



HAL
open science

Contribution à l'étude du comportement dynamique aléatoire de structures libres et empilées sous séisme

Delphine Beylat

► **To cite this version:**

Delphine Beylat. Contribution à l'étude du comportement dynamique aléatoire de structures libres et empilées sous séisme. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Clermont Auvergne [2017-2020], 2020. Français. NNT : 2020CLFAC041 . tel-03159237

HAL Id: tel-03159237

<https://theses.hal.science/tel-03159237>

Submitted on 4 Mar 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Matériaux et Génie Mécanique

ÉCOLE DOCTORALE N° 70

Université Clermont Auvergne

École Doctorale des Sciences Pour l'Ingénieur (ED SPI)

présentée et soutenue publiquement par

Delphine BEYLAT

le 12/10/2020

Contribution à l'étude du comportement dynamique aléatoire de structures libres et empilées sous séisme

Membres du Jury

Hélène DUMONTET,	Professeur, Institut Jean le Rond d'Alembert	Présidente
Stéphane GRANGE,	Professeur, INSA de Lyon	Rapporteur
Nikos MAKRIS,	Professeur, Southern Methodist University, Dallas	Rapporteur
Laurent BAILLET,	Professeur, Université Grenoble Alpes	Examineur
Ioannis POLITOPOULOS,	Ingénieur de Recherche HDR, CEA Saclay	Examineur
Michel FOGLI,	Professeur émérite, Université Clermont Auvergne	Directeur de thèse
David CLAIR,	Maître de conférences, Université Clermont Auvergne	Encadrant
Cyril FEAU,	Ingénieur de Recherche, CEA Saclay	Encadrant

Institut Pascal

UMR 6602 CNRS/UBP/IFMA Aubière, France



Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier tous les membres du jury pour leurs réflexions constructives qui ont permis de compléter ce travail et de dynamiser la soutenance qui a eu lieu en visioconférence compte tenu de la crise sanitaire. En particulier, je tiens à remercier messieurs Nikos Makris et Stéphane Grange pour avoir accepté de rapporter ce travail de thèse ainsi que madame Hélène Dumontet d'avoir présidé ce jury.

Tous mes remerciements vont à mon équipe encadrante : Michel, David et Cyril. Tout au long de cette thèse, nous avons travaillé ensemble sur les points techniques et théoriques sur ce sujet de thèse. Michel, merci pour votre confiance et votre encadrement. David, merci pour tous tes conseils. Cyril, merci de m'avoir proposé ce sujet de thèse, pour ton encadrement et pour ta présence. Ça a été un plaisir de travailler avec toi tant pour tes qualités techniques, professionnelles que pour tes qualités humaines. Je garderai un très bon souvenir de nos longues conversations.

Je remercie aussi toute l'équipe expérimentale pour votre travail lors la campagne EDEN : Sandra, Michel, Martial, Alain, Thierry et Cyril.

Travailler au sein du laboratoire EMSI a été une très belle expérience riche en échanges. Je remercie toute l'équipe pour votre énergie et votre bienveillance. Notamment merci à : ma cobureau Ejona pour ta présence apaisante, ma camarade de thèse Chaymaa pour ton soutien, Florence pour nos sessions de Yoga, Reine pour ta détermination, Alain pour nos parties de tennis, Thierry pour tes bons gâteaux, Giuseppe pour nos débats, Pierre-Etienne pour nos footings, Sylvie pour ta douceur ainsi que Vincent pour tes conseils et tes capteurs.

De plus, je remercie mes amis d'enfance (Ophélie, Marion, Mathilde, Juliette et Auriane) et de l'université (Lola, Arthur, Clémentine, Jonas et Hélène) pour toutes vos attentions, vos encouragements et votre soutien.

Je remercie toute ma famille, mon cousin Martin pour tes précieux conseils lors de ma recherche de thèse et pour ta présence à ma soutenance. Ma cousine Julie, pour le logo de la campagne expérimentale. Je remercie chaleureusement mes parents, ma sœur Magali et mon frère Simon pour m'avoir soutenue dans les moments difficiles et coaché jusqu'à la fin. Je souhaite également rendre hommage à mon grand-père paternel qui m'a initié aux mathématiques à travers les devoirs de vacances qu'il m'inventait ainsi qu'à la mécanique lorsque nous bricolions ensemble.

Je tiens particulièrement à remercier Manu, mon compagnon, pour tout ton soutien, ta patience ainsi que pour m'avoir toujours encouragé et redonné le sourire.

Résumé

La stabilité des structures libres sous séismes est une question majeure dans l'évaluation de la sûreté des installations industrielles. Dans ces installations, certains équipements peuvent, en effet, ne pas être ancrés au sol, notamment dans les halls d'entreposage, ou être désolidarisés du sol le temps d'une opération de maintenance. Lors d'un séisme ces structures libres sont susceptibles de se renverser, de glisser, ou dans les cas les plus graves, de devenir des objets dits "missiles" pouvant blesser des personnes ou détériorer des équipements importants pour la sûreté lors d'un impact. Dans cette thèse, la structure libre étudiée est une structure industrielle représentant un empilement de trois paniers libres destinés au stockage de colis.

La sensibilité inhérente au comportement non linéaire de telles structures, qui implique chocs et glissements, est une difficulté importante qui a pour conséquence que la démonstration de sûreté ne peut être envisagée que sous l'angle d'une approche probabiliste, essentiellement basée sur des calculs dynamiques temporels non linéaires. Pour ce faire, un premier modèle simplifié semi-analytique a été développé en s'inspirant de travaux récents de la littérature. Il permet d'obtenir une estimation rapide et globale de la réponse sismique de l'empilement en tenant compte des principaux phénomènes physiques qui se produisent sous une excitation unidirectionnelle. Pour obtenir plus de précision sur la réponse sismique de l'empilement, différents modèles « éléments finis » ont également été développés et une importante campagne expérimentale a été mise en œuvre sur la table vibrante unidirectionnelle Vésuve du laboratoire EMSI du CEA de Saclay pour : (1) valider et calibrer, le cas échéant, les modèles numériques (analyses modale et sismique) et (2) évaluer la variabilité des réponses sismiques de la structure, à la fois d'un point de vue expérimental et numérique.

Les deux approches -numérique et expérimentale- couplées à une approche fiabiliste, ont été menées de front pendant cette thèse et ont permis de mettre en évidence plusieurs phénomènes. D'un point de vue déterministe, les conséquences du soulèvement de la base de l'empilement sur son comportement global ont été identifiées. Il s'agit typiquement de l'augmentation de sa fréquence apparente lorsque la base se soulève, cette fréquence correspondant à la fréquence du « mode fondamental » pour lequel la base est en rotation autour de l'un de ses points d'appui. Ce travail a également montré que l'ajustement des propriétés dynamiques des modèles est une tâche essentielle, mais délicate, pour obtenir une réponse non linéaire satisfaisante. En pratique, cela signifie qu'il est difficile de connaître *a priori* quelles sont ces propriétés dynamiques. Néanmoins, le modèle semi-analytique peut être une alternative pour évaluer rapidement la sensibilité des modèles par rapport aux principaux paramètres physiques, bien que, dans l'absolu, cette sensibilité puisse ne pas être du même ordre d'importance d'un modèle à l'autre. De plus, comme cela est souvent observé dans les études sur le comportement sismique des structures industrielles, le mouvement de l'empilement n'était pas purement 2D, même sous une excitation unidirectionnelle. Afin de prendre en compte cette spécificité, des défauts ont été introduits dans le modèle numérique avec pour conséquence une amélioration notable de la description dynamique, attestée par une étude comparative avec les résultats expérimentaux disponibles. Une analyse probabiliste du comportement dynamique de l'empilement, entièrement menée en contexte fiabiliste et basée sur le calcul de trois indicateurs usuels de la fiabilité structurale (la probabilité de défaillance et les indices de Cornell et de Hasofer-Lind), confirme les résultats déterministes obtenus pour chacune des excitations sismiques considérées (uni, bi et tridirectionnelles), avec un effet moins marqué, cependant, pour les excitations bi et tridirectionnelles.

Mots-clés : structures libres, structures flexibles, séismes, empilements, basculements, glissements, analyse probabiliste, sûreté, fiabilité

Abstract

A free-standing (i.e. placed on the ground and not anchored) structure can be found in several industrial facilities during maintenance operations, in storage halls, etc. During an earthquake, these stacks are likely to rock, slide or overturn. Thus, one of the main concerns regarding the seismic risk studies is to assess and limit, as the case may be, their excessive movements (due to sliding or overturning) to avoid impacts with the surroundings. In this work the earthquake responses of a free standing stacked structure composed of three pallets intended to store packages are investigated.

The study of the seismic behavior of free-standing structures is known to be a quite challenging task. Indeed, this problem involves several difficulties due to the large displacements, large rotations and also impact and friction nonlinearities. This implies an extreme sensitivity of their seismic responses to small perturbations, both experimentally and numerically. Therefore, to analyze and to predict how they respond under seismic excitation, probabilistic approaches are necessary. First of all, in order to have a quick estimate of the seismic response of the stack taking into account the predominant physical phenomena that take place under unidirectional excitation, a simplified four degrees of freedom analytical model, inspired from literature, has been developed. Then, different finite element models, more or less refined, have also been implemented. At the same time, a comprehensive experimental campaign has been performed on an unidirectional shaking table of the CEA / Saclay. These experimental results allow us to (i) validate the numerical model and (ii) identify the sensitivity of seismic responses (both experimental and numerical).

Both approaches - numerical and experimental - combined with probabilistic approaches were carried out simultaneously during this work and highlight several phenomena. A deterministic approach identified the consequences of the uplift of the structure on the global behavior : the « fundamental » frequency mode is higher in the rocking phase than in the full contact phase. This work also showed that the adjustment of the dynamic properties of the models is an essential, but delicate task, to obtain an adequate nonlinear response. This means that it will be difficult to know a priori what will be the dynamic properties of the structure. Nevertheless, the simplified analytical model can be used to quickly evaluate the models'sensitivity in relation to the main physical parameters, although the sensitivity is not necessarily comparable from one model to another. In addition, as it is often noted with industrial structures, the seismic tests have shown that the motion of the stacking was not purely 2D even under an unidirectional excitation. Consequently, defects have been introduced in the models and the numerical results showed an overall satisfactory agreement by comparison with experimental results. A probabilistic analysis of the dynamic behavior of stacking, entirely conducted in a reliability context and based on the calculation of three usual reliability indicators (the failure probability and the Cornell and Hasofer-Lind reliability index), confirms the deterministic results obtained for each of the seismic excitations considered (uni, bi and tridirectional). However, this effect is less marked for bi and tridirectional excitations.

Keywords : free standing structure, flexible structure, seismic, stacked structure, rocking, sliding, probabilistic analysis, risk assessment studies, reliability

Table des matières

Table des matières	vii
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xv
I Introduction	1
I.1 Références	6
II Étude bibliographique	7
II.1 Études des risques sismiques : définitions préliminaires	9
II.2 Chronologie synthétique des études menées sur le comportement de structures libres sollicitées par une excitation sismique	11
II.3 Études menées sur le comportement de blocs libres et rigides sollicités par une excitation sismique	12
II.4 Études menées avant les années 2000 sur le comportement de structures libres, élançées et flexibles sollicitées par une excitation sismique	19
II.5 Études complémentaires et comparaisons des méthodes de modélisation de transition à l'impact du comportement de structures libres et flexibles sollicitées par une excitation sismique	31
II.6 Synthèse	43
II.7 Références	45
III Présentation de la structure, de la campagne expérimentale et de la stratégie de modélisation	47
III.1 Structure étudiée	49
III.2 Approche expérimentale	50
III.3 Modélisation numérique avec le code CAST3M	55
III.4 Modèle semi-analytique : modèle S4DoF	64
III.5 Aperçu sur la limite de validité du calcul sur base modale pour les structures libres	74
III.6 Synthèse	81
III.7 Références	84
IV Validation et analyse de la modélisation numérique	85
IV.1 Caractérisation modale de l'empilement	87
IV.2 Étude du comportement sismique de l'empilement	104
IV.3 Synthèse	126
IV.4 Références	127
V Analyse fiabiliste	129
V.1 Théorie des probabilités et analyse fiabiliste : quelques brefs rappels	131
V.2 Formulation et résolution du problème fiabiliste de l'étude	148
V.3 Application numérique	160
V.4 Synthèse	174

V.5	Références	176
VI	Conclusions et perspectives	177
A	Déformées modales de l'empilement de trois paniers pleins des modèles réduits	I
B	Étude d'un lâcher non amorti	III
C	Résultats complémentaires du chapitre IV de la comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques de la réponse d'un empilement suite à un signal sismique à fort niveau d'excitation	VII
D	Résultats complémentaires du chapitre IV sur la variabilité des résultats expérimentaux de l'analyse non linéaire	XI
E	Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de la réponse d'un empilement sollicité par une excitation sismique tridirectionnelle	XIII

Liste des figures

I.1	Photo de la structure étudiée (a) et évolutions temporelles de déplacements interpaniers de la structure (b)	3
II.1	Évolution temporelle de la composante NS de l'accélération du sol mesurée lors du séisme d'El Centro (source : www.vibrationdata.com/elcentro.htm)	10
II.2	Spectre de la composante NS de l'accélération du sol lors du séisme d'El Centro	11
II.3	Frise chronologique représentant les principales études menées sur les structures libres. Le <i>focus</i> est fait sur les structures libres et flexibles pour lesquelles le nombre d'articles est beaucoup moins important (cette liste n'est pas exhaustive).	12
II.4	Représentation du modèle d'Housner lorsque le bloc est sollicité par une accélération horizontale	14
II.5	Évolutions temporelles des dix premières secondes de l'angle de rotation θ (a) et de la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ (b) pour un bloc d'élanement 3 pour $\theta_0 = 0.12$ rad et $\dot{\theta}_0 = 0$ rad/s.	15
II.6	Évolutions temporelles des vingt premières secondes de l'angle de rotation θ (a) et de la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ (b) pour un bloc d'élanement 7 pour $\theta_0 = 0.12$ rad et $\dot{\theta}_0 = 0$ rad/s.	16
II.7	Comparaison entre les valeurs expérimentales et théoriques du coefficient de restitution d'énergie (apparent) pour des blocs de différents élanements et de différentes compositions - ref [MA, 2010]	17
II.8	Mouvements des blocs soumis aux composantes NS et BH de l'accélération du sol mesurée lors du séisme d'El Centro en fonction de la hauteur H et de largeur B du bloc - ref [ISHIYAMA, 1982]	19
II.9	Représentation du modèle de Psycharis (a) et évolution de la période « fondamentale » normalisée $\frac{T}{T_{ic}}$ en fonction de l'impulsion normalisée β (b) - ref [PSYCHARIS, 1983]	20
II.10	Évolutions temporelles des déplacements élastiques en tête du bâtiment (a) et des déplacements verticaux du bâtiment (b) - ref [PSYCHARIS, 1983]	22
II.11	Représentation du modèle de Chopra et Yim lorsque la base reste en contact total avec le sol (a) et lorsque la base se soulève (b)	23
II.12	Évolutions temporelles des déplacements horizontaux de la masse m : déplacement élastique u (a) et déplacement horizontal $H\theta$ lié à la rotation de corps rigide (b) d'une structure flexible non amortie	25
II.13	Évolutions temporelles des déplacements horizontaux de la masse m : déplacement élastique u (a) et déplacement horizontal $H\theta$ lié à la rotation de corps rigide (b) d'une structure flexible amortie ($\xi = 0.05$)	26
II.14	Évolutions temporelles des déplacements horizontaux et élastiques u de la masse et du déplacement horizontal $H\theta$ de la masse lié à la rotation de corps rigide du premier calcul sismique (a) et évolutions temporelles des déplacements horizontaux et élastiques u des trois calculs sismiques (b) - ref [CHOPRA et YIM, 1985]	27

II.15 Représentation du modèle de Wang et Gould lorsque l'ensemble « structure-système d'isolation » ne présente ni glissement ni soulèvement (a), lorsque la structure glisse par rapport à son système d'isolation (b) ainsi que lorsque la structure glisse par rapport à son système d'isolation et que le système d'isolation se soulève (c)	28
II.16 Évolutions temporelles des déplacements horizontaux et élastiques (a) et totaux (b) en tête du bâtiment - ref [WANG et GOULD, 1993]	30
II.17 Représentation du modèle de Acikgoz et DeJong lors de la phase de rocking	31
II.18 Évolutions temporelles normalisées des rotations θ (a) et des déplacements élastiques u des masses (b) - ref [ACIKGOZ et DEJONG, 2012]	34
II.19 Zooms, au voisinage de deux impacts, sur les évolutions temporelles des rotations présentées à la figure II.18 - ref [ACIKGOZ et DEJONG, 2012]	35
II.20 Intensité minimale de la sollicitation entraînant le soulèvement de structures libres et flexibles pour différentes sollicitations - ref [ACIKGOZ et DEJONG, 2012]	36
II.21 Intensité minimale de la sollicitation entraînant le renversement d'un bloc libre et rigide - ref [ZHANG et MAKRIS, 2001]	37
II.22 Intensité minimale de la sollicitation entraînant le renversement de structures libres plus ou moins flexibles - ref [ACIKGOZ et DEJONG, 2012]	38
II.23 Représentation du modèle de Vassiliou et al. dans la phase 1 où la structure n'est pas déformée (a), dans la phase 2 où le mouvement de rotation de la base a lieu autour du bord droit de la base (b) et autour du bord gauche de la base (c) - ref [VASSILIOU et collab., 2015]	38
II.24 Comparaison des résultats du modèle de Acikgoz et DeJong (en rouge) et des résultats du modèle de Vassiliou et al. (en vert) - ref [VASSILIOU et collab., 2015]	40
II.25 Comparaison des résultats du modèle de Acikgoz et DeJong (en rouge) et des résultats du modèle de Vassiliou et al. (en vert) au voisinage des instants du deuxième impact (à gauche) et du troisième impact (à droite) - ref [VASSILIOU et collab., 2015]	40
II.26 Représentation de la structure étudiée lors de la campagne expérimentale - ref [TRUNIGER et collab., 2015]	41
II.27 Comparaison des résultats expérimentaux (en bleu), des résultats du modèle de Vassiliou et al. (en rouge) et des résultats du modèle de Acikgoz et DeJong (en noir) - ref [TRUNIGER et collab., 2015]	42
II.28 Représentation du modèle multi-masses de Acikgoz et DeJong - ref [ACIKGOZ et DEJONG, 2016]	42
II.29 Représentation de la structure étudiée lors de la campagne expérimentale - ref [ACIKGOZ et collab., 2016]	44
III.1 Photo de l'empilement (a), repérage de la structure (b) et schéma d'un panier contenant quatre colis (c)	49
III.2 Photos d'un avaloir (a) et d'une barre de passage des fourches (b)	50
III.3 Schéma (a) et photo (b) de la table vibrante Vésuve	51
III.4 Photo de la dalle recouverte d'une peinture jaune reproduisant les conditions réelles d'entreposage	51
III.5 Logo de la campagne expérimentale EDEN	52
III.6 Photos des essais de caractérisation modale d'un panier vide posé sur des coussins d'air (a) et suspendu à l'aide de deux élingues (b)	53
III.7 Schémas d'instrumentation des essais de caractérisation modale d'un panier vide et libre avec une vue de dessus aplatie (a) et une vue de l'empilement dans le plan Oxz (b)	53
III.8 Schémas d'instrumentation des essais sismiques dans les plans Oxz (a) et Oxy (b)	54
III.9 Schéma du modèle de Kelvin-Voigt	58
III.10 Maillage d'un panier vide avec des éléments coques et plaques	60
III.11 Modélisation du modèle réduit du panier vide et libre	61

III.12	Schémas de la phase 1 (a) et de la phase 2 (b) du modèle S4DoF. Les dimensions ne sont pas à l'échelle.	64
III.13	Schéma du système simplifié	65
III.14	Évolutions temporelles de l'excitation sinusoïdale (a) et de l'excitation sismique réelle (b)	75
III.15	Évolutions temporelles de la rotation (a) et du soulèvement (b) du bloc sollicité par une excitation sinusoïdale pour les calculs « NL » (équation III.89), « NL eq. » (équation III.90) et CAST3M	76
III.16	Évolutions temporelles de la rotation (a) et du soulèvement (b) du bloc sollicité par une excitation sismique réelle pour les calculs « NL » (équation III.89), « NL eq. » (équation III.90) et CAST3M	77
III.17	Évolutions temporelles des rotations (a), des soulèvements de la base (b) et des déplacements en tête (c) ainsi que les SRO amortis à 0,2% des accélérations absolues calculées au niveau du panier 3 (d) pour l'excitation sinusoïdale pour les calculs « NL » (équations III.51, III.52 et III.53), « NL eq. » (équations III.51, III.91 et III.92) et CAST3M	78
III.18	Évolutions temporelles des rotations (a), des soulèvements de la base (b) et des déplacements en tête (c) ainsi que les SRO amortis à 0,2% des accélérations absolues calculées au niveau du panier 3 (d) pour l'excitation sismique réelle pour les calculs « NL » (équations III.51, III.52 et III.53), « NL eq. » (équations III.51, III.91 et III.92) et CAST3M	79
III.19	Évolutions temporelles du soulèvement (a) et du déplacement en tête (b) obtenues à partir des équations non linéaires et à partir des équations linéarisées	80
IV.1	Déformées modales expérimentale (a) et numérique (b) d'un mode d'un panier vide et libre	88
IV.2	Déformées des modes A (a) et B (b) d'un panier vide et libre obtenus avec le modèle de référence	89
IV.3	Déformées des modes C (a) et D (b) d'un panier vide et libre obtenus avec le modèle de référence	89
IV.4	Déformées des modes E (a) et F (b) d'un panier vide et libre obtenus avec le modèle de référence	90
IV.5	Déformées modales numériques (en bleu) et expérimentales (en rouge) d'un panier vide et libre des modes 1 (a) et 2 (b)	91
IV.6	Déformées modales numériques (en bleu) et expérimentales (en rouge) d'un panier vide et libre des modes 3 (a) et 4 (b)	91
IV.7	Emplacement des seize points de contact (croix rouges) à l'interface entre les colis et la base d'un panier (vert). Les croix rouges qui n'ont pas de vis-à-vis avec la base du panier n'ont pas été considérées.	93
IV.8	Déformées numériques (en rouge) et expérimentales (en bleu) d'un panier pour lequel un excentrement des colis a été introduit. Les cercles noirs matérialisent les endroits où les déformées modales ont perdu « en symétrie ».	94
IV.9	Exemples de déformées modales numériques (en bleu) et expérimentales (en rouge) d'un empilement constitué de deux paniers avec des colis non contrés	94
IV.10	Déformées des modes A (a) et B (b) d'un empilement de trois paniers pleins, pour le modèle de référence	95
IV.11	Déformées des modes C (a) et D (b) d'un empilement de 3 paniers pleins, pour le modèle de référence	96
IV.12	Déformées des modes E (a) et F (b) d'un empilement de trois paniers pleins, pour le modèle de référence	96
IV.13	Déformées numérique (en bleu) et expérimentale (en rouge) du mode 1 dans le repère (O, \underline{x} , \underline{z}) (a) et dans le repère (O, \underline{y} , \underline{z}) (b)	97

IV.14	Déformées numérique (en bleu) et expérimentale (en rouge) du mode 2 dans le repère $(O, \underline{x}, \underline{z})$ (a) et dans le repère $(O, \underline{y}, \underline{z})$ (b)	97
IV.15	Déformées numériques (en bleu) et expérimentales (en rouge) des modes 3 (a) et 5 (b)	97
IV.16	Déformées numérique (en bleu) et expérimentale (en rouge) du mode 4 dans le plan $(O, \underline{x}, \underline{z})$ (a) et dans le plan $(O, \underline{y}, \underline{z})$ (b)	98
IV.17	Emplacements des ressorts de torsion ajoutés au modèle d'un panier basé sur des éléments finis de type poutre et plaque	100
IV.18	Déformée modale du cadre d'un panier obtenue avec le modèle de référence	101
IV.19	Déformées modales de l'empilement du modèle S4DoF dans la phase de full contact (a) et dans la phase de rocking (b)	104
IV.20	Évolution temporelle de l'accélération de la table (a) et SRO des accélérations absolues, mesurées dans la direction \underline{x} au niveau de la table et à la base du panier 3 (b), pour un taux d'amortissement critique égal à 2%	105
IV.21	Évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans la direction \underline{x} (a) et SRO des accélérations absolues de la table et de la base du panier 3 dans la direction \underline{x} (b) de l'essai et des modèles réduits pour un taux d'amortissement critique égal à 2%	106
IV.22	Évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans la direction \underline{x} (a) et SRO des accélérations absolues de la table et de la base du panier 3 dans la direction \underline{x} (b) de l'essai et du modèle S4DoF pour un taux d'amortissement critique égal à 2%	107
IV.23	Évolution temporelle de l'accélération de la table correspondant au signal 4	108
IV.24	SRO des accélérations absolues dans la direction \underline{x} de la table et de la base du panier 3 (a) pour un taux d'amortissement critique égal à 2% et évolutions temporelles des soulèvements de l'empilement (b)	108
IV.25	Évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans la direction \underline{x} (a) et \underline{y} (b)	109
IV.26	Numérotation des pieds de l'empilement - vue de dessus	109
IV.27	SRO des accélérations absolues expérimentales dans la direction \underline{x} de la table et de la base du panier 3 pour un taux d'amortissement critique égal à 2%	110
IV.28	Évolutions temporelles de l'accélération absolue dans la direction \underline{x} de la base du panier 3 pour les différentes phases du mouvement (a) et SRO associés pour un taux d'amortissement critique égal à 2% (b)	110
IV.29	Déformées modales des deux premiers pseudo-modes d'un panier dont les fréquences sont respectivement égales à 244 Hz (a) et 290 Hz (b)	113
IV.30	SRO des accélérations absolues dans la direction \underline{x} de la table et de la base du panier 3 pour un taux d'amortissement critique égal à 2%	116
IV.31	Évolutions temporelles des soulèvements de l'empilement (a) et des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans la direction \underline{x} (b)	116
IV.32	SRO de l'accélération absolue du panier 3 calculés avec le modèle S4DoF dont la fréquence du mode fondamental est ajustée à 3,5 Hz pour un taux d'amortissement de 4% et à 3,8 Hz pour des taux d'amortissement de 2% et 4%	117
IV.33	Évolutions temporelles du soulèvement (a) et des déplacements en tête (b) calculés avec le modèle S4DoF dont la fréquence du mode fondamental est ajustée à 3,5 Hz pour un taux d'amortissement de 4% et à 3,8 Hz pour des taux d'amortissement de 2% et 4%	118
IV.34	Évolutions temporelles des déplacements relatifs de la base de l'empilement dans les directions \underline{x} (a) et \underline{y} (b)	119
IV.35	SRO des accélérations absolues dans la direction \underline{x} de la table et de la base du panier 3 (a) pour un taux d'amortissement critique égal à 2% et évolutions temporelles des soulèvements de l'empilement (b)	120

IV.36	Évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans les directions \underline{x} (a) et \underline{y} (b)	121
IV.37	Évolutions temporelles de l'accélération de la table mesurées lors des 35 essais (a) et de l'écart type des réalisations (b)	121
IV.38	Évolutions temporelles des soulèvements de l'empilement : expérimentaux (a), du modèle S4DoF (b), du modèle SNLFED (c) et du modèle SNLFE (d)	123
IV.39	Évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête dans la direction \underline{x} des essais (a), du modèle S4DoF (b), du modèle SNLFED (c) et du modèle SNLFE (d)	124
IV.40	Évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête dans la direction \underline{y} des essais (a) et du modèle SNLFED (b)	124
IV.41	Spectres des accélérations absolues dans la direction \underline{x} de la table et de la base du panier 3 des résultats des essais (a), du modèle S4DoF (b), du modèle SNLFED (c) et du modèle SNLFE (d) pour un taux d'amortissement critique égal à 2%	125
V.1	Domaines de sécurité et de défaillance associés à une fonction d'état limite $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (y_1, y_2) \rightarrow G(y_1, y_2)$	140
V.2	Photo de l'empilement (a) et repérage du système (b)	150
V.3	Graphes des composantes suivant $O\xi_1$, $O\xi_2$ et $O\xi_3$ d'une réalisation simulée du processus modèle tridirectionnel (a) et SRO à 2 % d'amortissement associés à ces composantes simulées (b)	153
V.4	Courbes de fragilité (avec fuseaux de confiance associés, au seuil de confiance 95%) relatives aux critères de défaillance C_1 , de caractéristique $\bar{m}_1 = 10$ mm (a), et C_2 , de caractéristique $\bar{m}_2 = 1$ mm (b), obtenues via les modèles mécano-numériques SNLFE, SNLFED et S4DoF	162
V.5	Courbes de fragilité (avec fuseaux de confiance associés, au seuil de confiance 95%) relatives aux critères de défaillance C_1 , de caractéristique $\bar{m}_1 = 25$ mm (a), et C_2 , de caractéristique $\bar{m}_2 = 8$ mm (b), obtenues via les modèles mécano-numériques SNLFE, SNLFED et S4DoF	163
V.6	Graphes (établis via les modèles mécano-numériques SNFE, SNLFED et S4DoF) montrant, pour chaque critère de défaillance C_k (avec $k=1$ figure a et $k=2$ figure b), l'évolution de l'indice de Cornell $\beta_{C,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant C_k	163
V.7	Graphes (établis via les modèles mécano-numériques SNFE, SNLFED et S4DoF) montrant, pour chaque critère de défaillance C_k (avec $k=1$ figure a et $k=2$ figure b), l'évolution de l'indice de Hasofer-Lind $\beta_{HL,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant C_k	164
V.8	Courbes de fragilité (avec fuseaux de confiance associés, au seuil de confiance 95%) relatives aux critères de défaillance C_1 , de caractéristique $\bar{m}_1 = 10$ mm (partie gauche), et C_2 , de caractéristique $\bar{m}_2 = 1$ mm (partie droite), obtenues via les modèles mécano-numériques SNLFE et SNLFED	164
V.9	Courbes de fragilité (avec fuseaux de confiance associés, au seuil de confiance 95%) relatives aux critères de défaillance C_1 , de caractéristique $\bar{m}_1 = 25$ mm (a), et C_2 , de caractéristique $\bar{m}_2 = 8$ mm (b), obtenues via les modèles mécano-numériques SNLFE et SNLFED	165
V.10	Graphes (établis via les modèles mécano-numériques SNFE et SNLFED) montrant, pour chaque critère de défaillance C_k (avec $k=1$ figure a et $k=2$ figure b), l'évolution de l'indice de Cornell $\beta_{C,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant C_k	165
V.11	Graphes (établis via les modèles mécano-numériques SNFE et SNLFED) montrant, pour chaque critère de défaillance C_k (avec $k=1$ figure a et $k=2$ figure b), l'évolution de l'indice de Hasofer-Lind $\beta_{HL,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant C_k	166

V.12	Courbes de fragilité (avec fuseaux de confiance associés, au seuil de confiance 95%) relatives aux critères de défaillance C_1 , de caractéristique $\bar{m}_1 = 10$ mm (a), et C_2 , de caractéristique $\bar{m}_2 = 1$ mm (b), obtenues via les modèles mécano-numériques SNLFE et SNLFED	166
V.13	Courbes de fragilité (avec fuseaux de confiance associés, au seuil de confiance 95%) relatives aux critères de défaillance C_1 , de caractéristique $\bar{m}_1 = 25$ mm (a), et C_2 , de caractéristique $\bar{m}_2 = 8$ mm (b), obtenues via les modèles mécano-numériques SNLFE et SNLFED	167
V.14	Graphes (établis via les modèles mécano-numériques SNFE et SNLFED) montrant, pour chaque critère de défaillance C_k (avec $k=1$ figure a et $k=2$ figure b), l'évolution de l'indice de Cornell $\beta_{C,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant C_k	167
V.15	Graphes (établis via les modèles mécano-numériques SNFE et SNLFED) montrant, pour chaque critère de défaillance C_k (avec $k=1$ figure a et $k=2$ à figure b), l'évolution de l'indice de Hasofer-Lind $\beta_{HL,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant C_k	168
A.1	Déformées modales de l'empilement de trois paniers pleins des modèles réduits des modes A (a) et B (b)	I
A.2	Déformées modales de l'empilement de trois paniers pleins des modèles réduits des modes C (a) et D (b)	II
A.3	Déformées modales de l'empilement de trois paniers pleins des modèles réduits des modes E (a) et F (b)	II
B.1	Évolution temporelle du déplacement (a) et spectre amorti à 2% de l'accélération de la masse 2 (b)	III
B.2	Évolutions temporelles de la rotation de la base (a) et du déplacement de la masse 2 (b)	IV
B.3	Spectre amorti à 2% de l'accélération de la masse 2	V
C.1	Évolutions temporelles des soulèvements expérimentaux et numériques de l'empilement au niveau de plusieurs pieds	VIII
C.2	Évolutions temporelles des déplacements horizontaux inter-paniers	X
D.1	Évolutions temporelles des déplacements horizontaux inter-paniers dans les directions \underline{x} (a et b) et \underline{y} (c et d)	XII
E.1	Évolutions temporelles du signal dans les directions \underline{x} (a) \underline{y} (b) et \underline{z} (c)	XIII
E.2	Évolutions temporelles du déplacement à la base de l'empilement dans les directions \underline{x} (a) et \underline{y} (b) des résultats expérimentaux (en noir) et numériques (en vert)	XIV
E.3	Évolution temporelle des soulèvements de la base de l'empilement des résultats expérimentaux (en noir) et numériques (en vert)	XIV
E.4	Évolutions temporelles du déplacement en tête de l'empilement dans les directions \underline{x} (a) et \underline{y} (b) des résultats expérimentaux (en noir) et numériques (en vert)	XV

Liste des tableaux

III.1 Propriétés mécaniques d'un panier	50
III.2 Paramètres des signaux sismiques utilisés lors de la campagne expérimentale EDEN	55
III.3 Valeurs des liaisons	62
III.4 Description des modèles réduits	63
III.5 Interprétation physique des termes de l'équation III.34	67
III.6 Interprétation physique des termes de l'équation III.38	68
III.7 Synthèse de la campagne expérimentale	81
III.8 Synthèse du modèle de référence	81
III.9 Synthèse du modèle SNLFE	82
III.10 Synthèse du modèle NLFE	82
III.11 Synthèse du modèle SNLFED	82
III.12 Synthèse du modèle NLFED	83
III.13 Synthèse du modèle S4DoF	83
III.14 Schéma de synthèse	83
IV.1 Fréquences des six premiers modes d'un panier vide et libre obtenus avec le modèle de référence	89
IV.2 Fréquences, déformées modales et paramètres d'identification des modes identifiés entre les analyses modales expérimentale et numérique d'un panier vide et libre	90
IV.3 Paramètres d'identification du premier mode pour un panier plein posé sur la dalle	93
IV.4 Fréquences et masses effectives dans les directions x , y et z des six premiers modes de l'empilement du modèle de référence	95
IV.5 Fréquences, déformées modales et paramètres d'identification des modes identifiés entre les analyses modales expérimentale et numérique d'un empilement de trois paniers pleins	98
IV.6 Caractéristiques des souplesses introduites dans les modèles réduits	101
IV.7 Pourcentage de masse effective des six premiers modes de l'empilement dans chaque direction, pour les modèles réduits et de référence	102
IV.8 Paramètres d'identification modale issus de la comparaison entre les modèles réduits et le modèle de référence pour l'empilement	102
IV.9 Fréquences, déformées modales et paramètres d'identification des modes identifiés pour les modèles réduits et de référence d'un empilement	103
IV.10 Valeurs des raideurs du modèle S4DoF pour obtenir le premier mode à 3,6 Hz et à 3,8 Hz	106
IV.11 Temps de calcul des différents modèles numériques - comportement quasi linéaire	107
IV.12 Fréquence des modes en fonction des conditions aux limites de la base modale des modèles réduits simplifiés et du modèle S4DoF	111
IV.13 Descriptions des différentes variantes des modèles réduits	112
IV.14 Fréquences des modes de la base modale enrichie des modèles réduits simplifiés de l'empilement - les cases colorées correspondent aux pseudo-modes	114
IV.15 Fréquences des modes de la base modale enrichie d'un panier des modèles réduits non simplifiés - les cases colorées correspondent aux pseudo-modes	114

IV.16	Code couleur et valeurs des paramètres des modèles numériques. Ces valeurs correspondent aux valeurs qui fournissent les meilleurs ajustement, en cohérence avec les valeurs retenues lors de l'analyse de l'essai à bas niveau, i.e. correspondant au comportement quasi statique de l'empilement.	118
IV.17	Temps de calcul d'un calcul dynamique non linéaire des différents modèles numériques	121
V.1	Valeur du triplet (PGA, TMS, FC) relatif à chaque composante d'une réalisation simulée du processus modèle tridirectionnel et, pour chacun de ces trois indicateurs sismiques, erreur relative maximale entre les valeurs qu'il prend pour les trois composantes	153
V.2	Comparaison des modèles mécano-numériques S4DoF, SNLFE et SNLFED à travers les indicateurs fiabilistes $\beta_{C,k}$, $\beta_{HL,k}$ et $P_{f,k}$ ($k = 1, 2$) associés, pour chaque excitation (uni, bi, tridirectionnelle), à deux critères de défaillance C_1 et deux critères de défaillance C_2	171
V.3	Comparaison des modèles mécano-numériques S4DoF, SNLFE et SNLFED à travers les estimées de la probabilité de défaillance $\bar{P}_{f,k}^{(L)}$, $\bar{\bar{P}}_{f,k}^{(L)}$ et $P_{f,HL,k}^{conv}$ ($k = 1, 2$) associées, pour chaque excitation (uni, bi, tridirectionnelle), à deux critères de défaillance C_1 et à deux critères de défaillance C_2	172
V.4	Comparaison des modèles mécano-numériques S4DoF, SNLFE et SNLFED à travers les estimées de la probabilité de défaillance $\bar{P}_{f,k}^{(L)}$, $\bar{\bar{P}}_{f,k}^{(L)}$ et $P_{f,HL,k}^{conv}$ ($k = 1, 2$) associées, pour l'excitation unidirectionnelle avec deux tailles d'échantillons différentes, à deux critères de défaillance C_1 et à deux critères de défaillance C_2	173

Chapitre I

Introduction

Éléments bibliographiques

Les premières études consacrées à la stabilité sous séisme de structures non ancrées au sol, aussi appelées structures libres, ont eu lieu dans les années 1800 au Japon. Lors d'un séisme, ces structures sont susceptibles de glisser, de basculer¹ ou de se renverser². Les structures libres étudiées étaient des pierres tombales assimilées à des blocs rectangulaires, rigides et libres. L'objectif de ces études était d'évaluer l'intensité d'un tremblement de terre en fonction des géométries des pierres tombales renversées. Par la suite, ces études se sont révélées inexactes car le renversement de structures libres et rigides ne dépend pas uniquement de l'accélération maximale du sol mais également de sa vitesse maximale. En 1963, Housner a établi les équations du mouvement relatives au basculement sous séismes d'une structure élancée et libre assimilée à un solide rigide, plan, symétrique et homogène possédant un unique degré de liberté de rotation et deux points de contact ponctuel avec son support, lui même rigide [HOUSNER, 1963]. Lors des transitions de phases caractérisées par un changement de centre de rotation, passant instantanément de l'un des points de contact à l'autre, la perte d'énergie cinétique est traduite à travers un coefficient de restitution d'énergie. Ce coefficient est calculé analytiquement en exprimant la conservation du moment cinétique et en supposant un contact inélastique sans rebond. De nombreuses recherches se sont inspirées à partir du modèle d'Housner afin d'étudier le comportement sous séismes de structures élancées, libres et rigides. Parmi ces recherches, l'un des articles fondamentaux pour les ingénieurs est celui d'Ishiyama qui a mis en place des critères afin de statuer sur la stabilité sous séisme d'un bloc rigide [ISHIYAMA, 1982]. Ces derniers sont encore utilisés de nos jours pour apprécier rapidement la possibilité qu'une structure rigide, ou assimilée, se renverse sans avoir à mettre en œuvre de calculs numériques complexes. Le comportement sous séisme de structures libres et rigides est un sujet de recherche qui reste d'actualité. Par exemple, certains auteurs étudient l'effet d'inévitables défauts géométriques sur leur comportement dynamique (e.g. [MATHEY et collab., 2016] et [MATHEY et collab., 2018]), tandis que d'autre étudie les effets bénéfiques du basculement de structures libres et élancées pour proposer un concept d'isolation sismique (concept de *rocking isolation* présenté dans la référence [MAKRIS, 2018]). Parallèlement, et dans une moindre mesure, des recherches sur le comportement sismique de structures libres et flexibles ont été entreprises. En 1985, Chopra et Yim ont été les premiers à établir les équations simplifiées du mouvement sismique d'une structure libre et flexible, à partir d'un modèle à deux

1. Le basculement (*rocking* en Anglais) d'une structure libre est un mouvement oscillatoire de rotation se produisant autour des différents points d'appuis de la structure sur son support, lesquels délimitent la surface dite de sustentation. Lors de ce mouvement, la projection orthogonale du centre de gravité de la structure sur son support reste dans la surface de sustentation, ce qui assure « sa stabilité », si tant est que l'on puisse parler de stabilité.

2. Le renversement (*overturning* en Anglais) correspond à un basculement extrême qui implique que la projection orthogonale du centre de gravité de la structure sur son support sorte de la surface de sustentation. Ce mouvement extrême conduit alors à la chute de la structure. A noter que, lors d'un séisme, il peut arriver que la projection orthogonale du centre de gravité sorte momentanément de la surface de sustentation et qu'elle y revienne du fait du mouvement du support, sans qu'il n'y ait de chute pour autant.

degrés de liberté, l'un représentant la rotation de corps rigide et l'autre la déformation élastique de la superstructure, la base étant considérée comme rigide [CHOPRA et YIM, 1985]. Depuis, les équations exactes du mouvement de ce modèle ont été obtenues à partir du formalisme de Lagrange (e.g. [OLIVETO et collab., 2003] et [ACIKGOZ et DEJONG, 2012]) puis validées par des résultats expérimentaux (e.g. [TRUNIGER et collab., 2015]). Cependant, une difficulté persiste pour traduire le comportement dynamique lors de la transition à l'impact, c'est-à-dire à la fin d'une phase pendant laquelle la structure a un mouvement de rotation autour de l'un de ses points d'appuis. Par ailleurs, il n'existe pas de critère qui permette de statuer aussi simplement que pour les structures rigides sur leur stabilité sous séisme. Il est donc nécessaire de se tourner vers des calculs dynamiques temporels, ce qui implique de disposer d'un modèle numérique propre à la structure étudiée. De ce fait, les recherches sur le basculement de structures libres et flexibles sont moins abondantes que celles sur le basculement de structures libres et rigides. À titre d'exemple, l'article précurseur de Chopra et Yim a été cité 156 fois contre 1 235 fois pour le papier précurseur d'Housner.

Problématique industrielle

Dans les installations industrielles, certains équipements ne sont pas ancrés au sol ou sont désolidarisés du sol le temps d'une opération de maintenance. Lors d'un séisme, ces structures sont susceptibles de se renverser, de glisser, ou dans les cas les plus graves, de devenir des objets dits « missiles » pouvant blesser des personnes ou détériorer des équipements importants pour la sûreté. Ainsi, la stabilité des structures libres sous séismes est une question majeure dans l'évaluation de la sûreté des installations industrielles. Dans le cadre de cette thèse, la stabilité d'une structure flexible représentant un empilement de trois paniers libres destinés au stockage de colis est étudiée (cf. figure I.1.a). Le comportement de cette structure présente de fortes non-linéarités résultant des chocs entre les paniers, des chocs entre les paniers et les colis, du glissement entre les paniers, du glissement de la base sur le sol, du soulèvement de la base ainsi que des grandes rotations. Étudier la stabilité sous séisme de ce type de structures implique par conséquent de réaliser des calculs dynamiques temporels non linéaires. De plus, ce comportement non linéaire présente une forte sensibilité (aux conditions expérimentales, aux paramètres de calculs, etc.). Un exemple de cette sensibilité expérimentale est présenté sur la figure I.1.b qui représente les évolutions temporelles des déplacements inter-paniers. Dans cet exemple, l'empilement a été sollicité 35 fois par une même sollicitation (dans le sens où la même consigne a été donnée au système de pilotage de la table vibrante pour chaque essai). Cette figure indique que, du fait des incertitudes (i) sur les positions initiales des différents constituants de la structure (que l'on ne peut connaître exactement en pratique) et (ii) sur la connaissance de l'excitation réellement appliquée (qui diffère inévitablement « légèrement » d'un essai à l'autre), il existe une variabilité importante de la réponse de la structure qu'il est difficile d'appréhender par le calcul. Cela implique que la démonstration de sûreté ne peut être envisagée que sous l'angle d'une approche probabiliste, essentiellement basée sur des calculs dynamiques temporels non linéaires.

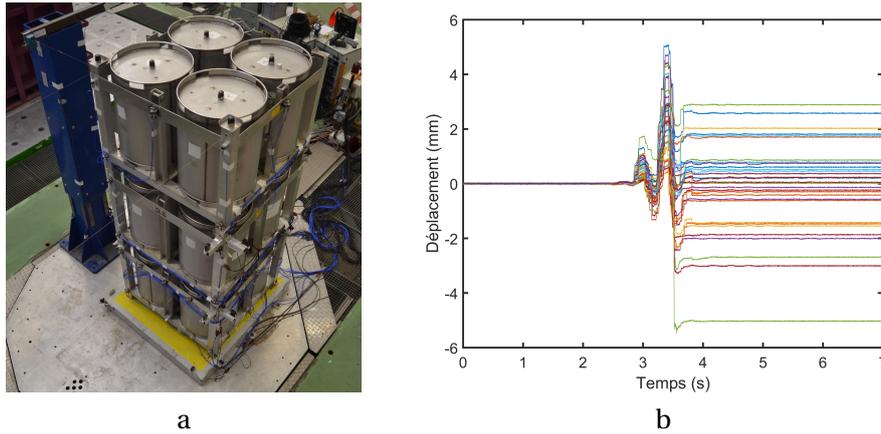


FIGURE I.1 – Photo de la structure étudiée (a) et évolutions temporelles de déplacements inter-paniers de la structure (b)

Les empilements étudiés dans cette thèse sont destinés au stockage de colis, ils sont ainsi placés les uns à côté des autres dans les halls de stockage. Lors d'un séisme, ces empilements peuvent glisser, basculer, s'entrechoquer voire se renverser. Dans le cadre de l'évaluation de la sûreté des installations industrielles, le renversement de l'empilement est le scénario le plus étudié car potentiellement le plus « dangereux » puisqu'il peut engendrer l'altération de colis. Néanmoins, comme l'élanement de la structure — qui est égal à 2,4 — implique un niveau de la sollicitation relativement élevé pour entraîner son renversement, c'est la perte de stabilité suite à l'entrechoquement avec un empilement voisin qui est considérée. Ainsi, la problématique peut se résumer par : **quelle est la probabilité que, lors d'un séisme, deux empilements adjacents s'entrechoquent dans les halls de stockage ?**

Dans cette thèse, seul un empilement est considéré. Ainsi, la problématique est de déterminer la probabilité :

- que le déplacement en tête de la structure excède une certaine valeur limite;

et/ou

- que le soulèvement de la base de l'empilement excède une certaine valeur limite.

Il est important de noter que la structure étant flexible, ces deux évènements ne sont pas équivalents.

Objectifs, approches et plan de la thèse

Les objectifs de cette thèse sont :

1. D'analyser le comportement dynamique d'une structure libre et flexible;
2. De mettre en place une campagne expérimentale afin de disposer d'une base de données de référence;
3. De développer des modèles mécano-numériques représentatifs du comportement global;
4. De valider les modèles mécano-numériques à l'aide des résultats d'essais;
5. De sélectionner les modèles qui présentent le meilleur compromis entre une bonne représentativité du comportement global et un faible coût en temps de calculs;
6. D'estimer la probabilité de défaillance pour un scénario sismique donné.

Pour répondre à ces objectifs, le problème a été traité par le biais de quatre approches complémentaires qui sont :

- **une approche expérimentale** : une campagne expérimentale réalisée sur la table vibrante unidirectionnelle VESUVE du laboratoire EMSI du CEA de Saclay a été mise en place afin de constituer une base de données de référence. Cette campagne regroupe des essais de caractérisation modale et des essais sismiques ;
- **une approche analytique** : un modèle simplifié semi-analytique a été développé en s'appuyant sur les travaux récents de la littérature. Ce modèle permet d'obtenir une estimation rapide de la réponse sismique de l'empilement en tenant compte des principaux phénomènes physiques qui se produisent sous excitation unidirectionnelle. Il a en outre permis de comprendre ce qui fait la spécificité du comportement sismique de ce type de structure ;
- **une approche numérique** : plusieurs modèles numériques « éléments finis » ont été développés avec différents degrés de précision afin d'obtenir, in fine, un modèle à la fois représentatif du comportement global et peu coûteux en temps de calculs ;
- **une approche fiabiliste** : trois indicateurs (la probabilité de défaillance et les indices de Cornell et de Hasofer-Lind) ont été calculés afin d'évaluer la fiabilité de la structure. À partir de ces calculs, une étude comparative des modèles mécano-numériques développés et sélectionnés dans les approches analytique et numérique a ainsi été réalisée.

Ces approches étant liées, leur développement a été réalisé conjointement. Les étapes du développement de ces approches sont décrites dans les quatre principaux chapitres qui constituent le corps du texte de ce mémoire. Ce mémoire de thèse est composée de six chapitres sachant que ce chapitre d'introduction représente le **chapitre I** et que le **chapitre VI** est le chapitre de conclusion.

Le **chapitre II** détaille l'étude bibliographique menée lors de cette thèse. Les développements de modèles numériques ainsi que les campagnes expérimentales qui ont été réalisées sur les structures libres et rigides puis sur les structures libres et flexibles sont présentées. Ce chapitre permet au lecteur de prendre connaissance des études et concepts développés qui sont fondamentaux pour appréhender au mieux la problématique de cette thèse.

Le **chapitre III** présente les approches expérimentale, analytique et numérique développées dans le cadre de cette thèse. Ce chapitre est composé de quatre parties. Dans un premier temps, les caractéristiques géométriques et les propriétés mécaniques de l'empilement sont détaillées. Puis, la campagne expérimentale mise en place et réalisée au cours de cette thèse est présentée. Enfin, dans les deux dernières parties, les modèles numériques, développés sous CAST3M et semi-analytique, mis en place dans cette thèse sont exposés. Les méthodes de calcul et les limites des modèles sont également abordées. Ce chapitre a pour but de donner au lecteur une première vision de l'ensemble des modèles développés dans les approches analytique et numérique, de leurs limites, et de l'ensemble des essais réalisés dans l'approche expérimentale.

Le **chapitre IV** expose la comparaison entre les résultats des approches expérimentale, analytique et numérique. Cette comparaison, réalisée à travers deux types d'essais : des essais de caractérisation modale et des essais sismiques, permet de valider les modèles numériques et de sélectionner ceux qui présentent le meilleur compromis entre une bonne représentativité du comportement global et un faible coût en temps de calcul. La variabilité des réponses sismiques de la structure d'un point de vue expérimentale et d'un point de vue numérique est également étudiée. Ce chapitre révèle la complexité du comportement dynamique d'une structure libre et flexible ainsi que les conséquences du soulèvement de la base sur le comportement global.

Le **chapitre V** présente l'approche fiabiliste développée. Il est articulé en trois parties. Dans un premier temps, les notions fondamentales de la théorie des probabilités et de l'analyse fiabiliste sont rappelées. Puis, le problème fiabiliste du comportement sous séisme de l'empilement ainsi que la méthodologie proposée pour le résoudre sont exposés. Pour finir, trois indicateurs usuels de la fiabilité structurale (la probabilité de défaillance et les indices de Cornell et de Hasofer-Lind) sont calculés à partir des modèles mécano-numériques retenus, pour trois types d'excitation sismique : (i) une excitation unidirectionnelle, (ii) une excitation bidirectionnelle et (iii) une excitation tridirectionnelle, et pour deux critères de défaillance, l'un portant sur le déplacement horizontal en tête de l'empilement et l'autre sur le soulèvement de sa base.

Dans l'ensemble de ce manuscrit, les termes que nous avons souhaités mettre en exergue, par exemple les hypothèses des modèles, sont écrits en vert. Les références bibliographiques indiquées en rouge ainsi que les numéros des figures et des paragraphes indiqués en bleu sont des liens hypertextes renvoyant respectivement aux références complètes ainsi qu'aux figures et aux paragraphes. Les références se trouvent à la fin de chaque chapitre. Pour chacune sont indiquées, sous forme de liens hypertextes, les pages où elles sont citées dans le manuscrit.

I.1 Références

- ACIKGOZ, S. et M. J. DEJONG. 2012, «The interaction of elasticity and rocking in flexible structures allowed to uplift», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 41, n° 15, p. 2177–2194. [2](#)
- CHOPRA, A. K. et S. C.-S. YIM. 1985, «Simplified earthquake analysis of structures with foundation uplift», *Journal of Structural Engineering*, vol. 111, n° 4, p. 906–930. [2](#)
- HOUSNER, G. 1963, «The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, n° 10, p. 1901–1922. [1](#)
- ISHIYAMA, Y. 1982, «Motions of rigid bodies and criteria for overturning by earthquake excitations», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 10, n° 5, p. 635–650. [1](#)
- MAKRIS, N. 2018, *The Dynamics of Rocking Isolation*, ISBN 978-3-319-75740-7, p. 289–307, doi : 10.1007/978-3-319-75741-4_12. [1](#)
- MATHEY, C., C. FEAU, D. CLAIR, L. BAILLET et M. FOGLI. 2018, «Experimental and numerical analyses of variability in the responses of imperfect slender free rigid blocks under random dynamic excitations», *Engineering Structures*, vol. 172, doi :<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.06.064>, p. 891 – 906, ISSN 0141-0296. [1](#)
- MATHEY, C., C. FEAU, I. POLITOPOULOS, D. CLAIR, L. BAILLET et M. FOGLI. 2016, «Behavior of rigid blocks with geometrical defects under seismic motion : an experimental and numerical study», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 45, n° 15, doi :[10.1002/eqe.2773](https://doi.org/10.1002/eqe.2773), p. 2455–2474. [1](#)
- OLIVETO, G., I. CALIO et A. GRECO. 2003, «Large displacement behaviour of a structural model with foundation uplift under impulsive and earthquake excitations», *Earthquake engineering & structural dynamics*, vol. 32, n° 3, p. 369–393. [2](#)
- TRUNIGER, R., M. F. VASSILIOU et B. STOJADINOVIC. 2015, «An analytical model of a deformable cantilever structure rocking on a rigid surface : experimental validation», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 44, n° 15, p. 2795–2815. [2](#)

Chapitre II

Étude bibliographique

Ce chapitre présente l'étude bibliographique menée dans cette thèse. Cet état de l'art est composé de cinq parties. Dans la première partie, quelques rappels sur les séismes ainsi que sur les principales formes de représentation de l'excitation sismique utilisées par la suite sont présentés. L'empilement de paniers de stockage étudié dans ce travail n'étant pas fixé au sol, les modèles de la littérature consacrés au comportement des structures libres sont exposés. La deuxième partie présente une chronologie synthétique des principales études traitant du comportement de ce type de structures. Bien que l'empilement de paniers de stockage soit une structure flexible, les études sur le comportement de structures libres et rigides sont rappelées dans la troisième partie car elles sont essentielles à la compréhension de la dynamique du basculement. Les études menées sur le comportement de structures libres et flexibles font l'objet des deux dernières parties.

Sommaire

II.1 Études des risques sismiques : définitions préliminaires	9
II.1.1 Origines et échelles des séismes	9
II.1.2 Représentations de l'excitation sismique	9
II.2 Chronologie synthétique des études menées sur le comportement de structures libres sollicitées par une excitation sismique	11
II.3 Études menées sur le comportement de blocs libres et rigides sollicités par une excitation sismique	12
II.3.1 Premières études menées sur le comportement de blocs libres et rigides sollicités par une excitation sismique	12
II.3.2 Modèle de référence sur le comportement de basculement de blocs libres et rigides sollicités par une excitation sismique : modèle d'Housner	13
II.3.3 Synthèse des campagnes expérimentales menées sur les blocs libres et rigides sollicités par une excitation sismique	17
II.3.4 Stabilité sismique de blocs libres et rigides : critères d'Ishiyama	18
II.4 Études menées avant les années 2000 sur le comportement de structures libres, élancées et flexibles sollicitées par une excitation sismique	19
II.4.1 Première étude du comportement de structures libres et flexibles sollicitées par une excitation sismique : modèle de Psycharis	20
II.4.2 Modèle de référence sur le comportement de basculement de structures libres et flexibles sollicitées par une excitation sismique : modèle de Chopra et Yim	22
II.4.3 Combinaison entre les mouvements de glissement et de basculement pour les structures libres et flexibles sollicitées par une excitation sismique : Modèle de Wang et Gould	28
II.5 Études complémentaires et comparaisons des méthodes de modélisation de transition à l'impact du comportement de structures libres et flexibles sollicitées par une excitation sismique	31
II.5.1 Modèle de transition à l'impact ADJex : Modèle de Acikgoz et DeJong	31
II.5.2 Modèle de transition à l'impact VVEL : Modèle de Vassiliou et al.	38
II.5.3 Comparaisons du modèle de Acikgoz et DeJong et du modèle de Vassiliou et al.	39
II.5.4 Modèle sur le comportement de basculement de structures multi-masses, libres et flexibles : modèle de Acikgoz et DeJong	42
II.6 Synthèse	43
II.7 Références	45

II.1 Études des risques sismiques : définitions préliminaires

II.1.1 Origines et échelles des séismes

Un séisme, ou un tremblement de terre, se traduit en surface par des vibrations du sol. La plupart des séismes sont dus aux déformations lentes de la couche externe de la Terre composée de grandes plaques tectoniques rigides. À la limite de ces plaques, des contraintes s'accumulent dans les roches qui se déforment jusqu'au point de rupture. Au-delà de ce point, ces plaques cassent brutalement le long d'une ou de plusieurs failles, en libérant une énergie considérable. Le point à partir duquel se développe la rupture s'appelle le foyer. La projection du foyer à la surface de la terre est l'épicentre. D'autres sources d'origine naturelle (par exemple les éruptions volcaniques) ou artificielle (par exemple le remplissage d'un barrage) peuvent également provoquer des séismes.

L'importance du séisme est évaluée par le biais de deux grandeurs : sa magnitude et son intensité. La magnitude correspond à l'énergie libérée au foyer du séisme qui dépend de la longueur de la faille activée et de l'importance du déplacement. Cette quantité permet de comparer les séismes entre eux. Cette notion a été définie en 1935 par Richter. Sur l'échelle de Richter, la magnitude d'une petite secousse sismique est de l'ordre de 4, celle d'un séisme grave est comprise entre 5 et 7 et celle d'un séisme potentiellement catastrophique est comprise entre 7 et 9. La valeur de la magnitude du séisme est indépendante de l'emplacement de l'épicentre, cette valeur ne varie donc pas quand on s'éloigne de celui-ci. Ce n'est théoriquement pas le cas pour l'échelle d'intensité MSK. Cette échelle, utilisée à partir de 1964 dont le nom provient de ses inventeurs Medvedev, Sponheuer et Kamik, définit les effets du séisme sur les Hommes et les constructions. Ainsi, plus on s'éloigne de l'épicentre plus les effets du séismes ont tendance à diminuer. La magnitude et l'intensité traduisent deux phénomènes différents, il n'y a donc pas de correspondance directe entre ces deux échelles. Les notions de base sur les séismes sont plus amplement définies dans de nombreuses publications. Elles peuvent notamment se trouver sur le site internet du Musée de Sismologie et collections de géophysique de Strasbourg [DENEKEN, 2012] ou dans le guide méthodologique de l'AFPS (l'Association Française du génie ParaSismique) [BLAY et collab., 2011].

II.1.2 Représentations de l'excitation sismique

L'étude du risque sismique regroupe de nombreuses spécialités qui étudient :

- l'aléa sismique (c'est-à-dire l'évaluation de la probabilité qu'un séisme d'intensité donnée se produise dans une région donnée pendant une période donnée) ;
- la propagation de l'onde dans le sol ;
- les effets de site (c'est-à-dire l'évaluation de l'amplification des ondes sismiques dans les couches géologiques proches de la surface de la Terre) ;
- l'interaction sol-structure ;
- les approches expérimentales et numériques du comportement du sol sollicité par des excitations sismiques ;
- les approches expérimentales et numériques du comportement de structures sollicitées par des excitations sismiques ;
- l'évaluation des risques sismiques (c'est-à-dire l'évaluation de la probabilité de défaillance d'une structure soumise à un séisme).

Le travail développé dans cette thèse s'inscrit dans ces deux dernières spécialités. Pour une structure (ou dans le cadre de cette thèse d'un équipement d'installation industrielle), le séisme constitue un chargement dynamique. Ce chargement peut être représenté dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. Ces représentations sont présentées dans les paragraphes suivants.

II.1.2.1 Représentation de l'excitation sismique dans le domaine temporel

Généralement, les mouvements de sol enregistrés lors d'un séisme sont représentés à travers l'accélération du sol, notée \ddot{u}_g , en fonction du temps, noté t . Durant un séisme, trois composantes de l'accélération du sol peuvent être enregistrées : deux composantes dans les directions horizontales Nord-Sud (NS) et Ouest-Est (OE), notées respectivement \ddot{u}_{gx} et \ddot{u}_{gy} , et une troisième composante dans la direction verticale Bas-Haut (BH) ou z , notée \ddot{u}_{gz} . Ces composantes sont considérées dans la pratique comme décorrélées. Cette dernière hypothèse est uniquement vraie au niveau du sol. Si on s'intéresse au calcul d'un équipement situé en haut d'un bâtiment, cette hypothèse n'est pas valide car les composantes de l'accélération sont couplées par la réponse du bâtiment. Le maximum atteint dans les deux directions horizontales est en général du même ordre de grandeur. Par ailleurs, l'accélération maximale mesurée dans la direction verticale est en moyenne égale à 2/3 de l'accélération maximale horizontale.

L'accélération d'un séisme peut être caractérisée grâce à divers indicateurs. Le plus couramment utilisé est le « Peak Ground Acceleration » noté PGA. Il est défini par la relation suivante :

$$PGA = \max_{t \in [0, T_f]} \sqrt{(\ddot{u}_{gx}(t))^2 + (\ddot{u}_{gy}(t))^2} \quad (\text{II.1})$$

où T_f est le temps correspondant à « la fin » de l'excitation. L'accélérogramme, c'est-à-dire la représentation de l'évolution temporelle de l'accélération du sol, du séisme d'El Centro qui a eu lieu en 1940 en Californie est représenté à la figure II.1. C'est le premier signal sismique de l'Histoire à avoir été enregistré. Le PGA de cette accélération est représenté par un point rouge, il est égal à 0,32 g.

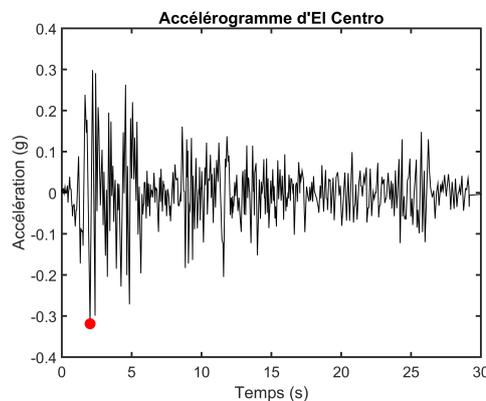


FIGURE II.1 – Évolution temporelle de la composante NS de l'accélération du sol mesurée lors du séisme d'El Centro (source : www.vibrationdata.com/elcentro.htm)

II.1.2.2 Représentation de l'excitation sismique dans le domaine fréquentiel

Le signal peut également être représenté dans le domaine fréquentiel, cette représentation est appelée spectre. Il existe plusieurs façon d'exprimer le signal dans ce domaine. Toutefois, dans le cadre de cette thèse, uniquement le spectre de réponse d'oscillateur (noté SRO) a été utilisé. Ainsi, seule cette représentation est présentée. Le SRO est une notion fondamentale en analyse sismique. Il permet de déterminer l'accélération (et donc la force) maximale à laquelle des bâtiments et des équipements seraient soumis en fonction de leurs fréquences caractéristiques. Si dans un premier temps la structure étudiée est assimilée à un oscillateur simple, alors seule la connaissance de la fréquence propre et de l'amortissement de la structure étudiée permet de déterminer le maximum de son déplacement au cours du temps. Ce maximum, multiplié par le carré de la pulsation de l'oscillateur, notée ω , constitue un point du SRO, ce dernier est donc exprimé en pseudo-accélération.

Le SRO est obtenu en calculant le maximum de la réponse au cours du temps d'une suite d'oscillateurs harmoniques amortis. Le SRO de l'accélérogramme d'El Centro amorti à 2% est représenté à la figure II.2.

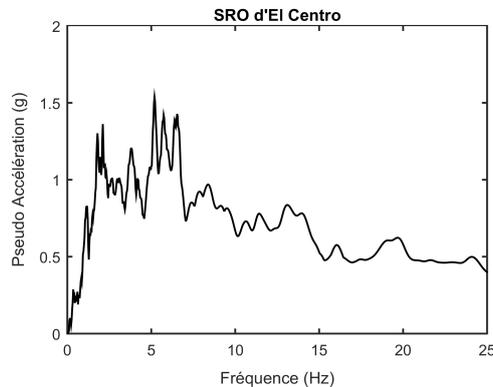


FIGURE II.2 – Spectre de la composante NS de l'accélération du sol lors du séisme d'El Centro

Les différentes transformations du signal sismique sont plus amplement définies dans le cours de Brochard et al. sur le comportement sismique des bâtiments et équipements [BROCHARD et col-lab., 1988].

II.2 Chronologie synthétique des études menées sur le comportement de structures libres sollicitées par une excitation sismique

L'empilement de paniers de stockage considéré dans cette thèse n'étant pas fixé au sol, il peut être considéré comme une structure libre, voire même comme un empilement de structures libres. Une chronologie récapitulative des principaux articles développés dans cet état de l'art est représentée sur la figure II.3. Sur cette frise, les études menées sur le comportement de blocs libres et rigides sont représentées en bleu tandis que les études menées sur le comportement de structures libres et flexibles sont représentées en violet. Pour ces dernières, nous avons distingué, par des cadres roses et des rectangles de fond vert, celles qui traitent des équations de mouvement et / ou celles qui abordent la question de la transition à l'impact au sortir d'une phase de rocking et des équations de transition associées (conservation du moment cinétique, de la quantité de mouvement horizontale, etc.). Cette frise indique donc que cette question demeure un sujet d'actualité dans la mesure où aucune réponse satisfaisante n'y a encore été apportée. Les recherches menées sur le comportement de blocs libres et rigides étant abondantes seuls les résultats des articles « précurseurs » d'Housner et d'Ishiyama sont présentés afin de rappeler les principaux phénomènes physiques qui ont trait au comportement des structures libres sous séismes (cf. partie II.3). Les recherches menées sur le comportement de structures libres et flexibles étant moins pléthoriques (à titre d'exemple, l'un des papiers précurseurs dans ce domaine, celui de Chopra et Yim, a été cité 156 fois contre 1 235 fois pour le papier d'Housner), nous avons fait le choix de les présenter de façon détaillée (cf. parties II.4 et II.5)

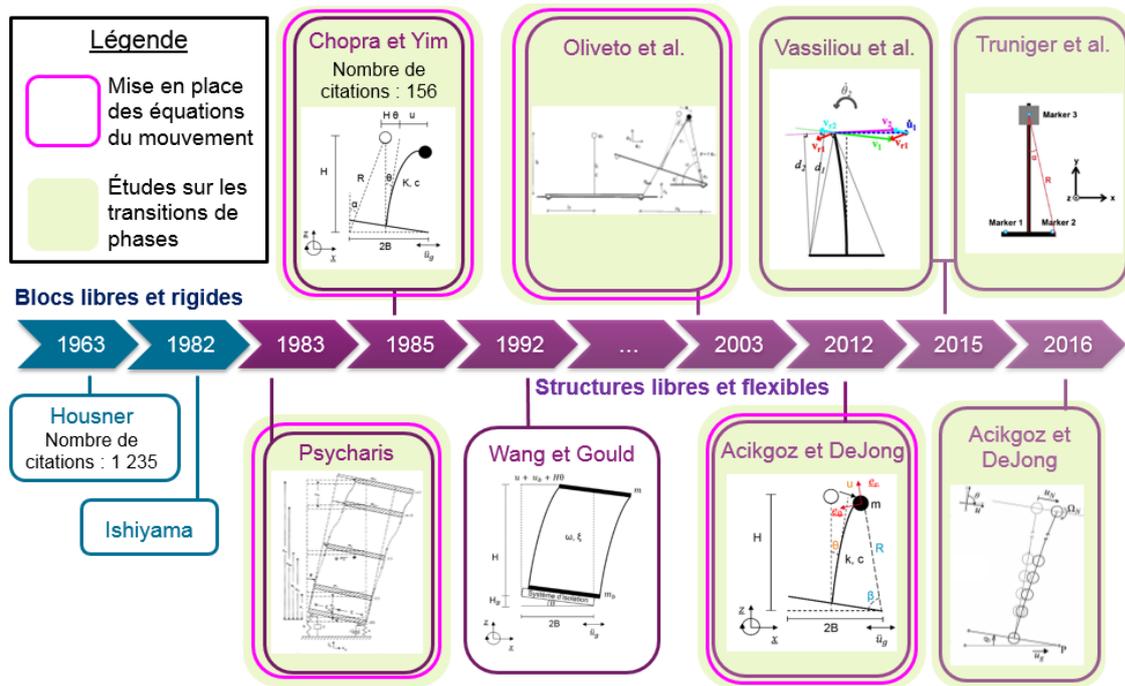


FIGURE II.3 – Frise chronologique représentant les principales études menées sur les structures libres. Le focus est fait sur les structures libres et flexibles pour lesquelles le nombre d’articles est beaucoup moins important (cette liste n’est pas exhaustive).

II.3 Études menées sur le comportement de blocs libres et rigides sollicités par une excitation sismique

Dans cette partie, les études menées sur le comportement de blocs libres et rigides sont présentées. Tout d’abord, les premières études réalisées sur le renversement, suite à une excitation sismique, de pierres tombales assimilées à des blocs libres et rigides sont présentées. Puis, le modèle de référence d’Housner qui a établi les équations du mouvement relatives au basculement d’un bloc libre et rigide, est exposé. Une synthèse succincte des différentes campagnes expérimentales menées sur les blocs libres et rigides est ensuite présentée. Pour finir, les critères établis par Ishiyama pour statuer sur leur stabilité sous séisme sont exposés.

II.3.1 Premières études menées sur le comportement de blocs libres et rigides sollicités par une excitation sismique

Cette section s’inspire de la thèse de Ma [MA, 2010].

Les premières études menées sur le comportement de blocs libres et rigides sollicités par une excitation sismique ont débuté au Japon dans les années 1800. Milne étudiait le renversement de pierres tombales suite à des tremblements de terre [MILNE, 1881]. En assimilant les pierres tombales à des blocs **rectangulaires**, **rigides** et **libres**, Milne a établi une corrélation entre l’accélération horizontale du sol et leur renversement. De cette corrélation, le critère de renversement de blocs libres et rigides sous excitation sismique suivant a été mis en place :

$$\ddot{u}_{g,pic} > g \frac{B}{H} \quad (II.2)$$

où $\ddot{u}_{g,pic}$ est le pic de l’accélération horizontale (qui est l’équivalent du PGA cependant cet indicateur n’a été défini qu’en 1977), g est l’accélération de la pesanteur, B et H sont respectivement les moitiés de la largeur et de la hauteur du bloc (ces grandeurs sont représentées sur la figure II.4).

Au début des années 1900, l'intensité des tremblements de terre était mesurée à partir de ce critère. Dans les années 1950, Ikegami et Kishinouye ont montré ses défauts en observant que certaines structures qui, d'après ce dernier, ne devaient pas se renverser s'étaient renversées et inversement (à titre indicatif les articles auxquels Ma fait référence sont [IKEGAMI et KISHINOUE, 1946], [IKEGAMI et KISHINOUE, 1947] et [IKEGAMI et KISHINOUE, 1950], mais il s'agit d'articles écrits en Japonais). Il s'avère que le critère proposé par Milne est un critère statique or l'interaction dynamique entre l'accélération du sol et le bloc doit être prise en compte. En considérant uniquement une force statique, le critère de Milne permet de déterminer une valeur d'accélération qui conduit à l'initiation du mouvement (le soulèvement) mais pas nécessairement au renversement.

II.3.2 Modèle de référence sur le comportement de basculement de blocs libres et rigides sollicités par une excitation sismique : modèle d'Housner

En 1963, Housner établit les équations du mouvement relatives au basculement d'un bloc rigide [HOUSNER, 1963] en s'appuyant sur les travaux de Kirkpatrick [KIRKPATRICK, 1927]. Par ailleurs, il établit des relations entre les caractéristiques de différentes excitations (c'est-à-dire le niveau de l'accélération, la durée de l'excitation, ...) et le renversement d'un bloc.

Dans cet article, Housner étudie le basculement d'un bloc libre en faisant l'hypothèse que le bloc est un solide rigide posé sur un plan rigide et qu'il n'y a pas de glissement entre le bloc et le support. Ce modèle est représenté sur la figure II.4. Par ailleurs, Housner considère que le problème est bidimensionnel (autrement-dit que le mouvement se réalise uniquement dans le plan muni du repère (O, x, z)). Le bloc analysé dans ce problème est de masse m , cette masse est supposée être répartie de façon homogène. L'élanement du bloc noté e est le rapport de la hauteur sur la largeur ($e = H/B$). L'angle caractérisant l'élanement est noté α . La demi-longueur de la diagonale et l'angle de rotation du bloc sont respectivement notés R et θ . Les moments d'inertie autour des points O et O' sont respectivement notés I_O et $I_{O'}$. Dans cet article, le bloc analysé est de forme rectangulaire ainsi, en posant $R = \sqrt{H^2 + B^2}$, le couple $(I_O, I_{O'})$ est égal à :

$$I_O = I_{O'} = \frac{4}{3} mR^2 \quad (\text{II.3})$$

Housner analyse le basculement du bloc :

- pour différentes conditions initiales (angle de rotation et vitesse) sans excitation extérieure;
- lorsque celui-ci est sollicité par une accélération horizontale constante;
- lorsque celui-ci est sollicité par une accélération horizontale sinusoïdale;
- lorsque celui-ci est soumis à une excitation sismique idéalisée (un « bruit blanc » non gaussien).

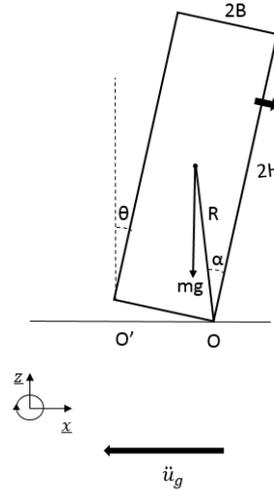


FIGURE II.4 – Représentation du modèle d’Housner lorsque le bloc est sollicité par une accélération horizontale

Dans un premier temps, les équations du mouvement de basculement « libre » sont développées. Puis, les principaux résultats obtenus pour l’excitation sismique idéalisée sont présentés.

II.3.2.1 Basculement « libre » d’un bloc libre et rigide

Équations du mouvement

Housner développe les équations différentielles du mouvement d’un bloc à partir du **théorème du moment cinétique**. Ces équations sont :

$$I_O \ddot{\theta} = \mp mgR \sin(\alpha \mp \theta) \quad (\text{II.4})$$

Les signes du dessus et du dessous correspondent respectivement aux rotations autour des points O et O'. Cette convention sera conservée dans tout ce manuscrit. Dans la suite de ce paragraphe, seules les équations correspondant aux angles $\theta > 0$ (rotations autour du point O) seront développées. Ces équations peuvent être simplifiées en faisant l’hypothèse que le bloc est **élançé**, cela revient à dire que $\alpha \ll 1$ car $\tan(\alpha) = \frac{B}{H}$. Dans ce modèle, le mouvement de basculement d’un bloc (et non le renversement) est étudié ainsi $|\theta| \ll \alpha$. Avec ces hypothèses, il est possible de linéariser les équations (II.4). De plus, avec l’équation (II.3), l’équation (II.4) pour les angles $\theta > 0$ devient :

$$\ddot{\theta} - \frac{3g}{4R} \theta = -\frac{3g}{4R} \alpha \quad (\text{II.5})$$

Il est possible d’intégrer cette équation en fixant les conditions initiales. En considérant l’angle θ_0 et sa dérivée $\dot{\theta}_0$ à l’instant $t=0$, la solution de l’équation (II.5) s’écrit :

$$\theta(t) = -\alpha + (\alpha + \theta_0) \cosh\left(\frac{\sqrt{3gt}}{2\sqrt{R}}\right) + \frac{2\dot{\theta}_0\sqrt{R}}{\sqrt{3g}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3gt}}{2\sqrt{R}}\right) \quad (\text{II.6})$$

Transition de phases et hypothèses sur les impacts entre le bloc et son support

Dans le modèle d'Housner, on considère la phase de rotation du bloc autour du point de contact O et la phase de rotation du bloc autour du point de contact O' comme deux phases distinctes. La transition entre ces deux phases est caractérisée par un coefficient de restitution d'énergie qui se détermine en faisant deux hypothèses. Premièrement, l'impact est supposé **instantané** : le point où a lieu l'impact entre le bloc et son support devient instantanément le centre de rotation de la phase suivante. Deuxièmement, l'impact est supposé **inélastique** : il n'y a pas de rebond lors de l'impact entre le bloc et son support. Ainsi, à partir de l'écriture de **la conservation du moment cinétique**, le coefficient de restitution d'énergie s'écrit sous la forme :

$$r = \left(\frac{\dot{\theta}_+}{\dot{\theta}_-} \right)^2 = \left(1 - \frac{mR^2}{I_0} (1 - \cos(2\alpha)) \right)^2 \quad (\text{II.7})$$

Exemples de résultats dans le cas d'un lâcher

À partir des équations II.6 et II.7, le basculement « libre » d'un bloc peut être calculé en fonction du temps. À titre d'illustration, nous avons réalisé ces calculs en utilisant la méthode des différences finies pour deux élançements différents égaux à 3 et à 7 avec comme conditions initiales $\theta_0 = 0.12 \text{ rad}$ et $\dot{\theta}_0 = 0 \text{ rad/s}$. Les paramètres g et B ont été respectivement fixés à 9.81 m.s^{-2} et 1 m . Les résultats de ces calculs sont respectivement représentés sur les figures II.5 et II.6. Les évolutions temporelles de l'angle de rotation θ et de la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ du bloc sont respectivement représentées sur les figures a et b. Ces calculs ont été réalisés à partir des équations linéarisées (résultats représentés en bleu) et à partir des équations non linéarisées (résultats représentés en rouge). Comme attendu, les réponses des équations linéarisées et non linéarisées coïncident lorsque l'élançement est important (c'est-à-dire lorsque l'angle α est petit). Pour le bloc de faible élançement, les réponses des équations linéarisées et non linéarisées présentent un décalage dans le temps du fait des approximations successives qui se cumulent à chaque impact sur le calcul de la vitesse d'impact.

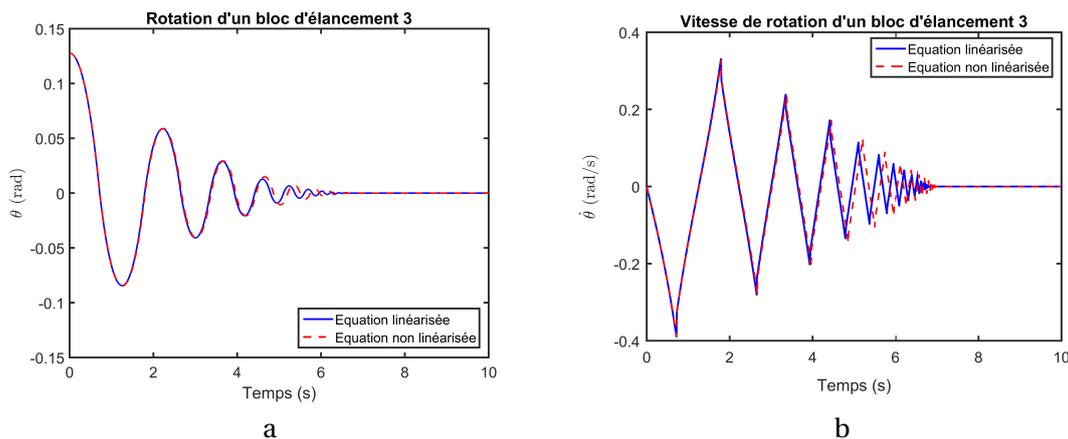


FIGURE II.5 – Évolutions temporelles des dix premières secondes de l'angle de rotation θ (a) et de la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ (b) pour un bloc d'élançement 3 pour $\theta_0 = 0.12 \text{ rad}$ et $\dot{\theta}_0 = 0 \text{ rad/s}$.

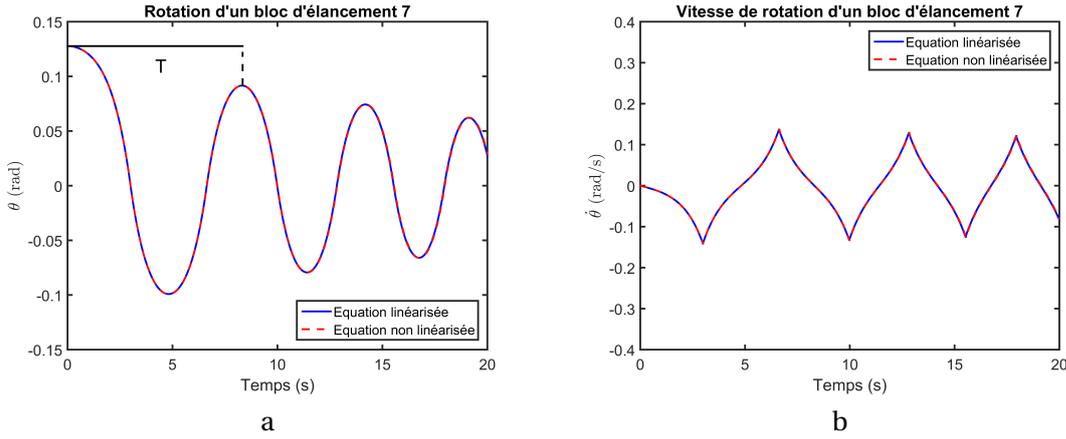


FIGURE II.6 – Évolutions temporelles des vingt premières secondes de l'angle de rotation θ (a) et de la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ (b) pour un bloc d'élanement 7 pour $\theta_0 = 0.12$ rad et $\dot{\theta}_0 = 0$ rad/s.

Dans l'article [HOUSNER, 1963], Housner définit la période du mouvement T qui est la durée d'un cycle complet d'une oscillation « libre » du bloc. Cette période est représentée sur l'évolution temporelle de l'angle de rotation du bloc (cf. figure II.6.a). Dans le cas où la vitesse à l'instant initial est nulle (lâcher), cette période s'écrit :

$$T = \frac{4}{p} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{1 - \frac{\theta_0}{\alpha}} \right) \quad (\text{II.8})$$

avec p le paramètre dit « fréquentiel » (car il est proportionnel au paramètre que l'on retrouve dans la fréquence d'oscillation d'un pendule simple) qui est égal à $\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{g}{R}}$. À partir des figures II.5 et II.6, on observe que plus l'élanement e du bloc est important plus la période T de basculement du bloc augmente : cette période est égale à 3 secondes pour un bloc d'élanement 3 contre 8 secondes pour un bloc d'élanement 7 pour un angle initial de 0.12 rad.

II.3.2.2 Résultats obtenus pour un « bruit blanc » non gaussien

Dans cette section, on ne développe pas les équations du mouvement sous sollicitation horizontale constante et sinusoïdale. On s'intéresse au résultat obtenu en assimilant l'excitation sismique à un « bruit blanc » non gaussien, dont la vitesse est définie par une succession de N sauts de vitesse $\pm \Delta v$ qui sont distribués entre les instants $t = 0$ et $t = (N-1) dt$, dt étant le pas de temps, avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ d'être positif ou négatif. Pour des structures au comportement non dissipatif (cas non physique pour lequel $r=1$), Housner obtient le critère statistique suivant :

$$\alpha = \sqrt{\frac{m R}{I_0 g}} (\Delta v) \sqrt{N} \quad (\text{II.9})$$

Lorsqu'il est satisfait, ce critère stipule que le bloc a une probabilité égale à 50 % de se renverser. Si α est plus grand que la quantité à droite de l'équation, la probabilité de renversement est inférieure à 50 % et est supérieure à 50 % si la quantité de droite est plus grande que α . Ce critère montre que l'énergie moyenne \bar{E} à fournir au système — qui est proportionnelle à $(\Delta v)^2 N$ — pour atteindre une probabilité de renversement de $\frac{1}{2}$ est donnée, pour les blocs très élancés, par :

$$\bar{E} \propto \frac{4}{3} \alpha^2 R g \propto \alpha^2 h g = \frac{b^2}{h} g \quad (\text{II.10})$$

Ainsi, on observe que \bar{E} augmente avec h lorsque α est constant (i.e. qu'il est plus difficile de renverser un bloc dont la hauteur est plus importante à élancement équivalent), mais diminue avec h si on fixe b . Physiquement, ce résultat traduit le fait que pour que le bloc se renverse, il faut à minima soulever son centre de gravité d'une hauteur $H_c = R - h$ pour l'amener à la verticale du point autour duquel se fait la rotation. On a, en effet :

$$H_c = R - h \propto h\alpha^2 = \frac{b^2}{h} \quad (\text{II.11})$$

Avec ce critère, Housner a mis en valeur un résultat « non intuitif » qui permet d'apporter des éléments de réponse sur la stabilité sous séismes de structures élancées comme, par exemple, les réservoirs d'eau surélevés.

En 2014, Makris montre que ce résultat « non intuitif » est essentiellement dû au fait que la résistance de la structure (i.e. le moment d'inertie) domine sur l'excitation sismique [MAKRIS, 2014]. Par ailleurs, les rôles concurrents entre la taille et l'élancement des structures autoportantes confondus par les ingénieurs et les scientifiques pendant de nombreuses décennies, ont été clarifiés en 2016 [MAKRIS et KAMPAS, 2016].

II.3.3 Synthèse des campagnes expérimentales menées sur les blocs libres et rigides sollicités par une excitation sismique

Ultérieurement à l'article d'Housner, de nombreuses campagnes expérimentales ont été menées sur des blocs d'élancements et de compositions variées. L'objectif de nombreuses d'entre elles étaient de mesurer expérimentalement la valeur du coefficient de restitution d'énergie « apparent » afin de la comparer à la valeur théorique. Ces comparaisons sont regroupées sous la forme d'un tableau présenté dans la partie bibliographique de la thèse de Ma publiée en 2010 [MA, 2010]. Ce tableau, présenté à la figure II.7, indique que les valeurs expérimentales du coefficient de restitution d'énergie sont en général plus importantes que les valeurs théoriques. Ce dernier résultat indique que dans le modèle d'Housner il y a plus d'énergie dissipée lors des impacts qu'en « réalité ». La différence entre les valeurs théoriques et expérimentales diminue toutefois lorsque l'élancement de la structure augmente. Le coefficient de restitution d'énergie calculé par Housner est donc représentatif pour des blocs très élancés.

Block Dimension			Apparent C.O.R. (r)	
H x B	H/B ratio	Material at the contact interface (model/sub-base)	Experimental	Theoretical (eq. 2-6)
200 x 100 mm ^a	2	Wood & steel	0.624	0.49
300 x 100 mm ^a	3	Wood & steel	0.774	0.723
400 x 100 mm ^a	4	Wood & steel	0.884	0.831
1000 x 250 mm ^b	4	Granite & granite	0.876	0.831
762 x 152 mm ^c	5	Aluminium & steel	0.856	0.888
950 x 190 mm ^d	5	Steel & concrete	0.844	0.888
1000 x 167mm ^b	6	Granite & granite	0.946	0.921
1000 x 125mm ^b	8	Granite & granite	0.956	0.954

^aOgawa (1977), ^bPeña et al. (2007), ^cAslam et al. (1980), ^dElGawady et al. (2006)

FIGURE II.7 – Comparaison entre les valeurs expérimentales et théoriques du coefficient de restitution d'énergie (apparent) pour des blocs de différents élancements et de différentes compositions - ref [MA, 2010]

D'autres campagnes expérimentales sur le comportement de structures libres et rigides ont eu lieu. Elles ne sont pas détaillées car la structure étudiée dans cette thèse est une structure libre et flexible. On peut en trouver une brève revue dans [MATHEY et collab., 2018].

II.3.4 Stabilité sismique de blocs libres et rigides : critères d'Ishiyama

En 1982, Ishiyama étudie le comportement de blocs libres présentant différents élancements ainsi que différentes largeurs et longueurs [ISHIYAMA, 1982]. Il considère que la **masse du bloc est unitaire** et fait l'hypothèse que le bloc **rigide et symétrique** est posé sur un plan **rigide et horizontal**. Dans la première partie de l'article [ISHIYAMA, 1982], Ishiyama identifie les différents mouvements que peut adopter un bloc suite à une excitation sismique. Il classe ces mouvements en six catégories : (i) le bloc reste stable, (ii) le bloc glisse, (iii) le bloc bascule, (iv) le bloc bascule et glisse, (v) le bloc se soulève verticalement et, pour finir, (vi) le bloc se soulève et a un mouvement de rotation. Puis, il établit les équations du mouvement correspondant à chacune de ces catégories ainsi que les conditions pour passer de l'une à l'autre. Dans la troisième partie de l'article, le mouvement du bloc est analysé au moyen de simulations numériques dans les cas suivants :

- lorsqu'aucune sollicitation extérieure n'est appliquée (réponse libre à condition initiale non nulle);
- lorsqu'ils sont sollicités par des excitations sinusoïdales;
- lorsqu'ils sont sollicités par des séismes.

À partir de ces différentes analyses, Ishiyama met en place des critères afin de statuer sur la stabilité d'un bloc libre et rigide.

