2019b)	72
5.4	Evolution de l’aplatissement de la surface $\epsilon = 1 - R_p/R_{\text{eq}}$, pour les mêmes modèles que ceux représentés en Fig. 5.1. Source : Gagnier et al. (2019b)	73
5.5	Evolution de la vitesse équatoriale et de la vitesse angulaire équatoriale, pour un modèle ESTER de $5 M_{\odot}$ dont la rotation initiale est telle que $\omega_i = 0.5$, et avec $Z = 0.02$. Source : Gagnier et al. (2019b)	74
5.6	Valeurs du rapport des vitesses angulaires à la ZAMS ω_i nécessaire pour atteindre la quasi-criticité ($\omega = 0.9$) à différentes valeurs de la fraction massique d’hydrogène dans le cœur convectif, en fonction de la masse du modèle M/M_{\odot} , pour $Z = 0.02$, et sans perte de masse. Source : Gagnier et al. (2019b)	76
5.7	Même chose que la Fig. 5.6, pour $X_{\text{core},c}/X_0 = 0.9$ et 0.7 , et pour $Z = 0.02$ et 10^{-3} . Source : Gagnier et al. (2019b)	77
5.8	Evolution de Γ_{eq} et de $\Gamma_{\Omega}(\pi/2)$ pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ avec une rotation initiale de $\omega_i = 0.5$, avec et sans perte de masse (traits pleins et pointillés, respectivement). La courbe noire correspond à l’évolution de Γ_{eq} dans le cas où $\omega_i = 0$. Les deux traits verticaux délimitent les deux phases du régime TWR (voir Sect. 5.3.3). Source : Gagnier et al. (2019b)	79
5.9	Rayon équatorial et rayon polaire en fonction de la masse totale pour un modèle ESTER 2D de masse initiale $M = 15 M_{\odot}$, $Z = 0.02$, pour un rapport de vitesses angulaires initial $\omega_i = 0.5$, et perdant une masse totale de $\Delta M \simeq 0.4 M_{\odot}$. Source : Gagnier et al. (2019b)	81
5.10	Vitesse angulaire à l’équateur (rouge) et vitesse angulaire képlérienne à l’équateur (noir) en fonction de la fraction massique d’hydrogène dans le cœur convectif X_{core}/X_0 pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ avec une vitesse de rotation initiale $\omega_i = 0.5$, avec et sans perte de masse (traits pleins et pointillés, respectivement). Source : Gagnier et al. (2019b)	82

TABLE DES FIGURES

- 5.11 Gauche : évolution du taux de perte de masse \dot{M} (en $M_{\odot} \cdot \text{yr}^{-1}$) en fonction de la fraction massique d'hydrogène dans le cœur convectif X_{core}/X_0 pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ avec $Z = 0.02$, et $\omega_i = 0.5$. La première ligne verticale pointillée marque le moment où l'étoile atteint un régime TWR, et la seconde indique la transition entre la Phase 1 et la Phase 2. Droite : Même chose, mais pour le rapport des vitesses angulaires $\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_{\text{K}}$. La courbe rouge pointillée correspond à l'évolution de ω dans le cas où la masse et le moment cinétique sont maintenus constants au cours de la séquence principale. Source : Gagnier *et al.* (2019b). 83
- 5.12 Même chose qu'en Fig. 5.11, mais pour l'évolution de la température effective à l'équateur $T_{\text{eff,eq}}$ (en K). La courbe noire représente l'évolution de la température du saut de bi-stabilité. Source : Gagnier *et al.* (2019b). 84
- 5.13 Evolution du taux de perte de masse \dot{M} en fonction de la température effective moyenne de l'étoile \bar{T}_{eff} pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ avec $Z = 0.02$, et $\omega_i = 0.5$ (en rouge). L'étoile évolue de la gauche vers la droite, avec une température effective moyenne de $\sim 30\text{kK}$ à la ZAMS, et de $\bar{T}_{\text{eff}} \simeq 22\text{kK}$ à la fin de la séquence principale (TAMS). La courbe noire correspond au cas sans rotation pour lequel le taux de perte de masse a été calculé avec la prescription de Vink *et al.* (2001). La première ligne verticale noire et pointillée indique le moment où l'étoile entre en régime TWR, et la seconde indique la transition entre les phases 1 et 2 du TWR. Source : Gagnier *et al.* (2019b). 85
- 5.14 Instantanés de la distribution surfacique du flux de masse local \dot{m} en unités de flux de masse polaire à la ZAMS $\dot{m}_{p,\text{ZAMS}}$ (gauche), et de la distribution surfacique du flux de moment cinétique local $\dot{\ell}$ en unités du flux de moment cinétique maximal à la ZAMS $\dot{\ell}_{\text{max,ZAMS}}$ (droite), pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ avec $Z = 0.02$, et $\omega_i = 0.5$, et à 4 temps différents correspondant à : $X_c \simeq 1, 0.3, 0.03$ et 0. Le premier (première ligne) correspond à la ZAMS, le second correspond à la fin de la Phase 1 du TWR, le troisième à la fin de la Phase 2, et le dernier instantané (dernière ligne) correspond à la toute fin de la séquence principale. L'étoile est vue avec une inclinaison $i = 70^\circ$. Source : Gagnier *et al.* (2019b). 86

TABLE DES FIGURES

5.15	Évolution de la fraction de surface de l'étoile où la température effective est inférieure à $T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$, pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ avec $Z = 0.02$ et pour $\omega_i = 0.5$. La première ligne noire pointillée marque le moment de l'évolution où l'étoile atteint un régime TWR, la seconde marque la transition entre la Phase 1 et la Phase 2. Source : Gagnier et al. (2019b)	87
5.16	Vitesse angulaire à l'équateur en unités de vitesse angulaire képlérienne équatoriale $\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_K$ en fonction de la fraction massique d'hydrogène dans le cœur convectif X_{core}/X_0 , pour différentes masses initiales, pour $Z = 0.02$, et pour $\omega_i = 0.3$ (gauche) et $\omega_i = 0.7$ (droite). Source : Gagnier et al. (2019b)	88
6.1	Rotation différentielle radiale dans dans les couches externes du Soleil. Source : NSO	92
6.2	Gauche : vue schématique du système considéré. Droite : même chose mais vu du dessus. Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ (ou $\Delta \phi \rightarrow 0$), la différence entre les deux vecteurs unitaires $ \Delta \mathbf{e}_i $ peut être assimilée à la corde du cercle de rayon $r = \sin \theta$ reliant leur deux extrémités.	94
6.3	Vue schématique du système considéré : la coquille interne de rayon ηR a pour vitesse angulaire Ω_c tandis que la coquille externe de rayon R a pour vitesse angulaire Ω_s	98
6.4	Spirale d'Ekman. La condition de non-glissement implique que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ à $\zeta = 0$, et l'imperméabilité de la paroi impose $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ loin de la couche d'Ekman ($\zeta \rightarrow \infty$).	102
6.5	Vue schématique du système considéré. δ_E est l'épaisseur de la couche limite d'Ekman. Le sens de l'écoulement de pompage d'Ekman dépend du signe de $\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_0)$. Si cette quantité est positive, alors le phénomène est appelé <i>downwelling</i> et le fluide entre dans la couche d'Ekman. Si son signe est négatif, c'est l' <i>upwelling</i> et le fluide sort de la couche d'Ekman.	103
6.6	Schéma illustrant le sens de l'écoulement de pompage d'Ekman en fonction de la nature cyclonique ou anticyclonique de la contrainte horizontale générée par un vent à la surface des océans dans l'hémisphère nord. Reproduit à partir de la Fig. 2 de Beesley et al. (2008)	104
6.7	Vitesse verticale d'Ekman (en mètres par an) résultant du vent à la surface des océans. L'écoulement est dirigé vers la surface (<i>upwelling</i>) dans les zones vertes, et vers le fond (<i>downwelling</i>) dans les zones marrons. Source : Beesley et al. (2008)	105

TABLE DES FIGURES

6.8	Vue schématique des couches d’Ekman dont l’épaisseur n’est bien sûr pas à l’échelle, et de la singularité équatoriale. L’écoulement d’upwelling (pompage) et de downwelling (suction) est indiqué, respectivement pour la couche limite externe et interne, dans le cas où la vitesse azimutale dans le référentiel en rotation avec la coquille externe est de signe négatif.	109
6.9	Représentation des couches de Stewartson imbriquées et de la couche d’Ekman interne, ainsi que leur épaisseur, dans une configuration de coquilles sphériques concentriques pour des conditions aux limites de non-glissement au niveau de la coquille externe (gauche, Marcotte et al., 2016), et dans une configuration de cylindres concentriques (droite, basé sur la figure 2.17 de Greenspan, 1968).	110
6.10	Exemples de profils verticaux laminaires \bar{v}_x entre deux parois parallèles et imperméables.	118
6.11	Comparaison entre le modèle de Zahn pour le transport turbulent et celui de Garaud et al. (2017) . Les symboles correspondent aux résultats des simulations numériques directes de Garaud et al. (2017) à différents nombres de Reynolds $Re_C = S_C H^2 / \nu$. Source : Garaud et al. (2017)	123
6.12	Gauche : profils de vitesses horizontales dans une couche d’Ekman en géométrie cartésienne (voir Sect. 6.3.1). Droite : visualisation expérimentale des modes de classe A et B, associés à l’instabilité des couche d’Ekman, source : Faller & Kaylor (1966)	125
6.13	Photographie, prise au dessus du cylindre, des vortex associés à l’instabilité de cisaillement non-axisymétrique de la couche de Stewartson d’épaisseur $O(E^{1/4})$ dans le cas où la vitesse angulaire du disque est légèrement plus élevée que celle du cylindre. Source : Hide & Titman (1967)	127
7.1	Vue schématique du système. La coquille interne de rayon ηR a pour vitesse angulaire Ω_c , et la coquille externe, de rayon R , tourne à la vitesse angulaire $\Omega_s(\theta)$. La rotation différentielle est générée par une contrainte prescrite, tangente à la coquille externe. Les traits pointillés correspondent aux bords du cylindre \mathcal{C} tangent à la coquille interne. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	131
7.2	Différence relative entre le couple appliqué sur la coquille externe et le couple exercé par le fluide sur la coquille interne stationnaire, en fonction du temps réduit Et . L’état stationnaire est atteint sur une échelle de temps $O(E^{-1})$, c’est-à-dire sur une échelle de temps visqueuse, dans le régime asymptotique des petits nombres d’Ekman. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	140

TABLE DES FIGURES

7.3	Amplitude de la fonction de courant mesurée à $s = \eta$ et $z = 1/2$ et normalisée par sa valeur à l'état stationnaire $\psi_h/\psi_{h,st}$, en fonction du temps réduit Et pour plusieurs valeurs du nombre d'Ekman. Nous constatons que la couche de Stewartson apparaît sur une échelle de temps courte devant l'échelle de temps visqueuse. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	142
7.4	Vitesse angulaire normalisée en fonction du rayon cylindre s pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$, et pour plusieurs valeur de r . La superpositions de toutes les courbes indique un écoulement quasi-géostrophique. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	143
7.5	Vue méridienne de la fonction de courant ψ (gauche) et de la rotation différentielle dans le repère en rotation avec la coquille interne $\delta\Omega = (\Omega - \Omega_c)/2\Omega_c$ (droite), pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, et $A = 0.01$. Nous distinguons trois régions : une fine couche de cisaillement, tangente à la coquille interne séparant deux régions où l'amplitude de la circulation méridienne est faible. La région dans le cylindre tangent à la coquille interne \mathcal{C} est en co-rotation avec cette dernière, et la région hors de \mathcal{C} est en rotation différentielle cylindrique. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	144
7.6	Vitesse angulaire dans le repère en rotation en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour divers nombres Ekman, $r = 0.7$, $\eta = 0.1$ (gauche) et $\eta = 0.35$ (droite), et $A = 0.01$. La ligne en pointillées noire correspond à la solution analytique issue de l'analyse de la couche limite d'Ekman (voir Eq. 7.55). Source : Gagnier & Rieutord (2020)	149
7.7	ψE^{-1} le long d'un méridien à $r = 0.7$ en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour divers nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, et $A = 0.01$. L'échelle prédite $O(E)$ pour l'amplitude de l'écoulement secondaire est vérifiée en dehors de la couche de Stewartson, qui est située à $s = 0.35$. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	150
7.8	Vue méridienne de la fonction de courant et des lignes de courant obtenues à partir des simulations numériques (gauche), et de l'analyse de la couche limite (droite), pour $E = 10^{-8}$, $\eta = 0.1$, et $A = 0.01$. Le cylindre tangent \mathcal{C} ainsi que la couche de reconnexion adjacente sont masqués. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	151
7.9	Vitesse dans la direction z (gauche) et vitesse angulaire dans le repère en rotation (droite) en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s dans le cylindre tangent \mathcal{C} , pour $E = 10^{-7}$ et $E = 10^{-8}$, $r = 0.7$, et $\eta = 0.35$. Les lignes noires pointillées correspondent aux solutions analytiques géostrophiques (7.70) et (7.71).	152

TABLE DES FIGURES

7.10	Vue méridienne de deux lignes de courant choisies arbitrairement, à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre tangent \mathcal{C} . Les flèches indiquent la direction de propagation du fluide le long de ces lignes de courant. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	153
7.11	Gauche : Energie cinétique méridienne totale de l'écoulement stationnaire en fonction du nombre d'Ekman, pour $A = 0.01$ et $\eta = 0.1$. La ligne pointillée noire correspond au "fit" dans le régime asymptotique ($E \lesssim 10^{-9}$), et donne $E_{k,tot} \propto E^{1.074}$. Droite : $E_{k,tot} E^{-1.074}$ en fonction du temps réduit Et , pour divers nombres Ekman, $A = 0.01$, et $\eta = 0.35$. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	154
7.12	Gauche : $u_\phi E^{-2/7}$ en fonction de la coordonnée radiale cylindrique étirée $(s - \eta)E^{-2/7}$ pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, $z = 0.7$, et $A = 0.01$. La ligne noire pointillée correspond à la solution géostrophique analytique (7.86). Droite : vitesse angulaire dans le repère en rotation en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s . Les lignes pointillées correspondent aux solutions analytiques (7.70) et (7.86). Source : Gagnier & Rieutord (2020)	158
7.13	$\psi E^{-5/7}$ en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, $z = 0.7$, et $A = 0.01$. Les lignes pointillées correspondent aux solution géostrophiques analytiques (7.90). Source : Gagnier & Rieutord (2020)	159
7.14	$u_s E^{-2/3}$ (gauche) et $u_z E^{-1/3}$ (droite) en fonction de la coordonnée radiale cylindrique étirée $(s - \eta)E^{-1/3}$ pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, $z = 0.7$, et $A = 0.01$. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	160
7.15	$u_s E^{-5/7}$ (gauche) et $u_z E^{-3/7}$ (droite) en fonction de la coordonnée radiale cylindrique étirée $(s - \eta)E^{-2/7}$ pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, $z = 0.7$, et $A = 0.01$. Les lignes noires pointillées correspondent à la solution analytique (7.91). Source : Gagnier & Rieutord (2020)	161
7.16	Vue méridienne de la fonction de courant ψ (gauche) et de la rotation différentielle dans le repère en rotation avec la coquille interne $\delta\Omega = (\Omega - \Omega_c)/(2\Omega_c)$ (droite) pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$, et plusieurs valeurs de λ . Source : Gagnier & Rieutord (2020)	165
7.17	Profils radiaux de Pr et de λ mesurés à l'équateur de modèles stellaires ESTER à deux dimensions, pour une étoile de $15 M_\odot$ à différents rapports de vitesse angulaire ω . Le nombre de Prandtl radiatif Pr_{rad} et le paramètre λ correspondant sont représentés en traits pleins, et leurs équivalents turbulents sont représentés en traits pointillés. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	168

TABLE DES FIGURES

7.18	Solution numérique de la durée de la phase transitoire (multipliée par le nombre d'Ekman) $E\tau_t$, en fonction de λ pour $E = 10^{-6}$. Dans les limites fortement et faiblement stratifiées, l'état stationnaire est atteint en un temps de diffusion visqueuse $O(E^{-1})$. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	171
7.19	Profils radiaux de la vitesse angulaire à l'équateur dans le repère en rotation avec la coquille externe $\delta\Omega$, pour $E = 10^{-7}$, et pour plusieurs valeur de λ . La ligne en traits pointillés correspond à la solution solution analytique dans la limite asymptotique $\lambda \gg 1$ (Eq. 7.120). Source : Gagnier & Rieutord (2020)	173
7.20	$u_\theta(\sqrt{\lambda}E)^{-1}$ en fonction de la coordonnée dilatée $(r - \eta)\sqrt{\lambda}$, pour plusieurs valeurs du nombre d'Ekman et du paramètre λ , $\eta = 0.35$, $\theta = \pi/8$, et $A = 0.01$. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	174
7.21	Durée de la phase transitoire (multipliée par le nombre d'Ekman) $E\tau_t$ en fonction du rapport de densité $\rho_s = \rho_{\text{surf}}/\rho_{\text{core}}$ pour des modèles avec $E = 10^{-6}$, pour plusieurs valeurs de ρ_s , $n = 3/2$ et $n = 3$. Les traits pointillés correspondent aux fits de cette durée avec ρ_s . Source : Gagnier & Rieutord (2020)	177
7.22	Vue méridienne de la fonction de courant χ (gauche) et de la rotation différentielle dans le repère en rotation avec la coquille interne $\delta\Omega = (\Omega - \Omega_c)/2\Omega_c$ (droite), pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, $\rho_s = 10^{-4}$, et $A = 0.01$. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	179
7.23	Vitesse angulaire normalisée (gauche) et vitesse angulaire normalisée multipliée par la densité ρ (droite), en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, $\rho_s = 10^{-4}$, $A = 0.01$, et à plusieurs rayons r . Source : Gagnier & Rieutord (2020)	180
7.24	Gauche : χE^{-1} en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour différents nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, $r = 0.7$, $\rho_s = 10^{-4}$, et $A = 0.01$. L'amplitude prédite de l'écoulement méridien d'ordre $O(E)$ est vérifiée hors de la couche de Stewartson. Droite : vue méridienne de la fonction de courant χE^{-1} hors du cylindre tangent \mathcal{C} , pour le modèle avec $E = 10^{-9}$. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	181
7.25	Gauche : $u_z E^{-1}$ en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour différents nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, $r = 0.7$, $\rho_s = 10^{-4}$, et $A = 0.01$. Droite : vue méridienne de la fonction de courant χ dans le cylindre tangent \mathcal{C} et hors de la couche de cisaillement d'épaisseur $O(E^{2/7})$, pour le modèle avec $E = 10^{-9}$. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	182

TABLE DES FIGURES

7.26	Haut : $q_s E^{-2/3}$ (gauche) et $q_z E^{-1/3}$ (droite) en fonction de la coordonnée radiale cylindrique étirée $(s - \eta)E^{-1/3}$ pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, $z = 0.7$, et $A = 0.01$. Bas : $q_s E^{-5/7}$ (gauche) et $q_z E^{-3/7}$ (droite) en fonction de la coordonnée radiale cylindrique étirée $(s - \eta)E^{-2/7}$ pour les mêmes modèles. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	183
7.27	Vue méridienne du scalaire passif et des lignes de courant associées à l'écoulement méridien, pour un modèle avec $E = 10^{-4}$, $Sc = 1$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$ et à différents temps.	186
7.28	Profils latitudinaux du scalaire passif à $r = (1 - \eta)/2$, pour un modèle avec $E = 10^{-4}$, $Sc = 1$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$ et à différents temps. La ligne en traits pointillés indique la position de la tangente à la coquille interne et à l'équateur.	187
7.29	Vue méridienne du scalaire passif et des lignes de courant associées à l'écoulement méridien, pour un modèle avec $E = 10^{-4}$, $Sc = 10^2$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$ et à différents temps. Le champ de vitesses atteint un état stationnaire à $t \simeq 1.5 \cdot 10^4 \Omega_c^{-1}$	188
7.30	Profils latitudinaux du scalaire passif à $r = (1 - \eta)/2$, pour un modèle avec $E = 10^{-4}$, $Sc = 10^2$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$ et à différents temps. La ligne en traits pointillés indique la position de la tangente à la coquille interne et à l'équateur.	189
7.31	Gauche : vue méridienne du scalaire passif et des lignes de courant associées à l'écoulement méridien, pour un modèle avec $E = 10^{-4}$, $Sc = 10^0$, $\eta = 0.35$, $A = 5$ et à $t_* = 2 \cdot 10^2 \Omega_c^{-1}$. Droite : Profils latitudinaux du scalaire passif à $r = (1 - \eta)/2$ à $t_* = 2 \cdot 10^2 \Omega_c^{-1}$ et pour $A = 0.01$ et $A = 5$	190
7.32	Vue méridienne du scalaire passif et des lignes de courant associées à l'écoulement méridien, pour un modèle avec $E = 10^{-7}$, $Sc = 10^0$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$ et à différents temps.	192
7.33	Profils latitudinaux du scalaire passif à $r = (1 - \eta)/2$, pour un modèle avec $E = 10^{-7}$, $Sc = 1$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$ et à différents temps. La ligne en traits pointillés indique la position de la tangente à l'équateur de la coquille interne.	193
A.1	Évolution temporelle de X_{core} pour des modèles de $5 M_\odot$, $Z = 0.02$ (mixture solaire de Grevesse & Noels, 1993) sans rotation ni perte de masse, calculés avec ESTER en utilisant le schéma simplifié pour combustion de l'hydrogène (Eq. A.21) et avec le code de Genève (Ekström, communication privée). Source : Gagnier et al. (2019b)	206

TABLE DES FIGURES

A.2 Spectre 2D de la densité illustrant la convergence spectrale d'un modèle ESTER à 2D de $15 M_{\odot}$ avec $\omega = 0.9$, $N_r = 360$ et $N_{\theta} = 64$, pour les séries de polynômes de Tchebychev (axe vertical) et d'harmoniques sphériques (axe horizontal). Nous notons que la convergence spectrale est plus difficile à atteindre dans les couches les plus superficielles. Celles-ci sont en effet caractérisées par de fortes variations de l'opacité, et sont très déformées par les effets centrifuges, contrairement aux couches les plus internes (Rieutord *et al.*, 2016). 209

A.3 Représentation de la grille de discrétisation : l'étoile est divisée en plusieurs couches : la région externe en blanc est un domaine de vide où seul le potentiel gravitationnel est calculé. Source : ESTER Project. 210

B.1 Vue schématique du système considéré : le cylindre externe de rayon R_2 a pour vitesse angulaire Ω_2 , le cylindre interne de rayon R_1 a pour vitesse angulaire Ω_1 216

B.2 Vue schématique des anneaux concentriques localisés à r_1 et r_2 et d'épaisseur respective dr_1 et dr_2 . La figure de droite correspond au cas où la position des deux anneaux a été permutée. 218

B.3 Illustration de l'instabilité barocline, reproduite à partir de la Fig. 12.7 de Maeder (2009). Tandis que le déplacement d'une particule fluide initialement positionnée au point A, vers le point B est stable, son déplacement vers le point C ne l'est pas. Dans le premier cas elle reprend sa position d'origine, dans le second elle s'en éloigne. 220

C.1 Spectres des coefficients des harmoniques sphériques (gauche) et des polynômes de Chebyshev (droite) pour la composante poloïdale de champ de vitesse (u^l), et pour sa composante toroïdale (w^l). Pour toute valeur de l ou de n , la valeur maximale du coefficient parmi l'autre composante spectrale a été choisie. Le modèle considéré est celui d'un écoulement incompressible décrit en Sect. 7.3, pour $E = 10^{-6}$ 224

D.1 Vue méridienne de la fonction de courant ψ (gauche) et de la rotation différentielle dans le repère en rotation avec la coquille interne $\delta\Omega = (\Omega - \Omega_c)/2\Omega_c$ (droite), pour $E = 10^{-6}$ et $\eta = 0.35$ 229

D.2 Vitesse angulaire (gauche) et fonction de courant (droite) normalisées dans le repère en rotation avec la coquille externe en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, et $r = 0.7$. Les traits noirs pointillés correspondent aux solutions analytiques asymptotiques de Proudman (1956). 230

TABLE DES FIGURES

D.3	Gauche : vitesse angulaire normalisée dans le repère en rotation avec la coquille externe en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, et à différents r . Droite : vitesse angulaire normalisée dans le repère en rotation avec la coquille externe en fonction de la coordonnée radiale cylindrique étirée $(s - \eta)E^{-1/3}$ pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, et $r = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$, et 0.9 . . .	231
D.4	Fonction de courant normalisée dans le repère en rotation avec la coquille externe en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, et à différents r	232
D.5	Ecart à la solution asymptotique de Proudman (1956) pour la vitesse angulaire (gauche) et la fonction de courant (droite) en fonction des coordonnées radiales cylindriques étirées $(s - \eta)E^{-2/7}$ pour $s < \eta$ et $(s - \eta)E^{-1/4}$ pour $s > \eta$, pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, et $r = 0.7$	232
E.1	Vue méridienne du rapport entre la norme euclidienne du terme non-linéaire de l'équation de la vorticité et celle de du rotationnel de l'accélération de Coriolis, pour $A = 0.01$ (gauche) et $A = 1$ (droite), et pour un écoulement incompressible. Source : Gagnier & Rieutord (2020) . .	236
E.2	Amplitude de la contrainte de surface pondérée par la densité de surface $A\rho_s$ résultant du flux sortant de moment cinétique, en fonction de la colatitude, pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ tournant avec une période d'un jour. Source : Gagnier & Rieutord (2020)	238

Liste des tableaux

4.1	Résumé des principaux résultats pour les modèles ESTER 2D d'une étoile de $15 M_{\odot}$ avec $Z = 0.02$ et à la ZAMS. La première colonne indique le rapport entre la vitesse angulaire équatoriale et la vitesse angulaire keplérienne ω , la deuxième colonne donne le rapport entre la vitesse angulaire critique Ω_{eq}/Ω_c , la troisième colonne rapporte le taux de perte de masse global $\log \dot{M}$ et la dernière colonne donne le rapport entre le moment cinétique total et le taux de perte de moment cinétique $\log T_{\mathcal{L}} = \log \mathcal{L}/\dot{\mathcal{L}}$. \dot{M} est en $M_{\odot} \cdot \text{an}^{-1}$ et $T_{\mathcal{L}}$ en années.	64
4.2	Comparaison du modèle 2D ESTER avec les paramètres stellaires de VFTS 285 (Sabín-Sanjulián <i>et al.</i> , 2017; Shepard <i>et al.</i> , 2020). X_{core}/X_0 est le rapport entre la fraction d'hydrogène dans le coeur de l'étoile, et celle dans l'enveloppe. VFTS 285 étant une étoile du LMC, nous choisissons $Z = 0.01$ pour notre modèle ESTER.	66
5.1	Comparaison entre l'échelle de temps d'Eddington-Sweet T_{ES} , l'échelle de temps nucléaire T_{nucl} , et l'échelle de temps de perte de masse T_{ml} pour des étoiles de différentes masses initiales. Ces échelles de temps sont évaluées à la ZAMS avec une vitesse angulaire équatoriale $\Omega_{\text{eq},i} = 0.3 \Omega_K$ et pour $Z = 0.02$, et sont exprimées en années.	69
A.1	Quelques données montrant l'efficacité numérique du code ESTER pour le calcul de modèles d'étoiles de $15 M_{\odot}$ pour différentes valeurs de $\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_K$. N_r est le nombre de points de grille radiaux écrit comme le produit entre le nombre de domaines et le nombre de points par domaine, N_{θ} est le nombre de points de grille latitudinaux. Chaque modèle à 2D est calculé à partir du modèle précédent (par exemple, le modèle avec $\omega = 0.5$ est calculé à partir du modèle avec $\omega = 0.3$), et N_{iter} est le nombre d'itérations nécessaires pour que l'algorithme de Newton converge (voir Sect. A.3.2). La dernière colonne donne, respectivement, le résidu du test du viriel et du test de l'énergie (voir Sect. A.3.3).	208

LISTE DES TABLEAUX

D.1 δ est l'épaisseur de la région où Ω est agéostrophique. λ_1 et λ_2 sont, respectivement, le taux de décroissance exponentielle de la vitesse azimuthale et de la fonction de courant à l'extérieur et à l'intérieur du cylindre tangent \mathcal{C} . La dernière ligne donne le scaling de l'épaisseur de ces couches. 231

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre 1

Introduction

Comme souvent dans l'histoire des sciences, la découverte de la rotation des étoiles sur elles-même, par Frank Schlesinger, fut accidentelle. Travaillant alors à l'observatoire Allegheny à Pittsburgh, il remarqua, en 1909, une variation des vitesses radiales du système binaire δ Librae au cours de leur éclipse, et un an plus tard, fit la même remarque pour l'étoile triple λ Tauri. Il interpréta ces observations comme résultant de la rotation de l'étoile la plus brillante autour d'un axe, entraînant une asymétrie de la vitesse radiale observée juste avant et juste après la mi-éclipse. Bien que depuis, d'énormes progrès aient été faits, à la fois du point de vue théorique et observationnel, sur la structure, la dynamique, et l'évolution des étoiles en rotation, l'essentiel des concepts de base associés aux étoiles en rotation, toujours utilisés aujourd'hui, étaient connus en 1941. Nous pouvons citer, entre autres, les travaux précurseurs de [Milne \(1923\)](#), [von Zeipel \(1924\)](#), [Eddington \(1926\)](#), [Bjerknes *et al.* \(1933\)](#), [Solberg \(1936\)](#), ou encore [Høiland \(1941\)](#), et nous nous référons à [Tassoul \(1978\)](#) pour un résumé des découvertes historiques majeures associées à la rotation stellaire.

La modélisation stellaire rigoureuse et cohérente de tous les phénomènes physiques en jeu est cependant un défi très compliqué à relever, non seulement parce que ces phénomènes font intervenir des échelles spatio-temporelles très variées, mais aussi parce que la rotation brise la symétrie sphérique des étoiles, et qu'elle implique qu'elles sont parcourues par des écoulements à grande échelle qui transportent les éléments chimiques produits par nucléosynthèse dans le cœur de l'étoile, et redistribuent le moment cinétique. A cela s'ajoute une difficulté non moins redoutable, celle de l'interaction de ces écoulements à grande échelle avec la structure même de l'étoile, pouvant résulter en un transport turbulent des éléments chimiques et du moment cinétique, en vertu des nombreuses instabilités hydro- et magnétohydrodynamiques associées à

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

ces interactions. La nature des mécanismes physiques responsables de ce transport, qu'ils soient turbulents ou non, reste, à l'heure actuelle, l'un des problèmes majeurs en physique stellaire. Ce transport peut résulter d'une grande variété de processus physiques tels que les ondes de gravité internes (e.g., Schatzman, 1996; Kumar P. and Quateart E., 1997; Zahn J.-P., Talon S. and Matias J., 1997; Charbonnel & Talon, 2005; Rogers *et al.*, 2013; Lee *et al.*, 2014; Fuller *et al.*, 2014; Edelmann *et al.*, 2019), la circulation méridienne généralement associée à l'état barocline de l'enveloppe radiative des étoiles massives en rotation (e.g., Tassoul & Tassoul, 1982; Chaboyer & Zahn, 1992; Zahn, 1992; Uryu & Eriguchi, 1994, 1995; Maeder & Zahn, 1998; Garaud, 2002; Mathis & Zahn, 2005; Rieutord, 2006*a*; Espinosa Lara & Rieutord, 2013; Rieutord & Beth, 2014; Hypolite & Rieutord, 2014; Hypolite *et al.*, 2018), mais pouvant aussi résulter des écoulements de spin-down et de spin-up associés à une phase de contraction gravitationnelle ou d'expansion (Hypolite & Rieutord, 2014), une perte de masse et de moment cinétique (Friedlander, 1976; Zahn, 1992; Lignieres *et al.*, 2000; Rieutord & Beth, 2014; Gagnier & Rieutord, 2020), ou encore par un freinage magnétique lorsque les couches superficielles sont instables vis-à-vis de la convection thermique (Schatzman, 1962; Mestel, 1968; Pinsonneault *et al.*, 1989; Krishnamurthi *et al.*, 1997; Matt & Pudritz, 2008; Donati & Landstreet, 2009; Matt *et al.*, 2012; Petit *et al.*, 2013; Caballero Navarro *et al.*, 2020) ou lorsqu'un champ magnétique est présent à la surface des étoiles massives (e.g., Ud-Doula *et al.*, 2009; Townsend *et al.*, 2010; Meynet *et al.*, 2011; Petit *et al.*, 2017; Georgy *et al.*, 2017; Keszthelyi *et al.*, 2019, 2020). Ce transport peut aussi résulter de la turbulence induite par l'instabilité de la rotation différentielle vis-à-vis du cisaillement, souvent considérée comme la principale source de transport dans l'enveloppe radiative des étoiles massives (e.g., Howard, 1961; Miles, 1961; Dudis, 1974; Zahn, 1974; Jones, 1977; Zahn, 1992; Lignières *et al.*, 1999; Maeder, 2003; Prat *et al.*, 2016; Garaud *et al.*, 2017; Gagnier & Garaud, 2018; Kulenthirarajah & Garaud, 2018; Mathis *et al.*, 2018), mais d'autres instabilités peuvent bien sûr avoir des effets considérables. En particulier, l'enveloppe des étoiles de petite masse, typiquement inférieure à $1.8 M_{\odot}$ à métallicité solaire, est instable vis-à-vis de la convection thermique. Il est aussi important de mentionner que les champs magnétiques peuvent également jouer un rôle dans la déstabilisation des intérieurs stellaires, soit directement par la flottabilité magnétique ou par leur couplage avec la rotation différentielle, soit par ses interactions avec la convection turbulente (voir Gilman & Fox, 1996; Hughes & Tobias, 2001; Tobias & Hughes, 2004; Plummer *et al.*, 2019, par exemple).

En plus d'être, en général, des rotateurs rapides, les étoiles de type précoce (de types spectraux O, B, A et Wolf-Rayet), sur lesquelles nous nous focaliserons dans ce manuscrit, sont tellement lumineuses que la pression de radiation à leur surface, c'est-à-dire le transfert efficace de quantité de mouvement entre les photons et la matière

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

stellaire, est suffisante pour expulser une partie de leur masse sous forme d'un vent radiatif. Ce vent à la surface des étoiles massives est tel que lorsque le temps est venu pour elles d'exploser en supernova, certaines ont déjà perdu plus de la moitié de leur masse initiale [Maeder \(2009\)](#). Il est donc évident que le vent radiatif joue un rôle crucial, à la fois sur l'évolution séculaire de ces étoiles en influençant considérablement leur tracé évolutif ([Chiosi & Nasi, 1974](#); [Chiosi & Maeder, 1986](#); [Langer, 1998](#); [Vink et al., 2010](#); [Ekström et al., 2012](#); [Gagnier et al., 2019b](#)), mais aussi sur la dynamique de leur enveloppe radiative ([Zahn, 1992](#); [Lignieres et al., 1996, 2000](#); [Lau et al., 2011](#); [Rieutord & Beth, 2014](#); [Gagnier & Rieutord, 2020](#)), et qu'il ajoute une difficulté supplémentaire à leur modélisation. De plus, parce que la rotation rapide de ces étoiles déforme leur surface, elles sont sujettes à un assombrissement gravitationnel ([von Zeipel, 1924](#); [Espinosa Lara & Rieutord, 2011](#); [Zorec et al., 2017](#); [Raynaud et al., 2018](#)), impliquant un vent radiatif anisotrope (e.g [Owocki et al., 1996](#); [Owocki & Gayley, 1997](#); [Pelupessy et al., 2000](#); [Maeder & Meynet, 2000](#); [Georgy et al., 2011](#); [Gagnier et al., 2019a](#)). Enfin, en plus d'influencer l'évolution séculaire et la dynamique des étoiles massives, les vents radiatifs jouent un rôle majeur dans l'évolution du contenu en matière et en énergie du milieu interstellaire, et plus généralement dans l'évolution chimique de l'Univers.

Depuis l'apparition des premiers codes d'évolution stellaire il y a plus de cinquante ans, les étoiles sont très largement modélisées à une seule dimension, permettant ainsi une simplification de la physique à implémenter, en rendant la géométrie du problème purement sphérique. Il est alors possible de considérer une microphysique sophistiquée, et les effets moyens de la rotation. Les caractéristiques de la dynamique des étoiles en rotation sont alors incluses dans les modèles stellaires au moyen de diverses prescriptions et d'hypothèses plus ou moins contraignantes. La principale difficulté est que les écoulements sont essentiellement bidimensionnels et peuvent donc difficilement être intégrés dans un modèle unidimensionnel. Tandis que le transport des éléments chimiques (aussi appelé mélange rotationnel), est toujours modélisé comme un processus purement diffusif (comme justifié par [Chaboyer & Zahn, 1992](#)), le transport de moment cinétique résultant de la turbulence à petite échelle et de l'écoulement méridien à grande échelle dans l'enveloppe radiative des étoiles massives, est quant à lui implémenté comme un processus purement diffusif¹ (par exemple pour les codes suivants : [Kepler](#), [Heger et al. 2000](#) ; STERN, [Yoon & Langer 2005](#) ; MESA, [Paxton et al. 2013](#)), ou comme un processus d'advection-diffusion d'après les prescriptions de [Zahn \(1992\)](#), [Meynet & Maeder \(1997\)](#), et [Maeder & Zahn \(1998\)](#) (utilisées, par exemple, dans les codes suivants : [GENEC](#), [Eggenberger et al. 2008](#) ; [STAREVOL](#),

1. Le traitement de l'advection de moment cinétique comme un processus diffusif est incorrect, et peut conduire à des conclusions erronées (voir [Maeder, 2009](#), par exemple).

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

Decressin *et al.* 2009, Amard *et al.* 2016 ; FRANEC, Chieffi & Limongi 2013 ; CESTAM, Marques *et al.* 2013). Dans ce dernier cas, toutes les quantités bidimensionnelles (vitesse angulaire, densité, pression, température, gravité...), sont moyennées sur les isobares et projetées sur la base des harmoniques sphériques tronquée au degré 2, c'est-à-dire que toute dépendance non radiale est considérée comme une petite perturbation de leur composante purement radiale. Il est donc évident que ces modèles ne peuvent pas reproduire correctement les écoulements très multidimensionnels, caractéristiques des intérieurs stellaires en rotation rapide (Rieutord, 1987), et que le domaine de validité de cette approximation est la rotation lente (Zahn, 1992). Il est cependant difficile de connaître les limites exactes des modèles 1D, c'est-à-dire de déterminer une vitesse de rotation maximale au delà de laquelle cette modélisation n'est plus valide. Dans ce manuscrit, nous nous intéressons aux étoiles massives de type précoce, en rotation suffisamment rapide pour que l'utilisation des hypothèses et approximations des prescriptions unidimensionnelles susmentionnées soit, dans le meilleur des cas, hasardeuse. Enfin, la perte de masse et de moment cinétique par un vent radiatif anisotrope dans l'atmosphère des étoiles massives en rotation, nécessite, elle aussi, un traitement bidimensionnel.

Pour étudier la dynamique et l'évolution des étoiles en rotation rapide, il convient donc d'utiliser des modèles multidimensionnels. Pour des raisons évidentes de complexité accrue, obtenir un modèle à deux dimensions pouvant coupler la dynamique interne d'une étoile en rotation à l'évolution de sa structure chimique, ses phases de contraction gravitationnelle, et sa perte de masse, est une tâche extrêmement difficile. La première étape dans cette direction remonte aux modèles hydrostatiques polytropiques déformés par la force centrifuge de James (1964), et nous nous référons à Rieutord (2006*b*) pour un historique exhaustif du développement des modèles à deux dimensions. L'essentiel des modèles à deux dimensions développés depuis, ne permet cependant pas la représentation simultanée de l'évolution séculaire des étoiles, et de leur dynamique interne à grande échelle. Dans ce contexte, la réalisation des premiers modèles 2D cohérents d'étoiles de type précoce en rotation rapide, élaborés par Espinosa Lara et Rieutord (code ESTER, Espinosa Lara & Rieutord, 2013; Rieutord, 2006*c*; Rieutord *et al.*, 2016), ouvre la voie à l'exploration de l'évolution séculaire de ces rotateurs rapides. Ce code permet en effet de calculer la structure axisymétrique à deux dimensions et les écoulements stationnaires à grande échelle d'une étoile isolée et non-magnétique en rotation. La physique implémentée est réaliste et tient compte de la déformation de l'étoile induite par la rotation. Contrairement aux codes unidimensionnels, cette modélisation bidimensionnelle ne requiert donc pas d'imposer des contraintes sur le profil de rotation différentielle de l'étoile, et des modèles à rotation quasi-critique peuvent ainsi être simulés. A ce jour, la convection de surface n'est pas incluse et les calculs sont donc limités aux étoiles de type précoce, c'est-à-dire

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

aux étoiles ayant une masse supérieure à environ 1.8 masses solaires, cette limite dépendant de la métallicité. L'évolution de la structure chimique de l'étoile due aux réactions nucléaires et aux mécanismes de transport n'est pas non plus incluse, mais peut être simulée en modifiant la fraction d'hydrogène dans le cœur convectif. Nous présentons le code ESTER plus en détails en Annexe A.

L'objectif de ce travail de thèse est multiple : (i) déterminer le rôle de la rotation sur les pertes de masse et de moment cinétique associées aux vents radiatifs des étoiles massives, (ii) comprendre le rôle de ces vents radiatifs sur leur évolution rotationnelle séculaire, et (iii) déterminer les implications de la perte de moment cinétique sur la dynamique de l'enveloppe radiative des étoiles massives. Dans le chapitre 2, nous reconsidérons la question de la vitesse angulaire critique à la lumière des modèles ESTER à 2D, et à l'aide du modèle de flux radiatif de [Espinosa Lara & Rieutord \(2011\)](#). En particulier, nous cherchons à déterminer une expression analytique pour la vitesse angulaire critique des étoiles pour lesquelles l'accélération radiative dans leur atmosphère ne peut pas être négligée. Dans le chapitre 3, nous introduisons le concept d'accélération radiative, présentons une manière simple de la modéliser, et exposons la dérivation d'une prescription pour l'estimation du taux de perte de masse basée sur les théories 1D de [Castor *et al.* \(1975\)](#) et de [Pauldrach *et al.* \(1986\)](#) pour les étoiles sans rotation. Nous proposons ensuite une expression des flux de masse et de moment cinétique locaux à la surface des étoiles en rotation, et étudions les effets de la rotation sur les taux de perte de masse et de moment cinétique, au chapitre 4. Dans le chapitre 5, nous nous concentrons, dans un premier temps, sur l'évolution rotationnelle des étoiles de type précoce, en supposant que les pertes de masse et de moment cinétique sont négligeables, ce qui est certainement valable pour les étoiles de masse intermédiaire jusqu'à $\sim 7 M_{\odot}$ à métallicité solaire ([Abbott, 1982](#)). Dans un second temps, nous considérons l'évolution avec pertes de masse et de moment cinétique associées, c'est-à-dire le cas pertinent à l'évolution des étoiles plus massives. Nous consacrons ensuite le chapitre 6 à une présentation de quelques notions fondamentales sur les fluides en rotation, qui seront utiles à la compréhension du chapitre 7 dans lequel nous étudions l'écoulement de spin-down induit par une contrainte horizontale, c'est-à-dire un modèle simplifié d'écoulements internes résultant du vent radiatif à la surface d'une étoile massive. Enfin, nous présentons nos conclusions ainsi que les perspectives associées aux travaux présentés dans ce manuscrit, au chapitre 8.

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

Chapitre 2

Vitesse angulaire critique et limite $\Omega\Gamma$

L'impact majeur de la rotation sur l'évolution, la structure et la dynamique stellaire, est tel qu'il est nécessaire de clarifier certains concepts physiques de base afin d'éviter les erreurs d'interprétation. L'un d'eux, le concept de vitesse angulaire critique, a fait débat à la fin des années 90, en particulier en ce qui concerne sa dépendance, ou non, vis-à-vis de l'accélération radiative. Avant d'essayer de répondre à cette question, donc de potentiellement clore le débat, il est important de commencer par quelques définitions nécessaires à l'introduction du point de départ de cette théorie, qui lui fait consensus. Les sections 2.3, 2.4, 2.5 et 2.6 sont largement inspirées de Gagnier *et al.* (2019a).

2.1 Définitions et introduction de la problématique

Lorsqu'il s'agit d'étoiles en rotation, la gravité totale à leur surface s'écrit comme la somme de l'accélération gravito-centrifuge, ou gravité effective, et de l'accélération radiative. La première, comme son nom l'indique, est elle-même la somme de deux contributions, celle de la gravité et de l'accélération centrifuge, et s'écrit

$$\mathbf{g}_{\text{eff}} = \mathbf{g}_{\text{grav}} + \mathbf{g}_{\text{rot}} , \quad (2.1)$$

où

$$\mathbf{g}_{\text{grav}} = -\nabla\psi \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_{\text{rot}} = \Omega^2 s \mathbf{e}_s . \quad (2.2)$$

Dans ces équations, ψ est le potentiel gravitationnel, Ω est la vitesse angulaire

CHAPITRE 2. VITESSE ANGULAIRE CRITIQUE ET LIMITE $\Omega\Gamma$

à la surface de l'étoile, et s est la coordonnée radiale cylindrique. En première approximation, la force de gravité peut être décrite en supposant que toute la masse de l'étoile est concentrée en son centre : c'est le modèle dit de Roche, qui simplifie grandement son expression, à savoir

$$\mathbf{g}_{\text{grav}} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{e}_r . \quad (2.3)$$

L'accélération radiative à la surface de l'étoile s'écrit quant à elle

$$\mathbf{g}_{\text{rad}} = \frac{\kappa F}{c}\mathbf{e}_r = \frac{\kappa L}{4\pi R^2 c}\mathbf{e}_r , \quad (2.4)$$

où $\kappa = \mu/\rho$ est le coefficient d'absorption massique, μ est l'opacité, ρ est la densité, F est le flux radiatif, L est la luminosité de l'étoile, et c la vitesse de la lumière. En astrophysique, et par abus de langage, κ est souvent appelé opacité, nous nous plierons à cette convention dans le manuscrit. La criticité, quant à elle, est définie comme $\mathbf{g}_{\text{tot}} = \mathbf{0}$, c'est-à-dire la limite à laquelle l'étoile est marginalement liée gravitationnellement. Bien sûr, en fonction de la masse et de la vitesse de rotation de l'étoile considérée, l'expression de la gravité totale à la surface de l'étoile, $\mathbf{g}_{\text{tot}} = \mathbf{g}_{\text{eff}} + \mathbf{g}_{\text{rad}}$, peut être simplifiée. Il est évident que si l'on considère une étoile sans rotation ou en rotation très lente, l'accélération centrifuge est négligeable à sa surface. Dans ce cas, la gravité totale s'écrit

$$\mathbf{g}_{\text{tot}} = \mathbf{g}_{\text{grav}} + \mathbf{g}_{\text{rad}} , \quad (2.5)$$

et à la criticité, donc lorsque $g_{\text{tot}} = 0$, l'équilibre des forces radiales à la surface de l'étoile sphérique devient

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{\kappa L}{4\pi R^2 c} , \quad (2.6)$$

c'est-à-dire

$$\Gamma = \frac{\kappa L}{4\pi c GM} = 1 . \quad (2.7)$$

Ici, nous avons introduit le paramètre d'Eddington Γ , égal à 1 lorsque la luminosité de l'étoile est celle d'Eddington, c'est-à-dire la valeur maximale de la luminosité telle que l'enveloppe stellaire est en équilibre hydrostatique (Eddington, 1926). Cette limite est appelée limite Γ .

Si l'on considère maintenant le cas où l'accélération radiative peut être négligée, typiquement pour des étoiles moins massives que 7 masses solaires à métallicité solaire (Abbott, 1979), on parle de limite Ω et l'équilibre des forces radiales à la criticité s'écrit

$$\frac{GM}{R^2} = R\Omega^2 \sin^2 \theta . \quad (2.8)$$

Comme pour le cas sans rotation avec la luminosité d'Eddington, cette limite introduit une quantité critique, la vitesse angulaire képlérienne

$$\Omega_K = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} . \quad (2.9)$$

où le rayon stellaire R dépend de la masse de l'étoile, et de la vitesse angulaire à sa surface.

Une étoile de masse intermédiaire inférieure à $7 M_\odot$ avec une vitesse angulaire $\Omega = \Omega_K$ sera donc marginalement liée gravitationnellement. Vient maintenant le cas général où ni l'accélération centrifuge ni l'accélération radiative ne peuvent être négligées, c'est typiquement le cas des étoiles massives. C'est précisément ce cas général, longtemps débattu, qui nous intéresse dans cette étude. Tandis que Langer (1997, 1998) prédit que les étoiles proches de la limite Γ ont une vitesse angulaire critique réduite, Glatzel (1998) prétend que cet effet est un artefact dû au fait que l'assombrissement gravitationnel ait été négligé. Il conclut que la rotation critique est en fait indépendante du paramètre d'Eddington Γ . Ayant pour but de clarifier ce débat, Maeder (1999) et Maeder & Meynet (2000) ont réétudié le problème et sont arrivés à la conclusion qu'il y a une part de "vrai" dans les deux modèles concurrents. Nous présentons la méthodologie ainsi que les résultats obtenus par Maeder (1999) et Maeder & Meynet (2000) dans la section suivante.

2.2 Une première clarification du débat

La difficulté principale lorsque l'on cherche à déterminer analytiquement la vitesse angulaire telle que la gravité totale à la surface de l'étoile est nulle, provient de la modélisation de l'accélération radiative, et en particulier celle du flux radiatif. Pour ce faire, Maeder (1999) se base sur le théorème de von Zeipel (1924), c'est-à-dire le flux radiatif à une latitude θ donnée est directement proportionnel à la gravité effective correspondante : $F(\theta) \propto g_{\text{eff}}(\theta)$. C'est l'assombrissement gravitationnel. Plus précisément, le flux radiatif s'écrit

$$\mathbf{F} = \chi \nabla T , \quad (2.10)$$

où $\chi = 4acT^3/(3\kappa\rho)$ est la conductivité thermique radiative, $a = 4\sigma/c$ est la constante de densité de rayonnement, et σ est la constante de Stefan-Boltzmann. En considérant que l'étoile est barotrope, c'est-à-dire que $P = P(\rho) \propto P(T)$, et en équilibre hydrostatique, il vient

$$\mathbf{F} = -\rho\chi \frac{dT}{dP} \mathbf{g}_{\text{eff}} . \quad (2.11)$$

Si l'on se place sur une isobare et que l'on fait l'hypothèse de rotation uniforme, c'est-à-dire $\Omega(r, \theta) = \Omega$, l'équation précédente peut être réécrite (Zahn, 1992)

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\bar{\rho}\bar{\chi} \frac{d\bar{T}}{dP} \mathbf{g}_{\text{eff}} = -\frac{\iint \bar{\chi} \nabla T \cdot d\mathbf{S}}{\iint \mathbf{g}_{\text{eff}} \cdot d\mathbf{S}} \mathbf{g}_{\text{eff}} \\ &= -\frac{L(P)}{4\pi GM_*(P)} \mathbf{g}_{\text{eff}} , \end{aligned} \quad (2.12)$$

où $L(P)$ est la luminosité sur une surface isobare, $M_*(P) = M(1 - \Omega^2/(2\pi G\rho_m))$ est la masse "réduite", et ρ_m est la densité moyenne du fluide sous cette même isobare. Cette relation nous donne donc le *flux radiatif moyen sur une surface isobare*. Maeder (1999) considère ensuite le cas plus général pour lequel l'étoile est barocline, c'est-à-dire le cas où les isopycnes et les isobares ne sont pas confondues ($P \neq P(\rho)$), et où le profil de vitesse angulaire n'est plus constant mais dépend uniquement de la coordonnée radiale (rotation en coquilles). Pour ce faire, reprenant l'expression du cas barotrope (2.12) et s'inspirant des résultats de Zahn (1992), il développe linéairement toutes les quantités autour de leur valeur moyenne sur une isobare, par exemple

$$\rho(P, \theta) = \bar{\rho}(P) + \tilde{\rho}(P)P_2(\cos \theta) , \quad (2.13)$$

où $P_2(\cos \theta)$ est le polynôme de Legendre de degré 2. L'expression généralisée du flux radiatif s'écrit alors

$$\mathbf{F} = -\frac{L(P)}{4\pi GM_*(P)} \mathbf{g}_{\text{eff}} (1 + \zeta(\theta)) , \quad (2.14)$$

où

$$\zeta(\theta) = \left[\left(1 - \frac{\chi_T}{\delta} \right) \Theta + \frac{H_T}{\delta} \frac{d\Theta}{dr} \right] P_2(\cos \theta) , \quad (2.15)$$

et

$$\chi_T = \left(\frac{\partial \ln \chi}{\partial \ln T} \right)_{P,\mu}, \quad \delta = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_{P,\mu}, \quad H_T = -\bar{T} \frac{dr}{d\bar{T}} \quad \text{et} \quad \Theta = \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}}. \quad (2.16)$$

Maeder (1999) suggère ensuite que le paramètre $\zeta(\theta)$ est généralement très petit à la surface des étoiles massives, typiquement de l'ordre de 10^{-2} . La dépendance en latitude du rapport F/g_{eff} reste donc faible d'après ce modèle. En utilisant (2.4) et (2.14), la gravité totale peut alors être réécrite

$$\mathbf{g}_{\text{tot}} = \mathbf{g}_{\text{eff}} \left(1 - \frac{\kappa(\theta)L(P)(1 + \zeta(\theta))}{4\pi cGM_*(P)} \right). \quad (2.17)$$

À la criticité, c'est-à-dire lorsque la gravité totale est nulle localement, le flux radiatif s'écrit

$$\mathbf{F}_{\text{lim}}(\theta) = -\frac{c}{\kappa(\theta)} \mathbf{g}_{\text{eff}}, \quad (2.18)$$

et Maeder (1999) introduit le paramètre d'Eddington local à la surface, à la colatitude θ , comme étant le rapport du flux radiatif à sa valeur limite à la criticité

$$\Gamma_{\Omega}(\theta) = \frac{F(\theta)}{F_{\text{lim}}(\theta)} = \frac{\kappa(\theta)L(P)(1 + \zeta(\theta))}{4\pi cGM_*(P)}. \quad (2.19)$$

Pour une étoile sans rotation, ce paramètre d'Eddington local est égal au paramètre d'Eddington standard défini précédemment. Cependant, lorsque l'on considère la rotation, ce paramètre local varie comme l'opacité à la surface de l'étoile (en considérant le paramètre $\zeta(\theta) \ll 1$). Enfin, en injectant (2.19) dans (2.17), Maeder & Meynet (2000) obtient la gravité totale locale

$$\mathbf{g}_{\text{tot}} = \mathbf{g}_{\text{eff}} (1 - \Gamma_{\Omega}(\theta)). \quad (2.20)$$

Déterminer la vitesse angulaire critique à la limite $\Omega\Gamma$ revient donc à trouver la vitesse angulaire telle que cette quantité s'annule quelque part à la surface de l'étoile. Cette équation a deux solutions : soit $\mathbf{g}_{\text{eff}} = \mathbf{0}$, soit $\Gamma_{\Omega} = 1$. La première, en accord avec Glatzel (1998), donne la vitesse angulaire képlerienne locale $\Omega_{\text{K}}(\theta) = \sqrt{GM/(R(\theta)^3 \sin^2 \theta)}$ qui est indépendante du paramètre d'Eddington. Parce que l'accélération radiative dépend linéairement de la gravité effective, cette solution

correspond au cas $g_{\text{eff}} = g_{\text{rad}} = 0$. De plus, il est évident que cette solution est toujours atteinte à l'équateur en premier, la vitesse angulaire critique équatoriale correspondante s'écrit alors

$$\Omega_{c,1} = \Omega_K = \sqrt{\frac{GM}{R_{\text{eq}}^3}}, \quad (2.21)$$

où $R_{\text{eq}} = R(\pi/2)$, et où, par souci de clarté, nous redéfinissons $\Omega_K = \Omega_K(\pi/2)$. La seconde solution est $\Gamma_\Omega = 1$, c'est-à-dire le cas d'un équilibre des forces radiales $\mathbf{g}_{\text{eff}} = -\mathbf{g}_{\text{rad}}$, et est elle aussi atteinte à l'équateur en premier d'après [Maeder & Meynet \(2000\)](#). En effet, si l'on néglige le paramètre $\zeta(\theta)$, l'unique dépendance de Γ_Ω avec la latitude provient de celle de l'opacité. La température effective d'une étoile en rotation étant minimale à l'équateur, la loi de Kramer pour l'opacité, $\kappa \propto T^{-7/2}$, implique, si elle est valable, que l'opacité est maximale à l'équateur. Nous verrons plus tard que ce raisonnement n'est cependant pas nécessairement correct. Pour le moment, considérons que les deux solutions pour la vitesse angulaire critique sont atteintes à l'équateur en premier. La première des deux solutions atteinte sera considérée comme étant la vitesse angulaire critique, l'étoile n'étant plus gravitationnellement liée lorsque celle-ci est dépassée. La solution $\Gamma_\Omega(\theta) = 1$ s'écrit

$$\frac{\kappa(\theta)L(P)}{4\pi cGM} = 1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_m}, \quad (2.22)$$

où l'on a négligé $\zeta(\theta)$. En utilisant le modèle de Roche donnant le rayon équatorial à la criticité égal à 1.5 fois le rayon polaire de l'étoile (voir, par exemple Sect. [5.2.1](#)), [Maeder & Meynet \(2000\)](#) trouvent que la valeur maximale de $\Omega^2/(2\pi G\rho_m)$ telle qu'une vitesse angulaire critique inférieure à la vitesse angulaire képlérienne puisse exister est 0.361. Cette seconde solution pour la vitesse angulaire critique n'existe donc que si et seulement si le paramètre d'Eddington à l'équateur $\Gamma_{\text{eq}} = \kappa(\pi/2)L(P)/(4\pi cGM) > 0.639$. D'après [\(2.22\)](#), la seconde solution pour la vitesse angulaire critique est

$$\Omega_{c,2} = \Omega_{c,1} \sqrt{\frac{2\pi R_{\text{eq}}^3}{V}(1 - \Gamma)}, \quad (2.23)$$

où V est le volume total de l'étoile. La vitesse angulaire critique, dans le cas où $\Gamma_{\text{eq}} > 0.639$, est donc fonction du paramètre d'Eddington.

Lorsque $\Gamma \leq 0.639$, la masse réduite de l'étoile M_* n'est pas suffisamment diminuée par la rotation pour que Γ_Ω puisse atteindre l'unité et la seule solution possible est $\Omega_{c,1}$, c'est-à-dire la vitesse angulaire képlérienne. En revanche, lorsque $\Gamma > 0.639$ l'effet combiné de la rotation et de l'accélération radiative est tel que Γ_Ω atteint l'unité

avant que la vitesse angulaire képlérienne ne soit atteinte, et la vitesse angulaire critique associée est $\Omega_{c,2}$.

2.3 Quelques remarques

Depuis près de deux décennies, le débat entre Langer et Glatzel semble être résolu par le modèle de Maeder (1999) et Maeder & Meynet (2000) décrit dans la section précédente. Plusieurs hypothèses considérées dans leur dérivation de la vitesse angulaire critique peuvent cependant être remises en question, à la fois d'un point de vue théorique et observationnel.

Une première remarque concerne la dérivation du flux radiatif dans le cas barocline avec un profil de vitesse angulaire en coquilles. En effet, l'équation (2.12) est obtenue en faisant l'hypothèse d'une étoile barotrope en rotation solide. Sa généralisation au cas barocline avec vitesse angulaire en coquilles peut-être remise en question. Aussi, et comme mentionné par Zahn (1992), le développement linéaire des paramètres stellaires autour de leur valeur moyenne sur une isobare implique que ces perturbations du premier ordre ne peuvent être que petites en comparaison. C'est-à-dire, *le domaine de validité de cette formulation est la rotation lente*. Il semble donc légitime de douter sa pertinence pour la dérivation d'une vitesse angulaire critique. La seconde remarque concerne la latitude de criticité, en particulier pour le cas $\Gamma > 0.639$. En effet, si l'on considère que $\zeta(\theta) \ll 1$, alors la seule dépendance en latitude de $\Gamma_\Omega(\theta)$ provient de celle de l'opacité. Si à première vue le fait que la température effective soit minimale à l'équateur semble indiquer que l'opacité y est maximale, ce n'est pas nécessairement le cas. Partons du principe que les variations latitudinales de l'opacité à la surface d'une étoile suivent la loi de Kramer, c'est-à-dire

$$\kappa(\theta) \propto \rho_s(\theta) T_{\text{eff}}(\theta)^{-7/2} \quad (2.24)$$

où $\rho_s(\theta)$ est la densité locale à la surface de l'étoile et la pression surfacique peut être écrite

$$P_s(\theta) = \tau_s \frac{g_{\text{eff}}(\theta)}{\kappa(\theta)} \propto \frac{g_{\text{eff}}(\theta)}{\kappa(\theta)}, \quad (2.25)$$

où $\tau_s \simeq 2/3$ est la profondeur optique de Rosseland au niveau de la photosphère. En faisant l'hypothèse d'une loi de puissance $T_{\text{eff}} \propto g_{\text{eff}}^\beta$ ainsi qu'en considérant le fluide stellaire comme un gaz parfait, l'équation (2.24) peut être réécrite

$$\kappa(\theta) \propto T_{\text{eff}}(\theta)^{-9/4+1/(2\beta)} \quad \text{avec} \quad \rho_s(\theta) \propto T_{\text{eff}}(\theta)^{5/4+1/(2\beta)}. \quad (2.26)$$

Si l'on considère maintenant le théorème de von Zeipel pour le flux radiatif, ou la revisite de ce dernier par Maeder (1999) présentée dans la section précédente (équation 2.14), alors $\beta \simeq 1/4$. Dans ce cas précis l'opacité décroît bien vers l'équateur et la criticité y est atteinte. Ce résultat n'est cependant pas en accord avec les résultats théoriques de Espinosa Lara & Rieutord (2011) et avec les observations interférométriques d'étoiles en rotation de masse intermédiaire et de types spectraux A et B (e.g., Monnier *et al.*, 2007; Zhao *et al.*, 2009; Che *et al.*, 2011; Domiciano de Souza *et al.*, 2014)¹. Ces études montrent en effet que le coefficient d'assombriement gravitationnel β est toujours inférieur à 1/4 pour les étoiles en rotation ayant une enveloppe radiative, et qu'il décroît à mesure que l'aplatissement de l'étoile augmente. Le coefficient d'assombriement gravitationnel β mesuré observationnellement et calculé à l'aide de modèles ESTER à 2D, en fonction de l'aplatissement de l'étoile est représenté Fig. 2.1. Le code ESTER est présenté en Annexe A. L'équation (2.26) montre qu'un assombriement gravitationnel plus faible que celui de von Zeipel, peut avoir un effet considérable sur la distribution en latitude de la densité en surface et donc sur celle de l'opacité. En particulier, (2.26) indique que la valeur critique de β en dessous de laquelle l'opacité se met à décroître avec une diminution de température (donc vers l'équateur) est 2/9 (pour le modèle simplifié considéré). D'après les modèles ESTER, $\beta_c = 2/9$ correspond à une vitesse angulaire valant 40% de la vitesse angulaire képlérienne. Ainsi, si l'on considère que la seule dépendance latitudinale du paramètre d'Eddington local provient de l'opacité, et dans la limite de la loi de Kramer, la criticité est atteinte aux pôles en premier si $\Gamma > 0.639$.

Enfin, le contrôle des variations horizontales du paramètre d'Eddington local par l'opacité engendre un problème supplémentaire. En effet, l'opacité possède une valeur minimale fixée par la diffusion Thomson des photons sur les électrons, κ_e . Certaines étoiles très massives de population III (jusqu'à plusieurs centaines de masses solaires et dépourvues de métaux) pouvant avoir existé dans le premier milliard d'années de notre Univers, sont supposées avoir une luminosité proche de la limite d'Eddington ainsi qu'une atmosphère complètement ionisée (Spiegel & Tao, 1999). L'opacité de

1. Notons que l'étude théorique des variations latitudinales du flux radiatif pour des étoiles possédant une enveloppe convective est une tâche plus difficile encore, car trois processus physiques agissent simultanément. Le premier est la force de Coriolis qui tend à inhiber la convection aux pôles et à la favoriser à l'équateur, impliquant un coefficient d'assombriement gravitationnel négatif. Le second est l'effet centrifuge qui diminue la flottabilité dans les régions équatoriales et favorise ainsi un coefficient positif. Enfin, les champs magnétiques générés par la convection ont tendance à inhiber les transferts de chaleur (Rieutord, 2016; Raynaud *et al.*, 2018).

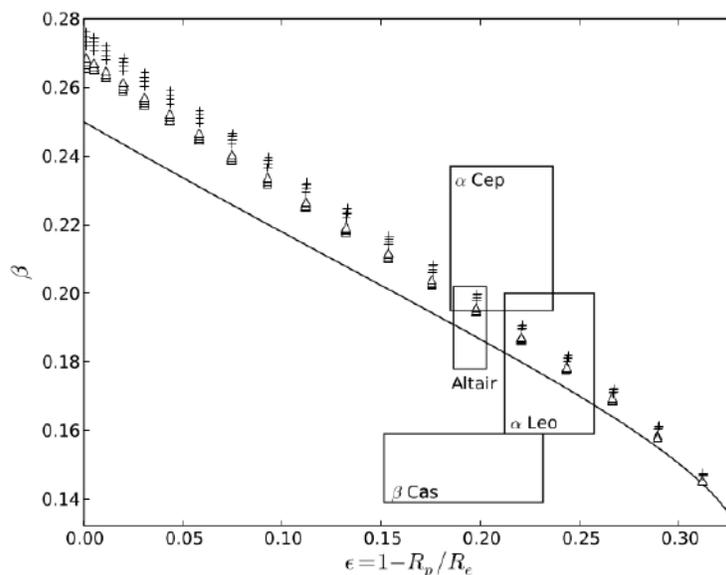


Figure 2.1: Coefficient d’assombrissement gravitationnel β en fonction de l’aplatissement de l’étoile ϵ . Trait plein : β calculé à partir du modèle ω (Espinosa Lara & Rieutord, 2011). Croix : modèles ESTER à la ZAMS. Triangles : modèles ESTER lorsqu’il reste 50% de l’abondance initiale en hydrogène dans le coeur convectif. Les rectangles représentent les valeurs de β et les erreurs correspondantes obtenues par observations interférométriques de plusieurs étoiles en rotation possédant une enveloppe radiative : Altair (Monnier *et al.*, 2007), α Cephei (Zhao *et al.*, 2009), β Cassiopeiae, et α Leonis (Che *et al.*, 2011). Source : Espinosa Lara & Rieutord (2011).

l’atmosphère de ces étoiles, dominée par la diffusion Thomson, est donc indépendante de la latitude (e.g., Spiegel & Tao, 1999; Shaviv, 2001). Si l’on venait à étudier la criticité de ce type d’étoiles à l’aide du modèle de Maeder (1999) et de Maeder & Meynet (2000), alors on trouverait que lorsque la solution $\Gamma_\Omega = 1$ est atteinte, elle l’est à toutes les latitudes en même temps !

Les limites du modèle de Maeder (1999) et Maeder & Meynet (2000), et en particulier celle de son domaine de validité nous incitent maintenant à réétudier la limite $\Omega\Gamma$ en relaxant certaines hypothèses fortes sur les effets de la rotation.

2.4 Le modèle ω

Pour dériver leurs vitesses angulaires critiques, Maeder (1999) et Maeder & Meynet (2000) se sont basés sur le théorème de von Zeipel (1924). Or, comme indiqué

dans la section précédente, il n'est pas vérifié observationnellement. L'assombrissement gravitationnel semble en réalité plus faible que ce que ne laisse entendre ce théorème. Il s'agit donc de déterminer une expression analytique du flux radiatif sans faire l'approximation que les variations horizontales des paramètres stellaires dues à la rotation sont de faible amplitude. Nous présentons ici le modèle ω de [Espinosa Lara & Rieutord \(2011\)](#) dont l'objet est la description analytique des variations latitudinales du flux radiatif. Ce modèle fait trois hypothèses : la distribution de la masse est représentée par le modèle de Roche, le flux radiatif et la gravité effective sont anti-parallèles, et la rotation différentielle latitudinale est négligée. La première hypothèse suppose que la masse de l'étoile est concentrée en son centre, ce qui est généralement une bonne approximation pour l'étude des étoiles massives dont l'enveloppe peut être modélisée par un polytrophe d'indice $n = 3$. La deuxième est vérifiée, même pour les étoiles proches de la rotation critique, à moins d'un demi-degré près par les modèles ESTER à 2D ([Espinosa Lara & Rieutord, 2011](#)). Ce non-alignement des isobares et isopycnes, même faible génère toutefois un couple barocline $(\nabla P \times \nabla \rho)/\rho^2$ suffisant pour induire un écoulement méridien du fait des forts gradients de densité et de pression dans les intérieurs stellaires. La troisième est certainement la plus forte car la rotation différentielle en surface modifie la brillance du disque stellaire [Delaa *et al.* \(2013\)](#). Notons que le cas où la rotation différentielle à la surface de l'étoile est prise en compte a été étudié par [Zorec *et al.* \(2017\)](#). Dans ce cas, la distribution surfacique du flux radiatif fait cependant intervenir des paramètres libres. Supposons donc que le flux radiatif s'écrive

$$\mathbf{F} = -f(r, \theta)\mathbf{g}_{\text{eff}} , \quad (2.27)$$

où $f(r, \theta)$ est une fonction que l'on cherche à déterminer. Nous pouvons déjà remarquer que ce modèle du flux radiatif, contrairement à celui de von Zeipel et à celui de [Maeder \(1999\)](#), permet au rapport F/g_{eff} de varier latitudinalement. Cette différence fondamentale aura une influence sur la dérivation de la vitesse angulaire à la limite $\Omega\Gamma$. Dans l'enveloppe radiative d'une étoile massive où il n'y a aucune source de chaleur, la fonction $f(r, \theta)$ est déterminée à partir de la conservation du flux radiatif

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 , \quad (2.28)$$

qui peut être mise sous la forme

$$\nabla \cdot (f\nabla\phi) = 0 , \quad (2.29)$$

où nous avons réécrit la gravité effective comme dérivant du potentiel ϕ tel que

$$\mathbf{g}_{\text{eff}} = -\nabla\phi, \quad (2.30)$$

et où les isopotentiellles, dans l'approximation du modèle de Roche, s'écrivent

$$\phi = -\frac{GM}{r^2} - \frac{1}{2}\Omega r^2 \sin^2\theta. \quad (2.31)$$

La conservation du flux radiatif peut ensuite être réécrite,

$$\mathbf{g}_{\text{eff}} \cdot \nabla f = -2\Omega^2, \quad (2.32)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \xi} = -\frac{2\Omega^2}{g_{\text{eff}}}, \quad (2.33)$$

où ξ est la coordonnée verticale locale. Cette relation implique, une nouvelle fois, une différence majeure avec le modèle de von Zeipel. En effet, les variations latitudinales de la fonction $f = -F/g_{\text{eff}}$ sont associées à celles de la gravité effective. Dans le modèle de von Zeipel, ce rapport est indépendant de la latitude et dans celui de [Maeder \(1999\)](#) sa dépendance latitudinale est négligeable. Concentrons nous maintenant sur la détermination de la fonction $f(r, \theta)$. La dérivation complète est décrite dans [Espinosa Lara & Rieutord \(2011\)](#) et [Rieutord \(2016\)](#). Tout d'abord, nous remarquons que proche du centre de l'étoile

$$\mathbf{F} \sim \frac{L}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_{\text{eff}} \sim -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (2.34)$$

c'est-à-dire

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta) = \frac{L}{4\pi GM}. \quad (2.35)$$

La fonction f peut alors être mise sous la forme

$$f(r, \theta) = \frac{L}{4\pi GM} F_\omega(\tilde{r}, \theta) \quad (2.36)$$

où F_ω est une fonction sans dimension valant 1 au centre de l'étoile et prenant en compte les variations radiales et latitudinales du flux radiatif. Prenons ensuite GM/R_{eq}^2 comme échelle caractéristique de la gravité, et le rayon équatorial de l'étoile

R_{eq} comme échelle de longueur telle que $r = R_{\text{eq}}\tilde{r}$. La vitesse angulaire sera alors exprimée comme une fraction de la vitesse angulaire képlérienne $\omega = \Omega/\Omega_K$. En utilisant (2.32) et (2.36) nous écrivons l'équation de F_ω

$$\left(\frac{1}{\omega^2\tilde{r}^2} - \tilde{r} \sin^2 \theta \right) \frac{\partial F_\omega}{\partial r} - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial F_\omega}{\partial \theta} = 2F_\omega . \quad (2.37)$$

Cette équation peut être résolue en utilisant la condition au centre de l'étoile $F_\omega(0, \theta) = 1$ (voir Espinosa Lara & Rieutord, 2011; Rieutord, 2016), et donne

$$F_\omega(\tilde{r}, \theta) = \frac{\tan^2(\Psi(\tilde{r}, \theta))}{\tan^2 \theta} , \quad (2.38)$$

où $\Psi(r, \theta)$ est obtenu en résolvant l'équation transcendante

$$\cos \Psi + \ln \tan(\Psi/2) = \frac{1}{3}\omega^2\tilde{r}^3 \cos^3 \theta + \cos \theta + \ln \tan(\theta/2) . \quad (2.39)$$

Par chance, (2.39) possède une solution analytique simple pour le flux radiatif sans dimension, aux pôles et à l'équateur

$$F_\omega(\tilde{r}, 0) = e^{\frac{2}{3}\omega^2\tilde{r}^3} \quad \text{et} \quad F_\omega(\tilde{r}, \pi/2) = (1 - \omega^2\tilde{r}^3)^{-2/3} , \quad (2.40)$$

respectivement, c'est-à-dire le flux radiatif à la surface de l'étoile et à l'équateur s'écrit, d'après le modèle ω

$$\mathbf{F}(R_{\text{eq}}, \pi/2) = -\frac{L}{4\pi GM}(1 - \omega^2)^{-2/3}\mathbf{g}_{\text{eff}} , \quad (2.41)$$

et dans la limite des rotations lentes ($\omega \ll 1$),

$$\mathbf{F}(R_{\text{eq}}, \pi/2) \simeq -\frac{L}{4\pi GM(1 - \frac{2}{3}\omega^2)}\mathbf{g}_{\text{eff}} . \quad (2.42)$$

Dans cette limite où l'on peut négliger l'aplatissement de l'étoile, c'est-à-dire considérer $R_{\text{eq}} \simeq R_p$, (2.42) est identique à l'expression du flux radiatif de Maeder (1999) (voir Eq. 2.14). Cependant, dans le cas où la rotation de l'étoile n'est pas particulièrement lente, c'est-à-dire lorsque ω n'est pas très petit devant 1 et que l'aplatissement de l'étoile ne peut plus être négligé, nous remarquons une différence majeure entre nos deux formulations. En effet, d'après (2.41) le rapport F/g_{eff} diverge lorsque ω approche 1, c'est-à-dire lorsque la vitesse angulaire de l'étoile approche la vitesse angulaire képlérienne. Ce n'est pas le cas dans le modèle de Maeder (1999)

où cette quantité reste finie. Nous verrons, dans la section suivante, en quoi cette différence est cruciale dans la dérivation de la vitesse angulaire à la limite $\Omega\Gamma$.

2.5 Vitesse angulaire critique et limite $\Omega\Gamma$

Grâce à l'expression du flux radiatif dérivée dans la section précédente à partir du modèle ω , nous pouvons déterminer la vitesse angulaire critique associée à la limite $\Omega\Gamma$. Rappelons que lorsque cette limite est atteinte, alors

$$\mathbf{g}_{\text{tot}} = \mathbf{g}_{\text{eff}} + \mathbf{g}_{\text{rad}} = \mathbf{0} , \quad (2.43)$$

quelque part à la surface de l'étoile. De la même manière que [Maeder \(1999\)](#), nous introduisons le paramètre d'Eddington local

$$\Gamma_{\Omega}(\theta) = \frac{F(\theta)}{F_{\text{lim}}(\theta)} = \frac{\kappa(\theta)}{c} f(r = 1, \theta) , \quad (2.44)$$

et nous réécrivons l'équation [\(2.43\)](#)

$$\mathbf{g}_{\text{tot}} = \mathbf{g}_{\text{eff}} (1 - \Gamma_{\Omega}(\theta)) = \mathbf{0} . \quad (2.45)$$

Cette fois encore cette équation a deux solutions, soit $g_{\text{eff}} = 0$, soit $\Gamma_{\Omega} = 1$ quelque part à la surface de l'étoile.

2.5.1 Latitude critique : l'équateur

Comme mentionné dans la section [2.2](#), la gravité effective à la surface d'une étoile est réduite par la force centrifuge et est ainsi minimale à l'équateur. La solution $g_{\text{eff}} = 0$ est donc toujours atteinte à l'équateur en premier. Pour ce qui est de la solution $\Gamma_{\Omega}(\theta) = 1$, nous avons vu dans la section [2.2](#) que le modèle de [Maeder \(1999\)](#) et [Maeder & Meynet \(2000\)](#) implique qu'elle est atteinte là où l'opacité est maximale. Pour des étoiles ayant une vitesse angulaire inférieure à $\sim 40\%$ de la vitesse angulaire képlérienne, nous avons déterminé que la latitude critique de ce modèle est l'équateur. Nous pouvons cependant nous attendre à ce que cette vitesse angulaire critique soit plus proche de Ω_K , ce qui impliquerait que la latitude critique ne serait plus l'équateur. Si l'on considère maintenant le flux radiatif obtenu par le modèle ω , la dépendance en colatitude du paramètre d'Eddington local provient à la fois de celle de l'opacité et de celle de la fonction $f(r = 1, \theta)$. La figure [2.2](#) montre les variations latitudinales

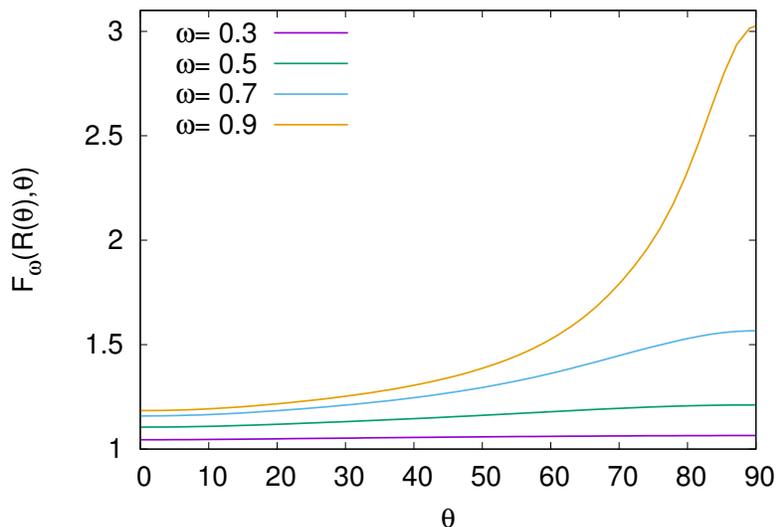


Figure 2.2: Variations latitudinales de F_ω à la surface pour différentes valeurs de $\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_K$. F_ω est une fonction croissante de la colatitude, en particulier lorsque ω approche l'unité.

de F_ω (donc celles de f) en surface pour différentes valeurs de ω . Nous remarquons que la tendance de f est d'augmenter avec la colatitude. Il est en revanche probable que l'opacité décroisse légèrement avec la colatitude lorsque la rotation de l'étoile est suffisamment lente, ce qui pourrait faire diminuer l'amplitude de l'accélération radiative. Cependant, f diverge à l'équateur pour les modèles dont la rotation est proche de la vitesse angulaire képlérienne, il semble donc raisonnable de penser que la solution $\Gamma_\Omega = 1$ puisse être atteinte à l'équateur en premier.

2.5.2 Solution unique pour la vitesse angulaire critique

Nous avons remarqué que l'une des différences majeures entre le modèle de flux radiatif de Maeder (1999) et Maeder & Meynet (2000), et celui obtenu par le modèle ω est la divergence, ou non, du rapport F/g_{eff} . Nous montrons ici que celle-ci implique l'unicité de la vitesse angulaire critique, quelle que soit la valeur du paramètre d'Eddington Γ .

La composante radiale de la gravité effective à l'équateur peut être réécrite comme suit

$$g_{\text{eff}}(\pi/2) = -R_{\text{eq}}\Omega_K^2(1 - \omega^2), \quad (2.46)$$

et celle de l'accélération radiative à la surface de l'étoile et à l'équateur

$$g_{\text{rad}}(\pi/2) = -\frac{\kappa(\pi/2)L}{4\pi cGM} (1 - \omega^2)^{-2/3} g_{\text{eff}}(\pi/2) . \quad (2.47)$$

La gravité totale adimensionnée par $R_{\text{eq}}\Omega_{\text{K}}^2$ s'écrit donc

$$\tilde{g}_{\text{tot}}(\pi/2) = \omega^2 + \Gamma_{\text{eq}}(1 - \omega^2)^{1/3} - 1 , \quad (2.48)$$

où Γ_{eq} est le paramètre d'Eddington évalué à l'équateur. D'après l'équation (2.47), nous remarquons qu'à l'équateur, le rapport $g_{\text{rad}}/g_{\text{eff}}$ croît comme $(1 - \omega^2)^{-2/3}$ lorsque ω augmente. Cela implique que si la gravité effective approche 0 quand ω approche l'unité, g_{rad} tendra aussi vers une valeur nulle, mais plus lentement que g_{eff} . Nous illustrons cet effet avec la figure 2.3 représentant la gravité totale équatoriale sans dimension, ainsi que ses deux composantes, en fonction du rapport des vitesses angulaires ω pour $\Gamma_{\text{eq}} = 0.5$. La gravité totale à l'équateur possède deux zéros, la première racine correspond à la solution $\Gamma_{\Omega}(\pi/2) = 1$ et la seconde à $g_{\text{eff}}(\pi/2) = 0$. Pour des vitesses de rotation sous-critiques, c'est-à-dire pour $g_{\text{tot}} < 0$ (ou $|g_{\text{eff}}| > g_{\text{rad}}$), l'étoile est gravitationnellement liée. À mesure que l'on augmente ω , la gravité effective et l'accélération radiative diminuent en valeur absolue et s'approchent de zéro. Cependant, comme susmentionné, l'amplitude de g_{rad} décroît plus lentement que celle de g_{eff} jusqu'à ce qu'inévitablement $|g_{\text{eff}}| = g_{\text{rad}}$, c'est à dire jusqu'à ce que $\Gamma_{\Omega}(\pi/2) = 1$. Lorsque cette égalité est atteinte, la gravité totale à l'équateur est nulle, i.e. l'étoile est marginalement liée gravitationnellement, et la vitesse angulaire critique est atteinte. À ce stade, une augmentation supplémentaire de ω impliquerait que l'accélération radiative surpasse la gravité effective en valeur absolue, et donc une gravité totale positive dans la direction radiale. L'étoile ne serait donc plus gravitationnellement liée en s'approchant de la seconde solution $\omega = 1$ (ou $g_{\text{eff}} = 0$). Bien sûr, ce régime n'est pas physique et la seule solution pour la limite $\Omega\Gamma$ lorsque l'augmentation de ω est pilotée par l'évolution séculaire de l'étoile est $\Gamma_{\Omega}(\pi/2) = 1$.

2.5.3 Vitesse angulaire critique d'après le modèle ω

Contrairement au modèle pour le flux radiatif de Maeder (1999), le rapport F/g_{eff} est fonction de la latitude et diverge à l'équateur proche de la rotation képlérienne. Même dans le cas extrême où l'opacité serait contrôlée uniquement par la diffusion Thomson, la criticité serait donc nécessairement atteinte à l'équateur en premier, et de manière générale la dépendance latitudinale de l'opacité n'est donc pas importante

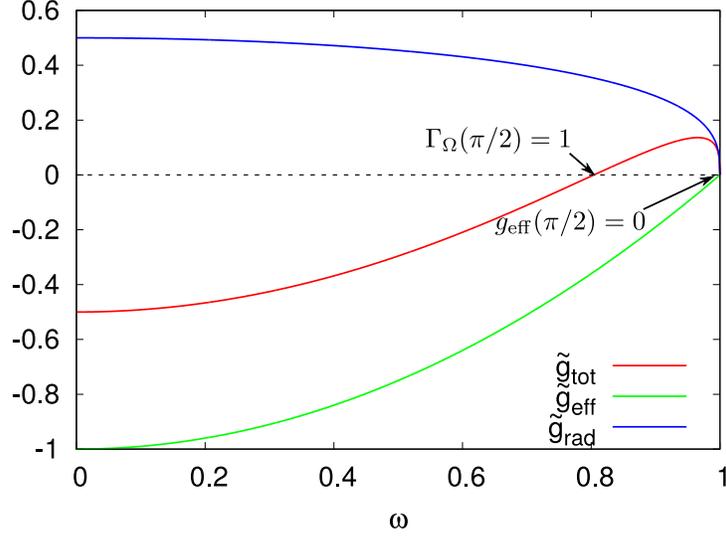


Figure 2.3: Gravité totale, gravité effective et accélération radiative à l'équateur et sans dimension en fonction de ω , pour $\Gamma_{\text{eq}} = 0.5$. La gravité totale équatoriale possède deux zéros ; le premier correspond à $\Gamma_{\Omega}(\pi/2) = 1$, le second à $g_{\text{eff}}(\pi/2) = 0$. Source : [Gagnier *et al.* \(2019a\)](#).

pour déterminer la latitude critique. Considérons maintenant l'unique solution pour la criticité

$$\Gamma_{\Omega}(\pi/2) = \frac{\kappa(\pi/2)L}{4\pi cGM} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\Omega_K^2}\right)^{-2/3} = 1, \quad (2.49)$$

c'est-à-dire

$$\Omega_c = \Omega_K \sqrt{1 - \Gamma_{\text{eq}}^{3/2}}. \quad (2.50)$$

Cette dernière équation montre que la vitesse angulaire critique Ω_c est égale à la vitesse angulaire képlérienne multipliée par un coefficient qui est d'autant plus grand que le paramètre d'Eddington équatorial est petit. Rappelons que [Maeder & Meynet \(2000\)](#) arrivent à une conclusion similaire lorsque le paramètre d'Eddington est supérieur à 0.639 avec $\Omega_c \propto \Omega_K \sqrt{1 - \Gamma_{\text{eq}}}$. Remarquons aussi, que dans ces deux modèles $\Omega_c \simeq \Omega_K$ lorsque $\Gamma_{\text{eq}} \ll 1$, c'est-à-dire que l'on vérifie que la limite pertinente lorsque l'accélération radiative est négligeable est la limite Ω .

2.5.4 En résumé

Avant de poursuivre, il est important de résumer certains résultats importants associés au modèle ω .

1. Les étoiles massives n'atteignent jamais la vitesse angulaire képlérienne. En effet, la solution pour laquelle la gravité effective et l'accélération radiative se compensent exactement est toujours atteinte avant que la gravité effective soit réduite à zéro, c'est-à-dire pour une vitesse angulaire plus faible que la vitesse angulaire képlérienne.
2. Cet équilibre entre accélération radiative et gravité effective est toujours atteint à l'équateur en premier, et ce à cause de la divergence du rapport F/g_{eff} proche de la vitesse angulaire képlérienne en cet endroit.
3. Le théorème de [von Zeipel \(1924\)](#) et sa revisite par [Maeder \(1999\)](#) résultent en une criticité dont la latitude est celle où l'opacité est maximale. Cette latitude n'est pas nécessairement l'équateur pour les étoiles en rotation rapide.

Nous avons émis, plus haut, quelques réserves quant à la validité des hypothèses de [Maeder & Meynet \(2000\)](#) concernant la limite $\Omega\Gamma$ et sa vitesse angulaire critique associée. Il semble donc logique de mettre, à son tour, le modèle ω à l'épreuve, et de discuter sa validité à la lumière des modèles ESTER à deux dimensions.

2.6 La limite $\Omega\Gamma$ avec les modèles 2D ESTER

2.6.1 Retour sur les observations interférométriques

Revenons rapidement sur les observations interférométriques d'étoiles en rotation. Nous avons vu précédemment que si l'on considère une loi de puissance entre le flux radiatif et la gravité effective $F \propto g_{\text{eff}}^{4\beta}$, alors le coefficient d'assombrissement gravitationnel $\beta \leq 1/4$. De plus, plus la rotation de l'étoile est rapide (ou, de manière équivalente, plus son coefficient d'aplatissement est grand) et plus β est petit. Nous pouvons interpréter ces deux constatations comme étant le résultat de la divergence du rapport F/g_{eff} à l'équateur lorsque l'on s'approche de la criticité. En effet, plus la gravité effective est réduite par la rotation, moins le flux radiatif va l'être : si $\beta < 1/4$, le rapport F/g_{eff} diverge proche de la criticité.

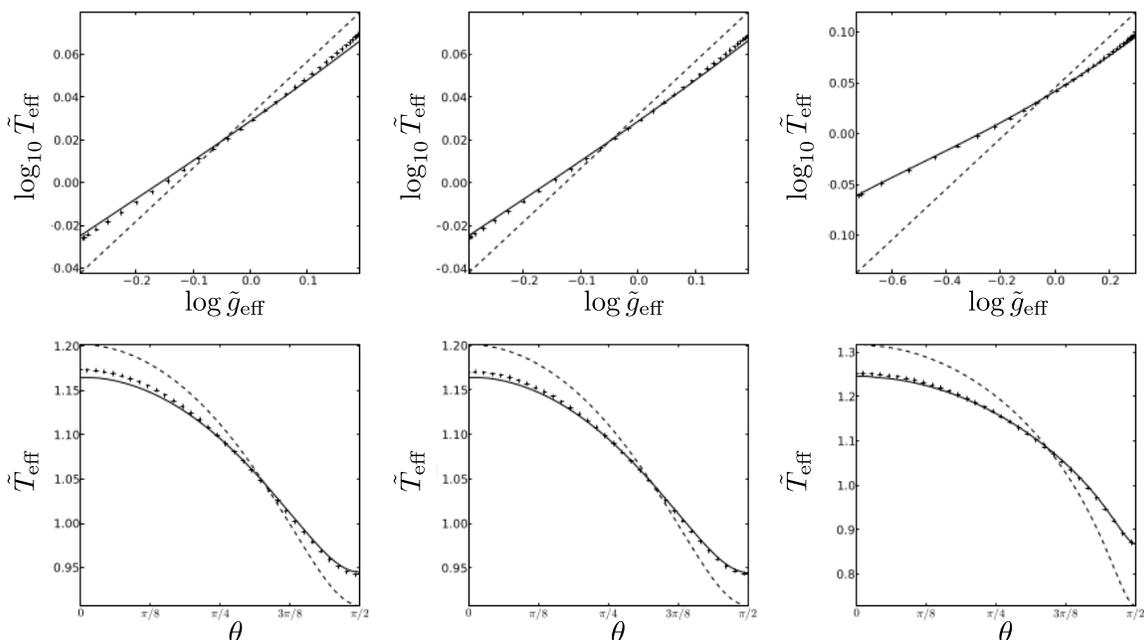


Figure 2.4: Comparaison entre l’assombrissement gravitationnel calculé à partir du modèle ω (trait plein), de la loi de [von Zeipel \(1924\)](#) (tirets), et à partir des modèles ESTER à 2D (croix). Gauche : modèle d’étoile de $3 M_{\odot}$ à la ZAMS avec $\omega = 0.7$. Centre : même modèle mais avec une abondance en hydrogène dans le cœur convectif égale à la moitié de celle dans l’enveloppe radiative. Droite : comme au centre, mais pour $\omega = 0.9$. Source : [Espinosa Lara & Rieutord \(2011\)](#).

2.6.2 Précision du modèle ω

Rappelons les hypothèses à la base du modèle ω : le flux radiatif est considéré anti-parallèle à la gravité effective, la distribution de masse est approximée par le modèle de Roche, c’est-à-dire que l’on considère que la masse de l’étoile est concentrée en son centre, et la vitesse angulaire est prise uniforme latitudinalement.

Les modèles ESTER à deux dimensions ne font aucune de ces hypothèses, il est donc intéressant de leur comparer les prédictions du modèle ω afin de justifier, ou non, la validité relative de ses hypothèses. Une telle comparaison a déjà été réalisée de manière qualitative par [Espinosa Lara & Rieutord \(2011\)](#), en particulier la comparaison de la distribution surfacique de la température effective ainsi que la relation entre température effective et gravité effective à la surface de modèles d’étoiles en rotation. Cette étude montre un bon accord entre les modèles ESTER et les prédictions du modèle ω , ainsi qu’une surestimation de l’assombrissement gravitationnel par la loi von Zeipel (voir Fig. 2.4). En ce qui nous concerne, nous nous concentrons sur l’écart relatif entre les deux prédictions pour le flux radiatif. Pour ce faire, nous résolvons

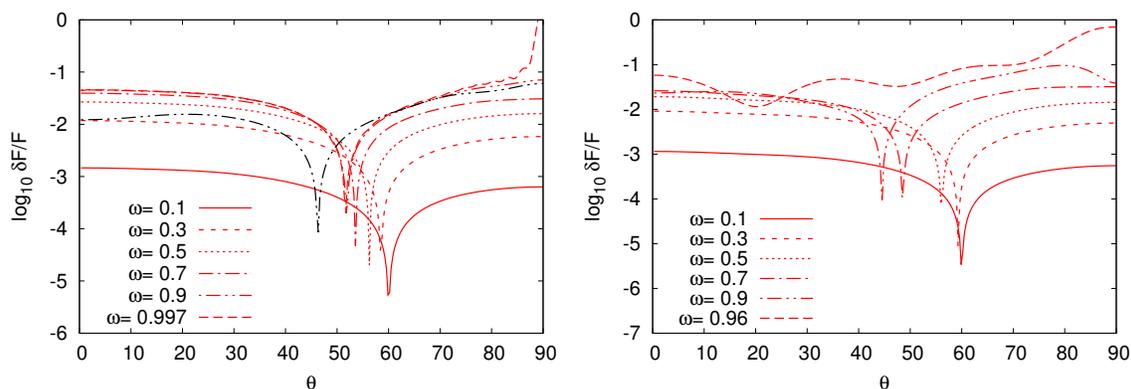


Figure 2.5: Différence relative entre le flux radiatif prédit par le modèle ω et celui calculé par les modèles ESTER 2D, en fonction de la colatitude, pour un modèle de $15 M_{\odot}$ (gauche) et un modèle de $40 M_{\odot}$ (droite), à la ZAMS et pour différentes valeurs de ω . Le trait noir correspond au modèle de $15 M_{\odot}$ avec $\omega = 0.9$ et $X_{\text{core}}/X_0 = 0.5$. X_0 est la fraction de masse initiale en hydrogène à la ZAMS. La valeur minimale de chaque courbe correspond à un changement de signe de la quantité $F_{\text{ESTER}} - F$. Source : Gagnier *et al.* (2019a).

l'équation (2.27) et utilisons les sorties des modèles ESTER pour la luminosité de l'étoile, sa masse, sa vitesse angulaire, son rayon et sa gravité de surface. Dans un premier temps, nous considérons des modèles à la ZAMS de masses 15 et $40 M_{\odot}$, et mesurons la différence relative entre les flux

$$\delta F = \frac{|F_{\text{ESTER}} - F|}{F_{\text{ESTER}}}, \quad (2.51)$$

en fonction de la colatitude. Les résultats sont présentés en Fig. 2.5

Pour les deux modèles à la ZAMS, et pour des vitesses angulaires inférieures à 90% de la vitesse angulaire képlérienne, la différence relative entre les flux radiatifs est toujours en deçà de 10%. Lorsque $\omega < 0.5$, cette différence relative tombe à moins d'un pourcent, témoignant ainsi de la fiabilité du modèle ω pour la modélisation du flux radiatif à la surface des étoiles en rotation rapide. Notons tout de même que cette comparaison a été faite à la ZAMS, nous pouvons alors nous demander si le modèle ω reproduit correctement la distribution latitudinale du flux radiatif à la surface d'une étoile plus évoluée. L'un des effets de l'évolution séculaire des étoiles massives sur la séquence principale, est que la distribution de leur masse en leur intérieur devient de plus en plus concentrée en leur centre (ce point sera discuté en Sect. 5.2.1). Ainsi, l'approximation de Roche est d'autant plus justifiée que l'étoile est évoluée (bien sûr toujours sur la séquence principale). Il est ainsi raisonnable de penser que l'écart relatif

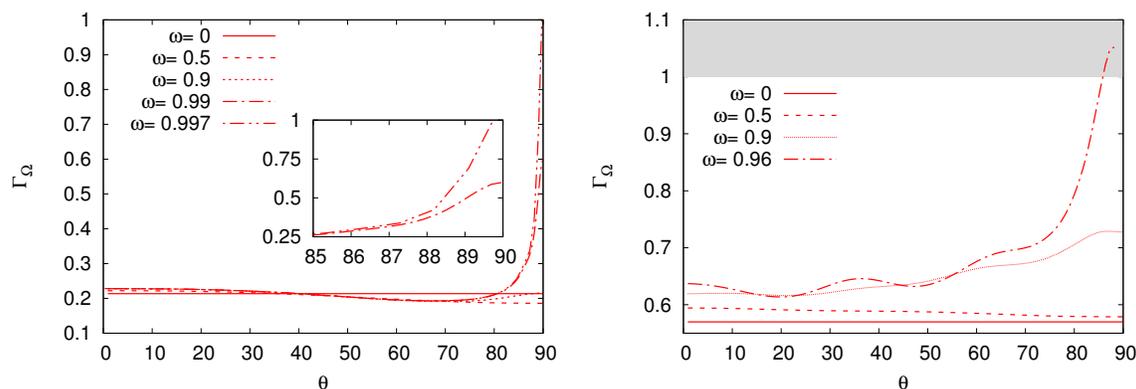


Figure 2.6: Paramètre d’Eddington local $\Gamma_\Omega(\theta)$ en fonction de la colatitude pour plusieurs fractions de la vitesse angulaire képlérienne et pour les modèles ESTER de $15 M_\odot$ (gauche) et de $40 M_\odot$ (droite) à la ZAMS, avec $Z = 0.02$. La zone grisée correspond à une région où la rotation est supercritique. Source : [Gagnier *et al.* \(2019a\)](#).

entre les flux radiatifs est d’autant plus faible que l’abondance en hydrogène dans le coeur convectif stellaire est faible. Cette prédiction est en effet vérifiée figure 2.5a pour le modèle de $15 M_\odot$ en milieu de séquence principale et avec $\omega = 0.9$.

