



**HAL**  
open science

# Modèles homogénéisés enrichis en présence de bords : Analyse et traitement numérique

Clément Beneteau

► **To cite this version:**

Clément Beneteau. Modèles homogénéisés enrichis en présence de bords : Analyse et traitement numérique. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Institut Polytechnique de Paris, 2021. Français. NNT : 2021IPPAE001 . tel-03160431

**HAL Id: tel-03160431**

**<https://theses.hal.science/tel-03160431>**

Submitted on 5 Mar 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT  
POLYTECHNIQUE  
DE PARIS

NNT : 2021IPPAE001

Thèse de doctorat



# Modèles homogénéisés enrichis en présence de bords : Analyse et traitement numérique

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris  
préparée à Ecole nationale supérieure des techniques avancées

École doctorale n°574 Ecole Doctorale de Mathématiques Hadamard (EDMH)  
Spécialité de doctorat : Mathématiques appliquées

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 20 janvier 2021, par

**CLÉMENT BENETEAU**

Composition du Jury :

François ALOUGES Professeur, Ecole polytechnique (CMAP)	Président du jury
Renata BUNOIU Maîtresse de conférence, Université de Lorraine (IECL)	Examinatrice
Xavier CLAEYS Maître de conférence, Sorbonne université (LJLL)	Directeur de thèse
Sonia FLISS Enseignante-chercheuse, ENSTA-Paris (Poems)	Directrice de thèse
Bruno LOMBARD Directeur de recherche CNRS, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique	Examineur
Grigory PANASENKO Professeur, Université de Saint-Etienne (ICJ)	Examineur
Clair POIGNARD Professeur, INRIA Bordeaux-Sud ouest (MONC)	Rapporteur
Grégory VIAL Professeur, Ecole centrale de Lyon (ICJ)	Rapporteur





# Remerciements

Après trois années riches en mathématiques et en émotions, me voici arrivé à la fin d'un redoutable parcours. Je garde de cette expérience dans la recherche beaucoup de souvenirs et de rencontres.

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Sonia et Xavier. Durant ces trois années, votre accompagnement, vos conseils et votre soutien ont été précieux pour moi. J'ai beaucoup appris à vos côtés et je vous en suis très reconnaissant.

Je remercie François Alouges d'avoir accepté d'être président du jury. Je remercie vivement Clair Poignard et Grégory Vial pour leur relecture attentive et leurs rapports très précieux. Je remercie également Renata Bunoiu, Bruno Lombard et Grigory Panasenko pour l'évaluation de ce travail en tant que membres du jury.

Quoi de mieux pour se sentir bien entouré qu'un laboratoire et une équipe de qualité. Je remercie vivement tous les membres de l'UMA et de l'équipe Poems pour leur accueil chaleureux, les discussions au coin café et tous les bons moments que j'ai pu passer avec vous. Je remercie plus particulièrement Antoine et Sandrine pour leur bonne humeur, les fous rires : on a formé un bon petit trio. Merci à Nico sans qui les résultats numériques de cette thèse n'aurait pas pu voir le jour.

Je remercie chaleureusement ma famille et mes amis pour leur soutien indéfectible et il en a fallu ! Pour finir, un grand merci à Baptiste pour ton soutien quotidien et la force de tenir que tu m'as apportée et sans laquelle je n'aurais pas réussi à achever ce travail.



# Résumé

Quand on s'intéresse à la propagation des ondes dans un milieu périodique à basse fréquence (i.e. la longueur d'onde est grande devant la période), il est possible de modéliser le milieu périodique par un milieu homogène équivalent ou effectif qui a les mêmes propriétés macroscopiques. C'est la théorie de l'homogénéisation qui justifie d'un point de vue mathématique ce procédé. Ce procédé est très séduisant car les calculs numériques sont beaucoup moins coûteux (la petite structure périodique a disparu) et des calculs analytiques sont de nouveau possibles dans certaines configurations. Les ondes dans le milieu périodique et dans le milieu effectif sont très proches d'un point de vue macroscopique sauf en présence de bords ou d'interfaces.

En effet, il est bien connu que le modèle homogénéisé est obtenu en négligeant les effets de bords et par conséquent il est beaucoup moins précis aux bords du milieu périodique. Quand les phénomènes intéressants apparaissent aux bords du milieu (comme la propagation des ondes plasmoniques à la surface des métamatériaux par exemple), il semble donc difficile de faire confiance au modèle effectif.

En revenant sur le processus d'homogénéisation, nous proposons un modèle homogénéisé qui est plus riche aux niveaux des bords. Le modèle homogénéisé enrichi est aussi simple que le modèle homogénéisé classique loin des interfaces, seules les conditions aux bords changent et prennent mieux en compte les phénomènes. Nous appliquons ce modèle à une équation elliptique dans le cas de la géométrie simple du demi-plan avec des conditions de type Dirichlet ou Neumann. D'un point de vue numérique, en plus des problèmes de cellule classiques qui apparaissent en homogénéisation, des problèmes de bandes périodiques doivent également être résolus. Pour finir, nous appliquons ces résultats à l'homogénéisation de l'équation des ondes en temps long et en présence de bords.



# Abstract

When we are interested in the propagation of waves in a periodic medium at low frequency (i.e. wavelength large compared to the period length), it is possible to model the periodic medium by an equivalent or effective homogeneous medium which has the same macroscopic properties. It is the homogenization theory that mathematically justifies this process. This process is very attractive because numerical calculations are then much less expensive (the small periodic structure has disappeared) and analytical calculations are again possible in certain configurations. The waves in the periodic medium and in the effective medium are very close from a macroscopic point of view except in the presence of boundaries or interfaces.

Indeed, it is well known that the homogenized model is obtained by neglecting the boundary effects and consequently, it is much less precise at the boundaries of the periodic medium. When interesting phenomena appear at the edges of the middle (such as the propagation of plasmonic waves on the surface of metamaterials for example), it therefore seems difficult to trust the effective model.

Returning to the homogenization process, we propose a homogenized model which is richer at the boundaries. The enriched homogenized model is as simple as the classical homogenized model far from the interfaces, only the boundary conditions change and take better account of the phenomena. We apply this model to an elliptical equation in the case of the simple geometry of the half-plane with Dirichlet or Neumann type conditions. From a numerical point of view, in addition to classic cell problems that appear in homogenization, periodic band problems must also be solved. Finally, we apply these results to the long time wave equation.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Homogénéisation dans un milieu sans bord</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction du problème . . . . .	7
1.2 La méthode des développements à double échelle . . . . .	8
1.2.1 Ansatz . . . . .	8
1.2.2 Application aux premiers ordres . . . . .	10
1.2.3 Formalisme pour un développement à tout ordre . . . . .	16
1.3 Estimations d'erreur . . . . .	19
1.4 Simulations numériques . . . . .	22
<b>2 Homogénéisation enrichie en présence d'un bord avec une condition de Dirichlet</b>	<b>27</b>
2.1 Le cas de la dimension 1 . . . . .	28
2.2 Les difficultés en dimension $d \geq 2$ . . . . .	31
2.3 Développement asymptotique double-échelle enrichi . . . . .	32
2.3.1 Présentation du développement enrichi . . . . .	32
2.3.2 Étude du problème type de demi-bande infini . . . . .	34
2.3.3 Application aux premiers ordres . . . . .	38
2.3.4 Formalisme pour un développement à tout ordre . . . . .	41
2.4 Estimations d'erreur . . . . .	44
2.5 Résultats numériques . . . . .	48
2.6 Le modèle approché à l'ordre 1 . . . . .	58
2.6.1 Première méthode : le décalage géométrique . . . . .	59
2.6.2 Deuxième méthode : modification des problèmes de cellule . . . . .	60
2.6.3 Estimations d'erreur . . . . .	62
2.6.4 Résultats numériques . . . . .	65
2.7 Le modèle approché à l'ordre 2 . . . . .	69
<b>3 Homogénéisation en deux dimensions avec condition de Neumann</b>	<b>75</b>
3.1 Développement asymptotique double-échelle enrichi . . . . .	75
3.1.1 Présentation du développement enrichi . . . . .	75
3.1.2 Étude du problème type de demi-bande infini . . . . .	76
3.1.3 Application aux premiers ordres . . . . .	78
3.1.4 Formalisme pour un développement à tout ordre . . . . .	85
3.2 Estimations d'erreur . . . . .	88
3.3 Résultats numériques . . . . .	92

---

<b>4</b>	<b>Résolution de problèmes posés dans des demi-bandes périodiques</b>	<b>99</b>
4.1	Problème sans terme source et avec condition de Dirichlet . . . . .	99
4.2	Problème avec terme source et condition de Dirichlet homogène . . . . .	107
4.3	Problème sans terme source et avec condition de Neumann . . . . .	112
4.3.1	Développement de la méthode . . . . .	113
4.3.2	Alternative utilisant l'opérateur Dirichlet-to-Neumann . . . . .	117
4.4	Résolutions et applications numériques . . . . .	118
4.4.1	Calcul des opérateurs de propagation . . . . .	118
4.4.2	Calcul des conditions au bord . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Homogénéisation de l'équation des ondes en temps long : prise en compte d'un bord de Dirichlet</b>	<b>123</b>
5.1	Homogénéisation de l'équation des ondes en temps long dans $\mathbb{R}^d$ . . . . .	123
5.1.1	Développement asymptotique double échelle . . . . .	123
5.1.2	Modèle homogénéisé d'ordre élevé . . . . .	125
5.2	Homogénéisation de l'équation des ondes en temps long dans $\mathbb{R}^+$ . . . . .	127
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>133</b>
6.1	Conclusion . . . . .	133
6.2	Perspectives . . . . .	133
<b>A</b>	<b>Décroissance exponentielle dans la demi-bande</b>	<b>137</b>

# Introduction

## Contexte de la thèse et motivations

Ce sujet de thèse a été financé en partie par le Labex Mathématiques Hadamard (LMH) et par la DGA parce qu'il est en lien avec les thématiques prioritaires de la DGA « métamatériaux », « modélisation et simulation » et « modélisation des équations d'ondes en milieu multi-échelle ». Cette thématique est motivée par des découvertes récentes qui ont montré la possibilité de réaliser théoriquement et expérimentalement des matériaux électromagnétiques faiblement dissipatifs, dont les constantes diélectriques et magnétiques effectives ont des parties réelles négatives. Citons notamment Veselago [61] qui dès les années 60 a étudié les propriétés de matériaux qui auraient des constantes de permittivité électrique et de perméabilité magnétique négatives même si on ne savait pas à l'époque comment en construire. Bien plus tard, David Smith et ses collaborateurs ont en 2000 construit un matériau structuré assez complexe (la structure est périodique et chaque période est composée d'anneaux de taille très petite) présentant une permittivité et une perméabilité négatives sur une bande de fréquences dans le domaine des micro-ondes [114]. Dans les travaux de Shelby et al. en 2001 [111], on trouve une expérience de diffraction de ce matériau montrant que l'indice de réfraction effectif était négatif dans cette gamme de fréquence. Enfin, Pendry [104] a montré que ces matériaux pourraient être utilisés pour construire de super-lentilles, c'est à dire des lentilles pour lesquelles les limites de résolution classiques seraient affranchies. Plus généralement, ces « métamatériaux », de structure multi-échelle complexe, conduiraient à des phénomènes extraordinaires en ce qui concerne la propagation des ondes électromagnétiques (réfraction négative, résonance de cavités « sous longueur d'onde », ...) et suscitent donc un grand intérêt en vue de nombreuses applications potentielles (super-lentilles [61, 84], revêtement furtif [85, 102, 40], miniaturisation des antennes [125, 126], ...).

La structure de ces métamatériaux présentant en général plusieurs échelles de taille très différente, il est très coûteux voire impossible de simuler la propagation des ondes dans ces milieux en prenant en compte toute leur complexité. Une alternative séduisante consiste à modéliser le métamatériau par un matériau homogène, à constantes physiques de partie réelle négative. Cette approche qui est connue sous le nom d'homogénéisation est très utilisée par les physiciens et est un sujet de recherche en mathématiques très actif depuis les années 70. Nous renvoyons le lecteur à une présentation générale de la théorie de l'homogénéisation pour des systèmes elliptiques à coefficients périodiques dans [18, 43, 117, 78, 10]. Ainsi, on trouve dans la littérature que pour certains milieux périodiques dont la structure présente des mécanismes de résonance (liés à la géométrie via des résonateurs de Helmholtz par exemple ou aux caractéristiques des matériaux), la permittivité diélectrique effective ([62, 113]), la perméabilité magnétique effective ([103, 87, 32, 30]) voire même les 2 ([65, 63, 31, 33, 29]) pouva(en)t devenir négatives pour certaines gammes de fréquences. Des techniques spécifiques d'homogénéisation (les techniques d'homogénéisation réitérées par exemple) ont été introduites pour prendre en compte les phénomènes de résonances

---

et les multiples échelles. Des résultats de convergence (double-échelle) ont également été prouvés.

Cependant, il est bien connu que le processus d'homogénéisation classique ne prend pas bien en compte les bords et les interfaces (nous reviendrons un peu plus loin sur ce point) et le modèle homogénéisé est connu pour être en général moins précis en présence de bords ou d'interfaces. C'est assez problématique pour la modélisation des métamatériaux car un certain nombre de phénomènes intéressants apparaissent à leur surface (citons notamment les ondes plasmoniques). Les modèles effectifs qui sont utilisés pour modéliser les métamatériaux sont donc a priori peu précis près des bords et des interfaces et ils peuvent même être complètement faux. En effet, lorsqu'on considère une interface entre un diélectrique et un métamatériau et que le contraste de permittivité et/ou de perméabilité est égal à  $-1$ , il apparaît à l'interface une accumulation d'énergie qui n'est pas compatible avec le cadre mathématique/physique usuel [48, 101, 99, 100, 86]. En présence de singularités ou coins sur l'interface, les travaux [24, 27, 26, 25] ont montré que les problèmes de transmission ne sont pas bien posés dans un cadre classique pour un intervalle entier de valeurs du contraste de permittivité et/ou perméabilité : pour ces valeurs, il faut rajouter une condition de type « radiation » au niveau du coin pour le rendre bien posé. Il semble que ces difficultés soient dues à une description asymptotique insuffisamment fine des phénomènes de propagation au voisinage des interfaces.

C'est pour ces raisons que nous proposons de revisiter le processus asymptotique d'homogénéisation afin de proposer des modèles homogénéisés qui sont plus précis près des bords et des interfaces mais aussi simples à implémenter. Nous nous concentrons sur des modèles dont les coefficients ne changent pas de signe. Nous insistons sur les aspects d'implémentation et d'ailleurs une grande partie de ce travail est consacrée à l'implémentation de ces nouveaux modèles homogénéisés.

Le sujet de cette thèse est évidemment en lien avec la présence de « couches limites » (boundary layers en anglais) qui apparaissent en général quand on considère des modèles asymptotiques près de bords ou d'interfaces. Dans le cadre de l'homogénéisation, ceci a déjà été mis en évidence par exemple dans [18] et a été étudié intensivement dans la littérature. Citons notamment [94, 95, 7, 20, 19, 70, 71, 112, 12] pour des systèmes elliptiques avec des conditions de Dirichlet ou Neumann. Pour les problèmes de transmission, il y a moins de contributions, le problème est néanmoins largement abordé dans [14] et plus récemment dans [21, 37, 80] et dans [92] pour des milieux périodiques stratifiés. Dans toutes ces contributions, et excepté peut être dans [7], les couches limites sont analysées en fonction des bords ou des interfaces mais on ne propose jamais des modèles effectifs plus précis qui prendraient en compte d'une quelconque manière ces couches limites. C'est exactement ce que nous souhaitons réaliser dans cette thèse. De plus, la démarche que nous proposons permettrait de proposer des modèles effectifs à tout ordre alors que ce sont souvent les couches limites « des premiers ordres » qui sont analysées.

L'approche que nous utilisons est différente de celle utilisée dans les références ci-dessus. Les développements asymptotiques classiques, dits à double-échelle, qui sont pertinents dans des milieux périodiques infinis dans toutes les directions, tombent en défaut au voisinage d'un bord ou d'une interface puisque le milieu n'est plus périodique. Nous proposons d'enrichir le développement asymptotique proche du bord ou de l'interface. Pour ce faire, il est possible d'utiliser les techniques de développements multi-échelles composés ou les techniques de développements asymptotiques raccordés [76, 93, 119]. Ces méthodes sont souvent considérées comme équivalentes (voire notamment [118] pour un problème particulier). Ce travail est largement inspiré de nombreux travaux sur la diffraction par des couches minces homogènes [13, 60, 16, 15, 73, 121, 38, 108, 59] ou périodiques [1, 5, 28, 106, 44, 107, 53, 45, 54, 52, 91] et

les travaux sur les effets de peau en présence de matériaux à forte conductivité [90, 74, 75, 105, 39].

Avant de s'attaquer aux équations de Maxwell 3D et aux modèles effectifs enrichis en présence de métamatériaux, nous nous sommes intéressés à des milieux 2D présentant deux échelles (comme dans la théorie d'homogénéisation classique) et à des équations scalaires. Comme ce sont des phénomènes de propagation qui nous motivent, nous avons étudié l'équation des ondes en régime harmonique (et partiellement en régime temporel). Notre approche pourrait facilement être étendue à d'autres systèmes elliptiques, cependant pour l'instant, comme nous allons le voir, les géométries sont assez simples.

## Présentation des problèmes traités et de la démarche

Une partie de la thèse de Valentin Vinales [123] a été consacrée à l'élaboration de modèles effectifs enrichis d'ordre 1 pour un problème de transmission entre un demi-espace homogène et un demi-espace périodique quand l'interface coupe le milieu périodique dans une direction de périodicité. Le milieu périodique est standard dans le sens où les outils de l'homogénéisation classique peuvent être utilisés (au moins loin de l'interface). Même dans ce cas simplifié, le modèle effectif classique est moins précis en présence d'une interface et un modèle effectif enrichi a été proposé. Plus précisément, en couplant les développements double échelle classiques dans le milieu périodique avec des développements asymptotiques raccordés proches de l'interface, nous avons proposé un modèle asymptotique pertinent et précis dans tout le domaine. Il est également possible d'en déduire des conditions de transmission d'ordre élevé qui sont plus précises que les conditions de transmissions classiques (correspondant à la continuité de la trace et de la dérivée co-normale de la solution à travers l'interface). Ces conditions sont moins standards car elles font intervenir des opérateurs différentiels le long de l'interface. Des estimations d'erreur confirment la précision. Les résultats numériques obtenus étaient très encourageants mais la méthode numérique utilisée n'était pas assez précise pour illustrer complètement les résultats théoriques. En outre, il semblait difficile d'utiliser ce code pour implémenter des conditions d'ordre encore plus élevés.

Dans cette thèse, nous avons considéré dans un premier temps l'équation de Helmholtz

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}[a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon] - \omega^2 \rho_\varepsilon u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

en présence de dissipation (en d'autres termes  $\operatorname{Im} \omega^2 > 0$ ). Cette condition garantira le caractère bien posé des problèmes considérés.<sup>1</sup> Le domaine  $\Omega$  est un demi-espace :  $\Omega := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . Les deux fonctions caractérisant les propriétés du milieu  $a_\varepsilon, \rho_\varepsilon : \Omega \rightarrow (0, +\infty)$  sont définis par

$$a_\varepsilon(\mathbf{x}) = a_p\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad \rho_\varepsilon(\mathbf{x}) = \rho_p\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

où  $a_p, \rho_p \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$  sont tels que  $\lambda \leq a_p(\mathbf{x}) \leq \Lambda$  et  $\lambda \leq \rho_p(\mathbf{x}) \leq \Lambda$  pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  (avec les constantes  $\lambda, \Lambda \in (0, +\infty)$ ) et sont des fonctions 1-périodiques dans les deux directions

$$a_p(x_1 + 1, x_2) = a_p(x_1, x_2 + 1) = a_p(x_1, x_2) \quad \text{et} \quad \rho_p(x_1 + 1, x_2) = \rho_p(x_1, x_2 + 1) = \rho_p(x_1, x_2).$$

---

1. En absence de dissipation, il faudrait rajouter en général une condition de radiation (l'équivalent de la condition de Sommerfeld pour les milieux périodiques) pour rendre le problème bien posé. Dans les milieux périodiques considérés, cette condition n'est pas encore connue. Ainsi les développements formels fonctionnent en absence de dissipation mais leur justification théorique via des estimations d'erreur reste une question ouverte.

On notera dans ce manuscrit  $Y = (0, 1)^2$  la cellule de périodicité. Enfin le terme source  $f$  est une fonction de  $L^2(\Omega)$  tel que son support ne touche pas le bord :  $\partial\Omega \cap \text{Supp}(f) = \emptyset$ . Enfin, on considèrera (dans le chapitre 2) une condition au bord de  $\Omega$  de type Dirichlet

$$u_\varepsilon = g_D \text{ sur } \partial\Omega, \quad \text{où } g_D \in H^{1/2}(\partial\Omega) \text{ est donnée,} \quad (2)$$

et (dans le chapitre 3) une condition de type Neumann

$$a_\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 = g_N \text{ sur } \partial\Omega, \quad \text{où } g_N \in H^{-1/2}(\partial\Omega) \text{ est donnée.} \quad (3)$$

On cherche le comportement de la solution  $u_\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. La position du bord qui a été considérée (c'est à dire  $x_1 = 0$ ) est assez importante dans la détermination de ce comportement limite. Dit autrement, quand  $\varepsilon$  tend vers 0, le milieu périodique est toujours « coupé » de la même façon par le bord. C'est un point important dans notre analyse : les développements asymptotiques et les modèles homogénéisés enrichis dépendent de la localisation du bord dans la cellule de périodicité.

Comme mentionné précédemment, l'analyse et l'étude de ce comportement limite est donnée dans la théorie de l'homogénéisation. Dans le **chapitre 1**, nous rappelons les résultats principaux de l'homogénéisation dans le cas sans bord, c'est à dire le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . La méthode présentée est celle des développements asymptotiques de type double échelle car notre approche est basée sur ce développement asymptotique. Nous rappelons en particulier les résultats de convergence et les estimations d'erreurs à tout ordre, sous certaines conditions sur les données. La présentation du développement à tout ordre est importante pour la suite. Il nous semble qu'elle n'est pas si connue, même si on trouve des résultats similaires dans [14, 9]. Ces résultats théoriques sont également illustrés par des résultats numériques. Nous ne rappellerons donc pas les résultats concernant la convergence double-échelle [98, 6, 124], la méthode des fonctions test oscillantes [116, 43], la méthode d'éclatement périodique (plus connue sous le nom de « unfolding method ») [41, 42], la méthode par ondes de Bloch [47, 46] et la  $\Gamma$ -convergence [50, 34, 49] qui ne sont pas utiles à notre étude.

Dans le **chapitre 2**, nous expliquons pourquoi le développement asymptotique classique n'est pas adapté à la présence d'un bord avec condition de type Dirichlet (2) : il n'est pas possible de proposer une condition au bord cohérente à chaque terme du développement. Nous proposons d'enrichir ce développement asymptotique double-échelle (que nous appelons « lointain » dans le manuscrit même si ce développement existe dans tout le domaine) par un autre développement asymptotique (que nous appelons « proche » dans le manuscrit) qui va corriger le précédent développement proche du bord mais qui doit disparaître loin du bord pour ne pas polluer le développement « lointain » qui est, comme le montre le chapitre 1, pertinent loin des bords. C'est en imposant à ce nouveau développement ces conditions que nous obtenons une condition au bord pertinente pour chacun des termes du développement asymptotique lointain. Cette condition au bord est de type Dirichlet : elle dépend des dérivées successives des termes précédents et nécessite la résolution de problèmes de type Laplace posés dans une cellule de périodicité (ce qui est classique en homogénéisation) mais aussi la résolution de problèmes de type Laplace mais posés dans des demi-bandes périodiques. Ce sont ces derniers problèmes qui permettent de prendre en compte la façon dont le milieu périodique est coupé par le bord. La résolution de ces problèmes posés dans des domaines infinis n'est pas facile : nous détaillons l'analyse théorique et numérique au **chapitre 4**. Contrairement à la thèse de Valentin Vinales [123], nous n'avons pas utilisé des développements asymptotiques raccordés mais plutôt la méthode des développements multi-échelle composés. Même si les 2 méthodes donneraient des résultats similaires, cette méthode est, il nous semble, plus simple à présenter. Nous présentons la démarche tout d'abord

---

pour les premiers ordres puis nous expliquons comment elle s'étend à tout ordre. Cette extension à tout ordre permet de simplifier la preuve des estimations d'erreur, qui sont effectuées elles aussi à tout ordre. Ces résultats à tout ordre nous semblent très originaux par rapport aux résultats existants (citons [7] dans lequel on trouvait déjà une condition au bord pour les 2 premiers termes). Tous ces résultats théoriques sont validés par des simulations numériques. Nous proposons également dans ce chapitre aux sections 2.6 et 2.7 des modèles homogénéisés enrichis et approchés d'ordre 1 et 2 qui permettent de calculer une meilleure approximation de la solution de (1) aux ordres mentionnés. Ces modèles approchés sont obtenus à partir des développements précédents mais nécessitent en général une « astucieuse » modification de la condition au bord pour qu'ils soient bien posés. Là encore, des estimations d'erreur sont démontrées et des simulations numériques valident ces résultats.

Le **chapitre 3** est consacré à la condition au bord de type Neumann (3). L'approche est similaire, la différence principale est qu'il y a un décalage entre les termes du développement lointain et les termes du développement proche qui est lié à la condition au bord. La condition aux bord pour chaque terme du développement lointain est de type Neumann et dépend des dérivées successives des termes précédents ainsi que les solutions de problèmes de cellule et de demi-bandes périodiques. Après avoir présenté les calculs aux premiers ordres, nous étendons les calculs à tout ordre et établissons des estimations d'erreur. Des simulations numériques valident encore les résultats théoriques. Dans ce cas, nous n'avons pas proposé de modèles homogénéisés enrichis, faute de temps mais une étude du chapitre 2 pourrait être étendue à ce cas.

Dans le **chapitre 4**, nous expliquons comment résoudre les différents problèmes de type Laplace posés dans des demi-bandes périodiques que nous rencontrons dans les chapitres 2 et 3. Comme le domaine est infini, il faut adapter le cadre fonctionnel pour que les problèmes soient bien posés (mais c'est classique pour l'opérateur de Laplace) mais surtout, il faut trouver une méthode numérique pour calculer la solution. Nous avons étendue la méthode de [79, 115] pour la résolution de l'équation de Helmholtz (sans dissipation) dans des guides périodiques. Nous précisons que c'est une extension car (1) l'équation de type Laplace correspond à une équation de Helmholtz avec une fréquence nulle, situation qui n'est pas considérée dans [79, 115] et (2) nous devons considérer des termes sources non nuls à l'infini, ce qui n'est pas traité dans [79, 115].

Enfin dans le **chapitre 5**, nous montrons comment la démarche de construction de modèles homogénéisés enrichis à un certain ordre peut être appliquée à l'équation des ondes. Ce chapitre est moins abouti et moins rigoureux que les autres mais il constitue en quelque sorte une preuve de concept : notre méthode peut permettre de construire des modèles d'ordre élevé pour l'équation des ondes en temps long en présence de bords. Nous rappelons tout d'abord tous les résultats existants concernant l'homogénéisation de l'équation des ondes posée dans  $\mathbb{R}^d$ . Il est bien connu que le modèle homogénéisé classique ne fournit une bonne approximation de la solution multi-échelle qu'en temps court, c'est à dire  $0 \leq t \leq C\varepsilon^{-2}$ . Le défaut d'approximation vient d'effets de dispersion liés au milieu périodique qui ne sont pas représentés par le milieu effectif. Les travaux de Santosa et Symes [110] ont proposé un autre modèle effectif, construit à partir des premiers termes du développements. Ce modèle a été analysé et modifié par [82] puis par [57, 8]. Des modèles similaires ont été étudiés dans le cadre elliptique dans [14]. La difficulté est que dans le modèle obtenu par [110], l'opérateur différentiel en espace n'est plus d'ordre 2 (comme dans l'équation de départ) mais d'ordre 4, ce qui rend le problème sous-jacent pas toujours bien posé. Différentes méthodes sont utilisées pour proposer un modèle approché en temps long pertinent (c'est à dire que le problème sous-jacent est bien posé). Citons également les travaux récents de [4, 3] et de [17] qui proposent des modèles approchés en temps long à tout ordre. Tous ces travaux n'ont traités que des problèmes sans bord. Nous souhaitons dans ce

---

travail proposer des modèles approchés en temps long à tout ordre avec des conditions aux bord adaptées. La difficulté étant que les conditions doivent être adaptées aux opérateurs différentiels d'ordre élevé. Nous expliquons dans ce chapitre les idées pour un problème de type Dirichlet 1D. L'extension au 2D est en cours et est un travail en collaboration avec Timothée Pouchon.

Ce travail a été présenté à plusieurs reprises :

- Présentation d'un poster aux journées *Advanced theoretical and numerical methods for waves in structured media* organisées par le groupe thématique Modélisation et Simulation (GT1) du GDR Ondes 2451 du CNRS, les 13 et 14 mars 2018.
- Présentation d'un poster au 44e Congrès National d'Analyse Numérique (CANUM) organisé par la SMAI du 28 mai au 1er juin 2018.
- Présentation d'un exposé « Homogénéisation enrichie en présence de bords » au colloque GDR Mécawave (section 9 CNRS) du 5 au 9 novembre 2018.
- Présentation d'un exposé « Enriched homogenized models in presence of boundaries » à WAVES 2019 (International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation) du 25 au 30 août 2019.

Un article est en cours de rédaction.

# Homogénéisation dans un milieu sans bord

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Introduction du problème</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>La méthode des développements à double échelle</b> . . . . .	<b>8</b>
1.2.1	<b>Ansatz</b> . . . . .	8
1.2.2	<b>Application aux premiers ordres</b> . . . . .	10
1.2.3	<b>Formalisme pour un développement à tout ordre</b> . . . . .	16
<b>1.3</b>	<b>Estimations d'erreur</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>1.4</b>	<b>Simulations numériques</b> . . . . .	<b>22</b>

Dans ce chapitre, nous rappelons les bases de la théorie de l'homogénéisation (voir [14, 18]) appliquées à l'équation de Helmholtz. Nous commençons par expliquer le processus d'homogénéisation en utilisant les développements double-échelle dans la section 1.2 que nous justifierons par des estimations d'erreur dans la section 1.3. Ces résultats sont ensuite illustrés numériquement.

## 1.1 Introduction du problème

Dans toute la suite, nous considérons le domaine  $\Omega = \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ . Le milieu périodique est modélisé par des coefficients  $a_\varepsilon$  et  $\rho_\varepsilon$   $\varepsilon$ -périodiques i.e.  $a_\varepsilon(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}/\varepsilon)$  et  $\rho_\varepsilon(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}/\varepsilon)$  où  $a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  sont 1-périodiques dans toutes les directions. Nous dirons aussi qu'elles sont  $Y$ -périodiques où  $Y = (0, 1)^d$  est l'hypercube unité de  $\mathbb{R}^d$  que nous appelons cellule. Nous noterons les bords de cette cellule de la façon suivante :  $\forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $\Sigma_k^- = \{\mathbf{y} \in \partial Y / y_k = 0\}$  et  $\Sigma_k^+ = \{\mathbf{y} \in \partial Y / y_k = 1\}$ . Ainsi  $a_\varepsilon$  et  $\rho_\varepsilon$  sont  $\varepsilon Y$ -périodiques.



FIGURE 1.1 – Exemple de fonction  $a$  (à gauche) et  $a_\varepsilon$  (à droite) dans la cellule  $Y$

On suppose que les fonctions  $a$  et  $\rho$  sont bornées et strictement positives :

$$\exists \lambda, \Lambda > 0, / \lambda \leq a \leq \Lambda \quad \text{et} \quad \lambda \leq \rho \leq \Lambda. \quad (1.1)$$

Dans la suite, les résultats dépendront de la régularité de  $a$  et  $\rho$ .  
 Nous étudions l'équation de Helmholtz,

$$-\operatorname{div} \left[ a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right] - \omega^2 \rho \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \quad (1.2)$$

où  $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)$  est un terme source et  $\omega \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Im} \omega^2 > 0$ . L'hypothèse (1.1) permet de démontrer par le théorème de Lax-Milgram le résultat suivant :

**Proposition 1.1.** Pour  $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ , l'équation (1.2) admet une unique solution  $u_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d)$  vérifiant

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}, \quad (1.3)$$

où  $C$  est indépendant de  $\varepsilon$ .

Le but de l'homogénéisation est d'étudier le comportement asymptotique de la solution  $u_\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0 et de montrer que la limite (dans un sens que nous préciserons) est solution d'une équation de même nature que (1.2) mais où les coefficients sont homogènes. Il est également possible de déterminer un développement de la solution  $u_\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$ .

**Remarque 1.2.** Nous nous intéressons à l'équation de Helmholtz avec dissipation pour que le problème soit bien posé (sinon il est plus délicat de définir la solution physique dans un milieu périodique) mais tout ce qui est décrit s'applique à toute équation elliptique et même à des équations instationnaires (voir le chapitre 5).

## 1.2 La méthode des développements à double échelle

### 1.2.1 Ansatz

Une façon de comprendre quel est le développement de  $u_\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$  est d'utiliser la méthode des développements à double échelle. La solution  $u_\varepsilon$  dépend a priori d'une échelle macroscopique liée à la variable  $\mathbf{x}$  dite « lente » et d'une échelle microscopique liée à la variable  $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$  dite « rapide ». On postule donc que  $u_\varepsilon$  se développe sous la forme

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0 \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \varepsilon u_1 \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 u_2 \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \cdots, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \quad (1.4)$$

où les  $u_n(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  sont des fonctions  $Y$ -périodiques en la variable  $\mathbf{y}$ . Nous représentons ci-dessous une telle fonction  $\mathbf{x} \mapsto u_n \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right)$ .

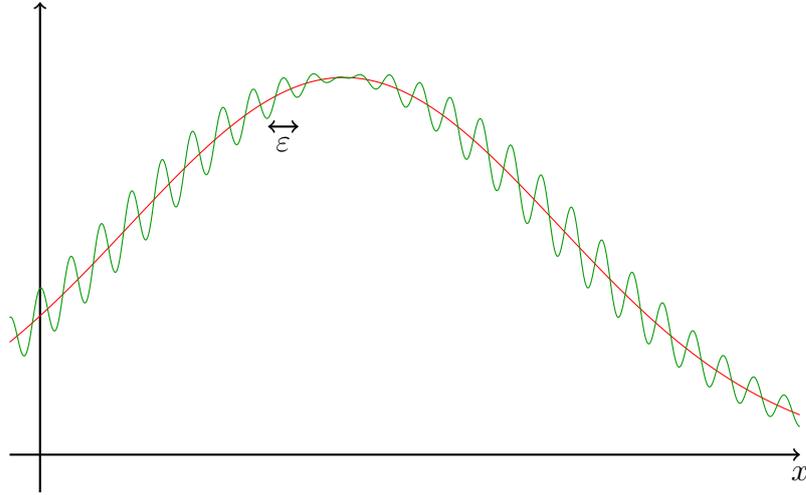


FIGURE 1.2 – Exemple en dimension 1 d’une fonction  $u_n(x, x/\varepsilon)$  (en vert). On peut observer les oscillations rapides à l’échelle rapide  $y = x/\varepsilon$  et le comportement macroscopique moyen à l’échelle lente  $x$  (en rouge)

Il est question ensuite de déterminer les équations satisfaites par chacun des termes pour que ce développement soit valide jusqu’à un certain ordre. Les calculs sont formels et sont justifiés a posteriori par des estimations d’erreur.

Introduisons  $H_{\#}^1(Y)$  le sous espace fermé de  $H^1(Y)$  constitué des fonctions de  $H^1(Y)$  qui sont  $Y$ -périodiques, et  $\dot{H}_{\#}^1(Y)$  le sous-espace fermé de  $H_{\#}^1(Y)$  constitué des fonctions à moyenne nulle sur  $Y$ . Nous identifions dans la suite les fonctions de  $H_{\#}^1(Y)$  à leur prolongement par périodicité à  $\mathbb{R}^d$  tout entier.

Nous allons injecter l’ansatz (1.4) dans l’équation (1.2). Afin de simplifier les notations, nous introduisons l’opérateur  $L_{\varepsilon}$  lié à cette équation, que nous écrivons par abus de notation,

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad L_{\varepsilon}v = -\operatorname{div} \left[ a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla v \right] - \omega^2 \rho \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) v.$$

Nous allons appliquer cet opérateur  $L_{\varepsilon}$  à des fonctions qui s’écrivent  $\mathbf{x} \mapsto v \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right)$  où  $v \in H^1(\mathbb{R}^d; H_{\#}^1(Y))$ . Grâce à la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \partial_{x_i} \left[ v \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] = \partial_{x_i} v \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^{-1} \partial_{y_i} v \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right), \quad (1.5)$$

nous pouvons décomposer l’opérateur  $L_{\varepsilon}$  sous la forme

$$L_{\varepsilon} \left[ v \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] = \varepsilon^{-2} [L_0 v] \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^{-1} [L_1 v] \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + [L_2 v] \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right), \quad (1.6)$$

où, par abus de notation,  $\forall (\mathbf{x}; \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times Y$ ,

$$\begin{cases} L_0 & := -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a \nabla_{\mathbf{y}} \cdot] & \text{dans } H_{\#}^1(Y), \\ L_1 & := -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a \nabla_{\mathbf{x}} \cdot] - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} [a \nabla_{\mathbf{y}} \cdot] & \text{dans } H^1(\mathbb{R}^d; H_{\#}^1(Y)), \\ L_2 & := -a \Delta_{\mathbf{x}} \cdot - \omega^2 \rho. & \text{dans } H^1(\mathbb{R}^d; H_{\#}^1(Y)), \end{cases} \quad (1.7)$$

où l’indice sous les opérateurs différentiels désigne la variable par rapport à laquelle ils différencient.

En injectant l'ansatz (1.4) dans l'équation (1.2) et en identifiant formellement les termes en facteur des mêmes puissances de  $\varepsilon$ , nous obtenons une cascade d'équations :  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\begin{cases} (L_0 u_0) \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) = 0 \\ (L_0 u_1) \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + (L_1 u_0) \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) = 0 \\ (L_0 u_2) \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + (L_1 u_1) \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + (L_2 u_0) \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) = f(\mathbf{x}) \\ (L_0 u_3) \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + (L_1 u_2) \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + (L_2 u_1) \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) = 0 \\ \vdots \\ (L_0 u_{n+2}) \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + (L_1 u_{n+1}) \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + (L_2 u_n) \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad (1.8)$$

en chaque point  $\left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right)$  et nous supposons qu'elles sont vérifiées pour tout  $(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \times Y$ . On voit que pour tout  $n$ , on a  $L_0 u_{n+2} = -L_1 u_{n+1} - L_2 u_n + \delta_{n,0} f$  donc la suite  $u_n$  sera déterminée par récurrence. On va voir que la construction de la suite va dépendre de  $L_0$ . On donne donc dans le théorème 1.9 des propriétés sur l'opérateur  $L_0$  et son inversibilité.

**Théorème 1.3** (Alternative de Fredholm). Soit  $F$  un élément du dual  $H_{\#}^1(Y)'$  de  $H_{\#}^1(Y)$ . L'équation

$$u \in H_{\#}^1(Y) \quad \text{telle que} \quad L_0 u = F, \quad (1.9)$$

admet une solution si, et seulement si, la relation de compatibilité

$$\langle F, 1 \rangle_{H_{\#}^1(Y)' \times H_{\#}^1(Y)} = 0, \quad (1.10)$$

est vérifiée. Cette solution est définie à une constante près. Sous la condition (1.10), le problème (1.9) est bien posé dans  $\dot{H}_{\#}^1(Y)$ .