II.3.4.1 Critères de stabilité d'un bloc libre et rigide sollicité par une excitation sismique

Les critères établis par Ishiyama pour statuer sur la stabilité d'un bloc libre et rigide sollicité par une excitation sismique sont :

- le bloc glisse si

$$a_0 = \max(|\ddot{u}_g(t)|) > g\mu \quad (\text{II.12})$$

- le bloc bascule si

$$a_0 = \max(|\ddot{u}_g(t)|) > \frac{g}{e} \quad (\text{II.13})$$

- le bloc se renverse si le critère donné par l'équation II.13 est respecté et si

$$v_0 = \max(|\dot{u}_g(t)|) \approx 0.4 * \sqrt{\frac{2gI_0}{R} \frac{1 - \cos(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} \quad (\text{II.14})$$

avec μ est le coefficient de frottement et $\ddot{u}_g(t)$ l'accélération sismique.

II.3.4.2 Validation des critères

Pour valider ses critères, Ishiyama s'intéresse à des blocs de géométrie variée soumis à des séismes. Il regroupe les réponses sismiques de ces blocs en trois catégories qui sont : (i) le bloc reste stable, (ii) le bloc bascule et (iii) le bloc se renverse. Un exemple de résultats est présenté à la figure II.8. Sur cette figure, les trois catégories de réponses sont respectivement matérialisées par des astérisques, des cercles vides et des cercles pleins en fonction des paramètres géométriques des blocs. Pour cet exemple, l'excitation sismique correspond aux composantes NS et BH de l'accélération du sol mesurées lors du séisme d'El Centro (la composante NS est représentée à la figure II.1). Sur cette figure, sont également tracés les critères définis par les équations II.13 et II.14.

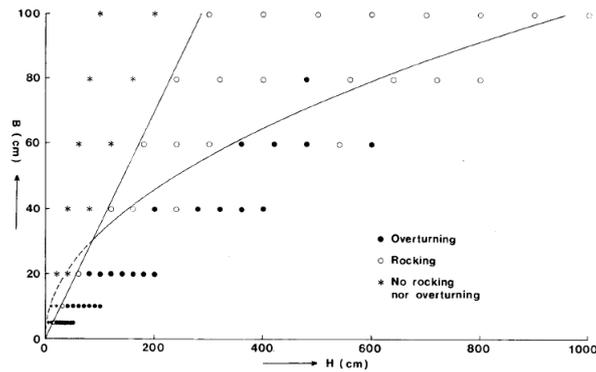


FIGURE II.8 – Mouvements des blocs soumis aux composantes NS et BH de l'accélération du sol mesurée lors du séisme d'El Centro en fonction de la hauteur H et de largeur B du bloc - ref [ISHIYAMA, 1982]

Comme le montre la figure II.8, les critères correspondant aux équations II.13 et II.14 ne sont pas toujours conservatifs. Ils sont néanmoins toujours utilisés de nos jours par les ingénieurs pour « évaluer » rapidement la possibilité de renversement d'une structure libre sans avoir à mettre en œuvre de calculs numériques complexes. En outre, on peut également vérifier que le résultat obtenu par Housner, à savoir que pour un élancement donné (par exemple, pour un élancement 10 qui correspond aux derniers points de chaque ligne), plus la hauteur est importante et plus le bloc est stable (i.e. moins susceptible de se renverser).

II.4 Études menées avant les années 2000 sur le comportement de structures libres, élancées et flexibles sollicitées par une excitation sismique

Dans cette partie, les études menées avant les années 2000 traitant du comportement de structures libres et flexibles sollicitées par une excitation sismique sont présentées. Dans ces études, les équations du mouvement qui concernent la phase de rocking (i.e. lorsque la base se soulève) sont des équations simplifiées. C'est à partir des années 2000 que les équations « exactes » du mouvement ont été développées à l'aide du formalisme de Lagrange, elles sont présentées dans la partie suivante.

Des années 1980 jusqu'aux années 2000, les études qui ont été menées sur la réponse sismique de structures libres et flexibles portaient principalement sur le comportement d'un bâtiment sollicité par une excitation sismique. Psycharis a étudié l'effet du soulèvement de la fondation d'un bâtiment sur sa réponse dynamique en considérant un modèle simplifié composé de n masses [PSYCHARIS, 1983]. Puis, Chopra et Yim ont étudié ce phénomène à l'aide d'un modèle simplifié semi-analytique composé d'une unique masse [CHOPRA et YIM, 1985]. En se basant sur ce modèle, Wang et Gould ont ensuite proposé l'étude d'un système d'isolation situé au niveau de la fondation d'un bâtiment afin « d'atténuer » sa réponse sismique [WANG et GOULD, 1993]. Ces trois études sont présentées dans les trois sections de cette partie.

II.4.1 Première étude du comportement de structures libres et flexibles sollicitées par une excitation sismique : modèle de Psycharis

En 1983, Psycharis étudie le comportement d'un bâtiment composé de n étages [PSYCHARIS, 1983]. Il s'intéresse à l'effet du soulèvement de la fondation du bâtiment sur sa réponse dynamique. Pour cela, il considère un modèle simplifié composé de $n + 1$ masses rigides reliées par des éléments sans masses. La première masse située au niveau du sol représente la fondation du bâtiment soutenue par des appuis modélisés par deux ressorts et deux amortisseurs visqueux. Cette modélisation de la fondation permet également de linéariser les équations du mouvement. Ce modèle est représenté sur la figure II.9.a. L'auteur fait l'hypothèse que le bâtiment est suffisamment élancé et que les masses sont suffisamment rigides pour qu'il n'y ait pas de glissement de la fondation par rapport au sol et que les masses ne se déforment pas. Ce modèle est composé de $n + 2$ degrés de liberté : les n déplacements des n étages du bâtiment qui ont lieu parallèlement à la fondation, la rotation de corps rigide du bâtiment dans le plan du mouvement et la translation verticale du centre de masse du bâtiment.

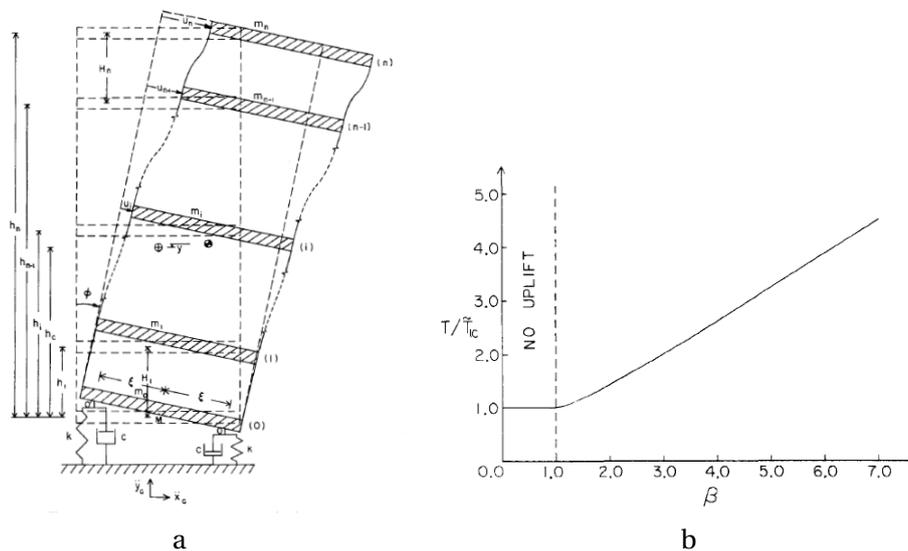


FIGURE II.9 – Représentation du modèle de Psycharis (a) et évolution de la période « fondamentale » normalisée $\frac{T}{T_{IC}}$ en fonction de l'impulsion normalisée β (b) - ref [PSYCHARIS, 1983]

Dans la première partie de l'article [PSYCHARIS, 1983], l'auteur établit les équations du mouvement du modèle. À l'instant initial, le bâtiment est au repos puis il est sollicité par une excitation sismique constituée de deux composantes : une horizontale et une verticale. Le mouvement est décomposé en deux phases : une phase pour laquelle la fondation ne se soulève pas et une phase pour laquelle la fondation se soulève. Les équations du mouvement ne sont pas détaillées dans ce manuscrit mais Psycharis les résout à l'aide de la méthode de recombinaison modale (cette méthode est présentée succinctement dans le paragraphe III.3.1.2). Dans cet article, Psycharis calcule deux solutions : une « exacte » et une « approchée ». Pour la première solution, l'ensemble des modes du modèle est pris en compte dans la résolution numérique. Pour la seconde solution, Psycharis fait l'hypothèse que c'est principalement le premier mode du bâtiment qui participe à la réponse sismique, ainsi seul celui-ci est pris en compte dans la résolution numérique.

II.4.1.1 Estimation de la période « fondamentale »

Psycharis réalise un premier cas d'étude pour lequel le bâtiment est non amorti et seul son premier mode est pris en compte dans la résolution. À l'instant initial, le bâtiment est dans la configuration où la fondation n'est pas soulevée, il est sollicité par une impulsion horizontale. Le basculement « libre » du bâtiment est analysé par le biais de la période « fondamentale » T du mouvement. Cette période est normalisée par la période sans soulèvement \tilde{T}_{IC} (correspondant au comportement linéaire du système complet) et est définie telle que :

$$\frac{T}{\tilde{T}_{IC}} = \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\right) + \sqrt{\beta^2 - 1} \right] \quad (\text{II.15})$$

où β est l'impulsion normalisée et est égale au ratio entre le maximum de l'angle de rotation du bâtiment obtenu par un calcul linéaire et l'angle de rotation critique c'est-à-dire l'angle à partir duquel la fondation se soulève.

La période « fondamentale » T normalisée par la période sans soulèvement \tilde{T}_{IC} est tracée en fonction de l'impulsion normalisée β et est représentée sur la figure II.9.b. L'auteur observe que la période « fondamentale » augmente avec la valeur de l'impulsion normalisée lorsque le bâtiment se soulève, à l'instar des résultats obtenus par Housner pour les structures rigides.

II.4.1.2 Exemple d'application du modèle sur un bâtiment réel

Psycharis utilise également son modèle pour calculer la réponse sismique d'un immeuble composé de neuf étages qui fait partie du campus de l'Institut de Technologie situé à Pasadena en Californie. La sollicitation sismique est la composante S16E de l'accélération du sol mesurée lors du tremblement de terre de San Fernando qui a eu lieu le 9 février 1971. Les équations du mouvement ont été résolues numériquement à l'aide de la méthode de Runge-Kutta-Gill et avec un pas de temps égal à 10^{-3} seconde. Psycharis calcule trois types de réponses : (i) la réponse « exacte » composée des cinq premiers modes du bâtiment, (ii) la réponse « approchée » composée uniquement du premier mode du bâtiment et (iii) la réponse exacte sans soulèvement (i.e. correspondant au comportement linéaire). Les paramètres des calculs (c'est-à-dire les fréquences, les amortissements des modes ainsi que les caractéristiques des ressorts et des amortisseurs de la fondation) sont indiqués dans l'article [PSYCHARIS, 1983]. Les évolutions temporelles des déplacements élastiques en tête du bâtiment ainsi que celles des déplacements verticaux du bâtiment sont représentées respectivement sur les figures II.10.a et II.10.b. Les résultats des trois calculs sont représentés respectivement à la première, à la deuxième et à la troisième ligne. Les soulèvements (i.e. les décollements) du dernier calcul ne sont pas représentés car ces derniers sont nuls. À partir de ces résultats l'auteur fait plusieurs observations. Tout d'abord, le soulèvement du bâtiment a un impact significatif sur sa réponse dynamique en raison de la réduction significative de sa fréquence « fondamentale » causée par le soulèvement de ce dernier. Toutefois, dans cet exemple le maximum des déplacements élastiques en tête n'est pas affecté par le soulèvement du bâtiment. Enfin, la réponse approchée est proche de la réponse exacte ainsi, c'est principalement le premier mode du bâtiment qui participe à sa réponse sismique.

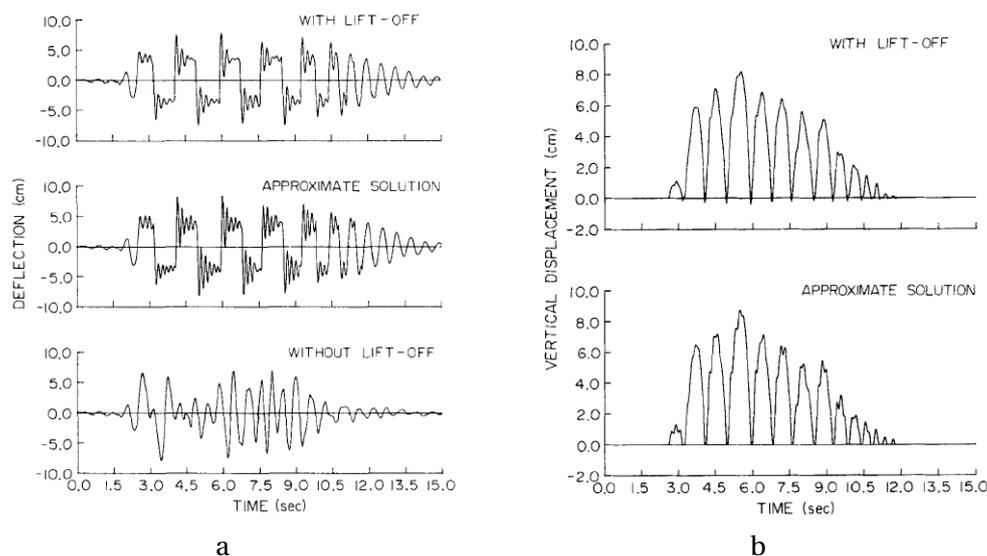


FIGURE II.10 – Évolutions temporelles des déplacements élastiques en tête du bâtiment (a) et des déplacements verticaux du bâtiment (b) - ref [PSYCHARIS, 1983]

II.4.1.3 Synthèse

À notre connaissance, Psycharis a été le premier auteur à établir les équations du mouvement d'un modèle simplifié d'une structure libre et flexible soumise à un séisme. Il insiste principalement sur l'augmentation de la période fondamentale « apparente » du mouvement en présence de rocking, résultat équivalent à celui obtenu par Housner pour les blocs rigides et élançés. Bien que son interprétation ne soit pas exhaustive, tous les phénomènes étudiés plus en détail par les auteurs qui lui succéderont sont présents dans les résultats de ses simulations.

II.4.2 Modèle de référence sur le comportement de basculement de structures libres et flexibles sollicitées par une excitation sismique : modèle de Chopra et Yim

En 1985, Chopra et Yim étudient la réponse sismique d'un bâtiment [CHOPRA et YIM, 1985]. De même que Psycharis, leur objectif est d'étudier l'effet du soulèvement de la fondation du bâtiment sur sa réponse dynamique. Pour cela, Chopra et Yim considèrent un modèle simplifié composé d'une masse rigide m placée à une hauteur H . L'élément qui relie la base et la masse est sans masse. La base de longueur $2B$ est rigide et sans masse, elle est posée sur un sol supposé rigide et non déformable. Par ailleurs, les auteurs font les hypothèses suivantes :

- la structure est suffisamment élançée pour qu'il n'y ait pas de glissement de la base par rapport au sol;
- la masse et la base sont suffisamment rigides pour qu'elles ne se déforment pas;
- la superstructure a un comportement linéaire élastique, elle possède une raideur K et un amortissement c ;
- le déplacement vertical de la masse est négligé ainsi le déplacement de la masse u est uniquement dans la direction horizontale;
- les déplacements sont des petits déplacements ainsi $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ peuvent être approximatés respectivement par θ et 1 ;
- $\frac{mg}{KH} \ll 1$;
- les effets $p - \delta$ sont négligeables, ainsi les équations du mouvement et des transitions de phases sont écrites dans la configuration de la structure non déformée.

Ce modèle est représenté sur la figure II.11. Il est représenté dans deux configurations différentes qui sont présentées dans la suite. Ce modèle est composé de deux degrés de liberté : un degré de liberté qui représente le déplacement élastique et horizontal de la masse noté u et un degré de liberté qui représente l'angle de rotation de la base noté θ .

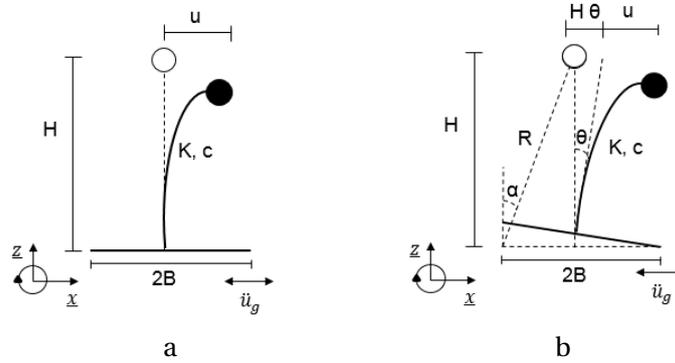


FIGURE II.11 – Représentation du modèle de Chopra et Yim lorsque la base reste en contact total avec le sol (a) et lorsque la base se soulève (b)

II.4.2.1 Mise en équations du problème

Le mouvement de cette structure est décomposé en deux phases : une phase où la base est en contact total avec le support (nommée phase 1 ou phase de full contact) et une phase où la base se soulève (nommée phase 2 ou phase de rocking). Ces deux phases sont respectivement représentées sur les figures II.11.a et II.11.b. Dans ce problème, la structure est sollicitée par un séisme constitué d'une composante horizontale notée \ddot{u}_g .

Équation de mouvement de la phase 1

Dans cette phase, seul le déplacement u de la masse évolue. L'équation du mouvement est l'équation différentielle ordinaire standard d'un oscillateur amorti à un degré de liberté définie par :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{u}_g(t) \quad (\text{II.16})$$

où $\omega = \sqrt{k/m}$ et $\xi = c/2m\omega$ sont la pulsation propre et le taux d'amortissement de l'oscillateur.

Équations du mouvement de la phase 2

Dans la phase 2, la base a un mouvement de rotation autour de l'une de ses deux extrémités. Avec l'hypothèse que l'angle θ est petit, le déplacement horizontal en tête associé à la rotation de corps rigide peut être approché par θH (car $\sin(\theta)H \approx \theta H$). Ainsi, une première équation du mouvement est obtenue à partir de l'équilibre des forces latérales agissant sur la masse à savoir :

$$\ddot{u} + H\ddot{\theta} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{u}_g(t) \quad (\text{II.17})$$

L'équilibre des moments des forces sur l'ensemble du système permet d'obtenir les deuxièmes équations du mouvement :

$$I_{fl}\ddot{\theta} \pm mgR\sin(\alpha \mp \theta) + m\ddot{u}H + m\ddot{u}_gR\cos(\alpha \pm \theta) = 0 \quad (\text{II.18})$$

avec I_{fl} le moment d'inertie de la structure non déformée. On rappelle que les signes du dessus et du dessous correspondent respectivement aux rotations autour des points O et O'. Sachant que $I_{fl} = mR^2$ et en faisant l'hypothèse que les angles α et θ sont petits, les équations (II.18) s'écrivent :

$$\ddot{u} + \frac{R^2}{H^2}(H\ddot{\theta}) = -\ddot{u}_g(t) \mp g\frac{B}{H} \quad (\text{II.19})$$

Les équations (II.17) et (II.19) sont les équations du mouvement de la phase 2. En calculant (II.17)-(II.19), le terme $H\ddot{\theta}$ est éliminé. On obtient ainsi l'équation du mouvement de la masse m lors de la phase de soulèvement (phase 2) à savoir :

$$\ddot{u} + 2\zeta\lambda\dot{u} + \lambda^2 u = - \left[\ddot{u}_g(t) \mp g \frac{H}{B} \right] \quad (\text{II.20})$$

où la pulsation propre λ et le taux d'amortissement ζ lors de la phase 2 sont définis tels que :

$$\lambda = \omega \frac{R}{B} \quad \text{et} \quad \zeta = \xi \frac{R}{B} \quad (\text{II.21})$$

Pour des structures élancées, c'est-à-dire lorsque $B \ll H$ ces termes sont approximativement égaux à $\lambda \simeq \omega \frac{H}{B}$ et $\zeta \simeq \xi \frac{H}{B}$. Les relations II.21 sont un des résultats novateurs de l'article [CHOPRA et YIM, 1985]. La première relation met en évidence que la fréquence « fondamentale » (qui n'est pas la fréquence de rocking) de la phase 2 est supérieure à celle de la phase 1. La deuxième relation indique cette même tendance mais pour le taux d'amortissement. Ce résultat caractéristique de ce type de structure est illustré dans le paragraphe II.4.2.2.

Critère de transition de la phase 1 à la phase 2

À l'instant initial, la base est en contact total avec le support (phase 1). La base se soulève lorsque le moment dynamique \mathcal{M} induit par l'accélération absolue de la masse est supérieur au moment « résistant » dû à la pesanteur qui est égal à mgB (si on néglige la déformation de la superstructure). Le critère de transition entre la phase 1 et la phase 2 s'écrit donc :

$$\mathcal{M} > mgB \Leftrightarrow mH | \ddot{u} + \ddot{u}_g(t) | > mgB \quad (\text{II.22})$$

Pour les structures non amorties, le moment dynamique \mathcal{M} est équilibré par la raideur de la superstructure, c'est-à-dire kHu_c avec u_c le déplacement critique. En injectant cette expression dans le critère (II.22), on obtient l'expression du déplacement critique u_c à savoir :

$$u_c = \frac{mgB}{kH} = \frac{gB}{\omega^2 H} \quad (\text{II.23})$$

Ainsi, le critère de transition de la phase 1 à la phase 2 pour les structures non amorties revient à $u > u_c$.

Équations de transition de la phase 2 à la phase 1

Dans la phase 2, la structure a un mouvement de rotation autour de l'une des extrémités de sa base. Ce mouvement persiste jusqu'à ce que l'autre extrémité de la base entre en contact avec le sol (le renversement de la structure n'est pas pris en compte dans ce modèle). À la fin de cette phase, les auteurs font trois hypothèses :

- l'impact entre la base et le support est supposé **parfaitement inélastique** (il n'y a pas de rebond) ;
- **la vitesse verticale de la structure est complètement dissipée** lors de l'impact ;
- **la quantité de mouvement** horizontale de la masse de la structure est conservée lors de l'impact :

$$(\dot{u})_+ = (\dot{u} + H\dot{\theta})_- \quad (\text{II.24})$$

avec $(\dot{u} + H\dot{\theta})_-$ et $(\dot{u})_+$ les vitesses horizontales de la masse avant et après l'impact.

Du fait de la deuxième hypothèse :

$$\theta_+ = \dot{\theta}_+ = 0 \quad (\text{II.25})$$

avec θ_+ et $\dot{\theta}_+$ la rotation et la vitesse de rotation de la base après impact. La base reste ainsi en contact total avec le sol autrement-dit la phase de rocking est suivie d'une phase de full contact.

II.4.2.2 Exemple de basculement « libre » d'une structure libre et flexible

Nous avons implémenté le modèle de Chopra et Yim par la méthode des différences finies. Nous présentons ici un exemple d'application de ce modèle afin d'illustrer ses capacités et ses limites. Les paramètres de la structure traitée sont les suivants : l'élanement est égal à 10 et sa fréquence propre est égale à 5 Hz. Les conditions initiales sont : $\theta_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 0, u_0 = 0, \dot{u}_0 \neq 0$ et $\ddot{u}_g = 0$.

Deux configurations ont été considérées :

- la première avec un taux d'amortissement nul,
- la seconde avec un taux d'amortissement égal à 5%.

Pour chaque configuration, deux calculs ont été réalisés, le premier en considérant que la base peut se soulever et le second en considérant qu'elle reste fixée au sol. Les résultats de ces calculs sont présentés sur les figures II.12 et II.13. Comme dans l'article, la vitesse initiale a été choisie de sorte que pour le système non amorti (figure II.12), la dissipation d'énergie à chaque impact soit minimale voire quasi-nulle. La figure II.13 correspond aux résultats de la structure amortie soumise à la même vitesse initiale. Les évolutions temporelles des déplacements élastiques et horizontaux u de la masse normalisés par le déplacement critique u_c sont représentées sur les figures II.12.a et II.13.a. Les courbes en bleu ciel et en bleu foncé représentent respectivement le cas où la base est fixée au sol (le mouvement de la masse est donc uniquement composé de la phase 1) et le cas où la base peut se soulever (le mouvement de la masse est donc composé des phases 1 et 2). Pour le cas où la base peut se soulever, les évolutions temporelles des déplacements horizontaux $H\theta$, induits par la rotation de corps rigide, normalisés par le déplacement critique u_c sont représentées sur les figures II.12.b et II.13.b par des courbes vertes.

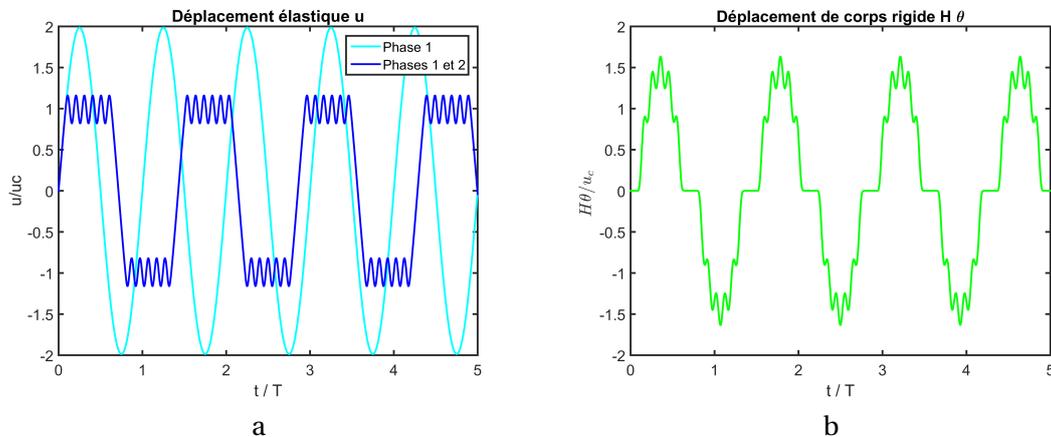


FIGURE II.12 – Évolutions temporelles des déplacements horizontaux de la masse m : déplacement élastique u (a) et déplacement horizontal $H\theta$ lié à la rotation de corps rigide (b) d'une structure flexible non amortie

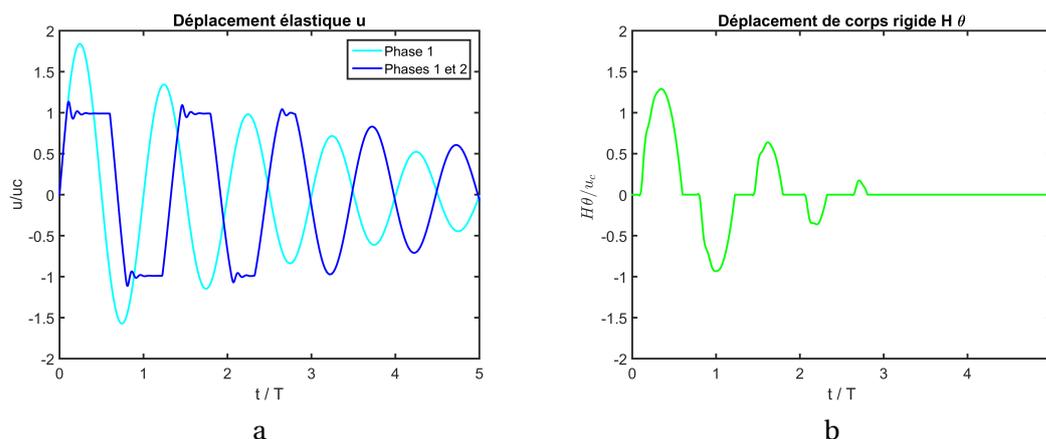


FIGURE II.13 – Évolutions temporelles des déplacements horizontaux de la masse m : déplacement élastique u (a) et déplacement horizontal $H\theta$ lié à la rotation de corps rigide (b) d’une structure flexible amortie ($\xi = 0.05$)

Les résultats obtenus confirment un phénomène décrit par Chopra et Yim et précédemment par Psycharis : le soulèvement de la base de la structure a un impact significatif sur sa réponse dynamique. Psycharis s’était intéressé au mouvement de rocking (à travers l’étude de sa fréquence), tandis que Chopra et Yim s’attachent au phénomène vibratoire qui se superpose au mouvement de rocking, à savoir à l’oscillation de la superstructure dont la fréquence et l’amortissement correspondent respectivement, aux produits de la fréquence et de l’amortissement de la structure lorsque la base est encastrée par la valeur de l’élancement. Ainsi, dans l’exemple traité, la fréquence de la superstructure en phase de rocking est 10 fois plus importante que celle de la structure à base encastrée. En présence d’amortissement, les oscillations s’atténuent plus rapidement en phase de rocking du fait également de l’augmentation du taux d’amortissement. Dans le cas présent il est de 50% en phase de rocking contre 5% en phase de full contact. Ces résultats font apparaître que le déplacement relatif u de la masse reste quasiment constant et égal à u_c pendant la phase de rocking.

II.4.2.3 Réponse d’une structure libre et flexible sollicitée par une excitation sismique

Chopra et Yim ont également étudié la réponse d’une structure sollicitée par un séisme. Dans cet exemple, la sollicitation sismique est la composante NS de l’accélération du sol mesurée lors du séisme d’El Centro et représentée à la figure II.1. De nouveau, l’élancement de la structure a été fixé à 10. La fréquence propre et le taux d’amortissement de la structure ont été respectivement fixés à 1 Hz et à 5%. La réponse de la structure a été calculée dans le cas où la base peut se soulever et dans le cas où la base est fixée au sol. Les résultats de ces calculs sont présentés sur la figure II.14.a. Les évolutions temporelles des déplacements élastiques et horizontaux u de la masse et du déplacement horizontal $H\theta$ lié à la rotation de corps rigide sont respectivement présentées à la première et à la deuxième ligne. Ces deux grandeurs sont normalisées par le déplacement critique u_c . Cette figure étant tirée de l’article, certaines notations sont différentes : les grandeurs h et b de l’article correspondent aux grandeurs H et B de ce manuscrit. De nouveau, les auteurs observent que la réponse de la structure lorsque la base peut se soulever est différente de celle où la base est fixée au sol. Cette différence apparaît essentiellement au voisinage des six premières secondes. Par ailleurs, Chopra et Yim réalisent deux autres calculs :

- un pour lequel la structure est semblable au premier calcul mais où le taux d’amortissement est nul ;
- un pour lequel la période propre, le taux d’amortissement et l’élancement de la structure sont fixés à 0.12 seconde, 5% et 5.

Les évolutions temporelles des déplacements élastiques et horizontaux u de la masse normalisés par le déplacement critique u_c de ces deux calculs sont respectivement présentées à la première et à la troisième ligne de la figure II.14.b. Concernant le premier calcul sismique, les résultats sont présentés à la deuxième ligne de la figure II.14.b. Pour ces trois calculs, le déplacement élastique de la masse lorsque la base peut se soulever est représenté en trait continu, le déplacement élastique de la masse lorsque la base est fixée au sol est représenté en pointillés. Pour le cas où l'élançement de la structure est égal à 10, les déplacements élastiques u de la masse sont fortement diminués lorsque la base peut se soulever (cf. les deux premières lignes de la figure II.14.b). A contrario, les auteurs observent le phénomène inverse lorsque l'élançement de la structure est plus faible. En effet, dans le cas où l'élançement de la structure est égal à 5, le maximum du déplacement élastique de la masse lorsque la base peut se soulever est supérieur à celui pour lequel la base est fixée au sol (cf. la troisième ligne de la figure II.14.b).

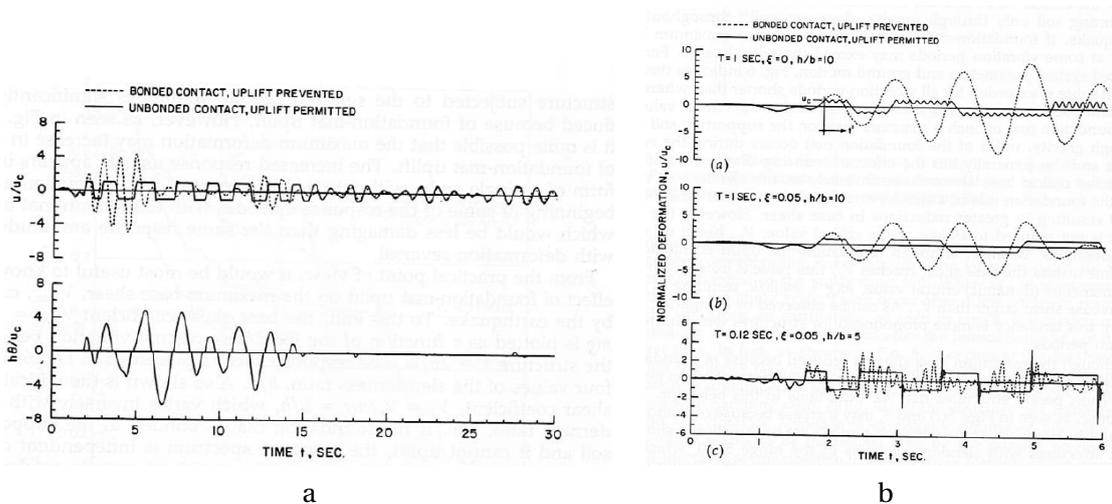


FIGURE II.14 – Évolutions temporelles des déplacements horizontaux et élastiques u de la masse et du déplacement horizontal $H\theta$ de la masse lié à la rotation de corps rigide du premier calcul sismique (a) et évolutions temporelles des déplacements horizontaux et élastiques u des trois calculs sismiques (b) - ref [CHOPRA et YIM, 1985]

II.4.2.4 Synthèse

À l'instar de Psycharis, Chopra et Yim ont étudié l'effet du soulèvement de la fondation d'un bâtiment sur sa réponse dynamique. En choisissant de traiter un cas simplifié, composé d'une superstructure dotée d'une unique masse, et en écrivant un système d'équations simplifiées pour la phase de rocking (les équations exactes seront développées ultérieurement à l'aide du formalisme de Lagrange), les auteurs ont mis en évidence les augmentations de la fréquence et du taux d'amortissement du mouvement élastique de la masse qui se produit lors du mouvement de rocking. C'est un résultat novateur de l'article de Chopra et Yim. En étudiant la réponse sismique du modèle au séisme d'El Centro, ils ont également observé que pour les structures élancées, le déplacement total de la masse est fortement atténué en présence de soulèvement. Ce n'est pas le cas des structures faiblement élancées. Ce dernier résultat, ou plutôt son importance, a cependant été remis en cause ultérieurement par Oliveto et al. [OLIVETO et collab., 2003] et Acikgoz et DeJong [ACIKGOZ et DEJONG, 2012] ont proposé un autre modèle pour traduire la transition à l'impact au sortir d'une phase de rocking, lequel a également remis été en cause par Vassiliou et al [VASSILIOU et collab., 2015]. Nous y reviendrons.

II.4.3 Combinaison entre les mouvements de glissement et de basculement pour les structures libres et flexibles sollicitées par une excitation sismique : Modèle de Wang et Gould

En 1992, Wang et Gould étudient la réponse d'un bâtiment sollicité par une excitation sismique afin de développer des constructions para-sismiques [WANG et GOULD, 1993]. Ultérieurement à cette étude, il a été montré que pour les structures élancées, le soulèvement de la fondation permet de réduire les déplacements en tête du bâtiment. Néanmoins, le soulèvement de la fondation peut générer des impacts qui peuvent solliciter des modes à hautes fréquences du bâtiment. Pour éviter ce phénomène, un système d'isolation composé d'appuis glissants peut être utilisé pour absorber l'énergie du tremblement de terre. Ainsi, Wang et Gould étudient la réponse sismique d'un bâtiment posé sur un système d'isolation, lui-même en contact avec le sol. Un modèle analytique simplifié du bâtiment est proposé (cf. figure II.15). Ce modèle est composé de deux masses notées m_b et m , respectivement situées à la base et en tête de la superstructure. Cette dernière est supposée être **élancée** et **flexible** et possède un **comportement linéaire**. Sa pulsation propre est notée ω et son taux d'amortissement ξ . Les mouvements de glissement et de soulèvement ont lieu à différents niveaux de l'ensemble « bâtiment-système d'isolation » : le bâtiment peut glisser par rapport à son système d'isolation et le système d'isolation peut se soulever (toutefois le soulèvement du bâtiment par rapport au système d'isolation et le glissement du système d'isolation par rapport au sol sont nuls). Le système d'isolation est supposé **rigide**. Les hauteurs de la structure et du système d'isolation sont respectivement notées H et H_B . Ce modèle possède trois degrés de liberté : les déplacements horizontaux des deux masses m et m_b notés u et u_b ainsi que la rotation du système d'isolation noté θ . **Les déplacements verticaux des masses sont négligés**. Pour finir, les auteurs font l'hypothèse que le support et le système d'isolation sont directement reliés ainsi **l'excitation sismique est directement appliquée horizontalement sur le système d'isolation**.

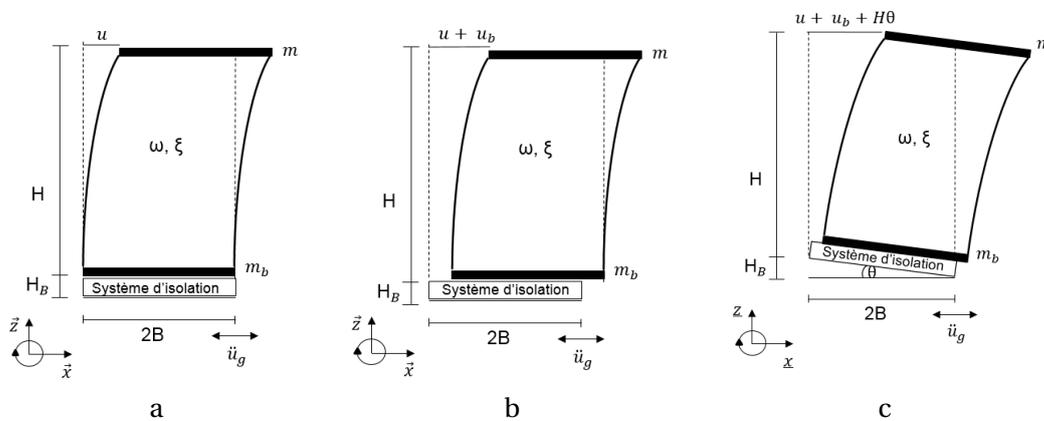


FIGURE II.15 – Représentation du modèle de Wang et Gould lorsque l'ensemble « structure-système d'isolation » ne présente ni glissement ni soulèvement (a), lorsque la structure glisse par rapport à son système d'isolation (b) ainsi que lorsque la structure glisse par rapport à son système d'isolation et que le système d'isolation se soulève (c)

II.4.3.1 Mise en place des équations du problème

Le mouvement de cette structure se décompose en deux phases « principales » : une phase où le système d'isolation reste en contact total avec le sol (nommée phase 1 ou phase de full contact) représentée sur les figures II.15.a et II.15.b et une phase où le système d'isolation se soulève (nommée phase 2 ou phase de rocking) représentée sur la figure II.15.c.

Équations du mouvement de la phase 1

Au cours de cette phase le système possède deux degrés de liberté u et u_b . Les équations du mouvement correspondant à cette phase sont :

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \ddot{u}_b + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u &= -\ddot{u}_g \\ (1 - \chi)\ddot{u} + \ddot{u}_b + 2\xi_b\omega_b\dot{u}_b + \omega_b^2 u_b + f &= -\ddot{u}_g \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

où χ est le ratio des masses tel que $\chi = m_b/(m_b + m)$ et f est la force de frottement normalisée par le poids de la structure telle que $f = \mu_s g z$ avec μ_s le coefficient de frottement entre le système d'isolation et la masse m_b et z le facteur décrivant les conditions de séparation et d'adhérence de la masse m_b par rapport au système d'isolation.

Équations du mouvement de la phase 2

Au cours de cette phase le système possède trois degrés de liberté u , u_b et θ . Les équations du mouvement correspondant à cette phase sont :

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \ddot{u}_b + H\ddot{\theta} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u &= -\ddot{u}_g \\ (1 - \chi)\ddot{u} + \ddot{u}_b + (1 - \chi + \chi\kappa)H\ddot{\theta} + 2\xi_b\omega_b\dot{u}_b + \omega_b^2 u_b + f &= -\ddot{u}_g \\ (1 - \chi)\ddot{u} + (1 - \chi + \chi\kappa)\ddot{u}_b + (1 - \chi + \alpha^2 + \chi\kappa^2)H\ddot{\theta} &= \mp\alpha g - (1 - \chi + \chi\kappa)\ddot{u}_g \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

où κ est le rapport des hauteurs tel que $\kappa = H_B/(H + H_B)$.

Critère de transition de la phase 1 à la phase 2

Le critère de transition de la phase 1 à la phase 2 proposé par Wang et Gould est similaire à celui de Chopra et Yim. L'inéquation de transition de la phase 1 à la phase 2 s'écrit :

$$|m(\ddot{u} + \ddot{u}_b + \ddot{u}_g)H + m_b(\ddot{u}_b + \ddot{u}_g)H_b| \geq (m + m_b)gB \quad (\text{II.28})$$

Équations de transition de la phase 2 à la phase 1

À la fin de la phase 2, le système d'isolation entre en contact avec le sol. Les auteurs font les mêmes hypothèses que Chopra et Yim, ainsi les équations de transition de la phase 2 à la phase 1 sont les équations II.25 et II.24. Les termes $\dot{u}_{b,-}$ et $\dot{u}_{b,+}$ n'apparaissent pas dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement horizontale de la masse car les auteurs font l'hypothèse que le système d'isolation n'est pas affecté lors de l'impact. Par ailleurs, suite à cet impact le système d'isolation ne glisse pas par rapport au sol (i.e. les déplacements relatifs du système par rapport au sol sont nuls).

II.4.3.2 Réponse d'une structure libre et flexible sollicitée par une excitation sismique

Wang et Gould ont étudié la réponse de l'ensemble « bâtiment-système d'isolation » sollicité par un séisme. Dans cet exemple, la sollicitation sismique est la composante NS de l'accélération du sol mesurée lors du séisme d'El Centro représentée à la figure II.1. L'angle α caractérisant l'élanement de la structure est fixé à 0,15, l'élanement de la structure est donc environ égal à 6,7. Les rapports des masses χ et des hauteurs κ sont fixés à 0,10. La fréquence propre et le taux d'amortissement de la structure sont respectivement fixés à 1 Hz et à 5%. Les auteurs ont réalisé deux calculs : un où seul le mouvement du soulèvement est pris en compte et un où les mouvements de soulèvement et de glissement sont pris en compte. Les résultats de ces calculs sont représentés à la figure II.16. En haut est représenté le déplacement élastique u de la masse et en bas est représenté le déplacement total de la masse c'est-à-dire le déplacement élastique de la masse u plus le déplacement lié à la rotation de corps rigide $H\theta$. Les résultats des deux calculs sont respectivement

représentés en noir et en gris. À partir de ces résultats les auteurs concluent que le glissement induit par le système d'isolation permet d'absorber de l'énergie. Les déplacements horizontaux en tête ainsi que le soulèvement du bâtiment sont grandement réduits (jusqu'à 60% pour le déplacement total). Par ailleurs, les déplacements horizontaux et élastiques u de ces deux calculs indiquent que le système d'isolation proposé par les auteurs, a permis de réduire les impacts.

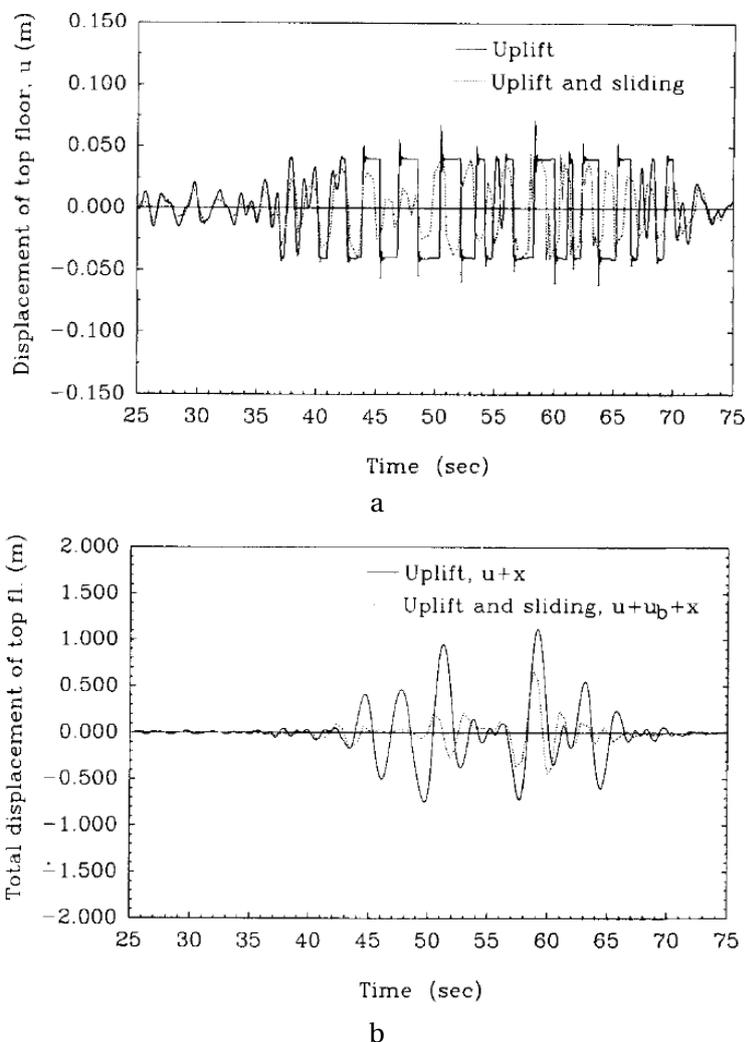


FIGURE II.16 – Évolutions temporelles des déplacements horizontaux et élastiques (a) et totaux (b) en tête du bâtiment - ref [WANG et GOULD, 1993]

II.4.3.3 Synthèse

De façon semblable à Chopra et Yim, Wang et Gould ont étudié la réponse sismique d'un bâtiment dans le cas où la fondation du bâtiment peut se soulever. Les auteurs proposent un système d'isolation composé d'un appui glissant afin de réduire les impacts qui ont lieu suite au soulèvement de la fondation. Wang et Gould ont comparé la réponse sismique d'un bâtiment avec et sans ce dispositif. Comme attendu, la prise en compte du mouvement du glissement permet de réduire significativement les déplacements en tête. Ce résultat est important car il indique que lors du développement des modèles simplifiés représentant le comportement de structures libres et flexibles sous excitation sismique, la non prise en compte du phénomène de glissement peut conduire à un modèle conservatif (du point de vue du déplacement en tête, sous réserve que le problème soit correctement posé). En effet, en pratique, il est inévitable que de légers glissements se produisent entre la structure et son support, sauf pour des conditions d'interface très particulières.

II.5 Études complémentaires et comparaisons des méthodes de modélisation de transition à l'impact du comportement de structures libres et flexibles sollicitées par une excitation sismique

En 2003, Oliveto et al. complètent le modèle analytique proposé par Chopra et Yim [OLIVETO et collab., 2003]. Tout d'abord, ils établissent les équations du mouvement à partir des équations de Lagrange. Ainsi, ils établissent les équations exactes du mouvement où les termes de couplage non linéaires apparaissent. Par ailleurs, ils proposent une autre approche pour traiter la transition à la fin de la phase de rocking car ils observent qu'en appliquant le modèle de transition à l'impact proposé par Chopra et Yim, les déformations élastiques peuvent dans certains cas être « importantes » (par exemple pour une structure d'élanement 5, cf. figure II.14). Les travaux menés par Oliveto et al. ont ensuite été repris et approfondis par Acikgoz et DeJong [ACIKGOZ et DEJONG, 2012] qui ont comparé la réponse d'une structure libre et flexible à celle d'une structure libre et rigide ainsi qu'à celle d'un oscillateur élastique linéaire. Parallèlement, Vassiliou et al. [VASSILIOU et collab., 2015] proposent une autre approche pour modéliser la transition à l'impact car l'approche proposée par les auteurs précédents exhibent des phénomènes qui ne sont pas observés lors des essais présentés dans [TRUNIGER et collab., 2015]. Ces deux modèles de transition à l'impact ainsi que la comparaison de ces modèles sont présentés dans les trois premières sections de cette partie. Récemment, en 2016, Acikgoz et DeJong [ACIKGOZ et DEJONG, 2016] ont établi les équations du mouvement d'un modèle composé d'un ensemble de masses. Ce modèle est également présenté dans la quatrième section de cette partie et c'est à partir de celui-ci que le modèle semi-analytique de cette thèse a été développé.

II.5.1 Modèle de transition à l'impact ADJex : Modèle de Acikgoz et DeJong

Le modèle proposé par Acikgoz et DeJong est représenté sur la figure II.17.

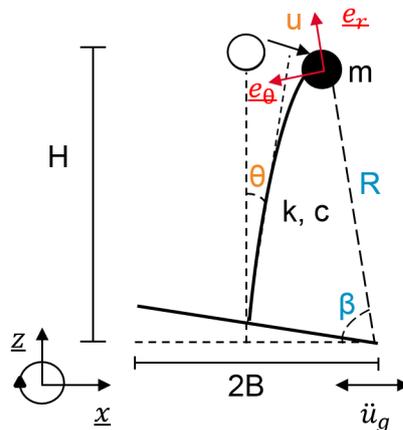


FIGURE II.17 – Représentation du modèle de Acikgoz et DeJong lors de la phase de rocking

II.5.1.1 Mise en place des équations du problème

Dans ce modèle, le problème est défini à travers deux jeux de paramètres : les paramètres classiques (u, θ) et les paramètres généralisés (R, β).

Équivalence entre les paramètres classiques (u, θ) et les paramètres généralisés (R, β)

Sur la figure II.17, ces paramètres sont respectivement représentés en orange et en bleu. Les paramètres classiques (u, θ) sont semblables aux paramètres utilisés par Chopra et Yim. Toutefois, dans ce problème le déplacement de la masse u est parallèle à la base (et non horizontal comme dans le modèle de Chopra et Yim). Les paramètres généralisés sont R qui est la distance entre le centre de rotation et la masse et β qui est l'angle entre le support horizontal et la droite reliant le centre de rotation et la masse. L'équivalence entre ces deux jeux de paramètres est géométrique et est donnée par les équations suivantes :

$$\theta = \beta \mp \arcsin(H/R) \quad (\text{II.29})$$

et

$$u = \pm B \mp \sqrt{R^2 - H^2} \quad (\text{II.30})$$

Comme dans le modèle de Chopra et Yim, le mouvement de cette structure est décomposé en deux phases : une phase de full contact (phase 1) et une phase de rocking (phase 2).

Équation du mouvement de la phase 1

L'équation du mouvement de la phase 1 est identique à celle du modèle de Chopra et Yim (cf. équation II.16).

Équations du mouvement de la phase 2

Les équations du mouvement de la phase 2 sont obtenues à l'aide des équations de Lagrange qui sont présentées dans le paragraphe III.4.1. Les équations du mouvement lors de la phase 2 sont :

$$\ddot{R} = \omega^2 R \left(\frac{B}{\sqrt{R^2 - H^2}} - 1 \right) - \frac{2\xi\omega R^2}{R^2 - H^2} \dot{R} + R\dot{\beta}^2 \pm \ddot{u}_g \cos(\beta) \mp g \sin(\beta) \quad (\text{II.31})$$

$$\ddot{\beta} = \frac{-2\dot{R}\dot{\beta}}{R} \mp \frac{g}{R} \cos(\beta) + \frac{\ddot{u}_g}{R} \sin(\beta) \quad (\text{II.32})$$

Ces équations ont également été établies par Oliveto et al. en 2003 [OLIVETO et collab., 2003].

Critère de transition de la phase 1 à la phase 2

À l'instant initial, la base est en contact total avec le support. De même que dans le modèle de Chopra et Yim, la base se soulève lorsque le moment dynamique \mathcal{M} induit par l'accélération de la masse est supérieur au moment « résistant » dû à la pesanteur. Le critère de transition entre la phase 1 et la phase 2 s'écrit donc :

$$\mp mH(\ddot{u} + \ddot{u}_g) > mg(B \mp u) \quad (\text{II.33})$$

Ce critère de transition diffère du critère II.22 mis en place par Yim et Chopra car il tient compte de la déformation de la superstructure.

Équations de transition à la fin de la phase 2

Acikgoz et DeJong font les mêmes hypothèses sur l'impact qui a lieu entre la base et son support que Chopra et Yim (c'est-à-dire que l'impact est supposé être parfaitement inélastique). De même que Oliveto et al., ils considèrent qu'à la fin de la phase 2, deux scénarii sont possibles. Dans la suite, les indices « - » et « + » désigneront les grandeurs avant et après l'impact.

Scénario 1 : Full contact

Dans le scénario 1, lorsque l'angle de rotation de la base devient nul (c'est-à-dire à la fin de la phase 2) la base reste en contact total avec le support. Le mouvement de la structure correspond à celui de la phase 1. L'énergie cinétique de ce scénario est notée $E_{c_{fc}}$, elle est définie telle que :

$$E_{c_{fc}} = \frac{1}{2} m \dot{u}_+^2 \quad (\text{II.34})$$

où \dot{u}_+ est définie à partir de la **conservation du moment cinétique** de la structure autour du point d'impact telle que :

$$\dot{u}_+ = \mp \left(\frac{2B}{R_-} \right) \dot{R}_- + \left(1 - \frac{B^2 - u_-^2}{H^2} \right) H \dot{\beta}_- \quad (\text{II.35})$$

avec \dot{R} et $\dot{\beta}$ les dérivées temporelles de R et β . Dans ce scénario, les équations de transition sont :

$$\theta_+ = \dot{\theta}_+ = 0 \quad (\text{II.36})$$

et

$$u_- = u_+ \quad (\text{II.37})$$

car l'impact est supposé instantané.

Scénario 2 : Rocking

Dans le scénario 2, la structure entre dans une nouvelle phase 2 lorsque l'angle de rotation de la base devient nul. L'énergie cinétique de ce scénario est notée E_{c_r} , elle est définie telle que :

$$E_{c_r} = \frac{1}{2} m (R_+^2 \dot{\beta}_+^2 + \dot{R}_+^2) \quad (\text{II.38})$$

avec $\dot{\beta}_+$ qui est définie à partir de la **conservation du moment cinétique** de la structure autour du point d'impact telle que :

$$\dot{\beta}_+ = \left(\frac{H^2 - B^2 + u_-^2}{R_+^2} \right) \dot{\beta}_- \mp \left(\frac{2HB}{R_- R_+^2} \right) \dot{R}_- \quad (\text{II.39})$$

Pour ce scénario, les auteurs font l'hypothèse que la **vitesse horizontale du déplacement élastique de la masse reste identique avant et après l'impact**, l'équation de transition est donc :

$$\dot{u}_+ = \dot{u}_- \quad (\text{II.40})$$

Ainsi, à partir de la relation II.40 et de la dérivé par rapport au temps de l'équation II.30, on a :

$$\dot{R}_+ = -\dot{R}_- \left(\frac{R_-}{R_+} \right) \left(\frac{B \pm u_-}{B \mp u_+} \right) \quad (\text{II.41})$$

Choix du scénario

Pour distinguer ces deux scénarii, **une approche énergétique est considérée**. L'énergie cinétique est calculée pour les deux scénarii. À la fin de la phase 2, le système va s'orienter vers le scénario pour lequel il y a le moins d'énergie à fournir. Ainsi, si $E_{c_{fc}} < E_{c_r}$, le scénario 1 apparaît. Si $E_{c_{fc}} > E_{c_r}$, le scénario 2 apparaît. Dans ce scénario, un coefficient de restitution d'énergie, noté e_{ADJex} , peut être déterminé après le calcul de la vitesse post-impact caractérisée par les équations II.39 et II.41, ce coefficient est défini par l'équation suivante :

$$e_{ADJex} = \left(\frac{\dot{\beta}_+}{\dot{\beta}_-} \right)^2 \quad (\text{II.42})$$

II.5.1.2 Résultats complémentaires du modèle de Acikgoz et DeJong

Acikgoz et DeJong ont, dans un premier temps, étudié la réponse de ce modèle sollicité par une excitation sinusoïdale. Puis, les auteurs se sont intéressés au soulèvement pour différentes sollicitations et au renversement de la structure.

Réponse d'une structure libre et flexible sollicitée par une excitation sinusoïdale

Le modèle représenté à la figure II.17 a été sollicité par une excitation sinusoïdale. L'élançement et le taux d'amortissement de cette structure ont été respectivement fixés à 5 et à 5%. Le rapport de la pulsation propre de la structure sur le paramètre de fréquence $p = \sqrt{g/R_0}$ a été fixé à 11,9. La réponse du modèle a ainsi été calculée puis comparée aux réponses d'une structure rigide et d'un oscillateur linéaire. Les résultats de ces trois calculs sont représentés sur la figure II.18. Ils sont respectivement représentés en noir, en rouge et en bleu. Les évolutions temporelles des rotations θ des bases et des déplacements élastiques u des masses sont respectivement représentées sur les figures II.18.a et II.18.b. Ces deux grandeurs sont respectivement normalisées par l'angle caractérisant l'élançement α et le déplacement critique u_{cr} défini tel que :

$$u_{cr} = \pm \frac{gB}{\omega_n^2 H} \quad (\text{II.43})$$

avec ω_n la pulsation propre de la structure.

Attention, dans cet article et dans les articles suivants, ω désigne la pulsation de la sollicitation harmonique et non celle de la structure. Cette notation est uniquement utilisée dans cette section afin d'être en accord avec les notations des articles.

À partir de ces résultats, les auteurs font deux remarques. Tout d'abord, le phénomène vibratoire à hautes fréquences du déplacement élastique u de la masse est une « conséquence du couplage » des mouvements de rotation de corps rigide θ et du déplacement élastique u de la masse. Ensuite, les auteurs observent que le comportement lors de l'impact avec le support, est différent pour une structure rigide et pour une structure flexible. Cette différence de comportement est illustrée par la figure II.19 qui est un zoom des évolutions temporelles des rotations θ au voisinage des instants d'impacts. Cette figure indique que lors d'un impact, la rotation d'une structure rigide change de signe instantanément (toutes choses égales par ailleurs, c'est-à-dire dans le cadre des hypothèses considérées pour les modèles). Pour la structure flexible, les auteurs montrent que la transition de phase est plus complexe en exhibant un double impact composé d'un bref « aller et retour » (cf. figure II.19). Néanmoins, ce résultat a été remis en cause ultérieurement par Vassiliou et al. [TRUNIGER et collab., 2015] qui n'ont pas observé ce phénomène dans leurs expériences.

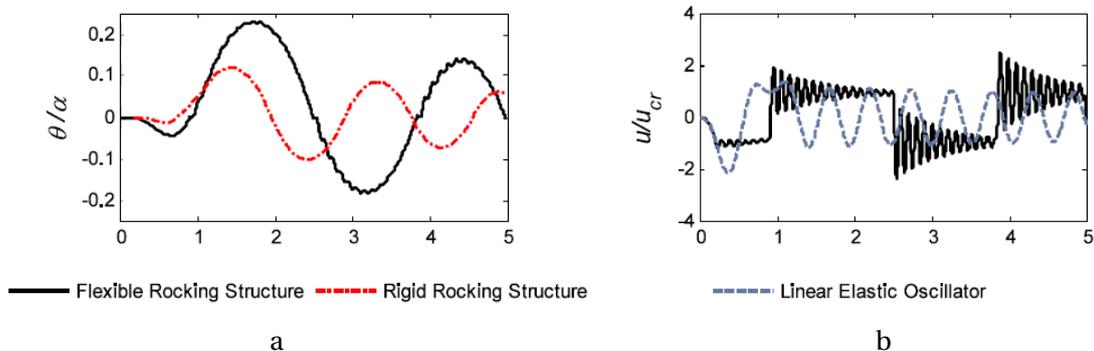


FIGURE II.18 – Évolutions temporelles normalisées des rotations θ (a) et des déplacements élastiques u des masses (b) - ref [ACIKGOZ et DEJONG, 2012]

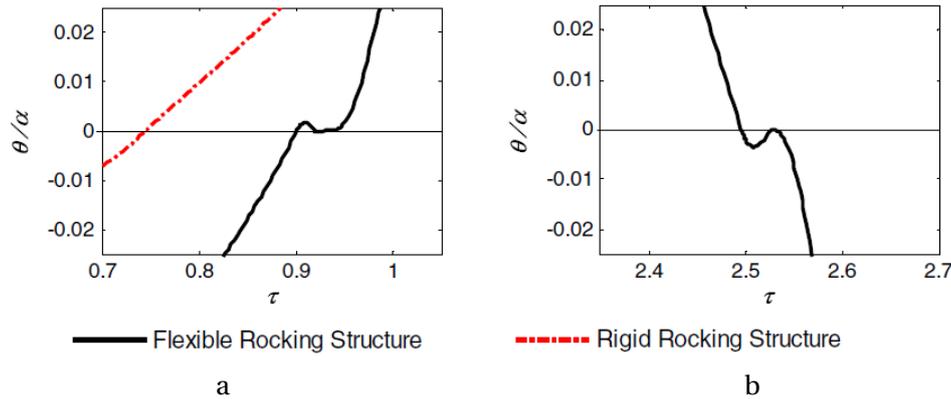


FIGURE II.19 – Zooms, au voisinage de deux impacts, sur les évolutions temporelles des rotations présentées à la figure II.18 - ref [ACIKGOZ et DEJONG, 2012]

Étude sur le basculement de structures libres et flexibles

Acikgoz et DeJong se sont intéressés à l'intensité minimale de la sollicitation entraînant le soulèvement de structures libres et flexibles. À l'instant initial, la base de la structure libre et flexible est en contact total avec le sol ainsi son mouvement est régi par l'équation différentielle ordinaire standard d'un système à un degré de liberté. La base de la structure se soulève lorsque $u > u_c$. Le soulèvement d'une structure flexible sollicitée par une sollicitation harmonique de pulsation ω , dépend donc du rapport ω/ω_n . De ce fait, Acikgoz et DeJong ont tracé l'intensité minimale de la sollicitation entraînant le soulèvement de structures libres et flexibles en fonction de ce rapport. Cette intensité notée A est normalisée par $g \tan \alpha$. Cette étude a été réalisée pour :

- une impulsion sinusoïdale,
- une impulsion en cosinus,
- une sollicitation harmonique sinusoïdale.

Les résultats de ces trois études ainsi que l'intensité minimale de la sollicitation entraînant le soulèvement d'une structure rigide sont représentés sur la figure II.20. Cette dernière est indépendante du rapport ω/ω_n car l'intensité minimale entraînant le soulèvement d'une structure rigide est égale à $\frac{B}{H}g$ (cf. critères d'Ishiyama définis dans la section II.3.4). Les auteurs font plusieurs observations. Tout d'abord, l'intensité minimale de la sollicitation entraînant le soulèvement est plus faible pour les structures libres et flexibles que pour les structures libres et rigides lorsque le rapport ω/ω_n est inférieur à environ 2. Ainsi, lorsque le rapport ω/ω_n inférieur à 2, les structures libres et flexibles sont plus susceptibles de se soulever que les structures libres et rigides. L'intensité minimale de la sollicitation entraînant le soulèvement est le plus faible lorsque $\omega = \omega_n$ c'est-à-dire lorsque la fréquence de la sollicitation coïncide avec la fréquence propre de la structure. Pour finir, lorsque le rapport ω/ω_n est supérieur à 2, les structures libres et rigides sont plus susceptibles de se soulever que les structures libres et flexibles.

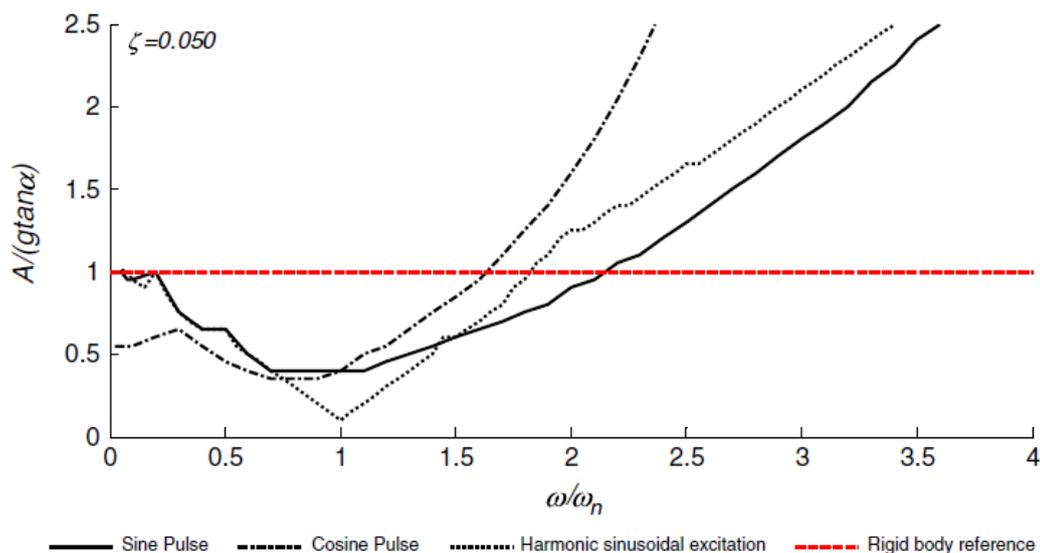


FIGURE II.20 – Intensité minimale de la sollicitation entraînant le soulèvement de structures libres et flexibles pour différentes sollicitations - ref [ACIKGOZ et DEJONG, 2012]

Étude sur le renversement de structures libres et flexibles

Acikgoz et DeJong ont également étudié l'intensité minimale de la sollicitation entraînant le renversement de structures libres et flexibles. Pour cela, ils ont appliqué la méthode utilisée dans [ZHANG et MAKRIS, 2001] et [MAKRIS et ZHANG, 2001] où Zhang et Makris ont étudié le renversement de blocs libres et rigides lorsque ces derniers sont sollicités par un « pulse ». Zhang et Makris distinguent deux modes de renversement. Le mode 1 correspond au renversement d'un bloc qui a lieu suite à un ou plusieurs impacts. Le mode 2 correspond au renversement d'un bloc qui a lieu sans impact. Zhang et Makris ont réalisé cette étude pour un bloc rigide dont l'angle caractérisant l'élanement α est égal à 0,25 rad et où le paramètre de fréquence p défini par $p = \sqrt{3g/4R_0}$ pour un bloc rigide est égal à 2,14 rad/s. Le coefficient de restitution μ a été fixé à 0.9. L'intensité minimale a_{p0} de la sollicitation entraînant le renversement du bloc rigide, normalisée par αg , a été tracée en fonction du rapport de la pulsation de la sollicitation ω sur le paramètre de fréquence p . L'intensité minimale de la sollicitation entraînant le renversement a été calculée à travers (i) une approche analytique, (ii) une simulation numérique linéaire et (iii) une simulation numérique non linéaire. Les résultats de cette étude sont représentés sur la figure II.21.

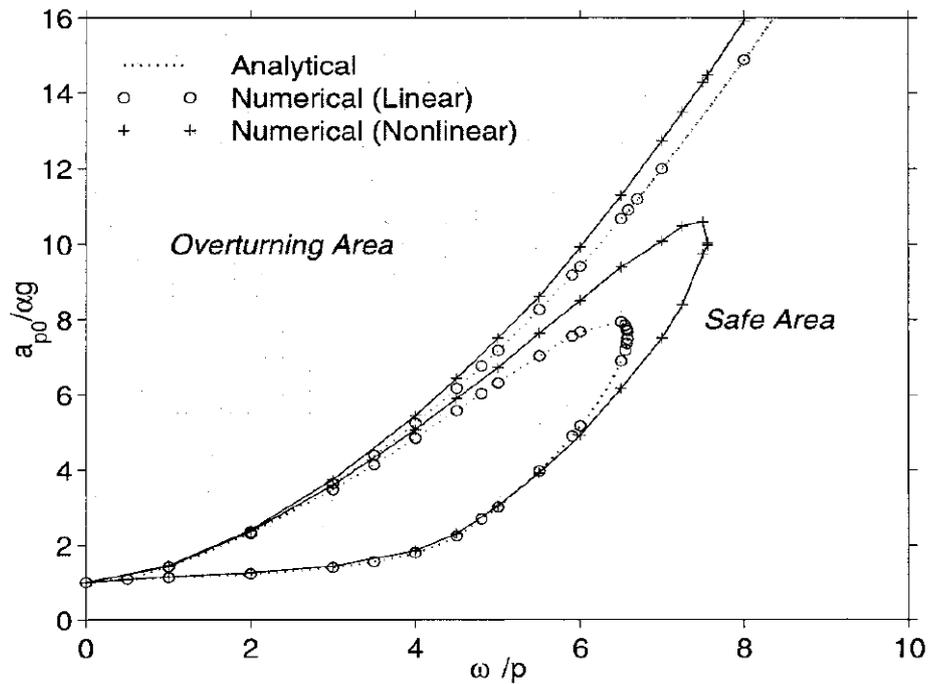


FIGURE II.21 – Intensité minimale de la sollicitation entraînant le renversement d'un bloc libre et rigide - ref [ZHANG et MAKRIS, 2001]

De façon similaire, Acikgoz et DeJong définissent deux modes de renversement pour les structures libres et flexibles. Toutefois, comme le comportement lors d'un impact avec le support est différent (cf. les doubles impacts illustrés à la figure II.19), ils ne définissent pas les modes de renversement en fonction du nombre d'impacts qui se produit avant le renversement, mais en fonction du sens de rotation au moment du renversement. Ainsi, le mode 1 correspond au renversement d'une structure qui a lieu dans le sens opposé au sens de rotation du soulèvement initial après un « cycle majeur » de basculement. La définition du mode 2 de renversement est identique à celle de Zhang et Makris c'est-à-dire que le renversement se produit sans impact préalable.

Acikgoz et DeJong ont réalisé cette étude pour un élancement et un taux d'amortissement respectivement égaux à 5 et à 5%. L'intensité minimale A de la sollicitation entraînant le renversement de la structure flexible, normalisée par $g \tan \alpha$, a été tracée en fonction du rapport de la pulsation de la sollicitation ω sur le paramètre de fréquence $p = \sqrt{g/R_0}$. Cette étude a été réalisée pour des structures plus ou moins flexibles (c'est-à-dire en faisant varier ω_n la pulsation propre de la structure) et pour une structure rigide. Les résultats de cette étude sont représentés sur la figure II.22. Les auteurs font plusieurs observations. Tout d'abord, plus le rapport ω_n/p est petit (autrement-dit plus la structure est flexible), plus l'aire de la boucle du mode de renversement 1 est petite tandis que le mode 2 apparaît pour des niveaux relativement élevés. Ces deux derniers résultats indiquent que les structures libres et flexibles sont moins susceptibles de se renverser que les structures libres et rigides. Toutefois, la flexibilité de la structure entraîne un léger décalage des courbes « vers le bas ». De ce fait, pour une structure pour laquelle le rapport ω_n/p est égal à 2,5 et la pulsation de la sollicitation est faible, l'intensité minimale de la sollicitation entraînant le renversement est inférieure à 1. Dans ce cas, une structure flexible peut se renverser alors que dans ces mêmes conditions une structure libre et rigide ne va même pas se soulever.

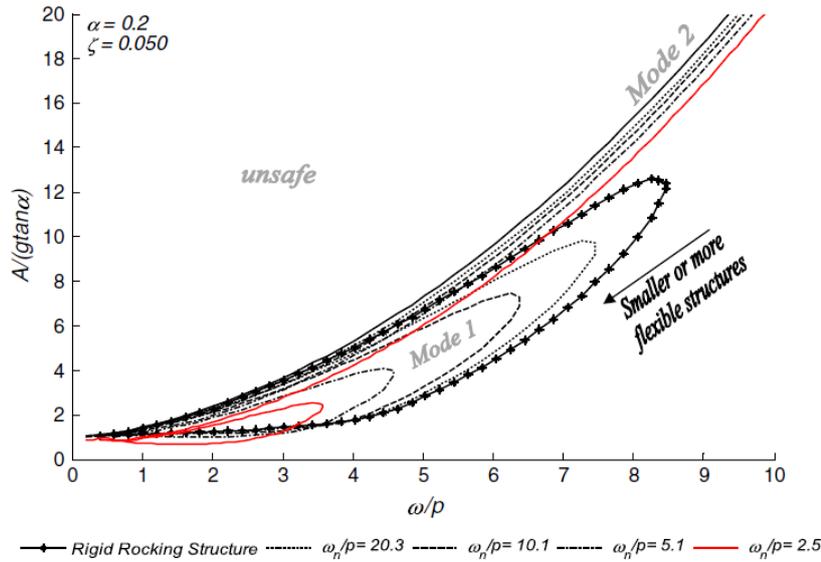


FIGURE II.22 – Intensité minimale de la sollicitation entraînant le renversement de structures libres plus ou moins flexibles - ref [ACIKGOZ et DEJONG, 2012]

II.5.2 Modèle de transition à l'impact VVEL : Modèle de Vassiliou et al.

En 2015, Vassiliou et al. [VASSILIOU et collab., 2015] étudient également le comportement de structures libres et flexibles sollicitées par une excitation sismique. Les structures étudiées sont principalement des structures en porte-à-faux comme par exemple des éoliennes. Ces structures sont modélisées à l'aide d'un modèle simplifié. Toutefois, contrairement aux modèles précédents, la masse de la base (ou de la fondation) ainsi que celle de l'élément qui relie les deux masses ne peuvent pas être négligées. Ainsi, le modèle est composé de trois « masses » : deux masses concentrées en tête et à la base de la structure, notées respectivement m et m_b ainsi que la masse uniformément répartie le long de la superstructure. Ce modèle est représenté sur la figure II.23. Sur cette figure, la structure est représentée dans trois configurations différentes : dans la phase 1 pendant laquelle la structure n'est pas déformée (à gauche), dans la phase 2 pendant laquelle le mouvement de rotation de la base a lieu autour du bord droit de la base (au centre) et autour du bord gauche de la base (à droite).

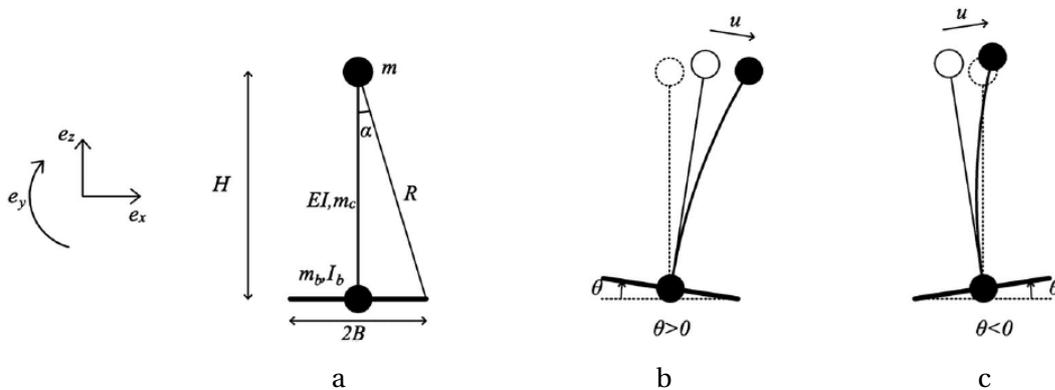


FIGURE II.23 – Représentation du modèle de Vassiliou et al. dans la phase 1 où la structure n'est pas déformée (a), dans la phase 2 où le mouvement de rotation de la base a lieu autour du bord droit de la base (b) et autour du bord gauche de la base (c) - ref [VASSILIOU et collab., 2015]

Équation du mouvement et critère de transition de la phase 1 à la phase 2

Les équations du mouvement des phases de full contact et de rocking de ce modèle ne sont pas développées dans ce manuscrit. Elles peuvent être consultées dans l'article [VASSILIOU et collab., 2015]. Les équations du mouvement des deux phases ainsi que le critère de transition de la phase 1 à la phase 2 sont similaires aux équations du modèle de Acikgoz et DeJong.

Transition à l'issue de la phase 2

De même que les auteurs précédents, Vassiliou et al. font l'hypothèse que l'impact qui a lieu entre la base et son support est **parfaitement inélastique**. Ce modèle est nommé modèle VVEL pour *Vertical Velocity Energy Loss* en Anglais ou « perte d'énergie liée à la vitesse verticale ». Ce modèle est basé sur l'hypothèse que lors d'un impact, **l'énergie cinétique verticale de la structure est dissipée** et que **l'énergie cinétique horizontale de la structure est conservée**. Ainsi, cette phase est systématiquement suivie d'une phase de full contact.

II.5.3 Comparaisons du modèle de Acikgoz et DeJong et du modèle de Vassiliou et al.

Dans un premier temps, les résultats des deux modèles sont comparés. Puis, ils sont confrontés à des résultats expérimentaux.

II.5.3.1 Comparaison des résultats des deux modèles

Le modèle de Acikgoz et DeJong, nommé ADJex, et le modèle de Vassiliou et al., nommé VVEL, sont des modèles analytiques traduisant le comportement dynamique de structures libres et flexibles. Les équations du mouvement de ces deux modèles sont semblables. Toutefois, ces modèles diffèrent au niveau de la modélisation de la transition à l'impact. Les résultats de ces deux modèles sont comparés dans le cas de la structure de la figure II.23, sollicitée par une impulsion sinusoïdale. Comme précédemment, l'élancement et le taux d'amortissement de la structure ont été respectivement fixés à 5 et à 5%. Le rapport entre la pulsation propre de la structure et le paramètre $p = \sqrt{g/R_0}$ a été fixé à 11,9. La comparaison des résultats est représentée à la figure II.24, ces calculs ont été réalisés par Vassiliou et al. dans l'article [VASSILIOU et collab., 2015]. Les résultats du modèle de Acikgoz et DeJong sont représentés en rouge, les résultats du modèle de Vassiliou et al. sont représentés en vert. Cette figure est composée de quatre sous-figures qui sont :

- les évolutions temporelles des rotations θ de corps rigide normalisées par l'angle caractérisant l'élancement α de la structure à gauche de la première ligne ;
- les évolutions temporelles des déplacements élastiques u des masses normalisées par le déplacement critique u_{cr} à droite de la première ligne ;
- les évolutions temporelles des énergies totales E normalisées par l'énergie de référence E_{ref} qui est la différence de l'énergie potentielle d'un bloc rigide entre les configurations instable ($\theta = \alpha$) et stable ($\theta = 0$) à gauche de la deuxième ligne ;
- les évolutions temporelles de la sollicitation qui est une impulsion sinusoïdale à droite de la deuxième ligne.

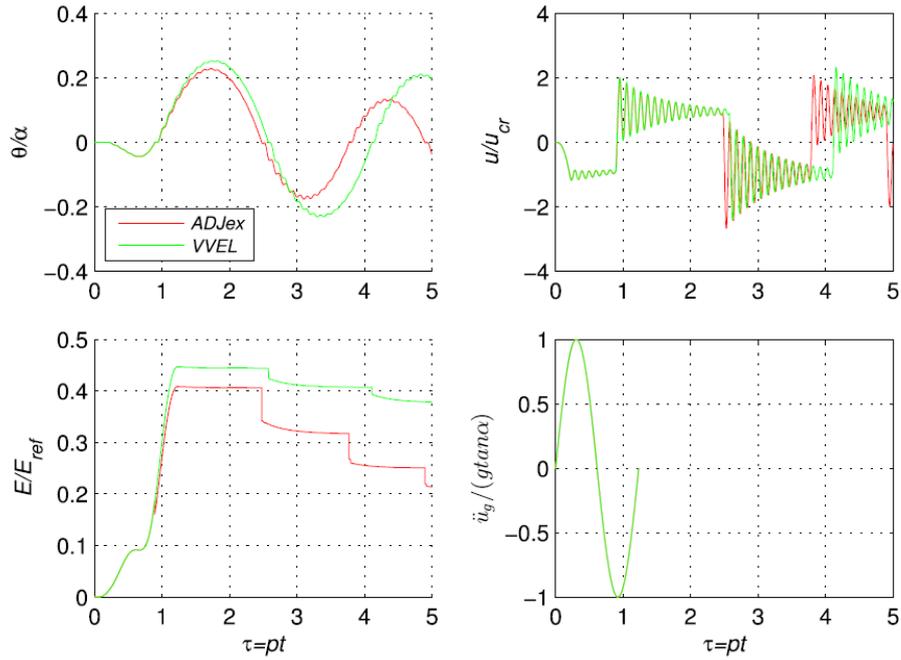


FIGURE II.24 – Comparaison des résultats du modèle de Acikgoz et DeJong (en rouge) et des résultats du modèle de Vassiliou et al. (en vert) - ref [VASSILIOU et collab., 2015]

La figure II.25 représente des zooms, des évolutions temporelles des rotations normalisées θ/α (à la première ligne) et des énergies totales normalisées E/E_{ref} (à la deuxième ligne), au voisinage des instants du deuxième impact (à gauche) et du troisième impact (à droite).

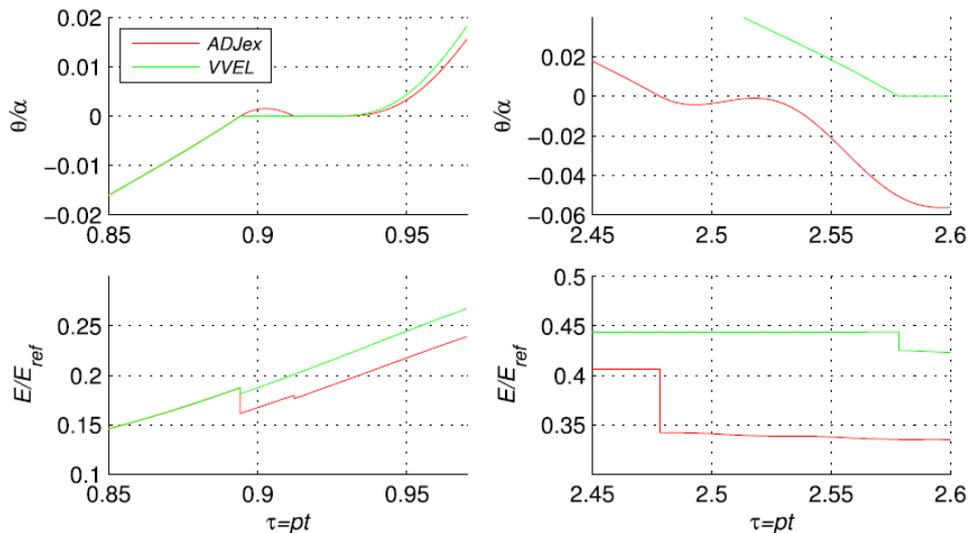


FIGURE II.25 – Comparaison des résultats du modèle de Acikgoz et DeJong (en rouge) et des résultats du modèle de Vassiliou et al. (en vert) au voisinage des instants du deuxième impact (à gauche) et du troisième impact (à droite) - ref [VASSILIOU et collab., 2015]

Suite à ces résultats, Vassiliou et al. font deux remarques. Premièrement, le double impact qui apparaît sur les résultats issus du modèle ADJex n'apparaît pas sur ceux issus de la méthode VVEL. Par ailleurs, l'énergie dissipée lors des impacts est différentes suivant les modèles : le modèle ADJex dissipe plus d'énergie lors des impacts que le modèle VVEL.

II.5.3.2 Comparaison des résultats des deux modèles avec des résultats expérimentaux

Dans le papier « compagnon » de [VASSILIOU et collab., 2015], Truniger et al. ont mis en place une campagne expérimentale afin de confronter les résultats de ces deux modèles [TRUNIGER et collab., 2015]. Cette campagne expérimentale a été conçue de façon à ce que la structure étudiée (cf. figure II.26) soit proche du modèle théorique proposé par Vassiliou et al. . Différentes configurations ont été testées en faisant varier la fréquence propre et/ou la longueur de la base de la structure (c'est-à-dire en faisant varier l'élanement de la structure). La structure a été sollicitée par une impulsion de Ricker. Suite aux différents essais, les auteurs ont observé que plus la fréquence propre de la structure était importante plus la durée de la phase de full contact entre deux phases de rocking était réduite.

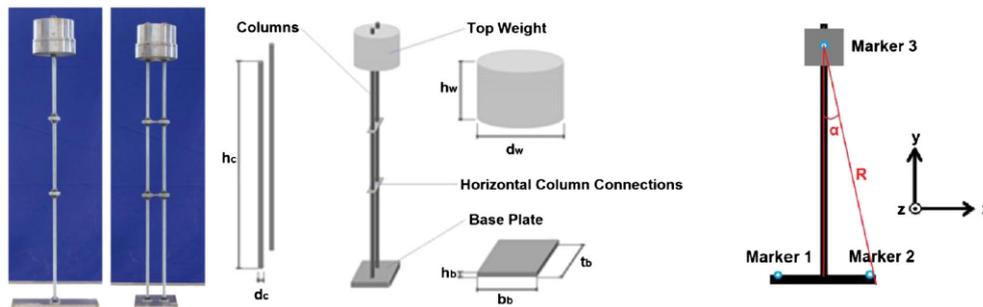


FIGURE II.26 – Représentation de la structure étudiée lors de la campagne expérimentale - ref [TRUNIGER et collab., 2015]

Les résultats expérimentaux ont ensuite été comparés aux résultats des modèles théoriques (cf. figure II.27). Les résultats expérimentaux sont représentés en bleu et sont comparés aux résultats du modèle VVEL représentés en rouge ainsi qu'aux résultats du modèle de ADJex représentés en noir. Cette comparaison a été réalisée pour deux structures : (i) pour une structure constituée d'une grande base et dont la fréquence propre est égale à 2 Hz (cf. figure II.27.a), et (ii) pour une structure constituée d'une petite base et dont la fréquence propre est égale à 1 Hz (cf. figure II.27.b). Les évolutions temporelles des rotations normalisées θ/α sont représentées à la première ligne. La deuxième ligne est un zoom de ces évolutions au voisinage de deux impacts.

À partir de ces résultats, les auteurs font plusieurs remarques. Tout d'abord, la quantité d'énergie dissipée lors de l'impact est différente suivant les modèles. Dans le modèle de Acikgoz et DeJong, il y a plus d'énergie dissipée lors des impacts que dans l'essai. Ce résultat est observé pour les deux structures. Les résultats issus du modèle de Vassiliou et al. pour la structure constituée d'une grande base indiquent que la quantité d'énergie dissipée lors de l'impact est semblable à celle de l'essai. Toutefois, pour les structures constituées d'une petite base, il y a moins d'énergie dissipée lors des impacts dans le modèle de Vassiliou et al. que dans l'essai. Ainsi, les rotations de la base du modèle de Vassiliou et al. sont plus importantes que celles de l'essai, ce modèle semble donc conservatif. Par ailleurs, le double impact composé d'un « aller et retour » (*back and forth* en Anglais) qui apparaît sur les résultats issus du modèle de Acikgoz et DeJong n'est pas présent dans les résultats expérimentaux. Pour finir, un phénomène apparaît sur les résultats de l'essai de la configuration constituée d'une petite base qu'aucun des deux modèles ne prédit : c'est le phénomène de « rebond » (*bouncing back* en Anglais) qui est représenté en bas de la figure II.27.b.

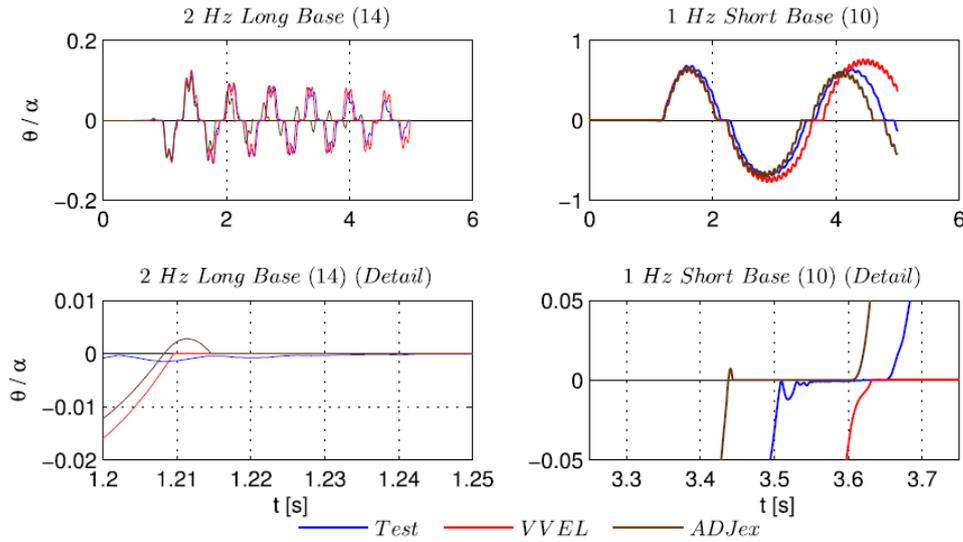


FIGURE II.27 – Comparaison des résultats expérimentaux (en bleu), des résultats du modèle de Vassiliou et al. (en rouge) et des résultats du modèle de Acikgoz et DeJong (en noir) - ref [TRUNIGER et collab., 2015]

Dans l'article [TRUNIGER et collab., 2015], les résultats du modèle de Vassiliou et al. ont également été comparés aux résultats des essais correspondant à des structures sollicitées par des signaux sismiques. Les auteurs soulignent le caractère très sensible de ce type de comportement. Ainsi, les résultats du modèle de Vassiliou et al. présentent de plus grands écarts sous sollicitation sismique que lorsque la structure est sollicitée par une impulsion de Ricker. Toutefois, la rotation de la base lors de la partie forte du signal ainsi que les déplacements élastiques u de la masse sont semblables à ceux mesurés expérimentalement.

II.5.4 Modèle sur le comportement de basculement de structures multi-masses, libres et flexibles : modèle de Acikgoz et DeJong

Récemment, Acikgoz et DeJong ont étudié le comportement de structures libres et flexibles composées de plusieurs masses [ACIKGOZ et DEJONG, 2016]. Ce modèle est représenté sur la figure II.28. Le modèle semi-analytique présenté dans le chapitre III a été développé à partir de ce modèle. Ainsi, les équations du mouvement ne sont pas développées dans cette partie.