2.6.3 La limite $\Omega\Gamma$ avec les modèles 2D ESTER

Le modèle ω permet une modélisation des variations du flux radiatif sur la surface des étoiles massives en rotation. Cependant, le déterminer quantitativement requiert la connaissance des paramètres stellaires. C’est ici qu’interviennent les modèles ESTER à deux dimensions. Nous représentons dans un premier temps le paramètre d’Eddington local en fonction de la colatitude pour deux modèles ESTER à la ZAMS, l’un d’une étoile de $15 M_\odot$, l’autre de $40 M_\odot$, pour plusieurs valeurs de ω que nous redéfinissons comme $\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_K$, et pour une métallicité solaire $Z = 0.02$. Les résultats sont présentés en figure 2.6.

Concentrons nous, dans un premier temps, sur le modèle ESTER de $15 M_\odot$ à la ZAMS. Il est intéressant de remarquer que lorsque l’on considère des modèles en rotation, le paramètre d’Eddington local tend à décroître avec la colatitude, et lorsque la rotation s’approche de la criticité, ce paramètre augmente brutalement dans la région équatoriale. La décroissance relativement modeste de Γ_Ω provient de la dépendance de l’opacité vis-à-vis de la densité à la surface de l’étoile, qui elle diminue avec la colatitude. Quant à l’augmentation proche de l’équateur pour les rotations les plus rapides, elle est l’effet de la divergence de la fonction $f(r = 1, \theta)$.

Cependant, le résultat le plus important est la valeur de ω nécessaire pour atteindre la solution $\Gamma_\Omega = 1$. En effet, pour ce modèle ESTER de $15 M_\odot$ à la ZAMS, la criticité requiert $\omega = 0.997$ soit une vitesse angulaire critique extrêmement proche de la vitesse angulaire képlérienne.

Nous avons vu que plus le paramètre d’Eddington à l’équateur est grand, c’est-à-dire plus l’accélération radiative à l’équateur est importante, et plus la différence entre vitesse angulaire critique et vitesse angulaire képlérienne est grande. Nous mesurons donc la vitesse angulaire critique d’un modèle d’étoile de $40 M_\odot$ à la ZAMS dont la luminosité est bien supérieure à celle du modèle de $15 M_\odot$, et nous trouvons cette fois 96% de la vitesse angulaire képlérienne. Encore une fois, la vitesse angulaire critique est très proche de la vitesse angulaire képlérienne. Précisons tout de même que modéliser une étoile de $40 M_\odot$ si proche de la rotation critique nécessite de s’approcher des limites actuelles du code ESTER en terme de résolution². Les résultats quantitatifs apportés par ce modèle sont donc moins précis que pour le modèle de $15 M_\odot$. Il indique toutefois une proximité entre Ω_c et Ω_K . Ainsi, le rôle de l’accélération radiative sur la vitesse angulaire critique semble infime. L’équation (2.50) nous permet de déduire directement la valeur du paramètre d’Eddington à l’équateur et à la criticité. Nous trouvons $\Gamma_{\text{eq}} = 0.033$ pour le modèle de $15 M_\odot$ et $\Gamma_{\text{eq}} = 0.18$ pour celui de $40 M_\odot$. Notons que ce sont des valeurs extrêmement faibles pour des étoiles massives. En effet, nous voyons en Fig. 2.7 que le paramètre d’Eddington est fortement réduit en direction de l’équateur, en particulier pour les étoiles en rotation quasi-critique. Ainsi, parce que le coefficient d’assombrissement gravitationnel β est très inférieur à $1/4$, la rotation rapide réduit l’opacité à l’équateur tel que le paramètre d’Eddington équatorial proche de la criticité, et donc l’écart entre vitesse angulaire critique et vitesse angulaire képlérienne, est très faible. Bien sûr, comme rappelé précédemment, l’opacité possède une valeur minimale dictée par la diffusion Thomson et ne peut donc pas être réduite à zéro par la rotation. Contrairement à la détermination de la latitude critique où l’opacité ne joue pratiquement aucun rôle (cf. Sect. 2.5.1), le rapport Ω_c/Ω_K en dépend quasi-exclusivement.

Nous pouvons tout de même nous demander si une étoile plus évoluée peut voir sa vitesse cinétique critique sensiblement réduite par la radiation. Pour cela, nous faisons évoluer deux modèles ESTER à 2D de $15 M_\odot$, l’un sans rotation l’autre avec une vitesse de rotation à la ZAMS $\omega_i = 0.5$. Ici, l’évolution sur la séquence principale se fait sans considérer une quelconque perte de masse et/ou de moment cinétique (voir Sect. 5.1 et l’Annexe A pour plus de détails sur l’évolution temporelle avec ESTER).

2. Les modèles stellaires proches de la criticité sont très exigeants en terme de résolution angulaire car la surface devient singulière à l’équateur (e.g., Rieutord *et al.*, 2016).

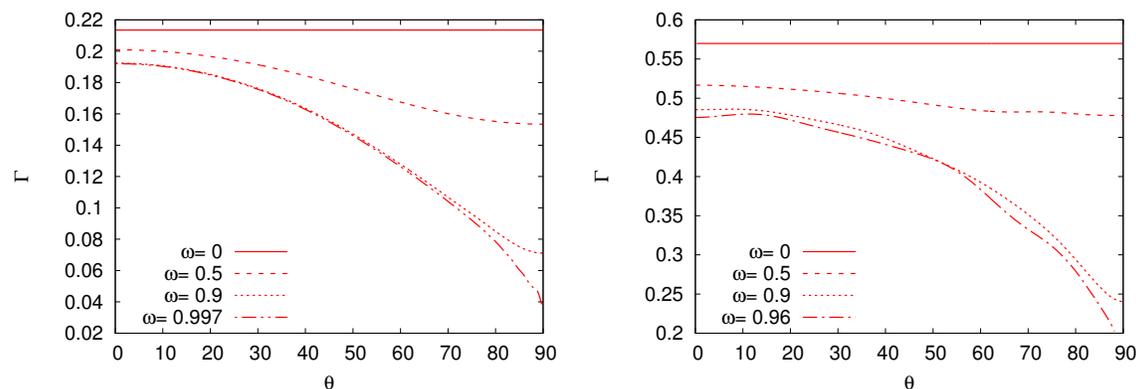


Figure 2.7: Paramètre d’Eddington $\Gamma(\theta)$ en fonction de la colatitude pour plusieurs fractions de la vitesse angulaire képlérienne et pour les modèles ESTER de $15 M_{\odot}$ (gauche) et de $40 M_{\odot}$ (droite) à la ZAMS, avec $Z = 0.02$. Source : [Gagnier et al. \(2019a\)](#).

La figure 2.8 montre l’évolution du paramètre d’Eddington local et du paramètre d’Eddington standard à l’équateur en fonction de la fraction massique d’hydrogène dans le cœur convectif. L’évolution séculaire des étoiles massives sur la séquence principale implique leur expansion ainsi qu’une augmentation de leur luminosité. Dans le cas d’un modèle sans rotation, cette augmentation de luminosité s’ajoute à celle de l’opacité et la valeur du paramètre d’Eddington augmente au cours de la séquence principale. Lorsque l’on considère le modèle en rotation avec une vitesse angulaire initiale $\omega_i = 0.5$, la rotation critique est atteinte lorsque $X_{\text{core}}/X_0 \simeq 0.36$. Par conservation du moment angulaire total de l’étoile et à cause de son expansion au cours de la séquence principale, ω augmente (voir Sect. 5.2). Ainsi, l’étoile s’aplatit et devient de plus en plus sujette à l’assombrissement gravitationnel entraînant ainsi une forte réduction de l’opacité à l’équateur et proche de la vitesse angulaire critique. Après une légère augmentation de Γ_{eq} associée à la domination de l’augmentation de la luminosité de l’étoile, c’est la forte réduction de l’opacité équatoriale qui domine proche de la criticité. Ces résultats vont donc dans le sens de [Glatzel \(1998\)](#), c’est-à-dire que la vitesse angulaire critique n’est pas (ou très peu) affectée par le paramètre d’Eddington. Ainsi, à cause de l’effet considérable de la rotation sur l’opacité à l’équateur, la vitesse angulaire critique n’est que très peu différente de la vitesse angulaire képlérienne, au moins pour des étoiles de moins de $40 M_{\odot}$ avec une métallicité $Z = 0.02$.

En pratique, cette différence est suffisamment faible pour être ignorée vis-à-vis des incertitudes associées aux modèles stellaires. Dans la suite du manuscrit nous exprimerons donc toujours la vitesse angulaire de l’étoile en tant que fraction de la vitesse angulaire képlérienne Ω_K pour apprécier sa distance à la criticité, tout en

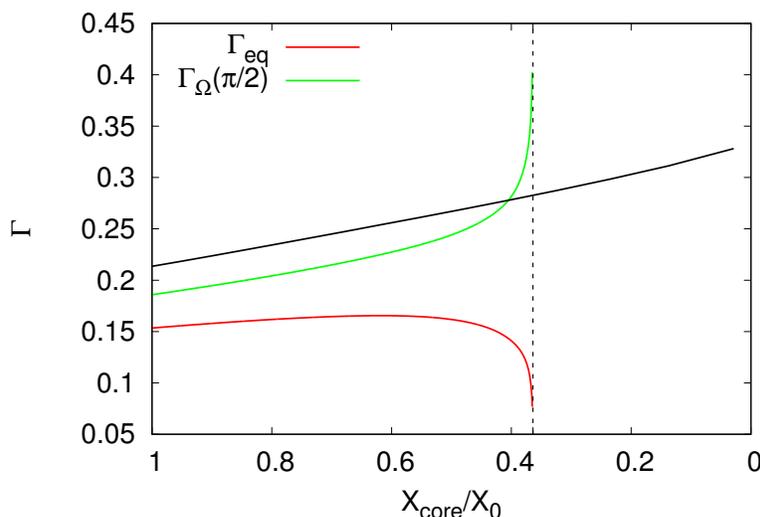


Figure 2.8: Γ_{eq} et $\Gamma_{\Omega}(\pi/2)$ en fonction de la fraction massique d’hydrogène dans le cœur convectif rapportée à sa valeur initiale, pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ ayant une vitesse angulaire à la ZAMS $\omega_i = 0.5$. La courbe noire correspond à l’évolution de Γ_{eq} pour un modèle sans rotation. Source : [Gagnier et al. \(2019a\)](#).

gardant à l’esprit que la “vraie” vitesse angulaire critique est (très) légèrement plus faible.

2.7 Résumé

Nous concluons ce chapitre en résumant brièvement les résultats qui y ont été présentés. Après avoir présenté la problématique associée à la détermination de la vitesse angulaire critique à la limite $\Omega\Gamma$, nous avons exposé les résultats de [Maeder \(1999\)](#) et de [Maeder & Meynet \(2000\)](#), et émis quelques réserves quant à leur pertinence à l’étude du régime de rotation quasi-critique. Nous avons alors présenté et mis à l’épreuve le modèle ω de [Espinosa Lara & Rieutord \(2011\)](#) dont l’objet est la description analytique des variations latitudinales du flux radiatif. Nous l’avons ensuite utilisé pour déterminer une expression analytique de la vitesse angulaire critique à la limite $\Omega\Gamma$. Cette vitesse angulaire critique est unique, correspond à une compensation exacte entre l’accélération radiative et la gravité effective, et est toujours atteinte à l’équateur en premier. En utilisant les modèles ESTER à 2D, nous avons vu qu’en raison de la réduction de l’opacité équatoriale par la rotation, la différence entre la vitesse angulaire critique et la vitesse angulaire képlérienne est en pratique suffisamment faible pour être ignorée.

CHAPITRE 2. VITESSE ANGULAIRE CRITIQUE ET LIMITE $\Omega\Gamma$

Chapitre 3

Vents radiatifs isotropes

Toutes les étoiles possèdent une atmosphère en expansion appelée vent stellaire. La perte de masse continue associée à ces vents joue un rôle majeur dans leur évolution séculaire, dans le contenu en matière et en énergie du milieu interstellaire, et plus généralement dans l'évolution chimique de l'Univers. Tandis que le vent solaire résulte du gradient de pression du gaz dans la couronne, expulsant relativement peu de masse (typiquement de l'ordre de 10^{-14} masses solaires par an), c'est la pression de radiation qui expulse la matière sous forme de vent lorsque l'on considère les étoiles les plus chaudes et les plus lumineuses (de types spectraux O, B, A et Wolf-Rayet). Le vent radiatif à la surface de ces étoiles massives est tel qu'elles peuvent y perdre plus de la moitié de leur masse initiale avant d'exploser en supernova (Maeder, 2009). L'évolution des étoiles massives, souvent rotateurs rapides, est particulièrement sensible à la perte de moment cinétique associée à ces vents. Cette dernière tend en effet à ralentir les couches les plus superficielles, entraînant, en outre, une circulation méridienne qui elle-même peut jouer un rôle crucial sur le transport interne du moment cinétique et des éléments chimiques (ce point sera discuté dans le Chapitre 7). Avant d'étudier le cas qui nous intéresse dans ce manuscrit, c'est-à-dire le cas où la perte de masse est anisotrope à cause des effets dus à la rotation, nous présentons ici, après un bref historique, le concept d'accélération radiative ainsi qu'une manière simple de la modéliser en utilisant l'approximation de Sobolev (Sobolev, 1960). Nous présentons ensuite le formalisme de Castor *et al.* (1975) (CAK) et de Pauldrach *et al.* (1986) (PPK), ainsi que leurs hypothèses pour l'estimation du taux de perte de masse isotrope. La section 3.6 est largement inspirée de Gagnier *et al.* (2019a).

3.1 Bref historique

Le nom de “vent stellaire” a été inventé par Eugène Parker à la fin des années 1950. Cependant, l’origine et les idées de base à propos de la perte de masse des étoiles sont apparues bien avant cela. En particulier, l’observation d’une “nouvelle étoile”, par Tycho Brahe en 1572 marque le début de l’étude des objets célestes complexes pouvant évoluer sur des échelles de temps courtes. Nous savons maintenant que la nouvelle étoile de Tycho Brahe était en réalité une supernova, visible dans le ciel diurne, et qui l’est restée dans le ciel nocturne pendant 16 mois. L’événement astronomique de ce type suivant eut lieu 28 années plus tard lorsque Willem Blaeu découvrit une autre “nouvelle étoile” qui, plus tard, prit le nom de P Cygni. Nous savons aujourd’hui que ce n’était cette fois pas une supernova, mais plutôt une étoile avec un fort vent stellaire, que nous classifions maintenant d’étoile variable lumineuse bleue. P Cygni donne aujourd’hui aussi son nom à un profil spectroscopique particulier appelée profil P Cygni, et qui est caractérisé par la présence d’absorption et d’émission dans le profil d’une même raie spectrale (voir Beals, 1953; Herbig, 1960, par exemple). Cette caractéristique des raies P Cygni indique l’existence d’une atmosphère gazeuse en expansion. En effet, cette atmosphère stellaire en expansion est photo-ionisée par l’étoile et produit des raies d’émission élargies par l’accélération du vent. L’absorption dans la région du vent entre l’étoile et l’observateur produit quant à elle le décalage vers le bleu de la raie d’absorption (voir Fig. 3.1). En 1867, Charles Wolf et Georges Rayet découvrirent une nouvelle classe d’étoiles possédant des raies spectrales similaires à celles observées pour les novæ et pour l’étoile P Cygni, alors que ces étoiles (étoiles de Wolf-Rayet) ne sont ni associées à une explosion, ni ne faiblissent en intensité au cours du temps (voir Fig. 3.2).

En 1929, Carlyle Beals fait l’hypothèse que l’élargissement des raies d’émission dans les profils P Cygni, et dans les raies des étoiles Wolf-Rayet, est dû à l’effet Doppler, et donc que l’atmosphère de ces étoiles est caractérisée par un flux de masse continu dans la ligne de visée de l’observateur. Peu de temps après, en 1934, Subrahmanyan Chandrasekhar confirme cette hypothèse par des arguments théoriques, et la même année, Nikolai Kosirev parvient à estimer un taux de perte de masse ainsi qu’une vitesse maximale du vent typique d’une étoile Wolf-Rayet, avec des valeurs étonnement proches des valeurs actuelles pour ces étoiles ($\dot{M} \simeq 10^{-5} M_{\odot} \cdot \text{yr}^{-1}$ et $v \simeq 1000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, Kosirev, 1934). Au milieu des années 30, les astronomes avaient donc déjà une connaissance assez poussée des atmosphères stellaires chaudes et en expansion.

D’un point de vue plus théorique, l’origine du concept de vent radiatif peut être retracée aux travaux de Meghnad Saha en 1919 sur la lévitation par radiation, et les

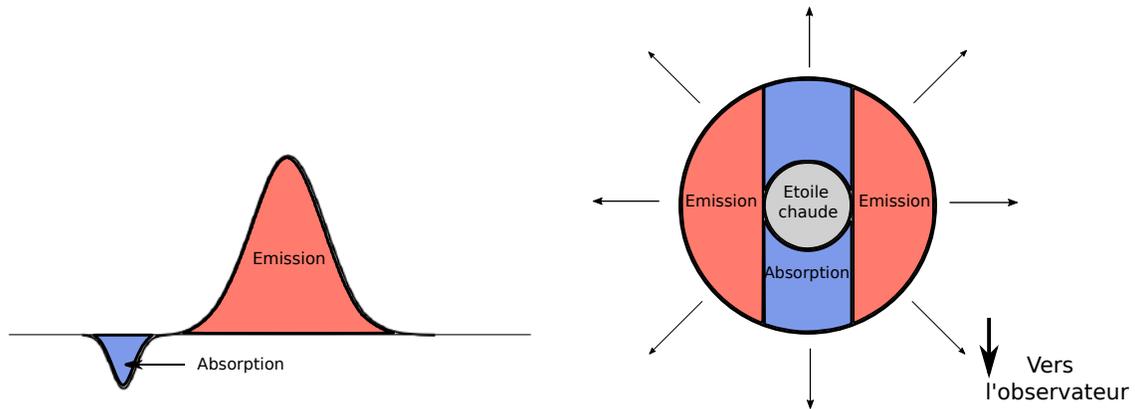


Figure 3.1: Gauche : profil de raie P Cygni consistant en une large raie d'émission et en une raie d'absorption un peu plus étroite et décalée vers bleu. Droite : Schéma de la formation d'une raie P Cygni. l'atmosphère stellaire en expansion est photo-ionisée par l'étoile et produit des raies d'émission élargies par l'accélération du vent, et l'absorption dans la région du vent entre l'étoile et l'observateur produit la raie d'absorption décalée vers le bleu. Reproduit à partir de la Fig. 10.2 de [Robinson \(2007\)](#).

premières mises en équations d'une accélération de matière par des raies d'absorption peuvent être attribuées aux travaux d'Edward Milne et de Martin Johnson, respectivement en 1924 et 1925. La théorie moderne de vents radiatif n'apparaît quant à elle que dans les années 70 avec l'émergence des satellites d'observation, par Léon Lucy et Philip Solomon en 1970 ([Lucy & Solomon, 1970](#)), puis par John Castor, David Abbott, et Richard Klein en 1975 ([Castor *et al.*, 1975](#)).

Un historique plus exhaustif peut être trouvé dans [Lamers & Cassinelli \(1999\)](#), cette sous-section en est largement inspirée.

3.2 L'accélération radiative

3.2.1 Diffusion Thomson de la radiation sur les électrons libres

Commençons par le cas simple où l'accélération radiative résulte exclusivement de la force exercée par le rayonnement sur les électrons libres, c'est-à-dire le cas d'une atmosphère stellaire complètement ionisée. Dans ce cas, si l'on se place dans un système à géométrie sphérique, l'accélération radiative au rayon r (2.4) s'écrit



Figure 3.2: Image de la nébuleuse en émission Sh2-308 autour de l'étoile Wolf-Rayet WR 6, formée de la superposition des images à bandes étroites H α (rouge) et [OIII] (bleu). Source : [Jason Jennings](#).

$$g_{\text{rad}}(r) = g_e(r) = \frac{\kappa_e L}{4\pi r^2 c}, \quad (3.1)$$

c'est-à-dire qu'elle est le produit entre l'opacité associée à la diffusion Thomson des photons sur les électrons libres $\kappa_e = 0.2(1+X) \simeq 0.34 \text{ cm}^2/\text{g}$ où X est la fraction massique d'hydrogène dans l'enveloppe stellaire, et la pression de radiation F/c . Comme dans le chapitre précédent, nous pouvons comparer cette accélération radiative à la gravité en introduisant le paramètre d'Eddington, cette fois associé à la diffusion Thomson

$$\Gamma_e = \frac{\kappa_e L}{4\pi cGM}. \quad (3.2)$$

Rappelons que ce paramètre vaut 1 lorsque la luminosité est celle d'Eddington, et que lorsqu'il a une valeur supérieure à 1, l'étoile n'est plus liée gravitationnellement.

CHAPITRE 3. VENTS RADIATIFS ISOTROPES

L'analyse des raies spectrales d'étoiles massives indique des vents radiatifs de vitesse radiale quasi-nulle au niveau de la photosphère et très supersonique, de l'ordre de $1000\text{-}1500\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ pour les étoiles de type O (la vitesse du son étant d'environ $25\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ dans l'atmosphère de ces étoiles) à un rayon stellaire de la photosphère. Nous présentons, dans cette section, en quoi ces observations sont en désaccord avec une atmosphère stellaire dont l'opacité totale est exclusivement régie par l'opacité associée à la diffusion Thomson. Pour cela, considérons le cas simple d'un vent stationnaire à symétrie sphérique. L'équation du mouvement du fluide accéléré en réponse à une force externe (gravité, accélération radiative, gradient de pression...) s'écrit

$$\rho v \frac{dv}{dr} = -\frac{dP}{dr} - \frac{GM(1 - \Gamma_e)\rho}{r^2}. \quad (3.3)$$

La pression est exprimée avec l'équation d'état du gaz parfait $P = a^2\rho$, où a est la vitesse du son du gaz isotherme et est fonction de la distance radiale r . Nous injectons maintenant cette équation d'état dans l'équation de continuité $\nabla \cdot \rho\mathbf{v} = 0$; il vient

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{da^2}{dr} - \frac{2a^2}{r} - \frac{a^2}{v} \frac{dv}{dr}, \quad (3.4)$$

et nous utilisons cette équation pour réécrire l'équation du mouvement (3.3)

$$\left[1 - \frac{a^2}{v^2}\right] v \frac{dv}{dr} = \frac{2a^2}{r} - \frac{da^2}{dr} - \frac{GM(1 - \Gamma_e)}{r^2}. \quad (3.5)$$

Simplifions maintenant le problème en considérant un vent isotherme, c'est-à-dire en prenant $da^2/dr = 0$. L'équation (3.5) devient alors

$$\left[1 - \frac{a^2}{v^2}\right] v \frac{dv}{dr} = \frac{2a^2}{r} - \frac{GM(1 - \Gamma_e)}{r^2}. \quad (3.6)$$

L'intégration directe de (3.6) donne alors la solution générale (e.g., [Owocki, 2013](#))

$$F(r, v) = \frac{v^2}{a^2} - \ln \frac{v^2}{a^2} - 4 \log \frac{r}{r_c} - 4 \frac{r}{r_c} = C, \quad (3.7)$$

où C est une constante d'intégration et r_c est le rayon critique (ou sonique) où $v = a$. Les contours de la fonction $F(r, v)$ sont représentés en Fig. 3.3 pour plusieurs valeurs de C . Les deux seules solutions transsoniques, c'est-à-dire les seules solutions telles

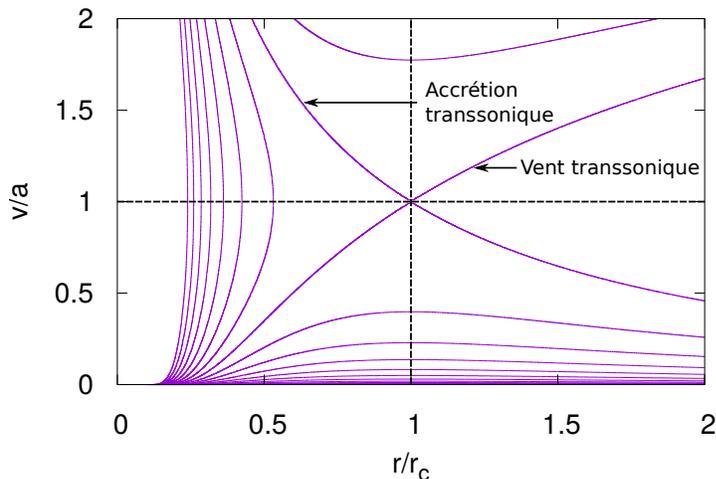


Figure 3.3: Diagramme vitesse-rayon correspondant aux solutions de l'équation du mouvement pour un vent isotherme et stationnaire résultant de la diffusion Thomson de la radiation sur les électrons libres. Seules deux solutions sont transsoniques, l'une correspond à un vent, l'autre à une accrétion.

que la vitesse du vent est localement égale à la vitesse du son, sont obtenues pour $C = -3$. La solution à pente positive est celle qui correspond à un vent, c'est-à-dire qu'elle est la seule qui correspond à un écoulement subsonique près de la surface et à un écoulement supersonique loin de l'étoile. L'autre décélère et correspond à une solution d'accrétion.

Pour avoir un vent transsonique isotherme et stationnaire, trois conditions sont donc nécessaires. (1) Si $v = a$ le terme de droite de l'équation (3.6) doit s'annuler au rayon sonique $r = r_c$. (2) Si $v < a$ le vent est subsonique et le terme de droite de l'équation (3.6) doit être négatif pour $r < r_c$; et (3) si $v > a$ le vent est supersonique et le terme de droite de l'équation (3.6) doit être négatif pour $r > r_c$. La masse de l'étoile M , la vitesse du son a , le rayon r , la densité ρ , et le paramètre d'Eddington Γ_e sont toutes des quantités positives, la condition (2) ne peut donc être respectée que si $\Gamma_e < 1$. C'est-à-dire que dans la région subsonique, un écoulement stationnaire dirigé vers l'extérieur ne peut exister que si la force de radiation est plus faible que la force de gravité. En revanche, dans la région supersonique Γ_e peut être aussi grand que l'on veut; en fait plus il sera grand et plus le gradient de vitesse et la vitesse terminale du vent seront grands. Ainsi, si $\Gamma_e > 1$ dans toute l'enveloppe de l'étoile, alors un écoulement transsonique stationnaire ne peut exister, car Γ_e est indépendant du rayon. Le vent d'une étoile complètement ionisée où $\kappa = \kappa_e$ dans toute l'enveloppe

ne peut donc être modélisé par un écoulement transsonique et stationnaire. De plus, si $\Gamma_e > 1$ dans toute l'enveloppe, l'étoile n'est plus liée gravitationnellement et toute la matière est expulsée par la force de radiation en un temps (Mihalas & Mihalas, 1984)

$$\tau_L \sim \sqrt{\frac{4\pi c R^3}{\kappa_e L}}. \quad (3.8)$$

Cependant, la diffusion lié-lié des photons sur les atomes module la valeur du rapport gravité sur accélération radiative dans les enveloppes et les atmosphères stellaires. Ainsi, la matière proche de la surface peut échapper à la gravité, et le vent peut passer d'un régime subsonique à un régime supersonique.

3.2.2 Diffusion sur les raies spectrales

Les vents stellaires sont caractérisés par un nombre d'électrons libres environ 10^4 fois plus élevé que le nombre d'électrons liés aux ions métalliques (Gayley, 1995). Ces électrons sont liés à des niveaux d'énergie discrets tels que l'énergie des photons incidents leur permettant de changer de niveau d'énergie, et donc d'émettre un photon secondaire, est bien spécifique. Ces raies apparaissent donc très étroites sur les spectres en énergie des étoiles. Nous pourrions ainsi raisonnablement affirmer que la contribution des raies spectrales à l'accélération du vent radiatif est négligeable devant celle des électrons libres, les atomes n'interagissant qu'avec une petite fraction du flux radiatif. Cependant, deux processus physiques conduisent à l'importance et même la domination de la contribution des raies spectrales à la diffusion des photons.

Le premier est la nature résonante de la diffusion par les raies spectrales. En effet, les niveaux d'énergie discrets des atomes entraînent une section efficace d'interaction avec les photons incidents ayant une énergie très proche de celles nécessaires aux transitions entre ces niveaux d'énergie, bien plus grande que celle associée à l'interaction avec les électrons libres (Stratton, 1941; Heitler, 1954; Gayley, 1995). Une manière simple de le comprendre est de se concentrer sur le cas classique (au sens où l'on néglige les effets quantiques).

Prenons un photon incident dont ν est la fréquence de l'onde électromagnétique associée, et $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$ est le champ électrique correspondant, où $\omega = 2\pi\nu$. L'équation du mouvement d'un électron libre subissant la force électrique associée au photon incident s'écrit simplement (en négligeant les effets relativistes, le champ magnétique, ainsi que la force de rétroaction de la radiation émise par l'électron sur

CHAPITRE 3. VENTS RADIATIFS ISOTROPES

lui-même)

$$m_e \ddot{\mathbf{x}} = e \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) , \quad (3.9)$$

où e est la charge de l'électron et m_e sa masse. La solution de cette équation s'écrit alors simplement

$$\mathbf{x} = -\frac{e \mathbf{E}_0}{m_e \omega^2} \cos(\omega t) . \quad (3.10)$$

Ainsi, sous l'effet du champ électrique, l'électron vibre à la même fréquence que le photon incident, puis réémet un photon secondaire, toujours à la même fréquence. La puissance du rayonnement diffusé par l'oscillateur, par unité d'angle solide et moyennée temporellement s'écrit (e.g., Heitler, 1954)

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{e^2 |\ddot{\mathbf{x}}|^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta \\ &= \frac{e^4 E_0^2}{m_e^2} \frac{1}{4\pi c^3} \sin^2 \theta \langle \cos^2(\omega t) \rangle \\ &= \frac{e^4 \sin^2 \theta E_0^2}{8\pi m_e^2 c^3} , \end{aligned} \quad (3.11)$$

où $\langle \cdot \rangle$ indique une moyenne temporelle, P est la puissance rayonnée, et θ est l'angle entre la direction d'observation \mathbf{r} et celle de la polarisation du champ électrique \mathbf{E}_0 . L'intensité du rayonnement incident s'écrit

$$I_0 = \langle S \rangle = \frac{c E_0^2}{8\pi} , \quad (3.12)$$

où $\langle S \rangle$ est le vecteur de Poynting moyenné temporellement, caractérisant la puissance véhiculée par l'onde plane par unité d'angle solide. La section efficace différentielle d'interaction entre photon incident et électron libre $\phi_T(\theta)$ s'écrit comme le rapport entre la puissance par unité d'angle solide diffusée et l'intensité énergétique incidente, c'est-à-dire

$$\phi_T(\theta) = \frac{dP/d\Omega}{I_0} = \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sin^2 \theta , \quad (3.13)$$

où $r_0 = e^2/(m_e c^2)$ est le rayon classique de l'électron. Considérons maintenant que le rayonnement incident n'est pas polarisé, on intègre alors (3.13) sur l'angle solide pour obtenir la section efficace totale d'interaction

CHAPITRE 3. VENTS RADIATIFS ISOTROPES

$$\phi_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \simeq 6.65 \times 10^{-25} \text{cm}^2 . \quad (3.14)$$

La section efficace de diffusion Thomson d'un photon sur un électron libre est donc une constante universelle indépendante de la fréquence du photon incident. Comparons maintenant cette section efficace à celle associée à la diffusion d'un photon sur un électron lié à la fréquence de résonance ν_0 . Dans ce cas, il est important de prendre en compte l'amortissement de l'oscillateur, c'est-à-dire la force de rétroaction résultant de la perte d'énergie du système lors de la diffusion du photon. L'équation de l'oscillateur harmonique s'écrit alors

$$\ddot{\mathbf{x}} + \gamma \dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = \frac{e \mathbf{E}_0}{m_e} e^{i\omega t} , \quad (3.15)$$

et sa solution

$$\mathbf{x} = \frac{e \mathbf{E}_0 / m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} e^{i\omega t} , \quad (3.16)$$

où

$$\gamma = \frac{2}{3} r_0 \frac{\omega_0^2}{c} , \quad (3.17)$$

est le coefficient d'amortissement de l'oscillateur. La puissance du rayonnement diffusé par l'oscillateur, par unité d'angle solide et moyennée sur une période

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{e^2 |\ddot{\mathbf{x}}|^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta \\ &= \frac{e^4 E_0^2}{8\pi c^3 m_e^2} \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} . \end{aligned} \quad (3.18)$$

En injectant (3.18) dans (3.13), nous obtenons la section efficace différentielle

$$\phi(\theta) = r_0^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} , \quad (3.19)$$

que nous intégrons sur l'angle solide pour obtenir la section efficace totale d'interaction

$$\phi = \phi_T \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} . \quad (3.20)$$

Nous remarquons que pour $\omega_0 \rightarrow 0$ et $\gamma \ll \omega$, nous retrouvons la section efficace de la diffusion Thomson. En revanche, lorsque la fréquence du photon incident ν

approche la fréquence de résonance ν_0 , la section efficace d'interaction d'un photon sur un électron lié est beaucoup plus grande que celle sur un électron libre. Notons aussi que si $\omega \sim \omega_0$, alors (3.20) peut être réécrite

$$\phi = \frac{\phi_T}{4} \frac{\omega^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4}, \quad (3.21)$$

et le coefficient d'amortissement γ correspond alors à la largeur à mi-hauteur du profil d'intensité de la raie considérée.

Le rapport entre la force exercée par tout le continuum sur un électron lié et celle sur un électron libre est souvent quantifié par le paramètre de qualité de résonance $Q \sim \nu_0/\gamma$ et est typiquement de l'ordre de 10^7 (Gayley, 1995). Bien que la population d'électrons liés dans l'atmosphère chaude des étoiles massives soit faible comparée à celle des électrons libres, leur contribution totale est bien supérieure (typiquement d'un facteur 2×10^3 , Gayley, 1995). Ainsi, en théorie, une étoile avec $\Gamma_e = 0.5$ peut être sujette à une accélération radiative localement 1000 fois supérieure à la gravité. Cependant, si l'on considère une atmosphère statique, les raies spectrales dans sa partie basse saturent et bloquent les fréquences pertinentes pour l'accélération radiative dans les parties plus superficielles. C'est ici qu'intervient le second processus : l'effet Doppler de l'atmosphère en expansion. Nous avons vu que la vitesse du vent augmente vers l'extérieur, les couches les plus externes de l'enveloppe stellaire sont donc en expansion induisant ainsi un décalage vers le rouge de la fréquence de résonance des raies spectrales locales. Ces dernières pourront ainsi intercepter les photons du continu à une fréquence différente de ν_0 . Ainsi, par conservation de la masse, les couches les plus internes sont aussi accélérées, en accord avec un écoulement transsonique, ce qui entraîne la dé-saturation des raies spectrales dans toute l'atmosphère stellaire.

3.2.3 La théorie de Sobolev

Modéliser l'accélération radiative associée à la diffusion des photons sur les raies spectrales dans une atmosphère en expansion est une tâche difficile, en particulier à cause de la non-localité de l'interaction radiative. Heureusement, Sobolev (1960) remarqua que dans le cas d'une atmosphère à fort gradient de vitesse radiale, la portée d'interaction radiative est fortement réduite. Dans le cas de vents supersoniques celle-ci devient même plus petite que les échelles de longueur typiques de l'écoulement, à savoir la hauteur d'échelle de densité ou de vitesse $H = |\rho/d\rho/dr| \sim |v/dv/dr|$, c'est-à-dire

$$l \sim \frac{v_{\text{th}}}{|dv/dr|} \ll H, \quad (3.22)$$

où v_{th} est la vitesse thermique. L'interaction radiative en chaque endroit de l'atmosphère r est donc essentiellement déterminée par son environnement proche (en particulier par le gradient de vitesse local) et peut donc être traitée comme un phénomène local. Cette distance caractéristique, souvent écrite l_{sob} , est appelée longueur de Sobolev. Un exemple de l'utilité de l'aspect local de l'interaction radiative est le calcul de la profondeur optique. Pour une enveloppe statique, la profondeur optique s'écrit

$$\tau_{\text{stat}} = \int_R^\infty \rho \kappa_l dr, \quad (3.23)$$

où κ_l est l'opacité (ou coefficient d'absorption massique) de la raie considérée. Pour une enveloppe en expansion et en faisant l'hypothèse d'interaction radiative locale, cette quantité peut être simplement écrite

$$\tau_{\text{exp}} = \rho \kappa_l l_{\text{sob}} = qt, \quad (3.24)$$

où

$$\tau_{\text{sob}} = \frac{\kappa_e \rho v_{\text{th}}}{dv/dr} \quad \text{et} \quad q = \frac{\kappa_l}{\kappa_e}, \quad (3.25)$$

sont respectivement la profondeur optique de Sobolev de la raie considérée et q caractérise la force de la raie ($q = 1$ pour la diffusion Thomson). De manière générale, dans le cas d'une géométrie sphérique, l'accélération radiative totale incluant la diffusion Thomson ainsi que celle sur les raies spectrales s'écrit

$$\begin{aligned} g_{\text{rad}}(r) &= g_e + g_{\text{rad}}^{\text{line}} \\ &= \frac{\kappa_e}{c} \int_{\nu=0}^\infty F_\nu d\nu + \sum_{\text{lines}} \frac{\kappa_l}{c} \oint \int_{\nu=0}^\infty \phi(\nu - \nu') I_\nu(\tau_\nu) d\Omega d\nu \\ &= \frac{\kappa_e F}{c} + \sum_{\text{lines}} \frac{\kappa_l}{c} \oint \int_{\nu=0}^\infty \phi(\nu - \nu') I_\nu(\tau_\nu) d\Omega d\nu, \end{aligned} \quad (3.26)$$

où F_ν est le flux radiatif monochromatique, I_ν est l'intensité monochromatique, F est le flux radiatif bolométrique, $\phi(\nu)$ est le profil normalisé de la raie, et

$$\nu' = \nu_0 \left(1 + \frac{v(r)}{c} \right), \quad (3.27)$$

CHAPITRE 3. VENTS RADIATIFS ISOTROPES

est la fréquence du photon incident, vue à la position \mathbf{r} dans l'atmosphère en expansion. Faisons le changement de variable

$$x = \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D} \right) , \quad (3.28)$$

où $\Delta\nu_D = \nu_0 v_{\text{th}}/c$ est la largeur Doppler. (3.26) peut alors être mise sous la forme

$$g_{\text{rad}} = \frac{\kappa_e F}{c} + \sum_{\text{lines}} \frac{\kappa_l \Delta\nu_D}{c} \oint \int_{x=-\infty}^{\infty} \phi \left(x - \frac{v(r)}{v_{\text{th}}} \right) I_\nu d\Omega dx . \quad (3.29)$$

Ici, I_ν a deux composantes : l'une correspond à un terme associé à la diffusion de la radiation, l'autre correspond à l'intensité atténuée émanant des couches inférieures de l'atmosphère stellaire. Le premier terme est négligeable à la résonance pour une atmosphère en expansion (voir [Castor, 1974](#); [Cranmer, 1996](#); [Owocki, 2013](#)). Ainsi d'après l'équation du transfert radiatif

$$I_\nu(\tau_\nu) \simeq I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} , \quad (3.30)$$

et la profondeur optique, d'après la théorie de Sobolev, peut s'écrire

$$\tau_\nu = q\tau_{\text{sob}} = \tau_{\text{exp}} \Phi(x, r) \quad (3.31)$$

où $\Phi(x, r)$ s'écrit

$$\Phi(x) \equiv \int_x^\infty \phi(x') dx' , \quad (3.32)$$

(pour plus de détails voir [Cranmer, 1996](#); [Owocki, 2013](#)). Enfin, en considérant la radiation comme étant purement radiale, c'est-à-dire en considérant qu'elle émane exclusivement du centre de l'étoile, (3.29) peut être réécrite ([Rybicki & Hummer, 1978](#))

$$\begin{aligned} g_{\text{rad}} &= \frac{\kappa_e F}{c} + \sum_{\text{lines}} \frac{\kappa_l \Delta\nu_D}{c} \oint \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x') I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} d\Omega dx \\ &= g_e + \sum_{\text{lines}} w_{\nu_0} q g_e \frac{v_{\text{th}}}{c} \frac{1 - e^{-q\tau_{\text{sob}}}}{q\tau_{\text{sob}}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

où nous avons considéré que la largeur des raies spectrales est suffisamment petite pour que $I_\nu(0)$ puisse être sorti de l'intégrale. $w_{\nu_0} \equiv \nu_0 F_\nu / F$ quantifie la force de

CHAPITRE 3. VENTS RADIATIFS ISOTROPES

chaque raie. Ainsi, dans la limite optiquement mince $\tau_\nu \ll 1$, l'accélération radiative associée à une raie spectrale s'écrit

$$g_{\text{thin}} \simeq w_{\nu_0} q g_e \frac{v_{\text{th}}}{c}, \quad (3.34)$$

et dans la limite optiquement épaisse $\tau_\nu \gg 1$

$$g_{\text{thick}} \simeq \frac{g_{\text{thin}}}{q\tau_{\text{sob}}} = \frac{Lv}{Mc} \frac{dv}{dr}, \quad (3.35)$$

où nous avons utilisé l'équation de conservation de la masse $\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v$. Nous remarquons que dans la limite optiquement épaisse, l'accélération radiative ne dépend pas de la force de la raie q , mais est fonction de l'advection du gradient de vitesse. Ainsi, l'accélération du vent générée par la diffusion des photons sur les électrons libres et sur les raies optiquement épaisses, agit rétroactivement.

L'intérêt du formalisme de Sobolev est ici évident car il permet l'évaluation analytique de l'intégrale sur x (3.33). La prochaine difficulté à surmonter provient de la quantité importante de raies pertinentes à l'accélération du vent radiatif. Heureusement, [Castor *et al.* \(1975\)](#) (CAK) proposent une paramétrisation permettant une expression simplifiée de l'accélération radiative cumulée résultant de cet ensemble de raies.

3.2.4 Paramétrisation de l'accélération radiative par CAK

L'hypothèse principale du formalisme de CAK est l'indépendance des raies spectrales (au sens où elles ne se superposent pas), permettant ainsi d'étudier la force des raies à l'aide de distributions statistiques. L'accélération radiative associée aux raies spectrales peut ainsi être réécrite

$$g_{\text{rad}}^{\text{lines}} \simeq g_e \int_0^\infty q \frac{dN}{dq} \frac{1 - e^{-q\tau_{\text{sob}}}}{q\tau_{\text{sob}}} dq \quad (3.36)$$

où dN/dq caractérise la distribution numérique des raies, pondérée par le flux radiatif du continu à leur fréquence. Cette hypothèse permet ainsi de transformer la somme sur les raies en une intégrale continue. Cette distribution numérique des raies est ensuite approximée par une loi de puissance telle que ([Castor *et al.*, 1975](#))

$$q \frac{dN}{dq} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} k (1 - \alpha) q^{\alpha-1} \left(\frac{v_{\text{th}}}{c} \right)^{-\alpha} \quad (3.37)$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma, et α et k sont les paramètres de CAK. Ces paramètres n'ont pas de signification physique évidente, mais α peut être interprété comme le rapport entre la force des raies optiquement épaisses et la force de l'ensemble des raies spectrales. Le paramètre k peut quant à lui être associé à la fraction du flux stellaire total qui serait bloqué au niveau de la photosphère si toutes les raies étaient optiquement épaisses (Puls *et al.*, 2000). Ainsi, en injectant (3.37) dans (3.36), nous obtenons l'accélération radiative associée à l'ensemble des raies spectrales

$$g_{\text{rad}}^{\text{lines}} = M(\tau_{\text{sob}})g_e \equiv k\tau_{\text{sob}}^\alpha g_e, \quad (3.38)$$

où $M(t)$ est appelé multiplicateur de force des raies. Cette formulation, cependant, introduit artificiellement la vitesse thermique qui dépend du poids moléculaire moyen de tous les ions considérés (dans la théorie de Sobolev, l'accélération radiative n'est pas fonction de la vitesse thermique). Il est donc pratique de faire le changement de variable $k = (v_{\text{th}}/c)^\alpha \bar{Q}^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ introduit par Gayley (1995) où \bar{Q} caractérise la qualité de résonance des raies cumulées et a une valeur quasi-constante de l'ordre de 2000. Il vient

$$q \frac{dN}{dq} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{q}{\bar{Q}} \right)^{\alpha-1}, \quad \text{et} \quad g_{\text{rad}}^{\text{lines}} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{\kappa_e \bar{Q} L}{4\pi r^2 c} \left(\frac{dv/dr}{\rho c \bar{Q} \kappa_e} \right)^\alpha. \quad (3.39)$$

L'intérêt de ce formalisme est donc la réduction du nombre de paramètres libres à un seul, α . Malheureusement, l'*Ansatz* de Gayley (1995) considère en réalité que la qualité de résonance des raies cumulées \bar{Q} est égale à la force de la raie la plus forte Q_0 . Tandis que Gayley (1995) suggère que cette hypothèse est toujours vérifiée, Puls *et al.* (2000) montre qu'elle n'est valable que pour des vents suffisamment chauds ($T_{\text{eff}} \gtrsim 35kK$). Dans ce manuscrit, nous considérerons des modèles d'étoiles dont la température effective ne satisfait pas toujours cette condition. Nous conserverons donc le formalisme $\{\alpha, k\}$ de CAK.

3.3 Perte de masse globale à 1D

Nous montrons, dans cette section, que l'expression de l'accélération radiative de CAK/Sobolev (3.39) faisant l'hypothèse que l'étoile est un point source de radiation, permet une dérivation relativement simple du taux de perte de masse. L'équation stationnaire du mouvement du fluide accéléré radialement s'écrit

$$\begin{aligned}
 v \frac{dv}{dr} &= g_{\text{rad}}^{\text{lines}} + g_e - \frac{GM}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \\
 &= g_{\text{rad}}^{\text{lines}} - \frac{GM(1 - \Gamma_e)}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} .
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

La complexité de cette équation réside en le fait que l'accélération radiative $g_{\text{rad}}^{\text{lines}}$ dépend de l'accélération du vent qu'elle génère (voir Eq. 3.39). Comme pour le cas d'un vent accéléré uniquement par la pression du gaz et par la diffusion Thomson de la radiation sur les électrons libre, étudié en Sect. 3.2.1, nous exprimons le gradient de pression à l'aide de l'équation d'état du gaz parfait. Il vient

$$\left(1 - \frac{a^2}{v^2}\right) v \frac{dv}{dr} = \frac{C}{r^2} \left(r^2 v \frac{dv}{dr}\right)^\alpha + \frac{2a^2}{r} - \frac{da^2}{dr} - \frac{GM(1 - \Gamma_e)\rho}{r^2}, \tag{3.41}$$

où nous avons introduit

$$C = \frac{\kappa_e L k}{4\pi c} \left(\frac{4\pi}{\kappa_e v_{\text{th}} \dot{M}}\right)^\alpha, \tag{3.42}$$

et \dot{M} est le taux de perte de masse résultant de l'équation de conservation de la masse

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(r) v(r). \tag{3.43}$$

Notons que contrairement au cas d'un vent accéléré uniquement par la pression du gaz et par la diffusion Thomson, le point sonique ($v = a$) n'est plus un point critique de l'équation du mouvement. L'équation (3.41) peut ensuite être mise sous la forme (Castor *et al.*, 1975)

$$F(u, w, w') = \left[1 - \frac{1}{2}(a^2/w)\right] w' - h(u) - C(w')^\alpha = 0, \tag{3.44}$$

où nous avons introduit $w \equiv v^2/2$, $u \equiv -1/r$, $w' \equiv dw/du$, et

$$h(u) \equiv -GM(1 - \Gamma_e) - \frac{2a^2}{u} - \frac{da^2}{du}. \tag{3.45}$$

En fonction de la valeur de u (donc de r), de w , de C , et du comportement de la fonction $h(u)$, l'équation différentielle (3.44) peut avoir une, plusieurs ou aucune

CHAPITRE 3. VENTS RADIATIFS ISOTROPES

solution (Castor *et al.*, 1975). De plus, cette équation différentielle contient un ensemble points singuliers définissant la limite de la région de l'espace des paramètres où (3.44) n'a aucune solution, et en lesquels les solutions peuvent présenter des discontinuités ou sont des points de rebroussement. Cet ensemble de points est défini par la condition de singularité

$$\frac{\partial F(u, w, w')}{\partial w'} = 1 - \frac{a^2}{2w} - \alpha C(w')^{\alpha-1} = 0 . \quad (3.46)$$

Castor *et al.* (1975) remarque que pour que w' soit une fonction continue de u , la solution $w'(u)$ doit être tangente à la courbe définissant l'ensemble des points singuliers. Ainsi, la solution ne contient qu'un seul point singulier. En supposant que $w(u)$ est une solution de l'équation différentielle (3.44) telle que $w''(u)$ existe en tout point, nous pouvons différencier (3.44) par rapport à u , au point singulier

$$\left(\frac{dF}{du} \right)_c = \left[\frac{\partial F}{\partial u} + w' \frac{\partial F}{\partial w} + w'' \frac{\partial F}{\partial w'} \right]_c = 0 , \quad (3.47)$$

où l'indice c indique que l'on se place au point singulier interceptant la solution. En ce point singulier, la condition de singularité implique que $\partial F / \partial w' = 0$ et ainsi la condition de régularité s'écrit

$$\left(\frac{dF}{du} \right)_c = \left[\frac{\partial F}{\partial u} + w' \frac{\partial F}{\partial w} \right]_c = 0 . \quad (3.48)$$

Connaissant la position du point singulier (aussi appelé point critique) u_c (ou r_c), les équations (3.44), (3.46) et (3.48) en ce point particulier permettent de déterminer C , donc le taux de perte de masse \dot{M} de l'étoile. En faisant l'hypothèse raisonnable que la pression du gaz ne joue aucun rôle dans l'accélération du vent, l'équation (3.44) peut être plus simplement réécrite

$$F(w') = w' + GM(1 - \Gamma_e) - C(w')^\alpha = 0 . \quad (3.49)$$

Notons que F n'est plus fonction de u et de w , c'est-à-dire que la condition de régularité (3.48) est donc toujours respectée. La condition de singularité (3.46), quant à elle, est réécrite

$$\frac{\partial F(w')}{\partial w'} = 1 - \alpha C(w')^{\alpha-1} = 0 . \quad (3.50)$$

En combinant ces deux dernières équations, il vient

$$w' = GM(1 - \Gamma_e) \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{\alpha^\alpha} \left(\frac{GM(1 - \Gamma_e)}{1 - \alpha} \right)^{1-\alpha}, \quad (3.51)$$

au point critique. Il suffit maintenant de remplacer l'expression de C dans (3.42) pour obtenir l'expression de taux de perte de masse au point critique

$$\dot{M} = \frac{4\pi GM}{\kappa_e v_{\text{th}}} \alpha \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \Gamma_e} \right)^{(1-\alpha)/\alpha} (k\Gamma_e)^{1/\alpha}. \quad (3.52)$$

Comme mentionné plus haut, lorsque l'on néglige la pression du gaz, la condition de régularité est vérifiée en tout point et la solution est dégénérée. Le profil radial de la vitesse du vent radiatif peut donc être déterminé en faisant le changement de variable inverse, il vient

$$v(r) = v_\infty \left(1 - \frac{R}{r} \right)^b, \quad (3.53)$$

où $b = 1/2$ et

$$v_\infty = v_{\text{esc}} \sqrt{\frac{\alpha}{1 - \alpha}}, \quad (3.54)$$

est la vitesse terminale du vent, et $v_{\text{esc}} = \sqrt{2GM(1 - \Gamma_e)/R}$ est la vitesse effective d'échappement à la surface de l'étoile. L'inclusion du gradient de pression dans l'équation du mouvement permet de lever cette dégénérescence, et la prise en compte additionnelle du disque fini de l'étoile (cf Sect. 3.4) donne un rayon critique très proche de la photosphère (e.g., Pauldrach *et al.*, 1986). Nous considérerons donc que le point critique est situé au rayon photosphérique, et le taux de perte de masse (3.52) est donc évalué à la photosphère.

3.4 Correction du disque fini de l'étoile et du degré d'ionisation du vent

3.4.1 Correction du disque fini

Jusqu'ici, nous avons fait l'hypothèse que l'étoile est un point source de radiation, c'est-à-dire que les photons se propagent uniquement dans la direction radiale. Cette approximation néglige donc la contribution non radiale des photons émis par le

disque photosphérique. Bien qu'ils ne l'appliquent pas à leurs modèles, [Castor *et al.* \(1975\)](#) donnent l'expression de la profondeur de Sobolev prenant en compte ces effets géométriques qui s'écrit

$$t^{\text{fd}} = t \frac{dv}{dr} \left((1 - \mu^2) \frac{v}{r} + \mu^2 \frac{dv}{dr} \right)^{-1}, \quad (3.55)$$

où μ est le cosinus de l'angle que fait la direction du photon et la normale à la surface (sphérique) de l'étoile. Le multiplicateur de force corrigé du disque fini de l'étoile s'écrit alors ([Pauldrach *et al.*, 1986](#))

$$M^{\text{fd}}(\tau_{\text{sob}}, v, \frac{dv}{dr}, r) = M(\tau_{\text{sob}}) \frac{2}{1 - \mu_c^2} \int_{\mu_c}^1 \left[\left((1 - \mu^2) \frac{v}{r} + \mu^2 \frac{dv}{dr} \right) \left(\frac{dv}{dr} \right)^{-1} \right]^\alpha \mu d\mu, \quad (3.56)$$

où

$$\mu = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2}. \quad (3.57)$$

Faisons le changement de variable

$$x = \left((1 - \mu^2) \frac{v}{r} + \mu^2 \frac{dv}{dr} \right) \left(\frac{dv}{dr} \right)^{-1} \quad \text{avec} \quad dx = 2\mu \frac{dv/dr - v/r}{dv/dr} d\mu. \quad (3.58)$$

L'intégrale (3.56) s'écrit alors

$$\begin{aligned} M^{\text{fd}}(\tau_{\text{sob}}, v, \frac{dv}{dr}, r) &= M(\tau_{\text{sob}}) \frac{dv/dr}{(1 - \mu_c^2)(dv/dr - v/r)} \int_{x(\mu_c)}^1 x'^\alpha dx' \\ &= M(\tau_{\text{sob}}) \frac{dv/dr}{(1 - \mu_c^2)(dv/dr - v/r)} \left(\frac{1 - x(\mu_c)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

où $\mu_c = \mu(r_c)$.

Comme discuté plus haut (Sect. 3.3), nous considérons que le rayon critique auquel nous évaluons le taux de perte de masse, est très proche du rayon photosphérique, ainsi $\mu_c \ll 1$. De plus, d'après (3.53), nous notons qu'au point critique

$$\frac{v/r_c}{dv/dr} = \frac{r_c}{bR} \left(1 - \frac{R}{r_c} \right) \ll 1, \quad (3.60)$$

où $b = 1/2$ dans la théorie de CAK et $b = 0.7-1$ d'après les études observationnelles (e.g. Puls *et al.*, 1996; Krtićka & Kubát, 2011). Ainsi, $x(\mu_c) \simeq (v/r_c)/dv/dr \ll 1$ et donc

$$M^{\text{fd}}(\tau_{\text{sob}}, 0, \frac{dv}{dr}, r_c) \simeq \frac{M(\tau_{\text{sob}})}{\alpha + 1}. \quad (3.61)$$

L'accélération radiative corrigée s'écrit alors simplement

$$g^{\text{fd}} \simeq \frac{g_{\text{rad}}^{\text{lines}}}{\alpha + 1}, \quad (3.62)$$

et l'équation du mouvement du fluide accéléré, dans le cas où l'on néglige la pression du gaz devient

$$F(w')_c = \left[w' + GM(1 - \Gamma_e) - \frac{C}{\alpha + 1}(w')^\alpha \right]_c = 0, \quad (3.63)$$

résultant finalement en un taux de perte de masse corrigé du disque photosphérique fini

$$\dot{M}^{\text{fd}} \simeq \frac{\dot{M}}{(\alpha + 1)^{1/\alpha}}. \quad (3.64)$$

Le paramètre α étant généralement compris entre 0.4 et 0.7 (voir Eq. 3.68 pour les valeurs choisies), la correction du disque fini de l'étoile réduit le taux de perte de masse global d'un facteur de l'ordre de 4/9.

3.4.2 Correction du degré d'ionisation du vent

Jusqu'ici, nous avons fait l'hypothèse que la valeur des paramètres du multiplicateur de force α et k ne varient pas radialement dans le vent. Abbott (1982) propose un modèle plus réaliste prenant en compte les variations radiales de l'ionisation des métaux dans le vent, entraînant une dépendance supplémentaire du multiplicateur de force avec la densité particulière en électrons n_e (exprimé en 10^{11}cm^{-3}) et du facteur de dilution de la radiation $W = 0.5(1 - \mu_c)$

$$M^i(\tau_{\text{sob}}) = \left(\frac{n_e}{W} \right)^\delta M(\tau_{\text{sob}}) = \left(\frac{n_e}{W} \right)^\delta k \tau_{\text{sob}}^{-\alpha}, \quad (3.65)$$

où δ est typiquement de l'ordre de 0.1 à métallicité solaire (Abbott, 1982). Nous remarquons qu'utiliser ce multiplicateur de force corrigé implique $g_{\text{rad}}^{\text{lines}} \propto \rho^{\delta-\alpha}$ (Eq. 3.39), c'est-à-dire que l'exposant α dans l'expression du taux de perte de masse (3.52) peut être remplacé par $\alpha' = \alpha - \delta$. Ainsi, l'expression du taux de perte de masse de CAK corrigée des effets du disque photosphérique fini et des variations radiales de l'ionisation dans le vent, s'écrit finalement (toujours dans le cas sans rotation)

$$\dot{M} = \frac{1}{(\alpha + 1)^{1/\alpha}} \frac{4\pi GM}{\kappa_e v_{\text{th}}} \alpha \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \Gamma_e} \right)^{(1-\alpha')/\alpha'} (k\Gamma_e)^{1/\alpha'} . \quad (3.66)$$

3.5 La limite de bi-stabilité

D'après (3.66), il est évident qu'en plus des paramètres stellaires standards, le taux de perte de masse de l'étoile va fortement dépendre du degré d'ionisation du vent ainsi que de la population des niveaux d'énergie des raies contribuant à l'accélération de ce dernier. Un phénomène en particulier nous intéresse dans ce travail de thèse : le mécanisme de bi-stabilité. Ce mécanisme a été rencontré pour la première fois par Pauldrach *et al.* (1990) en modélisant l'étoile P Cygni. Ils remarquèrent en effet l'existence de deux solutions distinctes pour le vent radiatif, en fonction du degré d'ionisation de ce dernier. L'une correspondant à un vent rapide et peu dense dans le cas très ionisé, l'autre correspondant à un vent plus lent et plus dense pour des degrés d'ionisation plus faibles. Lamers *et al.* (1995), étudiant des étoiles de types spectraux O à F, montra l'existence d'une température "critique" de l'ordre de $21kK$ à laquelle la vitesse terminale du vent et le taux de perte de masse changent drastiquement. En particulier, v_∞ et \dot{M} sont discontinus à cette température effective, la première voit sa valeur augmenter d'un facteur ~ 2 et la seconde diminuer d'un facteur ~ 5 en passant du côté froid au côté chaud (Vink *et al.*, 2001). Vink *et al.* (1999) montre que l'accélération du vent radiatif pour les étoiles de type spectral O et B est dominée par les raies du Fe III, et que la fraction du fer à ce degré d'ionisation augmente drastiquement autour de cette température critique (qu'il estime être de l'ordre de $25kK$), expliquant ainsi l'existence du saut de bi-stabilité. A ce stade, il est important de mentionner que la taille du saut de bi-stabilité, sa position en terme de T_{eff} , et son existence même n'ont pas été vérifiées observationnellement. En particulier, Markova & Puls (2008) trouve un saut de \dot{M} d'un facteur compris entre 0.4 et 2.5, et les modèles théoriques récents de Petrov *et al.* (2016) estiment la température du saut de bi-stabilité à $T_{\text{eff}}^{\text{jump}} \simeq 20 \text{ kK}$, à comparer au facteur ~ 10 et à la température effective $T_{\text{eff}}^{\text{jump}} \simeq 25 \text{ kK}$, résultant des simulations Monte Carlo de Vink *et al.* (2001). Crowther *et al.* (2006) quant à lui, observe une diminution de la vitesse terminale du

vent v_∞ plus graduelle (donc une augmentation plus graduelle de \dot{M}) du côté chaud au côté froid de la limite, pour des étoiles supergéantes O9.5–B3, à métallicité solaire.

3.6 Paramétrisation des paramètres α et k

L’expression du taux de perte de masse d’une étoile sans rotation (3.66) est fonction des paramètres stellaires tels que la masse de l’étoile considérée, son rayon et sa luminosité. Les paramètres α et k sont cependant inconnus *a priori* et doivent donc être choisis, plus ou moins arbitrairement. Comme mentionné plus haut, nous prendrons $\delta = 0.1$ en gardant à l’esprit que ce paramètre peut prendre des valeurs bien plus élevées dans les étoiles à faible métallicité où le vent est essentiellement accéléré par les raies d’hydrogène, et peut même prendre des valeurs négatives dans certains cas précis (Puls *et al.*, 2000). Pour ce qui est du paramètre α , ses valeurs sont généralement calibrées à l’aide de la relation “wind momentum-luminosity” (Kudritzki *et al.*, 1995; Puls *et al.*, 1996; Kudritzki & Puls, 2000; Kudritzki, 2002) qui peut être obtenue en combinant l’expression du taux de perte de masse (3.66) et celle du profil radial de la vitesse (3.53)

$$\dot{M}v_\infty \propto R^{-1/2}L^{1/\alpha'} . \quad (3.67)$$

Le taux de perte de masse peut alors être déterminé en ajustant des modèles d’atmosphère aux raies de Balmer en émission (H_α) observées, la vitesse terminale du vent peut être obtenue avec le profil des raies P-Cygni, et la luminosité et le rayon de l’étoile peuvent être estimés par spectroscopie. Malheureusement, à l’heure actuelle, il n’existe pas de modèle convaincant pour α . Nous choisissons donc des valeurs fixes aux températures effectives $T_{\text{eff}} = 10kK$, $20kK$, $30kK$ et $40kK$, et interpolons linéairement entre elles (communication privée de J. Puls), c’est-à-dire

$$\alpha(T_{\text{eff}}) = \begin{cases} 0.45, & \text{si } T_{\text{eff}} \leq 10kK \text{ ,} \\ 1.5 \times 10^{-5}T_{\text{eff}} + 0.3, & \text{si } 10kK < T_{\text{eff}} \leq 20kK \text{ ,} \\ 5 \times 10^{-6}T_{\text{eff}} + 0.5, & \text{si } 20kK < T_{\text{eff}} \leq 40kK \text{ ,} \\ 0.7, & \text{si } T_{\text{eff}} > 40kK \text{ .} \end{cases} \quad (3.68)$$

Cette fonction de la température effective est représentée Fig. 3.4.

Nous choisissons de calibrer le paramètre k en considérant que le taux de perte de masse calculé avec (3.66) est égal à celui obtenu avec la prescription de Vink *et al.*

(2001) à métallicité solaire et pour des étoiles sans rotation. Cette dernière dérive d’une méthode alternative à la théorie de CAK pour déterminer le taux de perte de masse des étoiles O et B. Elle repose sur une méthode de Monte Carlo développée par Abbott & Lucy (1985). L’idée derrière cette approche est la suivante : l’énergie de radiation perdue par l’étoile est directement liée à la quantité de mouvement gagnée par l’écoulement associé au vent. Cette quantité de mouvement gagnée par le vent est calculée en suivant chaque photon émis sous la photosphère et en décrivant chacune de ses interactions (Abbott & Lucy, 1985; Vink *et al.*, 1999, 2000, 2001). Bien que cette méthode nécessite l’utilisation d’un modèle d’atmosphère (rendant ainsi le calcul cohérent du taux de perte de masse avec un modèle d’évolution stellaire difficile du point de vue numérique), elle a pour intérêt de prendre en considération les “diffusions multi-raies” (*multi-line scattering* en anglais). C’est-à-dire que les photons sont autorisés à diffuser sur les raies plusieurs fois entre la surface et l’infini, grâce à l’effet Doppler. Il est intéressant de regarder l’effet de ces diffusions multiples du point de vue de l’efficacité du transfert d’énergie entre la radiation totale et le vent. Le rapport entre la quantité de mouvement du vent et celle associée à la radiation s’écrit

$$\eta \equiv \frac{\dot{M}v_\infty}{L/c} = N_{\text{thick}} \frac{v_\infty}{c}, \quad (3.69)$$

où η caractérise “l’efficacité” du vent, et N_{thick} est le nombre de raies optiquement épaisses. Pour que la superposition des raies puisse être négligée (c’est le principe d’indépendance des raies spectrales de CAK), il faut que la distance (en terme d’écart de vitesse) entre deux raies optiquement épaisses

$$\Delta v \simeq \frac{c}{N_{\text{thick}}}, \quad (3.70)$$

soit supérieure à la vitesse terminale du vent. Autrement dit, il faut que $\eta < 1$, ce qui est le cas pour la plupart des étoiles de types O et B (Cranmer, 1996; Owocki, 2013). Le cas $\eta = 1$ correspond au cas où toute l’énergie de radiation de l’étoile est transférée au vent via la diffusion simple (unique) des photons. Notons qu’autour de la limite de bi-stabilité, la quantité de mouvement du vent est discontinue et est ~ 2.5 fois plus faible du côté chaud que du côté froid. Ainsi, d’après Vink *et al.* (2001), η voit sa valeur varier de ce facteur à la température du saut de bi-stabilité. Notons aussi que la quantité de mouvement du vent des étoiles Wolf-Rayet est très supérieure à celle des étoiles de types O et B, à luminosité comparable. Pour ces étoiles η peut atteindre des valeurs bien supérieures à 1 et la superposition des raies optiquement épaisses ne peut plus être négligée, c’est-à-dire que la paramétrisation de l’accélération radiative de CAK n’est pas valable pour ces étoiles.

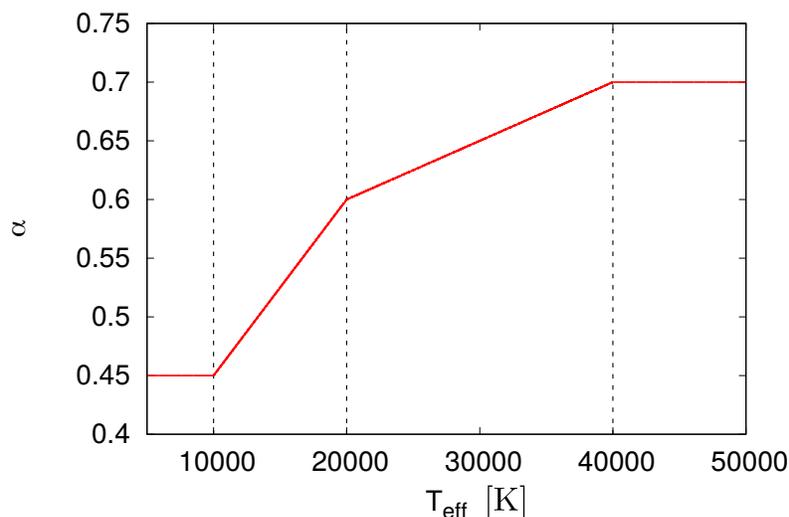


Figure 3.4: Paramètre α du multiplicateur de force en fonction de la température effective T_{eff} d’après (3.68) (avec l’aimable autorisation de J. Puls). Les traits noirs situent les valeurs de α imposées. Source : Gagnier *et al.* (2019a).

Vink *et al.* (2001) propose une recette simple pour estimer le taux de perte de masse, tirée de fits de ses simulations Monte Carlo, et fonction des paramètres stellaires standards uniquement (L , M , T_{eff} , et Z). Cette prescription prend en considération le saut de bi-stabilité en calculant la contribution d’un très grand nombre de raies spectrales dans un modèle d’atmosphère en expansion. Ce modèle permet le calcul de la structure thermique du vent, son ionisation ainsi que la population des niveaux d’énergie des ions considérés (Vink *et al.*, 1999). Notre calibration du paramètre k se fait alors ainsi : nous considérons que le taux de perte de masse (3.66) est égal à celui obtenu par la prescription de Vink *et al.* (2001) et nous calculons une valeur de k pour différents modèles ESTER à 1D dont la masse est comprise entre 5 et $60 M_{\odot}$ (donc pour des températures effectives comprises entre ~ 17 et $\sim 47kK$). D’après (3.66), il vient

$$k = \frac{(\alpha + 1)^{\alpha'/\alpha}}{\Gamma_e} \left(\frac{\kappa_e v_{\text{th}} \dot{M}_{\text{vink}}}{4\pi GM\alpha} \right)^{\alpha'} \left(\frac{1 - \Gamma_e}{1 - \alpha} \right)^{1 - \alpha'}, \quad (3.71)$$

et un simple fit de ces points nous donne la fonction $k'(T_{\text{eff}})$. Nous prenons v_{th} comme étant la vitesse thermique des ions Fe, principaux contributeurs à l’accélération du vent, c’est-à-dire $v_{\text{th}} \equiv (2k_B T_{\text{eff}}/m_{\text{Fe}})^{1/2}$. Cependant, parce que nous utilisons la prescription de Vink *et al.* (2001), chaque raie est considérée avec le v_{th} approprié. Il est donc important de préciser que le choix de la vitesse thermique est arbitraire,

c'est d'ailleurs souvent celle du proton qui est choisie dans la littérature. En utiliser une autre donnera différentes valeurs de k mais ne modifiera pas le taux de perte de masse résultant de la calibration (car $k \propto v_{\text{th}}^{\alpha'}$ et $\dot{M} \propto k^{1/\alpha'}/v_{\text{th}}$). De plus, nous avons remarqué (mais ne le montrons pas dans ce manuscrit) que la valeur de k dépend légèrement du stade évolutif de l'étoile. Nous devons donc arbitrairement choisir celui à considérer. Nous décidons d'évaluer k à la ZAMS. Les valeurs de k pour chaque modèle sans rotation, à la ZAMS, et de masse comprise entre 5 et 60 M_{\odot} , ainsi que la fonction $k'(T_{\text{eff}})$ correspondant au fit de ces dernières, sont représentées Fig. 3.5. Nous en déduisons l'expression semi-empirique de $k'(T_{\text{eff}})$ à $Z = 0.02$, des deux côtés du saut de bi-stabilité

$$k'(T_{\text{eff}}) \simeq \begin{cases} \exp(-2.15 \times 10^{-4} T_{\text{eff}} + 2.41), & \text{pour } T_{\text{eff}} \leq 20 \text{ kK}, \\ -3.00 \times 10^{-6} T_{\text{eff}} + 0.22, & \text{pour } 20 \text{ kK} < T_{\text{eff}} \leq T_{\text{eff}}^{\text{jump}}, \\ 1.16 \times 10^{-6} T_{\text{eff}} + 0.08, & \text{pour } T_{\text{eff}} > T_{\text{eff}}^{\text{jump}}, \end{cases} \quad (3.72)$$

où Vink *et al.* (2001) définit la température du saut de bi-stabilité comme suit

$$T_{\text{eff}}^{\text{jump}} = 61.2 + 2.59 \log \langle \rho \rangle \quad (3.73)$$

où $\langle \rho \rangle$ est la densité du vent (exprimée en $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) au rayon où sa vitesse est égale à 50 % de sa vitesse terminale, et est donnée par

$$\log \langle \rho \rangle = -14.94 + 3.2 \Gamma_e . \quad (3.74)$$

Nous avons maintenant tous les paramètres nécessaires pour calculer le taux de perte de masse des étoiles massives à métallicité solaire (et dans la limite des températures effectives inférieures à 50 kK, qui est la valeur maximale du domaine exploré par Vink *et al.*, 2001).

Outre les incertitudes associées au saut de bi-stabilité décrites précédemment, il est important de préciser que la prescription de Vink *et al.* (2001) donne des taux de perte de masse deux à trois fois plus élevés que ceux obtenus par des diagnostics X, UV et infrarouges (voir Najarro *et al.*, 2011; Sundqvist *et al.*, 2011; Bouret *et al.*, 2012; Cohen *et al.*, 2013; Leutenegger *et al.*, 2013; Hervé *et al.*, 2013; Rauw *et al.*, 2015) et ceux obtenus en évaluant l'accélération radiative locale à l'aide d'un modèle d'atmosphère hors équilibre thermodynamique local (Björklund *et al.*, 2020). Ces différences peuvent être expliquées de plusieurs manières. Premièrement, la prescription de Vink *et al.* (2001) considère la mixture solaire maintenant désuète de Anders & Grevesse (1989) avec $Z_{\odot} \simeq 0.02$. Les travaux plus récents de Asplund *et al.* (2009)

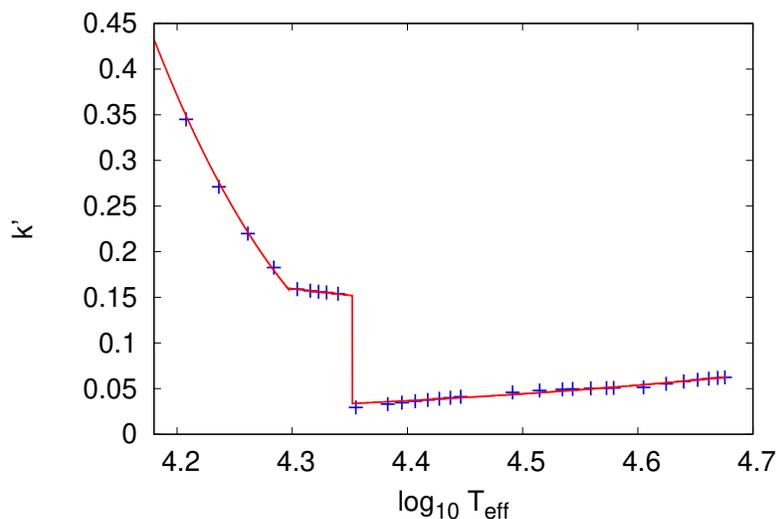


Figure 3.5: Paramètre k du multiplicateur de force calibré en fonction de la température effective T_{eff} , pour plusieurs modèles ESTER à 1D dont la masse est comprise entre 5 et 60 M_{\odot} , à la ZAMS, et pour $Z = 0.02$. Le trait rouge correspond au fit correspondant, c’est-à-dire $k'(T_{\text{eff}})$. Source : [Gagnier *et al.* \(2019a\)](#).

donnent quant à eux $Z_{\odot} \simeq 0.014$. Nous verrons plus tard qu’une diminution de la métallicité entraîne, entre autre, une réduction du taux de perte de masse. Une autre explication, plus fondamentale, vient du fait que les modèles de [Vink *et al.* \(2001\)](#) ne prennent pas en considération les inhomogénéités dans le vent radiatif. Ces inhomogénéités, à la fois en terme de vitesse et de densité, résultent d’une très forte instabilité du vent à petites échelles (appelée *line-deshadowing instability*, [Owocki & Rybicki, 1984](#); [Owocki *et al.*, 1988](#)), et apparaissent lorsque l’on relaxe l’hypothèse stationnaire et l’approximation de Sobolev. L’effet dominant de cette instabilité est la concentration de la matière en “clumps” dont l’échelle spatiale est de l’ordre de la longueur de Sobolev. Ce phénomène résulte en une augmentation locale de l’absorption massique des raies contribuant à l’accélération du vent dans les clumps, et en sa diminution entre les clumps où l’espace peut être considéré comme étant vide, permettant ainsi une transmission localement totale du flux radiatif. La résultante nette tend vers une réduction de l’absorption massique des raies, donc en une diminution du taux de perte de masse de l’étoile considérée (pour plus de détails, voir [Owocki & Rybicki, 1984](#); [Lucy, 1984](#); [Owocki & Puls, 1999](#); [Puls *et al.*, 2008](#)).

3.7 Résumé

Nous concluons ce chapitre en résumant brièvement les résultats qui y ont été présentés. Après avoir exposé le concept d'atmosphère en expansion à travers un bref historique, nous avons présenté la notion d'accélération radiative. En particulier, nous avons montré qu'une atmosphère dont l'opacité totale est exclusivement régie par la diffusion Thomson n'est pas en accord avec les observations de vents radiatifs, car elle ne permet pas une solution de vent transsonique et stationnaire. Nous avons ensuite montré que la section efficace d'interaction entre un photon et un électron lié est très supérieure à celle associée à l'interaction d'un photon avec un électron libre. Ainsi, bien que la population d'électrons liés dans l'atmosphère chaude des étoiles massives (de types O et B) est faible comparée à celle des électrons libres, leur contribution totale est bien supérieure. Nous avons ensuite exposé la théorie de Sobolev permettant de modéliser analytiquement l'accélération radiative associée à la diffusion des photons sur les raies spectrales dans une atmosphère en expansion, et nous avons présenté sa paramétrisation statistique proposée par CAK. Nous avons ensuite présenté la dérivation de l'expression analytique du taux de perte de masse de CAK, et avons exposé les différentes corrections permettant une évaluation plus précise de ce taux de perte de masse. Le concept de limite de bi-stabilité a ensuite été introduit, et nous avons décrit notre méthodologie pour estimer la dépendance en température effective des coefficients inconnus associés à la théorie de CAK. Enfin, nous avons énoncé les limites de notre modélisation de la perte de masse à une dimension, au vu des hypothèses considérées.

Chapitre 4

Vents radiatifs anisotropes

Dans le chapitre précédent, nous avons tâché de décrire le modèle standard des vents radiatifs en re-dérivant l'expression du taux de perte de masse de CAK auquel nous avons ajouté quelques corrections. Cette expression dépend des paramètres globaux de l'étoile : sa masse, sa luminosité et son rayon, et de paramètres peu contraints (en particulier α et k). Ces derniers ont ensuite été calibrés nous permettant ainsi d'estimer le taux de perte de masse des étoiles massives sans rotation. Dans ce chapitre, nous cherchons à déterminer une expression locale pour les flux de masse et de moment cinétique à la surface des étoiles en rotation. Les résultats principaux de ce travail ont été publiés dans [Gagnier *et al.* \(2019a\)](#).

4.1 Dépendances latitudinales du flux de masse et de moment cinétique

Dans ce chapitre, nous faisons l'hypothèse que l'expression du taux de perte de masse locale à la surface des étoiles en rotation garde les mêmes dépendances en les paramètres stellaires fondamentaux. Ainsi, d'après l'expression du taux de perte de masse isotrope (3.66), nous écrivons le flux de masse local

$$\dot{m}(\theta) = \frac{4}{9} \frac{\alpha(\theta) k'(\theta)^{1/\alpha'(\theta)}}{v_{\text{th}}(\theta) c} \left[\frac{c}{\kappa_e (1 - \alpha(\theta))} \left(|g_{\text{eff}}(\theta)| - \frac{\kappa_e F(\theta)}{c} \right) \right]^{\frac{\alpha'(\theta)-1}{\alpha'(\theta)}} F(\theta)^{1/\alpha'(\theta)} . \quad (4.1)$$

A première vue, cette expression indique une extraction de masse favorisée aux

pôles car le flux radiatif y est maximum (e.g. Owocki & Gayley, 1997; Owocki *et al.*, 1998b; Petrenz & Puls, 2000; Maeder & Meynet, 2000). Notre approche implique implicitement la présence d’une composante non radiale de la force de radiation, dirigée vers les pôles. Cette dernière résulte de la distribution de la vitesse radiale en surface qui décroît vers l’équateur, et est essentielle pour inhiber l’écoulement dirigé vers l’équateur qui en résulterait. L’amplitude de cette composante non-radiale étant faible, elle peut être négligée dans le calcul du flux de masse (voir Owocki *et al.*, 1998b, pour plus de détails). Notons l’approche différente de Curé (2004), qui dérive une expression analytique du flux de masse local en ajoutant la force centrifuge à l’équation de CAK (3.44). Cette dernière n’est cependant prise en compte qu’à l’équateur et cette méthode n’est donc pas adaptée pour inférer le taux de perte de masse global des étoiles massives.

Le flux de moment cinétique associé au flux de masse s’écrit quant à lui

$$\dot{\ell}(\theta) = \dot{m}(\theta)\Omega(\theta)R^2(\theta)\sin^2\theta . \quad (4.2)$$

Les distributions surfaciques de ces deux quantités calculées à partir de modèles ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ à la ZAMS, avec $Z = 0.02$, et pour plusieurs rapports des vitesses angulaires $\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_{\text{K}}$, sont représentées en Fig. 4.1. Nous remarquons que loin de la limite Ω , le flux de masse est maximum aux pôles, et décroît vers l’équateur. Nous notons, cependant, il existe un rapport des vitesses angulaires ω au delà duquel l’étoile franchit la limite de bi-stabilité, c’est-à-dire que la température équatoriale devient plus faible que la température du saut de bi-stabilité. Lorsque cela se produit, le flux de masse est fortement accru dans la région à la surface de l’étoile comprise entre θ_{jump} , c’est-à-dire la colatitute où $T_{\text{eff}} = T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$, et l’équateur. Dans ce cas, l’étoile est considérée comme étant en régime TWR (Two-Winds Regime). Si cette colatitute critique n’existe pas, c’est-à-dire s’il n’existe pas de colatitute où $T_{\text{eff}} = T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$ à la surface de l’étoile, alors l’étoile est considérée comme étant en régime SWR (Single-Wind Regime). Ainsi, la présence de ce saut local de bi-stabilité modifie fortement la distribution surfacique du flux de masse : tandis qu’il est maximum aux pôles dans le régime SWR, il est beaucoup plus important dans les régions équatoriales en régime TWR. De la même manière, le flux de moment cinétique est fortement polarisé dans les régions équatoriales en régime TWR. Cette idée d’augmentation du flux de masse local, résultant à la fois du saut de bi-stabilité et de l’assombrissement gravitationnel, a déjà été discuté par le passé (voir par exemple Zickgraf *et al.*, 1986, 1989; Lamers & Pauldrach, 1991; Owocki & Gayley, 1997; Owocki *et al.*, 1998a; Pelupessy *et al.*, 2000).

Ce changement dans la distribution latitudinale du flux de moment cinétique est

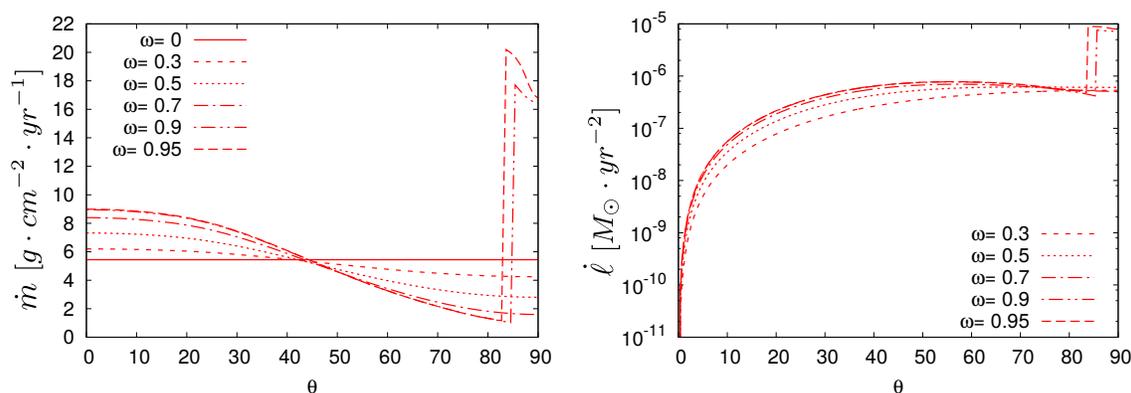


Figure 4.1: Flux de masse \dot{m} (gauche) et flux de moment cinétique $\dot{\ell}$ (droite) en surface en fonction de la colatitude θ , pour un modèle ESTER à 2D de $15 M_{\odot}$ à la ZAMS, avec $Z = 0.02$, et pour plusieurs rapports de vitesse angulaire ω . Pour ce modèle, la limite de bi-stabilité est atteinte à l'équateur pour $\omega \gtrsim 0.85$, induisant ainsi un fort flux de masse et de moment cinétique entre la colatitude critique θ_{jump} et l'équateur. Source : Gagnier *et al.* (2019a).

particulièrement important lorsque l'on s'intéresse à l'évolution stellaire séculaire. En effet, en régime SWR, la perte de masse maximale au niveau des pôles permet aux étoiles massives en rotation rapide de perdre de la masse sans perdre énormément de moment cinétique durant la séquence principale. Elles peuvent ainsi conserver leur rotation rapide (en terme de rapport des vitesses angulaires) tout au long de leur évolution. En revanche, une étoile massive en régime TWR voit sa perte de masse essentiellement localisée dans les régions équatoriales, et perd alors beaucoup plus de moment cinétique. Cette perte de moment cinétique accrue en régime TWR pourrait donc induire une chute de ω au cours de l'évolution stellaire. Ce phénomène sera examiné dans le chapitre suivant; il ne doit cependant pas être confondu avec le freinage de bi-stabilité (“bi-stability braking” en anglais) introduit par Vink *et al.* (2010), qui est phénomène purement unidimensionnel correspondant à la transition de la *température effective moyenne* entre le côté chaud et le côté froid du saut de bi-stabilité. Notons qu'une étoile n'a pas besoin d'être proche de la limite de vitesse angulaire képlérienne pour atteindre, localement, la limite de bi-stabilité. En effet, une étoile en rotation “lente” dont la température effective équatoriale n'est que légèrement supérieure à la température du saut peut atteindre la TWR avec une légère augmentation de ω . Nous illustrons cela en Fig. 4.2 où nous représentons la distribution surfacique du flux de masse calculée à partir de modèles ESTER 2D de $8 M_{\odot}$ à la ZAMS, avec $Z = 0.02$, et pour plusieurs valeurs de ω .

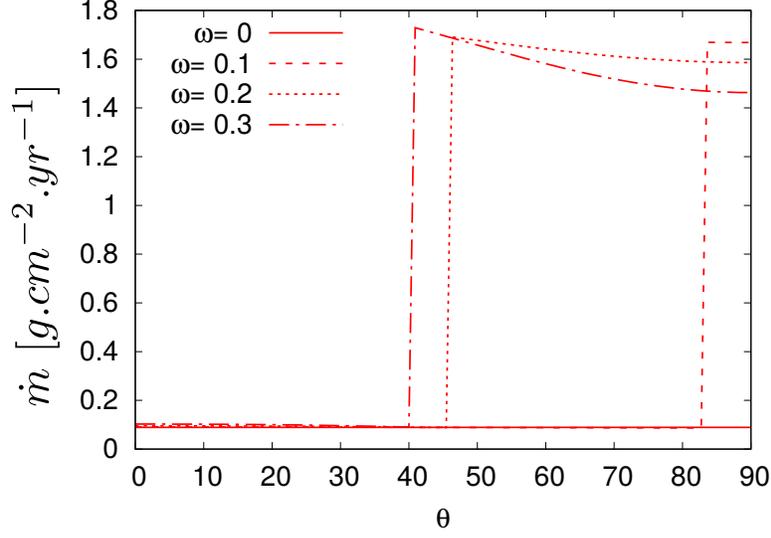


Figure 4.2: Variations du flux de masse \dot{m} avec la colatitude θ , pour un modèle ESTER à 2D de $8 M_{\odot}$ à la ZAMS, avec $Z = 0.02$, et pour plusieurs valeurs de ω . Pour ce modèle, la limite de bi-stabilité est atteinte à l'équateur pour $\omega \lesssim 0.1$, induisant ainsi une forte augmentation du flux de masse dans la région équatoriale.

4.2 Les effets de la rotation sur les taux de perte de masse et de moment cinétique

Dans la section précédente, nous avons évalué la manière dont la rotation des étoiles massives peut influencer la distribution surfacique de leurs flux de masse et de moment cinétique. Nous souhaitons maintenant déterminer l'effet de la rotation sur leur perte de masse globale et sur leur perte de moment cinétique globale. Pour calculer ces taux globaux, il suffit d'intégrer les expressions du flux de masse et du flux de moment cinétique, respectivement (4.1) et (4.2), sur la surface de l'étoile. Il vient

$$\dot{M} = 2\pi \int \dot{m}(\theta) R^2(\theta) \sqrt{1 + \frac{R_{\theta}^2}{R^2(\theta)}} \sin \theta d\theta, \quad (4.3)$$

et

$$\dot{\mathcal{L}} = 2\pi \int \dot{l}(\theta) R^2(\theta) \sqrt{1 + \frac{R_{\theta}^2}{R^2(\theta)}} \sin \theta d\theta, \quad (4.4)$$

où $R(\theta)$ est le rayon de l'étoile déformée par la force centrifuge, à la colatitude θ . L'élément de surface en géométrie sphéroïdale s'écrit quant à lui

$$dS = R^2(\theta) \sqrt{1 + \frac{R_\theta^2}{R^2(\theta)}} \sin \theta d\theta d\varphi ,$$

où $R_\theta = \partial R / \partial \theta$ (Rieutord *et al.*, 2016). Il est cependant important de préciser que les modèles ESTER actuels supposent qu'aucun flux de masse ne quitte la photosphère, et la surface de l'étoile est supposée imperméable à toute vitesse radiale. De plus, comme dans les modèles 1D, nous supposons que les couches superficielles sont en équilibre hydrostatique. Ces approximations sont acceptables pour déterminer la structure de l'étoile, mais sont probablement trop grossières pour décrire proprement les couches superficielles d'une étoile massive sujette à un vent radiatif. En particulier, les valeurs de l'opacité en surface, qui sont importantes à la détermination de l'accélération radiative, pourraient être modifiées en introduisant un meilleur couplage entre le vent et l'enveloppe de l'étoile.

Le taux de perte de masse global \dot{M} , le rapport de vitesse angulaire critique $\omega_c = \Omega_{\text{eq}} / \Omega_c$ tel que donné par le modèle ω (Eq. 2.50), le rapport entre la vitesse angulaire équatoriale et la vitesse angulaire képlérienne $\omega = \Omega_{\text{eq}} / \Omega_K$, et l'échelle de temps de perte de moment cinétique $T_L = \mathcal{L} / \dot{\mathcal{L}}$ pour des modèles ESTER 2D de $15 M_\odot$ à la ZAMS et avec $Z = 0.02$, sont résumés dans le tableau 4.1. Pour les modèles en régime SWR, nous remarquons que le taux de perte de masse global diminue légèrement lorsque l'on augmente ω , par exemple $\dot{M}(\omega = 0.6) / \dot{M}(\omega = 0) \simeq 0.87$ (voir Fig. 4.3a). C'est aussi l'une des conclusions de Müller & Vink (2014). En ce qui concerne le moment cinétique total, nous remarquons qu'il augmente logiquement lorsque ω augmente. Aussi, malgré la diminution du taux de perte de masse global \dot{M} en régime SWR, le taux de perte de moment cinétique global $\dot{\mathcal{L}}$, lui, augmente avec ω . Ceci est simplement dû au fait que $\dot{\mathcal{L}}$ est directement fonction de ω (voir Eq. 4.2). Ainsi, l'échelle de temps associée à la perte de moment cinétique $T_L = \mathcal{L} / \dot{\mathcal{L}}$ est quasi-indépendante du rapport de vitesses angulaires ω en régime SWR (voir Fig. 4.3b). Le régime TWR, quant à lui, est caractérisé par une forte augmentation des taux de perte de masse et de moment cinétique. Dans ce régime, T_L diminue rapidement à mesure que l'étoile approche la vitesse angulaire képlérienne. La forte augmentation de \dot{M} et la diminution de T_L s'expliquent toutes deux par l'augmentation de la fraction de surface stellaire où la température effective est inférieure à $T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$, à mesure que ω augmente (voir Fig. 4.2).

Le fait que \dot{M} n'augmente que progressivement avec l'augmentation de ω en régime TWR est un résultat spécifique aux modèles 2D. En effet, dans les modèles 1D, le saut de bi-stabilité est pris en compte en imposant un taux de perte de masse global

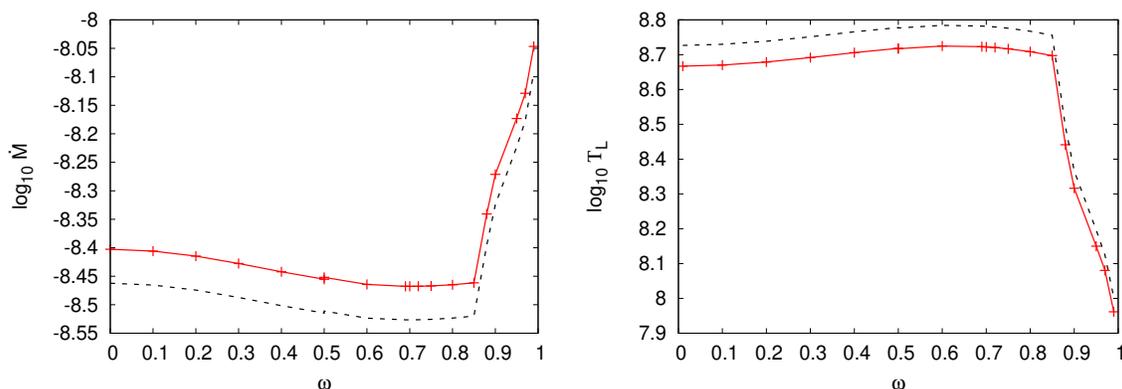


Figure 4.3: Taux de perte de masse global \dot{M} (en $M_{\odot} \cdot \text{yr}^{-1}$, à gauche) et échelle de temps de perte de moment cinétique $T_{\mathcal{L}}$ (en années, à droite) en fonction du rapport des vitesses angulaires ω , pour une étoile de $15 M_{\odot}$ à la ZAMS et avec $Z = 0.02$. Les traits en pointillés montrent la même quantité mais avec une valeur de α' réduite de 1% ; afin de montrer la sensibilité de \dot{M} et $T_{\mathcal{L}}$ à ses variations. Source : [Gagnier *et al.* \(2019a\)](#).

plus important lorsque la température effective moyenne de l'étoile est inférieure à $T_{\text{eff}}^{\text{jump}} \sim 22.5\text{--}25$ kK ([Vink *et al.*, 2001](#)). En évaluant le flux de masse localement à la surface, les modèles 2D atteignent la limite de bi-stabilité lorsque la température effective est, quelque part sur la surface stellaire, inférieure à $T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$. Cette différence a deux conséquences. Premièrement, les modèles 2D peuvent atteindre la limite de bi-stabilité même si la température effective moyenne est supérieure à $T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$. Nous représentons le taux de perte de masse global pour divers rapports de vitesse angulaire à la ZAMS pour un modèle ESTER de $15 M_{\odot}$ et un de $10 M_{\odot}$, avec $Z = 0.02$, en fonction de la température effective moyenne à la surface \bar{T}_{eff} du modèle correspondant, en Fig. 4.4. Dans ces modèles, \bar{T}_{eff} est supérieur à $T_{\text{eff}}^{\text{jump}} \simeq 22.8$ kK pour tous les ω choisis. Ainsi, des modèles 1D avec les mêmes paramètres stellaires auraient ignoré le saut de bi-stabilité et donc ce qu'il implique. Deuxièmement, dans les modèles 2D, la fraction de surface totale où la température effective est inférieure à $T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$, augmente de façon continue avec l'augmentation de ω . Il en résulte une variation progressive de \dot{M} (et de $T_{\mathcal{L}}$) avec \bar{T}_{eff} en régime TWR (voir Fig. 5.13). Ainsi, lorsqu'il s'agit d'étoiles massives en rotation, le saut de bi-stabilité n'induit pas de discontinuité du taux de perte de masse global (mais il induit une discontinuité du flux de masse local, voir Fig. 4.1) lorsque le paramètre ω augmente (et donc lorsque la température effective moyenne diminue). La discontinuité ne se produit que sur la dérivée de la fonction $\dot{M}(T_{\text{eff}})$. Ce point sera examiné plus en détail dans le chapitre suivant.

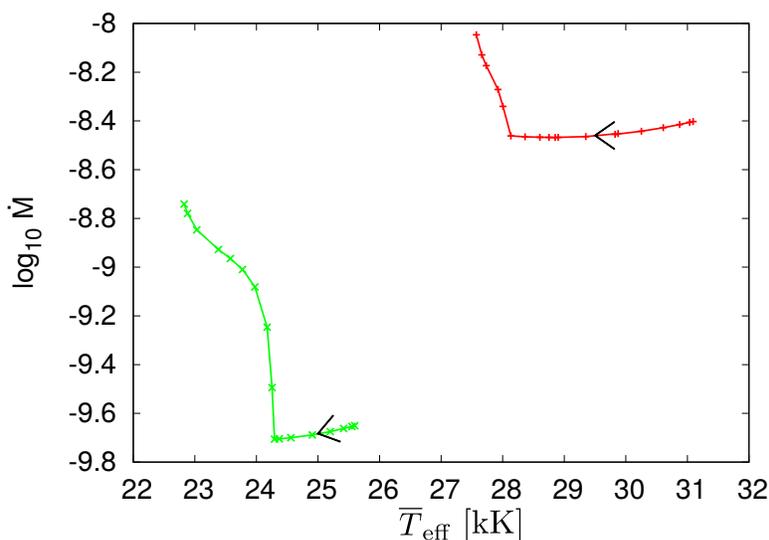


Figure 4.4: Taux de perte de masse global \dot{M} (en $M_{\odot} \cdot \text{yr}^{-1}$) pour un modèle ESTER de $15 M_{\odot}$ (en rouge) et un modèle ESTER de $10 M_{\odot}$ (en vert), en fonction de la température effective moyenne correspondante \bar{T}_{eff} , à la ZAMS, avec $Z = 0.02$, et pour $\omega \in [0, 1[$. Les flèches indiquent le sens de l’augmentation de ω . Source : [Gagnier et al. \(2019a\)](#).

4.3 Observation du saut de bi-stabilité local

Les résultats obtenus dans la section précédente montrent qu’il est difficile de vérifier observationnellement l’existence du saut de bi-stabilité, et donc du régime de vent TWR, en particulier parce que la position de ce saut en terme de température effective moyenne serait très dispersée pour les étoiles en rotation rapide (voir Fig. 4.4).