**Remarque 1.4.** Si  $F \in L^2(Y)$ , alors la condition de compatibilité (1.10) s'écrit  $\int_Y F dy = 0$ .

## 1.2.2 Application aux premiers ordres

### Ordre 0

La première équation de (1.8) nous donne que  $u_0$  satisfait,

$$L_0 u_0(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = 0 \quad (1.11)$$

pour  $\mathbf{y} \in Y$  avec  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , où  $L_0$  est l'opérateur différentiel défini dans (1.7) et  $\mathbf{y} \mapsto u_0(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  est  $Y$ -périodique. Étant donnée la définition de  $L_0$ ,  $\mathbf{x}$  joue le rôle de paramètre. En multipliant l'équation par  $u_0$  et en intégrant par parties dans  $Y$ , on obtient que

$$\int_Y a(\mathbf{y}) |\nabla_{\mathbf{y}} u_0(\mathbf{x}; \mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

La cellule étant connexe et  $a$  strictement positive, on en déduit que  $u_0$  ne dépend que de la variable lente  $\mathbf{x}$ . Nous noterons encore  $u_0$  la solution indépendante de  $\mathbf{y}$ . Notons que nous venons de démontrer que le noyau de  $L_0$  dans  $H_{\#}^1(Y)$  est engendré par les constantes.

## Ordre 1

La deuxième équation de (1.8) devient alors

$$L_0 u_1(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^d \partial_{y_i} a(\mathbf{y}) \partial_{x_i} u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{y} \in Y. \quad (1.12)$$

Une nouvelle fois, la variable lente  $\mathbf{x}$  joue le rôle de paramètre. Par linéarité de l'équation, nous pouvons écrire  $u_1$  sous la forme

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \forall \mathbf{y} \in Y, u_1(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^d w_i(\mathbf{y}) \partial_{x_i} u_0(\mathbf{x}) + \hat{u}_1(\mathbf{x}) \quad (1.13)$$

où pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $w_i$  est une fonction  $Y$ -périodique qui satisfait l'équation

$$L_0 w_i = \partial_{y_i} a \quad \text{dans } Y \quad (1.14)$$

On introduit les problèmes dits de cellule (car ils sont posés dans la cellule  $Y$ ) suivants :

Trouver  $w_i \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$  tel que  $\forall \psi \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$ ,

$$(a \nabla w_i, \nabla \psi)_Y = - (a, \partial_{y_i} \psi)_Y \quad (1.15)$$

où  $(\cdot, \cdot)_Y$  désigne le produit scalaire de  $L^2(Y)$ . Nous rappelons que  $\dot{H}_{\#}^1(Y)$  est l'espace des fonctions de  $H_{\#}^1(Y)$  à moyenne nulle.

L'existence et l'unicité des  $w_i$  sont justifiées par la proposition 1.3 grâce à la périodicité de  $a$ . Le choix de fixer la moyenne de  $w_i$  à 0 implique que  $\hat{u}_1$  correspond la partie moyennée de  $u_1$  sur  $Y$ .

## Ordre 2

Intéressons nous maintenant à la troisième équation de (1.8) : pour  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{y} \in Y$ ,

$$\begin{aligned} L_0 u_2(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^d \partial_{y_i} (a(\mathbf{y}) \partial_{x_i} u_1(\mathbf{x}; \mathbf{y})) + \partial_{x_i} (a(\mathbf{y}) \partial_{y_i} u_1(\mathbf{x}; \mathbf{y})) + a(\mathbf{y}) \partial_{x_i}^2 u_0(\mathbf{x}) \\ &\quad + \omega^2 \rho(\mathbf{y}) u_0(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{i,j=1}^d [\partial_{y_i} (a(\mathbf{y}) w_j(\mathbf{y})) + a(\mathbf{y}) \partial_{y_i} w_j(\mathbf{y}) + \delta_{ij} a(\mathbf{y})] \partial_{x_i x_j}^2 u_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^d \partial_{y_i} a(\mathbf{y}) \partial_{x_i} \hat{u}_1(\mathbf{x}) \\ &\quad + \omega^2 \rho(\mathbf{y}) u_0(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

D'après l'Alternative de Fredholm 1.3, il existe une solution à (1.16) si et seulement si le second membre vérifie la relation de compatibilité (1.10) ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^d \underbrace{\left[ \int_Y \partial_{y_i} (a(\mathbf{y}) w_j(\mathbf{y})) d\mathbf{y} + \int_Y a(\mathbf{y}) \partial_{y_i} w_j(\mathbf{y}) + \delta_{ij} a(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right]}_{=0 \text{ par périodicité}} \partial_{x_i x_j}^2 u_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^d \underbrace{\int_Y \partial_{y_i} a(\mathbf{y}) d\mathbf{y}}_{=0 \text{ par périodicité}} \partial_{x_i} \hat{u}_1(\mathbf{x}) \\ + \omega^2 \int_Y \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} u_0(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) = 0, \end{aligned}$$

Pour que  $u_2$  existe,  $u_0$  doit donc vérifier l'équation dite homogénéisée suivante,

$$- \operatorname{div}[A^* \nabla u_0(\mathbf{x})] - \omega^2 \rho^* u_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (1.17)$$

où  $A^* = (a_{ij}^*)$  est la matrice homogénéisée définie par

$$a_{ij}^* := \langle a(\mathbf{y}) \partial_{y_i} (y_j + w_j) \rangle_Y \quad (1.18)$$

et  $\rho^* = \langle \rho \rangle_Y$ .

**Proposition 1.5.** La matrice homogénéisée  $A^*$  est symétrique définie positive et  $\rho^*$  est strictement positif. De plus, on a

$$a_{ij}^* = (a\nabla(w_j + y_j), \nabla(w_i + y_i))_Y.$$

*Démonstration.* La positivité de  $\rho^*$  découle de celle de  $\rho$ . Pour  $A^*$ , on remarque que la formulation variationnelle (1.15) peut être réécrite sous la forme  $\forall \psi \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$ ,  $(a\nabla(w_j + y_j), \nabla\psi)_Y = 0$ . On en déduit que

$$(a\nabla(w_j + y_j), \nabla(w_i + y_i))_Y = (a\nabla(w_j + y_j), \nabla y_i)_Y = a_{ij}^*.$$

On en déduit que  $A^*$  est symétrique. Pour le caractère défini positif, on a pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\xi^T A^* \xi = \sum_{i,j=1}^d (a\xi_j \nabla(w_j + y_j), \xi_i \nabla(w_i + y_i))_Y = (a\nabla w_\xi, \nabla w_\xi)_Y$$

où  $w_\xi = \sum_i \xi_i (w_i + y_i)$ . Alors par coercivité de  $a$ , on a bien que  $\xi^T A^* \xi \geq 0$ ; Par ailleurs, si  $\xi^T A^* \xi = 0$ , alors  $\nabla w_\xi = 0$  dans  $Y$  qui est connexe. On en déduit donc que  $w_\xi$  est constant sur  $Y$  : il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $w_\xi = \sum_i \xi_i (w_i + y_i) = c$  qui est équivalent à  $\sum_i \xi_i y_i = c - \sum_i \xi_i w_i$ . Or le membre de droite est  $Y$ -périodique. Pour que le membre de gauche le soit, il faut donc que  $\xi = 0$ . Donc  $A^*$  est définie.  $\square$

**Remarque 1.6.** Même si  $a$  est à valeur scalaire, il n'y a aucune raison que  $A^*$  soit diagonale, et ce n'est en général pas le cas. L'homogénéisation d'un milieu isotrope peut donc conduire à un milieu anisotrope.

Revenons au calcul de  $u_2$ . Grâce à cette équation homogénéisée, en remplaçant  $f$  dans le second membre de (1.16), on obtient :

$$\begin{aligned} L_0 u_2(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \sum_{i,j=1}^d \left[ \partial_{y_i} (a(\mathbf{y}) w_j(\mathbf{y})) + a(\mathbf{y}) \partial_{y_i} w_j(\mathbf{y}) + \delta_{ij} a(\mathbf{y}) - a_{ij}^* \right] \partial_{x_i x_j}^2 u_0(\mathbf{x}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \partial_{y_i} a(\mathbf{y}) \partial_{x_i} \hat{u}_1(\mathbf{x}) + \omega^2 (\rho(\mathbf{y}) - \rho^*) u_0(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

( $\mathbf{x}$  est encore un paramètre). Comme pour  $u_1$ , nous utilisons de nouveau la linéarité du problème pour écrire  $u_2(\mathbf{x}; \cdot)$  à un élément du noyau de  $L_0$  près à partir des dérivées des termes précédents :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \forall \mathbf{y} \in Y, \quad u_2(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^d \theta_{ij}(\mathbf{y}) \partial_{x_i x_j}^2 u_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^d w_i(\mathbf{y}) \partial_{x_i} \hat{u}_1(\mathbf{x}) + \omega^2 \gamma(\mathbf{y}) u_0(\mathbf{x}) + \hat{u}_2(\mathbf{x}), \quad (1.19)$$

où pour tout  $i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $\theta_{ij}$  est une fonction  $Y$ -périodique qui satisfait l'équation

$$L_0 \theta_{ij} = a \partial_{y_i} w_j + \partial_{y_i} (a w_j) + \delta_{ij} a - a_{ij}^* \quad \text{dans } Y \quad (1.20)$$

et  $\gamma$  est une fonction  $Y$ -périodique qui satisfait l'équation

$$L_0 \gamma = \rho - \rho^* \quad \text{dans } Y \quad (1.21)$$

On introduit les problèmes de cellule suivants :

Trouver  $\theta_{ij} \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$  tel que  $\forall \psi \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$ ,

$$(a \nabla \theta_{ij}, \nabla \psi)_Y = (a \partial_{y_i} w_j, \psi)_Y - (a w_j, \partial_{y_i} \psi)_Y + (\delta_{ij} a - a_{ij}^*, \psi)_Y \quad (1.22)$$

et

Trouver  $\gamma \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$  tel que  $\forall \psi \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$ ,

$$(a \nabla \gamma, \nabla \psi)_Y = (\rho - \rho^*, \psi)_Y \quad (1.23)$$

Ces problèmes (1.22) et (1.23) sont bien posés car ils vérifient la relation de compatibilité (1.10) grâce à la périodicité de  $a$ ,  $\rho$  et des  $w_i$ .

Par la suite, nous noterons  $u_2^{osc} = \sum_{ij} \theta_{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_0 + \sum_i w_i \partial_{x_i} \hat{u}_1 + \omega^2 \gamma u_0$  la partie oscillante de  $u_2$ , c'est-à-dire la partie contenant les solutions de problèmes de cellule.

### Ordre 3

La quatrième équation devient

$$\begin{aligned} L_0 u_3(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^d \partial_{y_i} (a(\mathbf{y}) \partial_{x_i} u_2(\mathbf{x}; \mathbf{y})) + \partial_{x_i} (a(\mathbf{y}) \partial_{y_i} u_2(\mathbf{x}; \mathbf{y})) + a(\mathbf{y}) \partial_{x_i}^2 u_1(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \\ &\quad + \omega^2 \rho(\mathbf{y}) u_1(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^d [\partial_{y_i} (a(\mathbf{y}) \theta_{jk}(\mathbf{y})) + a(\mathbf{y}) \partial_{y_i} \theta_{jk}(\mathbf{y}) + \delta_{jk} a(\mathbf{y}) w_i(\mathbf{y})] \partial_{x_i x_j x_k}^3 u_0(\mathbf{x}) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^d [\partial_{y_i} (a(\mathbf{y}) w_j(\mathbf{y})) + a(\mathbf{y}) \partial_{y_i} w_j(\mathbf{y}) + \delta_{ij} a(\mathbf{y})] \partial_{x_i x_j}^2 \hat{u}_1(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^d \partial_{y_i} a(\mathbf{y}) \partial_{x_i} \hat{u}_2(\mathbf{x}) \\ &\quad + \omega^2 \sum_{i=1}^d [\partial_{y_i} (a(\mathbf{y}) \gamma(\mathbf{y})) + a(\mathbf{y}) \partial_{y_i} \gamma(\mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}) w_i(\mathbf{y})] \partial_{x_i} u_0(\mathbf{x}) + \omega^2 \rho(\mathbf{y}) \hat{u}_1(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.24)$$

On attire l'attention sur le fait qu'on retrouve devant les dérivées secondes de  $\hat{u}_1$  les mêmes termes que nous avons devant les dérivées secondes de  $u_0$  dans (1.16).

Une nouvelle fois, nous utilisons l'Alternative de Fredholm 1.3. Le problème (1.24) admet une solution  $u_3$  si et seulement si la condition de compatibilité (1.10) est satisfaite. Ce qui nous donne une équation pour  $\hat{u}_1$  :

$$-\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_1(\mathbf{x})] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_1(\mathbf{x}) = \sum_{i,j,k=1}^d c_{ijk}^* \partial_{x_i x_j x_k}^3 u_0 + \omega^2 \sum_{i=1}^d \gamma_i^* \partial_{x_i} u_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \text{ et } \hat{u}_1 \in H^1(\mathbb{R}^d)$$

où  $c_{ijk}^* = \langle a \partial_{y_i} \theta_{jk} + a \delta_{jk} w_i \rangle_Y$  et  $\gamma_i^* = \langle a \partial_{y_i} \gamma + \rho w_i \rangle_Y$ .  $\hat{u}_1$  vérifie donc le même problème homogénéisé que  $u_0$  mais avec un second membre qui dépend de  $u_0$ .

**Proposition 1.7.** Les opérateurs  $\sum_{i,j,k=1}^d c_{ijk}^* \partial_{x_i x_j x_k}^3$  et  $\sum_{i=1}^d \gamma_i^* \partial_{x_i}$  sont nuls.

*Démonstration.* En appliquant la formulation variationnelle (1.15) avec  $\gamma$  comme fonction test, nous obtenons d'une part que

$$(a \nabla w_i, \nabla \gamma)_Y = -(a, \partial_{y_i} \gamma)_Y,$$

et d'autre part, en appliquant la formulation variationnelle (1.23) avec  $w_i$  comme fonction test, on obtient

$$(a\nabla\gamma, \nabla w_i)_Y = (\rho - \rho^*, w_i)_Y$$

donc

$$\begin{aligned} \gamma_i^* &= (a, \partial_{y_i}\gamma)_Y + (\rho, w_i)_Y \\ &= -(a\nabla w_i, \nabla\gamma)_Y + (a\nabla\gamma, \nabla w_i)_Y - (\rho^*, w_i)_Y \\ &= \rho^* \langle w_i \rangle_Y \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, en utilisant  $\theta_{jk}$  comme fonction test dans la formulation variationnelle (1.15) satisfaite par  $w_i$ , on obtient d'une part

$$(a\nabla w_i, \nabla\theta_{jk})_Y = -(a, \partial_{y_i}\theta_{jk})_Y,$$

et d'autre part en utilisant  $w_i$  comme fonction test dans la formulation variationnelle (1.22) satisfaite par  $\theta_{jk}$ , on a

$$(a\nabla\theta_{jk}, \nabla w_i)_Y = (a\partial_{y_j}w_k, w_i)_Y - (aw_k, \partial_{y_j}w_i)_Y + (\delta_{jk}a - a_{jk}^*, w_i)_Y.$$

On a donc

$$\begin{aligned} c_{ijk}^* &= (a, \partial_{y_i}\theta_{jk})_Y + (\delta_{jk}a, w_i)_Y \\ &= -(a\nabla w_i, \nabla\theta_{jk})_Y + (a\nabla\theta_{jk}, \nabla w_i)_Y - (a\partial_{y_j}w_k, w_i)_Y + (aw_k, \partial_{y_j}w_i)_Y + a_{jk}^* \langle w_i \rangle_Y \\ &= -(a\partial_{y_j}w_k, w_i)_Y + (w_k, a\partial_{y_j}w_i)_Y. \end{aligned}$$

On remarque que  $c_{ijk}^* = -c_{kji}^*$ . On en déduit donc que l'opérateur  $\sum_{ijk} c_{ijk}^* \partial_{x_i x_j x_k}^3$  est nul.  $\square$

**Remarque 1.8.** Ce résultat est dû au fait que les solutions de problèmes de cellule  $w_i$  sont prises à moyenne nulle. En effet, si  $\langle w_i \rangle_Y \neq 0$ , on trouve dans le second membre le terme  $\langle w_i \rangle_Y \partial_{x_i}(\operatorname{div}[A^* \nabla u_0] + \omega^2 \rho^* u_0) = -\langle w_i \rangle_Y \partial_{x_i} f$ .

On en déduit que  $\hat{u}_1$  est solution du problème

$$-\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_1(\mathbf{x})] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_1(\mathbf{x}) = 0 \text{ et } \hat{u}_1 \in H^1(\mathbb{R}^d) \quad (1.25)$$

On en déduit donc que  $\hat{u}_1 = 0$ . Mais cela n'est en général pas le cas en présence de bords comme nous le verrons dans les chapitres qui suivent. Nous allons donc conserver  $\hat{u}_1$  dans les équations afin de ne pas perdre en généralité.

Finalement, on peut ré-écrire l'équation (1.24) sous la forme

$$\begin{aligned} L_0 u_3(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \sum_{i,j,k=1}^d \left[ \partial_{y_i}(a(\mathbf{y})\theta_{jk}(\mathbf{y})) + a(\mathbf{y})\partial_{y_i}\theta_{jk}(\mathbf{y}) + \delta_{jk}a(\mathbf{y})w_i - c_{ijk}^* \right] \partial_{x_i x_j x_k}^3 u_0(\mathbf{x}) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^d \left[ \partial_{y_i}(a(\mathbf{y})w_j(\mathbf{y})) + a(\mathbf{y})\partial_{y_i}w_j(\mathbf{y}) + \delta_{ij}a(\mathbf{y}) - a_{ij}^* \right] \partial_{x_i x_j}^2 \hat{u}_1(\mathbf{x}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \partial_{y_i}a(\mathbf{y})\partial_{x_i}\hat{u}_2(\mathbf{x}) + \omega^2 \sum_{i=1}^d \left[ \partial_{y_i}(a(\mathbf{y})\gamma(\mathbf{y})) + a(\mathbf{y})\partial_{y_i}\gamma(\mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y})w_i(\mathbf{y}) - \gamma_i^* \right] \partial_{x_i} u_0(\mathbf{x}) \\ &\quad + \omega^2 (\rho(\mathbf{y}) - \rho^*) \hat{u}_1(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Par linéarité, on écrit  $u_3$  sous la forme

$$\begin{aligned} u_3(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \sum_{i,j,k=1}^d \beta_{ijk}(\mathbf{y}) \partial_{x_i x_j x_k}^3 u_0(\mathbf{x}) + \sum_{i,j=1}^d \theta_{ij}(\mathbf{y}) \partial_{x_i x_j}^2 \hat{u}_1(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^d w_i(\mathbf{y}) \partial_{x_i} \hat{u}_2(\mathbf{x}) \\ &\quad + \omega^2 \sum_{i=1}^d \alpha_i(\mathbf{y}) \partial_{x_i} u_0(\mathbf{x}) + \omega^2 \gamma(\mathbf{y}) 2\hat{u}_1(\mathbf{x}) + \hat{u}_3(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

où pour tout  $i, j, k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $\beta_{ijk}$  est une fonction  $Y$ -périodique qui satisfait l'équation

$$L_0\beta_{ijk} = a\partial_{y_i}\theta_{jk} + \partial_{y_i}(a\theta_{jk}) + \delta_{jk}aw_i - c_{ijk}^* \quad \text{dans } Y \quad (1.26)$$

et  $\alpha_i$  est une fonction  $Y$ -périodique qui satisfait l'équation

$$L_0\alpha_i = a\partial_{y_i}\gamma + \partial_{y_i}(a\gamma) + \rho w_i - \gamma_i^* \quad \text{dans } Y \quad (1.27)$$

On introduit les problèmes de cellule suivants :

Trouver  $\beta_{ijk} \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$  tel que  $\forall \psi \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$ ,

$$(a\nabla\beta_{ijk}, \nabla\psi)_Y = (a\partial_{y_i}\theta_{jk}, \psi)_Y - (a\theta_{jk}, \partial_{y_i}\psi)_Y + (\delta_{jk}aw_i, \psi)_Y - (c_{ijk}^*, \psi)_Y \quad (1.28)$$

et

Trouver  $\alpha_i \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$  tel que  $\forall \psi \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$ ,

$$(a\nabla\alpha_i, \nabla\psi)_Y = (a\partial_{y_i}\gamma, \psi)_Y - (a\gamma, \partial_{y_i}\psi)_Y + (\rho w_i, \psi)_Y - (\gamma_i^*, \psi)_Y. \quad (1.29)$$

#### Ordre 4

Finalement, pour obtenir l'équation vérifiée par  $\hat{u}_2$ , nous nous intéressons à la cinquième équation que nous écrivons

$$\begin{aligned} L_0u_4(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^d \partial_{y_i}(a(\mathbf{y})\partial_{x_i}u_3(\mathbf{x}; \mathbf{y})) + \partial_{x_i}(a(\mathbf{y})\partial_{y_i}u_3(\mathbf{x}; \mathbf{y})) + a(\mathbf{y})\partial_{x_i}^2u_2(\mathbf{x}) \\ &\quad + \omega^2\rho(\mathbf{y})u_2(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^d [\partial_{y_i}(a(\mathbf{y})\beta_{jkl}(\mathbf{y})) + a(\mathbf{y})\partial_{y_i}\beta_{jkl}(\mathbf{y}) + \delta_{kl}a(\mathbf{y})\theta_{ij}] \partial_{x_ix_jx_kx_l}^4 u_0(\mathbf{x}) \\ &\quad + \sum_{i,j,k=1}^d [\partial_{y_i}(a(\mathbf{y})\theta_{jk}(\mathbf{y})) + a(\mathbf{y})\partial_{y_i}\theta_{jk}(\mathbf{y}) + \delta_{jk}a(\mathbf{y})w_i] \partial_{x_ix_jx_k}^3 \hat{u}_1(\mathbf{x}) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^d [\partial_{y_i}(a(\mathbf{y})w_j(\mathbf{y})) + a(\mathbf{y})\partial_{y_i}w_j(\mathbf{y}) + \delta_{ij}a(\mathbf{y})] \partial_{x_ix_j}^2 \hat{u}_2(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^d \partial_{y_i}a(\mathbf{y})\partial_{x_i}\hat{u}_3(\mathbf{x}) \\ &\quad + \omega^2 \sum_{i,j=1}^d [\partial_{y_i}(a(\mathbf{y})\alpha_j(\mathbf{y})) + a(\mathbf{y})\partial_{y_i}\alpha_j(\mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y})\theta_{ij}(\mathbf{y})] \partial_{x_ix_j}^2 u_0(\mathbf{x}) \\ &\quad + \omega^2 \sum_{i=1}^d [\partial_{y_i}(a(\mathbf{y})\gamma(\mathbf{y})) + a(\mathbf{y})\partial_{y_i}\gamma(\mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y})w_i(\mathbf{y})] \partial_{x_i}\hat{u}_1(\mathbf{x}) \\ &\quad + \omega^2\rho(\mathbf{y})\hat{u}_2(\mathbf{x}) + \omega^4\rho(\mathbf{y})\gamma(\mathbf{y})u_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ainsi, l'Alternative de Fredholm 1.3 nous donne que l'équation (1.30) admet une solution si et seulement si  $\hat{u}_2$  est solution du problème :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[A^*\nabla\hat{u}_2(\mathbf{x})] - \omega^2\rho^*\hat{u}_2(\mathbf{x}) &= \sum_{ijkl} d_{ijkl}^* \partial_{x_ix_jx_kx_l}^4 u_0 + \sum_{ijk} c_{ijk}^* \partial_{x_ix_jx_k}^3 \hat{u}_1 + \omega^2 \sum_{ij} e_{ij}^* \partial_{x_ix_j}^2 u_0 \\ &\quad + \omega^2 \sum_i \gamma_i^* \partial_{x_i}\hat{u}_1 + \omega^4 h^* u_0 \quad \text{dans } \Omega \text{ et } \hat{u}_2 \in H^1(\mathbb{R}^d) \end{aligned} \quad (1.31)$$

où les  $d_{ijkl}^*$ ,  $e_{ij}^*$  et  $h^*$  sont des coefficients homogénéisés donnés par

$$d_{ijkl}^* = \langle a\partial_{y_i}\beta_{jkl} + \delta_{ij}a\theta_{kl} \rangle_Y$$

$$e_{ij}^* = \langle a\partial_{y_i}\alpha_j + \delta_{ij}a\gamma + \rho\theta_{ij} \rangle_Y$$

et

$$h^* = \langle \rho\gamma \rangle_Y.$$

Là encore,  $\hat{u}_2$  vérifie une équation du même type que  $u_0$  avec un terme source qui dépend de  $u_0$ . Pour alléger les notations par la suite, nous noterons  $\mathcal{D}$  l'opérateur d'ordre 4

$$\mathcal{D}(u) = \sum_{ijkl} d_{ijkl}^* \partial_{x_i x_j x_k x_l}^4 u + \omega^2 \sum_{ij} e_{ij}^* \partial_{x_i x_j}^2 u + \omega^4 h^* u.$$

### 1.2.3 Formalisme pour un développement à tout ordre

Dans cette section, nous détaillons de manière plus générale le processus pour obtenir directement les équations des termes à tout ordre afin de mieux appréhender le côté itératif de la méthode.

Comme précédemment, nous posons l'ansatz

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq \sum_k \varepsilon^k u_k \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

En injectant cet ansatz dans l'équation, on obtient la « cascade d'équation » :  $\forall n \geq 0$ ,

$$L_0 u_n = \delta_{n,2} f - L_1 u_{n-1} - L_2 u_{n-2} \quad (1.32)$$

où  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$  désignent les opérateurs différentiels

$$\begin{cases} L_0 v &= -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}v], \\ L_1 v &= -\operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}v] - \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{x}}v], \\ L_2 v &= -a(\mathbf{y})\Delta_{\mathbf{x}}v - \omega^2 \rho(\mathbf{y})v. \end{cases}$$

(on pose  $u_{-2} = u_{-1} = 0$ ). Comme nous l'avons vu précédemment,  $\mathbf{x}$  joue souvent le rôle de paramètre. Nous pouvons donc écrire  $L_1 = \bar{L}_1(\partial_{\mathbf{x}})$  et  $L_2 = \bar{L}_2(\partial_{\mathbf{x}})$  où pour  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^d$ ,  $\bar{L}_1(\boldsymbol{\eta})$  et  $\bar{L}_2(\boldsymbol{\eta})$  sont définis par :  $\forall v \in H_{\#}^1(Y)$ ,

$$\begin{cases} \bar{L}_1(\boldsymbol{\eta})v &= -\boldsymbol{\eta} \cdot [a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}v] - \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\boldsymbol{\eta}v], \\ \bar{L}_2(\boldsymbol{\eta})v &= -a(\mathbf{y})\boldsymbol{\eta}^2 v - \omega^2 \rho(\mathbf{y})v. \end{cases}$$

Pour résoudre la cascade d'équation, il est question d'inverser l'opérateur  $L_0$ . Son noyau étant constitué des fonctions constantes, nous introduisons le sous-espace de  $H_{\#}^1(Y)$  constitué des fonctions à moyenne nulle sur  $Y$  :

$$\dot{H}_{\#}^1(Y) = \{v \in H_{\#}^1(Y) / \dot{\Pi}(v) = 0\}$$

où

$$\begin{aligned} \dot{\Pi} : H_{\#}^1(Y) &\rightarrow \mathbb{C} \\ v &\mapsto \int_Y v d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Ainsi, la restriction de  $L_0$  à  $\dot{H}_{\#}^1(Y)$  est inversible.

Les calculs précédents incitent à penser que les termes  $u_n$  s'écrivent à partir des dérivées des comportements macroscopiques (ou des moyennes) des termes précédents, modulés par des solutions de problèmes de cellule. De plus, on a vu que des termes qui apparaissent devant  $u_0$  à un certain ordre apparaissent à l'ordre d'après devant  $\hat{u}_1$ . Ceci donne en quelque sorte une intuition d'un produit de convolution.

Pour la suite, on introduit la notation  $\partial_{\mathbf{x}} := (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_d})$ .

**Théorème 1.9.** Soit  $n \geq 1$ . On a l'égalité suivante :

$$u_n(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^n \Theta_{n-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k(\mathbf{x}) \quad (1.33)$$

où on définit pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$   $\Theta_p(\cdot; \boldsymbol{\eta})$  qui dépend de  $\boldsymbol{\eta}$  de manière polynomiale, de degré  $p$  et pour tout  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^2$ ,  $\Theta_p(\cdot; \boldsymbol{\eta})$  est l'unique solution dans  $\dot{H}_{\#}^1(Y)$  du problème défini par récurrence

$$L_0 \Theta_p = -\bar{L}_1(\boldsymbol{\eta}) \Theta_{p-1}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) - \bar{L}_2(\boldsymbol{\eta}) \Theta_{p-2}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) + m_{p-1}(\boldsymbol{\eta}) \quad (1.34)$$

(avec  $\Theta_{-1} = 0, \Theta_0 = 1$ ) où  $m_p(\boldsymbol{\eta})$  est un polynôme de degré  $p+1$  en  $\boldsymbol{\eta}$  (pour  $p \geq 1$ ) et est défini par

$$m_p(\boldsymbol{\eta}) = \dot{\Pi}(\bar{L}_1(\boldsymbol{\eta}) \Theta_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) + \bar{L}_2(\boldsymbol{\eta}) \Theta_{p-1}(\cdot; \boldsymbol{\eta})).$$

De plus,  $\hat{u}_n$  satisfait l'équation

$$-\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_n] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_n = \delta_{n,0} f - \sum_{k=0}^{n-1} m_{n+1-k}(\partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k \quad \text{dans } \mathbb{R}^d. \quad (1.35)$$

Par ailleurs, on a par récurrence :

$$u_0 \in H^{n+1}(\mathbb{R}^d) \implies \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \hat{u}_k \in H^{n+1-k}(\mathbb{R}^d).$$

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , on a vu au paragraphe précédent que

$$u_1(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_i w_i(\mathbf{y}) \partial_{x_i} u_0(\mathbf{x})$$

où les  $w_i$  sont les uniques solutions dans  $\dot{H}_{\#}^1(Y)$  des problèmes de cellule

$$L_0 w_i = \partial_{y_i} a \quad \text{dans } Y$$

On pose  $\Theta_1(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) = \sum_i w_i(\mathbf{y}) \eta_i$ , on vérifie que  $\Theta_1$  est solution du problème (1.34) pour  $p = 1$  (on a  $m_0(\boldsymbol{\eta}) = 0$ ). On constate également que  $\Theta_1$  est de degré 1. De plus, on a bien que  $u_1$  s'écrit  $u_1(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \Theta_1(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) u_0(\mathbf{x}) + \Theta_0(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_1(\mathbf{x})$ .

Soit  $n \geq 2$ . On suppose que la propriété est vérifiée pour tout  $p \leq n-1$ . On ré-écrit l'équation (1.32) sous la forme

$$\begin{aligned} L_0 u_n &= \delta_{n,2} f - \bar{L}_1(\partial_{\mathbf{x}}) u_{n-1} - \bar{L}_2(\partial_{\mathbf{x}}) u_{n-2} \\ &= \delta_{n,2} f - \bar{L}_1(\partial_{\mathbf{x}}) \sum_{k=0}^{n-1} \Theta_{n-1-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k - \bar{L}_2(\partial_{\mathbf{x}}) \sum_{k=0}^{n-2} \Theta_{n-2-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k \end{aligned}$$

Or  $\Theta_{-1} = 0$  ce qui nous donne

$$L_0 u_n = \delta_{n,2} f + \sum_{k=0}^{n-1} (-\bar{L}_1(\partial_{\mathbf{x}}) \Theta_{n-1-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}}) - \bar{L}_2(\partial_{\mathbf{x}}) \Theta_{n-2-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}})) \hat{u}_k. \quad (1.36)$$

On a donc d'après l'Alternative de Fredholm 1.3 que  $u_n$  existe si et seulement si le second membre satisfait la condition (1.10) qui se traduit par

$$\dot{\Pi} \left( \delta_{n,2} f + \sum_{k=0}^{n-1} (-\bar{L}_1(\partial_{\mathbf{x}}) \Theta_{n-1-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}}) - \bar{L}_2(\partial_{\mathbf{x}}) \Theta_{n-2-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}})) \hat{u}_k \right) = 0$$

que l'on ré-écrit

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_{n-1-k}(\partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_k = \delta_{n,2}f. \quad (1.37)$$

Regardons le coefficient  $m_1(\boldsymbol{\eta})$ . On a

$$\begin{aligned} m_1(\boldsymbol{\eta}) &= \dot{\Pi}(L_1(\boldsymbol{\eta})\Theta_1(\cdot; \boldsymbol{\eta}) + L_2(\boldsymbol{\eta})\Theta_0(\cdot; \boldsymbol{\eta})) \\ &= - \int_Y \boldsymbol{\eta} \cdot a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\Theta_1(\mathbf{y}; \cdot) + \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\boldsymbol{\eta}\Theta_1(\mathbf{y}; \cdot)] + a(\mathbf{y})\boldsymbol{\eta}^2 + \omega^2\rho(\mathbf{y})d\mathbf{y} \\ &= - \int_Y \boldsymbol{\eta} \cdot a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\Theta_1(\mathbf{y}; \cdot) + a(\mathbf{y})\boldsymbol{\eta}^2 + \omega^2\rho(\mathbf{y})d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Par intégration par partie sur  $Y$ . En remplaçant  $\Theta_1(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) = \sum_i \eta_i w_i(\mathbf{y})$ , on a

$$\begin{aligned} m_1(\boldsymbol{\eta}) &= - \int_Y \boldsymbol{\eta} \cdot a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}(\sum_i \eta_i w_i(\mathbf{y})) + a(\mathbf{y})\boldsymbol{\eta}^2 d\mathbf{y} - \omega^2\rho^* \\ &= - \sum_{ij} \int_Y \eta_j \eta_i a(\mathbf{y})(\partial_{y_j} w_i(\mathbf{y}) + \delta_{ij})d\mathbf{y} - \omega^2\rho^* \\ &= - \sum_{ij} a_{ij}^* \eta_i \eta_j - \omega^2\rho^*. \end{aligned}$$

On a donc, pour  $k = n - 2$  dans (1.37),

$$m_1(\partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_{n-2} = - \sum_{ij} a_{ij}^* \partial_{x_i} \partial_{x_j} \hat{u}_{n-2} - \omega^2\rho^* \hat{u}_{n-2} = -\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_{n-2}] - \omega^2\rho^* \hat{u}_{n-2}.$$

Alors, en utilisant également le fait que  $m_0(\boldsymbol{\eta}) = 0$ , on en déduit que  $u_n$  existe si et seulement si  $\hat{u}_{n-2}$  satisfait l'équation

$$-\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_{n-2}] - \omega^2\rho^* \hat{u}_{n-2} = \delta_{n,2}f - \sum_{k=0}^{n-3} m_{n-1-k}(\partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_k \quad \text{dans } \mathbb{R}^d.$$

Finalement, en ajoutant (1.37) dans le second membre de l'équation (1.36), on obtient que

$$L_0 u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-\bar{L}_1(\partial_{\mathbf{x}})\Theta_{n-1-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}}) - \bar{L}_2(\partial_{\mathbf{x}})\Theta_{n-2-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}}) + m_{n+1-k}(\partial_{\mathbf{x}}))\hat{u}_k$$

On reconnaît le second membre de (1.34) en facteur des  $\hat{u}_k$ . On définit donc un nouveau polynôme  $\Theta_n$  solution de (1.34). On constate que comme  $\Theta_{n-1}$  est de degré  $n - 1$ ,  $\bar{L}_1(\boldsymbol{\eta})\Theta_{n-1}$  est de degré  $n$  et, comme  $\Theta_{n-2}$  est de degré  $n - 2$ ,  $\bar{L}_2(\boldsymbol{\eta})\Theta_{n-2}$  est également de degré  $n$ . On en déduit que  $L_0\Theta_n$  est de degré  $n$  et donc  $\Theta_n$  est de degré  $n$ .

On a donc par linéarité

$$u_n(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^n \Theta_{n-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_k(\mathbf{x}).$$

Il nous reste à montrer le résultat de régularité sur les termes macroscopiques  $\hat{u}_n$ . On suppose que  $u_0 \in H^{n+1}(\mathbb{R}^d)$ . Pour  $p = 1$ , d'après ce qui précède,  $\hat{u}_1$  est solution du problème

$$-\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_1] - \omega^2\rho^* \hat{u}_1 = -m_2(\partial_{\mathbf{x}})u_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d.$$

Comme  $m_2$  est un polynôme de degré 3, on en déduit que  $m_2(\partial_{\mathbf{x}})u_0 \in H^{n-2}(\mathbb{R}^d)$  et donc, d'après l'équation, on en déduit que  $\hat{u}_1 \in H^n(\mathbb{R}^d)$ .

Par la suite, on suppose que pour tout  $k \leq p-1 \leq n$ ,  $\hat{u}_k \in H^{n+1-k}(\mathbb{R}^d)$ . On veut montrer que  $\hat{u}_p \in H^{n+1-p}(\mathbb{R}^d)$ . On sait par ce qui précède que  $\hat{u}_p$  satisfait l'équation

$$-\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_p] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_p = - \sum_{k=0}^{p-1} m_{p+1-k}(\partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k \quad \text{dans } \mathbb{R}^d.$$

Comme pour tout  $k$ ,  $m_k(\boldsymbol{\eta})$  est un polynôme de degré  $k+1$ , on en déduit par hypothèse de récurrence que pour tout  $k \leq p-1$ ,  $m_{p+1-k}(\partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k \in H^{n-p-1}(\mathbb{R}^d)$ . On en déduit, d'après l'équation, que  $\hat{u}_p \in H^{n-p+1}(\mathbb{R}^d)$ .  $\square$

Les  $\Theta_n$  sont des polynômes que nous écrivons

$$\forall \mathbf{y} \in Y, \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^d, \Theta_n(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) = \sum_{|\alpha| \leq n} \Theta_n^\alpha(\mathbf{y}) \boldsymbol{\eta}^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  est un multi-indice et  $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ . Par exemple, on a pour  $n=1$ ,  $\Theta_1^{\tilde{\alpha}_i} = w_i$  où  $\tilde{\alpha}_i$  est le multi-indice avec toutes ses composantes nulles sauf la  $i$ -ème qui vaut 1.

### 1.3 Estimations d'erreur

Grâce au développement à double échelle que nous venons de généraliser à tout ordre, nous sommes en mesure de donner des estimations d'erreur à tout ordre sous certaines conditions sur  $a$  et  $\rho$  et le terme source.

**Théorème 1.10.** Soit  $(u_\varepsilon)$  la famille des solutions de (1.2). Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et les familles  $(u_k)_{k \leq n}$  définie par (1.33).

On suppose  $(\mathcal{H}_n) : f \in H^{n-1}(\mathbb{R}^d)$  et que  $a$  et  $\rho$  sont suffisamment réguliers pour que pour tout  $k \leq n+1$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^2$  tel que  $|\alpha| \leq k$ ,  $\Theta_k^\alpha \in W^{1,\infty}(Y)$ .