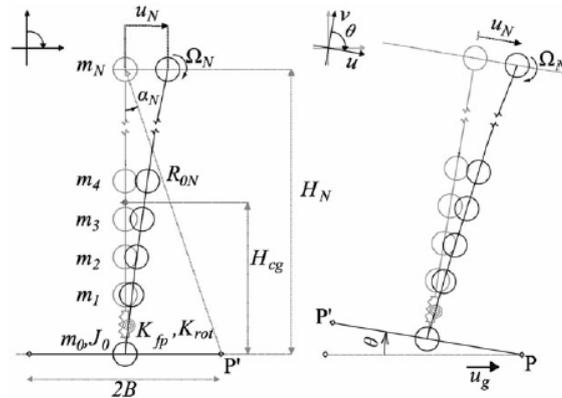


FIGURE II.28 – Représentation du modèle multi-masses de Acikgoz et DeJong - ref [ACIKGOZ et DEJONG, 2016]

Dans l'article [ACIKGOZ et DEJONG, 2016], une campagne expérimentale a été mise en place afin de comparer les résultats de ce modèle. Cette campagne expérimentale a été mise en place de façon à ce que la structure étudiée soit proche du modèle théorique proposé. Par rapport à la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux présentée par Truniger et al., Acikgoz et DeJong ont réalisé une étude supplémentaire en comparant les modes expérimentaux et numériques correspondant aux phases de full contact et de rocking. Cette étude a permis d'identifier expérimentalement et numériquement les « phénomènes » dynamiques qui interviennent dans la réponse de la structure.

II.6 Synthèse

Les études traitant du comportement de structures libres et flexibles développées après les années 2000 ont, entre autres, été présentées. Quelles que soient les typologies de structures considérées, les équations du mouvement dans la phase de rocking semblent donc maintenant correctement établies. En revanche, une difficulté persiste au niveau des transitions de phases et particulièrement au sortir d'une phase de rocking à l'issue d'un impact.

Tout d'abord, Chopra et Yim [CHOPRA et YIM, 1985] ont appliqué, sur la base d'équations simplifiées du mouvement, la conservation de la quantité de mouvement horizontale pour traduire le comportement de la structure à l'issue d'une phase de rocking, en supposant que cette dernière soit suivie par une phase de full contact. En appliquant ce modèle de transition à l'impact à des structures raides à ne pas confondre avec des structures rigides, Oliveto et al. ont observé qu'il conduisait à des déformations élastiques trop importantes. Pour éviter ce phénomène, Oliveto et al. [OLIVETO et collab., 2003], puis Acikgoz et DeJong [ACIKGOZ et DEJONG, 2012], ont proposé une approche énergétique pour identifier la phase post-impact, à savoir une phase de rocking ou une phase de full contact. Ensuite, pour les cas où une phase de rocking est supposée suivre un impact (comme dans le cas d'une structure rigide élançée), les auteurs ont proposé d'appliquer la conservation du moment cinétique avec la continuité de la vitesse horizontale de la masse de la superstructure. Acikgoz et DeJong [ACIKGOZ et DEJONG, 2012] soulignent ainsi que la transition à l'impact est plus complexe pour les structures flexibles que pour les structures rigides du fait de l'interaction qui se produit à l'impact avec la flexibilité de la superstructure. Ils exhibent alors un phénomène dit de double impact qui « semble devoir » se produire au sortir d'une phase de rocking. Plus récemment, Vassiliou et al. [VASSILIOU et collab., 2015] ont remis en cause cette approche car le phénomène de double impact n'a pas été observé dans les essais qu'ils ont mis en œuvre avec Truniger et al. [TRUNIGER et collab., 2015]. Vassiliou et al. [VASSILIOU et collab., 2015] ont donc proposé une autre approche en appliquant la conservation de l'énergie cinétique horizontale, l'énergie cinétique verticale étant considérée comme dissipée lors d'un impact. En outre, ils supposent qu'une phase de rocking est systématiquement suivie par une phase de full contact. Les résultats de ce modèle semblent globalement plus cohérents avec les résultats expérimentaux, mais ne sont pas représentatifs de tous les essais.

Ces travaux récents montrent que la problématique de la transition à l'impact n'est pas résolue à ce jour. Par ailleurs, il n'est pas évident de statuer, à partir de résultats expérimentaux, sur la pertinence des hypothèses considérées pour traduire cette transition dans la mesure où les modèles analytiques sont souvent développés sous de fortes hypothèses qui sont en général difficiles à reproduire expérimentalement. Par exemple, dans le modèle de Vassiliou et al., les auteurs font l'hypothèse qu'il n'y a pas de glissement de la structure par rapport au support et que le mouvement est plan. Or, dans l'article [TRUNIGER et collab., 2015] les auteurs ont observé que lors des essais la structure glissait par rapport à son support et qu'il y avait des mouvements hors plan.

Pour finir, Acikgoz et DeJong ont étudié le basculement de structures libres sollicitées par une excitation harmonique. Ces études ont montré que :

- si le rapport ω/ω_n est inférieur à 2 avec ω la pulsation de la sollicitation harmonique et ω_n la pulsation propre de la structure, alors les structures flexibles sont plus susceptibles de se soulever que les structures rigides ;
- si le rapport ω/ω_n est supérieur à 2, alors les structures rigides sont plus susceptibles de se soulever que les structures flexibles.

Acikgoz et DeJong ont également étudié le renversement de structures rigides et flexibles lorsqu'elles sont excitées par une excitation harmonique de forte amplitude. Ces études ont montré que les structures flexibles sont moins susceptibles de se renverser que les structures rigides. Vassiliou et al. ont également réalisé cette étude et sont arrivés aux mêmes conclusions générales. L'ensemble de ces résultats est dépendant d'une modélisation correcte des transitions de phases. Toutefois, les résultats du modèle de Vassiliou et al. étant proches de ceux expérimentaux, nous pouvons penser que ces tendances sont représentatives de la réalité.

D'autres études complémentaires ont également été réalisées récemment afin :

- d'étudier le comportement dynamique de structures libres et flexibles à partir d'une campagne expérimentale menée sur une autre structure que celle de Truniger et al. (cf. la figure II.29) [ACIKGOZ et collab., 2016] ;
- d'examiner, à partir d'un modèle numérique, le basculement de structures libres et flexibles constituées d'une base large [ACIKGOZ et DEJONG, 2014] ;
- de mettre en place un modèle pour représenter le comportement de basculement de colonne de fondation des ponts [ZHANG et collab., 2019].

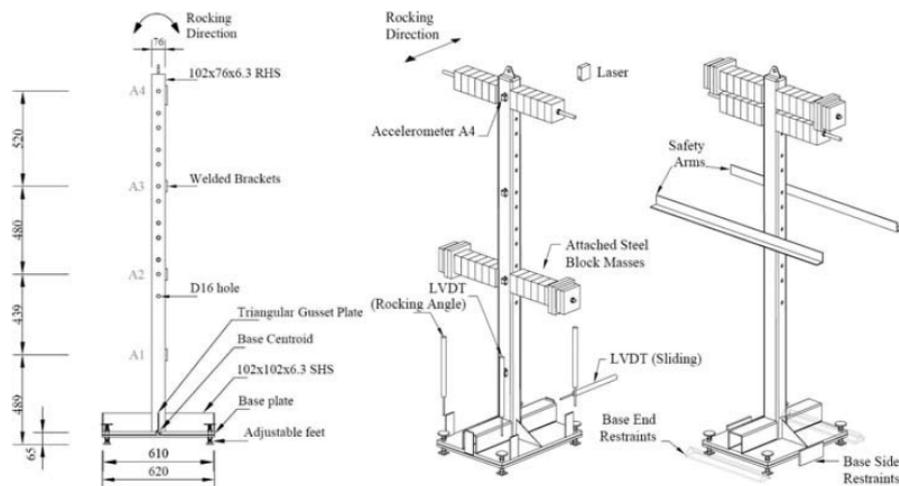


FIGURE II.29 – Représentation de la structure étudiée lors de la campagne expérimentale - ref [ACIKGOZ et collab., 2016]

II.7 Références

- ACIKGOZ, S. et M. J. DEJONG. 2012, «The interaction of elasticity and rocking in flexible structures allowed to uplift», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 41, n° 15, p. 2177–2194. [x](#), [27](#), [31](#), [34](#), [35](#), [36](#), [38](#), [43](#)
- ACIKGOZ, S. et M. J. DEJONG. 2014, «The rocking response of large flexible structures to earthquakes», *Bulletin of earthquake engineering*, vol. 12, n° 2, p. 875–908. [44](#)
- ACIKGOZ, S. et M. J. DEJONG. 2016, «Analytical modelling of multi-mass flexible rocking structures», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 45, n° 13, p. 2103–2122. [x](#), [31](#), [42](#), [43](#)
- ACIKGOZ, S., Q. MA, A. PALERMO et M. J. DEJONG. 2016, «Experimental identification of the dynamic characteristics of a flexible rocking structure», *Journal of Earthquake Engineering*, vol. 20, n° 8, p. 1199–1221. [x](#), [44](#)
- BLAY, N., C. GALLOIS, Y. GUILLEMINOT, A. PATTE, S. RAVET, N. REVIRON et G. VERRHIEST-LEBLANC. 2011, «Guide méthodologique pour la conception, l'installation et le diagnostic des équipements en zone sismique», . [9](#)
- BROCHARD, D., P. BLAND et G. F. 1988, «Cours i.p.s.i. sur le comportement sismique des bâtiments et équipements», *Rapport interne CEA*. [11](#)
- CHOPRA, A. K. et S. C.-S. YIM. 1985, «Simplified earthquake analysis of structures with foundation uplift», *Journal of Structural Engineering*, vol. 111, n° 4, p. 906–930. [ix](#), [19](#), [22](#), [24](#), [27](#), [43](#)
- DENEKEN, M. 2012, «Musée de sismologie et collections de géophysique», . [9](#)
- HOUSNER, G. 1963, «The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, n° 10, p. 1901–1922. [13](#), [16](#)
- IKEGAMI, R. et F. KISHINOUE. 1946, «A study on the overturning of rectangular columns in the case of the nankai earthquake on december 21, 1946», *Bulletin of Earthquake Research Institute*, vol. 24, p. 49–55. [13](#)
- IKEGAMI, R. et F. KISHINOUE. 1947, «A study on the overturning of a rectangular column», *Bulletin of Earthquake Research Institute*, vol. 25, p. 11–18. [13](#)
- IKEGAMI, R. et F. KISHINOUE. 1950, «The acceleration of earthquake motion deduced from overturning of the gravestones in case of the imaichi earthquake on dec. 26 1949», *Bulletin of Earthquake Research Institute*, vol. 28, p. 121–127. [13](#)
- ISHIYAMA, Y. 1982, «Motions of rigid bodies and criteria for overturning by earthquake excitations», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 10, n° 5, p. 635–650. [ix](#), [18](#), [19](#)
- KIRKPATRICK, P. 1927, «Seismic measurements by the overthrow of columns», *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 17, n° 2, p. 95–109. [13](#)
- MA, Q. T. M. 2010, «The mechanics of rocking structures subjected to ground motion», *ResearchSpace@Auckland*. [ix](#), [12](#), [17](#)
- MAKRIS, N. 2014, «The role of the rotational inertia on the seismic resistance of free-standing rocking columns and articulated frames», *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 104, n° 5, p. 2226–2239. [17](#)
- MAKRIS, N. et G. KAMPAS. 2016, «Size versus slenderness : Two competing parameters in the seismic stability of free-standing rocking columns», *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 106, n° 1, p. 104–122. [17](#)

- MAKRIS, N. et J. ZHANG. 2001, «Rocking response of anchored blocks under pulse-type motions», *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 127, n° 5, p. 484–493. [36](#)
- MATHEY, C., C. FEAU, D. CLAIR, L. BAILLET et M. FOGLI. 2018, «Experimental and numerical analyses of variability in the responses of imperfect slender free rigid blocks under random dynamic excitations», *Engineering Structures*, vol. 172, p. 891–906. [17](#)
- MILNE, J. 1881, «Experiments in observational seismology», *Transactions of the Seismological Society of Japan*, vol. 3, p. 12–64. [12](#)
- OLIVETO, G., I. CALIO et A. GRECO. 2003, «Large displacement behaviour of a structural model with foundation uplift under impulsive and earthquake excitations», *Earthquake engineering & structural dynamics*, vol. 32, n° 3, p. 369–393. [27](#), [31](#), [32](#), [43](#)
- PSYCHARIS, I. N. 1983, «Dynamics of flexible systems with partial lift-off», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 11, n° 4, p. 501–521. [ix](#), [19](#), [20](#), [21](#), [22](#)
- TRUNIGER, R., M. F. VASSILIOU et B. STOJADINVIĆ. 2015, «An analytical model of a deformable cantilever structure rocking on a rigid surface : experimental validation», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 44, n° 15, p. 2795–2815. [x](#), [31](#), [34](#), [41](#), [42](#), [43](#)
- VASSILIOU, M. F., R. TRUNIGER et B. STOJADINVIĆ. 2015, «An analytical model of a deformable cantilever structure rocking on a rigid surface : development and verification», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 44, n° 15, p. 2775–2794. [x](#), [27](#), [31](#), [38](#), [39](#), [40](#), [41](#), [43](#)
- WANG, X.-F. et P. L. GOULD. 1993, «Dynamics of structures with uplift and sliding», *Earthquake engineering & structural dynamics*, vol. 22, n° 12, p. 1085–1095. [x](#), [19](#), [28](#), [30](#)
- ZHANG, J. et N. MAKRIS. 2001, «Rocking response of free-standing blocks under cycloidal pulses», *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 127, n° 5, p. 473–483. [x](#), [36](#), [37](#)
- ZHANG, J., Y. XIE et G. WU. 2019, «Seismic responses of bridges with rocking column-foundation : A dimensionless regression analysis», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 48, n° 1, p. 152–170. [44](#)

Chapitre III

Présentation de la structure, de la campagne expérimentale et de la stratégie de modélisation

L'objectif de cette thèse est d'étudier le comportement sous séisme d'une structure libre et flexible formée d'un empilement de trois paniers libres destinés au stockage de colis. Par ailleurs, le comportement sismique de structures libres étant très sensible (aux conditions expérimentales, aux paramètres de calculs, etc.), cela implique que la démonstration de sûreté les concernant ne peut être envisagée que sous l'angle d'une approche probabiliste, essentiellement basée sur des calculs dynamiques temporels non linéaires.

Dans ce chapitre, sont présentées la structure étudiée, la campagne expérimentale ainsi que la stratégie de modélisation numérique adoptée dans le cadre de cette thèse. À ce sujet, on précise que l'objectif de la thèse n'était pas de réaliser des développements numériques spécifiques dédiés au problème étudié. Il s'agissait, avant tout et entre autres, d'utiliser les outils numériques classiques de l'ingénieur (typiquement basés sur le calcul sur base modale) et de porter un regard critique sur leur capacité à permettre l'estimation du comportement de structures libres et flexibles sous séismes, notamment dans un contexte « probabiliste » qui requiert de pouvoir réaliser un nombre important de calculs numériques dans un temps raisonnable. Différents modèles numériques ont donc été développés, avec plus ou moins de raffinement, afin d'identifier le meilleur compromis entre représentativité et temps de calcul.

Ce chapitre est composé de cinq parties. Dans les deux premières parties, la structure et la campagne expérimentale sont exposées. La troisième partie présente la stratégie de modélisation numérique basée sur la méthode des éléments finis. La quatrième partie est dédiée à la présentation du modèle semi-analytique développé dans le but de porter un regard à la fois critique et approfondi sur l'ensemble des résultats. Pour finir, un aperçu sur la limite de validité du calcul sur base modale pour les structures libres est présenté.

L'objectif de ce chapitre est de donner une vue d'ensemble des outils mis en œuvre dans ce travail de thèse, avant de présenter dans le détail les comparaisons entre les résultats expérimentaux et numériques au chapitre suivant.

Sommaire

III.1 Structure étudiée	49
III.1.1 Présentation des paniers	49
III.1.2 Présentation des colis	50
III.2 Approche expérimentale	50
III.2.1 Laboratoire TAMARIS	50
III.2.2 Table vibrante Vésuve	50
III.2.3 Caractéristiques du sol dans les halls d'entreposage	51
III.2.4 Campagne expérimentale nommée EDEN	51
III.2.4.1 Partie 1 : essais de caractérisation modale	52
III.2.4.2 Partie 2 : essais sismiques	54
III.2.5 Limites de la campagne expérimentale	55
III.3 Modélisation numérique avec le code CAST3M	55
III.3.1 Méthode modale pour les calculs dynamiques temporels en présence de non-linéarités localisées de type choc	55
III.3.1.1 Détermination des modes propres d'un problème discret	55
III.3.1.2 Calcul dynamique sur base modale d'un problème discret et linéaire	56
III.3.1.3 Calcul dynamique sur base modale d'un problème discret en présence de non-linéarités de type choc	57
III.3.2 Modèles développés à l'aide de la méthode des éléments finis	59
III.3.2.1 Modèle de référence	59
III.3.2.2 Modèles réduits	61
III.4 Modèle semi-analytique : modèle S4DoF	64
III.4.1 Présentation du modèle S4DoF	64
III.4.2 Structure composée d'une unique masse	65
III.4.2.1 Établissement des équations du mouvement	65
III.4.2.2 Interprétation physique des équations du modèle	67
III.4.3 Structure composée de N masses : établissement des équations du mouvement	68
III.4.4 Établissement des équations du mouvement du modèle S4DoF (i.e. N = 3)	69
III.4.4.1 Équations du mouvement de la phase de full contact	69
III.4.4.2 Équations du mouvement de la phase de rocking	69
III.4.4.3 Linéarisation des équations de la phase de rocking	70
III.4.4.4 Transitions entre les deux phases du mouvement	73
III.4.4.5 Résolution numérique des équations du mouvement	73
III.4.5 Limites du modèle S4DoF	74
III.5 Aperçu sur la limite de validité du calcul sur base modale pour les structures libres	74
III.5.1 Basculement d'un bloc rigide : modèle d'Housner	75
III.5.2 Basculement d'une structure flexible : modèle S4DoF	77
III.5.3 Remarque sur les équations du mouvement linéarisées et « équivalentes »	79
III.5.3.1 Basculement d'un bloc rigide : modèle d'Housner linéarisé	79
III.5.3.2 Basculement d'une structure flexible : modèle S4DoF linéarisé	79
III.5.4 Conclusion	80
III.6 Synthèse	81
III.7 Références	84

III.1 Structure étudiée

La structure étudiée est un empilement de trois paniers libres destinés au stockage de colis, chaque panier contient quatre colis également libres (cf. figure III.1.a). C'est une structure à base carrée, d'environ 3 mètres de hauteur dont l'élanement est égal à 2,4. Sa masse totale est de 3 360 kg. Dans cette structure, cinq zones de contacts permanentes ou quasi permanentes, i.e. dépendant du niveau de sollicitation, ont été identifiées. Elles sont situées : (i) entre les paniers et la base des colis, (ii) entre les paniers et le haut des colis, (iii) entre les colis, (iv) entre deux paniers et (v) entre le premier panier et le sol.

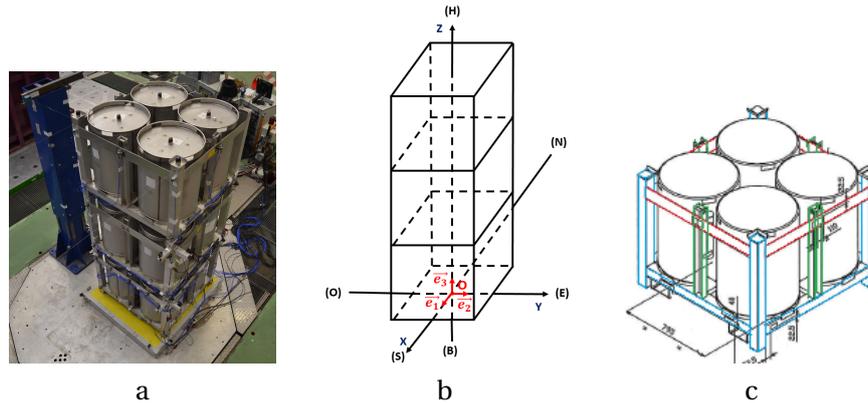


FIGURE III.1 – Photo de l'empilement (a), repérage de la structure (b) et schéma d'un panier contenant quatre colis (c)

Le repérage de la structure est réalisé dans un repère orthonormé $\mathcal{R}_O = (O, \mathfrak{B})$ d'origine O et de base orthonormée $\mathfrak{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, dont les axes de coordonnées sont notés Ox , Oy et Oz . Par souci de simplification, dans la suite nous parlerons de direction \underline{x} (respectivement des directions \underline{y} et \underline{z}) pour désigner l'axe Ox dirigé par le vecteur \vec{e}_1 (respectivement les axes Oy et Oz dirigés par les vecteurs \vec{e}_2 et \vec{e}_3). Ces trois axes sont respectivement orientés dans les directions Nord-Sud (NS), Ouest-Est (OE) et Bas-Haut (BH), c'est-à-dire du sol vers le ciel. Le centre de symétrie de la base de la structure coïncide avec l'origine O du repère (cf. figure III.1.b).

III.1.1 Présentation des paniers

Les dimensions globales d'un panier sont les suivantes : la hauteur est égale à 0,993 m et les longueur et largeur sont égales à 1,215 m. Un schéma d'un panier contenant quatre colis est représenté sur la figure III.1.c. La terminologie utilisée pour décrire les paniers est présentée ci-après en s'appuyant sur les couleurs de ce schéma. Ainsi, un panier est composé :

- d'un cadre (représenté en bleu) ;
- de quatre avaloirs (situés en haut des quatre portants du cadre, une photo d'un avaloir est représentée sur la figure III.2.a) ;
- de quatre poteaux (représentés en vert) ;
- de quatre équerres (situées entre la base des poteaux et le cadre) ;
- de quatre lamelles (représentées en rouge) ;
- de deux barres de passage de fourches utilisées pour la manutention (situées en dessous du panier, une photo d'une barre de passage de fourches est représentée sur la figure III.2.b).

Les propriétés mécaniques d'un panier sont indiquées dans le tableau III.1. Les paniers sont principalement constitués d'un ensemble de barres soudées de sections carrées et creuses, de 80 mm de côté et de 3 mm d'épaisseur. Les poteaux soudés au cadre, ont une section en U et une épaisseur de 5 mm. L'épaisseur des lamelles est identique à celle des poteaux. Les avaloirs, situés au haut des portants, permettent de limiter le glissement des paniers supérieurs. Ainsi, le glissement maximal entre deux paniers est limité à 10 mm. Les barres de passage des fourches, situées sous les paniers, permettent de faciliter la manutention de ces derniers.

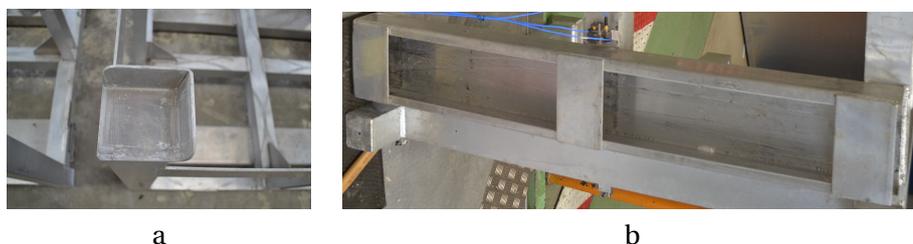


FIGURE III.2 – Photos d'un avaloir (a) et d'une barre de passage des fourches (b)

Matériau	Masse volumique	Module de Young	Coefficient de Poisson	Masse
Aluminium 6060	2 700 kg/m ³	69,5 GPa	0,33	63 Kg

TABLEAU III.1 – Propriétés mécaniques d'un panier

III.1.2 Présentation des colis

Les colis placés dans les paniers sont en forme de cône de révolution tronqué. Ils sont en acier inoxydable et sont remplis de matière inerte, ce sont des éléments solides. Ils peuvent se déplacer horizontalement de 15 mm à leur base et de 30 mm à leur sommet avant de s'entrechoquer. La masse d'un colis est égale à 265 kg. La masse de l'empilement résulte donc en grande partie de la masse des colis.

III.2 Approche expérimentale

Dans le cadre de cette thèse, une campagne expérimentale a été mise en place afin d'avoir :

- une meilleure compréhension du comportement dynamique de la structure;
- une base de données de référence pour valider les modèles numériques et interpréter « physiquement » leurs résultats;
- une estimation de la variabilité des résultats expérimentaux à comparer à celle des résultats numériques.

III.2.1 Laboratoire TAMARIS

Cette campagne expérimentale s'est déroulée au sein du laboratoire des *Tables et Moyens d'Analyses des Risques Sismiques* (TAMARIS) du CEA de Saclay. Ce laboratoire regroupe plusieurs moyens d'essais à savoir un mur de réaction, une fosse et quatre tables vibrantes. L'une de ces tables, nommée Azalée, est la plus grande d'Europe.

III.2.2 Table vibrante Vésuve

Cette campagne expérimentale s'est déroulée sur la table Vésuve, la deuxième plus grande table vibrante de TAMARIS. Un schéma et une photo de cette table sont représentés respectivement sur les figures III.3.a et III.3.b. C'est une table mono-axiale qui est équipée d'un plateau en alliage d'aluminium de 3,8 m × 3,1 m. La masse de la table est de 4 tonnes, sa capacité maximale

de chargement est de 20 tonnes. Un vérin hydraulique de 350 kN est connecté au plateau. L'amplitude maximale de déplacement dans la direction x (axe de déplacement de la table) est égale à 100 mm et sa vitesse maximale est égale à 1 m/s.

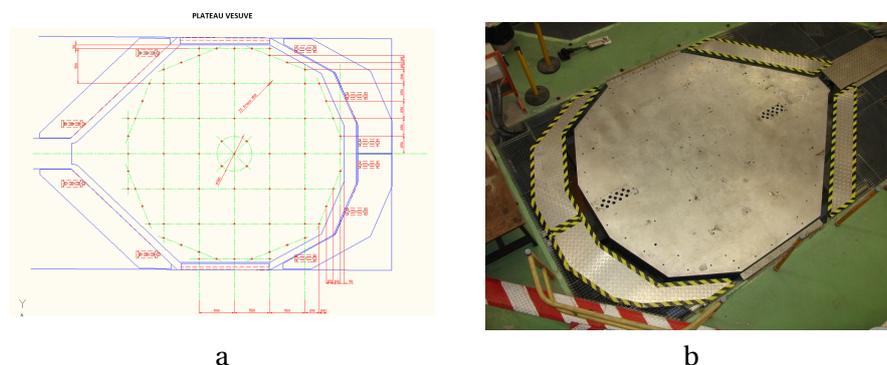


FIGURE III.3 – Schéma (a) et photo (b) de la table vibrante Vésuve

III.2.3 Caractéristiques du sol dans les halls d'entreposage

Les paniers de stockage sont destinés à être placés dans un hall d'entreposage. Le sol de ce dernier est revêtu d'une peinture qui a des propriétés mécaniques particulières. Afin d'être fidèle aux conditions réelles d'entreposage, une dalle recouverte de la même peinture a été utilisée lors des essais pour y placer l'empilement. La figure III.4 est une photo de la dalle qui a été fixée à la table vibrante. Cette dalle est en béton armé, ses dimensions sont les suivantes : la longueur, la largeur et l'épaisseur sont respectivement égales à 1,45 m, à 1,27 m et à 0,15 m.



FIGURE III.4 – Photo de la dalle recouverte d'une peinture jaune reproduisant les conditions réelles d'entreposage

III.2.4 Campagne expérimentale nommée EDEN

L'intitulé de cette campagne expérimentale est *Empilement De structures faiblement ElaNcées* (EDEN). Le logo associé à cette campagne est représenté sur la figure III.5. Il représente une déformée modale d'un panier vue du dessus. Dans la suite, ce logo et/ou le nom EDEN sera utilisé pour indiquer les résultats expérimentaux afin de les distinguer des résultats numériques. Cette campagne expérimentale s'est déroulée de juillet 2017 à janvier 2018, elle a donc duré six mois. L'équipe impliquée dans cette campagne expérimentale était composée de :

- Responsables d'Affaire (D. Beylat, C. Feau, T. Chaudat, A. Le Maoult) ;
- Responsable d'Essais (S. Vasic) ;
- Responsable d'instrumentation (S. Vasic) ;
- Responsables Mécanique (M. Mahe, M. Le Corre).

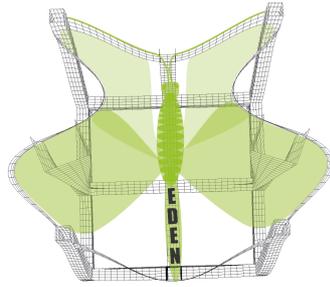


FIGURE III.5 – Logo de la campagne expérimentale EDEN

Cette campagne expérimentale est composée de deux types d'essais. Tout d'abord, des essais de caractérisation modale ont été réalisés. Ils ont permis de mieux comprendre le comportement linéaire de la structure et de calibrer les modèles numériques pour des comportements quasi linéaires. Ensuite, des essais sismiques ont été réalisés afin d'étudier le comportement non linéaire de la structure.

III.2.4.1 Partie 1 : essais de caractérisation modale

Les essais de caractérisation modale regroupent 70 essais réalisés avec 125 voies de mesures. Le schéma d'instrumentation de la première partie de ces essais est représenté sur la figure III.7.a. C'est une vue de haut et aplatie du panier. Sur cette figure les accéléromètres tridimensionnels x , y et z sont matérialisés par des points rouges. Chaque point de mesure est nommé suivant son emplacement, par deux lettres et trois chiffres. La lettre A signifie que le capteur est placé sur le premier panier (en partant du sol), les paniers des niveaux supérieurs étant respectivement nommés B et C. La lettre P indique qu'à ce point de mesure l'accélération est mesurée (nous avons choisi la lettre P et non la lettre A afin qu'il n'y ait pas de confusion avec le panier inférieur nommé A). Les chiffres indiquent l'emplacement des capteurs sur le panier. Le nombre de voies de mesures étant limité, les colis n'ont pas été instrumentés. Une description plus détaillée de l'instrumentation se trouve dans le rapport d'essais [BEYLAT et VASIC, 2019].

Les essais de caractérisation modale ont été réalisés pas à pas afin d'identifier avec soin les propriétés dynamiques de la structure et de calibrer finement les modèles numériques (cf. partie IV.1). Tout d'abord, les essais de caractérisation modale d'un panier vide avec des conditions aux limites libres ont eu lieu. Puis, nous nous sommes intéressés à des configurations plus complexes, c'est-à-dire aux configurations impliquant les colis et des conditions aux limites « appuyées ».

Analyse modale d'un panier vide et libre

En pratique, des conditions aux limites parfaites, et a fortiori libres et parfaites, ne sont pas toujours simples à réaliser. De ce fait, deux configurations expérimentales ont été étudiées. Le panier était soit :

- posé sur des coussins d'air (comme illustré sur la figure III.6.a) ;
- suspendu à l'aide de deux élingues (comme illustré sur la figure III.6.b).

La première configuration a montré que les paniers étaient trop légers pour les coussins d'air utilisés. Le panier n'était donc pas stable et les déplacements du panier induits par cette instabilité affectaient les résultats des essais. Les résultats expérimentaux des essais de caractérisation modale du panier vide et libre présentés dans le paragraphe IV.1.2.1 correspondent donc à ceux de la deuxième configuration. Les déformations du panier ont été mesurées à partir de 30 points de mesure ce qui a permis d'avoir une relativement « bonne » précision.

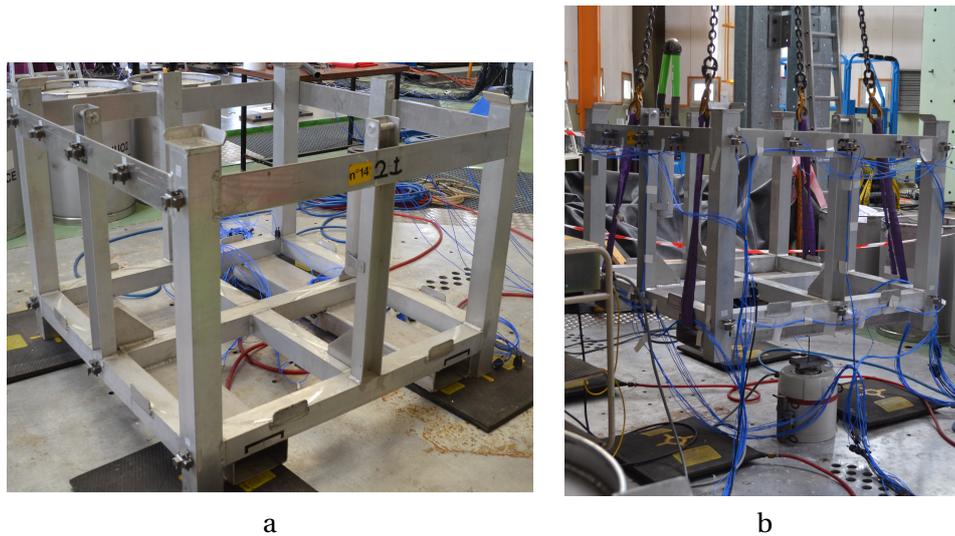


FIGURE III.6 – Photos des essais de caractérisation modale d'un panier vide posé sur des coussins d'air (a) et suspendu à l'aide de deux élingues (b)

Analyse modale des configurations plus réalistes

Suite à ces essais, l'influence des points de contact, qui représentent une difficulté importante dans la modélisation, a été appréhendée étape par étape. La suite des essais de caractérisation modale a donc porté sur les configurations suivantes : (i) un panier vide posé sur la table, (ii) un panier vide posé sur la dalle, (iii) un panier plein (contenant quatre colis) et libre (iv) un panier plein posé sur la table, (v) un panier plein posé sur la dalle, (vi) un empilement de deux paniers pleins posé sur la dalle et (vii) un empilement de trois paniers pleins posé sur la dalle. Le schéma d'instrumentation de la dernière configuration est représenté sur la figure III.7.b. Les résultats de l'analyse modale sont présentés dans la section IV.1.2.

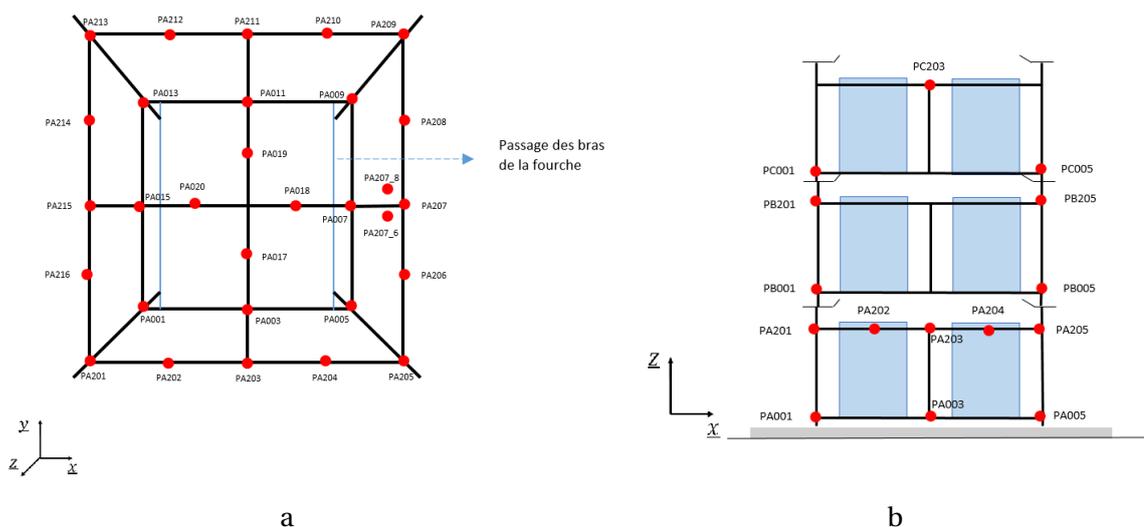


FIGURE III.7 – Schémas d'instrumentation des essais de caractérisation modale d'un panier vide et libre avec une vue de dessus aplatie (a) et une vue de l'empilement dans le plan Oxz (b)

III.2.4.2 Partie 2 : essais sismiques

La deuxième partie de la campagne expérimentale, dédiée aux essais sismiques, regroupe 230 essais réalisés avec 130 voies de mesures. Dans cette partie, l'instrumentation des paniers a été modifiée. Les schémas d'instrumentation dans les plans Oxz et Oyz sont respectivement représentés sur les figures III.8.a et III.8.b. De même que pour l'instrumentation des essais de caractérisation modale, les numéros des points de mesures indiquent l'emplacement des capteurs et la lettre P indique qu'à ce point c'est une accélération absolue qui est mesurée. Les lettres X, Y et Z indiquent les points où les déplacements sont mesurés respectivement dans les directions \underline{x} , \underline{y} et \underline{z} . Les formes géométriques indiquent la nature des capteurs, c'est-à-dire :

- les points rouges indiquent que ce sont des accéléromètres tridimensionnels \underline{x} , \underline{y} et \underline{z} ;
- les triangles oranges et bleus indiquent que ce sont des capteurs inductifs mesurant les déplacements verticaux dans la direction \underline{z} ;
- les traits verts et violets indiquent que ce sont des capteurs à fil mesurant les déplacements horizontaux dans les directions \underline{x} et \underline{y} . Notons que pour des raisons pratiques, certains déplacements mesurés sont des déplacements absolus. Dans le post-traitement des résultats d'essais, les corrections ont été faites pour revenir aux déplacements relatifs.

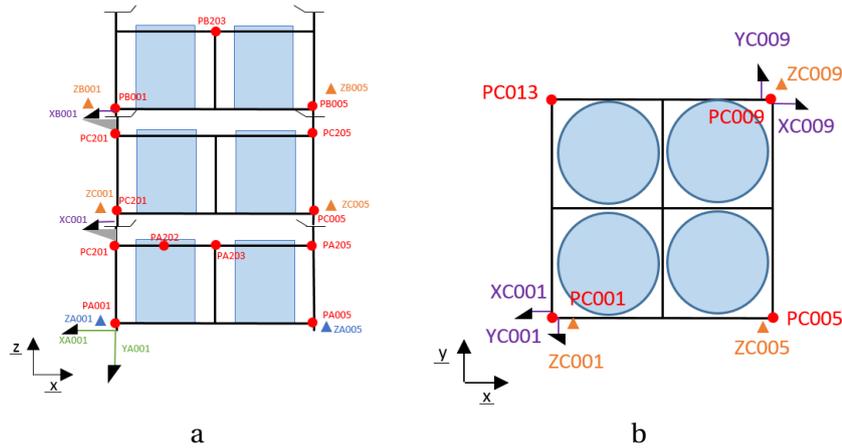


FIGURE III.8 – Schémas d'instrumentation des essais sismiques dans les plans Oxz (a) et Oxy (b)

L'empilement de trois paniers a été sollicité par 21 signaux sismiques réels sélectionnés dans la base de données européenne [AMBRASEYS et collab., 2004]. Ces signaux ont été sélectionnés pour un scénario sismique arbitraire pour lequel la magnitude est comprise entre 5,5 et 6,5 et la distance entre 0 et 20 km. Seules les composantes horizontales ont été sélectionnées dans la mesure où seuls des essais unidirectionnels ont été réalisés. Pour chaque signal, les valeurs du PGA et du SRO sont indiquées dans le tableau III.2 (les définitions du PGA et du SRO sont présentées dans la section II.1.2). Les valeurs du SRO sont indiquées à la fréquence du premier mode de l'empilement c'est-à-dire à 3,8 Hz (ce résultat est présenté dans le paragraphe IV.1.2.5). Certains signaux ont été répétés plusieurs fois (30 et/ou 35 fois) afin d'étudier la variabilité du comportement sismique de l'empilement. Les cases colorées du tableau III.2 indiquent les signaux concernés. Les résultats des essais sismiques sont présentés dans la partie IV.2.

Signal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
PGA (g)	0,45	0,42	0,26	0,31	0,47	0,37	0,56	0,50	0,24	0,33	0,25
Niveau de SRO (g) à 3,8 Hz	0,59	0,87	0,38	0,75	0,88	0,75	0,87	1,03	0,30	0,41	0,75
Signal	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
PGA (g)	0,37	0,20	0,24	0,35	0,44	0,50	0,24	0,33	0,60	0,34	
Niveau de SRO (g) à 3,8 Hz	0,65	0,35	0,39	1,29	0,95	0,94	0,73	0,99	1,10	0,54	

TABLEAU III.2 – Paramètres des signaux sismiques utilisés lors de la campagne expérimentale EDEN

III.2.5 Limites de la campagne expérimentale

Les résultats de cette campagne expérimentale nous ont servi de repère tout au long de la thèse. En effet, c'est le seul moyen d'avoir accès au comportement réel de la structure. Toutefois, bien que cette campagne d'essais se soit déroulée sur 6 mois, elle présente des limites qui sont :

- le nombre d'essais et de configurations ont été limités;
- l'instrumentation a été restreinte (par exemple, les colis n'ont pas été instrumentés, de ce fait nous n'avons aucune information sur le mouvement de ces derniers);
- le niveau de l'excitation a également été limité de sorte que l'amplitude des déplacements de l'empilement ne soit pas supérieure aux dimensions de la dalle sur laquelle il repose sous peine d'occasionner sa chute;
- les excitations des essais ont été limitées à une direction, du fait de l'indisponibilité de la table vibrante Azalée (utilisée pour une autre campagne expérimentale) au moment de la réalisation de la campagne d'essais.

Néanmoins, cette dernière limite présente un avantage lorsque l'on étudie des structures au comportement aussi sensible que celui des structures libres : avec les tables unidirectionnelles, il y a moins d'effets parasites dans le mouvement qui est imposé à la structure.

III.3 Modélisation numérique avec le code CAST3M

Parallèlement à la campagne expérimentale, des modèles numériques basés sur la méthode des éléments finis ont été développés avec le code CAST3M, lui-même développé par le CEA (<http://www-cast3m.cea.fr>). Ces modèles ont permis d'interpréter les essais de caractérisation modale et sismiques.

Cette partie est composée de deux sections. Tout d'abord, les méthodes numériques qui ont été utilisées dans le cadre de la thèse sont rappelées. Puis, les modèles numériques sont présentés.

III.3.1 Méthode modale pour les calculs dynamiques temporels en présence de non-linéarités localisées de type choc

Dans cette thèse, pour les modèles basés sur la méthode des éléments finis, les calculs dynamiques ont été réalisés avec l'opérateur *DYNE* de CAST3M qui calcule la réponse temporelle d'une structure, linéaire ou non, à l'aide d'algorithmes explicites (e.g. différences centrées) par une méthode de projection sur base modale. Dans cette section, les principes généraux de cette méthode sont brièvement rappelés.

III.3.1.1 Détermination des modes propres d'un problème discret

On considère une structure au comportement linéaire représentée par N degrés de liberté (translations et/ou rotations) dont on sous-entend ici que la base est encastrée (par simplicité).

En l'absence des forces d'amortissement et des forces extérieures, les équations du mouvement sont données par :

$$\mathbf{M} \ddot{\underline{q}} + \mathbf{K} \underline{q} = 0 \quad (\text{III.1})$$

où \underline{q} est le vecteur des **coordonnées généralisées** tel que $\underline{q} = (q_1(t), \dots, q_N(t))^T$ et \mathbf{M} et \mathbf{K} sont les matrices de masse et de raideur telles que \mathbf{M} est symétrique et définie positive et que \mathbf{K} est symétrique et positive. Pour déterminer les modes propres associés au problème III.1, on recherche une solution de la forme $\underline{q}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$ avec $\omega > 0$ (j désignant le nombre complexe), c'est-à-dire que l'on suppose que les solutions en temps et en espace sont séparées. Ainsi, chaque mode propre \underline{X} satisfait l'équation *purement spatiale* suivante :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \underline{X} = 0 \quad (\text{III.2})$$

Pour trouver les solutions non triviales de ce système (i.e. $\underline{X} \neq 0$), il faut résoudre :

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (\text{III.3})$$

Les solutions sont alors les N **valeurs propres** ω_m^2 , avec $m = \{1, \dots, N\}$, dont on déduit les pulsations propres ω_m réelles et positives auxquelles correspondent les modes propres \underline{X}_m qui sont solution de l'équation :

$$(\mathbf{K} - \omega_m^2 \mathbf{M}) \underline{X}_m = 0 \quad (\text{III.4})$$

Ces modes \underline{X}_m sont dits **K et M-orthogonaux**, dans la mesure où ils sont orthogonaux par rapport à la matrice de masse et de raideur du système. Pour chaque mode, on définit la masse M_m et la raideur K_m généralisées telles que :

$$M_m = \underline{X}_m^T \mathbf{M} \underline{X}_m \quad (\text{III.5})$$

et :

$$K_m = \underline{X}_m^T \mathbf{K} \underline{X}_m \quad (\text{III.6})$$

qui sont reliées par la relation suivante :

$$K_m = \omega_m^2 M_m \quad (\text{III.7})$$

III.3.1.2 Calcul dynamique sur base modale d'un problème discret et linéaire

Les équations qui régissent l'équilibre dynamique de la structure du paragraphe III.3.1.1 dorénavant amortie et soumise à une excitation sismique \ddot{u}_g s'écrivent :

$$\mathbf{M} \ddot{\underline{q}} + \mathbf{C} \dot{\underline{q}} + \mathbf{K} \underline{q} = -\ddot{u}_g \mathbf{M} \underline{U} \quad (\text{III.8})$$

avec \underline{U} le vecteur de déplacement unité dans la direction du séisme et \mathbf{C} la matrice d'amortissement pour laquelle on suppose que $\underline{X}_n^T \mathbf{C} \underline{X}_m = 0$ pour $n \neq m$ (hypothèse dite de Basile). Les équations III.8 peuvent être résolues directement (on parle alors de résolution sur base physique) ou bien à l'aide de la **méthode de décomposition modale** (on parle alors de résolution sur base modale). Cette dernière consiste à écrire la réponse $\underline{q} = \underline{q}(t)$ de la structure comme une combinaison linéaire des modes propres, telle que :

$$\underline{q}(t) = \sum_{m=1}^N \underline{X}_m p_m(t) = \mathbf{X} \underline{p} \quad (\text{III.9})$$

pour ensuite projeter les équations III.8 sur la base formée par ces modes et obtenir un système d'équations découplées. Dans l'équation III.9, \mathbf{X} est la matrice des vecteurs propres telle que $\mathbf{X} = (\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \dots, \underline{X}_N)$. Ainsi, pour chaque mode m il suffit alors de résoudre l'équation :

$$\ddot{p}_m(t) + 2\beta_m \omega_m \dot{p}_m(t) + \omega_m^2 p_m(t) = -\ddot{u}_g Q_m \quad (\text{III.10})$$

avec β_m le taux d'amortissement modal qui est défini par :

$$\beta_m = \frac{\mathbf{X}_m^T \mathbf{C} \mathbf{X}_m}{2\omega_m \mathbf{M}_m} \quad (\text{III.11})$$

et Q_m le facteur de participation modal lui-même défini par :

$$Q_m = \frac{\mathbf{X}_m^T \mathbf{M} \mathbf{U}}{\mathbf{M}_m}. \quad (\text{III.12})$$

Du fait du découplage des équations du mouvement, si l'on considère un nombre limité de modes, le coût en temps de calcul est grandement diminué par rapport à la résolution directe sur base physique. Pour **tronquer la base modale**, c'est-à-dire pour sélectionner le nombre de modes à retenir dans les calculs, on évalue la contribution de chaque mode par le biais de sa masse modale m_m qui est définie par :

$$m_m = \frac{(\mathbf{X}_m^T \mathbf{M} \mathbf{U})^2}{\mathbf{M}_m}$$

Ainsi, en pratique, pour les structures « souples » et pour lesquelles les modes se situent dans la « gamme sismique » comprise entre 0 et 30 Hz (gamme des fréquences pour lesquelles il y a amplification), on retiendra tous les modes telle que la somme des masses modales soit au moins égale à 90 % de la masse totale de la structure. Pour des structures pour lesquelles les modes négligés sont en dehors de la gamme sismique, la réponse de ceux-ci peut être estimée par un calcul statique (comportement quasi statique de ces modes) [BROCHARD et collab., 1988].

III.3.1.3 Calcul dynamique sur base modale d'un problème discret en présence de non-linéarités de type choc

Lors d'un choc se produisant sur une structure, on recense deux effets :

- un effet de frottement du fait des mouvements tangentiels à la surface de choc ;
- un effet « d'impact » mettant en jeu des mouvements normaux à la surface de choc.

Physiquement, on considère qu'il y a choc entre deux points A et B de la structure, espacés de leur déplacement relatif nommé jeu et noté e . En appelant Y_A^n et Y_B^n les déplacements des points A et B dans la direction de la normale au choc, la condition de choc se traduit donc par l'inéquation suivante :

$$Y_A^n - Y_B^n \leq e \quad (\text{III.13})$$

Traitement de l'impact

Plusieurs méthodes existent pour traiter numériquement le problème de l'impact (cf. e.g. [POLITOPOULOS, 1997]). Nous avons choisi une méthode de pénalisation qui s'appuie sur le modèle de Kelvin-Voigt représenté sur la figure III.9. Ainsi, en présence de choc, la force normale F_N qui s'exerce entre les points A et B est égale à :

$$F_N = k_{choc} (Y_B^n - Y_A^n) + c_{choc} (\dot{Y}_B^n - \dot{Y}_A^n) \quad (\text{III.14})$$

avec \dot{Y}_A^n et \dot{Y}_B^n les vitesses des points A et B selon la normale à la surface de choc, k_{choc} et c_{choc} la raideur et l'amortissement de choc qui sont des paramètres de calcul à choisir attentivement pour garantir la représentativité et la précision du calcul.

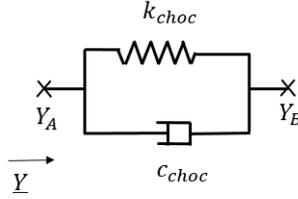


FIGURE III.9 – Schéma du modèle de Kelvin-Voigt

Traitement du glissement

Lors d'un choc, tangentiel à la surface d'impact, il peut y avoir (i) une phase d'adhérence ou (ii) une phase de glissement. Lors de la phase d'adhérence, il n'y a pas de déplacement relatif entre les points en contact. Lors de la phase de glissement, les déplacements relatifs sont non nuls.

Différents modèles permettent de rendre compte de ces phénomènes. Nous avons choisi d'utiliser le modèle d'Oden [ODEN et MARTINS, 1985], qui est un modèle de Coulomb régularisé par la vitesse et pour lequel la force tangentielle F_T est définie par :

$$F_T = -\mu F_N \left[2 - \frac{|\dot{u}_r|}{\epsilon} \right] \frac{\dot{u}_r}{\epsilon} \quad \text{si } |\dot{u}_r| < \epsilon \quad (\text{III.15})$$

$$F_T = -\mu F_N \frac{\dot{u}_r}{|\dot{u}_r|} \quad \text{si } |\dot{u}_r| \geq \epsilon \quad (\text{III.16})$$

avec μ le coefficient de frottement et $\dot{u}_r = \dot{Y}_B^t - \dot{Y}_A^t$ la vitesse tangentielle relative de glissement entre les points A et B en contact. Dans ce modèle, la force de frottement correspondant à la phase d'adhérence est représentée par la force d'un amortisseur non linéaire pour des vitesses tangentielles de glissement inférieures au seuil ϵ . En pratique, la valeur de ϵ qu'il faut considérer est un compromis entre représentativité et temps de calcul. Cette valeur doit en effet être suffisamment petite pour qu'elle reflète la valeur de la vitesse tangentielle en deçà de laquelle on peut considérer qu'il y a adhérence pour le problème d'intérêt (en théorie cette valeur devrait être nulle), mais pas trop petite pour ne pas devoir considérer un pas de discrétisation temporelle trop faible sous peine d'augmenter significativement les temps de calcul.

Équations du mouvement

D'une manière générale, si la structure est potentiellement soumise à un ensemble de chocs localisés, la condition de choc s'écrira :

$$\mathbf{P}_e \underline{q} \leq \underline{e} \quad (\text{III.17})$$

avec \mathbf{P}_e la matrice rectangulaire $n \times N$ décrivant les relations linéaires entre les déplacements des n points susceptibles d'entrer en contact et \underline{e} le vecteur $n \times 1$ des jeux initiaux entre ces mêmes points.

En l'absence de choc, les équations du mouvement sont celles présentées dans le paragraphe précédent (équations III.8). Si des chocs peuvent se produire, ces équations deviennent, si on considère les matrices $n \times n$, \mathbf{K}_{choc} et \mathbf{C}_{choc} , de raideurs et d'amortissement de choc :

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\underline{q}} + \mathbf{C} \dot{\underline{q}} + \mathbf{K} \underline{q} + \mathbf{P}_e^T \underline{F}_{choc} = -\ddot{u}_g \mathbf{M} \underline{U} \\ \underline{F}_{choc} = \mathbf{K}_{choc} \mathbf{P}_e \underline{q} + \mathbf{C}_{choc} \mathbf{P}_e \dot{\underline{q}} \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

En projetant ces équations sur la base des modes propres, on a :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_m \ddot{\underline{p}} + \mathbf{C}_m \dot{\underline{p}} + \mathbf{K}_m \underline{p} + \underline{X}_m^T \mathbf{P}_e^T \underline{F}_{choc} = -\ddot{u}_g \mathbf{Q}_m \\ \underline{F}_{choc} = \mathbf{K}_{choc} \mathbf{P}_e \underline{X} \underline{p} + \mathbf{C}_{choc} \mathbf{P}_e \underline{X} \dot{\underline{p}} \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

avec \mathbf{M}_m et \mathbf{K}_m les matrices diagonales des masses et raideurs généralisées, \mathbf{Q}_m la matrice diagonale des facteurs de participation modaux et \mathbf{C}_m la matrice diagonale des coefficients d'amortissement modaux.

À la suite d'un impact, une onde vibratoire est créée et se propage au sein de la structure. Cette onde peut, suivant l'intensité de l'impact, augmenter la contribution des modes à haute fréquence dans la réponse de la structure. Dans l'absolu, ces modes doivent donc être pris en compte dans la résolution numérique du problème. Il en résulte que le nombre de modes à prendre en compte dans un problème de dynamique non linéaire peut être plus important que le nombre de modes à prendre en compte dans un problème de dynamique linéaire. Pour déterminer ce nombre, une étude de convergence a été réalisée à partir de calculs dynamiques non linéaires en faisant varier la taille de la « base » modale. Cette étude de convergence s'est appuyée principalement sur le déplacement en tête et sur le soulèvement de l'empilement.

Par ailleurs, les impacts peuvent également être à l'origine de déformations locales de la structure. Ces déformations correspondent à des modes à haute fréquence. La prise en compte de tels modes, dans la méthode de recombinaison modale, signifierait augmenter significativement le nombre de modes de la base modale et par voie de conséquence les temps de calcul, limitant ainsi l'intérêt de ce type de méthode. Pour contourner ce problème, la technique consiste donc à enrichir la base modale en ajoutant des **pseudo-modes**, dont les réponses sont déterminées par le biais de calculs statiques. Dans l'absolu, il y a autant de calculs statiques à mener que de points d'impact potentiels. En pratique, à l'issue de cet enrichissement, l'ensemble des modes ne forme pas nécessairement une base orthogonale, il faut donc procéder à la résolution d'un nouveau problème aux valeurs propres pour obtenir la base enrichie recherchée. Cela signifie que la méthode de recombinaison modale peut être utilisée pour résoudre un problème de dynamique non linéaire sous réserve que les localisations des chocs soient connues. Dans CAST3M, c'est l'opérateur *PSMO* qui permet de calculer la contribution des modes négligés non pris en compte dans la base modale « initiale ».

III.3.2 Modèles développés à l'aide de la méthode des éléments finis

Dans le cadre de cette thèse, nous avons développé un ensemble de modèles présentant différents niveaux de raffinement, dans le but d'identifier le meilleur compromis entre représentativité et temps de calculs. Par la suite, le modèle présentant le plus grand degré de précision sera nommé **modèle de référence**. Les modèles qui en sont dérivés sont appelés **modèles réduits**. Le modèle de référence a permis d'interpréter les essais de caractérisation modale tandis que les modèles réduits ont été utilisés pour interpréter les essais sismiques. Cette partie présente les principales caractéristiques de l'ensemble de ces modèles. Elles seront développées de façon plus détaillée dans les chapitres suivants, cette partie a pour but de donner au lecteur une première vision globale des modèles et d'être utilisée comme « mémento » pour les chapitres suivants.

III.3.2.1 Modèle de référence

Maillage

Un premier modèle numérique a été développé en considérant des éléments de type coque et plaque pour les paniers et des éléments massifs (CUB8) pour les colis. Le maillage du modèle de référence d'un panier vide est représenté sur la figure III.10. Le code couleur des éléments constitutifs du panier est identique à celui de la figure III.1.

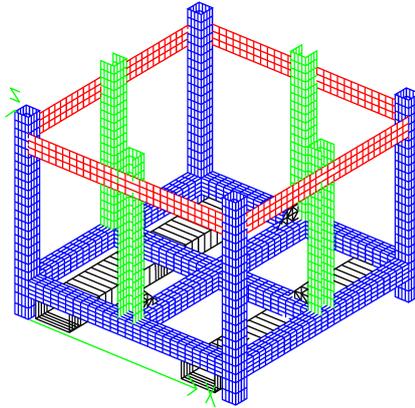


FIGURE III.10 – Maillage d'un panier vide avec des éléments coques et plaques

Comme évoqué à la section III.1, cette structure présente cinq zones de contacts permanentes ou quasi permanentes et potentielles, i.e. dépendant du niveau d'excitation, qui sont situées : (i) entre les paniers et la base des colis, (ii) entre les paniers et le haut des colis, (iii) entre les colis, (iv) entre deux paniers et (v) entre le premier panier et le sol. Dans le modèle de référence, ces zones de contact ont été modélisées de la manière suivante :

- la zone (i) a été modélisée en fusionnant quatre points de maillage par colis avec la base du panier. Dans cette modélisation, chaque colis est centré à l'emplacement théorique qui lui est destiné dans un panier, rendant ainsi la modélisation sans défaut du point de vue de la répartition des masses ;
- la zone (ii) n'a pas été prise en compte ;
- la zone (iii) n'a pas été prise en compte ;
- la zone (iv) a été modélisée par seize points de contact (quatre par pieds étant donnée que la section des pieds est un carré creux; les quatre coins de la section ont été modélisé par un point de contact) ;
- la zone (v) a également été modélisée par seize points de contact.

À chaque point de contact sont associés une raideur normale et deux raideurs tangentielles égales à 10^9 N/m. La justification des valeurs des raideurs sera fournie au paragraphe IV.1.2.2.

Analyse modale

Ce modèle de référence n'a été utilisé que pour interpréter les essais de caractérisation modale. Numériquement, la résolution du problème aux valeurs propres a été réalisée à l'aide de l'opérateur *VIBR* de CAST3M. Les comparaisons des résultats de ce modèle et des résultats expérimentaux sont, présentées dans le paragraphe IV.1.2.1, pour un panier vide et libre, et dans le paragraphe IV.1.2.5, pour un empilement de trois paniers.

III.3.2.2 Modèles réduits

Maillage

Les modèles réduits ont été développés à partir d'éléments finis de type poutre et plaque pour les paniers et des éléments massifs pour les colis. Cependant, comme les montants des paniers ne satisfont pas à la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (les sections des montants, et du cadre en général, n'étant pas indéformables), certaines flexibilités ont été ajoutées aux modèles. Le développement des modèles réduits a été réalisé étape par étape. Dans un premier temps, un panier vide et libre a été modélisé (cf. figure III.11). Puis, les configurations plus complexes, allant d'un panier vide et posé jusqu'à l'empilement de trois paniers pleins, ont été modélisées. Les bases modales de l'ensemble de ces configurations ont été calculées puis comparées à celles du modèle de référence. Lors de ces différentes comparaisons, il a été observé que certains modes du modèle réduit étaient trop rigides. Des souplesses (ressorts de torsion) ont donc été ajoutées au modèle réduit. Les emplacements de ces éléments sont représentés en bleu, rouge et vert sur la figure III.11. Les valeurs des raideurs de ces ressorts ont été ajustées à partir de calculs statiques présentés dans la section IV.1.3.

Dans le modèle de référence, toutes les parties du panier sont modélisées. Dans les modèles réduits, les barres de passage des fourches ne sont pas modélisées. Les équerres ont été prises en compte globalement dans le calage des souplesses lors du développement des modèles réduits.

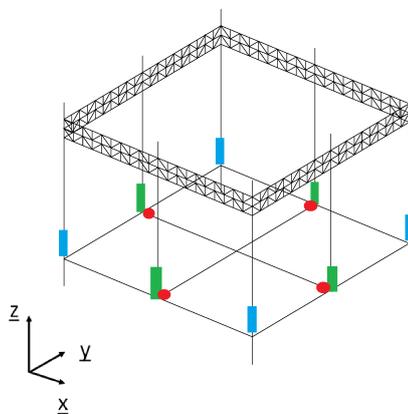


FIGURE III.11 – Modélisation du modèle réduit du panier vide et libre

Lors du développement de ces modèles, il a fallu être très exigeant et précis afin qu'ils soient le plus représentatif possible au modèle de référence. Ce travail a demandé du temps mais il était fondamental pour interpréter les essais dynamiques.

Calculs dynamiques linéaires

Dans ce cas, la base modale utilisée pour les calculs correspond à la base pour laquelle l'empilement est encasté au niveau des points de contacts avec son support. Elle est composée des deux premiers modes qui sont couplés dans les deux directions. Ces deux modes représentent en effet une masse modale sismique cumulée égale à 65% de la masse totale de l'empilement. Ce pourcentage sera justifié dans le chapitre IV.

Pour les calculs dynamiques linéaires, les zones de contact ont été modélisées de la manière suivante :

- le contact entre les paniers et la base des colis a été modélisé en fusionnant quatre points de maillage par colis avec la base du panier, dans cette modélisation, chaque colis est centré à l'emplacement théorique qui lui est destiné dans un panier, rendant ainsi la modélisation sans défaut du point de vue de la répartition des masses ;
- le contact entre les paniers et le haut des colis n'a pas été pris en compte dans cette modélisation ;
- le contact entre les colis n'a pas été pris en compte ;
- le contact entre deux paniers a été modélisé par quatre points de contact (un par pieds) ;
- le contact entre le panier et le sol a également été modélisé par quatre points de contact.

À chaque point de contact sont associés une raideur normale et deux raideurs tangentielles égales à 4.10^9 N/m. Ces zones de contact ont été calibrées afin qu'elles soient équivalentes à celles du modèle de référence.

Calculs dynamiques non linéaires

Les principales non-linéarités du problème sont les mouvements de glissements, de soulèvements et d'entrechoquements entre la structure et le sol. Elles ont été traitées numériquement par le biais de la liaison *point point frottement* de l'opérateur *DYNE* de CAST3M, qui correspond à une méthode de pénalisation qui a été rappelée à la section III.3.1. Les valeurs des paramètres de ces liaisons sont indiquées dans le tableau III.3.

Coefficient de glissement	Coefficient d'adhérence	Rigidité de contact	Coefficient d'amortissement	Valeur de ϵ
0,4	0,4	10^9 Nm^{-1}	$1,3.10^6 \text{ Nm}^{-1}\text{s}$	3.10^{-3}

TABLEAU III.3 – Valeurs des liaisons

Pour les niveaux d'excitation considérés (c'est-à-dire dont le PGA est inférieur ou égal à 0.5 g), des calculs préliminaires ont montré que les non-linéarités des zones de contact entre les colis, entre les paniers et la base des colis ainsi qu'entre les paniers et le haut des colis n'affectent pas le comportement global de l'empilement (déplacement horizontal en tête et sur le soulèvement de l'empilement). C'est pourquoi, dans un premier temps, nous avons développé des modèles en ne considérant que les non-linéarités agissant entre la base de l'empilement et le sol. Il est à noter qu'avec des excitations plus élevées, ces zones de contact pourraient être activées et jouer un rôle non négligeable sur le comportement global de l'empilement.

Pour ces calculs, nous avons considéré la base des modes libres. Cette base est composée des 30 premiers modes de l'empilement et elle a été enrichie de huit pseudo-modes. Les calculs statiques associés à ces pseudo-modes ainsi que les 30 modes de la base modale tronquée sont présentés dans le paragraphe IV.2.2.2.

Des calculs complémentaires ont été réalisés en considérant les non-linéarités au niveau de la base de chaque panier. Dans ce cas, la base modale est composée des 21 premiers modes libres de chaque panier soit un total de 63 modes. Cette base modale a été enrichie de huit pseudo-modes par panier. Ainsi, ces calculs dynamiques ont été menés avec une base modale composée de 87 modes. Ces modes sont présentés dans le paragraphe IV.2.2.2.

Défauts

Lors des essais sismiques, bien que l'excitation soit unidirectionnelle, nous avons observé un mouvement de l'empilement transverse à la direction de l'excitation. Il s'est avéré que ce mouvement n'était pas un mouvement de glissement mais un mouvement de rotation autour de \underline{z} qui se manifestait lors du soulèvement. Ce mouvement a été interprété comme étant dû à la présence de défauts de l'empilement lui-même et/ou de la dalle support, sans que nous ayons les moyens de faire véritablement la distinction. La modélisation des défauts est une difficulté importante dans ce type d'étude. En général, il est en effet difficile de les identifier, mais il est fondamental de les prendre en compte pour obtenir une bonne représentativité, a minima, du comportement global. Dans un premier temps, nous avons étudié un défaut de positionnement des colis mais cela ne nous a pas permis de retrouver le mouvement de rotation recherché. Puis, nous avons fait l'hypothèse que les coefficients de frottement n'étaient pas égaux sous chacun des pieds. Ainsi, nous avons diminué le coefficient de frottement au niveau de l'un des pieds (0,25 contre 0,4 pour les trois autres). Avec cette modélisation, nous avons obtenu le mouvement de rotation de l'empilement autour de \underline{z} . La solution que nous avons proposée pour interpréter ce mouvement n'est certainement pas unique. Il n'est toutefois pas évident d'identifier l'ensemble des solutions possibles, même avec des algorithmes d'optimisation car, dans l'absolu, cela nécessite d'écrire une fonction coût qui peut être multi-indicateurs, ce qui n'est pas nécessairement trivial [MATHEY, 2016].

Les différentes variantes des modèles réduits

Dans ce travail de thèse, nous avons développé plusieurs variantes de modèles réduits (cf. tableau III.4) visant à rendre compte de différents phénomènes pour en évaluer l'impact.

Abréviation	Nom complet	Prise en compte de la zone de contact située à la base de l'empilement	Prise en compte de la zone de contact située à la base de chaque panier	Prise en compte des défauts
SNLFE	Simplified Non Linear Finite Element model	X	0	0
SNLFED	Simplified Non Linear Finite Element model with Defects	X	0	X
NLFE	Non Linear Finite Element model	X	X	0
NLFED	Non Linear Finite Element model with Defects	X	X	X

TABLEAU III.4 – Description des modèles réduits

III.4 Modèle semi-analytique : modèle S4DoF

Parallèlement aux modèles réalisés avec CAST3M, nous avons développé un modèle simplifié de l'empilement à quatre degrés de liberté et nommé **S4DoF**. Ce modèle, inspiré de la littérature, a fortement contribué à la compréhension du comportement dynamique de l'empilement sous séisme, il est présenté dans la première section. L'établissement des équations du mouvement est réalisé à l'aide du formalisme de Lagrange. Dans un premier temps, ces équations sont établies pour une structure composée d'une unique masse, une interprétation physique de ces équations est réalisée. Puis, l'écriture des équations du mouvement est présentée pour une structure composée de N masses. Enfin, les équations du modèle S4DoF c'est-à-dire pour une structure composée de trois masses sont présentées. Pour finir, les limites de ce modèle sont exposées.

III.4.1 Présentation du modèle S4DoF

Le modèle développé s'inspire des travaux de Acikgoz et DeJong qui ont étudié le comportement sous séisme de structures libres et flexibles composées de plusieurs masses [ACIKGOZ et DEJONG, 2016]. Ces travaux ont été présentés dans la section II.5.4. Dans le cadre de cette thèse, la mise en place du modèle répondait au double objectif de permettre (i) une meilleure compréhension du comportement dynamique de l'empilement et (ii) la réalisation de calculs numériques rapides pour faciliter l'interprétation des résultats d'essais.

Ce modèle « brochette » est schématisé sur la figure III.12. Il est composé d'une base rigide de largeur $2B$ et d'une superstructure dotée de trois masses concentrées, notées m_1 , m_2 et m_3 situées aux hauteurs H_1 , H_2 et H_3 . Une masse concentrée représente les masses d'un panier et de quatre colis. Les hauteurs correspondent aux hauteurs des centres de gravité des trois paniers et de leurs colis. Dans la mesure où les colis reposent sur les bases de chacun des paniers, les raideurs notées k_1 , k_2 et k_3 représentent respectivement les raideurs de flexion des « pieds » du panier 1, du panier 1 lui-même et du panier 2, la raideur de flexion du panier 3 n'intervenant quasiment pas. Les trois premiers degrés de liberté correspondent aux déplacements élastiques relatifs de chaque masse, notés respectivement $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ et $u_3 = u_3(t)$. Ces déplacements sont parallèles à la base. Le dernier degré de liberté correspond à la rotation de corps rigide de l'empilement, notée $\theta = \theta(t)$.

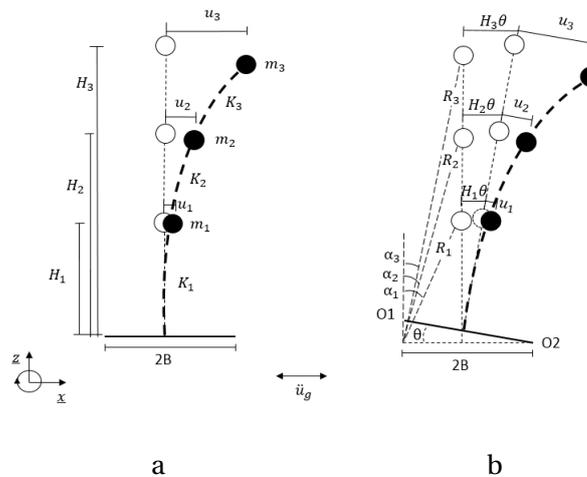


FIGURE III.12 – Schémas de la phase 1 (a) et de la phase 2 (b) du modèle S4DoF. Les dimensions ne sont pas à l'échelle.

On cherche à estimer le comportement du modèle lorsque celui-ci est sollicité par une excitation sismique \ddot{u}_g unidirectionnelle (dans la direction \underline{x}). La réponse de l'empilement sous séisme est composée de deux phases : la phase 1 pour laquelle la base est en contact total avec le support (phase dite de full contact) et la phase 2 pour laquelle la base se soulève (phase dite de rocking). Les phases 1 et 2 ainsi que le paramétrage du modèle sont respectivement représentés sur les figures III.12.a et III.12.b. On fait l'hypothèse que le contact est **ponctuel**, **instantané** et se faisant **sans glissement** aux points O_1 et O_2 situés respectivement à gauche et à droite de la base.

III.4.2 Structure composée d'une unique masse

III.4.2.1 Établissement des équations du mouvement

Afin d'établir les équations du mouvement à l'aide du formalisme de Lagrange, on considère, dans un premier temps, une superstructure composée **d'une unique masse**. Ce système est **libre** et **conservatif**¹ (cf. figure III.13). Les équations du mouvement sont uniquement présentées pour la **rotation de corps rigide autour du point O_2** . Le déplacement de la masse u est **parallèle à la base**.

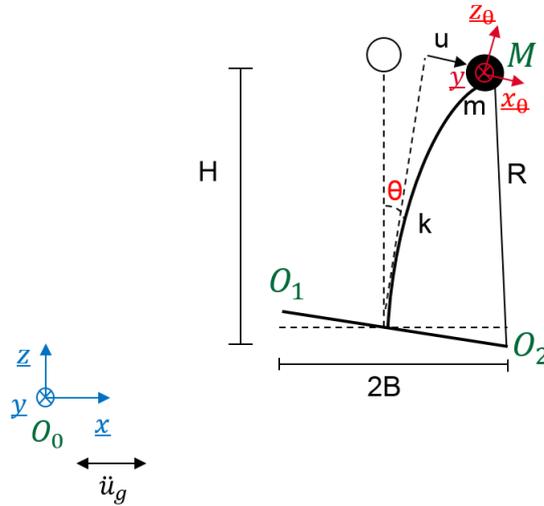


FIGURE III.13 – Schéma du système simplifié

Sur la figure III.13, deux référentiels sont représentés :

- le référentiel galiléen - $\mathcal{R}_O (O_0, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$,
- le référentiel associé à la masse ponctuelle m placée au point M - $\mathcal{R}_\theta (M, \underline{x}_\theta, \underline{y}, \underline{z}_\theta)$.

La rotation de \mathcal{R}_θ par rapport à \mathcal{R}_O est :

$$\Omega^{\mathcal{R}_\theta/\mathcal{R}_O} = \dot{\theta} \underline{y} \quad (III.20)$$

L'équivalence entre les deux référentiels est donnée par :

$$\begin{aligned} \underline{x}_\theta &= \cos(\theta) \underline{x} - \sin(\theta) \underline{z} \\ \underline{z}_\theta &= \sin(\theta) \underline{x} + \cos(\theta) \underline{z} \end{aligned} \quad (III.21)$$

Le vecteur position du point M est :

$$\underline{O_0M} = u_g \underline{x} + (u - B) \underline{x}_\theta + H \underline{z}_\theta \quad (III.22)$$

avec u_g connu et fonction du temps.

1. L'amortissement sera pris en compte à postériori via un modèle d'amortissement visqueux proportionnel.

Les paramètres du mouvement sont : u et θ . Les équations du mouvement associées à ces mouvements sont notées \mathcal{L}_u et \mathcal{L}_θ . Les équations du mouvement sont établies à partir des équations de Lagrange qui sont de la forme :

$$\mathcal{L}_u : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad (\text{III.23})$$

$$\mathcal{L}_\theta : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{III.24})$$

avec le lagrangien $L = E_c - E_p$ tel que E_c et E_p sont les énergies cinétique et potentielle.

Calcul des grandeurs énergétiques

L'énergie cinétique totale E_c de la structure composée d'une unique masse est la combinaison de l'énergie cinétique d'une masse ponctuelle et de l'énergie cinétique liée au moment d'inertie J_G du panier et des quatre colis exprimé au centre de gravité de l'ensemble :

$$E_c = \frac{1}{2} m \left(\frac{dO_0M}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2 \quad (\text{III.25})$$

avec :

$$\left(\frac{dO_0M}{dt} \right) = \dot{u}_g \underline{x} + (\dot{u} + H\dot{\theta}) \underline{x}_\theta + (B - u)\dot{\theta} \underline{z}_\theta \quad (\text{III.26})$$

et $J_G = \frac{m}{12}(h^2 + l^2)$ où h et l sont la hauteur et la largeur du panier et où m est la masse équivalente de la masse du panier et des quatre colis. L'énergie cinétique E_c s'écrit donc :

$$E_c = \frac{1}{2} m \left[\dot{u}_g^2 + (\dot{u} + H\dot{\theta})^2 + (B - u)^2 \dot{\theta}^2 + 2(\dot{u} + H\dot{\theta}) \dot{u}_g \cos(\theta) + 2(B - u) \dot{u}_g \dot{\theta} \sin(\theta) \right] + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2 \quad (\text{III.27})$$

L'énergie potentielle totale de la structure E_p est la combinaison des énergies potentielles du ressort et de pesanteur :

$$E_p = \frac{1}{2} k u^2 + m g z_{O_0M} \quad (\text{III.28})$$

Ainsi :

$$E_p = \frac{1}{2} k u^2 + m g (B - u) \sin(\theta) + m g H \cos(\theta) \quad (\text{III.29})$$

Le lagrangien L est donc égal à :

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{u}_g^2 + (\dot{u} + H\dot{\theta})^2 + (B - u)^2 \dot{\theta}^2 + 2(\dot{u} + H\dot{\theta}) \dot{u}_g \cos(\theta) + 2(B - u) \dot{u}_g \dot{\theta} \sin(\theta) \right] + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k u^2 - m g (B - u) \sin(\theta) - m g H \cos(\theta) \quad (\text{III.30})$$

Détermination des équations de Lagrange

Pour établir l'équation du mouvement \mathcal{L}_u on développe les termes de l'équation III.23 :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = m (\dot{u} + H\dot{\theta} + \dot{u}_g \cos(\theta)) \quad (\text{III.31})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = m (\ddot{u} + H\ddot{\theta} + \ddot{u}_g \cos(\theta) - \dot{\theta} \dot{u}_g \sin(\theta)) \quad (\text{III.32})$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = m ((B - u) \dot{\theta}^2 - \dot{u}_g \dot{\theta} \sin(\theta)) - k u + m g \sin(\theta) \quad (\text{III.33})$$

Ainsi :

$$\mathcal{L}_u : m \ddot{u} + m H \ddot{\theta} + m (B - u) \dot{\theta}^2 + k u + m \ddot{u}_g \cos(\theta) - m g \sin(\theta) = 0 \quad (\text{III.34})$$

①	Moment induit par la force liée à l'accélération relative de la masse
②	Moment lié à l'accélération angulaire de la structure
③	Moment induit par la force d'Euler
④	Moment induit par la force de Coriolis
⑤	Moment induit par la force sismique
⑥	Moment induit par le poids

TABEAU III.6 – Interprétation physique des termes de l'équation III.38

III.4.3 Structure composée de N masses : établissement des équations du mouvement

Généralisation du modèle « brochette » à N masses et N + 1 ddl. De même que dans la section précédente, la structure est **libre** et **conservative**. Les déplacements des masses u_i sont **parallèles à la base**. Les équations du mouvement sont uniquement présentées pour **la rotation de corps rigide autour du point O₂**. Les vecteurs positions des points M_i sont :

$$\underline{O_0M_i} = u_g \underline{x} + (u_i - B) \underline{x_\theta} + H_i \underline{z_\theta} \quad (\text{III.39})$$

avec i variant de 1 à N.

Calcul des grandeurs énergétiques

L'énergie cinétique totale E_c de la structure composée de N masses est :

$$E_c = \sum_{i=1}^N E_{c_i} + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2 \quad (\text{III.40})$$

avec :

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} m_i \left[\dot{u}_g^2 + (\dot{u}_i + H_i \dot{\theta})^2 + (B - u_i)^2 \dot{\theta}^2 + 2(\dot{u}_i + H_i \dot{\theta}) \dot{u}_g \cos(\theta) + 2(B - u_i) \dot{u}_g \dot{\theta} \sin(\theta) \right] \quad (\text{III.41})$$

et $J_G = N * \frac{m}{12} (h^2 + l^2)$ le moment d'inertie de chaque panier autour de leur centre de gravité.

L'énergie potentielle est :

$$E_p = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} k_i (u_i - u_{i-1})^2 + m_i g (B - u) \sin(\theta) + m_i g H_i \cos(\theta) \quad (\text{III.42})$$

avec $u_0 = 0$.

Détermination des équations de Lagrange

Les équations du mouvement sont établies de la même façon que dans la section précédente. Par rapport aux équations du mouvement de la section précédente des termes supplémentaires apparaissent, ils sont représentés en couleur. L'équation du mouvement \mathcal{L}_{u_1} de la masse 1 est :

$$m_1 \ddot{u}_1 + m_1 H_1 \ddot{\theta} + m_1 (B - u_1) \dot{\theta}^2 + (k_1 + k_2) u_1 + m_1 \ddot{u}_g \cos(\theta) - m_1 g \sin(\theta) - k_2 u_2 = 0 \quad (\text{III.43})$$

Les équations du mouvement \mathcal{L}_i des masses 2 à N - 1 sont :

$$m_i \ddot{u}_i + m_i H_i \ddot{\theta} + m_i (B - u_i) \dot{\theta}^2 + (k_i + k_{i+1}) u_i + m_i \ddot{u}_g \cos(\theta) - m_i g \sin(\theta) - k_i u_{i-1} - k_{i+1} u_{i+1} = 0 \quad (\text{III.44})$$

L'équation du mouvement \mathcal{L}_N de la masse N est :

$$m_N \ddot{u}_N + m_N H_N \ddot{\theta} + m_N (B - u_N) \dot{\theta}^2 + k_N u_N + m_N \ddot{u}_g \cos(\theta) - m_N g \sin(\theta) - k_N u_{N-1} = 0 \quad (\text{III.45})$$

L'équation du mouvement \mathcal{L}_θ est :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N m_i H_i \ddot{u}_i + \ddot{\theta} [J_G + \sum_{i=1}^N m_i (H_i^2 + (B - u_i)^2)] + 2 \sum_{i=1}^N m_i (u_i - B) \dot{u}_i \dot{\theta} + \ddot{u}_g \sum_{i=1}^N m_i [H_i \cos(\theta) + (B - u_i) \sin(\theta)] \\ & + \sum_{i=1}^N m_i g [(B - u_i) \cos(\theta) - H_i \sin(\theta)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

III.4.4 Établissement des équations du mouvement du modèle S4DoF (i.e. N = 3)

Les équations du mouvement du modèle S4DoF (cf. figure III.12) sont établies à partir des équations du mouvement de la section précédente en posant N = 3. Dans cette section, les équations sont écrites pour les rotations de corps rigide autour des points O₂ et O₁.

III.4.4.1 Équations du mouvement de la phase de full contact

Dans cette phase, il n'y a que trois degrés de liberté puisqu'il n'y a pas de rotation de corps rigide. Ainsi, en posant N = 3 et $\theta = 0$, les équations III.43, III.44 et III.45 peuvent s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M} \ddot{\underline{u}} + \mathbf{K} \underline{u} = -\ddot{u}_g \mathbf{M} \underline{1} \quad (\text{III.47})$$

où $\underline{1}$ est le vecteur unitaire tel que $\underline{1} = (1, 1, 1)^T$, $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, \mathbf{M} et \mathbf{K} sont respectivement les matrices de masse et de raideur définies par :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.48})$$

et

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.49})$$

Par ailleurs, nous avons fait le choix d'un **amortissement de Rayleigh**, ce qui permet d'imposer exactement les amortissements modaux des deux premiers modes (comme nous le verrons dans la suite le troisième mode n'intervient pas dans la réponse sismique). La matrice d'amortissement \mathbf{C} est donc déterminée par la combinaison linéaire suivante :

$$\mathbf{C} = C_1 \mathbf{M} + C_2 \mathbf{K} \quad (\text{III.50})$$

où C_1 et C_2 sont les coefficients de Rayleigh.

Ainsi, les équations du mouvement du modèle S4DoF lors de la phase de full contact sont :

$$\mathbf{M} \ddot{\underline{u}} + \mathbf{C} \dot{\underline{u}} + \mathbf{K} \underline{u} = -\ddot{u}_g \mathbf{M} \underline{1} \quad (\text{III.51})$$

III.4.4.2 Équations du mouvement de la phase de rocking

De même, en considérant l'amortissement de Rayleigh défini ci-dessus et en posant N = 3, les équations III.43, III.44, III.45 et III.46 peuvent s'écrire sous une forme matricielle. Les équations du mouvement de la phase 2 du modèle S4DoF sont donc :

$$\mathbf{M} \ddot{\underline{u}} + \mathbf{M} \underline{H} \ddot{\theta} + \mathbf{M} (\pm B \underline{1} - \underline{u}) \dot{\theta}^2 + \mathbf{C} \dot{\underline{u}} + \mathbf{K} \underline{u} = -\mathbf{M} \underline{1} \ddot{u}_g \cos(\theta) + \mathbf{M} \underline{1} g \sin(\theta) \quad (\text{III.52})$$

et

$$\begin{aligned} & \underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M} \ddot{\underline{u}} + [J_G + \underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{u}} \mp 2\underline{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{B}}_1] \ddot{\theta} \\ & \mp 2\underline{\dot{\mathbf{u}}}^T \mathbf{M} (\underline{\mathbf{B}}_1 \mp \underline{\mathbf{u}}) \dot{\theta} + \ddot{u}_g [\underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{1}} \cos(\theta) \pm \underline{\mathbf{1}}^T \mathbf{M} (\underline{\mathbf{B}}_1 \mp \underline{\mathbf{u}}) \sin(\theta)] \\ & + g [-\underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{1}} \sin(\theta) \pm \underline{\mathbf{1}}^T \mathbf{M} (\underline{\mathbf{B}}_1 \mp \underline{\mathbf{u}}) \cos(\theta)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.53})$$

avec $\underline{\mathbf{H}} = (H_1, H_2, H_3)^T$. Les signes du dessus et du dessous correspondent respectivement aux rotations de corps rigide autour des points O_2 et O_1 .

L'équation III.53 peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} & \underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M} \ddot{\underline{u}} + [J_{O_2} + \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{u}} \mp 2\underline{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{u}}] \ddot{\theta} \mp 2\underline{\dot{\mathbf{u}}}^T \mathbf{M} (\underline{\mathbf{B}}_1 \mp \underline{\mathbf{u}}) \dot{\theta} \\ & + \ddot{u}_g [\underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{1}} \cos(\theta) \pm \underline{\mathbf{1}}^T \mathbf{M} (\underline{\mathbf{B}}_1 \mp \underline{\mathbf{u}}) \sin(\theta)] \\ & + g [-\underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{1}} \sin(\theta) \pm \underline{\mathbf{1}}^T \mathbf{M} (\underline{\mathbf{B}}_1 \mp \underline{\mathbf{u}}) \cos(\theta)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.54})$$

où J_{O_2} est le moment d'inertie autour de O_2 tel que $J_{O_2} = J_G + \underline{\mathbf{R}}_o^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{R}}_o$ (cf. théorème de Huygens) avec $\underline{\mathbf{R}}_o = (\sqrt{B^2 + H_1^2}, \sqrt{B^2 + H_2^2}, \sqrt{B^2 + H_3^2})^T$. On retrouve le résultat de la référence [ACIKGOZ et DEJONG, 2016].

III.4.4.3 Linéarisation des équations de la phase de rocking

Dans cette section, on s'intéresse à la linéarisation des équations du mouvement afin (i) d'identifier les modes qui participent à la réponse du système sous séisme lors des phases de soulèvement et (ii) d'établir analytiquement la limite supérieure de la première pulsation du modèle S4DoF dans la phase de rocking. Avant de procéder à la linéarisation, on définit les fonctions \underline{F}_1 et \underline{F}_2 à l'aide des équations III.52 et III.54 :

$$\begin{aligned} & \underline{F}_1(\ddot{\underline{u}}, \dot{\underline{u}}, \underline{\mathbf{u}}, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) \\ & = \mathbf{M} \ddot{\underline{u}} + \mathbf{M} \underline{\mathbf{H}} \ddot{\theta} + \mathbf{M} (\pm \underline{\mathbf{B}}_1 - \underline{\mathbf{u}}) \dot{\theta}^2 + \mathbf{C} \dot{\underline{u}} + \mathbf{K} \underline{\mathbf{u}} - \mathbf{M} \underline{\mathbf{1}} g \sin(\theta) \\ & = -\mathbf{M} \underline{\mathbf{1}} \ddot{u}_g \cos(\theta) \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

$$\begin{aligned} & \underline{F}_2(\ddot{\underline{u}}, \dot{\underline{u}}, \underline{\mathbf{u}}, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) \\ & = \underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M} \ddot{\underline{u}} + [J_{O_2} + \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{u}} \mp 2\underline{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{u}}] \ddot{\theta} \mp 2\underline{\dot{\mathbf{u}}}^T \mathbf{M} (\underline{\mathbf{B}}_1 \mp \underline{\mathbf{u}}) \dot{\theta} + \\ & g (-\underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{1}} \sin(\theta) \pm \underline{\mathbf{1}}^T \mathbf{M} (\underline{\mathbf{B}}_1 \mp \underline{\mathbf{u}}) \cos(\theta)) \\ & = -\ddot{u}_g (\underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M} \underline{\mathbf{1}} \cos(\theta) \pm \underline{\mathbf{1}}^T \mathbf{M} (\underline{\mathbf{B}}_1 \mp \underline{\mathbf{u}}) \sin(\theta)) \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

On souhaite linéariser le système au voisinage d'une position $\theta = a$, sous les conditions \mathbb{C} suivantes $\underline{\mathbf{u}} = 0, \dot{\underline{\mathbf{u}}} = 0, \ddot{\underline{\mathbf{u}}} = 0, \ddot{\theta} = 0, \dot{\theta} = 0$ et $\ddot{u}_g = 0$. On a réalisé la linéarisation au voisinage d'une position $\theta \neq 0$ afin d'étudier dans un premier temps l'influence de l'angle de rotation au voisinage duquel on fait la linéarisation.