Une solution serait de sélectionner des étoiles avec une petite vitesse apparente $v \sin i$, c’est-à-dire des étoiles en rotation lente ou des étoiles vues du pôle. Dans le premier cas, la limite de bi-stabilité locale serait correctement approximée globalement, et la température du saut serait quasi-indépendante de l’étoile considérée. Dans le second cas, il serait possible de comparer le flux de masse aux pôles d’étoiles en régime SWR des côtés chaud et froid du saut de bi-stabilité. Cependant, si l’on veut observer l’existence du régime TWR, et vérifier, qualitativement et quantitativement, les caractéristiques des vents radiatifs des étoiles massives en rotation rapide, il faut nécessairement passer par une analyse spectrale à deux dimensions (e.g., [Petrenz & Puls, 1996](#)). Dans tous les cas, une détermination précise de $v \sin i$ est indispensable, ce qui est un défi difficile à relever pour les étoiles massives, en particulier parce que

Table 4.1.: Résumé des principaux résultats pour les modèles ESTER 2D d’une étoile de $15 M_{\odot}$ avec $Z = 0.02$ et à la ZAMS. La première colonne indique le rapport entre la vitesse angulaire équatoriale et la vitesse angulaire keplérienne ω , la deuxième colonne donne le rapport entre la vitesse angulaire critique Ω_{eq}/Ω_c , la troisième colonne rapporte le taux de perte de masse global $\log \dot{M}$ et la dernière colonne donne le rapport entre le moment cinétique total et le taux de perte de moment cinétique $\log T_{\mathcal{L}} = \log \mathcal{L}/\dot{\mathcal{L}}$. \dot{M} est en $M_{\odot} \cdot \text{an}^{-1}$ et $T_{\mathcal{L}}$ en années.

ω	Ω_{eq}/Ω_c	$\log \dot{M}$	$\log T_{\mathcal{L}}$
0	0	-8.40	-
0.1	0.105	-8.41	8.60
0.2	0.210	-8.42	8.61
0.3	0.313	-8.43	8.62
0.4	0.415	-8.44	8.63
0.5	0.516	-8.46	8.64
0.6	0.615	-8.47	8.65
0.7	0.714	-8.48	8.65
0.8	0.812	-8.49	8.64
0.9 ^a	0.909	-8.27	8.35
0.95 ^a	0.957	-8.25	8.22
0.99 ^a	0.995	-8.19	8.13

^a Etoile en régime TWR

les effets de la rotation sont mélangés à d’autres effets impliquant l’élargissement des raies spectrales, comme, par exemple, la macro-turbulence (e.g. [Simón-Díaz & Herrero, 2007](#)).

Très récemment, l’analyse des spectres HST/COS des étoiles massives ayant les vitesses de rotation les plus rapides connues sur la séquence principale VFTS 102 et 285 ($v \sin i = 610 \pm 30 \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ et $609 \pm 29 \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$, respectivement) par [Shepard et al. \(2020\)](#), a permis l’observation des effets d’une rotation quasi-critique sur la perte de masse par vents radiatifs. En particulier, les raies du N V dans le spectre de VFTS 285 suggèrent qu’il existe un vent rapide à sa surface, ce qui est typique des étoiles de type O sur la séquence principale, et plus étonnamment, les raies du Si IV suggèrent qu’il existe aussi un vent avec une vitesse extrêmement faible. Ces observations supportent l’idée d’un vent en régime TWR avec un vent très dense et très lent à l’équateur et un vent rapide et peu dense aux pôles (voir Eq. [3.67](#)). Il est intéressant de noter qu’un modèle ESTER à 2D avec des paramètres stellaires similaires à ceux de VFTS 285, prédit bien un régime TWR. Ces résultats sont illustrés dans le tableau [4.2](#) et

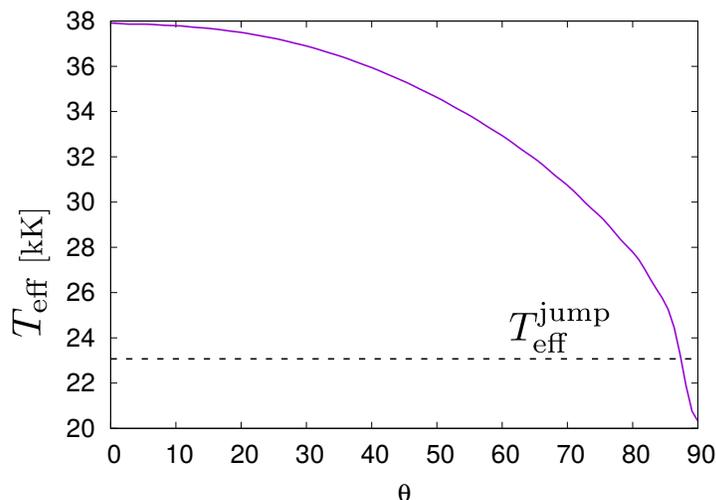


Figure 4.5: Température effective en fonction de la colatitude pour le modèle ESTER 2D présenté tableau 4.2. Le trait noir pointillé indique la position de la température du saut de bi-stabilité. Le modèle considéré est donc en régime TWR.

en Fig. 4.5.

4.4 Le rôle de la métallicité

Avant de terminer ce chapitre, quelques mots sur le cas des étoiles à faible métallicité s'imposent. Nous savons en effet que la métallicité influence considérablement l'intensité des vents radiatifs, tout simplement parce que le nombre de raies métalliques contribuant efficacement à l'accélération du vent diminue à mesure que la métallicité diminue (e.g. Puls *et al.*, 2000). Ainsi, les paramètres du multiplicateur de force, α et k , devraient voir leur valeur diminuer avec une diminution de Z (Kudritzki *et al.*, 1987; Puls *et al.*, 2000, 2008). De plus, la perte de masse est très sensible à la valeur de ces paramètres. En particulier, une légère diminution de α' entraîne une diminution significative du taux de perte de masse global \dot{M} (voir Fig. 4.3). Aussi, une métallicité réduite tend à rendre les étoiles plus compactes et donc tend à augmenter leur température effective (voir Sect. 5.2.1 Maeder, 2009). Cet effet peut compenser, en partie, l'effet de la baisse d'opacité sur l'accélération du vent. Enfin, puisque les paramètres du multiplicateur de force ont une influence considérable sur l'estimation du taux de perte de masse et qu'ils sont mal connus lorsqu'il s'agit de métallicités bien inférieures à la métallicité solaire, nous ne risquons aucune prédiction sur le comportement du flux de masse à faible Z .

Table 4.2:: Comparaison du modèle 2D ESTER avec les paramètres stellaires de VFTS 285 (Sabín-Sanjulián *et al.*, 2017; Shepard *et al.*, 2020). X_{core}/X_0 est le rapport entre la fraction d’hydrogène dans le coeur de l’étoile, et celle dans l’enveloppe. VFTS 285 étant une étoile du LMC, nous choisissons $Z = 0.01$ pour notre modèle ESTER.

	VFTS 285	Modèle ESTER 2D
M (en M_{\odot})	20.1 ± 0.9	20.0
ω	0.992 ± 0.002	0.98
P (à l’équateur et en heures)	19.7 ± 2.5	17.65
\bar{R} (en R_{\odot})	6.60 ± 0.75	7.29
\bar{T}_{eff} (en K)	35300	32263
$X_{\text{core}}/X_0 =$?	0.8

Chapitre 5

Évolution de la rotation des étoiles de type précoce au cours de la séquence principale

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé une expression pour le flux de masse local résultant d'un vent radiatif, et pour le flux de moment cinétique associé. Nous avons montré le rôle crucial du saut de bi-stabilité et particulier l'effet de sa prise en compte de manière locale, sur les taux de perte de masse et de moment cinétique. Nous nous sommes cependant restreints à des modèles à la ZAMS. L'objectif de ce chapitre est donc d'appliquer le formalisme présenté dans les chapitres précédents à l'évolution de la rotation des étoiles de type précoce sur la séquence principale. Dans un premier temps, nous nous focaliserons sur l'étude de l'évolution des étoiles de type précoce sur la séquence principale, dont la masse est inférieure à $\sim 7 M_{\odot}$ (Abbott, 1982). L'évolution de ces étoiles peut être considérée à masse et moment cinétique total constants. Dans un second temps, nous nous intéresserons au cas des étoiles plus massives qui elles sont sujettes à un vent radiatif anisotrope. Nous pourrions ainsi conclure sur les effets de cette perte de masse anisotrope sur l'évolution de la rotation des étoiles de type précoce sur la séquence principale. Ces résultats ont été présentés dans Gagnier *et al.* (2019b).

5.1 Evolution temporelle et approximation quasi-stationnaire

Comme pour le chapitre précédent, nous utilisons le code ESTER permettant le calcul cohérent de l'état stationnaire d'une étoile isolée et en rotation. Pour étudier l'évolution séculaire des étoiles massives sur la séquence principale, il nous a tout d'abord fallu implémenter un schéma temporel dans le code. Ce schéma simule une évolution temporelle en évaluant l'évolution de l'abondance en hydrogène dans le cœur convectif de l'étoile. Nous présentons sa dérivation en Annexe A. L'évolution temporelle consiste donc en une succession de modèles stationnaires pour lesquels l'abondance en hydrogène décroît selon (A.21). Cependant, cette approximation ne peut être justifiée que si l'échelle de temps associée à la dynamique interne des étoiles que l'on modélise, est plus petite que les échelles de temps contrôlant l'évolution séculaire de l'étoile. Autrement dit, l'évolution de l'étoile peut être considérée comme étant une succession d'états stationnaires si la redistribution du moment cinétique par la circulation méridienne s'effectue plus rapidement que les phénomènes physiques qui génèrent cette circulation méridienne. L'échelle de temps associée à la redistribution du moment cinétique menant à un état stationnaire est contrôlée par le taux d'amortissement des modes les moins amortis se propageant dans l'enveloppe radiative en rotation. Ces modes sont les modes baroclines qui s'amortissent sur l'échelle de temps d'Eddington-Sweet T_{ES} (voir Busse, 1981; Rieutord, 2006c) définie comme suit

$$T_{ES} = T_{KH} \frac{GM}{\Omega_{eq}^2 R^3}, \quad (5.1)$$

où $T_{KH} = GM^2/(RL)$ est l'échelle de temps de Kelvin-Helmholtz. Nous comparons cette échelle de temps aux échelles de temps nucléaire et de perte de masse, respectivement T_{nucl} (durée de vie de l'étoile sur la séquence principale) et $T_{ml} = M/\dot{M}$, pour plusieurs modèles ESTER à la ZAMS de 5, 10 et 20 M_{\odot} , avec une vitesse de rotation initiale $\omega_i = \Omega_{eq,i}/\Omega_K = 0.3$, en tableau 5.1. Pour ces modèles, nous notons que l'échelle de temps d'Eddington-Sweet est plus courte d'au moins un ordre de grandeur que l'échelle de temps nucléaire et au moins deux ordres de grandeur plus courte que l'échelle de temps associée à la perte de masse. Le moment cinétique a donc suffisamment de temps pour être redistribué dans l'enveloppe radiative, et nous concluons que la considération de l'étoile en état quasi-stationnaire est une bonne approximation.

CHAPITRE 5. ÉVOLUTION DE LA ROTATION DES ÉTOILES DE TYPE PRÉCOCE AU COURS DE LA SÉQUENCE PRINCIPALE

Table 5.1:: Comparaison entre l'échelle de temps d'Eddington-Sweet T_{ES} , l'échelle de temps nucléaire T_{nucl} , et l'échelle de temps de perte de masse T_{ml} pour des étoiles de différentes masses initiales. Ces échelles de temps sont évaluées à la ZAMS avec une vitesse angulaire équatoriale $\Omega_{\text{eq,i}} = 0.3 \Omega_{\text{K}}$ et pour $Z = 0.02$, et sont exprimées en années.

M/M_{\odot}	T_{ES}	T_{nucl}	T_{ml}
5	$6.40 \cdot 10^6$	$1.10 \cdot 10^8$	$1.78 \cdot 10^{11}$
10	$1.60 \cdot 10^6$	$2.60 \cdot 10^7$	$4.69 \cdot 10^{10}$
20	$5.90 \cdot 10^5$	$9.60 \cdot 10^6$	$9.10 \cdot 10^8$

5.2 Evolution à masse et moment cinétique constants

Dans un premier temps, nous nous concentrons sur l'évolution des étoiles de type précoce de masse intermédiaire durant la séquence principale. Pour de telles étoiles, les pertes de masse et de moment cinétique par vents radiatifs peuvent être négligées. C'est une bonne approximation pour les étoiles de masse $M \lesssim 7M_{\odot}$ (cette limite correspond au cas où la métallicité est solaire, [Abbott, 1982](#)). Nous imposons donc un moment cinétique constant et une masse constante, à savoir

$$L_z = \int_{(V)} r^2 \sin^2 \theta \Omega \rho dV = \text{Cte} \quad \text{et} \quad M = \int_{(V)} \rho dV = \text{Cte} ,$$

et les modèles 2D quasi-stationnaires sont calculés avec le code ESTER. Nous suivons leur évolution nucléaire à l'aide du schéma temporel simplifié ([A.21](#)).

5.2.1 Evolution des paramètres stellaires de surface

Concentrons nous, dans un premier temps, sur l'évolution des paramètres stellaires de surface au cours de la séquence principale pour un modèle ESTER 2D de $5 M_{\odot}$, à deux métallicités différentes $Z = 0.02$ et $Z = 10^{-3}$ (typique des étoiles de la population II), et avec une vitesse angulaire initiale égale à 50% de la vitesse angulaire critique. Les étoiles de cette masse ayant une accélération radiative négligeable à leur surface, leur vitesse angulaire critique est considérée comme étant la vitesse angulaire képlérienne Ω_{K} (voir Sect. [2.5](#)). Lorsque cette vitesse angulaire critique est atteinte, ω ne peut plus augmenter (sinon l'étoile n'est plus liée gravitationnellement), et l'étoile doit perdre du moment cinétique pour rester en rotation sous-critique. Nous supposons que cette perte de moment cinétique résulte d'une perte de masse mécanique à

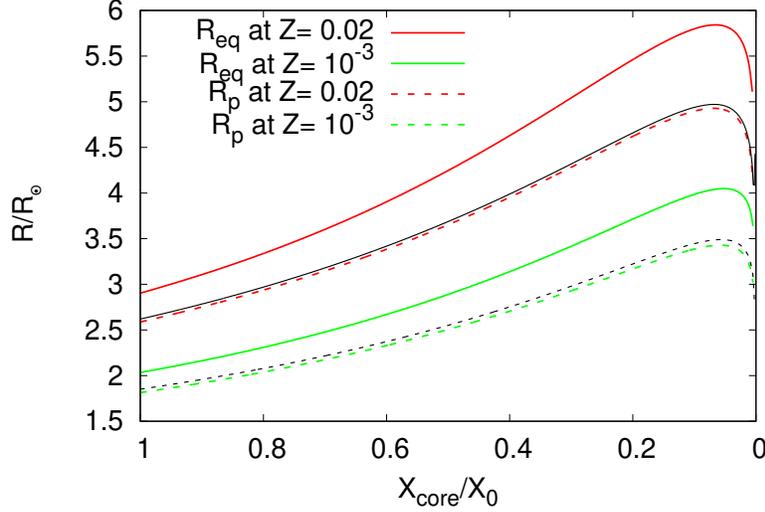


Figure 5.1: Rayon équatorial et rayon polaire en fonction de la fraction massique d’hydrogène dans le cœur convectif pour un modèle ESTER de $5 M_{\odot}$ dont la rotation initiale est telle que $\omega_i = 0.5$, pour $Z = 0.02$ et $Z = 10^{-3}$. L’évolution du rayon dans le cas sans rotation est représentée en traits pleins et pointillés noirs, respectivement pour $Z = 0.02$ et 10^{-3} . Source : [Gagnier *et al.* \(2019b\)](#).

l’équateur (e.g., [Okazaki, 2004](#); [Krtićka *et al.*, 2011](#)). Pour décrire l’évolution séculaire de ces modèles, nous nous concentrons sur l’évolution du rayon équatorial et du rayon polaire, respectivement R_{eq} et R_p , le rapport entre vitesse angulaire équatoriale et vitesse angulaire képlérienne ω , l’aplatissement de la surface $\epsilon = 1 - R_p/R_{\text{eq}}$, et la vitesse équatoriale $V_{\text{eq}} = R_{\text{eq}}\Omega_{\text{eq}}$. Les figures [5.1](#), [5.2](#), [5.4](#), et [5.5](#) représentent l’évolution de ces quantités au cours de la séquence principale.

Evolution du rayon stellaire

Il est bien connu que le rayon stellaire moyen augmente pendant l’évolution séculaire sur la séquence principale, les modèles les moins métalliques étant plus compacts (e.g. [Yoon *et al.*, 2006](#); [Ekström *et al.*, 2011](#)). De plus, lorsqu’il s’agit de modèles en rotation, la force centrifuge se traduit par une tendance à éloigner les particules fluides de l’axe de rotation. Son amplitude étant proportionnelle à la distance à l’axe de rotation, elle est nulle aux pôles et maximale à l’équateur. En effet, dans le cas général, la gravité effective s’écrit

$$\mathbf{g}_{\text{eff}} \equiv \nabla\psi - \Omega^2 s \mathbf{e}_s, \quad (5.2)$$

CHAPITRE 5. ÉVOLUTION DE LA ROTATION DES ÉTOILES DE TYPE PRÉCOCE AU COURS DE LA SÉQUENCE PRINCIPALE

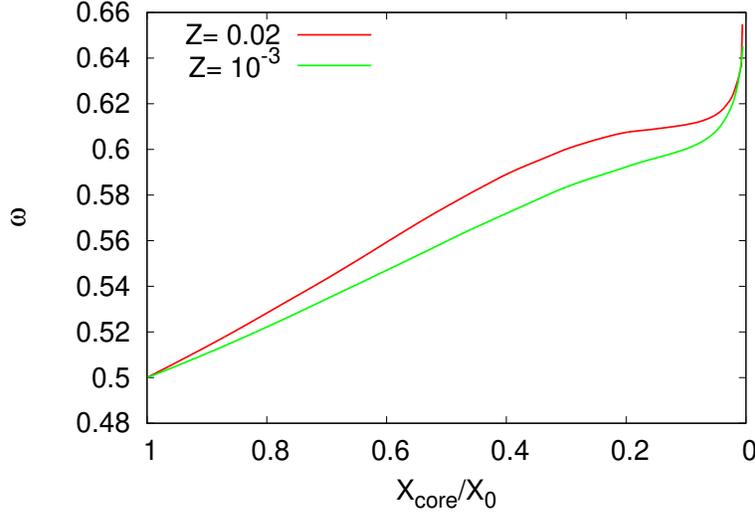


Figure 5.2: Evolution du rapport entre vitesse angulaire équatoriale et vitesse angulaire képlérienne $\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_K$, pour les mêmes modèles que ceux représentés en Fig. 5.1. Source : Gagnier *et al.* (2019b).

où s est la coordonnée radiale cylindrique, et ψ est le potentiel gravitationnel. Si la vitesse angulaire Ω n'est fonction que de la distance à l'axe de rotation (rotation différentielle géostrophique, voir Sect. 6.2), alors nous pouvons écrire

$$\mathbf{g}_{\text{eff}} = -\nabla\phi, \quad (5.3)$$

où

$$\phi = \psi + \int \Omega^2 s ds. \quad (5.4)$$

Si l'on se place maintenant dans le cas particulier d'un profil de vitesse angulaire en coquilles, c'est-à-dire le cas où la vitesse angulaire Ω est constante sur les surfaces isobares $\Omega = \Omega(P)$, alors

$$\phi' = \psi + \frac{1}{2}\Omega(P)^2 s^2. \quad (5.5)$$

n'est plus un potentiel, mais coïncide toujours avec les surfaces isobares (Meynet & Maeder, 1997). En première approximation, la surface d'une étoile à la vitesse angulaire critique peut être décrite en supposant que toute la masse est concentrée en son centre en adoptant le modèle de Roche, qui simplifie grandement l'expression de la force gravitationnelle. La gravité effective s'écrit alors

CHAPITRE 5. ÉVOLUTION DE LA ROTATION DES ÉTOILES DE TYPE PRÉCOCE AU COURS DE LA SÉQUENCE PRINCIPALE

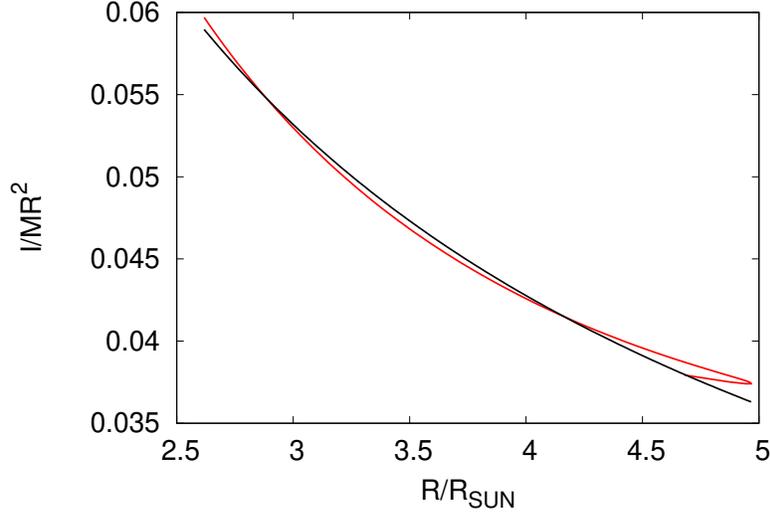


Figure 5.3: Evolution du rapport $A = I/(MR^2)$ en fonction du rayon stellaire pour une étoile de $5 M_{\odot}$ tournant initialement à $\omega_i = 0.1$ et avec $Z = 0.02$. Le “fit” approximatif est représenté par la courbe noire et donne $A \propto R^{-0.76}$. Source : [Gagnier et al. \(2019b\)](#).

$$\mathbf{g}_{\text{eff}} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r + \Omega^2 s \mathbf{e}_s . \quad (5.6)$$

Si l’on considère maintenant que la vitesse angulaire équatoriale est égale à la vitesse angulaire képlérienne (2.21), il vient, à la surface et à l’équateur

$$\phi'(R_{\text{eq}}, \pi/2) = -\frac{3}{2} \frac{GM}{R_{\text{eq}}} , \quad (5.7)$$

et aux pôles

$$\phi'(R_{\text{p}}, 0) = -\frac{GM}{R_{\text{p}}} . \quad (5.8)$$

Ainsi, à la vitesse angulaire critique, dans la limite du modèle de Roche et en faisant l’hypothèse d’une rotation en coquilles (ou d’une rotation uniforme)

$$R_{\text{eq}} = \frac{3}{2} R_{\text{p}} . \quad (5.9)$$

La Fig. 5.1 représente l’évolution du rayon polaire et du rayon équatorial pour les modèles considérés sur la séquence principale, en fonction de la fraction massique

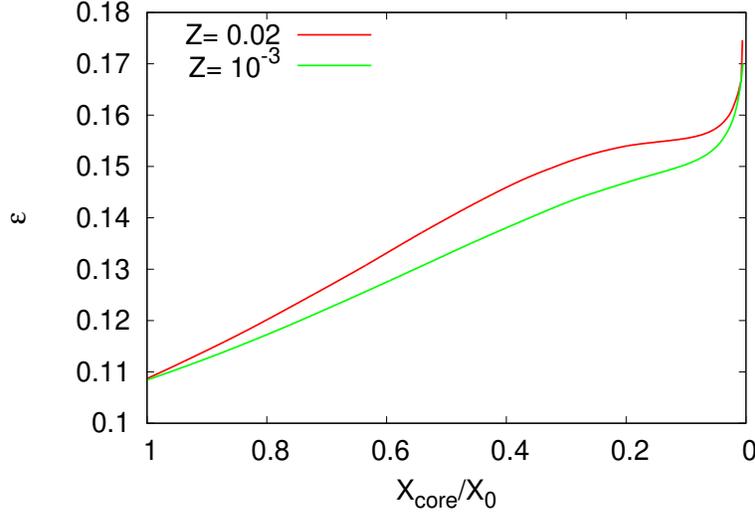


Figure 5.4: Evolution de l’aplatissement de la surface $\epsilon = 1 - R_p/R_{\text{eq}}$, pour les mêmes modèles que ceux représentés en Fig. 5.1. Source : Gagnier *et al.* (2019b).

d’hydrogène dans le cœur convectif. Nous notons qu’en effet, le rayon équatorial est toujours plus grand que le rayon polaire, et que les étoiles sont plus compactes et se dilatent plus lentement à métallicité réduite. Nous remarquons aussi que l’évolution du rayon polaire est quasi-indépendante de la vitesse de rotation du modèle, ce qui s’explique simplement par le fait que la force centrifuge est nulle aux pôles.

Evolution de la rotation de surface

L’évolution du rapport des vitesses angulaires $\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_K$ est représentée en Fig. 5.2. Il apparaît que cette quantité augmente au cours de la séquence principale. Cette caractéristique peut être facilement expliquée. En effet, en supposant une rotation lente, donc un faible aplatissement et une faible rotation différentielle, le moment d’inertie de l’étoile peut s’écrire

$$I = \int r^2 dm = AMR^2, \quad (5.10)$$

où A contrôle la répartition de la masse dans l’intérieur stellaire. Plus A est petit, et plus la masse de l’étoile est concentrée en son centre. Nous représentons l’évolution de cette quantité en fonction du rayon de l’étoile au cours de la séquence principale, pour un modèle ESTER 2D de $5 M_{\odot}$ ayant une rotation initiale $\omega_1 = 0.1$ et pour $Z = 0.02$, en Fig. 5.3. Un “fit” approximatif de cette courbe montre que $A \propto R^{-0.76}$.

CHAPITRE 5. ÉVOLUTION DE LA ROTATION DES ÉTOILES DE TYPE PRÉCOCE AU COURS DE LA SÉQUENCE PRINCIPALE

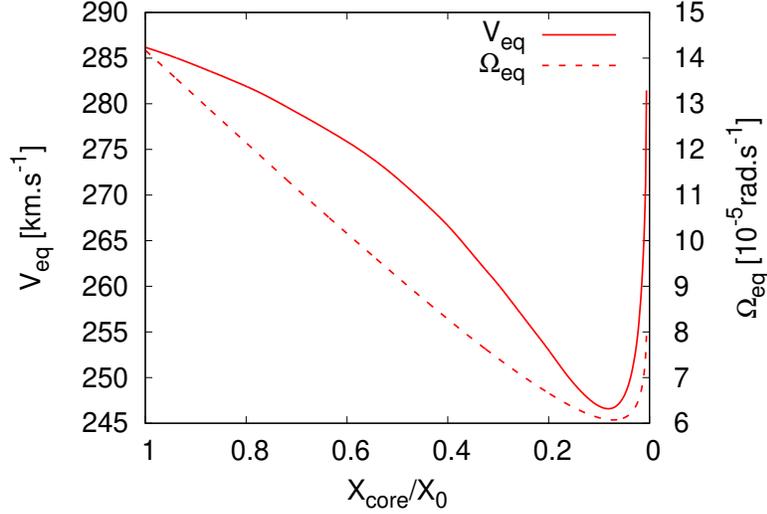


Figure 5.5: Evolution de la vitesse équatoriale et de la vitesse angulaire équatoriale, pour un modèle ESTER de $5 M_{\odot}$ dont la rotation initiale est telle que $\omega_i = 0.5$, et avec $Z = 0.02$. Source : [Gagnier et al. \(2019b\)](#).

Ainsi, tandis que l'étoile évolue sur la séquence principale, sa masse devient de plus en plus concentrée en son centre. De plus, dans cette section nous considérons une évolution à moment cinétique $L = AMR^2\Omega$ constant, ce qui signifie qu'à mesure que l'étoile se dilate, Ω décroît comme $R^{-1.24}$. Ω diminue donc plus lentement que la vitesse angulaire képlérienne qui elle est proportionnelle à $R^{-3/2}$ (voir Eq. 2.50). Ainsi, la tendance naturelle de l'évolution de la rotation est une augmentation de ω , c'est-à-dire une augmentation du degré de criticité au cours de la séquence principale. Aussi, à mesure que ω augmente, la contribution de la force centrifuge à la gravité effective augmente (voir Eq. 5.2), ce qui a pour effet d'augmenter le taux d'aplatissement de l'étoile $\epsilon = 1 - R_p/R_{\text{eq}}$, le rayon polaire n'étant pas affecté par la force centrifuge. L'évolution de l'aplatissement de l'étoile est représenté en Fig. 5.4. La métallicité joue également un rôle dans l'évolution de ω : comme mentionné précédemment, une étoile moins métallique se dilate plus lentement (voir Fig. 5.1), la vitesse angulaire képlérienne Ω_K diminue ainsi moins rapidement, entraînant une augmentation plus lente de ω .

A ce stade, il est important de souligner le fait que l'augmentation de ω au cours de la séquence principale n'implique pas que la vitesse de rotation de l'étoile augmente. En réalité, c'est même l'inverse jusqu'au "crochet" (*hook* en anglais) à la fin de la séquence principale. Nous illustrons cela en Fig. 5.5. Après le crochet, la production d'énergie nucléaire ne permet plus de compenser l'énergie rayonnée par

l'étoile. Cela entraîne sa contraction (Iben, 1967), et par conservation du moment cinétique, l'augmentation de sa vitesse angulaire équatoriale Ω_{eq} .

5.2.2 Vitesse angulaire initiale minimale pour atteindre la rotation critique durant la séquence principale

Pour pouvoir déterminer les conditions initiales (donc les conditions à la ZAMS) qui conduisent à une vitesse angulaire critique avant la fin de la séquence principale, nous calculons une grille de modèles ESTER à 2D à masses fixées $5 \leq M/M_{\odot} \leq 10$ et avec $Z = 0.02$ et $Z = 10^{-3}$, que nous faisons évoluer à rebours. Nous commençons donc par des modèles en rotation quasi-critique ($\omega = 0.9$) et avec différentes fractions massiques en hydrogène dans le cœur convectif ($X_{\text{core},c}/X_0$), autrement dit à différents stades d'évolution sur la séquence principale. Nous augmentons ensuite cette fraction massique en hydrogène jusqu'à atteindre $X_{\text{core}} = X_0$, c'est-à-dire jusqu'à la ZAMS.

Nous représentons le rapport des vitesses angulaires à la ZAMS ω_i , minimal nécessaire pour atteindre une rotation quasi-critique durant la séquence principale, en fonction de la masse du modèle, à métallicité solaire et pour plusieurs fractions massiques en hydrogène dans le cœur convectif à la rotation (quasi-)critique, en Fig. 5.6. Nous remarquons que plus l'étoile est massive, et moins la vitesse angulaire minimale à la ZAMS ω_i nécessaire pour atteindre la rotation critique au cours de la séquence principale est élevée. Cette observation est particulièrement vraie pour les modèles avec $X_{\text{core},c}/X_0 \leq 0.5$, c'est-à-dire ceux qui atteignent la rotation critique relativement tard durant leur évolution sur la séquence principale. Nous notons aussi que plus la rotation critique est atteinte tard sur la séquence principale, et moins la vitesse angulaire initiale a besoin d'être élevée. En effet, comme mentionné précédemment, l'expansion stellaire a tendance à faire augmenter le rapport de vitesse angulaire ω au cours de l'évolution sur la séquence principale. Ainsi, plus la rotation critique est atteinte tard, et plus ω a le temps d'augmenter. La vitesse angulaire de l'étoile à la ZAMS n'a donc pas besoin d'être proche de la vitesse angulaire képlérienne pour l'atteindre avant la fin de la séquence principale.

Nous pouvons maintenant nous demander l'effet d'une réduction de la métallicité sur la condition initiale de l'étoile, nécessaire pour atteindre la rotation critique avant la fin de la séquence principale. Pour cela, nous représentons une nouvelle fois le rapport de vitesse angulaire à la ZAMS ω_i minimale nécessaire pour atteindre une rotation quasi-critique durant la séquence principale et fonction de la masse du modèle, pour $Z = 0.02$ et $Z = 10^{-3}$, et pour plusieurs fractions massiques en hydrogène dans le cœur convectif à la rotation quasi-critique, en Fig. 5.7. Nous remarquons que

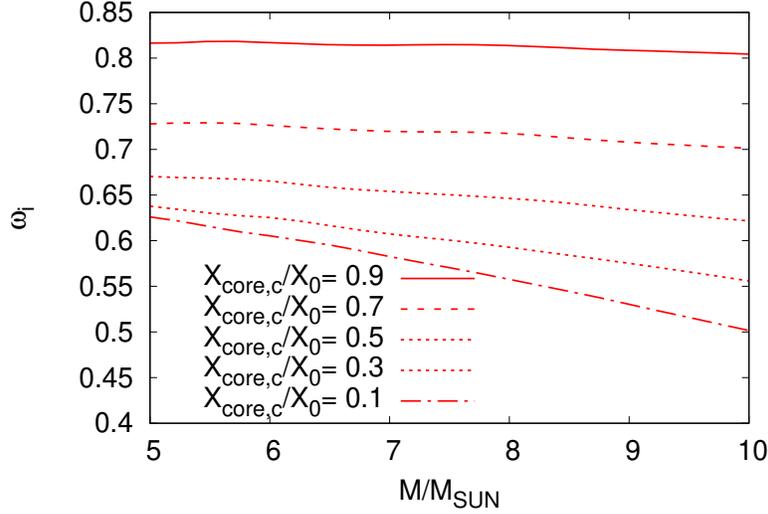


Figure 5.6: Valeurs du rapport des vitesses angulaires à la ZAMS ω_i nécessaire pour atteindre la quasi-criticité ($\omega = 0.9$) à différentes valeurs de la fraction massique d’hydrogène dans le cœur convectif, en fonction de la masse du modèle M/M_{\odot} , pour $Z = 0.02$, et sans perte de masse. Source : [Gagnier et al. \(2019b\)](#).

pour une métallicité réduite, la valeur de la vitesse angulaire à la ZAMS minimale nécessaire pour atteindre la rotation (quasi-)critique durant la séquence principale à $X_{\text{core,c}}/X_0$ fixé, est d’autant plus faible que l’étoile est métallique. Cela reflète en effet l’expansion plus lente, donc la diminution plus lente de la vitesse képlérienne, des étoiles moins métalliques (voir Sect. 5.2.1).

5.3 Evolution avec pertes de masse et de moment cinétique

Dans cette section, nous considérons des modèles de masse supérieure à $7 M_{\odot}$, c’est-à-dire des modèles pour lesquels l’accélération radiative à leur surface ne peut être négligée. Comme pour l’étude de l’évolution sans perte de moment cinétique présentée dans la section précédente, nous faisons évoluer des modèles ESTER à 2D sur la séquence principale en diminuant la fraction massique en hydrogène dans le cœur convectif X_{core}/X_0 d’après (A.21). De plus, à chaque pas de temps, nous retirons également de la masse et du moment cinétique à l’étoile. Les taux de perte de masse et de perte de moment cinétique sont estimés en évaluant la distribution surfacique des flux de masse et de moment cinétique (4.1) et (4.2) dérivées dans le

CHAPITRE 5. ÉVOLUTION DE LA ROTATION DES ÉTOILES DE TYPE PRÉCOCE AU COURS DE LA SÉQUENCE PRINCIPALE

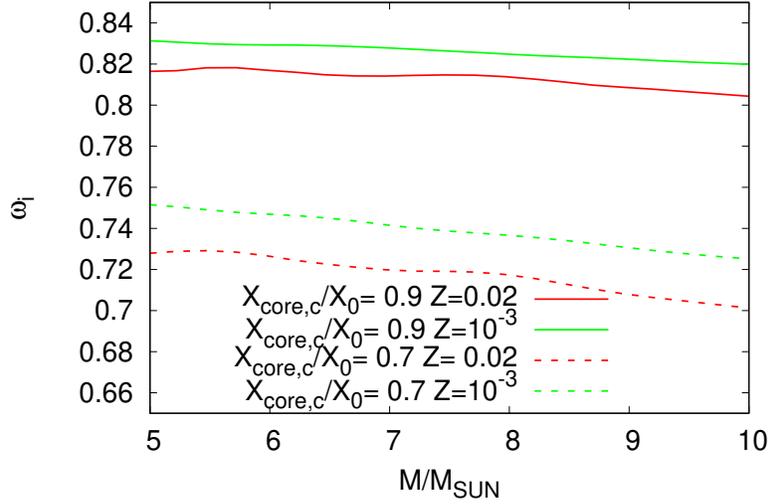


Figure 5.7: Même chose que la Fig. 5.6, pour $X_{\text{core,c}}/X_0 = 0.9$ et 0.7 , et pour $Z = 0.02$ et 10^{-3} . Source : [Gagnier et al. \(2019b\)](#).

chapitre précédent, et en les intégrant sur la surface déformée des étoiles en utilisant (4.3) et (4.4). Nous utiliserons la paramétrisation des coefficient α et k présentée dans le chapitre 3 (Eq. 3.68 et Eq. 3.72). Notons cependant que bien qu’il varie légèrement durant l’évolution séculaire des modèles à cause de l’évolution de la gravité effective g_{eff} , le paramètre k a été calibré avec des modèles ESTER à la ZAMS. Heureusement, nous constatons que lorsque k est calibré avec des modèles ESTER proches de la fin de la séquence principale, ses valeurs ne sont que peu modifiées. En particulier la différence relative entre $k(X_{\text{core}}/X_0 = 0.1)$ et $k(X_{\text{core}}/X_0 = 1)$ ne dépasse jamais 20%, quelle que soit la valeur de la température effective T_{eff} . La valeur minimale de α' considérée étant 0.35, et comme $\dot{m} \propto k^{1/\alpha'}$, le flux de masse local peut être sous-estimé, au maximum, d’un facteur ~ 1.7 . Nous considérons cette différence comme étant acceptable au vu des autres approximations utilisées et des nombreuses incertitudes associées aux modèles de vents radiatifs.

Enfin, nous avons montré dans la chapitre 4, que le vent radiatif à la surface des étoiles massives en rotation peut être catégorisé en deux régimes distincts. Le premier est un régime SWR caractérisé par un flux de masse maximum aux pôles, et qui est en place lorsque la température effective de l’étoile est soit supérieure soit inférieure à $T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$ pour toutes les colatitudes θ . Le second est un régime TWR, qui apparaît lorsqu’il existe une colatitude θ_{jump} à la surface de l’étoile où $T_{\text{eff}}(\theta_{\text{jump}}) = T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$. Ce dernier régime est caractérisé par un flux de masse maximum à l’équateur et par des taux de perte de masse et de moment cinétique plus élevés qu’en régime

CHAPITRE 5. ÉVOLUTION DE LA ROTATION DES ÉTOILES DE TYPE PRÉCOCE AU COURS DE LA SÉQUENCE PRINCIPALE

SWR. L'existence de ces deux régimes de vent offre une grande variété de transitions possibles : certaines étoiles peuvent être en régime SWR à la ZAMS puis passer, ou non, en TWR au cours de leur évolution, d'autres peuvent démarrer leur évolution en TWR puis passer, ou non, en SWR, par exemple. Les étoiles de masse intermédiaire (ou les étoiles massives évoluées, c'est-à-dire les supergéantes B tardives et les étoiles supergéantes A) peuvent quant à elles se trouver dans un SWR côté froid, c'est-à-dire avec $T_{\text{eff}} < T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$ à toutes les colatitudes θ . Ce régime étant caractérisé par des taux de perte de masse et de moment cinétique plus élevés que dans un régime TWR. Ainsi, pour avoir une idée de l'évolution rotationnelle des étoiles massives, et par souci de clarté, nous nous concentrons sur l'étude d'un modèle d'étoile typique de $15 M_{\odot}$ ayant une vitesse angulaire initiale égale à 50% de la vitesse angulaire képlérienne.

5.3.1 Vitesse angulaire à la limite $\Omega\Gamma$

Dans le chapitre 2, nous avons montré que la vitesse angulaire critique des étoiles massives n'est plus exactement égale à la vitesse angulaire képlérienne. Autrement dit, lorsque l'accélération radiative ne peut pas être négligée, la vitesse angulaire critique est telle que la somme de l'accélération radiative et de la gravité effective s'annule. En particulier, en utilisant le modèle ω de [Espinosa Lara & Rieutord \(2011\)](#), nous avons déterminé que la vitesse angulaire critique est atteinte lorsque le paramètre d'Eddington dépendant de la rotation évalué à l'équateur

$$\Gamma_{\Omega}(\pi/2) = \Gamma_{\text{eq}} \left(1 - \frac{\Omega^2 R_{\text{eq}}^3}{GM} \right)^{-2/3} \quad (5.11)$$

atteint 1. Nous rappelons que dans cette expression,

$$\Gamma_{\text{eq}} = \frac{\kappa(\pi/2)L}{4\pi cGM}, \quad (5.12)$$

est le paramètre d'Eddington standard évalué à l'équateur. Rappelons aussi que $\Gamma_{\Omega}(\pi/2) = 1$ implique que la vitesse angulaire critique s'écrit

$$\Omega_c = \Omega_K \sqrt{1 - \Gamma_{\text{eq}}^{3/2}}, \quad (5.13)$$

c'est-à-dire qu'elle est égale à la vitesse angulaire képlérienne multipliée par un coefficient qui est d'autant plus grand que le paramètre d'Eddington équatorial est petit. Enfin, nous avons montré qu'à la ZAMS, parce que le coefficient d'assombriement gravitationnel β est inférieur à 1/4, la rotation rapide réduit l'opacité à l'équateur tel que le paramètre d'Eddington équatorial proche de la criticité, et donc l'écart

CHAPITRE 5. ÉVOLUTION DE LA ROTATION DES ÉTOILES DE TYPE PRÉCOCE AU COURS DE LA SÉQUENCE PRINCIPALE

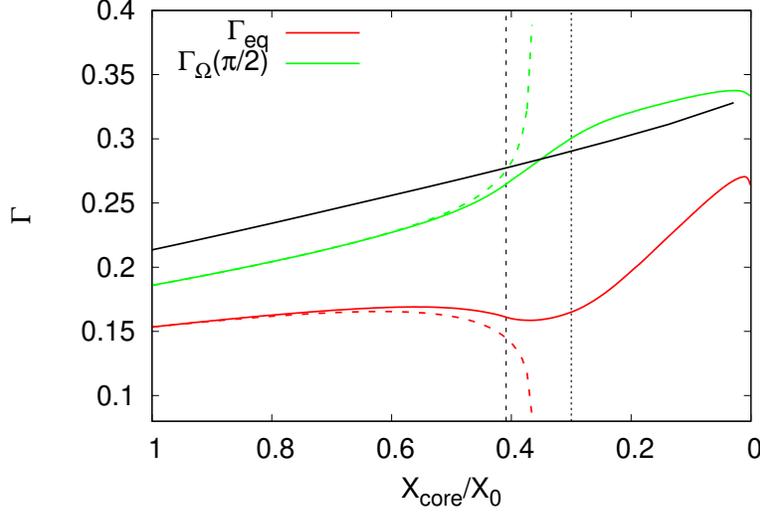


Figure 5.8: Evolution de Γ_{eq} et de $\Gamma_{\Omega}(\pi/2)$ pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ avec une rotation initiale de $\omega_i = 0.5$, avec et sans perte de masse (traits pleins et pointillés, respectivement). La courbe noire correspond à l'évolution de Γ_{eq} dans le cas où $\omega_i = 0$. Les deux traits verticaux délimitent les deux phases du régime TWR (voir Sect. 5.3.3). Source : Gagnier *et al.* (2019b).

entre vitesse angulaire critique et vitesse angulaire képlérienne, est très faible. Nous avons illustré cette caractéristique du paramètre d'Eddington équatorial, ainsi que la divergence du paramètre d'Eddington dépendant de la rotation proche de la rotation critique, dans le cas sans perte de masse, en Fig. 2.8. Nous complétons l'étude illustrant ces mêmes quantités dans le cas où les pertes de masse et de moment cinétique sont prises en compte, pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$, avec une vitesse angulaire initiale correspondant à $\omega_i = 0.5$, et pour $Z = 0.02$, en Fig. 5.8. Nous remarquons que la perte de masse (et surtout la perte de moment cinétique associée) empêche l'étoile d'atteindre la rotation critique au cours de la séquence principale, et donc que $\Gamma_{\Omega}(\pi/2)$ reste fini. Pour un tel modèle d'étoile, $\Gamma_{\text{eq}} \lesssim 0.27$, et donc d'après (2.50), $\Omega_c/\Omega_K \gtrsim 0.93$ tout au long de la séquence principale. Ce résultat montre que la différence entre la vitesse angulaire critique et la vitesse angulaire képlérienne reste faible. Ainsi, nous continuerons à exprimer Ω_{eq} comme une fraction de la vitesse angulaire képlérienne équatoriale Ω_K pour mesurer la distance à la rotation critique.

5.3.2 Perte de masse sans évolution nucléaire

Avant de considérer les effets conjugués de l'évolution nucléaire et des pertes de masse et de moment cinétique, il est intéressant de rappeler la manière dont le rayon d'une étoile est modifié par l'extraction d'une petite quantité de masse, sans perte de moment cinétique associée. Le résultat est bien connu dans le cas des étoiles entièrement convectives, dont la distribution massique est correctement représentée par un polytrophe d'indice $n = 3/2$. Pour ces étoiles, si une petite quantité de masse est extraite de leur surface, la masse restante se dilate (Chandrasekhar, 1967). D'autre part, les étoiles radiatives, qui sont bien représentées par un polytrophe d'indice $n \geq 3$, se contractent lorsqu'elles sont sujettes à une perte de masse (Heisler & Alcock, 1986). C'est aussi le cas des modèles ESTER 2D possédant une enveloppe radiative. Nous le vérifions en représentant l'évolution du rayon polaire et du rayon équatorial pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ avec une vitesse angulaire initiale telle que $\omega_i = 0.5$, et dont nous avons extrait une masse totale de $\Delta M \simeq 0.4 M_{\odot}$, en maintenant $X_{\text{core}}/X_0 = 1$ constant, en Fig. 5.9.

Malheureusement, l'interprétation de la dépendance de ω avec la perte de masse et de moment cinétique est compliquée en raison de la non-linéarité des processus physiques impliqués. Tandis que la perte de moment cinétique des étoiles massives n'affecte l'évolution de ω qu'en accélérant la diminution de la vitesse angulaire, l'effet d'une expansion plus lente due à la perte de masse conduit, à la fois, à une diminution plus lente de Ω_K et de Ω_{eq} . Ainsi, l'effet de la perte de masse, en elle-même, sur l'évolution séculaire de ω est certainement dépendante du modèle d'étoile considéré. Nous représentons l'évolution de la vitesse angulaire à l'équateur Ω_{eq} et de la vitesse angulaire képlérienne Ω_K , avec et sans perte de masse et de moment cinétique, pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ avec $Z = 0.02$ et pour $\omega_i = 0.5$, en Fig. 5.10. Pour ce modèle en particulier, nous notons que l'évolution de ω ne dépend presque que de l'évolution de Ω_K , c'est-à-dire que l'effet de la perte de masse et de la perte de moment cinétique sur l'évolution de Ω_{eq} se compensent.

5.3.3 L'exemple d'un modèle 2D de $15 M_{\odot}$ avec $\omega_i = 0.5$

Les figures 5.11 et 5.12 représentent respectivement l'évolution du taux de perte de masse, du rapport des vitesses angulaires et de la température effective équatoriale pour un modèle ESTER 2D avec $M = 15 M_{\odot}$, $Z = 0.02$, et $\omega_i = 0.5$. Nous notons que l'étoile est initialement en régime SWR (côté chaud), c'est-à-dire que sa température effective équatoriale est supérieure à la température du saut de bi-stabilité $T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$. Dès que $X_{\text{core}}/X_0 \lesssim 0.4$, $T_{\text{eff,eq}}$ devient plus faible que température effective du saut de

CHAPITRE 5. ÉVOLUTION DE LA ROTATION DES ÉTOILES DE TYPE PRÉCOCE AU COURS DE LA SÉQUENCE PRINCIPALE

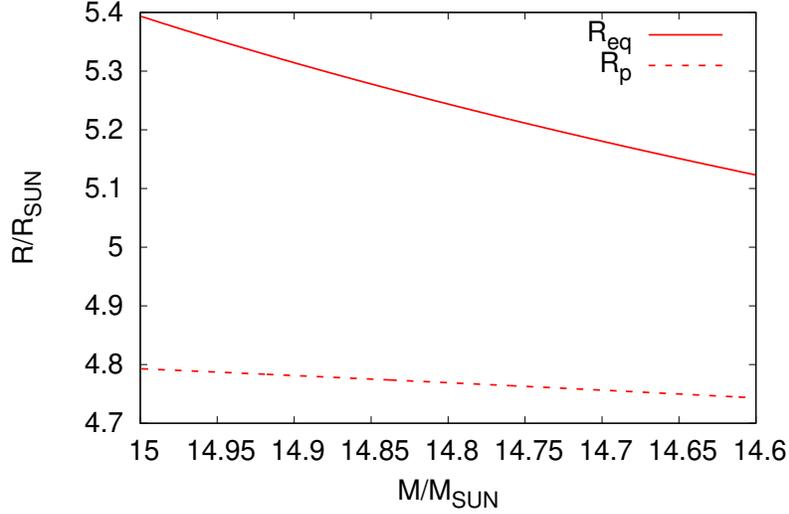


Figure 5.9: Rayon équatorial et rayon polaire en fonction de la masse totale pour un modèle ESTER 2D de masse initiale $M = 15 M_{\odot}$, $Z = 0.02$, pour un rapport de vitesses angulaires initial $\omega_i = 0.5$, et perdant une masse totale de $\Delta M \simeq 0.4 M_{\odot}$. Source : Gagnier *et al.* (2019b).

bi-stabilité, l'étoile entre dans un régime TWR et y reste jusqu'à la fin de la séquence principale. En régime SWR, $\log \dot{M}$ augmente quasi-linéairement et ω augmente de façon similaire au cas sans perte de masse décrit en Sect. 5.2. Notons que le régime TWR peut quant à lui être divisé en deux phases d'évolution. Dans un premier temps (Phase 1) correspondant à $0.4 \lesssim X_{\text{core}}/X_0 \lesssim 0.3$ pour le modèle considéré, \dot{M} augmente rapidement tandis que ω continue d'augmenter mais plus lentement, et dans un second temps (Phase 2) correspondant à $X_{\text{core}}/X_0 \lesssim 0.3$ pour le modèle considéré, $\log \dot{M}$ revient à une augmentation quasi-linéaire, tandis que ω diminue. Nous reviendrons sur ces différentes phases du TWR plus loin. Nous représentons l'évolution du taux de perte de masse global en fonction de la température effective moyenne à la surface du modèle \bar{T}_{eff} en Fig. 5.13. Comme déjà remarqué dans le chapitre 4, nous notons que le régime TWR est atteint alors que sa température effective moyenne est supérieure à $T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$, ce qui indique que la température effective moyenne \bar{T}_{eff} n'est pas adaptée à la détermination du régime de vent. Nous illustrons l'évolution de ce modèle en Fig. 5.14 à travers quelques instantanés, et nous allons maintenant étudier plus en détails l'évolution de la rotation et de la perte de masse dans les trois régimes de vent identifiés.

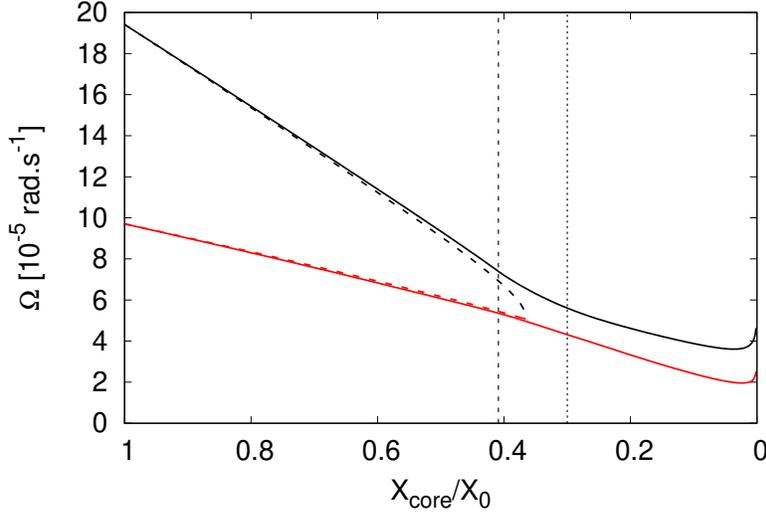


Figure 5.10: Vitesse angulaire à l'équateur (rouge) et vitesse angulaire képlérienne à l'équateur (noir) en fonction de la fraction massique d'hydrogène dans le cœur convectif X_{core}/X_0 pour un modèle ESTER 2D de $15M_{\odot}$ avec une vitesse de rotation initiale $\omega_i = 0.5$, avec et sans perte de masse (traits pleins et pointillés, respectivement). Source : Gagnier *et al.* (2019b).

Le Single-Wind Regime

L'augmentation de la luminosité L et la diminution de la température effective moyenne \bar{T}_{eff} au cours de la séquence principale des étoiles massives sont les conséquences bien connues de l'augmentation de la température et de la densité centrale résultant de la combustion d'hydrogène dans leur cœur convectif. Ainsi, d'après les équations (3.68), (3.72), et (4.1), et d'après les lois d'échelle de de Jager *et al.* (1988) et de Kudritzki *et al.* (1995), il est assez clair que le taux de perte de masse \dot{M} devrait augmenter tout au long de la séquence principale, quelle que soit la rotation du modèle. De plus nous avons vu, dans le chapitre précédent, que l'effet de la rotation sur le taux de perte de masse global est relativement faible en régime SWR (voir aussi Maeder & Meynet, 2000; Petrenz & Puls, 2000). Autrement dit, l'effet de l'augmentation de ω sur l'évolution de \dot{M} est négligeable par rapport aux effets de l'évolution séculaire.

Notons enfin que la Fig. 5.11b montre que, comme dans le cas sans perte de masse, ω augmente en régime SWR, mais plus lentement. En effet, la perte de moment cinétique a tendance à accélérer la diminution séculaire de la vitesse angulaire équatoriale Ω_{eq} . De plus, comme nous l'avons montré en Sect. 5.3.2, la perte de masse ralentit l'expansion stellaire car elle tend à faire contracter l'étoile. Ω_K diminue donc

CHAPITRE 5. ÉVOLUTION DE LA ROTATION DES ÉTOILES DE TYPE PRÉCOCE AU COURS DE LA SÉQUENCE PRINCIPALE

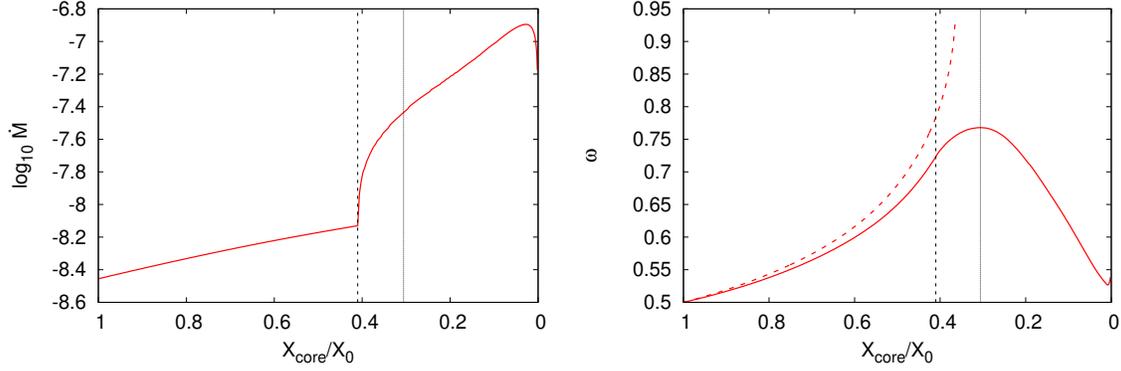


Figure 5.11: Gauche : évolution du taux de perte de masse \dot{M} (en $M_{\odot} \cdot \text{yr}^{-1}$) en fonction de la fraction massique d’hydrogène dans le cœur convectif X_{core}/X_0 pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ avec $Z = 0.02$, et $\omega_i = 0.5$. La première ligne verticale pointillée marque le moment où l’étoile atteint un régime TWR, et la seconde indique la transition entre la Phase 1 et la Phase 2. Droite : Même chose, mais pour le rapport des vitesses angulaires $\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_{\text{K}}$. La courbe rouge pointillée correspond à l’évolution de ω dans le cas où la masse et le moment cinétique sont maintenus constants au cours de la séquence principale. Source : [Gagnier et al. \(2019b\)](#).

plus lentement lorsque la perte de masse est prise en compte (voir Fig. 5.10).

La Phase 1 du Two-Winds Regime

Pour notre modèle de $15 M_{\odot}$, la première phase du régime TWR correspond à la période de $0.4 \gtrsim X_{\text{core}}/X_0 \gtrsim 0.3$. Durant cette phase, les évolutions de ω et de \dot{M} sont étroitement couplées. En effet, à $X_{\text{core}}/X_0 \simeq 0.4$, le modèle atteint un régime TWR, c’est-à-dire $T_{\text{eff,eq}} \simeq T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$, l’augmentation du flux de masse local est donc confinée à l’équateur. A ce stade, les pertes de masse et de moment cinétique ne sont pas assez importantes pour empêcher l’augmentation séculaire de ω , mais sont suffisantes pour la ralentir. Durant cette phase, les deux phénomènes contrôlant l’évolution de \dot{M} , à savoir l’évolution nucléaire (séculaire) de l’étoile et l’évolution de ω , ont tendance à faire migrer la latitude de bi-stabilité θ_{jump} vers les pôles. Nous représentons l’évolution de la fraction de surface de l’étoile où la température effective est inférieure à $T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$, $\Delta S/S$, c’est-à-dire la fraction de la surface stellaire où le flux de masse est augmenté par le saut de bi-stabilité, en Fig. 5.15. Nous notons en effet que pendant cette Phase 1, $\Delta S/S$ augmente, entraînant ainsi une augmentation des taux de perte de masse et de moment cinétique. Cela conduit inévitablement à une diminution plus rapide de Ω_{eq} et à une diminution plus lente de la vitesse angulaire

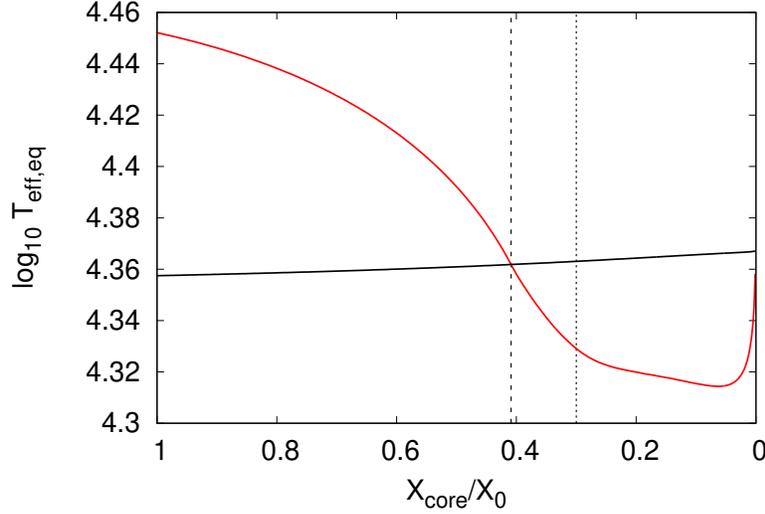


Figure 5.12: Même chose qu’en Fig. 5.11, mais pour l’évolution de la température effective à l’équateur $T_{\text{eff,eq}}$ (en K). La courbe noire représente l’évolution de la température du saut de bi-stabilité. Source : Gagnier *et al.* (2019b).

képlérienne Ω_K (voir Fig. 5.10) par rapport aux modèles sans perte de masse. Ce processus dure jusqu’à ce que les taux de perte de masse et de moment cinétique soient suffisants pour que ω se mette à décroître. À ce stade, l’étoile entre dans la deuxième phase du régime TWR.

La Phase 2 du Two-Winds Regime

Pour ce modèle stellaire, la seconde phase du régime est TWR est atteinte lorsque $X_{\text{core}}/X_0 \lesssim 0,3$, c’est-à-dire à partir du moment où ω commence à diminuer. Au fur et à mesure que ω diminue, l’aplatissement de la surface de l’étoile ϵ décroît, et nous nous attendons donc à ce que la colatitude θ_{jump} (re-)migre vers l’équateur. Cependant, nous remarquons que $\Delta S/S$ (et donc \dot{M}) continue à augmenter (voir Fig. 5.15). De toute évidence, le fait que θ_{jump} migre toujours vers les pôles résulte du fait que les effets de l’évolution nucléaire (séculaire) dominent toujours les effets de la diminution de ω durant cette phase. En plus de cela, nous notons que l’effet de l’évolution nucléaire domine aussi l’effet de la rotation sur l’évolution de l’opacité équatoriale, conduisant ainsi à une nouvelle augmentation du paramètre d’Eddington équatorial Γ_{eq} jusqu’à la fin de la séquence principale (plus exactement jusqu’au crochet, voir Fig. 5.8). Après le crochet proche de la fin de la séquence principale, l’étoile se contracte, entraînant une augmentation de la température moyenne effective et donc une migration de θ_{jump} vers l’équateur. Cette contraction est donc associée à une di-

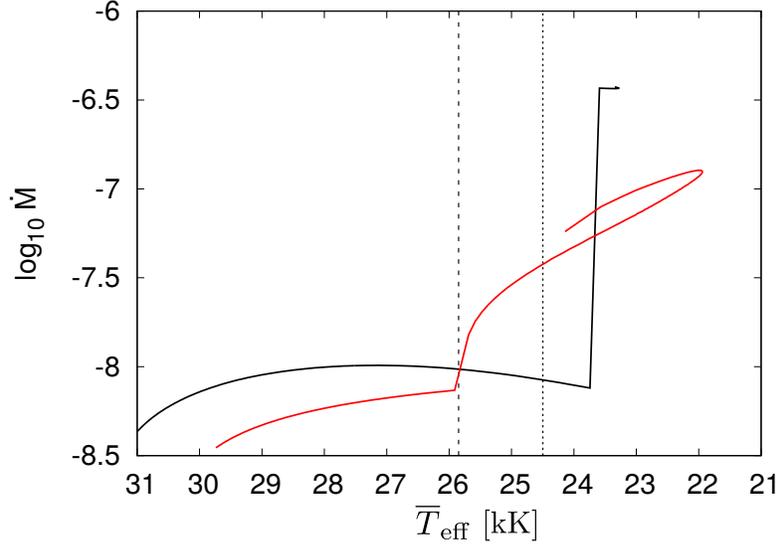


Figure 5.13: Evolution du taux de perte de masse \dot{M} en fonction de la température effective moyenne de l'étoile \bar{T}_{eff} pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ avec $Z = 0.02$, et $\omega_i = 0.5$ (en rouge). L'étoile évolue de la gauche vers la droite, avec une température effective moyenne de $\sim 30\text{kK}$ à la ZAMS, et de $\bar{T}_{\text{eff}} \simeq 22\text{kK}$ à la fin de la séquence principale (TAMS). La courbe noire correspond au cas sans rotation pour lequel le taux de perte de masse a été calculé avec la prescription de [Vink *et al.* \(2001\)](#). La première ligne verticale noire et pointillée indique le moment où l'étoile entre en régime TWR, et la seconde indique la transition entre les phases 1 et 2 du TWR. Source : [Gagnier *et al.* \(2019b\)](#).

minution de \dot{M} et une ultime augmentation de ω juste avant la fin de la séquence principale (voir Fig. 5.11).

Autres modèles

Nous présentons l'évolution du rapport des vitesses angulaires ω prédites par les modèles ESTER 2D de différentes masses initiales, et pour $\omega_i = 0.3$ et $\omega_i = 0.7$, en Fig. 5.16. Nous remarquons que l'évolution de ω dépend de la masse et de la vitesse angulaire initiale de manière non triviale, du moins pour la gamme de masse de nos modèles, à savoir $7 \lesssim M/M_{\odot} \lesssim 15$. Cette complexité vient du fait que la température effective locale à la surface de ces étoiles est souvent proche de la température effective du saut de bi-stabilité. Par conséquent, les étoiles sont susceptibles soit de commencer leur évolution dans un SWR côté chaud (c'est-à-dire $T_{\text{eff}} > T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$ pour toutes les colatitudes θ) pour éventuellement atteindre un régime TWR, puis un régime SWR

CHAPITRE 5. ÉVOLUTION DE LA ROTATION DES ÉTOILES DE TYPE PRÉCOCE AU COURS DE LA SÉQUENCE PRINCIPALE

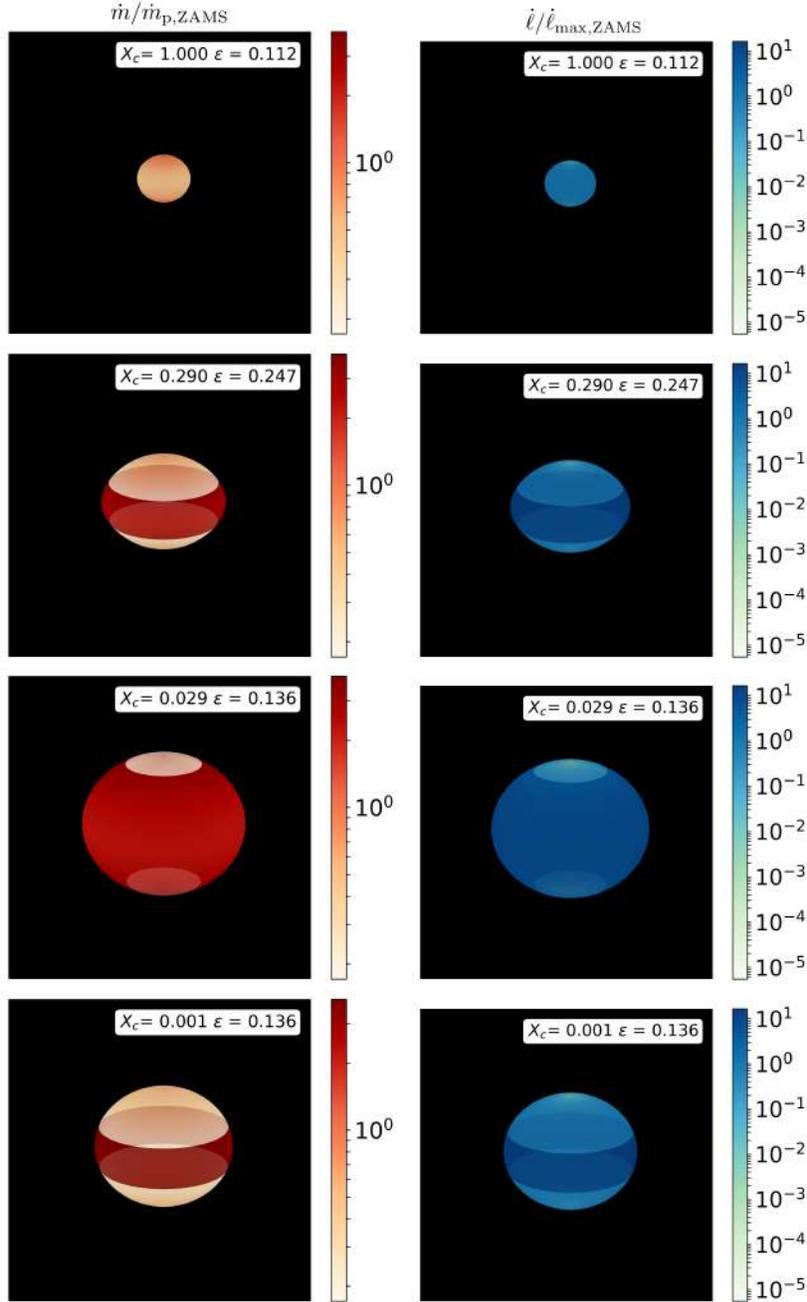


Figure 5.14: Instantanés de la distribution surfacique du flux de masse local \dot{m} en unités de flux de masse polaire à la ZAMS $\dot{m}_{p,ZAMS}$ (gauche), et de la distribution surfacique du flux de moment cinétique local $\dot{\ell}$ en unités du flux de moment cinétique maximal à la ZAMS $\dot{\ell}_{max,ZAMS}$ (droite), pour un modèle ESTER 2D de $15 M_\odot$ avec $Z = 0.02$, et $\omega_i = 0.5$, et à 4 temps différents correspondant à : $X_c \simeq 1, 0.3, 0.03$ et 0 . Le premier (première ligne) correspond à la ZAMS, le second correspond à la fin de la Phase 1 du TWR, le troisième à la fin de la Phase 2, et le dernier instantané (dernière ligne) correspond à la toute fin de la séquence principale. L'étoile est vue avec une inclinaison $i = 70^\circ$. Source : [Gagnier et al. \(2019b\)](#).

CHAPITRE 5. ÉVOLUTION DE LA ROTATION DES ÉTOILES DE TYPE PRÉCOCE AU COURS DE LA SÉQUENCE PRINCIPALE

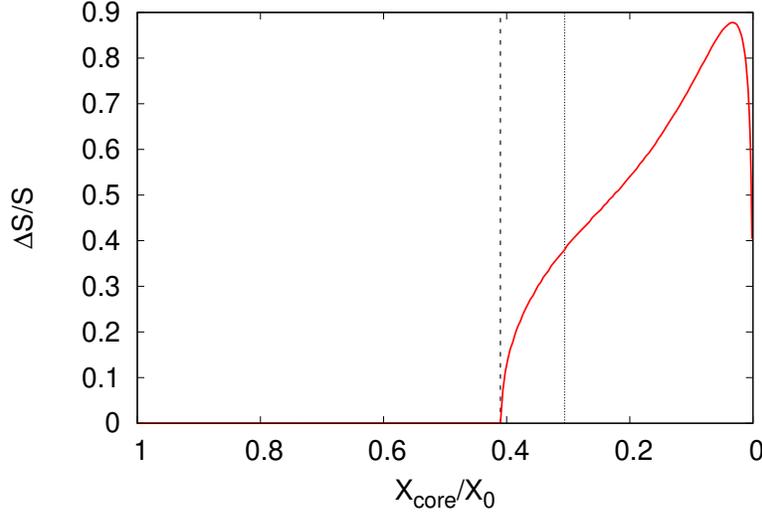


Figure 5.15: Évolution de la fraction de surface de l'étoile où la température effective est inférieure à $T_{\text{eff}}^{\text{jump}}$, pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ avec $Z = 0.02$ et pour $\omega_i = 0.5$. La première ligne noire pointillée marque le moment de l'évolution où l'étoile atteint un régime TWR, la seconde marque la transition entre la Phase 1 et la Phase 2. Source : [Gagnier et al. \(2019b\)](#).

côté froid (c'est-à-dire $T_{\text{eff}} < T_{\text{eff}}^{\text{jump}} \forall \theta$), soit de commencer leur évolution dans un régime TWR pour atteindre un régime SWR à côté froid. Ainsi, l'évolution de ω est très dépendante des conditions initiales qui, lorsqu'elles sont légèrement modifiées, peuvent induire une évolution sur la séquence principale très différente.

Heureusement, la modélisation des étoiles plus massives, à métallicité solaire, est certainement plus prévisible. En effet, ces étoiles commencent toujours leur évolution en régime SWR côté chaud à la ZAMS, et au-delà d'une certaine masse, l'expansion et l'évolution de la rotation ne sont plus suffisantes pour atteindre un régime TWR au cours de la séquence principale. De plus, les étoiles plus massives perdent aussi beaucoup plus de masse et de moment cinétique à cause de leur vent radiatif plus intense. ω peut alors décroître au cours de la séquence principale, tout en restant en régime SWR côté chaud. Malheureusement, pour des raisons numériques, le code ESTER ne nous permet pas, à l'heure actuelle, de modéliser l'évolution nucléaire d'étoiles de masses très supérieures à $\sim 20 M_{\odot}$.

CHAPITRE 5. ÉVOLUTION DE LA ROTATION DES ÉTOILES DE TYPE PRÉCOCE AU COURS DE LA SÉQUENCE PRINCIPALE

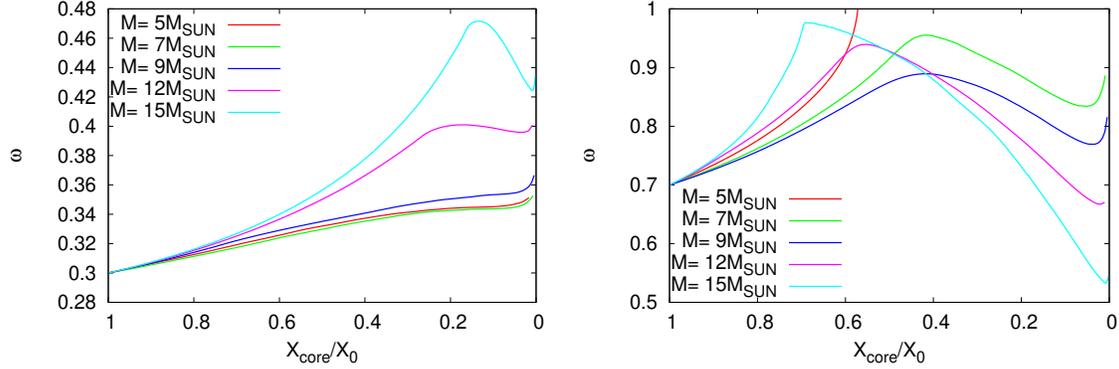


Figure 5.16: Vitesse angulaire à l'équateur en unités de vitesse angulaire képlérienne équatoriale $\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_{\text{K}}$ en fonction de la fraction massique d'hydrogène dans le cœur convectif X_{core}/X_0 , pour différentes masses initiales, pour $Z = 0.02$, et pour $\omega_i = 0.3$ (gauche) et $\omega_i = 0.7$ (droite). Source : [Gagnier et al. \(2019b\)](#).

5.4 Résumé

Nous concluons ce chapitre en résumant brièvement les résultats qui y ont été présentés. Après avoir justifié l'emploi d'une approximation quasi-stationnaire, c'est-à-dire la considération de l'évolution séculaire des étoiles massives comme une succession d'états stationnaires, nous avons, dans un premier temps, présenté l'évolution séculaire des paramètres stellaires dans le cas où l'étoile ne perd ni masse, ni moment cinétique. En particulier, nous avons montré que l'expansion de l'étoile durant la séquence principale, induit naturellement une augmentation du rapport des vitesses angulaires $\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_{\text{K}}$, donc une augmentation du degré de criticité. Cette augmentation implique que les étoiles de masse intermédiaire peuvent atteindre une vitesse angulaire critique (képlérienne) avant la fin de la séquence principale, sans pour autant être en rotation quasi-critique à la ZAMS. Nous avons ensuite étudié le cas d'une évolution séculaire en prenant en compte les pertes de masse et de moment cinétique anisotropes présentées dans le chapitre précédent. Nous avons vu que l'évolution de la rotation est bien plus complexe dans ce cas, en particulier car les étoiles massives dans un certain intervalle de masses (typiquement entre 7 et $20 M_{\odot}$) peuvent intercepter la limite de bi-stabilité localement à leur surface. Cette limite de bi-stabilité, et en particulier la transition entre les régimes de vent SWR et TWR présentés dans le chapitre précédent, est suivie de deux phases d'évolution. Ces deux phases correspondent, respectivement, à une augmentation rapide et continue des taux de perte de masse et de moment cinétique, et à une augmentation plus lente de ω (comparée à un régime de vent SWR), et à une diminution de ω accompagnée d'une augmentation plus lente des taux de perte de masse et de moment cinétique. Nous avons aussi

CHAPITRE 5. ÉVOLUTION DE LA ROTATION DES ÉTOILES DE TYPE PRÉCOCE AU COURS DE LA SÉQUENCE PRINCIPALE

montré que l'utilisation des modèles 2D, et malgré l'utilisation de la prescription 1D de [Vink et al. \(2001\)](#) pour la calibration de notre perte de masse, permet de ne pas avoir de discontinuité du taux de perte de masse global à la limite de bi-stabilité, contrairement aux modèles 1D. Au lieu de cela, c'est le flux de masse équatorial qui présente une discontinuité à la limite de bi-stabilité. Cette discontinuité migre ensuite vers les pôles, résultant ainsi en une augmentation continue du taux de perte de masse global en régime TWR. En raison de la nature locale de la limite de bi-stabilité dans les modèles 2D, celle-ci peut être atteinte à différents degrés de criticité, et pour différentes masses stellaires, c'est-à-dire pour diverses températures effectives moyennes de surface. Ainsi, les pertes de masse et de moment cinétique sont responsables soit d'un ralentissement de l'augmentation séculaire de ω , soit de sa diminution durant la séquence principale, et peuvent donc empêcher les étoiles massives d'atteindre une rotation critique avant la fin de la séquence principale.

CHAPITRE 5. ÉVOLUTION DE LA ROTATION DES ÉTOILES DE TYPE PRÉCOCE AU COURS DE LA SÉQUENCE PRINCIPALE

Chapitre 6

Généralités sur les fluides en rotation

Avant de nous consacrer à l'étude du rôle des vents radiatifs, en particulier de la perte de moment cinétique qui leur est associée, sur la dynamique interne des étoiles massives en rotation, un chapitre de transition semble nécessaire pour permettre au lecteur d'aborder le chapitre suivant plus aisément. Nous présentons ainsi quelques notions fondamentales sur les fluides en rotation, en nous focalisant sur les phénomènes physiques qui leur sont propres. Nous ferons, à maintes reprises, référence aux sections qui suivent, dans le chapitre 7.

6.1 Les équations du mouvement

Concentrons nous dans un premier temps sur l'écoulement incompressible et axisymétrique d'un fluide visqueux emprisonné entre deux coquilles sphériques et dont la masse volumique est constante spatialement, et au cours du temps (le cas stratifié, que ce soit en terme de température ou en densité sera discuté dans le chapitre suivant). Cet écoulement peut être caractérisé par l'équation de conservation de la quantité de mouvement, et celle de la conservation de la masse, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} \mathbf{F}_{\text{visc}} , \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 . \end{cases} \quad (6.1)$$

Dans ces équations, \mathbf{v} est la vitesse d'une particule fluide dans le repère inertiel, P est la pression, ρ la densité du fluide, et \mathbf{F}_{visc} est le vecteur force visqueuse qui, pour un fluide incompressible s'écrit simplement

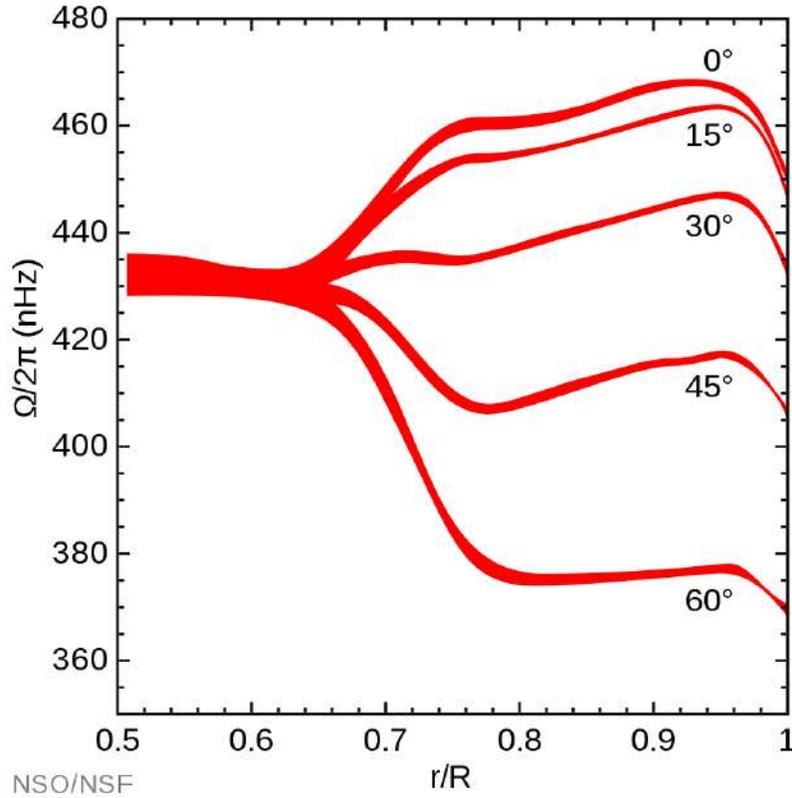


Figure 6.1: Rotation différentielle radiale dans les couches externes du Soleil. Source : NSO.

$$\mathbf{F}_{\text{visc}} = \mu \Delta \mathbf{v} , \quad (6.2)$$

où $\mu = \rho\nu$ est la viscosité dynamique du fluide et ν est sa viscosité cinématique.

Les écoulements dans les océans par exemple ont, en général, une vitesse caractéristique faible comparée à la vitesse de rotation solide de la Terre. Typiquement quelques mètres par seconde comparés à une vitesse de l'ordre de 460 mètres par seconde. Il est donc évident que pour étudier de tels écoulements, il est préférable de se placer dans un référentiel en rotation avec la surface terrestre. C'est aussi le cas lorsque l'on étudie les fluides astrophysiques. En effet, si l'on prend l'exemple du Soleil, la vitesse angulaire de sa zone convective dans le repère en rotation avec sa zone radiative (en rotation quasi-solide), est au maximum de l'ordre de 15 % de la vitesse angulaire de cette zone radiative dans un repère inertiel (cf Fig. 6.1).

Ainsi, ayant à l'esprit des applications astrophysiques, nous choisissons de nous placer dans un référentiel en rotation, et devons exprimer les équations hydrodynamiques dans ce référentiel. Pour cela, considérons un vecteur unitaire \mathbf{e}_i attaché au

CHAPITRE 6. GÉNÉRALITÉS SUR LES FLUIDES EN ROTATION

repère en rotation, tournant à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ et faisant un angle θ par rapport à l'axe de rotation, aux temps t et $t + \Delta t$. Nous schématisons le système en Fig. 6.2. Pour un petit écart temporel Δt (ou angulaire $\Delta\phi$), la différence entre ces deux vecteurs peut être approximée comme étant la corde du cercle de rayon $r = \sin\theta$ reliant les extrémités des deux vecteurs

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta \mathbf{e}_i| = r \Delta\phi = \sin\theta \Omega \Delta t . \quad (6.3)$$

Nous remarquons que le vecteur $\Delta \mathbf{e}_i$ est perpendiculaire à l'axe de rotation et, lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, à \mathbf{e}_i . Ainsi, nous pouvons écrire

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{e}_i = \sin\theta \Omega \Delta t \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i}{|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i|} , \quad (6.4)$$

et vu que par définition du produit vectoriel, $|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i| = \sin\theta \Omega$, il vient le taux de variation du vecteur unitaire vu par un observateur dans le repère inertiel

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{e}_i}{\Delta t} = \left(\frac{D\mathbf{e}_i}{Dt} \right)_{\text{inertiel}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i . \quad (6.5)$$

Notons que, dans le référentiel en rotation,

$$\left(\frac{D\mathbf{e}_i}{Dt} \right)_{\text{rotation}} = \mathbf{0} . \quad (6.6)$$

Prenons maintenant un vecteur quelconque $\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i$, nous écrivons alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\mathbf{X}}{Dt} \right)_{\text{inertiel}} &= \frac{DX_i}{Dt} \mathbf{e}_i + X_i \frac{D\mathbf{e}_i}{Dt} \\ &= \left(\frac{D\mathbf{X}}{Dt} \right)_{\text{rotation}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X} . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Ainsi, à la différence d'un observateur dans le repère en rotation qui ne voit que l'évolution de l'amplitude de chaque composante X_i , celui dans un repère inertiel voit aussi le taux de variation des vecteur unitaires \mathbf{e}_i . Considérons maintenant que $\mathbf{X} = \mathbf{r}$, alors

$$\left(\frac{D\mathbf{r}}{Dt} \right)_{\text{inertiel}} = \left(\frac{D\mathbf{r}}{Dt} \right)_{\text{rotation}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} , \quad (6.8)$$

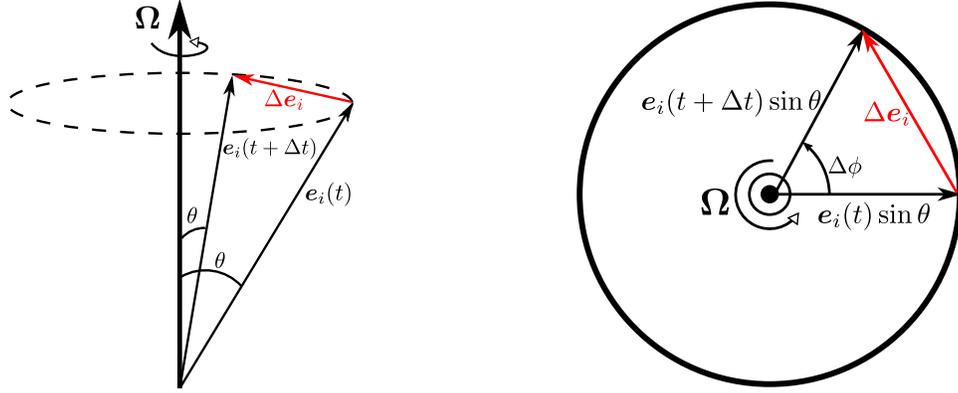


Figure 6.2: Gauche : vue schématique du système considéré. Droite : même chose mais vu du dessus. Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ (ou $\Delta\phi \rightarrow 0$), la différence entre les deux vecteurs unitaires $|\Delta\mathbf{e}_i|$ peut être assimilée à la corde du cercle de rayon $r = \sin\theta$ reliant leur deux extrémités.

c'est-à-dire

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} , \quad (6.9)$$

où \mathbf{v} est la vitesse dans le repère inertiel, et \mathbf{v}^r est celle dans le repère en rotation. De la même manière, si $\mathbf{X} = \mathbf{v}$, alors

$$\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\right)_{\text{inertiel}} = \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\right)_{\text{rotation}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} . \quad (6.10)$$

Injectons maintenant (6.9) dans (6.10), il vient

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\right)_{\text{inertiel}} &= \left(\frac{D(\mathbf{v}^r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}{Dt}\right)_{\text{rotation}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}^r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \left(\frac{D\mathbf{v}^r}{Dt}\right)_{\text{rotation}} + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{D\mathbf{r}}{Dt}\right)_{\text{rotation}} - \mathbf{r} \times \left(\frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt}\right)_{\text{rotation}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}^r + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \left(\frac{D\mathbf{v}^r}{Dt}\right)_{\text{rotation}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}^r - \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) . \end{aligned} \quad (6.11)$$

De plus, nous choisissons la vitesse angulaire du repère tournant $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_c(t)\mathbf{e}_z$ où $\Omega_c(t)$ est la vitesse angulaire de la coquille interne. L'équation (6.11) s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\right)_{\text{inertiel}} &= \frac{\partial \mathbf{v}^r}{\partial t} + (\mathbf{v}^r \cdot \nabla) \mathbf{v}^r + 2\Omega_c \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}^r - \mathbf{r} \times \dot{\Omega}_c \mathbf{e}_z + \Omega_c^2 \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \\
 &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v}^r
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Ainsi nous remarquons, lorsque l'on se place dans un référentiel non-inertiel, l'apparition de trois forces fictives (aussi appelées forces inertielles ou pseudo-forces) : la force d'Euler $-\mathbf{r} \times \dot{\Omega}_c \mathbf{e}_z$, la force centrifuge $\Omega_c^2 \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r})$, et la force de Coriolis $2\Omega_c \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}^r$. Évidemment, si l'on considère que la vitesse angulaire de la coquille interne n'évolue pas dans le temps, alors la première force est nulle. La force centrifuge, quant à elle, dérive d'un potentiel et peut être écrite comme suit

$$\Omega_c^2 \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) = -\nabla \left[\frac{1}{2} (\Omega_c \mathbf{e}_z \times \mathbf{r})^2 \right] \equiv \nabla \Phi_c, \tag{6.13}$$

où Φ_c est le potentiel centrifuge. Dans le cas $\dot{\Omega}_c = 0$, la force d'Euler est nulle et (6.12) s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{v}^r}{\partial t} + (\mathbf{v}^r \cdot \nabla) \mathbf{v}^r + 2\Omega_c \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}^r = -\nabla \Pi + \nu \Delta \mathbf{v}^r, \tag{6.14}$$

où $\Pi = P/\rho - \frac{1}{2}(\Omega_c \mathbf{e}_z \times \mathbf{r})^2$ est appelé pression réduite. Notons enfin que le gradient de pression ainsi que la force visqueuse sont inchangés par le changement de référentiel. A partir de maintenant, le champ de vitesses dans le référentiel en rotation \mathbf{v}^r sera simplement noté \mathbf{v} . Considérons maintenant l'équation du mouvement incompressible sans dimension, et dans le repère en rotation, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + Ro(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla p + E \Delta \mathbf{u}, \tag{6.15}$$

où $p = \Pi/(2\Omega_c LV)$, et $\mathbf{u} = \mathbf{v}/V$ est le champ de vitesses adimensionnées. Deux nombres sans dimension apparaissent

$$E = \frac{\nu}{2\Omega_c R^2} \quad \text{et} \quad Ro = \frac{V}{2\Omega_c R}. \tag{6.16}$$

Le premier est le nombre d'Ekman mesurant le rapport entre l'amplitude de la force visqueuse et celle de la force de Coriolis, le second est le nombre de Rossby qui mesure l'importance du terme non linéaire d'accélération convective par rapport à la force de Coriolis. Dans le régime où la représentation de l'équation du mouvement dans

le référentiel en rotation est pertinente, c'est-à-dire lorsque la vitesse de l'écoulement dans ce référentiel est petite comparée à la vitesse propre du référentiel ($\mathbf{v}^r \ll \Omega_c \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$), le nombre de Rossby est très petit devant un. Dans ce cas, le terme non linéaire peut être négligé, et (6.15) s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla p + E \Delta \mathbf{u} . \quad (6.17)$$

Prenons maintenant le rotationnel de (6.17) afin de faire disparaître le terme de pression, il vient l'équation de la vorticité dans le référentiel en rotation

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla \times \mathbf{u}) + \nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}) = -E \nabla^3 \times \mathbf{u} . \quad (6.18)$$

Il est important de noter que dans le cas où il existe une stratification en densité, un terme supplémentaire apparaît dans l'équation de la vorticité : $(\nabla P \times \nabla \rho) / \rho^2$. C'est le couple barocline, non nul si les isopycnes et les isobares ne sont pas confondues, c'est-à-dire si $P \neq P(\rho)$ (e.g., Garaud, 2002; Rieutord, 2006a; Espinosa Lara & Rieutord, 2013; Rieutord & Beth, 2014; Hypolite & Rieutord, 2014; Hypolite *et al.*, 2018). Dans les intérieurs stellaires, ce désalignement des gradients de pression et de densité est très faible, même pour les étoiles en rotation quasi-critique où il ne dépasse jamais 1  (Espinosa Lara & Rieutord, 2011). Pourtant, ce couple barocline génère une circulation méridienne conséquente du fait des forts gradients de densité et de pression (typiquement $\rho_c / \rho_s \sim 10^{10}$ et $P_c / P_s \sim 10^{12}$).

Enfin, pour la plupart des applications géo- et astrophysiques, le nombre d'Ekman est lui aussi généralement très petit devant un. En effet, ce nombre est typiquement de l'ordre de 10^{-11} à la frontière entre le noyau liquide et le manteau terrestre (Deleplace & Cardin, 2006) et de l'ordre de 10^{-15} dans le noyau liquide (Rotvig & Jones, 2002). Le nombre d'Ekman dans l'enveloppe radiative d'une étoile de $15 M_\odot$ dont le coeur convectif a une période de rotation d'un jour, est de l'ordre de 10^{-18} - 10^{-12} . Ainsi, si l'on se place dans cette limite, et à l'état stationnaire, l'équation de la vorticité pour un fluide barocline à l'ordre le plus bas peut s'écrire (Espinosa Lara & Rieutord, 2013)

$$r \sin \theta \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} = \mathbf{e}_\phi \cdot \frac{\nabla P \times \nabla \rho}{\rho^2} . \quad (6.19)$$

6.2 L'écoulement géostrophique

Considérons maintenant un écoulement incompressible pour lequel le nombre d'Ekman est très petit. L'équation du mouvement (6.17) indique que dans ce cas, le terme de force visqueuse peut *a priori* être considéré comme négligeable. Gardons cependant à l'esprit que celui-ci est aussi le terme le plus différentié, nous verrons dans la section suivante que cela implique l'existence de fines couches limites appelées couches d'Ekman. Hors de ces couches limites, nous considérons donc que le fluide est non visqueux au premier ordre. Simplifions encore le problème en examinant l'écoulement stationnaire et lent dans le référentiel tournant avec la coquille interne, c'est à dire que nous prenons $Ro = 0$, $\partial \bar{\mathbf{u}} / \partial \tau = \mathbf{0}$, et $E = 0$. (6.17) est ainsi simplifiée comme suit

$$\mathbf{e}_z \times \bar{\mathbf{u}} = -\nabla p, \quad (6.20)$$

c'est-à-dire que l'écoulement hors couches limites, et à l'ordre le plus bas, résulte d'un équilibre entre la force de Coriolis et la force associée au gradient de pression. C'est l'équilibre géostrophique. Le rotationnel de (6.20) résulte alors en une relation fondamentale pour l'étude des fluides non-visqueux en rotation, le théorème de Taylor-Proudman

$$(\mathbf{e}_z \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = 0. \quad (6.21)$$

Cette relation implique que la vitesse de toute particule fluide est indépendante de la coordonnée parallèle à l'axe de rotation (ici z), c'est-à-dire

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(s, \phi), \quad (6.22)$$

où $s = r \sin \theta$ est la coordonnée radiale cylindrique, donc la mesure de la distance à l'axe de rotation. De plus, si l'écoulement est axisymétrique, alors $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(s)$. L'écoulement interne est alors fortement dépendant des conditions aux limites qui vont dicter le mouvement commun de chaque colonne de fluide. En effet, si l'on impose une condition de non-pénétration des parois, c'est-à-dire $\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0$ où \mathbf{n} est un vecteur unité perpendiculaire aux parois du domaine et dirigé vers l'extérieur (dans le cas de coquilles sphériques concentriques, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ pour la coquille externe et $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$ pour la coquille interne), alors au premier ordre $\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0$ dans toute la colonne de fluide ayant pour extrémité une paroi imperméable, d'après (6.21).

Si l'on se concentre sur le cas d'un fluide emprisonné entre deux coquilles sphériques, et que l'on ajoute la condition limite $u_\theta = 0$ au niveau des deux parois, alors

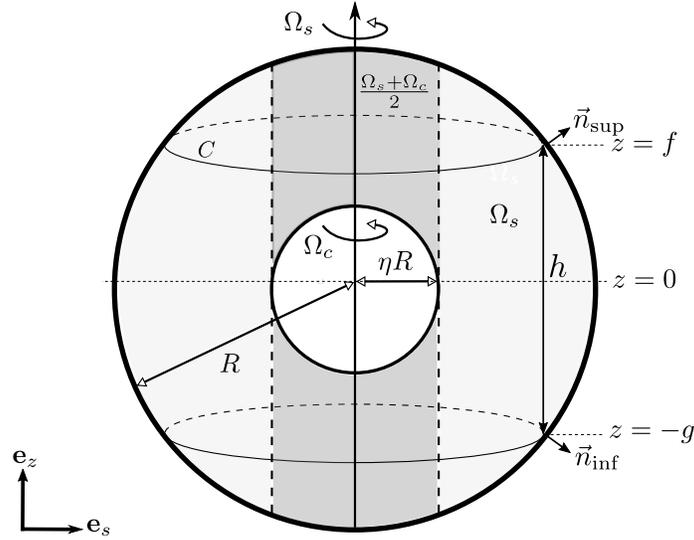


Figure 6.3: Vue schématique du système considéré : la coquille interne de rayon ηR a pour vitesse angulaire Ω_c tandis que la coquille externe de rayon R a pour vitesse angulaire Ω_s .

l'écoulement intérieur est purement azimutal au premier ordre, et l'équation (6.20) a pour solution

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial p}{\partial s} \mathbf{e}_\phi . \quad (6.23)$$

De manière analogue, si l'on impose une rotation différentielle en forçant la vitesse angulaire de la coquille externe $\Omega(R) = \Omega_s$, alors toute particule fluide dans la région $s > \eta R$ où ηR est le rayon de la coquille interne, aura pour vitesse angulaire Ω_s , car la vitesse azimutale est invariante dans la direction z d'après le théorème de Taylor-Proudman. C'est moins évident lorsque $s \leq \eta R$ car une contradiction apparaît. En effet, la coquille interne a pour vitesse angulaire $\Omega_c \neq \Omega_s$, or chaque ligne verticale (dans le sens parallèle à l'axe de rotation) dans cette région intercepte les deux parois et la vitesse angulaire du fluide devrait avoir, à la fois, la vitesse angulaire de la coquille interne et celle de la coquille externe. En réalité, Proudman (1956) montre que la vitesse angulaire du fluide, dans le cylindre de rayon ηR , est la moyenne de celle des deux parois. Nous discutons cet écoulement de Taylor-Couette en détail dans l'Annexe D. La figure 6.3 illustre les implications du théorème de Taylor-Proudman sur la rotation différentielle dans un système d'une telle géométrie.