On a alors

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon^n).$$

On a également

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k u_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) - \varepsilon^n \sum_{j=1}^n \Theta_j \left( \frac{\cdot}{\varepsilon}; \partial_{\mathbf{x}} \right) \hat{u}_{n-j} \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon^n).$$

*Démonstration.* On commence par montrer le résultat pour un  $n \geq 1$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on pose

$$e_\varepsilon^n(\mathbf{x}) = u_\varepsilon(\mathbf{x}) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right).$$

On va montrer que  $L_\varepsilon e_\varepsilon^n = -\operatorname{div}[a(\cdot/\varepsilon) \nabla e_\varepsilon^n] - \omega^2 \rho(\cdot/\varepsilon) e_\varepsilon^n = r_\varepsilon$  tel que  $\|r_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon^n)$ . Ainsi, par le théorème de Lax-Milgram, on aura que

$$\|e_\varepsilon^n\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq K \varepsilon^n.$$

On a

$$\begin{aligned} L_\varepsilon e_\varepsilon^n &= -\operatorname{div} \left[ a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla e_\varepsilon^n \right] - \omega^2 \rho \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) e_\varepsilon^n \\ &= f - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k L_\varepsilon u_k \end{aligned}$$

Or, en utilisant la décomposition de l'opérateur  $L_\varepsilon$  (1.6), on obtient que

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \varepsilon^k L_\varepsilon u_k &= \sum_{k=-2}^{n-2} \varepsilon^k L_0 u_{k+2} + \sum_{k=-1}^{n-1} \varepsilon^k L_1 u_{k+1} + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k L_2 u_k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-2} \varepsilon^k \underbrace{(L_0 u_{k+2} + L_1 u_{k+1} + L_2 u_k)}_{=\delta_{k,0}f} + \varepsilon^{-2} \underbrace{L_0 u_0}_{=0} + \varepsilon^{-1} \underbrace{(L_0 u_1 + L_1 u_0)}_{=0} \\
 &\quad + \varepsilon^{n-1} \underbrace{(L_1 u_n + L_2 u_{n-1})}_{=-L_0 u_{n+1}} + \varepsilon^n L_2 u_n \\
 &= f + \varepsilon^{n-1} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}(a(\cdot) \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}) + \varepsilon^n L_2 u_n
 \end{aligned}$$

Or, par la règle de dérivation (1.5),  $\operatorname{div}_{\mathbf{y}} = \varepsilon(\operatorname{div} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}})$ , donc

$$\sum_{k=0}^n \varepsilon^k L_\varepsilon u_k = f + \varepsilon^n ((\operatorname{div} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}})(a(\cdot) \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}) + L_2 u_n)$$

d'où

$$L_\varepsilon e_\varepsilon^n = -\varepsilon^n ((\operatorname{div} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}})(a(\cdot) \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}) + L_2 u_n).$$

On en conclut que

$$L_\varepsilon e_\varepsilon^n = r_\varepsilon$$

où

$$r_\varepsilon = -\varepsilon^n ((\operatorname{div} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}})(a(\cdot) \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}) + L_2 u_n).$$

Montrons que pour tout  $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ,

$$|(r_\varepsilon, v)| \leq K \varepsilon^n \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Soit  $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ . On a, en appliquant une formule de Green,

$$\begin{aligned}
 (r_\varepsilon, v) &= -\varepsilon^n \int_{\mathbb{R}^d} \left[ (\operatorname{div} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}})(a(\cdot) \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}) \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + L_2 u_n \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] d\mathbf{x} \\
 &= -\varepsilon^n \left[ - \int_{\mathbb{R}^d} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1} \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla \bar{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} [a(\cdot) \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}] \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \Delta_{\mathbf{x}} u_n \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \omega^2 \rho \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) u_n \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] \bar{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right]
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 |(r_\varepsilon, v)| &\leq \Lambda \varepsilon^n \left[ \|\nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^d} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^d} + \|\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right. \\
 &\quad \left. + \|\Delta_{\mathbf{x}} u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + |\omega^2| \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right]
 \end{aligned}$$

où  $\Lambda$  est la constante de coercivité de  $a$  et  $\rho$ .

On a d'après le théorème 1.9 de la section précédente,

$$u_n(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^n \Theta_{n-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq n-k} \Theta_{n-k}^\alpha(\mathbf{y}) \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_k(\mathbf{x}),$$

et

$$u_{n+1}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{n+1} \Theta_{n+1-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \Theta_{n+1-k}^\alpha(\mathbf{y}) \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_k(\mathbf{x}).$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^d} &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \|\nabla_{\mathbf{y}} \Theta_{n+1-k}^\alpha\|_{L^\infty(Y)^d} \|\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \|\nabla_{\mathbf{y}} \Theta_{n+1-k}^\alpha\|_{L^\infty(Y)^d} \|\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \sum_{i=1}^d \|\partial_{y_i} \Theta_{n+1-k}^\alpha\|_{L^\infty(Y)} \|\partial_{x_i} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \sum_{i=1}^d \|\partial_{y_i} \Theta_{n+1-k}^\alpha\|_{L^\infty(Y)} \|\partial_{x_i} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

où les termes pour  $k = n + 1$  n'apparaissent pas dans l'inégalité car  $\Theta_0 = 1$  donc  $\nabla_{\mathbf{y}} \Theta_0 = 0$ . On a également

$$\|\Delta_{\mathbf{x}} u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq n-k} \|\Theta_{n-k}^\alpha\|_{L^\infty(Y)} \|\Delta_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

et

$$\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq n-k} \|\Theta_{n-k}^\alpha\|_{L^\infty(Y)} \|\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Si l'hypothèse  $(\mathcal{H}_n)$  est satisfaite, alors  $f \in H^{n-1}(\Omega)$  donc  $u_0 \in H^{n+1}(\mathbb{R}^d)$  et d'après le corollaire 1.9, pour tout  $k \leq n$ , pour tout  $\alpha$  tel que  $|\alpha| \leq n + 1 - k$ , on a que  $\|\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_k\|_{L^2(\Omega)} < +\infty$ , et l'hypothèse sur  $a$  et  $\rho$  nous donne que les normes  $L^\infty$  des  $\Theta$  sont bornées. On a donc

$$\begin{aligned} \Lambda \left[ \|\nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^d} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^d} + \|\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right. \\ \left. + \|\Delta_{\mathbf{x}} u_n\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + |\omega^2| \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right] \leq K. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|(r_\varepsilon, v)| \leq K \varepsilon^n \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

D'où le résultat. On peut également voir que si l'on retire le terme macroscopique  $\hat{u}_n$ , on ne perd pas en ordre de convergence dans la norme  $H^1$ . En effet,

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k u_k - \varepsilon^n \sum_{j=1}^n \Theta_j \left( \frac{\cdot}{\varepsilon}; \partial_{\mathbf{x}} \right) \hat{u}_{n-j} \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^n \|\hat{u}_n\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Donc comme  $\hat{u}_n$  est borné en norme  $H^1$  en utilisant l'hypothèse sur  $f$  et le théorème 1.9, on en déduit qu'il existe  $K > 0$  tel que

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k u_k - \varepsilon^n \sum_{j=1}^n \Theta_j \left( \frac{\cdot}{\varepsilon}; \partial_{\mathbf{x}} \right) \hat{u}_{n-j} \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq K \varepsilon^n.$$

□

**Corollaire 1.11.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_{n+1}$  du théorème 1.10, on a

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_{n+1}$ , on a par le théorème 1.10 que

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k u_k \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k u_k + \varepsilon^{n+1} u_{n+1} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k u_k \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{n+1} \|u_{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k u_k \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{n+1} \|u_{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq K\varepsilon^{n+1} + \varepsilon^{n+1} \|u_{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Or, dans la preuve du théorème précédent, on a pu voir que  $\|u_{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty$  indépendamment de  $\varepsilon$ . On en déduit que

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

□

## 1.4 Simulations numériques

Dans cette section, nous validons numériquement le développement à double échelle dans le cas de la dimension 2 ainsi que les estimations d'erreur des théorèmes 1.10 et 1.11. Ces calculs ont été réalisés avec la librairie éléments finis **XLiFE++** développée au sein de l'équipe Poems [77, 81] avec l'équipe IRMAR.

Pour un entier  $N \in \mathbb{N}^*$ , nous fixons la période  $\varepsilon = 1/N$ . Nous considérons le domaine de calcul  $\Omega = (0, 1)^2$  auquel nous ajoutons des conditions périodiques : on peut montrer que tous les résultats précédent s'étendent à  $\Omega = (0, 1)^2$  avec des conditions périodiques et  $\varepsilon \in 1/\mathbb{N}^*$ . Le domaine  $\Omega$  contient alors  $N^2$  cellules de tailles  $\varepsilon$ . Nous prenons comme terme source une fonction 1-périodique dans les 2 directions  $f(x_1, x_2) = \cos(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2)$ . Les coefficients périodiques choisis sont  $a(y_1, y_2) = (2 + \sin(2\pi y_1))(2 + \sin(2\pi y_2))$  et  $\rho(y_1, y_2) = (2 + \sin(2\pi y_1))(2 + \sin(2\pi y_2))$ . Enfin, on fixe la fréquence  $\omega = 1 + 0, 1i$ .

Nous calculons les solutions de problèmes de cellule en utilisant une méthode de pénalisation qui nous permet d'obtenir une solution avec la contrainte d'une moyenne nulle sur la cellule  $Y$  : on souhaite résoudre des problèmes de la forme : Trouver  $w \in \dot{H}_\#^1(Y)$  tel que  $\forall \psi \in \dot{H}_\#^1(Y)$ ,

$$(a\nabla w, \nabla \psi)_Y = (f, \psi)_Y.$$

La méthode de pénalisation utilisée consiste à choisir un paramètre  $\eta > 0$  très petit devant 1 et de résoudre le problème : Trouver  $\tilde{w} \in H_\#^1(Y)$  tel que  $\forall \tilde{\psi} \in H_\#^1(Y)$ ,

$$(a\nabla \tilde{w}, \nabla \tilde{\psi})_Y + \eta (\tilde{w}, \tilde{\psi})_Y = (f, \tilde{\psi})_Y.$$

Sur la figure 1.3, on représente  $u_\varepsilon$ , pour  $\varepsilon = 1/8$ , et  $u_0$ . On remarque que  $u_0$  correspond bien au comportement macroscopique de  $u_\varepsilon$  mais ne prend pas en compte les oscillations que l'on peut observer sur  $u_\varepsilon$ , la figure 1.4 représentant  $u_\varepsilon - u_0$  l'illustre bien.

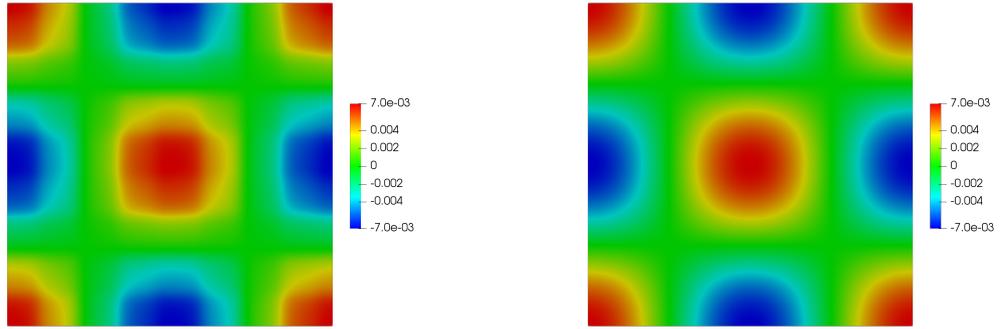


FIGURE 1.3 –  $u_\varepsilon$  (à gauche) et  $u_0$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$

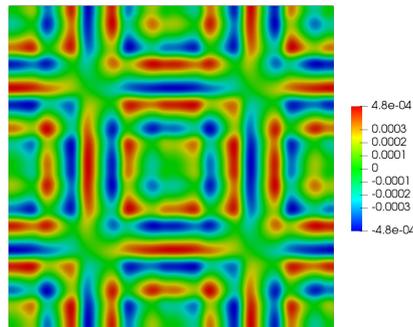


FIGURE 1.4 –  $u_\varepsilon - u_0$  dans  $\Omega = (0, 1)^2$

En faisant varier  $\varepsilon$ , nous obtenons les courbes d'erreur de la figure 1.5 où on retrouve bien une décroissance en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  pour la norme  $L^2$  et en  $\mathcal{O}(1)$  pour la norme  $H^1$ .

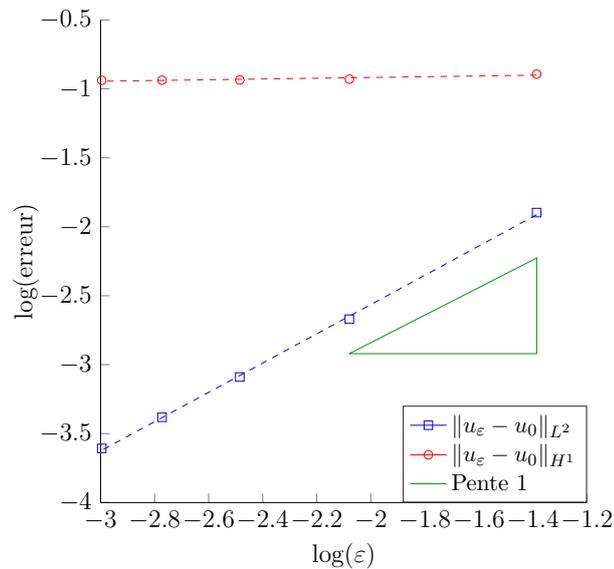


FIGURE 1.5 – Erreur  $u_\varepsilon - u_0$  en norme  $L^2$  et  $H^1$  en échelle logarithmique

Dans la figure 1.6, nous représentons côte à côte  $u_\varepsilon$  et  $u_0 + \varepsilon u_1$  pour  $\varepsilon = 1/8$  (on rappelle que  $\hat{u}_1 = 0$ ). On constate que cette approximation à l'ordre 1 capte mieux les micro-oscillations de  $u_\varepsilon$ . En regardant les différences  $u_\varepsilon - u_0$  et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)$  sur la figure 1.7 avec la même

échelle, on constate qualitativement que l’erreur a diminué en ajoutant  $\varepsilon u_1$  mais il reste tout de même des oscillations non prises en compte par l’approximation d’ordre 1.

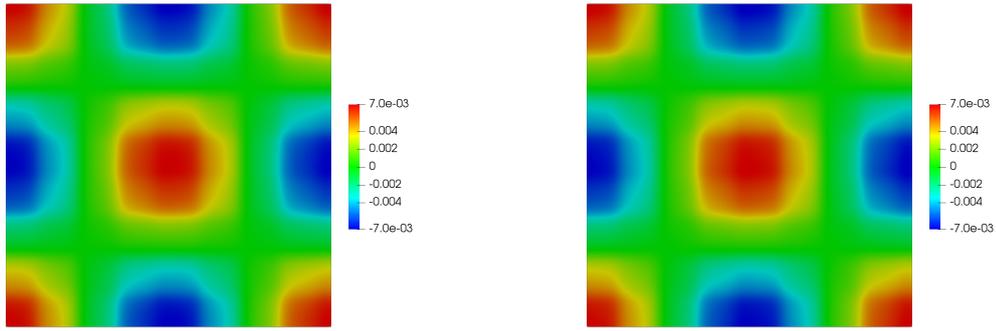


FIGURE 1.6 –  $u_\varepsilon$  (à gauche) et  $u_0 + \varepsilon u_1$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$

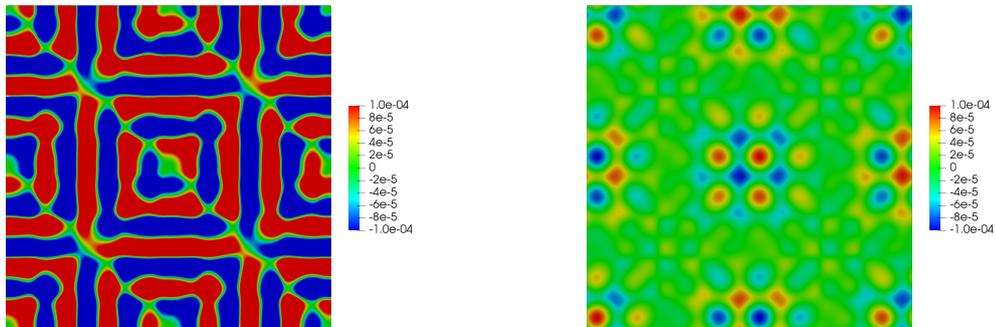


FIGURE 1.7 –  $u_\varepsilon - u_0$  (à gauche) et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$

Les courbes d’erreur de la figure 1.8 attestent de la décroissance de  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)$  en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  pour la norme  $L^2$  et en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  pour la norme  $H^1$ .

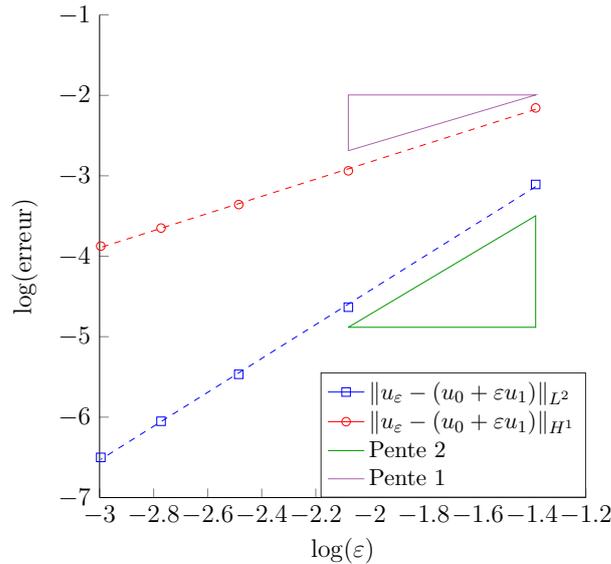


FIGURE 1.8 – Erreur  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)$  en norme  $L^2$  et  $H^1$  en échelle logarithmique

Sur la figure 1.9, en comparant les différences  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)$  et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2^{osc})$  à la même échelle, on constate que l’ajout de la partie oscillante de  $u_2$  permet de corriger les

oscillations qui n'avaient pas été prises en compte par l'approximation à l'ordre 1. On observe également que l'approximation  $u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2^{osc}$  laisse une erreur « macroscopique » que l'on corrige en ajoutant  $\hat{u}_2$  pour obtenir l'approximation d'ordre 2  $u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2$ .

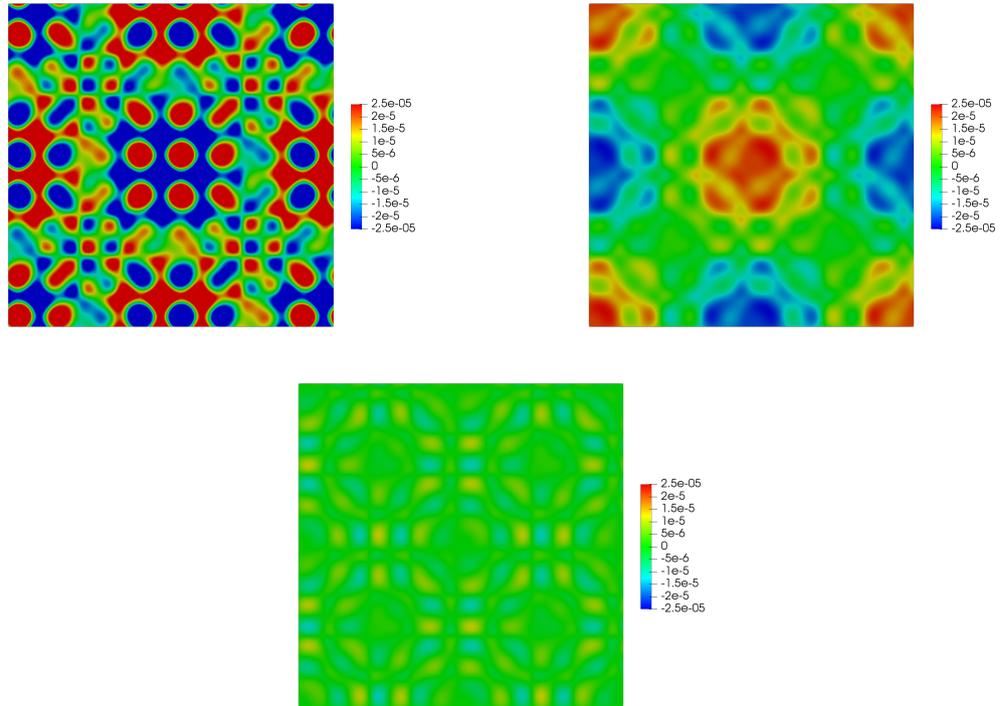


FIGURE 1.9 –  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)$  (à gauche),  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2^{osc})$  (à droite) et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2)$  (au centre) dans  $\Omega = (0, 1)^2$

Cette précision de l'approximation à l'ordre 2 est validée par les estimations d'erreur de la figure 1.10. On remarque néanmoins que  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2^{osc})$  décroît en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  en norme  $L^2$  et l'ajout de  $\hat{u}_2$  à l'approximation permet d'obtenir une décroissance en  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$  en norme  $L^2$ . En norme  $H^1$ , les deux approximations décroissent bien en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ .

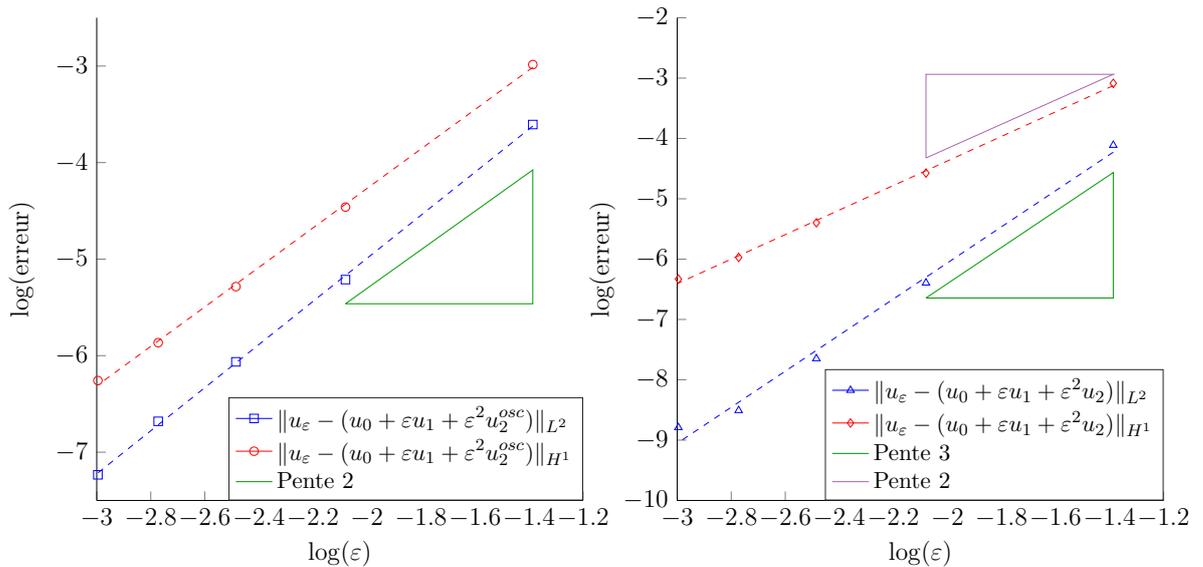


FIGURE 1.10 – Erreurs  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2^{osc})$  (à gauche) et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2)$  (à droite) en norme  $L^2$  et  $H^1$  en échelle logarithmique



# Homogénéisation enrichie en présence d'un bord avec une condition de Dirichlet

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Le cas de la dimension 1</b>	<b>28</b>
<b>2.2</b>	<b>Les difficultés en dimension <math>d \geq 2</math></b>	<b>31</b>
<b>2.3</b>	<b>Développement asymptotique double-échelle enrichi</b>	<b>32</b>
2.3.1	Présentation du développement enrichi	32
2.3.2	Étude du problème type de demi-bande infini	34
2.3.3	Application aux premiers ordres	38
2.3.4	Formalisme pour un développement à tout ordre	41
<b>2.4</b>	<b>Estimations d'erreur</b>	<b>44</b>
<b>2.5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>48</b>
<b>2.6</b>	<b>Le modèle approché à l'ordre 1</b>	<b>58</b>
2.6.1	Première méthode : le décalage géométrique	59
2.6.2	Deuxième méthode : modification des problèmes de cellule	60
2.6.3	Estimations d'erreur	62
2.6.4	Résultats numériques	65
<b>2.7</b>	<b>Le modèle approché à l'ordre 2</b>	<b>69</b>

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'homogénéisation de l'équation de Helmholtz dans un demi-plan avec pour condition au bord une condition de type Dirichlet. Nous enrichissons l'ansatz avec des termes de champ proche permettant de corriger les phénomènes de couches limites dus à la présence du bord. L'étude de ces termes nous permet de déterminer des conditions au bord satisfaisantes pour les termes macroscopiques  $u_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots$ . Nous utilisons la méthode jusqu'aux termes d'ordre 2 puis nous en faisons une généralisation à tout ordre. Nous confirmons cette méthode par des estimations d'erreur, que nous validons numériquement. Pour finir, nous étudions des modèles approchés d'ordre 1 et 2.

Le domaine que nous considérons à présent est un demi plan  $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . Nous nous intéressons à une équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet sur le bord de  $\Omega$  :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left[ a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right] - \omega^2 \rho \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = g & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

—  $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$

- les fonctions  $a_\varepsilon(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}/\varepsilon)$  et  $\rho_\varepsilon(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}/\varepsilon)$  où  $a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  sont 1-périodiques. Ainsi  $a_\varepsilon$  et  $\rho_\varepsilon$  sont  $\varepsilon$ -périodiques. De plus, on suppose que  $a$  et  $\rho$  sont bornées et strictement positives :

$$\exists \lambda, \Lambda > 0 / \lambda \leq a \leq \Lambda \quad \text{et} \quad \lambda \leq \rho \leq \Lambda.$$

- $f \in H^{-1}(\Omega)$  est un terme source et  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ .
- $\omega \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Im } \omega^2 > 0$ .

On note toujours  $Y = (0, 1)^d$  la cellule de périodicité.

En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on montre facilement (car  $\text{Im } \omega^2 > 0$ ) le caractère bien posé du problème.

**Proposition 2.1.** Pour  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ , l'équation (1.2) admet une unique solution  $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$  vérifiant

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad (2.2)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

## 2.1 Le cas de la dimension 1

Nous présentons dans cette section le cas particulier, plus simple, de l'homogénéisation enrichie pour un problème posé dans un intervalle avec un bord.

Plus précisément, nous étudions l'équation de Helmholtz, de solution  $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ ,

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left[ a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d}{dx} u_\varepsilon \right] - \omega^2 \rho \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon(0) = g \end{cases} \quad (2.3)$$

où :

- $\Omega = (0, +\infty)$ .
- les fonctions  $a_\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$  et  $\rho_\varepsilon(x) = \rho(x/\varepsilon)$  où  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont 1-périodiques. Ainsi  $a_\varepsilon$  et  $\rho_\varepsilon$  sont  $\varepsilon$ -périodiques. De plus, on suppose que  $a$  et  $\rho$  sont bornées et strictement positives :

$$\exists \lambda, \Lambda > 0 / \lambda \leq a \leq \Lambda \quad \text{et} \quad \lambda \leq \rho \leq \Lambda.$$

- $f \in H^{-1}(\Omega)$  est un terme source et  $g \in \mathbb{R}$ .
- $\omega \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Im } \omega^2 > 0$ .

D'après la proposition 2.1, le problème (2.3) est bien posé dans  $H^1(\Omega)$ .

Pour étudier le comportement asymptotique de  $u_\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0, nous utilisons la méthode du développement double échelle que nous avons détaillée dans le chapitre précédent.

Nous posons donc l'ansatz suivant valable dans tout le domaine  $\Omega$  :

$$u_\varepsilon(x) = u_0 \left( x; \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon u_1 \left( x; \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 u_2 \left( x; \frac{x}{\varepsilon} \right) + \cdots, \quad x \in \Omega \quad (2.4)$$

où les  $u_n$  sont des fonctions 1-périodiques en la variable rapide  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ .

En appliquant la méthode double échelle décrite au chapitre précédent, on montre que

—  $u_0$  ne dépend pas de la variable rapide  $y$  et satisfait l'équation homogénéisée

$$-a^* \frac{d^2}{dx^2} u_0(x) - \omega^2 \rho^* u_0(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

où  $a^* \in \mathbb{R}$  est le coefficient homogénéisé défini par

$$a^* := \left\langle a(y) \frac{d}{dy} (w(y) + y) \right\rangle_Y$$

avec  $w$  l'unique solution du problème de cellule défini par

$$w \in \dot{H}_{\#}^1(Y) \text{ telle que pour tout } v \in H_{\#}^1(Y), \left( a \frac{d}{dy} w, \frac{d}{dy} v \right) = - \left( a, \frac{d}{dy} v \right) \quad (2.5)$$

et  $\rho^* = \langle \rho \rangle_Y$ . Comme nous sommes dans un domaine présentant un bord, il faut déterminer une condition au bord pour  $u_0$ . Si l'ansatz est valide jusqu'au bord, on a

$$g = u_{\varepsilon}(0) = u_0(0) + \varepsilon u_1 \left( 0; \frac{0}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 u_2 \left( 0; \frac{0}{\varepsilon} \right) + \dots \quad (2.6)$$

Cette expression est valable pour tout  $\varepsilon > 0$ . On en déduit que  $u_0(0) = g$ . Ainsi,  $u_0$  est solution du problème

$$\begin{cases} -a^* \frac{d^2}{dx^2} u_0(x) - \omega^2 \rho^* u_0(x) = f & \text{dans } \Omega \\ u_0(0) = g \end{cases} \quad (2.7)$$

—  $u_1$  s'écrit sous la forme

$$u_1(x; y) = \frac{d}{dx} u_0(x) w(y) + \hat{u}_1(x)$$

où  $\hat{u}_1$  satisfait l'équation

$$-a^* \frac{d^2}{dx^2} \hat{u}_1(x) - \omega^2 \rho^* \hat{u}_1(x) = c^* \frac{d^3}{dx^3} u_0(x) + \omega^2 \gamma^* u_0(x), \quad x \in \Omega$$

Nous avons vu à la section 1.2.2 que les coefficients  $c^*$  et  $\gamma^*$  sont nuls. D'autre part, si on applique l'ansatz à la condition au bord, on trouve d'après (2.6) que  $u_1 \left( 0; \frac{0}{\varepsilon} \right) = 0$  d'où  $\frac{d}{dx} u_0(0) w \left( \frac{0}{\varepsilon} \right) + \hat{u}_1(0) = 0$ . On a donc que  $\hat{u}_1(0) = -\frac{d}{dx} u_0(0) w \left( \frac{0}{\varepsilon} \right)$ . On a donc que  $\hat{u}_1$  est solution du problème

$$\begin{cases} -a^* \frac{d^2}{dx^2} \hat{u}_1(x) - \omega^2 \rho^* \hat{u}_1(x) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \hat{u}_1(0) = -\frac{d}{dx} u_0(0) w(0) \end{cases} \quad (2.8)$$

On remarque que contrairement au cas de l'homogénéisation dans l'espace tout entier, la condition de Dirichlet que nous imposons à  $\hat{u}_1$  fait qu'il est en général non-nul.

—  $u_2$  s'écrit sous la forme

$$u_2(x; y) = \frac{d^2}{dx^2} u_0(x) \theta(y) + \frac{d}{dx} \hat{u}_1(x) w(y) + \omega^2 u_0(x) \gamma(y) + \hat{u}_2(x),$$

où  $\theta$  et  $\gamma$  sont les solutions des problèmes de cellule

Trouver  $\theta \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$  tel que pour tout  $v \in H_{\#}^1(Y)$ ,

$$\left(a \frac{d}{dy} \theta, \frac{d}{dy} v\right) = -(aw, \frac{d}{dy} v) + \left(a \frac{d}{dy} w, v\right) + (a - a^*, v) \quad (2.9)$$

et

Trouver  $\gamma \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$  tel que pour tout  $v \in H_{\#}^1(Y)$ ,

$$\left(a \frac{d}{dy} \gamma, \frac{d}{dy} v\right) = (\rho - \rho^*, v) \quad (2.10)$$

et  $\hat{u}_2$  satisfait l'équation volumique

$$-a^* \frac{d^2}{dx^2} \hat{u}_2(x) - \omega^2 \rho^* \hat{u}_2(x) = d^* \frac{d^4}{dx^4} u_0(x) + \omega^2 e^* \frac{d^2}{dx^2} u_0(x) + \omega^4 h^* u_0(x), \quad x \in \Omega$$

où les coefficients  $d^*$ ,  $e^*$  et  $h^*$  sont donnés par

$$d^* = \left\langle a \frac{d}{dy} \beta + a\theta \right\rangle_Y, \quad e^* = \left\langle a \frac{d}{dy} \alpha + a\gamma + \rho\theta \right\rangle_Y, \quad h^* = \langle \rho\gamma \rangle_Y.$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  les solutions des problèmes de cellule

Trouver  $\alpha \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$  tel que pour tout  $v \in H_{\#}^1(Y)$ ,

$$\left(a \frac{d}{dy} \alpha, \frac{d}{dy} v\right) = -(a\gamma, \frac{d}{dy} v) + \left(a \frac{d}{dy} \gamma, v\right) + (\rho w, v)$$

et

Trouver  $\beta \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$  tel que pour tout  $v \in H_{\#}^1(Y)$ ,

$$\left(a \frac{d}{dy} \beta, \frac{d}{dy} v\right) = -(a\theta, \frac{d}{dy} v) + \left(a \frac{d}{dy} \theta, v\right) + (aw, v).$$

Par ailleurs, pour la condition au bord satisfaite par  $\hat{u}_2$ , si l'ansatz est valide jusqu'au bord, on a que  $u_2\left(0; \frac{0}{\varepsilon}\right) = 0$  d'où  $\frac{d^2}{dx^2} u_0(0)\theta\left(\frac{0}{\varepsilon}\right) + \frac{d}{dx} \hat{u}_1(0)w\left(\frac{0}{\varepsilon}\right) + \omega^2 u_0(0)\gamma\left(\frac{0}{\varepsilon}\right) + \hat{u}_2(0) = 0$ . On a donc que  $\hat{u}_2(0) = -\frac{d^2}{dx^2} u_0(0)\theta(0) - \frac{d}{dx} \hat{u}_1(0)w(0) - \omega^2 u_0(0)\gamma(0)$ . Finalement, on obtient que  $\hat{u}_2$  est solution du problème

$$\begin{cases} -a^* \frac{d^2}{dx^2} \hat{u}_2(x) - \omega^2 \rho^* \hat{u}_2(x) &= d^* \frac{d^4}{dx^4} u_0(x) + \omega^2 e^* \frac{d^2}{dx^2} u_0(x) + \omega^4 h^* u_0(x) \text{ dans } \Omega \\ \hat{u}_2(0) &= -\frac{d^2}{dx^2} u_0(0)\theta(0) - \frac{d}{dx} \hat{u}_1(0)w(0) - \omega^2 u_0(0)\gamma(0) \end{cases} \quad (2.11)$$

On voit que les conditions aux bords de chaque terme  $\hat{u}_n$  dépendent des termes précédents et des valeurs des solutions de problèmes de cellule, qui peut varier suivant la manière dont le bord coupe la cellule.

## 2.2 Les difficultés en dimension $d \geq 2$

Dans cette section, nous allons montrer que l'ansatz (1.4), qui fonctionnait encore en une dimension, n'est pas adapté en présence de bords en dimension  $d \geq 2$ .

Nous allons partir du même ansatz que précédemment :

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon u_1\left(\mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(\mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + \dots$$

et nous allons montrer que nous aboutissons à une incohérence.

Quand nous introduisons l'ansatz dans l'équation volumique, nous trouvons les mêmes équations volumiques pour les termes macroscopiques  $\hat{u}_n$  et les mêmes problèmes de cellule (voir section 1.2). Il ne manque que les conditions au bord. On introduit l'ansatz dans la condition au bord :

$$g = u_\varepsilon|_\Gamma = u_0|_\Gamma + \varepsilon u_1\left(\cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon}\right)|_\Gamma + \varepsilon^2 u_2\left(\cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon}\right)|_\Gamma + \dots$$

et on identifie les puissances de  $\varepsilon$  formellement. Nous trouvons alors pour  $u_0$  :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^* \nabla u_0(\mathbf{x})] - \omega^2 \rho^* u_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega \\ u_0 = g & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.12)$$

Ensuite, pour  $\hat{u}_1$ , l'identification nous donne

$$u_1\left(\cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon}\right)|_\Gamma = 0 \iff \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} u_0|_\Gamma w_i\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)|_\Gamma + \hat{u}_1|_\Gamma = 0.$$

Or si  $w_i$  est dépendant de  $y_2$ , le terme  $\sum_{i=1}^d \partial_{x_i} u_0|_\Gamma w_i\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)|_\Gamma$  oscille à une échelle  $\varepsilon$  dues au facteur  $w_i(\cdot/\varepsilon)|_\Gamma$  alors que  $\hat{u}_1$  est censé avoir des variations macroscopiques. Il y a donc une incohérence dans les termes de l'ansatz.

L'ansatz n'est donc pas adapté en présence de bord. Dans la littérature ([94, 95, 7, 20, 19, 70, 71, 112, 12]), ce phénomène est connu sous le nom de couches limites. En général dans la littérature, le terme  $\hat{u}_1$  est supposé nul. On peut montrer que  $u_0 + \varepsilon u_1$  (où  $u_1 = u_1^{osc}$ ) converge vers  $u_\varepsilon$  en norme  $H^1$  mais la vitesse de convergence est moins bonne qu'en absence de bord. [18, 78, 43]

$$\left\| u_\varepsilon(\mathbf{x}) - \left[ u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon u_1\left(\mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \right] \right\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}).$$

En effet, en posant  $z_\varepsilon$  la solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left[a\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \nabla z_\varepsilon\right] - \omega^2 \rho\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) z_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega \\ z_\varepsilon = -u_1\left(\cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

on montre que la différence  $e_\varepsilon = u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon z_\varepsilon)$  satisfait le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left[a\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \nabla e_\varepsilon\right] - \omega^2 \rho\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) e_\varepsilon = -\varepsilon((\operatorname{div} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}})(a(\cdot) \nabla_{\mathbf{y}} u_2) + L_2 u_1) & \text{dans } \Omega \\ e_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Alors, en utilisant les techniques de la démonstration du théorème 1.10 que

$$\|u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon z_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)} = \|e_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon$$

où  $C$  est indépendant de  $\varepsilon$ . Par la suite, on en déduit que

$$\|u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon z_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon \|z_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon + \varepsilon \|z_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}.$$

Or, d'après le problème vérifié par  $z_\varepsilon$ , on a que

$$\|z_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| u_1 \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^{1/2}(\Omega)}$$

et par interpolation, on a

$$\left\| u_1 \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^{1/2}(\Omega)} \leq \left\| u_1 \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \left\| u_1 \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

Comme  $\left\| u_1 \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\varepsilon}$ , on en déduit que  $\|z_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ , d'où le résultat (voir [7] pour plus de détails).

Si l'erreur est calculée sur un domaine  $D \subset\subset \Omega$ , on a une meilleure convergence

$$\left\| u_\varepsilon(\mathbf{x}) - \left[ u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon u_1 \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] \right\|_{H^1(D)} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

mais l'ajout des termes suivants ne permettent pas d'améliorer cette convergence

$$\left\| u_\varepsilon(\mathbf{x}) - \left[ u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon u_1 \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 u_2 \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] \right\|_{H^1(D)} = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

et on a aussi bien sûr

$$\left\| u_\varepsilon(\mathbf{x}) - \left[ u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon u_1 \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 u_2 \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] \right\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}).$$

C'est pour cela que le modèle homogénéisé est connu pour être peu précis près des bords. Dit autrement, l'ansatz n'est pas adapté proche du bord.

## 2.3 Développement asymptotique double-échelle enrichi

Dans cette section, nous nous restreignons à la dimension  $d = 2$  pour une meilleure compréhension. Les résultats théoriques s'étendent facilement en dimension  $d \geq 2$  (avec le domaine  $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$ ).

### 2.3.1 Présentation du développement enrichi

Afin de prendre en compte les phénomènes qui apparaissent au bord, nous allons modifier l'ansatz (1.4) en y ajoutant des termes correcteurs. Les termes, appelés termes de champ proche parce qu'ils ne vont « vivre » que proche de bord, sont construits pour corriger l'ansatz proche du bord sans le « polluer » loin du bord.

Nous introduisons l'ansatz suivant :

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n u_n \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n U_n \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right). \quad (2.13)$$

La première partie de l'ansatz est identique à (1.4). Les  $u_n$ , qu'on appelle terme de champ lointain, vérifient les équations volumiques du chapitre précédent. Les  $U_n(x_2; y_1, y_2)$  sont les termes de champ proche : ils sont supposés définis sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , sont 1-périodiques par rapport à  $y_2$  (on peut donc les restreindre à  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times (0, 1)$ ) et doivent tendre vers 0 quand  $y_1$  tend vers l'infini. Remarquons que cette dernière hypothèse impose que les champs proches ne vivent que près du bord et ne pollue pas l'autre ansatz qui lui est très pertinent loin du bord.