Dans le cadre de l'analyse modale, on considère $\ddot{u}_g = 0$. Pour la linéarisation on applique la procédure décrite dans [PALMERI et MAKRIS, 2008], légèrement réécrite, qui vise à chercher un modèle linéaire équivalent autour d'une position a . Ainsi, on cherche un système d'équations respectivement équivalent de la forme :

$$\begin{aligned} & \underline{F}_{L1}(\ddot{\underline{u}}, \dot{\underline{u}}, \underline{\mathbf{u}}, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) \\ & = \mathbf{M}_{L\underline{\mathbf{u}}} \ddot{\underline{u}} + \mathbf{C}_{L\underline{\mathbf{u}}} \dot{\underline{u}} + \mathbf{K}_{L\underline{\mathbf{u}}} \underline{\mathbf{u}} + \mathbf{M}_{L\theta} \ddot{\theta} + \mathbf{C}_{L\theta} \dot{\theta} + \mathbf{K}_{L\theta} (\theta - a) \end{aligned} \quad (\text{III.57})$$

$$\begin{aligned}
 & F_{L2}(\ddot{u}, \dot{u}, u, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) \\
 &= \mathbf{M}_{Lu}^T \ddot{u} + \mathbf{C}_{Lu}^T \dot{u} + \mathbf{K}_{Lu}^T u + M_{L\theta} \ddot{\theta} + C_{L\theta} \dot{\theta} + K_{L\theta} (\theta - a) \\
 &= \ddot{u}^T \mathbf{M}_{Lu} + \dot{u}^T \mathbf{C}_{Lu} + u^T \mathbf{K}_{Lu} + M_{L\theta} \ddot{\theta} + C_{L\theta} \dot{\theta} + K_{L\theta} (\theta - a)
 \end{aligned} \tag{III.58}$$

Au préalable, on linéarise $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ au voisinage de la position d'intérêt à savoir $\theta = a$. Le développement de Taylor-Young d'une fonction $f(x)$ en un point x_0 est donné par :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + o((x - x_0)^n) \tag{III.59}$$

Le terme que l'on cherche et qui est proportionnel à $(x - x_0)$ est le terme d'ordre $i = 1$, à savoir $f^{(1)}(x_0)$. On limite donc le développement à cet ordre. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M}\ddot{u} + \mathbf{M}\mathbf{H}\ddot{\theta} + \mathbf{M}(\mathbf{B}\mathbf{1} - \underline{u})\dot{\theta}^2 + \mathbf{C}\dot{u} + \mathbf{K}u - \\
 & \mathbf{M}\mathbf{1}g(\sin(a) + \cos(a) (\theta - a)) = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_g(\cos(a) - \sin(a) (\theta - a))
 \end{aligned} \tag{III.60}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{H}^T \mathbf{M} \ddot{u} + (J_{O_2} + \underline{u}^T \mathbf{M} \underline{u} \mp 2\mathbf{B}\mathbf{1}^T \mathbf{M} \underline{u}) \ddot{\theta} \mp 2\dot{u}^T \mathbf{M} (\mathbf{B}\mathbf{1} \mp \underline{u}) \dot{\theta} + \\
 & g(-\mathbf{H}^T \mathbf{M} \mathbf{1} (\sin(a) + \cos(a) (\theta - a)) \pm \mathbf{1}^T \mathbf{M} (\mathbf{B}\mathbf{1} \mp \underline{u}) (\cos(a) - \sin(a) (\theta - a))) = \\
 & -\ddot{u}_g (\mathbf{H}^T \mathbf{M} \mathbf{1} (\cos(a) - \sin(a) (\theta - a)) \pm \mathbf{1}^T \mathbf{M} (\mathbf{B}\mathbf{1} \mp \underline{u}) (\sin(a) + \cos(a) (\theta - a)))
 \end{aligned} \tag{III.61}$$

Linéarisation de l'équation vectorielle III.60

Pour linéariser l'équation vectorielle III.60, on minimise le résidu vectoriel tel que :

$$\mathbf{R}_1(\ddot{u}, \dot{u}, u, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) = \mathbf{F}_1(\ddot{u}, \dot{u}, u, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) - \mathbf{F}_{L1}(\ddot{u}, \dot{u}, u, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) \tag{III.62}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \ddot{u}} \right)_C = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_{Lu} = \mathbf{M} \tag{III.63}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \dot{u}} \right)_C = 0 \Rightarrow \mathbf{C}_{Lu} = \mathbf{C} \tag{III.64}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial u} \right)_C = 0 \Rightarrow \mathbf{K}_{Lu} = \mathbf{K} \tag{III.65}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \ddot{\theta}} \right)_C = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_{L\theta} = \mathbf{M}\mathbf{H} \tag{III.66}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \dot{\theta}} \right)_C = 0 \Rightarrow \mathbf{C}_{L\theta} = \mathbf{0} \tag{III.67}$$

Compte tenu de la linéarisation effectuée au préalable, on obtient directement :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \theta} \right)_C = 0 \Rightarrow \mathbf{K}_{L\theta} = -\mathbf{M}\mathbf{1}g \cos(a) \tag{III.68}$$

Linéarisation de l'équation scalaire III.61 :

Pour linéariser l'équation scalaire III.61, on minimise le résidu scalaire tel que :

$$R_2(\ddot{u}, \dot{u}, u, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) = F_2(\ddot{u}, \dot{u}, u, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) - F_{L2}(\ddot{u}, \dot{u}, u, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) \tag{III.69}$$

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial \underline{\ddot{u}}}\right)_C = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_{Lu} = \underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M} \quad (\text{III.70})$$

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial \underline{\dot{u}}}\right)_C = 0 \Rightarrow \mathbf{C}_{Lu} = \mathbf{0} \quad (\text{III.71})$$

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial \underline{u}}\right)_C = 0 \Rightarrow \mathbf{K}_{Lu} = \mp \mathbf{M}_1 g \cos(a) \quad (\text{III.72})$$

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial \ddot{\theta}}\right)_C = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_{L\theta} = J_{O_2} \quad (\text{III.73})$$

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial \dot{\theta}}\right)_C = 0 \Rightarrow \mathbf{C}_{L\theta} = 0 \quad (\text{III.74})$$

Compte tenu de la linéarisation effectuée au préalable, on obtient directement :

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial \theta}\right)_C = 0 \Rightarrow \mathbf{K}_{L\theta} = -g(\underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M}_1 \cos(a) \pm \underline{\mathbf{1}}^T \mathbf{M} \mathbf{B}_1 \sin(a)) \quad (\text{III.75})$$

Le système d'équations linéarisées est donc donné par :

$$\mathbf{M}\underline{\ddot{u}} + \mathbf{C}\underline{\dot{u}} + \mathbf{K}\underline{u} + \mathbf{M}\underline{\mathbf{H}}\ddot{\theta} - \mathbf{M}_1 g \cos(a)(\theta - a) = 0 \quad (\text{III.76})$$

$$\underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M}\underline{\ddot{u}} \mp \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{M}_1 g \cos(a) + J_{O_2} \ddot{\theta} - g(\underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M}_1 \cos(a) \pm \underline{\mathbf{1}}^T \mathbf{M} \mathbf{B}_1 \sin(a))(\theta - a) = 0 \quad (\text{III.77})$$

Remarque

Lorsque $a = 0$ et $\dot{u}_g = 0$, on retrouve le résultat de la référence [ACIKGOZ et DEJONG, 2016] :

$$\mathbf{M}\underline{\ddot{u}} + \mathbf{C}\underline{\dot{u}} + \mathbf{K}\underline{u} + \mathbf{M}\underline{\mathbf{H}}\ddot{\theta} - \mathbf{M}_1 g \theta = 0 \quad (\text{III.78})$$

$$\underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M}\underline{\ddot{u}} \mp \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{M}_1 g + J_{O_2} \ddot{\theta} - g \underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M}_1 \theta = 0 \quad (\text{III.79})$$

Le terme $m_t g B$, où m_t désigne la masse totale du système, n'apparaît pas puisqu'il n'a pas été recherché dans la linéarisation. Néanmoins, on peut vérifier que la prise en compte de ce terme n'aurait pas d'influence sur le résultat du problème aux valeurs propres. En effet, en tenant compte du terme $m_t g B$, l'équation III.79 peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M}\underline{\ddot{u}} \mp \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{M}_1 g + J_{O_2} \ddot{\theta} - g H_{cg} m_t \theta \pm m_t g B = 0 \quad (\text{III.80})$$

Soit :

$$\underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M}\underline{\ddot{u}} \mp \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{M}_1 g + J_{O_2} \ddot{\theta} - g H_{cg} m_t \left(\theta \mp \frac{B}{H_{cg}} \right) = 0 \quad (\text{III.81})$$

avec $m_t = \underline{\mathbf{1}}^T \mathbf{M}_1$ la masse totale du système et $H_{cg} = \underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{M}_1 / m_t$ la hauteur du centre de gravité de la structure. Dans l'équation III.81, le terme B/H_{cg} peut s'interpréter comme un angle au voisinage duquel on effectue la linéarisation. Comme la présence de ce terme n'affecte pas la matrice de raideur du système linéarisé, le résultat du problème aux valeurs propres sera équivalent avec ou sans ce terme.

Résolution du problème aux valeurs propres

Les matrices globales \mathbf{M}_L et \mathbf{K}_L qui correspondent au système linéarisé sont données pour $\theta > 0$ par :

$$\mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & m_1 H_1 \\ 0 & m_2 & 0 & m_2 H_2 \\ 0 & 0 & m_3 & m_3 H_3 \\ m_1 H_1 & m_2 H_2 & m_3 H_3 & J_{O_2} \end{pmatrix} \quad (\text{III.82})$$

$$\mathbf{K}_L = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & -m_1 g \cos(a) \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & -m_2 g \cos(a) \\ 0 & -k_3 & k_3 & -m_3 g \cos(a) \\ -m_1 g \cos(a) & -m_2 g \cos(a) & -m_3 g \cos(a) & K_{L\theta} \end{pmatrix} \quad (\text{III.83})$$

Dans la pratique, comme θ reste petit pour les niveaux sismiques modérés, nous avons vérifié que la modification de la matrice \mathbf{K}_L apportée par le terme $\cos(a)$, n'avait pas d'incidence sur les résultats du problème aux valeurs propres. À partir de ces matrices, les valeurs propres du modèle S4DoF dans la phase de rocking peuvent être calculées en résolvant :

$$\det(\mathbf{K}_L - \omega^2 \mathbf{M}_L) = 0 \quad (\text{III.84})$$

Analytiquement, on peut montrer qu'une limite supérieure de la première pulsation du modèle S4DoF dans la phase de rocking, notée ω_r , peut-être trouvée telle que :

$$\omega_r < \sqrt{\frac{J_G + \underline{R}_o^T \underline{M} \underline{R}_o}{J_G + \underline{R}_o^T \underline{M} \underline{R}_o - \underline{H}^T \underline{M} \underline{H}}} \omega_{fc} \approx 2,4 \omega_{fc} \quad (\text{III.85})$$

avec ω_{fc} la première pulsation du modèle S4DoF dans la phase de full contact.

III.4.4.4 Transitions entre les deux phases du mouvement

À l'instant initial, l'empilement est dans la configuration de la phase 1. La base commence à se soulever lorsque le moment dynamique induit par l'accélération absolue des masses est supérieur au moment « résistant » dû à la pesanteur. Le critère de transition entre la phase 1 et la phase 2 est :

$$\mp \sum_{i=1}^3 m_i H_i (\ddot{u}_i + \ddot{u}_g) > \sum_{i=1}^3 m_i g (B \mp u_i) \quad (\text{III.86})$$

Pour modéliser la transition entre la phase 2 et la phase 1, nous avons fait le choix d'appliquer le modèle VVEL présenté dans le chapitre précédent. Ainsi, on fait l'hypothèse que l'énergie cinétique verticale est complètement dissipée lors de l'impact (cf. équation III.87) et que l'énergie cinétique horizontale est conservée après l'impact (cf. équation III.88).

$$(\theta)_+ = (\dot{\theta})_+ = 0 \quad (\text{III.87})$$

$$(\dot{u}_i)_+ = (\dot{u}_i + H_i \dot{\theta})_-, \quad i = \{1, 2, 3\} \quad (\text{III.88})$$

avec $(.)_-$ et $(.)_+$ les grandeurs d'intérêt avant et après impact.

III.4.4.5 Résolution numérique des équations du mouvement

Les équations III.51, III.52 et III.53 ont été résolues numériquement à l'aide du solveur ODE de MATLAB.

III.4.5 Limites du modèle S4DoF

Ce modèle qui est une représentation simplifiée de la structure est peu coûteux en temps de calcul. L'utilisation de ce modèle a fortement contribué à la compréhension du comportement dynamique d'une structure libre et flexible. Néanmoins, cette modélisation ne prend pas en compte :

- les glissements inter-paniers et à la base de la structure,
- les excitations bidirectionnelles (bien que l'on puisse considérer l'effet d'une sollicitation verticale qui n'induit pas de décollement des deux appuis) et tridirectionnelles,
- le mouvement de la structure dans le plan transverse à l'excitation c'est-à-dire dans le plan Oyz,
- le renversement de la structure.

Pour finir, nous avons fait le choix du modèle VVEL, proposé par Vassiliou et Dejong [VASSILIOU et collab., 2015], pour traduire les transitions de phases, ce modèle est présenté dans II.5.2. Ce modèle reste à être validé car les phénomènes physiques intervenant lors des transitions des phases ne sont pas bien identifiés. L'approche de type Housner, proposée par dans [ACIKGOZ et DEJONG, 2016], concernant les transitions de phases a également été considérée. Néanmoins, comme eux et de nombreux auteurs, nous avons constaté que la valeur du coefficient de restitution d'énergie doit être fortement ajustée pour obtenir un accord satisfaisant avec les résultats expérimentaux. L'élanement de la structure étant faible (égale à 2,4), le recours à la conservation du moment cinétique n'est pas adapté.

III.5 Aperçu sur la limite de validité du calcul sur base modale pour les structures libres

La méthode de recombinaison modale permet de résoudre les équations du mouvement avec un temps de calcul raisonnable. Néanmoins, cette technique a des limites. Dans cette partie, on cherche à évaluer la limite de validité du calcul sur base modale pour des structures rigides et flexibles susceptibles de basculer sous séisme.

Dans l'absolu, pour répondre à cette question, la meilleure stratégie est de comparer les résultats obtenus par le calcul sur base modale avec ceux d'un calcul direct (sur base physique). Faute de pouvoir réaliser cette tâche dans le temps imparti à la thèse, la stratégie que l'on a adoptée consiste (i) à dériver des équations « équivalentes » à celles qui sont résolues lorsque l'on utilise la technique de projection sur base modale et (ii) à comparer :

- les résultats des simulations réalisées avec les équations exactes (résultats nommés « NL »);
- les résultats des simulations réalisées les équations « équivalentes » (résultats nommés « NL eq. »);
- les résultats obtenus avec CAST3M par la technique de projection sur base modale (résultats nommés « CAST3M »).

Cette stratégie a été appliquée à un bloc rigide en considérant le modèle d'Housner et à une structure flexible en considérant le modèle S4DoF. Dans les deux cas, nous avons considéré deux types d'excitation : (i) une excitation bande étroite sinusoïdale et (ii) une excitation sismique réelle large bande. Les évolutions temporelles de ces deux excitations sont respectivement représentées sur les figures III.14.a et III.14.b.

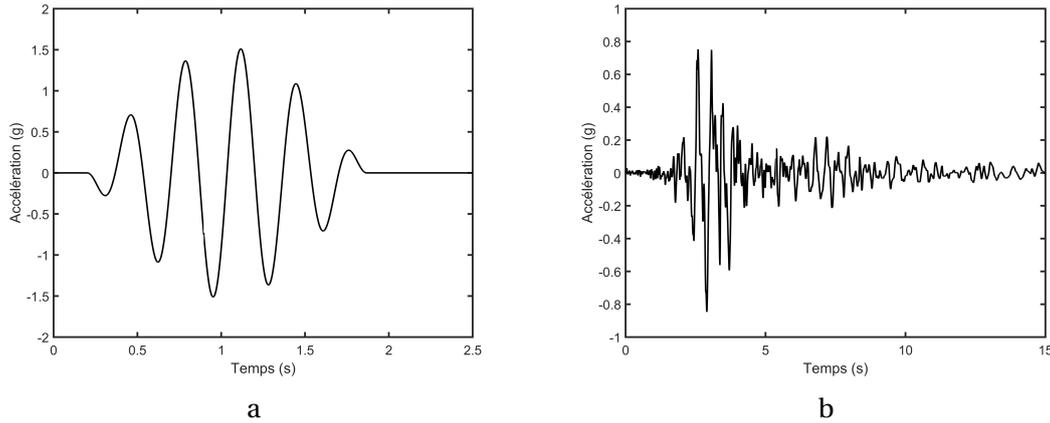


FIGURE III.14 – Évolutions temporelles de l'excitation sinusoïdale (a) et de l'excitation sismique réelle (b)

Avant de présenter les résultats pour les deux systèmes mécaniques, on rappelle que :

- lors d'un calcul sur base modale, les équations sur lesquelles on s'appuie pour effectuer la projection correspondent aux équations du mouvement **dans la configuration au repos**. En conséquence, pour une structure susceptible de basculer les moments des forces extérieures qui s'appliquent sur elle lors du mouvement ne peuvent dépendre ni de l'angle de rotation de cette dernière, ni des déplacements de la superstructure (pour les structures flexibles) ;
- les équations qui régissent les mouvements des corps rigides, lesquels sont utilisés dans la base modale de projection, sont des relations linéaires (dépendance linéaire à l'angle de rotation ainsi qu'à la vitesse de rotation).

III.5.1 Basculement d'un bloc rigide : modèle d'Housner

Calcul NL

Les équations du mouvement associées au modèle d'Housner sont données par :

$$I_0 \ddot{\theta} = \mp mgR \sin(\alpha \mp \theta) + m \ddot{u}_g R \cos(\alpha \pm \theta) \quad (\text{III.89})$$

Calcul NL «équivalents»

Pour obtenir les équations «équivalentes» à celles qui sont résolues lors d'un calcul sur base modale, il est nécessaire de considérer que $\theta = 0$ **dans les expressions des moments des forces extérieures**, pour rendre compte du fait qu'ils sont exprimés sur la configuration à l'instant initial du bloc (à l'instant initial le bloc est dans la phase de full contact), soit :

$$I_0 \ddot{\theta} = \mp mgR \sin(\alpha) + m \ddot{u}_g R \cos(\alpha) \quad (\text{III.90})$$

CAST3M

Nous avons développé un modèle 2D de basculement d'un bloc libre et «rigide» à partir du code CAST3M. Les équations du mouvement sont résolues à l'aide de la méthode de décomposition modale. La base modale utilisée pour les calculs correspond à la base des modes libres, seuls les modes de corps rigide sont pris en compte dans la résolution. Les non-linéarités du problème sont les mouvements de soulèvements entre le bloc et le sol. Elles sont traitées numériquement par le biais de la liaison *point point frottement* de l'opérateur *DYNE* de CAST3M, qui correspond à une méthode de pénalisation qui a été rappelée à la section III.3.1. Compte tenu des hypothèses du modèle d'Housner, le glissement entre le bloc et le sol n'est pas modélisé.

Exemple d'application

Pour réaliser notre comparaison, nous avons considéré un bloc dont l'élancement est égal à 7. Nous avons retenu cette valeur d'élancement car l'on sait que le modèle d'Housner, et en particulier la valeur du coefficient de restitution d'énergie, est considérée comme valide pour les grands élancements. Dans cette étude, seul 15% du niveau de l'excitation sinusoïdale et 20% du niveau de l'excitation sismique ont été appliqués au bloc afin d'étudier son basculement sans aller jusqu'au renversement. Les réponses du bloc sont présentées sur les figures III.15 et III.16. Les évolutions temporelles de la rotation et du soulèvement du bloc sont respectivement représentées sur les figures a et b. La rotation des calculs « CAST3M » correspond à une rotation « équivalente » calculée à partir des soulèvements, c'est pour cela qu'apparaissent des rotations à valeurs nulles. Ces figures indiquent que les résultats des calculs « NL » et « NL eq. » ne sont pas équivalents quelle que soit l'excitation. Pour l'excitation sinusoïdale, les résultats des calculs « NL eq. » et « CAST3M » sont équivalents, ce qui illustre bien le fait que la technique de résolution sur base modale que l'on utilise couramment revient à considérer que les moments des efforts extérieurs sont appliqués sur la configuration initiale de la structure. Pour l'excitation sismique, les résultats de ces deux calculs ne coïncident pas dans la mesure où l'extrême sensibilité du comportement est exacerbée avec une excitation large bande, sachant que le traitement des impacts est rigoureusement différent entre les deux types de calcul : coefficient de restitution d'énergie pour le modèle d'Housner et méthode de pénalisation pour le modèle réalisé avec CAST3M.

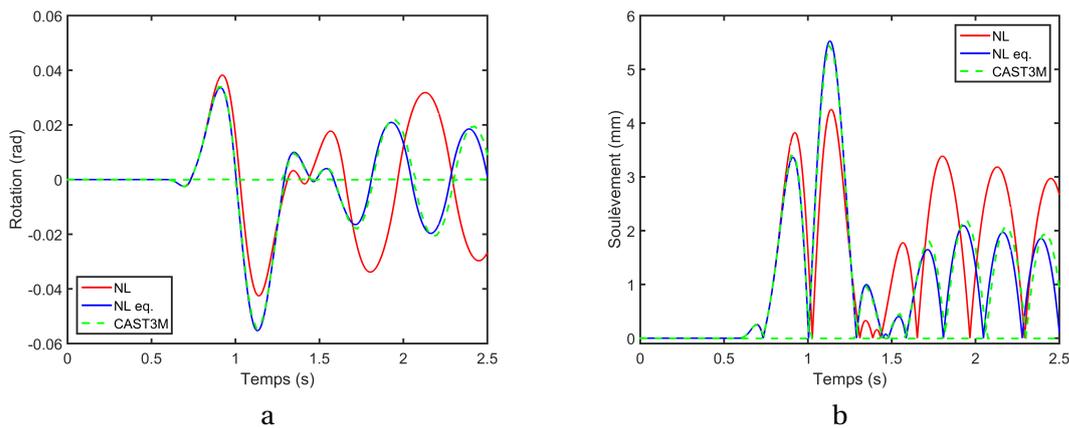


FIGURE III.15 – Évolutions temporelles de la rotation (a) et du soulèvement (b) du bloc sollicité par une excitation sinusoïdale pour les calculs « NL » (équation III.89), « NL eq. » (équation III.90) et CAST3M

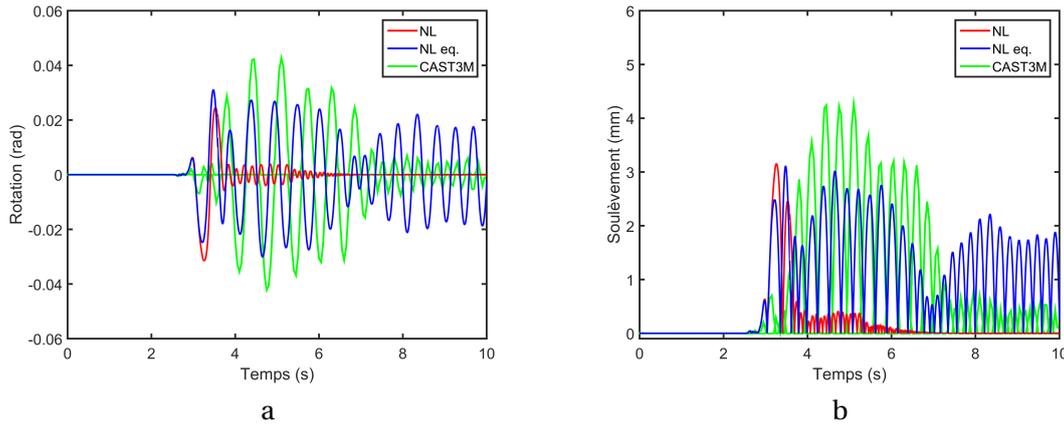


FIGURE III.16 – Évolutions temporelles de la rotation (a) et du soulèvement (b) du bloc sollicité par une excitation sismique réelle pour les calculs « NL » (équation III.89), « NL eq. » (équation III.90) et CAST3M

III.5.2 Basculement d'une structure flexible : modèle S4DoF

Calcul NL

Les équations de référence du modèle S4DoF sont les équations III.51 (pour la phase de full contact) et les équations III.52 et III.54 (pour la phase de rocking).

Calcul NL « équivalents »

Pour obtenir les équations du mouvement équivalentes pour le modèle S4DoF, on impose $\theta = 0$ et $u = 0$ dans les expressions des moments des forces extérieures qui interviennent dans les équations III.54. Il n'est pas nécessaire de faire de même pour les expressions de ces forces dans les équations III.52 puisqu'il s'agit d'une projection de l'équation d'équilibre sur le vecteur \underline{x}_θ . Par ailleurs, les termes de couplage non linéaires, résultant des forces dites d'inertie, demeurent inchangés dans la mesure où ils sont une conséquence de l'écriture des équations du mouvement dans le référentiel en rotation (cf. paragraphe III.4.2.2). Ainsi, le système d'équations « équivalent » est :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\underline{u}} + \mathbf{M}\underline{H}\ddot{\theta} + \mathbf{M}(\mathbf{B}\underline{1} - \underline{u})\dot{\theta}^2 + \mathbf{C}\dot{\underline{u}} + \mathbf{K}\underline{u} - \mathbf{M}\underline{1}g \sin(\theta) \\ = -\mathbf{M}\underline{1}\ddot{u}_g \cos(\theta) \end{aligned} \quad (\text{III.91})$$

$$\begin{aligned} \underline{H}^T \mathbf{M}\ddot{\underline{u}} + \mathcal{J}_{O_2} + \underline{u}^T \mathbf{M}\underline{u} \mp 2\mathbf{B}\underline{1}^T \mathbf{M}\underline{u} \ddot{\theta} \mp 2\dot{\underline{u}}^T \mathbf{M}(\mathbf{B}\underline{1} \mp \underline{u})\dot{\theta} \pm \\ g\underline{1}^T \mathbf{M}\mathbf{B}\underline{1} = -\ddot{u}_g \underline{H}^T \mathbf{M}\underline{1} \end{aligned} \quad (\text{III.92})$$

CAST3M

Faute de temps, nous n'avons pas développé de modèle équivalent au modèle S4DoF avec CAST3M. Nous avons considéré ici le modèle SNLFE, bien que cela constitue une anticipation sur la suite. Il est brièvement présenté dans la section III.3.2.2 et les paramètres de calcul sont décrits dans le chapitre suivant.

Exemple d'application

Les réponses des différents modèles sollicités par les deux excitations sont respectivement représentées sur les figures III.17 et III.18. Les évolutions temporelles des rotations et des soulèvements de la base sont présentées sur les figures a et b. Les évolutions temporelles des déplacements en tête sont présentées sur les figures c. Les SRO amortis à 0,2% des accélérations absolues calculées au niveau du troisième panier sont présentés sur les figures d. Ces figures indiquent que quelle que soit l'excitation, ces trois calculs sont globalement équivalents. Bien que ces derniers présentent des amplitudes de déplacements différentes, dont les causes tiennent essentiellement au fait que les modèles ne sont pas équivalents (modèle brochette vs. modèle éléments finis), de même que les traitements des impacts. Nous y reviendrons dans le chapitre suivant. On peut néanmoins d'ores et déjà constater, grâce à ces résultats, que le comportement sismique des structures flexibles est, comme l'on peut s'y attendre, beaucoup moins sensible que celui des structures rigides. On remarque en effet que les différences de traitement des impacts ont des conséquences moins marquées sur le comportement sismique global de la structure.

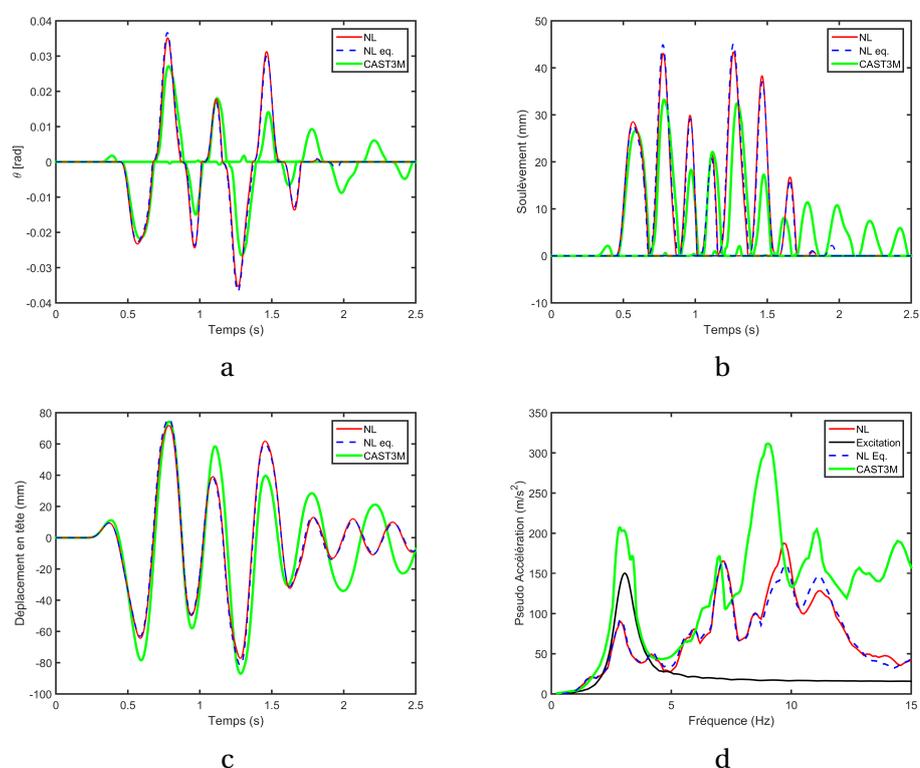


FIGURE III.17 – Évolutions temporelles des rotations (a), des soulèvements de la base (b) et des déplacements en tête (c) ainsi que les SRO amortis à 0,2% des accélérations absolues calculées au niveau du panier 3 (d) pour l'excitation sinusoïdale pour les calculs « NL » (équations III.51, III.52 et III.53), « NL eq. » (équations III.51, III.91 et III.92) et CAST3M

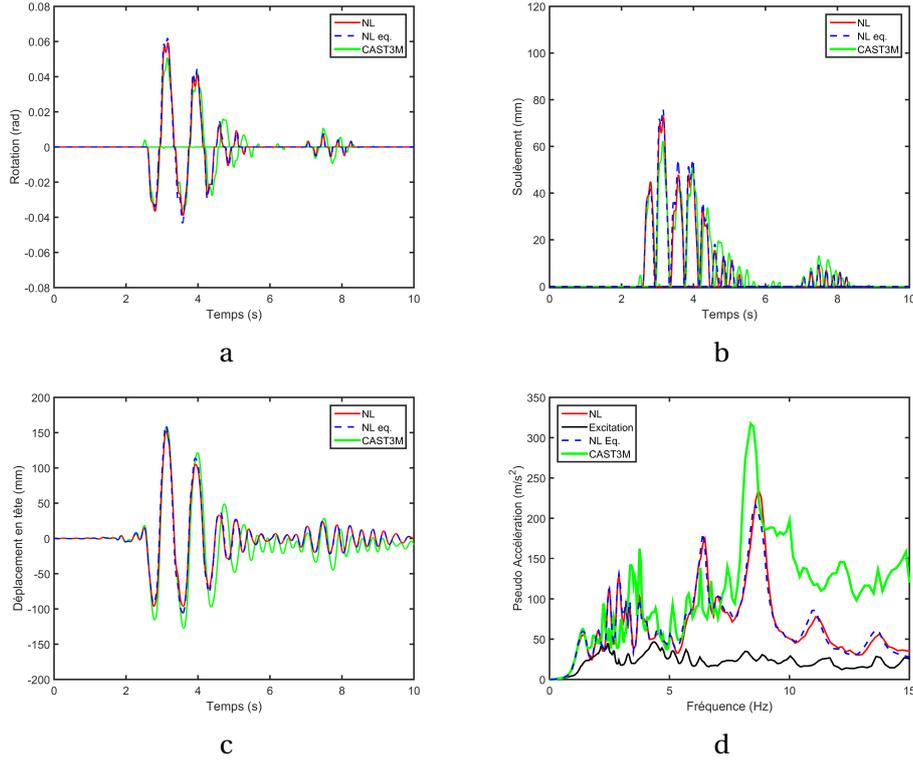


FIGURE III.18 – Évolutions temporelles des rotations (a), des soulèvements de la base (b) et des déplacements en tête (c) ainsi que les SRO amortis à 0,2% des accélérations absolues calculées au niveau du panier 3 (d) pour l'excitation sismique réelle pour les calculs « NL » (équations III.51, III.52 et III.53), « NL eq. » (équations III.51, III.91 et III.92) et CAST3M

III.5.3 Remarque sur les équations du mouvement linéarisées et « équivalentes »

Les équations « équivalentes » ne sont pas toujours similaires aux équations linéarisées. Dans cette section, on compare ces deux équations pour les deux cas d'applications présentés ci-dessus : pour le modèle d'Housner et pour le modèle S4DoF.

III.5.3.1 Basculement d'un bloc rigide : modèle d'Housner linéarisé

Dans le cas où θ est petit, les équations du mouvement associées au modèle d'Housner sont :

$$I_0 \ddot{\theta} = \mp mgR[\sin(\alpha) \mp \cos(\alpha)\theta] + m\ddot{u}_g R[\cos(\alpha) \pm \sin(\alpha)\theta] \quad (\text{III.93})$$

Ainsi, en linéarisant au voisinage de $\theta = 0$, les équations linéarisées sont identiques aux équations « équivalentes » du modèle d'Housner.

III.5.3.2 Basculement d'une structure flexible : modèle S4DoF linéarisé

Les équations linéarisées au voisinage de $\theta = 0$ associées au modèle S4DoF de la phase 2 sont :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{H}\ddot{\theta} - \mathbf{M}\mathbf{1}g\theta = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_g \quad (\text{III.94})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^T \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} \mp \mathbf{u}^T \mathbf{M}\mathbf{1}g + J_{O_2} \ddot{\theta} \\ -g\mathbf{H}^T \mathbf{M}\mathbf{1}\theta \pm m_t gB + m_t H_{cg} \ddot{u}_g = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.95})$$

Ces équations ne sont pas similaires aux équations « équivalentes » de la section III.5.2.

À titre complémentaire, la comparaison des résultats des simulations réalisées avec les équations « NL » et « linéarisées » lorsque le modèle S4DoF est sollicité par l'excitation sismique de la section précédente est représentée sur la figure III.19. Les réponses du modèle calculées à partir du système d'équations de référence et à partir du système d'équations « linéarisés » sont représentées respectivement en rouge et en bleu. On observe qu'il y a peu d'écart entre ces deux réponses. Ces deux systèmes sont donc équivalents dans la mesure où l'angle de rotation reste petit (de l'ordre de 0,06 radian).

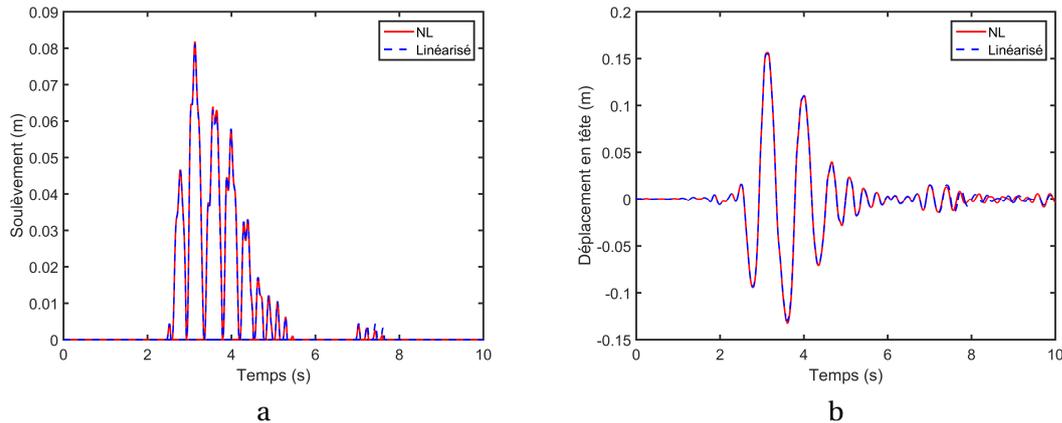


FIGURE III.19 – Évolutions temporelles du soulèvement (a) et du déplacement en tête (b) obtenues à partir des équations non linéaires et à partir des équations linéarisées

III.5.4 Conclusion

Dans cette section, la limite de validité du calcul sur base modale pour des structures susceptibles de basculer sous séisme a été évaluée pour une structure rigide puis pour une structure flexible sous excitation unidirectionnelle. Les réponses de deux modèles simplifiés ont été calculées à partir des équations exactes, des équations « équivalentes » à celles qui sont résolues lorsque l'on utilise une méthode de projection sur base modale et à l'aide de modèles développés sous CAST3M. Cette étude a montré que la méthode modale ne permet pas de calculer le mouvement sous séisme de structures rigides, les écarts entre les calculs exacts et « équivalents » étant trop importants. Pour les structures flexibles, ces réponses sont quasiment identiques ce qui tend à prouver qu'il est possible de recourir à une technique de calcul sur base modale pour ces structures, dès lors que l'on ne s'intéresse pas au renversement, ce qui est le cas ici dans la mesure où l'élanement de l'empilement auquel on s'intéresse est relativement faible, de l'ordre de 2,4. Les conclusions de cette étude ne sont valables que pour un comportement 1D dans la mesure où les modèles d'Housner et S4DoF sont des modèles plans, ce qui est une limite de cette approche qui permet, néanmoins, de se faire une idée sur la question.

III.6 Synthèse

Dans ce chapitre, la structure étudiée dans cette thèse, ainsi que les approches expérimentale et numériques qui ont été développées pour étudier son comportement sismique ont été présentées. Les tableaux III.7, III.8, III.9, III.10, III.11, III.12 et III.13 présentent brièvement les avantages et les limites de ces différentes approches. Le tableau III.14 indique les modèles numériques qui ont été utilisés pour interpréter les essais de caractérisation modale et les essais sismiques. Le résultat de ces comparaisons sont présentés dans le chapitre suivant.

Campagne expérimentale : EDEN		
Description	Avantage(s)	Limite(s)
Campagne expérimentale	Représente le comportement réel	Le nombre d'essais et de configurations sont limités L'excitation est 1D La structure n'est pas parfaite

TABLEAU III.7 – Synthèse de la campagne expérimentale

Modèle de référence		
Description	Avantage(s)	Limite(s)
Modèle basé sur des éléments finis de type coque et plaque	Grand degré de précision Permet d'interpréter les essais de caractérisation modale	Coûteux en temps de calcul Ne permet pas d'interpréter les essais sismiques dans des temps raisonnables Le calcul jusqu'au renversement ne peut pas être mené

TABLEAU III.8 – Synthèse du modèle de référence

Modèle réduit : SNLFE		
Description	Avantage(s)	Limite(s)
<p>Modèle basé sur des éléments finis de type poutre et plaque</p> <p>Modélisation des non-linéarités au niveau de la base</p>	<p>Peu coûteux en temps de calcul</p> <p>Comportement 3D</p>	<p>Les mouvements entre les paniers ne sont pas représentés</p> <p>Les défauts de la structure ne sont pas représentés</p> <p>Le calcul jusqu'au renversement ne peut pas être mené</p>

TABLEAU III.9 – Synthèse du modèle SNLFE

Modèle réduit : NLFE		
Description	Avantage(s)	Limite(s)
<p>Modèle basé sur des éléments finis de type poutre et plaque</p> <p>Modélisation des non-linéarités aux interfaces panier / panier et panier / sol</p>	<p>Représentatif de la physique</p> <p>Comportement 3D</p>	<p>Coûteux en temps de calcul</p> <p>Les défauts de la structure ne sont pas représentés</p> <p>Le calcul jusqu'au renversement ne peut pas être mené</p>

TABLEAU III.10 – Synthèse du modèle NLFE

Modèle réduit : SNLFED		
Description	Avantage(s)	Limite(s)
<p>Modèle basé sur des éléments finis de type poutre et plaque</p> <p>Modélisation des non-linéarités au niveau de la base</p> <p>Modélisation des défauts</p>	<p>Peu coûteux en temps de calcul</p> <p>Comportement 3D</p>	<p>Les mouvements entre les paniers ne sont pas représentés</p> <p>Le calcul jusqu'au renversement ne peut pas être mené</p>

TABLEAU III.11 – Synthèse du modèle SNLFED

Modèle réduit : NLFED		
Description	Avantage(s)	Limite(s)
Modèle basé sur des éléments finis de type poutre et plaque	Représentatif de la physique	Coûteux en temps de calcul
Modélisation des non-linéarités de chaque panier	Comportement 3D	Le calcul jusqu'au renversement ne peut pas être mené
Modélisation des défauts		

TABLEAU III.12 – Synthèse du modèle NLFED

Modèle semi-analytique : S4DoF		
Description	Avantage(s)	Limite(s)
4 degrés de liberté	<p>Permet de comprendre globalement la physique</p> <p>Peu coûteux en temps de calculs</p> <p>Permet d'obtenir une estimation rapide de la réponse de la structure sous excitation unidirectionnelle</p>	<p>Comportement 1D</p> <p>Ne modélise pas le glissement</p> <p>Les transitions de phases ne sont pas bien décrites</p> <p>Le calcul jusqu'au renversement ne peut pas être mené (mais pourrait être introduit)</p>

TABLEAU III.13 – Synthèse du modèle S4DoF

	Analyse modale	Analyse sismique
Campagne expérimentale		
Modèles numériques : Modèles d'éléments finis	<p>Modèle de référence</p> <p>Modèles réduits</p>	<p>Modèles réduits</p> <p>NLFE</p> <p>NLFED</p> <p>SNLFE</p> <p>SNLFED</p>
Modèles numériques : Modèle semi-analytique	S4DoF	S4DoF

TABLEAU III.14 – Schéma de synthèse

III.7 Références

- ACIKGOZ, S. et M. J. DEJONG. 2016, «Analytical modelling of multi-mass flexible rocking structures», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 45, n° 13, p. 2103–2122. [64](#), [70](#), [72](#), [74](#)
- AMBRASEYS, N. N., J. DOUGLAS, R. SIGBJÖRNSSON, D. RINALDIS, C. BERGE-THIERRY, P. SUHADOLC et G. COSTA. 2004, «Dissemination of european strong motion data using strong motion data-cape navigator», , p. 1–80. [54](#)
- BEYLAT, D. et S. VASIC. 2019, «Rapport d’essais de la campagne expérimentale eden», *Rapport interne*. [52](#)
- BROCHARD, D., P. BLAND et G. F. 1988, «Cours i.p.s.i. sur le comportement sismique des bâtiments et équipements», *Rapport interne CEA*. [57](#)
- MATHEY, C. 2016, «Contribution à l’étude du comportement de structures libres, rigides, élancées, glissantes et basculantes sous séisme», *Thèse*. [63](#)
- ODEN, J. et J. MARTINS. 1985, «Models and computational methods for dynamic friction phenomena», *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 52, n° 1-3, p. 527–634. [58](#)
- PALMERI, A. et N. MAKRIS. 2008, «Linearization and first-order expansion of the rocking motion of rigid blocks stepping on viscoelastic foundation», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 37, n° 7, p. 1065–1080. [70](#)
- POLITOPOULOS, I. 1997, «Méthodes de traitement de l’impact», *Rapport interne CEA*. [57](#)
- VASSILIOU, M. F., R. TRUNIGER et B. STOJADINVIĆ. 2015, «An analytical model of a deformable cantilever structure rocking on a rigid surface : development and verification», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 44, n° 15, p. 2775–2794. [74](#)

Chapitre IV

Validation et analyse de la modélisation numérique

Les approches expérimentale, analytique et numérique mises en place pour statuer sur la stabilité sous séisme de l'empilement ont été présentées dans le chapitre précédent. Dans ce chapitre, les comparaisons de ces approches sont exposés.

Dans la première partie, l'analyse modale réalisée avec le modèle de référence est comparée aux résultats expérimentaux de caractérisation modale. L'influence des différentes zones d'interface y est analysée afin d'identifier la modélisation la plus adaptée. Ensuite, on présente la calibration des modèles réduits qui a été menée à l'aide des résultats expérimentaux et du modèle de référence. Pour finir, la calibration du modèle S4DoF est exposée.

Dans la deuxième partie, l'étude du comportement sismique de l'empilement est réalisée. Dans un premier temps, on considère les essais sismiques à bas niveau de sollicitation qui permettent d'analyser le comportement quasi linéaire de l'empilement. Ensuite, on s'intéresse aux essais sismiques à plus forts niveaux pour étudier le comportement non linéaire de l'empilement. Pour finir, nous présentons les résultats d'une étude portant sur la variabilité des réponses sismiques de la structure, d'un point de vue expérimental et numérique, basés sur des essais dits de répétabilité. En l'occurrence, il s'agit d'essais pour lesquels l'empilement a été sollicité 35 fois avec la « même » sollicitation. En pratique, nous avons fourni la même consigne à la table vibrante, mais cela ne se traduit pas nécessairement par une sollicitation imposée identique d'un essai à l'autre, même si, finalement, la variabilité s'avère relativement faible.

Sommaire

IV.1 Caractérisation modale de l'empilement	87
IV.1.1 Identification des modes et critères d'adéquation	87
IV.1.2 Caractérisation modale via le modèle de référence : comparaison avec les résultats expérimentaux	88
IV.1.2.1 Caractérisation modale d'un panier vide et libre	88
IV.1.2.2 Panier vide posé sur la dalle	92
IV.1.2.3 Panier plein posé sur la dalle	93
IV.1.2.4 Empilement composé de deux paniers pleins posé sur la dalle	94
IV.1.2.5 Empilement composé de trois paniers pleins posé sur la dalle	94
IV.1.2.6 Synthèse	99
IV.1.3 Développement et validation des modèles réduits	99
IV.1.3.1 Développement des modèles réduits	99
IV.1.3.2 Validation des modèles réduits	101
IV.1.4 Calibration du modèle S4DoF	103
IV.2 Étude du comportement sismique de l'empilement	104
IV.2.1 Comportement quasi linéaire de l'empilement	104
IV.2.1.1 Analyse d'un essai à bas niveau de sollicitation	104
IV.2.1.2 Calibration des modèles réduits	105
IV.2.1.3 Calibration du modèle S4DoF	106
IV.2.2 Comportement non linéaire de l'empilement	107
IV.2.2.1 Analyse de l'essai	108
IV.2.2.2 Les différentes variantes de modèles réduits	111
IV.2.2.3 Discussion à propos du recalage de l'amortissement des modèles numériques pour les calculs non linéaires	114
IV.2.2.4 Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques	118
IV.2.3 Étude de la variabilité des réponses expérimentales et numériques	121
IV.3 Synthèse	126
IV.4 Références	127

IV.1 Caractérisation modale de l'empilement

Les essais de caractérisation modale ont été réalisés afin de mieux comprendre le comportement linéaire de la structure. L'empilement étant une structure flexible, son comportement linéaire représente une part importante dans sa réponse sismique : caractériser ce comportement est donc primordial avant d'étudier sa réponse sismique, notamment non-linéaire.

On précise avant tout que le modèle de référence a été développé dans l'esprit d'être le plus fidèle possible à la réalité, bien qu'en pratique il s'agisse souvent d'une vue de l'esprit, notamment lorsque l'on s'intéresse à des structures mécano-soudées « industrielle ». Dans un premier temps, les résultats de l'analyse modale obtenus avec ce modèle ont donc été comparés aux résultats de l'analyse modale expérimentale. Cette comparaison ayant permis de valider le modèle de référence, ce dernier a été utilisé, dans un deuxième temps, pour calibrer les modèles réduits et le modèle S4DoF.

La structure étudiée étant complexe, du fait de sa géométrie et de ses nombreuses zones d'interface (conditions aux limites incluses), les essais de caractérisation modale et la comparaison avec les différents modèles ont été réalisés en procédant par étapes. Ainsi, avec le modèle de référence, nous nous sommes intéressés (i) à un panier vide et libre et (ii) à un ensemble de configurations intermédiaires allant du panier vide posé sur la table à l'empilement de trois paniers pleins. De même, la caractérisation modale des modèles réduits a été menée par étapes. Avec le modèle S4DoF, nous ne nous sommes intéressés qu'à l'empilement de trois paniers pleins. Chacun de ces cas est présenté dans une section spécifique. Au préalable, on présente les critères d'adéquation que nous avons utilisés pour valider les modèles sur la base des résultats de caractérisation modale.

On précise que dans la suite, par commodité, on désignera par empilement, un empilement constitué de trois paniers contenant chacun quatre colis.

IV.1.1 Identification des modes et critères d'adéquation

Lors des essais de caractérisation modale, une excitation « à très bas niveau » (e.g. marteau de choc, bruit blanc induit par un pot vibrant ou par la table vibrante, etc.) est appliquée à la structure. Pendant la sollicitation, la réponse de la structure est enregistrée par des accéléromètres (cf. schéma d'instrumentation représenté sur la figure III.7). À partir de ces enregistrements, les modes de la structure sont mis en évidence par le biais d'un algorithme d'identification modale. La méthode qui a été utilisée n'est pas détaillée dans cette thèse, elle est présentée dans le rapport [CHARBONNEL, 2014].

Un exemple de déformée modale expérimentale est présenté sur la figure IV.1, avec la déformée numérique correspondante. Sur la figure IV.1.a où la déformée modale expérimentale est représentée en couleur, apparaît également en gris la représentation du panier dans la configuration non déformée.

Pour pouvoir sélectionner les meilleures correspondances entre les modes expérimentaux et numériques, deux critères classiques ont été utilisés à savoir (i) l'erreur relative sur la fréquence et (ii) le Modal Assurance Criterion (MAC) qui est un critère de corrélation spatiale. Pour évaluer ce dernier, les déformées modales numériques ont été, au préalable, réduites aux points de mesure expérimentaux (cf. schéma d'instrumentation représenté sur la figure III.7).

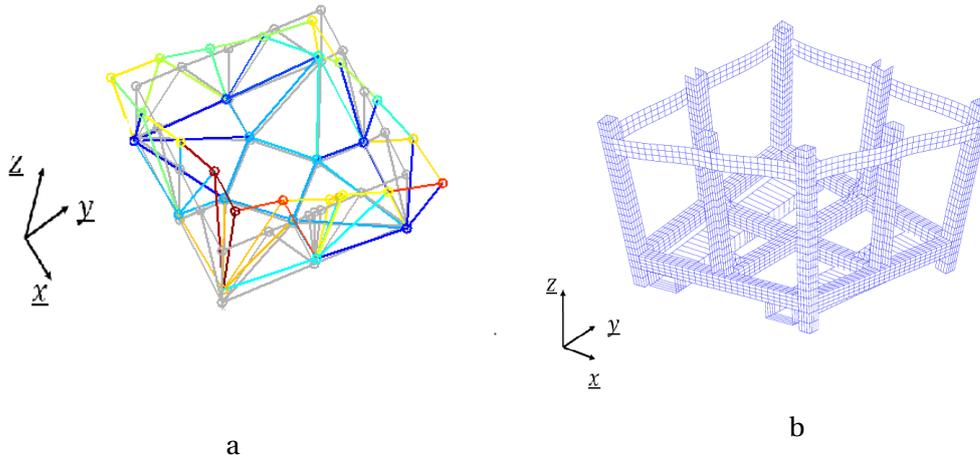


FIGURE IV.1 – Déformées modales expérimentale (a) et numérique (b) d'un mode d'un panier vide et libre

Erreur relative sur la fréquence

L'erreur relative sur la fréquence est simplement définie par :

$$\frac{|F_{exp.} - F_{num.}|}{F_{exp.}} \times 100 \quad (IV.1)$$

Modal Assurance Criterion

Le MAC permet d'évaluer l'adéquation de deux déformées modales [PASTOR et collab., 2012]. C'est un indicateur matriciel qui correspond à la corrélation entre le $q^{ème}$ vecteur propre expérimental $\{\mathbf{X}_{exp.}\}_q$ et le $r^{ème}$ vecteur propre numérique $\{\mathbf{X}_{num.}\}_r$, $\{\mathbf{X}_{exp.}\}$ et $\{\mathbf{X}_{num.}\}$ étant les matrices associées aux deux types de vecteurs propres. Le MAC est donc défini par :

$$MAC_{(r,q)} = \frac{|\{\mathbf{X}_{num.}\}_r^T \{\mathbf{X}_{exp.}\}_q|^2}{(\{\mathbf{X}_{num.}\}_r^T \{\mathbf{X}_{num.}\}_r) (\{\mathbf{X}_{exp.}\}_q^T \{\mathbf{X}_{exp.}\}_q)} \quad (IV.2)$$

En valeur absolue, cet indicateur est compris entre 0 et 1. Lorsque deux déformées modales sont identiques, il est égal à 1.

IV.1.2 Caractérisation modale via le modèle de référence : comparaison avec les résultats expérimentaux

IV.1.2.1 Caractérisation modale d'un panier vide et libre

Les fréquences des six premiers modes d'un panier vide et libre obtenus avec le modèle de référence sont indiquées dans le tableau IV.1. Les déformées de ces modes sont représentées sur les figures IV.2, IV.3 et IV.4. En dessous de chaque déformée se trouve une description succincte de celle-ci. Ces modes « numériques » serviront de référence pour décrire les déformées modales identifiées lors des essais. Toutefois, pour les distinguer, des lettres sont affectées aux modes numériques et des numéros aux modes expérimentaux. La correspondance entre les deux types de modes n'est en effet pas toujours triviale (cf. paragraphe suivant).

Mode	A	B	C	D	E	F
Fréquence (Hz)	33,3	44,8	48,1	50,9	52,7	67,6

TABLEAU IV.1 – Fréquences des six premiers modes d'un panier vide et libre obtenus avec le modèle de référence

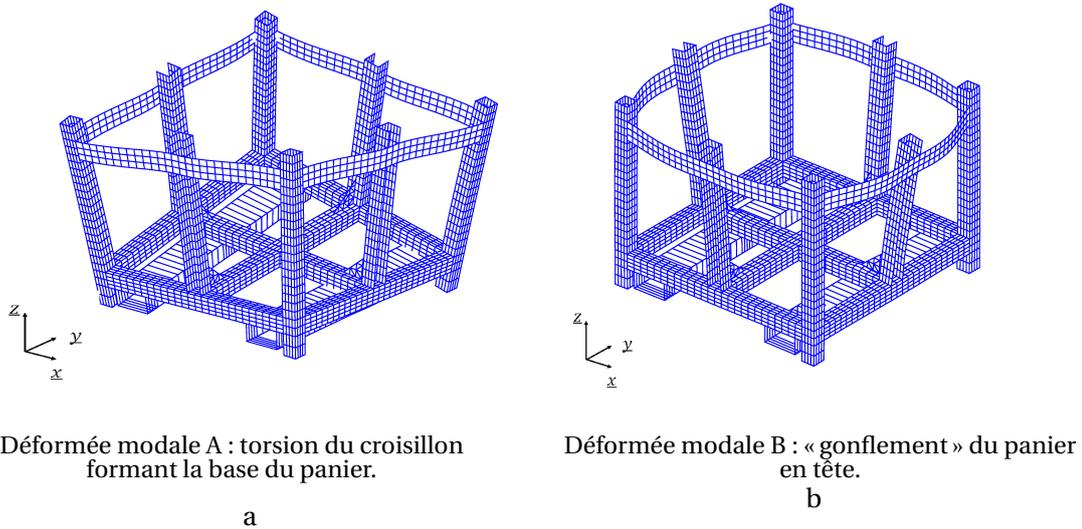


FIGURE IV.2 – Déformées des modes A (a) et B (b) d'un panier vide et libre obtenus avec le modèle de référence

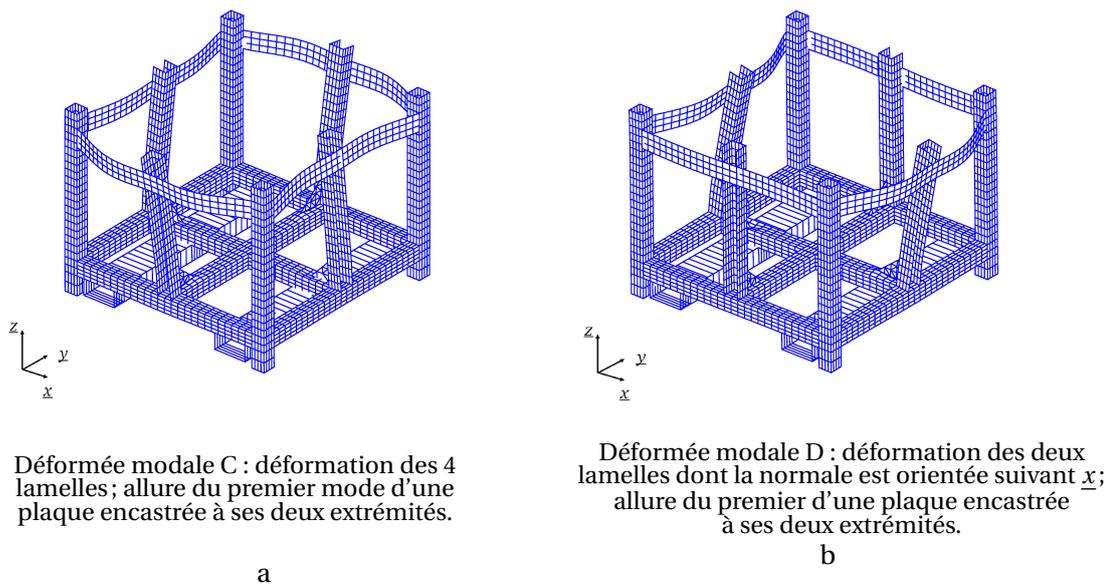
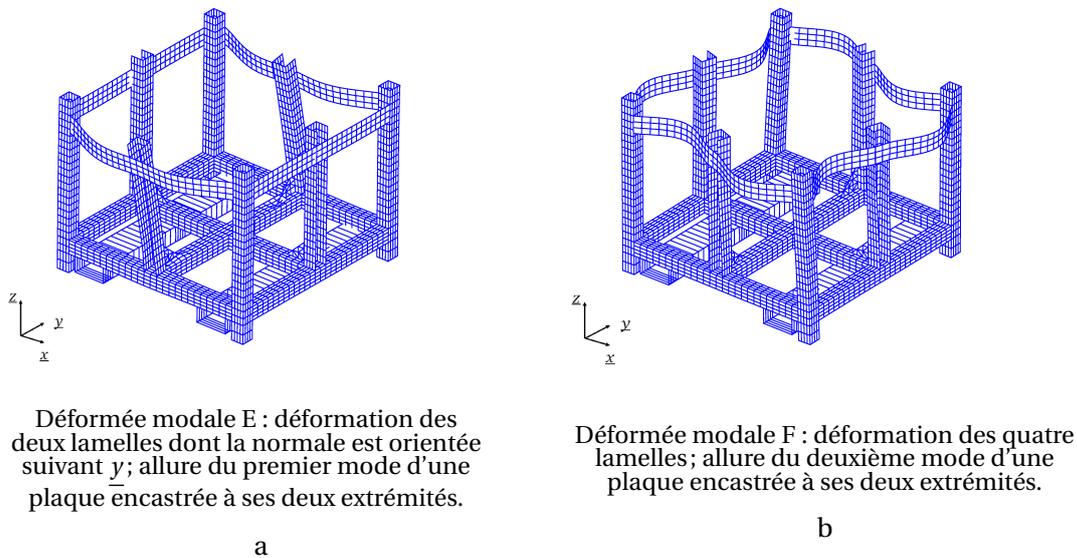


FIGURE IV.3 – Déformées des modes C (a) et D (b) d'un panier vide et libre obtenus avec le modèle de référence



Déformée modale E : déformation des deux lamelles dont la normale est orientée suivant y ; allure du premier mode d'une plaque encastree à ses deux extrémités.

Déformée modale F : déformation des quatre lamelles; allure du deuxième mode d'une plaque encastree à ses deux extrémités.

FIGURE IV.4 – Déformées des modes E (a) et F (b) d'un panier vide et libre obtenu avec le modèle de référence

Du fait de la présence des barres de passage des fourches dédiées à la manutention des paniers, la structure est « dissymétrique » (i.e. n'a pas la même symétrie dans les directions x et y). Nous verrons dans la suite la conséquence de cette dissymétrie (cf. paragraphe IV.1.3.2).

Comparaison avec les résultats expérimentaux

Les déformées modales d'un panier libre et vide peuvent être complexes à analyser, du fait des modes locaux. Pour faciliter l'identification des modes, une procédure a été mise en place à partir des deux critères d'adéquation présentés à la section IV.1.1. Pour chaque déformée numérique, le MAC a été évalué avec l'ensemble des déformées expérimentales, puis les correspondances avec les deux plus grands MAC ont été conservées. Ensuite, le couple pour lequel l'erreur relative en fréquence était inférieure à 20% (critère volontairement large) a été retenu. Si, pour les deux couples, l'erreur sur la fréquence était supérieure à 20%, il a été considéré que le mode numérique n'avait pas de correspondance expérimentale directe. En appliquant cette méthode de sélection nous avons pu détecter de façon « automatique » les meilleures corrélations entre les résultats expérimentaux et numériques.

Les résultats de la sélection sont présentés sur les figures IV.5 et IV.6. Ces figures représentent la superposition des déformées modales, numériques en bleu et expérimentales en rouge, des quatre premiers modes identifiés. Les fréquences, les déformées modales ainsi que les paramètres d'identification de ces modes sont indiqués dans le tableau IV.2.

Mode	1	2	3	4
Fréquence expérimentale (Hz)	35,3	41,7	41,7	48,7
Déformée modale	A	B	C	E
Erreur relative	6%	7%	15%	8%
MAC	0,83	0,69	0,68	0,73

TABEAU IV.2 – Fréquences, déformées modales et paramètres d'identification des modes identifiés entre les analyses modales expérimentale et numérique d'un panier vide et libre

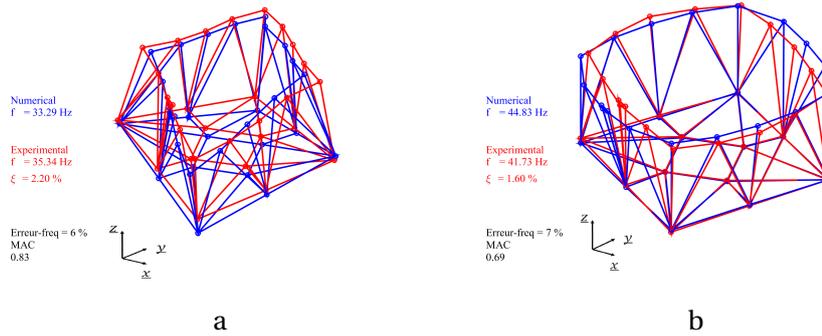


FIGURE IV.5 – Déformées modales numériques (en bleu) et expérimentales (en rouge) d'un panier vide et libre des modes 1 (a) et 2 (b)

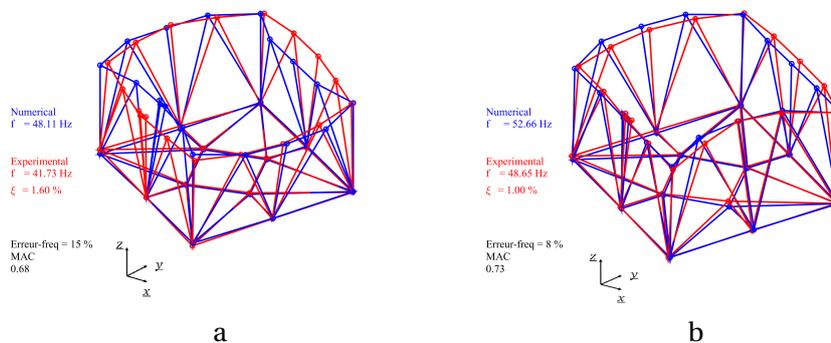


FIGURE IV.6 – Déformées modales numériques (en bleu) et expérimentales (en rouge) d'un panier vide et libre des modes 3 (a) et 4 (b)

Le premier mode identifié correspond à la déformée modale numérique A. L'erreur relative sur la fréquence est égale à 6% et le MAC est égal à 0,83, ce qui est tout-à-fait satisfaisant. Les deuxième et troisième modes identifiés correspondent aux modes numériques B et C. Cependant, ces modes correspondent à un unique mode expérimental. De ce fait, les MAC de ces deux modes, qui sont égaux à 0,69 et à 0,68, sont plus faibles que pour le premier mode. Les erreurs relatives sur les fréquences sont quant à elles plus élevées que pour le premier mode. Par ailleurs, la méthode d'identification utilisée n'a pas permis de détecter de modes expérimentaux correspondant au mode D du modèle de référence. Pour finir, le quatrième mode identifié correspond à la déformée modale numérique E. L'erreur relative est égale à 8% et le MAC est égal à 0,73. La valeur du MAC n'est pas proche de 1 car les quatre lamelles n'ont pas des déformées « numériques » et « expérimentales » identiques.

La méthode d'identification modale permet également d'estimer le taux d'amortissement ξ des modes à partir des résultats expérimentaux. Les valeurs sont précisées dans les légendes des figures IV.5 et IV.6. Pour le premier mode ce taux est supérieur à 2%, tandis que pour les autres modes il est supérieur à 1 %. Pour ces modes, ces taux d'amortissement semblent élevés étant donné que les conditions aux limites sont libres. À titre d'exemple, une structure en acier qui a des conditions aux limites libres (voire même encastées si celles-ci sont très bien réalisées) peut présenter un taux d'amortissement inférieur à 1% pour le mode prépondérant. Dans notre cas, les éléments du panier sont plus ou moins bien soudés entre eux, ce qui peut être la cause de taux d'amortissement plus élevés. En outre, les conditions aux limites ne sont pas nécessairement « idéales » : le panier est suspendu par des élingues et le pot vibrant qui sollicite le panier est fixé au panier. Ces conditions expérimentales peuvent aussi être la cause des taux élevés d'amortissement auxquels nous sommes confrontés.

Discussion à propos des résultats

Les six premiers modes d'un panier vide et libre obtenus avec le modèle de référence ont été présentés et comparés aux modes expérimentaux en considérant deux critères classiques de sélection. Les quatre premiers modes ont été identifiés avec des valeurs de critères qui permettent de considérer le modèle de référence d'un panier comme valide. Néanmoins, les deux bases modales présentent des différences. Par exemple, deux modes numériques peuvent apparaître sous la forme d'un seul mode expérimental (par exemple, les modes 2 et 3) et réciproquement. Dans ce cas, on dit que le **mode est couplé**. Les différences entre ces bases modales peuvent avoir différentes origines qu'il est difficile d'appréhender dans la mesure où l'on a affaire à une structure réelle mécano-soudée. Par ailleurs, les conditions aux limites libres peuvent parfois être difficiles à représenter expérimentalement. Par exemple, lors des essais nous avons été amenés à considérer différentes configurations afin d'identifier la plus représentative des conditions aux limites libres. Deux exemples de ces configurations sont illustrés sur la figure III.6. Dans le premier cas, le panier est posé sur des coussins d'air. Dans le deuxième cas, le panier est suspendu à l'aide de deux élingues. Dans notre étude, c'est la deuxième configuration qui permet de mieux représenter les conditions aux limites libres.

Des modélisations complémentaires ont été mises en œuvre pour tenir compte (i) de la masse des capteurs qui représente 5% de la masse du panier et (ii) de la raideur des élingues. Ces modélisations n'ont pas permis d'obtenir de meilleurs ajustements. Les résultats relatifs à la caractérisation modale d'un panier vide et libre sont plus amplement détaillés dans le rapport d'avancement de cette thèse [BEYLAT, 2018].

Le modèle de référence étant considéré comme valide, un ensemble de configurations intermédiaires, de complexité croissante, a ensuite été considéré pour appréhender l'influence des différentes zones d'interface. Ainsi, on s'est intéressé à : (i) un panier vide posé sur la table, (ii) un panier vide posé sur la dalle, (iii) un panier plein et libre (iv) un panier plein posé sur la table, (v) un panier plein posé sur la dalle, (vi) un empilement de deux paniers pleins posé sur la dalle et (vii) un empilement de trois paniers pleins posé sur la dalle. Pour chaque configuration, différentes modélisations des points de contact ont été considérées afin d'étudier leur représentativité et leur influence. On présente par la suite les configurations et les résultats les plus remarquables, sachant que les détails peuvent être consultés dans la référence [BEYLAT, 2018].

IV.1.2.2 Panier vide posé sur la dalle

Tout d'abord, c'est la modélisation de la zone d'interface entre la dalle support et les pieds du panier qui a été analysée, en considérant un panier vide posé sur la dalle. Cette zone d'interface a été modélisée par le biais de points de contact auxquels sont affectés une raideur normale et deux raideurs tangentielles. L'influence du nombre de points de contact et des valeurs des raideurs associées a été étudiée. Les meilleurs résultats ont été obtenus en modélisant la zone d'interface au moyen de seize points de contact (quatre par pieds) avec des valeurs de raideurs égales à 10^9 N.m^{-1} . Il s'agit de la plus petite valeur de raideur qui conduit à une adéquation satisfaisante avec les résultats expérimentaux, sachant qu'une valeur trop élevée implique de devoir considérer des faibles pas de temps lors de la résolution numérique du problème dynamique temporel.

On précise qu'à titre complémentaire, nous avons également réalisé des essais en positionnant le panier sur la table et nous n'avons pas constaté de différence dans le cadre des essais de caractérisation modale.

IV.1.2.3 Panier plein posé sur la dalle

L'influence des points de contact entre la base des colis et la base d'un panier a été étudiée en considérant un panier plein posé sur la dalle. Dans la mesure où les colis sont simplement posés dans les paniers, ces contacts ont été modélisés en faisant varier le nombre de points de contact de 4 à 64. La figure IV.7 présente un exemple de zones d'interface modélisées avec seize points de contact.

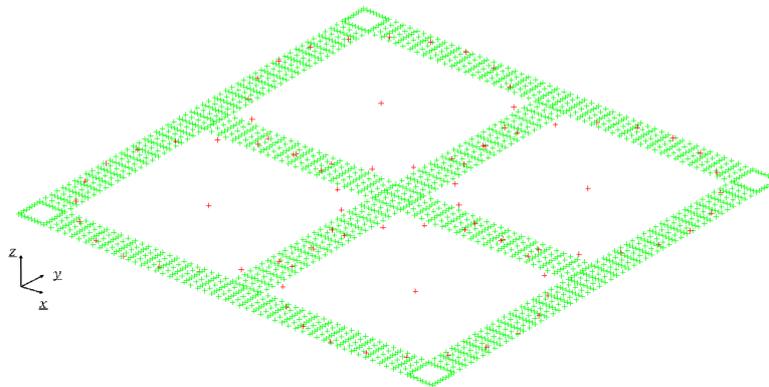


FIGURE IV.7 – Emplacement des seize points de contact (croix rouges) à l'interface entre les colis et la base d'un panier (vert). Les croix rouges qui n'ont pas de vis-à-vis avec la base du panier n'ont pas été considérées.

Par ailleurs, comme la masse des colis est importante (265 Kg chacun), leur manutention est délicate, même à l'aide d'un pont roulant. En pratique, il est donc difficile de les centrer¹ parfaitement dans les paniers. Par conséquent, différentes modélisations ont été considérées en faisant également varier la position des colis.

Cette étude a montré que le nombre de points de contact avait une influence plus prononcée sur les fréquences que sur les déformées modales. Pour illustrer ces propos, les paramètres d'identification du premier mode identifié par la comparaison entre les résultats du modèle de référence et les résultats expérimentaux sont présentés dans le tableau IV.3. Les résultats de deux modélisations sont présentés; pour la première modélisation, la zone d'interface entre les colis et la base d'un panier a été modélisée par quatre points de contact par colis tandis que, pour la deuxième modélisation, cette zone a été modélisée par seize points de contact. En conséquence, il est apparu que le meilleur résultat consistait à répartir uniformément la masse des colis au moyen de seize points de contact (cf. figure IV.7) en considérant un excentrement des colis dans les paniers (représentation plus réaliste).

Modélisation	1	2
Erreur relative sur la fréquence	37%	12%
MAC	0,88	0,88

TABLEAU IV.3 – Paramètres d'identification du premier mode pour un panier plein posé sur la dalle

La figure IV.8 montre un exemple de deux déformées modales qui sont affectées par un défaut de positionnement des colis puisqu'elles ont perdu « en symétrie » aux endroits matérialisés par les cercles noirs. On note également que la correspondance avec l'expérience est relativement bonne dans ces deux cas (les erreurs relatives sur les fréquences sont respectivement égales à 7% et à 4% tandis que les MAC sont respectivement égaux à 0,81 et à 0,85).

1. Centrer les colis dans un panier signifie les placer au centre des parties qui sont définies par le croisillon de la base du panier. Ce croisillon divise le panier en quatre parties identiques. Ainsi, sachant que la largeur d'un panier est égale à 1,215 m et que le diamètre d'un colis est égal à 0,600 m, les colis peuvent être décentrés jusqu'à 15 mm.

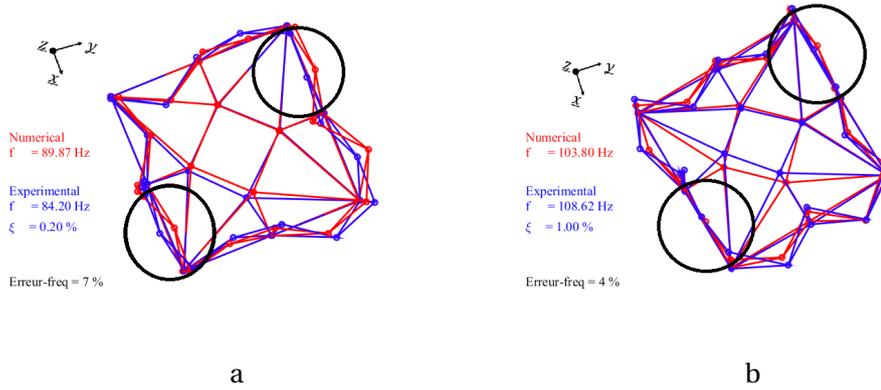


FIGURE IV.8 – Déformées numériques (en rouge) et expérimentales (en bleu) d’un panier pour lequel un excentrement des colis a été introduit. Les cercles noirs matérialisent les endroits où les déformées modales ont perdu « en symétrie ».

IV.1.2.4 Empilement composé de deux paniers pleins posé sur la dalle

Dans cette configuration, la sollicitation était un bruit blanc émis par la table vibrante uniaxiale. Cette configuration a principalement permis d’étudier l’influence de la modélisation des contacts entre deux paniers pleins. Ainsi, il ressort que ces contacts peuvent être modélisés de la même façon que les contacts entre le panier et la dalle support, c’est-à-dire à l’aide de quatre points de contact par pieds, en considérant des raideurs égales à 10^9 N.m^{-1} . Un exemple de deux déformées modales est présenté sur la figure IV.9. À noter que du fait du nombre limité d’accéléromètres à disposition lors de la campagne expérimentale, l’instrumentation du deuxième panier — le panier supérieur — n’est pas équivalente à celle du premier panier qui est le panier plus instrumenté (d’où la différence de maillage).

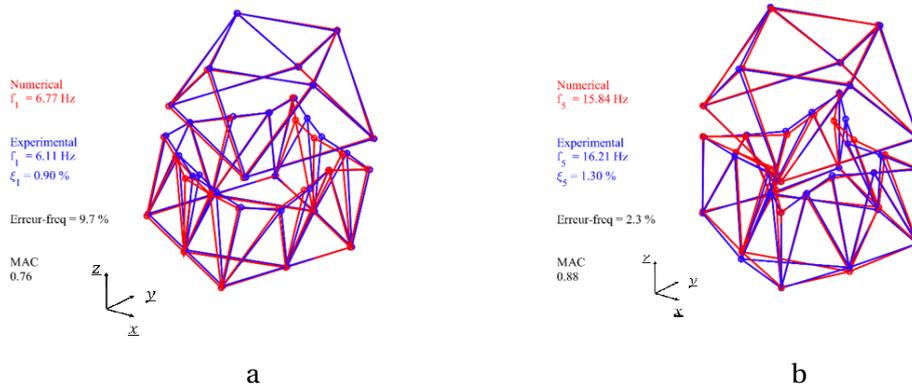


FIGURE IV.9 – Exemples de déformées modales numériques (en bleu) et expérimentales (en rouge) d’un empilement constitué de deux paniers avec des colis non contrôlés

L’étude de cette configuration a permis de confirmer (i) que l’influence de l’excentrement des colis était marginale du point de vue de l’empilement et (ii) que l’ajout d’un panier n’avait pas d’influence sur les contacts entre la dalle et le panier inférieur.

IV.1.2.5 Empilement composé de trois paniers pleins posé sur la dalle

De même que l’analyse modale du panier vide et libre, l’analyse modale d’un empilement de trois paniers pleins est présentée en deux temps. Dans un premier temps, les résultats de l’analyse modale d’un empilement obtenus avec le modèle de référence sont exposés. Puis, ces résultats sont comparés aux résultats expérimentaux.

Cette configuration a permis de vérifier qu'à l'échelle d'un empilement, la zone d'interface entre la base des paniers et des colis avait moins d'influence que dans le cas d'un panier seul, les modes en jeux étant de « nature » différente : modes « locaux » dans le cas d'un panier et modes « globaux » dans le cas de l'empilement. Ainsi, les résultats numériques qui sont présentés ici ont été obtenus en ne considérant que quatre points de contact entre chaque colis et la base d'un panier (les maillages ayant été fusionnés à des fins de simplification), sans défaut de positionnement.

Les fréquences des six premiers modes de l'empilement du modèle de référence sont indiquées au tableau IV.4. Ce tableau indique également le pourcentage des masses effectives (ou masses modales, définies au chapitre précédent) de chaque mode dans les directions \underline{x} , \underline{y} et \underline{z} . Dans la direction \underline{x} , axe d'excitation de la table vibrante, la somme des masses effectives des six premiers modes est égale à 75% de la masse totale. Les autres modes ayant une masse effective non nulle dans la direction \underline{x} , sont des modes à plus hautes fréquences (au delà de 40 Hz). Ces modes ne sont pas présentés dans le tableau IV.4 car, pour eux, nous n'avons pas obtenu de correspondance satisfaisante avec les modes expérimentaux (cf. paragraphe suivant).

Mode	A	B	C	D	E	F
Fréquence numérique (Hz)	3,9	4,0	7,5	11,6	11,8	20,3
Masse effective dans la direction \underline{x}	65%	0%	0%	6%	0%	4%
Masse effective dans la direction \underline{y}	0%	65%	0%	0%	6%	0%
Masse effective dans la direction \underline{z}	0%	0%	0%	0%	0%	0%

TABLEAU IV.4 – Fréquences et masses effectives dans les directions \underline{x} , \underline{y} et \underline{z} des six premiers modes de l'empilement du modèle de référence

Les déformées modales de ces six premiers modes sont représentées sur les figures IV.10, IV.11 et IV.12. En dessous de chaque déformée se trouve une description succincte de celle-ci. Ces modes numériques serviront de référence pour décrire les déformées modales identifiées lors des essais. Comme précédemment, des lettres sont affectées aux modes numériques pour les distinguer des modes expérimentaux qui, eux, sont désignés par des numéros.

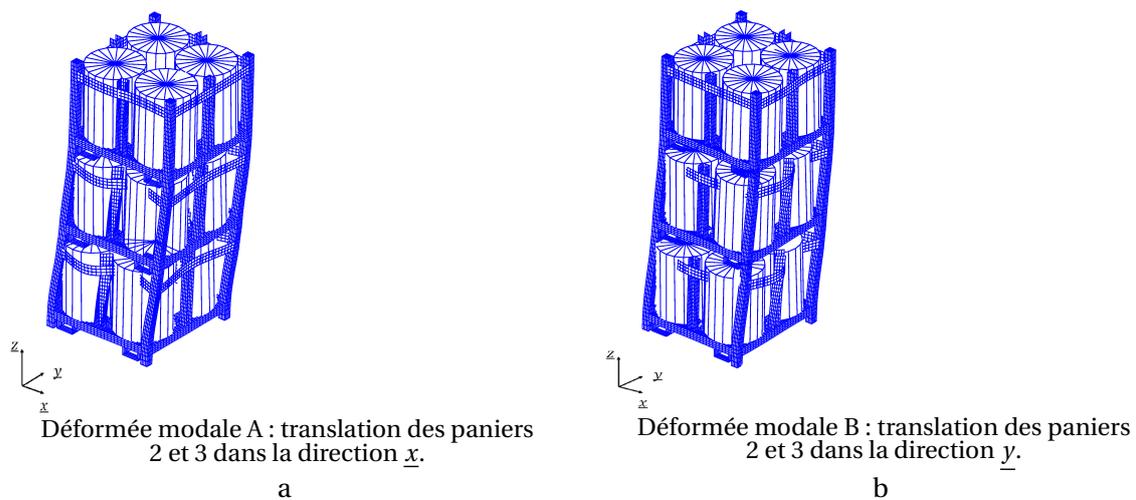


FIGURE IV.10 – Déformées des modes A (a) et B (b) d'un empilement de trois paniers pleins, pour le modèle de référence

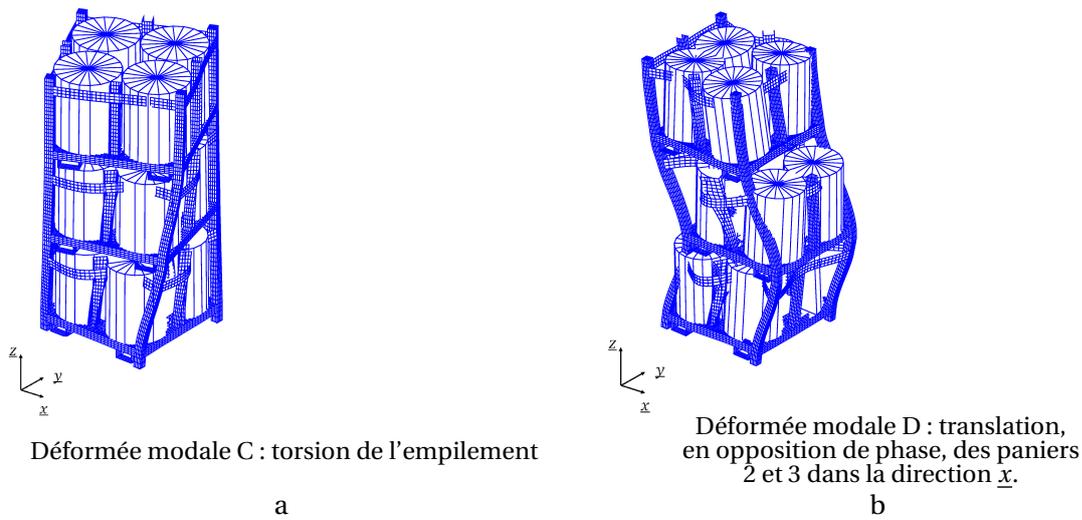


FIGURE IV.11 – Déformées des modes C (a) et D (b) d'un empilement de 3 paniers pleins, pour le modèle de référence

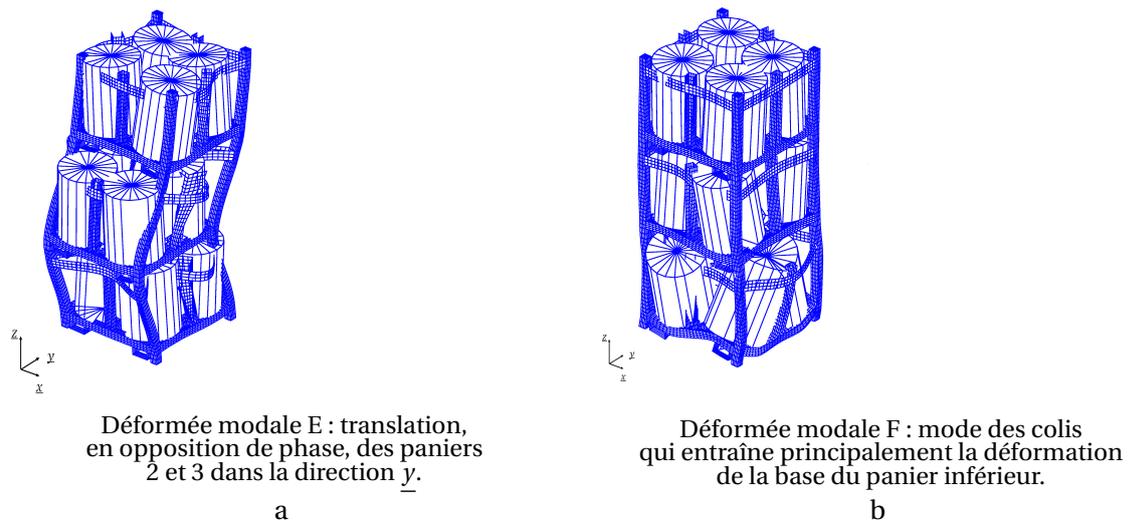


FIGURE IV.12 – Déformées des modes E (a) et F (b) d'un empilement de trois paniers pleins, pour le modèle de référence

Comparaison avec les résultats expérimentaux

Les figures IV.13, IV.14, IV.15 et IV.16 présentent la superposition des déformées modales numériques (en bleu) et expérimentales (en rouge) des cinq premiers modes identifiés. Les figures IV.13, IV.14 et IV.16 présentent les modes 1, 2 et 4 dans les repères $(O, \underline{x}, \underline{z})$ (a) et $(O, \underline{y}, \underline{z})$ (b). Les figures IV.15.a et IV.15.b présentent les modes 3 et 5 dans le repère $(O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$. Comme pour l'empilement de deux paniers, la densité du maillage n'est pas équivalente d'un panier à l'autre du fait du nombre limité de capteurs à disposition.

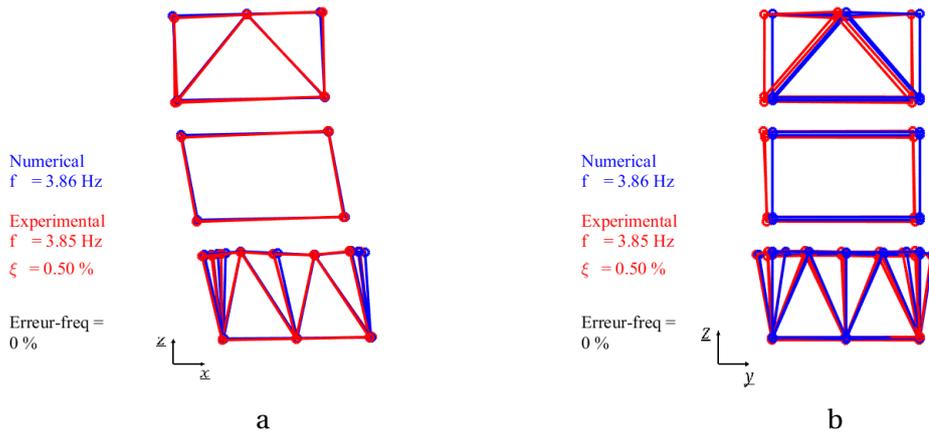


FIGURE IV.13 – Déformées numérique (en bleu) et expérimentale (en rouge) du mode 1 dans le repère $(O, \underline{x}, \underline{z})$ (a) et dans le repère $(O, \underline{y}, \underline{z})$ (b)

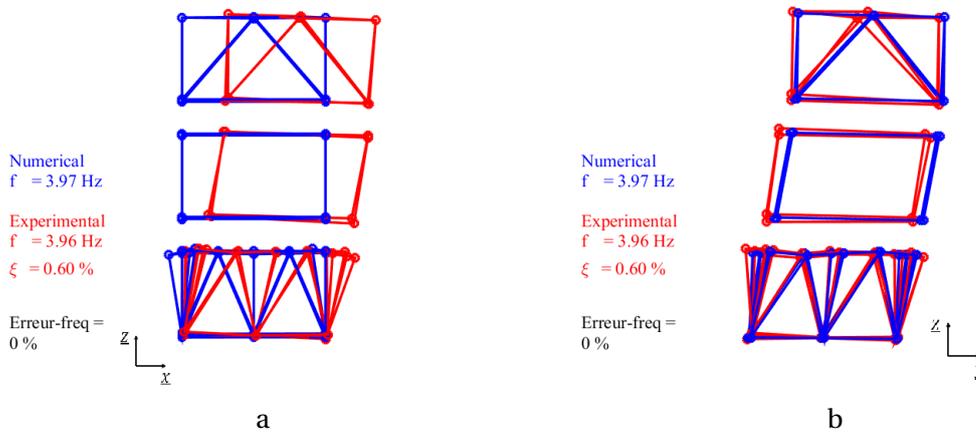


FIGURE IV.14 – Déformées numérique (en bleu) et expérimentale (en rouge) du mode 2 dans le repère $(O, \underline{x}, \underline{z})$ (a) et dans le repère $(O, \underline{y}, \underline{z})$ (b)

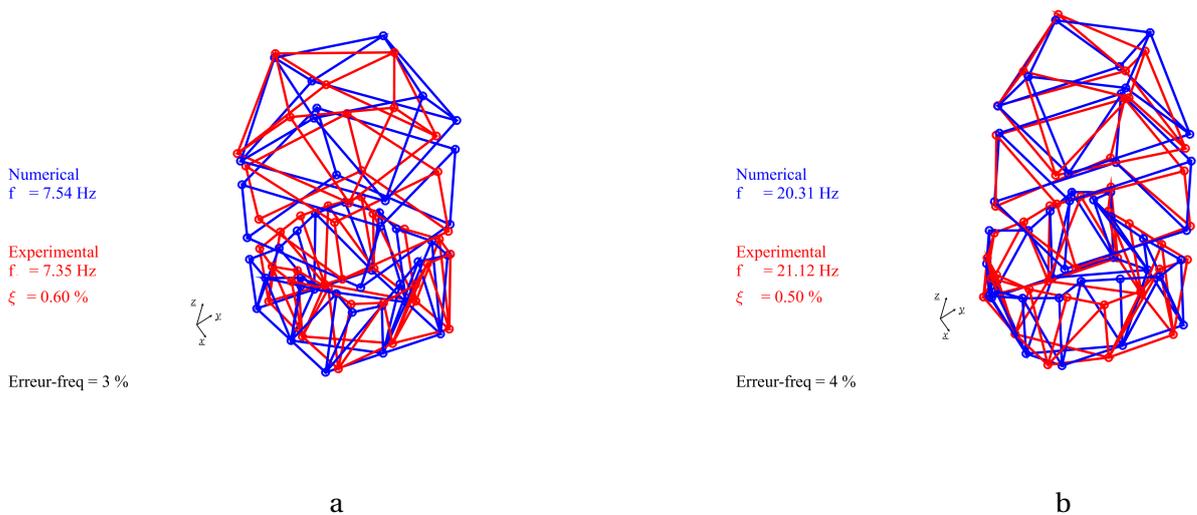


FIGURE IV.15 – Déformées numériques (en bleu) et expérimentales (en rouge) des modes 3 (a) et 5 (b)

Les fréquences, les déformées modales ainsi que les paramètres d'identification de ces modes sont indiqués dans le tableau IV.5. Les fréquences des modes expérimentaux sont similaires aux

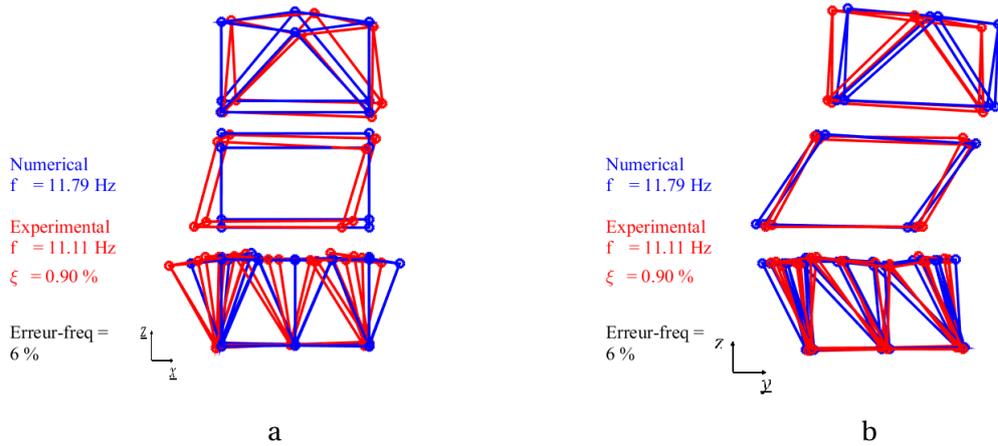


FIGURE IV.16 – Déformées numérique (en bleu) et expérimentale (en rouge) du mode 4 dans le plan (O, x, z) (a) et dans le plan (O, y, z) (b)

fréquences des modes du modèle de référence (les erreurs relatives sont inférieures à 7%). Pour cette comparaison, les MAC ont été calculés de deux façons : d'une façon globale (dernière ligne du tableau IV.5) et en distinguant les trois directions x , y et z (cinquième, sixième et septième ligne du tableau IV.5). Les MAC ont été calculés ainsi car les déformées modales expérimentale et numérique ne sont pas toujours « complètement » semblables pour un même mode. Par exemple, le mode numérique 2 se déforme uniquement dans le plan muni du repère (O, y, z) contrairement au mode expérimental qui se déforme dans les plans munis des repères (O, x, z) et (O, y, z) (aussi appelés pour simplifier par la suite plans (O, x, z) et (O, y, z) , cf. figure IV.14). Le mode expérimental est un mode couplé. Ainsi, le MAC de ces deux déformées dans la direction x est égal à 0,06 tandis que le MAC dans la direction y est égal à 0,98. Pour ce mode (le mode 2), le MAC « global » est donc égal à 0,53. Si on avait calculé uniquement le MAC de façon globale, comme précédemment, ce mode n'aurait pas été identifié alors que ces deux modes correspondent bien à un même mode. En calculant le MAC dans les trois directions, nous avons ainsi identifié les cinq premiers modes.