Si l'on considère maintenant le cas d'un conteneur quelconque, n'étant pas nécessairement symétrique par rapport à $z = 0$, alors les vecteurs unité perpendiculaires

à la paroi et dirigés vers l'extérieur dans l'hémisphère supérieur ($z > 0$) et inférieur ($z < 0$), respectivement \mathbf{n}_{sup} et \mathbf{n}_{inf} , ne sont plus nécessairement symétriques. Il faut alors définir la position de la surface inférieure $z = -g$ et celle de la surface supérieure $z = f$. Ainsi, chaque colonne verticale de fluide a pour hauteur $h(s) = f + g$ (voir Fig. 6.3). On peut alors facilement montrer que (6.20) a pour solution générale (Greenspan, 1968; Rieutord, 2015)

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{n}_{\text{sup}} - \mathbf{n}_{\text{inf}}) \times \nabla p \\ &= \frac{\partial p}{\partial h} \mathbf{n}_{\text{inf}} \times \mathbf{n}_{\text{sup}} .\end{aligned}\tag{6.24}$$

On remarque alors que $\nabla p \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$, donc ∇p est une fonction de courant, et les isobares sont alors aussi des lignes de courant. Notons que $\mathbf{n}_{\text{sup}} = \mathbf{e}_z - \nabla f$ et $\mathbf{n}_{\text{inf}} = -\mathbf{e}_z - \nabla g$ (Rieutord, 2015), et que dans le cas sphérique, $f = g = h/2 = \sqrt{1 - s^2}$. Dans ce cas, injecter l'expression des vecteurs unité dans (6.24), nous permet de retrouver la solution (6.23). Comme Greenspan (1968) et Rieutord (2015), nous remarquons que cet écoulement géostrophique possède une circulation non nulle autour d'un contour géostrophique C (c'est-à-dire $h = \text{Cte}$, voir Fig. 6.3). Cette circulation s'écrit

$$\Gamma(h) = \oint_C \bar{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{l} = \frac{dp}{dh} \oint_C |\mathbf{n}_{\text{inf}} \times \mathbf{n}_{\text{sup}}| dl \neq 0 .\tag{6.25}$$

Pour résumer, nous avons trouvé que pour un système à symétrie sphérique, l'écoulement axisymétrique est purement géostrophique à l'ordre le plus bas. Les conditions aux limites que nous imposons dictent alors l'amplitude et les variations du champ de vitesses avec la distance à l'axe de rotation. En particulier, pour les conditions aux limites de non glissement de la vitesse méridienne, et en imposant la vitesse angulaire de la coquille externe, l'écoulement géostrophique est purement azimutal, la vitesse angulaire est égale à la vitesse angulaire imposée au niveau de la coquille externe dans la région $s > \eta R$, et est égale à la vitesse angulaire moyenne des deux parois lorsque $s \leq \eta R$. Il n'existe donc pas de circulation méridienne à l'ordre le plus bas (contrairement au cas d'un conteneur asymétrique par rapport à $z = 0$), et si l'on veut étudier les effets visqueux sur l'écoulement géostrophique, il faut considérer les couches limites dans lesquelles la vitesse tangentielle s'ajuste à celle de la paroi. L'importance des effets visqueux n'est cependant pas exclusive aux couches limites. En effet, des couches visqueuses peuvent aussi apparaître pour lisser d'éventuelles discontinuités dans les profils de vitesse ou de vorticité. C'est par exemple le cas de la couche de Stewartson qui est une couche (limite en géométrie cylindrique) de cisaillement et qui sera discutée en section 6.4.

6.3 Couches limites horizontales et circulation d'Ekman

6.3.1 Couche limite plane

Pour apprécier les effets visqueux dans les couches limites horizontales plaçons nous, dans un premier temps et pour simplifier le problème, en géométrie cartésienne. Considérons une paroi imperméable au dessus de laquelle repose un fluide non stratifié et très peu visqueux ($\nu \ll 1$). La figure 6.5 schématise le système. Nous avons vu dans la section précédente que l'équilibre géostrophique s'écrit

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (6.26)$$

où $\bar{\mathbf{u}}$ est le champ de vitesses géostrophique. Nous avons aussi vu que ce champ de vitesses satisfait le théorème de Taylor-Proudman et qu'il est donc indépendant de la coordonnée parallèle à l'axe de rotation. Le champ de vitesses dans la couche limite, quant à lui, est influencé par les effets visqueux et ne dépend que de la coordonnée z , c'est-à-dire de la distance dans la direction perpendiculaire à la paroi. L'équation du mouvement dans la couche limite s'écrit alors

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \frac{d^2 \mathbf{u}}{dz^2} . \quad (6.27)$$

Multiplions maintenant la composante parallèle à x de (6.26) et de (6.27) par i , et ajoutons le résultat à la composante parallèle à y de ces deux équations. Il vient

$$\delta_E^2 \frac{d^2}{dz^2} Z = 2i(Z - \bar{Z}) , \quad (6.28)$$

où nous avons considéré $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ avec $\Omega > 0$, $\delta_E = \sqrt{\nu/\Omega}$, $Z = u_x + iu_y$, et $\bar{Z} = \bar{u}_x + i\bar{u}_y$ (Busse *et al.*, 2007). Nous choisissons maintenant les conditions aux limites de non-glissement pour la vitesse tangentielle à la paroi, et la condition d'imperméabilité de cette dernière, c'est-à-dire¹

$$\mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad , \quad (6.29)$$

1. Notons que ces conditions aux limites de non-glissement ne sont pas indispensables à la formation des couches limites d'Ekman, et qu'un fort saut de viscosité peut suffire (Rieutord, 2006a).

à $z = 0$. A ces conditions s'ajoute

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Z = \bar{Z} , \quad (6.30)$$

c'est-à-dire que loin de la couche limite, l'écoulement est géostrophique. Les conditions (6.29) et (6.30) nous permettent ainsi de résoudre (6.28) dont la solution s'écrit alors

$$Z = Z_0 \left[1 - \exp \left(-(1+i)z/\delta_E \right) \right] . \quad (6.31)$$

Ainsi, l'écoulement tangent à la paroi est uniquement fonction de la variable $\zeta = z/\delta_E$, ce qui indique que le mouvement communiqué par la paroi au fluide par effets visqueux se fait au travers d'une couche limite d'Ekman d'épaisseur $\delta_E = O(\sqrt{E})$. A partir de (6.31) nous déduisons le champ de vitesses

$$\begin{aligned} u_x &= \bar{u}_x \left[1 - \exp \left(-z/\delta_E \right) \cos(z/\delta_E) \right] - \bar{u}_y \exp \left(-z/\delta_E \right) \sin(z/\delta_E) \\ u_y &= \bar{u}_y \left[1 - \exp \left(-z/\delta_E \right) \cos(z/\delta_E) \right] + \bar{u}_x \exp \left(-z/\delta_E \right) \sin(z/\delta_E) . \end{aligned} \quad (6.32)$$

Considérons maintenant, que l'écoulement géostrophique est unidimensionnel, c'est d'ailleurs ce que nous avons dans le cas sphérique (6.23). Nous prenons $\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}_x \mathbf{e}_x$. (6.32) se simplifie alors en

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x &= u_x - \bar{u}_x = -\bar{u}_x \exp \left(-z/\delta_E \right) \cos(z/\delta_E) \\ \tilde{u}_y &= u_y = \bar{u}_x \exp \left(-z/\delta_E \right) \sin(z/\delta_E) , \end{aligned} \quad (6.33)$$

où \tilde{u}_x et \tilde{u}_y sont les corrections au champ de vitesse géostrophique, résultants des effets visqueux dans la couche d'Ekman. Nous illustrons cet écoulement en représentant les composantes horizontales de la vitesse dans la couche limite d'Ekman, en fonction de la profondeur réduite ζ en figure 6.4. Cette représentation est appelée spirale d'Ekman.

Nous avons donc déterminé le champ de vitesses tangent à la paroi, dans la couche limite d'Ekman. Or, par conservation de la masse, cet écoulement tangentiel engendre nécessairement l'existence d'un écoulement parallèle à l'axe de rotation (et donc perpendiculaire à la couche limite). En effet, l'équation de continuité s'écrit

$$\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} = 0 . \quad (6.34)$$

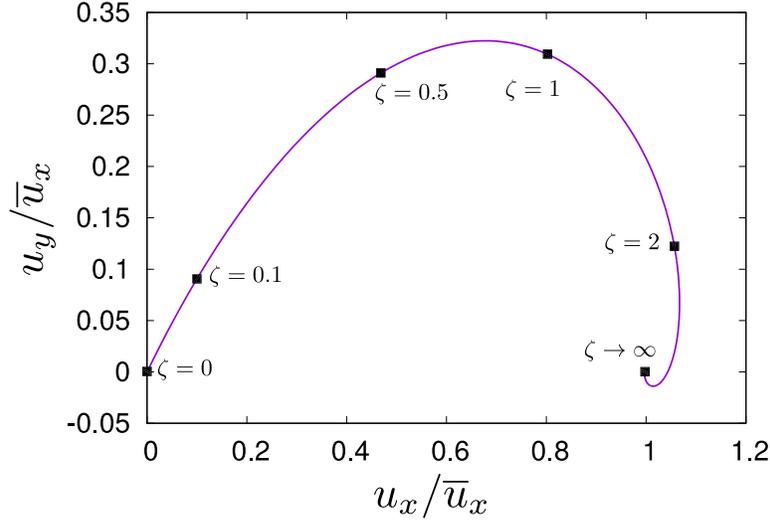


Figure 6.4: Spirale d'Ekman. La condition de non-glissement implique que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ à $\zeta = 0$, et l'imperméabilité de la paroi impose $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ loin de la couche d'Ekman ($\zeta \rightarrow \infty$).

Nous intégrons cette équation, dans le cas général où $\bar{u}_y \neq 0$, en utilisant la condition d'imperméabilité, et l'équation de continuité pour la solution géostrophique $\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$. Il vient

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tilde{u}_z = \frac{\delta_E}{2} \mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}), \quad (6.35)$$

pour $\Omega > 0$. Ainsi, lorsque $\mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{u}})$ est positif, le fluide est expulsé hors de la couche d'Ekman dans la direction z (pompage d'Ekman). Lorsqu'il est négatif, le fluide est absorbé par la couche d'Ekman (suction d'Ekman). Voir Fig. 6.5. L'écoulement tangent à la paroi et d'ordre $O(1)$ dans la couche d'Ekman génère donc un écoulement de pompage (ou suction) d'Ekman dont l'amplitude est de l'ordre de \sqrt{E} . Cette différence entre suction et pompage d'Ekman est souvent rencontrée lorsque l'on s'intéresse à la circulation dans les océans. En effet, la quantité de mouvement du vent soufflant à la surface des océans est transférée à l'eau par une contrainte horizontale surfacique. L'accélération de Coriolis associée à la rotation de la Terre va alors déplacer les parcelles d'eau perpendiculairement à la direction du vent. La direction de ce transport d'Ekman dépend de l'hémisphère : dans l'hémisphère nord, le transport se fait à 90° dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport à la direction du vent, tandis que dans l'hémisphère sud, il se fait à 90° dans le sens inverse (e.g. [Brown et al., 2011](#)). La convergence du transport d'Ekman dans la couche d'Ekman à la surface de l'océan entraîne alors, par conservation de la masse, un écoulement de pompage d'Ek-

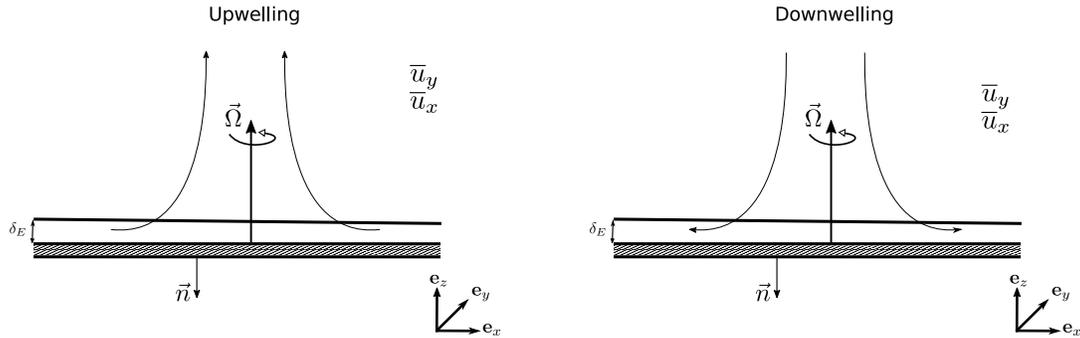


Figure 6.5: Vue schématique du système considéré. δ_E est l'épaisseur de la couche limite d'Ekman. Le sens de l'écoulement de pompe d'Ekman dépend du signe de $\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_0)$. Si cette quantité est positive, alors le phénomène est appelé *downwelling* et le fluide entre dans la couche d'Ekman. Si son signe est négatif, c'est l'*upwelling* et le fluide sort de la couche d'Ekman.

man (*downwelling*²). De la même manière, la divergence du transport d'Ekman dans la couche d'Ekman à la surface de l'océan entraîne, par conservation de la masse, un écoulement de suction d'Ekman (*upwelling*). Nous illustrons ce phénomène en Fig. 6.6 dans le cas d'une surface océanique dans l'hémisphère nord ($\Omega > 0$), pour une contrainte cyclonique et une contrainte anticyclonique. La Fig. 6.7 représente la direction de l'écoulement de pompe d'Ekman dans les océans.

Nous verrons, dans le chapitre suivant, que lorsque l'on s'intéresse aux écoulements dans une sphère, la circulation méridienne induite par ce phénomène contrôle exclusivement la dynamique méridienne interne hors couche de Stewartson (sauf pour les fluides fortement stratifiés, ce sera aussi discuté dans le chapitre suivant).

6.3.2 Couche limite sphérique

Augmentons maintenant légèrement la complexité du problème en considérant une paroi sphérique. Cette dernière n'est ainsi plus perpendiculaire à l'axe de rotation (à l'exception des pôles). Il est assez simple de montrer que les couches d'Ekman ont aussi une épaisseur $O(\sqrt{E})$ pour cette géométrie en appliquant le principe de

2. Notons que l'emploi des termes *downwelling* et *upwelling* peut être trompeur. En effet, lorsque le fluide se situe sous la couche d'Ekman, l'écoulement de pompe d'Ekman est appelé *downwelling* tandis qu'il est appelé *upwelling* lorsque le fluide se situe au dessus de la couche d'Ekman (et inversement pour l'écoulement de suction d'Ekman).

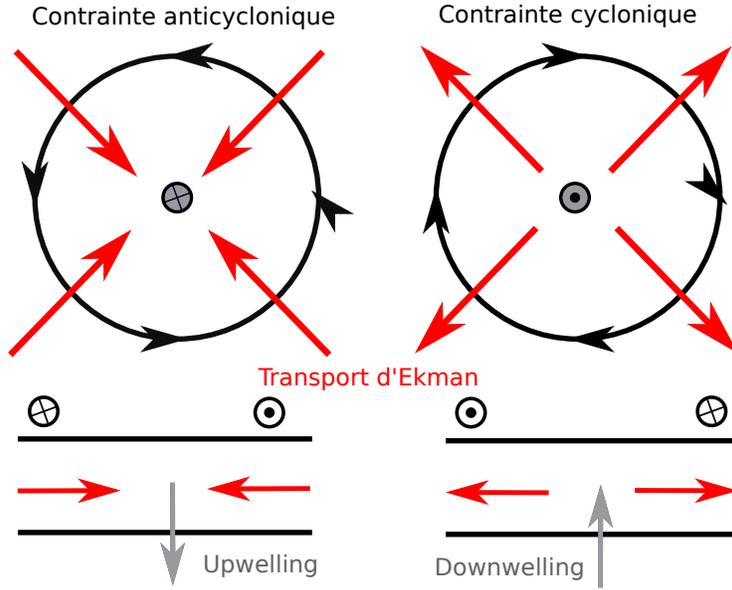


Figure 6.6: Schéma illustrant le sens de l'écoulement de pompage d'Ekman en fonction de la nature cyclonique ou anticyclonique de la contrainte horizontale générée par un vent à la surface des océans dans l'hémisphère nord. Reproduit à partir de la Fig. 2 de [Beesley *et al.* \(2008\)](#).

moindre dégénérescence aux équations du mouvement. Cette fois, nous développons les quantités dynamiques en puissances du petit paramètre \sqrt{E} . Il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}_0 + \tilde{\mathbf{u}}_0 + \sqrt{E}(\bar{\mathbf{u}}_1 + \tilde{\mathbf{u}}_1) + E(\bar{\mathbf{u}}_2 + \tilde{\mathbf{u}}_2) + \dots, \\ p &= \bar{p}_0 + \tilde{p}_0 + \sqrt{E}(\bar{p}_1 + \tilde{p}_1) + E(\bar{p}_2 + \tilde{p}_2) + \dots, \end{aligned} \quad (6.36)$$

où les variables surplombées d'une barre sont associées à l'écoulement interne, et le symbole tilde est associé aux corrections de la couche limite d'Ekman. Du fait de l'équilibre géostrophique $\mathbf{e}_z \times \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{p}$, l'équation du mouvement stationnaire s'écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{e}_z \times E^{n/2} \tilde{\mathbf{u}}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} E^{n/2} [-\nabla \tilde{p}_n + E\Delta(\bar{\mathbf{u}}_n + \tilde{\mathbf{u}}_n)], \quad (6.37)$$

où $n \in \mathbb{N}$. Nous gardons maintenant uniquement les termes $O(E^{m/2})$ dans (6.37), où $m \in \mathbb{N}$, et nous introduisons la coordonnée étirée de couche limite $\zeta = (1-r)/\sqrt{E}$, il vient

$$\mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{u}}_m = -\frac{\partial \tilde{p}_{m+1}}{\partial \zeta} \mathbf{n} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_m}{\partial \zeta^2}. \quad (6.38)$$

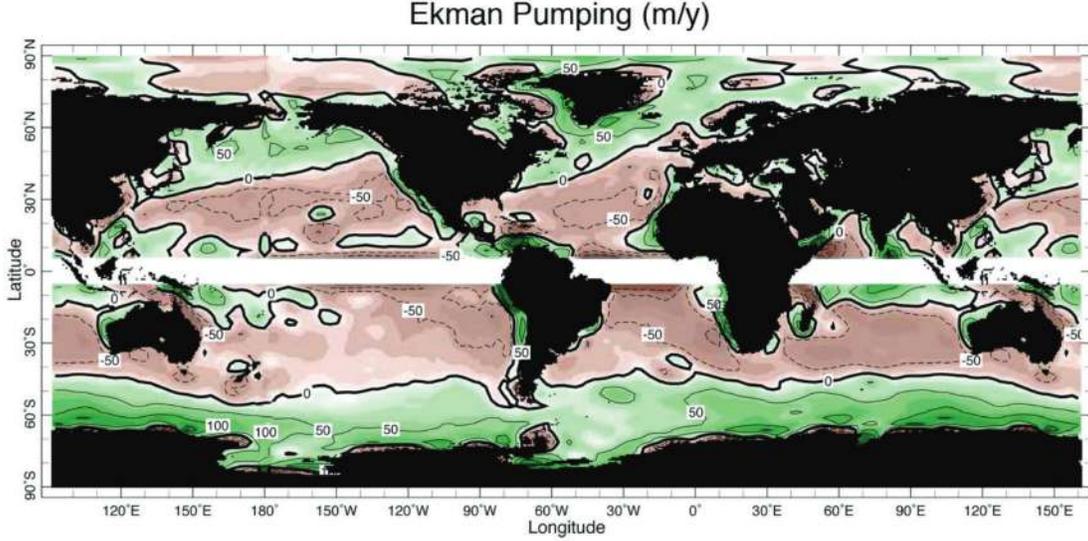


Figure 6.7: Vitesse verticale d'Ekman (en mètres par an) résultant du vent à la surface des océans. L'écoulement est dirigé vers la surface (*upwelling*) dans les zones vertes, et vers le fond (*downwelling*) dans les zones marrons. Source : [Beesley et al. \(2008\)](#).

où $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_r$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à la paroi et dirigé vers l'extérieur, dans l'hémisphère supérieur. Une simple manipulation vectorielle de (6.38), et le fait que $\mathbf{n} \cdot (\bar{\mathbf{u}}_m + \tilde{\mathbf{u}}_m) = 0$ dans la couche d'Ekman, donne la composante tangentielle du champ de vitesses d'ordre $O(E^{m/2})$

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{u}}_m + i\tilde{\mathbf{u}}_m) = i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z)(\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{u}}_m + i\tilde{\mathbf{u}}_m), \quad (6.39)$$

dont la solution est

$$(\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{u}}_m + i\tilde{\mathbf{u}}_m) = (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{u}}_m + i\tilde{\mathbf{u}}_m)_{\zeta=0} \exp\left(-\zeta \sqrt{i|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z|}\right). \quad (6.40)$$

Enfin, nous sommons (6.40) sur $m \in \mathbb{N}$ pour obtenir la composante du champ de vitesses tangentielle à la paroi dans la couche limite d'Ekman ([Greenspan, 1965](#); [Rieutord, 2015](#))

$$\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{u}} + i\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{C} \exp\left(-\zeta \sqrt{i|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z|}\right), \quad (6.41)$$

où \mathbf{C} est un vecteur complexe défini comme

$$\mathbf{C} = (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{u}} + i\tilde{\mathbf{u}})_{\zeta=0} . \quad (6.42)$$

En utilisant la condition d'imperméabilité de la paroi $\mathbf{n} \cdot (\bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}) = 0$ à $\zeta = 0$, (6.41) implique que

$$\tilde{u}_\theta + i(u_\phi - \bar{u}_\phi) = C \exp\left(-\zeta\sqrt{i|\cos\theta|}\right) . \quad (6.43)$$

Rappelons que \bar{u}_ϕ est la solution géostrophique de la vitesse azimutale, elle est donc indépendante de la coordonnée parallèle à l'axe de rotation z , c'est-à-dire $\bar{u}_\phi = \bar{u}_\phi(s)$. La fonction C est telle que (6.43) satisfait les conditions aux limites au niveau de la paroi. Prenons, par exemple, la condition de stress horizontal nul

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{u}_\theta + iu_\phi}{r} \right) \Big|_{r=1} = 0 . \quad (6.44)$$

Nous obtenons alors simplement

$$C(\theta) = (1+i)\sqrt{\frac{E}{2}}\Gamma(\theta) \quad (6.45)$$

où

$$\Gamma(\theta) = \frac{\bar{u}_\phi(\sin\theta) - \sin\theta\bar{u}'_\phi(\sin\theta)}{\sqrt{|\cos\theta|}} , \quad (6.46)$$

et le prime indique une dérivée vis-à-vis de la coordonnée radiale cylindrique $s = r\sin\theta$. La vitesse latitudinale dans la couche limite d'Ekman est alors obtenue en prenant la partie réelle de (6.43). Il vient

$$\tilde{u}_\theta = \sqrt{\frac{E}{2}}\Gamma(\theta)(\cos\xi + \sin\xi)e^{-\xi} , \quad (6.47)$$

où $\xi \equiv \zeta\sqrt{|\cos(\theta)|/2}$. De la même manière, la vitesse azimutale dans la couche limite d'Ekman est obtenue en prenant la partie imaginaire de (6.43). Il vient

$$\tilde{u}_\phi = \sqrt{\frac{E}{2}}\Gamma(\theta)(\cos\xi - \sin\xi)e^{-\xi} . \quad (6.48)$$

Comme dans la section précédente pour l'étude de la couche limite d'Ekman plane, le champ des vitesses tangentielles dans la couche limite d'Ekman ne satisfait

pas la conservation de la masse, et l'équation de conservation de la masse dans la couche limite d'Ekman s'écrit

$$\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \zeta} - \frac{\sqrt{E}}{\sin \theta} \frac{\partial \sin \theta \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (6.49)$$

où nous avons simplifié le problème en considérant que l'écoulement est axisymétrique par rapport à l'axe de rotation. Ainsi, la divergence de la vitesse dans la couche d'Ekman $\tilde{\mathbf{u}}$ induit un écoulement de faible amplitude et normal à la paroi. Nous intégrons cette équation en utilisant la condition d'imperméabilité de la paroi, et le fait que $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tilde{u}_r = 0$. De plus, nous considérons que $\theta \in [0, \pi/2]$, c'est-à-dire $|\cos \theta| = \cos \theta$. Il vient

$$\tilde{u}_r(\zeta = 0) = E \left[s \bar{u}_\phi'' + q(s) \left(\bar{u}'_\phi - \frac{\bar{u}_\phi}{s} \right) \right], \quad (6.50)$$

où

$$q(s) = \frac{1}{1 - s^2}. \quad (6.51)$$

Notons que l'écoulement de pompage/succion d'Ekman est ici d'ordre $O(E)$, tandis que nous avons $\tilde{u}_z = O(\sqrt{E})$ en Sect. 6.3.1 pour l'étude de la couche limite plane. Ce n'est cependant pas la géométrie de la couche d'Ekman (plane ou sphérique) qui induit cette différence d'amplitude, mais le fait que nous ayons imposé des conditions aux limites différentes : non-glissement pour la couche plane, et glissement sans frottement ici. Nous discuterons ce point plus en détail, et montrerons le rôle crucial des conditions aux limites sur l'écoulement interne dans le chapitre 7.

Ici, la condition limite (6.44) donne donc lieu à une vitesse tangentielle d'amplitude $O(\sqrt{E})$, qui elle-même génère un écoulement radial d'amplitude $O(E)$. Il est intéressant de remarquer que dans cette configuration de couche limite d'Ekman sphérique, son épaisseur est

$$\delta_E = O \left(\frac{E^{1/2}}{\sqrt{|\cos \theta|}} \right) = O \left(\frac{E^{1/2}}{\sqrt{z}} \right)^{1/2}, \quad (6.52)$$

dans l'hémisphère supérieur (où $z \geq 0$).

Ainsi, la couche d'Ekman s'épaissit pour des colatitudes croissantes, et tout comme la solution du champ de vitesses, la relation (6.52) est singulière au voisinage

de l'équateur ($\theta \rightarrow \pi/2$). Le problème de la singularité équatoriale de la couche d'Ekman est complexe et nous ne rentrerons pas dans les détails dans ce manuscrit (voir [Marcotte et al., 2016](#), pour son étude analytique et numérique). Nous pouvons tout de même dire quelques mots sur l'échelle de longueur de son épaisseur. En effet, considérons un fluide contenu dans une coquille sphérique de rayon 1, et plaçons nous dans un référentiel cartésien en rotation avec cette dernière et dont l'origine est l'équateur de la sphère (c'est-à-dire $x = s - 1$, cf Fig. 6.8). L'équation du contour de la coquille, donc l'équation du cercle de rayon 1 est simplement $s^2 + z^2 = 1$. Proche de l'équateur, c'est-à-dire pour $z \ll 1$, cette équation peut être écrite $s = \sqrt{1 - z^2} \simeq 1 - z^2/2$. Ainsi, dans cette région équatoriale, l'équation du contour de la coquille peut s'écrire

$$x \simeq -\frac{z^2}{2} . \quad (6.53)$$

Nous introduisons maintenant les coordonnées

$$\tilde{x} = E^{-\alpha}x, \quad \text{et} \quad \tilde{z} = E^{-\beta}z , \quad (6.54)$$

que nous choisissons comme étant $O(1)$ dans la couche d'Ekman et proche de l'équateur ([Marcotte et al., 2016](#)), c'est-à-dire que nous choisissons $x = O(E^\alpha)$, et $z = O(E^\beta)$. Injectons maintenant (6.54) dans (6.53); il vient

$$E^\alpha \tilde{x} \simeq -E^{2\beta} \frac{\tilde{z}^2}{2} . \quad (6.55)$$

\tilde{x} et \tilde{z} étant $O(1)$, (6.55) impose $\alpha = 2\beta$. De plus, très proche de l'équateur, nous pouvons considérer que la couche d'Ekman est orthogonale au plan équatorial et ainsi $x = E^\alpha \tilde{x} = O(\delta_E)$. En utilisant (6.52), il vient $z = E^\beta \tilde{z} = O(E/\delta_E^2) = O(E/x^2)$. Nous avons alors

$$E^\beta = E^{1-2\alpha}, \quad \text{et} \quad \alpha = 2\beta , \quad (6.56)$$

c'est-à-dire

$$z = E^{1/5} \tilde{z}, \quad \text{et} \quad x = E^{2/5} \tilde{x} , \quad (6.57)$$

dans la couche d'Ekman et à l'équateur. Ainsi, dans la bande équatoriale de hauteur $O(E^{1/5})$, la couche d'Ekman a pour épaisseur $\delta_E = O(E^{2/5})$. Une vue schématique des couches d'Ekman et de leur épaisseur est représentée en Fig. 6.8. Notons qu'il est logique qu'avec un développement des quantités dynamiques en puissances de $E^{1/2}$

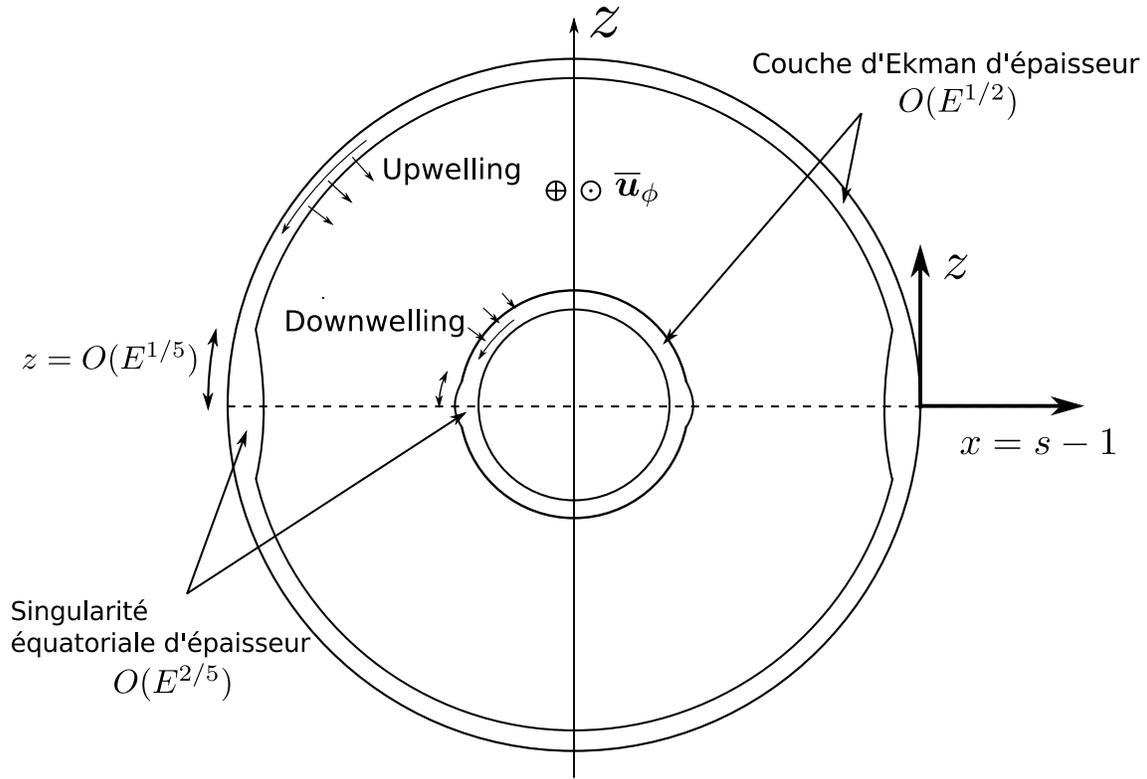


Figure 6.8: Vue schématique des couches d'Ekman dont l'épaisseur n'est bien sûr pas à l'échelle, et de la singularité équatoriale. L'écoulement d'upwelling (pompement) et de downwelling (suction) est indiqué, respectivement pour la couche limite externe et interne, dans le cas où la vitesse azimutale dans le référentiel en rotation avec la coquille externe est de signe négatif.

(6.36), cette couche apparait d'épaisseur infinie car dans le régime asymptotique des petits nombres d'Ekman, $E^{2/5-1/2} \rightarrow \infty$ (Roberts & Stewartson, 1963; Rieutord, 2015).

6.4 Couches verticales de cisaillement

Dans la section précédente, nous avons présenté les propriétés caractéristiques des couches limites horizontales d'Ekman, dans lesquelles l'amplitude de la force de Coriolis devient comparable à celle des forces visqueuses. Nous avons aussi vu que ces couches limites influent sur l'écoulement dans l'intérieur (quasi-)géostrophique de par la nécessité d'un écoulement de suction ou de pompage, perpendiculaire aux parois. L'amplitude de cette vitesse verticale est d'ordre $E^{1/2}$ lorsque les conditions aux

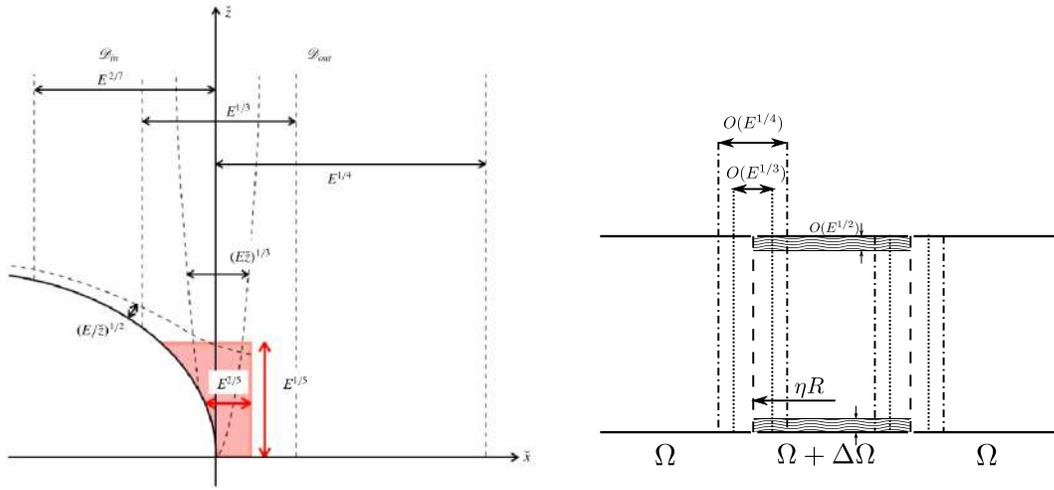


Figure 6.9: Représentation des couches de Stewartson imbriquées et de la couche d'Ekman interne, ainsi que leur épaisseur, dans une configuration de coquilles sphériques concentriques pour des conditions aux limites de non-glissement au niveau de la coquille externe (gauche, [Marcotte et al., 2016](#)), et dans une configuration de cylindres concentriques (droite, basé sur la figure 2.17 de [Greenspan, 1968](#)).

limites portent sur la vitesse tangentielle, et pas sur leur dérivée verticale (comparer [6.35](#) et [6.50](#)). Nous avons montré que l'étude des couches d'Ekman planes peut être généralisée aux couches limites horizontales inclinées et sphériques. Cependant, si elles sont localement parallèles à l'axe de rotation, nous avons vu que la théorie échoue du fait de l'apparition d'une singularité. Lorsque que cela arrive, nous avons vu que l'épaisseur des couches d'Ekman en ces points singuliers est modifiée ($O(E^{1/2}) \rightarrow O(E^{2/5})$). Dans cette section, nous étudierons brièvement un second effet de la présence de cette singularité, à savoir l'apparition de couches de cisaillement imbriquées, dont l'ensemble est appelé couche de Stewartson ([Stewartson, 1966](#)), tangente à la singularité des couches d'Ekman, et dont les propriétés sont plus compliquées que celles des couches limites horizontales. La formation de ces couches imbriquées est en réalité nécessaire pour plusieurs raisons. La première est qu'elle permet le transfert de fluide d'une couche d'Ekman à une autre. La seconde dépend de la géométrie de la configuration : pour des cylindres concentriques, les couches imbriquées doivent permettre à l'écoulement géostrophique interne, de satisfaire les conditions aux limites au niveau des parois verticales, pour des coquilles concentriques, elles doivent permettre de supprimer une singularité dans le gradient de vitesse angulaire et de lisser une discontinuité dans la dérivée de la vorticité. La couche de Stewartson est représentée schématiquement en Fig. [6.9](#), dans les configurations de coquilles sphériques concentriques, et de cylindres concentriques.

Pour simplifier le problème, plaçons nous dans la configuration des cylindres concentriques où nous forçons une rotation différentielle entre les deux cylindres $\Delta\Omega = O(1)$, et prenons la composante verticale de l'équation du mouvement incompressible (6.17), à l'état stationnaire

$$\frac{\partial p}{\partial z} = E\Delta(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u}) . \quad (6.58)$$

La composante verticale de l'équation de la vorticité (6.18), à l'état stationnaire s'écrit quant à elle

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u}) = E\Delta(\mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{u})) , \quad (6.59)$$

où nous avons utilisé l'équation de continuité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Il est alors possible de combiner ces deux équations, pour obtenir

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + E^2 \nabla^4 (\mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{u})) = 0 , \quad (6.60)$$

et enfin, nous utilisons la divergence de l'équation stationnaire du mouvement

$$\mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla^2 p , \quad (6.61)$$

qui une fois insérée dans (6.60) donne l'équation différentielle de degré 6 pour la pression (expression aussi formulée par Greenspan, 1968; Hopfinger, 1992)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + E^2 \nabla^6 p = 0 , \quad (6.62)$$

qui représente un équilibre entre la force de Coriolis et les forces visqueuses. A partir de cette équation, nous allons maintenant retrouver l'épaisseur caractéristique des deux couches imbriquées de Stewartson, ainsi que l'amplitude des vitesses dans ces couches, en fonction du nombre d'Ekman.

6.4.1 La couche d'épaisseur $E^{1/3}$

Supposons qu'il existe une couche verticale d'épaisseur $O(E^\alpha)R$, où R est le rayon du cylindre externe et ηR celui du cylindre interne, tangente à ce dernier, et dans laquelle les effets visqueux dominant. Introduisons maintenant la coordonnée cartésienne sans dimension étirée et d'ordre $O(1)$, $\tilde{x} = E^{-\alpha}x$ avec $x = s - \eta$ telle que la dérivée radiale cylindrique $\partial_s = E^{-\alpha}\partial_{\tilde{x}}$. Nous considérerons aussi que l'écoulement

est axisymétrique. Enfin, nous nous plaçons dans la limite asymptotique des petits nombres d'Ekman $E \ll 1$. Ne gardant que les termes dominants, l'équation (6.62) peut alors être réécrite

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + E^{2-6\alpha} \frac{\partial^6 p}{\partial \tilde{x}^6} = 0 . \quad (6.63)$$

Pour que les termes soient en équilibre, il faut alors $\alpha = 1/3$. Ainsi, il peut exister une couche verticale de cisaillement d'épaisseur $O(E^{1/3})$ (e.g., Greenspan, 1968). De plus, comme mentionné plus haut, au moins une des couches imbriquées de Stewartson doit contenir l'écoulement de pompage/succion, permettant un transfert de masse entre les deux couches d'Ekman. D'après (6.35) et (6.52), la vitesse verticale de pompage associée est

$$\tilde{u}_z = O\left(E^{1/2} E^{-\alpha} \partial_{\tilde{x}} \bar{u}_y\right) , \quad (6.64)$$

où \bar{u}_y est la vitesse géostrophique dans le cylindre, d'ordre $O(1)$. Supposons que dans cette couche d'épaisseur $O(E^{1/3})$, il existe un écoulement vertical d'amplitude $O(E^\beta)$, il faut alors que $O(E^\beta) = O(E^{1/2-1/3})$, c'est-à-dire $\beta = 1/6$. Ainsi, l'amplitude de la vitesse verticale u_z dans cette couche est $O(E^{1/6})$. L'équation de continuité dans la couche limite s'écrit quant à elle

$$E^{-1/3} \frac{\partial u_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 , \quad (6.65)$$

et l'équilibre des deux termes implique $u_x = O(E^{1/2})$. Projetons maintenant l'équation du mouvement dans les trois directions, x , y , et z . Il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_y = -E^{-1/3} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}} + E^{1/3} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \tilde{x}^2} , \\ u_x = E^{1/3} \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tilde{x}^2} , \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + E^{1/3} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tilde{x}^2} . \end{array} \right. \quad (6.66)$$

Une nouvelle fois, l'équilibre des différents termes implique que $u_y = O(E^{1/6})$, et que $p = O(E^{1/2})$. Notons que l'équation (6.66c) implique que l'écoulement dans cette couche verticale est agéostrophique, car la pression dépend de la coordonnée verticale. Notons aussi que la vitesse azimutale u_y imposée à l'intérieur du cylindre est $O(1)$, et la couche considérée ne permet pas la reconnexion de la vitesse azimutale

avec l'écoulement intérieur. La couche d'épaisseur $O(E^{1/3})$ n'est donc clairement pas suffisante pour décrire entièrement la couche de Stewartson.

6.4.2 La couche d'épaisseur $E^{1/4}$

Considérons maintenant une seconde couche verticale de cisaillement dans laquelle, pour permettre une reconnexion avec l'écoulement géostrophique intérieur, la vitesse azimutale $u_y = O(1)$. Comme pour l'étude de la couche d'épaisseur $E^{1/3}$, nous introduisons la coordonnée cartésienne sans dimension étirée et d'ordre $O(1)$, $\tilde{x} = E^{-\gamma}x$ avec $x = s - \eta$ telle que la dérivée radiale cylindrique $\partial_s = E^{-\gamma}\partial_{\tilde{x}}$. Les termes dominants de l'équation de la pression (6.62) donnent

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + E^{2-6\gamma} \frac{\partial^6 p}{\partial \tilde{x}^6} = 0. \quad (6.67)$$

Évidemment, γ ne peut pas être égal à $1/3$ et deux cas se présentent à nous. Si $\gamma > 1/3$ alors le second terme domine, et (6.67) devient

$$\frac{\partial^6 p}{\partial \tilde{x}^6} = 0. \quad (6.68)$$

Cette condition ne peut cependant pas satisfaire à la fois les conditions aux limites pour u_y , tout en assurant que p tende vers 0 loin de la couche verticale considérée. Ainsi, γ est nécessairement plus petit que $1/3$. Dans ce cas, (6.67) devient, dans la limite asymptotique $E \ll 1$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (6.69)$$

Comme pour l'étude de la couche d'épaisseur $O(E^{1/3})$, nous projetons maintenant l'équation du mouvement dans les trois directions, x , y , et z . Il vient

$$\begin{cases} -u_y = -E^{-\gamma} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}} + E^{1-2\gamma} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \tilde{x}^2}, \\ u_x = E^{1-2\gamma} \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tilde{x}^2}, \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + E^{1-2\gamma} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tilde{x}^2}, \end{cases} \quad (6.70)$$

et l'équation de continuité s'écrit

$$E^{-\gamma} \frac{\partial u_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 . \quad (6.71)$$

Rappelons que nous imposons $u_y = O(1)$, alors d'après (6.70b), $u_x = O(E^{1-2\gamma})$, et d'après (6.71), $u_z = O(E^{1-3\gamma})$. De plus, vu que $\gamma < 1/3$, le premier terme du côté droit de (6.70a) domine sur le second. Ainsi, $p = O(E^\gamma)$, et donc (6.70c) se réduit à

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 , \quad (6.72)$$

à l'ordre le plus bas. Ainsi, l'écoulement dans la couche d'épaisseur $O(E^\gamma)$ est quasi-géostrophique. Enfin, faisons le même exercice que dans la section précédente en faisant l'hypothèse que cette couche participe au transfert de masse entre les deux couches d'Ekman, c'est-à-dire que $O(E^{1-3\gamma}) = O(E^{1/2-\gamma})$. Il vient $\gamma = 1/4$, donc $u_x = O(E^{1/2})$ et $u_z = O(E^{1/4})$ dans cette couche verticale d'épaisseur $O(E^{1/4})$.

6.4.3 La couche d'épaisseur $E^{2/7}$

De la même manière, il est possible de montrer que dans le cas d'une géométrie coquilles sphériques, il existe une couche supplémentaire localisée dans le cylindre de rayon sans dimension η et parallèle à l'axe de rotation. Contrairement à la couche d'épaisseur $O(E^{1/4})$, celle-ci est située au dessus de la coquille interne (cf Fig. 6.9), et est donc dépendante de sa géométrie.

La détermination de son épaisseur est, pour l'essentiel, identique au cas précédent. Nous introduisons une nouvelle fois la coordonnée cartésienne sans dimension étirée et d'ordre $O(1)$, $\tilde{x} = E^{-\xi}x$ avec $x = s - \eta$ telle que la dérivée radiale cylindrique $\partial_s = E^{-\xi}\partial_{\tilde{x}}$. Nous choisissons, comme dans la section précédente, $u_y = O(1)$ afin de permettre une reconnexion avec l'écoulement géostrophique dans le cylindre tangent à la coquille interne. Ainsi, en suivant les mêmes étapes que pour l'étude de la couche d'épaisseur $O(E^{1/4})$, nous trouvons, une nouvelle fois, $u_x = O(E^{1-2\xi})$, $u_z = O(E^{1-3\xi})$, $p = O(E^\xi)$, et $\partial p/\partial z = 0$. Ainsi, la couche d'épaisseur $O(E^\xi)$ est elle aussi quasi-géostrophique. Enfin, et contrairement au cas précédent, nous considérons les effets géométriques associés à la coquille interne, dans l'expression de l'amplitude de l'écoulement de pompage/succion d'Ekman. En effet, dans cette couche, la hauteur de la coquille interne z n'est plus nécessairement $O(1)$, et d'après (6.35) et (6.52),

$$\tilde{u}_z = O \left(\frac{E^{1/2}}{\sqrt{z}} E^{-\xi} \partial_{\tilde{x}} u_0 \right) . \quad (6.73)$$

Notons que si l'on considère que $z = O(1)$, nous retrouvons la solution pour une couche d'épaisseur $O(E^{1/4})$. Si l'on considère la géométrie de la coquille interne dans cette couche, et que l'on se place dans la limite asymptotique des petits nombres d'Ekman, l'équation du contour de la coquille interne $s^2 + z^2 = \eta^2$ donne

$$\begin{aligned}\sqrt{z} &= (\eta^2 - s^2)^{1/4} \\ &= - \left(2E^\xi \eta^2 \tilde{x} + E^{2\xi} \tilde{x}^2 \right)^{1/4} \\ &\simeq -(2E^\xi \eta^2 \tilde{x})^{1/4} \\ &= O(E^{\xi/4}),\end{aligned}\tag{6.74}$$

où nous avons utilisé le fait que $\xi < 1/3$ et $s \leq \eta$. Ainsi, l'écoulement de pompage/succion d'Ekman a pour amplitude

$$\tilde{u}_z = O(E^{1/2-\xi-\xi/4}).\tag{6.75}$$

Enfin, faisons encore une fois l'hypothèse que cette couche participe au transfert de masse entre les deux couches d'Ekman, c'est à dire que $O(E^{1-3\xi}) = O(E^{1/2-\xi-\xi/4})$. Il vient $\xi = 2/7$. Ainsi, dans la couche d'Ekman d'épaisseur $O(E^{2/7})$ localisée dans le cylindre tangent à la coquille interne, $u_x = O(E^{4/7})$, $u_z = O(E^{1/7})$, et $p = O(E^{2/7})$.

Pour finir cette section, il est important de préciser que l'existence de la couche centrale d'épaisseur $O(E^{1/3})$ dans laquelle la force de Coriolis et la force de viscosité sont en équilibre, ne dépend pas des conditions aux limites imposées. En revanche, l'existence des couches quasi-géostrophiques d'épaisseur $O(E^{2/7})$ et $O(E^{1/4})$ en dépend. En effet, lorsque, par exemple, l'on impose un stress horizontal au niveau de la coquille externe, l'équilibre caractéristique de la couche $E^{1/4}$, c'est-à-dire l'équilibre entre l'écoulement de pompage/succion d'Ekman et le frottement associé à la vitesse azimutale d'ordre $O(1)$, est en place dans toute la région externe au cylindre tangent. Cette couche de cisaillement n'a donc pas lieu d'exister. Dans cette configuration, la couche quasi-géostrophique d'épaisseur $O(E^{2/7})$ existe cependant, mais l'écoulement qui la caractérise n'est pas celui présenté dans cette section. La configuration où l'on impose une conditions limite sur la dérivée radiale de la vitesse azimutale est présentée dans le chapitre 7.

6.5 Instabilités hydrodynamiques liées à la rotation

Un grand nombre d'instabilités liées à la rotation peuvent émerger dans les intérieurs stellaires et ainsi contribuer au transport du moment cinétique et des éléments

chimiques (voir Charbonnel *et al.*, 2008, par exemple). L'une d'entre elles, parfois considérée comme la principale source de transport vertical (ici dans le sens parallèle à la gravité) dans les zones radiatives stellaires, est l'instabilité de cisaillement résultant de la rotation différentielle radiale. D'autres instabilités peuvent aussi avoir un rôle important. En effet, dans les intérieurs stratifiés, des instabilités associées à la flottabilité peuvent apparaître, comme la convection thermique si le fluide est stratifié thermiquement de façon instable, ou la convection double-diffusive si la densité du fluide dépend de deux variables (par exemple, la température et le poids moléculaire moyen) diffusant à des vitesses différentes. En outre, dans les intérieurs en rotation, un déplacement de particules fluides peut entraîner des instabilités centrifuges si le moment cinétique diminue localement en s'éloignant de l'axe de rotation. La présence d'un champ magnétique peut également jouer un rôle dans la déstabilisation des intérieurs stellaires, soit directement par la flottabilité magnétique ou par des instabilités conjointes (association d'un cisaillement et d'un champ magnétique toroïdal, par exemple), ou soit par son interaction avec la convection turbulente, ce qui peut générer de la dynamo et ainsi entretenir le champ magnétique.

Les régions radiatives stellaires sont en rotation, stratifiées thermiquement et contiennent des gradients de composition chimique résultant des réactions de fusion qui augmentent le poids moléculaire moyen dans le cœur. Par conséquent, il semble raisonnable de s'attendre à ce que la plupart, sinon la totalité, des processus de transport mentionnés ci-dessus se produisent, possiblement simultanément, pendant la vie des étoiles. Bien sûr, la modélisation complète du mélange induit par la rotation stellaire est un problème complexe. Par conséquent, pour en comprendre les différentes facettes, il est utile d'étudier des configurations simplifiées qui intègrent, étape par étape, les différents phénomènes physiques qui contribuent à l'ensemble du modèle réaliste. Dans cette section, nous présenterons uniquement les conditions d'instabilité des écoulements cisailés, en augmentant progressivement le degré de sophistication de la configuration. L'instabilité centrifuge ainsi que les instabilités baroclines n'étant pas pertinentes pour la suite du manuscrit, sont succinctement présentées en Annexe B.

6.5.1 Instabilité de cisaillement

L'instabilité de cisaillement est souvent considérée comme étant la principale source de transport turbulent dans les zones radiatives stellaires (Knobloch & Spruit, 1983; Zahn, 1992). Les écoulements cisailés sont omniprésents dans la nature et existent dès que deux particules fluides adjacentes se déplacent dans la même direction, mais à des vitesses différentes. Le cisaillement est alors l'amplitude du gradient de vitesse dans la direction perpendiculaire au déplacement. Dans cette section, nous

présenterons le cas classique d'un écoulement plan parallèle, pour un fluide non-visqueux, avec et sans stratification, et nous discuterons des effets diffusifs.

Cas non stratifié

Prenons un fluide incompressible et non-visqueux entre deux plaques parallèles localisées respectivement à $z = 0$ et $z = H$. Considérons maintenant que ces deux plaques sont imperméables, c'est-à-dire $v_z(H) = v_z(0) = 0$, et qu'il existe un écoulement satisfaisant l'équation du mouvement stationnaire, dirigé dans la direction x , et dont le profil vertical arbitraire est imposé, $\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x(z)\mathbf{e}_x$. Le fluide n'étant pas visqueux, il n'existe pas de couche limite au niveau des deux parois. Une vue schématique de la configuration géométrique est représentée Fig. 6.10. L'équation du mouvement et l'équation de continuité dans le référentiel inertiel s'écrivent simplement

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (6.76)$$

Étudions maintenant la stabilité de l'écoulement laminaire $\bar{\mathbf{v}}$ sujet à des perturbations d'amplitudes infinitésimales. Pour cela, nous décomposons le champ de vitesses en $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} = \bar{v}_x(z)\mathbf{e}_x + \tilde{\mathbf{v}}$, où $\tilde{\mathbf{v}}$ est la perturbation infinitésimale du champ de vitesses. Nous faisons la même décomposition pour le champ de pression. Cependant, le terme non linéaire d'accélération convective $(\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$, donc $\nabla \bar{P} = \mathbf{0}$. Ainsi, nous pouvons écrire les équations du mouvement projetées dans les directions x et z et linéarisées, ainsi que l'équation de continuité. Il vient

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \tilde{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (6.77)$$

Les coefficients de ce système d'équations aux dérivées partielles ne sont ni fonction de t ni de x . Ainsi, nous cherchons des solutions de la forme $\tilde{q}(x, z, t) = \hat{q}(z) \exp(ik_x x + \lambda t)$, où λ est le taux de croissance des perturbations, et k_x est la composante horizontale du nombre d'onde (Garaud *et al.*, 2015). Le système d'équations (6.77) s'écrit alors

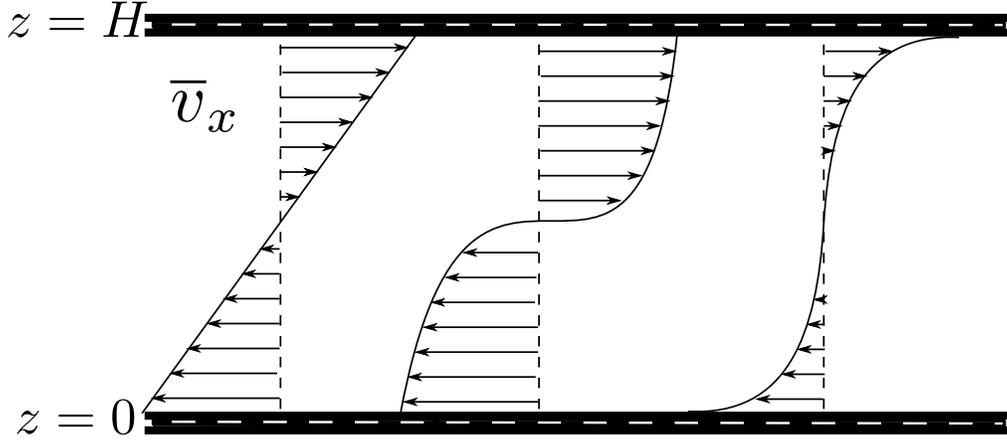


Figure 6.10: Exemples de profils verticaux laminaires \bar{v}_x entre deux parois parallèles et imperméables.

$$\begin{cases} \lambda \hat{v}_x + ik_x \bar{v}_x \hat{v}_x + \hat{v}_z \frac{d\bar{v}_x}{dz} = -ik_x \hat{P} , \\ \lambda \hat{v}_z + ik_x \bar{v}_x \hat{v}_z = -\frac{d\hat{P}}{dz} , \\ ik_x \hat{v}_x + \frac{d\hat{v}_z}{dz} = 0 . \end{cases} \quad (6.78)$$

Il suffit maintenant de combiner ces trois équations, et d'introduire la vitesse de phase des fluctuations sinusoïdales c telle que $\lambda = -ik_x c$ (Drazin, 2002; Garaud *et al.*, 2015), pour obtenir l'équation de Rayleigh

$$(\bar{v}_x - c) \left(\frac{d^2 \hat{v}_z}{dz^2} - k_x^2 \hat{v}_z \right) - \hat{v}_z \frac{d^2 \bar{v}_x}{dz^2} = 0 , \quad (6.79)$$

qui doit être résolue numériquement. Nous notons cependant que les modes se propagent de la même manière dans le sens x positif et x négatif. En effet, les solutions de cette équation ne dépendent pas du signe de k_x . Notons aussi que les modes instables ($\mathcal{R}(\lambda) > 0$) à $k_x > 0$, correspondent aux modes dont la partie imaginaire de la vitesse de phase $\mathcal{I}(c)$ est positive. Si c est réel, alors les modes associés ne sont ni stables ni

instables, ils oscillent et sont appelés modes neutres. Nous pouvons maintenant dériver la condition de stabilité linéaire (nécessaire mais pas suffisante) appelée théorème du point d'inflexion de Rayleigh (Rayleigh, 1880). En effet, multiplions (6.79) et son complexe conjugué respectivement par $\hat{v}_z^*/(\bar{v}_x - c)$ et $\hat{v}_z/(\bar{v}_x - c^*)$ où le symbole * indique la forme complexe conjuguée, soustrayons ces deux équations et intégrons le résultat entre $z = 0$ et $z = H$. Il vient

$$\mathcal{I}(c) \int_0^H \frac{\hat{v}_z \hat{v}_z^*}{(\bar{v}_x - c)(\bar{v}_x - c^*)} \frac{d^2 \bar{v}_x}{dz^2} dz = 0, \quad (6.80)$$

en utilisant la condition limite $\hat{v}_z = 0$ à $z = 0$ et $z = H$. Nous avons vu, plus haut, que les modes instables sont caractérisés par $\mathcal{I}(c) > 0$. Ainsi, pour $\mathcal{I}(c) > 0$, les termes dans l'intégrale ne peuvent pas rester positif dans l'ensemble du domaine, et le seul terme pouvant potentiellement changer de signe est $d^2 \bar{v}_x / dz^2$. Le critère nécessaire pour l'instabilité linéaire requiert que quelque part entre $z = 0$ et $z = H$

$$\frac{d^2 \bar{v}_x}{dz^2} = 0, \quad (6.81)$$

et donc que l'écoulement laminaire possède un point d'inflexion. Ainsi, il est intéressant de remarquer, par exemple, qu'un profil de vitesse laminaire linéaire est toujours linéairement stable vis-à-vis du cisaillement, lorsque l'on considère un fluide non-visqueux et non-stratifié.

Cas stratifié et non-diffusif

Considérons maintenant les effets de la stratification en imposant un profil vertical de densité nominale $\bar{\rho}(z)$ en équilibre hydrostatique, c'est-à-dire tel que

$$\frac{d\bar{P}(z)}{dz} + \bar{\rho}(z)g = 0. \quad (6.82)$$

Cette densité nominale sera choisie décroissante avec la hauteur z dans notre système bi-dimensionnel, telle que le fluide soit stratifié de manière stable. Cette stratification stable introduit ainsi une force de rappel, la force d'Archimède, qui tend à inhiber les mouvements verticaux et à stabiliser l'écoulement. Les zones radiatives stellaires étant elles même stratifiées, cet incrément de sophistication est un pas supplémentaire vers une modélisation réaliste des intérieurs stellaires. Nous nous plaçons dans l'approximation de Boussinesq, souvent utilisée pour simplifier les études théoriques et numériques des fluides stratifiés et incompressibles. Ainsi, nous supposons que les fluctuations de densité autour du profil nominal sont négligeables, sauf dans

le terme de poussée d'Archimède. L'utilisation de cette approximation est justifiée si les vitesses restent faibles par rapport à celle du son ($M^2 = V^2/c_s^2 \ll 1$) et si les hauteurs de pression, de température et de densité sont grandes par rapport à la hauteur du domaine occupé par le fluide (Spiegel & Veronis, 1960). Cette approximation considère l'équation d'état $\tilde{\rho} = -\bar{\rho}\alpha\tilde{T}$ où \tilde{T} est la perturbation du profil nominal de température \bar{T} , et $\alpha = -\bar{\rho}^{-1}(\partial\rho/\partial T)_P$ est le coefficient de dilatation thermique.

Le profil de température nominale est choisi linéaire, c'est-à-dire $d\bar{T}/dz = \bar{T}_z = \text{Cte}$, et les équations du mouvement, de la température et de continuité peuvent alors s'écrire, dans le cas non-diffusif

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \tilde{P} + \alpha g \tilde{T} \mathbf{e}_z, \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tilde{T} + \tilde{v}_z \bar{T}_z = -\nabla \tilde{P} + \alpha g \tilde{T} \mathbf{e}_z = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (6.83)$$

Comme pour le cas non stratifié, nous linéarisons ces équations, les projetons dans les deux directions, x et z , et cherchons des solutions de la forme $\tilde{q}(x, z, t) = \hat{q}(z) \exp(ik_x x + \lambda t)$. La combinaison de ces équations permet alors d'obtenir l'équation de Taylor-Goldstein

$$(\bar{v}_x - c) \left(\frac{d^2 \hat{v}_z}{dz^2} - k_x^2 \hat{v}_z \right) - \hat{v}_z \frac{d^2 \bar{v}_x}{dz^2} + \frac{\mathcal{N}^2}{\bar{v}_x - c} \hat{v}_z = 0, \quad (6.84)$$

où $\mathcal{N}^2 = \alpha g \bar{T}_z$ est la fréquence de Brunt-Väisälä. Notons que dans le cas non stratifié, c'est-à-dire le cas où $\mathcal{N}^2 = 0$, nous retrouvons l'équation de Rayleigh (6.79). Comme pour le cas non-stratifié, nous remarquons que les solutions de cette équation peuvent être associées à des modes neutres si $\mathcal{I}(c) = 0$, ainsi qu'à des modes instables si $\mathcal{I}(c) > 0$. De manière analogue au cas non-stratifié, il est possible de montrer que cette équation implique (Miles, 1961; Howard, 1961)

$$\mathcal{I}(c) \int_0^H \frac{1}{|\bar{v}_x - c|^2} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{d\bar{u}_x}{dz} \right)^2 - \mathcal{N}^2 \right) dz = \mathcal{I}(c) \int_0^H \left| \frac{dF}{dz} \right|^2 + k_x^2 |F|^2 dz, \quad (6.85)$$

où $F = \tilde{v}_z / \sqrt{\bar{v}_x - c}$. La condition nécessaire (mais pas suffisante) d'instabilité $\mathcal{I}(c) > 0$ implique que le terme de droite est positif. Le terme de gauche doit alors l'être aussi. Ainsi, un écoulement non visqueux et stratifié peut être linéairement instable si quelque part dans le domaine

$$J(z) = \frac{\mathcal{N}^2}{(\overline{d\bar{u}_x/dz})^2} < \frac{1}{4}, \quad (6.86)$$

où $J(z)$ est le nombre de Richardson local. Ainsi, la stratification stable a un effet stabilisateur sur l'écoulement cisailé. Les intérieurs stellaires sont généralement très fortement stratifiés, en particulier $J(z)$ ne tombe jamais en dessous de l'unité dans les zones radiatives. Ce critère implique donc que les intérieurs stellaires sont *a priori* toujours stables vis-à-vis de l'instabilité de cisaillement (à quelques rares exceptions près, voir [Edelmann et al., 2017](#)). Autrement dit, le cisaillement généré par la rotation différentielle est *a priori* trop faible pour surpasser l'effet stabilisateur de la stratification.

Le rôle de la viscosité et de la diffusion thermique

Jusqu'ici, nous avons étudié les conditions de stabilité d'un écoulement cisailé non visqueux et non diffusif. Tandis que la viscosité tend à avoir un effet stabilisateur, nous avons vu qu'une stratification (stable) en densité peut stabiliser un écoulement qui, s'il n'était pas stratifié, serait instable. La diffusion thermique quant à elle lisse les perturbations de température et donc de densité. Ainsi, lorsqu'elle est prise en compte, cette dernière inhibe la force d'Archimède qui stabilise l'écoulement et peut alors permettre à l'instabilité de se développer. C'est [Townsend \(1958\)](#) qui, le premier, montre que les effets d'ajustement thermique des particules fluides par la radiation à leur voisinage entraîne une augmentation du nombre de Richardson critique, passant ainsi de $1/4$ à $(St_{cool})^{-1}$, où $S = |d\bar{v}/dz|$ est le taux de cisaillement local, $t_{cool} = l^2/\kappa_T$ est le temps de refroidissement par la radiation, l est la longueur caractéristique des tourbillons, et κ_T est la diffusivité thermique. Ainsi, la nouvelle condition pour l'instabilité peut s'écrire $JPe_l < (JPe)_c$ où $Pe_l = St_{cool}$ est le nombre de Péclet turbulent et $(JPe)_c$ est une constante d'ordre 1. Cette condition indique que tout écoulement cisailé et stratifié peut toujours être instable si l est suffisamment petit. Évidemment, l ne peut pas être infiniment petit à cause de la viscosité. [Zahn \(1974\)](#) introduit alors une échelle de longueur critique pour les tourbillons l_c qui correspond à la plus petite échelle pour laquelle le nombre de Reynolds est supercritique. Le nombre de Reynolds critique $Re_c = Sl_c^2/\nu$ est une constante universelle d'ordre 10^3 . Le critère d'instabilité, pour toute échelle de longueur peut alors s'écrire $JPe < (JPe)_c Re/Re_c$, c'est-à-dire

$$JPr < (JPr)_c \equiv \frac{(JPe)_c}{Re_c}, \quad (6.87)$$

où $Pr = \nu/\kappa_T$ est le nombre de Prandtl, très petit dans les intérieurs stellaires radiatifs, et $(JPr)_c \simeq 0.007$ (Garaud & Kulenthirarajah, 2016; Prat *et al.*, 2016; Garaud *et al.*, 2017). En particulier, J_{crit} qui était égal à 1/4 dans le cas non-diffusif, peut atteindre des valeurs de l'ordre de 10^3 – 10^4 dans les intérieurs stellaires, et ainsi permettre au cisaillement généré par la rotation différentielle de surpasser l'effet stabilisateur de la stratification (stable). Bien-sûr, la géométrie adaptée à l'étude des intérieurs stellaires est sphérique et le taux de cisaillement s'écrit $S = r \sin \theta d\Omega/dr$ pour une rotation en coquilles ($\Omega = \Omega(r)$).

Les écoulements cisailés turbulents associés à l'instabilité de cisaillement sont caractérisés par un transport turbulent des scalaires passifs et de la quantité de mouvement, dans la direction du cisaillement, et sont associés, respectivement, au coefficient de diffusion verticale D_v et à la viscosité turbulente ν_v . Pour déterminer leur expression, Zahn (1992) fait l'hypothèse simple que l'écoulement reste marginalement stable, c'est-à-dire qu'il suppose $JPr = (JPr)_c$. Cette hypothèse définit ainsi la taille des tourbillons

$$l_Z = \left(\frac{(JPe)_c}{JPe} \right)^{1/2} H, \quad (6.88)$$

où H est l'échelle de longueur verticale de la couche de cisaillement et $Pe = SH^2/\kappa_T$. Il vient alors $D_v \simeq \nu_v \simeq C\kappa_T/J \propto Sl_Z^2$ où $C \simeq 0.08$ (Garaud *et al.*, 2017) est une autre constante universelle et κ_T est la diffusivité thermique. Le critère d'instabilité (6.87) est vérifié par les simulations numériques directes de Prat *et al.* (2016) et de Garaud *et al.* (2017) mais l'expression des coefficients de transport ne reproduit pas correctement les résultats numériques dans la limite de faible stratification ($J \ll 1$) pour laquelle Zahn (1992) prédit que D_v et ν_v doivent tendre vers une valeur infinie, ce qui n'est évidemment pas physique. Garaud *et al.* (2017) montre que le fait que la taille des tourbillons est inversement proportionnelle à J , et que la taille du domaine est limitée verticalement, implique que dans la limite des faibles stratifications $l_Z \rightarrow H$, donc que dans ce régime D_v et ν_v tendent vers une valeur constante. Ils proposent alors un nouveau modèle

$$\frac{D_v J}{\kappa_T} \simeq \frac{\nu_v J}{\kappa_T} = \frac{C}{1 + a(JPe_C)^{-1}} \left(1 - \frac{JPr}{(JPr)_c} \right)^b \quad \text{pour } JPr < (JPr)_c, \quad (6.89)$$

où $Pe_C = S_C H^2/\kappa_T$ et S_C est le cisaillement associé à l'écoulement laminaire, $C \simeq 0.08$, $b \simeq 0.25$ et la valeur de a dépend de la configuration du système mais peut être prise égale à 1. La figure 6.11 montre la comparaison entre le modèle de Zahn, le modèle présenté Eq. 6.89, et les données numériques, pour différents nombres de

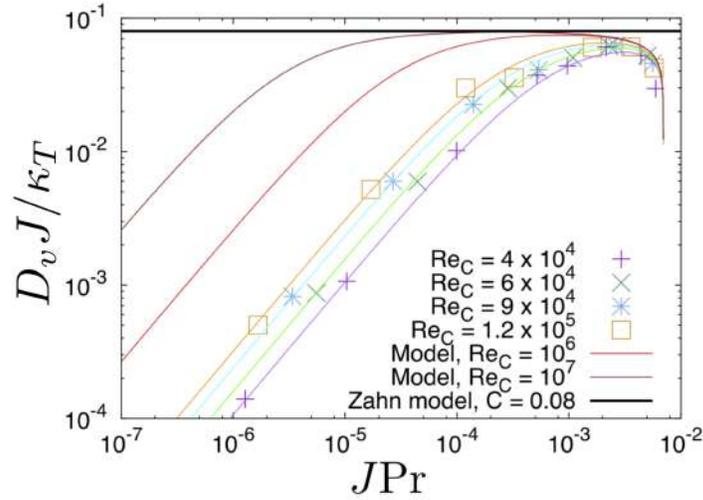


Figure 6.11: Comparaison entre le modèle de Zahn pour le transport turbulent et celui de [Garaud *et al.* \(2017\)](#). Les symboles correspondent aux résultats des simulations numériques directes de [Garaud *et al.* \(2017\)](#) à différents nombres de Reynolds $Re_C = S_C H^2 / \nu$. Source : [Garaud *et al.* \(2017\)](#).

Reynolds.

[Gagnier & Garaud \(2018\)](#) montrent ensuite que l'apparition de la turbulence dans un écoulement cisailé et stablement stratifié est sujette à l'hystérésis. En particulier, le critère d'instabilité linéaire (6.87) n'est pas une condition suffisante (bien que nécessaire) pour être le siège de turbulence, et l'apparition de cette turbulence dépend de l'évolution de la stabilité de cet écoulement. Aussi, [Gagnier & Garaud \(2018\)](#) montrent que contrairement à ce qu'implique le critère d'instabilité linéaire (6.87), il existe un "overshoot" turbulent entre les régions théoriquement stables vis-à-vis de ce critère, et les régions théoriquement instables adjacentes. L'échelle de longueur de cet overshoot où l'amplitude de l'écoulement turbulent décroît exponentiellement, δ , est de l'ordre de l'échelle de longueur verticale des tourbillons.

Ainsi, bien que le modèle de Zahn pour l'instabilité de cisaillement soit très largement utilisé, en particulier pour modéliser le transport turbulent dans les codes d'évolution stellaire, ce dernier possède quelques limites. En particulier, le critère d'instabilité de [Zahn \(1974\)](#) ne prend pas en considération les effets non-locaux de la turbulence, et l'expression analytique des coefficients de transport de [Zahn \(1992\)](#) n'est pas nécessairement valide dans tous les régimes de stratification. Enfin, bien que dans les étoiles le cisaillement est associé à la rotation différentielle, le modèle de Zahn ne prend pas en considération les effets de la rotation, qui sont potentiellement cruciaux. En effet, selon le signe du gradient de moment cinétique dans la direction

perpendiculaire à l'axe de rotation, la rotation peut soit stabiliser soit déstabiliser un écoulement cisailé et stratifié, et donc modifier considérablement les conditions d'instabilité ainsi que le transport turbulent associé.

6.6 Stabilité des couches limites horizontales et verticales

Les écoulements dans les couches limites horizontales d'Ekman et dans la couche de Stewartson sont fortement cisailés. En effet, les premières font le lien entre les conditions aux limites et l'écoulement intérieur, et la seconde est, par définition, une couche de cisaillement. Dans cette section, nous décrirons brièvement quelques résultats théoriques et expérimentaux relatifs à leur stabilité.

6.6.1 Stabilité des couches d'Ekman

Dans la section 6.3, nous avons discuté de la contribution majeure des couches limites horizontales laminares d'Ekman, dans le cas stationnaire, pour la circulation des fluides en rotation. Considérons maintenant, les sources possibles de non-stationnarité pouvant émaner directement des couches d'Ekman elles mêmes. D'un point de vue expérimental, la stabilité des couches d'Ekman a été étudiée, en premier, par Faller (1963), Faller & Kaylor (1966) et Tatro & Mollo-Christensen (1967). Ils trouvent qu'il existe deux types d'instabilités associées à ces couches limites, qu'ils appellent instabilité de classe B (ou de type I), et instabilité de classe A (ou de type II). Ces instabilités sont illustrées en Fig. 6.12b. L'apparition de l'instabilité de classe B est relativement triviale au vu de ce que nous avons introduit plus haut. En effet, la figure 6.12a représente les corrections de couche limite pour la vitesse horizontale dans une couche d'Ekman elle aussi horizontale, en géométrie cartésienne (ici, l'écoulement géostrophique est dirigé dans la direction x , voir Sect. 6.3.1). Nous voyons clairement l'existence de points d'inflexion dans les profils de vitesse horizontale, satisfaisant ainsi la condition d'instabilité linéaire d'un écoulement non-visqueux (6.81). Gregory *et al.* (1955) montre que le point d'inflexion dominant est celui qui est le plus proche de la paroi, et Lilly (1966) confirme numériquement que les ondes de classe B proviennent bien de cette instabilité linéaire de cisaillement non-visqueuse. L'instabilité de classe A, quant à elle, ne peut pas être étudiée dans la limite non visqueuse, et résulte en fait d'une interaction complexe entre la force de Coriolis et la force visqueuse que nous ne décrirons pas ici (pour plus de détails, voir Lilly, 1966). Lilly (1966) détermine la limite de stabilité linéaire d'un écoulement visqueux plan-parallèle dans la couche d'Ekman,

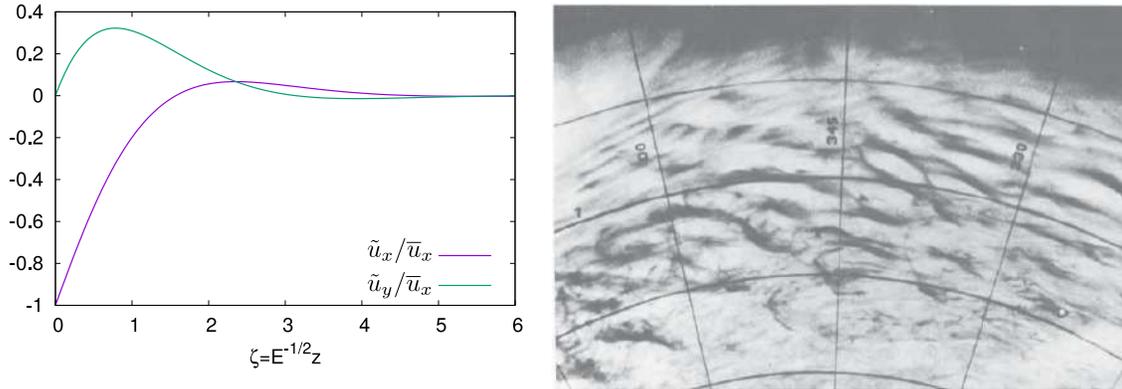


Figure 6.12: Gauche : profils de vitesses horizontales dans une couche d’Ekman en géométrie cartésienne (voir Sect. 6.3.1). Droite : visualisation expérimentale des modes de classe A et B, associés à l’instabilité des couches d’Ekman, source : [Faller & Kaylor \(1966\)](#).

en résolvant l’équation aux valeurs propres d’Orr-Sommerfeld (dont l’équation de Rayleigh (6.79) en est la limite lorsque $Re \rightarrow \infty$). Il trouve que les modes de classe A apparaissent pour $Re \geq 55$, et que les modes de classe B apparaissent pour $Re \geq 110$, en accord avec les expériences en laboratoire de [Tatro & Mollo-Christensen \(1967\)](#). Ici, le nombre de Reynolds est défini en prenant l’épaisseur des couches d’Ekman comme longueur caractéristique, $Re = E^{1/2}HU/\nu$, où H est la hauteur du cylindre, et U est l’amplitude de la vitesse laminaire (et quasi-géostrophique).

6.6.2 Stabilité des couches limites verticales

Lorsque l’on considère un cylindre dans lequel un fluide, initialement en rotation solide, est ralenti ou stoppé, un premier type d’instabilité apparaît et est caractérisé par la formation de vortex au niveau des parois verticales du cylindre. Cette instabilité est l’instabilité centrifuge discutée en Annexe B.1.

Un second type d’instabilité apparaît lorsque, cette fois, l’on considère les expériences de “split-disk”, ou de cylindres concentriques. Cette première configuration consiste en un cylindre en rotation, dans lequel est placé, en son centre un disque, lui aussi en rotation mais à une vitesse angulaire différente (cf [Hide & Titman, 1967](#); [Niino & Misawa, 1984](#)). Ces types de configuration voient l’apparition de couches de Stewartson axisymétriques dont la stabilité a été étudiée d’un point de vue expérimental par [Hide & Titman \(1967\)](#), [Niino & Misawa \(1984\)](#), et [Früh & Read \(1999\)](#). Les résultats expérimentaux montrent que la couche d’épaisseur $O(E^{1/4})$ devient instable lorsque le nombre de Rossby dépasse une certaine valeur critique, et

sont expliqués, pour l'essentiel, par l'analyse asymptotique de [Busse \(1968\)](#). Cette instabilité linéaire et non-axisymétrique résulte, comme pour l'instabilité de classe A dans les couches d'Ekman, de la présence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse radiale-cylindrique et quasi-géostrophique dans la couche d'épaisseur $O(E^{1/4})$. Il existe cependant une différence majeure entre les expériences de [Hide & Titman \(1967\)](#) et [Früh & Read \(1999\)](#). En effet, pour [Früh & Read \(1999\)](#), le signe de la rotation différentielle $\Delta\Omega$ n'a pas d'effet sur le nombre d'onde azimutal associé au mode non-axisymétrique le plus instable, qui croît avec le nombre d'Ekman. Pour [Hide & Titman \(1967\)](#), en revanche, lorsque le disque au centre du cylindre tourne moins vite que le cylindre, alors le nombre d'onde azimutal associé au mode non-axisymétrique le plus instable n'est plus fonction du nombre d'Ekman, et reste constant à $m = 1$. Les prédictions analytiques de [Busse \(1968\)](#) ne prédisent pas une telle différence de comportement entre spin-up et spin-down, et R. Hollerbach tente d'expliquer cette différence de comportement dans deux papiers ([Hollerbach, 2003](#); [Hollerbach et al., 2004](#)) où il montre l'importance du rôle de la géométrie du système, et en particulier de la profondeur, variable ou non, du conteneur (voir aussi [Busse, 1968](#)). De ce fait, l'instabilité de la couche de Stewartson, dans une configuration en coquilles sphériques n'est plus associée au cisaillement, mais est une instabilité oscillatoire qui suit la relation de dispersion des ondes de Rossby (e.g., [Kuo, 1949](#); [Busse, 1968](#); [Schaeffer & Cardin, 2005](#)).

6.7 Résumé

Nous concluons ce chapitre en résumant brièvement les notions de dynamique des fluides en rotation qui y ont été présentées. Après avoir exposé les équations du mouvement dans un repère en rotation, nous avons présenté le théorème de Taylor-Proudman, fondamental pour l'étude des fluides non visqueux en rotation, et l'écoulement géostrophique qui y est associé. Nous avons ensuite montré le rôle fondamental des couches limites d'Ekman, et dérivé l'expression de l'écoulement de pompage/succion d'Ekman associé, en géométries plane et sphérique. Nous avons ensuite montré que la singularité équatoriale des couches limites d'Ekman sphériques résulte en la formation de couches de cisaillement parallèles à l'axe de rotation, appelées couches de Stewartson, dans lesquelles le fluide est transféré d'une couche d'Ekman à l'autre. Nous avons montré que les couches de Stewartson sont en fait composées de plusieurs couches imbriquées, et avons dérivé leur épaisseur ainsi que l'amplitude de la vitesse dans chacune de ces couches. Nous avons ensuite présenté l'instabilité de cisaillement, parfois considérée comme la principale source de transport d'éléments chimiques et de moment cinétique dans l'enveloppe radiative des étoiles massives. En

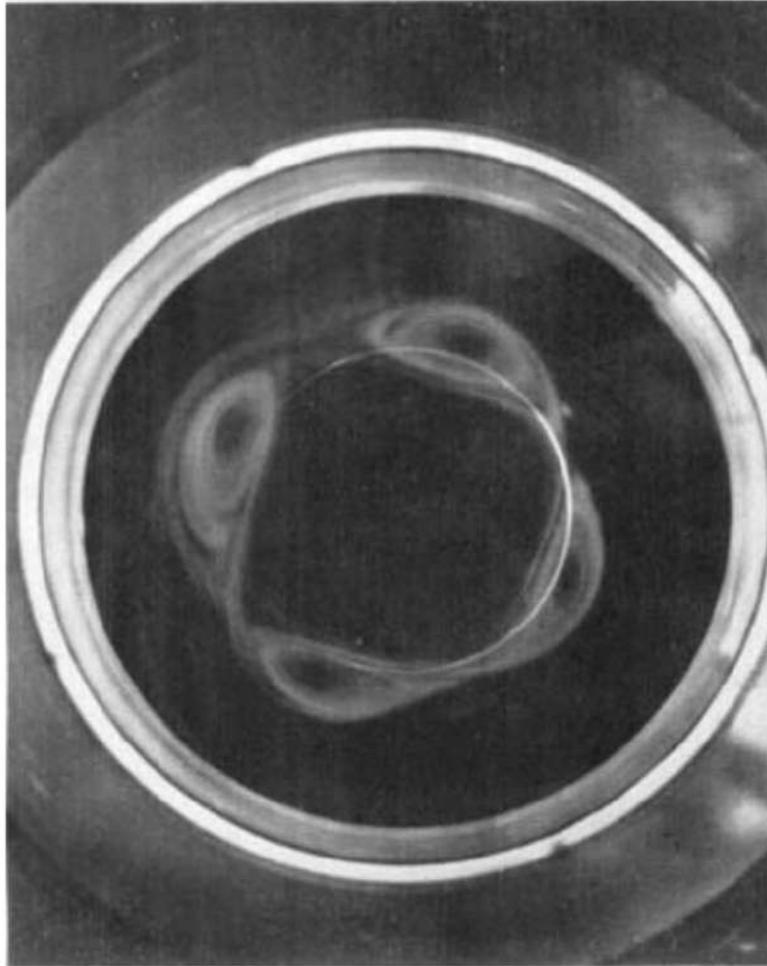


Figure 6.13: Photographie, prise au dessus du cylindre, des vortex associés à l'instabilité de cisaillement non-axisymétrique de la couche de Stewartson d'épaisseur $O(E^{1/4})$ dans le cas où la vitesse angulaire du disque est légèrement plus élevée que celle du cylindre. Source : [Hide & Titman \(1967\)](#).

CHAPITRE 6. GÉNÉRALITÉS SUR LES FLUIDES EN ROTATION

particulier, nous avons dérivé le critère d'instabilité linéaire des écoulements cisailés, pour plusieurs degrés de sophistication (fluides visqueux et non visqueux, homogènes et stratifiés, et diffusifs et non diffusifs). Enfin, nous avons discuté la stabilité des couches limites d'Ekman, et de la couche de Stewartson.

Chapitre 7

Écoulement de spin-down généré par un vent radiatif

Outre l'importance de la perte de masse et de la perte de moment cinétique sur l'évolution séculaire des étoiles massives, présentée en chapitre 5, il est intéressant de questionner l'effet du couplage entre leur vent radiatif et la dynamique de leur enveloppe radiative.

Il est bien connu que l'écoulement de spin-down d'un fluide incompressible dans un conteneur rigide avec des conditions de non-glissement, se produit sur une échelle de temps P_{rot}/\sqrt{E} , où P_{rot} est la période de rotation du fluide, et E est le nombre d'Ekman défini dans le chapitre précédent (voir Greenspan, 1968). Lorsque l'on s'intéresse aux fluides geo- ou astrophysiques, alors $E \ll 1$, et l'échelle de temps de spin-down est bien plus courte que l'échelle de temps de diffusion visqueuse P_{rot}/E . Cependant, les conditions aux limites dans les étoiles ne sont pas rigides, en particulier les vents radiatifs extraient du moment cinétique à la surface des étoiles massives, imposant un couple sur les couches sous-jacentes. Le fluide est ainsi ralenti par une contrainte visqueuse horizontale (et potentiellement turbulente) à la surface de l'étoile. Dans ce cas, et comme pour le cas où l'on impose des conditions aux limites de non-glissement, il en découle une rotation différentielle et une circulation méridienne (Friedlander, 1976) qui supplémente l'écoulement barocline, et qui contribue donc potentiellement au transport des produits de réactions nucléaires, du cœur convectif aux régions plus externes, et éventuellement jusqu'à à la surface de l'étoile. L'enrichissement en métaux des couches superficielles renforce alors les flux de masse et de moment cinétique associés aux vents radiatifs (voir Sect. 4.4 et Kudritzki *et al.*, 1987; Puls *et al.*, 2000, 2008).

Tandis que le chapitre 5 montre l'importance des vents radiatifs sur l'évolution

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

séculaire des étoiles massives en rotation de par les pertes de masse et de moment cinétique associées, nous chercherons, dans ce chapitre, à déterminer si l'écoulement de spin-down induit par le couplage vent-enveloppe est, ou non, d'une importance tout aussi cruciale. Bien sûr, la modélisation complète du mélange rotationnel est un problème compliqué. Il est ainsi utile, pour en comprendre les différentes facettes, d'étudier des configurations simplifiées qui intègrent, étape par étape, les différents phénomènes physiques qui contribuent à l'ensemble du modèle réaliste. Pour cela, nous considérerons la configuration simple d'un fluide incompressible piégé dans une coquille sphérique soumise à une contrainte horizontale, et nous augmenterons son degré de sophistication en considérant le rôle de la stratification thermique et de la stratification en densité. L'essentiel des travaux présentés dans ce chapitre ont été publiés dans [Gagnier & Rieutord \(2020\)](#), à l'exception de la Sect. 7.6.

Dans ce chapitre, nous indiquerons les variables dimensionnées par le symbole *.

7.1 Formulation générale

Un fluide ayant une viscosité cinématique constante ν est enfermé entre deux coquilles sphériques. La coquille interne est en rotation solide avec une vitesse angulaire constante Ω_c , tandis que la coquille externe supporte une contrainte de surface tangentielle prescrite $\tau_*(\theta)$. R et ηR sont les rayons des sphères externe et interne, respectivement. Nous schématisons ce modèle en Fig. 7.1. Nous considérons que la contrainte générant l'écoulement est suffisamment faible pour que la vitesse typique de l'écoulement dans ce référentiel en rotation soit petite comparée à la vitesse propre du référentiel (voir Sect. 6.1). Nous considérons donc que les termes non linéaires sont négligeables, ce que nous justifions *a posteriori* dans l'annexe E. Dans le cas général où nous permettons une stratification radiale en densité, le système d'équations linéaires dans le référentiel en rotation avec la coquille interne, et dans le cas d'un écoulement "anélastique", s'écrit

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}_*}{\partial t_*} + 2\Omega_c \mathbf{e}_z \times \rho \mathbf{u}_* = -\nabla p_* + \mathbf{F}_{\text{visc}} \\ \nabla \cdot \rho_* \mathbf{u}_* = 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

où p_* est la pression, ρ_* est la densité du fluide (prescrite),

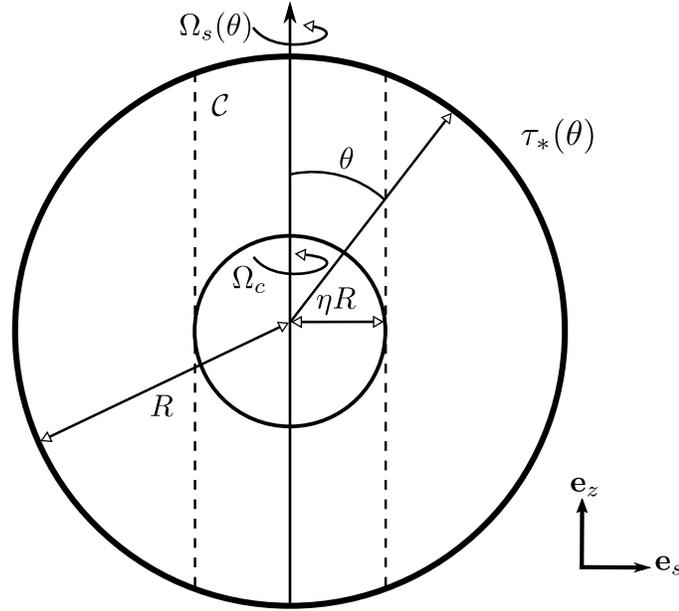


Figure 7.1: Vue schématique du système. La coquille interne de rayon ηR a pour vitesse angulaire Ω_c , et la coquille externe, de rayon R , tourne à la vitesse angulaire $\Omega_s(\theta)$. La rotation différentielle est générée par une contrainte prescrite, tangente à la coquille externe. Les traits pointillés correspondent aux bords du cylindre \mathcal{C} tangent à la coquille interne. Source : [Gagnier & Rieutord \(2020\)](#).

$$\mathbf{F}_{\text{visc}} = \mu_* \left(\Delta \mathbf{u}_* + \frac{1}{3} \nabla \text{div} \mathbf{u}_* \right) + 2(\nabla \mu_* \cdot \nabla) \mathbf{u}_* + \nabla \mu_* \times (\nabla \times \mathbf{u}_*) - \frac{2}{3} \nabla (\mu_* \text{div} \mathbf{u}_*) \quad (7.2)$$

est la force visqueuse dimensionnée, et $\mu_* = \rho_*(r_*)\nu$ est la viscosité dynamique du fluide. Cette expression de la force visqueuse représente le cas où l'enveloppe contient de la turbulence à petite échelle avec des propriétés diffusives constantes, comme souvent considéré en physique stellaire ([Brandenburg *et al.*, 1996](#); [Käpylä *et al.*, 2012](#)). Les effets centrifuges sont quant à eux négligés.

Nous adimensionnalisons maintenant ces équations en choisissant des échelles de temps et de longueur caractéristiques. L'échelle de temps naturelle est imposée par l'inverse de la fréquence de Coriolis $(2\Omega_c)^{-1}$, le rayon de la coquille externe R sera choisi comme échelle de longueur, et la densité à la surface de la coquille interne ρ_c sera prise comme échelle de densité. L'échelle de vitesse est ainsi simplement égale à $2R\Omega_c$. Finalement, nous prenons le rotationnel de l'équation du mouvement afin de faire disparaître le terme de pression, et le système d'équations que nous souhaitons résoudre devient

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT
RADIATIF

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \rho \mathbf{u}) + \nabla \times (\mathbf{e}_z \times \rho \mathbf{u}) = E \nabla \times \mathbf{f}_{\text{visc}} \\ \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (7.3)$$

où

$$\mathbf{f}_{\text{visc}} = \rho \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla \text{div} \mathbf{u} \right) + 2(\nabla \rho \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \rho \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \frac{2}{3} \nabla (\rho \text{div} \mathbf{u}) \quad (7.4)$$

et

$$E = \frac{\nu}{2\Omega_c R^2}, \quad (7.5)$$

est le nombre d'Ekman introduit dans le chapitre précédent. Ce système d'équations est ensuite complété par des conditions aux limites. Nous imposons une contrainte horizontale sur la coquille externe, qui représente le couple résultant de la perte de moment cinétique associée au vent radiatif. L'expression la plus simple pour une telle contrainte symétrique par rapport à l'équateur est celle associée à une perte de masse isotrope (voir Annexe E.2), c'est-à-dire

$$\tau(\theta) = \sigma_{r\phi}/\rho = -A \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta,$$

où $[\sigma]$ est le tenseur des contraintes sans dimension et A est une constante positive contrôlant l'amplitude de la contrainte, et donc l'intensité du freinage induit. Bien qu'un vent implique nécessairement une vitesse radiale, faible mais non nulle, à la surface, nous l'ignorons et imposons une condition de non pénétration des parois. Enfin, nous imposons une condition de non-glissement sur la coquille interne.

Ces conditions aux limites s'écrivent alors

$$u_r = u_\theta = u_\phi = 0 \quad \text{à } r = \eta \quad (7.6a)$$

$$\begin{cases} u_r = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = 0, \\ \frac{\sigma_{r\phi}}{\rho} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\phi}{r} \right) = -A \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \end{cases} \quad \text{à } r = 1. \quad (7.6b)$$

7.2 Méthode numérique

7.2.1 Méthodes pseudo-spectrales

Dans ce chapitre, nous choisissons de résoudre le système d'équations (7.3) en utilisant une méthode spectrale. Le principe est très simple et consiste à approximer l'ensemble des fonctions inconnues par la somme de $N + 1$ fonctions de base $\phi_n(x)$. Une fonction inconnue $u(x)$ s'écrit alors

$$u(x) \simeq u_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x) . \quad (7.7)$$

Il s'agit ensuite d'injecter (7.7) dans l'équation que nous souhaitons résoudre que l'on peut mettre sous la forme

$$A\mathbf{X} = \mathbf{B} , \quad (7.8)$$

où A est la matrice contenant les opérateurs différentiels linéaires, \mathbf{X} est le vecteur contenant toutes les variables inconnues, et \mathbf{B} est le vecteur contenant les seconds membres des équations différentielles. Le résidu est alors défini comme suit

$$\mathbf{R}(x; a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots) = A\mathbf{X}_N - \mathbf{B} , \quad (7.9)$$

où \mathbf{X}_N est le vecteur \mathbf{X} dans lequel nous avons substitué les fonction inconnues par leur développement en série sur les fonctions de base $\phi_n(x)$. Ainsi, si $\mathbf{X}_N = \mathbf{X}$, c'est-à-dire si $u(x) = u_N(x)$ dans (7.7), le résidu est nul. Dans le cas général où $u(x) \simeq u_N(x)$, l'objectif est de minimiser ce résidu. Pour cela il existe plusieurs méthodes, celle qui nous intéresse est la méthode de collocation (ou méthode pseudo-spectrale) où l'on impose que le résidu est nul en certains points appelés points de collocation. Ces points forment une grille dont les noeuds dépendent de la base ϕ_n choisie.

Le problème que nous considérons étant à géométrie sphérique, les variables inconnues (champ de vitesse, température,...) dépendent de trois coordonnées : la distance radiale r , la colatitude θ , et la coordonnée azimutale ϕ . Dans ce manuscrit nous nous concentrons sur des écoulements axisymétriques, supprimant ainsi la dépendance des variables avec cette dernière coordonnée. Il nous faut donc choisir deux grilles, c'est-à-dire deux fonctions de base. En général, c'est la géométrie du problème qui dicte les fonctions de base à choisir. Ainsi, pour la partie angulaire, nous choisissons une méthode de collocation de Gauss-Legendre sur la base des harmoniques

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

sphériques, et pour la partie radiale, nous choisissons une méthode de collocation de Gauss-Lobatto sur la base des polynômes de Tchebyshev (voir Rieutord & Valdetaro, 1997; Boyd, 2001, par exemple, et l'Annexe H pour plus de détails).

En guise d'exemple, prenons une fonction quelconque $f(r, \theta, \phi)$. Sa projection sur la base des harmoniques sphériques s'écrit

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} f_m^l(r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (7.10)$$

où l est le degré de l'harmonique sphérique, m est son ordre azimutal, et Y_l^m est la fonction harmonique sphérique scalaire normalisée et définie comme suit

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (7.11)$$

où $P_l^m(\cos \theta)$ sont les polynômes associés de Legendre

$$P_l^{|m|}(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^{|m|} P_l(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^{|m|}}, \quad (7.12)$$

et $P_l(\cos \theta)$ sont les polynômes de Legendre. Ainsi, toute équation aux dérivées partielles linéaire impliquant des variables scalaires pouvant être écrites comme un développement en série sur les fonctions de base harmoniques sphériques peut s'écrire

$$A' \mathbf{X}' = \mathbf{B}', \quad (7.13)$$

où A' est la matrice contenant les opérateurs différentiels linéaires, \mathbf{X}' est le vecteur contenant les coefficients $f_m^l(r)$, et \mathbf{B}' est le vecteur contenant les coefficients du second membre de l'équation. (7.13) est alors une équation sur les parties radiales uniquement. Les opérateurs différentiels linéaires (projetés sur la base des harmoniques sphériques, voir Annexe H.1.2) contenus dans la matrice A' ne doivent ainsi être appliqués qu'à des fonctions de r , donc être uniquement définis sur la grille de Gauss-Lobatto. Nous explicitons la manière dont une fonction est développée sur la base des polynômes de Tchebyshev, comment calculer ses dérivés, et comment l'intégrer, en Annexe H.3.2.

A ce stade, il est légitime de se demander pourquoi utiliser une méthode pseudo-spectrale plutôt qu'une méthode des éléments finis. La philosophie de ces deux méthodes est en fait assez similaire, mais la différence principale est que cette dernière méthode découpe le domaine x en un certain nombre de sous-intervalles, et que les fonctions de base $\phi_n(x)$ sont des fonctions locales, plus précisément des polynômes de

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

degrés fixés, et non-nuls uniquement sur quelques sous-intervalles. Lorsqu’il s’agit de méthodes pseudo-spectrales, $\phi_n(x)$ est un polynôme de degré élevé qui, dans tout le domaine, ne s’annule qu’aux points de collocation. Si l’on souhaite améliorer la précision de la méthode des éléments finis, il y a trois possibilités : (i) subdiviser chaque sous-intervalle dans tout le domaine, (ii) subdiviser chaque sous-intervalle dans une région spécifique (à forts gradients par exemple), ou (iii) augmenter le degré des polynômes dans chaque sous-intervalle. Cette dernière option est celle utilisée par les méthodes spectrales. Cependant, les fonctions de base telles que les polynômes de Tchebyshev ou les fonctions harmonique sphérique peuvent être différenciées analytiquement et chaque coefficient spectral est déterminé à partir de toutes les valeurs de la fonction aux points de grille de collocation. Ainsi, contrairement aux différences finies d’ordre deux correspondant à une expression analytique où la fonction est évaluée en trois points, ou d’ordre quatre où elle est évaluée en cinq points, la différenciation spectrale est une formule à N points. Ainsi, égaler la précision des méthodes spectrales avec $N = 10$ points de grille, requiert une différence finie d’ordre 10, avec une erreur d’ordre $O(\Delta x^{10})$. Si l’on considère que $\Delta x = O(1/N)$, alors la précision des méthodes pseudo-spectrales est

$$\epsilon = O\left(\left(\frac{1}{N}\right)^N\right), \quad (7.14)$$

impliquant une vitesse de convergence exponentielle (voir [Boyd, 2001](#), et l’Annexe [C.1](#)). Bien sûr, les méthodes spectrales et pseudo-spectrales ne sont pas sans défauts. Le principal est certainement le phénomène de Gibbs apparaissant lorsque la fonction approximée possède des discontinuités, et caractérisé par l’apparition d’oscillations de Gibbs pouvant rendre le schéma temporel utilisé instable (voir [Gibbs, 1898](#); [Boyd, 2001](#); [Gottlieb & Gottlieb, 2005](#); [Canuto *et al.*, 2006](#)). Aussi, lorsque l’on s’intéresse à des géométries complexes, il est difficile de “mapper” le domaine à l’aide des fonctions de base sans introduire artificiellement des discontinuités, donc sans rendre le schéma temporel potentiellement instable. Il existe heureusement des méthodes pour palier à ce problème (filtrage et détection des singularités, reconstruction spectrale, approche multi-domaines, utilisation d’algorithmes semi-lagrangiens...) mais l’implémentation de celles-ci est souvent complexe.

7.2.2 Projection des équations sur la base des harmoniques sphériques

Nous avons vu dans la section précédente que pour résoudre notre système d’équations, nous devons le transformer en un système d’équations purement radiales.