Nous injectons l'ansatz dans l'équation (2.1) (les calculs suivants sont formels et seront justifiés a posteriori par des estimations d'erreur) :

$$\underbrace{-\operatorname{div} \left[ a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] - \omega^2 \rho \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right)}_{=f(\mathbf{x})} - \operatorname{div} \left[ a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] - \omega^2 \rho \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) = f(\mathbf{x})$$

d'où

$$-\operatorname{div} \left[ a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] - \omega^2 \rho \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) = 0.$$

Les termes de champs proches étant des fonctions composées de deux variables, on introduit les opérateurs suivants, similaires à ceux du chapitre précédent mais dans des domaines différents :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 v &= -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} v] \\ \mathcal{L}_1 v &= -\partial_{x_2} [a(\mathbf{y}) \partial_{y_2} v] - \partial_{y_2} [a(\mathbf{y}) \partial_{x_2} v] \\ \mathcal{L}_2 v &= -a(\mathbf{y}) \partial_{x_2}^2 v - \omega^2 \rho(\mathbf{y}) v \end{cases} \quad (2.14)$$

en identifiant les différentes puissance de  $\varepsilon$ , on obtient une nouvelle cascade d'équations satisfaite par les termes de champ proche :  $\forall k \geq 0$ ,

$$\mathcal{L}_0 U_k = -\mathcal{L}_1 U_{k-1} - \mathcal{L}_2 U_{k-2} \quad \text{dans } \Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \quad (2.15)$$

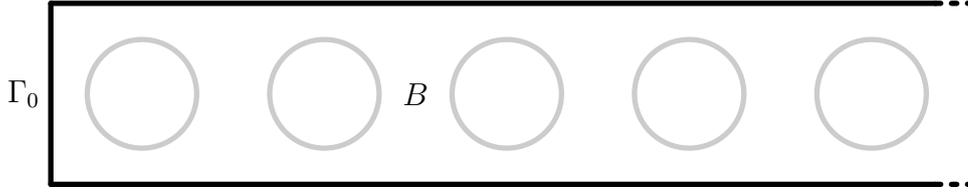
(on pose  $U_{-1} = U_{-2} = 0$ ). En introduisant l'ansatz dans la condition au bord et en identifiant les puissances de  $\varepsilon$ , on trouve : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\delta_{n,0} g = u_n \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right)_{|\Gamma} + U_n \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right)_{|\Gamma}.$$

Ceci doit être vrai pour tout  $\varepsilon$  donc formellement

$$\delta_{n,0} g(x_2) = u_n(0, x_2; 0, y_2) + U_n(x_2; 0, y_2). \quad (2.16)$$

Dans ces équations, notons que  $x_2$  joue le rôle de paramètre. Comme  $U_n$  est périodique par rapport à  $y_2$ , l'équation peut donc être posée dans la demi-bande infinie  $B = \mathbb{R}^+ \times (0, 1)$  en ajoutant la condition  $y_2$ -périodique qui signifie que la trace de la fonction et la trace de sa dérivée normale sont 1-périodiques dans la direction  $\mathbf{e}_2$ . Nous notons  $\Gamma_0 = \{0\} \times (0, 1)$  le bord gauche de  $B$ .


 FIGURE 2.1 – Demi-bande infinie  $B$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_n] = \partial_{x_2}[a(\mathbf{y})\partial_{y_2}U_{n-1}] + \partial_{y_2}[a(\mathbf{y})\partial_{x_2}U_{n-1}] \\ \quad + a(\mathbf{y})\partial_{x_2}^2U_{n-2} + \omega^2\rho(\mathbf{y})U_{n-2} \quad \text{dans } B \\ U_n(x_2; \cdot) = \delta_{n,0}g(x_2) - u_n(0, x_2; \cdot) \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ U_n \quad y_2\text{-périodique} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Nous allons introduire dans la section suivante le cadre fonctionnel pour que ce problème soit toujours bien posé mais la solution ne sera pas toujours exponentiellement décroissante vers 0. On va voir que la solution est exponentiellement décroissante vers 0 si et seulement si une condition de compatibilité est satisfaite. Cette condition va nous donner une condition au bord pour  $\hat{u}_n$ .

### 2.3.2 Étude du problème type de demi-bande infini

Dans toute la suite, nous dirons qu'une fonction qui vérifie  $-\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U] = F$  est  $y_2$ -périodique si elle vérifie les deux conditions de périodicité : sa trace et la trace de sa dérivée normale sont 1-périodiques dans la direction  $\vec{\mathbf{e}}_2$ .

Les termes de champ proche vérifient des problèmes du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U] = F \quad \text{dans } B \\ U = G \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ U \quad y_2\text{-périodique} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Introduisons tout d'abord l'espace

$$W(B) = \left\{ u \in H_{loc}^1(B) / \int_B \frac{|u|^2}{1+y_1^2} + |\nabla u|^2 d\mathbf{y} < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\forall u \in W(B), \|u\|_{W(B)} = \left( \int_B \frac{|u|^2}{1+y_1^2} + |\nabla u|^2 d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notons que  $H^1(B) \subset W(B)$  et que toutes les fonctions constantes sont dans  $W(B)$ .

Nous notons  $W_{\#}(B)$  le sous-espace de  $W(B)$  des fonctions 1-périodiques par rapport à  $y_2$  :

$$W_{\#}(B) = \left\{ u \in W(B) / u|_{y_2=0} = u|_{y_2=1} \right\}. \quad (2.19)$$

On introduit également

$$W_{\#}^0(B) = \left\{ u \in W_{\#}(B) / u|_{\Gamma_0} = 0 \right\}. \quad (2.20)$$

Enfin, on note  $H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$  l'espace des traces sur  $\Gamma_0$  des fonctions de  $W_{\#}(B)$  :

$$H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) = \{u|_{\Gamma_0}, u \in W_{\#}(B)\}$$

dont le dual est  $(H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0))' = H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0)$ . On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_0}$  le crochet de dualité entre  $H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$  et  $H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0)$ . Dans toute la suite,  $\vec{n}$  désigne la normale sortante, ici  $\vec{n} = -\mathbf{e}_1$ .

**Théorème 2.2** (Existence et unicité). Si  $G \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$  et  $F\sqrt{1+y_1^2} \in L^2(B)$  alors le problème (2.18) est bien posé dans  $W_{\#}(B)$ .

Ce résultat est basé sur une inégalité de type Hardy ([72, 83, 97, 11]) :

$$\forall V \in W_{\#}^0(B), \quad \|V\|_{W(B)} \leq C \|\nabla V\|_{L^2(B)} \quad (2.21)$$

Intéressons-nous maintenant au comportement à l'infini d'une telle solution.

**Proposition 2.3.** On suppose que  $F$  est exponentiellement décroissant i.e. il existe  $\gamma_0 > 0$  tel que  $e^{\gamma_0 y_1} F \in L^2(B)$ . Soit  $U \in W_{\#}(B)$  solution de (2.18). Il existe  $\gamma > 0$  et une unique constante  $C_U \in \mathbb{R}$  telles que

$$U = C_U + e^{-\gamma y_1} \tilde{U}, \quad \tilde{U} \in H^1(B).$$

Nous faisons la preuve de cette proposition en annexe.

Maintenant que nous savons que notre solution tend exponentiellement vers une constante, il nous faut chercher les conditions sur  $F$  et  $G$  pour que cette constante soit nulle (cela assurera que  $U$  tend vers 0 à l'infini). Pour exprimer cette condition, nous introduisons une fonction profil i.e. une fonction représentative du problème, un peu comme les solutions de problèmes de cellule en homogénéisation classique :

**Proposition 2.4.** Il existe une unique solution  $\mathcal{N} \in H_{loc}^1(B)$  du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N}] = 0 & \text{dans } B \\ \mathcal{N} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \mathcal{N} \text{ } y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (2.22)$$

de la forme  $\mathcal{N} = \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} + \tilde{\mathcal{N}}$  où  $\tilde{\mathcal{N}} \in W_{\#}(B)$ .

$\mathcal{N}$  est donc dans le noyau de l'opérateur  $\mathcal{L}_0$  et a un comportement linéaire modulé par la fonction oscillante  $w_1$ .

*Démonstration. Unicité de  $\mathcal{N}$  :*

Si nous avons deux solutions, leur différence est solution du même problème avec terme sources nul et cette solution est dans  $W_{\#}^0(B)$ . Elle est donc nulle par le théorème 2.2.

*Existence de  $\mathcal{N}$  :*

On pose  $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} - \frac{y_1 + w_1(\mathbf{y})}{a_{11}^*} \chi_1(y_1)$  où  $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ ,  $\forall x < 1, \chi_1(x) = 0$ ,  $\forall x > 2, \chi_1(x) = 1$ .

On a alors

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathcal{N}}] = \underbrace{\frac{y_1 + w_1(\mathbf{y})}{a_{11}^*} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\chi_1] + 2a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}} \left( \frac{y_1 + w_1(\mathbf{y})}{a_{11}^*} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\chi_1}_{\text{à support compact}}$$

où on a utilisé le fait que  $-\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}(y_1 + w_1)] = 0$  dans  $Y$ . Comme  $\check{\mathcal{N}} = 0$  sur  $\Gamma_0$ , on en déduit d'après le théorème 2.2 qu'il existe un unique  $\check{\mathcal{N}} \in W_{\#}^0(B)$  s'écrivant, d'après la proposition 2.3,  $\check{\mathcal{N}} = C_{\check{\mathcal{N}}} + e^{\gamma y_1} \mathcal{N}_0$  où  $\mathcal{N}_0 \in H^1(B)$ .

On pose à présent  $\tilde{\mathcal{N}} = \check{\mathcal{N}} - \frac{y_1 + w_1(\mathbf{y})}{a_{11}^*}(1 - \chi_1(y_1))$  qui est donc dans  $W(B)$ . Il suffit donc de poser  $\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}} + \frac{y_1 + w_1(\mathbf{y})}{a_{11}^*}\chi_1(y_1) = \tilde{\mathcal{N}} + \frac{y_1 + w_1(\mathbf{y})}{a_{11}^*}$ .  $\square$

La propriété suivante de  $\mathcal{N}$  sera utile plus tard.

**Lemme 2.5.**

$$\langle a\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 1$$

Avant de démontrer ce lemme, regardons le lemme suivant :

**Lemme 2.6.** Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , pour tout  $i = 1, 2$ , l'intégrale  $\int_{\{N\} \times (0,1)} a(\mathbf{y})\partial_{y_1}(y_i + w_i)dy_2$  est indépendante de  $N$  et vaut

$$\int_{\{N\} \times (0,1)} a(\mathbf{y})\partial_{y_1}(y_i + w_i)dy_j = a_{1i}^*.$$

*Démonstration.* L'équation (1.14) vérifiée par  $w_i$  peut se réécrire  $-\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}(y_i + w_i)] = 0$ . On multiplie cette EDP par  $y_1$  et on intègre sur la cellule  $Y$ , en utilisant que 1 et  $\partial_{y_1}w_i$  sont périodiques par rapport à  $y_2$  et en utilisant l'expression

$$a_{1i}^* := \int_Y a(\mathbf{y})\partial_{y_1}(y_i + w_i)d\mathbf{y};$$

on a

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_Y \operatorname{div}_{\mathbf{y}} a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}(y_i + w_i)y_1 d\mathbf{y} \\ &= \int_Y a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}(y_i + w_i) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}y_1 d\mathbf{y} - \int_{\partial Y} a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}(y_i + w_i) \cdot \vec{\mathbf{n}}y_1 d\sigma(\mathbf{y}) \\ &= \underbrace{\int_Y a(\mathbf{y})\partial_{y_1}(y_i + w_i)d\mathbf{y}}_{=a_{1i}^*} + \underbrace{\int_{y_1=0} a(\mathbf{y})\partial_{y_1}(y_i + w_i)y_1 dy_2}_{=0} - \int_{y_1=1} a(\mathbf{y})\partial_{y_1}(y_i + w_i)y_1 dy_2 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$a_{1i}^* = \int_{y_1=1} a(\mathbf{y})\partial_{y_1}(y_i + w_i)dy_2.$$

Par périodicité par rapport à  $y_1$ , on en déduit que pour  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$a_{1i}^* = \int_{\{N\} \times (0,1)} a(\mathbf{y})\partial_{y_1}(y_i + w_i)dy_2.$$

$\square$

*Démonstration du Lemme 2.5.*  $\mathcal{N}$  vérifie l'équation volumique  $-\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla\mathcal{N}] = 0$  dans  $B$ . Intégrons par parties cette équation dans une bande finie  $B_N = (0, N) \times (0, 1)$  :

$$\underbrace{\int_{B_N} a(\mathbf{y})\nabla\mathcal{N}\nabla 1 d\mathbf{y}}_{=0} + \langle a\nabla\mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, 1 \rangle_{\Gamma_0} - \langle a\nabla\mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, 1 \rangle_{\Gamma_N} = 0.$$

où  $\Gamma_N = \{N\} \times \mathbb{R}^{d-1}$  est le bord droit de la bande  $B_N$ , d'où

$$\langle a \nabla \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, 1 \rangle_{\Gamma_0} = \langle a \nabla \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, 1 \rangle_{\Gamma_N}.$$

Or  $\mathcal{N} = \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} + \tilde{\mathcal{N}}$  donc

$$\langle a \nabla \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, 1 \rangle_{\Gamma_0} = \langle a \nabla \left( \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, 1 \rangle_{\Gamma_N} + \langle a \nabla \tilde{\mathcal{N}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, 1 \rangle_{\Gamma_N}.$$

Or par le lemme 2.6,  $\langle a \nabla \left( \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, 1 \rangle_{\Gamma_N} = \int_{\Gamma_N} a(\mathbf{y}) \nabla \left( \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 dy_2 = 1$ . De plus,  $\tilde{\mathcal{N}}$  est exponentiellement décroissant vers une constante. Donc  $a(\mathbf{y}) \nabla \tilde{\mathcal{N}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \rightarrow 0$  quand  $y_1 \rightarrow 0$ . En faisant tendre  $L$  vers l'infini, on en déduit que  $\langle a \nabla \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 1$ .  $\square$

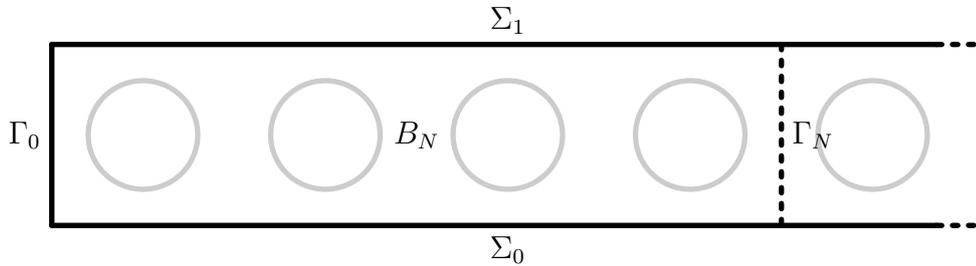
La constante  $C_U$  de la proposition 2.3 peut être déterminée explicitement à partir de  $F$  et  $G$  grâce à cette fonction profil.

**Proposition 2.7.**

$$C_U = \int_B F \mathcal{N} dy + \langle a \nabla \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, G \rangle_{\Gamma_0}.$$

où  $\vec{\mathbf{n}}$  désigne la normale sortante.

*Démonstration.* On se place dans une portion  $B_N = (0, N) \times (0, 1)$  de la bande  $B$  pour  $N \in \mathbb{N}$ .



En multipliant l'équation (2.18) par  $\mathcal{N}$  et en intégrant sur  $B_N$ , nous avons

$$- \int_{B_N} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U \mathcal{N}] dy = \int_{B_N} F \mathcal{N} dy$$

On utilise une formule de Green une première fois,

$$\int_{B_N} a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} dy - \underbrace{\langle a \nabla U \cdot \vec{\mathbf{n}}, \mathcal{N} \rangle_{\Gamma_0}}_{=0 \text{ car } \mathcal{N}|_{\Gamma_0}=0} - \langle a \nabla U \cdot \vec{\mathbf{n}}, \mathcal{N} \rangle_{\Gamma_N} = \int_{B_N} F \mathcal{N} dy,$$

puis une seconde fois,

$$\underbrace{- \int_{B_N} U [\operatorname{div}_{\mathbf{y}} a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N}] dy}_{=0} + \langle a \nabla \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, U \rangle_{\Gamma_N} + \langle a \nabla \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, G \rangle_{\Gamma_0} - \langle a \nabla U \cdot \vec{\mathbf{n}}, \mathcal{N} \rangle_{\Gamma_N} = \int_{B_N} F \mathcal{N} dy \quad (2.23)$$

où on a utilisé que  $U|_{\Gamma_0} = G$ . Or  $\langle a\nabla U \cdot \vec{\mathbf{n}}, \mathcal{N} \rangle_{\Gamma_N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$  car en utilisant la proposition 2.3, il existe une fonction  $\tilde{U} \in H^1(B)$  telle que  $U = C_U + e^{-\gamma y_1} \tilde{U}$  donc

$$\langle a\nabla U \cdot \vec{\mathbf{n}}, \mathcal{N} \rangle_{\Gamma_N} = \langle a\partial_{y_1}(e^{-\gamma y_1} \tilde{U}), \mathcal{N} \rangle_{\Gamma_N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Par ailleurs, on remarque que  $\tilde{\mathcal{N}}$  est solution du problème (2.18) avec  $F = 0$  et  $G = -\frac{w_1}{a_{11}^*}$ , donc par la proposition 2.3, il existe  $\gamma > 0$ ,  $C_{\tilde{\mathcal{N}}} \in \mathbb{R}$  et  $V \in H^1(B)$  tels que  $\tilde{\mathcal{N}} = C_{\tilde{\mathcal{N}}} + e^{-\gamma y_1} V$ . Alors, en utilisant les propositions 2.3 et 2.4, on a

$$\begin{aligned} \langle a\nabla \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, U \rangle_{\Gamma_N} &= \langle a\partial_{y_1}(C_{\tilde{\mathcal{N}}} + \frac{y_1 + w_1(\mathbf{y})}{a_{11}^*} + e^{-\gamma y_1} V), C_U + e^{-\gamma N} \tilde{U} \rangle_{\Gamma_N} \\ &= C_U \underbrace{\langle \frac{a(\mathbf{y})}{a_{11}^*} (1 + \partial_{y_1} w_1(y_1, y_2)), 1 \rangle_{\Gamma_N}}_{=1 \text{ par le lemme (2.6)}} \\ &\quad + \underbrace{\langle a \left( C_U \partial_{y_1}(e^{-\gamma y_1} V) + \partial_{y_1} \left( \frac{y_1 + w_1(\mathbf{y})}{a_{11}^*} + e^{-\gamma y_1} V \right) \tilde{U} e^{-\gamma N} \right), 1 \rangle_{\Gamma_N}}_{\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0} \end{aligned}$$

Ainsi

$$C_U = \int_B F \mathcal{N} d\mathbf{y} - \langle a\nabla \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, G \rangle_{\Gamma_0} = \int_B F \mathcal{N} d\mathbf{y} + \langle a\nabla \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, G \rangle_{\Gamma_0}.$$

□

Pour toute solution  $U$  de (2.18), il est donc possible de déterminer son comportement (qui est constant) à l'infini à partir des termes sources et de  $\mathcal{N}$ , en particulier pour les termes de champ proche  $U_n$  solutions du problème (2.18) avec des  $F$  et  $G$  particuliers. Nous cherchions des fonctions qui tendent vers 0 à l'infini. On veut donc que leur comportement constant soit nul, ceci impose donc une condition sur  $F$  et  $G$  :

**Corollaire 2.8.** La solution  $U$  du problème (2.18) décroît exponentiellement vers 0 si et seulement si  $F$  est exponentiellement décroissante et

$$\int_B F \mathcal{N} d\mathbf{y} + \langle a\nabla \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, G \rangle_{\Gamma_0} = 0 \quad (2.24)$$

### 2.3.3 Application aux premiers ordres

#### Ordre 0

On cherche une solution  $U_0 \in W_{\#}(B)$  exponentiellement décroissante du problème ( $x_2$  est vu comme un paramètre) :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U_0 = 0 & \text{dans } B \\ U_0 = g(x_2) - u_{0|\Gamma}(x_2) & \text{sur } \Gamma_0 \\ U_0 \text{ } y_2\text{-périodique} & \end{cases}$$

L'unique solution dans  $W_{\#}(B)$  est donnée par

$$\forall x_2, U_0(x_2; \mathbf{y}) = g(x_2) - u_{0|\Gamma}(x_2).$$

On rappelle que  $U_0$  doit être exponentiellement décroissant vers 0 quand  $y_1$  tend vers  $+\infty$ . Puisqu'il est constant par rapport à  $\mathbf{y}$  on en déduit qu'il est nul. Ainsi, on a

$$u_{0|\Gamma} = g.$$

On retrouve donc la condition sur le bord obtenue au début du chapitre.

### Ordre 1

En notant pour tout  $i$ ,  $g_i^1 = -w_i$ , le problème vérifié par  $U_1$  s'écrit alors, pour tout  $x_2$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_1] = 0 & \text{dans } B \\ U_1(x_2; \cdot) = \sum_i g_i^1(\cdot)\partial_{x_i}u_{0|\Gamma}(x_2) - \hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

Il existe une unique solution  $U_1$  exponentiellement décroissante dès que la condition de compatibilité (2.24) est vérifiée soit

$$\begin{aligned} & -\langle a\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N} \cdot \bar{\mathbf{n}}, \sum_i g_i^1\partial_{x_i}u_{0|\Gamma}(x_2) - \hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) \rangle_{\Gamma_0} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_i \partial_{x_i}u_{0|\Gamma}(x_2) \langle a\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N} \cdot \bar{\mathbf{n}}, g_i^1 \rangle_{\Gamma_0} - \hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) \underbrace{\langle a\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N} \cdot \bar{\mathbf{n}}, 1 \rangle_{\Gamma_0}}_{=-1 \text{ par le lemme 2.5}} = 0 \end{aligned}$$

Alors, pour que  $U_1$  tende vers 0 à l'infini,  $\hat{u}_1$  doit vérifier la condition au bord

$$\hat{u}_{1|\Gamma} = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_{0|\Gamma}, \quad (2.25)$$

où

$$d_1^i = -\langle a\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N} \cdot \bar{\mathbf{n}}, g_i^1 \rangle_{\Gamma_0}.$$

D'après l'équation volumique (1.25) et la condition au bord (2.25),  $\hat{u}_1$  satisfait

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^*\nabla\hat{u}_1] - \omega^2\rho^*\hat{u}_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \hat{u}_1 = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Dès que  $u_0$  et  $\hat{u}_1$  sont connus,  $U_1$  peut également être déterminé. Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , introduisons  $U_1^i \in W_{\#}(B)$  les solutions des problèmes

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_1^i] = 0 & \text{dans } B \\ U_1^i = g_i^1 - d_1^i & \text{sur } \Gamma_0 \\ U_1^i & y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

On remarque que  $U_1^i \xrightarrow{y_1 \rightarrow +\infty} 0$  car la condition de compatibilité (2.24) est satisfaite. Par linéarité, nous avons

$$U_1(x_2; \mathbf{y}) = \sum_i U_1^i(\mathbf{y})\partial_{x_i}u_{0|\Gamma}(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in B. \quad (2.26)$$

### Ordre 2

Commençons par réécrire l'équation vérifiée par le terme de champ proche  $U_2$  :

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_2] = \partial_{x_2}[a(\mathbf{y})\partial_{y_2}U_1] + \partial_{y_2}[a(\mathbf{y})\partial_{x_2}U_1].$$

En utilisant (2.26), on trouve que  $U_2$  vérifie

$$-\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_2] = \sum_{i \leq j} f_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma}$$

où  $f_2^{i2}(\mathbf{y}) = a(\mathbf{y})\partial_{y_2}U_1^i(\mathbf{y}) + \partial_{y_2}(a(\mathbf{y})U_1^i(\mathbf{y}))$  et  $f_2^{11} \equiv 0$ . Pour la condition au bord, on a  $U_2\left(\cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon}\right)|_{\Gamma} = -u_2\left(\cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon}\right)|_{\Gamma}$ . En utilisant l'expression (1.19) de  $u_2$  et en notant pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $g_{ii}^2 = -\theta_{ii}$ ,  $g_2^{12} = -\theta_{12} - \theta_{21}$  et  $g_2^0 = -\gamma$ , on trouve pour tout  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$U_2(x_2; \cdot) = \sum_{i \leq j} g_2^{ij}(\cdot) \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma}(x_2) + \sum_i g_i^1(\cdot) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) + \omega^2 g_2^0(\cdot) u_{0|\Gamma}(x_2) \quad \text{sur } \Gamma_0.$$

Ainsi,  $U_2$  vérifie le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_2] & = \sum_{i \leq j} f_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma} & \text{dans } B \\ U_2(x_2; \cdot) & = \sum_{i \leq j} g_2^{ij}(\cdot) \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma}(x_2) + \sum_i g_i^1(\cdot) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) & \text{sur } \Gamma_0 \\ & + \omega^2 g_2^0(\cdot) u_{0|\Gamma}(x_2) - \hat{u}_{2|\Gamma}(x_2). \\ U_2 & y_2\text{-périodique} \end{array} \right.$$

$U_2$  est exponentiellement décroissant si et seulement si la condition de compatibilité (2.24) est satisfaite, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \sum_{i \leq j} \left( \int_B f_2^{ij} \mathcal{N} d\mathbf{y} \right) \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma}(x_2) + \sum_{i \leq j} \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g_2^{ij} \rangle_{\Gamma_0} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma}(x_2) \\ & + \sum_i \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g_i^1 \rangle_{\Gamma_0} \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) + \omega^2 \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g_2^0 \rangle_{\Gamma_0} u_{0|\Gamma}(x_2) - \hat{u}_{2|\Gamma}(x_2) = 0. \end{aligned}$$

On déduit que  $\hat{u}_2$  vérifie la condition au bord

$$\hat{u}_{2|\Gamma} = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma} + \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma} + d_2^0 u_{0|\Gamma} \quad (2.27)$$

où

$$d_2^{ij} = \int_B f_2^{ij} \mathcal{N} d\mathbf{y} - \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g_2^{ij} \rangle_{\Gamma_0}$$

et

$$d_2^0 = -\langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g_2^0 \rangle_{\Gamma_0}.$$

D'après l'équation volumique (1.31) et la condition (2.27),  $\hat{u}_2$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_2] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_2 & = \sum_{ijkl} d_{ijkl}^* \partial_{x_i x_j x_k x_l}^4 u_0 + \omega^2 \sum_{ij} e_{ij}^* \partial_{x_i x_j}^2 u_0 + \omega^4 h^* u_0 & \text{dans } \Omega \\ \hat{u}_2 & = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma} + \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma} + \omega^2 d_2^0 u_{0|\Gamma} & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Enfin, dès que  $u_0$ ,  $\hat{u}_1$  et  $\hat{u}_2$  sont calculés, il est possible de calculer  $U_2$  en utilisant :

— pour  $1 \leq i \leq j \leq 2$ ,  $U_2^{ij} \in W_{\#}(B)$  la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_2^{ij}] & = f_2^{ij} & \text{dans } B \\ U_2^{ij} & = g_2^{ij} - d_2^{ij} & \text{sur } \Gamma_0 \\ U_2^{ij} & y_2\text{-périodique} \end{array} \right.$$

(qui tend vers 0 d'après la proposition 2.8),

—  $U_2^0 \in W_{\#}(B)$  la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_2^0] & = 0 & \text{dans } B \\ U_2^0 & = g_2^0 - d_2^0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ U_2^0 & y_2\text{-périodique} \end{array} \right.$$

(qui tend vers 0 d'après la proposition 2.8).

Par linéarité,  $U_2$  peut s'écrire sous la forme,

$$U_2(x_2; \mathbf{y}) = \sum_i U_1^i(\mathbf{y}) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) + \sum_{i \leq j} U_2^{ij}(\mathbf{y}) \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma}(x_2) + \omega^2 U_2^0(\mathbf{y}) u_{0|\Gamma}(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in B.$$

### 2.3.4 Formalisme pour un développement à tout ordre

On vient de trouver que :

- $\hat{u}_1$  vérifie la condition au bord  $\hat{u}_{1|\Gamma} = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_{0|\Gamma}$ ,
- $\hat{u}_2$  vérifie la condition au bord  $\hat{u}_{2|\Gamma} = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma} + \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma} + \omega^2 d_2^0 u_{0|\Gamma}$ .

De plus, les termes de champ proche vérifient :

- $U_1 = \sum_i U_1^i \partial_{x_i} u_{0|\Gamma}$  où  $U_1^i \in W_{\#}(B)$  est la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_1^i] = 0 & \text{dans } B \\ U_1^i = g_i^1 - d_1^i & \text{sur } \Gamma_0 \\ U_1^i & y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

- $U_2 = \sum_i U_1^i \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma} + \sum_{i \leq j} U_2^{ij} \partial_{x_i x_j} u_{0|\Gamma} + \omega^2 U_2^0 u_{0|\Gamma}$  où  $U_2^{ij} \in W_{\#}(B)$  est la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_2^{ij}] = f_2^{ij} & \text{dans } B \\ U_2^{ij} = g_2^{ij} - d_2^{ij} & \text{sur } \Gamma_0 \\ U_2^{ij} & y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

et  $U_2^0 \in W_{\#}(B)$  est la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_2^0] = 0 & \text{dans } B \\ U_2^0 = g_2^0 - d_2^0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ U_2^0 & y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

De façon similaire au chapitre 1, il est possible d'étendre à tout ordre ces expressions et conditions au bord. Avant cela, on remarque que le théorème 1.9 du chapitre 1 est toujours valable dans  $\Omega$ .

**Théorème 2.9.** Soit  $n \geq 1$ . Il existe une solution  $U_n$  solution de (2.17) si et seulement si  $\hat{u}_n$  vérifie la condition au bord

$$\hat{u}_n|_{\Gamma} = \sum_{k=0}^{n-1} [c_{n-k}(\partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_k]_{|\Gamma} \quad (2.28)$$

et  $U_n$  est donné par

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{y} \in B, U_n(x_2; \mathbf{y}) = \sum_{p=0}^{n-1} [\Upsilon_{n-p}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_p]_{|\Gamma}(x_2).$$

où on définit pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$   $\Upsilon_p(\cdot; \boldsymbol{\eta})$  qui dépend de  $\boldsymbol{\eta}$  de manière polynomiale, de degré  $p$  et pour tout  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^2$ ,  $\Upsilon_n(\cdot; \boldsymbol{\eta})$  est l'unique solution dans  $W_{\#}(B)$  du problème défini par récurrence

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\Upsilon_p(\cdot; \boldsymbol{\eta})] = F_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) & \text{dans } B \\ \Upsilon_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) = -\Theta_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) - c_p(\boldsymbol{\eta}) & \text{sur } \Gamma_0 \\ \Upsilon_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) & y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (2.29)$$

(avec  $\Upsilon_0 = \Upsilon_{-1} = 0$ ) avec

$$F_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) = \eta_2(a(\mathbf{y})\partial_{y_2} + \partial_{y_2}a(\mathbf{y}))\Upsilon_{p-1}(\cdot; \boldsymbol{\eta}) + (a(\mathbf{y})\eta_2^2 + \omega^2\rho(\mathbf{y}))\Upsilon_{p-2}(\cdot; \boldsymbol{\eta}),$$

où  $\Theta_p$  est défini dans le théorème 1.9, et  $c_p(\boldsymbol{\eta})$  est un polynôme en  $\boldsymbol{\eta}$  de degré  $p$  défini par

$$c_p(\boldsymbol{\eta}) = \int_B F_p(\boldsymbol{\eta})\mathcal{N}d\mathbf{y} + \langle a\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, \Theta_p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) \rangle_{\Gamma_0}. \quad (2.30)$$

De plus, on montre que

$$u_0 \in H^{n+1}(\Omega) \implies \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \hat{u}_k \in H^{n+1-k}(\Omega).$$

Les premiers coefficients  $c_n$  valent :

- $c_0(\boldsymbol{\eta}) = -1$ ,
- $c_1(\boldsymbol{\eta}) = d_1^1\eta_1 + d_1^2\eta_2$ ,
- $c_2(\boldsymbol{\eta}) = d_1^{11}\eta_1^2 + d_1^{12}\eta_1\eta_2 + d_1^{22}\eta_2^2 + \omega^2d_2^0$ .

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , on a vu au paragraphe précédent que

$$U_1(x_2; \mathbf{y}) = \sum_i U_1^i(\mathbf{y})\partial_{x_i}u_0|_{\Gamma}(x_2)$$

où les  $U_1^i$  sont les uniques solutions dans  $W_{\#}(B)$  des problèmes

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_1^i] = 0 & \text{dans } B \\ U_1^i = -w_i - d_1^i & \text{sur } \Gamma_0 \\ U_1^i & y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

où

$$d_1^i = -\langle a\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g_1^i \rangle_{\Gamma_0}.$$

On rappelle que  $\Theta_1(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) = w_1(\mathbf{y})\eta_1 + w_2(\mathbf{y})\eta_2$ .

On a donc  $U_1(x_2; \mathbf{y}) = \Upsilon_1(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_0|_{\Gamma}(x_2)$  où  $\Upsilon_1(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) = U_1^1(\mathbf{y})\eta_1 + U_1^2(\mathbf{y})\eta_2$ . On constate que  $\Upsilon_1$  est de degré 1. De plus,

$$\begin{aligned} c_1(\boldsymbol{\eta}) &= d_1^1\eta_1 + d_1^2\eta_2 \\ &= \sum_i \langle a\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, w_i \rangle_{\Gamma_0} \eta_i \\ &= \langle a\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, \Theta_1(\cdot; \boldsymbol{\eta}) \rangle_{\Gamma_0}. \end{aligned}$$

On constate que  $c_1(\boldsymbol{\eta})$  est bien de degré 1. Enfin, par linéarité, on a que pour tout  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^2$ ,  $\Upsilon_1(\cdot; \boldsymbol{\eta}) \in W_{\#}(B)$  est solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \Upsilon_1(\cdot; \boldsymbol{\eta})] = 0 & \text{dans } B \\ \Upsilon_1(\cdot; \boldsymbol{\eta}) = -\Theta_1(\cdot; \boldsymbol{\eta}) - c_1(\boldsymbol{\eta}) & \text{sur } \Gamma_0 \\ \Upsilon_1(\cdot; \boldsymbol{\eta}) \text{ } y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

Enfin, la condition de compatibilité se réécrit

$$\begin{aligned} \hat{u}_{1|\Gamma} &= \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_0|_{\Gamma} \\ &= [c_1(\partial_{\mathbf{x}}) u_0]_{|\Gamma} \end{aligned}$$

On suppose à présent la propriété vraie pour tout  $1 \leq k \leq p-1$ . L'équation volumique satisfaite par  $U_p$  peut se réécrire

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U_p] &= \operatorname{div}_{x_2} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U_{p-1}] + \operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{x_2} U_{p-1}] + a(\mathbf{y}) \partial_{x_2}^2 U_{p-2} + \omega^2 \rho(\mathbf{y}) U_{p-2} \\ &= \sum_{k=0}^{p-2} [(a(\mathbf{y}) \partial_{y_2} \Upsilon_{p-1-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) + \partial_{y_2} (a(\mathbf{y}) \Upsilon_{p-1-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}))) \partial_{x_2} \hat{u}_k]_{|\Gamma}(x_2) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{p-3} [a(\mathbf{y}) \Upsilon_{p-2-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) \partial_{x_2}^2 \hat{u}_k]_{|\Gamma}(x_2) + \omega^2 \rho(\mathbf{y}) [\Upsilon_{p-2-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k]_{|\Gamma}(x_2) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} [F_{p-k}(\partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k]_{|\Gamma} \end{aligned}$$

(on rajoute  $F_1 = 0$  dans la somme pour la suite). D'autre part, sur  $\Gamma_0$ , d'après (2.16),  $U_p$  satisfait la condition

$$\begin{aligned} U_{p|\Gamma_0}(x_2; \cdot) &= -u_{p|\Gamma} \\ &= -\sum_{k=0}^p [\Theta_{p-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k]_{|\Gamma} \end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant la condition de compatibilité (2.8), on a que  $U_p$  tend vers 0 quand  $y_1$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{p-1} \left[ \left( \int_B F_{p-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) \mathcal{N} d\mathbf{y} \right) \hat{u}_k \right]_{|\Gamma} + \sum_{k=0}^p [\langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \mathbf{\bar{n}}, \Theta_{p-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}}) \rangle_{\Gamma_0} \hat{u}_k]_{|\Gamma} = 0 \\ \iff &\sum_{k=0}^{p-1} \left[ \left( \int_B F_{p-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) \mathcal{N} d\mathbf{y} + \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \mathbf{\bar{n}}, \Theta_{p-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}}) \rangle_{\Gamma_0} \right) \hat{u}_k \right]_{|\Gamma} + \underbrace{\langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \mathbf{\bar{n}}, 1 \rangle_{\Gamma_0}}_{=-1 \text{ par le lemme 2.5}} \hat{u}_k|_{\Gamma} = 0 \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\hat{u}_{p|\Gamma} = \sum_{k=0}^{p-1} [c_{p-k}(\partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k]_{|\Gamma}.$$

Cela nous donne d'après (2.16) et  $\Theta_0 = 1$ ,

$$\begin{aligned} U_{p|\Gamma_0} &= -\sum_{k=0}^{p-1} [\Theta_{p-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k]_{|\Gamma} - \hat{u}_{p|\Gamma} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} [(-\Theta_{p-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}}) - c_{p-k}(\partial_{\mathbf{x}})) \hat{u}_k]_{|\Gamma}. \end{aligned}$$

Comme  $U_p$  satisfait le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U_p] = \partial_{x_2} [a(\mathbf{y}) \partial_{y_2} U_{p-1}] + \partial_{y_2} [a(\mathbf{y}) \partial_{x_2} U_{p-1}] & \text{dans } B \\ \quad \quad \quad + a(\mathbf{y}) \partial_{x_2}^2 U_{p-2} + \omega^2 \rho(\mathbf{y}) U_{p-2} \\ U_p(x_2; \cdot) = -u_p(0, x_2; \cdot) & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

et les  $\Upsilon_k$  sont solutions de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \Upsilon_p(\cdot; \boldsymbol{\eta})] = F_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) & \text{dans } B \\ \Upsilon_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) = -\Theta_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) - c_p(\boldsymbol{\eta}) & \text{sur } \Gamma_0, \end{cases}$$

Par récurrence,  $\Upsilon_{p-1}(\boldsymbol{\eta})$  est un polynôme de degré  $p-1$  et  $\Upsilon_{p-2}(\boldsymbol{\eta})$  est un polynôme de degré  $p-2$ . Par définition de  $F_p(\boldsymbol{\eta})$ , on a que  $F_p(\boldsymbol{\eta})$  est de degré  $p$ . Comme  $\Theta_p(\boldsymbol{\eta})$  est un polynôme en  $\boldsymbol{\eta}$  de degré  $p$ , on en déduit par définition de  $c_p(\boldsymbol{\eta})$  qu'il est de degré  $p$  et donc que  $\Upsilon_p(\boldsymbol{\eta})$  est de degré  $p$ .