Les modes pour lesquels la masse effective est non nulle sont indiqués par des cases colorées dans le tableau IV.5. En théorie, seuls les modes dont la masse effective est non nulle dans la direction x devraient apparaître expérimentalement étant donné que la sollicitation est uniquement dans la direction x . Autrement-dit, les modes 2, 3 et 4 n'auraient pas dû être excités. Comme ils ont pu être identifiés, cela signifie que la structure présente des défauts et n'est pas « parfaitement symétrique », ce qui n'est pas surprenant dans la mesure où il s'agit d'une structure industrielle.

Mode	1	2	3	4	5
Fréquence expérimentale (Hz)	3,9	4,0	7,4	11,1	20,3
Déformée modale	A	B	C	E	F
Erreur relative	0%	0%	3%	6%	4%
MAC direction \underline{x}	1	0,06	0,75	0,47	0,83
MAC direction \underline{y}	0,66	0,98	0,86	0,96	0,15
MAC direction \underline{z}	0,93	0,54	0,15	0,77	0,27
MAC	0,86	0,53	0,59	0,73	0,42

TABEAU IV.5 – Fréquences, déformées modales et paramètres d'identification des modes identifiés entre les analyses modales expérimentale et numérique d'un empilement de trois paniers pleins

Par ailleurs, les taux d'amortissement ξ des modes ont également été évalués par la méthode d'identification modale à partir des résultats d'essais. Ces taux d'amortissement des modes expérimentaux sont indiqués dans les légendes des figures [IV.13](#), [IV.14](#), [IV.15](#) et [IV.16](#). Ils sont globalement inférieurs à 1%.

IV.1.2.6 Synthèse

Suite à cette étude, nous avons désormais choisi de modéliser les colis en les centrant dans les paniers. En effet, comme, en pratique, il est illusoire de pouvoir connaître la structure avec le niveau de précision permettant de faire un tel ajustement, nous avons considéré que le défaut de positionnement des colis faisait partie des incertitudes du problème qui, dans l'absolu, pourrait être traité dans un cadre probabiliste. Il était néanmoins intéressant et nécessaire de pouvoir observer l'influence des défauts de positionnement des colis car ils permettent d'expliquer pourquoi certaines déformées modales des paniers du modèle sont différentes de celles identifiées expérimentalement. On a constaté par ailleurs qu'à l'échelle d'un empilement, l'influence d'un défaut de positionnement des colis était de moindre importance bien que cela induise la participation du mode de torsion dans la réponse sismique de l'empilement. À noter que ce n'est pas le seul type de défaut qui puisse expliquer la participation du mode de torsion dans la réponse sismique de l'empilement.

IV.1.3 Développement et validation des modèles réduits

La première partie de la campagne expérimentale, c'est-à-dire les essais de caractérisation modale, a permis de valider le modèle de référence. Cependant, ce modèle étant trop coûteux en temps pour les calculs non linéaires, notamment dans un contexte requérant de réaliser un nombre important de simulations de Monte Carlo, d'autres modèles ont été développés. Ces modèles ont été utilisés pour interpréter les essais sismiques. Ces modèles, issus du modèle de référence, sont les modèles réduits et le modèle semi-analytique S4DoF. On parle de modèles réduits au pluriel car plusieurs variantes ont été développées à partir d'un même modèle composé d'éléments finis de type poutre et plaque pour modéliser les paniers. Dans cette section, on présente le principe de développement et la validation des modèles réduits. La calibration du modèle S4DoF est présentée dans la section suivante.

IV.1.3.1 Développement des modèles réduits

Les modèles réduits ont été développés à partir d'éléments finis de type poutre et plaque pour les paniers et des éléments massifs pour les colis. Cependant, comme les montants des paniers ne satisfont pas à la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (les sections des montants, et du cadre en général, n'étant pas indéformables), certaines flexibilités ont dû être ajoutées. Ainsi, trois types de ressorts — ressorts de torsion — ont été ajoutées. Les emplacements de ces ressorts sont matérialisés par des points ou des traits rouges, bleus et verts sur la figure [IV.17](#).

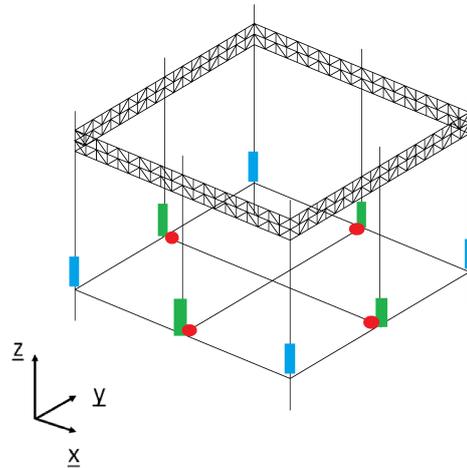


FIGURE IV.17 – Emplacements des ressorts de torsion ajoutés au modèle d'un panier basé sur des éléments finis de type poutre et plaque

L'ajustement des valeurs des ressorts a été réalisé pour faire en sorte que les modèles présentent des bases modales similaires, tout du moins pour les modes à basses fréquences. Cet ajustement a été réalisé étape par étape sur un ensemble de configurations. Pour caler la raideur 1, représentée en rouge sur la figure IV.17, la configuration d'un panier vide et libre n'était pas assez simplifiée. Nous avons donc considéré le cadre du panier seul. La déformée du premier mode de ce cadre, obtenue avec le modèle de référence, est représentée en bleu sur la figure IV.18, la configuration non déformée est représentée en noire. La fréquence de ce mode est égale à 44 Hz. Pour ce mode, les montants du cadre sont perpendiculaires à la base du panier, il correspond donc à un mode de torsion des poutres qui forment le croisillon de la base. Ce mode apparaît à 48,5 Hz dans les modèles réduits lorsqu'il n'y a pas de modification (c'est-à-dire sans ajouter de souplesse). Si on compare la fréquence de ce mode à celle du mode du modèle de référence, l'erreur relative sur la fréquence est donc égale à 10%. Cette erreur est jugée comme importante étant donnée que l'on est dans le cas où la configuration est la plus simplifiée. Ainsi, des ressorts de torsion ont été ajoutés à l'intersection entre le croisillon et le cadre formant la base. Leur axe de rotation est l'axe des poutres du croisillon. Pour déterminer la valeur de cette raideur un calcul statique a été réalisé en considérant deux poutres en T (de géométrie similaire à celles qui constituent le cadre du panier) soumises à deux efforts pour créer un couple de torsion. Ainsi, nous avons obtenu une raideur égale à 10^5 Nm/rad. Avec l'ajout de ces ressorts, le mode recherché est dorénavant à 45,1 Hz. L'erreur relative en fréquence a donc diminuée et est égale à 2,5%, ce qui est tout-à-fait acceptable.

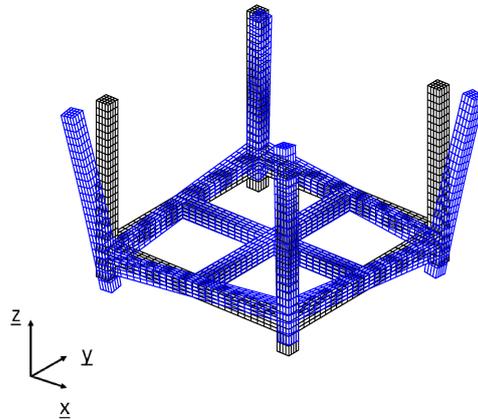


FIGURE IV.18 – Déformée modale du cadre d'un panier obtenue avec le modèle de référence

Les autres souplesses ont été déterminées de façon similaire : leurs valeurs ont été ajustées à partir de calculs statiques en s'appuyant sur différentes configurations du modèle de référence. Dans les modèles réduits, les barres de passage des fourches ne sont pas représentées. Leur rigidité a toutefois été prise en compte, en partie, car les calculs statiques ont été réalisés à partir du modèle de référence pour lequel ces barres sont modélisées. Néanmoins, le modèle réduit est parfaitement symétrique, ce qui n'est pas le cas du modèle de référence. Les caractéristiques des souplesses ainsi que les configurations à partir desquelles nous les avons calées sont indiquées dans le tableau IV.6.

Souplesse	Couleur	Configuration du calage	Axe de rotation	Valeur (Nm/rad)
1	rouge	cadre d'un panier	l'axe des barres du croisillon	1.10^5
2	vert	Panier vide et libre	\underline{x} et \underline{y}	$1,5.10^4$
2	vert	Panier vide et libre	\underline{z}	7.10^3
3	bleu	Empilement de trois paniers pleins	\underline{x} et \underline{y}	$1,9.10^4$

TABLEAU IV.6 – Caractéristiques des souplesses introduites dans les modèles réduits

Outre les ressorts de torsion, des raideurs normales et tangentielles égales à 4.10^9 N/m ont été ajoutées à chaque liaison entre les paniers pour modéliser l'empilement. Ce choix a été préféré à celui qui consiste à fusionner les maillages des différents paniers au niveau des points de contact car, ainsi, la modélisation est cohérente avec la modélisation qui est utilisée lors des calculs non linéaires avec la méthode de pénalisation. Nous y reviendrons mais cette modélisation permet également de « laisser libre » les rotations des nœuds au niveau des points de contact, ce que n'aurait pas permis une modélisation basée sur la fusion des maillages (au niveau des points de contact). Concernant les zones d'interface entre les colis et les bases des paniers, celles-ci ont été modélisées au moyen de quatre points de contact par colis, en fusionnant les nœuds des maillages des colis et de la base en vis-à-vis.

IV.1.3.2 Validation des modèles réduits

Dans ce paragraphe, les résultats des analyses modales d'un empilement basées sur les modèles réduits sont présentés. Puis, ces résultats sont comparés aux résultats obtenus avec le modèle de référence et aux résultats expérimentaux.

Les déformées des six premiers modes des modèles réduits sont présentées dans l'annexe A. Les fréquences et les masses effectives dans les directions \underline{x} , \underline{y} et \underline{z} de ces six premiers modes sont indiquées dans la partie gauche du tableau IV.7. Comme les barres de passage des fourches ne sont pas modélisées dans ces modèles, la structure est symétrique dans les plans $(O, \underline{x}, \underline{z})$ et $(O, \underline{y}, \underline{z})$. Ainsi, les modes A et B ainsi que D et E apparaissent à des fréquences identiques et leurs déformées sont symétriques dans les plans $(O, \underline{x}, \underline{z})$ et $(O, \underline{y}, \underline{z})$. Afin de comparer ces résultats avec les résultats du modèle de référence, les fréquences et les masses effectives dans les directions \underline{x} , \underline{y} et \underline{z} des six premiers modes du modèle de référence sont également indiquées dans la partie droite du tableau IV.7. Les masses effectives de ces modèles sont du même ordre de grandeur. Néanmoins, les masses effectives des modes A et B ainsi que D et E sont non nulles dans les deux directions \underline{x} et \underline{y} pour les modèles réduits contrairement au modèle de référence. Cela indique que ces modes sont couplés dans ce modèle.

Mode	Modèles réduits						Modèle de référence					
	A	B	C	D	E	F	A	B	C	D	E	F
Fréquence (Hz)	3,9	3,9	7,5	10,5	10,5	21,4	3,9	4	7,5	11,6	11,8	20,3
Masse effective en \underline{x}	62%	2%	0%	4%	0,2%	0,1%	65%	0%	0%	6%	0%	4%
Masse effective en \underline{y}	2%	62%	0%	0,2%	4%	0%	0%	65%	0%	0%	6%	0%
Masse effective en \underline{z}	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

TABLEAU IV.7 – Pourcentage de masse effective des six premiers modes de l'empilement dans chaque direction, pour les modèles réduits et de référence

Pour compléter la comparaison, les erreurs relatives sur les fréquences et le MAC ont été calculés entre les bases modales de deux modèles et sont indiquées dans le tableau IV.8. Les MAC sont calculés de façon globale ainsi que dans les directions \underline{x} , \underline{y} et \underline{z} . Ces paramètres indiquent que ces modèles sont équivalents pour ces six modes car (i) les erreurs relatives sur les fréquences sont inférieures ou égales à 11% et (ii) les MAC dont les modes ont des masses effectives non nulles dans le modèle de référence (ces modes sont indiqués par des cases colorées) sont proches de 1.

Mode	A	B	C	D	E	F
Erreur relative	0%	2.5%	0%	9.5%	11%	5.4%
MAC direction \underline{x}	1	0,03	0,09	0,99	0,07	0,94
MAC direction \underline{y}	0,01	0,99	0,99	0,02	0,98	0,35
MAC direction \underline{z}	0,94	0,94	0,99	0,83	0,84	0,98
MAC	0,62	0,65	0,69	0,61	0,63	0,76

TABLEAU IV.8 – Paramètres d'identification modale issus de la comparaison entre les modèles réduits et le modèle de référence pour l'empilement

Pour finir, la comparaison est également effectuée avec les modes expérimentaux. La partie gauche du tableau IV.9 indique les fréquences, les déformées modales et les paramètres d'identification des modes. Les erreurs relatives ainsi que les MAC indiquent que les modes des modèles réduits sont similaires aux modes expérimentaux. À titre complémentaire, les résultats relatifs au modèle de référence sont rappelés dans la partie droite du tableau IV.9. Pour ce modèle, le mode D n'avait pas été identifié. Pour les modèles réduits, le mode D est identifié car ce mode est couplé dans les plans $(O, \underline{x}, \underline{z})$ et $(O, \underline{y}, \underline{z})$ comme dans les essais. Si l'on compare les modes identifiés des modèles réduits avec ceux du modèle de référence, on constate que ces modèles sont équivalents. Néanmoins, cette comparaison souligne quelques différences telles que :

- la moyenne des erreurs relatives est légèrement plus élevée pour les modèles réduits que pour le modèle de référence : 2,8% vs. 2,3% ;
- les moyennes des MAC sont plus proche de 1 pour les modèles réduits que pour le modèle de référence : 0,73 vs. 0,68.

Ce dernier résultat est dû au fait que certains modes expérimentaux sont des modes couplés dans les plans $(O, \underline{x}, \underline{z})$ et $(O, \underline{y}, \underline{z})$. Ces modes sont également couplés pour les modèles réduits mais ne le sont pas pour le modèle de référence. Toutefois, cela ne veut pas dire que les modèles réduits sont plus représentatifs des essais que le modèle de référence, les modes peuvent être couplés pour différentes raisons : expérimentalement les modes peuvent être couplés du fait de défauts de la structure, numériquement ces modes peuvent être couplés du fait de l'absence des barres de passage des fourches.

Mode	Modèles réduits					Modèle de référence				
	1	2	3	4	5	1	2	3	Ø	4
Fréquence expérimentale (Hz)	3,9	4,0	7,4	10,7	11,1	3,9	4,0	7,4	Ø	11,1
Déformée modale	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
Erreur relative	0%	2,8%	2%	2,3%	6,3%	0%	0%	3%	Ø	6%
MAC	0,92	0,69	0,70	0,80	0,61	0,86	0,53	0,59	Ø	0,73

TABLEAU IV.9 – Fréquences, déformées modales et paramètres d'identification des modes identifiés pour les modèles réduits et de référence d'un empilement

IV.1.4 Calibration du modèle S4DoF

Parallèlement aux modèles éléments finis, le modèle S4DoF a été développé (cf. chapitre III). On rappelle brièvement que ce modèle est composé de quatre degrés de liberté qui représentent les trois déplacements élastiques relatifs de chaque masse de la superstructure et la rotation de corps rigide. Son comportement dynamique est composé de deux phases : une phase de « full contact » (pour laquelle la base reste en contact avec le sol) et une phase de « rocking » (pour laquelle la base se soulève). Dans la phase de « full contact », le modèle a trois degrés de liberté. Sa base modale est donc composée de trois modes. Dans la phase de « rocking », le modèle à quatre degrés de liberté. Sa base modale est donc composée de quatre modes.

Ce modèle a été calibré pour qu'il ait les mêmes propriétés dynamiques que celles obtenues lors des essais d'analyse modale menés sur l'empilement. Les paramètres de rigidité K_1 , K_2 et K_3 ont été ajustés en imposant que $K_1 = \Delta K_2$ et $K_2 = K_3$ avec Δ une constante qui a été fixée pour que la fréquence du troisième mode (en phase de « full contact ») soit supérieure à la fréquence de coupure de l'excitation car ce dernier ne participe pas à la réponse sismique du modèle. Ainsi, la raideur K_3 a été ajustée de sorte que la fréquence du premier mode propre soit égale à 3,8 Hz. En prenant $\Delta = 200$, les valeurs des raideurs obtenues par la fonction coût sont $K_1 = 3,4 \cdot 10^8$ N/m, $K_2 = 1,7 \cdot 10^6$ N/m et $K_3 = 1,7 \cdot 10^6$ N/m.

Les modes de la phase de « full contact » et de la phase de « rocking » sont représentés respectivement sur les figures IV.19.a et IV.19.b. Les déformées modales des deux phases sont représentées dans le repère lié à la base. Dans ce repère, les déformées modales de ces deux bases sont « similaires ». En outre, la fréquence du « mode fondamental » de la phase de « rocking » (égale à 8,48 Hz) est supérieure à celle du mode fondamental de la phase de « full contact ». Ce résultat a donc conduit certains auteurs à parler d'une augmentation de la fréquence du premier mode, alors que les deux modes sont fondamentalement différents.

À partir de l'inéquation établie dans le chapitre III (cf. inéquation III.85), on vérifie que la fréquence de ce mode est bien inférieure à 2,4 fois la fréquence du premier mode de la phase de full contact.

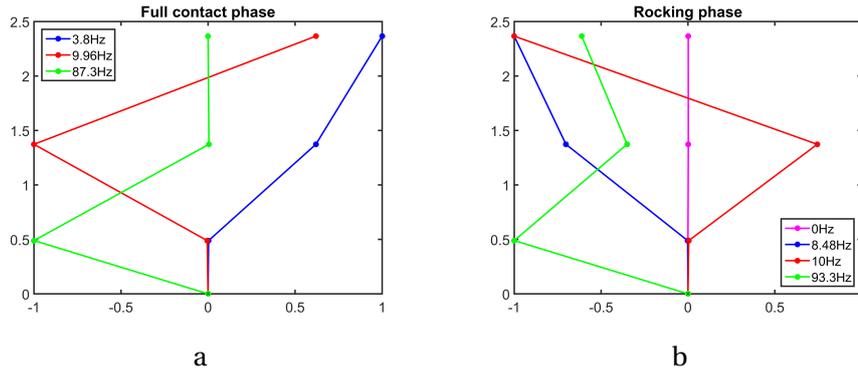


FIGURE IV.19 – Déformées modales de l’empilement du modèle S4DoF dans la phase de full contact (a) et dans la phase de rocking (b)

IV.2 Étude du comportement sismique de l’empilement

Les différents modèles numériques ont été validés, et le cas échéant calibrés, sur la base des essais de caractérisation modale. Ils sont utilisés dans cette partie pour évaluer les comportements sismiques — quasi linéaire puis non linéaire — de l’empilement. Lors de ces analyses, nous nous sommes principalement intéressés aux soulèvements de la base de l’empilement ainsi qu’aux déplacements horizontaux en tête. En effet, l’objectif industriel de ce type d’étude est d’éviter l’entrechoquement des empilements adjacents situés dans les halls d’entreposage lors d’un séisme. Étant donné que seul un empilement a été modélisé, on s’intéresse aux valeurs extrêmes de ces grandeurs. Par ailleurs, nous nous sommes également intéressés aux SRO des accélérations absolues du panier supérieur afin d’analyser, plus en détail, le comportement dynamique de l’empilement.

Cette partie est divisée en trois sections. Les deux premières sections présentent respectivement le comportement quasi linéaire et non linéaire de l’empilement. La dernière section présente les résultats d’une étude portant sur la variabilité des réponses expérimentales et numériques de l’empilement. Cette étude a été réalisée à partir d’essais de répétabilité, c’est-à-dire à partir d’essais consistant à soumettre plusieurs fois la structure au « même » signal d’excitation, ou tout du moins à donner la même consigne à la table vibrante.

IV.2.1 Comportement quasi linéaire de l’empilement

Dans un premier temps, nous avons réalisé des essais sismiques à bas niveau de sollicitation afin d’analyser le comportement quasi linéaire de l’empilement.

IV.2.1.1 Analyse d’un essai à bas niveau de sollicitation

Dans cette section, la réponse expérimentale de l’empilement est étudiée lorsqu’il est sollicité par le signal 3 (cf. tableau III.2). L’évolution temporelle de l’accélération de la table, mesurée lors de l’essai et notée \ddot{u}_g , est représentée sur la figure IV.20.a. Le PGA de cette accélération est égal à 0,26 g. Durant cet essai, nous avons observé principalement des mouvements liés à la flexibilité de la structure, les mouvements de soulèvement et de glissement étaient très faibles voire inexistantes. Ceci correspond au comportement quasi linéaire de l’empilement. Les SRO des accélérations absolues, mesurées lors de l’essai, au niveau de la table et de la base du panier 3 (c’est-à-dire à la base du panier supérieur) dans la direction x sont représentés sur la figure IV.20.b. Ces spectres sont tracés pour un taux d’amortissement critique égal à 2%. Ils sont représentés respectivement par des traits noirs en pointillés et continu. Sur le spectre de la base du panier 3, un premier pic apparaît à environ 2 Hz. Ce pic est lié à la sollicitation car il est aussi présent sur le spectre de l’accélération de la table. Puis, il y a un pic plus prononcé aux alentours de 3,6 Hz. Ce pic correspond

au premier mode de la structure. Toutefois, il apparaît à 3,6 Hz et non à 3,8 Hz comme cela a été identifié lors des essais d'analyse modale. Ces deux fréquences sont respectivement matérialisées par des traits bleu et rouge en pointillés. Cette évolution de la fréquence du premier mode est attribuée aux conditions aux limites de l'empilement puisqu'il est simplement posé sur la dalle et que le niveau de la sollicitation lors de cet essai est légèrement plus élevé que lors des essais d'analyse modale. Ce décalage de 5% sur la fréquence peut sembler négligeable, il peut toutefois être la source d'écarts plus significatifs sur la réponse sismique de l'empilement, notamment lorsque le comportement de l'empilement est non linéaire, nous y reviendrons.

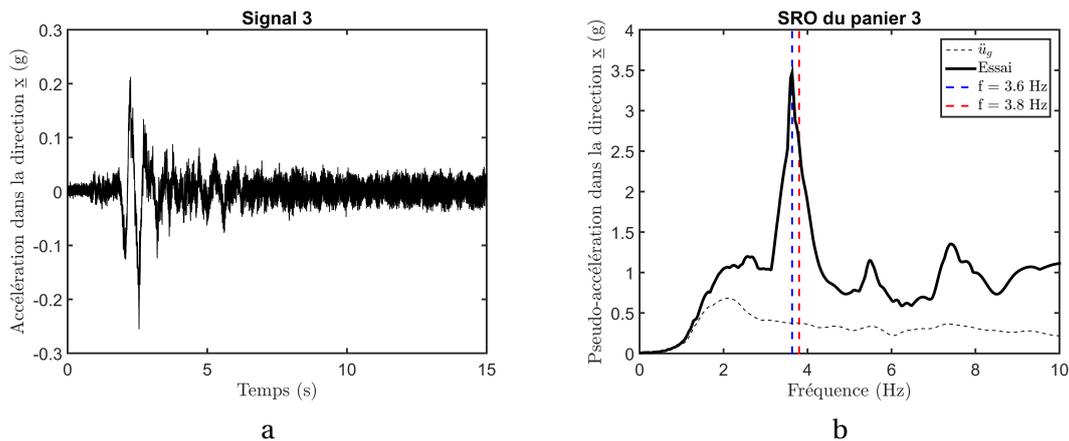


FIGURE IV.20 – Évolution temporelle de l'accélération de la table (a) et SRO des accélérations absolues, mesurées dans la direction x au niveau de la table et à la base du panier 3 (b), pour un taux d'amortissement critique égal à 2%

IV.2.1.2 Calibration des modèles réduits

Les différentes variantes des modèles réduits ont été développées à partir du modèle de référence. Le modèle de référence est composé d'éléments de type coque et plaque contenant quatre points de contact par pieds, soit au total 48 points de contact car l'empilement est constitué de trois paniers de quatre pieds. Afin d'obtenir un modèle équivalent avec des éléments de type poutre et plaque qui contient uniquement un point de contact par pied, les déplacements et les rotations de ces points de contact ont été bloqués. Ainsi, lorsque les rotations et les déplacements de ces points sont bloqués, la fréquence du premier mode est égale à 3,8 Hz. Cependant, si on bloque uniquement les déplacements de ces points de contact, la fréquence du premier mode des modèles réduits est égale à 3,6 Hz. Compte tenu des résultats présentés à la section IV.2.1.1, seuls les déplacements de ces points de contact ont donc été bloqués.

La réponse de l'empilement lorsqu'il est sollicité par le signal 3 a été calculée à l'aide de la variante linéaire des modèles réduits. Pour illustrer l'influence du recalage, deux calculs ont été réalisés. Un premier calcul a été réalisé avec le modèle « recalé » c'est-à-dire pour lequel la fréquence du premier mode est égale à 3,6 Hz. Puis, un deuxième calcul a été réalisé avec le modèle « non recalé » c'est-à-dire pour lequel la fréquence du premier mode est égale à 3,8 Hz. Ces calculs dynamiques ont été réalisés à l'aide de la méthode de recombinaison modale. Comme il s'agit d'un calcul dynamique linéaire, seuls les deux premiers modes, qui sont des modes couplés, ont été pris en compte dans la base modale. Un taux d'amortissement de 4% a été considéré pour ces modes, afin de rendre compte des différentes sources de non-linéarités non prises en compte dans le comportement (on rappelle que lors des essais de caractérisation modale des taux d'amortissement de 1% avaient été identifiés toutefois l'amortissement numérique correspond à un amortissement visqueux alors que l'amortissement mesuré lors des essais est l'amortissement « réel » de

la structure). Le pas de temps de calcul a été fixé à 10^{-5} seconde (qui correspond au plus grand pas de temps nécessaire pour calculer avec une précision suffisante le comportement quasi linéaire de l'empilement). Les résultats de ces deux calculs sont comparés à la réponse expérimentale de l'empilement. Les évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans la direction \underline{x} sont présentées sur la figure IV.21.a. Les SRO des accélérations absolues de la table et de la base du panier 3 dans la direction \underline{x} sont représentés sur la figure IV.21.b pour un taux d'amortissement critique égal à 2%. Les résultats expérimentaux sont représentés en noir. Les résultats numériques du premier calcul et du deuxième calcul sont respectivement représentés en bleu et en rouge. Les spectres des accélérations absolues de la base du panier 3 des modèles numériques présentent un pic au voisinage du premier mode de l'empilement. C'est le pic correspondant au modèle recalé qui est le plus proche du pic de l'essai. Les autres pics du spectre expérimental ne sont pas représentés sur les spectres des modèles numériques car ils correspondent à des modes qui sont sollicités du fait de la présence de défauts dans la structure. Par exemple, le pic à 7,5 Hz correspond au mode de torsion des paniers. Il est sollicité expérimentalement alors que la sollicitation est unidirectionnelle. Dans les modèles numériques, les défauts ne sont pas modélisés ainsi seul le premier mode intervient dans la réponse. Malgré ces différences, les déplacements en tête de l'empilement du premier calcul et de l'essai sont semblables sur les quatre premières secondes c'est-à-dire sur l'intervalle de temps pendant lequel l'amplitude des déplacements en tête est la plus importante. La valeur absolue du maximum du déplacement en tête du premier calcul est égale à 8,3 mm, elle est égale à la valeur absolue du maximum du déplacement expérimental. Concernant le modèle « non recalé », cette valeur est égale à 7,2 mm. Ainsi, si on utilisait ce modèle « non recalé », la valeur absolue du maximum du déplacement en tête serait sous-estimée de 13%.

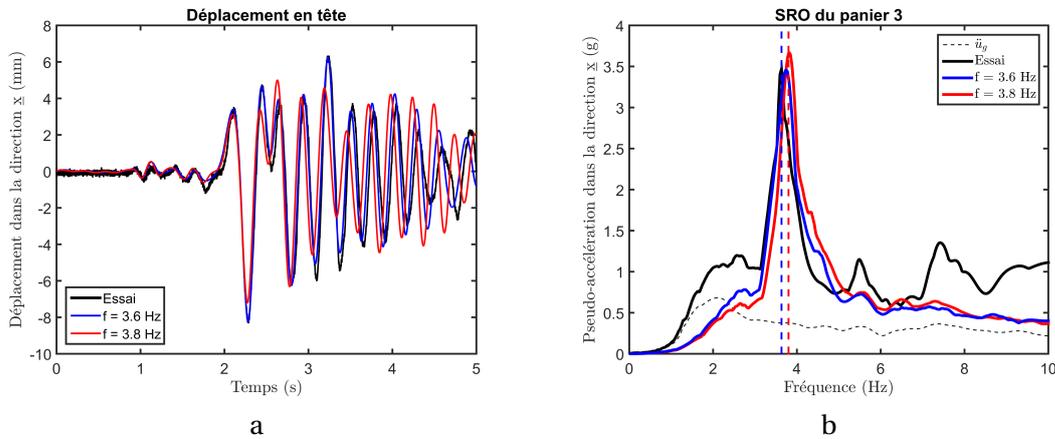


FIGURE IV.21 – Évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans la direction \underline{x} (a) et SRO des accélérations absolues de la table et de la base du panier 3 dans la direction \underline{x} (b) de l'essai et des modèles réduits pour un taux d'amortissement critique égal à 2%

IV.2.1.3 Calibration du modèle S4DoF

Pour le modèle S4DoF, l'ajustement est réalisé de façon différente : les fréquences des modes sont modifiées en changeant les valeurs des raideurs K_1 , K_2 et K_3 . Les valeurs de ces raideurs pour obtenir le premier mode à 3,6 Hz et à 3,8 Hz sont indiquées dans le tableau IV.10.

Fréquence du premier mode	K_1 ($N.m^{-1}$)	K_2 ($N.m^{-1}$)	K_3 ($N.m^{-1}$)
3,6 Hz	$3,1.10^8$	$1,5.10^6$	$1,5.10^6$
3,8 Hz	$3,4.10^8$	$1,7.10^6$	$1,7.10^6$

TABEAU IV.10 – Valeurs des raideurs du modèle S4DoF pour obtenir le premier mode à 3,6 Hz et à 3,8 Hz

De même que dans le paragraphe précédent, la réponse de l'empilement lorsqu'il est sollicité par le signal 3 a été calculée avec le modèle S4DoF. Deux calculs ont été réalisés : l'un avec le modèle « recalé » et l'autre avec le modèle « non recalé ». Comme pour les modèles réduits, un taux d'amortissement de 4% a été pris en compte pour les deux premiers modes. Le pas de temps de calcul a été fixé à 10^{-3} seconde. Les résultats de ces deux calculs sont comparés à la réponse expérimentale de l'empilement. Les évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans la direction \underline{x} sont présentées sur la figure IV.22.a. Les SRO des accélérations absolues de la table et de la base du panier 3 dans la direction \underline{x} sont présentées sur la figure IV.22.b pour un taux d'amortissement critique égal à 2%. Les résultats expérimentaux sont représentés en noir. Les résultats numériques du premier calcul et du deuxième calcul sont respectivement représentés en cyan et en magenta. De nouveau, on observe que la réponse expérimentale est plus proche de la réponse du modèle « recalé » que de la réponse du modèle « non recalé ». Pour le modèle « recalé », la valeur absolue du maximum du déplacement en tête est égale à 8,4 mm, le modèle S4DoF « recalé » surestime de 1% cette grandeur. Pour le modèle « non recalé », la valeur absolue du maximum du déplacement relatif en tête est égale à 7,6 mm, le maximum du déplacement en tête est donc, dans ce cas, sous-estimé de 8%.

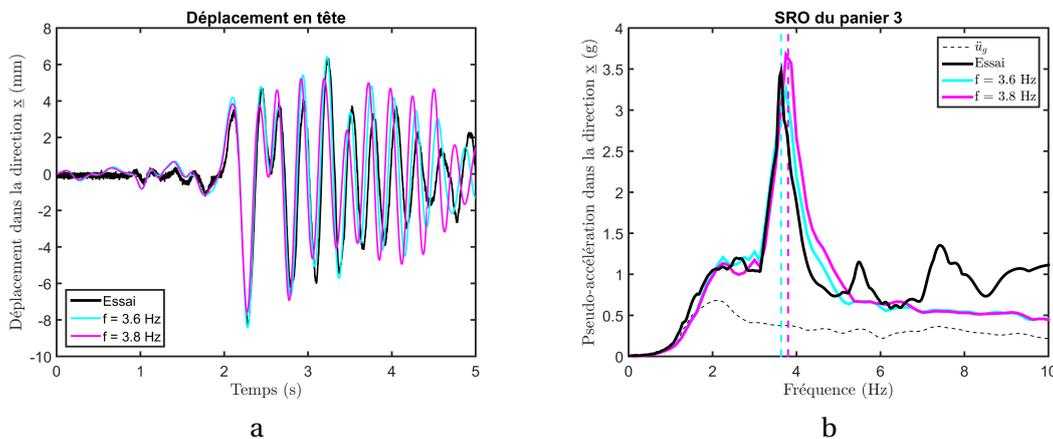


FIGURE IV.22 – Évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans la direction \underline{x} (a) et SRO des accélérations absolues de la table et de la base du panier 3 dans la direction \underline{x} (b) de l'essai et du modèle S4DoF pour un taux d'amortissement critique égal à 2%

Pour finir, avant de s'intéresser au comportement non linéaire de l'empilement, on présente, à titre indicatif, les temps de calcul des différents modèles dans le tableau IV.11. Bien que les résultats du modèle de référence n'aient pas été présentés, le temps de calcul est indiqué afin que le lecteur puisse comparer l'ensemble des modèles. Le temps de calcul des modèles réduits et du modèle S4DoF est dix fois plus faible que celui du modèle de référence.

Modèle	Modèle de référence	Modèles réduits	Modèle S4DoF
Temps de calcul (s)	66	6	5

TABLEAU IV.11 – Temps de calcul des différents modèles numériques - comportement quasi linéaire

IV.2.2 Comportement non linéaire de l'empilement

Dans cette section, la réponse de l'empilement est étudiée lorsqu'il est sollicité par le signal 4 (cf. tableau III.2). L'évolution temporelle de l'accélération de la table, mesurée lors de l'essai et notée \ddot{u}_g , est représentée sur la figure IV.23. Le PGA de cette accélération est égal à 0,31 g.

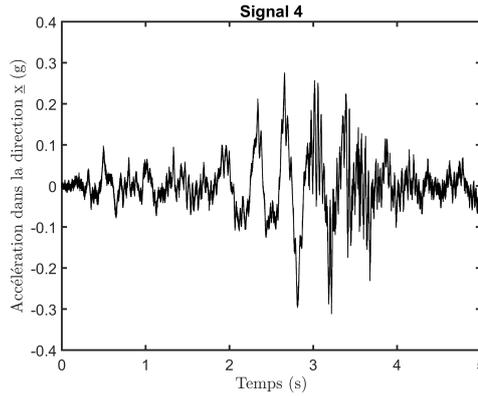


FIGURE IV.23 – Évolution temporelle de l'accélération de la table correspondant au signal 4

IV.2.2.1 Analyse de l'essai

Lors de cet essai, nous avons observé des mouvements liés à la flexibilité de la structure mais également des mouvements de soulèvement et de glissement à la fois à la base et au niveau des paniers.

Analyse du comportement global de l'empilement

Les SRO des accélérations absolues mesurées dans la direction \underline{x} au niveau de la table et à la base du panier 3, sont représentés sur la figure IV.24.a pour un taux d'amortissement critique égal à 2%. Les évolutions temporelles des soulèvements des quatre pieds de l'empilement sont représentées sur la figure IV.24.b. De plus, les évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans les directions \underline{x} et \underline{y} sont respectivement représentées sur les figures IV.25.a et IV.25.b. Les déplacements dans la direction \underline{x} ont été enregistrés au niveau des pieds 1 et 4, ils sont respectivement représentés en noir et en gris. Les déplacements dans la direction \underline{y} ont été enregistrés au niveau des pieds 3 et 4, ils sont respectivement représentés en noir et en gris. La numérotation des pieds est indiquée sur le schéma de la figure IV.26. Les enregistrements des déplacements en tête dans les directions \underline{x} et \underline{y} n'ont pas eu lieu au niveau des mêmes pieds pour des raisons d'encombrement. En effet, compte tenu de la hauteur de l'empilement, les capteurs qui mesureraient les déplacements en tête de l'empilement ne pouvaient pas être placés facilement dans le hall d'essais.

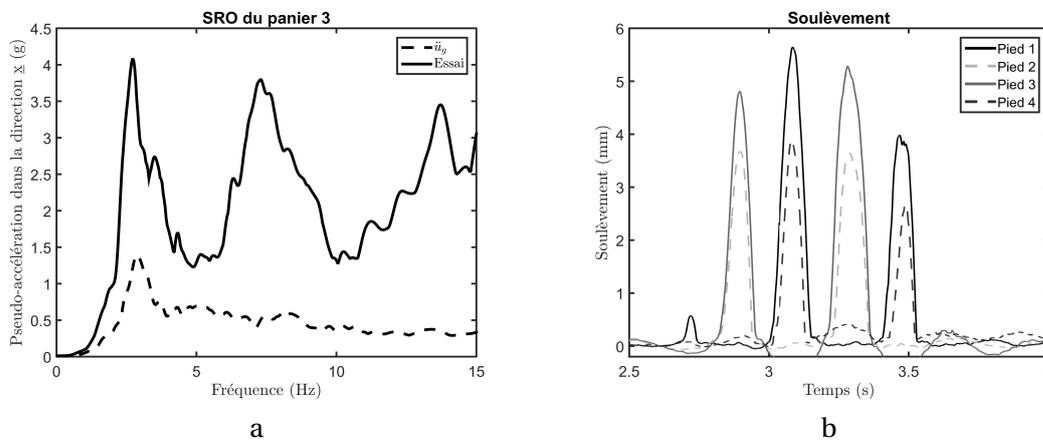


FIGURE IV.24 – SRO des accélérations absolues dans la direction \underline{x} de la table et de la base du panier 3 (a) pour un taux d'amortissement critique égal à 2% et évolutions temporelles des soulèvements de l'empilement (b)

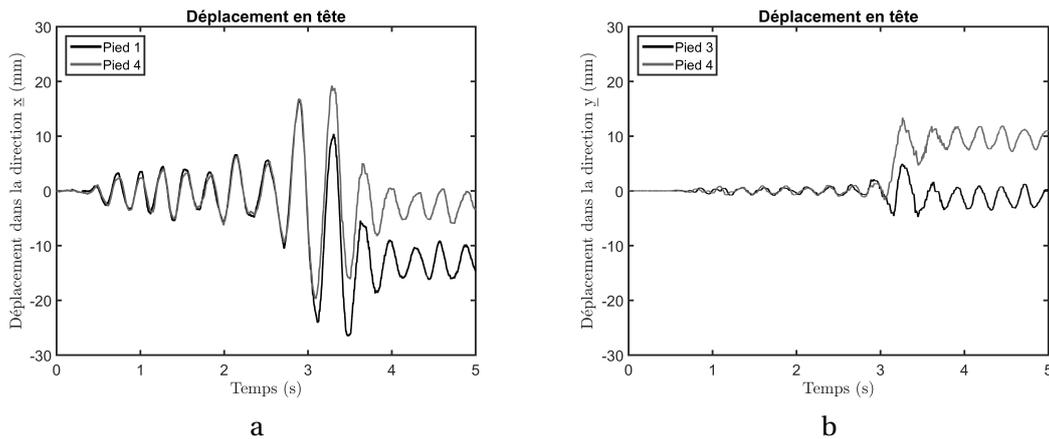


FIGURE IV.25 – Évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans la direction \underline{x} (a) et \underline{y} (b)

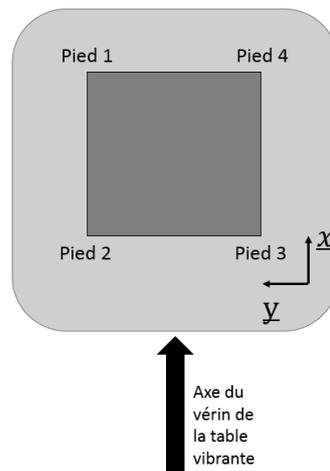


FIGURE IV.26 – Numérotation des pieds de l'empilement - vue de dessus

Bien que la sollicitation soit unidirectionnelle, on observe que les soulèvements des pieds ne sont pas identiques deux à deux et que les déplacements en tête dans la direction \underline{y} ne sont pas nuls. Ces résultats sont la conséquence d'un mouvement de rotation de l'empilement qui se manifeste autour de l'axe \underline{z} pendant le soulèvement. Cela s'observe sur les mesures expérimentales par des dérives des déplacements en tête au voisinage de 3 s — qui ne doivent pas être confondues avec du glissement — et qui implique que leurs moyennes ne sont plus nulles à la fin du signal d'excitation. Ces résultats attestent de la présence de défauts dans la structure.

Analyse du SRO de l'accélération absolue mesurée à la base du panier 3

Comme le montre la figure IV.27, lorsque le comportement de l'empilement est non linéaire, le SRO de l'accélération absolue mesurée à la base du panier 3 est plus « complexe » que lorsque le comportement est quasi linéaire (cf. figure IV.20). Ainsi, pour se repérer, nous avons matérialisé sur la figure IV.27 :

- le pic à 2,7 Hz qui est indiqué par un trait pointillé bleu foncé ;
- le pic à 3,5 Hz qui est indiqué par un trait pointillé rouge ;
- le pic à large bande compris entre 6,3 Hz et 9,3 Hz (ces fréquences sont respectivement indiquées par des traits en pointillés vert et magenta). Le sommet de ce pic est à 7,3 Hz, il est indiqué par un trait pointillé bleu clair.

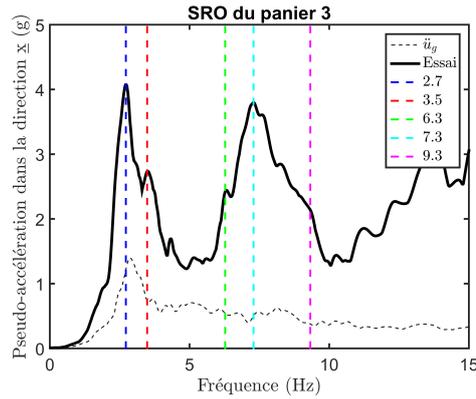


FIGURE IV.27 – SRO des accélérations absolues expérimentales dans la direction \underline{x} de la table et de la base du panier 3 pour un taux d’amortissement critique égal à 2%

Pour interpréter ce spectre, nous l’avons décomposé en fonction des principales phases qui composent le mouvement, à savoir (i) la phase qui précède le soulèvement de la base (notée « Avant soul »), (ii) la phase pendant laquelle la base se soulève (notée « Soul ») et (iii) la phase post-soulèvement de la base (notée « Après soul »). Sur la figure IV.28.a, sont représentées (i) en noir, l’évolution temporelle de l’accélération absolue dans la direction \underline{x} de la base du panier 3 pour l’ensemble de la réponse (notée « Total ») et (ii) en couleur, les « portions » de cette accélération correspondant aux trois principales phases du mouvement. Ces trois phases sont facilement identifiables sur l’évolution temporelle de l’accélération car, lors du soulèvement, les nombreux chocs qui se produisent génèrent un contenu haute fréquence tout à fait remarquable. On dispose par ailleurs des évolutions temporelles des soulèvements pour les distinguer. Sur la figure IV.28.b, se sont les SRO associés à ces trois phases qui sont présentés.

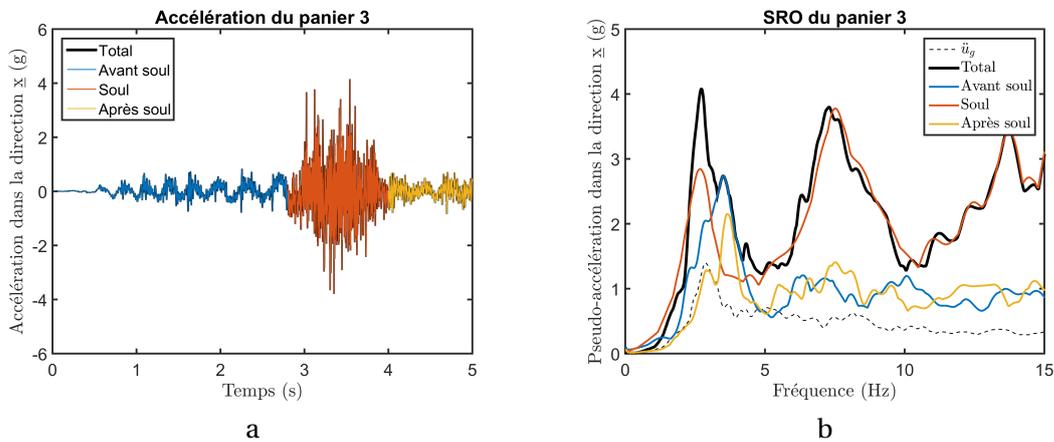


FIGURE IV.28 – Évolutions temporelles de l’accélération absolue dans la direction \underline{x} de la base du panier 3 pour les différentes phases du mouvement (a) et SRO associés pour un taux d’amortissement critique égal à 2% (b)

Tout d’abord, on observe que le pic à 2,7 Hz apparaît, de façon plus ou moins marquée, sur le spectre de l’ensemble de la réponse ainsi que sur les spectres des trois phases. Ce pic est également présent sur le spectre de l’accélération de la table, il est donc lié à la sollicitation. Puis, il y a un deuxième pic à 3,5 Hz sur le spectre de l’ensemble de la réponse. Ce pic est également présent sur les spectres des phases qui ont lieu avant et après le soulèvement. Ce pic correspond au premier mode de l’empilement à base « encastrée » car, dans ces deux phases, le comportement de l’empilement est quasi linéaire. Cela indique que la fréquence du premier mode a de-nouveau diminué par rapport à l’analyse quasi linéaire puisqu’elle était égale à 3,6 Hz. Ce changement de

fréquence est dû au fait que l'empilement est simplement posé et que le niveau de la sollicitation a augmenté par rapport à l'analyse quasi linéaire. Ce pic n'apparaît pas sur le spectre de la phase de soulèvement. Pour finir, il y a un troisième pic sur le spectre de l'ensemble de la réponse ainsi que sur le spectre associé à la phase de soulèvement. Ce pic est à large bande et apparaît entre 6,3 et 9,3 Hz. Pour comprendre à quoi correspond ce troisième pic, nous nous sommes appuyés sur les modèles numériques. Ainsi, nous avons analysé la base modale de l'empilement des modèles numériques pour différentes conditions aux limites, à savoir : (i) libres, (ii) en rotation autour d'un pied, (iii) en rotation autour de deux pieds et (iv) encastrées via les ressorts des liaisons. Les bases modales des modèles réduits simplifiés (cette variante est décrite dans IV.2.2.2) et du modèle S4DoF pour ces différentes configurations sont indiquées dans le tableau IV.12. Seules les fréquences des déformées A, C et D sont indiquées. À titre de rappel, ces déformées correspondent respectivement à : (i) la translation des paniers 2 et 3 dans la direction \underline{x} , (ii) la torsion des paniers et (iii) la translation, en opposition de phase, des paniers 2 et 3 dans la direction \underline{x} . Pour le modèle S4DoF, le mode C n'est pas indiqué car la torsion de l'empilement n'est pas modélisée dans ce modèle. Les cases colorées du tableau indiquent les fréquences qui sont comprises entre 6,3 et 9,3 Hz. Les fréquences des deux premiers modes des bases modales de l'empilement en rotation autour d'un pied et de deux pieds sont comprises dans cette bande de fréquences. Du fait de la largeur du troisième pic, on peut donc penser que ce sont ces modes qui interviennent dans la réponse de l'empilement lors du soulèvement de la base. Il est à noter que le troisième pic aurait pu être attribué au mode C (i.e. au mode de torsion) associé à la base modale « encastrée » car sa fréquence est comprise entre 6,3 et 9,3 Hz, mais ce n'est pas le cas. En effet, une façon indirecte d'interpréter le spectre expérimental du panier 3 a été de réaliser une étude d'un lâcher non amorti de l'empilement à l'aide du modèle S4DoF (cf. Annexe B). Réaliser une étude avec le modèle S4DoF permet d'analyser plus facilement le spectre étant donné que ce modèle contient peu de modes. Dans cette étude, la comparaison entre deux réponses dynamiques de l'empilement a été réalisée. Dans le premier scénario, la base reste en contact avec le sol. Dans le deuxième scénario, la base peut se soulever. En comparant les spectres de ces deux réponses, on observe que le spectre du deuxième scénario est bien plus « complexe » que celui du premier scénario. En effet, lorsque la base se soulève, ce sont les modes des deux phases qui interviennent dans la réponse de l'empilement. Ce phénomène est une des spécificités du basculement des structures libres et flexibles.

Déformée modale	Modèles réduits simplifiés			Modèle S4DoF	
	A	C	D	A	D
Fréquence des modes de la base modale libre (Hz)	13,3	10,9	10,5	∅	∅
Fréquence des modes de la base modale en rotation autour d'un pied (Hz)	6,6	7,8	9,5	∅	∅
Fréquence des modes de la base modale en rotation autour de deux pieds (Hz)	8,6	6,3	9,5	8,1	9,6
Fréquence des modes de la base modale « encastrée » (Hz)	3,6	6,5	9,8	3,6	9,5

TABLEAU IV.12 – Fréquence des modes en fonction des conditions aux limites de la base modale des modèles réduits simplifiés et du modèle S4DoF

IV.2.2.2 Les différentes variantes de modèles réduits

Pour interpréter numériquement l'essai, différentes variantes de modèles réduits ont été développées. Dans cette section, nous présentons ces différentes variantes, en nous attachant sur la difficulté que représente l'ajustement de l'amortissement des modèles.

Les différentes variantes de modèles réduits

Les principales non-linéarités du problème ont été traitées numériquement par le biais de la liaison *point point frottement* de l'opérateur *DYNE* du code CAST3M. Par la suite, on appelle liaison de normale \underline{z} (respectivement \underline{x} et \underline{y}), une liaison pour laquelle le modèle de Kelvin-Voigt est appliqué dans la direction \underline{z} (respectivement \underline{x} et \underline{y}), sachant que tangentiellement, c'est le modèle de Coulomb régularisé d'Oden qui s'applique (cf. le paragraphe III.3.1.3).

Dans un premier temps, des liaisons ont été ajoutées uniquement aux points de contact de l'empilement avec la dalle support dans la direction \underline{z} . Les modèles correspondant sont nommés **modèles réduits simplifiés** dans le sens où ils ne traitent ni des non-linéarités inter-paniers, ni des non-linéarités au niveau des colis qui, on le rappelle, sont simplement posés dans les paniers. La variante des modèles réduits correspondante est nommée SNLFE.

Pour tenir compte des liaisons inter-paniers, une variante dite non simplifiée des modèles réduits a été développée. Dans cette variante, nommée NLFE, huit liaisons de normale \underline{z} ont été ajoutées au niveau des pieds des deux paniers supérieurs. Par ailleurs, les avaloirs des paniers (c'est-à-dire les parties supérieures des montants des paniers qui limitent le glissement du panier supérieur) ont été pris en compte. Ainsi, des liaisons ont également été modélisées avec des normales dans les directions \underline{x} et \underline{y} au niveau des pieds des paniers 2 et 3. Les modèles réduits non simplifiés sont donc composés de 28 liaisons.

Dans un deuxième temps, compte tenu du mouvement de rotation observé, autour de l'axe \underline{z} , lors des soulèvements, nous avons introduit un défaut dans certains modèles réduits afin de reproduire ce phénomène. Nous avons fait l'hypothèse que sous chacun des pieds de la base de l'empilement, les coefficients de frottement n'étaient pas égaux. Ainsi, nous avons diminué le coefficient de frottement au niveau de l'un des pieds (0,25 contre 0,4 pour les trois autres). On précise que le calage de ce défaut est délicat, le mouvement de rotation autour de l'axe \underline{z} n'apparaît en effet que pour certains couples de valeurs, par exemple ici le couple (0,25, 0,4). Les modèles correspondant à cette modélisation sont nommés **modèles réduits avec défauts**. Ainsi, pour les versions simplifiées et non simplifiées, cela conduit aux modèles nommés SNLFED et NLFED.

Les différentes variantes des modèles réduits qui ont été développées dans cette thèse, sont synthétisées dans le tableau IV.13.

Nom des modèles réduits	Description
SNLFE	La zone de contact située au niveau de la base de l'empilement est prise en compte dans la modélisation.
SNLFED	La zone de contact située au niveau de la base de l'empilement ainsi que la différence de coefficient de frottement au niveau des appuis sur la dalle sont pris en compte dans la modélisation.
NLFE	Les zones de contact situées à la base de chaque panier sont prises en compte dans la modélisation.
NLFED	Les zones de contact situées à la base de chaque panier ainsi que les défauts sont pris en compte dans la modélisation.

TABLEAU IV.13 – Descriptions des différentes variantes des modèles réduits

Enrichissement de la base modale des modèles réduits

La prise en compte des non-linéarités dans les modèles réduits implique de devoir utiliser une autre base modale que celle utilisée lors des calculs linéaires présentés dans la partie IV.2.1. Ainsi, pour les **modèles réduits simplifiés** (c'est-à-dire pour les modèles SNLFE et SNLFED), les calculs ont été réalisés avec la base modale de l'empilement libre. Pour les **modèles réduits non simplifiés** (c'est-à-dire pour les modèles NLFE et NLFED), les calculs ont été réalisés avec les bases modales des trois paniers libres.

Du fait du soulèvement, des impacts se produisent lors du mouvement. Ces impacts peuvent affecter (déformer) localement la structure. Pour prendre en compte les modes correspondant à ces déformations locales dans les calculs dynamiques, on doit enrichir la base modale en ajoutant des pseudo-modes. Ces pseudo-modes représentent les modes à haute fréquence qui ont été négligés et dont on suppose que les réponses sont quasi statiques au regard du comportement basse fréquence de l'empilement. Ces réponses sont donc évaluées au moyen de calculs statiques. Pour les modèles simplifiés, douze pseudo-modes ont été calculés en appliquant des efforts dans les directions x , y et z à chacun des pieds de l'empilement. Pour les modèles non simplifiés, 36 pseudo-modes ont été calculés. Les calculs statiques ont été réalisés sur les douze pieds des trois paniers. La figure IV.29 présente les déformées modales des deux premiers pseudo-modes de l'un des paniers. Ces déformées sont des combinaisons des déformées du panier lui-même et de ses pieds. Les fréquences respectives de ces modes sont 244 Hz et 290 Hz.

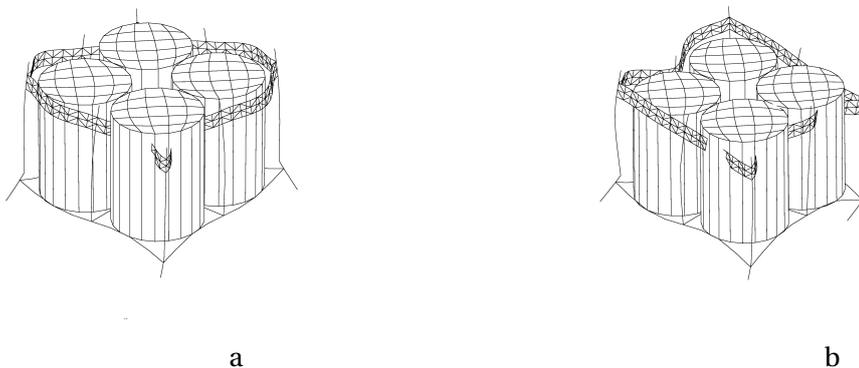


FIGURE IV.29 – Déformées modales des deux premiers pseudo-modes d'un panier dont les fréquences sont respectivement égales à 244 Hz (a) et 290 Hz (b)

Concernant le nombre de modes à prendre en compte dans les calculs dynamiques non linéaires, une étude de convergence a été réalisée en faisant varier progressivement le nombre de modes de la base modale. Cette étude s'est appuyée principalement sur le déplacement en tête et sur le soulèvement de l'empilement autrement-dit sur les deux grandeurs d'intérêt de cette thèse². Le nombre de modes qui a été trouvé pour obtenir un bon compromis entre un temps de calcul raisonnable et une bonne représentativité du comportement de l'empilement est de :

- 30 pour les modèles SNLFE et SNLFED, auxquels il faut ajouter les pseudo-modes ;
- 63 pour les modèles NLFE et NLFED (c'est-à-dire 21 modes par panier, auxquels il faut également ajouter les pseudo-modes).

2. Il est à noter que les résultats de ce type d'étude peuvent varier en fonction de la grandeur considérée, à savoir un déplacement, un effort, etc.

Les fréquences des modes qui composent la base modale des modèles simplifiés et non simplifiés sont indiquées respectivement aux tableaux IV.14 et IV.15. Dans ces tableaux, les six premiers modes ne sont pas représentés car ils correspondent à des modes de corps rigide (à fréquence nulle). Les fréquences des pseudo-modes sont indiquées par des cases colorées. In fine, huit et non douze pseudo-modes (c'est-dire en appliquant deux forces dans les directions \underline{x} et \underline{z} et non trois forces dans les directions \underline{x} , \underline{y} et \underline{z} au niveau des pieds) ont été ajoutés à la base modale des modèles réduits simplifiés car les fréquences des quatre derniers modes étaient trop élevées. Prendre en compte ces modes dans les calculs dynamiques non linéaires signifiait réduire le pas de temps rendant les calculs très coûteux. Il en est de même pour les modèles réduits non simplifiés.

Mode	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Fréquence (Hz)	10,5	10,5	10,9	13,3	13,3	13,3	13,8	16,5	17,6	19,1	21,2
Mode	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Fréquence (Hz)	21,2	21,2	21,4	21,4	21,4	21,4	21,5	21,5	21,8	21,9	22,1
Mode	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	
Fréquence (Hz)	22,5	23,8	35,2	46,5	58,3	64,2	91,8	99,5	288	319	

TABLEAU IV.14 – Fréquences des modes de la base modale enrichie des modèles réduits simplifiés de l'empilement - les cases colorées correspondent aux pseudo-modes

Mode	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Fréquence (Hz)	9,9	15,7	21,2	21,2	21,4	21,4	22	22,5	25,9	55	55	59,1
Mode	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
Fréquence (Hz)	59,1	61,2	61,2	244	290	290	308	416	1078	1206	1300	

TABLEAU IV.15 – Fréquences des modes de la base modale enrichie d'un panier des modèles réduits non simplifiés - les cases colorées correspondent aux pseudo-modes

IV.2.2.3 Discussion à propos du recalage de l'amortissement des modèles numériques pour les calculs non linéaires

Dans cette section, on propose une « discussion » à propos du recalage des modèles. On s'intéresse en particulier aux conséquences d'un mauvais ajustement des modèles du point de vue de leur rigidité (la masse et sa répartition étant considérées comme relativement mieux connues) sur l'ajustement de l'amortissement. Cette étude est le pendant de l'étude qui a été menée pour le comportement sismique quasi linéaire, pour le comportement non linéaire.

Discussion

Les causes d'un mauvais ajustement de la rigidité d'un modèle mécano-numérique sont multiples. L'une d'entre elles est liée à la problématique de l'enrichissement de la base modale — on se place ici dans le cadre de la problématique qui a été présentée à la section précédente — si on a recours à une méthode de recombinaison modale pour réaliser les calculs dynamiques temporels. Lorsque la base modale n'est pas assez riche, le modèle sous-jacent est en effet plus rigide que souhaité. Par voie de conséquence, nous allons voir que lorsque l'on cherche à ajuster le modèle pour qu'il soit le plus représentatif possible des résultats d'essais, cela peut conduire à considérer une valeur du taux d'amortissement modal qui soit « erronée » pour compenser l'erreur sur la rigidité du modèle. Dans le cas présent, cela s'explique par le fait que localement, au voisinage de la fréquence du premier mode propre de l'empilement (fréquence du mode propre de l'empilement à base encastrée qui est, tel que l'on résout le problème, une combinaison linéaire des modes

propres libres de l'empilement), le SRO de l'excitation est une fonction affine de la fréquence et, en l'occurrence, une fonction décroissante. Donc, plus le modèle est rigide et plus il est nécessaire de réduire l'amortissement pour garder un niveau de réponse (maximum en valeur absolue du déplacement en tête par exemple) constant, toutes choses égales par ailleurs (e.g évolution temporelle de la réponse, etc.).

À cela s'ajoute le fait que lorsque l'on a recours à des modèles simplifiés pour représenter le comportement global de l'empilement, l'amortissement doit nécessairement être plus élevé qu'avec un modèle plus fidèle, dans la mesure où il va être artificiellement utilisé pour compenser toutes les sources de dissipation qui n'ont pas été prises en compte comme, par exemple, les non-linéarités inter-paniers, les non-linéarités entre les colis et les paniers, etc.

Ces deux aspects de la problématique font, qu'en pratique, la justification de la valeur de l'amortissement d'un modèle mécano-numérique — en particulier simplifié — n'est pas triviale. Nous allons l'illustrer dans le paragraphe suivant.

Illustration avec les modèles réduits

Pour illustrer l'importance de l'enrichissement de la base modale dans des calculs dynamiques non linéaires, par le biais des pseudo modes, nous présentons ci-dessous la comparaison entre les résultats d'un calcul réalisé avec une base modale enrichie, noté « BM E », et les résultats d'un calcul réalisé avec une base modale non enrichie, noté « BM NE ». Dans cette comparaison, la réponse de l'empilement lorsqu'il est sollicité par le signal 4 est calculée à l'aide du modèle SNLFE, bien que ce ne soit pas le plus représentatif des modèles. Il se trouve toutefois que les principales conclusions seront transposables aux autres modèles. La base modale enrichie est composée de 30 modes et de huit pseudo-modes. La base modale non enrichie est composée de 40 modes sans pseudo-mode (il a été nécessaire d'ajouter dix modes pour obtenir une réponse « pertinente »).

Pour mettre en avant la « dualité » entre le recalage de la rigidité et de l'amortissement, des taux d'amortissement modaux de 10% pour le calcul « BM E » et de 2% et 4% pour le calcul « BM NE » ont été considérés. Ces valeurs correspondent à celles qui ont permis d'obtenir les résultats les « plus proches » des résultats expérimentaux pour cette classe de modèle, c'est-à-dire pour les modèles sans défaut. Par ailleurs, la rigidité et le coefficient d'amortissement de chaque liaison ont été respectivement fixés à 4.10^9 N.m^{-1} et à $1,3.10^6 \text{ N.m}^{-1}\text{s}$ pour les deux calculs.

Les SRO des accélérations absolues mesurées / calculées dans la direction \underline{x} au niveau de la table et à la base du panier 3 sont présentés sur la figure IV.30 pour un taux d'amortissement critique égal à 2%. Les évolutions temporelles des soulèvements de l'un des pieds ainsi que les déplacements relatifs en tête de l'empilement dans la direction \underline{x} sont respectivement présentées sur les figures IV.31.a et IV.31.b. Les résultats expérimentaux sont présentés en noir tandis que les résultats numériques sont représentés en bleu, en rouge et en vert pour respectivement le calcul « BM E » avec un taux d'amortissement modal de 10 % et les calculs « BM NE » avec des taux d'amortissements modaux de 2 % et 4%.

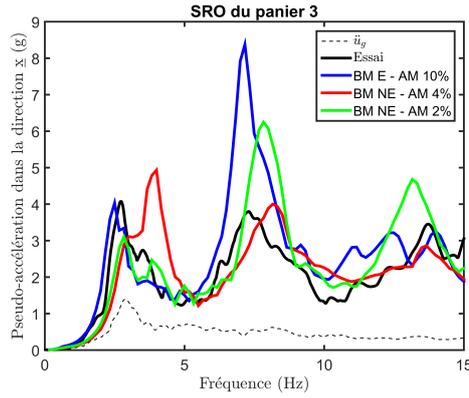


FIGURE IV.30 – SRO des accélérations absolues dans la direction x de la table et de la base du panier 3 pour un taux d'amortissement critique égal à 2%

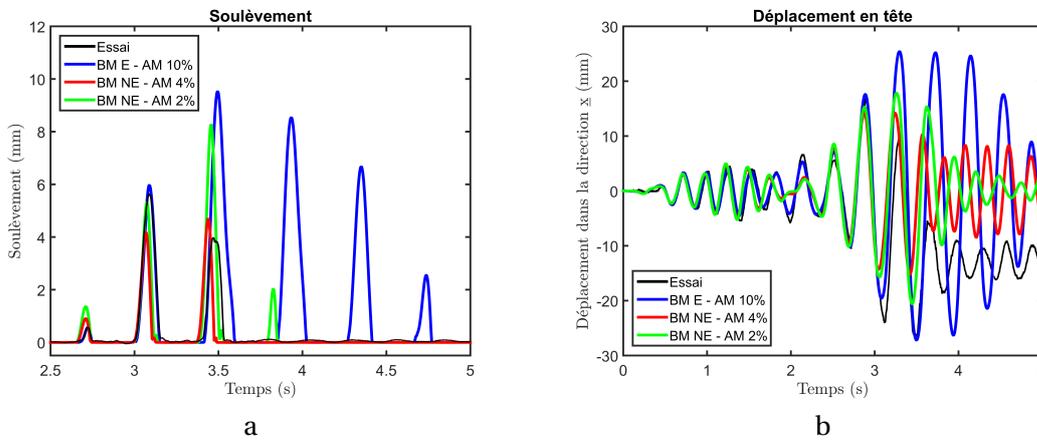


FIGURE IV.31 – Évolutions temporelles des soulèvements de l'empilement (a) et des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans la direction x (b)

Le calcul sur base modale enrichie « BM E » est, pour la classe de modèle choisie ici pour l'illustration, censé être le plus pertinent. Le taux d'amortissement de 10% a été retenu pour s'ajuster au mieux aux résultats d'essais. Ce taux est relativement élevé dans la mesure où il vise à compenser toutes les non-linéarités non prises en compte dans le modèle. Malgré ces précautions, on observe que (i) l'amplitude des déplacements en tête de l'empilement est plus importante que lors de l'essai, (ii) les déplacements en tête ne dérivent pas à la fin du signal contrairement aux déplacements expérimentaux, (iii) les amplitudes et le nombre des soulèvements sont plus importants que lors de l'essai et (iv) le spectre issu du calcul numérique présente un pic de niveau plus élevé que celui mesuré expérimentalement à 7,5 Hz. Nous verrons dans la suite que ces différences sont principalement dues au fait que les défauts de la structure ne sont pas pris en compte dans le modèle.

Les différences entre les valeurs des taux d'amortissement retenues — 2% et 4% avec la base non enrichie et 10% avec la base enrichie — s'expliquent par le fait qu'avec la base non enrichie, le modèle sous-jacent est « trop » rigide. Les résultats de la figure IV.30 montrent en effet que, pour ce modèle, lorsque le taux d'amortissement est de 4%, le premier pic du SRO est situé à 3,8 Hz alors que le modèle devrait être à 3,6 Hz voire 3,5 Hz si on se réfère à l'analyse présentée à la section IV.2.2.1. L'écart entre ces deux fréquences est très faible, néanmoins, le calcul avec un amortissement modal de 10% n'aurait quasiment pas donné de soulèvement. Pour pouvoir observer de tels phénomènes, il est nécessaire de réduire le taux d'amortissement modal pour ce modèle. Si ce taux est réduit à 2%, ce qui est contradictoire avec le fait que pour le comportement quasi linéaire il faille un taux de 4%, on peut avoir l'impression que les résultats sont meilleurs qu'à 4%,

puisque l'amplitude des soulèvements est plus importante que celle obtenue lors de l'essai et que le SRO est plus proche de celui de l'essai notamment au voisinage de la fréquence fondamentale de l'empilement. Il n'en est cependant rien puisqu'une seule des deux grandeurs d'intérêt, l'amplitude des soulèvements, est majorée par rapport aux essais, tandis que l'autre, l'amplitude du déplacement en tête, est sous-estimée. En outre, contrairement à ce que laisse penser le SRO de l'accélération absolue du panier 3, ce résultat montre que l'abaissement du taux d'amortissement modal (passage de 4% à 2%) conduit à une légère augmentation du déplacement en tête ainsi que de l'amplitude et du nombre de soulèvements. Ce résultat est intéressant du point de vue de l'ingénieur car il montre, toutes choses égales par ailleurs, i.e. à modèle donné, que l'on peut obtenir une réponse majorée en considérant un taux d'amortissement modal plus faible qu'il ne doit l'être « en réalité ». Néanmoins, cela ne permet pas de couvrir les écarts causés par un mauvais ajustement de la rigidité du modèle (quelle qu'en soit la cause : mauvaise représentativité des conditions aux limites, base modale pas assez riche si on a recours à une méthode de décomposition modale pour la résolution numérique, discrétisation du modèle pas assez fine, etc.).

Illustration avec le modèle S4DoF

À titre complémentaire, nous nous sommes également intéressés à la réponse du modèle semi-analytique S4DoF. Les figures IV.32 et IV.33 présentent la comparaison entre les réponses sismiques du modèle S4DoF ajusté à 3,5 Hz et à 3,8 Hz. Comme pour le modèle SNLFE, on observe qu'un écart de 8% sur la fréquence fondamentale à une conséquence significative sur les calculs du déplacement en tête et des soulèvements. Par ailleurs, en considérant un taux d'amortissement modal de 2% pour le modèle ajusté à 3,8 Hz, on vérifie, comme pour le modèle SNLFE, que cela conduit à une augmentation de l'amplitude du déplacement en tête et des soulèvements. On reviendra par la suite sur ce qui fait la différence entre les résultats des modèles réduits et du modèle S4DoF.

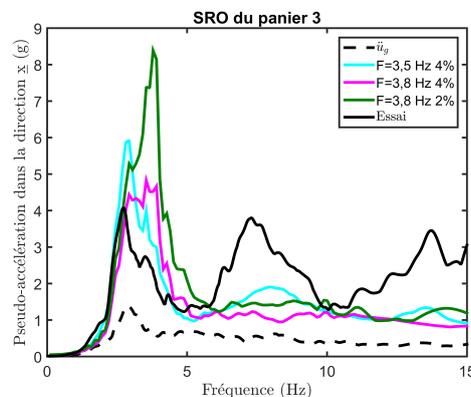


FIGURE IV.32 – SRO de l'accélération absolue du panier 3 calculés avec le modèle S4DoF dont la fréquence du mode fondamental est ajustée à 3,5 Hz pour un taux d'amortissement de 4% et à 3,8 Hz pour des taux d'amortissement de 2% et 4%

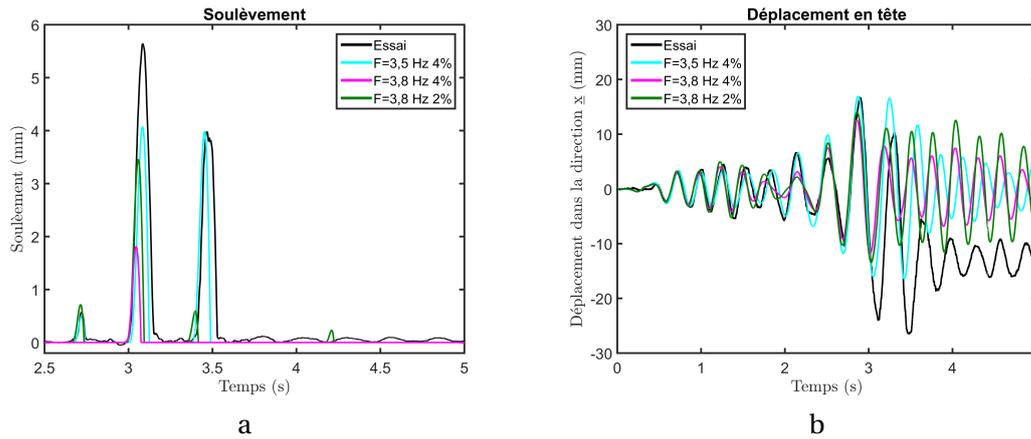


FIGURE IV.33 – Évolutions temporelles du soulèvement (a) et des déplacements en tête (b) calculés avec le modèle S4DoF dont la fréquence du mode fondamental est ajustée à 3,5 Hz pour un taux d’amortissement de 4% et à 3,8 Hz pour des taux d’amortissement de 2% et 4%

IV.2.2.4 Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques

Dans ce paragraphe, les résultats de l’ensemble des modèles sont présentés et comparés aux résultats expérimentaux. Ils sont présentés en respectant le code couleur indiqué dans le tableau IV.16. En outre, dans ce tableau, les valeurs des paramètres suivants sont indiqués : (i) le pas de discrétisation temporelle, (ii) les taux d’amortissements modaux, (iii) les raideurs des liaisons, (iv) le coefficient d’amortissement des liaisons et (v) le paramètre ϵ du modèle d’Oden. Ces paramètres ont été calés afin que les résultats des modèles soient les plus proches possible des résultats expérimentaux. Ces paramètres évoluent donc suivant les modèles. Par exemple, les taux d’amortissements modaux des modèles SNLFE, NLFE et S4DoF ne sont pas identiques car les modèles diffèrent de part (i) leur base modale, (ii) les phénomènes physiques qu’ils représentent (non-linéarités inter-paniers, etc.) et (iii) leur nature même (modèles semi-analytique vs. éléments-finis). On constate typiquement que le passage du modèle SNLFE au modèle NLFE, plus réaliste, implique de devoir diminuer la valeur du taux d’amortissement modal dans la mesure où, dans ce dernier, un plus grand nombre de non-linéarités sont prises en compte. Le modèle S4DoF a été recalé de sorte que la fréquence du premier mode soit égale à 3,5 Hz, comme cela a été observé lors de l’analyse présentée à la section IV.2.2.1. Pour finir, les valeurs des raideurs des liaisons correspondent aux valeurs identifiées lors de l’analyse des essais de caractérisation modale.

Nom	SNLFE	SNLFED	NLFE	NLFED	S4DoF à 3,5 Hz
Couleur	bleu	vert	rouge	orange	magenta
Pas de temps (s)	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-3}
Taux d’amortissement modaux (%)	10	7	8	8	4
Raideurs des liaisons ($N.m^{-1}$)	4.10^9	4.10^9	4.10^9	4.10^9	\emptyset
Coefficients d’amortissement des liaisons ($N.m^{-1}s$)	$1,3.10^6$	$1,3.10^6$	$1,3.10^6$	$1,3.10^6$	\emptyset
Valeur de ϵ ($m.s^{-1}$)	3.10^{-3}	3.10^{-3}	3.10^{-3}	3.10^{-3}	\emptyset

TABEAU IV.16 – Code couleur et valeurs des paramètres des modèles numériques. Ces valeurs correspondent aux valeurs qui fournissent les meilleurs ajustement, en cohérence avec les valeurs retenues lors de l’analyse de l’essai à bas niveau, i.e. correspondant au comportement quasi statique de l’empilement.

Les évolutions temporelles des déplacements relatifs de la base de l'empilement dans les directions \underline{x} et \underline{y} sont présentées respectivement sur les figures IV.34.a et IV.34.b. Les SRO des accélérations absolues dans la direction \underline{x} de la table et de la base du panier 3 sont présentés sur la figure IV.35.a pour un taux d'amortissement critique égal à 2%. Les évolutions temporelles des soulèvements au niveau du pied 1 de l'empilement sont présentées sur la figure IV.35.b. Les évolutions des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans les directions \underline{x} et \underline{y} sont présentées respectivement sur les figures IV.36.a et IV.36.b. D'autres grandeurs d'intérêt comme les déplacements horizontaux entre les paniers sont présentées dans l'annexe C.

D'une manière générale, ces résultats montrent que la prise en compte d'un défaut à l'interface avec la dalle support, permet d'améliorer considérablement les résultats du modèle et cela se retrouve à la fois sur les SRO de l'accélération de la base du panier 3 et sur les évolutions temporelles des soulèvements et des déplacements horizontaux. Au niveau des déplacements, cela permet de retrouver la dérive observée expérimentalement. Au niveau du SRO de l'accélération, le niveau du troisième pic (situé au voisinage de 7,5 Hz) diminue fortement, permettant de retrouver le niveau de l'essai. Cette diminution est la conséquence directe de la réduction du nombre de soulèvements.

Concernant les déplacements horizontaux de la base de l'empilement, on constate naturellement que pour les modèles pour lesquels aucun défaut n'a été introduit, les déplacements dans la direction \underline{y} sont nuls. Dans la direction \underline{x} , ils sont également nuls pour le modèle S4DoF, puisque dans ce modèle les déplacements relatifs entre la base et le support ne sont pas pris en compte. Pour les modèles SNLFE et NLFE ces déplacements présentent des oscillations qui traduisent un effet de structure. Cet effet de structure vient du fait que les capteurs de mesure des déplacements de la base ont été fixés sur les pieds de l'empilement à une hauteur égale à 149 mm. Les déplacements obtenus avec les modèles SNLFE et NLFE correspondent aux déplacements des points du maillage situés à cette hauteur (ce qui n'est pas le cas pour le modèle S4DoF car ces déplacements correspondent aux extrémités de la base rigide). Ces oscillations sont donc liées à la flexibilité de la structure, elles apparaissent uniquement dans la direction dans laquelle le signal d'excitation est imposé.

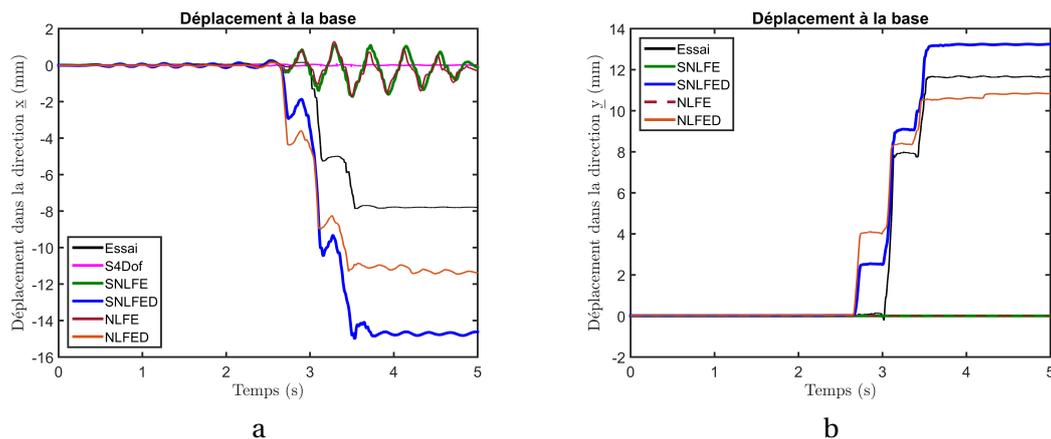


FIGURE IV.34 – Évolutions temporelles des déplacements relatifs de la base de l'empilement dans les directions \underline{x} (a) et \underline{y} (b)

Dans la direction x , les déplacements des modèles à la base de l'empilement sont surestimés. Néanmoins, en tête de l'empilement, les déplacements sont semblables (cf. figure IV.36). Cela indique que les hypothèses de modélisation que nous avons adoptées sont perfectibles et que certains phénomènes doivent se compenser. La prise en compte des déplacements inter-paniers, via le modèle NLFED, permet d'améliorer légèrement les résultats puisque la dérive suivant x est moins importante.

Concernant le modèle S4DoF, on remarque que les soulèvements sont semblables aux soulèvements expérimentaux et à ceux obtenus avec les modèles avec défauts. Cela ne signifie pas pour autant que ce modèle soit plus représentatif que le modèle SNLFE par exemple. Ce résultat est contradictoire car les résultats obtenus auraient dû être similaires à ceux du modèle SNLFE. Cela semble donc indiquer que le modèle de transition de phase dissipe trop d'énergie dans la mesure où le nombre de soulèvements est moins importants. Bien que les résultats ne soient pas présentés ici, nous avons également utilisé le modèle de [ACIKGOZ et DEJONG, 2016] basé sur la conservation du moment cinétique à l'impact. Néanmoins, comme eux et de nombreux auteurs, nous avons constaté que la valeur du coefficient de restitution d'énergie devait être fortement augmentée pour obtenir un accord satisfaisant avec les résultats expérimentaux, du fait notamment du faible élanement de la structure. Cet ajustement invalide alors la conservation du moment cinétique lorsqu'elle est écrite dans le cadre des hypothèses du modèle. La modélisation des transitions de phase est une difficulté persistante pour ce type de problème, qui n'a pu être abordée spécifiquement dans le cadre de cette thèse.

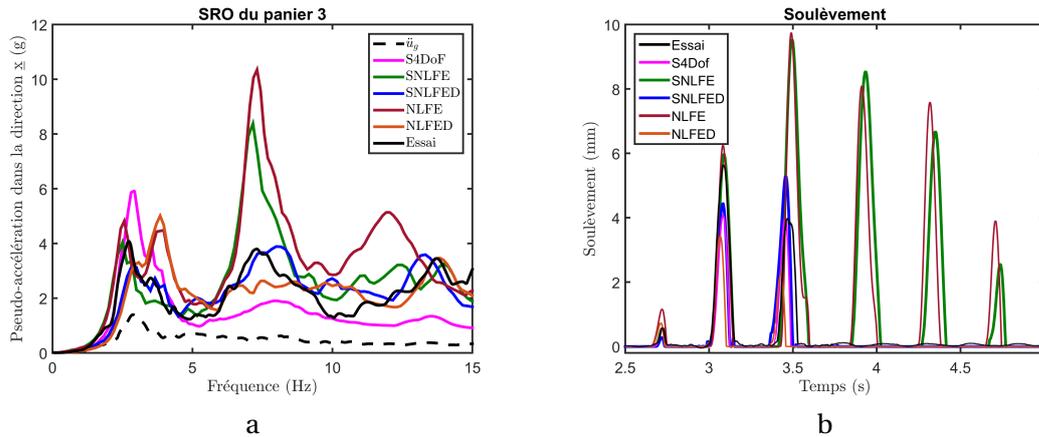


FIGURE IV.35 – SRO des accélérations absolues dans la direction x de la table et de la base du panier 3 (a) pour un taux d'amortissement critique égal à 2% et évolutions temporelles des soulèvements de l'empilement (b)

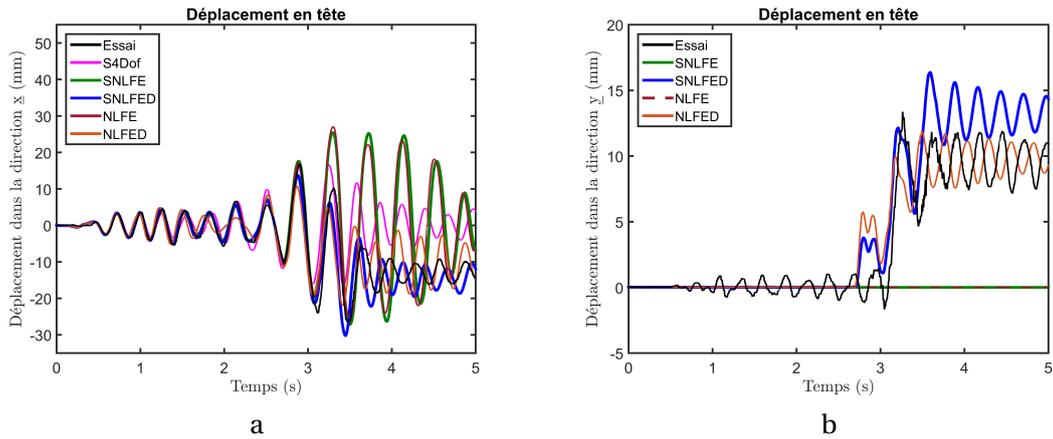


FIGURE IV.36 – Évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans les directions x (a) et y (b)

Pour finir, à titre indicatif, les temps de calcul des modèles sont indiqués dans le tableau IV.17.

Modèle(s)	SNLFED et SNLFE	NLFED et NLFE	S4DoF
Temps de calcul (s)	60	150	90

TABLEAU IV.17 – Temps de calcul d'un calcul dynamique non linéaire des différents modèles numériques

IV.2.3 Étude de la variabilité des réponses expérimentales et numériques

Pour étayer l'analyse précédente, on présente dans cette section les résultats de l'étude portant sur la variabilité des réponses expérimentales et numériques. Pour ce faire, les essais avec le signal 4 de l'exemple précédent ont été répétés 35 fois. Les 35 réalisations de l'accélération mesurées au niveau de la table vibrante sont présentées sur la figure IV.37. Durant les quatre premières secondes, la variabilité est relativement faible. Elle augmente ensuite dès que le comportement de l'empilement devient non linéaire, du fait des chocs occasionnés par les soulèvements de la structure. Il est à noter que, durant ces essais, il a été décidé de ne pas replacer les empilements entre chaque réalisation de l'excitation. Cela crée une incertitude sur la position initiale de l'empilement « similaire » à celle que l'on pourrait rencontrer en pratique.

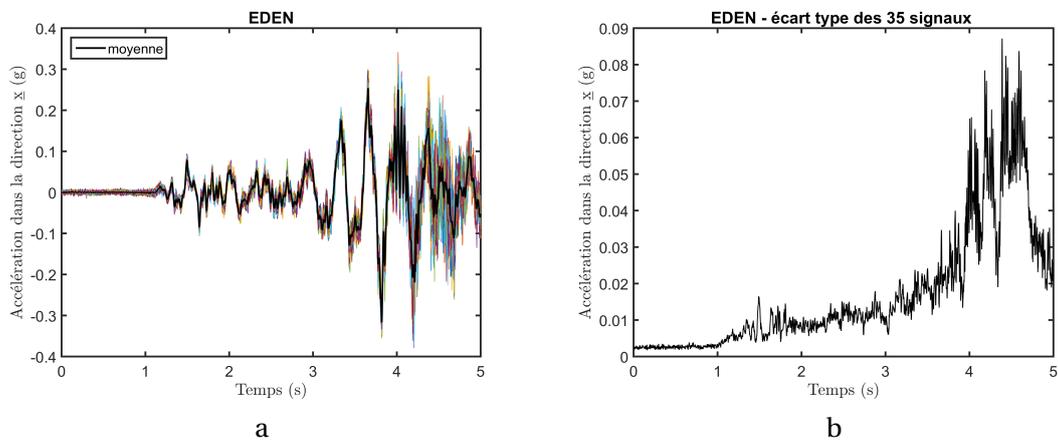


FIGURE IV.37 – Évolutions temporelles de l'accélération de la table mesurées lors des 35 essais (a) et de l'écart type des réalisations (b)

Cette étude a été uniquement réalisée à partir des modèles numériques qui présentaient le meilleur compromis entre un faible coût en temps de calcul et une bonne représentativité du comportement, c'est-à-dire à partir des modèles S4DoF, SNLFE et SNLFED (cf. figure IV.17). Ainsi, les réponses de ces modèles ont été calculées pour les 35 sollicitations, en ne considérant aucun défaut de positionnement à l'instant initial pour chacun des calculs. Les comparaisons avec les résultats expérimentaux sont présentées sur les figures IV.38, IV.39, IV.40 et IV.41. Les évolutions temporelles des soulèvements de l'empilement sont présentées sur la figure IV.38. Les évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête de l'empilement dans les directions \underline{x} et \underline{y} sont respectivement présentées sur les figures IV.39 et IV.40. Les SRO des accélérations absolues dans la direction \underline{x} de la table et de la base du panier 3 sont présentés sur la figure IV.41 pour un taux d'amortissement critique égal à 2%. Chaque figure est décomposée en quatre sous-figures qui présentent pour les 35 sollicitations :

- les résultats de la campagne expérimentale EDEN en haut à gauche ;
- les résultats du modèle S4DoF en haut à droite ;
- les résultats du modèle SNLFED en bas à gauche ;
- les résultats du modèle SNLFE en bas à droite.

Sur chaque figure, les moyennes des réponses sont également présentées. Elles sont représentées par un trait épais dont la couleur respecte le code couleur présenté dans le tableau IV.16. La moyenne permet d'avoir une première vision d'ensemble des réponses. Cependant, dans certains cas, elle n'est pas représentative, notamment lorsque les différentes réponses présentent des déphasages. Les déplacements relatifs expérimentaux et horizontaux entre les paniers sont présentés dans l'annexe D.

Expérimentalement, les figures IV.39 et IV.40 montrent, au travers du déplacement en tête, que le comportement de l'empilement présente un très faible niveau de variabilité tant qu'il est quasi linéaire. Dans cette phase du mouvement, l'écart-type des déplacements en tête, aussi bien suivant \underline{x} que \underline{y} , est de l'ordre de 0,5 mm. Ensuite, du fait des soulèvements, l'écart-type augmente jusqu'à environ 3 mm. Le coefficient de variation est toutefois plus important dans l'axe \underline{y} que dans l'axe \underline{x} , axe de la sollicitation. D'une certaine façon les modèles numériques sont en accord avec ces résultats mais, dans la phase non linéaire et la phase quasi linéaire qui suit, les résultats sont différents à l'image de ce que l'on a observé sur la base d'une seule réalisation de l'excitation dans la section précédente.

Les déplacements en tête dans la direction \underline{y} présentent une variabilité à partir de l'instant du premier soulèvement significatif de l'empilement (au voisinage de 3 s). Cela montre que le mouvement de rotation de l'empilement autour de l'axe \underline{z} est variable ce qui, au sens de notre interprétation de la physique des phénomènes, indique que la valeur du défaut est variable d'un essai à l'autre. Cette variabilité s'explique en partie par le fait que la position initiale de l'empilement sur la dalle support est variable.