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

Pour cela, il nous faut projeter le vecteur quantité de mouvement sur la base des harmoniques sphériques vectorielles, et les fonctions scalaires à résoudre (température, scalaire passif,...) sur la base des harmoniques sphériques (Eq. 7.10). Il vient, pour le champ de quantité de mouvement,

$$\mathbf{q} = \rho\mathbf{u} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} u_m^l(r)\mathbf{R}_l^m + v_m^l(r)\mathbf{S}_l^m + w_m^l(r)\mathbf{T}_l^m, \quad (7.15)$$

où

$$\mathbf{R}_l^m = Y_l^m \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{S}_l^m = \nabla Y_l^m, \quad \mathbf{T}_l^m = \nabla \times \mathbf{R}_l^m, \quad (7.16)$$

sont les harmoniques sphériques vectorielles. Si l'on revient dans l'espace réel, le vecteur quantité de mouvement s'écrit alors simplement

$$\mathbf{q} = \rho\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_m^l Y_l^m \\ v_m^l \partial_\theta Y_l^m + w_m^l D_\phi Y_l^m \\ v_m^l D_\phi Y_l^m - w_m^l \partial_\theta Y_l^m \end{pmatrix}, \quad (7.17)$$

où l'opérateur $D_\phi = (1/s)\partial_\phi$.

Que l'on considère un écoulement incompressible ou anélastique, la divergence de \mathbf{q} est toujours nulle. Ainsi, v_m^l peut s'écrire comme une fonction de u_m^l uniquement (voir Rieutord, 1987, et la projection de l'opérateur divergence en Annexe H.1.2). L'équation de la vorticité (7.3) peut alors être projetée sur \mathbf{R}_l^m (ou \mathbf{S}_l^m) et sur \mathbf{T}_l^m uniquement. Nous redéfinissons l'action des opérateurs vectoriels usuels, en les projetant sur la base $(\mathbf{R}_l^m, \mathbf{S}_l^m, \mathbf{T}_l^m)$ en Annexe H.1.2. A partir de maintenant, nous considérerons uniquement des écoulements axisymétriques ($m = 0$). Le système d'équations (7.3), projet  sur la base des harmoniques sphériques s'écrit comme le système d'équations purement radiales suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial w^l}{\partial t} - \left[A_{l-1}^l r^{l-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r u^{l-1}}{r^{l-1}} \right) + A_{l+1}^l r^{-l-2} \frac{\partial}{\partial r} (r^{l+3} u^{l+1}) \right] = E h^l, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Delta_l r u^l) + B_{l-1}^l r^{l-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w^{l-1}}{r^{l-1}} \right) + B_{l+1}^l r^{-l-2} \frac{\partial}{\partial r} (r^{l+2} w^{l+1}) = -\frac{E}{r} \left(f^l - \frac{\partial r g^l}{\partial r} \right), \\ v^l = \frac{1}{r\Lambda} \frac{\partial r^2 u^l}{\partial r}, \end{cases} \quad (7.18)$$

où $\Lambda = l(l+1)$, A_{l-1}^l , A_{l+1}^l , B_{l-1}^l , et B_{l+1}^l sont les coefficients de couplage définis comme suit

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

$$A_{l-1}^l = A_l^{l-1} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{1}{(2l-1)(2l+1)}} , \quad B_{l-1}^l = B_l^{l-1} = \sqrt{\frac{l(l^2-1)}{(2l-1)(2l+1)}} . \quad (7.19)$$

De façon similaire, la force visqueuse projetée sur la base des harmoniques sphériques vectorielles s'écrit

$$\mathbf{f}_{\text{visc}} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} f_m^l(r) \mathbf{R}_l^m + g_m^l(r) \mathbf{S}_l^m + h_m^l(r) \mathbf{T}_l^m , \quad (7.20)$$

où

$$\begin{aligned} f^l &= 2 \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\Lambda b v^l - 2 b u^l}{r} + \frac{\Lambda \rho}{r} z^l + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{4\rho}{3} d^l \right) , \\ g^l &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho z^l) + \frac{2}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} (b u^l - b v^l) + \frac{4\rho}{3r} d^l , \\ h^l &= \rho \Delta_l b w^l + r \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{b w^l}{r} \right) , \end{aligned} \quad (7.21)$$

avec

$$z^l = \frac{1}{r} \frac{\partial r b v^l}{\partial r} - \frac{b u^l}{r} \quad d^l = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 b u^l}{\partial r} - \frac{\Lambda b v^l}{r} , \quad (7.22)$$

et où $b(r) = 1/\rho(r)$ est la fonction densité inverse. Enfin, les conditions aux limites sont projetées sur la base des harmoniques sphériques :

$$\begin{cases} u^l = v^l = w^l = 0 , & \text{à } r = \eta \\ u^l = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{b v^l}{r} \right) = 0 , \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{b w^l}{r} \right) = -A \delta_{l1} , & \text{à } r = 1 , \end{cases} \quad (7.23)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Notons que chaque modèle stationnaire, ou atteignant un état stationnaire après une phase transitoire, est vérifié par un test de convergence, et par un test de dissipation. Ces tests sont présentés en Annexe C.

7.2.3 Schéma temporel

Pour la résolution du système d'équations linéaires, nous utilisons le schéma temporel implicite d'Euler (ou méthode d'Euler régressive) d'ordre 1. Notons que l'objectif étant d'explorer le régime transitoire jusqu'à un état stationnaire, un schéma de cet ordre suffit car le pas de temps est choisi relativement grand. Les équations de la vorticité projetées sur la base $(\mathbf{R}_l^m, \mathbf{T}_l^m)$ sont alors mises sous la forme

$$J^{n+1} - \Delta t F^{n+1} = J^n \quad (7.24)$$

où n est le $n^{\text{ième}}$ pas de temps Δt . J est la fonction dont on cherche à évaluer la dérivée temporelle, et F est l'ensemble des autres termes de l'équation considérée. Ainsi, pour l'équation projetée sur \mathbf{R}_l^m (7.18a), $J \equiv w^l$ et

$$F \equiv \left[A_{l-1}^l r^{l-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r u^{l-1}}{r^{l-1}} \right) + A_{l+1}^l r^{-l-2} \frac{\partial}{\partial r} (r^{l+3} u^{l+1}) \right] + E h^l, \quad (7.25)$$

et pour l'équation projetée sur \mathbf{T}_l^m (7.18b), $J \equiv \Delta_l r u^l$ et

$$F \equiv - \left[B_{l-1}^l r^{l-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w^{l-1}}{r^{l-1}} \right) + B_{l+1}^l r^{-l-2} \frac{\partial}{\partial r} (r^{l+2} w^{l+1}) - \frac{E}{r} \left(f^l - \frac{\partial r g^l}{\partial r} \right) \right]. \quad (7.26)$$

Lorsque l'équation à résoudre contient un terme non-linéaire ou un terme d'advection (ce sera le cas en Sect. 7.6), nous utiliserons un schéma semi-implicite, c'est-à-dire que ce terme sera évalué de manière explicite tandis que les autres termes seront traités implicitement (voir Sect. 7.6).

Avant d'étudier ce qui nous intéresse dans ce chapitre, c'est-à-dire l'écoulement résultant d'une contrainte imposée à la surface, nous vérifions, en Annexe D, notre solution numérique en la comparant à la solution asymptotique de Proudman (1956) et Stewartson (1966) dans le cas d'un écoulement de Taylor-Couette stationnaire et à symétrie sphérique.

7.3 L'écoulement incompressible

Comme pour l'étude de l'écoulement de Taylor-Couette sphérique présentée en Annexe D, nous r  solons ici le système d'équations (7.3) avec $\rho = 1$ (donc $b = 1$),

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT
RADIATIF

mais cette fois en utilisant les conditions aux limites (7.6). Contrairement au cas précédent où seul l'état stationnaire a été étudié, nous nous intéresserons aussi à la phase transitoire durant laquelle la contrainte générant l'écoulement se propage à tout le fluide, de la coquille externe jusqu'à la coquille interne. En particulier, nous tâcherons de déterminer l'échelle de temps associée à cette phase transitoire.

7.3.1 L'écoulement transitoire

Pour évaluer la pertinence de l'approximation stationnaire lorsque l'on s'intéresse aux applications géophysiques et astrophysiques, il est important de déterminer les échelles de temps qui régissent les caractéristiques de l'écoulement. Pour ce faire, nous mesurons le temps au bout duquel le moment cinétique total dans le référentiel tournant cesse d'évoluer. Notons que la variation du moment cinétique total résulte de la différence entre le couple exercé sur le fluide par la condition aux limites sur la coquille externe, et le couple que le fluide lui-même exerce sur la coquille interne. Par conséquent, un état stationnaire est atteint lorsque

$$\Delta\Gamma \equiv \Gamma(1) - \Gamma(\eta) = 0 , \quad (7.27)$$

où $\Gamma(1)$ et $\Gamma(\eta)$ sont, respectivement, le couple exercé par la coquille externe sur le fluide et le couple exercé par le fluide sur la coquille interne, par rapport à l'axe \mathbf{e}_z . De manière générale, le couple exercé sur une couche de rayon r , par rapport à l'axe \mathbf{e}_z , s'écrit

$$\Gamma(r) = \int_{\partial r} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_z dS , \quad (7.28)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est la contrainte appliquée sur une coquille de rayon r . Nous projetons maintenant $\boldsymbol{\sigma}$ sur la base des harmoniques sphériques, et le couple devient

$$\Gamma(r) = - \int_{\partial r} r \sin\theta \rho(r) \sum_l r^2 t^l \frac{\partial Y_l}{\partial \theta} d\Omega , \quad (7.29)$$

où

$$t^l = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w^l}{r} \right) . \quad (7.30)$$

En utilisant la relation (H.51), (7.29) devient

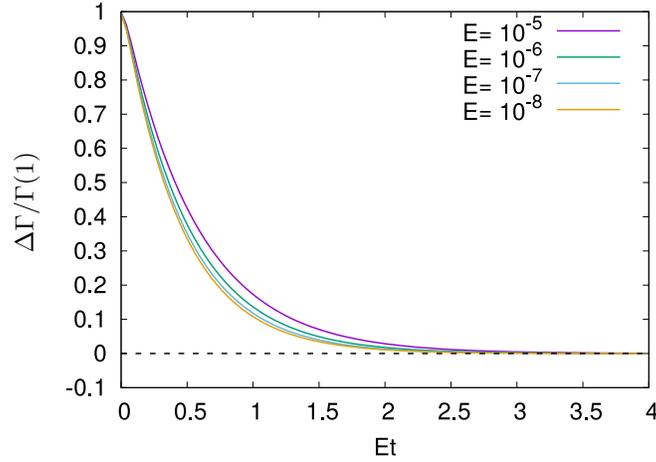


Figure 7.2: Différence relative entre le couple appliqué sur la coquille externe et le couple exercé par le fluide sur la coquille interne stationnaire, en fonction du temps réduit Et . L'état stationnaire est atteint sur une échelle de temps $O(E^{-1})$, c'est-à-dire sur une échelle de temps visqueuse, dans le régime asymptotique des petits nombres d'Ekman. Source : [Gagnier & Rieutord \(2020\)](#).

$$\Gamma(r) = 4\sqrt{\frac{\pi}{3}}r^3\rho(r)t^1(r) , \quad (7.31)$$

et en injectant les conditions aux limites (7.23), (7.27) s'écrit finalement

$$\Delta\Gamma = -4\sqrt{\frac{\pi}{3}} \left(A\rho_s + \eta^3 \frac{dw^1}{dr} \Big|_{\eta} \right) , \quad (7.32)$$

où, dans le cas incompressible, $\rho_s = 1$. Nous représentons l'évolution temporelle de la différence relative entre les couples $\Delta\Gamma/\Gamma(1)$ pour divers nombres d'Ekman en Fig. 7.2. Nos résultats montrent que sur une échelle de temps d'ordre $O(E^{-1})$, la contrainte imposée sur la coquille externe est complètement communiquée à l'écoulement intérieur, et un état stationnaire est atteint.

Bien sûr, dans le contexte astrophysique ou géophysique, il peut être nécessaire de permettre à la vitesse angulaire de la coquille interne d'avoir une dépendance temporelle. En effet, le couple exercé par le fluide sur cette paroi peut la faire ralentir ; en particulier, d'après le théorème du moment cinétique

$$\Gamma_*(\eta R) = \frac{dL_z^{\text{core}}}{dt_*} = I_c \frac{d\Omega_c}{dt_*} , \quad (7.33)$$

où I_c est le moment d'inertie du cœur que l'on suppose être en rotation solide, et

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

L_z^{core} est son moment cinétique total. Puisque notre référentiel est attaché au cœur (c'est-à-dire à la coquille interne), sa dépendance temporelle engendre une force supplémentaire, la force fictive d'Euler $\dot{\Omega}_c \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$, introduite en Sect. 6.1. Cette force peut cependant être négligée si l'échelle de temps associée au ralentissement du cœur est plus grande que l'échelle de temps visqueuse pendant laquelle le moment cinétique est redistribué. Dans ce cas, l'écoulement peut atteindre un état quasi-stationnaire. Dans ce manuscrit, et par souci de simplicité, nous ferons cette hypothèse ($\dot{\Omega}_c = 0$). Nous la justifions par l'approximation de Roche, souvent utilisée pour les étoiles massives, où il est supposé que toute la masse de l'étoile est concentrée dans le cœur (voir aussi l'Annexe F).

Une autre échelle de temps importante est celle associée à la formation de la couche de Stewartson. Comme déjà mentionné en Sect. 6.4, cette couche apparaît en réponse à l'apparition d'une singularité équatoriale de la couche d'Ekman interne. Il est bien connu que dans une bande équatoriale de hauteur $O(E^{1/5})$, l'épaisseur de la couche limite d'Ekman est $\delta_E = O(E^{2/5})$ (voir Sect. 6.3.2, et Roberts & Stewartson, 1963). Par conséquent, cette couche limite équatoriale singulière devrait être entièrement développée, et ainsi amorcer le développement de la couche de Stewartson, sur l'échelle de temps $O(\delta_E^2/E) = O(E^{-1/5})$, qui est beaucoup plus courte que l'échelle de temps visqueuse $O(E^{-1})$. De même, la couche de Stewartson centrale d'épaisseur $O(E^{1/3})$ est entièrement développée sur l'échelle de temps $O(E^{-1/3})$ ¹, là encore, beaucoup plus courte que l'échelle de temps visqueuse. Nous nous attendons donc à ce que la couche de Stewartson commence à se former au bout de quelques révolutions de la coquille interne, et qu'elle soit entièrement développée sur une échelle de temps beaucoup plus courte que l'échelle de temps visqueuse sur laquelle nous nous attendons à ce que l'écoulement cisailé à l'intérieur de celle-ci évolue vers l'état stationnaire. Nous vérifions que la dépendance de l'amplitude de la fonction de courant dans la couche de Stewartson vis-à-vis du nombre d'Ekman reste inchangée pendant l'essentiel du transient en figure 7.3 où l'on représente l'amplitude de la fonction de courant mesurée à $s = \eta$ et $z = 1/2$, normalisée par sa valeur à l'état stationnaire $\psi_h/\psi_{h,st}$ et définie comme suit

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = r \sin \theta u_\theta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -r^2 \sin \theta u_r, \quad (7.34)$$

et normalisée par sa valeur à l'état stationnaire, en fonction du temps réduit Et pour divers valeurs du nombre d'Ekman. La fonction de courant projetée sur la base des harmoniques sphériques s'écrit (voir H.1.3)

1. Ces échelles de temps ne seront pas vérifiées numériquement dans le manuscrit.

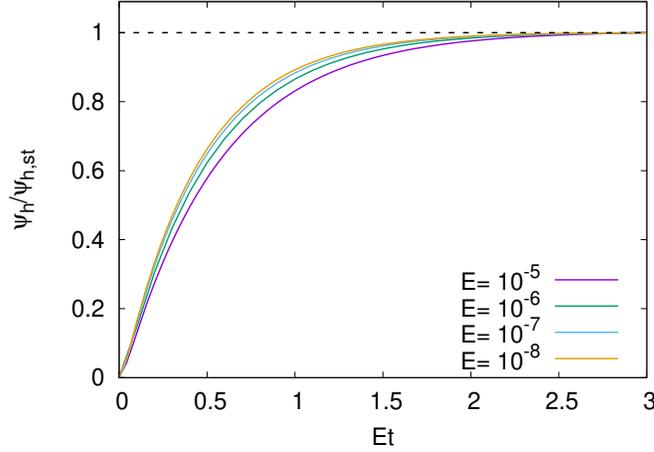


Figure 7.3: Amplitude de la fonction de courant mesurée à $s = \eta$ et $z = 1/2$ et normalisée par sa valeur à l'état stationnaire $\psi_h/\psi_{h,st}$, en fonction du temps réduit Et pour plusieurs valeurs du nombre d'Ekman. Nous constatons que la couche de Stewartson apparaît sur une échelle de temps courte devant l'échelle de temps visqueuse. Source : Gagnier & Rieutord (2020).

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{r^2 u^l(r)}{\Lambda} \sin \theta \frac{\partial Y_l(\theta)}{\partial \theta} . \quad (7.35)$$

L'analyse de la phase transitoire précédant l'établissement d'un état stationnaire montre ainsi que l'écoulement méridien, dans son ensemble, évolue sur une échelle de temps visqueuse d'ordre E^{-1} . Dans le contexte astrophysique caractérisé par des nombres d'Ekman extrêmement petits (typiquement $E < 10^{-10}$), une telle échelle de temps implique que l'enveloppe radiative des étoiles massives n'atteint jamais un état stationnaire au cours de leur vie.

7.3.2 L'écoulement stationnaire

Même s'il n'est pas atteint au cours de la vie de l'étoile, l'écoulement stationnaire vaut la peine d'être étudié car sa structure est très similaire à celle de l'écoulement transitoire.

D'après le théorème de Taylor-Proudman (6.21), nous nous attendons à une solution quasi-géostrophique pour le champ de vitesses, dans la limite asymptotique des petits nombres d'Ekman. C'est ce que nous vérifions en Fig. 7.4 où l'on représente la vitesse angulaire normalisée en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s

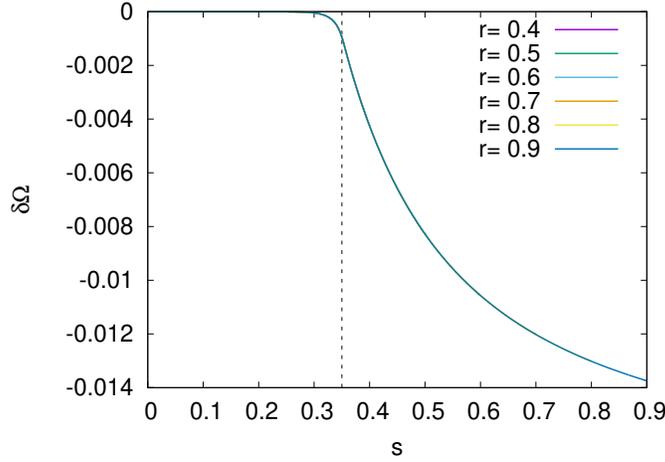


Figure 7.4: Vitesse angulaire normalisée en fonction du rayon cylindre s pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$, et pour plusieurs valeur de r . La superpositions de toutes les courbes indique un écoulement quasi-géostrophique. Source : [Gagnier & Rieutord \(2020\)](#).

pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, et pour divers rayons r . La Fig. 7.5, quant à elle, présente une vue 2D de la circulation méridienne ainsi que de la rotation différentielle dans le référentiel en rotation, pour le même modèle. L'écoulement est caractérisé par la présence d'une couche de Stewartson localisée le long du cylindre tangent à la coquille interne \mathcal{C} où la circulation méridienne est essentiellement concentrée. Cette étroite région de cisaillement sépare deux régions où l'écoulement est quasi-géostrophique : le volume à l'intérieur et celui à l'extérieur du cylindre \mathcal{C} . À l'intérieur de \mathcal{C} , les conditions de non-glissement imposées à la surface de la coquille interne, imposent une rotation quasi-solide, tandis qu'à l'extérieur de \mathcal{C} , une rotation différentielle en colonnes résultant de la contrainte imposée en surface apparaît (voir aussi Sect. 6.2).

Écoulement hors du cylindre tangent \mathcal{C}

Nous cherchons maintenant une solution analytique pour l'écoulement géostrophique primaire (rotation différentielle) et secondaire (circulation méridienne) hors du cylindre tangent \mathcal{C} ($s > \eta$). Dans cette région, la vitesse azimutale géostrophique, induite par la contrainte tangentielle prescrite sur la coquille externe, est non nulle dans le référentiel en rotation avec la coquille interne, et l'écoulement secondaire résulte de la conservation de la masse dans les couches d'Ekman.

Comme nous l'avons vu dans la Section 6.3.2, la solution géostrophique ne satisfait pas nécessairement les conditions aux limites imposées, et doit donc être corrigée

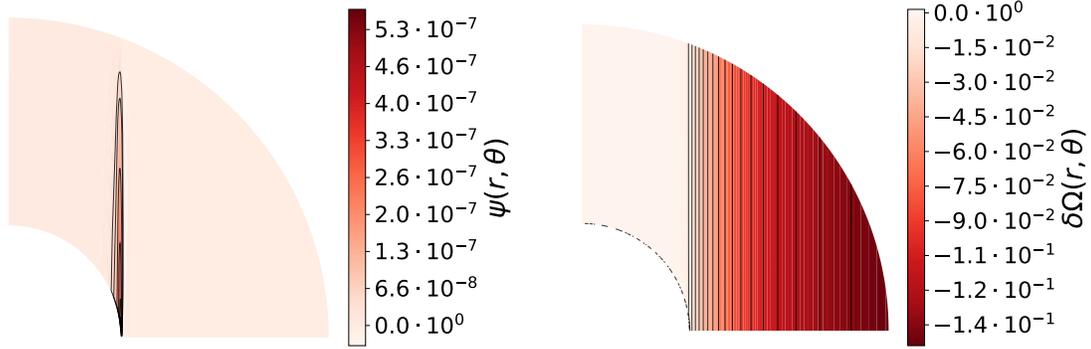


Figure 7.5: Vue méridienne de la fonction de courant ψ (gauche) et de la rotation différentielle dans le repère en rotation avec la coquille interne $\delta\Omega = (\Omega - \Omega_c)/2\Omega_c$ (droite), pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, et $A = 0.01$. Nous distinguons trois régions : une fine couche de cisaillement, tangente à la coquille interne séparant deux régions où l’amplitude de la circulation méridienne est faible. La région dans le cylindre tangent à la coquille interne \mathcal{C} est en co-rotation avec cette dernière, et la région hors de \mathcal{C} est en rotation différentielle cylindrique. Source : [Gagnier & Rieutord \(2020\)](#).

de l’écoulement dans les couches d’Ekman. Il n’est cependant pas nécessaire de faire une analyse complète de l’écoulement tri-dimensionnel dans la couche limite d’Ekman pour obtenir cette solution géostrophique (nous le faisons tout de même en Annexe G). Nous présentons ici une dérivation alternative, plus courte. Ainsi, nous décomposons les variables dynamiques comme suit

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}, \quad \text{and} \quad p = \bar{p} + \tilde{p}, \quad (7.36)$$

où, une nouvelle fois, les variables surplombées d’une barre sont associées à l’écoulement géostrophique interne, et le symbole tilde est associé aux corrections de la couche limite d’Ekman. En introduisant maintenant la coordonnée étirée d’ordre $O(1)$ dans la couche d’Ekman externe $\zeta = (1 - r)/\sqrt{E}$, et en utilisant la relation d’équilibre géostrophique $\mathbf{e}_z \times \bar{\mathbf{u}} = -\nabla\bar{p}$, l’équation du mouvement, ou équation de couche limite d’Ekman, s’écrit

$$\mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{u}} = -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\zeta}\mathbf{n} + \frac{\partial^2\tilde{\mathbf{u}}}{\partial\zeta^2}, \quad (7.37)$$

où $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_r$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à la paroi et dirigé vers l’extérieur. L’intégration de la composante azimutale de (7.37) entre 0 et ∞ donne, à l’ordre le plus bas,

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

$$\cos \theta \tilde{Q} = - \frac{\partial \tilde{u}_\phi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0}, \quad \text{où} \quad \tilde{Q} = \int_0^\infty \tilde{u}_\theta d\zeta \quad (7.38)$$

est le débit volumique dans la couche d'Ekman supérieure, et dans la direction θ . En utilisant la condition aux limites sur la contrainte surfacique horizontale (7.6), (7.38) peut être réécrite, à l'ordre le plus bas

$$\cos \theta \tilde{Q} = \sqrt{E} \left[\tau(\theta) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F(s)}{r} \right) \Big|_{r=1} \right], \quad (7.39)$$

où $F(s) = \bar{u}_\phi$ est la solution géostrophique pour la vitesse azimutale. Afin d'assurer la conservation de la masse, la divergence de $\tilde{\mathbf{u}}$ dans la couche limite, génère un écoulement secondaire supplémentaire, de faible amplitude, et perpendiculaire à la paroi, \tilde{u}_r . C'est l'écoulement de pompage/succion d'Ekman introduit dans la section 6.3.1. Cette vitesse radiale peut être déterminée en intégrant l'équation de conservation de la masse dans la couche limite d'Ekman externe

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r &= - \frac{\sqrt{E}}{\sin \theta} \frac{\partial \sin \theta \tilde{Q}}{\partial \theta} \\ &= - \frac{E}{\sin \theta} \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \frac{1}{\cos \theta} \left[\tau(\theta) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F(s)}{r} \right) \Big|_{r=1} \right] \\ &= E \left[s F'' + q(s) \left(F' - \frac{F}{s} \right) + K (1 + q(s)) \right], \end{aligned} \quad (7.40)$$

où

$$q(s) = \frac{1}{1 - s^2}, \quad K = A \sqrt{\frac{3}{4\pi}}, \quad (7.41)$$

et l'apostrophe indique une dérivée vis-à-vis de la coordonnée radiale cylindrique $s = r \sin \theta$.

L'équation (7.40) montre que pour que la condition aux limites sur la contrainte tangentielle soit assurée, il doit exister, proche de la coquille externe, et dans la couche d'Ekman, un écoulement horizontal d'amplitude $O(\sqrt{E})$ qui, à son tour, génère une circulation méridienne interne d'amplitude $O(E)$, hors du cylindre tangent \mathcal{C} . Nous exprimons maintenant la vitesse azimutale géostrophique $F(s)$ en fonction de la contrainte tangentielle prescrite $\tau(\theta)$. Pour ce faire, nous écrivons la composante azimutale de l'équation du mouvement en coordonnées cylindriques (Rieutord, 2006a),

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT
RADIATIF

$$u_s = E(\Delta - 1/s^2)F , \quad (7.42)$$

où Δ est l'opérateur laplacien que l'on développe pour obtenir

$$u_s = E(F'' + F'/s - F/s^2) , \quad (7.43)$$

et, en utilisant l'équation de conservation de la masse, nous obtenons la composante de la vitesse dans la direction z , parallèle à l'axe de rotation

$$u_z = - \int_0^z \frac{1}{s} \frac{\partial s u_s}{\partial s} dz' = -\frac{E}{s} [(sF')'' - (F/s)'] z . \quad (7.44)$$

Enfin, nous utilisons la condition d'imperméabilité des parois, c'est-à-dire $u_r = 0$ à $r = 1$,

$$s u_s + z u_z + \tilde{u}_r = 0 . \quad (7.45)$$

Nous obtenons ainsi l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre suivante pour $F(s)$

$$\begin{aligned} (s^2 - 1)F''' + 2\left(s - \frac{1 - s^2}{s}\right)F'' + \left(1 + q(s) + \frac{1 - s^2}{s^2}\right)(F' - F/s) \\ = -K(1 + q(s)) , \end{aligned} \quad (7.46)$$

qui est en fait très similaire à l'équation (3.30) de [Friedlander \(1976\)](#) où elle est dérivée dans le contexte d'un modèle de Boussinesq linéarisé quasi-stationnaire. Cette équation peut être réécrite

$$-\frac{1 - s^2}{s^2} \frac{\partial}{\partial s} s \left(\nabla^2 - \frac{1}{s^2} \right) F + s \left(\nabla^2 - \frac{1}{s^2} \right) F + \frac{\partial}{\partial s} \left(s^2 \frac{\partial F}{\partial s} \right) + s q \frac{\partial F}{\partial s} = -K(1 + q(s)) . \quad (7.47)$$

En utilisant les résultats de [Friedlander \(1976\)](#), nous exprimons la solution géostrophique $F(s)$ comme une fonction intégrale de la contrainte prescrite

$$F(s) = -s \int \frac{ds}{s^3 \sqrt{1 - s^2}} \int s ds \int \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{-K s^2}{\sqrt{1 - s^2}} \right) ds , \quad (7.48)$$

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT
RADIATIF

ce qui donne, après intégration

$$F(s) = -\frac{K}{3} \left(s \ln s - \frac{1}{s} \right) + \frac{C_1 + C_2}{2} s \ln \left(\frac{\sqrt{1-s^2} + 1}{s} \right) + \frac{C_2}{2} \frac{\sqrt{1-s^2}}{s} - C_3 s, \quad (7.49)$$

où C_1 , C_2 et C_3 sont des constantes à déterminer. Pour empêcher une singularité de la vorticité à l'équateur, et au niveau de la coquille externe, il faut

$$C_1 = C_2 = 0. \quad (7.50)$$

La solution géostrophique pour la vitesse azimutale dans le référentiel en rotation s'écrit alors

$$F(s) = -\frac{K}{3} \left(s \ln s - \frac{1}{s} \right) - C_3 s, \quad (7.51)$$

où la constante C_3 est déterminée en utilisant la condition de non-glissement imposée sur la coquille interne, c'est-à-dire

$$F(\eta) = -\frac{K}{3} \left(\eta \ln \eta - \frac{1}{\eta} \right) - C_3 \eta = 0. \quad (7.52)$$

La solution géostrophique pour la vitesse azimutale hors du cylindre tangent \mathcal{C} et dans le référentiel en rotation, s'écrit enfin

$$F(s) = -\frac{K}{3} \left(s \ln s - \frac{1}{s} + \alpha(\eta) s \right), \quad (7.53)$$

où

$$\alpha(\eta) = \frac{1}{\eta^2} - \ln \eta, \quad (7.54)$$

et la rotation différentielle hors du cylindre \mathcal{C} ($s \geq \eta$)

$$\delta\Omega = -\frac{K}{3} \left(\ln(s/\eta) + \frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{s^2} \right). \quad (7.55)$$

Nous comparons les profils de vitesse angulaire obtenus à partir des solutions numériques à l'expression analytique (7.55), pour divers nombres d'Ekman et pour deux valeurs de η (0.1 et 0.35) en Fig. 7.6. La solution asymptotique analytique (7.55)

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

reproduit correctement nos résultats numériques lorsque le nombre d'Ekman est inférieur à 10^{-9} . Notre analyse de la couche limite prédit également que l'amplitude de l'écoulement méridien secondaire est d'ordre $O(E)$ en dehors du cylindre tangent \mathcal{C} . Nous représentons la fonction de courant définie en (7.34), en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s et pour divers nombres d'Ekman, en Fig. 7.7. Nous notons que ψ varie en effet comme E en dehors de la couche de Stewartson, et apparaît sous forme d'oscillations près de $s = \eta$. En injectant maintenant l'expression (7.53) dans (7.43) et (7.44), nous obtenons l'expression de l'écoulement méridien géostrophique à l'extérieur du cylindre tangent \mathcal{C} , à savoir

$$u_s = -\frac{2KE}{3s} \quad \text{et} \quad u_z = 0, \quad (7.56)$$

et la fonction de courant associée s'écrit

$$\psi(s, z) = -\frac{2KE}{3}z, \quad (7.57)$$

impliquant que les lignes de courant sont des lignes $z = \text{Cte}$ dans le plan méridien. Ainsi, la couche limite d'Ekman externe expulse le fluide dans la direction radiale cylindrique s , et vers la couche de cisaillement de Stewartson. La fonction de courant $\psi(r, \theta)$ ainsi que les lignes de courant associées, déterminées par (7.57) et obtenues à partir des solutions numériques sont représentées en Fig. 7.8, où nous avons masqué la couche de Stewartson. Nous voyons clairement que les solutions analytiques et numériques sont en accord. Il est, de plus, intéressant de noter que l'écoulement (7.56) se reconnecte à la couche de Stewartson et qu'il alimente, en partie, l'écoulement ascendant dans cette région.

Nous remarquons enfin que hors du cylindre tangent, l'écoulement de spin-down induit par la contrainte tangentielle prescrite est assez différent de l'écoulement de Taylor-Couette sphérique présenté en Annexe D. Pour ce dernier écoulement, l'amplitude de la circulation méridienne dans cette région décroît exponentiellement en s'éloignant de la couche de Stewartson (Proudman, 1956; Dormy *et al.*, 1998). Ici, il existe un écoulement résiduel, perpendiculaire à l'axe de rotation, dirigé vers celui-ci, et dont l'amplitude est $O(E)$.

Écoulement dans le cylindre tangent \mathcal{C}

Examinons maintenant l'écoulement géostrophique à l'intérieur du cylindre tangent \mathcal{C} . En introduisant le moment cinétique spécifique $\ell = r \sin \theta u_\phi$, la composante azimutale de l'équation du mouvement et la composante azimutale de l'équation de

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

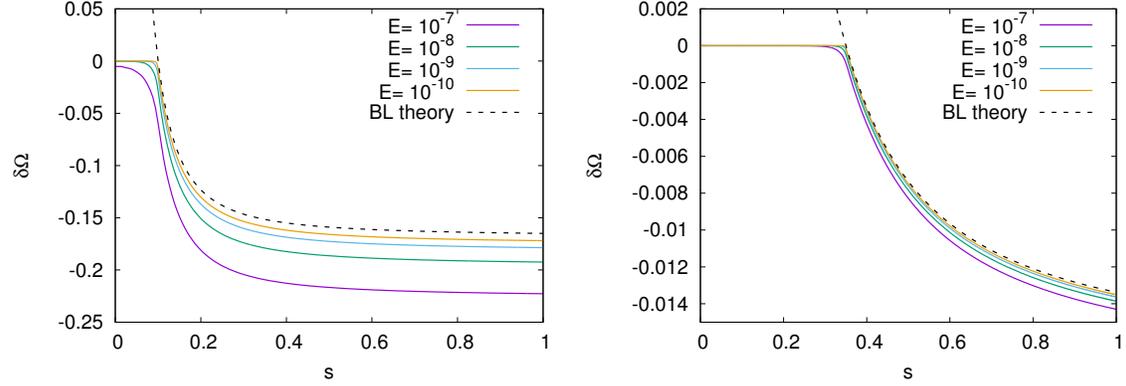


Figure 7.6: Vitesse angulaire dans le repère en rotation en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour divers nombres Ekman, $r = 0.7$, $\eta = 0.1$ (gauche) et $\eta = 0.35$ (droite), et $A = 0.01$. La ligne en pointillés noire correspond à la solution analytique issue de l'analyse de la couche limite d'Ekman (voir Eq. 7.55). Source : Gagnier & Rieutord (2020).

la vorticité s'écrivent, respectivement (e.g. Goldstein, 1938, 1965; Proudman, 1956; Stewartson, 1966)

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin \theta = ED^2 \ell \\ -\frac{\partial \ell}{\partial r} \cos \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \sin \theta = ED^4 \psi \end{cases} \quad (7.58)$$

où

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (7.59)$$

Les conditions aux limites (7.6) exprimées en terme de fonction de courant et de moment cinétique spécifique s'écrivent à leur tour

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \ell = 0 \quad \text{à } r = \eta \quad (7.60a)$$

$$\begin{cases} \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial r} - 2\ell = -K \sin^2 \theta \end{cases} \quad \text{à } r = 1. \quad (7.60b)$$

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

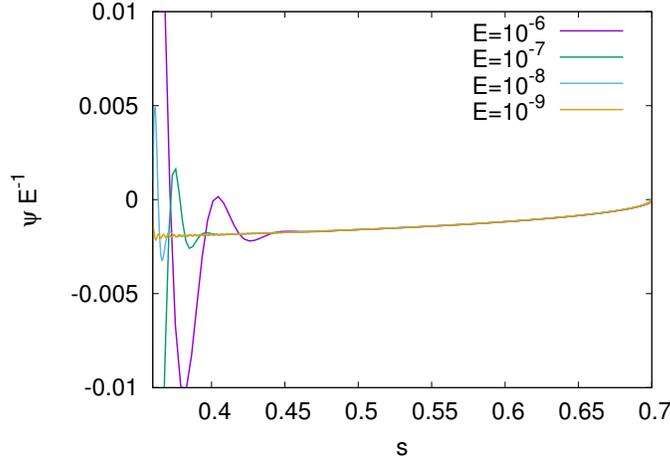


Figure 7.7: ψE^{-1} le long d'un méridien à $r = 0.7$ en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour divers nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, et $A = 0.01$. L'échelle prédite $O(E)$ pour l'amplitude de l'écoulement secondaire est vérifiée en dehors de la couche de Stewartson, qui est située à $s = 0.35$. Source : Gagnier & Rieutord (2020).

Dans les couches limites d'Ekman, (7.58) peut être réécrit

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \theta = E \frac{\partial^2 \ell}{\partial r^2} \\ -\frac{\partial \ell}{\partial r} \cos \theta = E \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} . \end{cases} \quad (7.61)$$

Nous intégrons la première équation sur r et y injectons la seconde pour obtenir l'équation différentielle d'ordre quatre sur ψ

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} = -\frac{\cos^2 \theta}{E^2} (\psi - \bar{\psi}) , \quad (7.62)$$

où $\bar{\psi}$ est une fonction de θ uniquement, pouvant être déterminée à l'aide des conditions aux limites (Proudman, 1956). Concentrons nous, dans un premier temps, sur la couche d'Ekman externe située proche de $r = 1$. Dans cette région, la solution de l'équation différentielle (7.62) satisfaisant les conditions aux limites (7.60) ainsi que la condition $\psi(\xi \rightarrow \infty) = \bar{\psi}$, où $\xi = (1 - r)\sqrt{\cos \theta / 2E}$ est la coordonnée étirée de couche limite, s'écrit

$$\psi = \bar{\psi} \left(1 - e^{-\xi} \cos \xi \right) . \quad (7.63)$$

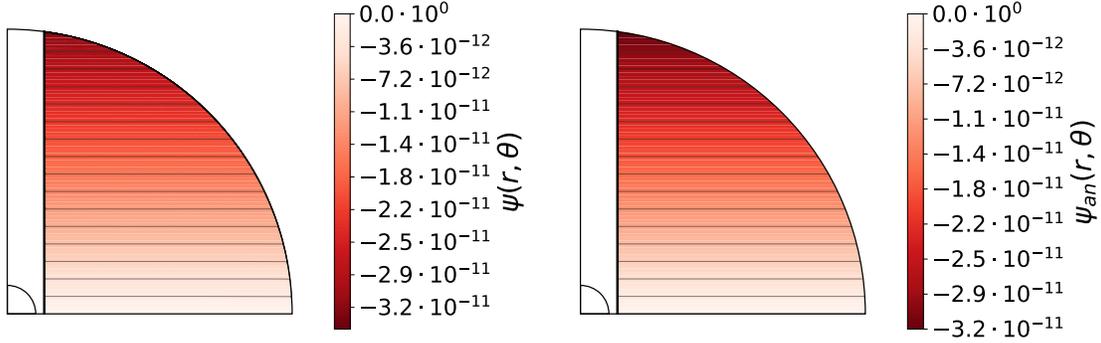


Figure 7.8: Vue méridienne de la fonction de courant et des lignes de courant obtenues à partir des simulations numériques (gauche), et de l'analyse de la couche limite (droite), pour $E = 10^{-8}$, $\eta = 0.1$, et $A = 0.01$. Le cylindre tangent \mathcal{C} ainsi que la couche de reconnexion adjacente sont masqués. Source : [Gagnier & Rieutord \(2020\)](#).

En injectant cette solution dans la première équation de (7.61), il vient

$$\ell - \bar{\ell} = \bar{\psi} \alpha e^{-\xi} \sin(\xi - \pi/4) , \quad (7.64)$$

où $\alpha = \sqrt{\cos \theta / (2E)} \gg 1$ dans la limite asymptotique des petits nombres d'Ekman. Enfin, la condition aux limites (7.60b) peut s'écrire

$$\left. \frac{\partial \ell}{\partial r} \right|_{r=1} - 2\ell(1) = -2\alpha^2 \bar{\psi} - 2\bar{\ell} + 2\alpha \bar{\psi} = -K \sin^2 \theta , \quad (7.65)$$

où $\bar{\ell}$ est, elle aussi, une fonction de θ uniquement pouvant être obtenue à l'aide des conditions aux limites. Ainsi, les composantes azimutale et méridienne de la vitesse quasi-géostrophique à l'extérieur des couches d'Ekman et de Stewartson ne sont pas indépendantes et satisfont la condition de saut de couche d'Ekman externe à l'ordre le plus bas

$$\bar{\psi} = \frac{E}{\cos \theta} (K \sin^2 \theta - 2\bar{\ell}) . \quad (7.66)$$

De façon similaire, l'étude de la couche d'Ekman interne à l'aide des conditions aux limites (7.60a) donne

$$\psi = \bar{\psi} \left(1 - e^{-\xi'} (\cos \xi' + \sin \xi') \right) , \quad (7.67)$$

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

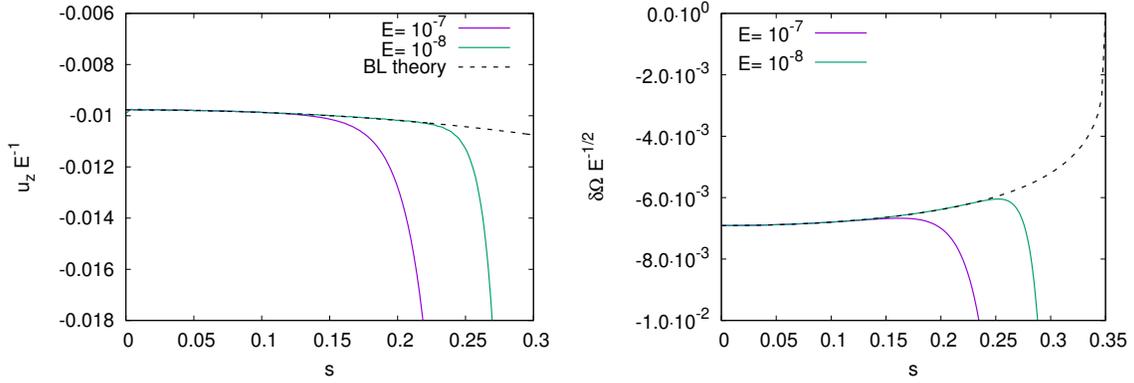


Figure 7.9: Vitesse dans la direction z (gauche) et vitesse angulaire dans le repère en rotation (droite) en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s dans le cylindre tangent \mathcal{C} , pour $E = 10^{-7}$ et $E = 10^{-8}$, $r = 0.7$, et $\eta = 0.35$. Les lignes noires pointillées correspondent aux solutions analytiques géostrophiques (7.70) et (7.71).

où $\xi' = (r - \eta)\alpha$, et la condition de saut de couche d'Ekman au niveau de la coquille interne s'écrit

$$\bar{\ell} = -2\bar{\psi}\alpha. \quad (7.68)$$

Ainsi, (7.68) implique $\bar{\psi} = O(\bar{\ell}\sqrt{E})$ et (7.66) implique $\bar{\psi} = O(E)$ et $\bar{\ell} = O(\sqrt{E})$. Nous pouvons donc réécrire (7.66) comme suit

$$\bar{\psi} = \frac{E}{\cos\theta} K \sin^2\theta + O(E^{3/2}). \quad (7.69)$$

Enfin, la solution géostrophique pour la vitesse dans le cylindre tangent \mathcal{C} ($s < \eta$) s'écrit, à l'ordre le plus bas,

$$\bar{\psi}(s) = \frac{EKs^2}{\sqrt{1-s^2}} \quad \text{et} \quad \bar{\ell}(s) = \frac{\bar{\ell}(s)}{s^2} = -\frac{\sqrt{2EK}}{\sqrt{1-s^2}} \left(1 - \frac{s^2}{\eta^2}\right)^{1/4}, \quad (7.70)$$

et la vitesse méridienne géostrophique à l'ordre le plus bas

$$u_s = \frac{1}{s} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad u_z = -\frac{1}{s} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial s} = -\frac{EK}{\sqrt{1-s^2}} \left(1 + \frac{1}{1-s^2}\right). \quad (7.71)$$

Nous comparons ces profils analytiques pour la vitesse dans la direction z et pour la vitesse angulaire, avec nos solutions numériques en Fig. 7.9, pour diverses valeurs

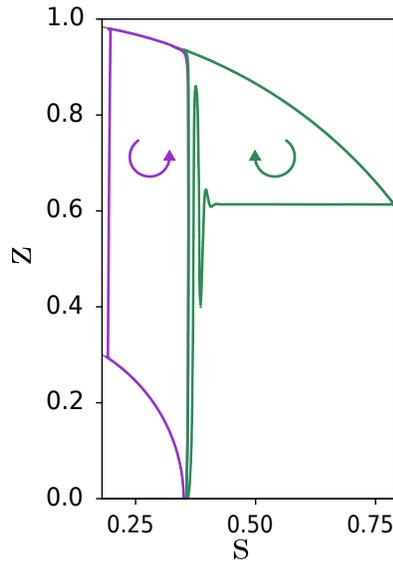


Figure 7.10: Vue méridienne de deux lignes de courant choisies arbitrairement, à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre tangent \mathcal{C} . Les flèches indiquent la direction de propagation du fluide le long de ces lignes de courant. Source : [Gagnier & Rieutord \(2020\)](#).

de E . Nous notons que nos solutions analytiques sont en très bon accord avec les solutions numériques. Il est intéressant de noter que l'écoulement méridien à l'intérieur du cylindre tangent est parallèle à l'axe de rotation et est dirigé vers la coquille interne, ce qui est très différent de l'écoulement à l'extérieur du cylindre \mathcal{C} . Une fois à l'intérieur de la couche d'Ekman interne, l'écoulement se dirige vers l'équateur où la couche d'Ekman s'épaissit et finit par changer d'échelle à la singularité équatoriale (e.g., [Roberts & Stewartson, 1963](#); [Stewartson, 1966](#); [Hollerbach, 1994](#); [Dormy *et al.*, 1998](#); [Marcotte *et al.*, 2016](#)). Le fluide est alors renvoyé vers la couche d'Ekman externe via la couche de Stewartson. Une vue méridienne de deux lignes de courant sélectionnées arbitrairement, une à l'intérieur et une autre à l'extérieur du cylindre tangent \mathcal{C} , est représentée en Fig. 7.10. Cette figure illustre la structure différente de l'écoulement secondaire dans les deux régions, ainsi que la couche de cisaillement de reconnexion redirigeant l'écoulement perpendiculaire à l'axe de rotation à l'extérieur de \mathcal{C} vers la couche de Stewartson où il s'écoule parallèlement à l'axe de rotation, vers la couche limite externe.

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

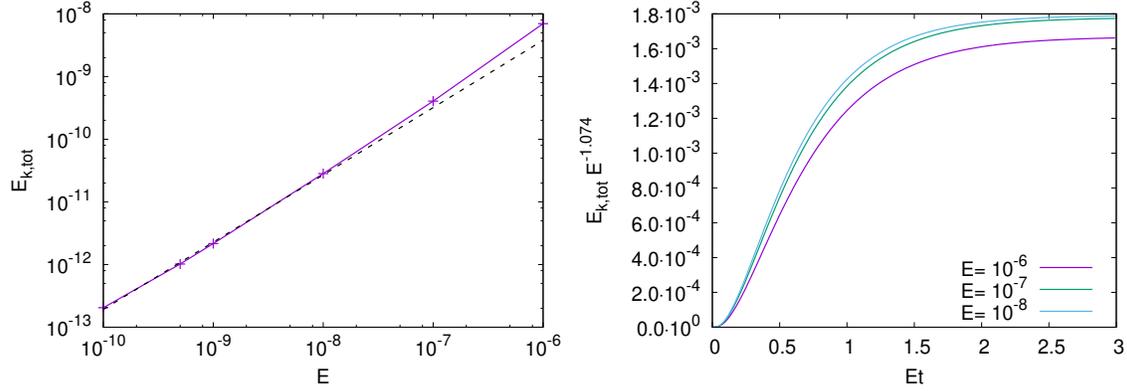


Figure 7.11: Gauche : Energie cinétique méridienne totale de l’écoulement stationnaire en fonction du nombre d’Ekman, pour $A = 0.01$ et $\eta = 0.1$. La ligne pointillée noire correspond au “fit” dans le régime asymptotique ($E \lesssim 10^{-9}$), et donne $E_{k,tot} \propto E^{1.074}$. Droite : $E_{k,tot} E^{-1.074}$ en fonction du temps réduit Et , pour divers nombres Ekman, $A = 0.01$, et $\eta = 0.35$. Source : [Gagnier & Rieutord \(2020\)](#).

Écoulement dans la couche de Stewartson

En observant les figures 7.7 et 7.9, nous remarquons que l’écoulement méridien n’est plus correctement reproduit par la solution analytique lorsque l’on s’approche de la couche de Stewartson, c’est-à-dire lorsque l’on approche $s = \eta$. D’après la solution numérique, l’amplitude de la circulation méridienne s’avère en effet être beaucoup plus conséquente dans cette couche qu’à l’extérieur. Cela est encore plus évident si l’on calcule l’énergie cinétique méridienne totale de l’écoulement secondaire

$$E_{k,tot} = \int V_m^2 dV = \int (|u^l|^2 + \Lambda |v^l|^2) r^2 dr , \quad (7.72)$$

où $V_m^2 = u_r^2 + u_\theta^2$. Nous représentons $E_{k,tot}$ en fonction du nombre d’Ekman en Fig. 7.11a. Nous trouvons que l’énergie cinétique méridienne totale $E_{k,tot}$ est de l’ordre de E dans le régime asymptotique $E \rightarrow 0$, alors que la contribution des écoulements méridiens en dehors de la couche de Stewartson reste $O(E^2)$. L’écoulement dans la couche de Stewartson mérite donc d’être étudiée.

Rappelons tout d’abord que dans l’écoulement de Taylor-Couette sphérique, la couche de Stewartson est une couche de cisaillement imbriquée qui peut être divisée en trois couches d’épaisseur $E^{2/7}$, $E^{1/3}$ et $E^{1/4}$ (voir Sect. 6.4, Annexe D, et [Stewartson, 1966](#)). La couche $E^{1/3}$ est la couche centrale, la couche $E^{2/7}$ se trouve dans le cylindre tangent \mathcal{C} et la couche $E^{1/4}$ hors du cylindre (voir Fig. 6.9). Nous souhaitons maintenant savoir si ces trois couches imbriquées sont aussi présentes dans nos

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

modèles où l'on impose une contrainte horizontale sur la coquille externe.

Commençons par remarquer que, d'après (7.40), le pompage d'Ekman peut s'écrire

$$\tilde{u}_r = -\sqrt{E} \left[\nabla \times (\tilde{Q} \mathbf{e}_\phi) \right] \cdot \mathbf{e}_r . \quad (7.73)$$

Ainsi, en introduisant la coordonnée cartésienne sans dimension et d'ordre $O(1)$ dans la couche de cisaillement d'épaisseur $O(E^\gamma)$, $\xi = E^{-\gamma}(s - \eta)$, (7.73) peut être réécrite

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r &= O \left[\left(E \nabla \times \left(E^{-\gamma} \frac{\partial F}{\partial \xi} \mathbf{e}_\phi \right) \right) \right] \cdot \mathbf{e}_r \\ &= O(E^{1-2\gamma}) . \end{aligned} \quad (7.74)$$

L'équation de conservation de la masse s'écrit, à son tour,

$$E^{-\gamma} \frac{\partial u_s}{\partial \xi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 , \quad (7.75)$$

impliquant que dans une couche de cisaillement d'épaisseur $O(E^\gamma)$, $u_z = O(E^{-\gamma} u_s)$, c'est-à-dire $u_z \gg u_s$ dans le régime asymptotique des petits nombres d'Ekman. Nous concluons que, dans de telles couches, l'amplitude de la vitesse dans la direction z et résultant du pompage/succion d'Ekman est d'ordre $O(E^{1-2\gamma})$

Quelques manipulations simples des équations du mouvement et de la vorticité permettent d'éliminer la vitesse \mathbf{u} de la théorie, et conduisent à l'équation différentielle de degré 6 pour la pression suivante (voir Eq. 6.62 et Greenspan, 1968)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + E^{2-6\gamma} \frac{\partial^6 p}{\partial \xi^6} = 0 , \quad (7.76)$$

qui représente un équilibre entre la force de Coriolis et les forces visqueuses. L'égalité de ces deux termes nécessite donc $\gamma = 1/3$, et indique l'existence d'une couche de cisaillement d'épaisseur $O(E^{1/3})$. Ainsi, dans cette couche centrale

$$u_s = O(E^{2/3}) , \quad \text{et} \quad u_z = O(E^{1/3}) . \quad (7.77)$$

De plus, la composante radiale cylindrique de l'équation du mouvement dans cette couche de cisaillement implique $p = O(E^{2/3})$, et la projection de cette équation dans la direction z s'écrit

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

$$\frac{\partial p}{\partial z} = E^{1/3} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \xi^2}, \quad (7.78)$$

indiquant que l'écoulement dans cette couche d'épaisseur $O(E^{1/3})$ est agéostrophique.

Rappelons maintenant que la couche quasi-géostrophique $E^{1/4}$ est associée à l'équilibre entre l'écoulement de pompage d'Ekman, et la friction interne de l'écoulement azimuthal d'amplitude $O(1)$ (e.g., [Stewartson, 1966](#); [Barcilon, 1968](#)). Cet équilibre est, en fait, exactement celui qui est en place dans toute la région à l'extérieur du cylindre tangent \mathcal{C} . La couche $E^{1/4}$ n'est donc pas nécessaire pour assurer cet équilibre. En effet, la composante azimuthale de l'équation du mouvement dans une couche de cisaillement d'épaisseur $O(E^\gamma)$ s'écrit

$$u_s = E^{1-2\gamma} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \xi^2}, \quad (7.79)$$

c'est-à-dire que $u_s = O(E^{1-2\gamma})$ en considérant que $u_\phi = O(1)$. De plus, (7.75) implique $u_z = O(E^{1-3\gamma})$. Cependant, le pompage d'Ekman impose $u_z = O(E^{1-2\gamma})$ (voir Eq. 7.73). Ainsi, $\gamma = 0$ et l'équilibre entre l'écoulement de pompage d'Ekman et la friction interne de l'écoulement azimuthal d'amplitude $O(1)$ est assuré dans une "couche" d'épaisseur $O(1)$ qui est en fait l'intégralité de la région $s > \eta$. Nous notons que si nous avons considéré des conditions aux limites de non-glissement au niveau de la coquille externe, c'est-à-dire le cas d'un écoulement de Couette sphérique, la vitesse dans la direction z résultant du pompage d'Ekman serait de l'ordre de $O(\sqrt{E} \nabla \times \bar{u}_\phi \mathbf{e}_\phi) = O(E^{1/2-\gamma})$. La correspondance entre la vitesse u_z et le pompage d'Ekman implique que $1/2 - \gamma = 1 - 3\gamma$, et donc $\gamma = 1/4$ comme prévu.

Considérons enfin le cas d'une couche de cisaillement quasi-geostrophique parallèle à l'axe de rotation et d'épaisseur $O(E^{\gamma'})$, localisée dans le cylindre tangent \mathcal{C} et proche de $s = \eta$. Dans une telle région, ℓ est fonction de s uniquement. Nous notons que dans le cas d'un écoulement de Couette sphérique, $\gamma' = 2/7$ et $u_\phi(s = \eta) = O(E^{1/28})$ (e.g. [Stewartson, 1966](#); [Marcotte et al., 2016](#)). Dans cette région, la composante azimuthale de l'équation du mouvement (7.58a) intégrée sur z s'écrit

$$\psi = Ez \frac{\partial^2 \ell}{\partial s^2} + f(s), \quad (7.80)$$

où $f(s)$ est déterminé à l'aide de la condition de saut de couche d'Ekman au niveau de la coquille interne (7.68), à $z = 0$ et $s - \eta \ll 1$ ([Stewartson, 1966](#)). Cette fonction s'écrit

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT
RADIATIF

$$f(s) \simeq -\sqrt{\frac{E}{2}} \left[2 \left(1 - \frac{s}{\eta} \right) \right]^{-1/4} \ell . \quad (7.81)$$

De plus, la condition (7.66) à $z = \sqrt{1 - \eta^2}$, c'est-à-dire à $r = 1$ et $s = \eta$, s'écrit

$$\psi = \frac{EK\eta^2}{\sqrt{1 - \eta^2}} , \quad (7.82)$$

et (7.80) s'écrit finalement

$$E^{1-2\gamma'} \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta^4} \frac{d^2\ell}{dx^2} - E^{1/2-\gamma'/4} (2x)^{-1/4} \ell = \frac{EK\eta^2}{\sqrt{1 - \eta^2}} , \quad (7.83)$$

où nous avons introduit la coordonnée étirée d'amplitude $O(1)$ dans la couche de cisaillement considérée, $x = (1 - s/\eta)/E^{\gamma'}$. À ce stade, il est intéressant de déterminer l'équilibre pertinent dans (7.83). Nous notons que le seul équilibre impliquant l'existence d'une couche de cisaillement asymptotiquement fine est celui des deux premiers termes, le troisième étant d'ordre supérieur. Cet équilibre impose $\gamma' = 2/7$, c'est-à-dire une couche de Stewartson interne standard d'épaisseur $O(E^{2/7})$. Par conséquent, l'équation différentielle ordinaire du deuxième ordre pour le moment cinétique spécifique à l'ordre le plus bas et dans la couche de cisaillement $E^{2/7}$ s'écrit

$$\frac{d^2\ell}{dx^2} - \beta x^{-1/4} \ell = 0 , \quad (7.84)$$

où

$$\beta = \frac{\eta^2}{2^{3/4} \sqrt{1 - \eta^2}} . \quad (7.85)$$

Cette équation peut être transformée en une équation de Bessel modifiée, et la solution se raccorde à la solution (7.70) lorsque $x \rightarrow +\infty$, s'écrit (voir aussi Stewartson, 1966; Moore & Saffman, 1968; Marcotte *et al.*, 2016)

$$\ell(x) = \ell(0) C \sqrt{x} K_{4/7} \left(\frac{8}{7} \sqrt{\beta} x^{7/8} \right) , \quad (7.86)$$

où $K_\nu(z)$ est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce, d'indice ν et d'argument z , et C est une constante à déterminer. Nous notons que

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

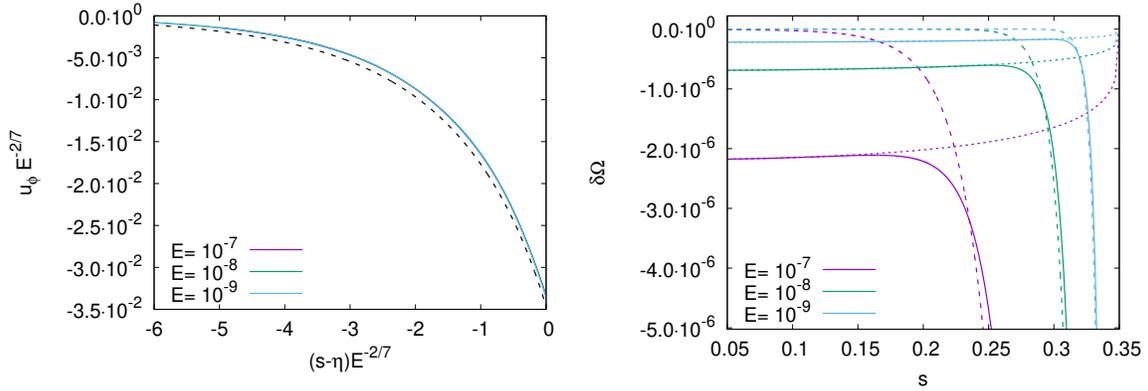


Figure 7.12: Gauche : $u_\phi E^{-2/7}$ en fonction de la coordonnée radiale cylindrique étirée $(s - \eta)E^{-2/7}$ pour plusieurs nombres d’Ekman, $\eta = 0.35$, $z = 0.7$, et $A = 0.01$. La ligne noire pointillée correspond à la solution géostrophique analytique (7.86). Droite : vitesse angulaire dans le repère en rotation en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s . Les lignes pointillées correspondent aux solutions analytiques (7.70) et (7.86). Source : Gagnier & Rieutord (2020).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} K_{4/7} \left(\frac{8}{7} \sqrt{\beta} x^{7/8} \right) = \frac{\Gamma(4/7)}{2\beta^{2/7}} \left(\frac{7}{4} \right)^{4/7} + O(x)$$

et donc, à l’ordre le plus bas,

$$C = \frac{2\beta^{2/7}}{\Gamma(4/7)} \left(\frac{4}{7} \right)^{4/7}. \quad (7.87)$$

Enfin, la continuité de $d\ell/ds$ à travers la tangente à la coquille interne $s = \eta$ est assurée dans les deux régions quasi-géostrophiques, c’est-à-dire

$$\left. \frac{d\ell}{ds} \right|_{s=\eta^-} = \left. \frac{d\ell}{ds} \right|_{s=\eta^+}. \quad (7.88)$$

Le moment cinétique spécifique à $s = \eta$ s’écrit alors

$$\ell(0) = -\frac{K\eta^2 E^{2/7}}{3\beta^{4/7}} \left(\frac{2}{\eta^2} + 1 \right) \left(\frac{7}{4} \right)^{1/7} \frac{\Gamma(4/7)}{\Gamma(3/7)} = O(E^{2/7}). \quad (7.89)$$

Nous vérifions l’épaisseur de la couche de cisaillement ainsi que le profil analytique de la vitesse azimutale (7.86) en le comparant aux solutions numériques en

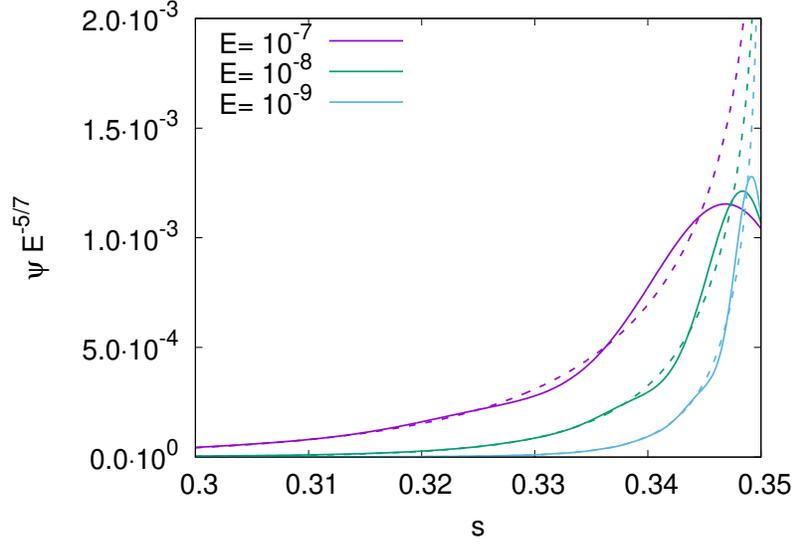


Figure 7.13: $\psi E^{-5/7}$ en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, $z = 0.7$, et $A = 0.01$. Les lignes pointillées correspondent aux solutions géostrophiques analytiques (7.90). Source : Gagnier & Rieutord (2020).

Fig. 7.12a. La solution analytique à l'ordre le plus bas pour la rotation différentielle dans l'ensemble du domaine $s \leq \eta$ est représentée en Fig. 7.12b. Enfin, d'après (7.80), la fonction de courant correspondante s'écrit

$$\psi(x) = -\frac{2K\eta^2 E^{5/7}}{3\beta^{2/7}\Gamma(3/7)} \left(\frac{2}{\eta^2} + 1\right) \left(\frac{4}{7}\right)^{3/7} x^{1/4} K_{4/7} \left(\frac{8}{7}\sqrt{\beta}x^{7/8}\right) \left[\frac{\beta z}{\eta^2} - \frac{1}{2^{3/4}}\right], \quad (7.90)$$

et donc

$$\begin{aligned} u_s &= -\frac{B_s E^{5/7}}{1 - x E^{2/7}} x^{1/4} K_{4/7} \left(\frac{8}{7}\sqrt{\beta}x^{7/8}\right) \\ u_z &= \frac{B_z E^{3/7}}{x^{3/4}(1 - x E^{2/7})} \left(K_{4/7} \left(\frac{8}{7}\sqrt{\beta}x^{7/8}\right) + 4\sqrt{\beta}x^{7/8} K_{3/7} \left(\frac{8}{7}\sqrt{\beta}x^{7/8}\right) \right), \end{aligned} \quad (7.91)$$

dans la couche $E^{2/7}$, où

$$B_s = \frac{2K\beta^{5/7}}{3\eta\Gamma(3/7)} \left(\frac{2}{\eta^2} + 1\right) \left(\frac{4}{7}\right)^{3/7} \quad (7.92)$$

et

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

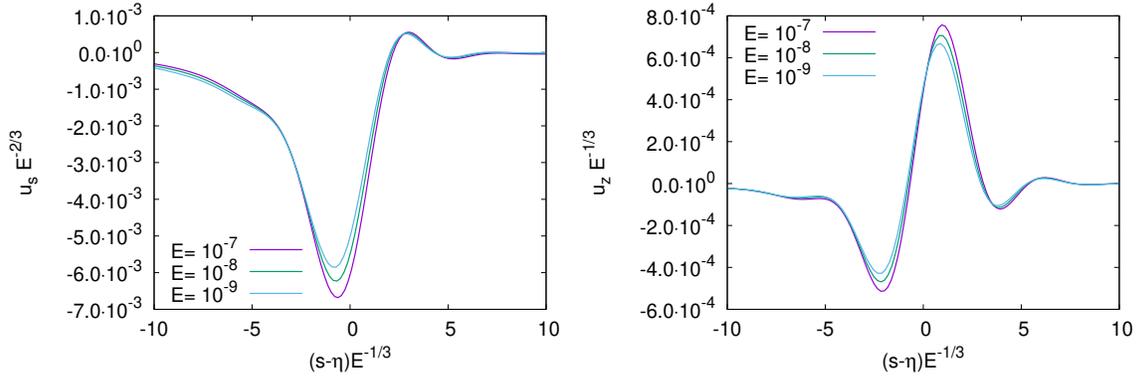


Figure 7.14: $u_s E^{-2/3}$ (gauche) et $u_z E^{-1/3}$ (droite) en fonction de la coordonnée radiale cylindrique étirée $(s - \eta)E^{-1/3}$ pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, $z = 0.7$, et $A = 0.01$. Source : [Gagnier & Rieutord \(2020\)](#).

$$B_z = \frac{K(2 + \eta^2)}{6\eta^2 \beta^{2/7} \Gamma(3/7)} \left(\frac{4}{7}\right)^{3/7} \left(\frac{\beta z}{\eta^2} - \frac{1}{2^{3/4}}\right). \quad (7.93)$$

Nous vérifions la validité de la solution (7.90) dans la couche $E^{2/7}$ et loin de la couche $E^{1/3}$, en Fig. 7.13. Nous notons que la fonction de courant ψ et ses dérivés restent discontinues en $s = \eta$, donc, contrairement à la rotation différentielle (7.86), la solution (7.90) n'est pas valable au voisinage immédiat de $s = \eta$. C'est en fait la couche ageostrophique $E^{1/3}$ qui lisse ces discontinuités. De plus, puisque $3/7 > 1/3$, nous nous attendons à ce que la composante z de la vitesse soit maximale dans la couche $E^{1/3}$.

Nous vérifions numériquement l'épaisseur des deux couches imbriquées de Stewartson, ainsi que l'amplitude de la vitesse dans la direction radiale cylindrique et dans la direction z , dans ces deux couches, en Fig. 7.14 pour la couche d'épaisseur $O(E^{1/3})$, et en Fig. 7.15 pour la couche d'épaisseur $O(E^{2/7})$. Bien que l'amplitude de la vitesse dans la direction parallèle à l'axe de rotation soit, comme prévu, maximale dans la couche centrale de Stewartson, nous constatons un léger écart avec les lois de puissance attendues pour la vitesse, proche de $s = \eta$ et dans les deux couches. Cet écart n'est en fait pas surprenant, car ces deux couches sont imbriquées (voir Fig. 6.9). La vitesse dans la région où les deux coexistent devrait donc suivre à la fois (7.77) et (7.91). En pratique, nous mesurons

$$u_s \simeq O(E^{0.7}), \quad \text{et} \quad u_z \simeq O(E^{0.37}), \quad (7.94)$$

dans la couche d'épaisseur $O(E^{1/3})$, c'est-à-dire à mi-chemin entre les amplitudes pré-

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

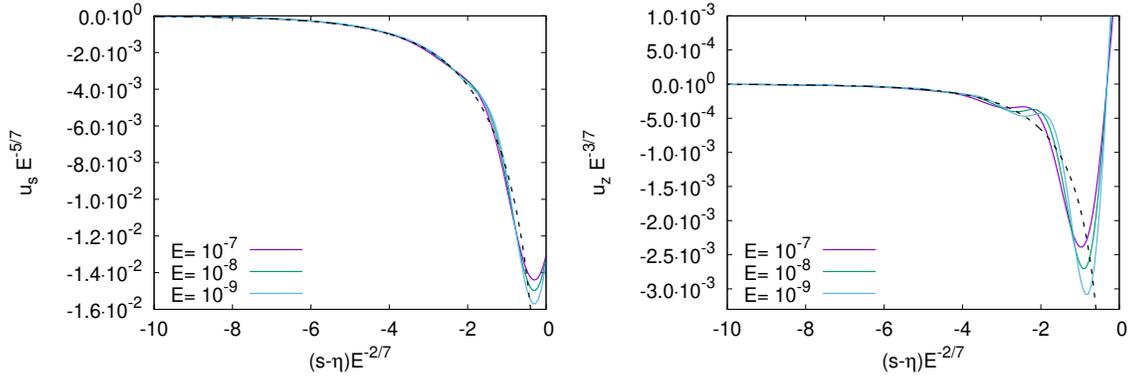


Figure 7.15: $u_s E^{-5/7}$ (gauche) et $u_z E^{-3/7}$ (droite) en fonction de la coordonnée radiale cylindrique étirée $(s-\eta)E^{-2/7}$ pour plusieurs nombres d’Ekman, $\eta = 0.35$, $z = 0.7$, et $A = 0.01$. Les lignes noires pointillées correspondent à la solution analytique (7.91). Source : Gagnier & Rieutord (2020).

dites dans les deux couches. Par souci de simplicité, nous considérons que l’amplitude de la vitesse méridienne dans la couche $E^{1/3}$ est celle donné par (7.77) en première approximation, c’est-à-dire $u_s = O(E^{2/3})$ et $u_z = O(E^{1/3})$.

En fin de compte, nos résultats sont cohérents avec l’amplitude de l’énergie cinétique $E_{k,\text{tot}} \propto E$, qui suggère que la principale contribution provient d’un champ de vitesse d’amplitude $O(E^{1/3})$ réparti sur une couche de cisaillement d’épaisseur $O(E^{1/3})$. Cette amplitude du champ de vitesse dans la couche de Stewartson est, en pratique, vérifiée tout au long de la phase transitoire, comme on peut le voir en Fig. 7.11b. Cela implique que, malgré le fait qu’un état stationnaire ne puisse probablement pas être atteint au cours de la vie des étoiles massives, l’échelle de temps pertinente au transport advectif du moment cinétique et des éléments chimiques à l’intérieur de leur enveloppe radiative est de l’ordre $O(E^{-2/3})$. En effet, si l’on considère que la durée de vie d’une étoile massive est de l’ordre d’une fraction de l’échelle de temps visqueuse t_{visc} , alors d’après la figure 7.3, ψ_* croît linéairement avec t_*/t_{visc} où $t_{\text{visc}} = R^2/\nu$ au cours de la vie de l’étoile. Dans la couche d’épaisseur $O(E^{1/3})$, cela signifie que

$$u_{z,*} \sim 2\Omega_c R \frac{t_*}{t_{\text{visc}}} E^{-1/3}, \quad (7.95)$$

et donc que l’échelle de temps d’advection dans la couche de Stewartson d’épaisseur $O(E^{1/3})$

$$t_{\text{adv}} = \frac{R}{u_{z,*}} \sim \frac{P_{\text{rot}}^2}{t_*} E^{-2/3}. \quad (7.96)$$

7.3.3 En résumé

Dans cette section focalisée sur l'étude de l'écoulement incompressible résultant d'une contrainte appliquée à la surface de la coquille externe, nous avons vu que l'énergie cinétique méridienne est essentiellement concentrée dans la couche de Stewartson, tangente à la coquille interne. En dehors de cette couche, nous avons déterminé une solution analytique pour l'écoulement méridien géostrophique stationnaire et pour la rotation différentielle géostrophique, en analysant les couches limites d'Ekman dans la limite asymptotique $E \ll 1$. Ces solutions se sont avérées être en très bon accord avec les solutions numériques. Dans le cylindre tangent à la coquille interne, nous avons constaté que l'écoulement méridien hors couche de Stewartson provient du pompage d'Ekman dans la couche limite présente au niveau de la coquille externe. Cet écoulement est essentiellement parallèle à l'axe de rotation et est dirigé vers la couche limite d'Ekman présente sur la coquille interne. Une fois le fluide absorbé par cette dernière, il est dirigé latitudinalement vers la singularité équatoriale, où il est ensuite expulsé parallèlement à l'axe de rotation, jusqu'à la couche limite d'Ekman externe. Hors du cylindre tangent, nous avons vu que cet écoulement méridien généré par la couche d'Ekman externe est perpendiculaire à l'axe de rotation, et est dirigé vers la couche de Stewartson où les deux écoulements se reconnectent. Hors de la couche de Stewartson, la circulation méridienne qui est donc entièrement contrôlée par le pompage d'Ekman, est d'amplitude proportionnelle au nombre d'Ekman E . Nous avons déterminé que, dans notre configuration, la couche de Stewartson qui repose sur \mathcal{C} est constituée de deux couches de cisaillement imbriquées d'épaisseur $O(E^{2/7})$ et $O(E^{1/3})$. Nous avons dérivé la solution analytique géostrophique à l'ordre le plus bas dans la couche $E^{2/7}$, et une simple analyse de la couche agéostrophique $E^{1/3}$ se situant le long du cylindre tangent, révèle qu'elle est le site d'un écoulement ascendant d'amplitude $O(E^{1/3})$. Malgré son étroitesse, cette couche de cisaillement concentre l'essentiel de la circulation méridienne du système.

7.4 Le rôle de la stratification thermique

7.4.1 Formulation du problème

La stratification stable introduit la poussée d'Archimède qui tend à inhiber les mouvements verticaux (c'est-à-dire dans la direction radiale) et peut empêcher, en partie ou complètement, que l'écoulement soit contrôlé par le pompage d'Ekman. En effet, la tendance qu'ont les couches visqueuses d'Ekman à générer une circulation méridienne est contrecarrée par la stratification stable. Ainsi, nous pouvons

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

nous demander dans quelle mesure l'écoulement à l'intérieur de l'enveloppe radiative, stratifiée de façon stable, d'une étoile massive perdant du moment cinétique peut rester correctement modélisé par une solution géostrophique. Pour étudier cette problématique, nous introduisons une stratification thermique radiale stable, et utilisons l'approximation de Boussinesq. Une nouvelle fois, nous négligeons les effets centrifuges. Les équations de la vortacité et de la chaleur linéarisées s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t_*} (\nabla \times \mathbf{u}_*) + \nabla \times (2\Omega_c \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_* + \alpha \delta T_* \mathbf{g}) = \nu \Delta \nabla \times \mathbf{u}_* , \\ \frac{\partial \delta T_*}{\partial t_*} + \mathbf{u}_* \cdot \nabla T_{\text{eq},*} = \kappa_T \Delta \delta T_* , \end{array} \right. \quad (7.97)$$

où la diffusivité thermique κ_T est choisie constante. α est le coefficient de dilatation thermique, $\mathbf{g} = -g\mathbf{r}_*$ est le champ gravitationnel, et δT_* est la perturbation de température dimensionnée de l'équilibre thermique. Nous supposons en outre que le gradient de température à l'équilibre est produit par une source de chaleur uniforme (Chandrasekhar, 1961), ce qui implique $\nabla T_{\text{eq},*} = (\Delta T/R^2)r_*\mathbf{e}_r$, où ΔT est la différence de température entre les coquilles externe et interne. Ces équations sont complétées par l'équation de conservation de la masse $\nabla \cdot \mathbf{u}_* = 0$.

Dans notre modèle, la fréquence de Brunt-Väisälä \mathcal{N} au niveau de la couche externe est

$$\mathcal{N}^2 = \frac{\alpha g \Delta T}{R} , \quad (7.98)$$

et nous l'utilisons pour définir $\Delta T(2\Omega_c)^2/\mathcal{N}^2$ comme échelle de température. Le système d'équations sans dimension s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{u}) + \nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} - \delta T \mathbf{r}) = E \Delta \nabla \times \mathbf{u} , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , \\ \frac{\partial \delta T}{\partial t} + Pr S r u_r = E \Delta \delta T , \end{array} \right. \quad (7.99)$$

où le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa_T$ n'entre dans l'équation de la température que combiné au nombre $S = \mathcal{N}^2/(2\Omega_c)^2$ (Barcilon & Pedlosky, 1967). Dans le reste de cette section, nous utiliserons le paramètre sans dimension introduit par Garaud (2002),

$$\lambda = PrS , \quad (7.100)$$

pour caractériser la force de la stratification en température. Nous complétons le système d'équations (7.99) avec les conditions aux limites (7.6) pour le champ de vitesses, et nous imposons les conditions aux limites de Dirichlet $\delta T = 0$ sur les deux parois. Nous projetons ensuite (7.99) sur la base des harmoniques sphériques, et nous obtenons le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial w^l}{\partial t} - \left[A_{l-1}^l r^{l-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r u^{l-1}}{r^{l-1}} \right) + A_{l+1}^l r^{-l-2} \frac{\partial}{\partial r} (r^{l+3} u^{l+1}) \right] = E \Delta_l w^l , \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Delta_l r u^l) + B_{l-1}^l r^{l-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w^{l-1}}{r^{l-1}} \right) + \frac{B_{l+1}^l}{r^{l+2}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{l+2} w^{l+1}) + \Lambda T^l = E \Delta_l \Delta_l r u^l , \\ \frac{\partial T^l}{\partial t} + \lambda r u^l = E \Delta_l T^l , \end{cases} \quad (7.101)$$

où

$$\delta T(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} T^l(r) Y_l(\theta) . \quad (7.102)$$

Nous représentons une vue méridienne de la rotation différentielle dans le repère en rotation, ainsi que de la circulation méridienne pour $E = 10^{-7}$ et pour diverses valeurs de λ , à l'état stationnaire, en Fig. 7.16. Nous notons qu'à mesure que λ augmente, l'écoulement s'éloigne de la solution géostrophique, c'est-à-dire que le champ de vitesses dépend de la coordonnée parallèle à l'axe de rotation z . A λ élevé, le profil de vitesse angulaire devient uniquement dépendant de la coordonnée radiale (profil de rotation en coquilles).

7.4.2 Couches limites horizontales

Dans le cas d'un fluide thermiquement homogène, nous avons vu que les couches limites horizontales, et plus particulièrement les couches d'Ekman, jouent un rôle crucial sur la dynamique de l'écoulement interne. Nous pouvons donc nous demander comment ces couches influencent l'écoulement d'un fluide stratifié en température. Dans cette section, nous chercherons à déterminer la condition d'existence de ces

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

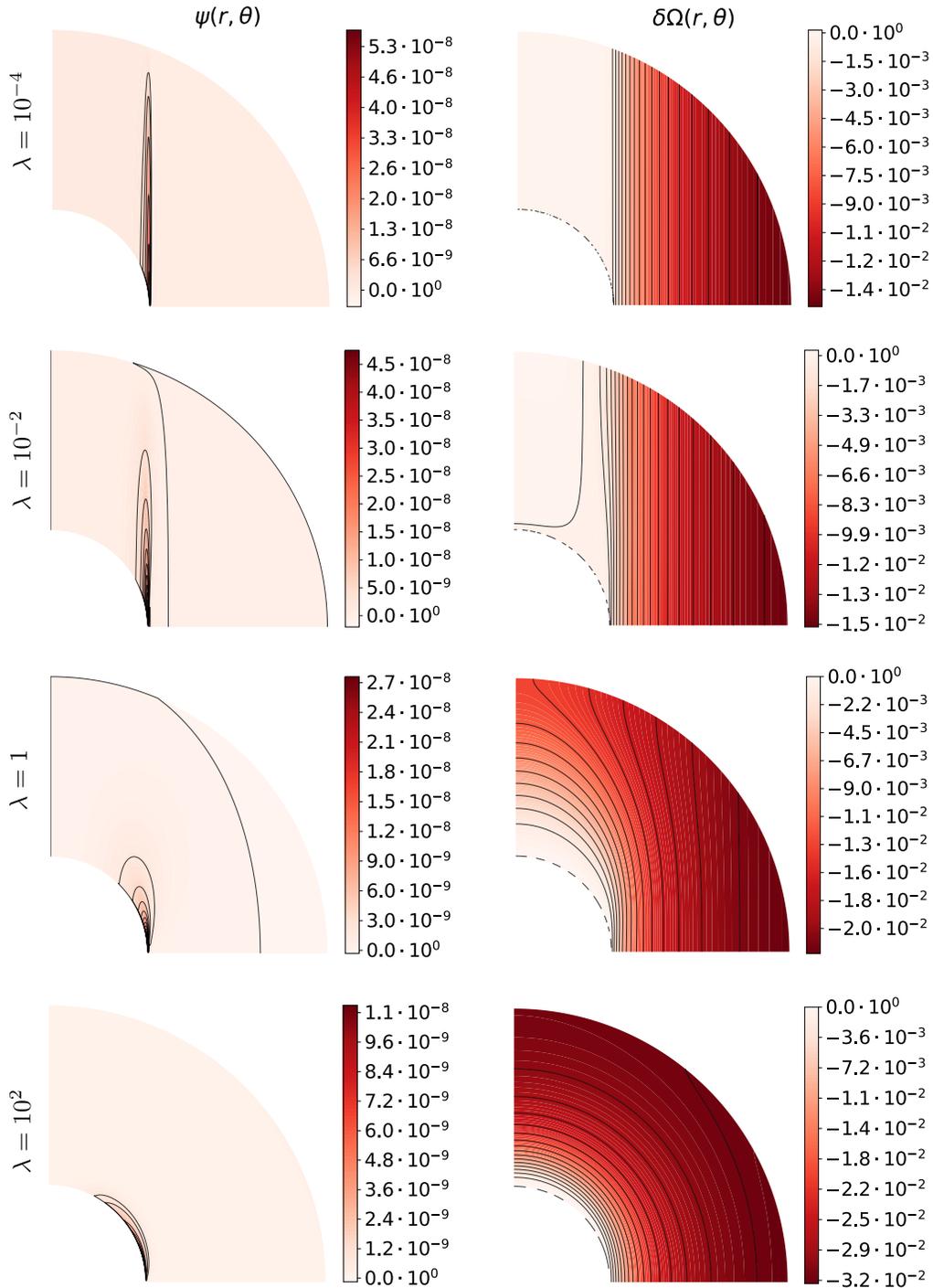


Figure 7.16: Vue méridienne de la fonction de courant ψ (gauche) et de la rotation différentielle dans le repère en rotation avec la coquille interne $\delta\Omega = (\Omega - \Omega_c)/(2\Omega_c)$ (droite) pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$, et plusieurs valeurs de λ . Source : Gagnier & Rieutord (2020).

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

couches limites horizontales et nous déterminerons leur épaisseur caractéristique en fonction des paramètres sans dimension pertinents (E et λ).

Les couches limites étant, par définition, extrêmement fines, leur échelle horizontale est beaucoup plus grande que leur échelle transversale. Nous nous attendons donc à ce que les dérivées radiales prévalent sur les dérivées horizontales. Ainsi, nous combinons les équations du mouvements, en supposant que $\partial_r \gg \partial_\theta$ dans les couches limites horizontales, et en ne gardant que les dérivées radiales les plus élevées pour une même grandeur et pour un même paramètre (E^2 , λ et 1). Nous obtenons alors une équation différentielle de degré 6 pour la vitesse latitudinale : l'équation de couche limite horizontale (voir [Raze & Lignières, 2017](#))

$$E^2 r \frac{\partial^6 u_\theta}{\partial r^6} + \lambda \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - r \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} \simeq 0 . \quad (7.103)$$

Comme nous l'avons fait dans la section 6.4 pour la détermination de l'épaisseur des couches de Stewartson, nous introduisons la coordonnée d'ordre $O(1)$, $\tilde{\zeta} = E^{-1/2} \zeta$ où $\zeta = 1 - r$, telle que la dérivée radiale $\partial_\zeta = E^{-1/2} \partial_{\tilde{\zeta}}$. L'équation (7.103) peut alors être réécrite, dans la couche limite externe, et dans la limite asymptotique des petits nombres d'Ekman,

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^6 u_\theta}{\partial \tilde{\zeta}^6} + \lambda \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1}{E} \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \tilde{\zeta}^2} \simeq 0 . \quad (7.104)$$

Nous voyons que si $\lambda \ll 1/E$, nous obtenons l'équation de la couche limite d'Ekman où la force de Coriolis est en équilibre avec le cisaillement visqueux. Comme le fait remarquer [Barcilon & Pedlosky \(1967\)](#), la structure des couches d'Ekman est toujours indépendante de la force de la stratification dans la direction transverse (c'est-à-dire dans la direction radiale), car les forces qui sont en équilibre dans ces couches ne dépendent (principalement) que des mouvements horizontaux.

De la même manière, si l'on se place dans le régime $\lambda \gg 1$, et que l'on introduit la coordonnée d'ordre $O(1)$ $\tilde{\gamma} = \sqrt{\lambda} \gamma$ où $\gamma = (1 - r)$ et telle que la dérivée radiale $\partial_\gamma = \sqrt{\lambda} \partial_{\tilde{\gamma}}$, l'équation (7.103) peut être réécrite, dans la couche limite externe,

$$E^2 \lambda^2 \frac{\partial^6 u_\theta}{\partial \tilde{\gamma}^6} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \tilde{\gamma}^2} \simeq 0 . \quad (7.105)$$

Ainsi, si $1 \ll \lambda^2 \ll 1/E^2$, le terme visqueux disparaît et la flottabilité est en équilibre avec la force de Coriolis. Cet équilibre est typique d'une couche limite thermique d'épaisseur $\delta_\lambda = O(1/\sqrt{\lambda})$. Nous notons que dans le régime $\lambda \ll 1$, seules les

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

couches d'Ekman sont présentes au niveau des deux parois, alors que dans le régime $1 \ll \lambda \ll 1/E$ les deux couches limites, thermiques et d'Ekman, coexistent. Dans ce dernier régime, les couches thermiques sont nécessairement beaucoup plus épaisses que les couches d'Ekman.

7.4.3 Régime pertinent pour les étoiles massives

Nous avons vu, comme dans le cas d'un fluide thermiquement homogène, que seules les couches limites d'Ekman se forment au niveau des parois lorsque $\lambda \ll 1$, et que lorsque $\lambda \gg 1$, des couches thermiques se forment en plus des couches d'Ekman. Nous pouvons donc nous attendre à ce que la dynamique des écoulements primaire et secondaire soit très dépendante de la valeur de λ , c'est-à-dire de la force de la stratification thermique. Ainsi, il est intéressant de savoir dans quel régime se situent les intérieurs des étoiles massives en rotation rapide.

Dans l'enveloppe radiative des étoiles massives, la viscosité radiative et la diffusion de la chaleur par radiation dominent largement la diffusion d'origine collisionnelle (Espinosa Lara & Rieutord, 2013). Ces deux quantités s'écrivent

$$\nu_{\text{rad}} = \frac{4aT^4}{15c\kappa_R}, \quad \kappa_{\text{rad}} = \frac{4acT^3}{3\kappa_R c_p}, \quad (7.106)$$

où T est la température, κ_R est l'opacité moyenne de Rosseland, $a = 4\sigma/c$ est la constante de densité de rayonnement, σ la constante de Stefan-Boltzmann, c la vitesse de la lumière et c_p est la capacité thermique spécifique à pression constante. Dans un tel système dominé par la radiation, le nombre de Prandtl radiatif s'écrit

$$Pr_{\text{rad}} = \frac{3}{10} \frac{c_s^2}{c^2}, \quad (7.107)$$

où c_s est la vitesse du son dans le cas adiabatique. Ainsi, par définition, $Pr_{\text{rad}} \ll 1$. Cependant, la rotation différentielle de l'enveloppe radiative peut être instable vis-à-vis du cisaillement associé, et peut donc entraîner un écoulement turbulent à petites échelles. Zahn (1992) propose l'expression de la viscosité cinématique verticale turbulente associée à l'instabilité marginale de cisaillement, que l'on peut facilement déduire de sa condition d'instabilité (6.87),

$$\nu_t = \frac{Ri_c \kappa_T}{3} \left(\frac{s}{\mathcal{N}} \frac{d\Omega}{ds} \right)^2, \quad (7.108)$$

où $Ri_c \simeq 1/4$ est le nombre de Richardson critique, c'est-à-dire la valeur du nombre de

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

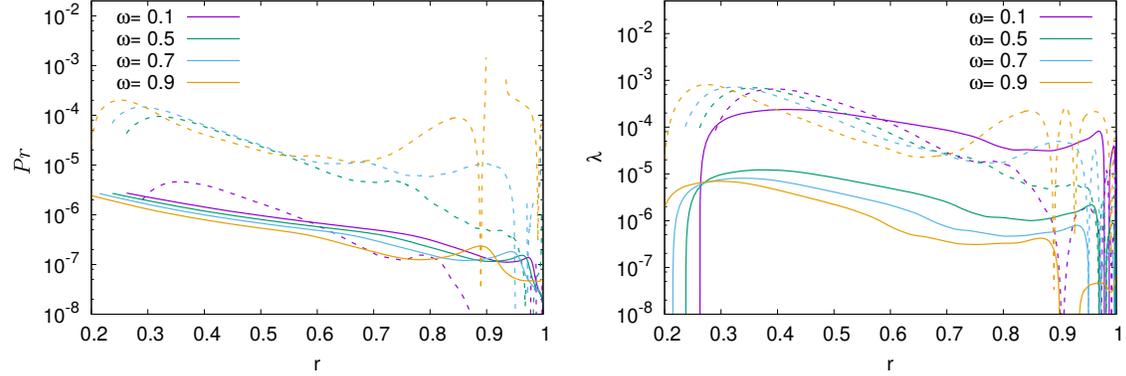


Figure 7.17: Profils radiaux de Pr et de λ mesurés à l'équateur de modèles stellaires ESTER à deux dimensions, pour une étoile de $15 M_{\odot}$ à différents rapports de vitesse angulaire ω . Le nombre de Prandtl radiatif Pr_{rad} et le paramètre λ correspondant sont représentés en traits pleins, et leurs équivalents turbulents sont représentés en traits pointillés. Source : Gagnier & Rieutord (2020).

Richardson telle qu'un écoulement stratifié et non-diffusif est marginalement instable vis-à-vis de l'instabilité de cisaillement. Nous représentons les profils du nombre de Prandtl radiatif et turbulent à l'équateur d'une étoile de 15 masses solaires issus de modèles ESTER à deux dimensions (Rieutord *et al.*, 2016) pour différentes vitesses de rotation définies comme une fraction de vitesse angulaire képlérienne (cf Eq. 2.21), en Fig. 7.17. Les profils radiaux de λ associés sont également représentés. Bien que le nombre de Prandtl turbulent soit quelques ordres de grandeur plus grand que le nombre de Prandtl radiatif dans les étoiles à rotation rapide, le nombre λ turbulent n'est seulement qu'un ordre de grandeur plus grand, d'après les modèles considérés. Nous constatons que le paramètre λ turbulent est à peu près indépendant de ω , et qu'il ne dépasse jamais 10^{-3} dans nos modèles. Le paramètre λ radiatif, en revanche, augmente lorsque ω diminue, à tel point qu'il peut dépasser 10^{-4} localement, lorsque $\omega \lesssim 0.1$. Comme les étoiles massives sont souvent considérées comme des rotateurs rapides, nous concluons que le régime de stratification thermique dans leur enveloppe radiative correspond à $\lambda \ll 1$.

7.4.4 Régime de stratification asymptotiquement faible

Concentrons nous maintenant sur le cas d'un régime de stratification en température asymptotiquement faible, c'est-à-dire le régime pertinent à l'étude de l'enveloppe radiative des étoiles massives en rotation. Bien sûr si l'on s'intéresse au contexte différent de rotation lente, alors le régime $\lambda \ll 1$ peut également être atteint si la fré-

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

quence de Brunt-Väisälä est petite. Nous avons vu que dans ce régime, seules les couches d'Ekman caractérisées par une vitesse radiale de pompage/succion d'ordre $O(E)$ sont présentes au niveau des parois. Nous supposons donc $\lambda \ll 1$, mais aussi la limite pertinente pour les intérieurs stellaires $E \ll \lambda$.

L'écoulement stationnaire

Commençons par l'étude de l'écoulement stationnaire. La composante radiale de l'équation du mouvement stationnaire s'écrit

$$-u_\phi \sin \theta = -\frac{\partial p}{\partial r} + \delta T r + E \left[\Delta u_r - \frac{2}{r^2} \left(u_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \sin \theta u_\theta}{\partial \theta} \right) \right], \quad (7.109)$$

où la rotation différentielle est générée par la contrainte d'ordre $O(1)$ imposée en surface, c'est-à-dire $u_\phi = O(1)$. Dans le régime asymptotique des petits nombres d'Ekman, la perturbation de température par rapport à l'équilibre thermique est donc au maximum d'ordre $O(1)$. Si tel est le cas, c'est-à-dire si $\delta T = O(1)$, l'équation de la température (7.99) implique que la vitesse radiale hors couches limites u_r est de l'ordre de $O(E/\lambda)$, c'est-à-dire supérieure au pompage Ekman $O(E)$ (voir Eq. 7.40), dans le régime de stratification considéré. En raison des conditions aux limites imposées par les couches d'Ekman, une vitesse radiale d'ordre $O(E/\lambda)$ doit s'annuler à $r = \eta$ et $r = 1$. De plus, la composante radiale de l'équation de la vorticité s'écrit

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} = O(E), \quad (7.110)$$

et indique que la vitesse radiale u_r ne dépend pas de la coordonnée z (   $O(E)$ près, cf [Barcilon & Pedlosky, 1967](#)). Ainsi, une solution cohérente pour l'écoulement intérieur est $u_r = O(E)$ et donc $\delta T = O(\lambda)$, à laquelle s'ajoute les corrections dans les couches d'Ekman $\tilde{u}_r = O(E)$ et $\tilde{u}_\theta = O(\sqrt{E})$.

Écrivons maintenant les variables pertinentes à l'étude de l'écoulement intérieur comme des séries de puissances du petit paramètre λ , dans le régime asymptotique des petits nombres d'Ekman. Il vient

$$\begin{cases} u_r = E(u_{r,0} + \lambda u_{r,1} + \dots) \\ u_\phi = u_{\phi,0} + \lambda u_{\phi,1} + \dots \\ \delta T = \lambda \delta T_1 + \lambda^2 \delta T_2 + \dots \\ p = p_0 + \lambda p_1 + \dots, \end{cases} \quad (7.111)$$

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

que l'on injecte ensuite dans l'équation du mouvement pour obtenir, aux ordres $O(1)$ et $O(\lambda)$

$$u_{\phi,0} = \frac{\partial p_0}{\partial s}, \quad \text{et} \quad 0 = \frac{\partial p_0}{\partial z}, \quad (7.112)$$

et

$$u_{\phi,1} = \frac{\partial p_1}{\partial s} - s\delta T_1, \quad \text{et} \quad z\delta T_1 = \frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad (7.113)$$

respectivement. Ainsi, à l'ordre le plus bas, et comme pour le cas thermiquement homogène présenté en Sect. 7.3, le théorème de Taylor-Proudman est satisfait, et la dynamique de l'écoulement géostrophique d'amplitude $O(1)$ est donc entièrement contrôlée par l'écoulement de pompage/succion d'Ekman. Ceci est en effet illustré en Fig. 7.16. D'autre part, l'écoulement d'amplitude $O(\lambda)$ est affecté par l'écart à l'équilibre thermique induit par la vitesse radiale d'ordre $O(E)$. Il est ainsi clair que le rôle de la stratification thermique sur les écoulements primaires et secondaires quasi-géostrophiques et stationnaires, dans le régime pertinent à l'enveloppe radiative des étoiles massives en rotation, est négligeable.

L'écoulement transitoire

Comme pour l'étude du cas incompressible en Sect. 7.3, nous souhaitons maintenant déterminer l'échelle de temps nécessaire pour atteindre un état stationnaire, en fonction des paramètres sans dimension pertinents, c'est-à-dire le nombre d'Ekman et le paramètre λ , dans la limite asymptotique des petits nombres d'Ekman. Pour cela, nous combinons la composante radiale de l'équation de la vorticité avec la dérivée par rapport à la coordonnée z de l'équation de la chaleur, et avec la composante azimutale de l'équation du mouvement (voir Gagnier & Rieutord, 2020, pour les étapes intermédiaires). Nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{z}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta T}{z} + \cotan \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \tan \theta u_\phi \right) = \\ E \cotan \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \tan \theta \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) u_\phi + \frac{E}{\lambda} z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} \Delta \delta T. \end{aligned} \quad (7.114)$$

Ainsi, si δT reste $O(\lambda)$ pendant la phase transitoire, nous nous attendons à ce que l'état stationnaire et quasi-géostrophique soit atteint sur une échelle de temps visqueuse d'ordre $O(E^{-1})$, dans la limite $\lambda \ll 1$. Nous vérifions cela numériquement

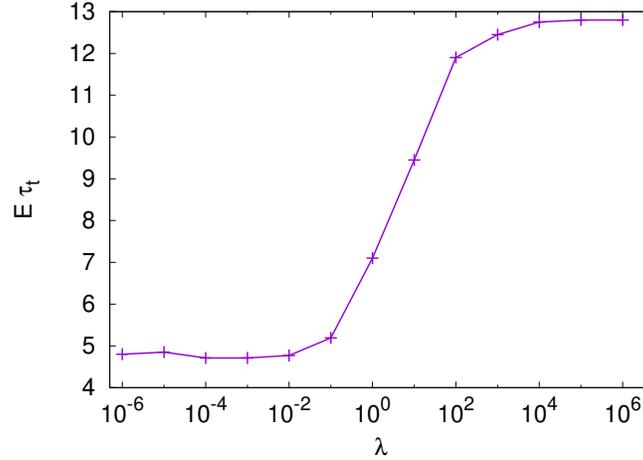


Figure 7.18: Solution numérique de la durée de la phase transitoire (multipliée par le nombre d’Ekman) $E\tau_t$, en fonction de λ pour $E = 10^{-6}$. Dans les limites fortement et faiblement stratifiées, l’état stationnaire est atteint en un temps de diffusion visqueuse $O(E^{-1})$. Source : Gagnier & Rieutord (2020).

en mesurant cette échelle de temps τ_t comme étant le temps nécessaire pour que la différence relative entre le couple appliqué aux deux coquilles (par la condition aux limites pour la coquille externe, et par le fluide pour la coquille interne) soit inférieure à 0.01% (voir Sect. 7.3.1). Nous représentons le temps réduit $E\tau_t$ en fonction de λ pour $E = 10^{-6}$, en Fig. 7.18. Nous constatons qu’en effet, comme pour le cas thermiquement homogène, l’échelle de temps de la phase transitoire est de l’ordre $O(E^{-1})$ dans la limite faiblement stratifiée.