Par linéarité, on obtient que

$$U_p = \sum_{k=0}^{p-1} [\Upsilon_{p-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k]_{|\Gamma}.$$

Il nous reste à montrer le résultat de régularité sur les termes macroscopiques. On suppose que  $u_0 \in H^{n+1}(\Omega)$ . On a pour  $k=1$  que  $\hat{u}_1$  est solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_1] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \hat{u}_1 = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Or comme  $u_0 \in H^{n+1}(\Omega)$ , pour tout  $i$ ,  $\partial_{x_i} u_0 \in H^n(\Omega)$  et donc  $\partial_{x_i} u_0|_{\Gamma} \in H^{n-\frac{1}{2}}(\Omega)$ . On en déduit que  $\hat{u}_1|_{\Gamma} \in H^{n-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . On en déduit que  $\hat{u}_1 \in H^n(\Omega)$ . Par la suite, on suppose que pour tout  $k \leq p-1 \leq n$ ,  $\hat{u}_k \in H^{n+1-k}(\Omega)$ . On veut montrer que  $\hat{u}_p \in H^{n+1-p}(\Omega)$ . On a par ce qui précède que  $\hat{u}_p$  satisfait le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_p] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_p = -\sum_{k=0}^{p-1} m_{p+1-k}(\partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k & \text{dans } \Omega \\ \hat{u}_p = \sum_{k=0}^{p-1} [c_{p-k}(\partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k]_{|\Gamma} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où pour tout  $k$ ,  $m_k(\boldsymbol{\eta})$  est un polynôme en  $\boldsymbol{\eta}$  de degré  $k+1$  défini dans le théorème 1.9. On en déduit, par hypothèse de récurrence, que pour tout  $k$ ,  $m_{p+1-k}(\partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k \in H^{n+1-p}(\Omega)$ . Par ailleurs, toujours par hypothèse de récurrence, comme  $c_k(\boldsymbol{\eta})$  est un polynôme en  $\boldsymbol{\eta}$  de degré  $k$ , on a que  $[c_{p-k}(\partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k]_{|\Gamma} \in H^{n-p+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . On obtient donc bien que  $\hat{u}_p \in H^{n+1-p}(\Omega)$ .  $\square$

Tout comme pour les  $\Theta_n$ , les  $\Upsilon_n$  sont des polynômes que nous écrivons

$$\forall \mathbf{y} \in B, \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^2, \Upsilon_n(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) = \sum_{|\alpha| \leq n} \Upsilon_n^\alpha(\mathbf{y}) \boldsymbol{\eta}^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}^2.$$

## 2.4 Estimations d'erreur

**Théorème 2.10.** Soit  $(u_\varepsilon)$  la famille des solutions de (1.2). Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et les familles  $(u_k)_{k \leq n}$  et  $(U_k)_{k \leq n}$  définies respectivement par (1.33) et (2.9). On suppose  $(\mathcal{H}_n) : f \in H^{n-1}(\Omega)$  et que  $a$  et  $\rho$  sont suffisamment réguliers pour que pour tout  $k \leq n+1$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^2$  tel que  $|\alpha| \leq k$ ,  $\Theta_k^\alpha \in W^{1,\infty}(Y)$  et  $\Upsilon_k^\alpha \in W^{1,\infty}(B)$ . On a alors

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left[ u_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + U_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right] \right\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^n).$$

*Démonstration.* La démonstration est très semblable à celle du théorème 1.10.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on pose

$$e_\varepsilon^n(\mathbf{x}) = u_\varepsilon(\mathbf{x}) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k U_k \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right).$$

D'après (2.16), on a que  $e_{\varepsilon|\Gamma}^n = 0$ . On va montrer que  $L_\varepsilon e_\varepsilon^n = -\operatorname{div}[a(\cdot/\varepsilon)\nabla e_\varepsilon^n] - \omega^2 \rho(\cdot/\varepsilon)e_\varepsilon^n = r_\varepsilon$  tel que  $\|r_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^n)$ . Ainsi, par le théorème de Lax-Milgram, on aura que

$$\|e_\varepsilon^n\|_{H^1(\Omega)} \leq K\varepsilon^n.$$

On a

$$\begin{aligned} L_\varepsilon e_\varepsilon^n &= -\operatorname{div} \left[ a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla e_\varepsilon^n \right] - \omega^2 \rho \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) e_\varepsilon^n \\ &= f - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k L_\varepsilon u_k - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k L_\varepsilon U_k \end{aligned}$$

Comme, d'après la démonstration du théorème 1.10,

$$\sum_{k=0}^n \varepsilon^k L_\varepsilon u_k = f + \varepsilon^n ((\operatorname{div} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}})(a(\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}u_{n+1}) + L_2 u_n).$$

(où l'opérateur  $L_2$  est défini en (1.7)) et de la même manière, en utilisant les opérateurs définis en (2.14) et la règle de dérivation des fonctions composées (1.5),

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \varepsilon^k L_\varepsilon U_k &= \sum_{k=-2}^{n-2} \varepsilon^k \mathcal{L}_0 U_{k+2} + \sum_{k=-1}^{n-1} \varepsilon^k \mathcal{L}_1 U_{k+1} + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \mathcal{L}_2 U_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \varepsilon^k \underbrace{(\mathcal{L}_0 U_{k+2} + \mathcal{L}_1 U_{k+1} + \mathcal{L}_2 U_k)}_{=0} + \varepsilon^{-2} \underbrace{\mathcal{L}_0 U_0}_{=0} + \varepsilon^{-1} \underbrace{(\mathcal{L}_0 U_1 + \mathcal{L}_1 U_0)}_{=0} \\ &\quad + \varepsilon^{n-1} \underbrace{(\mathcal{L}_1 U_n + \mathcal{L}_2 U_{n-1})}_{-\mathcal{L}_0 U_{n+1}} + \varepsilon^n \mathcal{L}_2 U_n \\ &= \varepsilon^{n-1} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}(a(\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}U_{n+1}) + \varepsilon^n \mathcal{L}_2 U_n \\ &= \varepsilon^{n-1} ((\operatorname{div} - \operatorname{div}_{x_2})(a(\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}U_{n+1}) + \mathcal{L}_2 U_n) \end{aligned}$$

On en conclut que

$$L_\varepsilon e_\varepsilon^n = r_\varepsilon$$

où

$$r_\varepsilon = -\varepsilon^n ((\operatorname{div} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}})(a(\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}u_{n+1}) + L_2 u_n) + (\operatorname{div} - \operatorname{div}_{x_2})(a(\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}U_{n+1}) + \mathcal{L}_2 U_n. \quad (2.31)$$

Montrons que pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$(r_\varepsilon, v) \leq K\varepsilon^n \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ . On a, en appliquant une formule de Green,

$$\begin{aligned} (r_\varepsilon, v) &\leq \varepsilon^n \left| \int_{\Omega} \left[ (\operatorname{div} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}})(a(\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}u_{n+1}) \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + L_2 u_n \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\operatorname{div} - \operatorname{div}_{x_2})(a(\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}U_{n+1}) \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \mathcal{L}_2 U_n \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] \bar{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \varepsilon^n \left| - \int_{\Omega} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1} \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla \bar{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1} \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}} \bar{v}(\mathbf{x}) dx_2 \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} \left[ \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}u_{n+1}] \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \Delta_{\mathbf{x}} u_n \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \omega^2 \rho \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) u_n \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] \bar{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{y}} U_{n+1} \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla \bar{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{y}} U_{n+1} \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}} \bar{v}(\mathbf{x}) dx_2 \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} \left[ \operatorname{div}_{x_2}[a(\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}U_{n+1}] \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2}^2 U_n \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \omega^2 \rho \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) U_n \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] \bar{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \end{aligned}$$

Or  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Ainsi, les intégrales sur le bord sont nulles. On retrouve donc comme précédemment :

$$\begin{aligned} |(r_\varepsilon, v)| &\leq \Lambda \varepsilon^n \left[ \|\nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|\Delta_{\mathbf{x}} u_n\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + |\omega^2| \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right] \\ &\quad + \varepsilon^n \left[ C \|\nabla_{\mathbf{y}} U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} + C \|\operatorname{div}_{x_2} \nabla_{\mathbf{y}} U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + C \|\partial_{x_2}^2 U_n\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \Lambda |\omega^2| \|U_n\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right] \end{aligned}$$

où  $\Lambda$  est la constante de coercivité de  $a$  et  $\rho$ .

De même que dans la démonstration du théorème 1.10, on a

$$\begin{aligned} \Lambda \varepsilon^n \left[ \|\nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ \left. + \|\Delta_{\mathbf{x}} u_n\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + |\omega^2| \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right] \leq K \varepsilon^n. \end{aligned}$$

si l'hypothèse  $(\mathcal{H}_n)$  est satisfaite. D'autre part,

$$U_n(x_2; \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{n-1} \Upsilon_{n-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_{k|\Gamma}(x_2).$$

Or,  $\Upsilon_k(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta})$  est polynomiale par rapport à  $\boldsymbol{\eta}$ . On l'écrit alors sous la forme  $\Upsilon_k(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \Upsilon_k^\alpha(\mathbf{y}) \boldsymbol{\eta}^\alpha$  où  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$  est un multi-indice,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ . Ainsi,

$$U_n(x_2; \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq n-k} \Upsilon_{n-k}^\alpha(\mathbf{y}) \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_{k|\Gamma}(x_2),$$

où  $\partial_{\mathbf{x}}^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2}$ . De plus, par la proposition (2.3), il existe  $\gamma > 0$  tel que, pour tout  $k \geq 0$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^2$  tel que  $|\alpha| \leq k$ ,

$$e^{\gamma y_1} \Upsilon_k^\alpha \xrightarrow{y_1 \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus par l'hypothèse  $(\mathcal{H}_n)$ ,  $\nabla_{\mathbf{y}} \Upsilon_k^\alpha \in L^\infty(B)$  pour  $k \leq n+1$ . Donc,

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\mathbf{y}} U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbf{y}} \Upsilon_{n+1-k}^\alpha(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) e^{\frac{\gamma x_1}{\varepsilon}}|^2 |e^{-\frac{\gamma x_1}{\varepsilon}} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_{k|\Gamma}(x_2)|^2 dx \\ &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \|\nabla_{\mathbf{y}} \Upsilon_{n+1-k}^\alpha e^{\gamma y_1}\|_{L^\infty(B)^2}^2 \|e^{-\frac{\gamma x_1}{\varepsilon}} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_{k|\Gamma}\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\|\nabla_{\mathbf{y}} U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \underbrace{\|\nabla_{\mathbf{y}} \Upsilon_{n+1-k}^\alpha e^{\gamma y_1}\|_{L^\infty(B)^2}}_{< +\infty \text{ par hyp. sur } a \text{ et } \rho} \|e^{-\gamma x_1} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_{k|\Gamma}\|_{L^2(\Omega)}$$

et de la même manière

$$\|\operatorname{div}_{x_2} \nabla_{\mathbf{y}} U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \underbrace{\|\partial_{y_1} \Upsilon_{n+1-k}^\alpha e^{\gamma y_1}\|_{L^\infty(B)}}_{< +\infty} \|e^{-\gamma x_1} \partial_{x_2} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_{k|\Gamma}\|_{L^2(\Omega)}.$$

On a également

$$\|\partial_{x_2}^2 U_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|\alpha| \leq n-k} \underbrace{\|\Upsilon_{n-k}^\alpha e^{\gamma y_1}\|_{L^\infty(B)}}_{< +\infty} \|e^{-\gamma x_1} \partial_{x_2}^2 \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_{k|\Gamma}\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.32)$$

et

$$\|U_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|\alpha| \leq n-k} \underbrace{\|\Upsilon_{n-k}^\alpha e^{\gamma y_1}\|_{L^\infty(B)}}_{< +\infty} \|e^{-\gamma x_1} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_k|_\Gamma\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par hypothèse de régularité sur  $f$ , on a que  $u_0 \in H^{n+1}(\Omega)$  et ainsi, par le théorème 2.9, pour tout  $k \leq n$ ,  $\hat{u}_k \in H^{n-k+1}(\Omega)$ . Les normes de ces dérivées qui interviennent dans les inégalités qui précède sont donc bornées. On en déduit qu'il existe  $K > 0$  tel que

$$(r_\varepsilon, v) \leq K\varepsilon^n \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc  $\|r_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^n)$ , d'où le résultat.  $\square$

**Corollaire 2.11.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Sous l'hypothèse  $(\mathcal{H}_{n+1})$  du théorème 2.10, on a

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left[ u_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + U_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right] \right\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Sous l'hypothèse  $(\mathcal{H}_{n+1})$ , on a par le théorème 2.10 que

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k \left[ u_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + U_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right] \right\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left[ u_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + U_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right] \right\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k (u_k + U_k) + \varepsilon^{n+1} (u_{n+1} + U_{n+1}) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k (u_k + U_k) \right\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^{n+1} \|u_{n+1} + U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k (u_k + U_k) \right\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon^{n+1} \|u_{n+1} + U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq K\varepsilon^{n+1} + \varepsilon^{n+1} \underbrace{\|u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}}_{< +\infty} + \varepsilon^{n+1} \|U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Or, dans la preuve du théorème précédent, on a pu voir que  $\|U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} < +\infty$  indépendamment de  $\varepsilon$  d'après l'inégalité (2.32). On en déduit que

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (u_k + U_k) \right\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

$\square$

**Remarque 2.12.** Loin du bord, on retrouve les mêmes résultats en n'utilisant que les termes de champs lointains dans le développement : pour un ouvert  $D \subset\subset \Omega$ , on a

$$\begin{aligned} \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^1(D)} &= \mathcal{O}(\varepsilon^n), \\ \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(D)} &= \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned}$$

## 2.5 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons des résultats numériques obtenus avec la librairie éléments finis XLiFE++.

### 1. Calcul d'une solution de référence $u_\varepsilon$ :

Afin de valider les résultats théoriques et les estimations d'erreur, nous allons calculer la solution exacte ou solution de référence  $u_\varepsilon$  qui vérifie

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left[ a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right] - \omega^2 \rho \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ u_\varepsilon = g & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (2.33)$$

Pour ce faire, nous utilisons la transformée de Floquet-Bloch afin de nous ramener à des problèmes de demi-bande infini. Commençons par définir la transformée de Flochet-Bloch que nous allons utiliser.

**Définition 2.13** (Transformée de Flochet-Bloch). On pose  $K_\varepsilon = \left( -\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right) \times \left( -\frac{\pi}{\varepsilon}, \frac{\pi}{\varepsilon} \right)$ . On définit la transformée de Flochet-Bloch (TFB)  $\mathcal{F} : C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R} \times K_\varepsilon)$  par

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, (x_2, k) \in K_\varepsilon, \quad \mathcal{F}u(x_1, x_2, k) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(x_1, x_2 + n\varepsilon) e^{-ikn\varepsilon}. \quad (2.34)$$

Rappelons les propriétés de la TFB qui nous intéressent ici. Si  $u \in C_0(\mathbb{R}^2)$ ,  $\mathcal{F}u$  est  $\frac{2\pi}{\varepsilon}$ -périodique par rapport à la variable  $k$  et est  $k$ -quasi-périodique ( $k$ -QP) par rapport à la variable  $x_2$  :

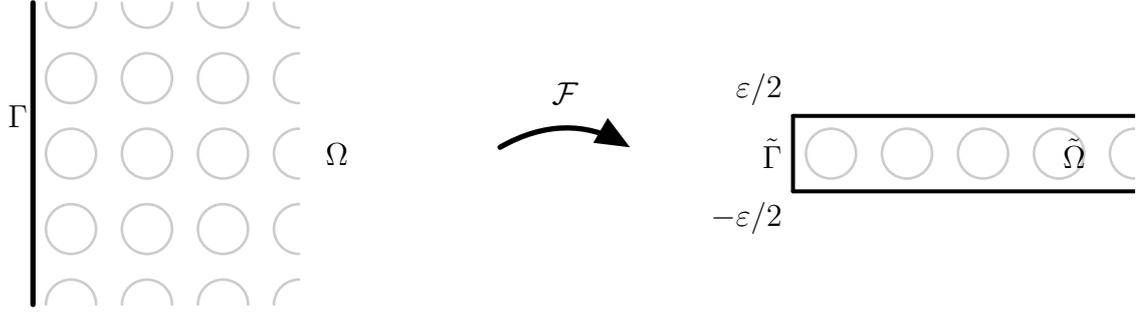
$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, (x_2, k) \in K_\varepsilon, \quad \mathcal{F}u(x_1, x_2 + \varepsilon, k) = e^{ik\varepsilon} \mathcal{F}u(x_1, x_2, k). \quad (2.35)$$

De plus, la TFB commute avec les opérateurs de dérivation : pour  $i = 1, 2$ ,  $\mathcal{F}(\partial_{x_i} u) = \partial_{x_i} \mathcal{F}u$  pour  $u \in C^1(\Omega)$ . Concernant les fonctions périodiques, si  $a : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto a(x_1, x_2)$  est une fonction  $\varepsilon$ -périodique par rapport à  $x_2$ , alors  $\mathcal{F}(au) = a\mathcal{F}u$ . Sur les espaces de Sobolev, on a également la propriété : pour  $k \in (-\pi/\varepsilon, \pi/\varepsilon)$  et  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $\tilde{u}(k) = \mathcal{F}u(\cdot, \cdot, k) \in H_k^1(\tilde{\Omega})$  où  $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^+ \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$  et  $H_k^1(\tilde{\Omega}) = \{\tilde{u} \in H^1(\tilde{\Omega}) / \forall x_1 \in \mathbb{R}^+, \tilde{u}(x_1, \varepsilon/2) = e^{ik\varepsilon} \tilde{u}(x_1, -\varepsilon/2)\}$ .

En appliquant la TFB à l'équation (2.33), on obtient que  $\mathcal{F}u_\varepsilon(\cdot, k) = \tilde{u}_\varepsilon(k) \in H_k^1(\tilde{\Omega})$  est solution de l'équation

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left[ a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon(k) \right] - \omega^2 \rho \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \tilde{u}_\varepsilon(k) = \tilde{f}(k) & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \tilde{u}_\varepsilon(k) = \tilde{g}(k) & \text{sur } \tilde{\Gamma} \\ \tilde{u}_\varepsilon(k)(x_1, \cdot) & k\text{-QP} \end{cases} \quad (2.36)$$

où  $\tilde{\Gamma} = \{0\} \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ .

FIGURE 2.2 – Transformée de Flochet-Bloch du demi-plan  $\Omega$ 

On montre que ce problème est bien posé dans  $H_k^1(\tilde{\Omega})$  en utilisant la coercivité de  $a$  et  $\rho$  et le fait que  $\text{Im } \omega^2 > 0$ . Pour résoudre les problèmes de demi bande, on utilise la méthode de [79]. A partir de la solution  $\tilde{u}_\varepsilon(k)$  de (2.36), on peut retrouver  $u_\varepsilon$  en appliquant la transformée de Flochet-Bloch inverse définie par

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right), \forall n \in \mathbb{Z}, \quad u(x_1, x_2 + n\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{F}u(x_1, x_2, k) e^{ikn\varepsilon} dk.$$

Pour simplifier, nous allons considérer le cas où  $\tilde{f}(k) \equiv 0$ .

## 2. Calcul des solutions des problèmes effectifs :

Pour le calcul des solutions de problèmes en milieu homogène c'est-à-dire  $u_0$ ,  $\hat{u}_1$  et  $\hat{u}_2$ , nous pourrions utiliser une transformée de Fourier. Pour valider les estimations d'erreur sans introduire d'erreur de discrétisation supplémentaire, nous faisons le choix de les résoudre en utilisant une transformée de Flochet-Bloch. Bien que le milieu soit homogène, on considère qu'il est  $\varepsilon$ -périodique et nous appliquons la méthode précédente. L'avantage de résoudre les problèmes effectifs avec la même méthode que pour la solution exacte  $u_\varepsilon$  est que nous n'introduisons pas d'erreur de discrétisation supplémentaire entre ces solutions, ce qui nous permet d'obtenir des estimations d'erreur non détériorées par une discrétisation différente. Il faut noter que nous pouvons appliquer la méthode de [79] pour les problèmes satisfaits par  $u_0$  et  $\hat{u}_1$  car le terme source de ces problèmes est nul (nous avons choisi de prendre  $\tilde{f}(k) \equiv 0$ ). En revanche, le terme source du problème satisfait par  $\hat{u}_2$  est non nul :

$$-\text{div}_{\mathbf{x}}[A^* \nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}_2] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_2 = \sum_{ijkl} d_{ijkl}^* \partial_{x_i x_j x_k x_l}^4 u_0 + \omega^2 \sum_{ij} e_{ij}^* \partial_{x_i x_j}^2 u_0 + \omega^4 h^* u_0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Pour résoudre ce problème, nous adaptons la méthode de résolution de problèmes de demi-bande avec terme source que nous détaillons dans la section 4.2.

## 3. Calcul des solutions de problèmes de cellule :

Comme dans la section 1.4, nous calculons les solutions des problèmes de cellule en utilisant une méthode de pénalisation qui permet de trouver une solution avec la contrainte de moyenne nulle sur la cellule  $Y$ .

## 4. Calcul des termes de champ proche et des conditions au bord des termes macroscopiques :

Le calcul des termes de champ proche nécessite la résolution de problèmes posés dans une

bande. La méthode que nous avons développée est détaillée dans les sections 4.1 et 4.2. On rappelle la condition au bord satisfaite par  $\hat{u}_1$  :

$$\hat{u}_1|_{\Gamma} = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_{0|\Gamma},$$

où

$$d_1^i = -\langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g_1^i \rangle_{\Gamma_0} = \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, w_i \rangle_{\Gamma_0}.$$

Pour calculer ces coefficients  $d_1^i$ , il n'est pas nécessaire de calculer  $\mathcal{N}$ . En effet, on a que  $\mathcal{N}$  se décompose s'écrit  $\mathcal{N} = \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} + \tilde{\mathcal{N}}$  où  $\tilde{\mathcal{N}} \in W_{\#}(B)$ . On peut alors écrire que

$$\begin{aligned} d_1^i &= \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \left( \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} + \tilde{\mathcal{N}} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}, w_i \rangle_{\Gamma_0} \\ &= \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \left( \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}, w_i \rangle_{\Gamma_0} + \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathcal{N}} \cdot \vec{\mathbf{n}}, w_i \rangle_{\Gamma_0}. \end{aligned}$$

Nous avons toutes les données pour calculer la première intégrale. Intéressons nous à  $\tilde{\mathcal{N}}$ . Puisque  $\mathcal{N}$  satisfait le problème (2.22), on a que  $\tilde{\mathcal{N}}$  est l'unique solution dans  $W_{\#}(B)$  du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathcal{N}}] = 0 & \text{dans } B \\ \tilde{\mathcal{N}} = -\frac{w_1}{a_{11}^*} & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

Or dans la section 4.1, nous définissons un opérateur Dirichlet-to-Neumann (DtN), noté  $\Lambda^{\text{DtN}}$ , de la manière suivante : pour tout  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$ ,  $\Lambda^{\text{DtN}}(\varphi) = -a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u(\varphi) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|_{\Gamma_0}$  où  $u(\varphi)$  est l'unique solution dans  $W_{\#}(B)$  de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u(\varphi)] = 0 & \text{dans } B \\ u(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

On en déduit que  $a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathcal{N}} \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_0} = \Lambda^{\text{DtN}} \left( -\frac{w_1}{a_{11}^*} \right) = -\frac{1}{a_{11}^*} \Lambda^{\text{DtN}}(w_1)$  car l'opérateur est linéaire. On a donc que

$$d_1^i = \frac{1}{a_{11}^*} \langle a \nabla_{\mathbf{y}}(y_1 + w_1) \cdot \vec{\mathbf{n}}, w_i \rangle_{\Gamma_0} - \frac{1}{a_{11}^*} \langle \Lambda^{\text{DtN}}(w_1), w_i \rangle_{\Gamma_0}.$$

Le calcul de l'opérateur DtN  $\Lambda^{\text{DtN}}$  est détaillé dans la section 4.1.

La condition au bord satisfaite par  $\hat{u}_2$  que nous avons trouvée s'écrit

$$\hat{u}_2|_{\Gamma} = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} \hat{u}_1|_{\Gamma} + \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma} + d_2^0 u_{0|\Gamma}$$

où

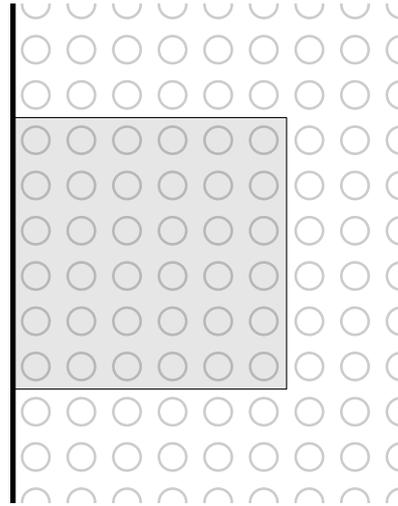
$$d_2^{ij} = \delta_{j2} \int_B (a(\mathbf{y}) \partial_{y_2} U_1^i(\mathbf{y}) + \partial_{y_2} (a(\mathbf{y}) U_1^i(\mathbf{y}))) \mathcal{N} d\mathbf{y} - \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g_2^{ij} \rangle_{\Gamma_0}$$

avec pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $g_{ii}^2 = -\theta_{ii}$ ,  $g_2^{12} = -\theta_{12} - \theta_{21}$ , et

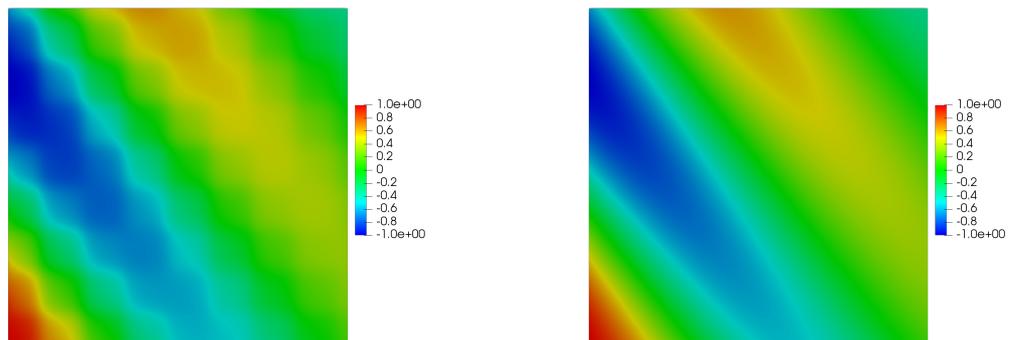
$$d_2^0 = \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, \gamma \rangle_{\Gamma_0}.$$

Nous venons de voir comment calculer les termes de bord. Le calcul de l'intégrale sur la demi-bande  $B$  des coefficients  $d_2^{12}$  et  $d_2^{22}$  se fait grâce à notre méthode de calcul des termes de champ proche et est détaillé dans la section 4.4.

Nous prenons comme fonctions  $a(y_1, y_2) = (2 + \sin(2\pi y_1))(2 + \sin(2\pi y_2)) = \rho(y_1, y_2)$  et nous fixons le paramètre de la forme  $\omega^2 = (k_x + i)^2 + k_y^2$  avec  $k_x = 4.5, k_y = 4$ . Nous prenons également pour terme source  $f = 0$  et pour condition au bord  $g(y_2) = e^{ik_y y_2}$ . Comme pour les calculs numériques sans bord, nous prenons des  $\varepsilon$  de la forme  $\varepsilon = 1/N$  avec  $N \in \mathbb{N}^*$  pour avoir un nombre entier de cellules dans notre domaine de calcul. Nous représentons les solutions dans le domaine  $\Omega = (0, 1)^2$ , l'unique bord « physique » à gauche.

FIGURE 2.3 – Domaine  $\Omega$ 

Sur la figure 2.4, on représente  $u_\varepsilon$  pour  $\varepsilon = 1/8$  et  $u_0$ . Une nouvelle fois, on voit que  $u_0$  représente bien le comportement macroscopique de  $u_\varepsilon$ .

FIGURE 2.4 –  $u_\varepsilon$  pour  $\varepsilon = 1/8$  (à gauche) et  $u_0$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$

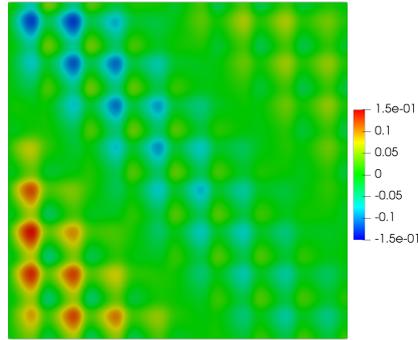


FIGURE 2.5 –  $u_\varepsilon - u_0$  pour  $\varepsilon = 1/8$  dans  $\Omega = (0, 1)^2$

La vitesse de convergence de  $u_\varepsilon$  vers  $u_0$  en norme  $L^2$  est bien en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  et en  $\mathcal{O}(1)$  en norme  $H^1$  comme l'illustre la figure 2.6.

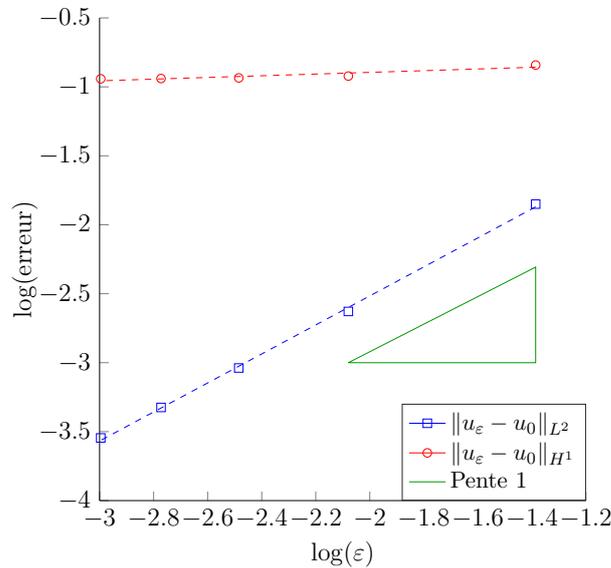


FIGURE 2.6 – Erreur  $u_\varepsilon - u_0$  en norme  $L^2$  et  $H^1$  en échelle logarithmique

La figure 2.7 représente côte à côte les différences  $u_\varepsilon - u_0$  et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc})$  pour  $\varepsilon = 1/8$  à la même échelle. On constate que les oscillations dans le domaine sont corrigées par la partie oscillante  $u_1^{osc}$ .

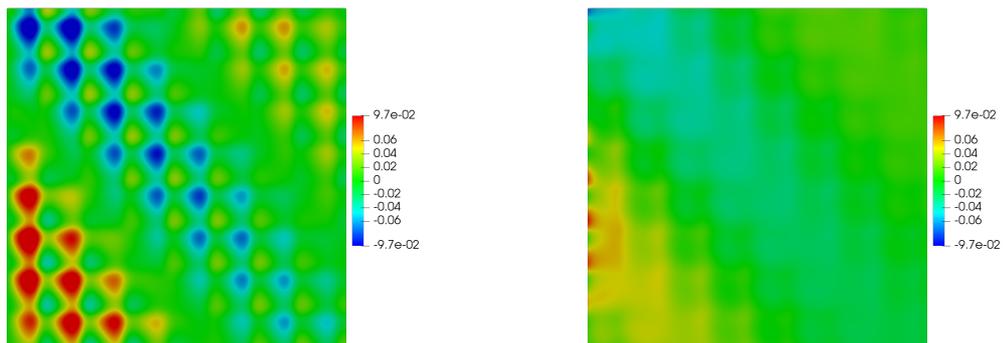


FIGURE 2.7 –  $u_\varepsilon - u_0$  (à gauche) et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc})$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$  pour  $\varepsilon = 1/8$

En revanche, on observe un comportement macroscopique dans le volume qui n'est pas corrigé par  $u_1^{osc}$ . D'autre part, on observe des oscillations le long du bord  $\Gamma$  correspondant au phénomène de couches limites dû à la présence de bord. Sur la figure 2.8, nous représentons  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc})$ ,  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)$  et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon U_1)$  à la même échelle, différente de celle de la figure 2.7. L'ajout de  $\hat{u}_1$  au développement permet de prendre en compte le comportement macroscopique que nous avons observé au-dessus. Enfin, il nous suffit d'inclure  $U_1$  pour corriger les oscillations au bord.

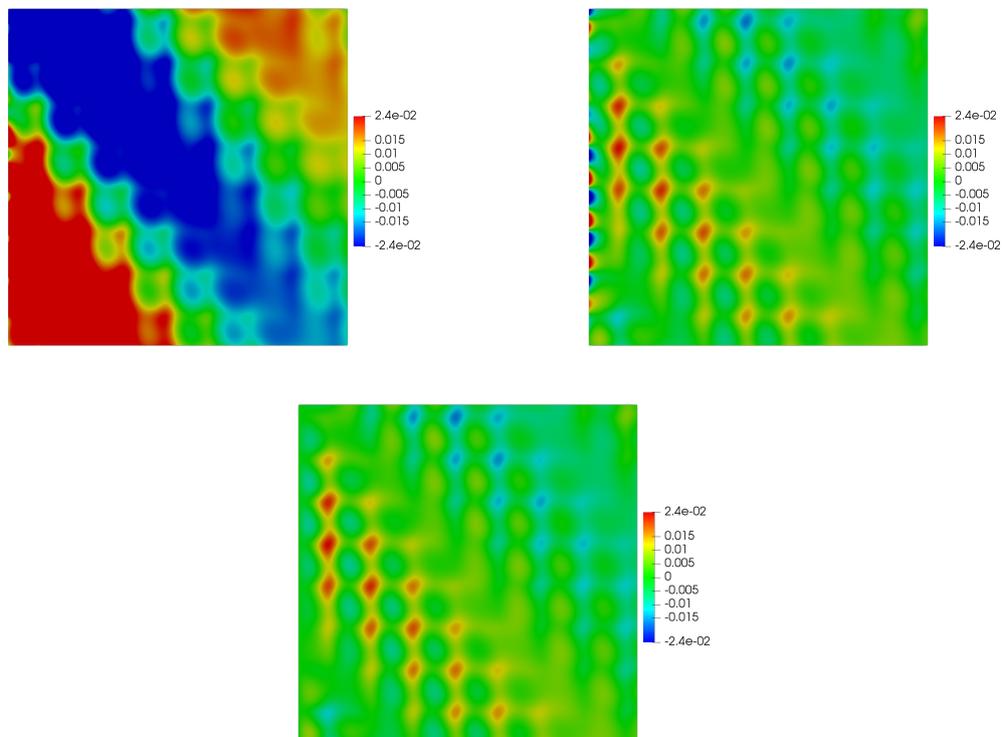


FIGURE 2.8 –  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc})$  (à gauche),  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)$  (à droite) et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon U_1)$  (au centre) dans  $\Omega = (0, 1)^2$  pour  $\varepsilon = 1/8$

La figure 2.9 représente les courbes de convergences de  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc})$ ,  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)$  et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon U_1)$  en fonction de  $\varepsilon$  en norme  $L^2$  et en norme  $H^1$ . On constate qu'avec le développement à l'ordre 1, pour obtenir la vitesse de convergence que nous avons dans  $\mathbb{R}^2$  tout entier, c'est-à-dire une convergence en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  en norme  $L^2$  et en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  en norme  $H^1$ , il est nécessaire d'ajouter  $\hat{u}_1$  et  $U_1$  au développement.

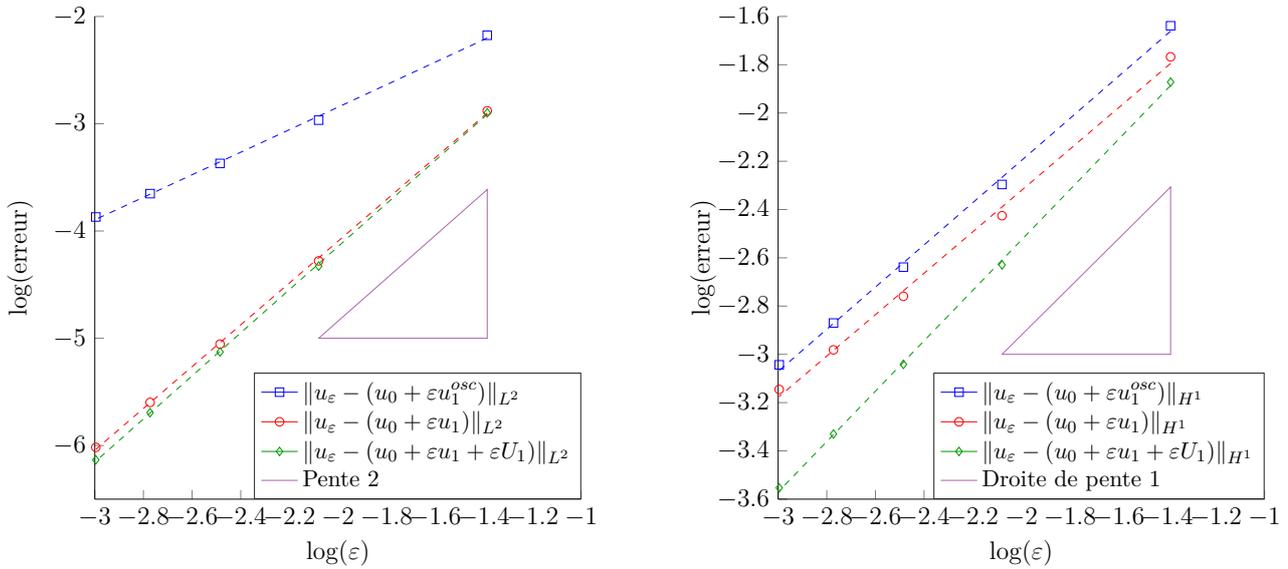


FIGURE 2.9 – Erreurs  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1^{osc})$ ,  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1)$  et  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1)$  en norme  $L^2$  (à gauche) et  $H^1$  (à droite) en échelle logarithmique

Nous arrivons maintenant au développement à l'ordre 2. La figure 2.10 représente les différences  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1)$ ,  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 u_2^{osc})$ ,  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 u_2)$  et  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^2 U_2)$  à la même échelle, différente de celle de la figure 2.8. On constate une nouvelle fois que  $u_2^{osc}$  permet de corriger les oscillations dans le volume mais on observe encore un comportement macroscopique que l'on corrige grâce à  $\hat{u}_2$  et un phénomène de couches limites qui est corrigé par  $U_2$ .

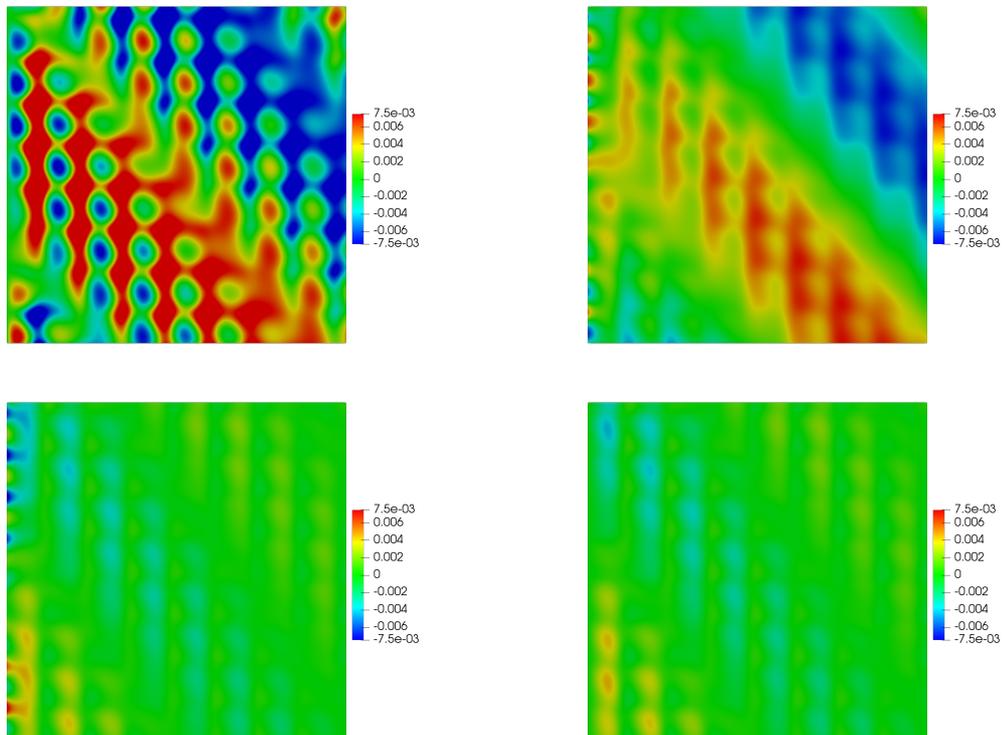


FIGURE 2.10 –  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1)$  (en haut à gauche),  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 u_2^{osc})$  (en haut à droite),  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 u_2)$  (en bas à gauche) et  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^2 U_2)$  (en bas à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$  pour  $\epsilon = 1/8$

Finalement, nous constatons une nouvelle fois, grâce aux courbes de convergence de la figure 2.11, que nous obtenons une convergence en  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$  en norme  $L^2$  et en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  en norme  $H^1$  une fois que nous avons ajouté  $\hat{u}$  et  $U_2$  au développement.