La figure IV.38 montre que globalement le comportement de l'empilement est assez régulier d'un essai à l'autre. En effet, les instants de soulèvements sont peu variables, c'est la dynamique de la structure flexible qui impose le temps caractéristique du mouvement. On retrouve plus de variabilité sur l'amplitude des soulèvements obtenus par calculs avec le modèle SNLFED, qu'expérimentalement. Cette variabilité se retrouve sur la figure IV.41 sur les SRO des accélérations absolues du panier 3 au niveau du pic situé au voisinage de 7,5 Hz. Pour le modèle SNLFED, cela s'explique en partie par le fait que la valeur du défaut n'a pas été ajustée d'un essai à l'autre. On constate d'ailleurs que le nombre moyen de soulèvements obtenu avec le modèle SNLFED n'est pas identique à celui obtenu lors des essais, alors que pour l'essai pour lequel la valeur du défaut avait été ajustée, ce nombre était identique (cf. figure IV.35). Pour le modèle S4DoF, il est difficile d'apporter une réponse dans la mesure où il semble que la transition entre les phases de rocking

et de full contact ne soit pas bien décrite. Comme précédemment, du point de vue des soulèvements, on retrouve des résultats similaires à ceux du modèle SNLFED alors que l'on s'attendrait plutôt à des résultats similaires à ceux du modèle SNLFE.

Pour finir, sur les SRO, on observe pour le modèle SNLFE, qu'un quatrième pic apparaît au voisinage de 11 Hz. Il correspond au mode de translation en opposition de phase des paniers 2 et 3. Ce pic n'est pas présent sur les spectres des essais et du modèle SNLFED. Le mouvement de l'empilement autour de l'axe z semble donc « empêcher » l'apparition de ce mode qui est un mode antisymétrique qui semble excité par les chocs.

Ces résultats confirment les résultats obtenus sur la base d'une seule réalisation de l'excitation. Ils montrent également que le comportement est moins « variable » que celui d'une structure rigide dans la mesure où la dynamique du comportement est pilotée par la flexibilité de la structure.

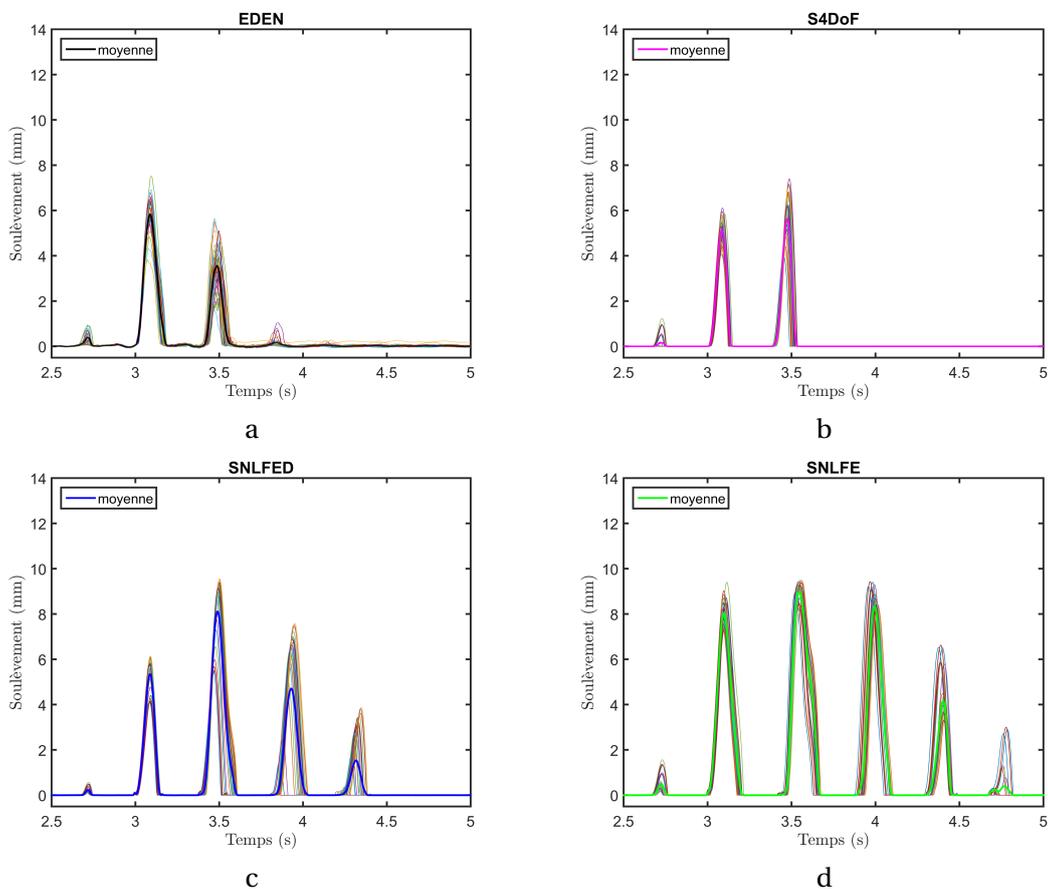


FIGURE IV.38 – Évolutions temporelles des soulèvements de l'empilement : expérimentaux (a), du modèle S4DoF (b), du modèle SNLFED (c) et du modèle SNLFE (d)

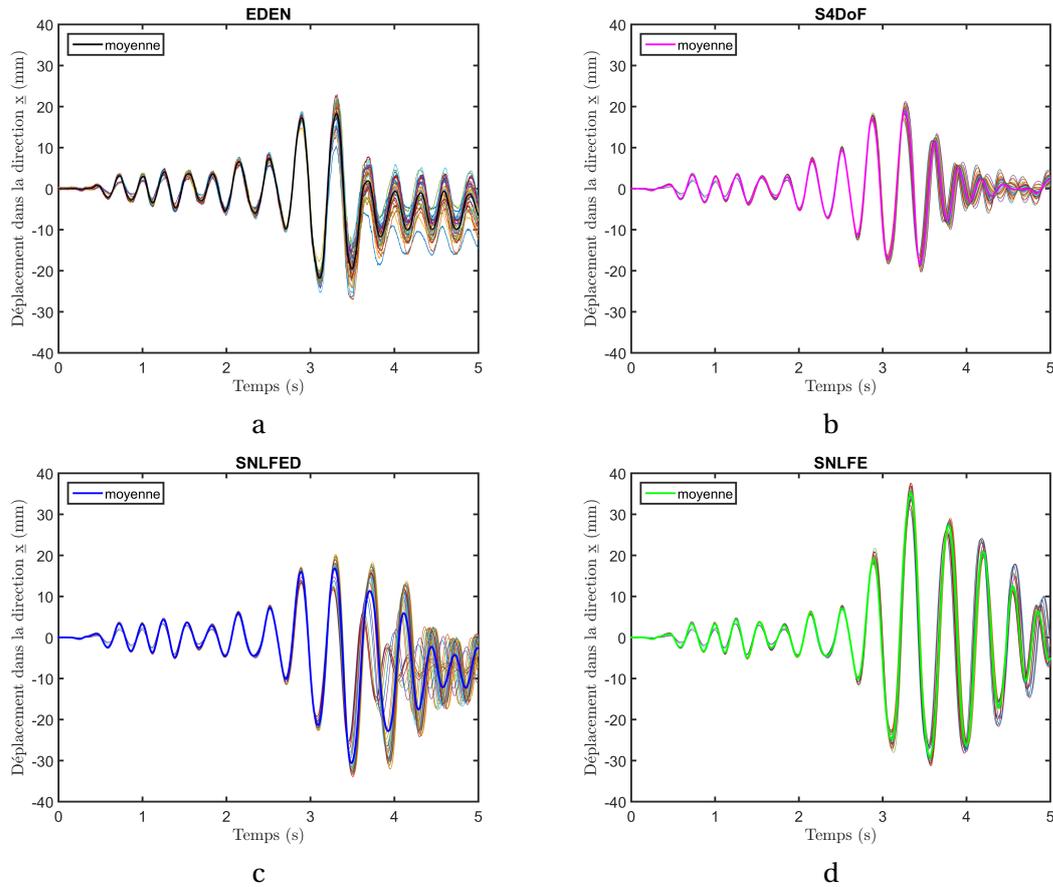


FIGURE IV.39 – Évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête dans la direction x des essais (a), du modèle S4DoF (b), du modèle SNLFED (c) et du modèle SNLFE (d)

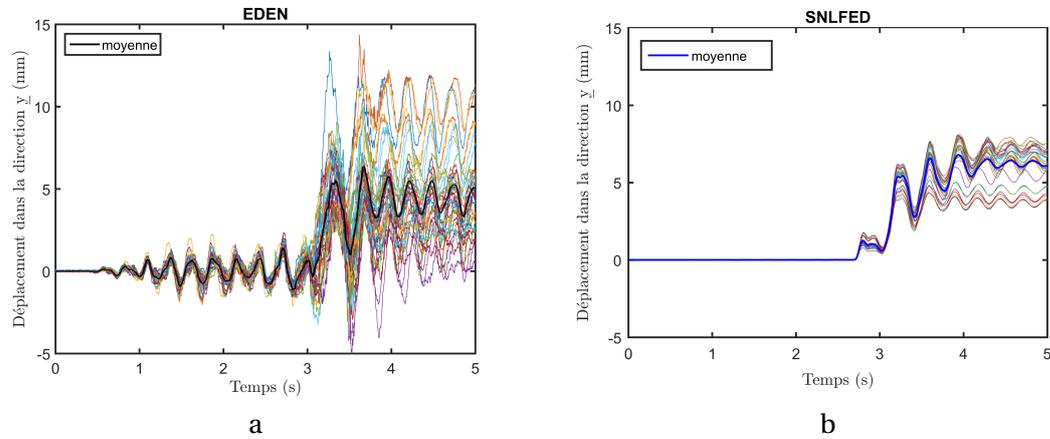


FIGURE IV.40 – Évolutions temporelles des déplacements relatifs en tête dans la direction y des essais (a) et du modèle SNLFED (b)

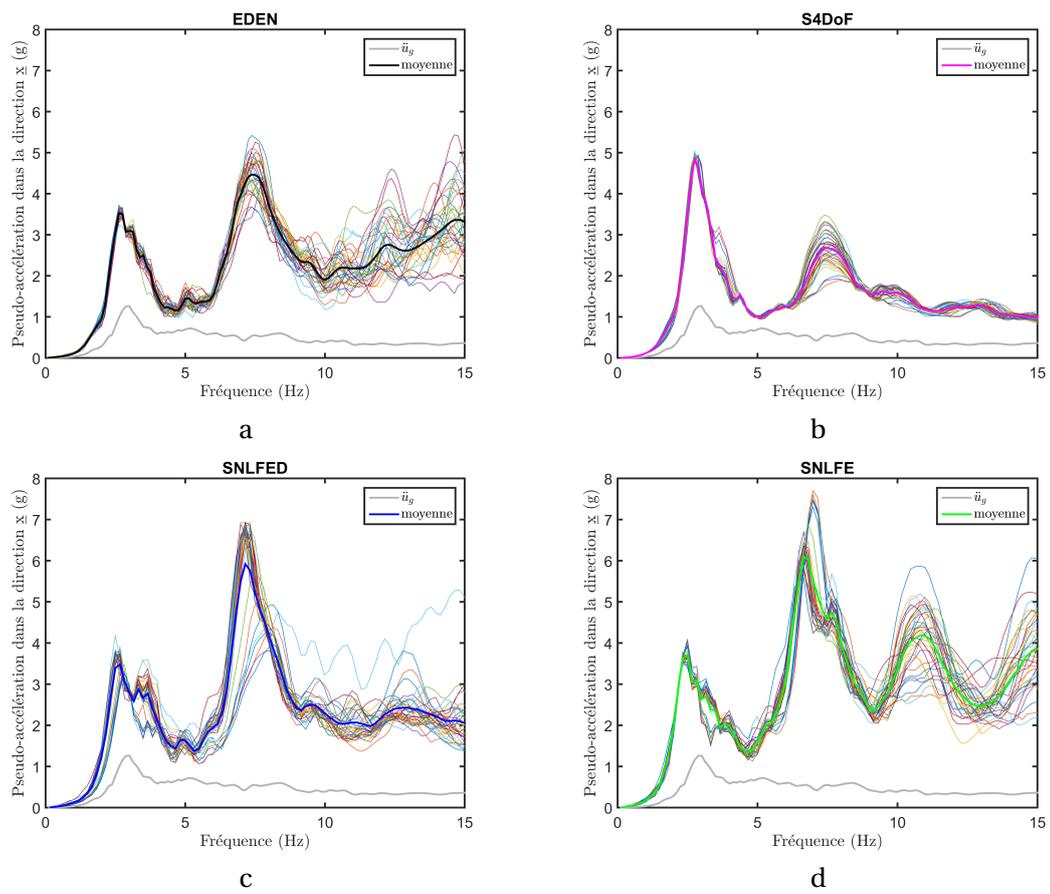


FIGURE IV.41 – Spectres des accélérations absolues dans la direction x de la table et de la base du panier 3 des résultats des essais (a), du modèle S4DoF (b), du modèle SNLFED (c) et du modèle SNLFE (d) pour un taux d'amortissement critique égal à 2%

IV.3 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons montré qu'il était possible de développer un modèle de référence, basé sur une modélisation fidèle de la structure, qui permette d'avoir une estimation pertinente des premiers modes de l'empilement, pour les sollicitations de bas niveaux (de l'ordre de quelques centièmes de g pour le PGA, même s'il ne s'agit pas du meilleur indicateur pour ce type de structures). Néanmoins, avec un tel modèle, il est exclu de pouvoir réaliser des calculs dynamiques temporels non linéaires pour un coût en temps de calcul raisonnable, notamment en vue d'une utilisation dans un contexte requérant de nombreuses simulations de Monte Carlo. À partir de ce modèle, nous avons donc développé des modèles simplifiés dont le recalage est plus difficile à appréhender, dans la mesure où certains de leurs paramètres (l'amortissement par exemple) doivent être utilisés pour compenser des phénomènes physiques non ou mal pris en compte, comme, par exemple, certaines non-linéarités. Par ailleurs, les conditions d'appui de la structure amplifient cette difficulté. En effet, comme elles évoluent avec le niveau de l'excitation, la fréquence apparente du système évolue également. Ainsi, même si cette évolution se fait à la marge (jusqu'à 8% d'évolution de la fréquence du premier mode pour les cas traités), la sensibilité du comportement non linéaire impose d'en tenir compte. Sur la base des modèles simplifiés, des stratégies auraient pu être mises en place pour rendre compte de ce phénomène (par une modélisation non ponctuelle des pieds de l'empilement par exemple) mais, faute de temps, nous n'avons pu le faire dans le cadre de la thèse. Du point de vue de l'ingénieur, nous avons également vu que, pour chaque modèle, la diminution du taux d'amortissement modal conduisait à une réponse majorée du modèle, aussi bien pour le déplacement en tête que pour le soulèvement de la base. Néanmoins, si celui-ci n'est pas suffisamment bien ajusté en fréquence, il est possible que cette diminution n'induisse pas un résultat conservatif. De plus, nous avons vu que, outre l'ajustement en fréquence, il est nécessaire de tenir compte des inévitables défauts inhérents aux structures industrielles afin d'améliorer la représentativité du modèle, bien qu'il soit difficile en pratique de disposer d'informations à leur sujet. L'analyse réalisée à l'échelle de 35 essais « équivalents » confirme les résultats obtenus sur la base d'une seule réalisation de l'excitation. Elle montre également que le comportement est moins « variable » que celui d'une structure rigide dans la mesure où la dynamique du comportement est pilotée par la flexibilité de la structure. Enfin, cette étude a montré que l'incertitude sur la position initiale de l'empilement sur la dalle support se traduit par une incertitude sur la valeur du défaut qu'il faudrait prendre en compte dans les modèles, et donc sur la réponse de la structure.

Pour finir, précisons qu'une comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques a également été réalisée lorsque l'empilement est sollicité par une excitation sismique tridirectionnelle. Cette comparaison ne figure pas dans cette partie, elle est présentée dans l'annexe E. Les résultats expérimentaux correspondent à une campagne expérimentale qui a eu lieu avant cette thèse. Ces résultats sont comparés à ceux du modèle SNLFE. Les résultats du modèle SNLFED ne sont pas présentés dans cette comparaison car le calage « optimal » des défauts dépend des conditions expérimentales (type de dalle support, etc.) qui ne sont mal connues. Cette comparaison montre que, dans ce cas, le modèle SNLFE permet d'avoir une première estimation « conservative » des soulèvements et du déplacement en tête.

IV.4 Références

- ACIKGOZ, S. et M. J. DEJONG. 2016, «Analytical modelling of multi-mass flexible rocking structures», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 45, n° 13, p. 2103–2122. [120](#)
- BEYLAT, D. 2018, «Contribution à l'étude du comportement de structures libres et empilées sous séisme - rapport d'avancement», *Rapport interne*. [92](#)
- CHARBONNEL, P.-E. 2014, «Synthèse des technique récentes d'analyses modales expérimentale et opérationnelle», *Rapport interne*. [87](#)
- PASTOR, M., M. BINDA et T. HARČARIK. 2012, «Modal assurance criterion», *Procedia Engineering*, vol. 48, p. 543–548. [88](#)

Chapitre V

Analyse fiabiliste

A ce stade de l'étude, nous disposons de trois modèles mécano-numériques capables de rendre compte, chacun dans son domaine d'applicabilité, du comportement dynamique sous séisme de l'empilement étudié. Ces modèles ont été conçus en contexte entièrement déterministe, c'est-à-dire en supposant parfaitement déterminés tous ses paramètres, tant mécaniques, que géométriques que de chargement (i.e. l'excitation sismique ici). Or, dans la pratique, ces paramètres sont, pour la plupart, affectés d'incertitude et doivent donc, en toute rigueur, être considérés comme aléatoires et modélisés en conséquence, c'est-à-dire en contexte probabiliste. Par conséquent, si l'on cherche à estimer, comme tel est notre objectif, via l'emploi d'un des trois modèles mécano-numériques proposés, la capacité de l'empilement à remplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée spécifiée, le cadre naturel d'étude est celui de l'analyse fiabiliste structurale. On est ainsi conduit à concevoir une stratégie fiabiliste capable, pour un modèle mécano-numérique donné et une modélisation probabiliste arrêtée de ses paramètres incertains, de quantifier l'occurrence d'événements préjudiciables à la sécurité de l'empilement par le biais d'indicateurs fiabilistes idoines.

Le présent chapitre est dédié à la présentation de la stratégie fiabiliste que nous avons conçue. Il s'articule autour de trois grandes parties. Dans la première nous rappelons les notions fondamentales de la théorie des probabilités et de l'analyse fiabiliste auxquelles nous nous référerons dans les deux parties suivantes. La seconde est consacrée à l'exposé du problème fiabiliste relatif à notre étude et à la description de la méthodologie que nous proposons pour le résoudre. Enfin, dans la troisième partie cette méthodologie est testée à travers quelques applications numériques destinées à montrer sa faisabilité et sa pertinence pour la résolution du problème posé.

Sommaire

V.1	Théorie des probabilités et analyse fiabiliste : quelques brefs rappels	131
V.1.1	Théorie des probabilités : quelques brefs rappels	131
V.1.1.1	Tribu des événements	131
V.1.1.2	Mesure de probabilité	132
V.1.1.3	Variable aléatoire (notée v.a.)	132
V.1.1.4	Processus aléatoire	134
V.1.2	Analyse fiabiliste : quelques brefs rappels	138
V.1.2.1	Données du problème	138
V.1.2.2	Objectif de l'analyse fiabiliste	140
V.1.2.3	Calcul de la probabilité de défaillance	141
V.1.2.4	Indices de fiabilité	143
V.2	Formulation et résolution du problème fiabiliste de l'étude	148
V.2.1	Données du problème	148
V.2.1.1	Critères de défaillance	148
V.2.1.2	Modèles mécano-numériques	148
V.2.1.3	Paramètres incertains et modélisation probabiliste associée	149
V.2.2	Formulation du problème	154
V.2.2.1	Événements de défaillance	154
V.2.2.2	Fonctions d'état limite	154
V.2.2.3	Probabilités de défaillance	155
V.2.3	Quantification fiabiliste	155
V.2.3.1	Via le calcul de la probabilité de défaillance	155
V.2.3.2	Via le calcul de l'indice de Cornell	156
V.2.3.3	Via le calcul de l'indice de Hasofer-Lind	157
V.3	Application numérique	160
V.3.1	Résultats relatifs à l'approche fiabiliste proposée	162
V.3.1.1	Présentation des résultats	162
V.3.1.2	Analyse des résultats	168
V.3.2	Résultats relatifs à une comparaison fiabiliste globale des modèles mécano-	
	numériques	170
V.3.2.1	Présentation des résultats	170
V.3.2.2	Analyse des résultats	173
V.4	Synthèse	174
V.5	Références	176

V.1 Théorie des probabilités et analyse fiabiliste : quelques brefs rappels

La fiabilité des structures est une branche de la mécanique aléatoire dédiée à l'évaluation de la capacité des structures à remplir une fonction requise dans des conditions données pendant une durée spécifiée, en intégrant dans l'évaluation, via des modélisations probabilistes appropriées (variables, processus, champs aléatoires), le caractère aléatoire des paramètres incertains (géométriques, mécaniques, environnementaux) des modèles mécaniques et de chargement (efforts appliqués) utilisés pour décrire leur fonctionnement dans les conditions précitées. À ce titre, elle se rattache à la fois à la mécanique des structures, dans ses aspects théoriques et calculatoires, et à la théorie et au calcul des probabilités. En pratique, elle se ramène à l'évaluation de probabilités de défaillance ou d'indices de fiabilité, relativement à des critères de défaillance donnés, et s'appuie donc sur une description mathématique précise des divers états limites de défaillance associés à ces critères. D'une manière générale, pour un état limite de défaillance spécifié (donc un critère de défaillance choisi), l'analyse fiabiliste d'une structure se décline en quatre étapes :

1. construire un modèle mécano-numérique adapté à la formulation et à la mise en œuvre numérique de cet état limite ;
2. identifier les paramètres de ce modèle susceptibles d'être affectés d'incertitude et leur associer une modélisation probabiliste (par variables, processus ou champs aléatoires selon leur nature) en se basant pour cela, soit sur des analyses statistiques d'échantillons expérimentaux de ces paramètres (si l'on en dispose), soit sur des avis d'experts ;
3. sur la base de cette modélisation probabiliste, formuler l'événement de défaillance associé à l'état limite de défaillance considéré ;
4. développer les outils numériques adaptés au calcul de la probabilité de défaillance (ou des indices de fiabilité) relative à cet événement.

Nous reviendrons brièvement sur ces divers points dans le paragraphe V.1.2 en nous attardant plus particulièrement sur le point (4). Mais avant cela, nous allons rappeler quelques notions fondamentales de la théorie des probabilités auxquelles nous nous référerons dans toute la suite du document. Pour ces rappels mathématiques, nous nous sommes appuyés sur les cours de Fogli et Soize [FOGLI, 2008], [FOGLI, 2009], [FOGLI, 2011], [FOGLI, 2012] et [SOIZE, 2003]. Pour les rappels sur l'analyse fiabiliste structurale, nous nous sommes inspirés des thèses de Mathey et Mansouri [MATHEY, 2016], [MANSOURI, 2013].

V.1.1 Théorie des probabilités : quelques brefs rappels

Dans le cadre de la théorie axiomatique des probabilités, qui est le cadre naturel de tout problème d'analyse fiabiliste, toutes les grandeurs aléatoires considérées (variables, processus et champs aléatoires) sont définies sur un espace $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ constitué d'un ensemble abstrait \mathcal{A} , appelé univers des possibles ou ensemble d'échantillonnage, d'une tribu \mathcal{F} sur \mathcal{A} , appelée tribu des événements, et d'une mesure de probabilité \mathbb{P} sur \mathcal{F} . Nous allons brièvement rappeler les définitions de ces deux dernières grandeurs. Puis nous rappellerons tout aussi brièvement les notions de variable aléatoire, de loi d'une variable aléatoire, de fonction de répartition et de densité d'une loi et terminerons ce bref tour d'horizon par quelques rappels succincts sur les processus aléatoires.

V.1.1.1 Tribu des événements

Soit \mathcal{A} l'ensemble d'échantillonnage introduit ci-dessus et soit \mathcal{F} une famille de parties de \mathcal{A} . On dit que \mathcal{F} est une tribu (ou σ -algèbre) sur \mathcal{A} si :

1. \mathcal{A} et \emptyset appartiennent à \mathcal{F} , où \emptyset désigne l'ensemble vide ;
2. \mathcal{F} est stable par réunion et intersection dénombrables, autrement dit si, pour toute famille dénombrable $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{F} , $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ sont des éléments de \mathcal{F} ;

3. \mathcal{F} est stable par passage au complémentaire dans \mathcal{A} , autrement dit si, pour tout élément E de \mathcal{F} , son complémentaire \bar{E} dans \mathcal{A} est un élément de \mathcal{F} .

On appelle événement tout élément de \mathcal{F} . Donc \mathcal{F} est appelée tribu des événements. \mathcal{A} est l'événement certain, \emptyset l'événement impossible. Le couple (\mathcal{A}, \emptyset) est la plus petite tribu sur \mathcal{A} , l'ensemble $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ de toutes les parties de \mathcal{A} est la plus grande tribu sur \mathcal{A} . Le couple $(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ est appelé espace mesurable ou probabilisable.

V.1.1.2 Mesure de probabilité

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ un espace probabilisable et soit \mathbb{P} une application de \mathcal{F} dans $[0, 1]$. On dit que \mathbb{P} est une mesure de probabilité (ou plus simplement une probabilité) sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ si :

1. $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 1$;
2. \mathbb{P} est σ -additive, autrement dit telle que, pour toute suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{F} deux-à-deux disjoints : $\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E_n)$

On notera que dans cette définition, l'égalité du point 1 peut être remplacée par $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. De plus, si A et B sont deux éléments quelconques de \mathcal{F} , alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité ou espace probabilisé.

V.1.1.3 Variable aléatoire (notée v.a.)

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit \mathfrak{B}_p la tribu de Borel sur \mathbb{R}^p , c'est-à-dire la tribu engendrée par les pavés ouverts de \mathbb{R}^p (soit encore la plus petite tribu sur \mathbb{R}^p contenant les pavés ouverts de \mathbb{R}^p et donc aussi l'intersection de toutes les tribus sur \mathbb{R}^p contenant les pavés ouverts de \mathbb{R}^p). On dit que \underline{Y} est une variable aléatoire définie sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^p si :

1. \underline{Y} est une application de \mathcal{A} dans \mathbb{R}^p :

$$\underline{Y} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^p : a \rightarrow \underline{Y}(a)$$

2. \underline{Y} est mesurable de $(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$, autrement dit vérifie :

$$\forall B \in \mathfrak{B}_p, \underline{Y}^{-1}(B) = \{a \in \mathcal{A}, \underline{Y}(a) \in B\} \in \mathcal{F}$$

L'événement $\underline{Y}^{-1}(B)$ est usuellement noté $\{\underline{Y} \in B\}$, ou plus simplement $\underline{Y} \in B$. Cette définition est souvent utilisée sous sa forme synthétisée :

$$\underline{Y} : (\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \xrightarrow{\text{mes}} (\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$$

où la notation « mes » au dessus de la flèche indique que l'application est mesurable. Si $p > 1$, on dit que \underline{Y} est une variable aléatoire vectorielle p -dimensionnelle ou un vecteur aléatoire p -dimensionnel. Si $p = 1$, on dit que \underline{Y} est une variable aléatoire scalaire et on la note alors plus simplement Y . Pour tout a fixé dans \mathcal{A} , $\underline{Y}(a) \in \mathbb{R}^p$ est appelée une a -réalisation de \underline{Y} . Tirer une réalisation de \underline{Y} , c'est tirer au hasard, selon la loi de \underline{Y} , un élément de \underline{y} de \mathbb{R}^p . Il existe alors un élément a , au moins, dans \mathcal{A} tel que $\underline{Y}(a) = \underline{y}$. Simuler \underline{Y} c'est tirer indépendamment dans \mathbb{R}^p un nombre spécifié $L \in \mathbb{N}^*$ de réalisations $\underline{y}^{(1)}, \dots, \underline{y}^{(L)}$ de \underline{Y} . Les réalisations indépendantes ainsi obtenues sont appelées des réalisations simulées de \underline{Y} .

Loi d'une variable aléatoire

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit \underline{Y} une variable aléatoire définie sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^p :

$$\underline{Y} : (\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \xrightarrow{\text{mes}} (\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$$

On appelle loi de \underline{Y} , et on note $P_{\underline{Y}}$, l'image de \mathbb{P} par \underline{Y} . C'est donc une probabilité sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$ (i.e. une application σ -additive de \mathfrak{B}_p dans $[0,1]$ vérifiant $P_{\underline{Y}}(\mathbb{R}^p)=1$) telle que :

$$\forall B \in \mathfrak{B}_p, P_{\underline{Y}}(B) = \mathbb{P}(\underline{Y}^{-1}(B))$$

où, comme nous l'avons rappelé plus haut, $\underline{Y}^{-1}(B)$ est l'élément de \mathcal{F} (i.e. l'événement) noté $\underline{Y} \in B$ et défini par $\underline{Y}^{-1}B = \underline{Y} \in (B) = \{a \in \mathcal{A} : \underline{Y}(a) \in B\}$.

Fonction de répartition d'une loi

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit \underline{Y} une variable aléatoire définie sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^p , de loi $P_{\underline{Y}}$ sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$. On dit que $F_{\underline{Y}}$ est la fonction de répartition de $P_{\underline{Y}}$ (ou de \underline{Y}) si c'est une fonction $F_{\underline{Y}} : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1] : \underline{y} \rightarrow F_{\underline{Y}}(\underline{y})$ telle que :

$$F_{\underline{Y}}(\underline{y}) = P(\underline{Y} \leq \underline{y}) = P_{\underline{Y}}(B_{\underline{y}}), \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^p$$

où $\{\underline{Y} \leq \underline{y}\} \in \mathcal{F}$ est l'événement $\{Y_1 \leq y_1\} \cap \dots \cap \{Y_p \leq y_p\}$ et $B_{\underline{y}}$ le pavé de \mathbb{R}^p tel que $B_{\underline{y}} =]-\infty, y_1] \times \dots \times]-\infty, y_p]$, avec Y_1, \dots, Y_p et y_1, \dots, y_p les composantes respectives de \underline{Y} et \underline{y} dans la base canonique de \mathbb{R}^p . C'est une fonction càd làg (continue à droite avec limite à gauche) et croissante par rapport à chacune de ses variables y_1, \dots, y_p . De plus, elle tend vers 0 lorsque l'une au moins de ses variables tend vers $-\infty$ et vers 1 lorsque toutes ses variables tendent vers $+\infty$.

Densité d'une loi

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit \underline{Y} une variable aléatoire définie sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^p , de loi $P_{\underline{Y}}$ sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$. On dit que la loi $P_{\underline{Y}}$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue $d\underline{y}$ sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$ s'il existe une fonction $p_{\underline{Y}} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+ : \underline{y} \rightarrow p_{\underline{Y}}(\underline{y})$, intégrable sur \mathbb{R}^p , telle que :

$$\forall B \in \mathfrak{B}_p, P_{\underline{Y}}(B) = \int_B p_{\underline{Y}}(\underline{y}) d\underline{y}$$

Si la fonction de répartition est différentiable sur $\underline{Y}(\mathcal{A})$, alors la densité $p_{\underline{Y}}$ existe et l'on a : $\forall \underline{z} \in \underline{Y}(\mathcal{A})$, $p_{\underline{Y}}(\underline{z}) = (\partial^p F_{\underline{Y}} | \partial y_1 \dots \partial y_p)(\underline{z})$. On a également : $\forall \underline{z} \in \underline{Y}(\mathcal{A})$, $F_{\underline{Y}}(\underline{z}) = \int_{B_{\underline{z}}} p_{\underline{Y}}(\underline{y}) d\underline{y}$, avec $B_{\underline{z}} =]-\infty, z_1] \times \dots \times]-\infty, z_p]$. De plus, comme $P_{\underline{Y}}(\mathbb{R}^p) = 1$, $p_{\underline{Y}}$ vérifie $\int_{\mathbb{R}^p} p_{\underline{Y}}(\underline{y}) d\underline{y} = 1$. Si cette densité existe, on dit que la variable aléatoire \underline{Y} est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$ et dans ce cas on dit encore que $p_{\underline{Y}}$ est la densité de probabilité de \underline{Y} .

Moyenne, matrice de covariance

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit \underline{Y} une variable aléatoire définie sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^p , de loi $P_{\underline{Y}}$ sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$. On suppose \underline{Y} du second ordre, c'est-à-dire telle que $\int_{\mathbb{R}^p} \|\underline{y}\|^2 P_{\underline{Y}}(d\underline{y}) < +\infty$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^p . On appelle moyenne de \underline{Y} l'élément $m_{\underline{Y}}$ de \mathbb{R}^p tel que :

$$m_{\underline{Y}} = \mathbb{E}[\underline{Y}] = \int_{\mathbb{R}^p} \underline{y} P_{\underline{Y}}(d\underline{y}) \tag{V.1}$$

On appelle matrice de covariance de \underline{Y} l'élément $C_{\underline{Y}}$ de $\mathbb{R}^{p \times p}$ tel que :

$$C_{\underline{Y}} = \mathbb{E}[(\underline{Y} - m_{\underline{Y}})(\underline{Y} - m_{\underline{Y}})^T] = \int_{\mathbb{R}^p} (\underline{y} - m_{\underline{Y}})(\underline{y} - m_{\underline{Y}})^T P_{\underline{Y}}(d\underline{y}) \tag{V.2}$$

Cette matrice est symétrique, positive et de trace finie. On notera que, sous l'hypothèse admise que \underline{Y} est du second ordre, $m_{\underline{Y}}$ et $C_{\underline{Y}}$ existent.

Variable aléatoire gaussienne

Soit \underline{Y} une variable aléatoire du second ordre définie sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^p , de moyenne $m_{\underline{Y}} \in \mathbb{R}^p$ et de matrice de covariance $C_{\underline{Y}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$. On dit que \underline{Y} est gaussienne non dégénérée si $C_{\underline{Y}}$ est de rang plein (donc est définie positive) et si sa loi $P_{\underline{Y}}$ sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$ admet une densité $p_{\underline{Y}} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+ : \underline{y} \rightarrow p_{\underline{Y}}(\underline{y})$ (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$) qui s'écrit :

$$p_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |C_{\underline{Y}}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{y} - m_{\underline{Y}})^T C_{\underline{Y}}^{-1} (\underline{y} - m_{\underline{Y}})\right), \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^p \quad (\text{V.3})$$

où $|C_{\underline{Y}}|$ est le déterminant de $C_{\underline{Y}}$. Si cette matrice n'est pas de rang plein p mais de rang $r < p$, alors $C_{\underline{Y}}$ n'est pas définie positive, donc pas inversible, et la loi gaussienne de \underline{Y} n'admet pas de densité. Dans ce cas cette loi doit être définie par sa fonction caractéristique $\Phi_{\underline{Y}} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C} : u \rightarrow \Phi_{\underline{Y}}(u)$ qui s'écrit :

$$\Phi_{\underline{Y}}(u) = \exp(i u^T m_{\underline{Y}} - \frac{1}{2} u^T C_{\underline{Y}} u), \forall u \in \mathbb{R}^p \quad (\text{V.4})$$

et on dit que \underline{Y} est dégénérée. La conséquence de cette dégénérescence est que la v.a. gaussienne \underline{Y} ne prend plus ses valeurs dans \mathbb{R}^p tout entier (comme c'est le cas lorsque $C_{\underline{Y}}$ est de rang plein p) mais seulement dans un sous-espace de dimension le rang de $C_{\underline{Y}}$, c'est-à-dire $r < p$. Si $m_{\underline{Y}} = 0_p$ et $C_{\underline{Y}} = I_{p \times p}$, où 0_p est l'élément nul de \mathbb{R}^p et $I_{p \times p}$ l'élément unité de $\mathbb{R}^{p \times p}$, on dit que \underline{Y} est gaussienne standard p -dimensionnelle. Sachant que toute variable aléatoire gaussienne \underline{Y} , dégénérée ou non, est entièrement déterminée par la donnée de sa moyenne $m_{\underline{Y}}$ et de sa matrice de covariance $C_{\underline{Y}}$, on note généralement, pour spécifier ce fait, $\underline{Y} \sim N(m_{\underline{Y}}, C_{\underline{Y}})$, notation signifiant que \underline{Y} suit une loi gaussienne (on dit aussi normale) de moyenne $m_{\underline{Y}}$ et de matrice de covariance $C_{\underline{Y}}$.

V.1.1.4 Processus aléatoire

Dans tout ce qui suit, $L^0(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des variables aléatoires définies sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^n (en toute rigueur, l'espace des classes d'équivalence de telles variables modulo l'égalité presque sûre, mais nous nous passerons de cette subtilité ici) et nous restreignons notre rappel aux processus à valeurs dans \mathbb{R}^n dont le paramètre d'indexation varie continûment dans un intervalle de la droite réelle. Pour de tels processus, plusieurs définitions peuvent être données, toutes équivalentes via un célèbre théorème de Kolmogorov. Nous n'en rappellerons qu'une ici, qui est celle généralement utilisée dans les études fiabilistes classiques.

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et \mathbb{I} un intervalle quelconque de \mathbb{R} (avec éventuellement $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{I} = [0, +\infty[$). On dit que \underline{X} est un processus aléatoire (ou stochastique) défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexé sur \mathbb{I} , à valeurs dans \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$, si c'est une application de \mathbb{I} dans $L^0(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^n)$. On a donc :

$$\underline{X} : \mathbb{I} \rightarrow L^0(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^n) : t \rightarrow \underline{X}(t, .)$$

avec :

$$\underline{X}(t, .) : (\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \xrightarrow{\text{mes}} (\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n) : a \rightarrow \underline{X}(t, a), \forall t \in \mathbb{I}$$

Ainsi, au sens de cette définition, le processus \underline{X} peut être assimilé à une famille infinie indexée sur \mathbb{I} (i.e. $t \in \mathbb{I}$) de variables aléatoires définies sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^n . On peut donc légitimement le noter $\underline{X} = (\underline{X}(t, .), t \in \mathbb{I})$, avec $\underline{X}(t, .)$ la variable aléatoire définie ci-dessus, $\forall t \in \mathbb{I}$. Afin d'alléger les écritures cette variable aléatoire sera désormais notée $\underline{X}(t)$. Par conséquent le processus \underline{X} sera noté $\underline{X} = (\underline{X}(t), t \in \mathbb{I})$. Si $n > 1$, on dit que \underline{X} est un processus aléatoire vectoriel n -dimensionnel. Si $n = 1$, on dit que c'est un processus aléatoire scalaire et on le note alors plus simplement $X = (X(t, .), t \in \mathbb{I})$. Pour tout a fixé dans \mathcal{A} , l'application $\underline{X}(., a) : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow \underline{X}(t, a)$ est appelée une a -réalisation, ou une a -trajectoire, de \underline{X} . Tirer une réalisation de \underline{X} , c'est tirer au hasard, selon la loi de \underline{X} , un élément $\underline{x} = (\underline{x}(t), t \in \mathbb{I})$ de l'ensemble $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{I}}$ des applications de \mathbb{I} dans \mathbb{R}^n . Il existe alors un élément a , au moins, dans \mathcal{A} tel que $\underline{X}(t, a) = \underline{x}(t), \forall t \in \mathbb{I}$. Simuler \underline{X} , c'est tirer indépendamment dans $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{I}}$ un nombre spécifié $L \in \mathbb{N}^*$ de réalisations $\underline{x}^{(1)} = (\underline{x}^{(1)}(t), t \in \mathbb{I}), \dots, \underline{x}^{(L)} = (\underline{x}^{(L)}(t), t \in \mathbb{I})$ de \underline{X} . Les réalisations indépendantes ainsi obtenues sont appelées des réalisations simulées de \underline{X} .

Loi d'un processus aléatoire

La loi du processus \underline{X} considéré ici ne peut en fait être rigoureusement définie qu'à partir d'une définition de ce processus que nous n'avons pas donnée ici (car très théorique et de peu d'intérêt dans ce travail) et qui présente ce dernier comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace fonctionnel $(\mathbb{R}^n)^\mathbb{I}$ muni d'une tribu particulière : la tribu produit infini, ou tribu cylindrique, $\mathfrak{B}_n^\otimes \mathbb{I}$, qui est la tribu engendrée par les pavés mesurables de la forme $\Pi_{t_1}^{-1}(B_1), \dots, \Pi_{t_k}^{-1}(B_k)$, pour $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{I}$ et $B_1, \dots, B_k \in \mathfrak{B}_n$, où Π_t est l'application coordonnée de $(\mathbb{R}^n)^\mathbb{I}$ dans \mathbb{R}^n , telle que $\Pi_t(\underline{x}) = \underline{x}(t)$ pour toute application \underline{x} de $(\mathbb{R}^n)^\mathbb{I}$. La loi de \underline{X} est alors une probabilité $P_{\underline{X}}$ sur $((\mathbb{R}^n)^\mathbb{I}, \mathfrak{B}_n^\otimes \mathbb{I})$ dont Kolmogorov a montré l'existence dans un célèbre théorème qui porte son nom. Avec la définition que nous avons adoptée de \underline{X} nous n'avons pas accès directement à cette loi. Nous pouvons toujours avoir accès, toutefois, aux états $\underline{X}(t_1), \dots, \underline{X}(t_q)$ de \underline{X} en un nombre fini t_1, \dots, t_q d'instantanés (i.e. de valeurs de son paramètre d'indexation t). Soit P_{t_1, \dots, t_q} la loi du q -uplet $(\underline{X}(t_1), \dots, \underline{X}(t_q))$. On appelle système des lois finidimensionnelles de \underline{X} la famille des lois P_{t_1, \dots, t_q} lorsque q parcourt \mathbb{N}^* et $\{t_1, \dots, t_q\}$ les parties finies à q éléments de \mathbb{I} . C'est un système projectif au sens du théorème de Kolmogorov et, en vertu de ce théorème, la loi $P_{\underline{X}}$ de \underline{X} sur $((\mathbb{R}^n)^\mathbb{I}, \mathfrak{B}_n^\otimes \mathbb{I})$ est la limite projective de ce système. Sous les hypothèses du théorème de Kolmogorov, la loi \underline{X} est alors entièrement déterminée par la donnée du système des lois finidimensionnelles de ce processus.

Moyenne, fonction de corrélation, fonction de covariance

Soit $\underline{X} = (\underline{X}(t), t \in \mathbb{I})$ un processus aléatoire défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexé sur \mathbb{I} , à valeurs dans \mathbb{R}^n , de loi $P_{\underline{X}}$ donnée, donc de système de lois finidimensionnelles connu. On suppose que ce processus est du second ordre, c'est-à-dire vérifie : $\forall t \in \mathbb{I}, \int_{\mathbb{R}^n} \|\underline{x}\|^2 P_t(d\underline{x}) < +\infty$, où P_t est la loi finidimensionnelle d'ordre un en t de \underline{X} , c'est-à-dire la loi de la variable aléatoire $\underline{X}(t)$. On appelle moyenne de \underline{X} la fonction $m_{\underline{X}} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow m_{\underline{X}}(t)$ telle que :

$$m_{\underline{X}}(t) = \mathbb{E}[\underline{X}(t)] = \int_{\mathbb{R}^n} \underline{x} P_t(d\underline{x}), \forall t \in \mathbb{I} \quad (\text{V.5})$$

Si $m_{\underline{X}}(t) = 0, \forall t \in \mathbb{I}$, le processus est dit centré. On appelle fonction de corrélation, ou d'autocorrélation, de \underline{X} la fonction $R_{\underline{X}} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : (t, t') \rightarrow R_{\underline{X}}(t, t')$ telle que :

$$R_{\underline{X}}(t, t') = \mathbb{E}[\underline{X}(t)\underline{X}^T(t')] = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \underline{x} \underline{x}'^T P_{t, t'}(d\underline{x} d\underline{x}'), \forall (t, t') \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \quad (\text{V.6})$$

où $P_{t, t'}$ est la loi finidimensionnelle d'ordre deux en (t, t') du processus \underline{X} , c'est-à-dire la loi du couple $(\underline{X}(t), \underline{X}(t'))$. On appelle fonction de covariance de \underline{X} la fonction $C_{\underline{X}} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : (t, t') \rightarrow C_{\underline{X}}(t, t')$ telle que :

$$C_{\underline{X}}(t, t') = \mathbb{E}[(\underline{X}(t) - m_{\underline{X}}(t))(\underline{X}(t') - m_{\underline{X}}(t'))^T] = R_{\underline{X}}(t, t') - m_{\underline{X}}(t)m_{\underline{X}}^T(t'), \forall (t, t') \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \quad (\text{V.7})$$

Processus gaussien

Soit $\underline{X} = (\underline{X}(t), t \in \mathbb{I})$ un processus du second ordre défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexé sur \mathbb{I} , à valeurs dans \mathbb{R}^n . On dit que \underline{X} est gaussien si son système des lois finidimensionnelles est gaussien, autrement dit si : $\forall q \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, \dots, t_q) \in \mathbb{I}^q$, la loi P_{t_1, \dots, t_q} du q -uplet $(\underline{X}(t_1), \dots, \underline{X}(t_q))$ est gaussienne. Un tel processus est alors entièrement caractérisé par sa moyenne $m_{\underline{X}} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow m_{\underline{X}}(t)$ et sa fonction de corrélation $R_{\underline{X}} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : (t, t') \rightarrow R_{\underline{X}}(t, t')$, ou de covariance $C_{\underline{X}} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : (t, t') \rightarrow C_{\underline{X}}(t, t')$.

Stationnarité

Soit $\underline{X} = (\underline{X}(t), t \in \mathbb{I})$ un processus du second ordre défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexé sur $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, à valeurs dans \mathbb{R}^n , de moyenne $m_{\underline{X}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow m_{\underline{X}}(t)$ et de fonction de corrélation $R_{\underline{X}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : (t, t') \rightarrow R_{\underline{X}}(t, t')$.

\underline{X} est dit stationnaire au sens large (ou en moyenne d'ordre deux) si :

$$(1) m_{\underline{X}}(t) = \mathbb{E}[\underline{X}(t)] = m_1, \forall t \in \mathbb{R};$$

$$(2) R_{\underline{X}}(t, t') = \mathbb{E}[\underline{X}(t)\underline{X}^T(t')] = G(t - t'), \forall (t, t') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

où m_1 est un élément constant de \mathbb{R}^n et G une application de \mathbb{R} dans $\mathbb{R}^{n \times n}$. Ainsi, \underline{X} est stationnaire au sens large si sa moyenne $t \rightarrow m_{\underline{X}}(t)$ est constante (i.e. indépendante de t) et si sa fonction de corrélation $(t, t') \rightarrow R_{\underline{X}}(t, t')$ ne dépend que de $t - t'$. Par abus d'écriture, on note encore $m_{\underline{X}}$ la moyenne constante de \underline{X} (on pose donc $m_1 = m_{\underline{X}}$) et $R_{\underline{X}}(t - t')$ la valeur en (t, t') de la fonction de corrélation $R_{\underline{X}}$ (on pose donc $G(t - t') = R_{\underline{X}}(t - t')$). On a donc :

$$(1) m_{\underline{X}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow m_{\underline{X}}(t) = \mathbb{E}[\underline{X}(t)] = m_{\underline{X}} = \text{élément constant de } \mathbb{R}^n;$$

$$(2) R_{\underline{X}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : u \rightarrow R_{\underline{X}}(u) = \mathbb{E}[\underline{X}(t+u)\underline{X}^T(t)], \forall (t) \in \mathbb{R}$$

Le même abus de notation vaut également pour la fonction de covariance $C_{\underline{X}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : (t, t') \rightarrow C_{\underline{X}}(t, t') = R_{\underline{X}}(t, t') - m_{\underline{X}}(t) m_{\underline{X}}^T(t') = G(t - t') - m_1 m_1^T$:

$$(3) C_{\underline{X}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : u \rightarrow R_{\underline{X}}(u) - m_{\underline{X}} m_{\underline{X}}^T$$

Le type de stationnarité que nous venons de rappeler porte sur les caractéristiques du second ordre (moyenne et fonction de corrélation ou de covariance) de \underline{X} . On peut définir un autre type de stationnarité pour \underline{X} , qui porte sur son système de lois finidimensionnelles, donc sur sa loi, et qui est plus fort que le précédent : la stationnarité au sens stricte. On dit que \underline{X} est stationnaire au sens strict si :

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^q, \forall u \in \mathbb{R}, P_{t_1, \dots, t_q} = P_{t_1+u, \dots, t_q+u}$$

autrement dit si son système de lois finidimensionnelles est invariant par décalage horaire (en identifiant le paramètre d'indexation t à un temps).

Il est facile de montrer que si \underline{X} est stationnaire au sens strict, alors sa moyenne est constante et la valeur de sa fonction de corrélation en tout point (t, t') de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ne dépend que de $t - t'$. Ainsi, tout processus du second ordre stationnaire au sens strict est stationnaire au sens large. La réciproque est fautive. Elle est vraie toutefois dans quelques cas particuliers, notamment pour les processus gaussiens. Notons que ces deux types de stationnarité ont été définis en supposant que $\mathbb{I} = \mathbb{R}$. Ils pourraient toutefois être étendus à des intervalles compacts de \mathbb{R} . N'étant pas confrontés à cette situation dans notre étude, nous aborderons pas cette question dans ces brefs rappels.

Supposons le processus $\underline{X} = (\underline{X}(t), t \in \mathbb{I})$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, stationnaire (au sens large ou strict) et centré (i.e. $m_{\underline{X}} = 0_n$, avec 0_n l'élément nul de \mathbb{R}^n). Supposons en outre que sa fonction de corrélation $R_{\underline{X}}$ (qui coïncide alors avec sa fonction de covariance $C_{\underline{X}}$ du fait de la nullité de $m_{\underline{X}}$) soit intégrable sur \mathbb{R} , c'est-à-dire vérifie $\int_{\mathbb{R}} \|R_{\underline{X}}(u)\|_F du < +\infty$, avec $\|R_{\underline{X}}(u)\|_F$ la norme de Frobenius de $R_{\underline{X}}(u)$, telle que $\|R_{\underline{X}}(u)\|_F = (\text{tr } R_{\underline{X}}(u)R_{\underline{X}}^T(u))^{1/2}$ où tr désigne l'opérateur trace. Dans ces conditions, il existe une application $S_{\underline{X}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} : \omega \rightarrow S_{\underline{X}}(\omega)$ telle que :

$$S_{\underline{X}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega u} R_{\underline{X}}(u) du, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{V.8})$$

Cette application, qui n'est autre que la transformée de Fourier de $R_{\underline{X}}$, est appelée la densité spectrale de puissance de \underline{X} . Elle est intégrable sur \mathbb{R} et vérifie $S_{\underline{X}}(-\omega) = \overline{S_{\underline{X}}(\omega)} = S_{\underline{X}}^T(\omega)$ où la barre supérieure désigne classiquement le symbole de la conjugaison complexe. Par inversion de la relation précédente, il vient :

$$R_{\underline{X}}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega u} S_{\underline{X}}(\omega) d\omega, \forall u \in \mathbb{R} \quad (\text{V.9})$$

Les deux relations ci-dessus sont les formules de Kintchine. On notera qu'il importe que le processus soit centré pour que l'on puisse définir sa densité spectrale. Si \underline{X} est gaussien, stationnaire, centré, il est complètement défini par la donnée de sa densité spectrale. Si \underline{X} est gaussien, stationnaire, non centré, de moyenne $m_{\underline{X}}$, il est complètement défini par la donnée de $m_{\underline{X}}$ et de la densité spectrale du processus gaussien stationnaire centré $\overset{\circ}{\underline{X}} = \underline{X} - m_{\underline{X}}$ associé à \underline{X} .

Processus de Wiener standard

Soit $\underline{W} = (\underline{W}(t), t \in \mathbb{I})$ un processus défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexé sur $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$, à valeurs dans \mathbb{R}^n . On dit que \underline{W} est un processus de Wiener standard n -dimensionnel si :

1. $\underline{W}(0) = 0_n$ presque sûrement;
2. ses composantes W_1, \dots, W_n sont des processus scalaires mutuellement indépendants;
3. il est à accroissements indépendants;
4. pour tout $(s, t) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ tel que $0 \leq s \leq t < +\infty$, l'accroissement $\underline{\Delta W}_{st} = \underline{W}(t) - \underline{W}(s)$ est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n , du second ordre, gaussienne, centrée, de matrice de covariance $C_{\underline{\Delta W}_{st}} = \mathbb{E}[\underline{\Delta W}_{st} \underline{\Delta W}_{st}^T]$ telle que $C_{\underline{\Delta W}_{st}} = (t-s)I_{n \times n}$, où $I_{n \times n}$ est l'élément unité de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Ce processus est du second ordre, gaussien, centré, non stationnaire et sa fonction de covariance $C_{\underline{W}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : (s, t) \rightarrow C_{\underline{W}}(s, t) = \mathbb{E}[\underline{W}(t) \underline{W}^T(s)]$ a pour expression $C_{\underline{W}}(s, t) = \inf(s, t)I_{n \times n}$. De plus, il est markovien, de noyau de transition gaussien, est continu en moyenne quadratique, est presque sûrement à trajectoires continues et, presque sûrement, ses trajectoires ne sont différentiables en aucun point.

Bruit blanc gaussien standard

Un bruit blanc gaussien standard $\underline{B} = (\underline{B}(t), t \in \mathbb{R})$ défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexé sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R}^n est la dérivée au sens des distributions aléatoires, étendue à \mathbb{R} , d'un processus de Wiener standard $\underline{W} = (\underline{W}(t), t \in \mathbb{R}_+)$ défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexé sur \mathbb{R}_+ , à valeurs dans \mathbb{R}^n . On a donc $\underline{B} = D\underline{W}$, où D est la dérivée au sens des distributions aléatoires. Il résulte de cette définition que \underline{B} est un processus généralisé gaussien, stationnaire, centré, de densité spectrale $S_{\underline{B}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : \omega \rightarrow S_{\underline{B}}(\omega)$ constante et égale à :

$$S_{\underline{B}} = \frac{1}{2\pi} I_{n \times n}, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{V.10})$$

et de « fonction » de corrélation $R_{\underline{B}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : u \rightarrow R_{\underline{B}}(u)$ la distribution matricielle définie par :

$$R_{\underline{B}}(u) = I_{n \times n} \delta_{\circ}(u), \forall u \in \mathbb{R} \quad (\text{V.11})$$

où δ_{\circ} est la distribution de Dirac à l'origine. Ses composantes $B_1 = (B_1(t), t \in \mathbb{R}), \dots, B_n = (B_n(t), t \in \mathbb{R})$ sont des bruits blancs gaussiens standards mutuellement indépendants définis sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexés sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , donc ayant tous la même densité spectrale $\omega \rightarrow S_{B_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi}$ et la même « fonction » de corrélation $u \rightarrow R_{B_j}(u) = \delta_{\circ}(u), 1 \leq j \leq n$.

Les quelques définitions rappelées ci-dessus sont issues des cours de Fogli et Soize [FOGLI, 2009], [FOGLI, 2008], [FOGLI, 2012] et [SOIZE, 2003]. Nous allons à présent rappeler succinctement quelques notions d'analyse fiabiliste auxquelles nous nous référerons au paragraphe V.2.

V.1.2 Analyse fiabiliste : quelques brefs rappels

Procéder à l'analyse fiabiliste d'une structure dont le comportement mécanique est décrit par un modèle mécano-numérique connu, c'est, pour une modélisation probabiliste donnée des paramètres incertains (mécaniques, géométriques, de chargement) de ce modèle et un critère de défaillance spécifié, développer une stratégie probabiliste et ses outils numériques d'accompagnement pour quantifier l'occurrence de l'événement de défaillance associée à ce critère. Dans tout problème d'analyse fiabiliste structurale, on est ainsi amené à, successivement : (1) détecter et modéliser, via des modèles probabilistes appropriés, les paramètres incertains du modèle mécano-numérique, (2) choisir un critère de défaillance et un (ou plusieurs) indicateur(s) fiabiliste(s) (probabilité de défaillance, indices de fiabilité) capable(s) de quantifier l'occurrence de l'événement de défaillance induit par ce critère et (3) développer des outils numériques adaptés à l'estimation de ces indicateurs. Nous détaillons ces divers points ci-dessous.

V.1.2.1 Données du problème

Dans un problème de fiabilité structurale, les données sont au nombre de trois :

1. le critère de défaillance, choisi sur la base de considérations de sécurité (voire d'esthétique ou de confort), souvent édictées par le biais de consignes réglementaires et consistant, en général, en des limitations de contraintes et/ou de déplacements ;
2. le modèle mécano-numérique adopté pour évaluer les états défaillants de la structures (relativement au critère de défaillance retenu), consistant en l'accouplement de deux modèles : le modèle mécanique développé pour décrire le comportement de la structure sous les hypothèses requises et le modèle numérique, généralement de type éléments finis, dédié à sa mise en œuvre numérique ;
3. les paramètres incertains du problème et leur modélisation probabiliste idoine, ces paramètres se répartissant en trois grandes catégories : les caractéristiques mécaniques incertaines des matériaux constitutifs, les dimensions incertaines des éléments structuraux et les efforts appliqués incertains, où le qualificatif « incertain » doit être compris ici au sens de « affecté d'incertitude ».

En contexte fiabiliste classique, qui est celui considéré dans ce bref rappel, tous les paramètres incertains sont indépendants du temps et modélisés par des variables aléatoires Y_1, \dots, Y_p en nombre p fini, que l'on regroupe dans un vecteur aléatoire $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)^T$, appelé vecteur aléatoire de base de l'étude. Un tel vecteur est défini sur un espace de probabilité $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^p , $p \in \mathbb{N}^*$, et nous supposons dans tout ce qui suit que sa loi $P_{\underline{Y}}$ sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$ est connue, soit suite à une analyse statistique d'échantillons expérimentaux des paramètres incertains (si ces échantillons sont disponibles et de taille suffisante), soit suite à des avis argumentés d'experts. Nous supposerons en outre que cette loi admet une densité $p_{\underline{Y}} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+ : \underline{y} \rightarrow p_{\underline{Y}}(\underline{y})$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$, autrement dit telle que :

$$\forall B \in \mathfrak{B}_p, P_{\underline{Y}}(B) = \int_B p_{\underline{Y}}(\underline{y}) d\underline{y}$$

La donnée du critère de défaillance permet de définir les états fiables (i.e. de sécurité) et défaillants (i.e. d'insécurité) de la structure par le biais de relations du type $G(\underline{y}) > 0$ pour les états fiables et $G(\underline{y}) \leq 0$ pour les états défaillants, où $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} : \underline{y} \rightarrow G(\underline{y})$ est une fonction réelle, appelée fonction d'état limite, dont les valeurs $G(\underline{y})$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^p$ sont fournies par le modèle mécano-numérique utilisé pour décrire le comportement structural.

Les données de base de tout problème fiabiliste classique peuvent ainsi se résumer au couple (\underline{Y}, G) constitué du vecteur aléatoire de base \underline{Y} et de la fonction d'état limite G , avec, sous-jacent à G , le modèle mécano-numérique.

Nous allons brièvement revenir ci-dessous sur la notion de fonction d'état limite, puis définirons deux couples d'entités qui lui sont intimement liées : les événements de sécurité et de défaillance, d'une part et les domaines de sécurité et de défaillance, d'autre part. Nous rappellerons ensuite l'objectif de l'analyse fiabiliste d'une structure ainsi que les indicateurs et outils de quantification y afférents.

Fonction d'état limite

Soit S une structure dont le comportement mécanique, sous l'action d'excitations externes est décrit par un modèle mécano-numérique comportant p paramètres incertains modélisé par un vecteur aléatoire p -dimensionnel \underline{Y} défini sur un espace probabilisé $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de loi $P_{\underline{Y}}$ donnée sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$. À tout critère de défaillance spécifié pour S est alors associée une fonction $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} : \underline{y} \rightarrow G(\underline{y})$, mesurable de $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$ dans $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1)$, telle que, $\forall \underline{y} \in \mathbb{R}^p$:

- la situation $G(\underline{y}) > 0$ caractérise un état fiable de S ;
- la situation $G(\underline{y}) \leq 0$ caractérise un état de défaillance de S .

Une telle fonction, qui permet de caractériser les états fiables et défaillants d'une structure vis-à-vis d'un critère de défaillance donnée, est appelée fonction d'état limite.

Du point de vue probabiliste, les états fiables et défaillants représentent des occurrences de deux événements, éléments de \mathcal{F} , appelés respectivement événement de sécurité et événement de défaillance, dont nous rappelons les définitions ci-dessous.

Événements de sécurité et de défaillance

On se place dans la même situation que ci-dessus. On connaît donc le couple (\underline{Y}, G) formé du vecteur aléatoire de base \underline{Y} et de la fonction d'état limite G . Dans ces conditions, on appelle événement de sécurité et événement de défaillance les éléments de \mathcal{F} , notés respectivement E_s et E_f , définis par :

$$\begin{cases} E_s = \{G(\underline{Y}) > 0\} = \{a \in \mathcal{A} : G(\underline{Y}(a)) > 0\} \\ E_f = \{G(\underline{Y}) \leq 0\} = \{a \in \mathcal{A} : G(\underline{Y}(a)) \leq 0\} \end{cases} \quad (V.12)$$

On peut observer que E_s et E_f forment une partition de l'événement certain \mathcal{A} , autrement dit sont tels que : $E_s \cup E_f = \mathcal{A}$, $E_s \cap E_f = \emptyset$.

À ces deux événements sont associés deux sous-ensembles de \mathbb{R}^p , appelés domaine de sécurité et domaine de défaillance, dont les définitions sont rappelées ci-dessous.

Domaines de sécurité et de défaillance

La trace sur \mathbb{R}^p du graphe dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ de la fonction d'état limite G délimite deux sous-ensembles D_s et D_f de \mathbb{R}^p , tels que :

$$\begin{cases} D_s = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^p : G(\underline{y}) > 0\} \\ D_f = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^p : G(\underline{y}) \leq 0\} \end{cases} \quad (V.13)$$

Ces deux sous-ensembles sont appelés respectivement domaine de sécurité et domaine de défaillance de la structure. Ils sont associés respectivement aux événements de sécurité E_s et de défaillance E_f et forment une partition de \mathbb{R}^p , autrement dit vérifient : $D_s \cup D_f = \mathbb{R}^p$, $D_s \cap D_f = \emptyset$.

La figure V.1 illustre les domaines de sécurité et de défaillance correspondant à une fonction d'état limite donnée $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (y_1, y_2) \rightarrow G(y_1, y_2)$.

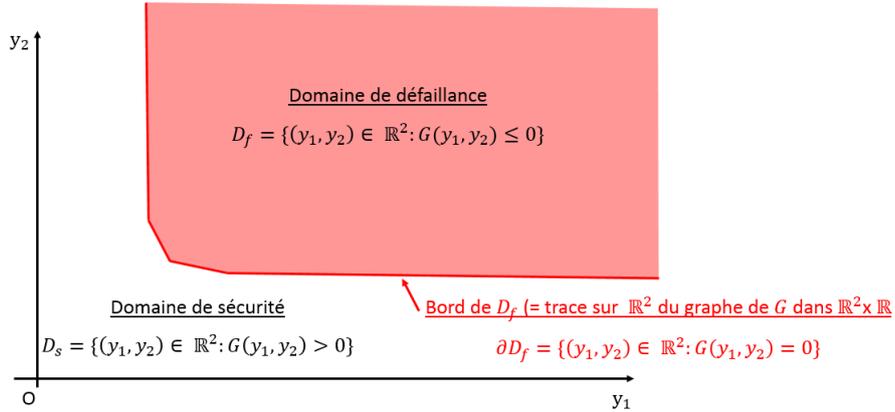


FIGURE V.1 – Domaines de sécurité et de défaillance associés à une fonction d'état limite $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (y_1, y_2) \rightarrow G(y_1, y_2)$

V.1.2.2 Objectif de l'analyse fiabiliste

L'objectif de l'analyse fiabiliste d'une structure est de quantifier sa fiabilité vis-à-vis d'un état de défaillance spécifié, où par quantifier il faut entendre dans ce contexte, soit estimer la probabilité d'occurrence de l'événement E_s ou E_f , soit calculer des indicateurs caractéristiques de l'état fiabiliste de la structure qui ne sont pas des probabilités. Ceci nous amène à définir les notions de probabilités de sécurité et de défaillance et d'indices de fiabilité, qui jouent un rôle phare dans toutes les stratégies fiabilistes.

Probabilités de sécurité et de défaillance

On s'intéresse à une structure dont on veut quantifier l'état fiabiliste relativement à un critère de défaillance et pour laquelle nous supposons connus, suite à une analyse préalable : (1) le couple (\underline{Y}, G) formé du vecteur aléatoire de base p -dimensionnel \underline{Y} défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de loi $P_{\underline{Y}}$ sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$ admettant une densité $p_{\underline{Y}} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+ : y \rightarrow p_{\underline{Y}}(y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\underline{y}$ sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$ et de la fonction d'état limite $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} : \underline{y} \rightarrow G(\underline{y})$, (2) les événements E_s et E_f de sécurité et de défaillance définis par V.12 et (3) les domaines D_s et D_f de sécurité et de défaillance donnés par V.13. Pour quantifier cet état fiabiliste, il est alors d'usage en fiabilité structurale d'utiliser indifféremment, soit la probabilité d'occurrence $\mathbb{P}(E_s)$ de l'événement E_s , appelée probabilité de sécurité et donnée par :

$$\mathbb{P}(E_s) = \mathbb{P}(\underline{Y} \in D_s) = P_{\underline{Y}}(D_s) = \int_{D_s} P_{\underline{Y}}(d\underline{y}) = \int_{D_s} p_{\underline{Y}}(\underline{y}) d\underline{y} \quad (\text{V.14})$$

soit la probabilité d'occurrence $\mathbb{P}(E_f)$ de l'événement E_f , appelée probabilité de défaillance et donnée par :

$$\mathbb{P}(E_f) = \mathbb{P}(\underline{Y} \in D_f) = P_{\underline{Y}}(D_f) = \int_{D_f} P_{\underline{Y}}(d\underline{y}) = \int_{D_f} p_{\underline{Y}}(\underline{y}) d\underline{y} \quad (\text{V.15})$$

ces probabilités étant liées à travers l'égalité évidente :

$$\mathbb{P}(E_s) + \mathbb{P}(E_f) = P_{\underline{Y}}(D_s) + P_{\underline{Y}}(D_f) = 1$$

qui montre que la connaissance de l'une implique celle de l'autre. Bien évidemment, nous avons supposé implicitement dans V.14 et V.15 que les intersections $\Omega_{\underline{Y}} \cap D_s$ et $\Omega_{\underline{Y}} \cap D_f$, où $\Omega_{\underline{Y}}$ désigne le support de la loi $P_{\underline{Y}}$, ne sont pas vides.

Dans toute la suite, nous nous intéresserons uniquement à la probabilité de défaillance, que nous noterons P_f et qui s'écrit donc, d'après V.15 :

$$P_f = \int_{D_f} p_{\underline{Y}}(\underline{y}) d\underline{y} = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{1}_{D_f}(\underline{y}) p_{\underline{Y}}(\underline{y}) d\underline{y} \quad (\text{V.16})$$

où $\mathbb{1}_{D_f}$ est la fonction indicatrice du domaine de défaillance D_f .

En général, le calcul exact de cette intégrale n'est pas réalisable. Néanmoins, dans certains cas simples ce calcul est possible. Il en est ainsi, par exemple, lorsque, d'une part le vecteur aléatoire de la base \underline{Y} est gaussien, de moyenne $m_{\underline{Y}} = \mathbb{E}[\underline{Y}]$ et de matrice de covariance $C_{\underline{Y}} = \mathbb{E}[(\underline{Y} - m_{\underline{Y}})(\underline{Y} - m_{\underline{Y}})^T]$, et d'autre part la fonction d'état limite G est affine, telle que :

$$G(\underline{y}) = a_0 + \underline{a}^T \underline{y}, \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^p$$

où $a_0 \in \mathbb{R}$ et $\underline{a} \in \mathbb{R}^p$ sont des coefficients donnés, le premier scalaire, le second vectoriel de dimension p . Dans ce cas, le domaine de défaillance est un demi-espace et un simple calcul donne :

$$P_f = \Phi \left(-\frac{a_0 + \underline{a}^T m_{\underline{Y}}}{(\underline{a}^T C_{\underline{Y}} \underline{a})^{1/2}} \right)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi gaussienne standard sur $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1)$.

Lorsque le calcul exact de l'intégrale V.16 n'est pas possible, il est nécessaire de recourir à une procédure numérique. Si la dimension p de l'intégrale est faible, c'est-à-dire inférieure ou égale à trois, on peut utiliser une méthode de quadrature numérique déterministe. Mais si p est supérieur à trois, cette solution n'est plus possible et il faut alors se diriger vers l'emploi d'une procédure de Monte-Carlo. Il existe de nombreuses méthodes de Monte-Carlo pour le calcul des intégrales du type V.16, qui présentent toutes l'avantage, contrairement aux méthodes de quadrature numérique déterministes, de ne pas être affectées dans leurs performances par la dimension de l'intégrale. Par contre, chaque méthode fournit un estimateur de cette intégrale et ses performances dépendent alors fortement de la variance de cet estimateur : plus elle est élevée et moins celles-ci sont bonnes. Ce critère de performance permet ainsi de hiérarchiser les différentes méthodes de Monte-Carlo [FOGLI, 2011], [RUBINSTEIN et KROESE, 2016] et [ROBERT et CASELLA, 2013].

Dans le paragraphe suivant, nous exposons brièvement le principe de la méthode de Monte-Carlo que nous avons utilisée pour calculer la probabilité V.16 dans le cadre de l'analyse fiabiliste de notre étude. Historiquement, c'est la première méthode de Monte-Carlo développée pour le calcul des intégrales multidimensionnelles. De toutes les méthodes de Monte-Carlo actuelles dédiées à ce type de calcul, c'est la plus rudimentaire et de ce fait la moins performante au sens du critère évoqué ci-dessus. Mais c'est de loin la plus simple à mettre en œuvre. Compte tenu des ordres de grandeur relativement élevés des probabilités que nous avons à estimer, le choix de cette méthode s'est révélé pertinent à l'usage.

V.1.2.3 Calcul de la probabilité de défaillance

Comme mentionné ci-dessus, pour le calcul de la probabilité P_f donnée par V.16 nous avons utilisé la méthode de Monte-Carlo la plus rudimentaire et la plus simple à mettre en œuvre, classiquement appelée dans la littérature spécialisée méthode de Monte-Carlo directe ou méthode de Monte-Carlo brute (*crude Monte Carlo method* en Anglais) [FOGLI, 2011], [RUBINSTEIN et KROESE, 2016] et [ROBERT et CASELLA, 2013].

D'une manière générale, toute procédure de Monte-Carlo dédiée au calcul d'une intégrale (quelle que soit sa dimension) est basée sur une analogie probabiliste consistant à interpréter l'intégrale à calculer comme l'espérance mathématique d'une certaine variable aléatoire scalaire Z à déterminer et sa mise en œuvre se décline alors en deux étapes : (1) construire la variable aléatoire Z , (2) simuler cette variable aléatoire et utiliser ses réalisations simulées pour estimer sa moyenne via l'estimateur statistique standard de cette caractéristique. L'estimée ainsi obtenue de cette espérance représente alors une approximation de la valeur exacte de l'intégrale. Bien entendu, cette approximation dépend de la taille L de l'échantillon des réalisations simulées de Z et deux questions se posent alors naturellement : (a) quel crédit accorder à l'approximation obtenue pour L fixé? et (b) à quelle vitesse va converger cette approximation vers la valeur exacte de l'intégrale lorsque $L \rightarrow +\infty$? Les réponses à ces questions sont fournies par le théorème central limite. Notons au passage que les différentes méthodes de Monte-Carlo disponibles aujourd'hui pour le calcul des intégrales multidimensionnelles se distinguent par le choix (non unique) de la variable aléatoire Z . Si plusieurs choix sont possibles, la solution optimale sera d'opter pour la variable Z de variance minimale.

Revenons à présent au calcul de l'intégrale V.16 par la méthode de Monte-Carlo directe et commençons par rappeler que si (a) \underline{X} est un vecteur aléatoire défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^n , de loi $P_{\underline{X}}$ sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ admettant une densité $p_{\underline{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ : \underline{x} \rightarrow p_{\underline{X}}(\underline{x})$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\underline{x}$ sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ et (b) g est une application mesurable et intégrable de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , alors l'espérance mathématique $\mathbb{E}[Q]$ de la variable aléatoire Q définie sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R} , telle que $Q = g(\underline{X})$, est donnée par :

$$\mathbb{E}[Q] = \mathbb{E}[g(\underline{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} g(\underline{x}) P_{\underline{X}}(d\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\underline{x}) p_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x} \quad (\text{V.17})$$

Compte tenu de ce résultat, V.16 peut alors se réécrire :

$$P_f = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{D_f}(\underline{Y})] \quad (\text{V.18})$$

soit encore, du fait de l'égalité en loi $\mathbb{1}_{D_f}(\underline{Y}) = \mathbb{1}_{E_f}$, avec E_f l'événement de défaillance défini par V.16 :

$$P_f = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{E_f}] \quad (\text{V.19})$$

où $\mathbb{1}_{E_f}$, et donc aussi $\mathbb{1}_{D_f}(\underline{Y})$, est une variable aléatoire définie sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{0, 1\}$, distribuée suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(E_f) = P_f$. Ces deux variables aléatoires ont donc pour moyenne et variance, respectivement :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{E_f}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{D_f}(\underline{Y})] = \mathbb{P}(E_f) = P_f \\ \mathbb{V}[\mathbb{1}_{E_f}] = \mathbb{V}[\mathbb{1}_{D_f}(\underline{Y})] = \mathbb{P}(E_f)(1 - \mathbb{P}(E_f)) = P_f(1 - P_f) \end{cases} \quad (\text{V.20})$$

Soit $\{\underline{Y}^{(1)}, \dots, \underline{Y}^{(L)}\}$, $L \in \mathbb{N}^*$, un L -échantillon de copies indépendantes de vecteur aléatoire \underline{Y} . En utilisant l'estimateur empirique classique de l'espérance mathématique, le L - estimateur de P_f associé à cet échantillon s'écrit, d'après V.18 :

$$\hat{P}_f^{(L)} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \mathbb{1}_{D_f}(\underline{Y}^{(j)}) \quad (\text{V.21})$$

C'est une variable aléatoire définie sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $[0, 1]$. Tenant compte de V.20 et du fait que tous les vecteurs aléatoires $\underline{Y}^{(j)}$, $1 \leq j \leq L$, sont indépendants et ont même loi que \underline{Y} , un simple calcul montre que sa moyenne $\mathbb{E}[\hat{P}_f^{(L)}]$ et sa variance $\mathbb{V}[\hat{P}_f^{(L)}]$ ont pour expressions :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\hat{P}_f^{(L)}] = P_f \\ \mathbb{V}[\hat{P}_f^{(L)}] = \frac{P_f(1 - P_f)}{L} \end{cases} \quad (\text{V.22})$$

$\hat{P}_f^{(L)}$ est donc un estimateur sans biais (car sa moyenne est égale à la probabilité cible P_f) et consistant (car sa variance tend vers 0 lorsque $L \rightarrow +\infty$). De plus, de l'inégalité de Tchebychev on tire :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|\hat{P}_f^{(L)} - P_f| > \varepsilon) \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{V.23})$$

C'est donc un estimateur convergent.

L'erreur relative d'estimation $e[\hat{P}_f^{(L)}]$ est mesurée par le coefficient de variation de $\hat{P}_f^{(L)}$. Elle est donc donnée par :

$$e[\hat{P}_f^{(L)}] = \frac{\sqrt{\mathbb{V}[\hat{P}_f^{(L)}]}}{\mathbb{E}[\hat{P}_f^{(L)}]} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{L P_f}} \simeq \frac{1}{\sqrt{L P_f}} \quad (\text{V.24})$$

Cette relation montre que la vitesse de convergence $\hat{P}_f^{(L)}$ est en $O(1/\sqrt{L})$, c'est donc un estimateur lentement convergent. Cette lenteur de convergence est le point faible bien connu de cette méthode de Monte-Carlo, et de beaucoup d'autres de ce type d'ailleurs. Compte tenue de V.21, une L-approximation $\bar{P}_f^{(L)}$ de P_f s'obtient en prenant une réalisation de $\hat{P}_f^{(L)}$. On a donc :

$$\bar{P}_f^{(L)} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \mathbb{1}_{D_f}(y^{(j)}) = \frac{\#\{j \in \{1, \dots, L\} : y^{(j)} \in D_f\}}{L} \quad (\text{V.25})$$

où les $y^{(j)}$, $1 \leq j \leq L$, sont L réalisations indépendantes du vecteur aléatoire \underline{Y} et $\#\{\cdot\}$ désigne le cardinal de l'ensemble $\{\cdot\}$.

Disposant de cette approximation de P_f , il convient ensuite de calculer, pour un seuil de confiance $1 - \alpha$ fixé ($0 \leq \alpha \leq 1$), l'intervalle de confiance $\bar{I}_{f;1-\alpha}^{(L)}$ de P_f associé à son estimée $\bar{P}_f^{(L)}$, et pour cela on se réfère au théorème central limite. On obtient tous calculs faits :

$$\bar{I}_{f;1-\alpha}^{(L)} = \left[\bar{P}_f^{(L)} - \eta_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{P}_f^{(L)}(1 - \bar{P}_f^{(L)})}{L}}, \bar{P}_f^{(L)} + \eta_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{P}_f^{(L)}(1 - \bar{P}_f^{(L)})}{L}} \right] \quad (\text{V.26})$$

où $\eta_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi gaussienne standard sur $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1)$, c'est-à-dire le réel positif tel que $\eta_{1-\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$, donc solution de l'équation $\Phi(\eta_{1-\frac{\alpha}{2}}) - \Phi(-\eta_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$, avec Φ la fonction de répartition de la loi gaussienne standard sur $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1)$.

Notons qu'un tel intervalle n'est en fait qu'une réalisation (celle associée à l'estimée $\bar{P}_f^{(L)}$ de P_f et donc au L-échantillon simulé $\{y^{(1)}, \dots, y^{(L)}\}$ de \underline{Y}) de l'intervalle de confiance aléatoire $\hat{I}_{f;1-\alpha}^{(L)}$ de P_f au seuil de confiance $1 - \alpha$, associé à l'estimateur $\hat{P}_f^{(L)}$, donc au L-échantillon de copies indépendantes $\{\underline{Y}^{(1)}, \dots, \underline{Y}^{(L)}\}$ de \underline{Y} . Pour la construction de cet intervalle aléatoire (basée sur le théorème central limite), le lecteur intéressé pourra, par exemple, consulter la référence [FOGLI, 2011]. Il ne serait donc pas correct, comme on est en droit de le faire avec l'intervalle de confiance aléatoire $\hat{I}_{f;1-\alpha}^{(L)}$, d'interpréter $\bar{I}_{f;1-\alpha}^{(L)}$ comme l'intervalle ayant la probabilité $1 - \alpha$ de contenir la probabilité exacte inconnue P_f . Au mieux peut-on dire, une fois construit l'intervalle $\bar{I}_{f;1-\alpha}^{(L)}$, que l'on a une confiance de $(1 - \alpha) \times 100\%$ en l'appartenance de P_f à cet intervalle déterministe.

V.1.2.4 Indices de fiabilité

Nous avons vu que le quantificateur naturel de la fiabilité d'une structure est la probabilité de défaillance (ou de sécurité, ce qui revient au même). Mais on peut également la quantifier à l'aide d'indices dits de fiabilité. Les deux plus connus sont l'indice de Cornell et l'indice de Hasofer-Lind [DITLEVSEN et MADSEN, 1996] et [HASOFER et LIND, 1974]. Nous en rappelons les définitions ci-après.

Indice de Cornell

On considère le même problème fiabiliste que précédemment, caractérisé par la donnée de la fonction d'état limite $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} : \underline{y} \rightarrow G(\underline{y})$ (associée au critère de défaillance retenu pour la structure) et du vecteur aléatoire de base \underline{Y} défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^p et de loi $P_{\underline{Y}}$ sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$ admettant une densité $p_{\underline{Y}} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+ : \underline{y} \rightarrow p_{\underline{Y}}(\underline{y})$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\underline{y}$ sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$. Soit Z la variable aléatoire définie sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R} , telle que :

$$Z = G(\underline{Y}) \quad (\text{V.27})$$

Compte tenu de la définition de G , cette variable aléatoire, appelée marge fiabiliste, peut être vue comme un indicateur aléatoire de l'état fiabiliste de la structure via les événements $E_s = \{Z > 0\} = \{G(\underline{Y}) > 0\}$ et $E_f = \{Z \leq 0\} = \{G(\underline{Y}) \leq 0\}$. En supposant Z du second ordre, l'indice de Cornell β_C est alors défini par :

$$\beta_C = \frac{m_Z}{\sigma_Z} \quad (\text{V.28})$$

où $m_Z = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[G(\underline{Y})]$ et $\sigma_Z^2 = \mathbb{V}[Z] = \mathbb{V}[G(\underline{Y})]$ sont respectivement la moyenne et la variance de Z , données par, compte tenu de V.27 :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_Z = \int_{\mathbb{R}^p} G(\underline{y}) P_{\underline{Y}}(d\underline{y}) = \int_{\mathbb{R}^p} G(\underline{y}) p_{\underline{Y}}(\underline{y}) d\underline{y} \\ \sigma_Z^2 = \int_{\mathbb{R}^p} (G(\underline{y}) - m_Z)^2 P_{\underline{Y}}(d\underline{y}) = \int_{\mathbb{R}^p} (G(\underline{y}) - m_Z)^2 p_{\underline{Y}}(\underline{y}) d\underline{y} \end{array} \right. \quad (\text{V.29})$$

Si le calcul exact de ces intégrales n'est pas possible, cas très fréquent en pratique, on a recours à la voie numérique, avec l'emploi obligatoire d'une méthode de Monte-Carlo dès que $p > 3$. Dans ce cas, on procède comme suit :

1. On simule un L -échantillon $\{\underline{y}^{(1)}, \dots, \underline{y}^{(L)}\}$ de réalisations indépendantes du vecteur aléatoire de base \underline{Y} .
2. En utilisant les estimateurs empiriques classiques de la moyenne et de la variance, m_Z et σ_Z^2 sont estimées par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{m}_Z^{(L)} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L G(\underline{y}^{(j)}) \\ (\bar{\sigma}_Z^{(L)})^2 = \frac{1}{L-1} \sum_{j=1}^L (G(\underline{y}^{(j)}) - \bar{m}_Z^{(L)})^2 \end{array} \right. \quad (\text{V.30})$$

3. Ces L -estimées sont prises comme approximations de m_Z et σ_Z^2 .

Une fois ces estimées calculées, β_C est alors approximé par :

$$\bar{\beta}_C^{(L)} = \frac{\bar{m}_Z^{(L)}}{\bar{\sigma}_Z^{(L)}} \quad (\text{V.31})$$

En toute rigueur, il convient ensuite d'associer à cette approximation un intervalle de confiance à une seuil de confiance donné.

Notons que si G est affine, de la forme $G(\underline{y}) = a_0 + \underline{a}^T \underline{y}$, $\forall \underline{y} \in \mathbb{R}^p$, avec $a_0 \in \mathbb{R}$ et $\underline{a} \in \mathbb{R}^p$ des coefficients données, et si \underline{Y} est du second ordre, de moyenne $m_{\underline{Y}} = \mathbb{E}[\underline{Y}] \in \mathbb{R}^p$ et de matrice de covariance $C_{\underline{Y}} = \mathbb{E}[(\underline{Y} - m_{\underline{Y}})(\underline{Y} - m_{\underline{Y}})^T] \in \mathbb{R}^{p \times p}$, alors l'expression exacte de β_C se calcule aisément et l'on obtient :

$$\beta_C = \frac{a_0 + \underline{a}^T m_{\underline{Y}}}{(\underline{a}^T C_{\underline{Y}} \underline{a})^{1/2}} \quad (\text{V.32})$$

Si, de plus, \underline{Y} est gaussien, il est facile d'obtenir l'expression exacte de la probabilité de défaillance P_f . Elle s'écrit :

$$P_{f,c} = \Phi(-\beta_C) \quad (V.33)$$

avec β_C donné par V.32 et Φ la fonction de répartition de la loi gaussienne standard sur $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1)$. On retrouve ainsi le résultat obtenu au paragraphe V.1.2.2 sous les mêmes hypothèses. En dehors de ces dernières, la relation simple V.33 liant P_f à β_C n'est bien entendu plus valable. Cependant, même en dehors de ces hypothèses (c'est-à-dire si \underline{Y} n'est pas gaussien et/ou G n'est pas affine) et si l'on a calculé β_C (soit via les relations V.28 et V.29 en utilisant une procédure de quadrature numérique déterministe si $p \leq 3$, soit en ayant recours à la procédure de Monte-Carlo décrite précédemment si $p > 3$), on peut encore définir une probabilité de défaillance, dite conventionnelle et notée $P_{f,C}^{\text{conv}}$, par la relation :

$$P_{f,C}^{\text{conv}} = \phi(-\beta_C) \quad (V.34)$$

Cette probabilité peut être éloignée d'un (exceptionnellement deux) ordre(s) de grandeur de la probabilité exacte P_f . On l'utilise quelquefois pour étudier l'influence de certaines caractéristiques (de position, de dispersion, ...) de la loi du vecteur aléatoire \underline{Y} sur l'état fiabiliste de la structure ou pour mener des études comparatives. On l'utilise également dans certains ordres réglementaires où il n'est pas nécessaire de connaître la probabilité de défaillance avec une grande précision.

Le grand intérêt de l'indice de Cornell est qu'il est relativement simple à calculer. Il comporte toutefois un défaut notoire : il n'est pas invariant vis-à-vis de la formulation de l'événement de défaillance. Plus précisément, il prendra des valeurs différentes pour des formulations différentes, mais équivalentes, du même événement de défaillance, ce qui est dénué de sens du point de vue probabiliste. Pour illustrer ce défaut, considérons l'exemple simple suivant. Soient :

- Y_1, Y_2 deux variables aléatoires lognormales de moyennes et d'écart-types respectifs (m_1, σ_1) , (m_2, σ_2) , avec $m_1 > m_2$, $(\sigma_2 / m_2) > (\sigma_1 / m_1)$;
- Z_1, Z_2 deux variables aléatoires scalaires telles que $Z_1 = G_1(Y_1, Y_2) = Y_1 - Y_2$, $Z_2 = G_2(Y_1, Y_2) = \text{Ln}Y_1 - \text{Ln}Y_2$
- $E_{f,1}, E_{f,2}$ deux événements de défaillance tels que $E_{f,1} = \{G_1(Y_1, Y_2) \leq 0\} = \{Y_1 - Y_2 \leq 0\}$, $E_{f,2} = \{G_2(Y_1, Y_2) \leq 0\} = \{\text{Ln}Y_1 - \text{Ln}Y_2 \leq 0\}$

On a $G_1 \neq G_2$. Mais il est facile de montrer que $E_{f,1} = E_{f,2}$. Ainsi les événements $E_{f,1}$ et $E_{f,2}$, qui n'ont pas la même formulation (car décrits par des fonctions d'état limite distinctes), coïncident. On a, par conséquent, $\mathbb{P}(E_{f,1}) = \mathbb{P}(E_{f,2})$ et donc, en toute logique, les indices de Cornell $\beta_{C,1} = \frac{m_{Z1}}{\sigma_{Z1}}$ et $\beta_{C,2} = \frac{m_{Z2}}{\sigma_{Z2}}$ devraient être égaux. Or, un simple calcul montre que :

$$\beta_{C,1} = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} ; \quad \beta_{C,2} = \frac{\text{Ln} \left(\frac{m_1^2 \sqrt{m_2^2 + \sigma_2^2}}{m_2^2 \sqrt{m_1^2 + \sigma_1^2}} \right)}{\sqrt{\text{Ln} \left(\frac{(m_1^2 + \sigma_1^2)(m_2^2 + \sigma_2^2)}{m_1^2 m_2^2} \right)}} \quad (V.35)$$

et donc, bien que quantifiant le même état de défaillance (puisque $E_{f,1} = E_{f,2}$ et donc $\mathbb{P}(E_{f,1}) = \mathbb{P}(E_{f,2})$), les indices $\beta_{C,1}$ et $\beta_{C,2}$ sont distincts. C'est pour cette raison que Hasofer et Lind [HASO-FER et LIND, 1974] ont proposé un nouvel indice ne présentant de ce défaut.

Indice de Hasofer-Lind

La définition de cet indice requiert préalablement de reformuler le problème fiabiliste en contexte gaussien standard. On s'appuie pour cela sur un résultat bien connu en théorie des probabilités, qui stipule que, sous certaines conditions, que nous supposons satisfaites dans ce qui suit (et qui le sont d'ailleurs dans la plupart des applications pratiques), il existe un difféomorphisme

$\tau : \mathbb{R}^p \rightarrow \Omega_{\underline{Y}}$ tel que le vecteur aléatoire de base \underline{Y} satisfasse l'égalité en loi $\underline{Y} = \tau(\underline{X})$, où \underline{X} est un vecteur aléatoire gaussien standard p -dimensionnel basé sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\Omega_{\underline{Y}}$ est le support de la loi $P_{\underline{Y}}$ de \underline{Y} . En procédant à ce changement de vecteur aléatoire dans V.12, les événements de sécurité et de défaillance se réécrivent :

$$\begin{cases} E_s = \{H(\underline{X}) > 0\} = \{a \in \mathcal{A} : H(\underline{X}(a)) > 0\} \\ E_f = \{H(\underline{X}) \leq 0\} = \{a \in \mathcal{A} : H(\underline{X}(a)) \leq 0\} \end{cases} \quad (\text{V.36})$$

où $H : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} : \underline{x} \rightarrow H(\underline{x})$, telle que :

$$H(\underline{x}) = G(\tau(\underline{x})) = (G \circ \tau)(\underline{x}), \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^p \quad (\text{V.37})$$

est l'image par τ^{-1} de la fonction d'état limite G . Les images respectives par τ^{-1} des domaines de sécurité et de défaillance D_s et D_f , notées Δ_s et Δ_f s'écrivent alors :

$$\Delta_s = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^p : H(\underline{x}) > 0\} \quad (\text{V.38})$$

$$\Delta_f = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^p : H(\underline{x}) \leq 0\} \quad (\text{V.39})$$

et les expressions des probabilités de sécurité et de défaillance P_s et P_f prennent les nouvelles formes :

$$P_s = \mathbb{P}(E_s) = \int_{\Delta_s} \phi_p(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{1}_{\Delta_s}(\underline{x}) \phi_p(\underline{x}) d\underline{x} \quad (\text{V.40})$$

$$P_f = \mathbb{P}(E_f) = \int_{\Delta_f} \phi_p(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{1}_{\Delta_f}(\underline{x}) \phi_p(\underline{x}) d\underline{x} \quad (\text{V.41})$$

où ϕ_p est la densité de la loi gaussienne standard sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$, telle que :

$$\phi_p(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \exp\left(-\frac{\|\underline{x}\|^2}{2}\right), \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^p \quad (\text{V.42})$$

avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^p . Notons que les formules V.40 et V.41 s'obtiennent en procédant au changement de variable $\underline{y} = \tau(\underline{x})$ dans V.14 et V.15. Le problème fiabiliste est ainsi ramené au calcul de la probabilité P_f (ou P_s ce qui revient au même, puisque $P_f + P_s = 1$) exprimée sous sa forme V.41 (ou V.40 si c'est la probabilité P_s que l'on cherche à calculer prioritairement).