7.4.5 Régime de stratification asymptotiquement forte

Concentrons nous maintenant sur le cas du régime de stratification en température asymptotiquement forte $\lambda \gg 1$. Ce régime peut, par exemple, être pertinent pour l’étude de l’intérieur des étoiles en rotation lente. Dans ce régime, il est bien connu que l’échelle de temps d’Eddington-Sweet $T_{ES} = T_{KH}\mathcal{N}^2/(4\Omega_c^2)$ associée à la redistribution du moment cinétique par la circulation méridienne est si longue qu’il est peu probable que l’écoulement puisse un jour atteindre un état stationnaire. Ainsi, la dynamique interne des étoiles à rotation lente pour lequel ce régime est pertinent, dépend certainement en grande partie des conditions initiales choisies ainsi que du taux d’amortissement des modes baroclines (e.g. Rieutord, 2006c). Ces deux effets n’entrent cependant pas dans le cadre de cette étude où nous cherchons à contraindre l’écoulement généré par un vent radiatif à la surface d’étoiles massives en rotation.

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT
RADIATIF

Malgré tout, par souci d'exhaustivité et pour comprendre certains effets d'une stratification thermique asymptotiquement forte sur l'écoulement de spin-down barotrope résultant d'une contrainte en surface, nous présentons ici un bref compte-rendu du régime $\lambda \gg 1$.

L'écoulement stationnaire

Dans le régime asymptotique des petits nombres d'Ekman, nous avons vu que parce que $u_\phi = O(1)$ hors du cylindre tangent, l'écart de température par rapport à l'équilibre est au maximum d'ordre $O(1)$. Cependant, contrairement au cas faiblement stratifié, la vitesse radiale hors couches limites associée d'amplitude $O(E/\lambda)$ est ici inférieure à l'amplitude de l'écoulement pompage/succion d'Ekman qui elle reste $O(E)$, et constitue donc une solution cohérente pour le l'écoulement intérieur. Écrivons maintenant les variables pertinentes à l'étude de l'écoulement intérieur, comme des séries de puissances du petit paramètre $1/\sqrt{\lambda}$ correspondant à l'épaisseur de la couche limite thermique, dans le régime asymptotique des petits nombres d'Ekman. Il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = E\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}u_{r,1} + \frac{1}{\lambda}u_{r,2} + \dots\right) \\ u_\theta = E\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}u_{\theta,1} + \frac{1}{\lambda}u_{\theta,2} + \dots\right) \\ u_\phi = u_{\phi,0} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}u_{\phi,1} + \dots \\ \delta T = \delta T_0 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\delta T_1 + \dots \\ p = p_0 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}p_1 + \dots, \end{array} \right. \quad (7.115)$$

que l'on injecte ensuite dans l'équation du mouvement pour obtenir, aux ordres $O(1)$ et $O(1/\sqrt{\lambda})$

$$u_{\phi,0} = \frac{\partial p_0}{\partial s} - s\delta T_0, \quad z\delta T_0 = \frac{\partial p_0}{\partial z}, \quad \text{et} \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{s^2}\right)u_{\phi,0} = 0, \quad (7.116)$$

et

$$u_{\phi,1} = \frac{\partial p_1}{\partial s} - s\delta T_1, \quad z\delta T_1 = \frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad \text{et} \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{s^2}\right)u_{\phi,1} = u_{s,1}, \quad (7.117)$$

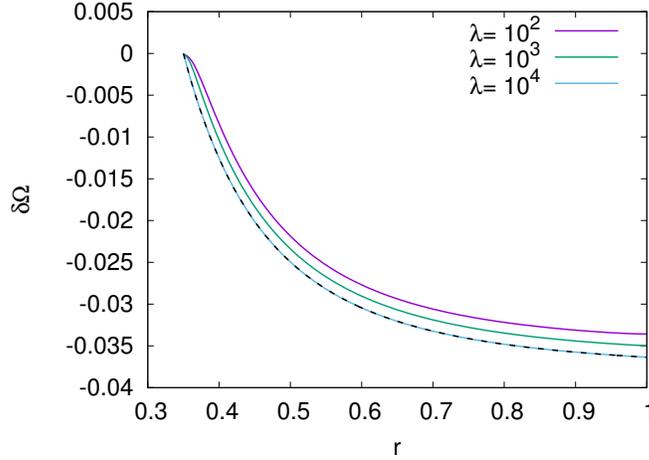


Figure 7.19: Profils radiaux de la vitesse angulaire à l'équateur dans le repère en rotation avec la coquille externe $\delta\Omega$, pour $E = 10^{-7}$, et pour plusieurs valeur de λ . La ligne en traits pointillés correspond à la solution solution analytique dans la limite asymptotique $\lambda \gg 1$ (Eq. 7.120). Source : Gagnier & Rieutord (2020).

respectivement. Ainsi, pour des valeurs de λ élevées, la stratification thermique inhibe les mouvements verticaux dans l'intérieur, et l'écoulement de pompage/succion de la couche Ekman ne contrôle plus la dynamique de l'écoulement intérieur. Le théorème de Taylor-Proudman est remplacé par l'équation du vent thermique

$$(\mathbf{e}_z \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{r} \times \nabla \delta T + O(E\mathbf{u}) , \quad (7.118)$$

et l'expression analytique de la vitesse azimutale d'ordre $O(1)$ peut être obtenue en résolvant

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{s^2} \right) u_\phi = 0 , \quad (7.119)$$

ce qui donne, en utilisant les conditions aux limites (7.23)

$$u_\phi = \frac{K}{3} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\eta^3} \right) r \sin \theta . \quad (7.120)$$

Ainsi, à l'ordre le plus bas, la rotation différentielle $\delta\Omega = u_\phi / (r \sin \theta)$ est purement radiale dans le régime asymptotique des grands λ . Nous représentons les profils radiaux de vitesse angulaire à l'équateur ($\theta = \pi/2$), pour $E = 10^{-7}$ et pour diverses valeurs de λ en Fig. 7.19. Nous remarquons que la limite asymptotique où les termes d'ordre $O(1/\sqrt{\lambda})$ peuvent être négligés, correspond à $\lambda \gtrsim 10^4$.

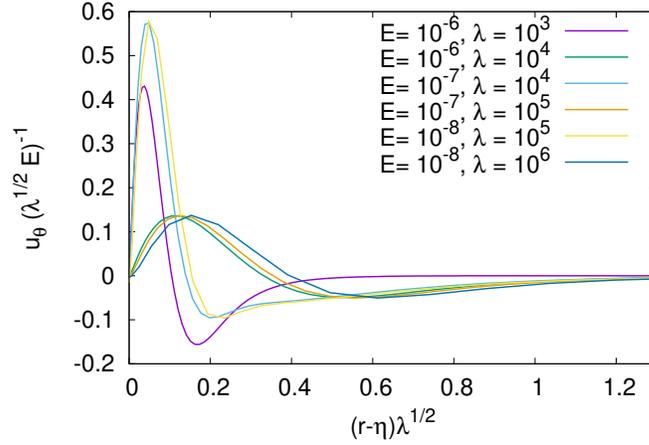


Figure 7.20: $u_\theta(\sqrt{\lambda}E)^{-1}$ en fonction de la coordonnée dilatée $(r - \eta)\sqrt{\lambda}$, pour plusieurs valeurs du nombre d'Ekman et du paramètre λ , $\eta = 0.35$, $\theta = \pi/8$, et $A = 0.01$. Source : Gagnier & Rieutord (2020).

Une autre caractéristique intéressante du régime $\lambda \gg 1$ est que la circulation méridienne est concentrée dans les couches limites, ceci est illustré en Fig. 7.16 pour $\lambda = 10^2$ (voir aussi Rieutord, 2006a; Raze & Lignières, 2017). Hors des couches limites, le mouvement dans la direction radiale est fortement inhibé par la stratification thermique, à tel point qu'elle empêche l'existence de la couche de Stewartson et donc réduit drastiquement le transport advectif vertical.

Comme suggéré dans la section 7.4.2, les gradients radiaux sont augmentés d'un facteur $\sqrt{\lambda}$ dans les couches limites thermiques. Ainsi, l'équation de la chaleur donne, dans ces couches limites, $\hat{u}_r = O(E)$, et l'équation de conservation de la masse donne $\hat{u}_\theta = O(\sqrt{\lambda}E)$, où le symbole $\hat{\cdot}$ est associé à l'écoulement dans la couche thermique. Nous représentons $u_\theta/(E\sqrt{\lambda})$ en fonction de la coordonnée radiale étirée d'ordre $O(1)$, $(r - \eta)\sqrt{\lambda}$, pour diverses combinaisons de nombres d'Ekman et de paramètres λ , en Fig. 7.20. Nous constatons que, en effet, la vitesse latitudinale dans la partie extérieure de la couche limite d'épaisseur δ_λ , c'est-à-dire dans la région de la couche limite thermique, en dehors de la couche d'Ekman (typiquement pour $(r - \eta)\sqrt{\lambda} \gtrsim 0.5$), est d'ordre $O(\sqrt{\lambda}E)$. De plus, nous vérifions l'amplitude d'ordre $O(\sqrt{E})$ de la vitesse latitudinale dans la couche limite d'Ekman. En effet, la Fig. 7.20 montre pour des valeurs fixe de δ_E/δ_λ , c'est-à-dire les valeurs fixes de $\sqrt{\lambda}E$, la vitesse latitudinale est d'ordre $O(\sqrt{\lambda}E)$ dans la couche limite d'Ekman également. Toutefois, prendre $\sqrt{\lambda}E = D$, où D est une constante, implique $\sqrt{\lambda}E = D\sqrt{E}$, et donc $\hat{u}_\theta \propto \tilde{u}_\theta = O(\sqrt{E})$.

L'écoulement transitoire

Pour finir, nous déterminons l'échelle de temps associée à la phase transitoire, en fonction du nombre d'Ekman et du paramètre λ , dans la limite $\lambda \gg 1$. Supposant que dans ce régime, δT reste $O(1)$ pendant la phase transitoire, la composante radiale de l'équation de la vorticité peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\cotan \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \tan \theta u_\phi \right) \simeq E \cotan \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \tan \theta \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) u_\phi, \quad (7.121)$$

ce qui indique que l'état stationnaire (agéostrophique) est, une nouvelle fois, atteint en un temps d'ordre $O(E^{-1})$. C'est ce que nous vérifions en figure 7.18. Notons que cette échelle de temps possède une faible dépendance en λ , dans le régime de stratification intermédiaire.

7.4.6 En résumé

Dans cette section, nous nous sommes focalisés sur l'étude du rôle de la stratification thermique sur l'écoulement incompressible résultant d'une contrainte appliquée sur la coquille externe. Pour cela, nous avons introduit un gradient radial de température et avons utilisé l'approximation de Boussinesq. Nous avons étudié les limites asymptotiques de faible stratification en température lorsque le paramètre $\lambda = Pr\mathcal{N}^2/(2\Omega_c)^2 \ll 1$, et de forte stratification lorsque $\lambda \gg 1$. Dans un premier temps, nous avons remarqué qu'à mesure que λ augmente, la rotation différentielle tend vers une rotation en coquilles, c'est-à-dire que la vitesse angulaire tend à ne plus dépendre que de la distance radiale r . Nous avons aussi remarqué que dans la limite $\lambda \gg 1$, la circulation méridienne est concentrée dans des couches limites horizontales dites thermiques d'épaisseur $O(1/\sqrt{\lambda})$, au niveau des deux coquilles concentriques. Dans cette limite, la couche de Stewartson n'est pas présente car les mouvements verticaux sont inhibés par la stratification. Ce régime de stratification n'est cependant pertinent à l'étude de l'enveloppe des étoiles massives en rotation, mais peut l'être pour celle des étoiles en rotation lente. Cependant, dans ce régime, il est bien connu que l'échelle de temps d'Eddington-Sweet associée à la redistribution du moment cinétique par la circulation méridienne est si longue qu'il est peu probable l'écoulement puisse un jour atteindre un état stationnaire. Ainsi, la dynamique interne des étoiles à rotation lente pour lequel ce régime est pertinent, dépend certainement en grande partie des conditions initiales choisies ainsi que du taux d'amortissement des modes baroclines. Les étoiles massives, souvent en rotation rapide sont, quant à elles, correctement modélisées par la limite asymptotique $\lambda \ll 1$. Dans ce régime, nous avons

vu que la structure et l'amplitude de l'écoulement stationnaire et incompressible ne sont pas affectées par la stratification thermique stable.

7.5 L'écoulement dans une enveloppe polytropicque

7.5.1 Formulation du problème

L'étape suivante vers une modélisation réaliste de l'enveloppe radiative d'une étoile massive nécessite d'inclure le fort gradient de densité entre le cœur convectif et la surface de l'étoile. Typiquement, la densité varie d'un facteur de 10^9 dans l'enveloppe d'une étoile de 15 masses solaires. Pour prendre en compte cette distribution de densité de manière simple, nous supposons que le gaz peut être décrit par une équation d'état polytropicque comme cela se fait habituellement en physique stellaire (e.g. [Maeder, 2009](#)). L'équilibre hydrostatique vérifie donc :

$$-\frac{dp_*}{dr_*} - \frac{GM}{(r_*)^2}\rho_* = 0 \quad \text{avec} \quad p_* = \kappa(\rho_*)^\Gamma . \quad (7.122)$$

Comme pour justifier le fait d'ignorer la force d'Euler, nous invoquons l'approximation de Roche en supposant que le cœur convectif contient toute la masse M de l'étoile. Dans l'équation (7.122), G est la constante gravitationnelle, κ est une constante liée aux conditions thermiques à la frontière du cœur convectif, et $\Gamma = 1 + 1/n$, où n est l'indice polytropicque. Nous fixons $n = 3$, une valeur typique pour la modélisation des enveloppes radiatives. Notons que pour une telle valeur de cet indice, le fluide est stratifié de manière stable (voir [Dintrans & Rieutord, 2001](#); [Rieutord & Dintrans, 2002](#), par exemple). Cependant, d'après les conclusions de la section précédente, la faible valeur du nombre de Prandtl dans les intérieurs stellaires en rotation (turbulents ou non) nous permet de négliger les effets de la flottabilité. Nous supposons donc un fluide thermiquement homogène.

L'équation (7.122) peut être résolue simplement, et donne le profil radial de densité

$$\rho_*(r_*) = \rho_c(1 + Bj(r_*))^n , \quad (7.123)$$

où

$$B = \frac{\rho_s^{1/n} - 1}{1/(\eta) - 1}, \quad j(r_*) = \frac{1}{\eta} - \frac{R}{r_*} , \quad (7.124)$$

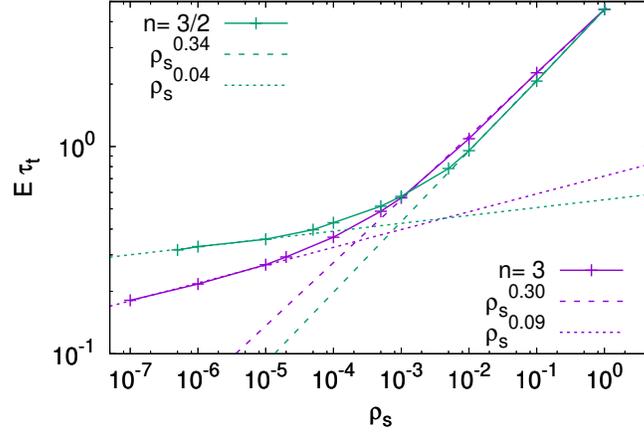


Figure 7.21: Durée de la phase transitoire (multipliée par le nombre d’Ekman) $E\tau_t$ en fonction du rapport de densité $\rho_s = \rho_{\text{surf}}/\rho_{\text{core}}$ pour des modèles avec $E = 10^{-6}$, pour plusieurs valeurs de ρ_s , $n = 3/2$ et $n = 3$. Les traits pointillés correspondent aux fits de cette durée avec ρ_s . Source : [Gagnier & Rieutord \(2020\)](#).

et $\rho_s = \rho_*(R)/\rho_c$ est le rapport de densité. Notons qu’un profil de densité similaire est utilisé dans les simulations numériques de convection dans les enveloppes stellaires ([Raynaud *et al.*, 2018](#)) ou d’atmosphères planétaires ([Gastine & Wicht, 2012](#)).

7.5.2 L’écoulement transitoire

Une nouvelle fois, concentrons nous, pour commencer, sur la phase transitoire précédant l’établissement d’un état stationnaire. Dans cette section, nous cherchons à déterminer si l’échelle de temps τ_t est modifiée par les variations de densité imposées. Encore une fois, nous mesurons la durée de la phase transitoire comme étant le temps au bout lequel la différence relative entre le couple exercé par le fluide sur la coquille interne et le couple appliqué sur la coquille externe, est inférieure à 0.01% (voir Sect. 7.3.1). Nous suivons l’évolution de la différence relative entre les couples $\Delta\Gamma/\Gamma(1)$ donnée par (7.32) pour différents rapports de densité encore coquilles interne et externe. Nous représentons les durées de la phase transitoire en figure 7.21 pour les indices polytropiques $n = 3$ et $n = 3/2$. Ce dernier indice correspond au cas d’un gaz monatomique isentropique, donc à une stratification thermique neutre. Nous notons que le temps nécessaire pour atteindre un état stationnaire dépend du rapport de densité entre le cœur et la surface. Pour l’indice polytropique $n = 3$, pertinent à l’enveloppe radiative des étoiles massives, nous trouvons $E\tau_t \propto \rho_s^{0.3}$ pour $10^{-3} \leq \rho_s$, et $E\tau_t \propto \rho_s^{0.09}$ pour $\rho_s < 10^{-4}$. Bien entendu, ces lois de puissance dépendent du profil

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

de densité choisi, comme nous pouvons le voir dans le cas $n = 3/2$. Contrairement à la stratification thermique, la stratification en densité influence donc (légèrement) le temps nécessaire pour atteindre un état stationnaire dans une enveloppe stellaire.

7.5.3 L'écoulement stationnaire

Concentrons nous maintenant sur l'étude de l'écoulement stationnaire. Notons que si l'on néglige à la fois la viscosité, les non-linéarités, et la flottabilité, alors l'écoulement stationnaire satisfait un théorème de Taylor-Proudman appliqué à la quantité de mouvement plutôt qu'à la vitesse, c'est-à-dire

$$(\mathbf{e}_z \cdot \nabla)\rho\mathbf{u} = \mathbf{0} . \quad (7.125)$$

Dans l'approximation anélastique, la force visqueuse contient des termes dépendant de la distance radiale $r = \sqrt{s^2 + z^2}$ rendant l'équation différentielle permettant d'obtenir une solution analytique pour l'écoulement géostrophique non-séparable. Il nous est donc impossible de réitérer l'analyse de couche limite faite dans le cas d'un écoulement incompressible. Nous pouvons cependant observer que, puisque les variations de densité n'ajoutent pas de nouvelle échelle de longueur, l'équilibre visqueux dans les couches de cisaillement reste inchangé, et nous pouvons donc nous attendre à la présence d'une couche de Stewartson le long du cylindre tangent.

Nous résolvons (7.1) avec la condition aux limites (7.6), et introduisons la fonction de courant χ associée à la quantité de mouvement méridien, à savoir

$$\frac{\partial\chi}{\partial r} = r \sin\theta\rho u_\theta, \quad \frac{\partial\chi}{\partial\theta} = -r^2 \sin\theta\rho u_r . \quad (7.126)$$

Fig. 7.22 représente une vue méridienne de la circulation méridienne et de la rotation différentielle dans le repère en rotation avec la coquille interne, pour $E = 10^{-7}$. Nous remarquons que comme pour l'écoulement incompressible, l'écoulement méridien est dominé par la contribution de la couche de Stewartson située le long du cylindre tangent \mathcal{C} . Comme prévu, la rotation différentielle, n'est en revanche plus cylindrique et est maintenant très dépendante de la coordonnée z . Pour illustrer cette caractéristique de l'écoulement, nous représentons la rotation différentielle en fonction de la coordonnée radiale cylindrique pour $E = 10^{-7}$ à différents rayons r en Fig. 7.23a. Enfin, nous montrons que la quantité de mouvement satisfait le théorème de Taylor-Proudman (7.125) en représentant cette quantité en fonction de la coordonnée radiale cylindrique en Fig. 7.23b.

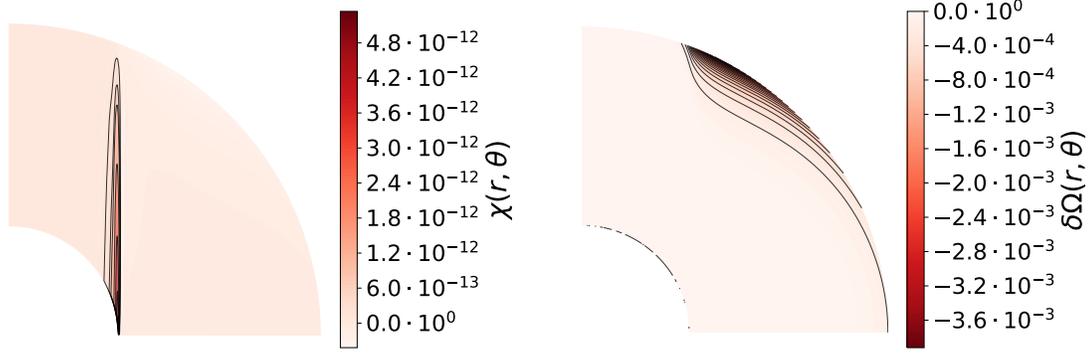


Figure 7.22: Vue méridienne de la fonction de courant χ (gauche) et de la rotation différentielle dans le repère en rotation avec la coquille interne $\delta\Omega = (\Omega - \Omega_c)/2\Omega_c$ (droite), pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, $\rho_s = 10^{-4}$, et $A = 0.01$. Source : [Gagnier & Rieutord \(2020\)](#).

En ce qui concerne la circulation méridienne, il s'agit toujours d'un écoulement d'amplitude $O(E)$ hors de la couche de Stewartson, comme le montrent les Fig. 7.24a et 7.25a. Nous notons cependant que hors de cette couche et hors du cylindre tangent \mathcal{C} , les lignes de courant ne sont plus des lignes droites, même pour le champ de quantité de mouvement $\mathbf{q} = \rho\mathbf{u}$. En revanche, dans le cylindre tangent et près de l'axe de rotation, nous retrouvons encore des lignes de courant parallèles à l'axe de rotation. Cette dernière caractéristique vient du fait que la couche d'Ekman a la même structure que dans le cas d'une densité constante et génère une circulation d'Ekman qui a une composante parallèle à l'axe de rotation unique. En effet, d'après (7.71),

$$q_z = -\frac{EK\rho_s}{\sqrt{1-s^2}} \left(1 + \frac{1}{1-s^2}\right) + O(E^2)$$

dans cette région.

Enfin, la couche de Stewartson semble conserver sa structure lorsque l'on s'intéresse à la quantité de mouvement, comme le montre la figure 7.26. Ainsi, l'échelle dominante reste $E^{1/3}$.

7.5.4 En résumé

L'enveloppe radiatives des étoiles massives présente une forte variation de densité entre le cœur convectif et la surface, ce qui rend les approximations incompressible et de Boussinesq trop restrictives. Ainsi, dans cette section, nous nous sommes focalisés

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

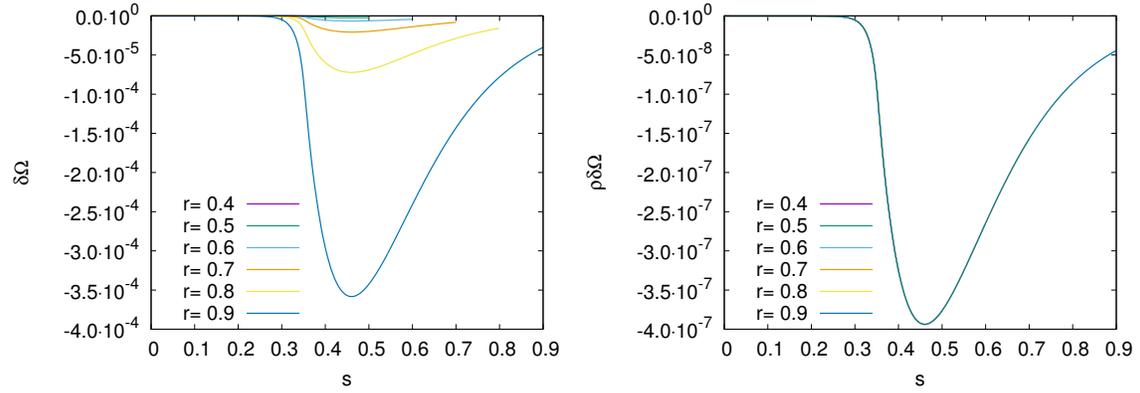


Figure 7.23: Vitesse angulaire normalisée (gauche) et vitesse angulaire normalisée multipliée par la densité ρ (droite), en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, $\rho_s = 10^{-4}$, $A = 0.01$, et à plusieurs rayons r . Source : Gagnier & Rieutord (2020).

sur l'étude de l'écoulement anélastique en imposant un profil radial de densité. Au vu des conclusions de la section précédente, nous avons négligé la stratification thermique, et nous avons décrit le gaz dans l'enveloppe stellaire par une équation d'état polytropique d'indice polytropique $n = 3$. Nous avons constaté que l'amplitude de l'écoulement méridien hors et dans la couche de Stewartson est inchangé par rapport à l'écoulement incompressible, c'est-à-dire qu'il est d'ordre $O(E)$ à l'extérieur et $O(E^{1/3})$ à l'intérieur de celle-ci. En revanche, la structure de l'écoulement hors couche de Stewartson est modifiée, en particulier hors du cylindre tangent à la coquille interne où l'écoulement ne satisfaisant plus le théorème de Taylor-Proudman dans sa forme standard, et est donc très dépendant de la coordonnée z .

7.6 Transport d'un scalaire passif

Nous avons montré, dans les sections précédentes, que le temps d'advection associé au transport des éléments chimiques par advection dans la couche de Stewartson, varie comme $E^{-2/3}$, et qu'il est ainsi probablement plus court que la durée de vie des étoiles massives. Aussi, ni la stratification thermique stable de l'enveloppe radiative, ni sa stratification en densité ne peuvent empêcher la formation de la couche de Stewartson. La stratification thermique peut en effet être négligée au vu de la petitesse du nombre de Prandtl dans les intérieurs stellaires, et les variations radiales de densité n'ont que peu d'effet sur le flux de masse essentiellement parallèle à l'axe de rotation dans cette couche, précisément car ce sont des variations à grande échelle. Il est

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

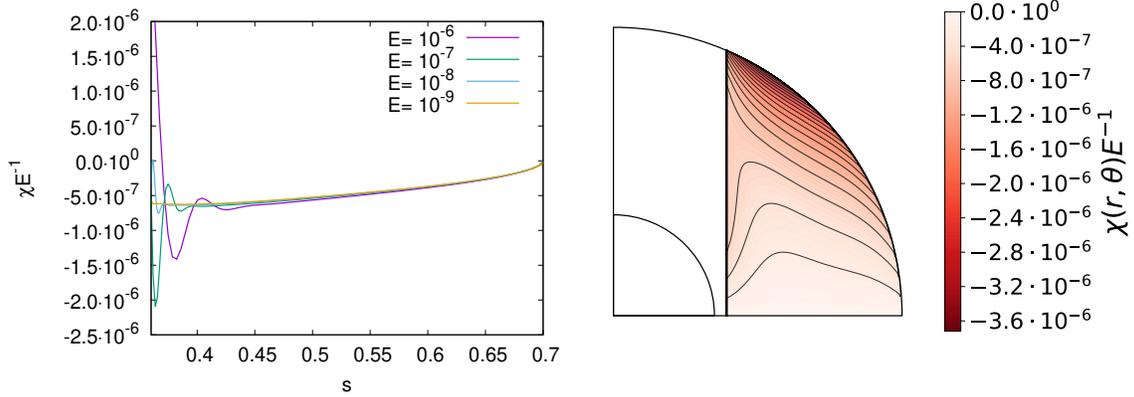


Figure 7.24: Gauche : χE^{-1} en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour différents nombres d’Ekman, $\eta = 0.35$, $r = 0.7$, $\rho_s = 10^{-4}$, et $A = 0.01$. L’amplitude prédite de l’écoulement méridien d’ordre $O(E)$ est vérifiée hors de la couche de Stewartson. Droite : vue méridienne de la fonction de courant χE^{-1} hors du cylindre tangent \mathcal{C} , pour le modèle avec $E = 10^{-9}$. Source : [Gagnier & Rieutord \(2020\)](#).

maintenant important de déterminer comment ce transport advectif se compare au transport diffusif des éléments chimiques. En particulier, il est légitime de se demander si le mélange rotationnel dans l’enveloppe des étoiles massives soumises à un vent radiatif peut être modélisé comme un processus purement diffusif, même en l’absence de turbulence anisotrope ([Chaboyer & Zahn, 1992](#)). Obtenir une réponse définitive à cette question à l’aide de nos modèles simplifiés n’est cependant pas envisageable. Nous pouvons tout de même explorer le problème afin de percevoir les difficultés numériques auxquelles nous devons faire face dans le cadre d’une étude plus poussée, et de développer une intuition sur l’importance de la couche de Stewartson vis-à-vis du mélange rotationnel.

Dans cette section, nous résolvons, en plus du système d’équations (7.1), l’équation d’advection-diffusion d’un scalaire passif sans dimension $c(r, \theta)$ pouvant représenter, par exemple, la concentration d’une espèce chimique quelconque. Parce que nous avons vu que les stratifications en température et en densité ne modifient pas la manière dont l’amplitude du champ de vitesse varie avec le nombre d’Ekman, nous considérerons un écoulement incompressible. L’équation d’advection-diffusion d’un scalaire passif s’écrit

$$\frac{\partial c}{\partial t_*} + (\mathbf{u}_* \cdot \nabla) c = \kappa_c \Delta c, \quad (7.127)$$

où κ_c est le coefficient de diffusion du scalaire passif. Evidemment, nous ne pouvons

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

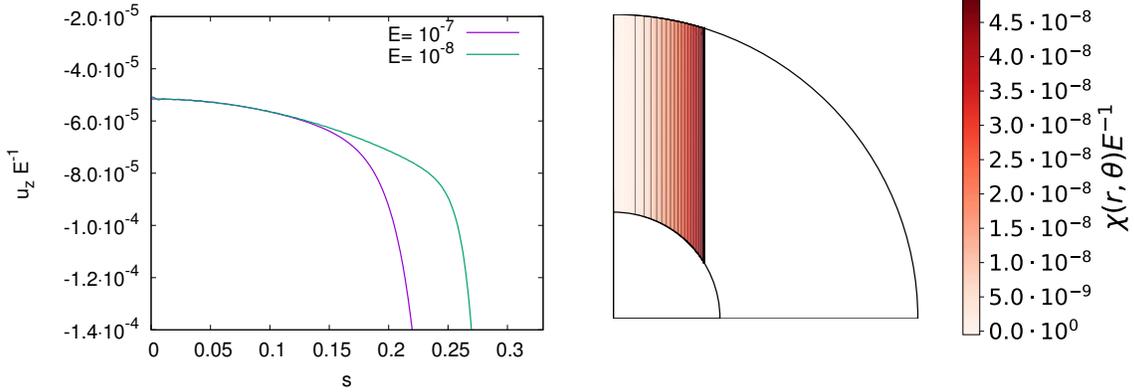


Figure 7.25: Gauche : $u_z E^{-1}$ en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour différents nombres d’Ekman, $\eta = 0.35$, $r = 0.7$, $\rho_s = 10^{-4}$, et $A = 0.01$. Droite : vue méridienne de la fonction de courant χ dans le cylindre tangent \mathcal{C} et hors de la couche de cisaillement d’épaisseur $O(E^{2/7})$, pour le modèle avec $E = 10^{-9}$. Source : Gagnier & Rieutord (2020).

pas négliger le terme d’advection $F_{nl}(r, \theta) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)c$; la difficulté principale de ce nouveau problème réside ainsi essentiellement dans le traitement numérique de ce terme qui, *a priori*, nous empêche d’écrire le système d’équations à résoudre sous la forme

$$A\mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad (7.128)$$

où A est la matrice contenant les opérateurs différentiels linéaires, \mathbf{X} est le vecteur contenant tous les coefficients spectraux, et \mathbf{B} est le vecteur contenant les seconds membres des équations différentielles.

Une nouvelle fois, nous utilisons R comme échelle de longueur et $(2\Omega_c)^{-1}$ comme échelle de temps. L’équation sans dimension d’advection-diffusion du scalaire passif s’écrit alors

$$\frac{\partial c}{\partial t} + f_{nl}(r, \theta) = \frac{E}{Sc} \Delta c, \quad (7.129)$$

où $f_{nl}(r, \theta) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)c$, et

$$Sc = \frac{\nu}{\kappa_c} \quad (7.130)$$

est le nombre de Schmidt. Nous projetons maintenant (7.129) sur la base des harmoniques sphériques. Il vient

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

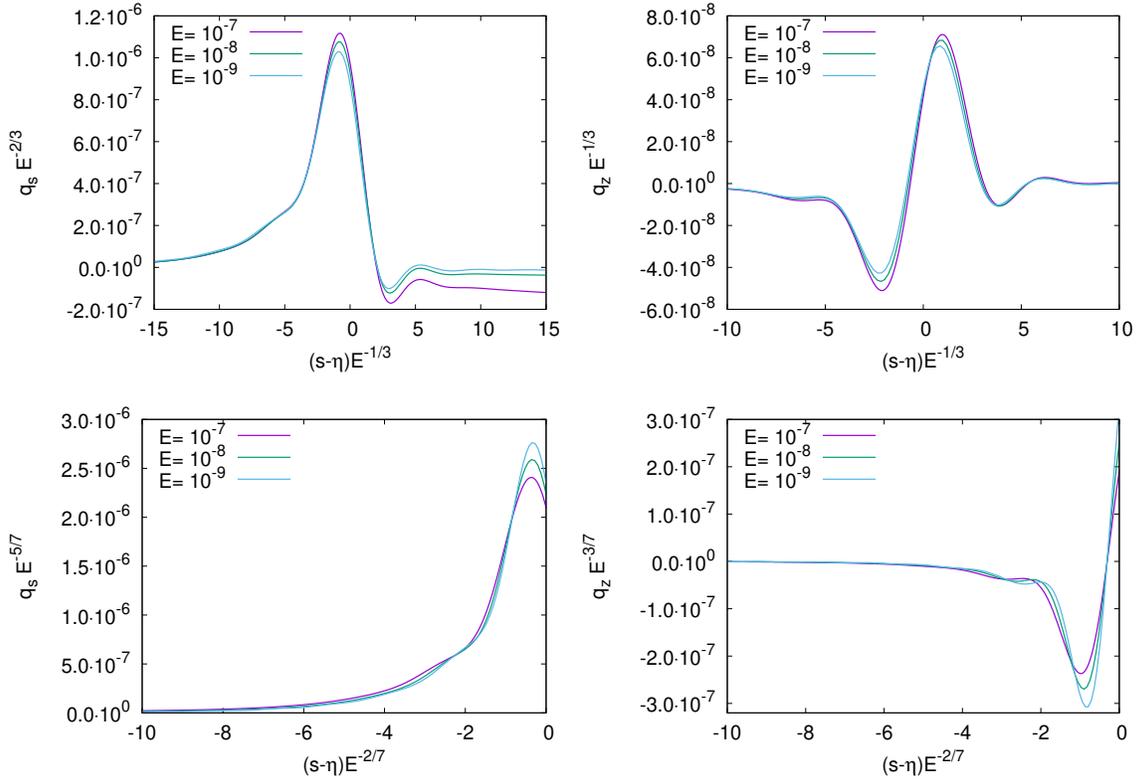


Figure 7.26: Haut : $q_s E^{-2/3}$ (gauche) et $q_z E^{-1/3}$ (droite) en fonction de la coordonnée radiale cylindrique étirée $(s - \eta)E^{-1/3}$ pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, $z = 0.7$, et $A = 0.01$. Bas : $q_s E^{-5/7}$ (gauche) et $q_z E^{-3/7}$ (droite) en fonction de la coordonnée radiale cylindrique étirée $(s - \eta)E^{-2/7}$ pour les mêmes modèles. Source : Gagnier & Rieutord (2020).

$$\frac{\partial c^l}{\partial t} + f_{\text{nl}}^l = \frac{E}{\text{Sc}} \left(\Delta_r - \frac{\Lambda}{r^2} \right) c^l, \quad (7.131)$$

où nous avons utilisé la projection de l'opérateur laplacien sur la base des harmoniques sphériques (H.11) et

$$c(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} c^l(r) Y_l(\theta). \quad (7.132)$$

La projection du terme d'advection s'écrit simplement

$$f_{\text{nl}}^l(r) = \sqrt{(2l + 1)\pi} \mathcal{L}_l f_{\text{nl}}(r, \theta), \quad (7.133)$$

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

où \mathcal{L}_l est l'opérateur linéaire de transformation de Legendre à l'ordre l (voir Annexe H.2). Ainsi, pour résoudre (7.131), il faut pouvoir évaluer la fonction définie dans l'espace réel $f_{nl}(r, \theta)$. Pour cela, nous utilisons un schéma temporel semi-implicite permettant de traiter ce terme d'advection de manière explicite, et les autres termes de manière implicite. Commençons simplement par adopter une méthode d'Euler progressive pour le terme d'advection, et une méthode d'Euler régressive pour le terme de diffusion. L'équation (7.131) est alors discrétisée temporellement comme suit

$$\left[c^l(r) - \Delta t F(r) \right]^{n+1} = \left[c^l(r) - \Delta t f_{nl}^l(r) \right]^n, \quad (7.134)$$

où n est le $n^{\text{ième}}$ pas de temps Δt , et

$$F(r) = \frac{E}{Sc} \left(\Delta_r - \frac{\Lambda}{r^2} \right) c^l. \quad (7.135)$$

Ainsi, le terme d'advection du scalaire passif est évalué dans l'espace réel par transformation de Legendre inverse du champ de vitesses, puis est projeté dans l'espace spectral par transformation de Legendre. Le traitement du terme d'advection du scalaire passif fait déjà apparaître une difficulté numérique. En effet, à chaque pas de temps, deux transformations, numériquement coûteuses, entre les deux représentations (espaces réel et spectral) sont nécessaires. Pour ce qui est des conditions aux limites, nous choisissons les conditions de Neumann

$$\left. \frac{dc}{dr} \right|_{r=1} = \left. \frac{dc}{dr} \right|_{r=\eta} = 0, \quad (7.136)$$

telles que l'intégrale volumique de c soit conservée (ce que nous vérifions à chaque pas de temps), et imposons arbitrairement un profil radial initial gaussien et centré en η pour le scalaire passif

$$c(r, \theta, t = 0) = \exp \left(-\frac{(r - \eta)^2}{2\sigma^2} \right) + 1, \quad (7.137)$$

où l'écart type σ est choisi tel que la largeur à mi-hauteur de la gaussienne est égale à 0.1, c'est à dire $\sigma = (20\sqrt{\ln 4})^{-1}$. Le profil initial $c(r, t = 0)$ étant choisi purement radial, sa projection sur la base des harmoniques sphériques s'écrit simplement

$$c(r, \theta, t = 0) = c^0(r, t = 0) Y_0, \quad (7.138)$$

où

$$c^0(r, t = 0) = \sqrt{4\pi} \left[\exp \left(-\frac{(r - \eta)^2}{2\sigma^2} \right) + 1 \right]. \quad (7.139)$$

Nous représentons une vue méridienne du scalaire passif où nous superposons les lignes de courant associées à l'écoulement méridien, pour un modèle avec $E = 10^{-4}$, $Sc = 1$, $A = 0.01$, et à différents temps, en Fig. 7.27. Nous voyons que pour ce modèle, la diffusion domine complètement le transport du scalaire passif, son advection par la circulation méridienne ne joue pratiquement aucun rôle. Nous illustrons cette caractéristique en représentant les profils latitudinaux du scalaire passif à $r = (1 - \eta)/2$ et à différents temps pour ce modèle, en Fig. 7.28. Nous remarquons en effet que pour une telle combinaison des nombres de Schmidt et d'Ekman et pour une telle amplitude de la contrainte horizontale imposée, le scalaire passif est uniquement fonction de la coordonnée radiale, indiquant un transport purement diffusif au premier ordre et ce même lorsque la couche de Stewartson est en place.

Intéressons nous maintenant au cas où $Sc = 10^2$, $E = 10^{-4}$, et $A = 0.01$, donc pour une amplitude réduite du terme diffusif. Nous voyons en Fig. 7.29 que le transport du scalaire passif n'est plus purement radial. En effet, bien que sa diffusion domine toujours, le scalaire passif tend à se concentrer dans la couche de Stewartson (dès qu'elle est présente) où il est advecté dans la direction z . Lorsque le champ de vitesses atteint un état stationnaire (i.e., à $t_* \simeq 1.5 \cdot 10^4 \Omega_c^{-1}$), le scalaire passif est presque entièrement mélangé, à l'exception d'une légère surdensité dans la couche de Stewartson et à son intersection avec la coquille externe, c'est-à-dire proche de la colatitude $\theta = \arcsin(\eta)$. Nous illustrons la présence de cette surdensité et donc du transport bi-dimensionnel résultant du terme advectif, en représentant les profils latitudinaux du scalaire passif à $r = (1 - \eta)/2$ et à différents temps pour ce modèle en Fig. 7.30.

Notons qu'une seconde difficulté numérique apparaît lorsque l'on augmente le nombre de Schmidt, ou plus précisément lorsque l'on augmente la contribution du terme advectif au transport du scalaire passif. En effet, si l'on considère le cas extrême $Sc \rightarrow \infty$, l'équation de transport du scalaire passif devient une équation d'advection quasi-pure et le problème devient celui de la propagation d'un "front", donc de la propagation d'une discontinuité (ou d'un fort gradient de c). Parce que les méthodes spectrales consistent en la représentation des fonctions par un développement en séries tronquées, cette discontinuité entraîne l'apparition d'oscillations de Gibbs (voir Gibbs, 1898; Boyd, 2001; Gottlieb & Gottlieb, 2005; Canuto *et al.*, 2006) qui peut rendre le schéma temporel instable. Ce problème peut potentiellement être résolu de plusieurs manières. La première est d'utiliser un schéma à pas multiples de type

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

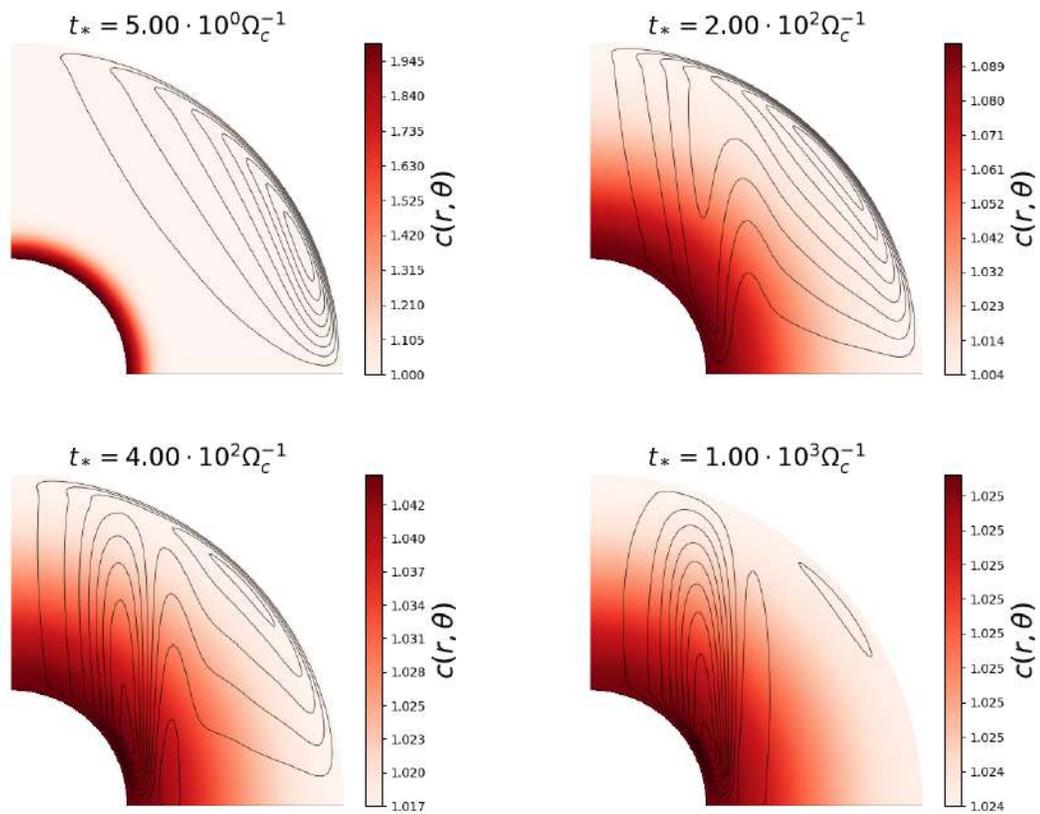


Figure 7.27: Vue méridienne du scalaire passif et des lignes de courant associées à l'écoulement méridien, pour un modèle avec $E = 10^{-4}$, $Sc = 1$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$ et à différents temps.

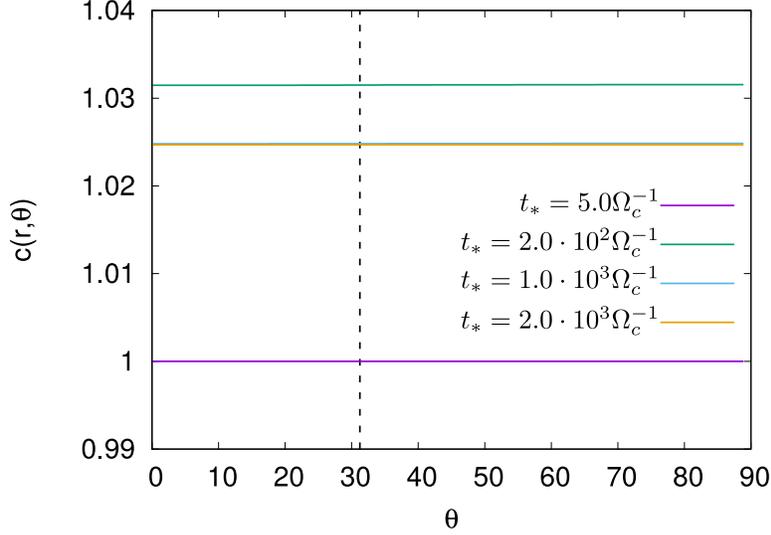


Figure 7.28: Profils latitudinaux du scalaire passif à $r = (1 - \eta)/2$, pour un modèle avec $E = 10^{-4}$, $Sc = 1$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$ et à différents temps. La ligne en traits pointillés indique la position de la tangente à la coquille interne et à l'équateur.

Adams-Bashforth pour le terme d'advection. Ce type de schéma numérique permet d'évaluer les dérivées à l'aide des N pas de temps précédents, où N est l'ordre du schéma, ce qui améliore considérablement la précision. L'implémentation de ce schéma numérique ne nous a cependant pas permis de dépasser un nombre de Schmidt de 10^2 pour $E = 10^{-4}$ et $A = 0.01$. Une deuxième solution consiste à résoudre le problème des oscillations de Gibbs en utilisant des techniques de filtrage, de détection des singularités et de reconstruction spectrale. Enfin, les algorithmes semi-lagrangiens sont très efficaces pour résoudre les "fronts", sont inconditionnellement stables, et sont explicites. Cependant, ils nécessitent, à chaque pas de temps, d'interpoler la fonction considérée entre les points de grille de collocation. L'implémentation de chacune de ces deux dernières méthodes n'est évidemment pas triviale et ne sera pas traitée dans ce manuscrit.

Bien sûr, ces deux résultats ne sont pas applicables à l'enveloppe radiative des étoiles massives au vu de la valeur du nombre d'Ekman choisi et du choix arbitraire de l'amplitude de la contrainte. Aussi, à ce stade, il est intéressant de se demander dans quel régime du nombre de Schmidt se situent les intérieurs stellaires. Dans l'enveloppe des étoiles massives, la viscosité radiative domine largement celle d'origine collisionnelle, et une valeur typique est $\nu \simeq 10^4 \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (Espinosa Lara & Rieutord, 2013). Si l'on considère que notre scalaire passif est une concentration d'Helium produit dans le cœur convectif d'une étoile massive durant la séquence principale, alors

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

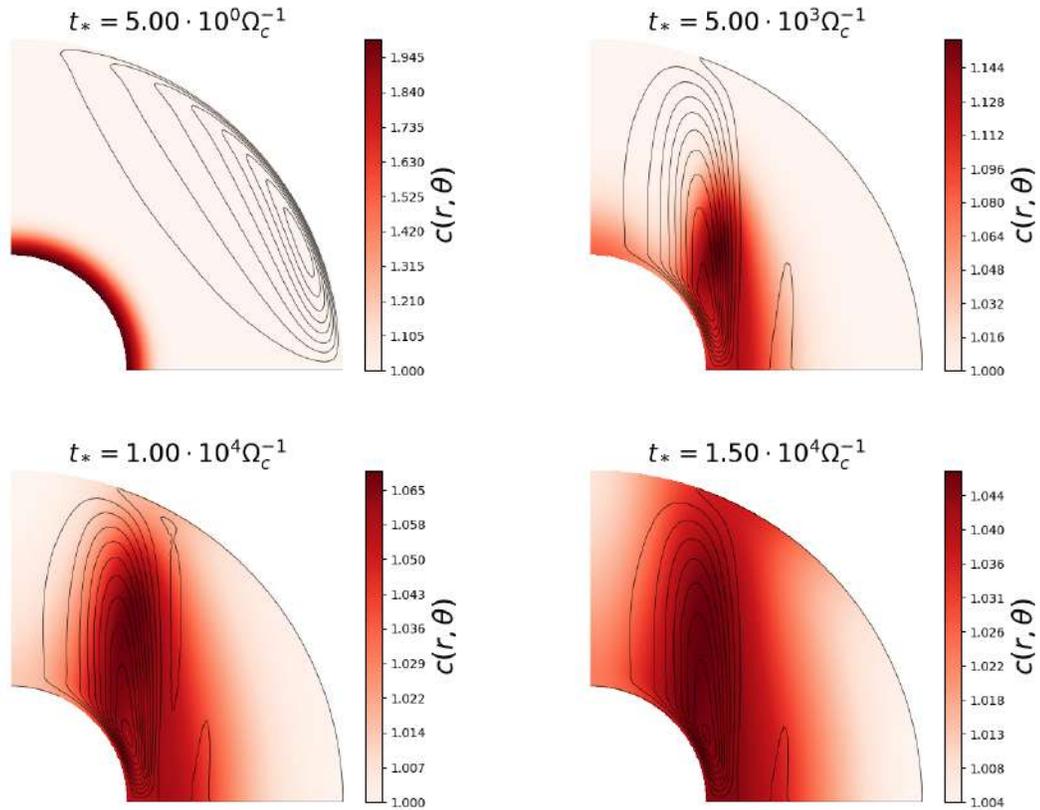


Figure 7.29: Vue méridienne du scalaire passif et des lignes de courant associées à l'écoulement méridien, pour un modèle avec $E = 10^{-4}$, $Sc = 10^2$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$ et à différents temps. Le champ de vitesses atteint un état stationnaire à $t \simeq 1.5 \cdot 10^4 \Omega_c^{-1}$.

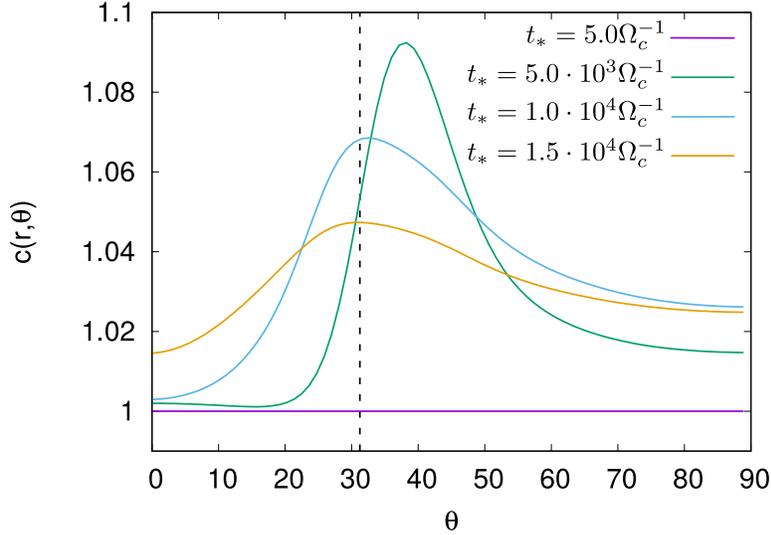


Figure 7.30: Profils latitudinaux du scalaire passif à $r = (1 - \eta)/2$, pour un modèle avec $E = 10^{-4}$, $Sc = 10^2$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$ et à différents temps. La ligne en traits pointillés indique la position de la tangente à la coquille interne et à l'équateur.

$\kappa_{He} \simeq 10^4 \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ est une valeur réaliste pour son coefficient de diffusion (Richer *et al.*, 2000). Ainsi, le nombre de Schmidt est typiquement de l'ordre de 1 dans l'enveloppe des étoiles massives. Bien sûr, si l'écoulement dans l'enveloppe est entièrement turbulent par instabilité de cisaillement de la rotation différentielle, alors la valeur de la viscosité cinématique est modifiée. Cependant, du moins si l'on considère une turbulence isotrope, la viscosité turbulente est de l'ordre du coefficient de diffusion turbulente d'un traceur passif ($\nu_{\text{turb}} \simeq \kappa_{\text{turb}}$, voir Sect. 6.5.1 et Prat *et al.*, 2016; Garaud *et al.*, 2017), ce qui indique une nouvelle fois que $Sc \simeq 1$. Ainsi, une combinaison réaliste des nombres d'Ekman et de Schmidt est $E = 10^{-18} - 10^{-12}$ et $Sc = 1$. Des modèles avec de telles valeurs du nombre d'Ekman ne peuvent cependant pas être considérés car la résolution des couches limites d'Ekman et de la couche de Stewartson serait bien trop coûteuse numériquement. Nous pouvons tout de même nous demander la manière dont le rapport des contributions du transport advectif et du transport diffusif dépend des nombres sans dimension contrôlant la dynamique de l'écoulement, dans la limite asymptotique $E \rightarrow 0$. Tout d'abord, rappelons que hors des couches limites et hors de la couche de Stewartson, l'amplitude de la vitesse méridienne varie comme le nombre d'Ekman (voir Sect. 7.3.2). En réalité, elle dépend aussi de l'amplitude de la contrainte horizontale imposée sur la coquille externe (et de la densité de surface dans le cas où l'écoulement est stratifié en densité), c'est-à-dire $u_{r,\theta} = O(AE)$ (voir Eq. 7.40 et Annexe E). Ainsi, hors des couches limites et hors de la couche de Stewartson, le rapport d'amplitude entre le terme d'advection du

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

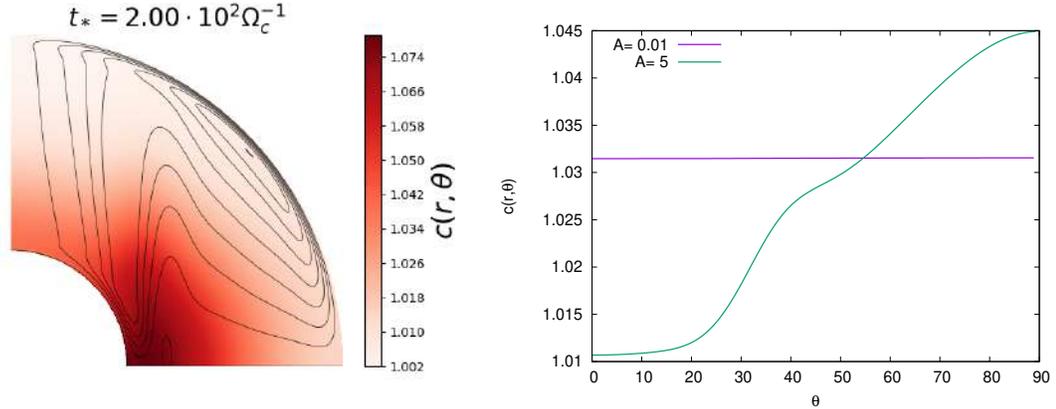


Figure 7.31: Gauche : vue méridienne du scalaire passif et des lignes de courant associées à l'écoulement méridien, pour un modèle avec $E = 10^{-4}$, $Sc = 10^0$, $\eta = 0.35$, $A = 5$ et à $t_* = 2 \cdot 10^2 \Omega_c^{-1}$. Droite : Profils latitudinaux du scalaire passif à $r = (1-\eta)/2$ à $t_* = 2 \cdot 10^2 \Omega_c^{-1}$ et pour $A = 0.01$ et $A = 5$.

scalaire passif et le terme associé à sa diffusion, ne dépend pas du nombre d'Ekman² mais uniquement du nombre de Schmidt, de l'amplitude de la contrainte imposée, et du profil initial du scalaire passif (et de la densité de surface). Nous illustrons l'importance de l'amplitude de la contrainte en représentant une vue méridienne du scalaire passif pour un modèle avec $E = 10^{-4}$, $Sc = 1$, et $A = 5$ en Fig. 7.31a, et les profils latitudinaux à $t_* = 2 \cdot 10^2 \Omega_c^{-1}$ pour $A = 0.01$ et $A = 5$ en Fig. 7.31b. Ainsi, si l'on considère un nombre de Schmidt de 1, et une amplitude de la contrainte $A \ll 1$ (ou $A\rho_s \ll 1$), nous pouvons nous attendre à ce que le transport diffusif domine le transport advectif hors couche de Stewartson, et à ce qu'ils évoluent tous deux sur une échelle de temps visqueuse.

Nous avons vu, en Sect. 7.3.2, que l'amplitude de la circulation méridienne est maximale dans la couche de Stewartson, avec $u_z = O(E^{1/3})$ dans la couche d'épaisseur $O(E^{1/3})$ lorsque celle-ci est entièrement développée (voir Sect. 7.3.2), c'est-à-dire en un temps $O(E^{-1/3})$. Une nouvelle fois, l'amplitude de l'écoulement dans cette couche dépend aussi de l'amplitude de la contrainte, c'est-à-dire $u_z = O(AE^{1/3})$. Rappelons que dans cette même couche, $u_s = O(AE^{2/3})$. Introduisons maintenant la coordonnée radiale cylindrique étirée d'ordre $O(1)$ dans la couche de Stewartson d'épaisseur $O(E^{1/3})$, $\xi = E^{-1/3}(s - \eta)$. Ainsi, au bout d'un temps $O(E^{-1/3})$, la couche de Stewartson d'épaisseur $O(E^{1/3})$ est entièrement développée et dans celle ci, (7.129) peut

2. Le nombre d'Ekman joue en réalité un rôle car il contrôle le temps nécessaire au développement des couches d'Ekman, donc le temps au bout duquel l'advection du scalaire passif se met en place.

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT
RADIATIF

être réécrite, à l'ordre le plus bas,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_s E^{-1/3} \frac{\partial c}{\partial \xi} + u_z \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{E^{1/3}}{Sc} \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}. \quad (7.140)$$

Dans cette couche, le rapport d'amplitude entre le terme d'advection du scalaire passif et le terme associé à sa diffusion ne dépend donc pas non plus du nombre d'Ekman, et nous pouvons nous attendre à ce que le transport diffusif domine le transport advectif dans la couche de Stewartson lorsque $A \ll 1$ et $Sc = 1$, et lorsque celle-ci est entièrement développée. Nous représentons une vue méridienne du scalaire passif où nous superposons les lignes de courant associées à l'écoulement méridien ainsi que les profils latitudinaux à $r = (1 - \eta)/2$, pour un modèle avec $E = 10^{-7}$, $Sc = 1$, $A = 0.01$, et à différents temps, en Figs. 7.32 et 7.33 respectivement. Nous constatons, une nouvelle fois, un transport quasi-exclusivement diffusif du fait de l'indépendance du rapport d'amplitude entre terme advectif et diffusif avec le nombre d'Ekman. Rappelons cependant que le nombre d'Ekman contrôle le temps nécessaire au développement de la couche de Stewartson, et influe donc sur le profil de c au moment où l'écoulement d'amplitude $O(E^{1/3})$ se met en place. Enfin rappelons que dans le cas d'un écoulement de Taylor-Couette où l'on impose une condition de non-glissement sur la coquille externe, l'amplitude de la vitesse dans la direction z et dans la couche de Stewartson $E^{1/3}$ est $O(E^{1/6})$, et l'amplitude de la vitesse dans la direction radiale cylindrique est $O(\sqrt{E})$ (voir Eq. 6.66). Dans ce cas, l'amplitude du terme d'advection du scalaire passif dans cette couche est $O(E^{1/6})$ tandis que l'amplitude du terme diffusif est $O(E^{1/3})$. Dans une telle configuration, nous pouvons imaginer que le transport du scalaire passif se fasse par un processus essentiellement advectif dans la limite asymptotique des petits nombres d'Ekman (et pour un écart des vitesses angulaires $\Delta\Omega = |\Omega_s - \Omega_c|$ suffisamment petit pour que l'approximation linéaire soit justifiée, mais suffisamment grand pour que $\Delta\Omega E^{1/6} \gg E^{1/3}$). C'est aussi ce que l'on trouve hors de la couche de Stewartson avec un terme advectif d'amplitude $O(\sqrt{E})$ et un terme diffusif d'amplitude $O(E)$. La modélisation d'un tel transport dominé par l'advection nécessiterait cependant l'implémentation d'une méthode numérique adaptée.

Ainsi nous notons une nouvelle fois que les conditions aux limites jouent un rôle crucial sur l'amplitude de l'écoulement dans la couche de Stewartson et que leur choix peut dicter le processus de mélange dominant, qu'il soit de nature advective ou diffusive. L'apparition d'un saut de bi-stabilité favorisant largement le flux de masse dans les régions équatoriales à la surface des étoiles massives, les phases de contraction et d'expansion, ou encore, par exemple, l'existence d'un champ magnétique fossile en surface, peuvent dramatiquement modifier la manière dont l'écoulement de spin-up ou

CHAPITRE 7. ÉCOULEMENT DE SPIN-DOWN GÉNÉRÉ PAR UN VENT RADIATIF

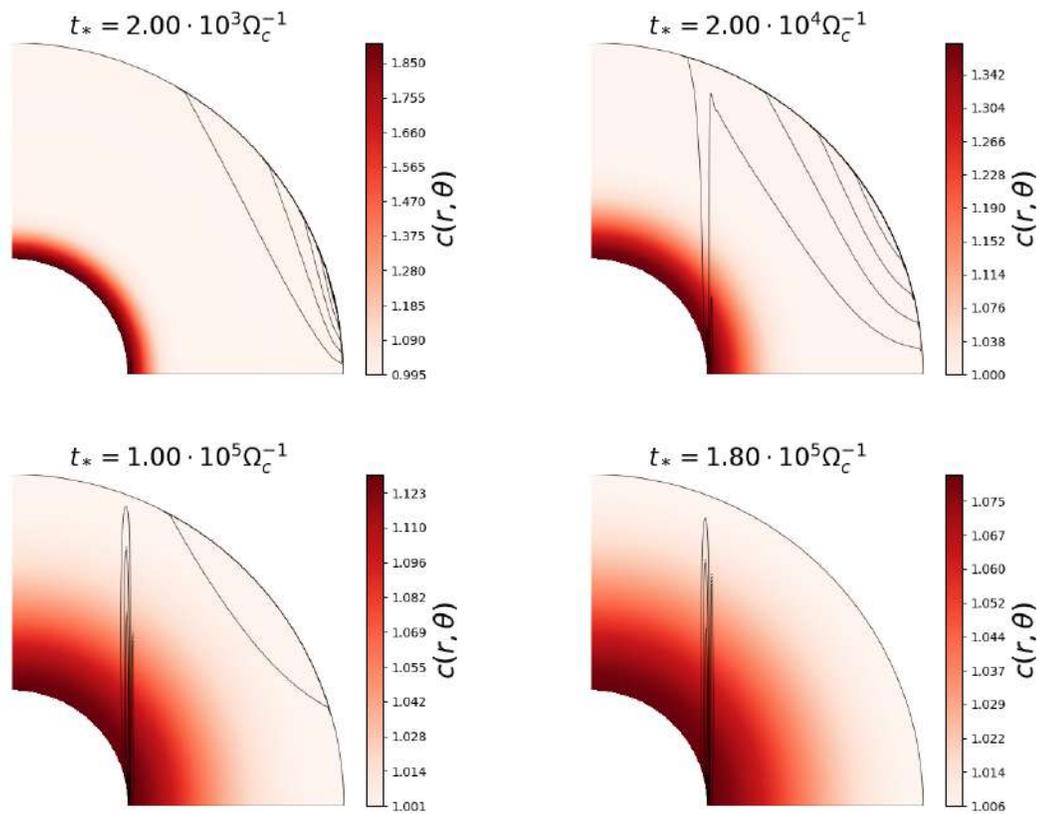


Figure 7.32: Vue méridienne du scalaire passif et des lignes de courant associées à l'écoulement méridien, pour un modèle avec $E = 10^{-7}$, $Sc = 10^0$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$ et à différents temps.

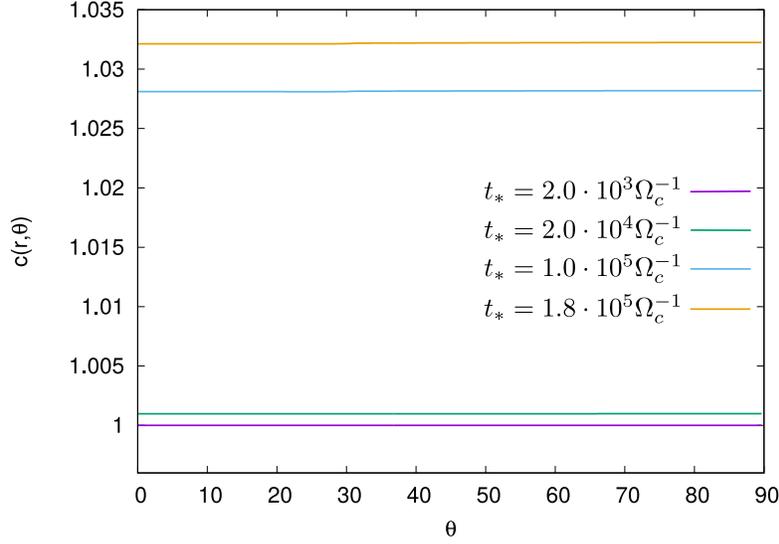


Figure 7.33: Profils latitudinaux du scalaire passif à $r = (1 - \eta)/2$, pour un modèle avec $E = 10^{-7}$, $Sc = 1$, $\eta = 0.35$, $A = 0.01$ et à différents temps. La ligne en traits pointillés indique la position de la tangente à l'équateur de la coquille interne.

de spin-down est généré au cours de la vie des étoiles. De plus, plusieurs phénomènes physiques comme l'apparition d'une barrière de poids moléculaire moyen à l'interface entre le cœur convectif et l'enveloppe radiative, ou la turbulence anisotrope associée à l'instabilité de cisaillement, peuvent empêcher la formation ou détruire la couche de Stewartson au profit d'un transport essentiellement diffusif³.

Nous ne pouvons donc évidemment pas apporter une réponse définitive au problème de la modélisation du mélange rotationnel dans l'enveloppe radiative des étoiles massives. Cette modélisation en tant que processus purement diffusif ou purement advectif dépend certainement des conditions de surface et donc de la phase évolutive de l'étoile considérée, de l'existence ou non d'un vent à sa surface, du régime auquel appartient ce vent, de l'existence d'un champ magnétique à sa surface, etc. Pour ce qui est de notre modèle linéaire simplifié d'écoulement de spin-down associé à une perte de masse isotrope à la surface d'une étoile massive sphérique, isolée et non magnétique, le processus de mélange dominant semble être la diffusion.

3. L'existence d'une barrière de poids moléculaire moyen peut, cependant, aussi inhiber le mélange diffusif (e.g. Talon & Zahn, 1997).

7.7 Résumé

Nous concluons ce chapitre en résumant brièvement les résultats qui y ont été présentés. L'un des principaux est que la couche Stewartson joue un rôle clé dans le transport advectif des éléments chimiques produits dans le cœur convectif des étoiles massives, jusqu'à leur surface; l'échelle de temps d'advection étant $O(E^{1/3})$ fois plus courte que l'échelle de temps de spin-down. En effet, dans ce chapitre nous avons considéré un écoulement de spin-down induit par une contrainte horizontale, et nous avons trouvé que l'état stationnaire est atteint sur une échelle de temps visqueuse, qui est plus longue que la durée de vie de l'étoile. L'échelle de temps associée à la circulation méridienne dans la couche de Stewartson est elle beaucoup plus courte, et permet aux éléments chimiques produits dans le cœur convectif d'être transportés jusqu'à la surface de l'étoile, et d'y être potentiellement observables. Nous avons montré que ni la stratification thermique stable de l'enveloppe radiative, ni sa stratification en densité ne peuvent empêcher la formation de la couche de Stewartson. La stratification thermique peut en effet être négligée au vu de la petitesse du nombre de Prandtl dans les intérieurs stellaires, et les variations radiales de densité n'ont que peu d'effet sur le flux de masse essentiellement parallèle à l'axe de rotation dans cette couche, précisément car ce sont des variations à grande échelle. Enfin, notre exploration du problème du transport d'un scalaire passif suggère que l'importance relative du transport par advection et par diffusion dépend fortement des conditions aux limites choisies. En effet, tandis que dans notre configuration la diffusion est le processus de transport dominant, c'est certainement le transport par advection qui prévaut dans le cas d'un écoulement de Taylor-Couette sphérique où des conditions de non-glissement sont imposées au niveau de la coquille externe. Il est donc important de souligner que les variations des conditions à la surface des étoiles massives au cours de leur vie, pouvant par exemple être modélisées par une condition de glissement sans frottement pour une contraction/expansion (Hypolite & Rieutord, 2014), de non-glissement pour une couche limite supérieure turbulente traversée par un champ magnétique (Rieutord & Beth, 2014), ou par une contrainte horizontale imitant un flux de moment cinétique associé à un vent radiatif (Gagnier & Rieutord, 2020), peuvent entraîner une variation de la nature du transport dominant.

Chapitre 8

Conclusions et perspectives

L’objectif de ce travail de thèse a été d’étudier le rôle des vents radiatifs à la surface des étoiles de type précoce en rotation rapide, sur l’évolution de leur rotation sur la séquence principale, et sur leur dynamique interne.

L’étape préliminaire à ce travail fut de dériver une expression analytique pour la vitesse angulaire critique des étoiles massives, à la surface desquelles l’accélération radiative ne peut pas être négligée. L’objectif étant de clarifier la mesure de la distance à la criticité. En particulier, nous avons trouvé que cette vitesse critique est toujours atteinte à l’équateur en premier, est qu’elle est extrêmement proche de la vitesse angulaire képlérienne, du moins pour des étoiles massives de moins de $40 M_{\odot}$, et à métallicité solaire. La raison de cette proximité résulte de la faible contribution de l’accélération radiative à la gravité totale équatoriale, en raison à la fois d’une opacité réduite et d’un flux radiatif réduit à l’équateur. La réduction du flux radiatif, appelée assombrissement gravitationnel, est en réalité plus faible que ce que prévoit le modèle de von Zeipel. Ce dernier point est la principale différence entre l’étude menée dans ce manuscrit, et les recherches pionnières de [Maeder \(1999\)](#) et [Maeder & Meynet \(2000\)](#). La réduction de l’opacité équatoriale provient quant à elle de la diminution de la densité à l’équateur, en réponse au fort aplatissement de l’étoile proche de la limite képlérienne.

Nous avons ensuite entamé l’étude des vents radiatifs en présentant la problématique, et en définissant l’accélération radiative. En particulier, nous avons montré l’importance de la contribution de la diffusion des photons sur les raies spectrales quant à l’accélération du vent radiatif. Nous avons ensuite présenté la manière dont cette accélération radiative résultant de la contribution d’un grand nombre de raies spectrales, et dans une atmosphère en expansion, peut être modélisée. En utilisant cette modélisation, nous avons ensuite exposé la dérivation de l’expression du taux

de perte de masse global pour les modèles sans rotation, ainsi que les corrections permettant son évaluation plus précise. Nous avons ensuite présenté le concept de limite de bi-stabilité et décrit notre méthodologie pour estimer la dépendance en température des paramètres inconnus dans l'expression du taux de perte de masse global. Enfin, nous avons énoncé les limites de notre modélisation de la perte de masse à une dimension, au vu des hypothèses considérées, et des diagnostics X, UV et infrarouges.

Ayant pour objectif l'étude des vents radiatifs anisotropes, nous avons généralisé l'expression du taux de perte de masse global à son flux local, en faisant l'hypothèse que celui-ci garde les mêmes dépendances vis-à-vis des paramètres stellaires fondamentaux. A l'aide de modèles ESTER 2D, nous avons alors pu estimer la distribution surfacique des flux de masse et de moment cinétique, ainsi que leur dépendance vis-à-vis de la rotation stellaire. La température effective à la surface des étoiles en rotation pouvant couvrir une large gamme de valeurs entre les pôles et l'équateur, la discontinuité dans la relation $\dot{M}-T_{\text{eff}}$, associée à la limite de bi-stabilité, peut être atteinte à une certaine latitude de l'étoile. Nous avons donc montré que le vent stellaire connaît alors deux régimes de vent, l'un centré sur les pôles, l'autre à l'équateur. Nous avons montré que si l'étoile est dans un régime de vent unique (SWR), l'extraction du moment cinétique se produit essentiellement à des latitudes moyennes, et le flux de masse est maximal aux pôles. Cependant, lorsque cette discontinuité apparaît à la surface de l'étoile (régime TWR), les pertes de masse et de perte de moment cinétique sont toutes deux maximales dans les régions équatoriales. Dans le cas d'un vent anisotrope, l'existence, ou non, de ce saut de bi-stabilité à la surface des étoiles massives n'est donc plus déterminé par leur température effective moyenne, mais par leur température effective équatoriale. Cette dernière dépend de la masse du modèle, de son stade évolutif, mais aussi de sa distance à la rotation critique, ce qui complique l'observation de ce phénomène.

Nous avons ensuite étudié l'évolution rotationnelle des étoiles de type précoce sur la séquence principale, à la fois pour des modèles d'étoiles de masse intermédiaire dont l'évolution peut être considérée comme étant à masse et moment cinétique constants, et pour des modèles d'étoiles plus massives sujettes à des vents radiatifs anisotropes. Dans le premier cas, l'évolution séculaire est relativement simple, et nous avons montré qu'en raison de l'expansion stellaire ainsi que de la redistribution de la masse à l'intérieur de l'étoile, une rotation critique peut être atteinte avant la fin de la séquence principale, à condition que le rapport initial des vitesses angulaires $\omega_i = \Omega_{\text{eq},i}/\Omega_K$ soit suffisamment élevé. L'évolution des étoiles plus massives dont la masse est comprise entre 7 et 15 M_{\odot} sur la séquence principale est, quant à elle, très dépendante des conditions initiales à la ZAMS, c'est-à-dire de leur masse initiale, et de leur vitesse

de rotation initiale. En effet, leur température effective est relativement proche de la température effective du saut de bi-stabilité. La vitesse angulaire initiale contrôle donc le régime de vent dans lequel les modèles stellaires dans cette gamme de masse commencent leur évolution. Les différents régimes de vent et les transitions entre ces régimes au cours de l'évolution peuvent avoir des effets très différents sur l'évolution rotationnelle de ces étoiles, d'où l'importance des conditions initiales à la ZAMS. La transition la plus courante d'un régime à l'autre est le passage d'un régime SWR côté chaud à un régime TWR. Nous nous sommes donc focalisés sur cette transition, en analysant l'évolution rotationnelle d'un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ tournant initialement avec une vitesse angulaire équatoriale égale à 50% de la vitesse angulaire képlérienne. Nous avons montré que la transition SWR-TWR est suivie de deux phases d'évolution du rapport des vitesses angulaires. Ces deux phases correspondent à une augmentation rapide (et continue) des taux de perte de masse et de moment cinétique, conduisant à une croissance plus lente de ω (par rapport au régime SWR), suivie d'une diminution de ω accompagnée d'une augmentation plus lente des taux de perte de masse et de moment cinétique. Notons que nous ne trouvons pas de discontinuité du taux de perte de masse global à la limite de bi-stabilité, contrairement aux modèles 1D. Cette discontinuité est cependant présente dans le profil latitudinal du flux de masse local. Elle apparaît à l'équateur puis migre vers les pôles au fur et à mesure de l'évolution, entraînant ainsi une augmentation continue du taux de perte de masse global en régime TWR. Dans l'ensemble, nous constatons que les pertes de masse et de moment cinétique associées aux vents radiatifs sont responsables soit d'une croissance plus lente, soit d'une diminution du rapport des vitesses angulaires ω , au cours de l'évolution des étoiles massives sur la séquence principale, et peuvent ainsi empêcher les étoiles massives d'atteindre une rotation critique avant la fin de la séquence principale. Les prescriptions de flux de masse et de moment cinétique locaux à la surface des étoiles massives, prenant en considération l'existence des deux régimes de vent résultant de la présence, ou non, d'un saut de bi-stabilité local, peuvent être implémentées dans les codes d'évolution 1D à l'aide d'une description analytique des variations latitudinales du flux radiatif. Cette implémentation est en cours dans le code de Genève, GENEC.

Ces travaux préconisent de nouvelles investigations pour confirmer les résultats obtenus, notamment en ce qui concerne la modélisation de la perte de masse, et en particulier la modélisation des paramètres des multiplicateurs de force. Nous savons, par exemple, que ces paramètres dépendent de la métallicité de l'atmosphère stellaire en expansion, mais les changements à appliquer pour la modélisation d'étoiles de population III sont assez incertains (voir [Meynet et al., 2008](#), par exemple). La tentative de [Georgy et al. \(2013\)](#) suggère qu'une modification de la métallicité n'entraîne pas de changement significatif de l'évolution rotationnelle des modèles de $15 M_{\odot}$, mais il

est important de rappeler que leurs modèles sont unidimensionnels. Notons également qu'il est très probable que les étoiles massives connaissent des périodes de conditions super-Eddington (Quataert *et al.*, 2016) durant lesquelles elles sont sujettes à des vents continus et suffisamment intenses pour être associés à une perte de masse importante, même pour les étoiles non métalliques (voir Owocki *et al.*, 2004; Smith & Owocki, 2006; Owocki *et al.*, 2017, par exemple).

Après avoir consacré un chapitre à l'introduction de généralités sur les fluides en rotation, pré-requises à la suite de l'étude, nous nous sommes concentrés sur le deuxième objectif du travail de thèse, à savoir l'étude du rôle des vents radiatifs à la surface des étoiles massives, sur leur dynamique interne. Pour cela, nous avons examiné le problème de l'écoulement de spin-down d'un fluide visqueux à l'intérieur d'une coquille sphérique, induit par une contrainte tangentielle prescrite sur cette dernière et reproduisant l'effet d'une perte de moment cinétique. Ce problème est assez proche de l'écoulement classique de Couette sphérique (Zikanov, 1996; Rieutord *et al.*, 2012), mais il comporte de nouvelles caractéristiques telles que la stratification en température et en densité, et l'imposition d'une contrainte horizontale en surface, qui ont nécessité l'étude présentée dans ce manuscrit. La conclusion de celle-ci est que la couche de Stewartson est un élément clé dans le transport advectif des éléments chimiques entre le cœur et la surface d'une étoile massive. L'échelle de temps d'advection est en effet considérablement plus courte que l'échelle de temps associée à l'écoulement de spin-down. Dans la configuration choisie, l'état stationnaire est atteint sur un temps de diffusion visqueuse, qui est bien plus long que la durée de vie de l'étoile. L'échelle de temps, beaucoup plus courte, associée à la circulation méridienne dans la couche de Stewartson, permet aux éléments chimiques produits dans le cœur convectif d'être transportés à la surface de l'étoile et d'y être potentiellement observables. Nous avons aussi montré que ni la stratification thermique de l'enveloppe radiative des étoiles massives, ni ses fortes variations de densité n'empêchent l'émergence de la couche de Stewartson. En effet, les effets de la stratification thermique stable peuvent être ignorés en vertu de la petitesse du nombre de Prandtl dans les intérieurs stellaires, et les variations radiales de densité à grande échelle n'ont que peu d'effet sur le flux de masse parallèle à l'axe de rotation dans la couche de Stewartson. Enfin, l'exploration du problème du transport d'un scalaire passif par l'écoulement incompressible suggère que, pour des valeurs réalistes du nombre d'Ekman et du nombre de Schmidt, et pour une amplitude réaliste de la contrainte horizontale imitant l'effet d'un flux de moment cinétique, la nature du transport des éléments chimiques synthétisés dans le cœur convectif des étoiles massives est essentiellement diffusive. Cependant, les conditions à la surface des étoiles massives varient au cours de leur évolution séculaire et peuvent entraîner l'évolution de la nature du transport dominant.

Bien sûr, la complexité d’une modélisation complète du mélange rotationnel nous a poussé à étudier des configurations simplifiées. Ces conclusions ne sont donc pas exhaustives et d’autres effets pourraient venir compliquer le scénario. Le premier effet auquel on pourrait penser, est l’anisotropie de la turbulence locale dans l’enveloppe radiative des étoiles massives. En effet, la rotation différentielle induit un cisaillement qui peut être localement instable. Cette instabilité de cisaillement est inhibée par la stratification stable de l’enveloppe, mais elle est facilitée par la forte diffusion thermique. Zahn (1992) et Maeder & Zahn (1998) suggèrent que ces instabilités conduisent à une turbulence fortement anisotrope, c’est-à-dire à un transport horizontal beaucoup plus efficace que le transport vertical. Il serait donc intéressant de déterminer si la couche de Stewartson peut résister à une diffusion turbulente anisotrope. Si l’on souhaite un modèle encore plus réaliste, l’interface entre le cœur convectif et l’enveloppe nécessite une description plus détaillée. Dans cette région, une stratification chimique se forme au cours de l’évolution stellaire. Cette barrière de poids moléculaire moyen pourrait isoler le cœur convectif de l’enveloppe radiative. Cependant, à cette interface le gradient thermique est instable et le gradient chimique est stable, ce qui peut permettre à la convection double-diffusive de s’y développer (Garaud, 2018). Les effets de la rotation sur cette région sont quant à eux peu connus, mais peuvent entraîner une instabilité de Goldreich-Schubert-Fricke (GSF, Goldreich & Schubert, 1967; Fricke, 1968; Barker *et al.*, 2019, 2020). Il serait enfin intéressant d’évaluer l’effet d’un champ magnétique (fossile ou résultant d’une dynamo) sur la déstabilisation de l’enveloppe radiative des étoiles massives. En particulier, le couplage entre un écoulement cisailé et un champ magnétique devrait avoir un effet considérable et subtil sur le transport interne. Il peut, par exemple, exister des situations où une rotation différentielle qui devrait être instable vis-à-vis du cisaillement, et un champ magnétique horizontal isolé qui devrait aussi être instable vis-à-vis de l’instabilité de la flottabilité magnétique, puissent résulter en un système stable lorsqu’ils sont combinés (e.g., Hughes & Tobias, 2001; Tobias & Hughes, 2004). *A contrario*, une rotation différentielle théoriquement stable peut être déstabilisée par la présence d’un champ magnétique toroïdal (see e.g. Gilman & Fox, 1996; Plummer *et al.*, 2019).

Enfin, tout comme les modèles 1D, les modèles multidimensionnels considérés dans ce manuscrit supposent qu’aucun flux de masse ne quitte la photosphère, c’est-à-dire que les pertes de masse et de moment cinétique induites par les vents radiatifs sont estimées par des prescriptions plutôt que par le calcul cohérent de l’écoulement radial associé. Une description plus réaliste de cette interface, et en particulier l’implémentation d’une atmosphère stellaire permettrait une transition continue entre les écoulements internes et le vent radiatif. Cette modélisation cohérente du couplage atmosphère-enveloppe améliorerait l’estimation des pertes de masse et de moment cinétique, mais impliquerait aussi la modification de l’écoulement de spin-down. Des

CHAPITRE 8. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

modèles d'atmosphère considérant les écoulements hydrodynamiques hors équilibre thermodynamique local ont récemment été développés par [Sander *et al.* \(2017\)](#); [Björklund *et al.* \(2020\)](#), mais restent, à l'heure actuelle, purement unidimensionnels.

Annexe A

Le code ESTER

Le code ESTER calcule la structure axisymétrique à deux dimensions et les écoulements stationnaires à grandes échelles d'une étoile isolée et non-magnétique en rotation. La physique implémentée est réaliste (opacités tabulées et équations d'état OPAL, ou gaz parfait avec ou sans radiation) et tient compte de la déformation de l'étoile induite par la rotation. Les écoulements à grandes échelles sont calculés de manière cohérente dans la limite asymptotique de faible viscosité. Il n'est donc pas nécessaire d'imposer des contraintes sur le profil de rotation différentielle de l'étoile, et des modèles à rotation quasi-critique peuvent ainsi être simulés. A ce jour, la convection de surface n'est pas incluse et les calculs sont donc limités aux étoiles de type précoce, c'est-à-dire aux étoiles ayant une masse supérieure à 1.8 masses solaires à métallicité solaire. L'évolution de la structure chimique de l'étoile n'est pas non plus incluse, mais peut être simulée en modifiant la fraction d'hydrogène dans le cœur convectif. Dans cette annexe, nous présentons brièvement les équations hydrodynamiques résolues, le schéma temporel simplifié, ainsi que la méthode de résolution numérique utilisée. Nous renvoyons le lecteur intéressé par plus de détails à Rieutord (2006c), Espinosa Lara & Rieutord (2013), et Rieutord *et al.* (2016).

A.1 Les équations à résoudre

Les équations qui gouvernent l'état stationnaire d'une étoile isolée sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi = 4\pi G\rho \\ 0 = -\nabla \cdot \mathbf{F} + \rho\epsilon_* \\ \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla P - \rho\nabla\phi + \mathbf{F}_{\text{visc}} \\ \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0, \end{array} \right.$$

où ϕ est le potentiel gravitationnel, s est l'entropie,

$$\mathbf{F} = -\chi\nabla T - \frac{\chi_{\text{turb}}T}{\mathcal{R}}\nabla s \quad (\text{A.1})$$

est le vecteur flux de chaleur, où $\chi = 4acT^3/(3\kappa\rho)$ est la conductivité thermique radiative, χ_{turb} est la conductivité thermique turbulente, \mathcal{R} est le rapport entre constante des gaz parfaits et poids moléculaire moyen, $a = 4\sigma/c$ est la constante de densité de rayonnement, et σ est la constante de Stefan-Boltzmann. ϵ_* est le taux de production d'énergie nucléaire dans le cœur convectif, et \mathbf{F}_{visc} est le vecteur force visqueuse dont l'expression est donnée en Eq. 7.2. La première équation décrit la distribution de masse dans l'intérieur stellaire, la seconde est l'équation de la chaleur où le terme d'advection de l'entropie par la circulation méridienne $\rho T\mathbf{v} \cdot \nabla s$ a été négligé (justifié dans la limite asymptotique de faible viscosité et pour un cœur convectif isentropique, voir Rieutord, 2006c; Rieutord *et al.*, 2016). La troisième équation est celle du mouvement dont la composante méridienne se réduit à (Espinosa Lara & Rieutord, 2013)

$$\rho s\Omega\mathbf{e}_s = \nabla P + \rho\nabla\phi, \quad (\text{A.2})$$

dans la limite asymptotique $\nu \rightarrow 0$, et l'équation de la vorticité s'écrit

$$s\frac{\partial\Omega^2}{\partial z^2} = \mathbf{e}_\phi \frac{\nabla p \times \nabla \rho}{\rho^2} \quad (\text{A.3})$$

dans cette même limite. Enfin, la composante azimutale de l'équation du mouvement décrit l'équilibre entre transport du moment cinétique par les forces visqueuses et transport par la circulation méridienne

$$\nabla \cdot (\rho s^2\Omega\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mu s^2\nabla\Omega), \quad (\text{A.4})$$

où \mathbf{u} est la vitesse méridienne et μ est la viscosité dynamique. La dernière équation est celle de la conservation de la masse. Ce système d'équation est complété par l'utilisation des tables OPAL pour le calcul de l'opacité et la pour dérivation de l'équation d'état, en utilisant la mélange solaire de Grevesse & Noels (1993), et par

les conditions aux limites. Les conditions aux limites de glissement sans frottement et de non pénétration des parois sont imposées au champ de vitesses, c'est-à-dire

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\perp = 0 \quad \text{et} \quad ([\sigma]\mathbf{n}_\perp) \times \mathbf{n}_\perp = \mathbf{0}, \quad (\text{A.5})$$

où $[\sigma]$ est le tenseur des contraintes, et \mathbf{n}_\perp est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface. De plus, il est numériquement souhaitable de ne pas résoudre les couches d'Ekman, bien que leur rôle sur l'écoulement intérieur est crucial (voir Sect. 6.3). Pour cela, [Espinosa Lara & Rieutord \(2013\)](#) montrent que leurs effets peuvent être simulés par la condition limite additionnelle à la surface

$$\mu s^2 \mathbf{n}_\perp \cdot \nabla \Omega + \psi \mathbf{n}_\parallel \cdot \nabla (s^2 \Omega) = 0, \quad (\text{A.6})$$

où ψ est la fonction de courant associée à la circulation méridienne (voir Eq. 7.34), et \mathbf{n}_\parallel est le vecteur unitaire tangent à la surface.

Le potentiel gravitationnel doit quant à lui être régulier au centre de l'étoile et tendre vers zéro à l'infini. Pour des raisons numériques, cette dernière condition ne peut pas être appliquée à la surface de l'étoile lorsque celle-ci est proche de la rotation critique. La solution considérée est d'entourer l'étoile sphéroïdale d'une sphère vide sur laquelle est imposée la condition. La condition limite appliquée à la projection du potentiel gravitationnel sur la base des harmoniques sphérique s'écrit alors

$$\frac{\partial \phi^l}{\partial r} + \frac{\Lambda \phi^l}{r} = 0, \quad (\text{A.7})$$

où $\Lambda = l(l+1)$, et (voir Annexe H)

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{l_{\max}} \phi^l Y_l(\theta). \quad (\text{A.8})$$

La surface est quant à elle définie comme étant l'isobare où

$$P_s = \tau_s \frac{g_{\text{pôle}}}{\kappa_{\text{pôle}}}, \quad (\text{A.9})$$

et donc $T = T_{\text{eff}}$ aux pôles uniquement. La partie de l'étoile au dessus de cette isobare est considérée comme étant un polytrophe de degré $n = 3$, ce qui implique qu'à la surface de l'étoile déformée ([Espinosa Lara & Rieutord, 2013](#)),

$$T_{\text{eff}}(\theta) = T(R(\theta)) \left(\frac{g_{\text{pôle}} \kappa(\theta)}{g_{\text{eff}}(\theta) \kappa_{\text{pôle}}} \right)^{-1/(n+1)}, \quad (\text{A.10})$$

où $T(R(\theta))$ est la température à la surface de la sphère où l'on applique les conditions limites

$$T(R(\theta)) = \left(\frac{g_{\text{pôle}} \kappa(\theta)}{g_{\text{eff}}(\theta) \kappa_{\text{pôle}}} \right)^{1/(n+1)} \left(-\frac{\chi \mathbf{n}_{\perp} \cdot \nabla T}{\sigma} \right)^{1/4}. \quad (\text{A.11})$$

Le profil radial d'abondance en hydrogène dans l'intérieur stellaire s'écrit quant à lui

$$\begin{cases} X(r) = X_{\text{core}} & \text{pour } r \in [0, r_c] \\ X(r) = X_0 & \text{pour } r \in [r_c, R] \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

où X_0 et X_{core} sont donc l'abondance en hydrogène dans l'enveloppe et dans le cœur convectif, respectivement. Ainsi, à la ZAMS, $X_{\text{core}} = X_0$. $r_c(\theta)$ est le rayon du cœur convectif déterminé par le critère de Schwarzschild.

A.2 Schéma temporel simplifié

Comme indiqué plus haut, il n'y a, à l'heure actuelle, pas d'évolution de la structure chimique de l'étoile modélisée dans le code ESTER. L'évolution séculaire peut cependant être simulée en réduisant l'abondance en hydrogène dans le cœur convectif (voir [Gagnier et al., 2019b](#)).

Comme nous ne considérons que des étoiles de type précoce, les réactions nucléaires sont localisées dans le cœur convectif qui est entièrement mélangé. Nous considérons la relation entre la fraction massique d'hydrogène X et le taux de production d'énergie nucléaire ε_* . La chaleur étant essentiellement produite par la transformation de protons en noyaux d' ^4He , nous supposons que localement,

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla X = -\frac{4m_p \varepsilon_*}{Q} \quad (\text{A.13})$$

où m_p est la masse du proton,

$$Q = (4m_p - m_{\text{He}})c^2 \simeq 4.3 \times 10^{-12} \text{ J} \quad (\text{A.14})$$

est l'énergie libérée par la fusion de quatre protons, et $\varepsilon_* = \varepsilon_{pp} + \varepsilon_{\text{CNO}}$ est le taux de production d'énergie nucléaire par unité de masse, pour la chaîne pp et pour le cycle CNO.

ANNEXE A. LE CODE ESTER

Afin d'obtenir une expression de dX_{core}/dt , c'est-à-dire de l'évolution temporelle de la fraction massique d'hydrogène dans le cœur convectif, nous évaluons l'évolution de la masse d'hydrogène totale dans le cœur convectif

$$\frac{d}{dt}(M_{\text{core}}X_{\text{core}}) = \frac{d}{dt} \int_{\text{core}} \rho X dV . \quad (\text{A.15})$$

Nous réécrivons cette équation en utilisant la règle de Leibniz,

$$\frac{d}{dt}(M_{\text{core}}X_{\text{core}}) = \int_{\text{core}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho X) dV + \int_{\partial\text{core}} \rho X \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{dS} , \quad (\text{A.16})$$

où \mathbf{v}_c est la vitesse de la frontière du cœur convectif, et M_{core} est la masse du cœur convectif. Nous utilisons ensuite (A.13) et le fait que l'on considère le cœur convectif comme complètement mélangé, c'est-à-dire que X y est homogène.

$$\frac{d}{dt}(M_{\text{core}}X_{\text{core}}) = -\frac{4m_p}{Q}L_{\text{core}} + X_{\text{core}} \left(- \int_{\text{core}} \text{div}(\rho \mathbf{v}) dV + \int_{\partial\text{core}} \rho \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{dS} \right) . \quad (\text{A.17})$$

Nous utilisons une nouvelle fois la règle de Leibniz et (A.17) devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(M_{\text{core}}X_{\text{core}}) &= -\frac{4m_p}{Q}L_{\text{core}} + X_{\text{core}} \frac{d}{dt} \int_{\text{core}} \rho dV \\ &= -\frac{4m_p}{Q}L_{\text{core}} + X_{\text{core}} \frac{dM_{\text{core}}}{dt} , \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

ce qui donne enfin

$$\frac{dX_{\text{core}}}{dt} = -\frac{4m_p}{Q}\bar{\epsilon}_* , \quad (\text{A.19})$$

où

$$\bar{\epsilon}_* = \frac{L_{\text{core}}}{M_{\text{core}}} = \frac{\int \epsilon_* dM}{M_{\text{core}}} \quad (\text{A.20})$$

est la moyenne massique de ϵ_* , et L_{core} est la luminosité du cœur convectif. Il suffit enfin de discrétiser (A.19), et de choisir un pas de temps Δt pour simuler une évolution temporelle,

$$X_n^{\text{core}} = X_{n-1}^{\text{core}} - \Delta t \frac{4m_p}{Q}\bar{\epsilon}_* , \quad (\text{A.21})$$

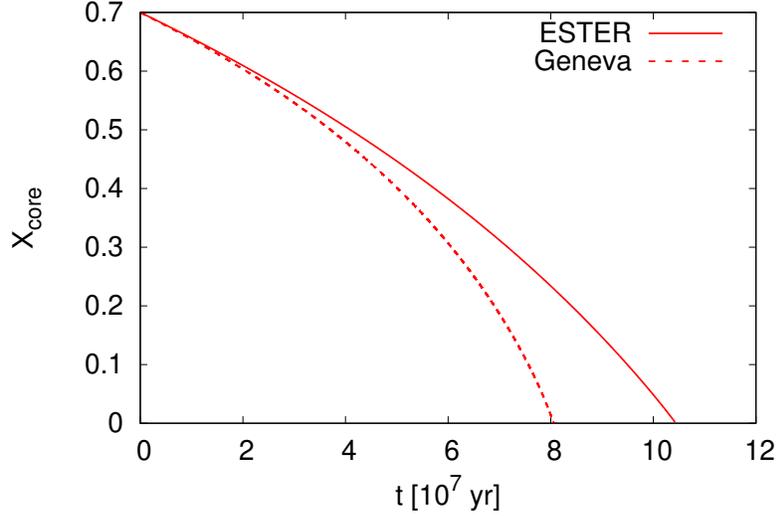


Figure A.1: Évolution temporelle de X_{core} pour des modèles de $5 M_{\odot}$, $Z = 0.02$ (mixture solaire de Grevesse & Noels, 1993) sans rotation ni perte de masse, calculés avec ESTER en utilisant le schéma simplifié pour combustion de l’hydrogène (Eq. A.21) et avec le code de Genève (Ekström, communication privée). Source : Gagnier *et al.* (2019b).

où n est le $n^{\text{ième}}$ pas de temps Δt que l’on choisit égal à 10^5 ans. L’évolution temporelle consiste alors en une succession de modèles stationnaires pour lesquels l’abondance en hydrogène dans le cœur convectif décroît selon (A.19).