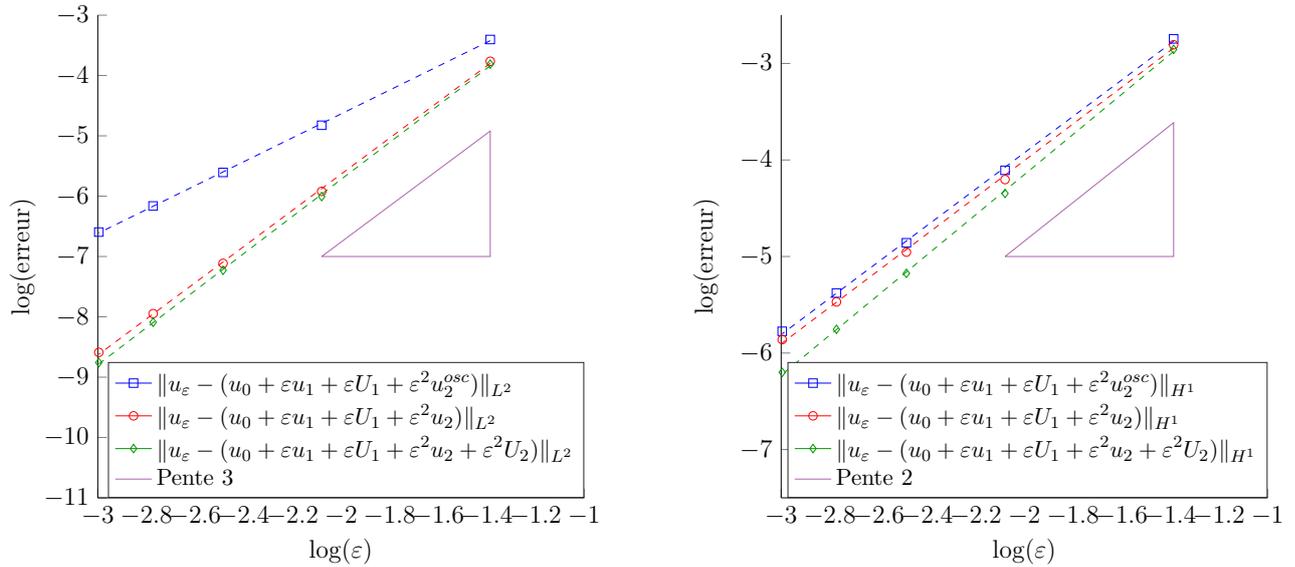


FIGURE 2.11 – Erreurs  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 u_2^{osc})$ ,  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 u_2)$  et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^2 U_2)$  en norme  $L^2$  (à gauche) et  $H^1$  (à droite) en échelle logarithmique

Il est bon de noter que la manière dont le bord coupe la cellule de périodicité influe sur la condition au bord des termes effectifs  $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots$ . Nous illustrons dans la figure 2.12 l'évolution de la valeur du coefficient  $d_1^1$  suivant la position du bord dans la cellule de périodicité. Pour cela, nous notons pour  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $a_\alpha(y_1, y_2) = a(y_1 + \alpha, y_2)$  et nous calculons le coefficient  $d_1^1$  associé au problème avec pour donnée  $a_\alpha$ .

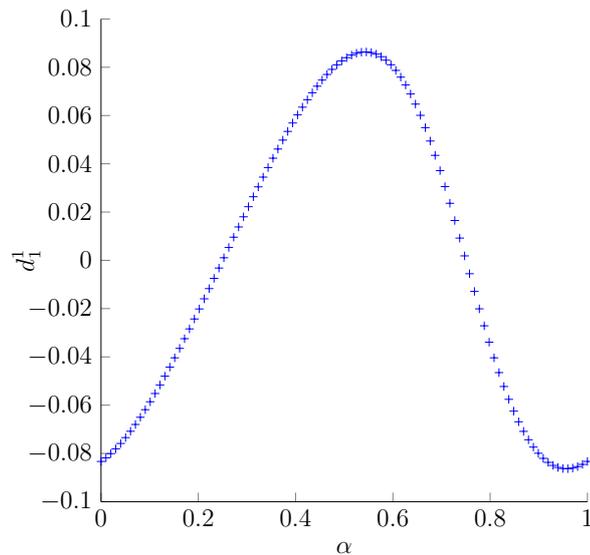


FIGURE 2.12 – Évolution du coefficient  $d_1^1$  suivant la position du bord dans la cellule de périodicité

On note en particulier que le signe des coefficients intervenant dans les conditions au bord des termes effectifs varie suivant la manière dont le bord coupe la cellule de périodicité et ne peut être connu a priori.

A présent, nous explicitons le cas particulier de milieux stratifiés pour lesquels certains termes du développement asymptotique sont nuls :

- Lorsque le milieu est stratifié parallèlement au bord, c'est-à-dire dans notre cas une fonction  $a$  indépendante de la variable  $y_2$ , on observe pour les premières solutions de problème de cellule que  $w_1$  est indépendant de la variable  $y_2$  et  $w_2$  est nul puisqu'on le rappelle,  $w_2$  est solution du problème

Trouver  $w_2 \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$  tel que  $\forall \psi \in \dot{H}_{\#}^1(Y)$ ,  $(a \nabla w_2, \nabla \psi)_Y = -(a, \partial_{y_2} \psi)_Y = (\partial_{y_2} a, \psi)_Y = 0$ .

On observe alors, en injectant l'ansatz classique (1.4) dans la condition au bord satisfaite par  $u_\varepsilon$  et en identifiant les facteurs de  $\varepsilon$ , que

$$u_1 \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right)_{|\Gamma} = 0 \iff \forall x_2 \in \mathbb{R}, \quad w_1|_{\Gamma_0} \left( \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} u_{0|\Gamma}(x_2) + \hat{u}_1|_{\Gamma}(x_2) = 0. \quad (2.37)$$

Or  $w_1$  est indépendant de la variable  $y_2$  donc  $w_1|_{\Gamma_0}$  est constant. On obtient alors une condition au bord satisfaisante pour  $\hat{u}_1$  puisque les termes dans (2.37) n'oscillent pas à l'échelle  $\varepsilon$  ce qui implique également que le terme de champ proche d'ordre 1  $U_1$  est nul car il n'y a plus d'oscillations à corriger. On retrouve ce résultat avec notre modèle : on rappelle la condition au bord satisfaite par  $\hat{u}_1$

$$\hat{u}_1|_{\Gamma} = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_{0|\Gamma},$$

où

$$d_1^i = -\langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g_1^i \rangle_{\Gamma_0} = \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, w_i \rangle_{\Gamma_0}.$$

Comme  $w_2$  est nul, alors  $d_1^2 = 0$ . Et puisque  $w_1$  est constant sur le bord  $\Gamma_0$ , en utilisant le lemme 2.5, on a que

$$d_1^1 = w_1|_{\Gamma_0} \underbrace{\langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, 1 \rangle_{\Gamma_0}}_{=-1} = -w_1|_{\Gamma_0}.$$

On retrouve bien la même condition que (2.37). Par ailleurs, comme  $-w_1|_{\Gamma_0} - d_1^1 = 0$  et de même  $-w_2|_{\Gamma_0} - d_1^2 = 0$ , comme les  $U_1^i$  satisfont les problèmes

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U_1^i] = 0 & \text{dans } B \\ U_1^i = g_i^1 - d_1^i & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

on a bien que  $U_1^1 = U_1^2 = 0$  et alors  $U_1 = 0$ .

Pour l'illustrer numériquement, nous prenons pour fonction  $a(y_1, y_2) = 2 + \sin(2\pi y_1)$  et nous conservons les autres paramètres. Dans la figure 2.13, on représente côte à côte les différences  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc})$  et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)$  à la même échelle pour  $\varepsilon = 1/8$ . On constate que  $\hat{u}_1$  corrige l'erreur dans le volume et qu'il n'y a pas d'oscillations sur le bord à corriger.

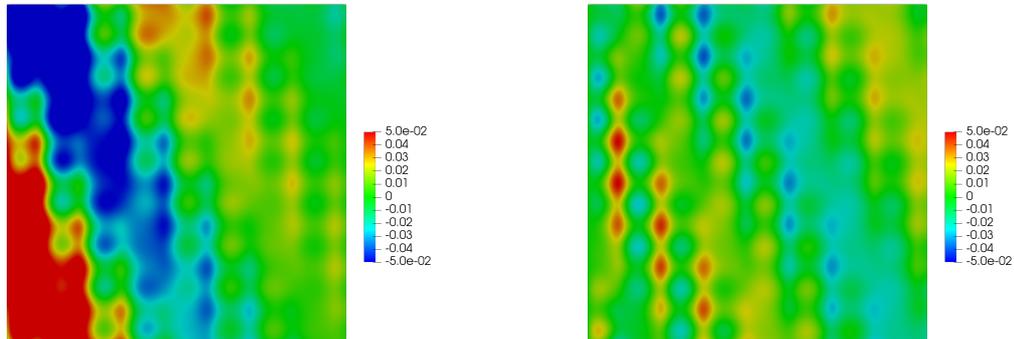


FIGURE 2.13 –  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc})$  (à gauche),  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$  pour  $\varepsilon = 1/8$

En revanche, après ajout de la partie oscillante  $u_2^{osc}$  de  $u_2$ , on a l'apparition d'oscillations sur le bord, que l'on peut corriger avec  $U_2$ , comme le montre la figure 2.14.

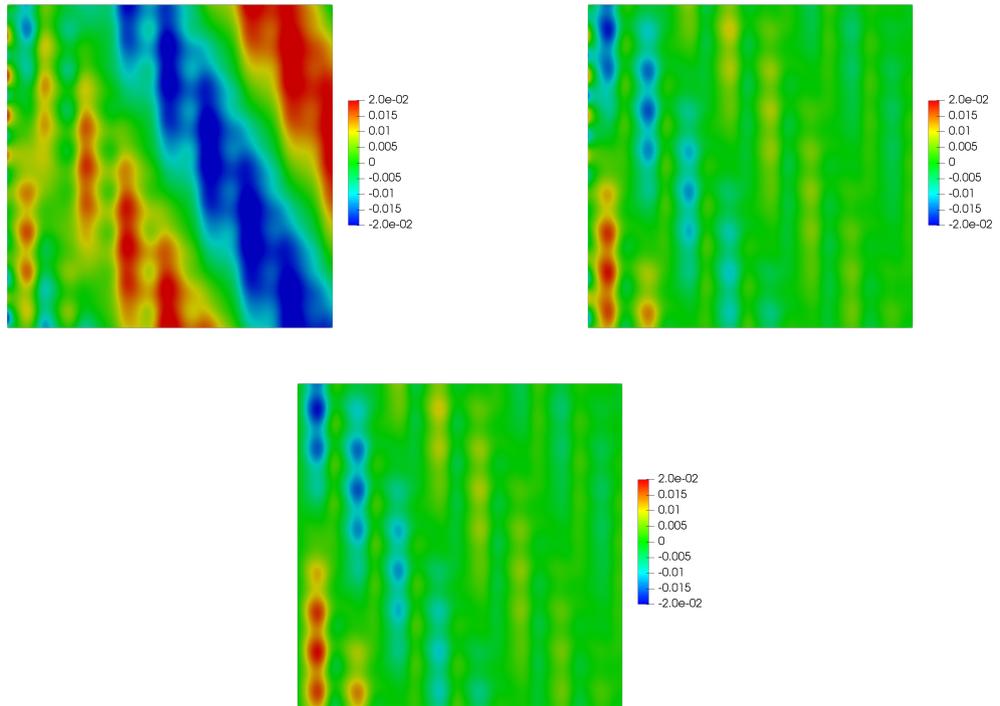


FIGURE 2.14 –  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2^{osc})$  (à gauche),  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2)$  (à droite) et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^2 U_2)$  (au centre) dans  $\Omega = (0, 1)^2$  pour  $\varepsilon = 1/8$

- Lorsque le milieu est stratifié perpendiculairement au bord, c'est-à-dire dans notre cas si la fonction  $a$  est indépendante de la variable  $y_1$ , on a cette fois-ci que  $w_1$  est nul et  $w_2$  est indépendant de la variable  $y_1$ . On va montrer que dans ce cas,  $\hat{u}_1 = 0$ . Le fait que  $w_1$  soit nul implique tout d'abord que le coefficient  $d_1^1$  intervenant dans la condition au bord de  $\hat{u}_1$  est nul. De plus, en regardant la fonction profil  $\mathcal{N}$  définie dans la proposition 2.4, on a alors que  $\mathcal{N} = \frac{y_1}{a_{11}^*} + \tilde{\mathcal{N}}$  où  $\tilde{\mathcal{N}} \in W_{\#}(B)$  est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathcal{N}}] = 0 & \text{dans } B \\ \tilde{\mathcal{N}} = -\frac{w_1}{a_{11}^*} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

Donc  $\tilde{\mathcal{N}} = 0$  et  $\mathcal{N} = \frac{y_1}{a_{11}^*}$ . Alors, le second coefficient  $d_1^2$  intervenant dans la condition au bord satisfaite par  $\hat{u}_1$  se ré-écrit

$$\begin{aligned} d_1^2 &= -\langle a\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g_1^2 \rangle_{\Gamma_0} \\ &= \langle a\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, w_2 \rangle_{\Gamma_0} \\ &= -\int_{\Gamma_0} w_2 a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \frac{y_1}{a_{11}^*} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 dy_2 \\ &= -\frac{1}{a_{11}^*} \int_{\Gamma_0} a(\mathbf{y}) w_2 dy_2. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $a$  possède un axe de symétrie, c'est-à-dire s'il existe  $c \in (0, 1)$  tel que  $\forall y_2 \in \mathbb{R}, a(c - y_2) = a(c + y_2)$ , alors l'intégrale  $\int_{\Gamma_0} a(\mathbf{y}) w_2 dy_2$  est nulle. On a donc également

que  $d_1^2 = 0$ . Par conséquent,  $\hat{u}_1$  est nul. Nous n'avons pas réussi à montrer ce résultat dans le cas où  $a$  ne présente pas de symétrie.

Pour l'illustrer numériquement, nous prenons pour fonction  $a(y_1, y_2) = 2 + \sin(2\pi y_2)$  et nous conservons les autres paramètres. Dans la figure 2.15, on représente côte à côte les différences  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc})$  et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc} + \varepsilon U_1)$  à la même échelle pour  $\varepsilon = 1/8$ . Sur la figure de gauche qu'il n'y a pas de comportement macroscopique à corriger. Sur la figure de droite, l'ajout de  $U_1$  permet de corriger les oscillations sur le bord.

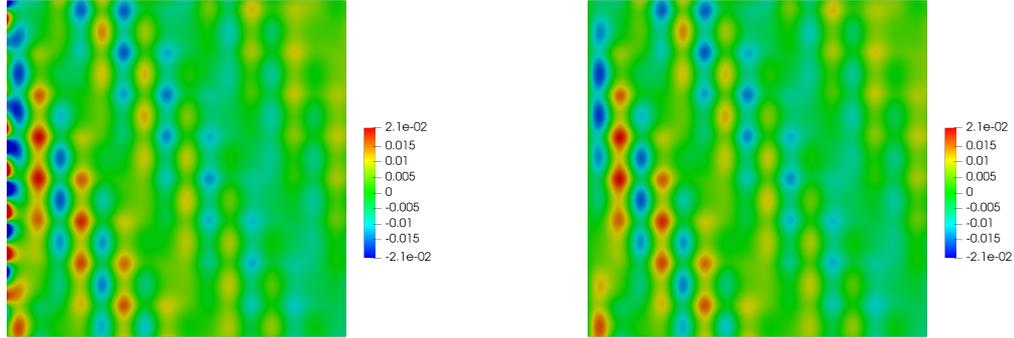


FIGURE 2.15 –  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc})$  (à gauche),  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc} + \varepsilon U_1)$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$  pour  $\varepsilon = 1/8$

## 2.6 Le modèle approché à l'ordre 1

Plutôt que de calculer une approximation de  $u_\varepsilon$  terme après terme, il est intéressant de proposer un modèle effectif d'ordre élevé qui correspond aux modèles homogénéisés classiques d'ordre élevé enrichis par des conditions aux limites d'ordre élevé. Ce modèle est construit à partir de la somme tronquée des termes macroscopiques. Plus précisément, le modèle à l'ordre 1 est construit à partir de  $u_0 + \varepsilon \hat{u}_1$ .

A l'ordre 1, on souhaite donc avoir une approximation de  $u_0 + \varepsilon \hat{u}_1$ . Pour cela, reprenons les problèmes que vérifient respectivement  $u_0$  et  $\hat{u}_1$  :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^* \nabla u_0] - \omega^2 \rho^* u_0 = f & \text{dans } \Omega \\ u_0 = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_1] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \hat{u}_1 = \sum_i d_i^1 \partial_{x_i} u_0|_\Gamma & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

En faisant une combinaison linéaire des deux problèmes, on obtient :

— pour l'équation volumique,

$$-\operatorname{div}[A^* \nabla (u_0 + \varepsilon \hat{u}_1)] - \omega^2 \rho^* (u_0 + \varepsilon \hat{u}_1) = f \quad \text{dans } \Omega$$

— pour la condition au bord,

$$\begin{aligned}
 u_0 + \varepsilon \hat{u}_1 &= g + \varepsilon d_1^1 \partial_{x_1} u_{0|\Gamma} + \varepsilon d_2^1 \partial_{x_2} u_{0|\Gamma} \\
 &= g + \varepsilon (d_1^1 \partial_{x_1} + d_2^1 \partial_{x_2}) (u_0 + \varepsilon \hat{u}_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= g + \varepsilon \frac{d_1^1}{a_{11}^*} (a_{11}^* \partial_{x_1} + a_{12}^* \partial_{x_2}) (u_0 + \varepsilon \hat{u}_1) + \varepsilon \left( d_1^2 - \frac{d_1^1 a_{12}^*}{a_{11}^*} \right) \partial_{x_2} (u_0 + \varepsilon \hat{u}_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= g - \varepsilon \frac{d_1^1}{a_{11}^*} A^* \nabla (u_0 + \varepsilon \hat{u}_1) \cdot \vec{\mathbf{n}} + \varepsilon \left( d_2^1 - \frac{d_1^1}{a_{11}^*} a_{12}^* \right) g' + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

où on remplace  $\partial_{x_2} u_0$  par  $g'$ .

On en déduit, en négligeant les termes en  $\varepsilon^2$ , le problème approché dit d'ordre 1 :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^* \nabla v_\varepsilon] - \omega^2 \rho^* v_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega \\ v_\varepsilon + \varepsilon \frac{d_1^1}{a_{11}^*} A^* \nabla v_\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{n}} = g + \varepsilon \left( d_2^1 - \frac{d_1^1}{a_{11}^*} a_{12}^* \right) g' & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Ici,  $v_\varepsilon$  est censé approcher  $u_0 + \varepsilon \hat{u}_1$  à l'ordre 2. On écrira  $v_\varepsilon = u_0 + \varepsilon \hat{u}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  et ce sera justifié dans les estimations d'erreur.

On constate que nous sommes passés d'un problème avec condition de Dirichlet sur  $\Gamma$  à une condition mixte faisant intervenir les coefficients  $d_1^i$  que nous avons calculés dans la section précédente. Á présent, nous aimerions savoir si ce problème est bien posé. La formulation variationnelle associée est donnée par :

Trouver  $v_\varepsilon \in H^1(\Omega)$  tel que  $\forall v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} A^* \nabla v_\varepsilon \nabla v - \omega^2 \rho^* v_\varepsilon v d\mathbf{x} + \frac{a_{11}^*}{\varepsilon d_1^1} \langle v_\varepsilon, v \rangle_{\Gamma} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \frac{a_{11}^*}{\varepsilon d_1^1} \langle g, v \rangle_{\Gamma} + \left( \frac{a_{11}^*}{d_1^1} d_2^1 - a_{12}^* \right) \langle g', v \rangle_{\Gamma}.$$

De cette formulation variationnelle, on déduit que le problème est bien posé si  $a_{11}^*/(\varepsilon d_1^1) > 0$ . Or comme  $a_{11}^* > 0$  car la matrice  $A^*$  est symétrique définie positive (voir la proposition 1.5), le problème est bien posé si  $d_1^1 > 0$ . Malheureusement, le signe de ce coefficient peut être positif comme négatif suivant les cas (voir la simulation numérique de la figure 2.12).

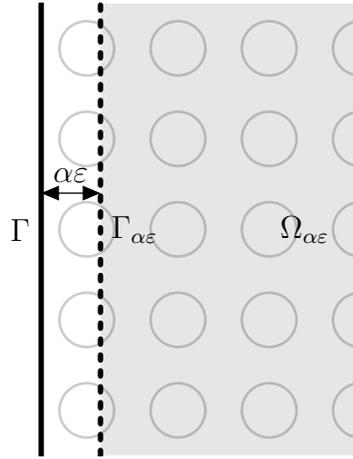
Nous présentons par la suite deux méthodes afin de rendre le problème bien posé : la première consiste à modifier la position du bord où est imposée la condition d'ordre élevé (décalage géométrique) tandis que la seconde modifie les problèmes de cellules.

Nous n'avons pas testé numériquement la première méthode, nous nous sommes concentrés sur la suivante qui nous a semblé originale et plus simple à mettre en œuvre.

### 2.6.1 Première méthode : le décalage géométrique

Cette méthode adapte les travaux de B.Delourme [51]. Elle consiste à modifier légèrement la position du bord où est imposée la condition d'ordre élevé.

Pour  $\alpha > 0$ , on note  $\Gamma_{\alpha\varepsilon} = \{\alpha\varepsilon\} \times \mathbb{R}$  le bord du domaine  $\Omega_{\alpha\varepsilon} = (\alpha\varepsilon, +\infty) \times \mathbb{R}$ .


 FIGURE 2.16 – Domaine  $\Omega_{\alpha\varepsilon}$ 

Afin de connaître la trace de  $v_\varepsilon$  sur  $\Gamma_{\alpha\varepsilon}$ , on écrit un développement de Taylor :

$$v_{\varepsilon|\Gamma_{\alpha\varepsilon}} = v_{\varepsilon|\Gamma} + \alpha\varepsilon\partial_{x_1}v_{\varepsilon|\Gamma} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

qui se ré-écrit en remplaçant  $\partial_{x_1}v_{\varepsilon|\Gamma}$  par  $-\frac{1}{a_{11}^*}A^*\nabla v_\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{n}}|_\Gamma - \frac{a_{12}^*}{a_{11}^*}\partial_{x_2}v_{\varepsilon|\Gamma}$ ,

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon|\Gamma_{\alpha\varepsilon}} &= -\varepsilon\frac{d_1^1}{a_{11}^*}A^*\nabla v_\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{n}}|_\Gamma + g + \varepsilon\left(d_1^2 - \frac{d_1^1}{a_{11}^*}a_{12}^*\right)g' - \frac{\alpha\varepsilon}{a_{11}^*}A^*\nabla v_\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{n}}|_\Gamma - \frac{\alpha\varepsilon a_{12}^*}{a_{11}^*}\partial_{x_2}v_{\varepsilon|\Gamma} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= -\varepsilon\frac{1}{a_{11}^*}(d_1^1 + \alpha)A^*\nabla v_\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{n}}|_\Gamma + g + \varepsilon\left(d_1^2 - \frac{d_1^1}{a_{11}^*}a_{12}^*\right)g' - \frac{\alpha\varepsilon a_{12}^*}{a_{11}^*}\partial_{x_2}v_{\varepsilon|\Gamma} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Finalement, en approchant  $A^*\nabla v_\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{n}}|_\Gamma = A^*\nabla v_\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_{\alpha\varepsilon}} + \mathcal{O}(\varepsilon)$  et  $\partial_{x_2}v_{\varepsilon|\Gamma} = \partial_{x_2}v_{\varepsilon|\Gamma_{\alpha\varepsilon}} + \mathcal{O}(\varepsilon) = g' + \mathcal{O}(\varepsilon)$ , on obtient le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^*\nabla v_\varepsilon] - \omega^2\rho^*v_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_{\alpha\varepsilon} \\ v_\varepsilon + \varepsilon\frac{1}{a_{11}^*}(d_1^1 + \alpha)A^*\nabla v_\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{n}} = g + \varepsilon\left(d_1^2 - \frac{d_1^1 + \alpha}{a_{11}^*}a_{12}^*\right)g' & \text{sur } \Gamma_{\alpha\varepsilon} \end{cases}$$

De manière analogue au problème initial, ce problème est bien posé si et seulement si  $d_1^1 + \alpha > 0$ . On voit que pour  $\alpha$  assez grand, on a  $d_1^1 + \alpha > 0$ .

## 2.6.2 Deuxième méthode : modification des problèmes de cellule

Cette méthode est inspirée des travaux de T.Pouchon [109]. Plutôt que de modifier la géométrie du problème, nous proposons de modifier directement les conditions au bord du modèle approché en modifiant les problèmes de cellule.

D'après le corollaire 2.8 appliqué à  $U_1$ , nous avons une expression analytique du coefficient  $d_1^1$  :

$$d_1^1 = \langle a\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, w_1 \rangle_{\Gamma_0}.$$

Cette expression révèle que  $d_1^1$  est linéaire par rapport à  $w_1$  et c'est ce que nous allons exploiter. On rappelle que  $w_1$  satisfait l'équation (au sens faible)

$$-\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla w_1] = \partial_{y_1}a \quad \text{dans } Y$$

Nous savons que cette équation admet une solution à une constante près. Nous notons la classe des solutions  $w_1 + \mathbb{R}$  où  $w_1$  est la solution du problème de cellule avec moyenne nulle sur la cellule  $Y$ .

La méthode consiste à choisir une autre solution  $w_1^M$  dans la classe  $w_1 + \mathbb{R}$ . On considère donc, pour  $M \in \mathbb{R}$ , la solution du problème de cellule  $w_1^M = w_1 + M$  et nous notons  $d_1^{1,M}$  le coefficient associé à cette solution :

$$\begin{aligned} d_1^{1,M} &= \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, w_1^M \rangle_{\Gamma_0} \\ &= \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, w_1(\mathbf{y}) + M \rangle_{\Gamma_0} \\ &= \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, w_1 \rangle_{\Gamma_0} + M \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, 1 \rangle_{\Gamma_0} \end{aligned}$$

D'après le lemme (2.5), on a

$$\langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, 1 \rangle_{\Gamma_0} = -1.$$

On trouve alors simplement

$$d_1^{1,M} = d_1^1 - M.$$

Afin de rendre ce coefficient positif, il suffira donc de choisir un  $M$  tel que  $d_1^{1,M} > 0$ .

Changer la moyenne de la solution du problème de cellule permet donc de rendre ce fameux coefficient positif. Le problème associé est donc bien posé. Étudions maintenant l'impact sur le développement double échelle du changement de la solution du problème de cellule  $w_1$ . On rappelle que le second terme du développement  $u_1$ , s'écrit

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= w_1(\mathbf{y}) \partial_{x_1} u_0(\mathbf{x}) + w_2(\mathbf{y}) \partial_{x_2} u_0(\mathbf{x}) + \hat{u}_1(\mathbf{x}) \\ &= (w_1^M(\mathbf{y}) - M) \partial_{x_1} u_0(\mathbf{x}) + w_2(\mathbf{y}) \partial_{x_2} u_0(\mathbf{x}) + \hat{u}_1(\mathbf{x}) \\ &= w_1^M(\mathbf{y}) \partial_{x_1} u_0(\mathbf{x}) + w_2(\mathbf{y}) \partial_{x_2} u_0(\mathbf{x}) - M \partial_{x_1} u_0(\mathbf{x}) + \hat{u}_1(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

On introduit donc le nouveau terme macroscopique

$$\hat{u}_1^M = \hat{u}_1 - M \partial_{x_1} u_0.$$

Modifier la solution du problème de cellule a donc changé la partie macroscopique de  $u_1$ . Étudions quelle est l'équation vérifiée par  $\hat{u}_1^M$ .  $\partial_{x_1} u_0$  satisfait l'équation volumique (pour  $f$  assez régulier)

$$-\operatorname{div}[A^* \nabla \partial_{x_1} u_0] - \omega^2 \rho^* \partial_{x_1} u_0 = \partial_{x_1} f \quad \text{dans } \Omega$$

Donc  $\hat{u}_1^M$  satisfait l'équation

$$-\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_1^M] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_1^M = -M \partial_{x_1} f \quad \text{dans } \Omega$$

L'équation volumique satisfaite par  $u_0 + \varepsilon \hat{u}_1^M$  est donc

$$-\operatorname{div}[A^* \nabla (u_0 + \varepsilon \hat{u}_1^M)] - \omega^2 \rho^* (u_0 + \varepsilon \hat{u}_1^M) = f - \varepsilon M \partial_{x_1} f \quad \text{dans } \Omega.$$

On peut donc introduire, en choisissant  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $d_1^{1,M} > 0$ , le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^* \nabla v_\varepsilon^M] - \omega^2 \rho^* v_\varepsilon^M = f - \varepsilon M \partial_{x_1} f & \text{dans } \Omega \\ v_\varepsilon^M + \varepsilon \frac{d_1^{1,M}}{a_{11}^*} A^* \nabla v_\varepsilon^M \cdot \vec{\mathbf{n}} = g + \varepsilon \left( d_1^2 - \frac{d_1^{1,M}}{a_{11}^*} a_{12}^* \right) g' & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.38)$$

qui est bien posé dans  $H^1(\Omega)$  et  $v_\varepsilon^M$  est censé être une approximation de  $u_0 + \varepsilon \hat{u}_1^M$  à  $\varepsilon^2$  près.

**Théorème 2.14.** Pour  $M$  assez grand, le problème (2.38) est bien posé dans  $H^1(\Omega)$  et la constante est indépendante de  $\varepsilon$ .

**Remarque 2.15.** Le choix d'un  $M$  tel que  $d_1^{1,M} = 0$  conduit au cas particulier où  $v_\varepsilon^M$  est solution d'un problème avec une condition de Dirichlet plutôt qu'une condition mixte :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^*\nabla v_\varepsilon^M] - \omega^2 \rho^* v_\varepsilon^M = f - \varepsilon M \partial_{x_1} f & \text{dans } \Omega \\ v_\varepsilon^M = g + \varepsilon d_1^2 g' & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Finalement, pour obtenir une approximation du comportement macroscopique de  $u_\varepsilon$  à  $\varepsilon^2$  près,  $u_0 + \varepsilon \hat{u}_1$ , on peut réaliser le post-processing (voir le théorème 2.16) :

$$\begin{aligned} u_0 + \varepsilon \hat{u}_1 &= u_0 + \varepsilon \hat{u}_1^M + \varepsilon M \partial_{x_1} u_0 \\ &= v_\varepsilon^M + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \varepsilon M \partial_{x_1} (v_\varepsilon^M - \varepsilon \hat{u}_1^M + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \\ &= v_\varepsilon^M + \varepsilon M \partial_{x_1} v_\varepsilon^M + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

### 2.6.3 Estimations d'erreur

**Théorème 2.16.** Soit  $(u_\varepsilon)$  la famille des solutions de (1.2). Soit  $M$  tel que le problème (2.38) soit bien posé dans  $H^1(\Omega)$ . On note  $v_\varepsilon^M$  sa solution et pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $v_{\varepsilon,1}^M(\mathbf{x}) = v_\varepsilon^M + \varepsilon \left[ w_1^M \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} v_\varepsilon^M(\mathbf{x}) + w_2 \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} v_\varepsilon^M(\mathbf{x}) + \sum_i U_1^i \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} v_\varepsilon^M \right]$ . On suppose que l'hypothèse  $(\mathcal{H}_1)$  du théorème 2.10 est vérifiée. On a alors

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - v_{\varepsilon,1}^M\|_{L^2(\Omega)} &= \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \|u_\varepsilon - v_{\varepsilon,1}^M\|_{H^1(\Omega)} &= \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous allons principalement utiliser les résultats du théorème 2.10 et son corollaire 2.11.

Par construction du modèle approché, on a que

$$v_\varepsilon^M = u_0 + \varepsilon \hat{u}_1^M + \varepsilon^2 h_\varepsilon$$

où  $h_\varepsilon$  est solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^*\nabla h_\varepsilon] - \omega^2 \rho^* h_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega \\ h_\varepsilon + \varepsilon \frac{d_1^{1,M}}{a_{11}^*} A^*\nabla h_\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{n}} = \frac{d_1^{1,M}}{a_{11}^*} A^*\nabla \hat{u}_1^M \cdot \vec{\mathbf{n}} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Ainsi,  $h_\varepsilon$  est bornée en norme  $H^1$  indépendamment de  $\varepsilon$  car la constante de coercivité est indépendante de  $\varepsilon$ .

On peut alors écrire que

$$\begin{aligned}
 v_{\varepsilon,1}^M(\mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \hat{u}_1^M(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 h_\varepsilon(\mathbf{x}) \\
 &+ \varepsilon \left[ w_1^M \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} (u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \hat{u}_1^M(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 h_\varepsilon(\mathbf{x}))(\mathbf{x}) + w_2 \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} (u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \hat{u}_1^M(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 h_\varepsilon(\mathbf{x})) \right. \\
 &\left. + \sum_i U_1^i \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} (u_{0|\Gamma}(x_2) + \varepsilon \hat{u}_{1|\Gamma}^M(x_2) + \varepsilon^2 h_{\varepsilon|\Gamma}(x_2)) \right] \\
 &= u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon u_1 \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \varepsilon U_1 \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \\
 &+ \varepsilon^2 \left[ h_\varepsilon(\mathbf{x}) + w_1^M \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} \hat{u}_1^M(\mathbf{x}) + w_2 \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} \hat{u}_1^M(\mathbf{x}) + \sum_i U_1^i \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}^M(x_2) \right] \\
 &+ \varepsilon^3 \left[ w_1^M \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} h_\varepsilon(\mathbf{x}) + w_2 \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} h_\varepsilon(\mathbf{x}) + \sum_i U_1^i \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} h_{\varepsilon|\Gamma}(x_2) \right]
 \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 \|u_\varepsilon - v_{\varepsilon,1}^M\|_{H^1(\Omega)} &\leq \left\| u_\varepsilon - \left( u_0 + \varepsilon \left[ u_1 \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + U_1 \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right] \right) \right\|_{H^1(\Omega)} \\
 &+ \varepsilon^2 \left\| h_\varepsilon + w_1^M \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} \hat{u}_1^M + w_2 \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} \hat{u}_1^M + \sum_i U_1^i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}^M \right\|_{H^1(\Omega)} \\
 &+ \varepsilon^3 \left\| w_1^M \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} h_\varepsilon + w_2 \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} h_\varepsilon + \sum_i U_1^i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} h_{\varepsilon|\Gamma} \right\|_{H^1(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Or d'après le théorème 2.10,

$$\left\| u_\varepsilon - \left( u_0 + \varepsilon \left[ u_1 \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + U_1 \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right] \right) \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon.$$

Par ailleurs, on a,

$$\begin{aligned}
 \left\| w_1^M \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} \hat{u}_1^M \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \left\| w_1^M \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} \hat{u}_1^M \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \nabla \left[ w_1^M \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} \hat{u}_1^M \right] \right\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
 &\leq \|w_1^M\|_{L^\infty(Y)}^2 \|\partial_{x_1} \hat{u}_1^M\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^{-2} \left\| (\nabla_{\mathbf{y}} w_1^M) \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} \hat{u}_1^M \right\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
 &\quad + \left\| w_1^M \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_1} \hat{u}_1^M \right\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
 &\leq \|w_1^M\|_{L^\infty(Y)}^2 \|\partial_{x_1} \hat{u}_1^M\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^{-2} \left\| \nabla_{\mathbf{y}} w_1^M \right\|_{L^\infty(Y)^2}^2 \|\partial_{x_1} \hat{u}_1^M\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\quad + \|w_1^M\|_{L^\infty(Y)}^2 \left\| \nabla \partial_{x_1} \hat{u}_1^M \right\|_{L^2(\Omega)^2}^2.
 \end{aligned}$$

Par hypothèse sur  $a$  et  $\rho$ , les normes de  $w_1^M$  sont bornées, et il en est de même pour les normes de  $\hat{u}_1^M$  par hypothèse sur  $f$  (d'après le théorème 2.9). On en déduit que

$$\left\| w_1^M \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} \hat{u}_1^M \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C_M \varepsilon^{-1}$$

où la constante  $C_M$  dépend linéairement de  $M$  puisque  $w_1^M = w_1 + M$ . De manière analogue, il en est de même pour  $\left\| w_2 \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} \hat{u}_1^M \right\|_{H^1(\Omega)}$ ,  $\left\| w_1^M \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} h_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega)}$ , et  $\left\| w_2 \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} h_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega)}$  (on rappelle que  $h_\varepsilon$  est borné en norme  $H^1$  indépendamment de  $\varepsilon$ ).

D'autre part, par le théorème 2.3, il existe  $\gamma > 0$  tel que  $e^{\gamma y_1} U_1^i \in W^{1,\infty}(B)$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . En utilisant ce résultat, on a que

$$\begin{aligned}
 \left\| U_1^i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}^M \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \left\| U_1^i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}^M \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \nabla \left[ U_1^i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}^M \right] \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\leq \|U_1^i e^{\gamma y_1}\|_{L^\infty(B)}^2 \|e^{-\gamma \frac{x_1}{\varepsilon}} \partial_{x_1} \hat{u}_{1|\Gamma}^M\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^{-2} \left\| (\nabla_{\mathbf{y}} U_1^i) \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} \hat{u}_{1|\Gamma}^M \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\quad + \left\| U_1^i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla \partial_{x_1} \hat{u}_{1|\Gamma}^M \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\leq \|U_1^i e^{\gamma y_1}\|_{L^\infty(B)}^2 \|e^{-\gamma \frac{x_1}{\varepsilon}} \partial_{x_1} \hat{u}_{1|\Gamma}^M\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^{-2} \|\nabla_{\mathbf{y}} U_1^i e^{\gamma y_1}\|_{L^\infty(B)}^2 \|e^{-\gamma \frac{x_1}{\varepsilon}} \partial_{x_1} \hat{u}_{1|\Gamma}^M\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\quad + \|U_1^i e^{\gamma y_1}\|_{L^\infty(B)}^2 \|e^{-\gamma \frac{x_1}{\varepsilon}} \nabla \partial_{x_1} \hat{u}_{1|\Gamma}^M\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

Donc par le théorème 2.3, les normes de  $U_1^i$  sont bornées et comme  $\gamma > 0$ , par hypothèses sur  $f$ , les normes de  $\partial_{x_i} \hat{u}_1$  le sont également (par le théorème 2.9). On en déduit que

$$\left\| U_1^i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}^M \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^{-1}$$

et de manière analogue, il en est de même pour  $\left\| U_1^i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} h_{\varepsilon|\Gamma}^M \right\|_{H^1(\Omega)}$ .

Finalement, on a que

$$\begin{aligned}
 \|u_\varepsilon - v_{\varepsilon,1}^M\|_{H^1(\Omega)} &\leq C\varepsilon + \varepsilon^2 \left[ \|h_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \left\| w_1^M \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} \hat{u}_1^M \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| w_2 \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} \hat{u}_1^M \right\|_{H^1(\Omega)} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_i \left\| U_1^i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}^M \right\|_{H^1(\Omega)} \right] \\
 &\quad + \varepsilon^3 \left[ \left\| w_1^M \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} h_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| w_2 \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} h_\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega)} + \sum_i \left\| U_1^i \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} h_{\varepsilon|\Gamma} \right\|_{H^1(\Omega)} \right] \\
 &\leq C\varepsilon + \varepsilon^2(C + C\varepsilon^{-1} + C\varepsilon^{-1} + 2C\varepsilon^{-1}) + \varepsilon^3(C\varepsilon^{-1} + C\varepsilon^{-1} + 2C\varepsilon^{-1})
 \end{aligned}$$

et donc

$$\|u_\varepsilon - v_{\varepsilon,1}^M\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon.$$

Pour la norme  $L^2$ , la démonstration est similaire et utilise le résultat du théorème 2.11.  $\square$

On peut également aller à l'ordre 2 en  $\varepsilon$ . La modification de la moyenne de  $w_1$  a un impact sur les solutions de problèmes de cellule  $\theta_{i1}$  pour  $i \in \{1, 2\}$ , que nous notons  $\theta_{i1}^M$  (voir 2.7).