C'est dans ce contexte gaussien standard que Hasofer et Lind [HASOFER et LIND, 1974] ont introduit leur indice, noté β_{HL} dans toute la suite. Notant O l'origine du repère orthonormé de \mathbb{R}^p dans lequel sont exprimées les formulations précédentes, cet indice est défini par :

$$\beta_{HL} = d(O, \Delta_f) \quad (\text{V.43})$$

où $d(O, \Delta_f)$ est la distance euclidienne canonique de O à Δ_f . Le calcul de cet indice se ramène donc à la résolution du problème d'optimisation non linéaire sur \mathbb{R}^p suivant : trouver $\beta_{HL} \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\beta_{HL} = \min \|\underline{x}\| \quad (\text{V.44})$$

sous la contrainte :

$$\underline{x} \in \Delta_f \Leftrightarrow H(\underline{x}) \leq 0 \quad (\text{V.45})$$

ou, ce qui revient au même :

$$\underline{x} \in \partial\Delta_f \Leftrightarrow H(\underline{x}) = 0 \quad (\text{V.46})$$

où $\partial\Delta_f$ est le bord de Δ_f , tel que :

$$\partial\Delta_f = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^p : H(\underline{x}) = 0\} \quad (\text{V.47})$$

Le point \underline{x}^* de $\partial\Delta_f$ solution de ce problème d'optimisation (donc tel que $\beta_{HL} = \|\underline{x}^*\|$) est appelé point de conception (*design point* en Anglais). Il joue un rôle fondamental en fiabilité structurale car c'est le point du domaine de défaillance en lequel la densité de la loi (gaussienne standard) de \underline{X} prend sa plus grande valeur. De tous les points du domaine de défaillance Δ_f , c'est celui dans le voisinage duquel le risque de défaillance est le plus probable, au sens où, de tous les sous-ensembles de Δ_f , ceux qui correspondent aux états de défaillance les plus critiques sont ceux contenant ce point. On dit encore que \underline{x}^* est le point de défaillance le plus probable et sa connaissance est une information capitale dans les procédures de conception optimale sous contraintes fiabilistes.

Le calcul de cet indice est manifestement plus difficile que celui de l'indice de Cornell car il requiert d'une part de reformuler le problème fiabiliste initial pour l'amener à sa forme standard et d'autre part de résoudre le problème d'optimisation non linéaire sous contrainte d'égalité V.44 - V.46 (bien que pour la résolution de ce type de problème on dispose aujourd'hui d'algorithmes performants). Il possède cependant sur ce dernier l'avantage d'être invariant vis-à-vis de la formulation de l'événement de défaillance (il a été conçu en partie pour cela!). Afin d'illustrer cette propriété, reprenons l'exemple traité dans le paragraphe précédent consacré à l'indice de Cornell. Pour cet exemple, il est facile de montrer que la transformation τ opère de \mathbb{R}^2 dans $(\mathbb{R}_+)^2$ et s'écrit :

$$\tau(x_1, x_2) = (e^{a_1+b_1x_1}, e^{a_2+b_2x_2})^T, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (V.48)$$

avec :

$$a_j = \text{Ln} \left(\frac{m_j^2}{\sqrt{a_j^2 + \sigma_j^2}} \right), b_j = \sqrt{\text{Ln} \left(\frac{m_j^2 + \sigma_j^2}{m_j^2} \right)}, j = 1, 2 \quad (V.49)$$

Il s'en suit, d'une part que les images par τ des fonctions d'état limite G_1 et G_2 ont pour expressions, respectivement :

$$H_1(x_1, x_2) = e^{a_1+b_1x_1} - e^{a_2+b_2x_2}, \quad H_2(x_1, x_2) = a_1 - a_2 + b_1x_1 - b_2x_2 \quad (V.50)$$

et d'autre part que les événements et domaines de défaillance associés s'écrivent :

$$E_{f,1} = \{e^{a_1+b_1X_1} - e^{a_2+b_2X_2} \leq 0\}, \quad \Delta_{f,1} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : e^{a_1+b_1x_1} - e^{a_2+b_2x_2} \leq 0\} \quad (V.51)$$

$$E_{f,2} = \{a_1 - a_2 + b_1X_1 - b_2X_2 \leq 0\}, \quad \Delta_{f,2} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 - a_2 + b_1x_1 - b_2x_2 \leq 0\} \quad (V.52)$$

Les expressions V.51 et V.52 montrent alors clairement que, du fait de la croissance de la fonction exponentielle :

$$E_{f,1} = E_{f,2}, \quad \Delta_{f,1} = \Delta_{f,2} \quad (V.53)$$

Il en résulte que les indices de Hasofer-Lind correspondants $\beta_{HL,1}$ et $\beta_{HL,2}$ sont égaux et donnés par :

$$\beta_{HL,1} = \beta_{HL,2} = \frac{|a_1 - a_2|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \frac{\text{Ln} \left(\frac{m_1^2 \sqrt{m_2^2 + \sigma_2^2}}{m_2^2 \sqrt{m_1^2 + \sigma_1^2}} \right)}{\sqrt{\text{Ln} \left(\frac{(m_1^2 + \sigma_1^2)(m_2^2 + \sigma_2^2)}{m_1^2 m_2^2} \right)}} \quad (V.54)$$

On notera que l'indice ainsi trouvé coïncide avec l'indice de Cornell $\beta_{C,2}$ (cf. V.35). On observera également qu'il y a égalité entre les indices de Cornell et de Hasofer-Lind dans le cas très particulier où le vecteur aléatoire de base \underline{Y} est gaussien et la fonction d'état limite G affine. On a alors dans ce cas :

$$P_f = \Phi(-\beta) ; \quad \beta = \beta_C = \beta_{HL} \quad (V.55)$$

Mentionnons enfin que, comme l'indice de Cornell, on peut associer à l'indice de Hasofer-Lind une probabilité de défaillance conventionnelle $P_{f,HL}^{\text{conv}}$, telle que :

$$P_{f,HL}^{\text{conv}} = \Phi(-\beta_{HL}) \quad (\text{V.56})$$

et qui est égale à P_f dans le cas particulier où \underline{Y} est gaussien et G affine.

V.2 Formulation et résolution du problème fiabiliste de l'étude

V.2.1 Données du problème

Comme mentionné plus haut (cf. paragraphe V.1.2.1), les données d'un problème fiabiliste sont au nombre de trois : (1) le critère de défaillance, (2) le modèle mécano-numérique et (3) les paramètres incertains de ce dernier et leur modélisation probabiliste. Nous détaillons ces données ci-dessous dans le cadre de notre problème.

V.2.1.1 Critères de défaillance

Dans cette étude, pour un ébranlement sismique donné, limité à un intervalle de temps fixé $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}_+$ (son intervalle temporel d'action), nous avons considéré deux critères de défaillance :

1. le dépassement d'un seuil fixé $\bar{m}_1 > 0$ par le maximum m_1 , sur un intervalle de temps donné $[0, T_s] \subseteq \mathbb{I}$, de la norme euclidienne $\|\underline{d}_1\| : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_+ : t \rightarrow \|\underline{d}_1(t)\|$ du déplacement horizontal vectoriel $\underline{d}_1 : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \underline{d}_1(t)$ de la tête de l'empilement ;
2. le dépassement d'un seuil fixé $\bar{m}_2 > 0$ par le maximum m_2 , sur le même intervalle de temps $[0, T_s]$, de la norme euclidienne $\|\underline{d}_2\| : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_+ : t \rightarrow \|\underline{d}_2(t)\|$ du soulèvement vertical vectoriel $\underline{d}_2 : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \underline{d}_2(t)$ de la base de l'empilement.

D'où les formulations de ces deux critères :

Critère 1 : excès de déplacement horizontal en tête d'empilement, noté C_1 :

$$C_1 : \bar{m}_1 - m_1 \leq 0 \quad ; \quad m_1 = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{d}_1(t)\| \quad (\text{V.57})$$

Critère 2 : excès de soulèvement de la base de l'empilement, noté C_2 :

$$C_2 : \bar{m}_2 - m_2 \leq 0 \quad ; \quad m_2 = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{d}_2(t)\| \quad (\text{V.58})$$

V.2.1.2 Modèles mécano-numériques

Dans le cadre de cette analyse fiabiliste, nous avons eu recours à trois des modèles mécano-numériques présentés dans le chapitre III : le modèle semi-analytique à quatre degrés de liberté S4DoF et les modèles éléments finis (basés sur l'emploi d'éléments de types poutres et plaques) SNLFE et SNLFED, le premier développé à l'aide du logiciel MATLAB, les deux autres avec le code CAST3M. Dans ces trois modèles, seules les non-linéarités dues aux possibilités de soulèvement de la base de l'empilement sont prises en compte. Le troisième tient compte en plus des défauts liés à la planéité des pieds.

Dans tout ce qui suit, le terme « modèle mécano-numérique » désignera indifféremment l'un de ces trois modèles et nous noterons symboliquement \underline{F}_1 (respectivement \underline{F}_2) le lien fonctionnel qu'il établit entre l'accélération sismique à la base de l'empilement : $\underline{\ddot{u}}_g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \underline{\ddot{u}}_g(t)$ et le déplacement horizontal $\underline{d}_1 : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \underline{d}_1(t)$ (respectivement vertical $\underline{d}_2 : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \underline{d}_2(t)$).

D'où :

$$\underline{d}_1(t) = \underline{F}_1(\underline{\ddot{u}}_g(t)), \forall t \in \mathbb{I} \quad (\text{V.59})$$

$$\underline{d}_2(t) = \underline{F}_2(\underline{\ddot{u}}_g(t)), \forall t \in \mathbb{I} \quad (\text{V.60})$$

les fonctions $\underline{F}_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\underline{F}_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ étant entièrement déterminées par la donnée du modèle mécano-numérique. Avec ces notations, les critères de défaillance V.57 et V.58 se réécrivent alors :

$$\bar{m}_1 - m_1 \leq 0 ; \quad m_1 = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{F}_1(\underline{\ddot{u}}_g(t))\| \quad (\text{V.61})$$

$$\bar{m}_2 - m_2 \leq 0 ; \quad m_2 = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{F}_2(\underline{\ddot{u}}_g(t))\| \quad (\text{V.62})$$

où nous rappelons l'inclusion : $[0, T_s] \subseteq \mathbb{I}$, avec \mathbb{I} l'intervalle de temps d'action du séisme.

V.2.1.3 Paramètres incertains et modélisation probabiliste associée

Dans le cadre de cette étude, et sans perte de généralité, seule l'accélération sismique a été supposée incertaine. Comme cette grandeur dépend du temps, la logique a alors été de la modéliser par un processus aléatoire. À cette fin, nous avons utilisé le modèle proposé par Rezaeian et Der Kiureghian [REZAEIAN et DER KIUREGHIAN, 2010] pour décrire l'évolution aléatoire de la composante scalaire de l'accélération sismique en un point O spécifié du sol et dans une direction donnée du plan horizontal en ce point. Ce modèle est un processus aléatoire $\Gamma = (\Gamma(t), t \in \mathbb{I})$ défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexé sur \mathbb{I} , à valeurs dans \mathbb{R} , obtenu par filtrage passe-haut du filtré modulé d'un bruit blanc gaussien standard et qui admet une représentation normalisée de la forme :

$$\Gamma(t) = s(t; \underline{\alpha}, \underline{Y}), \forall t \in \mathbb{I} \quad (\text{V.63})$$

avec $s(\cdot; \underline{\alpha}, \underline{y}) : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow s(t; \underline{\alpha}, \underline{y})$ une fonction non linéaire spécifiée de $t \in \mathbb{I}$ paramétrée par $(\underline{\alpha}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$, $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ un paramètre d -dimensionnel constant, \underline{y} l'élément générique de \mathbb{R}^n et \underline{Y} un vecteur aléatoire gaussien standard défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^n . Un tel processus n'est ni gaussien, ni stationnaire et ses paramètres $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sont identifiés à partir de signaux sismiques réels, après le choix d'une discrétisation appropriée de l'intervalle temporel d'action \mathbb{I} du séisme. Afin d'alléger les notations futures, la représentation V.63 sera désormais utilisée sous la forme :

$$\Gamma(t) = S(t; \underline{Y}), \forall t \in \mathbb{I} \quad (\text{V.64})$$

où nous avons posé :

$$S(t; \underline{Y}) = s(t; \underline{\alpha}, \underline{Y}), \forall t \in \mathbb{I} \quad (\text{V.65})$$

Concernant le repérage du système, rappelons que celui-ci est réalisé dans un repère orthonormé $\mathcal{R}_O = (O, \mathfrak{B})$ d'origine O et de base orthonormée $\mathfrak{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, dont les axes de coordonnées ont été notés Ox, Oy et Oz. Afin d'éviter un télescopage dans les notations, ces axes seront désormais notés $O\xi_1, O\xi_2, O\xi_3$, où $O\xi_1$, dirigé par \vec{e}_1 , est orienté positivement dans la direction Nord-Sud (NS), $O\xi_2$, dirigé par \vec{e}_2 , est orienté positivement dans la direction Ouest-Est (OE) et $O\xi_3$, dirigé par \vec{e}_3 , est orienté positivement dans la direction Bas-Haut (BH), c'est-à-dire du sol vers le ciel. Le système, dont l'enveloppe, dans sa position au repos, peut être assimilée géométriquement à un parallélépipède rectangle ABCDA'B'C'D' à base carrée ABCD, est alors repéré comme suit (au repos) dans ce repère (cf. figure V.2) : le centre de symétrie de sa base coïncide avec l'origine O du repère, les médianes (et donc aussi médiatrices ici) IJ et KL de cette dernière sont portées par les axes $O\xi_1$ et $O\xi_2$ respectivement, son axe de symétrie vertical OO' est porté par l'axe $O\xi_3$.

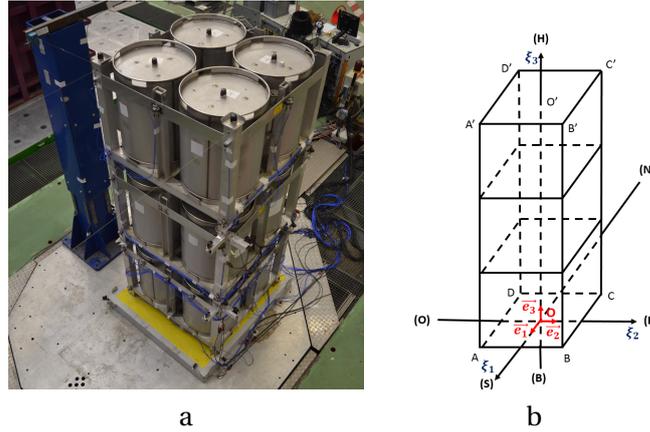


FIGURE V.2 – Photo de l'empilement (a) et repérage du système (b)

Nous référant au modèle V.64, nous avons alors modélisé l'accélération sismique vectorielle en $O : \underline{\ddot{u}}_g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow \underline{\ddot{u}}_g(t)$, par un processus $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t), t \in \mathbb{I})$ défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexé sur \mathbb{I} , à valeur dans \mathbb{R}^3 , tel que, relativement à la base $\mathfrak{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\underline{\Gamma}(t) = \sum_{j=1}^3 \Gamma_j(t) \vec{e}_j = \begin{pmatrix} \Gamma_1(t) \\ \Gamma_2(t) \\ \Gamma_3(t) \end{pmatrix} \quad (\text{V.66})$$

où les processus scalaires $\Gamma_1 = (\Gamma_1(t), t \in \mathbb{I})$, $\Gamma_2 = (\Gamma_2(t), t \in \mathbb{I})$ et $\Gamma_3 = (\Gamma_3(t), t \in \mathbb{I})$ sont des copies indépendantes du processus $\Gamma = (\Gamma(t), t \in \mathbb{I})$ défini par V.64, donc tels que :

$$\begin{cases} \Gamma_1(t) = S(t; \underline{Y}_{\sim 1}), \forall t \in \mathbb{I} \\ \Gamma_2(t) = S(t; \underline{Y}_{\sim 2}), \forall t \in \mathbb{I} \\ \Gamma_3(t) = S(t; \underline{Y}_{\sim 3}), \forall t \in \mathbb{I} \end{cases} \quad (\text{V.67})$$

avec $\underline{Y}_{\sim 1}, \underline{Y}_{\sim 2}, \underline{Y}_{\sim 3}$ des copies indépendantes du vecteur aléatoire gaussien standard n -dimensionnel \underline{Y} . Posons :

$$\underline{S}(t; \underline{Y}) = \sum_{j=1}^3 S(t; \underline{Y}_{\sim j}) \vec{e}_j = \begin{pmatrix} S(t; \underline{Y}_{\sim 1}) \\ S(t; \underline{Y}_{\sim 2}) \\ S(t; \underline{Y}_{\sim 3}) \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{I} \quad (\text{V.68})$$

où \underline{Y} désigne le vecteur aléatoire gaussien standard p -dimensionnel basé sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que :

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{\sim 1} \\ \underline{Y}_{\sim 2} \\ \underline{Y}_{\sim 3} \end{pmatrix}, p = 3n \quad (\text{V.69})$$

Dans ces conditions, la représentation $\underline{\Gamma}(t)$ du processus $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t), t \in \mathbb{I})$ s'écrit :

$$\underline{\Gamma}(t) = \underline{S}(t; \underline{Y}), \forall t \in \mathbb{I} \quad (\text{V.70})$$

Dans les applications numériques, trois situations ont été considérées pour l'accélération sismique vectorielle $\underline{\ddot{u}}_g = (\underline{\ddot{u}}_g(t), t \in \mathbb{I})$:

(S1) : pour tout t dans \mathbb{I} , $\underline{\ddot{u}}_g(t)$ est sur la droite vectorielle engendrée par \vec{e}_1 , donc exerce son action le long de la droite affine $(O\xi_1)$;

(S2) : pour tout t dans \mathbb{I} , $\underline{\ddot{u}}_g(t)$ est dans le plan vectoriel engendré par \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , donc exerce son action dans n'importe quelle direction du plan affine horizontal contenant O ;

(S3) : pour tout t dans \mathbb{I} , $\underline{\ddot{u}}_g(t)$ est dans l'espace vectoriel sur \mathbb{R} engendré par \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 , donc exerce son action dans n'importe quelle direction de l'espace affine de travail isomorphe \mathbb{R}^3 .

Le modèle probabiliste de $\underline{\ddot{u}}_g$ correspondant à la situation S3 est celui décrit ci-dessus, autrement dit, c'est le processus $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t), t \in \mathbb{I})$ tel que :

$$\underline{\Gamma}(t) = \underline{S}(t, \underline{Y}) = \sum_{j=1}^3 S(t; \underline{Y}_{\sim j}) \vec{e}_j = \begin{pmatrix} S(t; \underline{Y}_{\sim 1}) \\ S(t; \underline{Y}_{\sim 2}) \\ S(t; \underline{Y}_{\sim 3}) \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{I} \quad (\text{V.71})$$

où $\underline{Y} = (\underline{Y}_{\sim 1}^T, \underline{Y}_{\sim 2}^T, \underline{Y}_{\sim 3}^T)^T$ est gaussien standard p -dimensionnel, avec $p = 3n$. Celui correspondant à la situation S2 est le processus $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t), t \in \mathbb{I})$ tel que :

$$\underline{\Gamma}(t) = \underline{S}(t, \underline{Y}) = \sum_{j=1}^2 S(t; \underline{Y}_{\sim j}) \vec{e}_j = \begin{pmatrix} S(t; \underline{Y}_{\sim 1}) \\ S(t; \underline{Y}_{\sim 2}) \\ 0 \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{I} \quad (\text{V.72})$$

où $\underline{Y} = (\underline{Y}_{\sim 1}^T, \underline{Y}_{\sim 2}^T)^T$ est gaussien standard p -dimensionnel, avec $p = 2n$. Enfin, celui relatif à la situation S1 est le processus $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t), t \in \mathbb{I})$ tel que :

$$\underline{\Gamma}(t) = \underline{S}(t, \underline{Y}) = S(t; \underline{Y}_{\sim 1}) \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} S(t; \underline{Y}_{\sim 1}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{I} \quad (\text{V.73})$$

où $\underline{Y} = \underline{Y}_{\sim 1}$ est gaussien standard p -dimensionnel, avec $p = n$.

Dans tous les cas, le processus $\underline{\Gamma}$ est complètement déterminé par la donnée de la fonction $\mathbb{I} \ni t \rightarrow \underline{S}(t; y) \in \mathbb{R}^k, \forall y \in \mathbb{R}^p$, et du vecteur aléatoire gaussien standard p -dimensionnel \underline{Y} , avec $p = kn$, où $k = 1$ dans la situation S1, $k = 2$ dans la situation S2 et $k = 3$ dans la situation S3. Dans la situation S1, on parlera de modèle unidirectionnel car $\underline{\Gamma}(t) = S(t; \underline{Y}_{\sim 1}) \vec{e}_1$, dans la situation S2, de modèle bidirectionnel car $\underline{\Gamma}(t) = S(t; \underline{Y}_{\sim 1}) \vec{e}_1 + S(t; \underline{Y}_{\sim 2}) \vec{e}_2$ et dans la situation S3, de modèle tridirectionnel car $\underline{\Gamma}(t) = S(t; \underline{Y}_{\sim 1}) \vec{e}_1 + S(t; \underline{Y}_{\sim 2}) \vec{e}_2 + S(t; \underline{Y}_{\sim 3}) \vec{e}_3$. On notera qu'une telle modélisation est une représentation grossière de la réalité physique dans les cas bi et tridirectionnels. En effet, dans ces deux cas les composantes du processus modèle $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t), t \in \mathbb{I})$ sont supposés indépendantes (en fait mutuellement indépendantes) et isonomes, c'est-à-dire de mêmes lois. Or, l'hypothèse d'indépendance implique la non-corrélation des composantes de $\underline{\Gamma}$ et il est fort probable qu'il n'en soit pas ainsi dans la réalité. Tout comme il est très probable que l'hypothèse d'isonomie ne soit pas en accord avec la réalité du phénomène. Au mieux peut-on admettre que les lois des composantes de $\underline{\Gamma}$ soient toutes du même type, mais supposer en outre que ces lois aient également toutes les mêmes paramètres, et donc soient toutes identiques, paraît très discutable. Dans les cas bi et tridirectionnels, le recours aux copules permettrait d'introduire de façon réaliste la structure de dépendance manquante entre les composantes de $\underline{\Gamma}$. Pour résoudre le problème d'isonomie, une solution serait, par exemple dans le cas tridirectionnel, de ne pas considérer $\underline{\Gamma}(t)$ sous la forme V.71 mais de l'écrire plutôt : $\underline{\Gamma}(t) = \underline{S}(t, \underline{Y}) = \sum_{k=1}^3 S_k(t; \underline{Y}_{\sim k}) \vec{e}_k$, avec des fonctions $S_k(\cdot; \underline{Y}_{\sim k}), 1 \leq k \leq 3$, du même type mais se distinguant par les valeurs de leurs paramètres vectoriels $\alpha_{\sim k}$ (d'après V.65, ces fonctions sont en effet de la forme : $S_k(t; \underline{Y}_{\sim k}) = s_k(t; \alpha_{\sim k}, \underline{Y}_{\sim k}), 1 \leq k \leq 3$), lesquelles pourraient être calculées par calage du modèle sur des signaux sismiques réels.

Conceptuellement, simuler L réalisations (i.e. trajectoires) $\underline{Y}^{(j)} = (\underline{Y}^{(j)}(t), t \in \mathbb{I}), 1 \leq j \leq L$, du processus modèle $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t), t \in \mathbb{I})$, c'est :

(a) dans le cas tridirectionnel (i.e. trois composantes non nulles pour $\underline{\Gamma}$) : (a₁) simuler L réalisations indépendantes $y^{(j)}, 1 \leq j \leq L, y^{(j)}, 1 \leq j \leq L, y^{(j)}, 1 \leq j \leq L$, de trois copies indépendantes $\underline{Y}_{\sim 1}, \underline{Y}_{\sim 2}, \underline{Y}_{\sim 3}$ d'un vecteur aléatoire gaussien standard n -dimensionnel \underline{Y} , (a₂) en déduire les L vecteurs $p = 3n$ -dimensionnels $\underline{y}^{(j)} = ((y^{(j)})^T, (y^{(j)})^T, (y^{(j)})^T)^T, 1 \leq j \leq L$ (ces deux premières étapes revenant ainsi

à simuler L réalisations indépendantes $\underline{y}^{(j)}$, $1 \leq j \leq L$, d'un vecteur aléatoire gaussien standard $p = 3n$ -dimensionnel \underline{Y} , $(a_3) \forall j \in \{1, \dots, L\}$, calculer $\underline{\Upsilon}^{(j)} = (\underline{\Upsilon}^{(j)}(t) = S(t; \underline{y}^{(j)}) = \sum_{k=1}^3 S(t; y^{(j)}) \vec{e}_k, t \in \mathbb{I})$;

(b) dans le cas bidirectionnel (i.e. 2 composantes non nulles pour $\underline{\Gamma}$) : (b_1) simuler L réalisations indépendantes $\underline{y}^{(j)}$, $1 \leq j \leq L$, $\underline{y}^{(j)}$, $1 \leq j \leq L$, de deux copies indépendantes $\underline{Y}_{\sim 1}, \underline{Y}_{\sim 2}$ d'un vecteur aléatoire gaussien standard n -dimensionnel \underline{Y} , (b_2) en déduire les L vecteurs $p = 2n$ -dimensionnels $\underline{y}^{(j)} = ((\underline{y}^{(j)})^T, (\underline{y}^{(j)})^T)^T$, $1 \leq j \leq L$ (ces deux premières étapes revenant ainsi à simuler L réalisations indépendantes $\underline{y}^{(j)}$, $1 \leq j \leq L$, d'un vecteur aléatoire gaussien standard $p = 2n$ -dimensionnel \underline{Y}), $(b_3) \forall j \in \{1, \dots, L\}$, calculer $\underline{\Upsilon}^{(j)} = (\underline{\Upsilon}^{(j)}(t) = S(t; \underline{y}^{(j)}) = \sum_{k=1}^2 S(t; y^{(j)}) \vec{e}_k, t \in \mathbb{I})$;

(c) dans le cas unidirectionnel (i.e. une seule composante non nulle pour $\underline{\Gamma}$) : (c_1) simuler L réalisations indépendantes $\underline{y}^{(j)}$, $1 \leq j \leq L$, d'un vecteur aléatoire gaussien standard $p = n$ -dimensionnel $\underline{Y}_{\sim 1}$, (c_2) poser $\underline{Y} = \underline{Y}_{\sim 1}$ et en déduire les L vecteurs $p = n$ -dimensionnels $\underline{y}^{(j)} = \underline{y}^{(j)}$, $1 \leq j \leq L$, qui sont L réalisations indépendantes du vecteur aléatoire gaussien standard $p = n$ -dimensionnel \underline{Y} isonome à $\underline{Y}_{\sim 1}$, $(c_3) \forall j \in \{1, \dots, L\}$, calculer $\underline{\Upsilon}^{(j)} = (\underline{\Upsilon}^{(j)}(t) = S(t; \underline{y}^{(j)}) = S(t; y^{(j)}) \vec{e}_1, t \in \mathbb{I})$.

Dans la pratique, simuler L réalisations $\underline{\Upsilon}^{(j)} = (\underline{\Upsilon}^{(j)}(t), t \in \mathbb{I})$ du processus modèle $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t), t \in \mathbb{I})$ c'est :

(a) dans le cas tridirectionnel, simuler $3L$ réalisations indépendantes de l'une quelconque des trois composantes scalaires de $\underline{\Gamma}$ (par hypothèse, elles sont toutes les trois égales en loi et indépendantes) puis, à partir de ces $3L$ réalisations, former L triplets, chacun constitué de trois d'entre elles (choisies au hasard sans remise) : les L triplets ainsi obtenus constituent les L réalisations indépendantes cherchées de $\underline{\Gamma}$;

(b) dans le cas bidirectionnel, simuler $2L$ réalisations indépendantes de l'une quelconque des deux composantes scalaires non nulles de $\underline{\Gamma}$, puis, à partir de ces $2L$ réalisations et de l'application nulle de \mathbb{I} dans \mathbb{R} , notée O , former L triplets, chacun constitué de deux de ces réalisations (choisies au hasard sans remise) et de O : les L triplets ainsi construits constituent les L réalisations indépendantes désirées de $\underline{\Gamma}$;

(c) dans le cas unidirectionnel, simuler L réalisations indépendantes de l'unique composante scalaire non nulle de $\underline{\Gamma}$ et associer à chacune de ces réalisations le couple (O, O) , avec O l'application nulle de \mathbb{I} dans \mathbb{R} : les L triplets ainsi obtenus constituent les L réalisations indépendantes cherchées de $\underline{\Gamma}$.

Dans ce travail de thèse, nous n'avons pas effectué nous-même la simulation du processus modèle $\underline{\Gamma}$. Nous avons en effet utilisé la base de données établie dans le cadre d'une étude postdoctorale réalisée au CEA Saclay et consignée dans un article [SAINCT et collab., 2020]. Cette base de données est composée de 10^5 signaux sismiques synthétiques simulés à l'aide du modèles de Rezaeian et Der Kiureghian calé sur le scénario sismique utilisé précédemment pour lequel la magnitude est comprise entre 5,5 et 6,5 et la distance entre 0 et 20 km. Ces signaux synthétiques représentent des accélérations sismiques en O dans la direction NS. Ils sont donc tous dirigés par l'unitaire \vec{e}_1 de la base orthonormée $\mathfrak{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ du repère de référence \mathcal{R}_O (cf. figure V.2) et donc tous portés par l'axe $O\xi_1$ de ce repère. Ce sont par conséquent des réalisations simulées du processus modèle unidirectionnel $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t) = S(t; \underline{Y}_{\sim 1}) \vec{e}_1, t \in \mathbb{I})$. En regroupant ces signaux par deux puis par trois comme indiqué plus haut, nous avons ensuite pu obtenir des réalisations simulées des processus modèles bi et tridirectionnels $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t) = S(t; \underline{Y}_{\sim 1}) \vec{e}_1 + S(t; \underline{Y}_{\sim 2}) \vec{e}_2, t \in \mathbb{I})$ et $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t) = S(t; \underline{Y}_{\sim 1}) \vec{e}_1 + S(t; \underline{Y}_{\sim 2}) \vec{e}_2 + S(t; \underline{Y}_{\sim 3}) \vec{e}_3, t \in \mathbb{I})$. Toutefois, pour des raisons de limitation de coûts de calcul (car ces signaux sont les entrées de modèles mécano-numériques chronophages) nous n'avons pas utilisé la totalité des 10^5 signaux de la base de données. Pour le processus modèle unidirectionnel, nous en avons utilisé 10^4 . Pour le processus modèle tridirectionnel, nous en avons extrait 3×10^4 qui, par le biais du regroupement en triplets, ont fourni 10^4 réalisations indépen-

dantes de ce processus, lesquelles ont ensuite été ramenées à 2 312, après qu'on leur eût imposé de satisfaire à la condition suivante : seules sont éligibles au statut de réalisations du processus modèle tridirectionnel, celles pour lesquelles les trois composantes possèdent des indicateurs sismiques proches, les indicateurs sismiques en question étant le PGA (*Peak Ground Acceleration*), la TSM (*Time Strong Motion*) et la fréquence centrale FC (i.e. la fréquence correspondant au maximum du SRO). En outre, afin d'être au plus proche de la réalité physique observée, les intensités des réalisations de la composante verticale BH de ce processus modèle ont été diminuées de 1/3 de leurs valeurs, autrement dit pondérées par un facteur de 2/3. Pour le processus modèle bi-directionnel, les même 2 312 réalisations que celles du processus modèle tridirectionnel ont été utilisées, mais en annulant celles de la composante verticale BH (dirigée par \vec{e}_3). Rappelons qu'en contexte Monte-Carlo, pour pouvoir estimer une probabilité de l'ordre de 10^{-n} avec une précision de $10^{-\epsilon}$ (avec $n, \epsilon \in \mathbb{N}^*$) à partir d'un échantillon de réalisations simulées de taille L, il faut que $L = 10^{n+2\epsilon}$. Ainsi, avec un échantillon de taille $L = 10^4$, on peut estimer des probabilités de l'ordre de 10^{-2} avec une précision de 10^{-1} , et avec un échantillon de taille 2 312, on peut estimer, avec la même précision, des probabilités de l'ordre de $4,3 \times 10^{-2}$. À titre d'illustration, la figure V.3 montre, dans sa partie gauche, les graphes des trois composantes (suivant $O\xi_1$, $O\xi_2$ et $O\xi_3$) d'une réalisation simulée du processus modèle tridirectionnel et, dans sa partie droite, le graphe du SRO à 2% d'amortissement associé à chaque composante et exprimé en pseudo-accélération. Le tableau V.1 donne quant à lui la valeur du triplet (PGA, TSM, FC) relatif à chaque composante simulée, ainsi que, pour chacun de ces trois indicateurs sismiques, l'erreur relative maximale entre les valeurs qu'il prend pour les trois composantes.

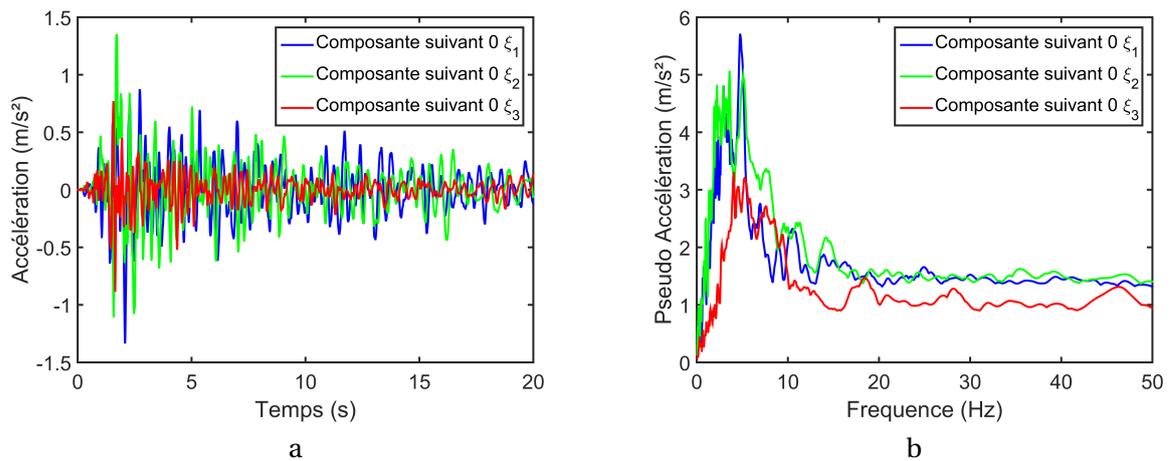


FIGURE V.3 – Graphes des composantes suivant $O\xi_1$, $O\xi_2$ et $O\xi_3$ d'une réalisation simulée du processus modèle tridirectionnel (a) et SRO à 2 % d'amortissement associés à ces composantes simulées (b)

Indicateurs	Composante suivant $O\xi_1$	Composante suivant $O\xi_2$	Composante suivant $O\xi_3$	Erreur relative maximale
PGA	1,3 (m/s^2)	1,4 (m/s^2)	1,3 (m/s^2)	1,5 %
TSM	14,6 (s)	14,6 (s)	15,5 (s)	6,1 %
FC	5 (Hz)	5 (Hz)	4 (Hz)	23,3 %

TABEAU V.1 – Valeur du triplet (PGA, TMS, FC) relatif à chaque composante d'une réalisation simulée du processus modèle tridirectionnel et, pour chacun de ces trois indicateurs sismiques, erreur relative maximale entre les valeurs qu'il prend pour les trois composantes

V.2.2 Formulation du problème

Deux critères de défaillance ayant été retenus pour cette étude, il s'agit, pour chacun d'eux, de formuler l'événement de défaillance, la fonction d'état limite et la probabilité de défaillance qui en résultent.

V.2.2.1 Événements de défaillance

Compte tenu de la modélisation probabiliste V.70 de l'accélération sismique $\underline{\ddot{u}}_g = (\underline{\ddot{u}}_g(t), t \in \mathbb{I})$, les critères de défaillance V.61 et V.62 retenus pour cette étude se réécrivent :

$$C_1 : \bar{m}_1 - M_1 \leq 0 \quad (\text{V.74})$$

$$C_2 : \bar{m}_2 - M_2 \leq 0 \quad (\text{V.75})$$

où M_1 et M_2 sont deux variables aléatoires définies sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}_+ , telles que :

$$M_1 = g_1(\underline{Y}) = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{E}_1(\underline{\Gamma}(t))\| = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{E}_1(\underline{S}(t; \underline{Y}))\| \quad (\text{V.76})$$

$$M_2 = g_2(\underline{Y}) = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{E}_2(\underline{\Gamma}(t))\| = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{E}_2(\underline{S}(t; \underline{Y}))\| \quad (\text{V.77})$$

avec $g_1 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+ : \underline{y} \rightarrow g_1(\underline{y})$ et $g_2 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+ : \underline{y} \rightarrow g_2(\underline{y})$ des applications mesurables de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}_+ , telles que :

$$g_1(\underline{y}) = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{E}_1(\underline{S}(t; \underline{y}))\|, \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^p \quad (\text{V.78})$$

$$g_2(\underline{y}) = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{E}_2(\underline{S}(t; \underline{y}))\|, \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^p \quad (\text{V.79})$$

\underline{Y} est un vecteur gaussien standard p -dimensionnel défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et p un entier positif égal à $3n$, $2n$ ou n ($n \in \mathbb{N}^*$) selon que le processus modèle Γ admet la représentation V.71, V.72 ou V.73. Les événements de défaillance associés à ces critères s'écrivent alors :

$$C_1 : E_{f,1} = \{\bar{m}_1 - M_1 \leq 0\} = \{\bar{m}_1 - g_1(\underline{Y}) \leq 0\} \quad (\text{V.80})$$

$$C_2 : E_{f,2} = \{\bar{m}_2 - M_2 \leq 0\} = \{\bar{m}_2 - g_2(\underline{Y}) \leq 0\} \quad (\text{V.81})$$

soit, en explicitant :

$$C_1 : E_{f,1} = \{a \in \mathcal{A} : \bar{m}_1 - M_1(a) \leq 0\} = \{a \in \mathcal{A} : \bar{m}_1 - g_1(\underline{Y}(a)) \leq 0\} \quad (\text{V.82})$$

$$C_2 : E_{f,2} = \{a \in \mathcal{A} : \bar{m}_2 - M_2(a) \leq 0\} = \{a \in \mathcal{A} : \bar{m}_2 - g_2(\underline{Y}(a)) \leq 0\} \quad (\text{V.83})$$

V.2.2.2 Fonctions d'état limite

Les événements de défaillance $E_{f,1}$ et $E_{f,2}$ se réécrivent :

$$E_{f,1} = \{G_1(\underline{Y}) \leq 0\} = \{a \in \mathcal{A} : G_1(\underline{Y}(a)) \leq 0\} \quad (\text{V.84})$$

$$E_{f,2} = \{G_2(\underline{Y}) \leq 0\} = \{a \in \mathcal{A} : G_2(\underline{Y}(a)) \leq 0\} \quad (\text{V.85})$$

avec $G_1 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} : \underline{y} \rightarrow G_1(\underline{y})$ et $G_2 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} : \underline{y} \rightarrow G_2(\underline{y})$ des applications de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} telles que :

$$G_1(\underline{y}) = \bar{m}_1 - g_1(\underline{y}), \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^p \quad (\text{V.86})$$

$$G_2(\underline{y}) = \bar{m}_2 - g_2(\underline{y}), \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^p \quad (\text{V.87})$$

Ce sont les fonctions d'état limite associées aux critères de défaillance 1 et 2, respectivement.

V.2.2.3 Probabilités de défaillance

À chacun des deux critères de défaillance considérés est associé une probabilité de défaillance. On notera $P_{f,1}$ celle associée au critère C_1 et $P_{f,2}$ celle relative au critère C_2 . Elles sont données par :

$$P_{f,1} = \mathbb{P}(E_{f,1}) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{1}_{D_{f,1}}(\underline{y}) \phi_p(\underline{y}) d\underline{y} \quad (\text{V.88})$$

$$P_{f,2} = \mathbb{P}(E_{f,2}) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{1}_{D_{f,2}}(\underline{y}) \phi_p(\underline{y}) d\underline{y} \quad (\text{V.89})$$

avec ϕ_p la densité de la loi gaussienne standard sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$ et $D_{f,1}$, $D_{f,2}$ les domaines de défaillance associés, respectivement, aux événements de défaillance $E_{f,1}$ et $E_{f,2}$, ces deux domaines s'écrivant :

$$D_{f,1} = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^p : G_1(\underline{y}) \leq 0\} \quad (\text{V.90})$$

$$D_{f,2} = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^p : G_2(\underline{y}) \leq 0\} \quad (\text{V.91})$$

Pour les deux critères de défaillance considérés, la quantification fiabiliste de l'empilement a été réalisée via le calcul, d'une part de la probabilité de défaillance, d'autre part des indices de Cornell et de Hasofer-Lind.

V.2.3 Quantification fiabiliste

V.2.3.1 Via le calcul de la probabilité de défaillance

Il s'agit donc ici de calculer les probabilités $P_{f,1}$ et $P_{f,2}$ données par V.88 et V.89, que l'on peut encore écrire :

$$P_{f,1} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{E_{f,1}}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{D_{f,1}}(\underline{Y})] \quad (\text{V.92})$$

$$P_{f,2} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{E_{f,2}}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{D_{f,2}}(\underline{Y})] \quad (\text{V.93})$$

avec \underline{Y} gaussien standard p -dimensionnel, $E_{f,1}$, $E_{f,2}$ donnés par V.84, V.85 et $D_{f,1}$, $D_{f,2}$ par V.90, V.91. À cette fin, nous avons utilisé la méthode de Monte-Carlo directe. Nous référant au paragraphe V.1.2.3, des L -estimées Monte-Carlo $\bar{P}_{f,1}^{(L)}$, $\bar{P}_{f,2}^{(L)}$ de ces probabilité s'obtiennent par :

$$\bar{P}_{f,1}^{(L)} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \mathbb{1}_{D_{f,1}}(\underline{y}^{(j)}) = \frac{\#\{j \in \{1, \dots, L\} : \underline{y}^{(j)} \in D_{f,1}\}}{L} \quad (\text{V.94})$$

$$\bar{P}_{f,2}^{(L)} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \mathbb{1}_{D_{f,2}}(\underline{y}^{(j)}) = \frac{\#\{j \in \{1, \dots, L\} : \underline{y}^{(j)} \in D_{f,2}\}}{L} \quad (\text{V.95})$$

où les $\underline{y}^{(j)}$, $1 \leq j \leq L$, sont L réalisations indépendantes du vecteur aléatoire gaussien standard p -dimensionnel \underline{Y} .

À chaque estimée $\bar{P}_{f,k}^{(L)}$ ($k = 1, 2$), est ensuite associé un intervalle de confiance $\bar{\mathbb{I}}_{f,k;1-\alpha_k}^{(L)}$ à un seuil de confiance $1 - \alpha_k$ spécifié, construit en s'appuyant sur le théorème central limite (cf. paragraphe V.1.2.3, formule V.26). Les intervalles obtenus s'écrivent, respectivement :

$$\bar{\mathbb{I}}_{f,1;1-\alpha_1}^{(L)} = \left[\bar{P}_{f,1}^{(L)} - \eta_{1-\frac{\alpha_1}{2}} \sqrt{\frac{\bar{P}_{f,1}^{(L)} (1 - \bar{P}_{f,1}^{(L)})}{L}}, \bar{P}_{f,1}^{(L)} + \eta_{1-\frac{\alpha_1}{2}} \sqrt{\frac{\bar{P}_{f,1}^{(L)} (1 - \bar{P}_{f,1}^{(L)})}{L}} \right] \quad (\text{V.96})$$

$$\bar{\eta}_{f,2;1-\alpha_2}^{(L)} = \left[\bar{P}_{f,2}^{(L)} - \eta_{1-\frac{\alpha_2}{2}} \sqrt{\frac{\bar{P}_{f,2}^{(L)}(1-\bar{P}_{f,2}^{(L)})}{L}}, \bar{P}_{f,2}^{(L)} + \eta_{1-\frac{\alpha_2}{2}} \sqrt{\frac{\bar{P}_{f,2}^{(L)}(1-\bar{P}_{f,2}^{(L)})}{L}} \right] \quad (\text{V.97})$$

où $\eta_{1-\frac{\alpha_1}{2}} = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha_1}{2})$ et $\eta_{1-\frac{\alpha_2}{2}} = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha_2}{2})$ sont respectivement les quantiles d'ordres $1 - \frac{\alpha_1}{2}$ et $1 - \frac{\alpha_2}{2}$ de la loi gaussienne standard sur $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1)$, de fonction de répartition Φ .

V.2.3.2 Via le calcul de l'indice de Cornell

Soient Z_1 et Z_2 les variables aléatoires définies sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R} , telles que :

$$Z_1 = G_1(\underline{Y}) \quad (\text{V.98})$$

$$Z_2 = G_2(\underline{Y}) \quad (\text{V.99})$$

avec G_1 et G_2 les fonctions d'état limite associées aux critères de défaillance C_1 et C_2 , respectivement, et \underline{Y} le vecteur aléatoire de base gaussien standard p -dimensionnel du problème. Compte tenu de V.76, V.78, V.86, d'une part, et V.77, V.79, V.87, d'autre part, les relations V.98 et V.99 se réécrivent :

$$Z_1 = \bar{m}_1 - M_1 \quad (\text{V.100})$$

$$Z_2 = \bar{m}_2 - M_2 \quad (\text{V.101})$$

avec M_1 et M_2 des variables aléatoires définies sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}_+ , telles que :

$$M_1 = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{E}_1(\underline{S}(t; \underline{Y}))\| \quad (\text{V.102})$$

$$M_2 = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{E}_2(\underline{S}(t; \underline{Y}))\| \quad (\text{V.103})$$

Soient $\beta_{C,1}$ et $\beta_{C,2}$ les indices de Cornell associés respectivement aux critères de défaillance C_1 et C_2 , et donc aux fonctions d'état limite G_1 et G_2 . Par définition, ces indices sont donnés par :

$$\beta_{C,1} = \frac{m_{Z_1}}{\sigma_{Z_1}} \quad , \quad \beta_{C,2} = \frac{m_{Z_2}}{\sigma_{Z_2}} \quad (\text{V.104})$$

avec m_{Z_1} (respectivement m_{Z_2}) et $\sigma_{Z_1}^2$ (respectivement $\sigma_{Z_2}^2$) la moyenne et la variance de Z_1 (respectivement Z_2) :

$$m_{Z_1} = \mathbb{E}[Z_1] \quad , \quad m_{Z_2} = \mathbb{E}[Z_2] \quad (\text{V.105})$$

$$\sigma_{Z_1}^2 = \mathbb{V}[Z_1] = \mathbb{E}[(Z_1 - m_{Z_1})^2] \quad , \quad \sigma_{Z_2}^2 = \mathbb{V}[Z_2] = \mathbb{E}[(Z_2 - m_{Z_2})^2] \quad (\text{V.106})$$

Compte tenu de V.100 et V.101, on a :

$$m_{Z_1} = \bar{m}_1 - m_{M_1} \quad , \quad \sigma_{Z_1}^2 = \sigma_{M_1}^2 \quad (\text{V.107})$$

$$m_{Z_2} = \bar{m}_2 - m_{M_2} \quad , \quad \sigma_{Z_2}^2 = \sigma_{M_2}^2 \quad (\text{V.108})$$

avec $m_{M_1} = \mathbb{E}[M_1]$ (respectivement $m_{M_2} = \mathbb{E}[M_2]$) et $\sigma_{M_1}^2 = \mathbb{V}[M_1] = \mathbb{E}[(M_1 - m_{M_1})^2]$ (respectivement $\sigma_{M_2}^2 = \mathbb{V}[M_2] = \mathbb{E}[(M_2 - m_{M_2})^2]$) la moyenne et la variance de M_1 (respectivement M_2).

On a donc, d'après V.104 :

$$\beta_{C,1} = \frac{\bar{m}_1 - m_{M_1}}{\sigma_{M_1}} \quad , \quad \beta_{C,2} = \frac{\bar{m}_2 - m_{M_2}}{\sigma_{M_2}} \quad (\text{V.109})$$

où, par définition :

$$m_{M_1} = \int_{\mathbb{R}^p} g_1(\underline{y}) \phi_p(\underline{y}) d\underline{y} \quad , \quad \sigma_{M_1}^2 = \int_{\mathbb{R}^p} (g_1(\underline{y}) - m_{M_1})^2 \phi_p(\underline{y}) d\underline{y} \quad (\text{V.110})$$

$$m_{M_2} = \int_{\mathbb{R}^p} g_2(\underline{y}) \phi_p(\underline{y}) d\underline{y} \quad , \quad \sigma_{M_2}^2 = \int_{\mathbb{R}^p} (g_2(\underline{y}) - m_{M_2})^2 \phi_p(\underline{y}) d\underline{y} \quad (\text{V.111})$$

avec $g_1 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+ : \underline{y} \rightarrow g_1(\underline{y})$ et $g_2 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+ : \underline{y} \rightarrow g_2(\underline{y})$ les applications mesurables données par V.78, V.79, et $\phi_p : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+ : \underline{y} \rightarrow \phi_p(\underline{y})$ la densité de la loi gaussienne standard sur $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}_p)$, donnée par V.42. Or, pour le calcul de ces intégrales, comme : (1) les applications g_1 et g_2 sont non linéaires, (2) l'évaluation de ces applications en tout point \underline{y} de \mathbb{R}^p requiert l'activation du modèle mécano-numérique et (3) dans notre cas $p \gg 3$, il était exclu d'utiliser une méthode de quadrature numérique déterministe. Nous nous sommes donc naturellement tournés vers l'emploi d'une procédure de Monte-Carlo et avons finalement opté pour la méthode de Monte-Carlo directe. Avec cette méthode, les grandeurs m_{M_1} , $\sigma_{M_1}^2$, m_{M_2} et $\sigma_{M_2}^2$ sont estimées par :

$$\bar{m}_{M_1}^{(L)} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L g_1(\underline{y}^{(j)}) \quad , \quad (\bar{\sigma}_{M_1}^{(L)})^2 = \frac{1}{L-1} \sum_{j=1}^L (g_1(\underline{y}^{(j)}) - \bar{m}_{M_1}^{(L)})^2 \quad (\text{V.112})$$

$$\bar{m}_{M_2}^{(L)} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L g_2(\underline{y}^{(j)}) \quad , \quad (\bar{\sigma}_{M_2}^{(L)})^2 = \frac{1}{L-1} \sum_{j=1}^L (g_2(\underline{y}^{(j)}) - \bar{m}_{M_2}^{(L)})^2 \quad (\text{V.113})$$

où les $\underline{y}^{(j)}$, $1 \leq j \leq L$, sont des réalisations indépendantes simulées du vecteur aléatoire gaussien standard p -dimensionnel \underline{Y} , leur nombre L étant dans notre cas suffisamment grand pour assurer aux L -estimées V.112 et V.113 une précision acceptable. Introduisant ces estimées dans V.109, on obtient les L -estimées correspondantes $\bar{\beta}_{C,1}^{(L)}$ et $\bar{\beta}_{C,2}^{(L)}$ des indices $\beta_{C,1}$ et $\beta_{C,2}$:

$$\bar{\beta}_{C,1}^{(L)} = \frac{\bar{m}_1 - \bar{m}_{M_1}^{(L)}}{\bar{\sigma}_{M_1}^{(L)}} \quad , \quad \bar{\beta}_{C,2}^{(L)} = \frac{\bar{m}_2 - \bar{m}_{M_2}^{(L)}}{\bar{\sigma}_{M_2}^{(L)}} \quad (\text{V.114})$$

Ces estimées sont les approximations cherchées de $\beta_{C,1}$ et $\beta_{C,2}$ et elles sont, bien évidemment, d'autant meilleurs que L est grand.

V.2.3.3 Via le calcul de l'indice de Hasofer-Lind

Nous sommes ici dans le cas très particulier où le vecteur aléatoire de base \underline{Y} est gaussien standard p -dimensionnel. Par conséquent (cf. paragraphe V.1.2.4, section « Indice de Hasofer-Lind »), $\Omega_{\underline{Y}} = \mathbb{R}^p$ et le difféomorphisme $\tau : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p : \underline{x} \rightarrow \tau(\underline{x})$ permettant de transformer \underline{Y} est un vecteur aléatoire gaussien standard p -dimensionnel \underline{X} via l'égalité en loi $\underline{Y} = \tau(\underline{X})$ est donc tout simplement ici l'application identité $\tau : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p : \underline{x} \rightarrow \tau(\underline{x}) = \underline{x}$. D'où l'égalité en loi $\underline{Y} = \underline{X}$. On en déduit également, pour chacun des deux critères de défaillance retenus, la coïncidence entre le domaine de défaillance et son image par τ^{-1} . Rappelons, en effet, que pour le critère de défaillance k ($k = 1, 2$), défini par $\bar{m}_k - M_k \leq 0$ (cf. V.74 et V.75), le domaine de défaillance $D_{f,k}$ et son image $\Delta_{f,k}$ par τ^{-1} s'écrivent :

$$D_{f,k} = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^p : G_k(\underline{y}) \leq 0\} \quad (\text{V.115})$$

$$\Delta_{f,k} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^p : H_k(\underline{x}) \leq 0\} \quad (\text{V.116})$$

avec :

$$G_k(\underline{y}) = \bar{m}_k - g_k(\underline{y}) = \bar{m}_k - \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{F}_k(\underline{S}(t; \underline{y}))\|, \quad \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^p \quad (\text{V.117})$$

$$H_k(\underline{x}) = G_k(\tau(\underline{x})), \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^p \quad (\text{V.118})$$

Or, comme $\tau(\underline{x}) = \underline{x}$, V.118 se réécrit : $H_k(\underline{x}) = G_k(\underline{x})$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^p$. D'où $H_k = G_k$ et par suite, d'après V.115 et V.116 :

$$\Delta_{f,k} = D_{f,k} \quad (\text{V.119})$$

Compte tenu de la coïncidence de ces deux domaines, l'indice de Hasofer-Lind $\beta_{\text{HL},k}$ est alors défini par :

$$\beta_{\text{HL},k} = d(\text{O}, D_{f,k}) \quad (\text{V.120})$$

On est ainsi conduit à la résolution des deux problèmes suivants d'optimisation non linéaire sous contrainte :

$$P_k : \text{Trouver } \beta_{\text{HL},k} \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \beta_{\text{HL},k} = \min_{\underline{y} \in D_{f,k}} \|\underline{y}\|, k = 1, 2 \quad (\text{V.121})$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^p . En désignant par $\partial D_{f,k}$ le bord de $D_{f,k}$, tel que $\partial D_{f,k} = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^p : G_k(\underline{y}) = 0\}$, ces problèmes peuvent se reformuler comme suit :

$$P_k : \text{Trouver } \beta_{\text{HL},k} \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \beta_{\text{HL},k} = \min_{\underline{y} \in \partial D_{f,k}} \|\underline{y}\|, k = 1, 2 \quad (\text{V.122})$$

où la contrainte $\underline{y} \in \partial D_{f,k}$ équivaut à la contrainte d'égalité $G_k(\underline{y}) = 0$. Notons que le calcul de $\beta_{\text{HL},k}$, pour $k \in \{1, 2\}$, peut être abordé d'une autre façon. En effet, supposons connu le loi de la variable aléatoire M_k telle que (cf. V.76, V.77) :

$$M_k = g_k(\underline{Y}) = \sup_{t \in [0, T_s]} \|F_k(\underline{S}(t; \underline{Y}))\| \quad (\text{V.123})$$

et notons Ω_{M_k} son support et F_{M_k} sa fonction de répartition. Notons en outre $\underline{D}_{f,k}$ le domaine de défaillance associé au critère de défaillance $\bar{m}_k - M_k \leq 0$ (cf. V.74 et V.75), donc le sous-ensemble de \mathbb{R}_+ tel que :

$$\underline{D}_{f,k} = \{m \in \mathbb{R}_+ : \underline{G}_k(m) \leq 0\} \quad (\text{V.124})$$

avec :

$$\underline{G}_k(m) = \bar{m}_k - m, \forall m \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{V.125})$$

Soit $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \Omega_{M_k} : x \rightarrow \tau(x)$ le difféomorphisme tel que, $\tau(x) = F_{M_k}^{-1}(\Phi(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donc tel que $\tau = F_{M_k}^{-1} \circ \Phi$, où Φ désigne comme habituellement la fonction de répartition de la loi gaussienne standard sur $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1)$. Alors, d'après un résultat très connu de la théorie des probabilités, si X est une variable aléatoire gaussienne standard scalaire (i.e. à valeurs dans \mathbb{R}), on a l'égalité en loi $M_k = \tau(X) = (F_{M_k}^{-1} \circ \Phi)(X)$. De plus, l'image par τ^{-1} du domaine de défaillance s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_{f,k} &= \{x \in \mathbb{R} : \underline{G}_k(\tau(x)) \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \bar{m}_k - \tau(x) \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \bar{m}_k - (F_{M_k}^{-1} \circ \Phi)(x) \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq (\Phi^{-1} \circ F_{M_k})(\bar{m}_k)\} \end{aligned}$$

et donc :

$$\underline{\Delta}_{f,k} = [\Phi^{-1}(F_{M_k}(\bar{m}_k)), +\infty[\quad (\text{V.126})$$

Il en résulte que l'indice de Hasofer-Lind $\beta_{\text{HL},k}$ est donné ici par :

$$\beta_{\text{HL},k} = d(0, \underline{\Delta}_{f,k}) = \begin{cases} \Phi^{-1}(F_{M_k}(\bar{m}_k)) & \text{si } \Phi^{-1}(F_{M_k}(\bar{m}_k)) > 0 \\ 0 & \text{si } \Phi^{-1}(F_{M_k}(\bar{m}_k)) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{V.127})$$

Notons que la probabilité de défaillance associée au critère de défaillance $k : \bar{m}_k - M_k \leq 0$, s'écrit :

$$P_{f,k} = \mathbb{P}(M_k \in \underline{D}_{f,k}) = \mathbb{P}(M_k \geq \bar{m}_k)$$

et donc, par définition d'une fonction de répartition :

$$P_{f,k} = 1 - F_{M_k}(\bar{m}_k) \quad (\text{V.128})$$

Il en résulte que V.127 peut aussi s'écrire :

$$\beta_{\text{HL},k} = \Phi^{-1}(1 - P_{f,k}) \quad (\text{V.129})$$

Bien entendu, les résultats V.127 et V.128 n'ont d'intérêt que si l'on connaît la fonction de répartition F_{M_k} ou la probabilité $P_{f,k}$. Or, pour le problème traité ici, nous ne pouvons pas accéder à ces grandeurs par un calcul exact et avons été contraints de les estimer statistiquement. Pour la probabilité $P_{f,k}$, nous avons utilisé la méthode de Monte-Carlo décrite au paragraphe V.2.3.1. Pour la fonction de répartition F_{M_k} , nous avons eu recours à une méthode d'estimation non paramétrique à noyau gaussien qui nous a fourni une estimée de la densité de probabilité de M_k , à partir de laquelle nous avons déduit l'estimée cherchée de F_{M_k} . Cette méthode d'estimation requiert la connaissance d'un L échantillon $\{m_k^{(1)}, \dots, m_k^{(L)}\}$ de réalisations indépendantes de la variable aléatoire M_k . Celui-ci a été obtenu en simulant L réalisation indépendantes $y^{(j)}$, $1 \leq j \leq L$, du vecteur aléatoire gaussien standard p -dimensionnel \underline{Y} et en calculant, pour tout j dans $\{1, \dots, L\}$ (en vertu de V.123) :

$$m_k^{(j)} = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{E}_k(\underline{S}(t; \underline{y}^{(j)}))\| \quad (\text{V.130})$$

Sachant que, par construction, M_k est une variable aléatoire positive (i.e. son support Ω_{M_k} est \mathbb{R}_+), les L -estimées à noyaux gaussiens de sa densité de probabilité $p_{M_k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ : m \rightarrow p_{M_k}(m)$ et de sa fonction de répartition $F_{M_k} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] : m \rightarrow F_{M_k}(m)$ s'écrivent, $\forall m \in \mathbb{R}$:

$$\bar{p}_{M_k}^{(L)}(m) = C_k^{(L)} \sum_{j=1}^L \frac{1}{h_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m - m_k^{(j)}}{h_k} \right)^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(m) \quad (\text{V.131})$$

$$\bar{F}_{M_k}^{(L)}(m) = C_k^{(L)} \sum_{j=1}^L \left(\Phi \left(\frac{m - m_k^{(j)}}{h_k} \right) - \Phi \left(\frac{-m_k^{(j)}}{h_k} \right) \right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(m) \quad (\text{V.132})$$

où $C_k^{(L)}$ est une constante de normalisation telle que :

$$C_k^{(L)} = \frac{1}{L \left(1 + \sum_{j=1}^L \Phi \left(\frac{-m_k^{(j)}}{h_k} \right) \right)} \quad (\text{V.133})$$

les $m_k^{(j)}$, $1 \leq j \leq L$ sont les réalisations simulées de la variable aléatoire M_k et h_k est un paramètre de lissage donné par :

$$h_k = 1,06 \bar{\sigma}_{M_k}^{(L)} L^{-1/5} \quad (\text{V.134})$$

avec :

$$\bar{\sigma}_{M_k}^{(L)} = \sqrt{\frac{1}{L-1} \sum_{j=1}^L (m_k^{(j)} - \bar{m}_{M_k}^{(L)})^2} \quad (\text{V.135})$$

et :

$$\bar{m}_{M_k}^{(L)} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L m_k^{(j)} \quad (\text{V.136})$$

des L -estimées de l'écart-type $\sigma_{M_k} = \sqrt{E[(M_k - m_{M_k})^2]}$ et de la moyenne $m_{M_k} = E[M_k]$ de M_k , toutes deux calculées à partir du L -échantillon $\{m_k^{(j)}, 1 \leq j \leq L\}$ des réalisations indépendantes simulées de M_k .

Une fois construite l'estimée $\bar{F}_{M_k}^{(L)}$ de la fonction de répartition F_{M_k} , il suffit alors, en vertu de V.127, de calculer sa valeur $\bar{F}_{M_k}^{(L)}(\bar{m}_k)$ au point \bar{m}_k puis de prendre l'image par Φ^{-1} de cette valeur pour obtenir une approximation $\bar{\beta}_{HL,k}^{(L)}$ de l'indice de Hasofer-Lind $\beta_{HL,k}$:

$$\bar{\beta}_{HL,k}^{(L)} = \Phi^{-1}(\bar{F}_{M_k}^{(L)}(\bar{m}_k)) \quad (\text{V.137})$$

De plus, en vertu de V.128, la connaissance de l'estimée $\bar{F}_{M_k}^{(L)}$ de F_{M_k} permet également d'obtenir une approximation de la probabilité de défaillance $P_{f,k}$ sous la forme :

$$\bar{P}_{f,k}^{(L)} = 1 - \bar{F}_{M_k}^{(L)}(\bar{m}_k) \quad (\text{V.138})$$

V.3 Application numérique

Nous présentons dans cette partie quelques résultats issus de la mise en œuvre numérique de l'approche probabiliste proposée pour effectuer l'analyse fiabiliste de l'empilement sous séisme considéré dans cette thèse. Comme mentionné dans le paragraphe précédent, ce travail numérique a été réalisé pour trois types d'excitation sismique : une excitation unidirectionnelle, une excitation bidirectionnelle, une excitation tridirectionnelle et pour chacun d'eux, deux critères de défaillance ont été retenus : le critère C_1 (dépassement d'un seuil positif fixé \bar{m}_1 , par le maximum, sur un intervalle de temps donnée $[0, T_s]$, de la norme euclidienne du déplacement horizontal vectoriel de la tête de l'empilement) et le critère C_2 (dépassement d'un seuil positif fixé \bar{m}_2 par le maximum, sur le même intervalle de temps $[0, T_s]$, de la norme euclidienne du soulèvement vertical vectoriel de la base de l'empilement). Cette mise en œuvre numérique a en outre été menée à l'aide des modèles S4DoF, SNLFE et SNLFED dont on a vu qu'ils réalisaient le meilleur compromis entre temps de calcul raisonnable et représentativité mécanique satisfaisante. Le défaut lié à la planéité des pieds pris en compte dans le modèles SNLFED, caractérisé par une diminution du coefficient de frottement au niveau de l'un des pieds (cf. paragraphe III.3.2.2), a été estimé à partir d'un essai et n'est pas supposé aléatoire dans cette étude. Pour chacun de ces modèles et pour chacun des trois types d'excitation considérés (uni, bi, tridirectionnelle), trois grandeurs caractéristiques de l'analyse fiabiliste ont été estimées pour les critères de défaillance C_1 et C_2 : l'indice de Cornell, l'indice de Hasofer-Lind et la probabilité de défaillance via la courbe de fragilité relative au PGA, c'est-à-dire le graphe de cette probabilité vue comme fonction du PGA. Avant d'expliquer comment nous avons procédé pour obtenir cette courbe (compte tenu des données disponibles), commençons par brièvement rappeler comment on passe du processus modèle $\underline{\Gamma}$ de l'accélération sismique à la probabilité de défaillance $P_{f,k}$ associée au domaine de défaillance C_k ($k = 1, 2$), pour une direction d'excitation sismique et un modèle mécano-numérique donné (nous renvoyons aux paragraphes V.2.1 et V.2.2 pour tous les détails). La donnée de base est donc le processus modèle $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t), t \in \mathbb{I})$ défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexé sur \mathbb{I} , à valeurs dans \mathbb{R}^3 , uni, bi ou tridirectionnel selon les cas, construit à partir du modèle unidirectionnel de Rezaeian et Der Kiureghian. Soit $\underline{D}_k = (\underline{D}_k(t), t \in \mathbb{I})$ le déplacement induit par $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t), t \in \mathbb{I})$, associé au critère de défaillance C_k . C'est un processus défini sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexé sur \mathbb{I} , à valeurs dans \mathbb{R}^3 et tel que $\underline{D}_k(t) = \underline{E}_k(\underline{\Gamma}(t))$, $\forall t \in \mathbb{I}$, où \underline{E}_k est une application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 spécifiant le lien entre $\underline{\Gamma}$ et \underline{D}_k réalisé par le modèle mécano-numérique. Soit M_k la variable aléatoire définie sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}_+ , telle que $M_k = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{D}_k(t)\|$ avec $[0, T_s] \subseteq \mathbb{I}$. Le critère C_k randomisé s'écrit alors $\bar{m}_k - M_k \leq 0$, avec $\bar{m}_k > 0$ un déplacement scalaire seuil (i.e. limite) fixé, et il lui correspond l'événement de défaillance $E_{f,k} = \{M_k \geq \bar{m}_k\} = \{a \in \mathcal{A} : M_k(a) \geq \bar{m}_k\}$ et la probabilité de défaillance $P_{f,k} = \mathbb{P}(E_{f,k}) = \mathbb{P}(M_k \geq \bar{m}_k)$. Il est clair que cette probabilité dépend du processus $\underline{\Gamma}$ par M_k (puisque, d'après ce qui précède, $M_k = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{E}_k(\underline{\Gamma}(t))\|$). Elle dépend donc aussi du maximum de $\|\underline{\Gamma}\| = (\|\underline{\Gamma}(t)\|, t \in \mathbb{I})$ sur $[0, T_s]$, c'est-à-dire du PGA (qui est donc ici une variable aléatoire définie sur $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}_+).

Du point de vue probabiliste, cette dépendance correspond à un conditionnement que l'on traduit par l'écriture :

$$P_{f,k} = \mathbb{P}(M_k \geq \bar{m}_k | \text{PGA})$$

On appelle alors courbe de fragilité relative au PGA, le graphe de la fonction $w \rightarrow P_{f,k}(w) = \mathbb{P}(M_k \geq \bar{m}_k | \text{PGA} = w)$.

Pour tracer une telle courbe, nous disposons pour chaque situation considérée (relative au choix du critère de défaillance, du modèle mécano-numérique et de la direction d'action de l'accélération sismique) d'un L-échantillon $\mathcal{E}_{\underline{\Gamma}} = \{\underline{Y}^{(1)} = (\underline{Y}^{(1)}(t), t \in \mathbb{I}), \dots, \underline{Y}^{(L)} = (\underline{Y}^{(L)}(t), t \in \mathbb{I})\}$ de réalisations indépendantes simulées du processus $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t), t \in \mathbb{I})$, réalisations empruntées à la base de données construite par Sainct et al. (à partir du modèle de Rezaeian et Der Kiureghian) et que nous n'avons donc pas simulées nous-même (mais que nous avons restructurées dans le cas bi et tridirectionnels, selon la procédure décrite en fin de paragraphe V.2.1.3). À chaque éléments $\underline{Y}^{(j)} = (\underline{Y}^{(j)}(t), t \in \mathbb{I})$ de cet échantillon, nous avons associé le réel $w^{(j)} > 0$ tel que $w^{(j)} = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{Y}^{(j)}(t)\|$.

Nous disposons ainsi d'un L-échantillon $\mathcal{E}_{\text{PGA}} = \{w^{(1)}, \dots, w^{(L)}\}$ de réalisations indépendantes de la variable aléatoire PGA. Partant de là, nous avons alors procédé comme suit :

1. Nous avons ordonné par valeurs croissantes l'échantillon \mathcal{E}_{PGA} . Soit $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{PGA}} = \{w_L^{(1)}, \dots, w_L^{(L)}\}$ l'échantillon ordonné obtenu, tel que $w_L^{(1)} \leq w_L^{(2)} \leq \dots \leq w_L^{(L)}$.
2. Nous avons ensuite réordonné l'échantillon $\mathcal{E}_{\underline{\Gamma}}$ de telle sorte que, dans le nouvel ordre, son j -ème élément corresponde au j -ème élément de $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{PGA}}$. Autrement dit, nous avons introduit le L-échantillon $\tilde{\mathcal{E}}_{\underline{\Gamma}} = \{\underline{Y}_{\underline{L}}^{(1)} = (\underline{Y}_{\underline{L}}^{(1)}(t), t \in \mathbb{I}), \dots, \underline{Y}_{\underline{L}}^{(L)} = (\underline{Y}_{\underline{L}}^{(L)}(t), t \in \mathbb{I})\}$ tel que $w_L^{(j)} = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{Y}_{\underline{L}}^{(j)}(t)\|, \forall j \in \{1, \dots, L\}$.
3. À partir du L-échantillon $\tilde{\mathcal{E}}_{\underline{\Gamma}}$, nous avons construit le L-échantillon $\tilde{\mathcal{E}}_{\underline{D}_k} = \{\underline{d}_{k,l}^{(1)} = (\underline{d}_{k,l}^{(1)}(t), t \in \mathbb{I}), \dots, \underline{d}_{k,l}^{(L)} = (\underline{d}_{k,l}^{(L)}(t), t \in \mathbb{I})\}$ des réalisations indépendantes associées du processus déplacement $\underline{D}_k = (\underline{D}_k(t), t \in \mathbb{I})$, telles que $\underline{d}_{k,L}^{(j)}(t) = \underline{F}_k(\underline{Y}_{\underline{L}}^{(j)}(t)), \forall t \in \mathbb{I}, \forall j \in \{1, \dots, L\}$ puis le L-échantillon $\tilde{\mathcal{E}}_{M_k} = \{m_{k,l}^{(1)}, \dots, m_{k,l}^{(L)}\}$ des réalisations indépendantes de la variable aléatoire M_k , telles que $m_{k,L}^{(j)} = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{d}_{k,L}^{(j)}(t)\| = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{F}_k(\underline{Y}_{\underline{L}}^{(j)}(t))\|$. À chaque élément $w_L^{(j)}$ de $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{PGA}}$ correspond ainsi un élément $\underline{Y}_{\underline{L}}^{(j)} = (\underline{Y}_{\underline{L}}^{(j)}(t), t \in \mathbb{I})$ de $\tilde{\mathcal{E}}_{\underline{\Gamma}}$ et donc un éléments $m_{k,l}^{(j)}$ de $\tilde{\mathcal{E}}_{M_k}$ via les relations $w_L^{(j)} = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{Y}_{\underline{L}}^{(j)}(t)\|, m_{k,L}^{(j)} = \sup_{t \in [0, T_s]} \|\underline{F}_k(\underline{Y}_{\underline{L}}^{(j)}(t))\|, \forall j \in \{1, \dots, L\}$.
4. En choisissant L de la forme $L = M \times N$, avec M et N deux entiers > 0 tels que $M \gg N$ (situation à laquelle il est toujours possible de se ramener), nous avons construit une partition de $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{PGA}}$ formée de N parties A_1, \dots, A_N comprenant chacune le même nombre M d'éléments et une partition de $\tilde{\mathcal{E}}_{M_k}$ formée de N parties B_1, \dots, B_N comprenant également chacune le même nombre M d'éléments, avec $A_q = \{w_L^{((q-1)M+1)}, \dots, w_L^{(qM)}\}$ et $B_q = \{m_{k,L}^{((q-1)M+1)}, \dots, m_{k,L}^{(qM)}\}, \forall q \in \{1, \dots, L\}$.
5. Enfin, nous avons calculé, pour tout q dans $\{1, \dots, N\}$:
 - (a) la moyenne arithmétique $\bar{w}^{(q)}$ du M-échantillon A_q :

$$\bar{w}^{(q)} = \frac{\sum_{l=1}^M w_L^{((q-1)M+l)}}{M} \quad (\text{V.139})$$

- (b) l'estimée $\bar{P}_{f,k}^{(q)}$ relative au M-échantillon B_q , de la probabilité de défaillance :

$$\bar{P}_{f,k}^{(q)} = \frac{\#\{l \in \{1, \dots, M\} : m_{k,L}^{((q-1)M+l)} \geq \bar{m}_k\}}{M} \quad (\text{V.140})$$

La N-famille de couples $(\bar{w}^{(q)}, \bar{P}_{f,k}^{(q)})$, $1 \leq q \leq N$, ainsi obtenue constitue une approximation discrétisée du graphe de la fonction $w \rightarrow \mathbb{P}(M_k \geq \bar{m}_k | \text{PGA} = w)$, c'est-à-dire de la courbe de fragilité relative au PGA. En associant à chacune des estimées $\bar{P}_{f,k}^{(q)}$, $1 \leq q \leq N$, un intervalle de confiance à un seuil de confiance $1 - \alpha_k$ spécifié (le même pour toutes les estimées), on peut ensuite associer à cette courbe un fuseau de confiance relatif à ce seuil.

V.3.1 Résultats relatifs à l'approche fiabiliste proposée

La présentation des divers résultats numériques obtenus est organisée comme suit. Pour chacun des trois types d'excitation sismique considérés (uni, bi et tridirectionnel), nous présentons successivement :

- les courbes de fragilité relatives aux critères de défaillance C_1 et C_2 , obtenues pour chacun d'eux avec les modèles mécano-numériques retenus et en considérant deux valeurs de seuils différentes (qui correspondent à deux types de comportements mécaniques : quasi linéaire et non linéaire) ;
- et les indices de Cornell et de Hasofer-Lind relatifs aux critères de défaillance C_1 et C_2 , calculés pour chaque critère par le biais des trois modèles mécano-numériques retenus et pour plusieurs valeurs du seuil de déplacement limite \bar{m}_k ($k = 1, 2$).

V.3.1.1 Présentation des résultats

Nous présentons dans un premier temps, sans les commenter, les résultats obtenus pour les trois types d'excitation sismique considérés. L'analyse de l'ensemble de ces résultats est effectuée dans un second temps.

(a) Empilement sous excitation sismique unidirectionnelle

Nous sommes ici dans la situation où l'accélération sismique est modélisée par le processus aléatoire $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t), t \in \mathbb{I})$ donné par V.73.

La figure V.4 montre les courbes de fragilité relatives aux critères de défaillance C_1 et C_2 (avec $\bar{m}_1 = 10$ mm pour le critère C_1 et $\bar{m}_2 = 1$ mm pour le critère C_2), obtenues pour chacun d'eux via les modèles mécano-numériques SNLFE, SNLFED et S4DoF, chacune de ces courbes étant accompagnée de son fuseau de confiance au seuil de confiance 95%.

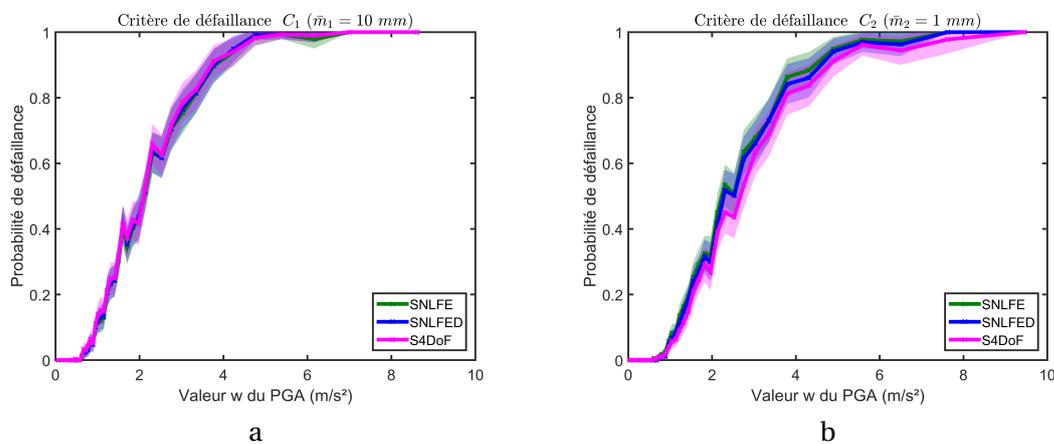


FIGURE V.4 – Courbes de fragilité (avec fuseaux de confiance associés, au seuil de confiance 95%) relatives aux critères de défaillance C_1 , de caractéristique $\bar{m}_1 = 10$ mm (a), et C_2 , de caractéristique $\bar{m}_2 = 1$ mm (b), obtenues via les modèles mécano-numériques SNLFE, SNLFED et S4DoF

La figure V.5 montre les mêmes courbes et leurs fuseaux de confiance au seuil de confiance 95%, mais relatives cette fois à un déplacement limite \bar{m}_1 de 25 mm pour le critère de défaillance C_1 et \bar{m}_2 de 8 mm pour le critère de défaillance C_2 .

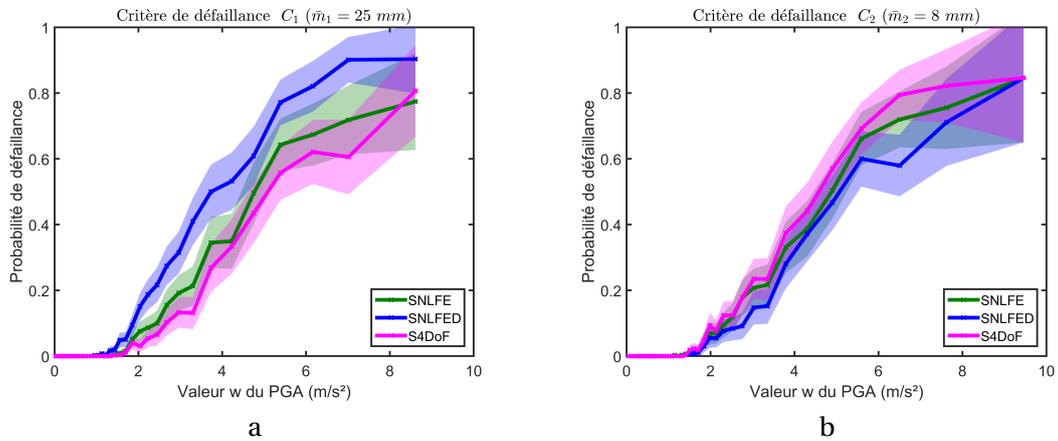


FIGURE V.5 – Courbes de fragilité (avec fuseaux de confiance associés, au seuil de confiance 95%) relatives aux critères de défaillance C_1 , de caractéristique $\bar{m}_1 = 25$ mm (a), et C_2 , de caractéristique $\bar{m}_2 = 8$ mm (b), obtenues via les modèles mécano-numériques SNLFE, SNLFED et S4DoF

La figure V.6 illustre, pour chacun des deux critères de défaillance considérés (C_1 , C_2) et chacun des trois modèles mécano-numériques proposés (SNLFE, SNLFED et S4DoF), l'évolution de l'indice de Cornell $\beta_{C,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant le critère C_k ($k = 1, 2$).

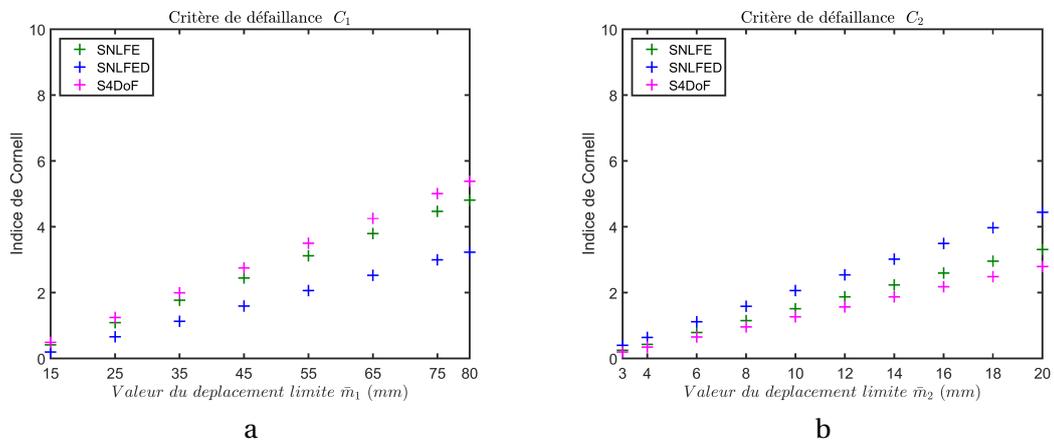


FIGURE V.6 – Graphes (établis via les modèles mécano-numériques SNFE, SNLFED et S4DoF) montrant, pour chaque critère de défaillance C_k (avec $k=1$ figure a et $k=2$ figure b), l'évolution de l'indice de Cornell $\beta_{C,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant C_k

La figure V.7 illustre, dans les mêmes conditions que celles relatives à la figure V.6, l'évolution de l'indice de Haoser-Lind $\beta_{HL,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant le critère C_k ($k = 1, 2$).

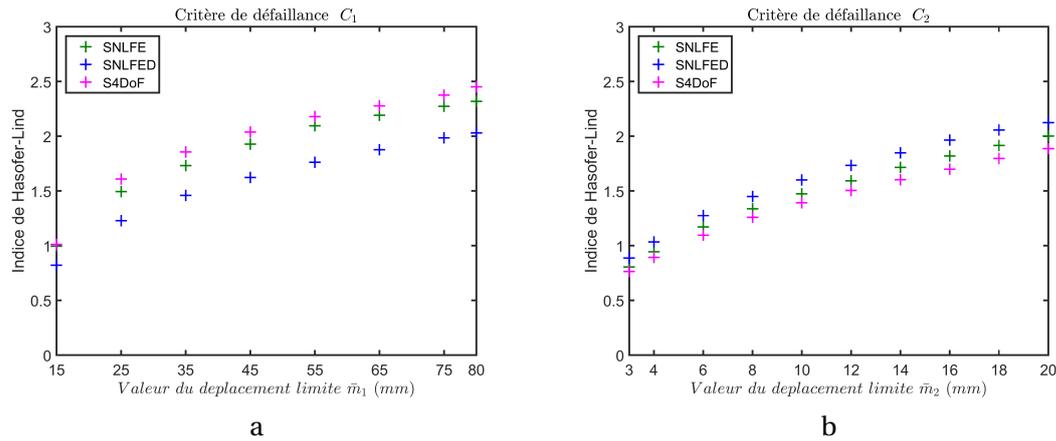


FIGURE V.7 – Graphes (établis via les modèles mécano-numériques SNFE, SNLFED et S4DoF) montrant, pour chaque critère de défaillance C_k (avec $k=1$ figure a et $k=2$ figure b), l'évolution de l'indice de Hasofer-Lind $\beta_{HL,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant C_k

(b) Empilement sous excitation sismique bidirectionnelle

Nous sommes ici dans la situation où l'accélération sismique est modélisée par le processus aléatoire $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t), t \in \mathbb{I})$ donnée par V.72.

La figure V.8 montre les courbes de fragilité relatives aux critères de défaillance C_1 , de caractéristique $\bar{m}_1 = 10$ mm, et C_2 , de caractéristique $\bar{m}_2 = 1$ mm, obtenues pour chacun d'eux via les modèles mécano-numériques SNLFE et SNLFED, chacune de ces courbes étant accompagnée de son fuseau de confiance au seuil de confiance 95%.

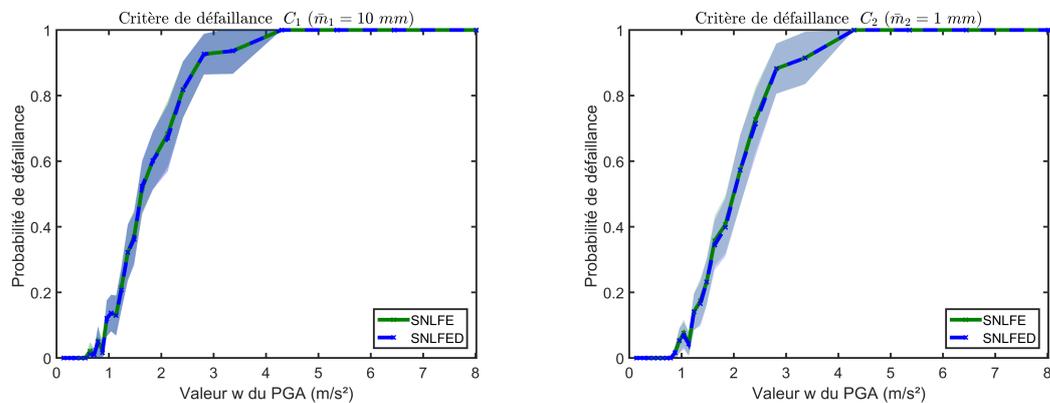


FIGURE V.8 – Courbes de fragilité (avec fuseaux de confiance associés, au seuil de confiance 95%) relatives aux critères de défaillance C_1 , de caractéristique $\bar{m}_1 = 10$ mm (partie gauche), et C_2 , de caractéristique $\bar{m}_2 = 1$ mm (partie droite), obtenues via les modèles mécano-numériques SNLFE et SNLFED

La figure V.9 montre les mêmes courbes et leurs fuseaux de confiance au seuil de confiance 95%, mais relatives cette fois à un déplacement limite $\bar{m}_1 = 25$ mm pour le critère de défaillance C_1 et $\bar{m}_2 = 8$ mm pour le critère de défaillance C_2 .

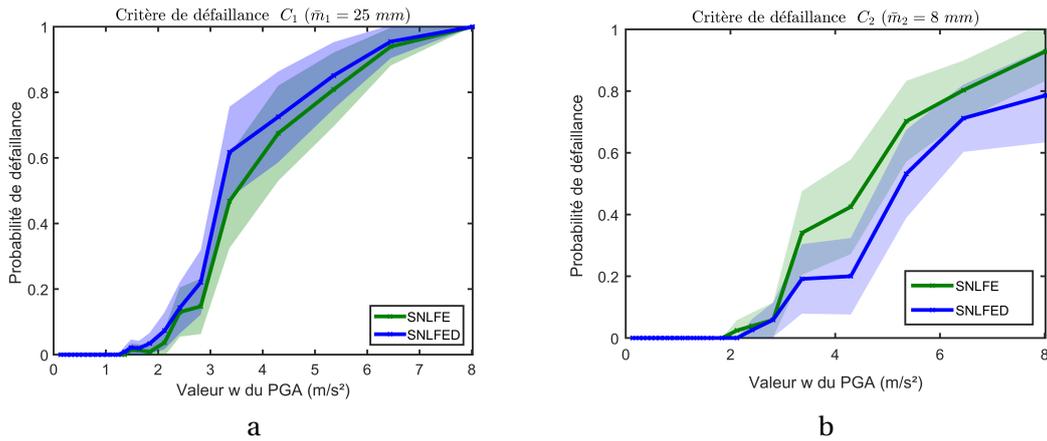


FIGURE V.9 – Courbes de fragilité (avec fuseaux de confiance associés, au seuil de confiance 95%) relatives aux critères de défaillance C_1 , de caractéristique $\bar{m}_1 = 25 \text{ mm}$ (a), et C_2 , de caractéristique $\bar{m}_2 = 8 \text{ mm}$ (b), obtenues via les modèles mécano-numériques SNLFE et SNLFED

La figure V.10 illustre, pour chacun des deux critères de défaillance considérés (C_1 , C_2) et chacun des deux modèles mécano-numériques SNLFE et SNLFED, l'évolution de l'indice de Cornell $\beta_{C,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant le critère de défaillance C_k ($k = 1, 2$).