Pour vérifier que notre schéma temporel simplifié donne une évolution acceptable (notamment en termes de durée de vie sur la séquence principale), nous comparons la variation temporelle de la fraction massique d’hydrogène dans le cœur convectif obtenue avec ce schéma implémenté dans le code ESTER, et la modélisation plus réaliste utilisée dans le code d’évolution stellaire à 1D GENE (Eggenberger *et al.*, 2008). La Fig. A.1 montre l’évolution de X_{core}/X_0 calculée à la fois avec ESTER et avec GENE (Ekström, communication privée) pour une étoile de $5 M_{\odot}$ et avec $Z = 0.02$ (mixture solaire de Grevesse & Noels, 1993), en fonction du temps. Les modèles sont calculés sans overshoot et sans perte de masse. Nous notons que le temps nécessaire pour que tout l’hydrogène soit transformé en hélium est légèrement surestimé par le code ESTER, et donc par le schéma temporel qui y est implémenté. L’erreur est de l’ordre de 20%. Dans le cadre de ce manuscrit où l’on ne cherche pas à donner des prédictions quantitatives, mais plutôt à montrer qualitativement les principales caractéristiques de l’évolution de la rotation des étoiles de type précoce, cette différence est acceptable.

Lorsque nous considérons de la perte de masse et de moment cinétique par vents radiatifs, alors en plus de réduire X_{core} entre deux modèles successifs, nous réduisons aussi la masse totale de l'étoile, ainsi que son moment cinétique total (voir Eq. 4.3 et Eq. 4.4).

A.3 Méthode numérique

Le code ESTER utilise une méthode de collocation pseudo-spectrale de Gauss-Legendre sur la base des harmoniques sphériques vectorielle pour la partie angulaire, et une méthode de collocation pseudo-spectrale de Gauss-Lobatto sur la base des polynômes de Tchebyshev pour la partie radiale, sur lesquelles sont interpolées les fonctions (voir Sect. 7.2.1, Annexe H et Rieutord & Valdetaro, 1997; Boyd, 2001, pour plus de détails). Cependant, l'un des principaux inconvénients des méthodes de collocation pseudo-spectrale est qu'elles ne traitent pas correctement les fonctions non régulières. En effet, si la fonction que nous voulons approximer comme des séries de polynômes de Tchebyshev et d'harmoniques sphériques présente des discontinuités, même dans ses premières dérivées, la convergence exponentielle associée aux méthodes spectrales (7.14) est perdue et la fonction approchée peut présenter des oscillations de longueur d'onde $O(1/N)$ autour des discontinuités où N est le degré de troncature de la série (ce sont les oscillations de Gibbs, voir Gibbs, 1898; Boyd, 2001). Il existe de multiples façons de traiter ce problème, l'une d'entre elles, et celle qui est implémentée dans le code ESTER, est d'utiliser une approche multi-domaines, donc de diviser le domaine d'intégration en plusieurs sous-intervalles dont les interfaces sont placées aux discontinuités de la fonction. Ainsi, la fonction considérée est maintenant continue dans chaque sous-intervalle et la convergence exponentielle typique des méthodes pseudo-spectrales est retrouvée.

Le nombre de coefficients spectraux utilisés dans nos modèles dépend quant à lui de la masse et du rapport entre la vitesse angulaire équatoriale et la vitesse képlérienne du modèle considéré. Les valeurs de N_r et N_θ choisies sont telles que les séries de polynômes de Tchebyshev et d'harmoniques sphériques convergent. Typiquement, pour un modèle de $15 M_\odot$, N_r est de l'ordre de 360, c'est-à-dire 12 sous-domaines contenant chacun 30 points de grille. Nous résumons les valeurs de N_r et de N_θ pour des modèles ESTER de $15 M_\odot$ à la ZAMS dans le tableau A.1, et nous représentons le spectre 2D de la densité, montrant la convergence spectrale d'un modèle ESTER à 2D de $15 M_\odot$ avec $\omega = 0.9$ pour les séries de polynômes de Tchebychev (axe vertical) et d'harmoniques sphériques (axe horizontal), en Fig. A.2.

Table A.1.: Quelques données montrant l’efficacité numérique du code ESTER pour le calcul de modèles d’étoiles de $15 M_{\odot}$ pour différentes valeurs de $\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_K$. N_r est le nombre de points de grille radiaux écrit comme le produit entre le nombre de domaines et le nombre de points par domaine, N_{θ} est le nombre de points de grille latitudinaux. Chaque modèle à 2D est calculé à partir du modèle précédent (par exemple, le modèle avec $\omega = 0.5$ est calculé à partir du modèle avec $\omega = 0.3$), et N_{iter} est le nombre d’itérations nécessaires pour que l’algorithme de Newton converge (voir Sect. A.3.2). La dernière colonne donne, respectivement, le résidu du test du viriel et du test de l’énergie (voir Sect. A.3.3).

$\omega = \Omega_{\text{eq}}/\Omega_K$	N_r	N_{θ}	N_{iter}	Précision
0	12×30	0	58	2.3×10^{-10} , 9.1×10^{-5}
0.3	12×30	8	6	2.3×10^{-10} , 2.5×10^{-4}
0.5	12×30	16	7	4.2×10^{-10} , 9.4×10^{-5}
0.7	12×30	32	7	8.3×10^{-9} , 2.7×10^{-5}
0.9	12×30	64	9	5.8×10^{-8} , 3.3×10^{-5}
0.95	12×30	64	9	7.3×10^{-8} , 2.9×10^{-5}

A.3.1 Coordonnées sphéroïdales

Une des particularités du code ESTER est qu’il prend en compte la déformation de l’étoile induite par les effets centrifuges. La géométrie des modèles ESTER pour les étoiles en rotation n’est donc pas sphérique mais sphéroïdale. Les coordonnées sphéroïdales sont définies comme suit (Bonazzola *et al.*, 1998)

$$\begin{cases} r = r(\zeta, \theta') \\ \theta = \theta' \\ \phi = \phi' \end{cases}, \quad (\text{A.22})$$

où (r, θ, ϕ) sont les coordonnées sphériques dans un domaine axisymétrique \mathcal{D} dont le contour $\partial\mathcal{D}$ peut être représenté par une fonction $R(\theta)$. Les coordonnées sphéroïdales (r', θ', ϕ') sont définies telles que la coordonnée $\zeta = \text{Cte}$ sur le contour $\partial\mathcal{D}$. Parce que le domaine d’intégration \mathcal{D} est divisé en n sous-domaines \mathcal{D}_i , il existe $n + 1$ fonctions $R_i(\theta)$ telles que $\mathcal{D}_i \in [R_i(\theta), R_{i+1}(\theta)]$, donc $n + 1$ frontières de sous-domaines. La coordonnée radiale dans ce système de coordonnées s’écrit (Bonazzola *et al.*, 1998)

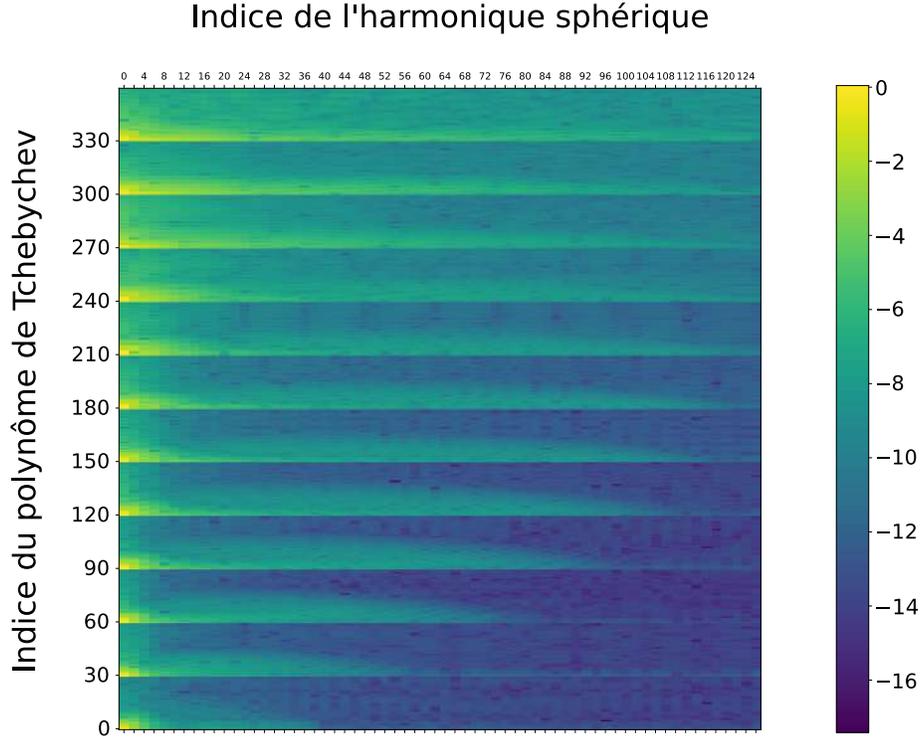


Figure A.2: Spectre 2D de la densité illustrant la convergence spectrale d'un modèle ESTER à 2D de $15 M_{\odot}$ avec $\omega = 0.9$, $N_r = 360$ et $N_{\theta} = 64$, pour les séries de polynômes de Tchebychev (axe vertical) et d'harmoniques sphériques (axe horizontal). Nous notons que la convergence spectrale est plus difficile à atteindre dans les couches les plus superficielles. Celles-ci sont en effet caractérisées par de fortes variations de l'opacité, et sont très déformées par les effets centrifuges, contrairement aux couches les plus internes (Rieutord *et al.*, 2016).

$$r(\zeta, \theta') = a_i \xi \Delta \eta_i + R_i(\theta) + A_i(\xi)(\Delta R_i(\theta) - a_i \Delta \eta_i) \quad \text{pour } \zeta \in [R_i(\theta = 0), R_{i+1}(\theta = 0)] \quad (\text{A.23})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_i = R_i(\theta = 0) \\ \Delta \eta_i = R_{i+1}(\theta = 0) - R_i(\theta = 0) \\ \Delta R_i(\theta) = R_{i+1}(\theta) - R_i(\theta) \\ \xi = \frac{\zeta - \eta_i}{\Delta \eta_i} \end{array} \right. \quad (\text{A.24})$$

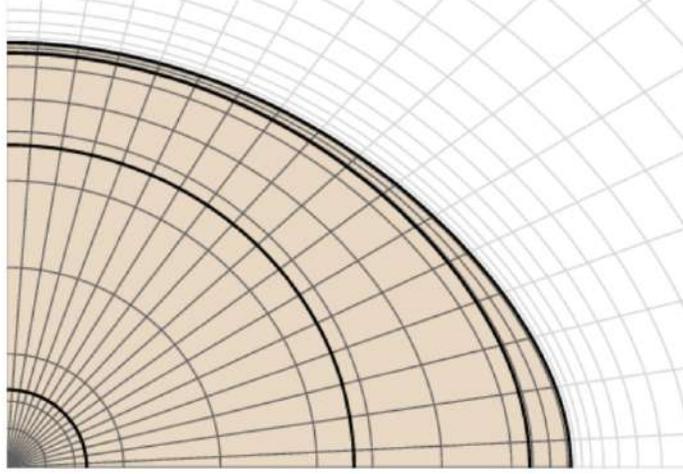


Figure A.3: Représentation de la grille de discrétisation : l'étoile est divisée en plusieurs couches : la région externe en blanc est un domaine de vide où seul le potentiel gravitationnel est calculé. Source : [ESTER Project](#).

Les fonctions $A_i(\xi)$ et a_i définissent la forme du mapping, et doivent être choisies telles que $r(\eta_i, \theta) = R_i(\theta)$, et $r(\eta_{i+1}, \theta) = R_{i+1}(\theta)$. a_i est pris égal à 1, et

$$\begin{cases} A_i(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2 & \text{pour } i \in [1, n-1] \\ A_0(\xi) = -\frac{3}{2}\xi^5 + \frac{5}{2}\xi^3. \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

Ce mapping est représenté en Fig. A.3. Le lecteur intéressé par la représentation des vecteurs dans ce système de coordonnées, ainsi que la définition des opérateurs différentiels peut se référer à [Bonazzola *et al.* \(1998\)](#) et à [Rieutord *et al.* \(2016\)](#).

A.3.2 Algorithme de Newton

La plupart des algorithmes permettant de résoudre des systèmes d'équations non-linéaires sont des variantes de la méthode de Newton. Lorsque l'on applique une méthode spectrale ou une méthode des différences finies à une équation différentielle non-linéaire, le résultat est un système de N équations algébriques non-linéaires, N étant le nombre de degrés de liberté du système. Pour les méthodes de différences finies, N est le nombre de points de grilles de la solution $u(x_i)$, et pour les méthodes spectrales, N est le nombre de coefficients spectraux a_n . L'utilisation d'une méthode de Newton pose cependant quelques difficultés. La première est qu'il faut partir d'une solution approximée choisie de préférence, proche du zéro à trouver ; les modèles

ANNEXE A. LE CODE ESTER

ESTER à une dimension (donc sans rotation) servent généralement de point de départ car peuvent être obtenus sans que la solution initiale soit proche de la solution finale. En effet, les itérations 1D étant très rapides nous n'avons pas besoin de minimiser leur nombre (Rieutord *et al.*, 2016). La deuxième est qu'il faut déterminer la matrice Jacobienne du système d'équations, et la troisième est qu'il faut inverser cette matrice à chaque itération. Nous reviendrons sur ces difficultés et la manière dont le code ESTER les surmonte.

De manière générale, le système d'équations peut être écrit

$$F_i(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) = 0 \quad i = 0, \dots, N - 1, \quad (\text{A.26})$$

et les éléments de la matrice Jacobienne s'écrivent

$$J_{ij} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial a_j} \quad i, j = 0, \dots, N - 1. \quad (\text{A.27})$$

Si nous écrivons la solution sous forme vectorielle $\mathbf{X} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})^T$, alors ce vecteur des coefficients spectraux à l'itération $i + 1$ s'écrit

$$\mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{X}^i - [J]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^i). \quad (\text{A.28})$$

Lorsque l'on utilise des méthodes spectrales, cette étape est certainement la plus coûteuse numériquement car la matrice Jacobienne est généralement remplie, et grande lorsque l'on considère des modèles à résolution élevée. Ainsi, il faut $O(N^3)$ opérations pour obtenir la solution \mathbf{X}^{i+1} à partir de \mathbf{X}^i (Boyd, 2001). Dans ESTER, ce problème est résolu par l'utilisation d'une décomposition LU de la matrice Jacobienne, et d'une méthode itérative du gradient conjugué (CGS) (Sonneveld, 1989). La première consiste en le pré-conditionnement de la matrice Jacobienne en l'écrivant comme le produit de deux matrices triangulaires, la seconde permet de résoudre le système d'équations itérativement, sans inverser la matrice Jacobienne, c'est-à-dire en gardant le système d'équations sous la forme

$$[J]\delta\mathbf{X} = -\mathbf{F}(\mathbf{X}^i), \quad (\text{A.29})$$

où $\delta\mathbf{X} = \mathbf{X}^{i+1} - \mathbf{X}^i$, et en cherchant à minimiser

$$\nabla f(\delta\mathbf{X}) = [J]\delta\mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X}^i) \quad (\text{A.30})$$

où

$$f(\delta \mathbf{X}) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{X}^T [J] \delta \mathbf{X} + \delta \mathbf{X}^T \mathbf{F}(\mathbf{X}^i) . \quad (\text{A.31})$$

Ainsi, en annulant le gradient de $f(\delta \mathbf{X})$, nous obtenons le vecteur $\delta \mathbf{X}$ qui minimise le résidu $[J] \delta \mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X}^i)$. Cependant, la factorisation LU est coûteuse. Ainsi, au lieu d’effectuer ce pré-conditionnement à chaque itération, la méthode CGS est utilisée pour obtenir la solution en utilisant les matrices triangulaires obtenues à l’itération précédente (qui ne sont généralement pas très différentes d’une itération à la suivante). Si la méthode CGS ne converge pas vers une solution en un certain temps correspondant à une fraction du temps nécessaire à la factorisation LU, cette dernière est effectuée. La construction des modèles ESTER à 2D peut finalement être résumée ainsi (Rieutord *et al.*, 2016)

1. Génération d’un modèle initial ESTER à 1D
2. Construction de la matrice Jacobienne $[J]$
3. Factorisation LU de la matrice Jacobienne
4. Résolution du système d’équations par la méthode itérative du gradient conjugué (CGS)
5. Mise-à-jour du vecteur \mathbf{X}
6. Construction de la nouvelle matrice Jacobienne $[J]$ et calcul de $\mathbf{F}(\mathbf{X}^i)$
7. Résolution du système d’équations par la méthode CGS avec les matrices triangulaires calculées à l’itération précédente
8. Si la méthode CGS ne converge pas vers une solution en un certain nombre d’itérations : factorisation LU de la matrice Jacobienne suivie d’une nouvelle résolution par méthode CGS
9. Si $\|\delta \mathbf{X}\| / \|\mathbf{X}\| \leq \epsilon = 10^{-8}$, la solution est obtenue avec une erreur relative inférieure à ϵ .

En pratique, environ dix itérations sont nécessaires pour calculer un modèle ESTER 2D en rotation à partir du modèle sans rotation correspondant (voir le tableau A.1).

A.3.3 Contrôle qualité

La qualité de tous les modèles ESTER présentés dans ce manuscrit a été vérifiée à l’aide de deux tests globaux : le test du viriel vérifiant la petitesse du résidu normalisé du théorème du Viriel, et le test de l’énergie vérifiant l’égalité entre la luminosité de

l'étoile obtenue via l'intégrale volumique du taux de production d'énergie nucléaire et celle obtenue via l'intégrale du flux d'énergie à la surface de l'étoile.

Le test du viriel

Le théorème du viriel est obtenu en intégrant le produit scalaire de \mathbf{r} avec l'équation stationnaire du mouvement dans le repère en rotation, sur le volume (voir [Rieutord & Espinosa Lara, 2013](#), pour plus de détails), c'est-à-dire

$$\int_V \mathbf{r} \cdot [2\boldsymbol{\Omega} \times \rho \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \nabla \phi - \rho \Omega^2 s \mathbf{e}_s - \nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma}]] dV = 0 , \quad (\text{A.32})$$

où $[\boldsymbol{\sigma}]$ est le tenseur des contraintes. Cinq intégrales sont donc évaluées :

— La composante z du moment cinétique

$$\int_V \mathbf{r} \cdot 2\boldsymbol{\Omega} \times \rho \mathbf{u} dV = -2\Omega \mathcal{L}_z . \quad (\text{A.33})$$

— L'énergie potentielle gravitationnelle

$$- \int_V \mathbf{r} \cdot \rho \nabla \phi dV = W . \quad (\text{A.34})$$

— L'énergie cinétique rotationnelle dans le repère en rotation

$$\int_V \mathbf{r} \cdot \rho \Omega^2 s \mathbf{e}_s dV = I \Omega^2 , \quad (\text{A.35})$$

où I est le moment d'inertie.

— L'énergie cinétique relative

$$\int_V \mathbf{r} \cdot \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} dV = -2T_{\text{rel}} , \quad (\text{A.36})$$

où I est le moment d'inertie.

— L'intégrale volumique de la contrainte

$$\int_V \mathbf{r} \cdot \nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma}] dV = \Sigma . \quad (\text{A.37})$$

Le théorème du viriel normalisé par l'énergie potentielle gravitationnelle s'écrit alors

$$(2T_{\text{rel}} + I\Omega^2 + W + 2\Omega\mathcal{L}_z + \Sigma) / W = 0 , \quad (\text{A.38})$$

et son résidu est typiquement $\lesssim 10^{-9}$ dans nos modèles.

Le test de l'énergie

Ce test permet de vérifier l'équilibre entre les sources et les pertes d'énergie, c'est-à-dire

$$\int_S \chi \nabla T \cdot d\mathbf{S} + \int_V \varepsilon_* dV = 0 , \quad (\text{A.39})$$

dans l'enveloppe radiative et non-visqueuse de l'étoile. En pratique, l'utilisation des opacités tabulées OPAL implique que cet équilibre est vérifié avec une précision inférieure à celle du test du viriel. Le résidu est typiquement supérieur à 10^{-5} – 10^{-6} .

Annexe B

Les instabilités centrifuges et baroclines

B.1 Instabilité centrifuge

L'instabilité centrifuge, ou instabilité de Taylor-Couette est, contrairement à l'instabilité de Rayleigh-Taylor qui résulte de la superposition de deux fluides de densité différente, associée à la distribution du moment cinétique dans la direction perpendiculaire à l'axe de rotation du système. Ici, nous faisons une rapide présentation de la stabilité d'un fluide incompressible et visqueux emprisonné entre deux cylindres concentriques de rayon respectif R_1 et R_2 ($> R_1$) et de vitesse angulaire respective Ω_1 et Ω_2 . Fig. B.1 illustre la géométrie du problème.

Faisons l'hypothèse d'un écoulement axisymétrique et stationnaire, l'équation linéaire du mouvement dans le référentiel inertiel s'écrit alors simplement

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{\nabla P}{\mu} . \quad (\text{B.1})$$

Considérons, de plus, que le fluide n'est que très peu visqueux tel qu'il respecte le théorème de Taylor-Proudman, c'est-à-dire $\partial v_\theta / \partial z = 0$ à l'ordre le plus bas. Eq. (B.1) projetée dans la direction azimutale s'écrit alors

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_\theta}{dr} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} = 0 , \quad (\text{B.2})$$

qui peut être réécrite en terme de vitesse angulaire $v_\theta = r\Omega$

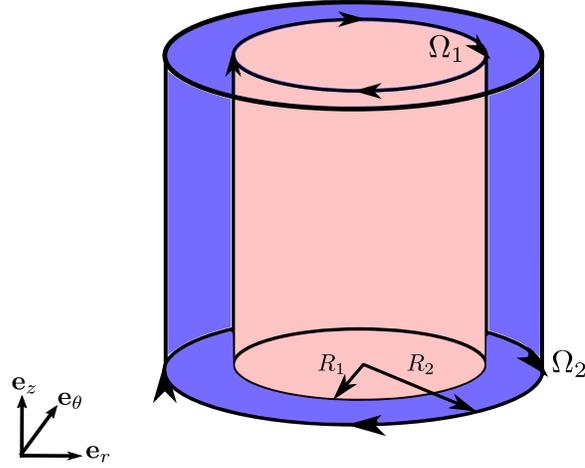


Figure B.1: Vue schématique du système considéré : le cylindre externe de rayon R_2 a pour vitesse angulaire Ω_2 , le cylindre interne de rayon R_1 a pour vitesse angulaire Ω_1 .

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{d\Omega}{dr} \right) = 0 . \quad (\text{B.3})$$

Cette équation peut enfin se mettre sous la forme d'une équation d'Euler-Cauchy

$$r \frac{d^2\Omega}{dr^2} + 3 \frac{d\Omega}{dr} = 0 , \quad (\text{B.4})$$

dont la solution s'écrit simplement

$$\Omega(r) = A + \frac{B}{r^2} , \quad (\text{B.5})$$

où A et B sont des constantes à déterminer avec les conditions limites $\Omega(R_1) = \Omega_1$ et $\Omega(R_2) = \Omega_2$. Il vient

$$A = \frac{\Omega_2 - \Omega_1 \eta^2}{1 - \eta^2}, \quad B = \frac{R_1^2 (\Omega_1 - \Omega_2)}{1 - \eta^2} , \quad (\text{B.6})$$

où $\eta = R_1/R_2$. Nous pouvons maintenant nous demander ce qu'est la condition nécessaire et suffisante pour que cet écoulement soit stable. Dans le cas non visqueux, Rayleigh démontre qu'en l'absence de viscosité, l'écoulement est stable si

$$\frac{d}{dr}(r^2\Omega)^2 > 0 \quad (\text{B.7})$$

dans l'ensemble du domaine. c'est-à-dire si $(r^2\Omega)^2$ est une fonction croissante du rayon. Une façon simple de comprendre cette condition est de faire l'expérience de pensée suivante (von Kármán, 1934; Chandrasekhar, 1961). Choisissons deux anneaux élémentaires à la même hauteur entre nos deux cylindres. Le premier est pris à $r = r_1$, le second à $r = r_2 > r_1$. Nous choisissons maintenant l'épaisseur élémentaire de ces anneaux dr_1 et dr_2 telle que la masse de fluide qu'ils contiennent soient la même, c'est-à-dire $2\pi r_1 dr_1 = 2\pi r_2 dr_2 = dS$. Le moment cinétique d'un élément de fluide dans l'anneau situé en r_i s'écrit quant à lui $L_i = r_i v_\theta(r_i) = r_i^2 \Omega(r_i)$. Intervertissons maintenant la position de ces deux anneaux, voir Fig. B.2. Par conservation du moment cinétique, l'anneau maintenant positionné en r_2 a pour moment cinétique L_1 , et l'anneau maintenant positionné en r_1 a pour moment cinétique L_2 . Ainsi, l'énergie cinétique totale dans les deux anneaux est modifiée. En effet, la différence d'énergie cinétique après et avant l'inversion de leur position s'écrit

$$\Delta E_c = \left[\left(\frac{L_2^2}{r_1^2} + \frac{L_1^2}{r_2^2} \right) - \left(\frac{L_2^2}{r_2^2} + \frac{L_1^2}{r_1^2} \right) \right] dS = (L_2^2 - L_1^2) \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) dS . \quad (\text{B.8})$$

Nous avons choisi $r_2 > r_1$, le signe de l'écart d'énergie cinétique totale ΔE_c dépend alors de la différence entre L_1 et L_2 . Si le moment cinétique est une fonction croissante du rayon, alors $L_2 > L_1$ et $\Delta E_c > 0$, c'est-à-dire qu'un tel échange de position entre deux anneaux de fluide ne peut se produire sans source externe d'énergie. Autrement dit, la configuration est stable. Si, en revanche, $L_2 < L_1$, alors $\Delta E_c < 0$, un tel échange de position entre deux anneaux de fluide libère de l'énergie et la configuration est instable.

Considérons maintenant que le profil de vitesse angulaire déterminé plus haut dans le cas d'un fluide visqueux est solution des équations non-visqueuses, et déterminons sa stabilité. Pour cela, nous injectons (B.5) dans (B.7). Il vient

$$\frac{d}{dr}(r^2\Omega)^2 = 4r^3 A \left(A + \frac{B}{r^2} \right) > 0 . \quad (\text{B.9})$$

En remplaçant A et B par leur expression (B.6), le critère de stabilité devient simplement

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} > \eta^2 . \quad (\text{B.10})$$

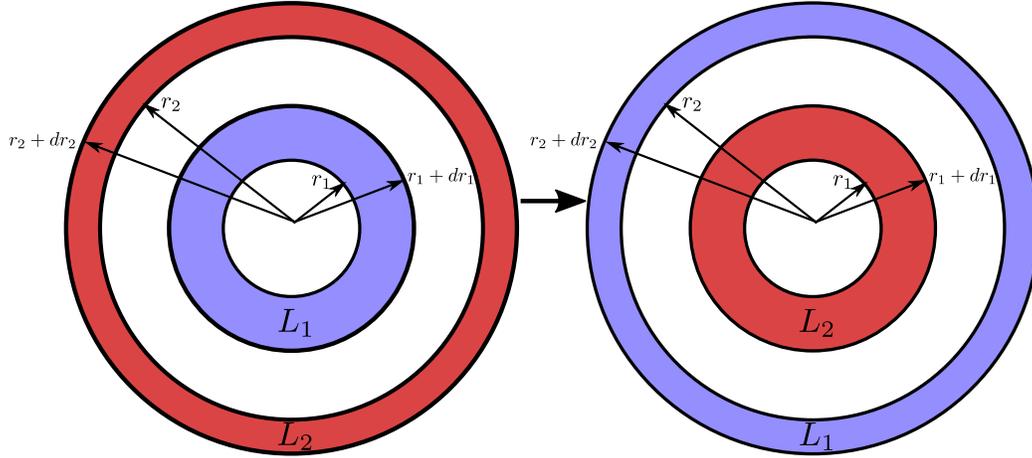


Figure B.2: Vue schématique des anneaux concentriques localisés à r_1 et r_2 et d'épaisseur respective dr_1 et dr_2 . La figure de droite correspond au cas où la position des deux anneaux a été permutée.

Ainsi, pour que l'écoulement soit stable, il faut que le cylindre externe ait une vitesse angulaire au moins η^2 -fois supérieure à celle du cylindre interne.

Lorsque les effets visqueux ne peuvent pas être négligés, ce critère de stabilité est modifié, et devient

$$\text{Ta} \geq \text{Ta}_c, \quad (\text{B.11})$$

où Ta est le nombre de Taylor défini comme suit

$$\text{Ta} = \frac{4\Omega_1^2}{\nu^2} R_1^4 \frac{(1 - \Omega_2/\Omega_1)(1 - \Omega_2/(\Omega_1\eta^2))}{(1 - \eta^2)^2}, \quad (\text{B.12})$$

où Ta_c est le nombre de Taylor critique qui lui-même est fonction de η et de Ω_2/Ω_1 (Chandrasekhar, 1961). Lorsque ces deux quantités approchent 1, alors $\text{Ta}_c \simeq 1708$ (Davey, 1962). L'enveloppe radiative des étoiles massives étant très peu visqueuse hors des couches limites, nous pouvons considérer le critère (B.7) comme étant le critère pertinent. Notons que l'extraction de moment cinétique dans les couches les plus superficielles de l'enveloppe radiative des étoiles massives via les vents radiatifs

pourrait engendrer une diminution locale du moment cinétique avec la distance à l'axe de rotation, c'est-à-dire engendrer la déstabilisation de ces couches.

B.2 Instabilité barocline

Nous avons vu, plus haut, que les étoiles en rotation sont baroclines, c'est-à-dire que leurs isobares et leurs isopycnes ne sont pas alignés. Nous avons aussi vu que ce non-alignement implique un couple barocline qui lui même génère un écoulement méridien. En plus de cet écoulement méridien, plusieurs instabilités peuvent résulter de cet état. La figure 12.7 de [Maeder \(2009\)](#), que nous reproduisons en Fig. [B.3](#), illustre de manière simple le concept. Si, sous l'action d'une perturbation locale, l'on déplace une particule fluide adiabatiquement du point A au point B, la densité de cette particule, supérieure à celle du milieu en son nouveau voisinage, implique qu'elle va reprendre sa position initiale. Le système réagit alors à cette perturbation de manière stable. En revanche, si l'on déplace la particule, toujours adiabatiquement dans un premier temps, du point A au point C, alors la particule fluide en ce point sera plus chaude que son nouvel environnement ce qui tendra, sous l'effet de la force d'Archimède, à l'éloigner de sa position originelle. Un tel déplacement ($A \rightarrow C$) est ainsi instable. Cependant, les effets non-adiabatiques, donc la possibilité pour la particule fluide de se thermaliser, ainsi que la conservation locale du moment cinétique peuvent stabiliser un tel processus. C'est ce dont nous allons maintenant discuter en présentant brièvement trois types d'instabilités axisymétriques de degré de sophistication croissant : l'instabilité de Solberg-Høiland, l'instabilité de Goldreich-Schubert-Fricke (ou instabilité GSF), et l'instabilité ABCD.

B.2.1 Instabilité de Solberg-Høiland

En l'absence de viscosité et de diffusion thermique, [Solberg \(1936\)](#) et [Høiland \(1941\)](#) proposent les conditions (nécessaires, mais pas suffisantes) de stabilité suivantes, pour un fluide stratifié et en rotation cylindrique $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(s, z)\mathbf{e}_z$

$$\frac{1}{s^3} \frac{\partial j^2}{\partial s} - \mathbf{g} \cdot \nabla S \frac{1}{c_p} \frac{\gamma - 1}{\Gamma_3 - 1} > 0, \quad (\text{B.13})$$

et

$$(\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_z) \left(\frac{\partial j^2}{\partial s} \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial j^2}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial s} \right) > 0, \quad (\text{B.14})$$

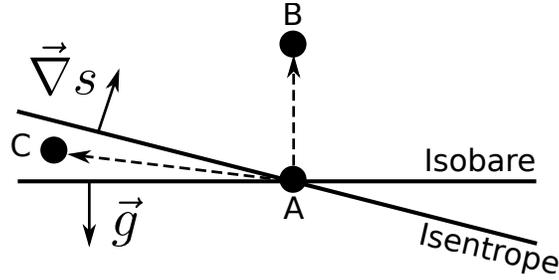


Figure B.3: Illustration de l’instabilité barocline, reproduite à partir de la Fig. 12.7 de Maeder (2009). Tandis que le déplacement d’une particule fluide initialement positionnée au point A, vers le point B est stable, son déplacement vers le point C ne l’est pas. Dans le premier cas elle reprend sa position d’origine, dans le second elle s’en éloigne.

où $j = s^2\Omega(s, z)$ est le moment cinétique spécifique, S est l’entropie spécifique, c_p et c_v sont respectivement la capacité calorifique à pression et volume constant, et Γ_3 est une fonction du rapport entre pression du gaz et pression totale (Tassoul, 1978). Si l’on néglige la pression de radiation, alors $\Gamma_3 = \gamma \equiv c_p/c_v$, et (B.13) devient simplement

$$\frac{1}{s^3} \frac{\partial j^2}{\partial s} - \frac{1}{c_p} \mathbf{g} \cdot \nabla S > 0 . \quad (\text{B.15})$$

Remarquons que dans la limite sans rotation ($j = 0$), les conditions de stabilité (B.15) et (B.14) se transforment en la condition unique

$$-\mathbf{g} \cdot \nabla S > 0 , \quad (\text{B.16})$$

c’est-à-dire que lorsque l’on considère une symétrie sphérique, l’entropie spécifique doit nécessairement croître vers l’extérieur pour assurer la stabilité du système. C’est le critère de stabilité Schwarzschild. Si l’on se place maintenant dans la limite d’une étoile homentropique ($\nabla S = \mathbf{0}$), on a alors $P \equiv P(\rho)$ (donc une étoile barotrope) et d’après (6.19), $\partial\Omega/\partial z = 0$. La condition de stabilité (B.15) devient alors

$$\frac{dj^2}{ds} > 0 , \quad (\text{B.17})$$

c'est-à-dire que l'on retrouve la condition de Rayleigh (B.7).

B.2.2 Instabilité GSF

Le critère de stabilité GSF (Goldreich–Schubert–Fricke, Goldreich & Schubert, 1967; Fricke, 1968) ajoute un degré de sophistication en considérant les effets de la viscosité et de la diffusion thermique. Les critères de stabilité (B.13) et (B.14) deviennent simplement

$$Pr\mathcal{N}_T^2 + \mathcal{N}_\Omega^2 > 0 , \quad (\text{B.18})$$

et

$$\left| s \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} \right| > Pr\mathcal{N}_T^2 , \quad (\text{B.19})$$

où

$$\mathcal{N}_T^2 = -\mathbf{g} \cdot \nabla S \frac{1}{c_p} \frac{\gamma - 1}{\Gamma_3 - 1}, \quad \mathcal{N}_\Omega^2 = \frac{1}{s^3} \frac{\partial j^2}{\partial s}, \quad \text{et} \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa_T} . \quad (\text{B.20})$$

\mathcal{N}_T^2 est la fréquence de Brunt-Väisälä locale et Pr est le nombre de Prandtl local. Notons que la condition (B.19) est une condition purement barocline associée à la rotation différentielle parallèle à l'axe de rotation. La première condition implique qu'un déplacement $A \rightarrow C$ (cf Fig. B.3), dans un système en rotation, est instable si l'effet stabilisateur du gradient de température entre ces deux points, pondéré par les effets diffusifs, est insuffisant pour compenser l'augmentation de la force centrifuge associée à ce déplacement. La seconde condition signifie qu'un déplacement vertical d'une particule fluide dans la direction parallèle à l'axe de rotation est instable si sa nouvelle vitesse angulaire est supérieure à la vitesse angulaire locale. En effet, dans ce cas l'excès de force centrifuge éloigne la particule fluide de sa position initiale.

Il est important de considérer l'effet additionnel d'une stratification stable en poids moléculaire moyen. Une telle stratification se forme proche du coeur convectif des étoiles massives au cours de leur évolution. Cette stratification a pour effet de stabiliser le système, et la condition de stabilité (B.18) peut être réécrite

$$Pr\mathcal{N}_T^2 + \frac{\nu}{\kappa_\mu}\mathcal{N}_\mu^2 + \mathcal{N}_\Omega^2 > 0 , \quad (\text{B.21})$$

où κ_μ est la diffusivité moléculaire. La considération du rôle de la stratification en poids moléculaire moyen fait de cette instabilité une instabilité triplement-diffusive.

B.2.3 Instabilité ABCD

Il existe une autre instabilité barocline, l'instabilité ABCD (Axisymmetric-BaroClinic-Diffusive instability ; McIntyre, 1970; Knobloch & Spruit, 1983) qui est elle aussi une instabilité triplement diffusive. Elle peut être décrite simplement comme suit : si l'on déplace une particule fluide du point A au point C (cf Fig. B.3), dans un système en rotation, la conservation du moment cinétique tend à ramener la particule à sa position initiale. Cependant, sa température propre, maintenant supérieure à son nouvel environnement tend à l'en éloigner. Si l'effet stabilisateur l'emporte, alors la particule fluide va se diriger vers sa position initiale, mais sa température propre sera plus faible que ce qu'elle était avant le déplacement, du fait de la diffusion thermique. Elle va ainsi dépasser puis osciller autour de sa position d'équilibre. Le signe du taux de croissance de l'amplitude de ces oscillations, donc la stabilité du système, dépendra alors du temps d'ajustement thermique de la particule fluide. L'instabilité ABCD résulte donc d'une sur-stabilité et est donc par essence différente de l'instabilité GSF. La condition de stabilité associée s'écrit

$$Pr \left(\mathcal{N}_T^2 + \mathcal{N}_\mu^2 \right) + \mathcal{N}_\Omega^2 > 0 . \quad (\text{B.22})$$

Annexe C

Tests de convergence et de dissipation

C.1 Test de convergence

Pour des raisons numériques évidentes, les développements en série sur la base des harmoniques sphériques et des polynômes de Tchebyshev présentés en Sect. 7.2.1, et détaillés dans le formulaire (Eq. H.79 et Eq. H.43) doivent être tronqués. Nous choisissons de nous arrêter à l'ordre l_{\max} pour les harmoniques sphériques, et à l'ordre n_r pour les polynômes de Tchebyshev. La difficulté consiste alors à choisir les valeurs minimales de l_{\max} et de n_r telles que les séries de polynômes de Tchebyshev et d'harmoniques sphériques convergent. C'est-à-dire pour que

$$\lim_{n \rightarrow n_r} a_n = \epsilon_1, \quad \lim_{l \rightarrow l_{\max}} u^l = \epsilon_2, \quad \text{et} \quad \lim_{l \rightarrow l_{\max}} w^l = \epsilon_3 \quad (\text{C.1})$$

où $\epsilon_{1,2,3} \ll 1$. Pour cela, nous représentons la valeur maximale des coefficients spectraux parmi l'autre composante spectrale, en fonction du degré des polynômes associés (voir Annexe H). En plus de nous assurer de la convergence du modèle, ce test permet de choisir le nombre de points de grille optimal tel que la précision souhaitée est atteinte. Nous représentons ces spectres en Fig. C.1 pour un modèle d'écoulement incompressible présenté en Sect. 7.3, et pour $E = 10^{-6}$.

C.2 Test de dissipation

Lorsque le test de convergence est réussi, nous voulons nous assurer qu'il n'y a pas eu d'erreur dans la projection des équations sur la base des harmoniques sphériques, ou, lorsqu'il s'agit d'un modèle évolutif, qu'un état stationnaire a bien été

ANNEXE C. TESTS DE CONVERGENCE ET DE DISSIPATION

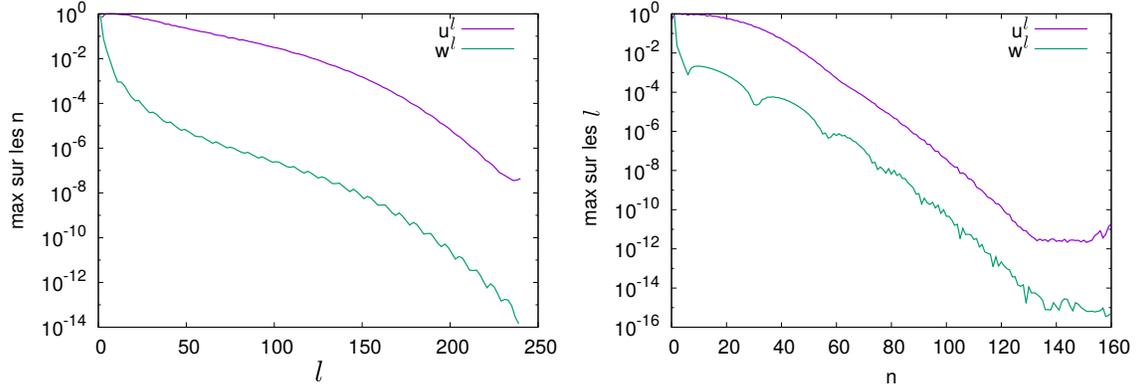


Figure C.1: Spectres des coefficients des harmoniques sphériques (gauche) et des polynômes de Chebyshev (droite) pour la composante poloïdale de champ de vitesse (u^l), et pour sa composante toroïdale (w^l). Pour toute valeur de l ou de n , la valeur maximale du coefficient parmi l'autre composante spectrale a été choisie. Le modèle considéré est celui d'un écoulement incompressible décrit en Sect. 7.3, pour $E = 10^{-6}$.

atteint. Pour cela, nous vérifions qu'à l'état stationnaire, le flux d'énergie résultant du forçage imposé au niveau de la coquille externe est égal à la dissipation visqueuse totale d'énergie. Pour cela, nous multiplions l'équation du mouvement par $\rho \mathbf{u}$, et nous intégrons l'équation résultante sur le volume compris entre les deux coquilles. Il vient

$$\int \frac{\rho}{2} \frac{\partial \rho \mathbf{u}^2}{\partial t} dV + \int \rho \mathbf{u} \cdot (\mathbf{e}_z \times \rho \mathbf{u}) dV = - \int \rho \mathbf{u} \cdot \nabla p dV + E \int \rho \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{F}_{\text{visc}}}{\nu} dV, \quad (\text{C.2})$$

où la viscosité cinématique ν est choisie constante, et \mathbf{F}_{visc} est définie en Eq. 7.2. Le second terme du côté gauche est nul, tout comme le premier terme du côté droit ; en effet,

$$\int \rho \mathbf{u} \cdot \nabla p dV = \int \nabla \cdot (p \rho \mathbf{u}) dV - \int p \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV = - \int p \rho \mathbf{u} \cdot dS \mathbf{e}_r = 0, \quad (\text{C.3})$$

car $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r = 0$ au niveau des parois (condition d'imperméabilité). Il suffit ainsi de vérifier que

$$\int \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}_{\text{visc}} dV = 0, \quad (\text{C.4})$$

à l'état stationnaire. Notons que $\mathbf{F}_{\text{visc}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$, (C.4) devient alors

$$\begin{aligned}
 \int \rho u_i \partial_j \sigma_{ij} dV &= \int \partial_j (\rho u_i \sigma_{ij}) dV - \int \sigma_{ij} \partial_j (\rho u_i) dV \\
 &= \int \rho u_i \sigma_{ij} dS_j - \int \sigma_{ij} \partial_j (\rho u_i) dV \\
 &= \int \rho (v_r \sigma_{rr} + v_\theta \sigma_{r\theta} + v_\phi \sigma_{r\phi}) dS - \frac{1}{2} \int \sigma_{ij} \left(\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_i} \right) dV = 0,
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

où nous avons utilisé le théorème de Green-Ostrogradski (voir Annexe H). La première intégrale peut-être projetée sur la base des harmoniques sphériques pour des écoulements axisymétriques ($m = 0$)

$$F = \int \rho (v_r \sigma_{rr} + v_\theta \sigma_{r\theta} + v_\phi \sigma_{r\phi}) dS = \nu \rho_s^2 \sum_{l=0}^{\infty} \left[l(l+1) v^l \left(\frac{dv^l}{dr} - v^l \right) + l(l+1) w^l \left(\frac{dw^l}{dr} - w^l \right) \right], \tag{C.6}$$

en ayant utilisé $u_l(r=1) = 0$, ainsi que les relations d'orthogonalité (H.4). Nous écrivons ensuite la seconde intégrale comme suit

$$\frac{1}{2} \int_{(V)} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_i} \right) dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} \mu \xi dV, \tag{C.7}$$

où $\xi = c_{ij} \tilde{c}_{ij}$, et (voir le formulaire en Annexe H)

$$\begin{cases} c_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i - 2/3 (\partial_k u_k) \delta_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu} \\ \tilde{c}_{ij} = \rho \left(c_{ij} + \frac{2}{3} (\partial_k u_k) \delta_{ij} \right) + \rho' (u_i \delta_{jr} + u_j \delta_{ir}). \end{cases} \tag{C.8}$$

Utilisons maintenant $c_{ij} \delta_{ij} = \text{Tr}(c_{ij}) = 0$, il vient

$$\xi = \rho \left(c_{rr}^2 + c_{\theta\theta}^2 + c_{\phi\phi}^2 + 2(c_{r\theta}^2 + c_{r\phi}^2 + c_{\theta\phi}^2) \right) + 2\rho' (c_{rr} u_r + c_{r\theta} u_\theta + c_{r\phi} u_\phi), \tag{C.9}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Nous utilisons ensuite l'expression du tenseur des contraintes en coordonnées sphériques, ainsi que les relations d'orthogonalité décrites dans le formulaire présenté en Annexe H, et obtenons la dissipation visqueuse d'énergie, moyennée sur la sphère

$$\begin{aligned}
 d(r) &= \frac{1}{2}\nu \int \rho K d\Omega \\
 &= \nu \sum_{l=0}^{\infty} 2\rho^2 \left(\frac{du^l}{dr} - 1/3d_l \right)^2 + \rho^2 \left(2u_l - 2/3rd_l - l(l+1)v^l \right)^2 / r^2 + l(l+1)\rho^2 (|s^l|^2 + |t^l|^2) \\
 &+ 2\rho\rho' u_l \left(\frac{du^l}{dr} - 1/3d_l \right) + l(l+1)\rho\rho' (v^l s^l + w^l t^l) + (l-1)l(l+1)(l+2)\rho^2 \frac{|v^l|^2 + |w^l|^2}{r^2} .
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

et la dissipation visqueuse totale

$$D = \int d(r)r^2 dr . \tag{C.11}$$

Le test de dissipation consiste ainsi à vérifier qu'à l'état stationnaire, $F = D$.

Annexe D

L'écoulement de Taylor-Couette sphérique

Nous vérifions, dans cette annexe, notre solution numérique en la comparant avec la solution asymptotique de Proudman (1956) et de Stewartson (1966) dans le cas d'un écoulement de Taylor-Couette à symétrie sphérique. Dans cette configuration, le fluide est considéré incompressible et la vitesse angulaire des coquilles sphériques internes et externes sont imposées ; $\Omega_c = \Omega_s(1 + \epsilon)$ et Ω_s , respectivement. Nous résolvons ici le système d'équation (7.3) avec $\rho = 1$ (donc $b = 1$) et $\partial_t = 0$, en imposant les conditions aux limites de non glissement et de non pénétration au niveau des deux parois

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \psi = 0, & u_{\phi,*} = \Omega_s(1 + \epsilon)\eta \sin \theta, & r = \eta \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} = \psi = 0, & u_{\phi,*} = \Omega_s \sin \theta, & r = 1, \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

où la fonction de courant $\psi(r, \theta)$ est définie en Eq. 7.34 et le symbole * indique une variable dimensionnée. Pour un fluide incompressible, nous rappelons que la fonction de courant projetée sur la base des harmoniques sphériques s'écrit

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{r^2 u^l}{\Lambda} \frac{\partial Y^l}{\partial \theta}. \quad (\text{D.2})$$

Les conditions limites adimensionnées et projetées sur la base des harmoniques sphériques dans le référentiel tournant avec la coquille interne s'écrivent quant à elles

$$\begin{cases} u^l = w^l = 0, & u^l = \frac{du^l}{dr} = 0, & \text{à } r = \eta \\ u^l = 0, & u^l = \frac{du^l}{dr} = 0, & w^l = -A\delta_{l,1} \text{ à } r = 1, \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

où A est une constante imposant l'amplitude de la rotation différentielle. Elle est reliée à ϵ comme suit

$$\epsilon = \frac{1}{1 - 2A\sqrt{\frac{3}{4\pi}}} - 1. \quad (\text{D.4})$$

Notons que dans cette étude, nous pouvons choisir A (ou ϵ) suffisamment petit pour que l'approche linéaire soit justifiée. Lorsque les termes non-linéaires sont négligés, la valeur de la constante A devient arbitraire, et nous choisissons $A = 1$. La Fig. D.1 montre une vue méridienne de la circulation méridienne et de la rotation différentielle dans le repère en rotation, pour $E = 10^{-6}$ et $\eta = 0.35$. Nous distinguons trois régions dans lesquelles la structure et l'amplitude de l'écoulement sont très différentes. La première correspond à l'intérieur du cylindre \mathcal{C} , tangent à la coquille interne ($s = r \sin \theta < \eta$); cette région est en rotation quasi-solide avec une vitesse angulaire $(\Omega_c + \Omega_s)/2$ le long de l'axe de rotation (Proudman, 1956). La région hors de ce cylindre (c'est à dire $s > \eta$) est elle aussi en rotation quasi-solide mais avec à la vitesse angulaire de la coquille externe Ω_s (voir sect. 6.2 pour plus de détails). Contrairement au cylindre tangent \mathcal{C} , cette région est privée de circulation méridienne. Enfin, dans la limites des petits nombres d'Ekman, il existe une fine couche de cisaillement, tangente à la coquille interne, appelée couche de Stewartson. Cette couche de cisaillement est en réalité constituée de trois couches imbriquées d'épaisseur proportionnelles à $E^{2/7}$, $E^{1/3}$, et $E^{1/4}$ (Stewartson, 1966, et Sect. 6.4).

Dans la limite asymptotique des petits nombres d'Ekman, l'écoulement satisfait le théorème de Taylor-Proudman

$$(\mathbf{e}_z \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0, \quad (\text{D.5})$$

impliquant une solution géostrophique à l'ordre le plus bas. L'amplitude du champ de vitesses est alors (quasi-)indépendante de la coordonnée z (voir Sect. 6.2). Plus précisément, dans le régime asymptotique des petits nombres d'Ekman, Proudman (1956) dérive la solution analytique

$$\frac{\Omega(s) - \Omega_s}{\Omega_c - \Omega_s} \equiv \frac{\tilde{u}_\phi(s)}{s} = \frac{(1 - s^2)^{1/4}}{(1 - s^2)^{1/4} + [1 - (s/\eta)^2]^{1/4}}, \quad (\text{D.6})$$

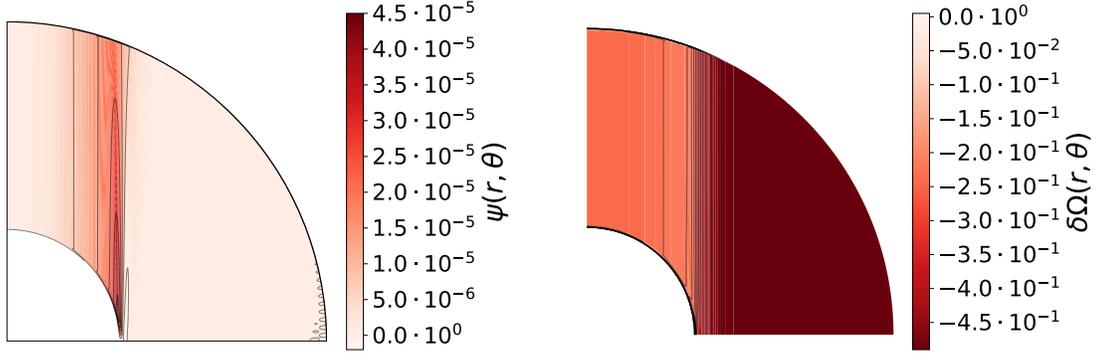


Figure D.1: Vue méridienne de la fonction de courant ψ (gauche) et de la rotation différentielle dans le repère en rotation avec la coquille interne $\delta\Omega = (\Omega - \Omega_c)/2\Omega_c$ (droite), pour $E = 10^{-6}$ et $\eta = 0.35$.

pour la vitesse angulaire dans le cylindre tangent \mathcal{C} , et

$$\frac{(2E)^{-1/2}}{\Omega_c - \Omega_s} \psi(s) \equiv -\tilde{\psi}(s) E_D^{-1/2} = \frac{s^2}{2\{(1-s^2)^{1/4} + [1 - (s/\eta)^2]^{1/4}\}}, \quad (\text{D.7})$$

pour la fonction de courant. Les quantités marquées $\tilde{\cdot}$ correspondent au formalisme utilisé par Dormy *et al.* (1998), c'est-à-dire dans le repère tournant avec la coquille externe et avec pour unité de temps $(\Omega_c - \Omega_s)^{-1} = (\epsilon\Omega_s)^{-1}$. Le nombre d'Ekman E_D de Dormy *et al.* (1998) se compare au notre comme suit

$$E_D = \frac{2\Omega_c}{\Omega_s} E. \quad (\text{D.8})$$

Nous pouvons ainsi comparer nos résultats à ceux de Dormy *et al.* (1998), et à la solution analytique de Proudman (1956), en représentant ces deux quantités pour des modèles avec divers nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$ et $r = 0.7$, voir Fig. D.2a. Comme Dormy *et al.* (1998), nous trouvons que le comportement asymptotique formalisé par Proudman (1956), proche du cylindre tangent, est atteint pour des nombres d'Ekman inférieurs ou égaux à 10^{-6} . L'amplitude de la vitesse méridienne est quant à elle proportionnelle à \sqrt{E} , c'est-à-dire à l'amplitude de la vitesse radiale résultant du pompage d'Ekman (voir Eq. 6.35). Ce dernier contrôle donc la dynamique de l'écoulement dans le cylindre tangent \mathcal{C} . Nous vérifions aussi le comportement quasi-géostrophique de l'écoulement hors couche de Stewartson en représentant le profil de vitesse angulaire normalisée dans le repère en rotation avec la coquille externe, à différents r , Fig. D.3a.

ANNEXE D. L'ÉCOULEMENT DE TAYLOR-COUPETTE SPHÉRIQUE

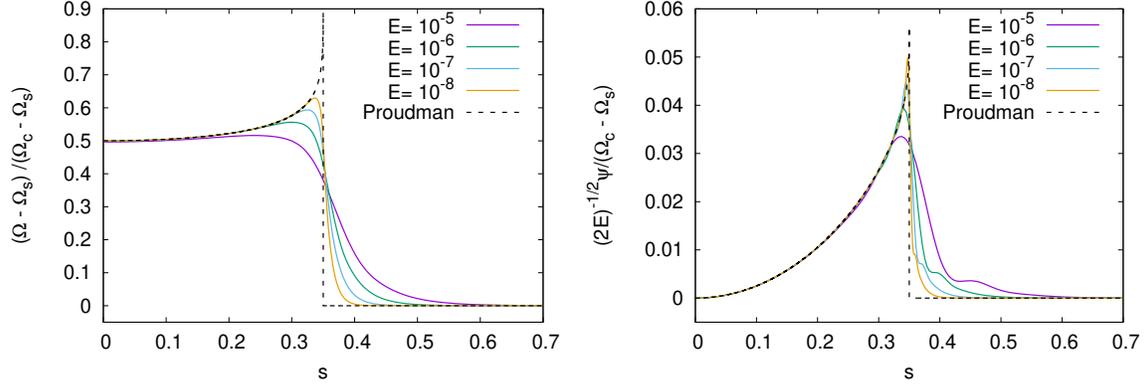


Figure D.2: Vitesse angulaire (gauche) et fonction de courant (droite) normalisées dans le repère en rotation avec la coquille externe en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, et $r = 0.7$. Les traits noirs pointillés correspondent aux solutions analytiques asymptotiques de Proudman (1956).

Comme Dormy *et al.* (1998), nous vérifions maintenant l'épaisseur des trois couches de Stewartson imbriquées prédites par Stewartson (1966), et justifiées Sect. 6.4. Pour cela, nous estimons le taux de décroissance exponentielle de la vitesse azimutale (λ_1) et de la fonction de courant (λ_2) hors du cylindre tangent, c'est-à-dire dans la région où, d'après Proudman (1956) et dans la limite asymptotique des petits nombres d'Ekman, il n'y a aucun écoulement dans le référentiel en rotation avec la coquille externe. Dans cette région, Stewartson (1966) prédit l'existence de la couche d'épaisseur $O(E^{1/4})$. Dans la section 6.4.1, nous avons montré que la couche centrale d'épaisseur $O(E^{1/3})$ est agéostrophique, c'est-à-dire qu'à cet endroit, l'amplitude de la vitesse dépend de la coordonnée z . Ainsi, dans cette couche, la solution numérique ne peut plus être en accord avec la solution géostrophique et analytique de Proudman (1956). L'épaisseur de cette couche (δ) peut ainsi être mesurée comme étant la région où la vitesse azimutale est agéostrophique. Cette caractéristique de l'écoulement est représentée Fig. D.3b. Aussi, nous remarquons que dans cette couche, l'amplitude de la circulation méridienne est maximale à faibles z dans le cylindre \mathcal{C} , et à z élevés hors de ce dernier, en Fig. D.4. Les résultats sont présentés dans la table D.1 et sont en accord avec les prédictions théoriques de Stewartson (1966) et avec les résultats numériques de Dormy *et al.* (1998). Enfin, pour ce qui est de la couche d'épaisseur prédite $O(E^{2/7})$, nous étirons la coordonnée radiale cylindrique d'un facteur $E^{-2/7}$ pour $s < \eta$ et d'un facteur $E^{-1/4}$ pour $s > \eta$, et nous représentons l'écart à la solution asymptotique de Proudman (1956), pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$ et $r = 0.7$, en Fig. D.5. Nous concluons que l'épaisseur des différentes couches limites imbriquées, mesurées numériquement, est en accord avec les prédictions analytiques

ANNEXE D. L'ÉCOULEMENT DE TAYLOR-COUPETTE SPHÉRIQUE

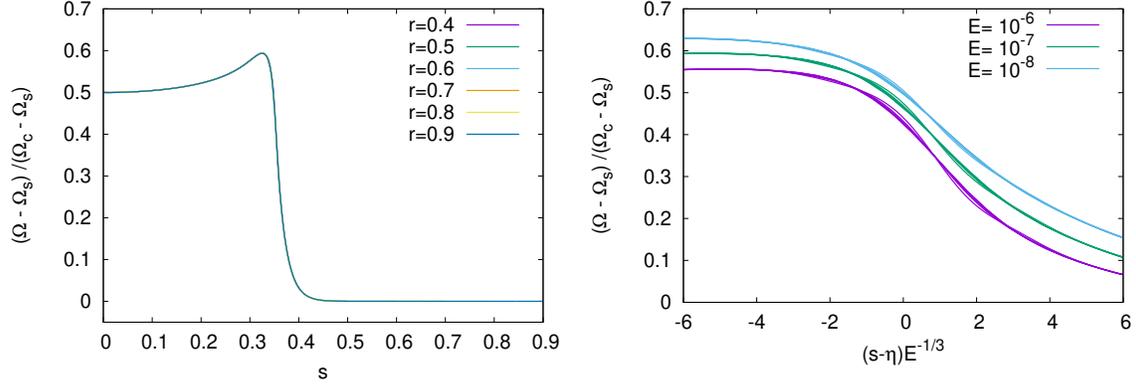


Figure D.3: Gauche : vitesse angulaire normalisée dans le repère en rotation avec la coquille externe en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, et à différents r . Droite : vitesse angulaire normalisée dans le repère en rotation avec la coquille externe en fonction de la coordonnée radiale cylindrique étirée $(s - \eta)E^{-1/3}$ pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, et $r = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$, et 0.9 .

de [Stewartson \(1966\)](#) et avec les résultats numériques de [Dormy et al. \(1998\)](#), dans la limite des petits nombres d'Ekman, typiquement pour $E \lesssim 10^{-6}$.

Table D.1.: δ est l'épaisseur de la région où Ω est agéostrophique. λ_1 et λ_2 sont, respectivement, le taux de décroissance exponentielle de la vitesse azimuthale et de la fonction de courant à l'extérieur et à l'intérieur du cylindre tangent \mathcal{C} . La dernière ligne donne le scaling de l'épaisseur de ces couches.

E	$\delta/2$	λ_1	λ_2
10^{-5}	0.116	-19.26	25.95
10^{-6}	0.056	-31.97	49.08
10^{-7}	0.027	-53.91	90.18
10^{-8}	0.013	-90.04	161.74
	$E^{-0.32}$	$E^{-0.23}$	$E^{-0.25}$

Maintenant que nous avons mis notre modèle numérique à l'épreuve des solutions asymptotiques de [Proudman \(1956\)](#) et de [Stewartson \(1966\)](#) pour l'écoulement de Taylor-Couette à symétrie sphérique, nous pouvons nous concentrer sur l'étude de l'écoulement de spin-down résultant d'une contrainte horizontale simulant un flux de moment cinétique sortant.

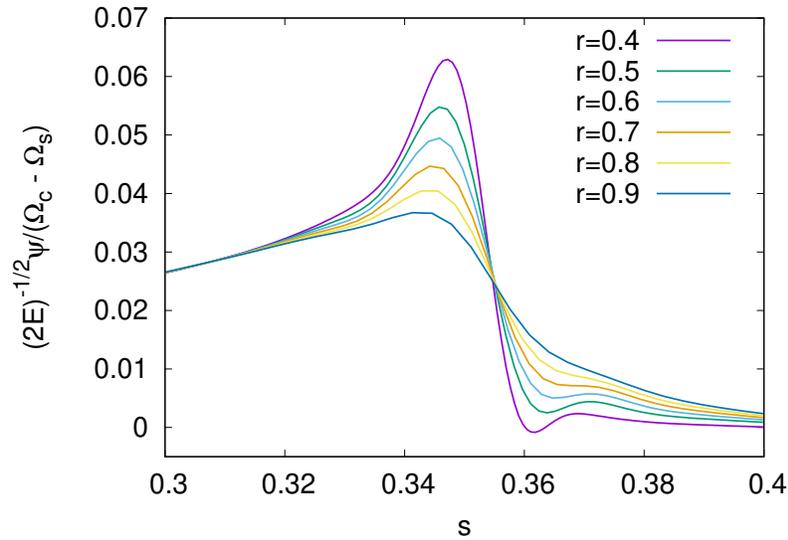


Figure D.4: Fonction de courant normalisée dans le repère en rotation avec la coquille externe en fonction de la coordonnée radiale cylindrique s pour $E = 10^{-7}$, $\eta = 0.35$, et à différents r .

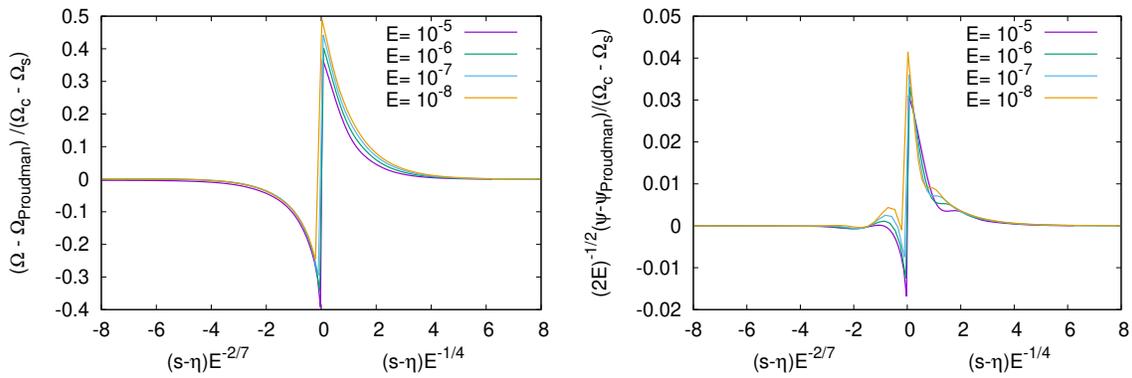


Figure D.5: Ecart à la solution asymptotique de Proudman (1956) pour la vitesse angulaire (gauche) et la fonction de courant (droite) en fonction des coordonnées radiales cylindriques étirées $(s - \eta)E^{-2/7}$ pour $s < \eta$ et $(s - \eta)E^{-1/4}$ pour $s > \eta$, pour plusieurs nombres d'Ekman, $\eta = 0.35$, et $r = 0.7$.

Annexe E

Approximation linéaire

E.1 Condition de validité

Cette annexe présente une justification *a posteriori* de l'utilisation de l'approximation linéaire dans le chapitre 7. Par souci de simplicité, nous nous concentrons sur l'écoulement incompressible. L'équation du mouvement non linéaire, en coordonnées sphériques et dans le repère inertiel, s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* = -\nabla p^* + \mathbf{F}_{\text{visc}} , \quad (\text{E.1})$$

où

$$\mathbf{F}_{\text{visc}} = \mu^* \left(\Delta \mathbf{u}^* + \frac{1}{3} \nabla \text{div} \mathbf{u}^* \right) + 2(\nabla \mu^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* + \nabla \mu^* \times (\nabla \times \mathbf{u}^*) - \frac{2}{3} \nabla (\mu^* \text{div} \mathbf{u}^*) \quad (\text{E.2})$$

est la force visqueuse dimensionnée. Décomposons maintenant le champ de vitesse comme la somme de la vitesse de rotation du référentiel $\Omega_c \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$ et de la vitesse résiduel $\mathbf{u}^{*,r}$ (voir Eq. 6.9)

$$\mathbf{u}^* = \Omega_c \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} + \mathbf{u}^{*,r} . \quad (\text{E.3})$$

Dans le cas d'un écoulement axisymétrique, le terme non linéaire peut être réécrit (voir Eq. 6.12)

$$(\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* = \Omega_c^2 \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) + 2\Omega_c \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^{*,r} + (\mathbf{u}^{*,r} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{*,r} . \quad (\text{E.4})$$

ANNEXE E. APPROXIMATION LINÉAIRE

Notons que le terme centrifuge dérive d'un potentiel et peut donc être regroupé avec la pression en un potentiel Π . Enfin, nous écrivons l'équation du mouvement non-linéaire et sans dimension dans le repère en rotation avec la coquille interne

$$\frac{\partial \mathbf{u}^r}{\partial t} + (\mathbf{u}^r \cdot \nabla) \mathbf{u}^r + \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^r = -\nabla \Pi + E \Delta \mathbf{u}^r . \quad (\text{E.5})$$

A partir de maintenant, le champ de vitesses sans dimension dans le repère en rotation \mathbf{u}^r sera écrit \mathbf{u} . Nous explicitons maintenant le terme non linéaire comme

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_r - (u_\theta^2 + u_\phi^2)/r \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\theta + (u_\theta u_\phi - u_\phi^2 \cot \theta)/r \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\phi + (u_r u_\phi + u_\theta u_\phi \cot \theta)/r \end{bmatrix} . \quad (\text{E.6})$$

L'analyse de la couche limite d'Ekman présentée en Sect. 7.3.2 montre que u_r et u_θ sont d'ordre E (hors couche limite d'Ekman et couche de Stewartson). Dans le cas d'un écoulement axisymétrique, et en négligeant les termes d'ordre $O(E^2)$, (E.6) peut être simplifiée comme suit

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_\phi^2/r \\ -u_\phi^2 \cot \theta/r \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\phi + (u_r u_\phi + u_\theta u_\phi \cot \theta)/r \end{bmatrix} . \quad (\text{E.7})$$

L'accélération de Coriolis, à son tour, s'écrit

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\sin \theta u_\phi \\ -\cos \theta u_\phi \\ \cos \theta u_\theta + \sin \theta u_r \end{bmatrix} . \quad (\text{E.8})$$

Puisque nous travaillons avec l'équation de la vorticité, nous avons besoin de

$$\nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1/(r \sin \theta) \partial_\theta \left[\sin \theta \left((\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\phi + (u_\phi u_r + u_\phi u_\theta)/r \right) \right] \\ -1/r \partial_r \left[r (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\phi + u_\phi u_r + u_\phi u_\theta \right] \\ A_\phi \end{bmatrix}, \quad (\text{E.9})$$

et de

$$\nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1/(r \sin \theta) \partial_\theta (\sin \theta \cos \theta u_\theta + \sin^2 \theta u_r) \\ -1/r \partial_r (r \cos \theta u_\theta + r \sin \theta u_r) \\ B_\phi \end{bmatrix}, \quad (\text{E.10})$$

où

$$A_\phi = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) u_\phi^2 = -\frac{2u_\phi}{r^2} (s + z \cot \theta) \frac{\partial u_\phi}{\partial z}, \quad (\text{E.11})$$

et

$$B_\phi = \frac{1}{r} (\partial_\theta \sin \theta - \partial_r r \cos \theta) u_\phi = -\frac{\partial u_\phi}{\partial z}. \quad (\text{E.12})$$

Notons qu'à l'état stationnaire, et hors des couches limites, $\partial u_\phi / \partial z = O(E)$ d'après le théorème de Taylor-Proudman, nous pouvons donc écrire

$$\|\nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{u})\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right\| = O(E) \quad \text{and} \quad \|\nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}\| = O(u_\phi E). \quad (\text{E.13})$$

Ainsi, si $u_\phi = O(1)$, alors les termes non-linéaires dans l'équation de la vorticit e sont du m eme ordre que l'acc el eration de Coriolis et ne peuvent donc pas être négligées. Cependant, dans le cylindre tangent, nous avons trouvée, dans la section 7.3.2, que $u_\phi = O(\sqrt{E})$. Dans cette r egion, les termes non-l enaires peuvent être négligées. Hors du cylindre tangent, l'amplitude de la vitesse azimutale varie comme A (voir eq. 7.53), et les termes non-l enaires sont donc d'ordre $O(AE)$. Ainsi, pour des A suffisamment petits, nous nous attendons à ce que l'approximation linéaire soit pertinente pour l'étude de notre probl eme. Nous repr esentons le rapport entre la norme

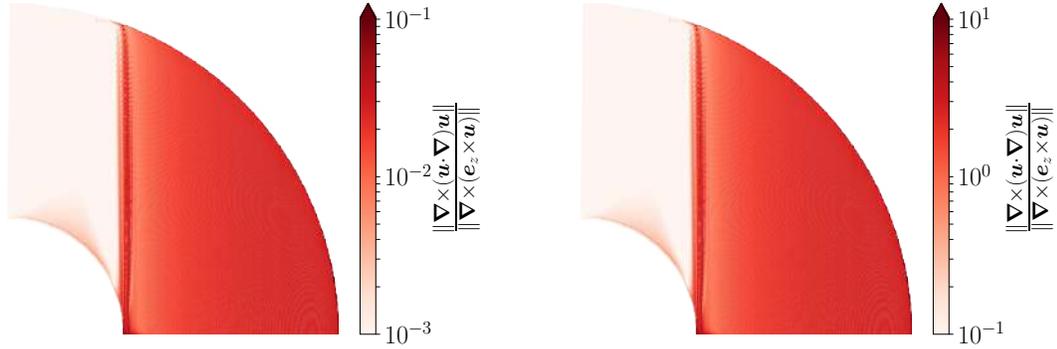


Figure E.1: Vue méridienne du rapport entre la norme euclidienne du terme non-linéaire de l'équation de la vorticit e et celle de du rotationnel de l'acc el eration de Coriolis, pour $A = 0.01$ (gauche) et $A = 1$ (droite), et pour un écoulement incompressible. Source : Gagnier & Rieutord (2020).

euclidienne de (E.9) et celle de (E.10) calculée *a posteriori*, pour $A = 0.01$ et $A = 1$, en Fig. E.1. Nous remarquons que, comme pr evu, ce rapport est de l'ordre de A en dehors du cylindre tangent. La solution lin eaire peut donc ˆetre consid er ee comme une bonne approximation de la solution de l' equation incompressible et non-lin eaire de la vorticit e, lorsque $A \ll 1$.

De mˆeme, pour un écoulement an elastique,

$$\frac{\|\nabla \times \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\|}{\|\nabla \times (\mathbf{e}_z \times \rho\mathbf{u})\|} = O(u_\phi), \quad (\text{E.14})$$

o u cette fois-ci $u_\phi = O(A\rho_s)$   l'ext erieur du cylindre tangent. Puisque $\rho_s \ll 1$, les conditions de validit e de l'approximation lin eaire sont plus facilement satisfaites.

E.2 Application aux étoiles massives

D eterminons maintenant une valeur typique de A en consid erant que la rotation diff erentielle est g en er ee par la perte de moment cin etique associ ee à un vent radiatif à la surface d' une étoile massive. Nous consid erons que les couches les plus externes, en expansion acc el er ee, exercent une contrainte visqueuse sur les couches sous-jacentes de l'étoile, les faisant ralentir. Par cons equent, nous supposons que le flux radial et local de moment cin etique est équivalent à un couple appliquée aux couches superficielles des étoiles. C'est- a-dire

ANNEXE E. APPROXIMATION LINÉAIRE

$$\dot{\ell}_z = R \sin \theta \sigma_{r\phi}^* , \quad (\text{E.15})$$

où $\dot{\ell}_z \equiv \dot{m} \Omega_s (R \sin \theta)^2$ est le flux de moment cinétique local, \dot{m} est le flux de masse associée, que l'on considère isotrope, et R est le rayon de l'étoile (supposée sphérique). En combinant l'expression de la contrainte azimutale imposée Eq. (7.6) avec (E.15), nous obtenons l'amplitude sans dimension de la contrainte de surface résultant du flux radial de moment cinétique

$$A = \sqrt{\frac{4\pi}{3} \frac{\dot{m} \Omega_s(\theta) R(\theta)}{2\Omega_c \rho_s^*(\theta) \nu}} , \quad (\text{E.16})$$

où $\rho_s^* = \rho_s \rho_c$ est la densité surfacique dimensionnée.

Nous estimons tous les paramètres stellaires avec le code ESTER 2D (Rieutord *et al.*, 2016; Gagnier *et al.*, 2019a) pour un modèle de $15 M_\odot$ avec une période de rotation d'un jour, et nous supposons une viscosité cinématique (turbulente) à la surface $\nu = 10^{12} \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (Zahn, 1992; Espinosa Lara & Rieutord, 2013). Nous représentons l'amplitude de la contrainte pondérée par la densité de surface $A\rho_s$ en fonction de la colatitude en Fig. E.2. Rappelons que les étoiles en rotation ne sont pas strictement sphériques à cause de la force centrifuge, en particulier lorsque la rotation est rapide. Par conséquent, le rayon stellaire ainsi que la densité de surface ont des dépendances latitudinales. Outre ces légères variations latitudinales des paramètres stellaires, nous constatons que $A\rho_s$ est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-8} \ll 1$ pour ce modèle. Ainsi, d'après les résultats de l'Annexe E.1, l'approximation linéaire peut être utilisée pour modéliser les étoiles massives perdant leur moment cinétique, à condition que la viscosité cinématique à la surface ne soit pas inférieure à $\sim 10^7 \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, une valeur typique dans les couches superficielles des étoiles massives dominées par le rayonnement (Espinosa Lara & Rieutord, 2013).

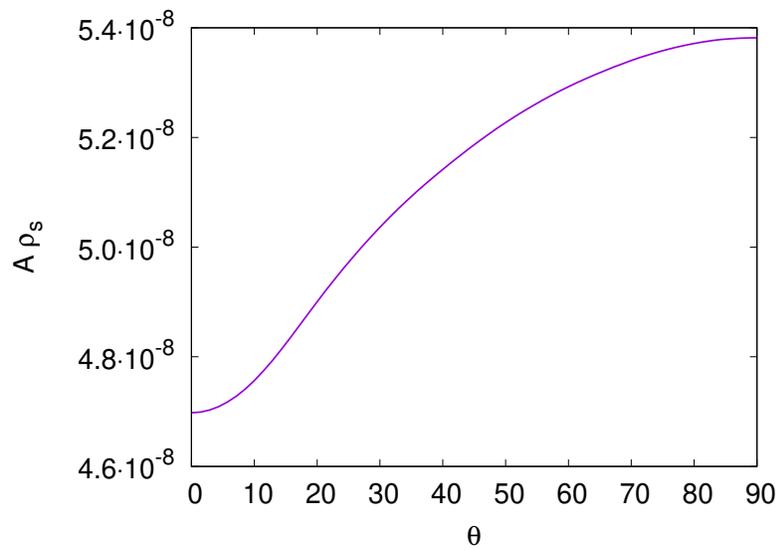


Figure E.2: Amplitude de la contrainte de surface pondérée par la densité de surface $A\rho_s$ résultant du flux sortant de moment cinétique, en fonction de la colatitude, pour un modèle ESTER 2D de $15 M_{\odot}$ tournant avec une période d'un jour. Source : [Gagnier & Rieutord \(2020\)](#).

Annexe F

Force d'Euler

Dans cette annexe, nous introduisons le formalisme associé à l'ajout de la force fictive d'Euler dans l'équation de la vorticité. Lorsque cette force est prise en compte, l'équation de la vorticité s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t_*}(\nabla \times \mathbf{q}_*) + \nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{q}_*) + \nabla \times (\rho_* \dot{\Omega}_c \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_*) = \nabla \times \mathbf{F}_{\text{visc}} \\ \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

où $\mathbf{q}_* = \rho_* \mathbf{u}_*$. La projection du rotationnel de la force d'Euler s'écrit

$$\begin{aligned} \nabla \times (\rho_* \dot{\Omega}_c \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_*) &= \nabla \times \left(\rho_* r \dot{\Omega}_c \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \mathbf{T}_1 \right) \\ &= \frac{\Lambda}{r_*} \rho_* r_* \dot{\Omega}_c \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \mathbf{R}_1 + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\rho_* r_*^2 \dot{\Omega}_c \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \right) \mathbf{S}_1, \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

où nous avons utilisé (H.50) et (H.27). De plus, le théorème du moment cinétique appliqué à la coquille interne s'écrit

$$\Gamma_* = \frac{dL_z^{\text{core}}}{dt_*} = I_c \frac{d\Omega_c}{dt_*}, \quad (\text{F.3})$$

où Γ_* est le couple dimensionné exercé par le fluide sur la coquille interne (voir Eq. 7.28), et I_c est le moment d'inertie du fluide qui y est emprisonné. Nous considérons que la sphère interne a une rotation solide et nous choisissons $I_c = (2/5)M_{\text{core}}(\eta R)^2$.

ANNEXE F. FORCE D'EULER

Nous adimensionnalisons cette équation en choisissant l'inverse de la fréquence de Coriolis associée à la vitesse angulaire initiale de la coquille interne $2\Omega_{c,0}^{-1}$ comme échelle de temps, le rayon de la coquille externe R est choisi comme échelle de longueur, et la densité à la surface de la coquille interne ρ_c est prise comme échelle de densité. Nous décomposons ensuite la vitesse angulaire de la coquille interne comme suit

$$\Omega_c = \Omega_{c,0} + \Omega_{c,1}(t_*) , \quad (\text{F.4})$$

où $\Omega_{c,0}$ est la vitesse angulaire initiale de la sphère interne, et $\Omega_{c,1}$ est la perturbation de vitesse angulaire associée au couple Γ_* appliqué à sa surface. Il vient alors

$$\frac{d\Omega_{c,1}}{dt} = O\left(\frac{A\rho_s E}{\bar{\rho}}\right) \quad \text{avec} \quad E = \frac{\nu}{2\Omega_{c,0}R^2} \quad (\text{F.5})$$

et où $\bar{\rho}$ est la densité sans dimension de la sphère interne. Ainsi, au bout d'un temps visqueux, la vitesse angulaire de la sphère interne aura varié d'un facteur $O(A\rho_s/\bar{\rho})$. Nous avons vu, en Annexe E.2, que l'amplitude d'une contrainte réaliste associée à un flux de moment cinétique est telle que $A\rho_s \ll 1$. De plus, d'après le modèle de Roche, toute la masse de l'étoile est concentrée en son centre, c'est-à-dire $\bar{\rho} > 1$. Ainsi, $\Omega_{c,1}(\tau_{\text{visc}}) \ll 1$, et il semble raisonnable de négliger la force d'Euler.

Annexe G

Analyse de la couche limite d'Ekman

Comme nous l'avons vu dans la Section 6.3.2, la solution géostrophique ne satisfait pas nécessairement les conditions limites imposées, et doit donc être corrigée de l'écoulement dans les couches d'Ekman. Cet écoulement satisfait (6.43). Ici, nous déterminons la constante C à l'aide de la condition limite sur la contrainte imposée

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{u}_\theta + iu_\phi}{r} \right) \Big|_{r=1} = -iK \sin \theta . \quad (\text{G.1})$$

où l'on remarque que $u_\theta = \tilde{u}_\theta$ dans la couche limite. Dans la limite asymptotique des petits nombres d'Ekman,

$$C(\theta) = \sqrt{\frac{E}{2}} (1 + i) \Gamma(\theta) , \quad (\text{G.2})$$

où

$$\Gamma(\theta) = \frac{F(\sin \theta) - \sin \theta F'(\sin \theta) - K \sin \theta}{\sqrt{|\cos \theta|}} , \quad (\text{G.3})$$

$F = \bar{u}_\phi$ est la solution géostrophique pour la vitesse azimutale dans le référentiel en rotation, et l'apostrophe indique une dérivée. La vitesse azimutale dans la couche limite est obtenue en prenant la partie imaginaire de (6.43). Il vient

$$\tilde{u}_\phi = \sqrt{\frac{E}{2}} \Gamma(\theta) (\cos \xi - \sin \xi) e^{-\xi} , \quad (\text{G.4})$$

où $\xi = \zeta \sqrt{|\cos \theta|/2}$. De la même manière, la vitesse méridienne dans la couche limite est obtenue en prenant la partie réelle de (6.43), c'est-à-dire

$$\tilde{u}_\theta = \sqrt{\frac{E}{2}} \Gamma(\theta) (\cos \xi + \sin \xi) e^{-\xi} . \quad (\text{G.5})$$

Cette solution ne satisfait cependant pas nécessairement la conservation de masse. La divergence de $\tilde{\mathbf{u}}$ dans la couche limite génère un écoulement secondaire supplémentaire, de faible amplitude, et perpendiculaire à la paroi, \tilde{u}_r . C'est l'écoulement de pompage/suction d'Ekman introduit dans la section 6.3.1. Dans la couche limite externe (à $r = 1$), l'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \zeta} - \frac{\sqrt{E}}{\sin \theta} \frac{\partial \sin \theta \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} = 0 . \quad (\text{G.6})$$

Nous injectons maintenant (G.5) dans (G.6) intégrons l'équation qui en résulte, entre 0 et $+\infty$. Il vient

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r(\zeta = 0) &= -\frac{E}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \Gamma(\theta) \int_0^\infty (\cos \xi(\theta) + \sin \xi(\theta)) e^{-\xi(\theta)} d\xi \right] \\ &= -\frac{E}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\Gamma(\theta)}{\sqrt{|\cos \theta|/2}} \right) \\ &= -\frac{E}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{|\cos \theta|} \left(\sin \theta F(\sin \theta) - \sin^2 \theta F'(\sin \theta) - K \sin^2 \theta \right) , \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

où nous avons utilisé $\tilde{u}_r(\zeta \rightarrow +\infty) = 0$. À partir de maintenant, nous supposons que $\theta \in [0, \pi/2]$ tel que $|\cos \theta| = \cos \theta$. De plus, en observant que Eq. (G.7) est valide à $r = 1$, nous pouvons remplacer $\sin \theta$ par la coordonnée radiale cylindrique $s = r \sin \theta$. Ainsi,

$$\tilde{u}_r(\zeta = 0) = E \left[s F'' + q(s) \left(F' - \frac{F}{s} \right) + K (1 + q(s)) \right] , \quad (\text{G.8})$$

où

$$q(s) = \frac{1}{1 - s^2} . \quad (\text{G.9})$$

Nous retrouvons ainsi la solution de pompage d'Ekman (7.40).

Annexe H

Formulaire

H.1 Les harmoniques sphériques

Toute fonction définie sur une sphère $f(r, \theta, \phi)$ peut se décomposer de façon unique sous la forme d'une somme d'harmoniques sphériques comme suit

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} f_m^l(r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (\text{H.1})$$

et tout champ vectoriel \mathbf{u} peut se décomposer de façon unique sous la forme d'une somme d'harmoniques sphériques vectorielles (Rieutord, 1987)

$$\mathbf{u} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} u_m^l(r) \mathbf{R}_l^m + v_m^l(r) \mathbf{S}_l^m + w_m^l(r) \mathbf{T}_l^m, \quad (\text{H.2})$$

où

$$\mathbf{R}_l^m = Y_l^m \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{S}_l^m = \nabla Y_l^m, \quad \mathbf{T}_l^m = \nabla \times \mathbf{R}_l^m, \quad (\text{H.3})$$

sont les harmoniques sphériques vectorielles. Ces fonctions vérifient les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{4\pi} \mathbf{R}_l^m \cdot \mathbf{S}_{l'}^{m'} d\Omega = \int_{4\pi} \mathbf{S}_l^m \cdot \mathbf{T}_{l'}^{m'} d\Omega = \int_{4\pi} \mathbf{T}_l^m \cdot \mathbf{R}_{l'}^{m'} d\Omega = 0, \\ \int_{4\pi} \mathbf{R}_l^m \cdot \mathbf{R}_{l'}^{m'*} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \\ \int_{4\pi} \mathbf{S}_l^m \cdot \mathbf{S}_{l'}^{m'*} d\Omega = \int_{4\pi} \mathbf{T}_l^m \cdot \mathbf{T}_{l'}^{m'*} d\Omega = \Lambda \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \end{array} \right. \quad (\text{H.4})$$

ANNEXE H. FORMULAIRE

et sont définies en coordonnées sphériques comme suit

$$\mathbf{R}_l^m = \begin{vmatrix} Y_l^m \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{S}_l^m = \begin{vmatrix} 0 \\ \partial_\theta Y_l^m \\ D_\phi Y_l^m \end{vmatrix}, \quad \mathbf{T}_l^m = \begin{vmatrix} 0 \\ D_\phi Y_l^m \\ -\partial_\theta Y_l^m \end{vmatrix}, \quad (\text{H.5})$$

où l'opérateur $D_\phi = (1/s)\partial_\phi$. Les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \phi)$ sont définies comme suit

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (\text{H.6})$$

où $P_l^{|m|}$ sont les polynômes associés de Legendre

$$P_l^{|m|}(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_l(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m}, \quad (\text{H.7})$$

et $P_l(\cos \theta)$ sont les polynômes de Legendre. Si l'on revient dans l'espace réel, le vecteur vitesse s'écrit alors simplement

$$\mathbf{u} = \begin{vmatrix} u_m^l Y_l^m \\ v_m^l \partial_\theta Y_l^m + w_m^l D_\phi Y_l^m \\ v_m^l D_\phi Y_l^m - w_m^l \partial_\theta Y_l^m \end{vmatrix}. \quad (\text{H.8})$$

Les fonctions harmoniques sphériques vérifient

$$\Delta_{\theta\phi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \phi^2} = -\Lambda Y_l^m, \quad (\text{H.9})$$

sur la sphère unité. Ainsi, pour toute fonction scalaire

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} f_m^l(r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (\text{H.10})$$

$$\Delta_l f(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\left(\Delta_r - \frac{\Lambda}{r^2} \right) f^l \right] Y_l^m(\theta, \phi), \quad (\text{H.11})$$

où

$$\Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r. \quad (\text{H.12})$$

ANNEXE H. FORMULAIRE

Notons que sous l'opération de parité $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, les coordonnées sphériques se transforment en $r \rightarrow r$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$ et $\phi \rightarrow \pi + \phi$. Si l'on applique cette transformation sur les harmonique sphériques, il vient

$$Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) \rightarrow (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi) . \quad (\text{H.13})$$

La parité des harmoniques sphériques est donc indépendante de m : Y_l^m est paire pour les l pairs, et est impaire pour les l impairs. Ainsi, à m donné, il existe deux séries distinctes, $l = |m|, |m| + 2, \dots$ et $l = |m| + 1, |m| + 3, \dots$. Si la fonction définie en (H.1) est paire, c'est-à-dire si $f(\mathbf{r}) = f(-\mathbf{r})$, alors seuls les termes de degrés pairs sont non nuls :

$$f(\mathbf{r}) = f(-\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} f_m^{2l}(r) Y_{2l}^m(\theta, \phi) , \quad (\text{H.14})$$

et si elle est impaire, c'est-à-dire si $f(\mathbf{r}) = -f(-\mathbf{r})$, alors seuls les termes de degrés impairs sont non nuls :

$$f(\mathbf{r}) = -f(-\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} f_m^{2l+1}(r) Y_{2l+1}^m(\theta, \phi) . \quad (\text{H.15})$$

De plus, notons que l'opération de parité $f(r, \theta, \phi) \rightarrow f(r, \pi - \theta, \pi + \phi)$ implique que

$$\frac{\partial f(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \rightarrow -\frac{\partial f(r, \pi - \theta, \pi + \phi)}{\partial \theta} . \quad (\text{H.16})$$

et donc

$$\partial_\theta Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) \rightarrow (-1)^{l+1} \partial_\theta Y_l^m(\theta, \phi) , \quad (\text{H.17})$$

est une fonction impaire pour les l pairs. Ainsi, toute fonction paire $h(\mathbf{r}) = h(-\mathbf{r})$ projetée sur la base de la dérivée latitudinale de la fonction harmonique sphérique peut être évaluée uniquement à partir des degrés l impairs :

$$h(\mathbf{r}) = h(-\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} h_m^{2l+1}(r) \partial_\theta Y_{2l+1}^m(\theta) . \quad (\text{H.18})$$

C'est le cas de la vitesse azimutale lorsqu'il s'agit d'un écoulement axisymétrique (voir Eq. H.8).

H.1.1 Relations de composition

Il existe des relations de composition introduisant des couplages entre les harmoniques sphériques de différents degrés,

$$\begin{cases} \cos \theta Y_l^m(\theta, \phi) = \alpha_l^k Y_k^m, & \sin \theta Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{\beta_k^l}{k(k+1)} \partial_\theta Y_k^m + \frac{m^2}{\Lambda \sin \theta} Y_l^m \\ \sin \theta \partial_\theta Y_l^m(\theta, \phi) = \beta_l^k Y_k^m, & \cos \theta \partial_\theta Y_l^m(\theta, \phi) = \gamma_l^k Y_k^m + \frac{m^2}{\Lambda \sin \theta} Y_l^m, \end{cases} \quad (\text{H.19})$$

où $k = l \pm 1$, et

$$\begin{cases} \alpha_l^{l-1} = \alpha_{l-1}^l = \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l+1)(2l-1)}} \\ \beta_{l-1}^l = (l-1)\alpha_{l-1}^l, & \beta_{l+1}^l = -(l+2)\alpha_{l+1}^l \\ \gamma_{l-1}^l = \frac{l-1}{l}\alpha_{l-1}^l, & \gamma_l^{l-1} = \frac{l+1}{l}\alpha_l^{l-1}. \end{cases} \quad (\text{H.20})$$

H.1.2 Opérateurs vectoriels

Dans l'espace spectral, nous ne travaillons plus sur la base $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$, mais sur la base $\{\mathbf{R}_l^m, \mathbf{S}_l^m, \mathbf{T}_l^m\}$. Ainsi, tous les opérateurs vectoriels \mathcal{L}_v doivent être redéfinis comme suit

$$\mathcal{L}_{R,S,T} = \left\{ \int \mathcal{L}_v \mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_l^m d\Omega, \quad \frac{1}{\Lambda} \int \mathcal{L}_v \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_l^m d\Omega, \quad \frac{1}{\Lambda} \int \mathcal{L}_v \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}_l^m d\Omega \right\}, \quad (\text{H.21})$$

en utilisant les relations d'orthogonalité des harmoniques sphériques vectorielles (H.4). Prenons l'exemple de l'opérateur divergence, qui fait exception car résulte en un champ scalaire, appliqué au champ vectoriel \mathbf{u} . En injectant (H.8) dans l'expression de la divergence en coordonnées sphériques, il vient

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 u_m^l(r)}{\partial r} Y_l^m + \frac{v_m^l}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta Y_l^m}{\partial \theta} + \frac{v_m^l}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \phi^2}, \quad (\text{H.22})$$

où l'on aura reconnu l'opérateur $\Delta_{\theta\phi}$ défini en (H.9). Il vient alors

ANNEXE H. FORMULAIRE

$$\begin{aligned}\nabla_{R,S,T} \cdot \mathbf{u} &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \int \nabla \cdot \mathbf{u} Y_l^m d\Omega = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 u_m^l(r)}{\partial r} - \frac{v_m^l \Lambda}{r} \right) \int Y_l^m Y_l^m d\Omega \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 u_m^l(r)}{\partial r} - \frac{v_m^l \Lambda}{r}.\end{aligned}\tag{H.23}$$

Notons que si $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, alors il existe une relation directe entre u_m^l et v_m^l :

$$v_m^l = \frac{1}{\Lambda r} \frac{\partial r^2 u_m^l(r)}{\partial r},\tag{H.24}$$

et le champ \mathbf{u} peut être défini sur la base $\{\mathbf{R}_l^m, \mathbf{T}_l^m\}$ ou la base $\{\mathbf{S}_l^m, \mathbf{T}_l^m\}$ uniquement. Concentrons nous maintenant sur l'opérateur rotationnel. En coordonnées sphériques,

$$\nabla \times \mathbf{u} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \begin{vmatrix} 1/(r \sin \theta) \partial_\theta (\sin \theta (v_m^l D_\phi Y_l^m - w_m^l \partial_\theta Y_l^m)) - 1/(r \sin \theta) \partial_\phi (w_m^l D_\phi Y_l^m + v_m^l \partial_\theta Y_l^m) \\ 1/(r \sin \theta) \partial_\phi (u_m^l Y_l^m) - 1/r (r v_m^l D_\phi Y_l^m - r w_m^l \partial_\theta Y_l^m) \\ 1/r (r w_m^l D_\phi Y_l^m + r v_m^l \partial_\theta Y_l^m) - 1/r \partial_\theta (u_m^l Y_l^m) \end{vmatrix},\tag{H.25}$$

et en utilisant (H.5), il vient

$$\begin{cases} \int (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{R}_l^m d\Omega = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \int \frac{\Lambda}{r} w_m^l Y_l^m Y_l^m d\Omega \\ \frac{1}{\Lambda} \int (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{S}_l^m d\Omega = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{\Lambda} \frac{1}{r} \partial_r (r w_m^l) (\partial_\theta Y_l^m \partial_\theta Y_l^m + D_\phi Y_l^m D_\phi Y_l^m) d\Omega \\ \frac{1}{\Lambda} \int (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T}_l^m d\Omega = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{u_m^l}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial r v_m^l}{\partial r} \right) (\partial_\theta Y_l^m \partial_\theta Y_l^m + D_\phi Y_l^m D_\phi Y_l^m) d\Omega. \end{cases}\tag{H.26}$$

Les relations d'orthogonalité (H.4) donnent enfin

$$\nabla_{RST} \times \mathbf{u} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \frac{\Lambda}{r} w_m^l, \frac{1}{r} \partial_r (r w_m^l), \frac{u_m^l}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial r v_m^l}{\partial r} \right\}.\tag{H.27}$$

A partir de maintenant, tous les opérateurs seront implicitement considérés être sur la base $\{\mathbf{R}_l^m, \mathbf{S}_l^m, \mathbf{T}_l^m\}$, et nous n'écrirons donc plus l'indice RST . En suivant cette méthodologie, nous trouvons

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \Delta_l u_m^l - \frac{2}{r^2} (u_m^l - \Lambda v_m^l), \Delta_l v_m^l + 2 \frac{r_m^l}{r^2}, \Delta_l w_m^l \right\}, \quad (\text{H.28})$$

$$\Delta \nabla \times \mathbf{u} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \frac{\Lambda \Delta_l w_m^l}{r}, \frac{1}{r} \frac{\partial r \Delta_l w_m^l}{\partial r}, \Delta_l \left(\frac{u_m^l}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial r v_m^l}{\partial r} \right) \right\}, \quad (\text{H.29})$$

où Δ_l est défini Eq. [H.11](#),

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{u} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \{0, w_m^l, -v_m^l\}, \quad (\text{H.30})$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ w_m^k \beta_k^l - i m v_m^l, w_m^k \gamma_k^l - \frac{i m}{\Lambda} (u_m^l + v_m^l), -v_m^k \gamma_k^l - \frac{i m + u_m^k \beta_k^l}{\Lambda} \right\}. \quad (\text{H.31})$$

En écrivant

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \{U_m^l, V_m^l, W_m^l\} \quad (\text{H.32})$$

il vient

$$\nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left\{ \frac{\Lambda}{r} W_m^l, \frac{1}{r} \partial_r (r W_m^l), \frac{U_m^l}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial r V_m^l}{\partial r} \right\} \quad (\text{H.33})$$

où nous avons utilisé ([H.27](#)).