**Corollaire 2.17.** Soit  $(u_\varepsilon)$  la famille des solutions de (1.2). Soit  $M$  tel que le problème (2.38) soit bien posé dans  $H^1(\Omega)$ . On note  $v_\varepsilon^M$  sa solution,  $v_{\varepsilon,1}^M$  définit dans le théorème 2.16 et pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned}
 v_{\varepsilon,2}^M(\mathbf{x}) &= v_{\varepsilon,1}^M(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \left[ \sum_i \theta_{i1}^M \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i x_1}^2 v_\varepsilon^M(\mathbf{x}) + \sum_i \theta_{i2} \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i x_2}^2 v_\varepsilon^M(\mathbf{x}) + \omega^2 \gamma \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) v_\varepsilon^M(\mathbf{x}) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i \leq j} U_2^{ij} \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i x_j}^2 v_{\varepsilon|\Gamma}^M(x_2) + \omega^2 U_2^0 \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) v_{\varepsilon|\Gamma}^M(x_2) \right]
 \end{aligned}$$

On suppose que l'hypothèse  $(\mathcal{H}_2)$  du théorème 2.10 est vérifiée. On a alors

$$\begin{aligned}
 \|u_\varepsilon - v_{\varepsilon,2}^M\|_{L^2(\Omega)} &= \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\
 \|u_\varepsilon - v_{\varepsilon,2}^M\|_{H^1(\Omega)} &= \mathcal{O}(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

**Remarque 2.18.** Loin du bord, on retrouve les mêmes résultats en retirant les termes de champ proche. On note  $\tilde{v}_{\varepsilon,1}^M = v_\varepsilon^M + \varepsilon \left[ w_1^M \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} v_\varepsilon^M(\mathbf{x}) + w_2 \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} v_\varepsilon^M(\mathbf{x}) \right]$ . On a, pour un ouvert  $D \subset\subset \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - \tilde{v}_{\varepsilon,1}^M\|_{H^1(D)} &= \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \|u_\varepsilon - \tilde{v}_{\varepsilon,1}^M\|_{L^2(D)} &= \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

## 2.6.4 Résultats numériques

Pour le calcul de  $v_\varepsilon^M$ , nous devons résoudre un problème avec une condition mixte ne nous permettant pas d'utiliser directement la même méthode que pour le calcul de  $u_0$ . Après avoir appliqué une TFB au problème, on se ramène à un problème de demi-bande avec une condition mixte sur le bord. Nous utilisons la méthode de [79] pour construire l'opérateur DtN  $\Lambda^{\text{DtN}}$  et restreindre les calculs à la première cellule :

$$\begin{cases} -\text{div}[A^* \nabla v_\varepsilon^M] - \omega^2 \rho^* v_\varepsilon^M = f - \varepsilon M \partial_{x_1} f & \text{dans } \mathcal{C}_0 \\ v_\varepsilon^M + \varepsilon \frac{d_1^{1,M}}{a_{11}^*} A^* \nabla v_\varepsilon^M \cdot \vec{\mathbf{n}} = g + \varepsilon \left( d_1^2 - \frac{d_1^{1,M}}{a_{11}^*} a_{12}^* \right) g' & \text{sur } \Gamma_0 \\ A^* \nabla v_\varepsilon^M \cdot \vec{\mathbf{n}} = \Lambda^{\text{DtN}}(v_\varepsilon^M) & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (2.39)$$

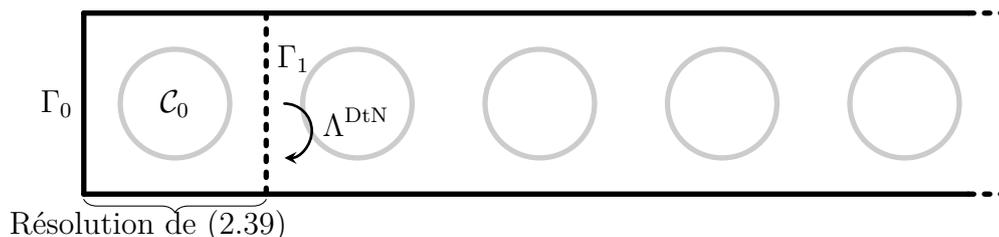


FIGURE 2.17 – Résolution du problème (2.38)

Nous prenons comme fonctions  $a(y_1, y_2) = (2 + \sin(2\pi(y_1 - y_2)))$ ,  $\rho(y_1, y_2) = (2 + \sin(2\pi y_1))(2 + \sin(2\pi y_2))$  et nous fixons le paramètre de la forme  $\omega^2 = (k_x + i)^2 + k_y^2$  avec  $k_x = 4.5$ ,  $k_y = 4$ . Nous prenons également pour terme source  $f = 0$  et pour condition au bord  $g(y_2) = e^{ik_y y_2}$ .

Dans un premier temps, nous fixons le paramètre  $M$  tel que  $d_1^{1,M} = 0.1$ . Nous représentons sur la figure 2.18  $u_\varepsilon$  et  $u_\varepsilon - v_\varepsilon^M$  à la même échelle pour  $\varepsilon = 1/8$ . On constate qualitativement que  $v_\varepsilon^M$  approche bien le comportement macroscopique de  $u_\varepsilon$ .

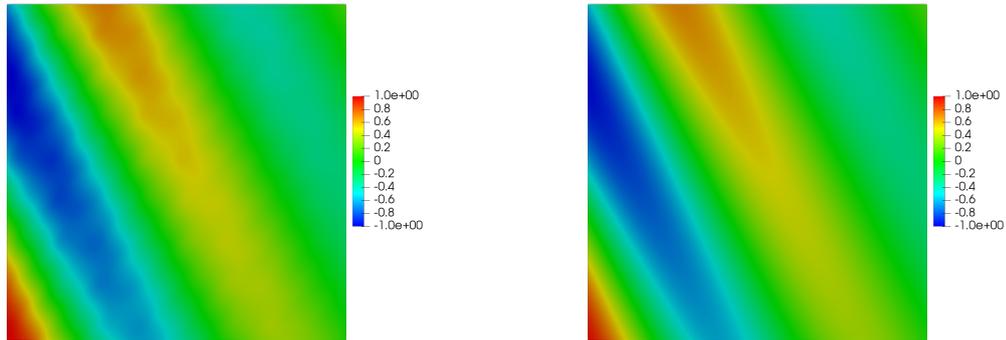


FIGURE 2.18 –  $u_\varepsilon$  (à gauche) et  $v_\varepsilon^M$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$  pour  $d_1^{1,M} = 0.1, \varepsilon = 1/8$

Par la suite, nous représentons sur la figure 2.19  $u_\varepsilon - v_{\varepsilon,1}^M$  et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon(u_1 + U_1))$  côte à côte, à la même échelle, différente de la précédente. Une nouvelle fois, les deux différences sont très proches qualitativement.

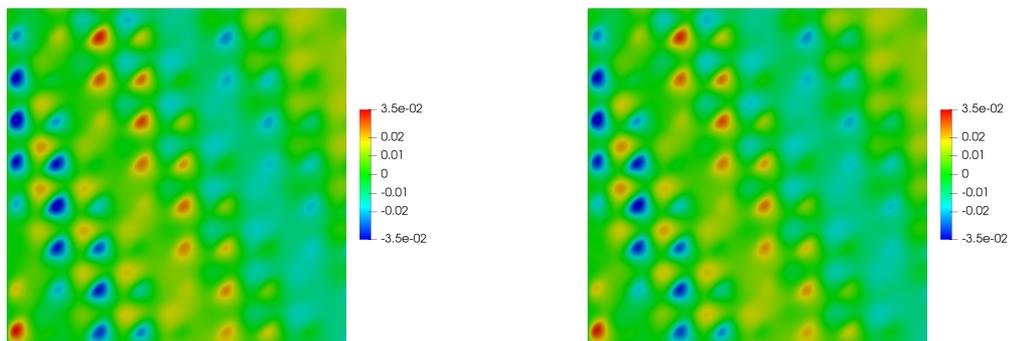


FIGURE 2.19 –  $u_\varepsilon - v_{\varepsilon,1}^M$  (à gauche) et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon(u_1 + U_1))$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$  pour  $d_1^{1,M} = 0.1, \varepsilon = 1/8$

Les courbes de convergence de la figure 2.20 montre que  $u_\varepsilon - v_{\varepsilon,1}^M$  converge en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  en norme  $L^2$  et en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  en norme  $H^1$ .

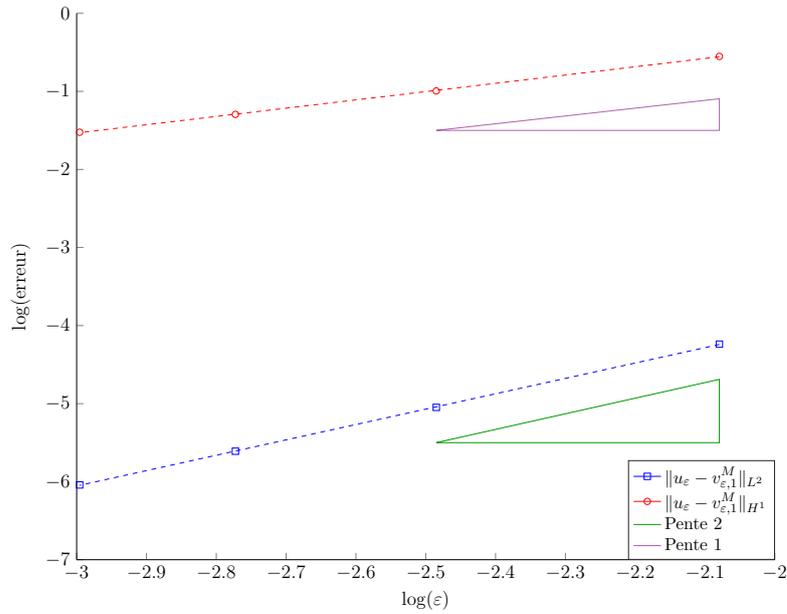


FIGURE 2.20 – Erreur  $u_\varepsilon - v_{\varepsilon,1}^M$  en norme  $L^2$  et  $H^1$  en échelle logarithmique pour  $d_1^{1,M} = 0.1$

Enfin, nous présentons dans la figure 2.21 les courbes de convergence de  $u_\varepsilon - v_{\varepsilon,2}^M$  en norme  $L^2$  et en norme  $H^1$  en fonction de  $\varepsilon$ . Nous avons bien une convergence en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  en norme  $H^1$  et il en est de même en norme  $L^2$ .

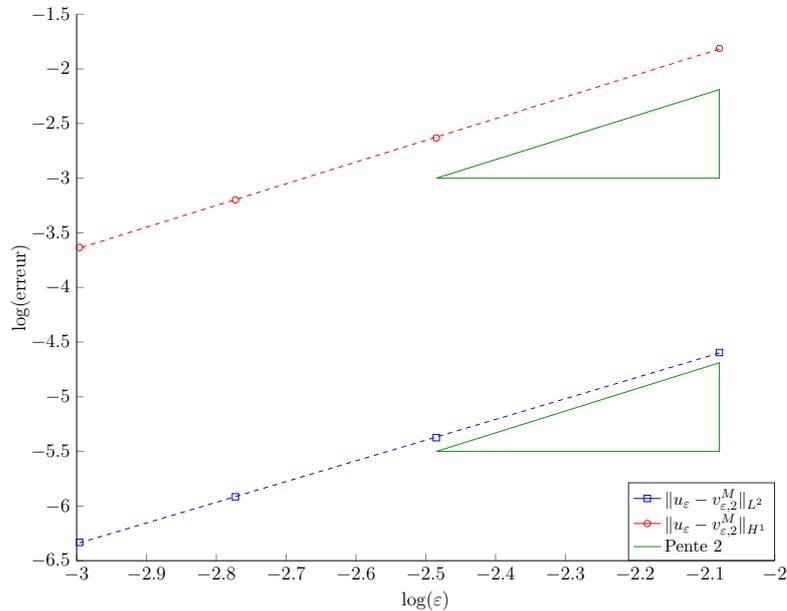


FIGURE 2.21 – Erreur  $u_\varepsilon - v_{\varepsilon,2}^M$  en norme  $L^2$  et  $H^1$  en échelle logarithmique pour  $d_1^{1,M} = 0.1$

Nous avons vu dans les estimations d'erreur de la section précédente que la constante de majoration dépend linéairement de  $M$ . Pour la suite, nous refaisons les mêmes simulations numériques avec un nouveau choix de paramètre  $M$  : nous prenons  $M$  tel que  $d_1^{1,M} = 0.5$ . Nous représentons sur la figure 2.22  $u_\varepsilon - v_{\varepsilon,1}^M$  et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon(u_1 + U_1))$  à leur échelle respective pour  $\varepsilon = 1/8$ . On constate qualitativement que les deux erreurs ne sont pas similaires (notamment en ce qui concerne leur amplitude) contrairement à ce que nous avons précédemment.

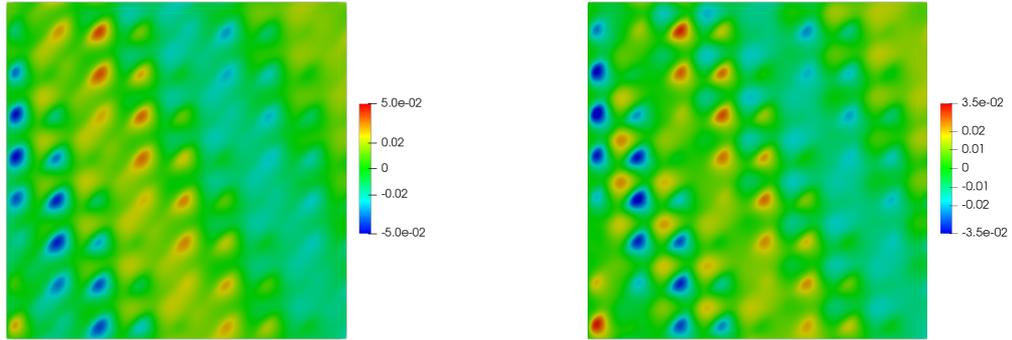


FIGURE 2.22 –  $u_\varepsilon - v_{\varepsilon,1}^M$  (à gauche) et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon(u_1 + U_1))$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$ ,  $\varepsilon = 1/8$

Lorsqu'on regarde  $v_\varepsilon^M$ , qui approche le comportement macroscopique de  $u_\varepsilon$ , on observe un déphasage de l'onde par rapport à  $u_\varepsilon$ , comme le montre la figure 2.23 (le déphasage est visible en haut à gauche). Ce déphasage se répercute sur  $v_{\varepsilon,1}^M$  d'où la différence que nous observons sur la figure 2.22.

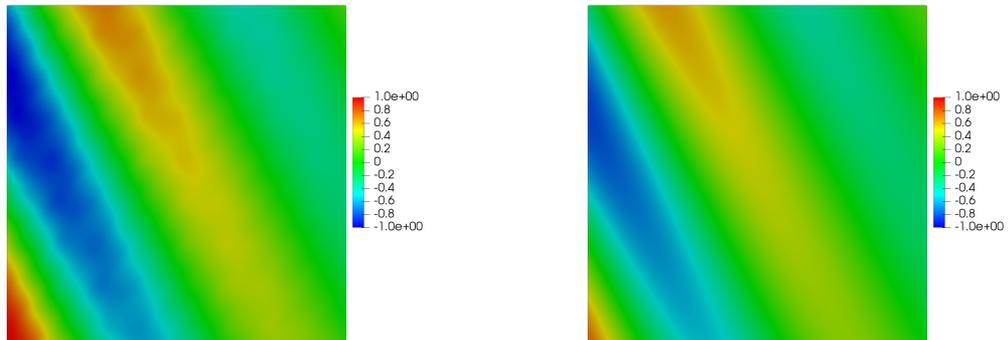


FIGURE 2.23 –  $u_\varepsilon$  (à gauche) et  $v_\varepsilon^M$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$  pour  $d_1^{1,M} = 0.5$ ,  $\varepsilon = 1/8$

Par ailleurs, les courbes de convergence de la figure 2.24 montre que  $u_\varepsilon - v_{\varepsilon,1}^M$  converge bien en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  en norme  $H^1$ , comme annoncé dans le théorème 2.16, mais en norme  $L^2$ , nous avons une convergence en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  alors que nous attendions  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . De plus, les valeurs sont plus élevées que sur la figure 2.20.

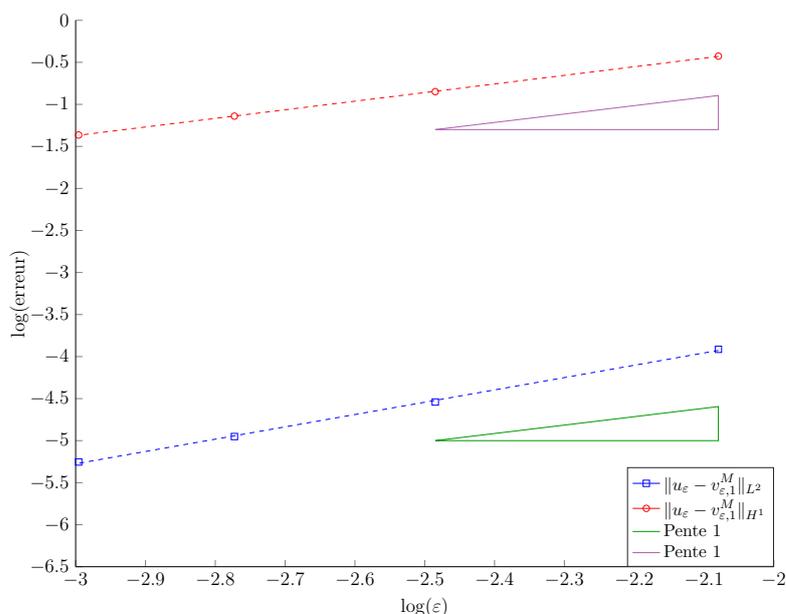


FIGURE 2.24 – Erreur  $u_\varepsilon - v_{\varepsilon,1}^M$  en norme  $L^2$  et  $H^1$  en échelle logarithmique pour  $d_1^{1,M} = 0.5$

Il en ressort donc que lorsqu'on souhaite approcher  $u_\varepsilon$  par  $v_{\varepsilon,1}^M$ , le choix du paramètre  $M$  est important et il semblerait qu'il doit être choisi pour que le coefficient  $d_1^{1,M}$  soit le plus petit possible.

## 2.7 Le modèle approché à l'ordre 2

Dans cette section, nous souhaitons avoir une approximation plus fine du comportement macroscopique de  $u_\varepsilon$ , c'est-à-dire approcher  $u_0 + \varepsilon \hat{u}_1 + \varepsilon^2 \hat{u}_2$  à un  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$  près. Regardons tout d'abord l'équation volumique vérifiée par cette combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[A^* \nabla(u_0 + \varepsilon \hat{u}_1 + \varepsilon^2 \hat{u}_2)] - \omega^2 \rho^*(u_0 + \varepsilon \hat{u}_1 + \varepsilon^2 \hat{u}_2) &= f + \varepsilon^2 \mathcal{D}(u_0) \\ &= f + \varepsilon^2 \mathcal{D}(u_0 + \varepsilon \hat{u}_1 + \varepsilon^2 \hat{u}_2) \\ &\quad - \varepsilon^3 \mathcal{D}(\hat{u}_1 + \varepsilon \hat{u}_2) \end{aligned}$$

où l'opérateur  $\mathcal{D}$  est défini par

$$\mathcal{D}(u) = \sum_{ijkl} d_{ijkl}^* \partial_{x_i x_j x_k x_l}^4 u + \omega^2 \sum_{ij} e_{ij}^* \partial_{x_i x_j}^2 u + \omega^4 h^* u.$$

Pour la condition de bord, on obtient

$$\begin{aligned} u_0 + \varepsilon \hat{u}_1 + \varepsilon^2 \hat{u}_2 &= g + \varepsilon \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_0 + \varepsilon^2 \left[ \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_0 + \sum_i d_1^i \partial_{x_i} \hat{u}_1 + \omega^2 d_2^0 u_0 \right] \\ &= g + \varepsilon \sum_i d_1^i \partial_{x_i} (u_0 + \varepsilon \hat{u}_1 + \varepsilon^2 \hat{u}_2) + \varepsilon^2 \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 (u_0 + \varepsilon \hat{u}_1 + \varepsilon^2 \hat{u}_2) \\ &\quad + \varepsilon^2 \omega^2 d_2^0 (u_0 + \varepsilon \hat{u}_1 + \varepsilon^2 \hat{u}_2) \\ &\quad - \varepsilon^3 \left[ \sum_i d_1^i \partial_{x_i} \hat{u}_2 + \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 (\hat{u}_1 + \varepsilon \hat{u}_2) + \omega^2 d_2^0 (\hat{u}_1 + \varepsilon \hat{u}_2) \right] \end{aligned}$$

On en déduit, en négligeant les termes en  $\varepsilon^3$ , qu'une solution  $z_\varepsilon$ , si elle existe, du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^* \nabla z_\varepsilon] - \omega^2 \rho^* z_\varepsilon - \varepsilon^2 \mathcal{D}(z_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega \\ z_\varepsilon - \varepsilon \sum_i d_1^i \partial_{x_i} z_\varepsilon - \varepsilon^2 \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 z_\varepsilon - \varepsilon^2 \omega^2 d_2^0 z_\varepsilon = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

est censée donner une approximation à  $\varepsilon^3$  près de  $u_0 + \varepsilon\hat{u}_1 + \varepsilon^2\hat{u}_2$ .

L'opérateur  $\mathcal{D}$  est d'ordre 4 : pour espérer écrire une formulation variationnelle, il faudrait une autre condition aux bord. Nous ne sommes pas en mesure de traiter numériquement pour l'instant l'opérateur d'ordre 4 : les éléments finis de Hermite par exemple, qui ne sont malheureusement pas encore disponibles dans la librairie **Xlife++** avec laquelle nous travaillons. Nous donnons néanmoins quelques éléments/pistes pour des problèmes unidimensionnels (voir le chapitre 5).

Nous nous sommes donc orientés vers une autre stratégie. Afin d'éviter d'avoir à traiter un opérateur d'ordre 4 appliqué à notre inconnue, nous avons fait le choix de n'avoir non pas un mais deux problèmes :

— le premier est le problème homogénéisé vérifié par  $u_0$  :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^*\nabla u_0] - \omega^2\rho^*u_0 = f & \text{dans } \Omega \\ u_0 = g & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.40)$$

— le second est construit de manière à obtenir une approximation à  $\varepsilon^2$  près de  $\hat{u}_1 + \varepsilon\hat{u}_2$  :

— on a notamment pour l'équation volumique

$$-\operatorname{div}[A^*\nabla(\hat{u}_1 + \varepsilon\hat{u}_2)] - \omega^2\rho^*(\hat{u}_1 + \varepsilon\hat{u}_2) = \varepsilon\mathcal{D}(u_0)$$

— et pour la condition au bord

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 + \varepsilon\hat{u}_2 &= \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_0 + \varepsilon \left[ \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_0 + \sum_i d_1^i \partial_{x_i} \hat{u}_1 + \omega^2 d_2^0 u_0 \right] \\ &= \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_0 - \varepsilon \frac{d_1^1}{a_{11}^*} A^* \nabla \hat{u}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}} - \varepsilon \left( d_1^2 - \frac{d_1^1}{a_{11}^*} a_{12}^* \right) \partial_{x_2} \hat{u}_1 + \varepsilon \omega^2 d_2^0 u_0 \end{aligned}$$

Or sur  $\Gamma$ , on a  $\hat{u}_1 = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_0$  donc  $\partial_{x_2} \hat{u}_1 = \sum_i d_1^i \partial_{x_i x_2}^2 u_0$ . d'où

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 + \varepsilon\hat{u}_2 &= \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_0 - \varepsilon \frac{d_1^1}{a_{11}^*} A^* \nabla \hat{u}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}} - \varepsilon \left( d_1^2 - \frac{d_1^1}{a_{11}^*} a_{12}^* \right) \sum_i d_1^i \partial_{x_i x_2}^2 u_0 + \varepsilon \omega^2 d_2^0 u_0 \\ &= \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_0 - \varepsilon \frac{d_1^1}{a_{11}^*} A^* \nabla(\hat{u}_1 + \varepsilon\hat{u}_2) \cdot \vec{\mathbf{n}} - \varepsilon \left( d_1^2 - \frac{d_1^1}{a_{11}^*} a_{12}^* \right) \sum_i d_1^i \partial_{x_i x_2}^2 u_0 + \varepsilon \omega^2 d_2^0 u_0 \\ &\quad + \varepsilon^2 \frac{d_1^1}{a_{11}^*} A^* \nabla \hat{u}_2 \cdot \vec{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

En négligeant les termes en  $\varepsilon^2$ , on obtient donc le problème suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^*\nabla z_\varepsilon^1] - \omega^2\rho^*z_\varepsilon^1 = \varepsilon\mathcal{D}(u_0) & \text{dans } \Omega \\ z_\varepsilon^1 + \varepsilon \frac{d_1^1}{a_{11}^*} A^* \nabla z_\varepsilon^1 \cdot \vec{\mathbf{n}} = d_1^1 \partial_{x_1} u_0 + d_1^2 \partial_{x_2} u_0 + \varepsilon \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_0 \\ \quad + \varepsilon \omega^2 d_2^0 u_0 + \varepsilon \left( d_1^2 - \frac{d_1^1}{a_{11}^*} a_{12}^* \right) \sum_i d_1^i \partial_{x_i x_2}^2 u_0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Pour les mêmes raisons que dans la section précédente, ce problème est bien posé à condition que le coefficient  $d_1^1$  soit positif. Pour rendre le problème bien posé, il nous suffit

donc de prendre un  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $d_1^{1,M} = d_1^1 - M > 0$ . Dans ce cas, le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^* \nabla z_\varepsilon^{1,M}] - \omega^2 \rho^* z_\varepsilon^{1,M} = \varepsilon \mathcal{D}(u_0) & \text{dans } \Omega \\ z_\varepsilon^{1,M} + \varepsilon \frac{d_1^{1,M}}{a_{11}^*} A^* \nabla z_\varepsilon^{1,M} \cdot \vec{\mathbf{n}} = d_1^{1,M} \partial_{x_1} u_0 + d_1^2 \partial_{x_2} u_0 + \varepsilon \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_0 + \varepsilon \omega^2 d_2^0 u_0 \\ \quad + \varepsilon \left( d_1^2 - \frac{d_1^1}{a_{11}^*} a_{12}^* \right) (d_1^{1,M} \partial_{x_1 x_2}^2 u_0 + d_1^2 \partial_{x_2 x_2}^2 u_0) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

est bien posé dans  $H^1(\Omega)$ .

Comme expliqué dans la section précédente, la modification du problème de cellule vérifié par  $w_1$  a différentes conséquences sur les termes macroscopiques et les solutions des problèmes de cellule :

- comme nous l'avons vu précédemment,  $u_1(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = w_1^M(\mathbf{y}) \partial_{x_1} u_0(\mathbf{x}) + w_2(\mathbf{y}) \partial_{x_2} u_0(\mathbf{x}) + \hat{u}_1^M(\mathbf{x})$  où  $\hat{u}_1^M = \hat{u}_1 - M \partial_{x_1} u_0$ .
- pour les seconds problèmes de cellules, on peut voir que  $w_1$  intervient dans les problèmes satisfaits par  $\theta_{11}$  et  $\theta_{21}$ . En prenant en compte la nouvelle solution  $w_1^M$ , on obtient de nouvelles solutions de problèmes de cellule  $\theta_{11}^M$  et  $\theta_{21}^M$ , toutes deux de moyenne nulle sur  $Y$ , s'écrivant

$$\theta_{11}^M = \theta_{11} + M w_1 \quad \text{et} \quad \theta_{21}^M = \theta_{21} + M w_2.$$

Cela entraîne également la modification de deux coefficients apparaissant dans la condition au bord satisfaite par  $\hat{u}_2$  :  $d_2^{11}$  et  $d_2^{12}$  qui deviennent alors

$$d_2^{11,M} = d_2^{11} + M d_1^1 \quad \text{et} \quad d_2^{12,M} = d_2^{12} + M d_1^2.$$

- pour finir, nous pouvons alors écrire  $u_2$  sous la forme

$$\begin{aligned} u_2(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \theta_{11}^M(\mathbf{y}) \partial_{x_1 x_1}^2 u_0(\mathbf{x}) + (\theta_{21}^M(\mathbf{y}) + \theta_{12}(\mathbf{y})) \partial_{x_1 x_2}^2 u_0(\mathbf{x}) + \theta_{22}(\mathbf{y}) \partial_{x_2 x_2}^2 u_0(\mathbf{x}) \\ &\quad + w_1^M(\mathbf{y}) \partial_{x_1} \hat{u}_1^M(\mathbf{x}) + w_2(\mathbf{y}) \partial_{x_2} \hat{u}_1^M(\mathbf{x}) + \omega^2 \gamma(\mathbf{y}) u_0(\mathbf{x}) + \hat{u}_2^M(\mathbf{x}) \\ &= (\theta_{11}(\mathbf{y}) + M w_1(\mathbf{y})) \partial_{x_1 x_1}^2 u_0(\mathbf{x}) + (\theta_{21}(\mathbf{y}) + M w_2(\mathbf{y}) + \theta_{12}(\mathbf{y})) \partial_{x_1 x_2}^2 u_0(\mathbf{x}) \\ &\quad + \theta_{22}(\mathbf{y}) \partial_{x_2 x_2}^2 u_0(\mathbf{x}) + (w_1(\mathbf{y}) + M) \partial_{x_1} (\hat{u}_1(\mathbf{x}) - M \partial_{x_1} u_0(\mathbf{x})) \\ &\quad + w_2(\mathbf{y}) \partial_{x_2} (\hat{u}_1(\mathbf{x}) - M \partial_{x_1} u_0(\mathbf{x})) + \hat{u}_2^M(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{ij} \theta_{ij}(\mathbf{y}) \partial_{x_i x_j}^2 u_0(\mathbf{x}) + \sum_i w_i(\mathbf{y}) \partial_{x_i} \hat{u}_1(\mathbf{x}) + \omega^2 \gamma(\mathbf{y}) u_0(\mathbf{x}) \\ &\quad + M w_1(\mathbf{y}) \partial_{x_1 x_1}^2 u_0(\mathbf{x}) + M w_2(\mathbf{y}) \partial_{x_1 x_2}^2 u_0(\mathbf{x}) - M w_1(\mathbf{y}) \partial_{x_1 x_1}^2 u_0(\mathbf{x}) \\ &\quad + M \partial_{x_1} \hat{u}_1^M(\mathbf{x}) - M w_2(\mathbf{y}) \partial_{x_1 x_2}^2 u_0(\mathbf{x}) + \hat{u}_2^M(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{ij} \theta_{ij}(\mathbf{y}) \partial_{x_i x_j}^2 u_0(\mathbf{x}) + \sum_i w_i(\mathbf{y}) \partial_{x_i} \hat{u}_1(\mathbf{x}) + \omega^2 \gamma(\mathbf{y}) u_0(\mathbf{x}) \\ &\quad + \underbrace{M \partial_{x_1} \hat{u}_1^M(\mathbf{x}) + \hat{u}_2^M(\mathbf{x})}_{=\hat{u}_2(\mathbf{x})}. \end{aligned}$$

On a alors un nouveau terme macroscopique d'ordre 2 noté  $\hat{u}_2^M = \hat{u}_2 - M \partial_{x_1} \hat{u}_1^M$ . On a vu dans la section précédente que  $\hat{u}_1^M$  satisfait l'équation volumique

$$-\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_1^M] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_1^M = -M \partial_{x_1} f \quad \text{dans } \Omega$$

On en déduit que  $\hat{u}_2^M$  satisfait l'équation

$$-\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_2^M] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_2^M = \mathcal{D}(u_0) + M^2 \partial_{x_1 x_1}^2 f \quad \text{dans } \Omega.$$

Cela nous permet de poser le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}[A^* \nabla z_\varepsilon^{1,M}] - \omega^2 \rho^* z_\varepsilon^{1,M} = \varepsilon \mathcal{D}(u_0) - M \partial_{x_1} f + \varepsilon M^2 \partial_{x_1 x_1}^2 f \quad \text{dans } \Omega \\ z_\varepsilon^{1,M} + \varepsilon \frac{d_1^{1,M}}{a_{11}^*} A^* \nabla z_\varepsilon^{1,M} \cdot \vec{\mathbf{n}} = d_1^{1,M} \partial_{x_1} u_0 + d_1^2 \partial_{x_2} u_0 + \varepsilon \sum_i d_2^{1i,M} \partial_{x_1 x_i}^2 u_0 \\ \quad + \varepsilon d_2^{22} \partial_{x_2 x_2}^2 u_0 + \varepsilon \omega^2 d_2^0 u_0 \\ \quad + \varepsilon \left( d_1^2 - \frac{d_1^{1,M}}{a_{11}^*} a_{12}^* \right) (d_1^{1,M} \partial_{x_1 x_2}^2 u_0 + d_1^2 \partial_{x_2 x_2}^2 u_0) \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (2.41)$$

On a alors, pour  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $d_1^{1,M} = d_1^1 - M > 0$ , que le problème (2.41) est bien posé dans  $H^1(\Omega)$  et sa solution  $z_\varepsilon^{1,M}$  est censée approcher  $\hat{u}_1^M + \varepsilon \hat{u}_2^M$ .

Finalement,  $z_\varepsilon^M = u_0 + \varepsilon z_\varepsilon^{1,M}$  est une approximation à  $\varepsilon^3$  près de  $u_0 + \varepsilon \hat{u}_1^M + \varepsilon^2 \hat{u}_2^M$ .

Les estimations d'erreur pourraient être obtenues de la même façon que dans la section 2.6.3.

**Théorème 2.19.** Soit  $(u_\varepsilon)$  la famille des solutions de (1.2). Soit  $M$  tel que le problème (2.41) soit bien posé dans  $H^1(\Omega)$ . On note  $z_\varepsilon^{1,M}$  sa solution,  $z_\varepsilon^M = u_0 + \varepsilon z_\varepsilon^{1,M}$  et pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $z_{\varepsilon,1}^M(\mathbf{x}) = z_\varepsilon^M + \varepsilon \left[ w_1^M \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} z_\varepsilon^M(\mathbf{x}) + w_2 \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} z_\varepsilon^M(\mathbf{x}) + \sum_i U_1^i \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i} z_{\varepsilon|\Gamma}^M(x_2) \right]$ . On suppose que l'hypothèse  $(\mathcal{H}_2)$  du théorème 2.10 est vérifiée. On a alors

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - z_{\varepsilon,1}^M\|_{L^2(\Omega)} &= \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \|u_\varepsilon - z_{\varepsilon,1}^M\|_{H^1(\Omega)} &= \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Et nous pouvons également avoir un résultat plus précis.

**Corollaire 2.20.** Soit  $(u_\varepsilon)$  la famille des solutions de (1.2). Soit  $M$  tel que le problème (2.41) soit bien posé dans  $H^1(\Omega)$ . On note  $z_\varepsilon^{1,M}$  sa solution,  $z_\varepsilon^M = u_0 + \varepsilon z_\varepsilon^{1,M}$ ,  $z_{\varepsilon,1}^M$  définit dans le théorème 2.19 et pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} z_{\varepsilon,2}^M(\mathbf{x}) = z_{\varepsilon,1}^M(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \left[ \sum_i \theta_{i1}^M \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i x_1}^2 z_\varepsilon^M(\mathbf{x}) + \sum_i \theta_{i2} \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i x_2}^2 z_\varepsilon^M(\mathbf{x}) + \omega^2 \gamma \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) z_\varepsilon^M(\mathbf{x}) \right. \\ \left. + \sum_{i \leq j} U_2^{ij} \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_i x_j}^2 z_{\varepsilon|\Gamma}^M(x_2) + \omega^2 U_2^0 \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) z_{\varepsilon|\Gamma}^M(x_2) \right]. \end{aligned}$$

On suppose que l'hypothèse  $(\mathcal{H}_3)$  du théorème 2.10 est vérifiée. On a alors

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - z_{\varepsilon,2}^M\|_{L^2(\Omega)} &= \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ \|u_\varepsilon - z_{\varepsilon,2}^M\|_{H^1(\Omega)} &= \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Nous avons simulé ces résultats numériquement. Nous résolvons dans un premier temps le problème homogénéisé (2.40) satisfait par  $u_0$  comme nous avons pu le faire précédemment (voir la section 2.5). Dans un second temps, nous résolvons le problème (2.41). On remarque que ce problème est du même type que le problème approché à l'ordre 1 (2.38). Nous utilisons donc la même méthode que dans la section 2.6. Enfin nous construisons la solution recherchée

$z_\varepsilon^M = u_0 + \varepsilon z_\varepsilon^{1,M}$ . Le calcul d'une solution exacte est détaillé dans la section 2.5.

Nous prenons comme fonctions  $a(y_1, y_2) = (2 + \sin(2\pi y_1))(2 + \sin(2\pi y_2))$ ,  $\rho(\mathbf{y}) \equiv 1$  et nous fixons le paramètre de la forme  $\omega^2 = (k_x + i)^2 + k_y^2$  avec  $k_x = 4.5, k_y = 4$ . Nous prenons également pour terme source  $f = 0$  et pour condition au bord  $g(y_2) = e^{ik_y y_2}$ . Nous prenons également des  $\varepsilon$  de la forme  $\varepsilon = 1/N$  avec  $N \in \mathbb{N}^*$ .

Nous fixons le paramètre  $M$  tel que  $d_1^{1,M} = 0.1$ . Nous représentons sur la figure 2.25  $u_\varepsilon$  et  $u_\varepsilon - z_\varepsilon^M$  à la même échelle pour  $\varepsilon = 1/8$ . On constate qualitativement que  $z_\varepsilon^M$  approche bien le comportement macroscopique de  $u_\varepsilon$ .

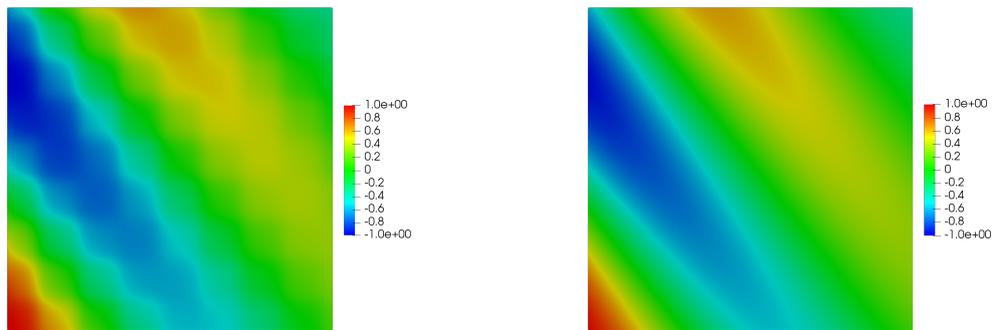


FIGURE 2.25 –  $u_\varepsilon$  (à gauche) et  $z_\varepsilon^M$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$  pour  $d_1^{1,M} = 0.1$ ,  $\varepsilon = 1/8$

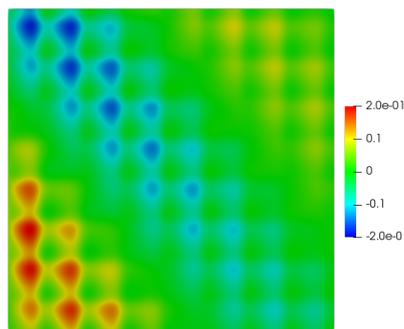


FIGURE 2.26 –  $u_\varepsilon - z_\varepsilon^M$  pour  $\varepsilon = 1/8$  dans  $\Omega = (0, 1)^2$

Par la suite, nous représentons sur la figure 2.27  $u_\varepsilon - (z_\varepsilon^M + \varepsilon(w_1^M(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_1}z_\varepsilon^M + w_2(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_2}z_\varepsilon^M))$  et  $u_\varepsilon - z_{\varepsilon,1}^M$  côte à côte, à la même échelle, différente de la précédente. On constate que les oscillations dans le domaine sont corrigées par la partie oscillante  $\varepsilon(w_1^M(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_1}z_\varepsilon^M + w_2(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_2}z_\varepsilon^M)$  mais les oscillations sur le bord se corrigent en ajoutant le terme de champ proche  $\sum_i U_1^i(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_i}z_\varepsilon^M$ .