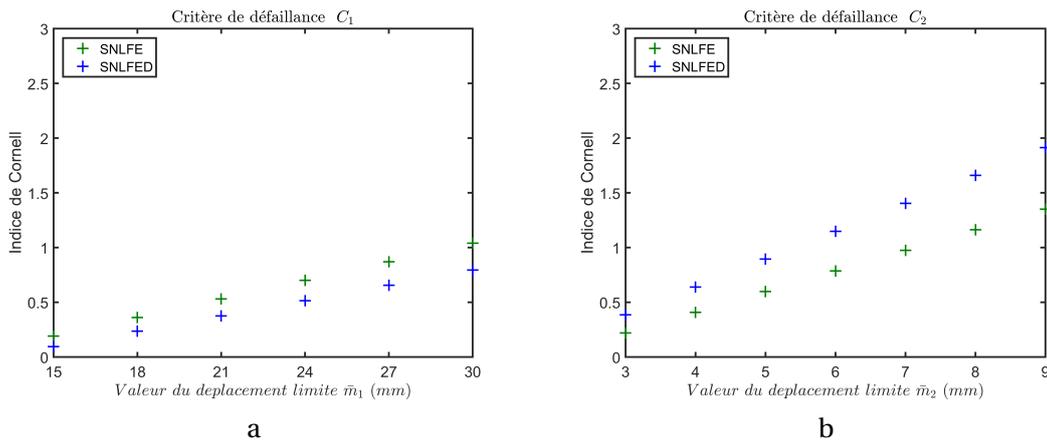


FIGURE V.10 – Graphes (établis via les modèles mécano-numériques SNFE et SNLFED) montrant, pour chaque critère de défaillance C_k (avec $k=1$ figure a et $k=2$ figure b), l'évolution de l'indice de Cornell $\beta_{C,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant C_k .

La figure V.11 illustre, dans les mêmes conditions que celles relatives à la figure V.10, l'évolution de l'indice de Hasofer-Lind $\beta_{HL,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant le critère de défaillance C_k ($k = 1, 2$).

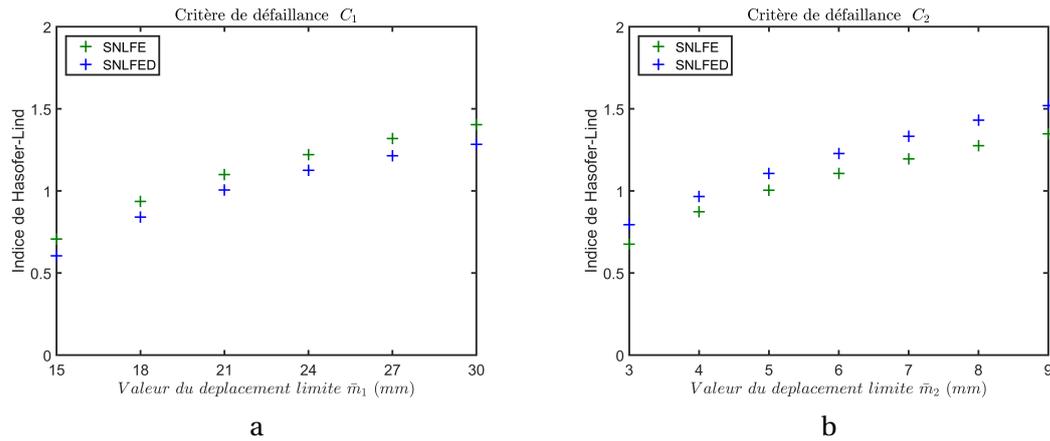


FIGURE V.11 – Graphes (établis via les modèles mécano-numériques SNFE et SNLFED) montrant, pour chaque critère de défaillance C_k (avec $k=1$ figure a et $k=2$ figure b), l'évolution de l'indice de Hasofer-Lind $\beta_{HL,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant C_k .

(c) Empilement sous excitation sismique tridirectionnelle

La situation considérée ici est celle où l'accélération sismique est modélisée par le processus aléatoire $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}(t), t \in \mathbb{I})$ donné par V.71.

La figure V.12 montre les courbes de fragilité relatives aux critères de défaillance C_1 , de caractéristique $\bar{m}_1 = 10$ mm, et C_2 , de caractéristique $\bar{m}_2 = 1$ mm, obtenues pour chacun d'eux via les modèles mécano-numériques SNLFE et SNLFED, chacune de ces courbes étant accompagnée de son fuseau de confiance au seuil de confiance 95%.

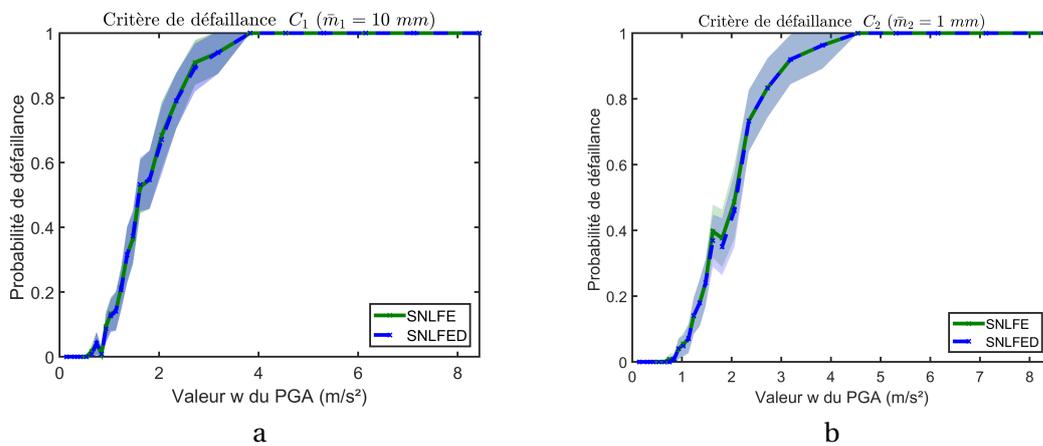


FIGURE V.12 – Courbes de fragilité (avec fuseaux de confiance associés, au seuil de confiance 95%) relatives aux critères de défaillance C_1 , de caractéristique $\bar{m}_1 = 10$ mm (a), et C_2 , de caractéristique $\bar{m}_2 = 1$ mm (b), obtenues via les modèles mécano-numériques SNLFE et SNLFED

La figure V.13 montre les mêmes courbes et leurs fuseaux de confiance associés (toujours au seuil de confiance 95%), mais relatives cette fois à un déplacement limite $\bar{m}_1 = 25$ mm pour le critère de défaillance C_1 et $\bar{m}_2 = 8$ mm pour le critère de défaillance C_2 .

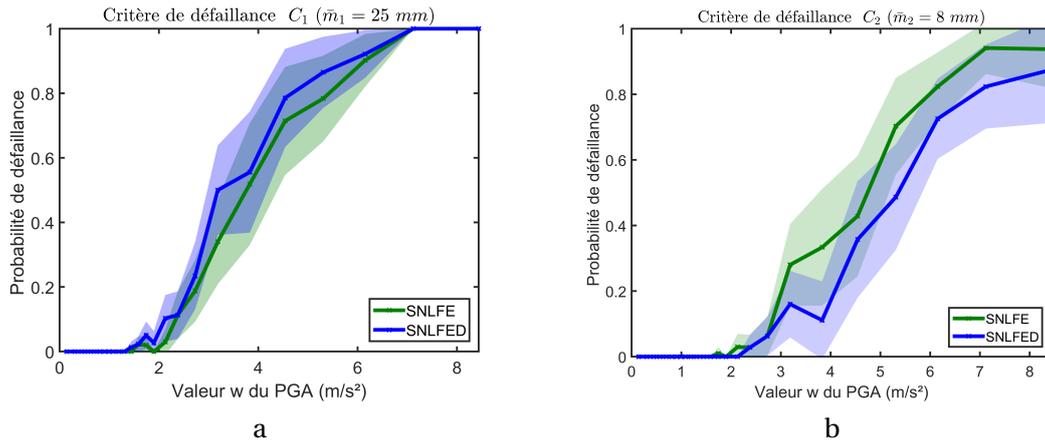


FIGURE V.13 – Courbes de fragilité (avec fuseaux de confiance associés, au seuil de confiance 95%) relatives aux critères de défaillance C_1 , de caractéristique $\bar{m}_1 = 25 \text{ mm}$ (a), et C_2 , de caractéristique $\bar{m}_2 = 8 \text{ mm}$ (b), obtenues via les modèles mécano-numériques SNLFE et SNLFED

La figure V.14 illustre, pour chacun des deux critères de défaillance considérés (C_1 , C_2) et chacun des deux modèles mécano-numériques SNLFE et SNLFED, l'évolution de l'indice de Cornell $\beta_{C,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant le critère de défaillance C_k ($k = 1, 2$).

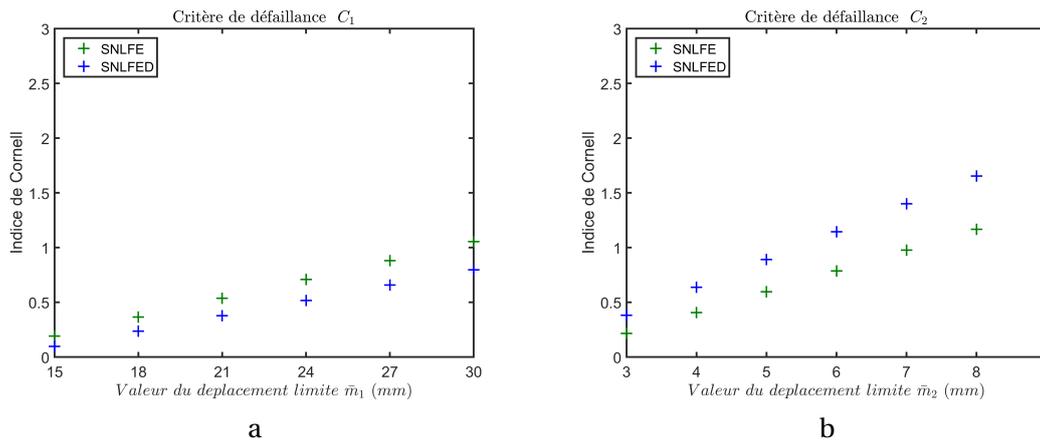


FIGURE V.14 – Graphes (établis via les modèles mécano-numériques SNFE et SNLFED) montrant, pour chaque critère de défaillance C_k (avec $k=1$ figure a et $k=2$ figure b), l'évolution de l'indice de Cornell $\beta_{C,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant C_k .

La figure V.15 illustre, dans les mêmes conditions que celles relatives à la figure V.14, l'évolution de l'indice de Hasofer-Lind $\beta_{HL,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant le critère de défaillance C_k ($k = 1, 2$).

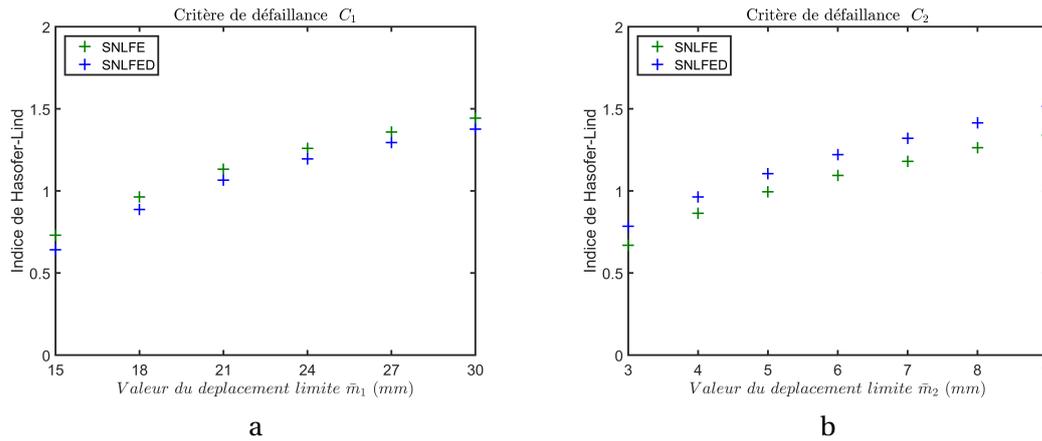


FIGURE V.15 – Graphes (établis via les modèles mécano-numériques SNFE et SNLFED) montrant, pour chaque critère de défaillance C_k (avec $k=1$ figure a et $k=2$ à figure b), l'évolution de l'indice de Hasofer-Lind $\beta_{HL,k}$ en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant C_k .

V.3.1.2 Analyse des résultats

Dans les paragraphes précédents, les courbes de fragilité ont été établies afin d'évaluer (i) la probabilité de défaillance de l'empilement en fonction du PGA et (ii) l'adéquation statistique des modèles numériques entre eux. Comme les courbes de fragilité ont été établies en fonction du PGA, les conclusions relatives à ces courbes seront donc dépendantes de cette grandeur. Ces courbes relatives aux critères de défaillance C_1 et C_2 , ont été obtenues pour chacun d'eux avec les modèles mécano-numériques retenus (i.e. les modèles S4DoF, SNLFE et SNLFED pour l'excitation sismique unidirectionnelle et les modèles SNLFE et SNLFED pour les excitations sismiques bi et tridirectionnelles) et en considérant deux valeurs de seuils différentes telles que :

- $\bar{m}_1 = 10$ mm et $\bar{m}_2 = 1$ mm (ce qui correspond à un comportement quasi linéaire de l'empilement) ;
- et $\bar{m}_1 = 25$ mm et $\bar{m}_2 = 8$ mm (ce qui correspond à un comportement non linéaire de l'empilement).

Dans un premier temps, les courbes de fragilité obtenues pour les valeurs de seuils fixées correspondant au comportement quasi linéaire de l'empilement sont analysées. La figure V.4 indique que, pour l'excitation sismique unidirectionnelle, les modèles mécano-numériques retenus (i.e. les modèles S4DoF, SNLFE et SNLFED) sont équivalents par rapport aux critères de défaillance C_1 et C_2 . Il en est de même pour les deux autres types d'excitation sismique considérés (bi et tridirectionnelle), les modèles mécano-numériques retenus (i.e. les modèles SNLFE et SNLFED) sont équivalents par rapport aux critères de défaillance C_1 et C_2 (cf. les figures V.8 et V.12).

Les courbes de fragilité obtenues pour les valeurs de seuils fixées correspondant au comportement non linéaire de l'empilement indiquent une tendance différente que celle exposée précédemment. Pour l'excitation sismique unidirectionnelle et par rapport au critère de défaillance C_1 , les courbes de fragilité obtenues avec les modèles mécano-numériques retenus indiquent que le modèle SNLFED est plus défaillant que les deux autres modèles (cf. figure V.5). Dans ce même contexte, le modèle SNLFE est plus défaillant que le modèle S4DoF. Par rapport au critère de défaillance C_2 et toujours pour l'excitation sismique unidirectionnelle, c'est le modèle S4DoF qui est plus défaillant que le modèle SNLFE, lui-même plus défaillant que le modèle SNLFED. Pour les excitations sismiques bi et tridirectionnelles, les courbes de fragilité obtenues indiquent les mêmes tendances pour les modèles SNLFE et SNLFED que celles exposées pour l'excitation sismique unidirectionnelle : le modèle SNLFED est plus défaillant que le modèle SNLFE par rapport au critère de défaillance C_1 et inversement pour le critère de défaillance C_2 (cf. les figures V.9 et V.13).

Les indices de Cornell et de Hasofer-Lind relatifs aux critères de défaillance C_1 et C_2 , calculés pour chaque critère par le biais des modèles mécano-numériques retenus et pour plusieurs valeurs du seuil de déplacement limite \bar{m}_k ($k = 1, 2$) ont également été calculés pour les trois types d'excitation sismique considérés. De même que les courbes de fragilité, ces indices permettent (i) de caractériser l'état fiabiliste de l'empilement et (ii) d'évaluer l'adéquation statistique des modèles numériques entre eux. Ils sont représentés en fonction de plusieurs valeurs de déplacement limite \bar{m}_k caractérisant C_k . Les bornes inférieures des valeurs de déplacement limite \bar{m}_k ont été fixées à 15 mm pour le critère de défaillance C_1 et à 3 mm pour le critère de défaillance C_2 . Ces valeurs ont été fixées de sorte que l'origine O du repère orthonormé de \mathbb{R}^p , associée à l'indice de Hasofer-Lind (qui est la distance euclidienne canonique de O à Δ_f), n'appartient pas au domaine de défaillance. Les bornes supérieures des valeurs de déplacement limite \bar{m}_k ont été fixées en fonction de la taille L de l'échantillon de réalisations simulées. Ainsi, pour l'excitation sismique unidirectionnelle, nous disposons d'un échantillon de taille $L = 10^4$. Avec cette taille d'échantillon, on pouvait estimer des probabilités de l'ordre de 10^{-2} avec une précision de 10^{-1} . Pour les excitations sismiques bi et tridirectionnelles, nous disposons d'un échantillon de taille 2 312. On pouvait donc estimer, avec la même précision, des probabilités de l'ordre de $4,3 \times 10^{-2}$. Ces probabilités correspondent aux valeurs de déplacement limite \bar{m}_k suivantes :

- 80 mm pour le critère de défaillance C_1 et 20 mm pour le critère de défaillance C_2 pour l'excitation sismique unidirectionnelle ;
- 30 mm pour le critère de défaillance C_1 et 9 mm pour le critère de défaillance C_2 pour les excitations sismiques bi et tridirectionnelles ;

Ces valeurs sont les bornes supérieures des valeurs de déplacement limite \bar{m}_k pour lesquelles les indices ont été représentés.

Les indices de Cornell et de Hasofer-Lind représentés en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant le critère C_k ($k = 1, 2$) sont tout d'abord analysés pour l'excitation sismique unidirectionnelle. L'interprétation des indices est la suivante : pour une valeur de seuil fixée, plus les indices fiabilistes sont élevés plus la probabilité de défaillance est faible. Les figures V.6 et V.7 indiquent, de même que les courbes de fragilité correspondant au comportement non linéaire présentées précédemment, que, par rapport au critère de défaillance C_1 , le modèle SNLFED est plus défaillant que le modèle SNLFE, lui même plus défaillant que le modèle S4DoF et inversement pour le critère de défaillance C_2 . Ces résultats avaient également été observés dans l'analyse déterministe du chapitre précédent : la prise en compte d'un défaut à l'interface avec la dalle support permettait d'obtenir une dérive des déplacements horizontaux et une réduction de l'amplitude des soulèvements. Ainsi, le maximum des déplacements horizontaux était plus important lorsque le défaut était pris en compte dans le modèle que lorsqu'il n'était pas pris en compte et inversement pour les soulèvements (i.e. le maximum des soulèvements était moins important lorsque le défaut était pris en compte dans le modèle que lorsqu'il n'était pas pris en compte). Les indices de Cornell et de Hasofer-Lind représentés en fonction du déplacement limite \bar{m}_k caractérisant le critère C_k ($k = 1, 2$) pour les excitations sismiques bi et tridirectionnelles (cf. les figures V.10, V.11, V.14 et V.15) indiquent les mêmes tendances que les courbes de fragilité correspondant au comportement non linéaire présentées précédemment : le modèle SNLFED est plus défaillant que le modèle SNLFE par rapport au critère de défaillance C_1 et inversement pour le critère de défaillance C_2 .

Dans cette section, les résultats de l'approche probabiliste proposée ont été présentés et analysés. Ces résultats ont permis de réaliser une première comparaison des modèles mécano-numériques en fonction du type de l'excitation sismique. Dans la section suivante, une comparaison globale des modèles est exposée en considérant tous les types d'excitation sismique.

V.3.2 Résultats relatifs à une comparaison fiabiliste globale des modèles mécano-numériques

Dans cette section, une comparaison fiabiliste globale des modèles mécano-numériques est proposée. Dans un premier temps, les résultats de cette comparaison sont exposés. Puis, l'analyse de l'ensemble de ces résultats est réalisée.

V.3.2.1 Présentation des résultats

Dans toute stratégie d'analyse fiabiliste, le choix du modèle mécano-numérique dédié à la description du comportement mécanique du système étudié impacte nécessairement le bilan fiabiliste de ce dernier. C'est pourquoi il nous a paru intéressant de comparer les trois modèles mécano-numériques développés dans cette thèse : S4DoF, SNLFE et SNLFED. Les modèles mécano-numériques sont comparés à travers des indicateurs fiabilistes définis ci-dessous et en considérant les trois types d'excitation sismique. Ces comparaisons sont présentées dans les tableaux V.2, V.3 et V.4.

Dans le premier tableau, les indicateurs fiabilistes sont l'indice de Cornell, l'indice de Hasofer-Lind et la probabilité de défaillance $\bar{P}_{f,k}^{(L)}$ calculée par la méthode de Monte-Carlo directe (cf. V.94). La comparaison est effectuée pour deux critères de défaillance C_1 (le premier de caractéristique $\bar{m}_1 = 15$ mm, le second de caractéristique $\bar{m}_1 = 30$ mm) et C_2 (le premier de caractéristique $\bar{m}_2 = 3$ mm, le second de caractéristique $\bar{m}_2 = 9$ mm) et pour chacun d'eux, l'excitation sismique dont il dépend a été prise en compte successivement dans sa version unidirectionnelle, bidirectionnelle et tridirectionnelle. Bien entendu, compte tenu de ses spécificités, le modèle S4DoF n'a pu être comparé aux deux autres modèles que dans le cas de l'excitation unidirectionnelle. Par ailleurs, afin de ne pas biaiser la comparaison, les échantillons de réalisations simulées de l'excitation (i.e. du processus $\underline{\Gamma}$) utilisés pour calculer les trois indicateurs fiabilistes ont été choisis de même taille $L = 2\ 312$ pour les trois types d'excitation.

Dans le deuxième tableau, les modèles mécano-numériques sont comparés à travers trois calculs de la probabilité de défaillance qui sont :

- l'estimée de la probabilité de défaillance $\bar{P}_{f,k}^{(L)}$ calculée par la méthode de Monte-Carlo directe (cf. V.94) ;
- l'approximation de la probabilité de défaillance $\bar{P}_{f,k}^{(L)}$ calculée à partir de l'estimée $\bar{F}_{M_k}^{(L)}$ de la fonction de répartition F_{M_k} évaluée lors du calcul de l'indice de Hasofer-Lind (cf. V.138) ;
- l'approximation de la probabilité de défaillance conventionnelle $P_{f,HL,k}^{conv}$ calculée à partir de l'indice de Hasofer-Lind (cf. V.56) ;

avec ($k = 1, 2$). De même que précédemment, les probabilités de défaillance sont calculées pour les trois types d'excitation sismique. Les échantillons de réalisations ont également été choisis de même taille pour les trois types d'excitation, tel que $L=2\ 312$, afin de ne pas biaiser la comparaison. La comparaison est réalisée pour les deux critères de défaillance définis précédemment C_1 et C_2 .

Enfin, la comparaison présentée dans le troisième tableau est semblable à celle présentée dans le deuxième tableau. Néanmoins, cette comparaison est uniquement réalisée pour l'excitation sismique unidirectionnelle. Ces calculs ont été réalisés pour deux tailles L d'échantillons de réalisations différentes : pour $L = 2\ 312$ puis pour $L = 10\ 000$.

La probabilité de défaillance $\bar{P}_{f,k}^{(L)}$ calculée par la méthode de Monte-Carlo directe est indiquée dans les trois tableaux, elle est représentée par des cases colorées.

			Excitation			Excitation		Excitation	
			unidirectionnelle			bidirectionnelle		tridirectionnelle	
			S4DoF	SNLFE	SNLFED	SNLFE	SNLFED	SNLFE	SNLFED
Critère de défaillance C_1	$\tilde{m}_1 = 15 \text{ mm}$	$\beta_{C,1}$	0,5	0,4	0,2	0,2	0,1	0,2	0,1
		$\beta_{HL,1}$	0,9	0,9	0,7	0,7	0,6	0,7	0,6
		$\bar{P}_{f,1}^{(L)}$	0,14	0,14	0,17	0,18	0,18	0,18	0,18
	$\tilde{m}_1 = 30 \text{ mm}$	$\beta_{C,1}$	1,5	1,4	0,9	1,0	0,8	1,1	0,8
		$\beta_{HL,1}$	1,7	1,6	1,3	1,4	1,3	1,4	1,4
		$\bar{P}_{f,1}^{(L)}$	0,04	0,05	0,08	0,07	0,09	0,07	0,09
Critère de défaillance C_2	$\tilde{m}_2 = 3 \text{ mm}$	$\beta_{C,2}$	0,2	0,2	0,4	0,2	0,4	0,2	0,4
		$\beta_{HL,2}$	0,6	0,7	0,8	0,7	0,8	0,7	0,8
		$\bar{P}_{f,2}^{(L)}$	0,14	0,14	0,13	0,15	0,14	0,15	0,14
	$\tilde{m}_2 = 9 \text{ mm}$	$\beta_{C,2}$	1,0	1,3	1,8	1,4	1,9	1,4	1,9
		$\beta_{HL,2}$	1,3	1,4	1,5	1,3	1,5	1,3	1,5
		$\bar{P}_{f,2}^{(L)}$	0,06	0,05	0,04	0,06	0,04	0,06	0,04

TABLEAU V.2 – Comparaison des modèles mécano-numériques S4DoF, SNLFE et SNLFED à travers les indicateurs fiabilistes $\beta_{C,k}$, $\beta_{HL,k}$ et $P_{f,k}$ ($k = 1, 2$) associés, pour chaque excitation (uni, bi, tridirectionnelle), à deux critères de défaillance C_1 et deux critères de défaillance C_2

			Excitation			Excitation		Excitation	
			unidirectionnelle			bidirectionnelle		tridirectionnelle	
			S4DoF	SNLFE	SNLFED	SNLFE	SNLFED	SNLFE	SNLFED
Critère de défaillance C_1	$\tilde{n}_1 = 15 \text{ mm}$	$\bar{P}_{f,1}^{(L)}$	0,14	0,14	0,17	0,18	0,18	0,18	0,18
		$\bar{\bar{P}}_{f,1}^{(L)}$	0,18	0,18	0,24	0,24	0,27	0,23	0,26
		$P_{f,HL,1}^{conv}$	0,18	0,18	0,24	0,24	0,27	0,24	0,27
	$\tilde{n}_1 = 30 \text{ mm}$	$\bar{P}_{f,1}^{(L)}$	0,04	0,05	0,08	0,07	0,09	0,07	0,09
		$\bar{\bar{P}}_{f,1}^{(L)}$	0,05	0,06	0,10	0,08	0,10	0,07	0,08
		$P_{f,HL,1}^{conv}$	0,04	0,05	0,10	0,08	0,10	0,08	0,08
Critère de défaillance C_2	$\tilde{n}_2 = 3 \text{ mm}$	$\bar{P}_{f,2}^{(L)}$	0,14	0,14	0,13	0,15	0,14	0,15	0,14
		$\bar{\bar{P}}_{f,2}^{(L)}$	0,28	0,24	0,20	0,25	0,21	0,25	0,21
		$P_{f,HL,2}^{conv}$	0,27	0,24	0,21	0,24	0,21	0,24	0,21
	$\tilde{n}_2 = 9 \text{ mm}$	$\bar{P}_{f,2}^{(L)}$	0,06	0,05	0,04	0,06	0,04	0,06	0,04
		$\bar{\bar{P}}_{f,2}^{(L)}$	0,10	0,08	0,07	0,09	0,06	0,09	0,06
		$P_{f,HL,2}^{conv}$	0,10	0,08	0,07	0,10	0,07	0,10	0,07

TABEAU V.3 – Comparaison des modèles mécano-numériques S4DoF, SNLFE et SNLFED à travers les estimées de la probabilité de défaillance $\bar{P}_{f,k}^{(L)}$, $\bar{\bar{P}}_{f,k}^{(L)}$ et $P_{f,HL,k}^{conv}$ ($k = 1,2$) associées, pour chaque excitation (uni, bi, tridirectionnelle), à deux critères de défaillance C_1 et à deux critères de défaillance C_2

			Excitation			Excitation		
			unidirectionnelle			unidirectionnelle		
			L = 2 312			L = 10 000		
			S4DoF	SNLFE	SNLFED	S4DoF	SNLFE	SNLFED
Critère de défaillance C ₁	$\tilde{m}_1 = 15 \text{ mm}$	$\bar{P}_{f,1}^{(L)}$	0,14	0,14	0,17	0,13	0,13	0,16
		$\bar{\bar{P}}_{f,1}^{(L)}$	0,18	0,18	0,24	0,16	0,16	0,20
		$P_{f,HL,1}^{\text{conv}}$	0,18	0,18	0,24	0,16	0,16	0,21
	$\tilde{m}_1 = 30 \text{ mm}$	$\bar{P}_{f,1}^{(L)}$	0,04	0,05	0,08	0,04	0,05	0,07
		$\bar{\bar{P}}_{f,1}^{(L)}$	0,05	0,06	0,10	0,04	0,05	0,09
		$P_{f,HL,1}^{\text{conv}}$	0,04	0,05	0,10	0,04	0,05	0,08
Critère de défaillance C ₂	$\tilde{m}_2 = 3 \text{ mm}$	$\bar{P}_{f,2}^{(L)}$	0,14	0,14	0,13	0,14	0,13	0,12
		$\bar{\bar{P}}_{f,2}^{(L)}$	0,28	0,24	0,20	0,22	0,21	0,19
		$P_{f,HL,2}^{\text{conv}}$	0,27	0,24	0,21	0,21	0,21	0,18
	$\tilde{m}_2 = 9 \text{ mm}$	$\bar{P}_{f,2}^{(L)}$	0,06	0,05	0,04	0,06	0,05	0,04
		$\bar{\bar{P}}_{f,2}^{(L)}$	0,10	0,08	0,07	0,09	0,08	0,06
		$P_{f,HL,2}^{\text{conv}}$	0,10	0,08	0,07	0,10	0,08	0,07

TABLEAU V.4 – Comparaison des modèles mécano-numériques S4DoF, SNLFE et SNLFED à travers les estimées de la probabilité de défaillance $\bar{P}_{f,k}^{(L)}$, $\bar{\bar{P}}_{f,k}^{(L)}$ et $P_{f,HL,k}^{\text{conv}}$ ($k = 1, 2$) associées, pour l'excitation unidirectionnelle avec deux tailles d'échantillons différentes, à deux critères de défaillance C₁ et à deux critères de défaillance C₂

V.3.2.2 Analyse des résultats

À partir des tableaux V.2, V.3 et V.4 nous avons fait les observations suivantes :

- la « logique » de dimensionnement est respectée à savoir que plus la valeur de seuil est élevée, plus les indices de Cornell et de Hasofer-Lind sont grands et plus la probabilité de défaillance est petite (cf. tableau V.2);
- les probabilités de défaillance calculées de trois façons différentes donnent des résultats du même ordre de grandeur (cf. tableau V.3);
- l'augmentation de la taille de l'échantillon n'améliore pas de manière significative le calcul de la probabilité de défaillance $\bar{P}_{f,k}^{(L)}$ toutefois elle améliore les calculs de défaillance $\bar{\bar{P}}_{f,k}^{(L)}$ et $P_{f,HL,k}^{\text{conv}}$ (cf. tableau V.4);

Par rapport aux modèles mécano-numériques, cette comparaison globale révèle les points suivants :

- le modèle S4DoF permet d'estimer une réponse enveloppe du soulèvement pour l'excitation sismique unidirectionnelle ;
- les indicateurs fiabilistes associés aux critères de défaillance C_1 et C_2 suite aux excitations sismiques bi et tridirectionnelles, sont identiques à modèles donnée ;
- à critère donné et pour une valeur de seuil fixé, les indicateurs fiabilistes issus de l'excitation sismiques unidirectionnelle sont du même ordre de grandeurs que ceux issus des excitations sismiques bi et tridirectionnelles ;
- l'écart des indicateurs fiabilistes lorsque le défaut est pris en compte est lorsqu'il n'est pas pris en compte est moins important pour les excitations sismiques bi et tridirectionnelle que pour l'excitation sismique unidirectionnelle.

Ces applications numériques ont permis de montrer la faisabilité et la pertinence de la résolution de notre problème fiabiliste. Toutefois, si l'on souhaite faire du dimensionnement ces applications ne sont pas suffisantes. Dans un contexte de dimensionnement, il faut travailler avec des probabilités de défaillance bien plus petite a minima de l'ordre de 10^{-4} . Ainsi, si l'on souhaite estimer cette ordre de grandeur avec une précision de 10^{-2} , il faudrait travailler avec un échantillon de réalisations simulées de taille $L = 10^8$. Faute de temps, nous n'avons pas pu faire ces calculs.

V.4 Synthèse

Dans ce chapitre, la stratégie fiabiliste développée dans cette thèse a été présentée. Dans un premier temps, les notions fondamentales de la théorie des probabilités et de l'analyse fiabiliste auxquelles nous nous sommes appuyés ont été rappelées. Subséquemment, le problème fiabiliste relatif à notre étude ainsi que la méthodologie que nous avons proposée pour le résoudre ont été exposés. Enfin, la méthodologie proposée a été testée à travers des applications numériques destinées à montrer sa faisabilité et sa pertinence pour la résolution du problème posé. Bien que ces applications numériques ne puissent pas directement être utilisées dans un contexte de dimensionnement étant donnée que les ordres de grandeur des probabilités de défaillance soient trop élevés, ces applications ont permis de montrer la pertinence de la méthodologie proposée et de comparer les modèles mécano-numériques. Cette comparaison a mis en évidence plusieurs phénomènes.

Tout d'abord, l'analyse probabiliste confirme les résultats obtenus dans le cadre de l'approche déterministe.

Par ailleurs, pour les excitations sismiques bi et tridirectionnelles, les calculs des probabilités de défaillance associées au critère de défaillance des soulèvements de la base indiquent que pour les valeurs de seuils étudiées, les probabilités de défaillance sont identiques à modèle donné. De plus, ces probabilités sont du même ordre de grandeur que celles obtenues pour l'excitation sismique unidirectionnelle pour tous les modèles. Ainsi, une première estimation de la valeur du soulèvement, basée sur un calcul avec une excitation unidirectionnelle, permet d'en obtenir un ordre de grandeur réaliste néanmoins, celui-ci ne sera pas enveloppe.

De plus, quel que soit le type de sollicitation étudié, la non prise en compte des défauts dans le modèle permet d'obtenir une valeur enveloppe du soulèvement pour les niveaux d'excitation sismique et les valeurs de seuils étudiées. Ce dernier résultat est important du point de vue de l'ingénieur car il est en général difficile de prendre en compte les défauts de la structure dans les modèles, compte tenu de la méconnaissance que l'on en a. Bien entendu, cette conclusion n'est valide que pour le type de défauts auquel nous avons été confrontés, à savoir un défaut d'homogénéité du coefficient de frottement à l'interface entre l'empilement et la dalle support.

Enfin, les calculs des probabilités de défaillance associées au critère de défaillance portant sur la norme des déplacements horizontaux en tête de l'empilement révèlent que, pour les valeurs de seuils étudiées et pour les excitations unidirectionnelles, la prise en compte de défauts dans le modèle est nécessaire sous peine de les sous-estimer. Néanmoins, pour les excitations bi et tridirectionnelles, l'écart entre les probabilités de défaillance associées aux modèles avec défaut et sans défaut est moins important. Ce dernier résultat est intéressant pour l'ingénieur car il est en général difficile de prendre en compte les défauts dans les modèles et que seules les excitations tridirectionnelles sont réalistes. Comme précédemment, cette conclusion n'est valide que pour le type de défaut qui a été étudié.

V.5 Références

- DITLEVSEN, O. et H. O. MADSEN. 1996, «Structural reliability methods», *New York : Wiley*, vol. 178. [143](#)
- FOGLI, M. 2008, «Une introduction à la théorie des probabilités, des variables et des processus aléatoires», *Rapport interne*. [131](#), [137](#)
- FOGLI, M. 2009, «Éléments de probabilité et de statistique», *Rapport interne*. [131](#), [137](#)
- FOGLI, M. 2011, «"méthodes de monte-carlo en calcul des structures" : Méthodes de monte-carlo pour le calcul des intégrales multidimensionnelles», *Cours du Collège de Polytechnique*. [131](#), [141](#), [143](#)
- FOGLI, M. 2012, «Simulation des processus stochastiques : Simulation numérique de processus et champs gaussiens stationnaires et non stationnaires», *Cours du Collège de Polytechnique*. [131](#), [137](#)
- HASOFER, A. M. et N. LIND. 1974, «An exact and invariant first order reliability format», *Solid Mechanics Division - University of Waterloo*, , n° 1, p. 111–121. [143](#), [145](#), [146](#)
- MANSOURI, M. 2013, «Étude mécano-fiabiliste et réduction du modèle des problèmes vibro-acoustiques à paramètres aléatoires», *Thèse*. [131](#)
- MATHEY, C. 2016, «Contribution à l'étude du comportement de structures libres, rigides, élancées, glissantes et basculantes sous séisme», *Thèse*. [131](#)
- REZAEIAN, S. et A. DER KIUREGHIAN. 2010, «Simulation of synthetic ground motions for specified earthquake and site characteristics», *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 39, n° 10, p. 1155–1180. [149](#)
- ROBERT, C. et G. CASELLA. 2013, «Monte carlo statistical methods», *Springer Science & Business Media*. [141](#)
- RUBINSTEIN, R. et D. KROESE. 2016, «Simulation and the monte carlo method», *John Wiley & Sons*, vol. 10. [141](#)
- SAINCT, R., C. FEAU, J.-M. MARTINEZ et J. GARNIER. 2020, «Efficient methodology for seismic fragility curves estimation by active learning on support vector machines», *Structural Safety*, vol. 86. [152](#)
- SOIZE, C. 2003, «Probabilités et modélisation des incertitudes : éléments de base et concepts fondamentaux», *Handed out at the séminaire de formation de l'école doctorale MODES, Paris*. [131](#), [137](#)

Chapitre VI

Conclusions et perspectives

Dans cette thèse, une structure industrielle représentant un empilement de trois paniers libres destinés au stockage de colis a été étudiée. Les objectifs étaient (i) de comprendre le comportement dynamique sous séisme de structures libres et flexibles, (ii) de développer des modèles mécano-numériques représentatifs du comportement global, (iii) de mettre en place une campagne expérimentale afin de disposer d'une base de référence pour valider les modèles et (iv) d'estimer la probabilité de défaillance pour un scénario sismique donné. Pour répondre à ces objectifs, le problème a été traité par le biais de quatre approches complémentaires qui sont : une approche expérimentale, une approche analytique, une approche numérique et une approche fiabiliste.

Tout d'abord, un état de l'art centré sur la modélisation semi-analytique des structures libres a été présenté dans le **chapitre II** de ce mémoire. Ce dernier indique que l'étude du comportement dynamique des structures libres (aussi bien rigides que flexibles), au moyen de modèles semi-analytiques, est un sujet qui est encore étudié de nos jours, notamment du fait de la complexité de leur comportement non linéaire. Les travaux récents de la littérature dédiés aux structures libres et flexibles indiquent que la question de la transition lors d'un impact, à l'issue d'une phase de rocking, est une question ouverte. Par ailleurs, ces travaux révèlent que lorsque l'on souhaite aborder cette question d'un point de vue analytique, il n'est pas évident de statuer à partir de comparaisons avec des résultats expérimentaux — obtenus dans le cadre d'expériences menées sur des structures « simples » et « semblables » aux modèles numériques — sur la pertinence des hypothèses à considérer pour traduire cette transition. En pratique, il est, en effet, très difficile de reproduire des conditions expérimentales aussi parfaites que celles retenues dans les modèles semi-analytiques (e.g sans glissement, mouvement parfaitement plan, etc.).

Les outils numériques (modèles et méthodes de résolution) utilisés dans le cadre de la thèse pour étudier le comportement de l'empilement d'un point de vue déterministe ont été présentés dans le **chapitre III** de ce mémoire. Les résultats de la mise en œuvre de ces outils, basée sur la confrontation avec les résultats expérimentaux, ont fait l'objet du **chapitre IV**, en distinguant ce qui relève des essais de caractérisation modale, des essais sismiques menés, dans le cadre de ce travail, avec des excitations unidirectionnelles. Les principaux résultats de ces travaux sont exposés ci-dessous :

- Il est possible de développer un modèle de référence, basé sur une modélisation fidèle de la structure, qui permette d'avoir une estimation pertinente des premiers modes propres de l'empilement simplement posé, pour des sollicitations de bas niveaux (de l'ordre de quelques centièmes de g pour le PGA). Ce modèle peut alors être utilisé pour élaborer un modèle réduit — possédant moins de degrés de liberté — qui puisse être utilisé pour les calculs dynamiques temporels non linéaires avec des temps de calculs qui ne soient pas prohibitifs.

- Sous excitation unidirectionnelle (voire bi ou tri-directionnelle mais cela n'a pas été vérifié), dès lors que l'on ne s'intéresse pas au renversement et que la rotation globale de l'empilement reste « petite », la réponse dynamique d'une structure libre et flexible peut être calculée à l'aide d'une méthode de projection sur base modale. Le principal avantage est que cela permet de réduire les temps de calculs, néanmoins cette méthode est à proscrire dans le cas des structures rigides.
- Lors de la caractérisation modale de l'empilement, la modélisation des zones d'interface a été minutieusement analysée en considérant différentes configurations. Nous avons constaté que l'influence de la modélisation de ces zones pouvait évoluer en fonction des configurations. Par exemple, la zone d'interface entre la base des paniers et des colis a moins d'influence à l'échelle d'un empilement que dans le cas d'un panier seul, les modes en jeu étant de « nature » différente (modes « globaux » contre modes « locaux »).
- La structure étant simplement posée sur le sol, les conditions d'appuis évoluent avec le niveau de l'excitation ce qui entraîne une évolution de la fréquence « apparente » de l'empilement.
- En pratique, pour ce type de structures qui possède de nombreuses zones d'interface et donc de nombreuses sources de non linéarités, la justification de la valeur de l'amortissement du modèle mécano-numérique associé — en particulier simplifié — n'est pas triviale.
- Toutes choses égales par ailleurs, c'est-à-dire à modèle donné, la diminution des taux d'amortissements modaux tend, à l'instar d'une structure au comportement linéaire, à amplifier sa réponse globale. Il ne semble donc pas y avoir d'effet contre intuitif associé à la variation de ces taux d'amortissements. Ce résultat est intéressant pour l'ingénieur dans la mesure où ces grandeurs ne sont en général pas très bien connues et que leur valeur peut dépendre de la modélisation adoptée (e.g. représentation ou non de certaines zones d'interface susceptibles de dissiper de l'énergie, etc.).
- Dans l'absolu, et en particulier sous excitation unidirectionnelle, il est nécessaire de tenir compte dans les modèles des inévitables défauts inhérents aux structures industrielles, bien qu'il soit difficile en pratique de disposer d'informations à leur sujet. Dans le cas de cette thèse, la prise en compte d'un défaut d'interface avec la dalle support a permis d'améliorer considérablement la représentativité du modèle et ce sur toutes les grandeurs étudiées. En conséquence, du fait de la présence d'inévitables défauts, le recours aux variables d'ajustement que constituent les taux d'amortissements modaux peut, en fonction de la grandeur d'intérêt — déplacement en tête et soulèvement par exemple — ne pas être suffisant pour garantir un résultat qui soit à la fois physique et enveloppe, notamment sous excitation unidirectionnelle.
- Le comportement dynamique sous séisme de structures libres et flexibles est avant tout piloté par la flexibilité de la structure. De ce fait, ces structures ainsi que leurs modèles présentent une sensibilité moins marquée — aux conditions expérimentales, au pas de temps de calculs, etc. — que les structures rigides.
- Pour finir, le modèle semi-analytique à quatre degrés de liberté apparaît comme un modèle intéressant pour l'ingénieur car il permet d'estimer rapidement la réponse globale de l'empilement lorsqu'il est sollicité par des excitations unidirectionnelles, bien que la modélisation de la transition à l'impact soit sujette à caution. Du point de vue du problème du recalage des modèles, qui est une tâche essentielle mais délicate, le modèle semi-analytique peut être une alternative pour évaluer rapidement la sensibilité des modèles par rapport aux principaux paramètres physiques, bien que, dans l'absolu, cette sensibilité puisse ne pas être du même ordre d'importance d'un modèle à l'autre.

La partie de la thèse consacrée à l'analyse probabiliste a été présentée dans le **chapitre V** de ce mémoire. L'exposé du problème fiabiliste relatif à notre étude et la description de la méthodologie proposée pour le résoudre ont été présentés. Cette analyse a été réalisée pour trois types d'excitation sismique : une excitation unidirectionnelle, une excitation bidirectionnelle et une excitation tridirectionnelle. Pour l'ensemble de ces excitations, trois indicateurs (la probabilité de défaillance et les indices de Cornell et de Hasofer-Lind) ont été calculés à partir des modèles mécano-numériques (réalisant le meilleur compromis entre temps de calcul raisonnable et représentativité mécanique satisfaisante) et pour deux critères de défaillance (l'un portant sur le déplacement horizontal en tête de l'empilement et l'autre sur le soulèvement de sa base). Ces calculs ont permis de réaliser une étude comparative des modèles mécano-numériques. Les principaux résultats de cette analyse sont exposés ci-dessous :

- Globalement, l'analyse probabiliste confirme les résultats obtenus dans le cadre de l'approche déterministe.
- Les calculs des probabilités de défaillance associées au critère de défaillance portant sur les soulèvements de la base, suite aux excitations bi et tridirectionnelles, indiquent que pour les valeurs de seuils étudiées, les probabilités de défaillance sont identiques à modèle donné. De plus, ces probabilités sont du même ordre de grandeur que celles obtenues pour des excitations unidirectionnelles pour tous les modèles. Ainsi, une première estimation de la valeur du soulèvement, basée sur un calcul avec une excitation unidirectionnelle, permet d'en obtenir un ordre de grandeur réaliste néanmoins, celui-ci ne sera pas enveloppe.
- Quel que soit le type de sollicitation étudié, la non prise en compte des défauts dans le modèle permet d'obtenir une valeur enveloppe du soulèvement pour les niveaux d'excitation sismique et les valeurs de seuils étudiés. Ce dernier résultat est important du point de vue de l'ingénieur car il est en général difficile de prendre en compte les défauts de la structure dans les modèles, compte tenu de la méconnaissance que l'on en a. Bien entendu, cette conclusion n'est valide que pour le type de défauts auquel nous avons été confrontés, à savoir un défaut d'homogénéité du coefficient de frottement à l'interface entre l'empilement et la dalle support.
- Les calculs des probabilités de défaillance associées au critère de défaillance portant sur la norme des déplacements horizontaux en tête de l'empilement révèlent que, pour les valeurs de seuils étudiées et pour les excitations unidirectionnelles, la prise en compte de défauts dans le modèle est nécessaire sous peine de les sous-estimer. Néanmoins, pour les excitations bi et tridirectionnelles, l'écart entre les probabilités de défaillance associées aux modèles avec défaut et sans défaut est moins important. Ce dernier résultat est intéressant pour l'ingénieur car il est en général difficile de prendre en compte les défauts dans les modèles et que seules les excitations tridirectionnelles sont réalistes. Comme précédemment, cette conclusion n'est valide que pour le type de défaut qui a été étudié.

Cette thèse a apporté des éléments de réponse à de nombreuses questions qui se posaient à son enclenchement. Toutefois, des études complémentaires pourraient être entreprises dans les quatre approches développées dans cette thèse.

- Expérimentalement, il serait intéressant de mettre en place une campagne expérimentale sur une table vibrante tridirectionnelle, par exemple sur la table vibrante Azalée du CEA de Saclay, afin de disposer d'une base de référence du comportement dynamique de l'empilement lorsqu'il est sollicité par des excitations tridirectionnelles puis, de comparer ces résultats à ceux issus des modèles développés dans cette thèse. D'autre part, les essais sismiques présentés dans cette thèse ont été réalisés avec des signaux bande étroite. Un travail complémentaire pourrait donc être réalisé à partir de signaux plus large bande afin de vérifier dans quelle mesure les phénomènes que nous avons observés sont influencés par la nature du signal.

- Numériquement, deux développements supplémentaires pourraient être réalisés. Premièrement, une modélisation non ponctuelle des pieds de l'empilement pourrait être mise en place afin de reproduire des conditions aux limites plus réalistes permettant de retrouver « naturellement » l'évolution de la fréquence « apparente » de l'empilement avec le niveau de l'excitation par exemple. Deuxièmement, il serait intéressant de résoudre directement les équations du mouvement sur base physique (et non par une méthode de projection sur base modale) et de comparer les deux types de résultats. Cela permettra de mieux appréhender les limites du calcul sur base modale pour ce type de structure.
- Analytiquement, une étude portant sur la transition de phase à l'impact au sortir d'une phase de rocking pourrait être envisagée. Au vu des nombreux articles qui traitent de ce sujet, cette étude complexe pourrait constituer un sujet de thèse.
- L'analyse fiabiliste présentée dans cette thèse a été réalisée pour calculer des probabilités de l'ordre de 10^{-1} à 10^{-2} . Dans un contexte de dimensionnement, il faudrait a minima estimer des probabilité bien plus petites de l'ordre de 10^{-4} . Ainsi, un premier travail complémentaire pourrait être fait en réalisant cette analyse sur un échantillon de taille plus importante. Par ailleurs, cette analyse pourrait être complétée en prenant en compte la variabilité des paramètres de la structure comme la position initiale des différents constituants (notamment celle des colis) et les défauts de la structure (notamment le coefficient de glissement au niveau de la base de l'empilement).

Annexe A

Déformées modales de l'empilement de trois paniers pleins des modèles réduits

Les déformées modales des six premiers modes de l'empilement de trois paniers pleins des modèles réduits sont représentées sur les figures A.1, A.2 et A.3. Les modes A et B sont des modes de translation des paniers 2 et 3, respectivement, dans les directions \underline{x} et \underline{y} . Le mode C est le mode de torsion de l'empilement. Les modes D et E sont des modes de translation en opposition de phase des paniers 2 et 3, respectivement, dans les directions \underline{x} et \underline{y} . Le mode F est un mode des colis, ce mode entraîne principalement la déformation de la base du panier inférieur.

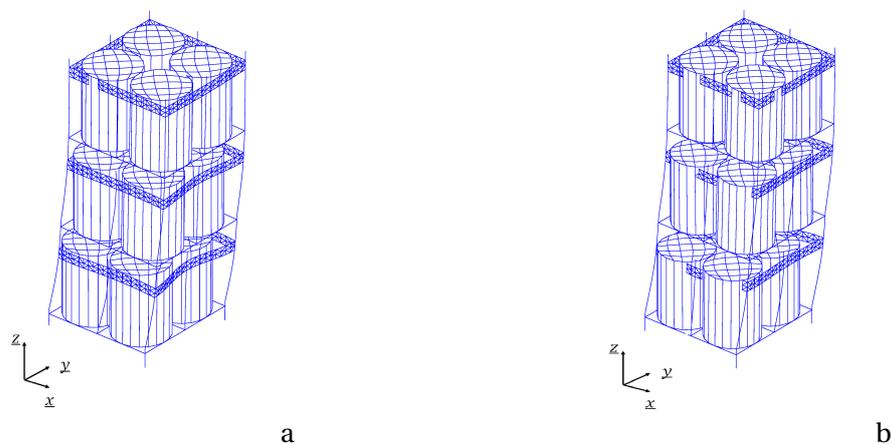


FIGURE A.1 – Déformées modales de l'empilement de trois paniers pleins des modèles réduits des modes A (a) et B (b)

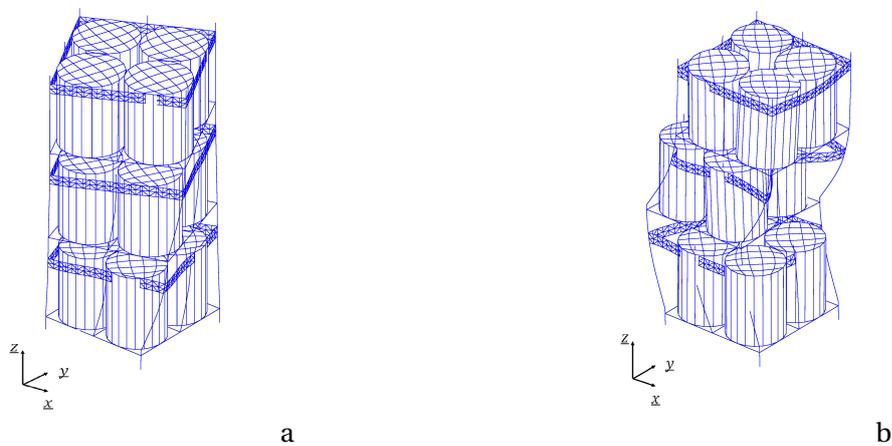


FIGURE A.2 – Déformées modales de l'empilement de trois paniers pleins des modèles réduits des modes C (a) et D (b)

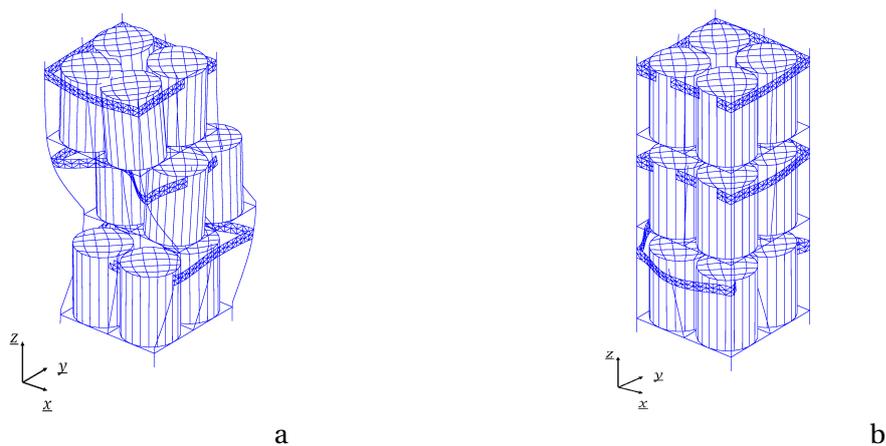


FIGURE A.3 – Déformées modales de l'empilement de trois paniers pleins des modèles réduits des modes E (a) et F (b)

Annexe B

Étude d'un lâcher non amorti

Une autre façon d'interpréter le spectre expérimental du panier 3 lors de l'analyse non linéaire a été de réaliser une étude numérique d'un lâcher non amorti de l'empilement à l'aide du modèle S4DoF. Dans un premier temps, la base reste en contact avec le sol (scénario 1). Puis, on réalise cette même étude dans le cas où la base peut se soulever (scénario 2).

Scénario 1 : la base reste en contact avec le sol

À l'instant initial, trois forces statiques horizontales de même direction et de même sens sont appliquées aux trois masses. La réponse de l'empilement est étudiée lorsque les forces ne sont plus appliquées. L'évolution temporelle du déplacement de la masse 2 et le spectre amorti à 2% de l'accélération de la masse 2 sont respectivement représentés sur les figures B.1.a et B.1.b. Dans cet exemple la structure n'est pas amortie, l'amplitude des oscillations des déplacements de la masse 2 reste donc identique au cours du temps. Sur le spectre de l'accélération de la masse 2, il y a uniquement un pic au niveau du premier mode de la phase 1 de l'empilement. Ainsi, seul ce mode intervient dans la réponse de l'empilement.

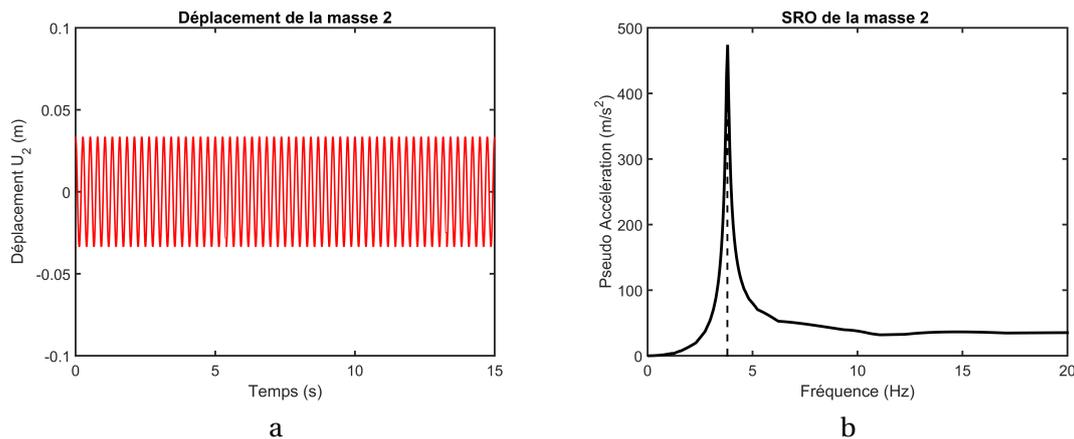


FIGURE B.1 – Évolution temporelle du déplacement (a) et spectre amorti à 2% de l'accélération de la masse 2 (b)

Scénario 2 : la base peut se soulever

Dans ce scénario, la base peut se soulever. Les conditions initiales sont similaires au scénario précédent. La réponse de l'empilement est représentée sur les figures B.2 et B.3. Les évolutions temporelles de la rotation de la base et du déplacement de la masse 2 sont représentées respectivement sur les figures B.2.a et B.2.b. L'évolution temporelle de la rotation de la base indique que les deux phases du modèle S4DoF apparaissent dans la réponse de l'empilement : la base se soulève

de 0 à 6 secondes (phase 2) puis la base reste en contact avec le sol de 6 à 15 secondes (phase 1). Ces deux phases s'observent également sur l'évolution temporelle du déplacement de la masse 2. Lors de la phase 2, l'amplitude des oscillations de la masse 2 n'est pas constante et est plus importante que l'amplitude des oscillations de la phase 1. Par ailleurs, l'amplitude des oscillations de la phase 1 de ce scénario est moins importante que celle du scénario précédent (7 mm vs 30 mm). Lors de la phase 2, des impacts entre la base et le sol ont eu lieu ce qui a dissipé de l'énergie. Par conséquent, la phase 1 qui a lieu après cette phase contient donc moins d'énergie que la phase 1 du scénario précédent. D'autre part, en comparant la rotation de la base et le déplacement de la masse 2, on observe que les oscillations de ces deux grandeurs sont en phases. La base est donc entraînée par les mouvements des masses.

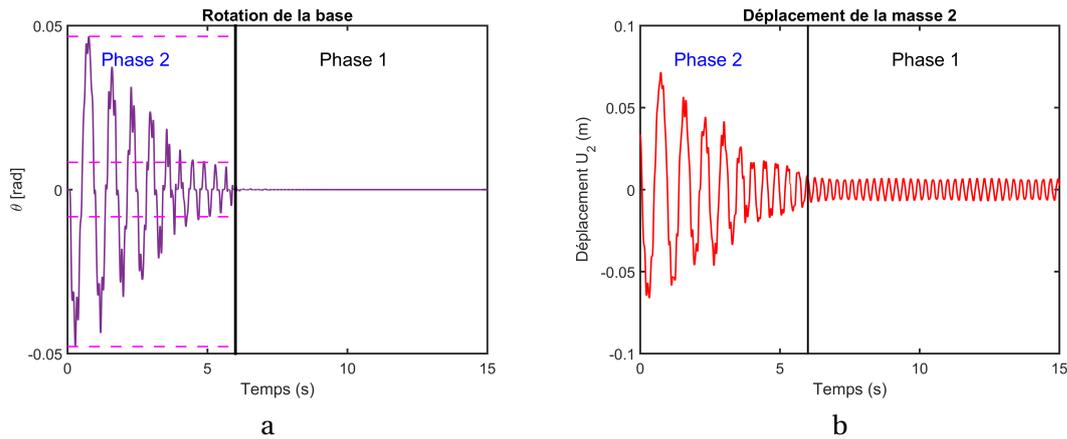


FIGURE B.2 – Évolutions temporelles de la rotation de la base (a) et du déplacement de la masse 2 (b)

Sur la figure B.3, le spectre amorti à 2% de l'accélération de la masse 2 est représenté en gris. Le spectre de la masse 2 du premier scénario est également représenté sur cette figure afin de pouvoir comparer les spectres de ces deux scénarios. Ce spectre est représenté en noir. En comparant ces deux spectres on observe plusieurs phénomènes. Tout d'abord, le pic du premier mode de la phase 1 est présent dans les deux scénarios néanmoins, le niveau de ce pic a beaucoup diminué dans le scénario 2. Par ailleurs, le spectre du scénario 2 est plus « complexe » car il est composé de plusieurs pics. Toutefois, une interprétation physique de chaque pic a pu être donnée, cette interprétation est la suivante :

(i) Dans un premier temps, le système est dans la phase 2, le spectre présente donc des pics au niveau des modes de la phase 2. Ces pics sont représentés par des traits bleus en pointillés.

(ii) Dans cette phase, la base rigide a un mouvement de rotation, ainsi, des modes de corps rigides apparaissent sur le spectre. Ces pics sont indiqués par des traits roses en pointillés. Comme il y a différentes amplitudes de rotation de la base, il y a différents modes de corps rigides. Les fréquences de ces modes peuvent se calculer à partir de la formule II.8 qui est l'équation du temps de chute mise en place par Housner.

(iii) Pour finir, le système est dans la phase 1. Ainsi, des pics au niveau des modes de la phase 1 apparaissent sur le spectre, ces pics sont indiqués par des traits noirs en pointillés. Contrairement au premier scénario, il n'y a pas un mais plusieurs modes qui apparaissent dans cette phase. En effet, lors de la phase de rocking il y a eu des chocs entre la base et le support. Les autres modes de l'empilement de la phase 1 ont été sollicités lors de ces chocs.

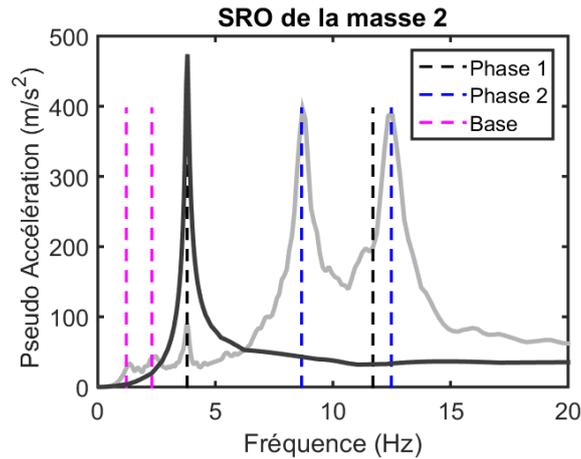


FIGURE B.3 – Spectre amorti à 2% de l'accélération de la masse 2

Synthèse

Le spectre de la masse 2 est plus « complexe » lorsque la base peut se soulever (scénario 2) que lorsqu'elle reste en contact avec le sol (scénario 1). En effet, dans le scénario 2, (i) les modes des deux phases interviennent dans la réponse de l'empilement et (ii) il n'y a pas uniquement le premier mode de la phase 1 qui intervient. Cette difficulté est une des spécificités du basculement de structures libres et flexibles. Cette étude a été réalisée avec le modèle S4DoF, un modèle qui contient peu de mode afin d'analyser le comportement dynamique de l'empilement (en particulier le spectre). Bien que le spectre de réponse de l'empilement réel (ou d'un modèle numérique qui a plus de degrés de liberté) soit plus complexe lorsque celui-ci est sollicité par une force extérieure car il contient d'avantage de pics, cette étude a permis d'interpréter le spectre expérimental du panier 3 car nous avons pu identifier les modes qui participaient à la réponse sismique.

Annexe C

Résultats complémentaires du chapitre IV de la comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques de la réponse d'un empilement suite à un signal sismique à fort niveau d'excitation

Dans le paragraphe [IV.2.2.4](#) du chapitre IV, la comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques de la réponse de l'empilement lorsque celui-ci est sollicité par le signal 4 est réalisée. Les déplacements horizontaux à la base et au sommet de l'empilement, les spectres des accélérations absolues ainsi que les soulèvements de la base y sont représentés. Dans cette annexe des résultats complémentaires de cette comparaison sont présentés. Dans un premier temps, les soulèvements de la base de l'empilement sont représentés au niveau de plusieurs pieds afin d'avoir une meilleure visibilité des soulèvements de chaque modèle. Puis, les déplacements horizontaux entre les paniers sont présentés afin d'évaluer l'apport de la modélisation des non linéarités entre les paniers. Les figures présentées dans cette annexe respectent le code couleur indiqué dans le tableau [IV.16](#).

Les évolutions temporelles des soulèvements expérimentaux et numériques au niveau de plusieurs pieds sont illustrées sur les figures [C.1](#). Cette figure est composée de six parties qui sont :

- la figure [C.1.a](#) où les soulèvements expérimentaux et numériques sont représentés au niveau du pied 1 ;
- la figure [C.1.b](#) où les soulèvements de l'essai et du modèle S4DoF sont représentés au niveau des quatre pieds pour les résultats expérimentaux et au niveau de deux extrémités de la basse rigide pour le modèle S4DoF ;
- la figure [C.1.c](#) où les soulèvements de l'essai et du modèle SNLFE sont représentés au niveau du pied 1 (représenté par un trait en continu et noté P1) et du pied 2 (représenté par un trait en pointillés et noté P2) ;
- la figure [C.1.d](#) où les soulèvements de l'essai et du modèle SNLFED sont représentés au niveau du pied 1 (représenté par un trait en continu et noté P1) et du pied 2 (représenté par un trait en pointillés et noté P2) ;
- la figure [C.1.e](#) où les soulèvements de l'essai et du modèle NLFE sont représentés au niveau du pied 1 (représenté par un trait en continu et noté P1) et du pied 2 (représenté par un trait en pointillés et noté P2) ;
- la figure [C.1.f](#) où les soulèvements expérimentaux et du modèle NLFED sont représentés au niveau du pied 1 (représenté par un trait en continu et noté P1) et du pied 2 (représenté par un trait en pointillés et noté P2).

*ANNEXE C. RÉSULTATS COMPLÉMENTAIRES DU CHAPITRE IV DE LA COMPARAISON ENTRE
LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX ET NUMÉRIQUES DE LA RÉPONSE D'UN EMPILEMENT
SUITE À UN SIGNAL SISMIQUE À FORT NIVEAU D'EXCITATION*

Ces figures permettent d'apporter une meilleure visibilité des soulèvements de chaque modèle. Les conclusions de la comparaison entre les soulèvements expérimentaux et numériques sont présentées dans le paragraphe IV.2.2.4. Cette meilleure visibilité des soulèvements indique que les défauts du modèle SNLFED semblent être mieux calés que ceux du modèle NLFED au niveau des soulèvements car les soulèvements expérimentaux sont plus similaires à ceux du modèle SNLFED qu'à ceux du modèle NLFED. À défaut de ne pas avoir trouvé un meilleur calage des défauts pour le modèle NLFED, il est identique à celui du modèle SNLFED à savoir que le coefficient de frottement au niveau du pied 4 est fixé à 0,25 contre 0,4 pour les autres pieds. Ce calage semble donc plus adapté au modèle SNLFED qu'au modèle NLFED.

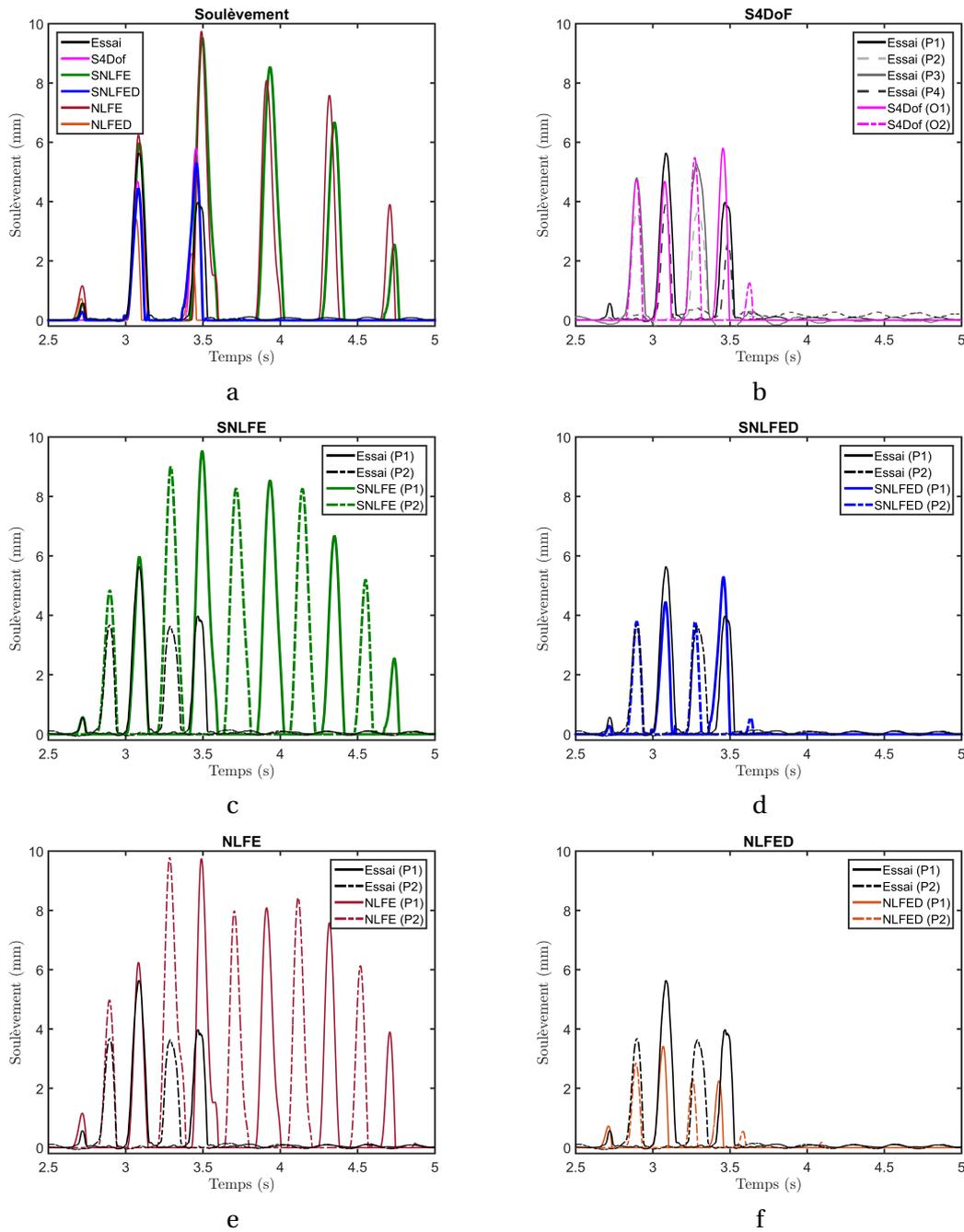


FIGURE C.1 – Évolutions temporelles des soulèvements expérimentaux et numériques de l'empilement au niveau de plusieurs pieds

ANNEXE C. RÉSULTATS COMPLÉMENTAIRES DU CHAPITRE IV DE LA COMPARAISON ENTRE LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX ET NUMÉRIQUES DE LA RÉPONSE D'UN EMPILEMENT SUITE À UN SIGNAL SISMIQUE À FORT NIVEAU D'EXCITATION

De plus, les évolutions temporelles des déplacements horizontaux inter-paniers des modèles et de l'essai sont représentées sur les figures C.2. Les déplacements sont représentés de la façon suivante :

- sur la figure C.2.a, le déplacement du panier 2 par rapport au panier 1 est représenté dans la direction \underline{x} ;
- sur la figure C.2.b, le déplacement du panier 2 par rapport au panier 1 est représenté dans la direction \underline{y} ;
- sur la figure C.2.c, le déplacement du panier 3 par rapport au panier 2 est représenté dans la direction \underline{x} ;
- sur la figure C.2.d, le déplacement du panier 3 par rapport au panier 2 est représenté dans la direction \underline{y} .

Ces déplacements représentent les glissements des paniers. Ils sont limités par les avaloirs des paniers inférieurs. Le jeu entre le pied et la butée d'un avaloir est égal à 5 mm si le pied du panier supérieur est centré dans l'avaloir. Dans les modèles NLFE et NLFED, les avaloirs sont modélisés à travers des liaisons. Le jeu des liaisons a été fixé à 0,5 mm. Cette valeur de jeu est plus faible que le jeu réel. Cependant, lorsqu'on augmentait cette valeur dans les modèles, l'empilement ne se soulevait plus car toute l'énergie se dissipait dans le glissement des paniers. La valeur du jeu des modèles a donc été fixée à 0,5 mm afin que l'empilement se soulève et que les paniers glissent entre eux. Expérimentalement, les déplacements des paniers 3 et 2 par rapport aux paniers 2 et 1 sont plus importantes dans la direction \underline{y} que dans la direction \underline{x} : à la fin du signal les paniers se sont déplacés jusqu'à 2 mm dans la direction \underline{y} et jusqu'à 0,5 mm dans la direction \underline{x} . Les déplacements inter-paniers dans la direction orthogonale à la sollicitation sont donc plus importants que dans la direction de la sollicitation. Ces déplacements sont dans le sens opposé aux déplacements de la base et du sommet de l'empilement. Ce dernier résultat peut surprendre toutefois les glissements étant un mouvement très sensible aux conditions aux limites et aux conditions expérimentales, leurs amplitudes et leurs sens peuvent fortement varier d'un essai à un autre (cf. annexe D). Numériquement, les mouvements dans la direction \underline{x} des modèles réduits sans défaut (c'est-à-dire SNLFE et NLFE) sont des oscillations dues à la flexibilité de la structure. Les déplacements du modèle NLFED qui prend en compte les non linéarités entre les paniers et les défauts représentent les glissements des paniers supérieurs. Dans la direction \underline{y} , les amplitudes des glissements expérimentaux sont plus importantes que celles du modèle NLFED ce dernier résultat indique que ce modèle n'est pas bien calé. Au vue de la sensibilité du glissement des paniers (cf. annexe D), le calage du modèle est très délicat. Néanmoins, ce modèle permet d'évaluer l'impact des glissements des paniers sur le comportement global en comparant les modèles numériques simplifiés et non simplifiés. Pour le niveau de sollicitation que nous avons étudié, les glissements des paniers ne semblent pas impacter significativement le comportement global car les soulèvements et le déplacement en tête des modèles SNLFE et NLFE ainsi que des modèles SNLFED et NLFED sont semblables deux à deux.

ANNEXE C. RÉSULTATS COMPLÉMENTAIRES DU CHAPITRE IV DE LA COMPARAISON ENTRE
LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX ET NUMÉRIQUES DE LA RÉPONSE D'UN EMPILEMENT
SUITE À UN SIGNAL SISMIQUE À FORT NIVEAU D'EXCITATION

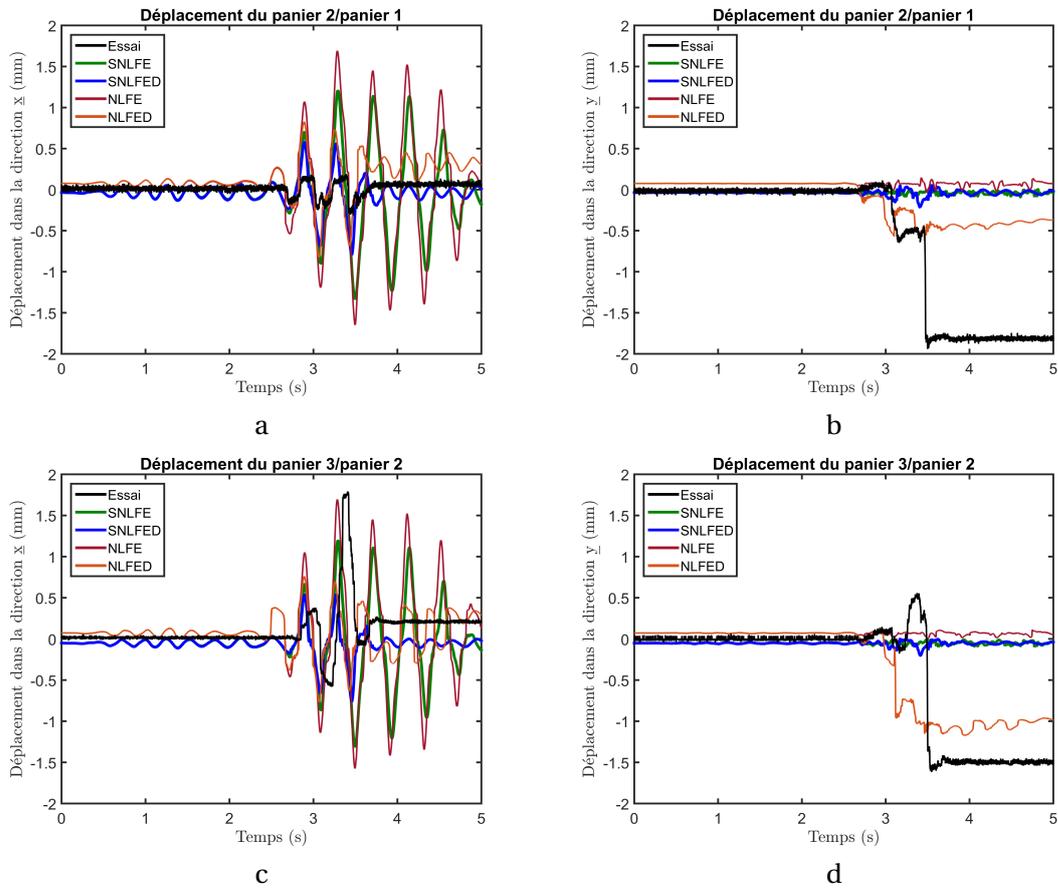


FIGURE C.2 – Évolutions temporelles des déplacements horizontaux inter-paniers

Annexe D

Résultats complémentaires du chapitre IV sur la variabilité des résultats expérimentaux de l'analyse non linéaire

La variabilité des déplacements horizontaux inter-paniers est présentée dans cette annexe. Seule la variabilité des résultats expérimentaux est présentée car celle des modèles est quasiment nulle. Les évolutions temporelles des déplacements horizontaux inter-paniers sont représentées de la façon suivante :

- sur la figure D.1.a, les déplacements du panier 2 par rapport au panier 1 sont représentés dans la direction \underline{x} ;
- sur la figure D.1.b, les déplacements du panier 2 par rapport au panier 1 sont représentés dans la direction \underline{y} ;
- sur la figure D.1.c, les déplacements du panier 3 par rapport au panier 2 sont représentés dans la direction \underline{x} ;
- sur la figure D.1.d, les déplacements du panier 3 par rapport au panier 2 sont représentés dans la direction \underline{y} .

De même que les résultats présentés dans la section IV.2.3, la figure D.1 montre, au travers des déplacements inter-paniers, que le comportement de l'empilement présente un très faible niveau de variabilité tant qu'il est quasi linéaire. Dans cette phase du mouvement, l'écart-type des déplacements en tête, aussi bien suivant \underline{x} que \underline{y} , est de l'ordre de 0,02 mm. Ensuite, du fait des soulèvements, l'écart-type augmente jusqu'à environ 1,5 mm dans la direction \underline{x} et jusqu'à 1 mm dans la direction \underline{y} . La figure D.1 indique que d'un essai à un autre, les amplitudes et le sens de glissements des paniers peuvent fortement varier. Les glissements sont très sensibles aux conditions aux limites et aux conditions expérimentales. La variabilité expérimentale de cette grandeur permet de se rendre compte de la sensibilité du comportement de ce type de structure ainsi que de la sensibilité du calage des défauts des modèles.

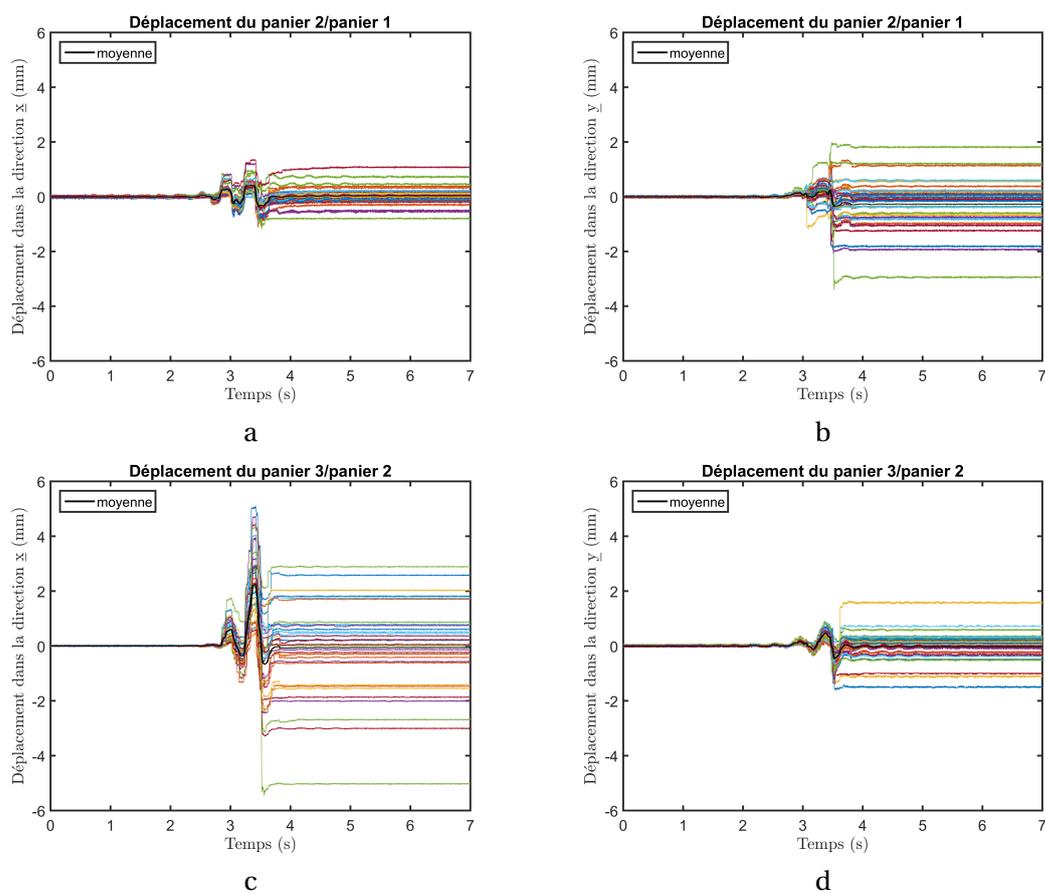


FIGURE D.1 – Évolutions temporelles des déplacements horizontaux inter-paniers dans les directions \underline{x} (a et b) et \underline{y} (c et d)

Annexe E

Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de la réponse d'un empilement sollicité par une excitation sismique tridirectionnelle

Préalablement à cette thèse, la stabilité sous séisme de cet empilement a été étudiée à l'aide d'une campagne expérimentale. Cette campagne expérimentale intitulée MAGENTA, a été réalisée en 2015 sur la table vibrante AZALÉE du laboratoire EMSI du CEA de Saclay. Cette campagne était une campagne de qualification. L'objectif était de valider la stabilité d'un empilement de paniers de stockage sur trois niveaux. Lors de ces essais, l'empilement a été sollicité par un signal de niveau SMS/Cadarache dont les spectres de référence correspondent aux spectres élargis de 15% et lissés pour un amortissement de 4%. Les évolutions temporelles de l'excitation dans les directions x , y et z sont respectivement représentées sur les figures E.1.a, E.1.b et E.1.c.

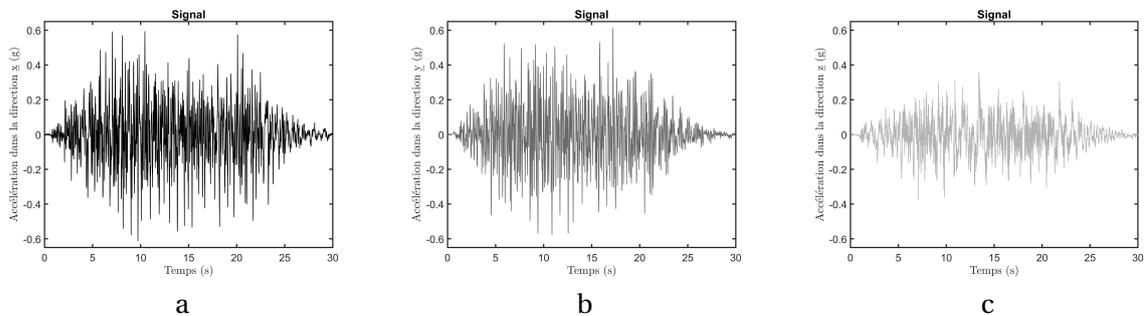


FIGURE E.1 – Évolutions temporelles du signal dans les directions x (a) y (b) et z (c)

Afin de valider les modèles numériques lorsque l'empilement est sollicité par une excitation sismique tridirectionnelle, nous avons récupéré les résultats de cette campagne expérimentale pour pouvoir les comparer à ceux de nos modèles. Ainsi, la réponse de l'empilement lorsqu'il est sollicité par le signal tridirectionnelle de la figure E.1 a été calculée à l'aide du modèle SNLFE. Les résultats du modèle SNLFED ne sont pas présentés dans cette comparaison car le calage des défauts dépend des caractéristiques du signal (c'est-à-dire de la durée du signal et de la largeur de bande spectrale) mais aussi de la campagne expérimentale. Ainsi, le calage des défauts du modèle SNLFED ne correspond pas à cet essai. Les résultats expérimentaux sont donc uniquement comparés à ceux du modèle SNLFE. Les évolutions temporelles du déplacement de la base de l'empilement sont représentées la direction x sur la figure E.2.a et dans la direction y sur la figure E.2.b. Les évolutions temporelles des soulèvements de l'empilement sont représentées sur la figure E.3. Les évolutions temporelles du déplacement en tête l'empilement sont représentées dans la direction x sur la figure E.4.a et dans la direction y sur la figure E.4.b. Dans ces figures, les

ANNEXE E. COMPARAISON DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX ET NUMÉRIQUES DE LA
RÉPONSE D'UN EMPILEMENT SOLLICITÉ PAR UNE EXCITATION SISMIQUE
TRIDIRECTIONNELLE

résultats expérimentaux et numériques sont respectivement représentés en noir et en vert. Étant donné que c'était une campagne de qualification, il n'y a pas eu beaucoup d'instrumentation notamment il n'y avait pas d'accéléromètre. Les spectres des accélérations absolues ne sont donc pas représentés.

Les déplacements à la base de l'empilement correspondent à des glissements de l'empilement et non à des mouvements de rotation autour de l'axe Oz comme lorsque l'empilement était sollicité par une sollicitation unidirectionnelle. Les déplacements numériques sont plus importants que ceux expérimentaux. En effet, les paramètres du modèle SNLFE ont été calés par rapport à la campagne expérimentale EDEN. Ce résultat indique que les conditions expérimentales ont évolué d'une campagne à une autre. Néanmoins, ces premiers résultats indiquent que le modèle SNLFE permet d'avoir une première estimation des soulèvements et du déplacement en tête bien que ce modèle ne prend pas en compte les défauts de la structure. Les conséquences des défauts de la structure sur le comportement global semblent donc moins importantes que dans le cas d'une sollicitation unidirectionnelle. Le modèle SNLFE semble donc être un modèle conservatif lorsque la sollicitation est tridirectionnelle.

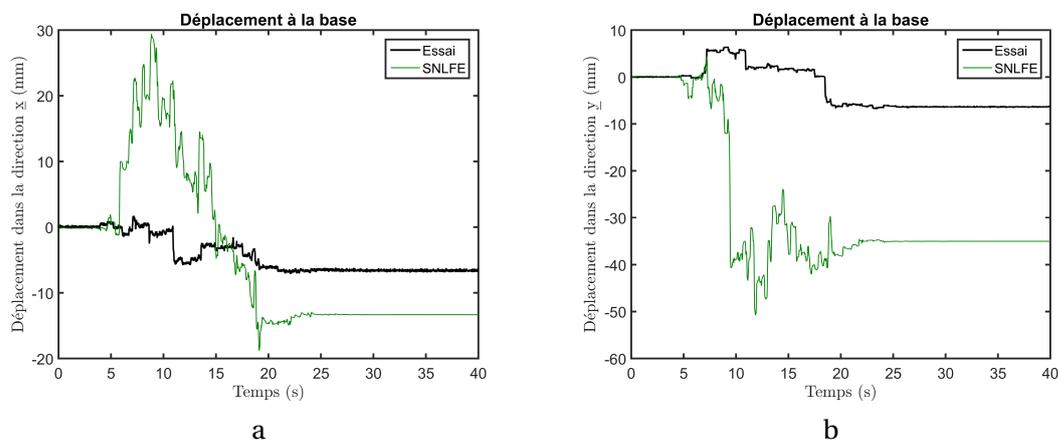


FIGURE E.2 – Évolutions temporelles du déplacement à la base de l'empilement dans les directions \underline{x} (a) et \underline{y} (b) des résultats expérimentaux (en noir) et numériques (en vert)

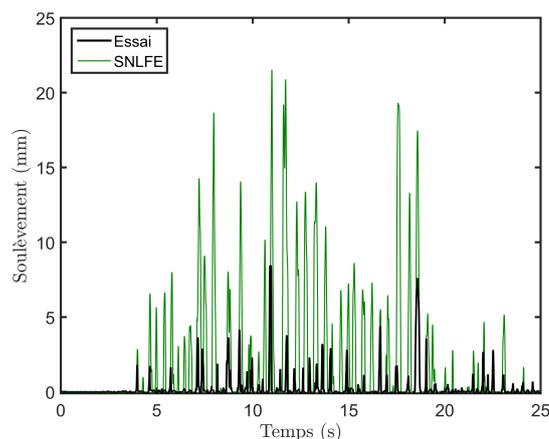


FIGURE E.3 – Évolution temporelle des soulèvements de la base de l'empilement des résultats expérimentaux (en noir) et numériques (en vert)

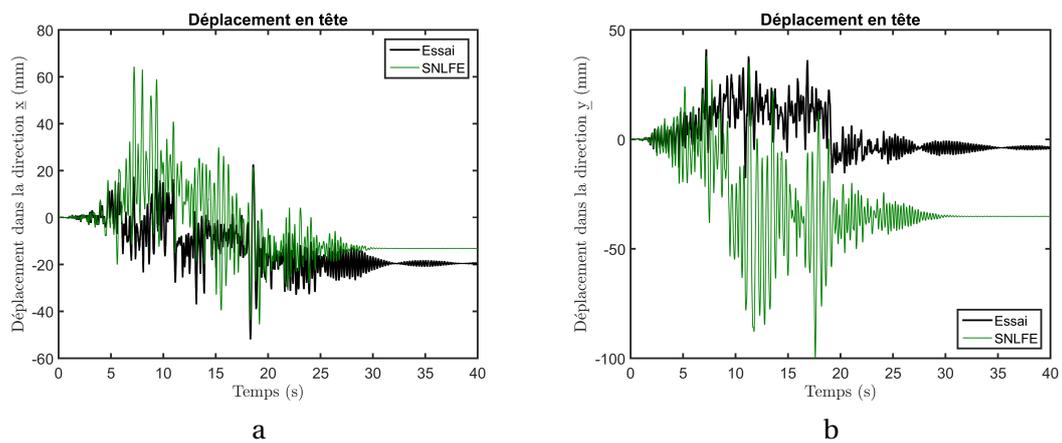


FIGURE E.4 – Évolutions temporelles du déplacement en tête de l'empilement dans les directions \underline{x} (a) et \underline{y} (b) des résultats expérimentaux (en noir) et numériques (en vert)