H.1.3 Autres relations utiles

Tenseur des contraintes

Pour un fluide Newtonien, le tenseur des contraintes s'écrit

$$\sigma_{ij} = \mu c_{ij} + \zeta \partial_k v_k \delta_{ij} \quad (\text{H.34})$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide, ζ est sa viscosité volumique, et

$$c_{ij} = \partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3} \partial_k v_k \delta_{ij} . \quad (\text{H.35})$$

En coordonnées sphériques,

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{rr} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} 2 \left(\frac{\partial u_m^l}{\partial r} - 1/3 d^l \right) Y_l^m \\ c_{\theta\theta} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\left(2u_m^l - 2/3 r d^l - l(l+1)v_m^l \right) Y_l^m + v_m^l X_l^m + w_m^l Z_l^m \right] / r \\ c_{\phi\phi} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\left(2u_m^l - 2/3 r d^l - l(l+1)v_m^l \right) Y_l^m - v_m^l X_l^m - w_m^l Z_l^m \right] / r \\ c_{r\theta} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} s_m^l \partial_\theta Y_l^m + t_m^l D_\phi Y_l^m \\ c_{r\phi} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} s_m^l D_\phi Y_l^m - t_m^l \partial_\theta Y_l^m \\ c_{\theta\phi} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(v_m^l Z_l^m - w_m^l X_l^m \right) / r \end{array} \right. \quad (\text{H.36})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} d_m^l = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 u_m^l}{\partial r} - \frac{\Lambda v_m^l}{r} \\ s_m^l = \frac{\partial v_m^l}{\partial r} + (u_m^l - 2v_m^l) / r \\ t_m^l = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w_m^l}{r} \right) \\ X_l^m = 2 \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \theta^2} + \Lambda Y_l^m \\ Z_l^m = 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \right) . \end{array} \right. \quad (\text{H.37})$$

Les fonction X_l^m et Z_l^m satisfont la relation d'orthogonalité

$$\int \left(X_l^m X_{l'}^{m'*} + Z_l^m Z_{l'}^{m'*} \right) d\Omega = (l-1)l(l+1)(l+2) \delta_{ll'} \delta_{mm'} . \quad (\text{H.38})$$

Force visqueuse

Dans le cas où la viscosité volumique est nulle $\zeta = 0$, la force visqueuse s'écrit

$$\mathbf{F}_{\text{visc}} = \mu \left(\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla \text{div} \mathbf{v} \right) + 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \mu \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \frac{2}{3} \nabla (\mu \text{div} \mathbf{v}) , \quad (\text{H.39})$$

et nous la projetons sur la base des harmoniques sphériques vectorielles,

$$\mathbf{F}_{\text{visc}} = \nu \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} f_m^l(r) \mathbf{R}_l^m + g_m^l(r) \mathbf{S}_l^m + h_m^l(r) \mathbf{T}_l^m . \quad (\text{H.40})$$

Les coefficients s'écrivent alors

$$\begin{aligned} f_m^l &= \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\Lambda v_m^l - 2u_m^l}{r} + \frac{\Lambda \rho}{r} z_m^l + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{4\rho}{3} d_m^l \right) , \\ g_m^l &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho z_m^l) + \frac{2}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} (u_m^l - v_m^l) + \frac{4\rho}{3r} d_m^l , \\ h_m^l &= \rho \Delta_l w_m^l + r \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w_m^l}{r} \right) , \end{aligned} \quad (\text{H.41})$$

où nous avons considéré que le champ de vitesse \mathbf{u} est défini en (H.43), que $\rho = \rho(r)$, que $\nu = \text{Cte}$, et

$$z_m^l = \frac{1}{r} \frac{\partial r v_m^l}{\partial r} - \frac{u_m^l}{r} . \quad (\text{H.42})$$

Fonction de courant

Considérons la projections de la quantité de mouvement suivante

$$\mathbf{q} = \rho(r) \mathbf{u} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} u_m^l(r) \mathbf{R}_l^m + v_m^l(r) \mathbf{S}_l^m + w_m^l(r) \mathbf{T}_l^m . \quad (\text{H.43})$$

La fonction de courant dans le plan méridien associée χ est telle que

$$\mathbf{q} \cdot \nabla \chi = 0 , \quad (\text{H.44})$$

ANNEXE H. FORMULAIRE

c'est-à-dire

$$\frac{\partial_r \chi}{\partial_\theta \chi} = -\frac{q_\theta}{r q_r} . \quad (\text{H.45})$$

Nous choisissons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial r} &= r \sin \theta q_\theta \\ \frac{\partial \chi}{\partial \theta} &= -r^2 \sin \theta q_r . \end{aligned} \quad (\text{H.46})$$

Lorsque l'on considère des écoulement incompressibles ou anélastiques, $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$. Ainsi, pour un écoulement axisymétrique, v^l est fonction de u^l uniquement (voir Eq. H.24), et d'après (H.8), (H.46a) s'écrit

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\partial r^2 u^l}{\partial r} \sin \theta \partial_\theta Y_l(\theta) , \quad (\text{H.47})$$

c'est-à-dire

$$\chi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{r^2 u^l}{\Lambda} \sin \theta \partial_\theta Y_l(\theta) . \quad (\text{H.48})$$

Autres

$$\mathbf{e}_z = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} (\mathbf{R}_l^0 + \mathbf{S}_l^0) , \quad (\text{H.49})$$

donc d'après (H.5)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \mathbf{T}_l^0 . \quad (\text{H.50}) \\ \int \sin \theta \partial_\theta Y_l^0 d\Omega &= \int \beta_l^k Y_k^0 d\Omega \\ &= \sqrt{4\pi} \beta_l^k \int Y_k^0 Y_0^0 d\Omega \\ &= \sqrt{4\pi} \beta_l^k \delta_{k0} \\ &= -4 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \end{aligned} \quad (\text{H.51})$$

H.2 Transformations de Legendre

La transformation de Legendre d'une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $x \in [-1, 1]$ s'écrit

$$\mathcal{L}_l f(x) = \tilde{f}(l) = \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx , \quad (\text{H.52})$$

où $P_l(x)$ est le polynôme de Legendre de degré $l (\geq 0)$, et \mathcal{L}_l est l'opérateur linéaire de transformation de Legendre, à l'ordre l . Si $x = \cos \theta$, alors (H.53) s'écrit

$$\mathcal{L}_l f(\cos \theta) = \tilde{f}(l) = \int_0^\pi f(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta . \quad (\text{H.53})$$

La transformation de Legendre inverse s'écrit quant à elle

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \tilde{f}(l) P_l(x) dx . \quad (\text{H.54})$$

Ainsi, si l'on fait la décomposition de la fonction $f(x)$ sur la base des polynômes de Legendre

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a^l P_l(x) , \quad (\text{H.55})$$

il vient

$$a^l = \frac{2l+1}{2} \tilde{f}(l) , \quad (\text{H.56})$$

et donc

$$a^l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx . \quad (\text{H.57})$$

Si l'on considère maintenant une décomposition de la fonction axisymétrique $f(x)$ sur la base des harmoniques sphériques

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f^l Y_l^0(x) , \quad (\text{H.58})$$

ANNEXE H. FORMULAIRE

alors, d'après la définition de la fonction harmonique sphérique scalaire normalisée (H.6), il vient

$$f^l = \sqrt{(2l+1)\pi} \mathcal{L}_l f(x) . \quad (\text{H.59})$$

Introduisons maintenant la transformation de Legendre associé d'une fonction $g(x)$ définie sur l'intervalle $x \in [-1, 1]$

$$\mathcal{L}_{l,m} g(x) = \tilde{g}(l, m) = \int_{-1}^1 g(x) \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} dx , \quad (\text{H.60})$$

où $\mathcal{L}_{l,m}$ est l'opérateur de transformation de Legendre associé, à l'ordre l . D'après la propriété des polynômes associés de Legendre (H.7), (H.60) devient

$$\mathcal{L}_{l,m} g(x) = \tilde{g}(l, m) = \int_{-1}^1 g(x) (1-x^2)^{-m/2} P_l^{|m|}(x) dx , \quad (\text{H.61})$$

où P_l^m est le polynôme de Legendre associé. La transformation inverse s'écrit quant à elle (e.g. Debnath & Harrell, 1976)

$$g(x) = \mathcal{L}_{l,m}^{-1} \tilde{g}(l, m) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \tilde{g}(l, m) (1-x^2)^{m/2} P_l^{|m|}(x) . \quad (\text{H.62})$$

Imaginons maintenant que nous souhaitons projeter une fonction $h(\cos \theta)$ sur la base de la première dérivée des polynômes de Legendre, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} h(\cos \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} b^l \frac{dP_l(\cos \theta)}{d \cos \theta} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} b^l \sin \theta \frac{\partial P_l^0(\cos \theta)}{\partial \theta} , \end{aligned} \quad (\text{H.63})$$

où nous avons, une nouvelle fois, utilisé (H.7). Alors, d'après (H.61),

$$b^l = \frac{2l+1}{2} \frac{(l-1)!}{(l+1)!} \int_0^\pi h(\cos \theta) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d \cos \theta} \sin \theta d\theta . \quad (\text{H.64})$$

Ainsi, si l'on projette $h(\cos \theta)$ sur la base des harmoniques sphériques comme suit

$$h(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} h^l \sin \theta \frac{\partial Y_l^0(\cos \theta)}{\partial \theta}, \quad (\text{H.65})$$

alors

$$h^l = \sqrt{(2l+1)\pi} \frac{(l-1)!}{(l+1)!} \int_0^\pi h(\cos \theta) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d \cos \theta} \sin \theta d\theta. \quad (\text{H.66})$$

Notons que même si $\sin \theta \partial_\theta Y_l^m(\cos \theta)$ est une combinaison linéaire de $Y_l^m(\cos \theta)$ (voir Eq. H.19), ce n'est pas le cas de $\partial_\theta Y_l^m(\cos \theta)$. Ainsi, les représentations spectrales de $h(\cos \theta)$ et de $\partial_\theta h(\cos \theta)$ ne peuvent pas être reliées analytiquement.

H.3 L'approximation de Tchebyshev

H.3.1 Les polynômes de Tchebyshev

Le polynôme de Tchebyshev de degré n est donné par la formule suivante

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x), \quad (\text{H.67})$$

où $x \in [-1, 1]$. Les premiers polynômes s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x \\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \end{array} \right. \quad (\text{H.68})$$

et suivent la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n \geq 1. \quad (\text{H.69})$$

Les polynômes de Tchebyshev sont orthogonaux avec un poids $(1-x^2)^{-1/2}$ et sur l'intervalle $x \in [-1, 1]$, c'est-à-dire

$$\int_{-1}^1 \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \pi/2 & i = j \neq 0 \\ \pi & i = j = 0, \end{cases} \quad (\text{H.70})$$

et il existe aussi une relation discrète pour leur orthogonalité

$$\sum_{k=0}^{N-1} T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ N/2 & i = j \neq 0 \\ N & i = j = 0, \end{cases} \quad (\text{H.71})$$

où x_k sont les k zéros des polynômes $T_N(x)$

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(k+1/2)}{N}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (\text{H.72})$$

Les *extrema*, c'est-à-dire les valeurs de x où $T_n(x) = \pm 1$ s'écrivent quant à eux

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (\text{H.73})$$

et constituent la grille de Gauss-Lobatto. L'utilisation de ces points de grille, plutôt que de ceux où les $T_N(x)$ s'annulent s'explique en imaginant une fonction variant fortement entre deux points successifs. Si ces deux points sont deux zéros de $T_N(x)$, alors il sera difficile de reproduire ces variations. En revanche, si ces deux points sont des *extrema* de $T_N(x)$, alors la variation du polynôme est non nulle, en particulier $|T_N(x_i) - T_N(x_{i+1})| = 2$.

H.3.2 Transformation de Tchebyshev

L'interpolation d'une fonction $u(x)$ sur la grille de Gauss-Lobatto s'écrit

$$u(x) \simeq u_N(x) = \sum_{k=0}^N u(x_k)C_k(x), \quad (\text{H.74})$$

où $C_k(x)$ est la fonction cardinale

$$C_k(x) = (1-x^2) \frac{T'_N(x)(-1)^{k+1}}{\bar{c}_k N^2 (x-x_k)} = \frac{2}{N\bar{p}_k} \sum_{m=0}^N \frac{T_m(x_k)T_m(x)}{\bar{p}_m}, \quad (\text{H.75})$$

et (Hussaini *et al.*, 1984)

$$\begin{cases} \bar{p}_k = 2 & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = N \\ \bar{p}_k = 2 & \text{si } k \in [1, N - 1] , \end{cases} \quad (\text{H.76})$$

$$\begin{cases} \bar{c}_{\pm N} = 2 \\ \bar{c}_k = 1 & \text{si } |k| < N . \end{cases} \quad (\text{H.77})$$

Les fonctions cardinales respectent

$$C_j(x_k) = \delta_{ij} , \quad (\text{H.78})$$

c'est-à-dire que ces fonctions ne sont non-nulles qu'aux points de collocation. Si l'on veut réarranger (H.74) pour l'écrire comme une série de polynômes de Tchebyshev

$$u(x) \simeq u_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x) , \quad (\text{H.79})$$

alors, d'après (H.75),

$$a_n = \frac{2}{N\bar{p}_n} \sum_{j=0}^N \frac{f(x_j)}{\bar{p}_j} \cos\left(\frac{\pi}{N}jn\right) , \quad (\text{H.80})$$

où nous avons utilisé $T_j(x_k) = \cos(\pi jk/N)$.

H.3.3 Quelques opérations

Dérivée

Une nouvelle fois, prenons une fonction quelconque $u(x)$ que l'on écrit comme une série de polynômes de Tchebyshev (H.79). Sur les noeuds de la grille de collocation

$$u_k = \sum_{n=0}^N a_n T_{kn} , \quad (\text{H.81})$$

où $u_k = u(x_k)$ et $T_{kn} = T_n(x_k)$. La dérivée de u_k s'écrit alors simplement

$$\begin{aligned}
 u'_k &= \sum_{n=0}^N a_n T'_{kn} = \sum_{n=0}^N T'_{kn} \left(\frac{2}{N \bar{p}_n} \sum_{j=0}^N \frac{u_j}{\bar{p}_j} T_{jn} \right) \\
 &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{1}{\bar{p}_n \bar{p}_j} T'_{kn} T_{jn} u_j .
 \end{aligned} \tag{H.82}$$

Ainsi, comme mentionnée en Sect. 7.2.1 et contrairement aux différences finies, la dérivée de $u(x)$ au point de collocation x_k dépend de l'évaluation de la fonction en tous les autres points de collocation. Aussi, nous pouvons réécrire (H.82) comme suit

$$u'_k = \sum_{j=0}^N D_{kj} u_j , \tag{H.83}$$

où

$$D_{kj} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{1}{\bar{p}_n \bar{p}_j} T'_{kn} T_{jn} . \tag{H.84}$$

D est la matrice de dérivation de dimension $N + 1$. L'opération dérivée seconde est alors simplement associée à la matrice de dérivation D^2 . Rappelons cependant que les polynômes de Tchebyshev sont définis sur l'intervalle $[-1, 1]$. Dans ce manuscrit, $r \in [\eta, 1]$, nous faisons donc le changement de variable suivant

$$x = \frac{2r - (1 + \eta)}{1 - \eta} , \tag{H.85}$$

tel que $x = -1$ lorsque $r = \eta$, et $x = 1$ lorsque $r = 1$ (e.g., [Dintrans, 1999](#)).

Intégration

Dans cette section, nous souhaitons évaluer l'intégrale

$$\int_a^b u(x) dx , \tag{H.86}$$

où $u(x)$ est une fonction quelconque que l'on écrit comme une série de polynômes de Tchebyshev sur la grille de collocation de Gauss-Lobatto (H.79), et $a, b \in \mathbb{R}$. Précisons que nous n'avons aucune connaissance *a priori* des éventuelles propriétés de symétrie ou d'anti-symétrie de la fonction considérée, par rapport au milieu de l'intervalle.

ANNEXE H. FORMULAIRE

Notons cependant que si tel était le cas, la fonction $u(x)$ pourrait être écrite comme un développement en série de polynômes de Tchebyshev de degrés pairs ou impairs uniquement, permettant ainsi une optimisation des calculs numériques. Dans le cas général, nous utilisons la propriété suivante :

$$\int T_n(x)dx = \frac{1}{2} \left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} + \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} \right) + \text{Cte} . \quad (\text{H.87})$$

Dans le cas où $a = -1$ et $b = 1$, (H.86) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u(x)dx &\simeq \sum_{n=0}^N a_n \int_{-1}^1 T_n(x)dx \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{a_n \cos(\pi n) + 1}{1 - n^2} . \end{aligned} \quad (\text{H.88})$$

Notons en particulier que

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 T_{2n+1}(x)dx = 0 \\ \int_{-1}^1 T_{2n}(x)dx = \frac{2a_{2n}}{1 - (2n)^2} , \end{cases} \quad (\text{H.89})$$

et donc (H.88) peut être réécrite

$$\int_{-1}^1 u(x)dx \simeq \sum_{n=0}^{N/2} \frac{2a_{2n}}{1 - (2n)^2} . \quad (\text{H.90})$$

Revenons maintenant au cas général (H.86). Pour cela, nous faisons le changement de variable tel que $\zeta = -1$ lorsque $x = a$, et $\zeta = 1$ lorsque $x = b$,

$$\zeta = \frac{2x - (a + b)}{b - a} , \quad (\text{H.91})$$

et injectons le dans (H.86). Il vient

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)dx &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 u(\zeta)d\zeta \\ &\simeq (b-a) \sum_{n=0}^{N/2} \frac{a_{2n}}{1 - (2n)^2} . \end{aligned} \quad (\text{H.92})$$

ANNEXE H. FORMULAIRE

Enfin, si nous voulons écrire (H.92) sous la forme standard associée à la méthode de quadrature de Gauss, c'est-à-dire

$$\int_a^b u(x)dx \simeq \sum_{j=0}^N w_j u_j , \quad (\text{H.93})$$

où w_j est le poids associé au point de collocation x_j , il suffit d'injecter (H.80) dans (H.92). Il vient

$$w_j = \frac{2(b-a)}{N\bar{p}_j} \sum_{n=0,2,4,\dots}^N \frac{\cos(\pi j n/N)}{(1-n^2)\bar{p}_n} . \quad (\text{H.94})$$

ANNEXE H. FORMULAIRE

Publications

- Garaud, P., Gagnier, D. & Verhoeven, J. 2017 Turbulent Transport by Diffusive Stratified Shear Flows : From Local to Global Models. I. Numerical Simulations of a Stratified Plane Couette Flow. ApJ 837, 133. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017ApJ...837..133G/abstract>
- Gagnier, D. & Garaud, P. 2018 Turbulent Transport by Diffusive Stratified Shear Flows : From Local to Global Models. II. Limitations of Local Models. ApJ 862, 36. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2018ApJ...862...36G/abstract>
- Gagnier, D., Rieutord, M., Charbonnel, C., Putigny, B. & Espinosa Lara, F. 2019a Evolution of rotation in rapidly rotating early-type stars during the main sequence with 2D models. A&A 625, A89. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019A%26A...625A..89G/abstract>. Résultats présentés en chapitre 5.
- Gagnier, D., Rieutord, M., Charbonnel, C., Putigny, B. & Espinosa Lara, F. 2019b Critical angular velocity and anisotropic mass loss of rotating stars with radiation-driven winds. A&A 625, A88. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019A%26A...625A..88G/abstract>. Résultats présentés en chapitres 2, 3 et 4.
- Gagnier, D., & Rieutord, M. 2020 Stress-driven spin-down of a viscous fluid within a spherical shell. Journal of Fluid Mechanics, 904, A35. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.712>. Résultats présentés en chapitre 7.

Stress-driven spin-down of a viscous fluid within a spherical shell

D. Gagnier^{1,2,†} and M. Rieutord¹

¹IRAP, Université de Toulouse, CNRS, UPS, CNES, 14, avenue Édouard Belin, F-31400 Toulouse, France

²Department of Astronomy, University of Geneva, Chemin des Maillettes 51, 1290 Versoix, Switzerland

(Received 24 March 2020; revised 18 August 2020; accepted 20 August 2020)

We investigate the linear properties of the steady and axisymmetric stress-driven spin-down flow of a viscous fluid inside a spherical shell, both within the incompressible and anelastic approximations, and in the asymptotic limit of small viscosities. From boundary layer analysis, we derive an analytical geostrophic solution for the three-dimensional incompressible steady flow, inside and outside the cylinder \mathcal{C} that is tangent to the inner shell. The Stewartson layer that lies on \mathcal{C} is composed of two nested shear layers of thickness $O(E^{2/7})$ and $O(E^{1/3})$ where E is the Ekman number. We derive the lowest-order solution for the $E^{2/7}$ -layer. A simple analysis of the $E^{1/3}$ -layer lying along the tangent cylinder, reveals it to be the site of an upwelling flow of amplitude $O(E^{1/3})$. Despite its narrowness, this shear layer concentrates most of the global meridional kinetic energy of the spin-down flow. Furthermore, a stable stratification does not perturb the spin-down flow provided the Prandtl number is small enough. If this is not the case, the Stewartson layer disappears and meridional circulation is confined within the thermal layers. The scalings for the amplitude of the anelastic secondary flow have been found to be the same as for the incompressible flow in all three regions, at the lowest order. However, because the velocity no longer conforms the Taylor–Proudman theorem, its shape differs outside the tangent cylinder \mathcal{C} , that is, where differential rotation takes place. Finally, we find the settling of the steady state to be reached on a viscous time for the weakly, strongly and thermally unstratified incompressible flows. Large density variations relevant to astro- and geophysical systems, tend to slightly shorten the transient.

Key words: rotating flows, free shear layers

1. Introduction

One of the long-lasting problems in stellar astrophysics is the nature of the mechanisms responsible for the angular momentum and chemicals transport within the stably stratified radiative envelope of rotating massive stars. Such transport can result from various physical processes such as internal gravity waves (e.g. Rogers *et al.* 2013; Lee, Neiner & Mathis 2014), turbulence from shear instabilities due to differential rotation (e.g. Zahn 1974, 1992; Prat & Lignières 2013, 2014; Prat *et al.* 2016; Garaud, Gagnier & Verhoeven 2017; Gagnier & Garaud 2018; Kulenthirajah & Garaud 2018) and centrifugal driving of meridional circulations. The latter is usually associated with the steady baroclinic

† Email address for correspondence: dgagnier@irap.omp.eu

Critical angular velocity and anisotropic mass loss of rotating stars with radiation-driven winds

D. Gagnier¹, M. Rieutord¹, C. Charbonnel^{2,1}, B. Putigny¹, and F. Espinosa Lara³

¹ IRAP, Université de Toulouse, CNRS, UPS, CNES, 14, avenue Édouard Belin, 31400 Toulouse, France
e-mail: damien.gagnier@irap.omp.eu

² Department of Astronomy, University of Geneva, Chemin des Maillettes 51, 1290 Versoix, Switzerland

³ Space Research Group, University of Alcalá, 28871 Alcalá de Henares, Spain

Received 7 November 2018 / Accepted 1 April 2019

ABSTRACT

Context. The understanding of the evolution of early-type stars is tightly related to that of the effects of rapid rotation. For massive stars, rapid rotation combines with their strong radiation-driven wind.

Aims. The aim of this paper is to investigate two questions that are prerequisite to the study of the evolution of massive rapidly rotating stars: (i) What is the critical angular velocity of a star when radiative acceleration is significant in its atmosphere? (ii) How do mass and angular momentum loss depend on the rotation rate?

Methods. To investigate fast rotation, which makes stars oblate, we used the 2D ESTER models and a simplified approach, the ω -model, which gives the latitudinal dependence of the radiative flux in a centrifugally flattened radiative envelope.

Results. We find that radiative acceleration only mildly influences the critical angular velocity, at least for stars with masses lower than $40 M_{\odot}$. For instance, a $15 M_{\odot}$ star on the zero-age main sequence would reach criticality at a rotation rate equal to 0.997 the Keplerian equatorial rotation rate. We explain this mild reduction of the critical angular velocity compared to the classical Keplerian angular velocity by the combined effects of gravity darkening and a reduced equatorial opacity that is due to the centrifugal acceleration. To answer the second question, we first devised a model of the local surface mass flux, which we calibrated with previously developed 1D models. The discontinuity (the so-called bi-stability jump) included in the $\dot{M} - T_{\text{eff}}$ relation of 1D models means that the mass flux of a fast-rotating star is controlled by either a single wind or a two-wind regime. Mass and angular momentum losses are strong around the equator if the star is in the two-wind regime. We also show that the difficulty of selecting massive stars that are viewed pole-on makes detecting the discontinuity in the relation between mass loss and effective temperature also quite challenging.

Key words. stars: rotation – stars: mass-loss – stars: early-type

1. Introduction

Among the numerous problems that need to be overcome when stars are modelled, those related to rotation are of particular nature in the frame of classical 1D models because rotation breaks the imposed spherical symmetry. Rotating stars are indeed not only distorted by the centrifugal acceleration, but are also pervaded by large-scale flows that carry chemical elements and angular momentum. The importance of these effects has been appreciated for quite some time now (e.g. Maeder & Meynet 2000, and references therein), and specific modelling simplifications are usually included in 1D stellar evolution codes to reproduce the expected effects of global rotation. For instance, the transport of angular momentum that results from small-scale turbulence and large-scale circulation induced by rotation in radiative zones is inserted in 1D evolution models either as an advection-diffusion process following Zahn (1992), Meynet & Maeder (1997), and Maeder & Zahn (1998) (e.g. Geneva code, Eggenberger et al. 2008; STAREVOL, Decressin et al. 2009, Amard et al. 2016; FRANEC, Chieffi & Limongi 2013; CES-TAM, Marques et al. 2013) or as a purely diffusive process (e.g. Kepler, Heger et al. 2000; STERN, Yoon & Langer 2005; MESA, Paxton et al. 2013). The associated transport of chemicals (so-called rotation-induced mixing) is always treated as a diffusive process (as justified by Chaboyer & Zahn 1992).

This modelling of rotation effects is only justified for slow rotators (Zahn 1992). Early-type stars are, however, often con-

sidered to be fast rotators. The hypotheses and approximations of current prescriptions are therefore no longer valid for such stars. Be-type stars, for instance, are well known to be fast rotators close to the break-up limit (e.g. Porter & Rivinius 2003; Bastian et al. 2017), that is, the centrifugal force nearly balances gravity at equator. These stars show evidence of mass loss that is associated with their near break-up rotation (Carciofi et al. 2008; Krtićka et al. 2011; Rivinius et al. 2013; Georgy et al. 2013; Granada et al. 2013; Granada & Haemmerlé 2014). Furthermore, early-type stars may also be very luminous and therefore have high radiation pressure at their surface. The induced radiation-driven wind is responsible for a significant loss of mass and angular momentum, which notably influences the evolutionary paths of massive stars (e.g. Langer 1998; Vink et al. 2010). Because of gravity darkening (e.g. Espinosa Lara & Rieutord 2011), mass loss from rotating massive stars is expected to be anisotropic (e.g. Owocki et al. 1996; Owocki & Gayley 1997; Pelupessy et al. 2000; Maeder & Meynet 2000; Georgy et al. 2011). These anisotropies in turn affect the evolution of rotation and are likely to play a significant role in the interior dynamics of massive stars (Zahn 1992; Maeder 1999; Lignieres et al. 2000; Lau et al. 2011; Rieutord & Beth 2014).

The treatment of fast rotation thus requires developments beyond the current model approximations, although this approach has been extremely useful to make significant progress in the field (e.g. Maeder & Meynet 2015, and references therein).

Evolution of rotation in rapidly rotating early-type stars during the main sequence with 2D models

D. Gagnier¹, M. Rieutord¹, C. Charbonnel^{2,1}, B. Putigny¹, and F. Espinosa Lara³

¹ IRAP, Université de Toulouse, CNRS, UPS, CNES, 14, Avenue Édouard Belin, 31400 Toulouse, France
e-mail: damien.gagnier@irap.omp.eu, michel.rieutord@irap.omp.eu

² Department of Astronomy, University of Geneva, Chemin des Maillettes 51, 1290 Versoix, Switzerland
e-mail: corinne.charbonnel@unige.ch

³ Space Research Group, University of Alcalá, 28871 Alcalá de Henares, Spain

Received 3 January 2018 / Accepted 25 March 2019

ABSTRACT

The understanding of the rotational evolution of early-type stars is deeply related to that of anisotropic mass and angular momentum loss. In this paper, we aim to clarify the rotational evolution of rapidly rotating early-type stars along the main sequence (MS). We have used the 2D ESTER code to compute and evolve isolated rapidly rotating early-type stellar models along the MS, with and without anisotropic mass loss. We show that stars with $Z = 0.02$ and masses between 5 and $7 M_{\odot}$ reach criticality during the main sequence provided their initial angular velocity is larger than 50% of the Keplerian one. More massive stars are subject to radiation-driven winds and to an associated loss of mass and angular momentum. We find that this angular momentum extraction from the outer layers can prevent massive stars from reaching critical rotation and greatly reduce the degree of criticality at the end of the MS. Our model includes the so-called bi-stability jump of the $\dot{M} - T_{\text{eff}}$ relation of 1D-models. This discontinuity now shows up in the latitude variations of the mass-flux surface density, endowing rotating massive stars with either a single-wind regime (no discontinuity) or a two-wind regime (a discontinuity). In the two-wind regime, mass loss and angular momentum loss are strongly increased at low latitudes inducing a faster slow-down of the rotation. However, predicting the rotational fate of a massive star is difficult, mainly because of the non-linearity of the phenomena involved and their strong dependence on uncertain prescriptions. Moreover, the very existence of the bi-stability jump in mass-loss rate remains to be substantiated by observations.

Key words. stars: evolution – stars: rotation – stars: early-type – stars: winds, outflows

1. Introduction

The evolution of the rotation rate of stars is one of the open challenges of current stellar physics. The rotation rate of a star indeed depends on several un-mastered magneto-hydrodynamic mechanisms. The most important ones may be those that transport and/or extract angular momentum within the stellar interior and at the surface of the star, and in the first place the losses due to radiation-driven winds, possibly modified by the presence of a magnetic field. Angular momentum losses depend on various phenomena but in particular on the mass loss distribution at the surface of the star. It is clear that a strong mass loss at the equator of the star is more efficient at extracting angular momentum than a strong mass loss at the pole. Moreover, the shape of a fast rotating star strongly deviates from the spherical symmetry and its spheroidal shape emphasises the anisotropy of the wind.

Until now, stellar evolution codes cope with this question using more or less sophisticated recipes. Often, the spherical symmetry of the models is coupled to a very simplified modelling of mass and angular momentum loss where the star is peeled off at a given rate (e.g. [Woosley et al. 1993](#); [Ekström et al. 2012](#)). This rate may depend on some general parameters of the star (luminosity, effective temperature, etc.).

In the present work we make a step forward in the modelling of the rotational evolution of stars by using the 2D ESTER models that have been designed by [Espinosa Lara & Rieutord \(2013\)](#) and [Rieutord et al. \(2016\)](#). These models describe the 2D

steady structure of a rapidly rotating star. They can also be used to investigate the rotational evolution of early-type stars along the main sequence, using a simple method that we implement here to compute the change in the hydrogen mass fraction in the convective core of the model, and which provides an acceptable description of the main sequence evolution. With these state-of-the-art 2D models we have now access to the latitude variations of surface quantities that matter for mass loss, namely effective gravity and effective temperature, as the star evolves. We can thus investigate in some details the consequences of the ensuing anisotropic radiation-driven winds and in particular the effects of a mass-flux jump at some effective temperature, as has been suggested by [Vink et al. \(2001\)](#).

In a preliminary study, [Gagnier et al. \(2019, hereafter referred to as Paper I\)](#) have revisited the concept of critical angular velocity for stars with strong surface radiative acceleration. In this study, we first used the ω -model of [Espinosa Lara & Rieutord \(2011\)](#) to derive an analytical expression for the critical angular velocity. Briefly, the ω -model assumes that radiative flux and effective gravity are anti-parallel and that the stellar mass is centrally condensed. We show that up to 90% of the critical angular velocity, the ω -model flux does not diverge more than 10% from the flux given by a full 2D-model. Our new expression of the critical angular velocity differs from that of [Maeder & Meynet \(2000\)](#) pioneer work, and turns out to be very close to the Keplerian angular velocity for all MS evolutionary stages, at least for stellar models of mass less than



Turbulent Transport by Diffusive Stratified Shear Flows: From Local to Global Models.

II. Limitations of Local Models

Damien Gagnier¹ and Pascale Garaud²

¹IRAP, Université de Toulouse, CNRS, UPS, CNES, 14 avenue Édouard Belin, F-31400 Toulouse, France
²Department of Applied Mathematics, Baskin School of Engineering, University of California at Santa Cruz,
 1156 High Street, Santa Cruz CA 95064, USA

Received 2018 March 26; revised 2018 June 5; accepted 2018 June 14; published 2018 July 20

Abstract

This paper continues the systematic investigation of diffusive shear instabilities initiated in Part I of this series. In this work, we primarily focus on quantifying the impact of nonlocal mixing, which is not taken into account in Zahn’s mixing model. We present the results of direct numerical simulations in a new model setup designed to contain coexisting laminar and turbulent shear layers. As in Part I, we use the low Péclet number approximation of Lignières to model the evolution of the perturbations. Our main findings are twofold. First, turbulence is not necessarily generated whenever Zahn’s nonlinear criterion $JPr < (JPr)_c$ is satisfied, where $J = N^2/S^2$ is the local gradient Richardson number, $Pr = \nu/\kappa_T$ is the Prandtl number, and $(JPr)_c \simeq 0.007$. We have demonstrated that the presence or absence of turbulent mixing in this limit hysteretically depends on the history of the shear layer. Second, Zahn’s nonlinear instability criterion only approximately locates the edge of the turbulent layer, and mixing beyond the region where $JPr < (JPr)_c$ can also take place in a manner analogous to convective overshoot. We found that the turbulent kinetic energy decays roughly exponentially beyond the edge of the shear-unstable region, on a lengthscale δ that is directly proportional to the scale of the turbulent eddies, which are themselves of the order of the Zahn scale (see Part I). Our results suggest that mixing by diffusive shear instabilities should be modeled with more care than is currently standard in stellar evolution codes.

Key words: hydrodynamics – instabilities – stars: general – turbulence

1. Introduction

The diffusive shear instability was first discussed in the context of stellar astrophysics by Zahn (1974) as a potential source of mixing in stably stratified radiation zones, which extracts its energy from the star’s rotational shear. Zahn indeed noted that since the Prandtl number $Pr = \nu/\kappa_T$ (where ν is the kinematic viscosity and κ_T is the thermal diffusivity) is very small in stars, $\nu \ll \kappa_T$, and one can always find a scale l such that the Reynolds and Péclet numbers based on that scale satisfy

$$Pe_l \ll 1 \ll Re_l, \text{ where } Pe_l = Sl^2/\kappa_T, \quad Re_l = Sl^2/\nu, \quad (1)$$

and S is the local shearing rate. On that scale, fluid flows are both strongly diffusive, which implies that they barely feel the thermal stratification, but also very weakly viscous, a necessary condition for shear instability to take place. Zahn (1974) concluded that such diffusive shear instabilities should be fairly ubiquitous in stars and argued that an appropriate instability criterion must be of the form

$$JPr < (JPr)_c, \quad (2)$$

where $J = N^2/S^2$ (where N is the Brunt–Väisälä frequency) is the local gradient Richardson number, and $(JPr)_c$ is a universal constant. He later proposed a simple model for mixing by diffusive shear instabilities, where the turbulent viscosity ν_{turb} and the turbulent diffusivity of a passive scalar D_{turb} are given by

$$D_{\text{turb}} \simeq \nu_{\text{turb}} \simeq C \frac{\kappa_T}{J}, \quad (3)$$

where C is another universal constant. The arguments leading to the derivation of (2) and (3) are reviewed for instance in Garaud et al. (2017) (Paper I hereafter).

Significant progress has been made in recent years toward testing Zahn’s model using three-dimensional (3D) Direct Numerical Simulations (DNSs) with encouraging results, although much remains to be done. Prat & Lignières (2013, 2014), Prat et al. (2016), and Paper I studied uniform shear flows (i.e., flows where both the background shear and the Brunt–Väisälä frequency are constant) using different forcing methods. Garaud et al. (2015) and Garaud & Kulenthirarajah (2016) studied stratified Kolmogorov flows, where the background Brunt–Väisälä frequency is constant and the background shear flow is driven by a spatially sinusoidal body force. In all cases the Reynolds numbers achieved were sufficiently high to ensure that the viscous scale was much smaller than the domain scale.

The findings reported in these papers are remarkably consistent with one another (given the differences in model setups), and show that whenever the Péclet number based on the turbulent eddy scale l_e is smaller than one and l_e is both significantly larger than the viscous scale but also significantly smaller than the domain scale (i.e., whenever the turbulent dynamics only depend on the local shear) then:

1. Stratified diffusive shear instabilities are only excited provided (Garaud & Kulenthirarajah 2016; Prat et al. 2016; Garaud et al. 2017)

$$JPr < (JPr)_c \simeq 0.007, \quad (4)$$

which not only recovers the criterion proposed by Zahn (1974) but also estimates the previously unknown constant $(JPr)_c$.

2. Both the turbulent viscosity ν_{turb} and the turbulent diffusivity D_{turb} are roughly equal to one another, and



Turbulent Transport by Diffusive Stratified Shear Flows: From Local to Global Models. I. Numerical Simulations of a Stratified Plane Couette Flow

Pascale Garaud¹, Damien Gagnier², and Jan Verhoeven³

¹ Department of Applied Mathematics and Statistics, Baskin School of Engineering, University of California at Santa Cruz,
1156 High Street, Santa Cruz, CA 95064, USA

² Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (IRAP), 14, avenue Edouard Belin, F-31400 Toulouse, France

³ Department of Earth and Planetary Sciences, University of California at Santa Cruz, 1156 High Street, Santa Cruz, CA 95064, USA

Received 2016 October 12; revised 2016 December 10; accepted 2016 December 12; published 2017 March 10

Abstract

Shear-induced turbulence could play a significant role in mixing momentum and chemical species in stellar radiation zones, as discussed by Zahn. In this paper we analyze the results of direct numerical simulations of stratified plane Couette flows, in the limit of rapid thermal diffusion, to measure the turbulent viscosity and the turbulent diffusivity of a passive tracer as a function of the local shear and the local stratification. We find that the stability criterion proposed by Zahn, namely that the product of the gradient Richardson number and the Prandtl number must be smaller than a critical values $(JPr)_c$ for instability, adequately accounts for the transition to turbulence in the flow, with $(JPr)_c \simeq 0.007$. This result recovers and confirms the prior findings of Prat et al. Zahn's model for the turbulent diffusivity and viscosity, namely that the mixing coefficient should be proportional to the ratio of the thermal diffusivity to the gradient Richardson number, does not satisfactorily match our numerical data. It fails (as expected) in the limit of large stratification where the Richardson number exceeds the aforementioned threshold for instability, but it also fails in the limit of low stratification where the turbulent eddy scale becomes limited by the computational domain size. We propose a revised model for turbulent mixing by diffusive stratified shear instabilities that properly accounts for both limits, fits our data satisfactorily, and recovers Zahn's model in the limit of large Reynolds numbers.

Key words: hydrodynamics – instabilities – stars: general – turbulence

1. Introduction

Thanks to recent advances in supercomputing it is now possible to run numerical experiments designed to quantify the rates of turbulent mixing of selected quantities (heat, angular momentum, composition, etc.) in the presence of various hydrodynamic and magnetohydrodynamic instabilities, in parameter regimes appropriate for astrophysical plasmas that cannot be achieved in more traditional laboratory experiments. This raises the engaging prospect of finally being able to constrain models of non-canonical mixing in stars through first-principles theory and experiments rather than through observations alone.

A strong potential candidate for driving vertical mixing in stellar radiation zones is the shear instability, which has gained significant popularity since the discovery of relatively strong radial shear layers via helio- and asteroseismology, in the Sun (Christensen-Dalsgaard & Schou 1988; Brown et al. 1989) and in Red Giant Branch stars (Deheuvels et al. 2012, 2014). However, the radiation zones of these stars are usually too strongly stratified to be shear-unstable, at least if thermal diffusion is ignored. Indeed, the standard criterion for instability of inviscid, non-diffusive stratified shear flows to infinitesimal perturbations is the Richardson criterion (formally proved by Howard 1961; Miles 1961), which states that the local gradient Richardson number

$$J = \frac{N^2}{S^2}, \quad (1)$$

where N is the Brunt–Väisälä frequency and S is the local shearing rate, must drop below $1/4$ somewhere in the flow for instability. It is sometimes argued that finite-amplitude non-

diffusive instabilities may exist for somewhat larger values of J , but energetic arguments (Richardson 1920) suggest that J cannot be much larger than 1 for sustained turbulent motions to exist.

In thermally stratified systems, Townsend (1958) and Dudis (1974) noted, however, that thermal radiation and/or thermal diffusion let the perturbed fluid adjust thermally to its surroundings, thereby reducing its stabilizing buoyancy excess or deficit compared with the background as it moves up and down. In an optically thick fluid, the ratio of the thermal diffusion timescale to the shearing timescale for a shear layer of vertical lengthscale L is measured by the global Péclet number,

$$Pe_L = \frac{SL^2}{\kappa_T}, \quad (2)$$

where κ_T is the thermal diffusivity. Linear stability analyses have shown that having $Pe_L \ll 1$ can destabilize stratified shear layers that would otherwise be stable in the non-diffusive case (Jones 1977; Lignières et al. 1999; Garaud et al. 2015), and typically raises the critical Richardson number for instability by a factor proportional to Pe_L^{-1} . Note that unfortunately there is no simple formal criterion for linear instability equivalent to the Miles-Howard theorem when thermal diffusion is accounted for, even in the inviscid limit. Also note that, in the optically thick limit, there is no geophysical analog of turbulent and strongly diffusive stratified shear flows. This is because in geophysical fluids the Prandtl number $Pr = \nu/\kappa_T$ (where ν is the kinematic viscosity) is always of order one or larger, and since the global Reynolds number $Re_L \equiv \frac{SL^2}{\nu}$, we have $Re_L = Pe_L/Pr < Pe_L \ll 1$. In other words, low Péclet number

Références

- ABBOTT, D. C. 1979 The domain of radiatively driven mass loss in the H-R diagram. In *Mass Loss and Evolution of O-Type Stars* (ed. P. S. Conti & C. W. H. De Loore), *IAU Symposium*, vol. 83, pp. 237–239.
- ABBOTT, D. C. 1982 The theory of radiatively driven stellar winds. II - The line acceleration. *ApJ* **259**, 282–301.
- ABBOTT, D. C. & LUCY, L. B. 1985 Multiline transfer and the dynamics of stellar winds. *ApJ* **288**, 679–693.
- AMARD, L., PALACIOS, A., CHARBONNEL, C., GALLET, F. & BOUVIER, J. 2016 Rotating models of young solar-type stars. Exploring braking laws and angular momentum transport processes. *A&A* **587**, A105, arXiv : 1601.01904.
- ANDERS, E. & GREVESSE, N. 1989 Abundances of the elements - Meteoritic and solar. *Geochim. Cosmochim. Acta* **53**, 197–214.
- ASPLUND, M., GREVESSE, N., SAUVAL, A. J. & SCOTT, P. 2009 The Chemical Composition of the Sun. *ARA&A* **47**, 481–522, arXiv : 0909.0948.
- BARCILON, V. 1968 Stewartson layers in transient rotating fluid flows. *Journal of Fluid Mechanics* **33**, 815–825.
- BARCILON, V. & PEDLOSKY, J. 1967 A unified linear theory of homogeneous and stratified rotating fluids. *Journal of Fluid Mechanics* **29**, 609–621.
- BARKER, A. J., JONES, C. A. & TOBIAS, S. M. 2019 Angular momentum transport by the GSF instability : non-linear simulations at the equator. *MNRAS* **487** (2), 1777–1794, arXiv : 1905.06962.
- BARKER, A. J., JONES, C. A. & TOBIAS, S. M. 2020 Angular momentum transport, layering, and zonal jet formation by the GSF instability : non-linear simulations at a general latitude. *MNRAS* **495** (1), 1468–1490, arXiv : 2005.04941.
- BEALS, C. S. 1953 The Spectra of the P Cygni Stars. *Publications of the Dominion Astrophysical Observatory Victoria* **9**, 1.

REFERENCES

- BEESLEY, DAVID, OLEJARZ, JASON, TANDON, AMIT & MARSHALL, JOHN 2008 A laboratory demonstration of coriolis effects on wind-driven ocean currents. *Oceanography* **21** (2), 72–76.
- BJERKNES, V., BJERKNES, J., SOLBERG, H. & BERGERON, T. 1933 *Physikalische hydrodynamik*. Berlin : Springer.
- BJÖRKLUND, R., SUNDQVIST, J. O., PULS, J. & NAJARRO, F. 2020 New predictions for radiation-driven, steady-state mass-loss and wind-momentum from hot, massive stars II. A grid of O-type stars in the Galaxy and the Magellanic Clouds. *arXiv e-prints* p. arXiv :2008.06066, arXiv : 2008.06066.
- BONAZZOLA, S., GOURGOULHON, E. & MARCK, J.-A. 1998 Numerical approach for high precision 3d relativistic star models. *Phys. Rev. D* **58**, 104020.
- BOURET, J.-C., HILLIER, D. J., LANZ, T. & FULLERTON, A. W. 2012 Properties of Galactic early-type O-supergiants. A combined FUV-UV and optical analysis. *A&A* **544**, A67, arXiv : 1205.3075.
- BOYD, J. P. 2001 *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*.
- BRANDENBURG, A., JENNINGS, R., NORDLUND, Å., STEIN, M. RIEUTORDAND R. F. & TUOMINEN, I. 1996 Magnetic structures in a dynamo simulation. *J. Fluid Mech.* **306**, 325–357.
- BROWN, EVELYN, COLLING, ANGELA, PARK, DAVE, PHILLIPS, JOHN, ROTHERY, DAVE & WRIGHT, JOHN 2011 *Ocean Circulation*. Butterworth-Heinemann.
- BUSSE, F. 1981 Do eddington-sweet circulations exist? *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **17**, 215.
- BUSSE, FRIEDRICH, DORMY, EMMANUEL, SIMITEV, RADOSTIN & SOWARD, A.M. 2007 Dynamics of rotating fluids .
- BUSSE, F. H. 1968 Shear flow instabilities in rotating systems. *Journal of Fluid Mechanics* **33**, 577–589.
- CABALLERO NAVARRO, R., GARCÍA HERNÁNDEZ, A., AYALA, A. & SUÁREZ, J. C. 2020 Study of the effects of magnetic braking on the lithium abundances of the Sun and solar-type stars. *arXiv e-prints* p. arXiv :2006.01899, arXiv : 2006.01899.
- CANUTO, CLAUDIO, HUSSAINI, M. YOUSSEFF, QUARTERONI, ALFIO & ZANG, THOMAS A. 2006 *Spectral Methods*.
- CASTOR, J. I., ABBOTT, D. C. & KLEIN, R. I. 1975 Radiation-driven winds in Of stars. *ApJ* **195**, 157–174.
- CASTOR, JOHN L. 1974 On the force associated with absorption of spectral line radiation. *MNRAS* **169**, 279–306.

REFERENCES

- CHABOYER, B. & ZAHN, J.-P. 1992 Effect of horizontal turbulent diffusion on transport by meridional circulation. *A&A* **253**, 173–177.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon Press, Oxford.
- CHANDRASEKHAR, S. 1967 *An introduction to the study of stellar structure*. New York : Dover, 1967.
- CHARBONNEL, CORINNE & TALON, SUZANNE 2005 Influence of Gravity Waves on the Internal Rotation and Li Abundance of Solar-Type Stars. *Science* **309** (5744), 2189–2191, arXiv : astro-ph/0511265.
- CHARBONNEL, C., ZAHN, J.-P. & TALON, S. 2008 Transport processes in stars : Diffusion, rotation, magnetic fields and internal waves. *European Astronomical Society Publications Series* **32**, 81–130.
- CHE, X., MONNIER, J. D., ZHAO, M., PEDRETTI, E., THUREAU, N., MÉRAND, A., TEN BRUMMELAAR, T., MCALISTER, H., RIDGWAY, S. T., TURNER, N., STURMANN, J. & STURMANN, L. 2011 Colder and Hotter : Interferometric Imaging of β Cassiopeiae and α Leonis. *ApJ* **732**, 68.
- CHIEFFI, A. & LIMONGI, M. 2013 Pre-supernova Evolution of Rotating Solar Metallicity Stars in the Mass Range 13-120 M_{\odot} and their Explosive Yields. *ApJ* **764**, 21.
- CHIOSI, CESARE & MAEDER, ANDRE 1986 The evolution of massive stars with mass loss. *ARA&A* **24**, 329–375.
- CHIOSI, C. & NASI, E. 1974 Mass loss from early type stars. *A&A* **34**, 355–362.
- COHEN, D., SUNDQVIST, J. & LEUTENEGGER, M. 2013 X-ray Diagnostics of Mass-loss Rates and Wind Structure in O-stars. In *Massive Stars : From alpha to Omega*, p. 36.
- CRANMER, STEVEN R. 1996 Dynamical Models of Winds from Rotating Hot Stars. PhD thesis, Bartol Research Institute, University of Delaware.
- CROWTHER, P. A., LENNON, D. J. & WALBORN, N. R. 2006 Physical parameters and wind properties of galactic early B supergiants. *A&A* **446**, 279–293, arXiv : astro-ph/0509436.
- CURÉ, M. 2004 The Influence of Rotation in Radiation-driven Wind from Hot Stars : New Solutions and Disk Formation in Be Stars. *ApJ* **614**, 929–941, arXiv : astro-ph/0406490.
- DAVEY, A. 1962 The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders. *Journal of Fluid Mechanics* **14**, 336–368.
- DE JAGER, C., NIEUWENHUIJZEN, H. & VAN DER HUUCHT, K. A. 1988 Mass loss rates in the Hertzsprung-Russell diagram. *A&AS* **72**, 259–289.

REFERENCES

- DEBNATH, LOKENATH & HARRELL, CAROLYN 1976 The operational calculus of associated Legendre transforms. I. *Indian Journal of Pure & Applied Mathematics* **7**.
- DECRESSIN, T., MATHIS, S., PALACIOS, A., SIESS, L., TALON, S., CHARBONNEL, C. & ZAHN, J.-P. 2009 Diagnoses to unravel secular hydrodynamical processes in rotating main sequence stars. *A&A* **495**, 271–286, arXiv : 0812.0363.
- DELAIA, O., ZOREC, J., DOMICIANO DE SOUZA, A., MOURARD, D., PERRAUT, K., STEE, PH., FRÉMAT, Y., MONNIER, J., KRAUS, S., CHE, X., BÉRIO, PH., BONNEAU, D., CLAUSSE, J. M., CHALLOUF, M., LIGI, R., MEILLAND, A., NARDETTO, N., SPANG, A., MCALISTER, H., TEN BRUMMELAAR, T., STURMANN, J., STURMANN, L., TURNER, N., FARRINGTON, C. & GOLDFINGER, P. J. 2013 Spectrally resolved interferometric observations of α Cephei and physical modeling of fast rotating stars. *A&A* **555**, A100.
- DELEPLACE, BÉRANGÈRE & CARDIN, PHILIPPE 2006 Viscomagnetic torque at the core mantle boundary. *Geophysical Journal International* **167** (2), 557–566, arXiv : physics/0503038.
- DINTRANS, BORIS 1999 Gravity-inertial modes in rapidly rotating stars. Theses, Université Paul Sabatier Toulouse 3.
- DINTRANS, B. & RIEUTORD, M. 2001 A comparison of the anelastic and subseismic approximations for low-frequency gravity modes in stars. *MNRAS* **324**, 635–642.
- DOMICIANO DE SOUZA, A., KERVELLA, P., MOSER FAES, D., DALLA VEDOVA, G., MÉRAND, A., LE BOUQUIN, J.-B., ESPINOSA LARA, F., RIEUTORD, M., BENDJOYA, P., CARCIOFI, A. C., HADJARA, M., MILLOUR, F. & VAKILI, F. 2014 The environment of the fast rotating star Achernar. III. Photospheric parameters revealed by the VLTI. *A&A* **569**, A10.
- DONATI, J. F. & LANDSTREET, J. D. 2009 Magnetic Fields of Nondegenerate Stars. *ARA&A* **47** (1), 333–370, arXiv : 0904.1938.
- DORMY, E., CARDIN, P. & JAULT, D. 1998 MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field. *Earth and Planetary Science Letters* **160**, 15–30.
- DRAZIN, P. G. 2002 *Introduction to Hydrodynamic Stability*.
- DUDIS, J. J. 1974 The stability of a thermally radiating stratified shear layer, including self-absorption. *Journal of Fluid Mechanics* **64**, 65–83.
- EDDINGTON, A. S. 1926 *The Internal Constitution of the Stars*.

REFERENCES

- EDELMANN, P. V. F., RATNASINGAM, R. P., PEDERSEN, M. G., BOWMAN, D. M., PRAT, V. & ROGERS, T. M. 2019 Three-dimensional Simulations of Massive Stars. I. Wave Generation and Propagation. *ApJ* **876** (1), 4, arXiv : 1903.09392.
- EDELMANN, P. V. F., RÖPKE, F. K., HIRSCHI, R., GEORGY, C. & JONES, S. 2017 Testing a one-dimensional prescription of dynamical shear mixing with a two-dimensional hydrodynamic simulation. *A&A* **604**, A25, arXiv : 1704.06261.
- EGGENBERGER, P., MEYNET, G., MAEDER, A., HIRSCHI, R., CHARBONNEL, C., TALON, S. & EKSTRÖM, S. 2008 The Geneva stellar evolution code. *Ap&SS* **316**, 43–54.
- EKSTRÖM, S., GEORGY, C., EGGENBERGER, P., MEYNET, G., MOWLAVI, N., WYTTENBACH, A., GRANADA, A., DECRESSIN, T., HIRSCHI, R., FRISCHKNECHT, U., CHARBONNEL, C. & MAEDER, A. 2012 Grids of stellar models with rotation. I. Models from 0.8 to 120 M_{\odot} at solar metallicity ($Z = 0.014$). *A&A* **537**, A146, arXiv : 1110.5049.
- EKSTRÖM, S., GEORGY, C., MEYNET, G., MAEDER, A. & GRANADA, A. 2011 Massive stellar models : rotational evolution, metallicity effects. In *Active OB Stars : Structure, Evolution, Mass Loss, and Critical Limits* (ed. C. Neiner, G. Wade, G. Meynet & G. Peters), *IAU Symposium*, vol. 272, pp. 62–72, arXiv : 1010.3838.
- ESPINOSA LARA, F. & RIEUTORD, M. 2011 Gravity darkening in rotating stars. *A&A* **533**, A43.
- ESPINOSA LARA, F. & RIEUTORD, M. 2013 Self-consistent 2D models of fast rotating early-type stars. *A&A* **552**, A35.
- FALLER, A. J. 1963 An experimental study of the instability of the laminar Ekman boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics* **15**, 560–576.
- FALLER, ALAN J. & KAYLOR, ROBERT E. 1966 A Numerical Study of the Instability of the Laminar Ekman Boundary Layer. *Journal of Atmospheric Sciences* **23** (5), 466–480.
- FRICKE, K. 1968 Instabilität stationärer Rotation in Sternen. *ZAp* **68**, 317.
- FRIEDLANDER, S. 1976 Quasi-steady flow of a rotating stratified fluid in a sphere. *J. Fluid Mech.* **76**, 209–228.
- FRÜH, W.-G. & READ, P. L. 1999 Experiments on a barotropic rotating shear layer. Part 1. Instability and steady vortices. *Journal of Fluid Mechanics* **383**, 143–173.
- FULLER, JIM, LECOANET, DANIEL, CANTIELLO, MATTEO & BROWN, BEN 2014 Angular Momentum Transport via Internal Gravity Waves in Evolving Stars. *ApJ* **796** (1), 17, arXiv : 1409.6835.

REFERENCES

- GAGNIER, D. & GARAUD, P. 2018 Turbulent Transport by Diffusive Stratified Shear Flows : From Local to Global Models. II. Limitations of Local Models. *ApJ* **862**, 36, arXiv : 1803.10455.
- GAGNIER, D. & RIEUTORD, M. 2020 Stress-driven spin-down of a viscous fluid within a spherical shell. *Journal of Fluid Mechanics* **904**, A35.
- GAGNIER, D., RIEUTORD, M., CHARBONNEL, C., PUTIGNY, B. & ESPINOSA LARA, F. 2019*a* Critical angular velocity and anisotropic mass loss of rotating stars with radiation-driven winds. *A&A* **625**, A88.
- GAGNIER, D., RIEUTORD, M., CHARBONNEL, C., PUTIGNY, B. & ESPINOSA LARA, F. 2019*b* Evolution of rotation in rapidly rotating early-type stars during the main sequence with 2D models. *A&A* **625**, A89.
- GARAUD, P. 2002 On rotationally driven meridional flows in stars. *MNRAS* **335**, 707–711.
- GARAUD, PASCALE 2018 Double-Diffusive Convection at Low Prandtl Number. *Annual Review of Fluid Mechanics* **50** (1), 275–298.
- GARAUD, P., GAGNIER, D. & VERHOEVEN, J. 2017 Turbulent Transport by Diffusive Stratified Shear Flows : From Local to Global Models. I. Numerical Simulations of a Stratified Plane Couette Flow. *ApJ* **837**, 133, arXiv : 1610.04320.
- GARAUD, P., GALLET, B. & BISCHOFF, T. 2015 The stability of stratified spatially periodic shear flows at low Péclet number. *Physics of Fluids* **27** (8), 084104, arXiv : 1507.07286.
- GARAUD, P. & KULENTHIRARAJAH, L. 2016 Turbulent Transport in a Strongly Stratified Forced Shear Layer with Thermal Diffusion. *ApJ* **821**, 49, arXiv : 1512.08774.
- GASTINE, T. & WICHT, J. 2012 Effects of compressibility on driving zonal flow in gas giants. *Icarus* **219** (1), 428–442.
- GAYLEY, K. G. 1995 An Improved Line-Strength Parameterization in Hot-Star Winds. *ApJ* **454**, 410.
- GEORGY, C., EKSTRÖM, S., GRANADA, A., MEYNET, G., MOWLAVI, N., EGGENBERGER, P. & MAEDER, A. 2013 Populations of rotating stars. I. Models from 1.7 to 15 M_{\odot} at $Z = 0.014, 0.006$, and 0.002 with Ω/Ω_{crit} between 0 and 1. *A&A* **553**, A24, arXiv : 1303.2321.
- GEORGY, CYRIL, MEYNET, GEORGES, EKSTRÖM, SYLVIA, WADE, GREGG A., PETIT, VÉRONIQUE, KESZTHELYI, ZSOLT & HIRSCHI, RAPHAEL 2017 Possible pair-instability supernovae at solar metallicity from magnetic stellar progenitors. *A&A* **599**, L5, arXiv : 1702.02340.

REFERENCES

- GEORGY, C., MEYNET, G. & MAEDER, A. 2011 Effects of anisotropic winds on massive star evolution. *A&A* **527**, A52, arXiv : 1011.6581.
- GIBBS, J. WILLARD 1898 Fourier's Series. *Nature* **59** (1522), 200.
- GILMAN, PETER A. & FOX, PETER 1996 Joint Instability of Latitudinal Differential Rotation and Toroidal Magnetic Fields below the Solar Convection Zone. In *American Astronomical Society Meeting Abstracts #188*, *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, vol. 188, p. 69.16.
- GLATZEL, W. 1998 Remarks on the "Omega -limit". *A&A* **339**, L5–L8.
- GOLDREICH, PETER & SCHUBERT, GERALD 1967 Differential Rotation in Stars. *ApJ* **150**, 571.
- GOLDSTEIN, S. 1938, 1965 *Modern developments in Fluid Dynamics*. Clarendon Press, Oxford, Dover.
- GOTTLIEB, DAVID & GOTTLIEB, SIGAL 2005 Spectral methods for compressible reactive flows. *Comptes Rendus Mecanique* **333** (1), 3–16.
- GREENSPAN, H. P. 1965 On the general theory of contained rotating fluid motions. *J. Fluid Mech.* **22**, 449–462.
- GREENSPAN, H. P. 1968 *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press.
- GREGORY, N., STUART, J. T. & WALKER, W. S. 1955 On the Stability of Three-Dimensional Boundary Layers with Application to the Flow Due to a Rotating Disk. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* **248** (943), 155–199.
- GREVESSE, N. & NOELS, A. 1993 Cosmic abundances of the elements. In *Origin and Evolution of the Elements* (ed. N. Prantzos, E. Vangioni-Flam & M. Casse), pp. 15–25.
- HEGER, A., LANGER, N. & WOOSLEY, S. E. 2000 Presupernova Evolution of Rotating Massive Stars. I. Numerical Method and Evolution of the Internal Stellar Structure. *ApJ* **528**, 368–396, arXiv : astro-ph/9904132.
- HEISLER, J. & ALCOCK, C. 1986 Do stars that lose mass expand or contract? A semianalytical approach. *ApJ* **306**, 166–169.
- HEITLER, W. 1954 *Quantum theory of radiation*.
- HERBIG, GEORGE H. 1960 The Spectra of Be- and Ae-Type Stars Associated with Nebulosity. *ApJS* **4**, 337.
- HERVÉ, A., RAUW, G. & NAZÉ, Y. 2013 A detailed X-ray investigation of ζ Puppis. III. Spectral analysis of the whole RGS spectrum. *A&A* **551**, A83, arXiv : 1301.5090.

REFERENCES

- HIDE, R. & TITMAN, C. W. 1967 Detached shear layers in a rotating fluid. *Journal of Fluid Mechanics* **29**, 39–60.
- HØILAND, E. 1941 Avhandlinger norske videnskaps-akademi i oslo. In *i. math naturv. Klasse*, p. 1.
- HOLLERBACH, R. 1994 Magnetohydrodynamic Ekman and Stewartson layers in a rotating spherical shell. *Proc. R. Soc. Lond.* **444**, 333.
- HOLLERBACH, R. 2003 Instabilities of the Stewartson layer Part 1. The dependence on the sign of Ro . *Journal of Fluid Mechanics* **492**, 289–302.
- HOLLERBACH, R., FUTTERER, B., MORE, T. & EGBERS, C. 2004 Instabilities of the Stewartson layer Part 2. Supercritical mode transitions. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* **18**, 197–204.
- HOPFINGER, E.J. 1992 *Rotating Fluids in Geophysical and Industrial Applications*. Springer Vienna.
- HOWARD, L. N. 1961 Note on a paper of John W. Miles. *Journal of Fluid Mechanics* **10**, 509–512.
- HUGHES, D. W. & TOBIAS, S. M. 2001 On the instability of magnetohydrodynamic shear flows. *Proceedings of the Royal Society of London Series A* **457** (2010), 1365.
- HUSSAINI, M. YOUSUFF, GOTTLIEB, DAVID, VOIGT, ROBERT G, FOR COMPUTER APPLICATIONS IN SCIENCE, INSTITUTE, ENGINEERING & ON SPECTRAL METHODS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS (1982 : NASA LANGLEY RESEARCH CENTER), SYMPOSIUM 1984 Spectral methods for partial differential equations. Proceedings of the Symposium on Spectral Methods for Partial Differential Equations held at the NASA Langley Research Center on Aug. 16-18, 1982, sponsored by the Institute for Computer Applications in Science and Engineering.
- HYPOLITE, D., MATHIS, S. & RIEUTORD, M. 2018 The 2D dynamics of radiative zones of low-mass stars. *A&A* **610**, A35, arXiv : 1711.08544.
- HYPOLITE, D. & RIEUTORD, M. 2014 Dynamics of the envelope of a rapidly rotating star or giant planet in gravitational contraction. *A&A* **572**, A15.
- IBEN, ICKO, JR. 1967 Stellar Evolution Within and off the Main Sequence. *ARA&A* **5**, 571.
- JAMES, R. A. 1964 The Structure and Stability of Rotating Gas Masses. *ApJ* **140**, 552.
- JONES, C. A. 1977 The Onset of Shear Instability in Stars. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **8**, 165–184.

REFERENCES

- KÄPYLÄ, PETRI J., MANTERE, MAARIT J. & BRANDENBURG, AXEL 2012 Cyclic Magnetic Activity due to Turbulent Convection in Spherical Wedge Geometry. *ApJ Lett.* **755** (1), L22.
- KESZTHELYI, Z., MEYNET, G., GEORGY, C., WADE, G. A., PETIT, V. & DAVID-URAZ, A. 2019 The effects of surface fossil magnetic fields on massive star evolution : I. Magnetic field evolution, mass-loss quenching, and magnetic braking. *MNRAS* **485** (4), 5843–5860, arXiv : 1902.09333.
- KESZTHELYI, Z., MEYNET, G., SHULTZ, M. E., DAVID-URAZ, A., UD-DOULA, A., TOWNSEND, R. H. D., WADE, G. A., GEORGY, C., PETIT, V. & OWOCKI, S. P. 2020 The effects of surface fossil magnetic fields on massive star evolution - II. Implementation of magnetic braking in MESA and implications for the evolution of surface rotation in OB stars. *MNRAS* **493** (1), 518–535, arXiv : 2001.06239.
- KNOBLOCH, E. & SPRUIT, H. C. 1983 The molecular weight barrier and angular momentum transport in radiative stellar interiors. *A&A* **125**, 59–68.
- KOSIREV, N. A. 1934 Radiative equilibrium of the extended photosphere. *MNRAS* **94**, 430–443.
- KRISHNAMURTHI, ANITA, PINSONNEAULT, M. H., BARNES, S. & SOFIA, S. 1997 Theoretical Models of the Angular Momentum Evolution of Solar-Type Stars. *ApJ* **480** (1), 303–323.
- KRTIČKA, J., OWOCKI, S. P. & MEYNET, G. 2011 Mass and angular momentum loss via decretion disks. *A&A* **527**, A84, arXiv : 1101.1732.
- KRTIČKA, J. & KUBÁT, J. 2011 Improved velocity law parameterization for hot star winds. *A&A* **534**, A97, arXiv : 1109.5491.
- KUDRITZKI, ROLF P. 2002 Line-driven Winds, Ionizing Fluxes, and Ultraviolet Spectra of Hot Stars at Extremely Low Metallicity. I. Very Massive O Stars. *ApJ* **577** (1), 389–408, arXiv : astro-ph/0205210.
- KUDRITZKI, R. P., LENNON, D. J. & PULS, J. 1995 Quantitative Spectroscopy of Luminous Blue Stars in Distant Galaxies. In *Science with the VLT* (ed. Jeremy R. Walsh & Ivan J. Danziger), p. 246.
- KUDRITZKI, R. P., PAULDRACH, A. & PULS, J. 1987 Radiation driven winds of hot luminous stars. II - Wind models for O-stars in the Magellanic Clouds. *A&A* **173**, 293–298.
- KUDRITZKI, R.-P. & PULS, J. 2000 Winds from Hot Stars. *ARA&A* **38**, 613–666.
- KULENTHIRARAJAH, L. & GARAUD, P. 2018 Turbulent Transport by Diffusive Stratified Shear Flows : From Local to Global Models. III. A Closure Model. *ApJ* **864**, 107, arXiv : 1803.11530.

REFERENCES

- KUMAR P. AND QUATEART E. 1997 Angular momentum transport by gravity waves and its effect on the rotation of the solar interior. *ApJ* **475**, L143–L146.
- KUO, HSIAO-LAN 1949 Dynamic Instability of Two-Dimensional Nondivergent Flow in a Barotropic Atmosphere. *Journal of Atmospheric Sciences* **6** (2), 105–122.
- LAMERS, H. J. G. & PAULDRACH, A. W. A. 1991 The formation of outflowing disks around early-type stars by bi-stable radiation-driven winds. *A&A* **244**, L5–L8.
- LAMERS, HENNY J. G. L. M. & CASSINELLI, JOSEPH P. 1999 *Historical overview*, p. 1–7. Cambridge University Press.
- LAMERS, H. J. G. L. M., SNOW, T. P. & LINDHOLM, D. M. 1995 Terminal Velocities and the Bistability of Stellar Winds. *ApJ* **455**, 269.
- LANGER, N. 1997 The Eddington Limit in Rotating Massive Stars. In *Luminous Blue Variables : Massive Stars in Transition* (ed. A. Nota & H. Lamers), *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, vol. 120, p. 83.
- LANGER, N. 1998 Coupled mass and angular momentum loss of massive main sequence stars. *A&A* **329**, 551–558.
- LAU, H. H. B., POTTER, A. T. & TOUT, C. A. 2011 Spin-down of massive rotating stars. *MNRAS* **415**, 959–963.
- LEE, U., NEINER, C. & MATHIS, S. 2014 Angular momentum transport by stochastically excited oscillations in rapidly rotating massive stars. *MNRAS* **443**, 1515–1522, arXiv : 1404.5133.
- LEUTENEGGER, M. A., COHEN, D. H., SUNDQVIST, J. O. & OWOCKI, S. P. 2013 Constraints on Porosity and Mass Loss in O-star Winds from the Modeling of X-Ray Emission Line Profile Shapes. *ApJ* **770**, 80, arXiv : 1305.5595.
- LIGNIÈRES, F., CALIFANO, F. & MANGENEY, A. 1999 Shear layer instability in a highly diffusive stably stratified atmosphere. *A&A* **349**, 1027–1036.
- LIGNIERES, F., CATALA, C. & MANGENEY, A. 1996 Angular momentum transfer in pre-main-sequence stars of intermediate mass. *A&A* **314**, 465–476.
- LIGNIERES, F., CATALA, C. & MANGENEY, A. 2000 Mass-loss induced instabilities in fast rotating stars. *ArXiv Astrophysics e-prints* , arXiv : astro-ph/0002026.
- LILLY, D. K. 1966 On the Instability of Ekman Boundary Flow. *Journal of Atmospheric Sciences* **23**, 481–494.
- LUCY, L. B. 1984 Wave amplification in line-driven winds. *ApJ* **284**, 351–356.
- LUCY, L. B. & SOLOMON, P. M. 1970 Mass Loss by Hot Stars. *ApJ* **159**, 879.

REFERENCES

- MAEDER, A. 1999 Stellar evolution with rotation IV : von Zeipel's theorem and anisotropic losses of mass and angular momentum. *A&A* **347**, 185–193.
- MAEDER, A. 2003 Stellar rotation : Evidence for a large horizontal turbulence and its effects on evolution. *A&A* **399**, 263–269, arXiv : astro-ph/0301258.
- MAEDER, A. 2009 *Physics, Formation and Evolution of Rotating stars*. Springer.
- MAEDER, A. & MEYNET, G. 2000 Stellar evolution with rotation. VI. The Eddington and Omega -limits, the rotational mass loss for OB and LBV stars. *A&A* **361**, 159–166, arXiv : astro-ph/0006405.
- MAEDER, A. & ZAHN, J. P. 1998 Stellar evolution with rotation. iii. meridional circulation with mu -gradients and non-stationarity. *A&A* **334**, 1000–1006.
- MARCOTTE, F., DORMY, E. & SOWARD, A. 2016 On the equatorial Ekman layer. *Journal of Fluid Mechanics* **803**, 395–435, arXiv : 1602.08647.
- MARKOVA, N. & PULS, J. 2008 Bright OB stars in the Galaxy. IV. Stellar and wind parameters of early to late B supergiants. *A&A* **478**, 823–842.
- MARQUES, J. P., GOUPIL, M. J., LEBRETON, Y., TALON, S., PALACIOS, A., BELKACEM, K., OUAZZANI, R.-M., MOSSER, B., MOYA, A., MOREL, P., PICHON, B., MATHIS, S., ZAHN, J.-P., TURCK-CHIÈZE, S. & NGHIEM, P. A. P. 2013 Seismic diagnostics for transport of angular momentum in stars. I. Rotational splittings from the pre-main sequence to the red-giant branch. *A&A* **549**, A74.
- MATHIS, S., PRAT, V., AMARD, L., CHARBONNEL, C., PALACIOS, A., LAGARDE, N. & EGGENBERGER, P. 2018 Anisotropic turbulent transport in stably stratified rotating stellar radiation zones. *A&A* **620**, A22, arXiv : 1808.01814.
- MATHIS, S. & ZAHN, J.-P. 2005 Transport and mixing in the radiation zones of rotating stars. II. Axisymmetric magnetic field. *A&A* **440**, 653–666.
- MATT, SEAN & PUDRITZ, RALPH E. 2008 Accretion-powered Stellar Winds. II. Numerical Solutions for Stellar Wind Torques. *ApJ* **678** (2), 1109–1118, arXiv : 0801.0436.
- MATT, SEAN P., MACGREGOR, KEITH B., PINSONNEAULT, MARC H. & GREENE, THOMAS P. 2012 Magnetic Braking Formulation for Sun-like Stars : Dependence on Dipole Field Strength and Rotation Rate. *ApJ* **754** (2), L26, arXiv : 1206.2354.
- MCINTYRE, MICHAEL 1970 Diffusive destabilisation of the baroclinic circular vortex. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **1** (1), 19–57.

REFERENCES

- MESTEL, L. 1968 Magnetic braking by a stellar wind-I. *MNRAS* **138**, 359.
- MEYNET, G., EGGENBERGER, P. & MAEDER, A. 2011 Massive star models with magnetic braking. *A&A* **525**, L11, arXiv : 1011.5795.
- MEYNET, G., EKSTRÖM, S., MAEDER, A., HIRSCHI, R., CHIAPPINI, C. & GEORGY, C. 2008 SPINSTARS at Low Metallicities. In *First Stars III* (ed. B. W. O’Shea & A. Heger), *American Institute of Physics Conference Series*, vol. 990, pp. 212–216, arXiv : 0709.2275.
- MEYNET, G. & MAEDER, A. 1997 Stellar evolution with rotation. I. The computational method and the inhibiting effect of the μ -gradient. *A&A* **321**, 465–476.
- MIHALAS, D. & MIHALAS, B. W. 1984 *Foundations of radiation hydrodynamics*.
- MILES, J. W. 1961 On the stability of heterogeneous shear flows. *Journal of Fluid Mechanics* **10**, 496–508.
- MILNE, E. A. 1923 The equilibrium of a rotating star. *MNRAS* **83**, 118–147.
- MONNIER, J. D., ZHAO, M., PEDRETTI, E., THUREAU, N., IRELAND, M., MUIRHEAD, P., BERGER, J.-P., MILLAN-GABET, R., VAN BELLE, G., TEN BRUMMELAAR, T., MCALISTER, H., RIDGWAY, S., TURNER, N., STURMANN, L., STURMANN, J. & BERGER, D. 2007 Imaging the Surface of Altair. *Science* **317**, 342–, arXiv : arXiv :0706.0867.
- MOORE, D. & SAFFMAN, P. 1968 The rise of a body through a rotating fluid in a container of finite length. *J. Fluid Mech.* **31**, 635–642.
- MÜLLER, P. E. & VINK, J. S. 2014 Rotating massive O stars with non-spherical 2D winds. *A&A* **564**, A57, arXiv : 1402.5929.
- NAJARRO, F., HANSON, M. M. & PULS, J. 2011 L-band spectroscopy of Galactic OB-stars. *A&A* **535**, A32, arXiv : 1108.5752.
- NIINO, H. & MISAWA, N. 1984 An Experimental and Theoretical Study of Barotropic Instability. *Journal of Atmospheric Sciences* **41**, 1992–2011.
- OKAZAKI, A. T. 2004 Formation and Dissipation of Viscous Disks around Be Stars. In *Stellar Rotation* (ed. Andre Maeder & Philippe Eenens), *IAU Symposium*, vol. 215, p. 529.
- OWOCKI, STAN 2013 *Stellar Winds*, , vol. 4, p. 735.
- OWOCKI, S. P., CASTOR, J. I. & RYBICKI, G. B. 1988 Time-dependent models of radiatively driven stellar winds. I - Nonlinear evolution of instabilities for a pure absorption model. *ApJ* **335**, 914–930.

REFERENCES

- OWOCKI, S. P., CRANMER, S. R. & GAYLEY, K. G. 1996 Inhibition of Wind Compressed Disk Formation by Nonradial Line-Forces in Rotating Hot-Star Winds. *ApJ Lett.* **472**, L115.
- OWOCKI, S. P., CRANMER, S. R. & GAYLEY, K. G. 1998a Latitudinal Dependence of Radiatively Driven Mass Loss from Rapidly Rotating Hot-Stars. In *B[e] stars* (ed. A. M. Hubert & C. Jaschek), *Astrophysics and Space Science Library*, vol. 233, p. 205.
- OWOCKI, S. P. & GAYLEY, K. G. 1997 The Physics of Stellar Winds Near the Eddington Limit. In *Luminous Blue Variables : Massive Stars in Transition* (ed. A. Nota & H. Lamers), *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, vol. 120, p. 121.
- OWOCKI, S. P., GAYLEY, K. G. & CRANMER, S. R. 1998b Effects of Gravity Darkening on Radiatively Driven Mass Loss from Rapidly Rotating Stars. In *Properties of Hot Luminous Stars* (ed. I. Howarth), *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, vol. 131, p. 237.
- OWOCKI, S. P., GAYLEY, K. G. & SHAVIV, N. J. 2004 A Porosity-Length Formalism for Photon-Tiring-limited Mass Loss from Stars above the Eddington Limit. *ApJ* **616**, 525–541, arXiv : astro-ph/0409573.
- OWOCKI, S. P. & PULS, J. 1999 Line-driven Stellar Winds : The Dynamical Role of Diffuse Radiation Gradients and Limitations to the Sobolev Approach. *ApJ* **510**, 355–368.
- OWOCKI, S. P. & RYBICKI, G. B. 1984 Instabilities in line-driven stellar winds. I. Dependence on perturbation wavelength. *ApJ* **284**, 337–350.
- OWOCKI, S. P., TOWNSEND, R. H. D. & QUATAERT, E. 2017 Super-Eddington stellar winds : unifying radiative-enthalpy versus flux-driven models. *MNRAS* **472**, 3749–3760, arXiv : 1708.07790.
- PAULDRACH, A., PULS, J. & KUDRITZKI, R. P. 1986 Radiation-driven winds of hot luminous stars - Improvements of the theory and first results. *A&A* **164**, 86–100.
- PAULDRACH, A. W. A., KUDRITZKI, R. P., PULS, J. & BUTLER, K. 1990 Radiation driven winds of hot luminous stars. VII - The evolution of massive stars and the morphology of stellar wind spectra. *A&A* **228**, 125–154.
- PAXTON, B., CANTIELLO, M., ARRAS, P., BILDSTEN, L., BROWN, E. F., DOTTER, A., MANKOVICH, C., MONTGOMERY, M. H., STELLO, D., TIMMES, F. X. & TOWNSEND, R. 2013 Modules for Experiments in Stellar Astrophysics (MESA) : Planets, Oscillations, Rotation, and Massive Stars. *ApJS* **208**, 4, arXiv : 1301.0319.

REFERENCES

- PELUPESSY, I., LAMERS, H. J. G. L. M. & VINK, J. S. 2000 The radiation driven winds of rotating B[e] supergiants. *A&A* **359**, 695–706, arXiv : astro-ph/0005300.
- PETIT, V., KESZTHELYI, Z., MACINNIS, R., COHEN, D. H., TOWNSEND, R. H. D., WADE, G. A., THOMAS, S. L., OWOCKI, S. P., PULS, J. & UD-DOULA, A. 2017 Magnetic massive stars as progenitors of ‘heavy’ stellar-mass black holes. *MNRAS* **466** (1), 1052–1060, arXiv : 1611.08964.
- PETIT, V., OWOCKI, S. P., WADE, G. A., COHEN, D. H., SUNDQVIST, J. O., GAGNÉ, M., MAÍZ APELLÁNIZ, J., OKSALA, M. E., BOHLENDER, D. A., RIVINIUS, T., HENRICHs, H. F., ALECIAN, E., TOWNSEND, R. H. D., UD-DOULA, A. & MIMES COLLABORATION 2013 A magnetic confinement versus rotation classification of massive-star magnetospheres. *MNRAS* **429** (1), 398–422, arXiv : 1211.0282.
- PETRENZ, P. & PULS, J. 1996 H α line formation in hot star winds : the influence of rotation. *A&A* **312**, 195–220.
- PETRENZ, P. & PULS, J. 2000 2-D non-LTE models of radiation driven winds from rotating early-type stars. I. Winds with an optically thin continuum. *A&A* **358**, 956–992.
- PETROV, B., VINK, J. S. & GRÄFENER, G. 2016 Two bi-stability jumps in theoretical wind models for massive stars and the implications for luminous blue variable supernovae. *MNRAS* **458**, 1999–2011, arXiv : 1602.05868.
- PINSONNEAULT, M. H., KAWALER, STEVEN D., SOFIA, S. & DEMARQUE, P. 1989 Evolutionary Models of the Rotating Sun. *ApJ* **338**, 424.
- PLUMMER, A., MARSTON, J. B. & TOBIAS, S. M. 2019 Joint instability and abrupt nonlinear transitions in a differentially rotating plasma. *Journal of Plasma Physics* **85** (1), 905850113, arXiv : 1809.00921.
- PRAT, V., GUILLET, J., VIALLET, M. & MÜLLER, E. 2016 Shear mixing in stellar radiative zones. II. Robustness of numerical simulations. *A&A* **592**, A59, arXiv : 1512.04223.
- PROUDMAN, I. 1956 The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres. *Journal of Fluid Mechanics* **1**, 505–516.
- PULS, J., KUDRITZKI, R. P., HERRERO, A., PAULDRACH, A. W. A., HASER, S. M., LENNON, D. J., GABLER, R., VOELS, S. A., VILCHEZ, J. M., WACHTER, S. & FELDMEIER, A. 1996 O-star mass-loss and wind momentum rates in the Galaxy and the Magellanic Clouds Observations and theoretical predictions. *A&A* **305**, 171.

REFERENCES

- PULS, J., SPRINGMANN, U. & LENNON, M. 2000 Radiation driven winds of hot luminous stars. XIV. Line statistics and radiative driving. *A & A Suppl. Ser.* **141**, 23–64.
- PULS, J., VINK, J. S. & NAJARRO, F. 2008 Mass loss from hot massive stars. *A&A Review* **16**, 209–325, arXiv : 0811.0487.
- QUATAERT, E., FERNÁNDEZ, R., KASEN, D., KLION, H. & PAXTON, B. 2016 Super-Eddington stellar winds driven by near-surface energy deposition. *MNRAS* **458**, 1214–1233, arXiv : 1509.06370.
- RAUW, G., HERVÉ, A., NAZÉ, Y., GONZÁLEZ-PÉREZ, J. N., HEMPELMANN, A., MITTAG, M., SCHMITT, J. H. M. M., SCHRÖDER, K.-P., GOSSET, E., EENENS, P. & UUH-SONDA, J. M. 2015 Simultaneous X-ray and optical spectroscopy of the Oef supergiant λ Cephei. *A&A* **580**, A59, arXiv : 1505.07714.
- RAYLEIGH, L. 1880 On the stability or instability of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society* pp. 57–70.
- RAYNAUD, R., RIEUTORD, M., PETITDEMANGE, L., GASTINE, T. & PUTIGNY, B. 2018 Gravity darkening in late-type stars. I. The Coriolis effect. *A&A* **609**, A124.
- RAZE, G. & LIGNIÈRES, F. 2017 Modéliser la Rotation Différentielle dans les Zones Radiatives d'Étoile. <http://userpages.irap.omp.eu/~flignieres/graze.pdf>.
- RICHER, J., MICHAUD, G. & TURCOTTE, S. 2000 The Evolution of AMFM Stars, Abundance Anomalies, and Turbulent Transport. *ApJ* **529** (1), 338–356.
- RIEUTORD, M. 1987 Linear theory of rotating fluids using spherical harmonics. I. Steady flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **39**, 163.
- RIEUTORD, M. 2006*a* The dynamics of the radiative envelope of rapidly rotating stars. i. a spherical boussinesq model. *A&A* **451**, 1025–1036.
- RIEUTORD, M. 2006*b* Modeling rapidly rotating stars. In *SF2A proceeding 2006* (ed. F. Casoli & al.), pp. astro-ph/0702384.
- RIEUTORD, M. 2006*c* On the dynamics of radiative zones in rotating star. In *Stellar fluid dynamics and numerical simulations : From the sun to neutron stars* (ed. M. Rieutord & B. Dubrulle), , vol. 21, pp. 275–295. EAS.
- RIEUTORD, M. 2015 *Fluid Dynamics : An Introduction*. Springer.
- RIEUTORD, M. 2016 Physical Processes Leading to Surface Inhomogeneities : The Case of Rotation. In *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag* (ed. J.-P. Rozelot & C. Neiner), *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, vol. 914, p. 101, arXiv : 1505.03997.

REFERENCES

- RIEUTORD, M. & BETH, A. 2014 Dynamics of the radiative envelope of rapidly rotating stars : Effects of spin-down driven by mass loss. *A&A* **570**, A42.
- RIEUTORD, M. & DINTRANS, B. 2002 More about the anelastic and subseismic approximations for low-frequency modes in stars. *to be submitted to MNRAS* **0**, 1–5.
- RIEUTORD, M. & ESPINOSA LARA, F. 2013 Ab Initio Modelling of Steady Rotating Stars. In *Seismology for studies of stellar Rotation and Convection* (ed. M. Goupil, K. Belkacem, C. Neiner, F. Lignières & J. J. Green), *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, vol. 865, pp. 49–73, astro-ph/1208.4926.
- RIEUTORD, M., ESPINOSA LARA, F. & PUTIGNY, B. 2016 An algorithm for computing the 2D structure of fast rotating stars. *Journal of Computational Physics* **318**, 277–304, arXiv : 1605.02359.
- RIEUTORD, M., TRIANA, S. A., ZIMMERMAN, D. S. & LATHROP, D. P. 2012 Excitation of inertial modes in an experimental spherical Couette flow. *Phys. Rev. E* **86** (2), 026304.
- RIEUTORD, M. & VALDETTARO, L. 1997 Inertial waves in a rotating spherical shell. *J. Fluid Mech.* **341**, 77–99.
- ROBERTS, P. & STEWARTSON, K. 1963 On the stability of a Maclaurin spheroid of small viscosity. *ApJ* **137**, 777–790.
- ROBERTS, P. H. & STEWARTSON, K. 1963 On the Stability of a Maclaurin Spheroid of Small Viscosity. *Astrophysical Journal* **137**, 777.
- ROBINSON, KEITH 2007 *The P Cygni Profile and Friends*, pp. 119–125. New York, NY : Springer New York.
- ROGERS, T. M., LIN, D. N. C., MCELWAIN, J. N. & LAU, H. H. B. 2013 Internal Gravity Waves in Massive Stars : Angular Momentum Transport. *ApJ* **772**, 21.
- ROTVIG, JON & JONES, CHRIS A. 2002 Rotating convection-driven dynamos at low Ekman number. *Phys. Rev. E* **66** (5), 056308.
- RYBICKI, G. B. & HUMMER, D. G. 1978 A generalization of the Sobolev method for flows with nonlocal radiative coupling. *ApJ* **219**, 654–675.
- SABÍN-SANJULIÁN, C., SIMÓN-DÍAZ, S., HERRERO, A., PULS, J., SCHNEIDER, F. R. N., EVANS, C. J., GARCIA, M., NAJARRO, F., BROTT, I., CASTRO, N., CROWTHER, P. A., DE KOTER, A., DE MINK, S. E., GRÄFENER, G., GRIN, N. J., HOLGADO, G., LANGER, N., LENNON, D. J., MAÍZ APELLÁNIZ, J., RAMÍREZ-AGUDELO, O. H., SANA, H., TAYLOR, W. D., VINK, J. S. & WALBORN, N. R. 2017 The VLT-FLAMES Tarantula Survey.

REFERENCES

- XXVI. Properties of the O-dwarf population in 30 Doradus. *A&A* **601**, A79, arXiv : 1702.04773.
- SANDER, A. A. C., HAMANN, W. R., TODT, H., HAINICH, R. & SHENAR, T. 2017 Coupling hydrodynamics with comoving frame radiative transfer. I. A unified approach for OB and WR stars. *A&A* **603**, A86, arXiv : 1704.08698.
- SCHAEFFER, N. & CARDIN, P. 2005 Quasigeostrophic model of the instabilities of the Stewartson layer in flat and depth-varying containers. *Physics of Fluids* **17** (10), 104111–104111–12.
- SCHATZMAN, E. 1962 A theory of the role of magnetic activity during star formation. *Annales d’Astrophysique* **25**, 18.
- SCHATZMAN, E. 1996 Diffusion process produced by random internal waves. *Journal of Fluid Mechanics* **322**, 355–382.
- SHAVIV, NIR J. 2001 The Nature of the Radiative Hydrodynamic Instabilities in Radiatively Supported Thomson Atmospheres. *ApJ* **549** (2), 1093–1110, arXiv : astro-ph/0010425.
- SHEPARD, KATHERINE, GIES, DOUGLAS R., LESTER, KATHRYN V., WANG, LUQIAN, GUO, ZHAO, KAPER, LEX, DE KOTER, ALEX & SANA, HUGUES 2020 HST/COS Spectra of the Wind Lines of VFTS 102 and 285. *ApJ* **888** (2), 82, arXiv : 1911.09675.
- SIMÓN-DÍAZ, S. & HERRERO, A. 2007 Fourier method of determining the rotational velocities in OB stars. *A&A* **468**, 1063–1073, arXiv : astro-ph/0703216.
- SMITH, N. & OWOCKI, S. P. 2006 On the Role of Continuum-driven Eruptions in the Evolution of Very Massive Stars and Population III Stars. *ApJ* **645**, L45–L48, arXiv : astro-ph/0606174.
- SOBOLEV, V. V. 1960 *Moving envelopes of stars*.
- SOLBERG, M. 1936 Le mouvement d’inertie de l’atmosphère stable et son rôle dans le théorie des cyclones. In *Union Géodésique et Géophysique internationale VIeme assemblée, Edinburg*, p. 66.
- SONNEVELD, P. 1989 CGS : A Fast Lanczos-Type Solver for Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* **10**, 36–52.
- SPIEGEL, E. A. & TAO, L. 1999 Photofluid instabilities of hot stellar envelopes. *Phys. Rep.* **311** (3), 163–176, arXiv : astro-ph/9810225.
- SPIEGEL, E. A. & VERONIS, G. 1960 On the Boussinesq Approximation for a Compressible Fluid. *ApJ* **131**, 442.
- STEWARTSON, K. 1966 On almost rigid rotations. part 2. *J. Fluid Mech.* **26**, 131–144.

REFERENCES

- STRATTON, J. A. 1941 *Electromagnetic theory*.
- SUNDQVIST, J. O., PULS, J., FELDMEIER, A. & OWOCKI, S. P. 2011 Mass loss from inhomogeneous hot star winds. II. Constraints from a combined optical/UV study. *A&A* **528**, A64, arXiv : 1101.5293.
- TALON, S. & ZAHN, J.-P. 1997 Anisotropic diffusion and shear instabilities. *A&A* **317**, 749–751.
- TASSOUL, JEAN-LOUIS 1978 *Theory of rotating stars*.
- TASSOUL, J.-L. & TASSOUL, M. 1982 Meridional circulation in rotating stars. I. a boundary layer analysis of mean steady motions in early-type stars. *Astrophys. J. Supp. Ser.* **49**, 317–350.
- TATRO, P. R. & MOLLO-CHRISTENSEN, E. L. 1967 Experiments on Ekman layer instability. *Journal of Fluid Mechanics* **28**, 531–543.
- TOBIAS, S. M. & HUGHES, D. W. 2004 The Influence of Velocity Shear on Magnetic Buoyancy Instability in the Solar Tachocline. *ApJ* **603** (2), 785–802.
- TOWNSEND, A. A. 1958 The effects of radiative transfer on turbulent flow of a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics* **4**, 361–375.
- TOWNSEND, R. H. D., OKSALA, M. E., COHEN, D. H., OWOCKI, S. P. & UD-DOULA, A. 2010 Discovery of Rotational Braking in the Magnetic Helium-strong Star Sigma Orionis E. *ApJ* **714** (2), L318–L322, arXiv : 1004.2038.
- UD-DOULA, ASIF, OWOCKI, STANLEY P. & TOWNSEND, RICHARD H. D. 2009 Dynamical simulations of magnetically channelled line-driven stellar winds - III. Angular momentum loss and rotational spin-down. *MNRAS* **392** (3), 1022–1033, arXiv : 0810.4247.
- URYU, K. & ERIGUCHI, Y. 1994 Structures of Rapidly Rotating Baroclinic Stars - Part One - a Numerical Method for the Angular Velocity Distribution. *MNRAS* **269**, 24.
- URYU, K. & ERIGUCHI, Y. 1995 Structures of rapidly rotating baroclinic stars - II. an extended numerical method for realistic stellar models. *MNRAS* **277**, 1411–1429.
- VINK, J. S., BROTT, I., GRÄFENER, G., LANGER, N., DE KOTER, A. & LENNON, D. J. 2010 The nature of B supergiants : clues from a steep drop in rotation rates at 22 000 K. The possibility of Bi-stability braking. *A&A* **512**, L7, arXiv : 1003.1280.
- VINK, J. S., DE KOTER, A. & LAMERS, H. J. G. L. M. 1999 On the nature of the bi-stability jump in the winds of early-type supergiants. *A&A* **350**, 181–196, arXiv : astro-ph/9908196.

REFERENCES

- VINK, J. S., DE KOTER, A. & LAMERS, H. J. G. L. M. 2000 New theoretical mass-loss rates of O and B stars. *A&A* **362**, 295–309, arXiv : astro-ph/0008183.
- VINK, J. S., DE KOTER, A. & LAMERS, H. J. G. L. M. 2001 Mass-loss predictions for O and B stars as a function of metallicity. *A&A* **369**, 574–588.
- VON KÁRMÁN, T. 1934 Some aspects of the turbulence problem. *Proceedings of the Fourth International Congress for Applied Mechanics* **54**, 153–272.
- VON ZEIPEL, H. 1924 The radiative equilibrium of a rotating system of gaseous masses. *MNRAS* **84**, 665–683.
- YOON, S.-C. & LANGER, N. 2005 Evolution of rapidly rotating metal-poor massive stars towards gamma-ray bursts. *A&A* **443**, 643–648, arXiv : astro-ph/0508242.
- YOON, S. C., LANGER, N. & NORMAN, C. 2006 Single star progenitors of long gamma-ray bursts. I. Model grids and redshift dependent GRB rate. *A&A* **460** (1), 199–208, arXiv : astro-ph/0606637.
- ZAHN, J.-P. 1974 Rotational instabilities and stellar evolution. In *IAU Symp. 59 : Stellar Instability and Evolution*, pp. 185–194.
- ZAHN, J.-P. 1992 Circulation and turbulence in rotating stars. *A&A* **265**, 115–132.
- ZAHN J.-P., TALON S. AND MATIAS J. 1997 Angular momentum transport by internal waves in the solar interior. *A&A* **322**, 320–328.
- ZHAO, M., MONNIER, J. D., PEDRETTI, E., THUREAU, N., MÉRAND, A., TEN BRUMMELAAR, T., MCALISTER, H., RIDGWAY, S. T., TURNER, N., STURMANN, J., STURMANN, L., GOLDFINGER, P. J. & FARRINGTON, C. 2009 Imaging and Modeling Rapidly Rotating Stars : α Cephei and α Ophiuchi. *ApJ* **701**, 209–224.
- ZICKGRAF, F.-J., WOLF, B., STAHL, O. & HUMPHREYS, R. M. 1989 S 18 - A new B(e) supergiant in the Small Magellanic Cloud with evidence for an excretion disk. *A&A* **220**, 206–214.
- ZICKGRAF, F. J., WOLF, B., STAHL, O., LEITHERER, C. & APPENZELLER, I. 1986 B(e)-supergiants of the Magellanic Clouds. *A&A* **163**, 119–134.
- ZIKANOV, O. YU. 1996 Symmetry-breaking bifurcations in spherical Couette flow. *Journal of Fluid Mechanics* **310**, 293–324.
- ZOREC, J., RIEUTORD, M., ESPINOSA LARA, F., FRÉMAT, Y., DOMICIANO DE SOUZA, A. & ROYER, F. 2017 Gravity darkening in stars with surface differential rotation. *A&A* **606**, A32.

Author : Damien Gagnier

Title : Dynamics of massive stars at rotation rates close to criticality

Abstract

Rotation plays a major role in the dynamics, structure and secular evolution of, often rapidly rotating, massive stars. It leads to the mixing of chemical elements synthesised in their convective core, and to the transport of angular momentum in their radiative envelope. Rotation also influences the radiation-driven wind on their surface, and thus modifies the associated losses of mass and angular momentum.

The objective of this thesis is multifold : we seek to determine the role of rotation on the mass and angular momentum losses associated with massive stars radiation-driven winds, to understand the role of such radiation-driven winds on their secular rotational evolution, and to determine the implications of a loss of angular momentum on the dynamics of the radiative envelope of these stars.

We show that two different wind regimes can exist, one of them results in a strong equatorial mass flux, and thus in a high angular momentum loss rate. Such increased angular momentum loss may prevent massive stars from reaching critical rotation before the end of the main sequence. Regarding the coupling between radiative winds and the dynamics of the radiative envelope of massive rotating stars, we show that the Stewartson layer is a key component for the transport of chemical elements between the convective core and the surface of massive stars.

Key words : massive stars – rotation – radiation-driven winds – astrophysical fluid dynamics

Auteur : Damien Gagnier

Titre : Dynamique des étoiles massives proches de la rotation critique

Directeurs de thèse : Michel Rieutord & Corinne Charbonnel

Lieu et date de soutenance : Toulouse, le 30/09/2020

Résumé

La rotation joue un rôle majeur sur la dynamique, la structure et l'évolution séculaire des étoiles massives, souvent rotateurs rapides. Elle implique le mélange des éléments chimiques synthétisés dans leur cœur convectif, et la redistribution du moment cinétique dans leur enveloppe radiative. La rotation influence également le vent radiatif présent à leur surface, et modifie ainsi les pertes de masse et de moment cinétique associées.

L'objectif de ce travail de thèse est multiple : nous cherchons à déterminer le rôle de la rotation sur les pertes de masse et de moment cinétique associées aux vents radiatifs des étoiles massives, comprendre le rôle de ces vents radiatifs sur leur évolution rotationnelle séculaire, et déterminer les implications d'une perte de moment cinétique sur la dynamique de l'enveloppe radiative de ces étoiles.

Nous montrons que deux régimes de vent peuvent exister, l'un d'eux résulte en un fort flux de masse équatorial, donc en une forte perte de moment cinétique. Cette perte accrue de moment cinétique peut empêcher les étoiles massives d'atteindre une rotation critique avant la fin de la séquence principale. Enfin, l'étude du couplage entre les vents radiatifs et la dynamique de l'enveloppe radiative des étoiles massives en rotation montre que la couche de Stewartson est une caractéristique clé de l'écoulement pour le transport des éléments chimiques entre le cœur convectif et la surface des étoiles massives.

Mots clés : étoiles massives – rotation – vents radiatifs – dynamique des fluides astrophysiques

Discipline administrative : Astrophysique, Sciences de l'Espace, Planétologie

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie – 14 av. Edouard Belin –
31400 Toulouse, FRANCE

Département d'Astronomie de l'Université de Genève – Chemin des Maillettes, 51 –
1290 Versoix, SUISSE