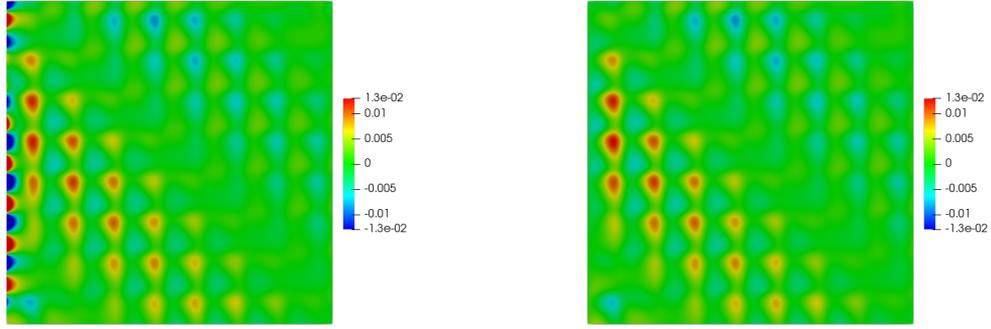


FIGURE 2.27 –  $u_\varepsilon - (z_\varepsilon^M + \varepsilon(w_1^M(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_1}z_\varepsilon^M + w_2(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_2}z_\varepsilon^M))$  (à gauche) et  $u_\varepsilon - z_\varepsilon^M$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$  pour  $d_1^{1,M} = 0.1$ ,  $\varepsilon = 1/8$

Enfin, nous représentons sur la figure 2.28  $u_\varepsilon - (z_\varepsilon^M + \varepsilon^2(\sum_i \theta_{i1}^M(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_i x_1}^2 z_\varepsilon^M + \sum_i \theta_{i2}(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_i x_2}^2 z_\varepsilon^M))$  et  $u_\varepsilon - z_\varepsilon^M$  côte à côte, à la même échelle, différente de la précédente. Une nouvelle fois, les oscillations dans le domaine sont corrigées par la partie oscillante  $\varepsilon^2(\sum_i \theta_{i1}^M(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_i x_1}^2 z_\varepsilon^M + \sum_i \theta_{i2}(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_i x_2}^2 z_\varepsilon^M)$  et les oscillations sur le bord sont corrigées par le terme de champ proche  $\sum_{i \leq j} U_2^{ij}(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_i x_j}^2 z_\varepsilon^M$ .

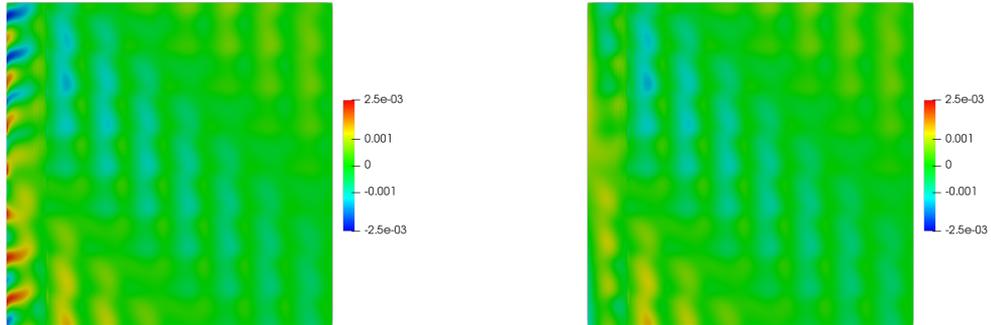


FIGURE 2.28 –  $u_\varepsilon - (z_\varepsilon^M + \varepsilon^2(\sum_i \theta_{i1}^M(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_i x_1}^2 z_\varepsilon^M + \sum_i \theta_{i2}(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_i x_2}^2 z_\varepsilon^M))$  (à gauche) et  $u_\varepsilon - z_\varepsilon^M$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$  pour  $d_1^{1,M} = 0.1$ ,  $\varepsilon = 1/8$

# Homogénéisation en deux dimensions avec condition de Neumann

## Sommaire

<b>3.1 Développement asymptotique double-échelle enrichi . . . . .</b>	<b>75</b>
3.1.1 Présentation du développement enrichi . . . . .	75
3.1.2 Étude du problème type de demi-bande infini . . . . .	76
3.1.3 Application aux premiers ordres . . . . .	78
3.1.4 Formalisme pour un développement à tout ordre . . . . .	85
<b>3.2 Estimations d'erreur . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>3.3 Résultats numériques . . . . .</b>	<b>92</b>

Dans ce chapitre, nous allons adapter nos résultats du chapitre précédent à un problème avec condition de Neumann. Là encore, nous enrichissons l'ansatz avec des termes de champ proche permettant de corriger les phénomènes de couches limites dus à la présence du bord. L'étude de ces termes nous permet de déterminer des conditions au bord satisfaisantes pour les termes macroscopiques  $u_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \text{etc} \dots$ . Nous utilisons la méthode jusqu'aux termes d'ordre 2 mais comme dans le chapitre précédent, nous développons la méthode à tout ordre. Nous confirmons cette méthode par des estimations d'erreur, que nous validons numériquement. Faute de temps, nous n'avons pas étudié les modèles approchés pour ces problèmes.

Dans ce chapitre, nous étudions le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left[ a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right] - \omega^2 \rho \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega \\ a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{n}} = g & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $a$  et  $\rho$  sont  $Y$ -périodiques, bornées inférieurement et supérieurement par des constantes strictement positives,  $f$  et  $g$  sont les données du problème, et  $\vec{\mathbf{n}}$  désigne la normale sortante, i.e.  $\vec{\mathbf{n}} = -\vec{\mathbf{e}}_1$  ici.

## 3.1 Développement asymptotique double-échelle enrichi

### 3.1.1 Présentation du développement enrichi

Comme dans le chapitre précédent, nous enrichissons l'ansatz (1.4) avec des termes de champ proche  $U_n(x_2; \mathbf{y})$ , définis sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , 1-périodiques par rapport à  $y_2$ , qui doivent tendre vers

0 quand  $y_1$  tend vers  $+\infty$  :

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n u_n \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n U_n \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right). \quad (3.2)$$

Les termes de champ lointain  $u_n$  sont les mêmes que ceux du chapitre 1 et satisfont toujours la cascade d'équations (1.8). En prenant cela en compte et en injectant l'ansatz dans l'équation volumique du problème (3.1), on montre que les termes de champ proche satisfont la cascade d'équations (2.15) à savoir  $\forall n \geq 0$ ,

$$\mathcal{L}_0 U_n + \mathcal{L}_1 U_{n-1} + \mathcal{L}_2 U_{n-2} = 0 \quad (3.3)$$

(on pose  $U_{-1} = U_{-2} = 0$ ). Comme précédemment, on constate que si l'on connaît  $U_{n-1}$  et  $U_{n-2}$ , l'opérateur différentiel  $\mathcal{L}_0$  ne portant que sur la variable  $\mathbf{y}$ ,  $x_2$  sera vu comme un paramètre. De plus, les termes de champ proche étant périodiques par rapport à  $y_2$ , nous pouvons alors restreindre le problème dans une demi-bande infinie  $B = \mathbb{R}^+ \times (0, 1)$ .

Pour obtenir le problème satisfait par  $U_n$ , il nous reste à déterminer la condition au bord qu'il satisfait. Pour cela, on injecte l'ansatz dans la condition au bord et on développe :

$$\begin{aligned} a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{n}}|_\Gamma &= -a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1} u_\varepsilon|_\Gamma \\ g &= -a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n (\partial_{x_1} u_n \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_1} u_n \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right)) + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^{n-1} \partial_{y_1} U_n \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right]_{|\Gamma} \\ &= -a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \partial_{x_1} u_n \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + \sum_{n=-1}^{+\infty} \varepsilon^n \partial_{y_1} u_n \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + \sum_{n=-1}^{+\infty} \varepsilon^n \partial_{y_1} U_n \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right]_{|\Gamma}. \end{aligned}$$

En identifiant les termes en facteur des puissances de  $\varepsilon$ , on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$-\delta_{n,0} g = a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \left[ \partial_{x_1} u_n \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + \partial_{y_1} u_{n+1} \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + \partial_{y_1} U_{n+1} \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right]_{|\Gamma}$$

Cette condition doit être vraie formellement donc formellement

$$-\delta_{n,0} g(x_2) = \left[ [a(\mathbf{y})(\partial_{x_1} u_n(\mathbf{x}; \mathbf{y}) + \partial_{y_1} u_{n+1}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) + \partial_{y_1} U_{n+1}(x_2; \mathbf{y}))]|_{y_1=0} \right]_{|x_1=0}.$$

Finalement, on obtient que  $U_n$  satisfait le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_n] &= \operatorname{div}_{x_2}a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_{n-1} + \operatorname{div}_{\mathbf{y}}a(\mathbf{y})\nabla_{x_2}U_{n-1} + a(\mathbf{y})\partial_{x_2}^2U_{n-2} + \omega^2\rho(\mathbf{y})U_{n-1} & \text{dans } B \\ (a\nabla_{\mathbf{y}}U_n \cdot \vec{\mathbf{n}})(x_2; \cdot) &= (\delta_{n,1}g - a\nabla_{\mathbf{x}}u_{n-1} \cdot \vec{\mathbf{n}} - a\nabla_{\mathbf{y}}u_n \cdot \vec{\mathbf{n}})(x_2; \cdot) & \text{sur } \Gamma_0 \\ U_n & & y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (3.4)$$

La condition «  $y_2$ -périodique » signifie que la trace et la trace de la dérivée normale sont 1-périodiques dans la direction  $y_2$ .

Dans la suite, nous étudions le problème type satisfait par les termes de champ proche. Nous déterminons une condition de compatibilité sur le terme source et la condition au bord pour que le problème soit bien posé qui, appliquée au problème (3.4) nous permet de déterminer des conditions au bord pour les termes macroscopiques  $u_0, \hat{u}_1, \text{etc...}$ .

### 3.1.2 Étude du problème type de demi-bande infini

Dans toute la suite, nous dirons qu'une fonction qui vérifie  $-\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U] = F$  est périodique si elle vérifie les deux conditions de périodicité : sa trace et la trace de sa dérivée normale

sont 1-périodiques dans la direction  $\vec{e}_2$ .

Les problèmes vérifiés par les  $U_n$  sont du type

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}U] = F & \text{dans } B \\ a\nabla_{\mathbf{y}}U \cdot \vec{\mathbf{n}} = G & \text{sur } \Gamma_0 \\ U & y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $F \in L^2(B)$  et  $G \in H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0) = [H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)]'$ . On note dans la suite  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_0}$  le crochet de dualité entre  $H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$  et  $H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0)$ .

Nous cherchons une solution dans l'espace  $W_{\#}(B)$  défini dans le chapitre précédent (voir (2.19)).

**Proposition 3.1.** Le problème 3.5 admet une solution dans  $W_{\#}(B)$  seulement si  $F$  et  $G$  vérifient la condition de compatibilité :

$$\int_B F d\mathbf{y} + \langle G, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 0. \quad (3.6)$$

*Démonstration.* En effet, en multipliant par 1 qui est dans le noyau de l'opérateur et en intégrant dans une bande tronquée  $B_N = (0, N) \times (0, 1)$ ,  $N \in \mathbb{R}^+$  que l'on fait tendre vers  $+\infty$ ,

$$\int_{B_N} F d\mathbf{y} = - \int_{B_N} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{U}] d\mathbf{y} = \underbrace{\int_{B_N} a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{U} \cdot 0 d\mathbf{y}}_{=0} - \langle a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{U} \cdot \vec{\mathbf{n}}, 1 \rangle_{\Gamma_N} - \underbrace{\langle a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{U} \cdot \vec{\mathbf{n}}, 1 \rangle_{\Gamma_0}}_{=G}$$

Or  $\tilde{U} \in W_{\#}(B)$  d'où  $|\nabla\tilde{U}| \xrightarrow{y_1 \rightarrow +\infty} 0$  et donc  $\langle a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{U} \cdot \vec{\mathbf{n}}, 1 \rangle_{\Gamma_N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ . D'où le résultat.  $\square$

On remarque qu'alors, si une solution existe dans l'espace  $W_{\#}(B)$ , celle-ci n'est unique qu'à une constante près. Pour contourner cette difficulté, nous allons résoudre un problème intermédiaire dont la solution est unique et nous étudions son comportement à l'infini afin d'obtenir la solution recherchée à savoir une fonction qui décroît exponentiellement vers 0 à l'infini. On cherche donc  $\tilde{U} \in W_{\#}(B)$  solution du problème intermédiaire

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{U}] = F & \text{dans } B \\ a\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{U} \cdot \vec{\mathbf{n}} = G & \text{sur } \Gamma_0 \\ \int_{\Gamma_0} \tilde{U} dy_2 = 0 \\ \tilde{U} & y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (3.7)$$

**Théorème 3.2** (Existence et unicité). On suppose que  $G \in H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0)$  et  $F\sqrt{1+y_1^2} \in L^2(B)$ , et que  $F$  et  $G$  satisfont la condition (3.6). Alors le problème (3.7) est bien posé dans  $W_{\#}(B)$ .

La démonstration se fait en appliquant le théorème de Lax-Milgram et en utilisant une inégalité de type Hardy pour des fonctions à moyenne nulle sur un bord (la preuve peut se faire par l'absurde en utilisant un résultat de compacité).

A présent, nous supposons donc que  $F$  et  $G$  satisfont les hypothèses du théorème 3.2. Il existe donc une unique solution  $\tilde{U} \in W_{\#}(B)$ .

**Proposition 3.3.** On suppose que  $F$  est exponentiellement décroissant : il existe  $\gamma_0 > 0$  tel que  $e^{\gamma_0 y_1} f \in L^2(B)$ . Soit  $\tilde{U} \in W_{\#}(B)$  solution de (3.7). Il existe  $\gamma > 0$  et une unique constante  $C_{\tilde{U}} \in \mathbb{R}$  telles que

$$e^{\gamma y_1}(\tilde{U} - C_{\tilde{U}}) \in H^1(B)$$

*Démonstration.* Soit  $\tilde{U} \in W_{\#}(B)$  l'unique solution de (3.7). En notant  $\tilde{G} = \tilde{U}|_{\Gamma}$ ,  $\tilde{U}$  est alors solution du problème (2.18) avec pour données  $F$  et  $\tilde{G}$ . On obtient alors le résultat en appliquant le théorème 2.3.  $\square$

Nous avons donc toutes les hypothèses nécessaires pour obtenir une solution  $\tilde{U}$  qui soit exponentiellement décroissante mais qui pour l'instant, ne décroît pas nécessairement vers 0. Il nous faut donc déterminer la valeur du comportement constant à l'infini de  $\tilde{U}$  pour pouvoir le retirer, et obtenir une solution du problème (3.5) qui décroisse exponentiellement vers 0. On va comme dans le chapitre précédent, utiliser la fonction profil  $\mathcal{N}$  qui on le rappelle est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N}] = 0 & \text{dans } B \\ \mathcal{N} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \mathcal{N} \quad y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

de la forme  $\mathcal{N} = \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} + \tilde{\mathcal{N}}$  où  $\tilde{\mathcal{N}} \in W_{\#}(B)$ . En appliquant le théorème 2.7, on trouve que  $\tilde{U}$  tend vers une constante  $C_{\tilde{U}}$  quand  $y_1$  tend vers l'infini, donnée par

$$C_{\tilde{U}} = \int_B F\mathcal{N}d\mathbf{y} - \langle a\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{N} \cdot \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{U} \rangle_{\Gamma_0}. \quad (3.8)$$

Finalement, la solution  $U$  du problème (3.5) que nous recherchons est  $U = \tilde{U} - C_{\tilde{U}}$ .

### 3.1.3 Application aux premiers ordres

#### Ordre 0

On cherche la solution  $U_0$  exponentiellement décroissante du problème ( $x_2$  est vu comme un paramètre) :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_0] = 0 & \text{dans } B \\ (a\nabla_{\mathbf{y}}U_0 \cdot \tilde{\mathbf{n}})(x_2; \cdot) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ U_0 \quad y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

On constate que les solutions de ce problème sont les fonctions constantes. Étant donné que le terme de champ proche doit décroître vers 0, la solution que nous recherchons est  $U_0 \equiv 0$ .

#### Ordre 1

On cherche la solution  $U_1$  exponentiellement décroissante du problème ( $x_2$  est vu comme un paramètre) :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_1] = 0 & \text{dans } B \\ (a\nabla_{\mathbf{y}}U_1 \cdot \tilde{\mathbf{n}})(x_2; \cdot) = g_1(x_2; \cdot) & \text{sur } \Gamma_0 \\ U_1 \quad y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

où  $g_1(x_2; \cdot) = g(x_2) + a(\cdot) \left[ \partial_{x_1} u_{0|\Gamma}(x_2) + \sum_i \partial_{y_1} w_i(\cdot) \partial_{x_i} u_{0|\Gamma}(x_2) \right]$  ( $x_2$  est vu comme un paramètre).

D'après le théorème 3.6, ce problème admet une solution seulement si  $g_1$  vérifie la condition de compatibilité :

$$\langle g_1(x_2; \cdot), 1 \rangle_{\Gamma_0} = 0.$$

Cette condition de compatibilité nous donne alors :

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle g_1(x_2; \cdot), 1 \rangle_{\Gamma_0} \\
 &= g(x_2) + \langle a(\cdot) \left[ \partial_{x_1} u_{0|\Gamma}(x_2) + \sum_i \partial_{y_1} w_i(\cdot) \partial_{x_i} u_{0|\Gamma}(x_2) \right], 1 \rangle_{\Gamma_0} \\
 &= g(x_2) + \partial_{x_1} u_{0|\Gamma}(x_2) \langle a(\cdot) (1 + \partial_{y_1} w_1(\cdot)), 1 \rangle_{\Gamma_0} + \partial_{x_2} u_{0|\Gamma}(x_2) \langle a(\cdot) \partial_{y_1} w_2(\cdot), 1 \rangle_{\Gamma_0}.
 \end{aligned}$$

Or par le lemme 2.6,

$$\langle a(\cdot) \partial_{y_1} (y_i + w_i), 1 \rangle_{\Gamma_0} = a_{1i}^*.$$

D'où

$$0 = g + a_{11}^* \partial_{x_1} u_{0|\Gamma} + a_{12}^* \partial_{x_2} u_{0|\Gamma}. \quad (3.9)$$

On en déduit donc la condition au bord pour  $u_0$  :

$$A^* \nabla u_0 \cdot \vec{\mathbf{n}}_{|\Gamma} = g$$

où  $\vec{\mathbf{n}} = -\vec{\mathbf{e}}_1$ . Ainsi,  $u_0$  est solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^* \nabla u_0] - \omega^2 \rho^* u_0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ A^* \nabla u_0 \cdot \vec{\mathbf{n}}_{|\Gamma} = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Il nous faut désormais calculer  $U_1$ . Comme  $U_1$  est déterminé à une constante près mais que nous voulons qu'il soit nul loin du bord, on utilise la solution  $\tilde{U}_1$  du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{U}_1] = 0 & \text{dans } B \\ a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{U}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}} = g_1 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \int_{\Gamma_0} \tilde{U}_1 dy_2 = 0 \\ \tilde{U}_1 & y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

puis on calculera la valeur de sa constante à l'infini (grâce à la formule (3.8)) qu'on lui retirera pour obtenir  $U_1$ .

Nous utilisons la linéarité du problème pour décomposer  $g_1$  sous la forme

$$g_1 = g_1^1 \partial_{x_1} u_{0|\Gamma} + g_1^2 \partial_{x_2} u_{0|\Gamma}$$

où pour  $i = 1, 2$ ,

$$g_1^i = a(\cdot) (\delta_{1i} + \partial_{y_1} w_i) - a_{1i}^*$$

(on a remplacé  $g$  par  $-A^* \nabla u_0 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|_{\Gamma} = -a_{11}^* \partial_{x_1} u_{0|\Gamma} - a_{12}^* \partial_{x_2} u_{0|\Gamma}$  dans l'expression de  $g_1$ ).

On peut ainsi décomposer  $\tilde{U}_1$  sous la forme

$$\tilde{U}_1(x_2; \mathbf{y}) = \sum_i \tilde{U}_1^i(\mathbf{y}) \partial_{x_i} u_{0|\Gamma}(x_2)$$

où  $\tilde{U}_1^i$  est solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{U}_1^i] = 0 & \text{dans } B \\ a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{U}_1^i \cdot \vec{\mathbf{n}} = g_1^i & \text{sur } \Gamma_0 \\ \int_{\Gamma_0} \tilde{U}_1^i dy_2 = 0 \\ \tilde{U}_1^i & y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

Avant de continuer, notons que les données de ces problèmes vérifient bien la condition de compatibilité (3.6) : en effet, on peut constater que pour  $i = 1, 2$ , on a

$$\int_{\Gamma_0} g_1^i dy_2 = \int_{\Gamma_0} a(\mathbf{y})(\delta_{1i} + \partial_{y_1} w_i) dy_2 - a_{1i}^* = a_{1i}^* - a_{1i}^* = 0.$$

Pour que  $U_1$  décroisse exponentiellement vers 0 quand  $y_1$  tend vers  $+\infty$ , il nous faut retirer à chaque  $\tilde{U}_1^i$  la constante

$$d_1^i = C_{\tilde{U}_1^i} = -\langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, \tilde{U}_1^i \rangle_{\Gamma_0}.$$

On obtient donc que

$$U_1(x_2; \mathbf{y}) = \sum_i U_1^i(\mathbf{y}) \partial_{x_i} u_{0|\Gamma}(x_2).$$

où  $U_1^i = \tilde{U}_1^i - d_1^i$ .

## Ordre 2

A présent, on s'intéresse au calcul du terme de champ proche  $U_2 \in W_{\#}(B)$  qui satisfait le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U_2] = f_2 & \text{dans } B \\ (a(\cdot) \nabla_{\mathbf{y}} U_2 \cdot \vec{\mathbf{n}})(x_2; \cdot) = g_2(x_2; \cdot) & \text{sur } \Gamma_0 \\ U_2 & y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (3.10)$$

où

$$\begin{aligned} f_2 &= \operatorname{div}_{x_2}[a(\cdot) \nabla_{\mathbf{y}} U_1] + \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\cdot) \nabla_{x_2} U_1] \\ &= \sum_i (a(\cdot) \partial_{y_2} U_1^i + \partial_{y_2}(a(\cdot) U_1^i)) \partial_{x_2 x_i}^2 u_{0|\Gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(x_2; \cdot) &= a(\cdot) [\partial_{x_1} u_{1|\Gamma}] (x_2; \cdot) + a(\cdot) [\partial_{y_1} u_{2|\Gamma}] (x_2; \cdot) \\ &= a(\cdot) \left[ \sum_i w_i(\cdot) \partial_{x_1 x_i}^2 u_{0|\Gamma}(x_2) + \partial_{x_1} \hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) + \sum_{ij} \partial_{y_1} \theta_{ij}(\cdot) \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma}(x_2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_i \partial_{y_1} w_i(\cdot) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) + \omega^2 \partial_{y_1} \gamma(\cdot) u_{0|\Gamma}(x_2) \right]. \end{aligned}$$

Par le théorème 3.6, le problème (3.10) admet une solution seulement si

$$\int_B f_2 d\mathbf{y} + \langle g_2, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 0.$$

Or

$$\int_B f_2 d\mathbf{y} = \sum_i \int_B (a(\mathbf{y}) \partial_{y_2} U_1^i + \partial_{y_2}(a(\mathbf{y}) U_1^i)) d\mathbf{y} \partial_{x_2 x_i}^2 u_{0|\Gamma}.$$

En faisant une intégration par partie et par périodicité, on a que  $\int_B \partial_{y_2}(a(\mathbf{y}) U_1^i) d\mathbf{y} = 0$ . Donc

$$\int_B f_2 d\mathbf{y} = \sum_i \int_B a(\mathbf{y}) \partial_{y_2} U_1^i d\mathbf{y} \partial_{x_2 x_i}^2 u_{0|\Gamma}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \langle g_2(x_2; \cdot), 1 \rangle_{\Gamma_0} &= \sum_i \langle a \partial_{y_1}(y_i + w_i), 1 \rangle_{\Gamma_0} \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) + \sum_{ij} \langle a(\delta_{i1} w_j + \partial_{y_1} \theta_{ij}), 1 \rangle_{\Gamma_0} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma}(x_2) \\ &\quad + \omega^2 \langle a \partial_{y_1} \gamma, 1 \rangle_{\Gamma_0} u_{0|\Gamma}(x_2) \\ &= -A^* \nabla \hat{u}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_{|\Gamma}(x_2) + \sum_{ij} \langle a(\delta_{i1} w_j + \partial_{y_1} \theta_{ij}), 1 \rangle_{\Gamma_0} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma}(x_2) \\ &\quad + \omega^2 \langle a \partial_{y_1} \gamma, 1 \rangle_{\Gamma_0} u_{0|\Gamma}(x_2). \end{aligned}$$

La condition de compatibilité  $\int_B f_2 d\mathbf{y} + \langle g_2, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 0$  nous donne alors une condition au bord pour  $\hat{u}_1$  de la forme

$$A^* \nabla \hat{u}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma} = c_2^{11} \partial_{x_1}^2 u_{0|\Gamma} + c_2^{12} \partial_{x_1 x_2}^2 u_{0|\Gamma} + c_2^{22} \partial_{x_2}^2 u_{0|\Gamma} + \omega^2 c_2^0 u_{0|\Gamma}.$$

où

$$\begin{aligned} c_2^0 &:= \langle a \partial_{y_1} \gamma, 1 \rangle_{\Gamma_0}, \\ c_2^{11} &:= \langle a(w_1 + \partial_{y_1} \theta_{11}), 1 \rangle_{\Gamma_0}, \\ c_2^{12} &:= \int_B a(\mathbf{y}) \partial_{y_2} U_1^1(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \langle a(\mathbf{y})(w_2 + \partial_{y_1}(\theta_{12} + \theta_{21})), 1 \rangle_{\Gamma_0}, \\ c_2^{22} &:= \int_B a(\mathbf{y}) \partial_{y_2} U_1^2(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \langle a \partial_{y_1} \theta_{22}, 1 \rangle_{\Gamma_0}. \end{aligned}$$

**Proposition 3.4.** Le coefficient  $c_2^{11}$  est nul.

*Démonstration.* Prenons l'équation (1.20) vérifiée par  $\theta_{11}$ , multiplions-là par  $y_1$  et intégrons sur  $Y$  :

$$\int_Y -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \theta_{11}] y_1 d\mathbf{y} = \int_Y [a(\mathbf{y}) + a(\mathbf{y}) \partial_{y_1} w_1(\mathbf{y}) + \partial_{y_1}(a(\mathbf{y}) w_1(\mathbf{y})) - a_{11}^*] y_1 d\mathbf{y}.$$

On a d'une part,

$$\int_Y -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \theta_{11}] y_1 d\mathbf{y} = \int_Y a(\mathbf{y}) \partial_{y_1} \theta_{11} d\mathbf{y} - \int_{y_1=1} a(\mathbf{y}) \partial_{y_1} \theta_{11} dy_2$$

en utilisant la périodicité de  $\theta_{11}$  et de  $a$ , et d'autre part,

$$\int_Y \partial_{y_1}(a(\mathbf{y}) w_1(\mathbf{y})) y_1 d\mathbf{y} = - \int_Y a(\mathbf{y}) w_1(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{y_1=1} a(\mathbf{y}) w_1(\mathbf{y}).$$

D'où, par périodicité, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{\Gamma_0} a(\mathbf{y})(w_1(\mathbf{y}) + \partial_{y_1} \theta_{11}(\mathbf{y})) dy_2 = \underbrace{\int_Y a(\mathbf{y})(w_1(\mathbf{y}) + \partial_{y_1} \theta_{11}(\mathbf{y})) d\mathbf{y}}_{=c_{11}^*=0} - \int_Y a(\mathbf{y})(1 + \partial_{y_1} w_1(\mathbf{y})) y_1 d\mathbf{y} + \frac{a_{11}^*}{2}.$$

Or en prenant le problème de cellule vérifié par  $w_1$ , en le multipliant par  $y_1^2$  et en intégrant, on obtient que

$$\int_Y a(\mathbf{y})(1 + \partial_{y_1} w_1(\mathbf{y})) y_1 d\mathbf{y} = \frac{a_{11}^*}{2}.$$

Donc  $c_2^{11} = 0$  □

Alors,  $\hat{u}_1$  satisfait la condition

$$A^* \nabla \hat{u}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma} = c_2^{12} \partial_{x_1 x_2}^2 u_{0|\Gamma} + c_2^{22} \partial_{x_2}^2 u_{0|\Gamma} + \omega^2 c_2^0 u_{0|\Gamma}. \quad (3.11)$$

Finalement, on a que  $\hat{u}_1$  est solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_1] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_1 &= 0 & \text{dans } \Omega \\ A^* \nabla \hat{u}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}} &= c_2^{12} \partial_{x_1 x_2}^2 u_{0|\Gamma} + c_2^{22} \partial_{x_2}^2 u_{0|\Gamma} + \omega^2 c_2^0 u_{0|\Gamma} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Il nous reste à calculer  $U_2$ . Comme précédemment, nous utilisons un problème intermédiaire de solution  $\tilde{U}_2 \in W_{\#}(B)$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{U}_2] = f_2 & \text{dans } B \\ a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{U}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}} = g_2 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \int_{\Gamma_0} \tilde{U}_2 dy_2 = 0 & \\ \tilde{U}_2 & y_2\text{-périodique} \end{array} \right. .$$

Si  $\hat{u}_1$  satisfait la condition au bord (3.11), alors  $f_2$  et  $g_2$  satisfont la condition de compatibilité (3.6) et d'après le théorème 3.2, ce problème est bien posé dans  $W_{\#}(B)$ . De plus, de par la structure de  $f_2$  et  $g_2$ , comme le problème est linéaire, on aimerait décomposer  $\tilde{U}_2$  sous la forme

$$\tilde{U}_2 = \sum_{i \leq j} \tilde{U}_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma} + \sum_i \tilde{U}_1^{(i)} \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma} + \omega^2 \tilde{U}_2^0 u_{0|\Gamma}$$

où  $\tilde{U}_2^{ij}$  est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{U}_2^{ij}] = f_2^{ij} & \text{dans } B \\ a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{U}_2^{ij} \cdot \bar{\mathbf{n}} = g_2^{ij} & \text{sur } \Gamma_0 \\ \int_{\Gamma_0} \tilde{U}_2^{ij} dy_2 = 0 & \\ \tilde{U}_2^{ij} & y_2\text{-périodique} \end{array} \right.$$

et  $\tilde{U}_2^0$  est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{U}_2^0] = 0 & \text{dans } B \\ a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{U}_2^0 \cdot \bar{\mathbf{n}} = g_2^0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \int_{\Gamma_0} \tilde{U}_2^0 dy_2 = 0 & \\ \tilde{U}_2^0 & y_2\text{-périodique} \end{array} \right.$$

avec  $f_2^{ij}$ ,  $g_2^{ij}$  et  $g_2^0$  définis tels que

$$\sum_{i \leq j} f_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma} = f_2, \quad \sum_{i \leq j} g_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma} + \sum_i g_1^i \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma} + g_2^0 u_{0|\Gamma} = g_2.$$

Par ailleurs, pour que  $\tilde{U}_2^{ij}$  puisse exister,  $f_2^{ij}$  et  $g_2^{ij}$  doivent satisfaire la condition de compatibilité (3.6) à savoir

$$\int_B f_2^{ij} d\mathbf{y} + \langle g_2^{ij}, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 0.$$

Naturellement, on prendra pour  $i = 1, 2$ ,  $f_2^{i2}(\mathbf{y}) = a(\mathbf{y})\partial_{y_2} U_1^i(\mathbf{y}) + \partial_{y_2}(a(\mathbf{y})U_1^i(\mathbf{y}))$  et  $f_2^{11} \equiv 0$ . Reste à trouver les  $g_2^{ij}$  et  $g_2^0$ . Pour cela, reprenons la relation

$$\sum_{i \leq j} g_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma} + \sum_i g_1^i \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma} + \omega^2 g_2^0 u_{0|\Gamma} = g_2.$$

En remplaçant  $g_2$  et les  $g_1^i$  par leur expression respective, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \leq j} g_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma} + \omega^2 g_2^0 u_{0|\Gamma} &= - \sum_i (a(\cdot)(\delta_{1i} + \partial_{y_1} w_{i|\Gamma_0} - a_{1i}^*) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}) \\
 &\quad + \sum_{ij} a(\cdot)(\delta_{i1} w_{j|\Gamma_0} + \partial_{y_1} \theta_{ij|\Gamma_0}) \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma} + \sum_i (a(\cdot)(\delta_{1i} + \partial_{y_1} w_{i|\Gamma_0}) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}) \\
 &\quad + \omega^2 a(\cdot) \partial_{y_1} \gamma_{|\Gamma_0} u_{0|\Gamma} \\
 &= -A^* \nabla \hat{u}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_{|\Gamma} + \sum_{ij} a(\cdot)(\delta_{i1} w_{j|\Gamma_0} + \partial_{y_1} \theta_{ij|\Gamma_0}) \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma} \\
 &\quad + \omega^2 a(\cdot) \partial_{y_1} \gamma_{|\Gamma_0} u_{0|\Gamma} \\
 &= -c_2^{12} \partial_{x_1 x_2}^2 u_{0|\Gamma} - c_2^{22} \partial_{x_2}^2 u_{0|\Gamma} - \omega^2 c_2^0 u_{0|\Gamma} \\
 &\quad + \sum_{ij} a(\cdot)(\delta_{i1} w_{j|\Gamma_0} + \partial_{y_1} \theta_{ij|\Gamma_0}) \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma} + \omega^2 a(\cdot) \partial_{y_1} \gamma_{|\Gamma_0} u_{0|\Gamma} \\
 &= a(\cdot)(w_{1|\Gamma_0} + \partial_{y_1} \theta_{11|\Gamma_0}) \partial_{x_1 x_1}^2 u_{0|\Gamma} \\
 &\quad + (a(\cdot)(w_{2|\Gamma_0} + \partial_{y_1} \theta_{12|\Gamma_0} + \partial_{y_1} \theta_{21|\Gamma_0}) - c_2^{12}) \partial_{x_1 x_2}^2 u_{0|\Gamma} \\
 &\quad + (a(\cdot) \partial_{y_1} \theta_{22} - c_2^{22}) \partial_{x_2 x_2}^2 u_{0|\Gamma} + \omega^2 (a(\cdot) \partial_{y_1} \gamma_{|\Gamma_0} - c_2^0) u_{0|\Gamma}
 \end{aligned}$$

On pose donc

$$\begin{aligned}
 g_2^0 &= a(\cdot) \partial_{y_1} \gamma_{|\Gamma_0} - c_2^0 \\
 g_2^{11} &= a(\cdot)(w_{1|\Gamma_0} + \partial_{y_1} \theta_{11|\Gamma_0}) \\
 g_2^{12} &= a(\cdot)(w_{2|\Gamma_0} + \partial_{y_1} \theta_{12|\Gamma_0} + \partial_{y_1} \theta_{21|\Gamma_0}) - c_2^{12} \\
 g_2^{22} &= a(\cdot)(\partial_{y_1} \theta_{22|\Gamma_0}) - c_2^{22}
 \end{aligned}$$

et on vérifie, grâce aux expressions des  $c_2^{ij}$  et  $c_2^0$ , que

$$\int_B f_2^{ij} d\mathbf{y} + \langle g_2^{ij}, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 0 \quad \text{et} \quad \langle g_2^0, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 0.$$

Ainsi, les  $\tilde{U}_2^{ij}$  et  $\tilde{U}_2^0$  existent (et sont uniques grâce à la condition de moyenne nulle sur le bord) et tendent respectivement vers les constantes

$$d_2^{ij} = C_{\tilde{U}_2^{ij}} = \int_B f_2^{ij} \mathcal{N} d\mathbf{y} - \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, \tilde{U}_2^{ij} \rangle_{\Gamma_0}$$

et

$$d_2^0 = C_{\tilde{U}_2^0} = - \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \vec{\mathbf{n}}, \tilde{U}_2^0 \rangle_{\Gamma_0}.$$

On obtient finalement notre terme d'ordre 2 :

$$U_2(x_2, \mathbf{y}) = \sum_i (\tilde{U}_1^i(\mathbf{y}) - d_1^i) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) + \sum_{i \leq j} (\tilde{U}_2^{ij}(\mathbf{y}) - d_2^{ij}) \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma}(x_2) + \omega^2 (\tilde{U}_2^0(\mathbf{y}) - d_2^0) u_{0|\Gamma}(x_2)$$

que l'on réécrit

$$U_2(x_2, \mathbf{y}) = \sum_i U_1^i(\mathbf{y}) \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) + \sum_{i \leq j} U_2^{ij}(\mathbf{y}) \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma}(x_2) + \omega^2 U_2^0(\mathbf{y}) u_{0|\Gamma}(x_2).$$

### Condition au bord pour $\hat{u}_2$

Pour terminer, il nous reste à déterminer la condition de bord pour  $\hat{u}_2$ . Regardons l'équation vérifiée par le terme de champ proche d'ordre 3,  $U_3 \in W_{\#}(B)$  :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U_3] = f_3 & \text{dans } B \\ (a(\cdot) \nabla_{\mathbf{y}} U_3 \cdot \vec{\mathbf{n}})(x_2; \cdot) = a(\cdot)[\partial_{x_1} u_2(x_2; \cdot) + \partial_{y_1} u_3(x_2; \cdot)] = g_3(x_2; \cdot) & \text{sur } \Gamma_0 \\ U_3 & y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned}
 f_3 &= \operatorname{div}_{x_2}[a(\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}U_2] + \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{x_2}U_2] + a(\cdot)\partial_{x_2}^2U_1 + \omega^2\rho(\cdot)U_1 \\
 &= \sum_i (a(\cdot)\partial_{x_2}U_1^i + \partial_{x_2}(a(\cdot)U_1^i)\partial_{x_2x_i}^2\hat{u}_{1|\Gamma}) + \sum_{i\leq j} (a(\cdot)\partial_{x_2}U_2^{ij} + \partial_{x_2}(a(\cdot)U_2^{ij})\partial_{x_2x_ix_j}^3u_{0|\Gamma}) \\
 &\quad + \omega^2(a(\cdot)\partial_{x_2}U_2^0 + \partial_{x_2}(a(\cdot)U_2^0)\partial_{x_2}u_{0|\Gamma}) + \sum_i a(\cdot)U_1^i\partial_{x_2x_ix_i}^3u_{0|\Gamma} + \omega^2\sum_i \rho(\cdot)U_1^i\partial_{x_i}u_{0|\Gamma}
 \end{aligned}$$

(on a omis la dépendance en  $x_2$  pour simplifier les notations) et

$$\begin{aligned}
 g_3(x_2; 0) &= a(\cdot) \left[ \sum_{ij} \theta_{ij}(\cdot)\partial_{x_1x_ix_j}^3u_{0|\Gamma}(x_2) + \sum_i w_i(\cdot)\partial_{x_1x_i}^2\hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) + \omega^2\gamma(\cdot)\partial_{x_1}u_{0|\Gamma}(x_2) + \partial_{x_1}\hat{u}_{2|\Gamma}(x_2) \right. \\
 &\quad + \sum_{ijk} \partial_{y_1}\beta_{ijk}(\cdot)\partial_{x_ix_jx_k}^3u_{0|\Gamma}(x_2) + \sum_{ij} \partial_{y_1}\theta_{ij}(\cdot)\partial_{x_ix_j}^2\hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) + \sum_i \partial_{y_1}w_i(\cdot)\partial_{x_i}\hat{u}_{2|\Gamma}(x_2) \\
 &\quad \left. + \omega^2\partial_{y_1}\gamma(\cdot)\hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) + \omega^2\sum_i \partial_{y_1}\alpha_i(\cdot)\partial_{x_i}u_{0|\Gamma}(x_2) \right]
 \end{aligned}$$

où encore une fois  $x_2$  est vu comme un paramètre.

Il y a existence de  $U_3$  seulement si  $\int_B f_3 d\mathbf{y} + \langle g_3, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 0$ . Avec des calculs similaires à ceux effectués précédemment, on trouve que  $U_3$  existe seulement si  $\hat{u}_2$  satisfait la condition

$$A^*\nabla\hat{u}_2 \cdot \vec{\mathbf{n}}_{|\Gamma} = \sum_{i\leq j} c_2^{ij}\partial_{x_ix_j}^2\hat{u}_{1|\Gamma} + \omega^2c_2^0\hat{u}_{1|\Gamma}(x_2) + \sum_{i\leq j\leq k} c_3^{ijk}\partial_{x_ix_jx_k}^3u_{0|\Gamma}(x_2) + \omega^2\sum_i c_3^i\partial_{x_i}u_{0|\Gamma}(x_2)$$

où

$$\begin{aligned}
 c_3^i &:= \int_B \delta_{2i}a(\mathbf{y})\partial_{y_2}U_2^0(\mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y})U_1^i(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \langle a(\delta_{1i}\gamma + \partial_{y_1}\alpha_i), 1 \rangle_{\Gamma_0}, \\
 c_3^{111} &:= \langle a(\theta_{11} + \partial_{y_1}\beta_{111}), 1 \rangle_{\Gamma_0}, \\
 c_3^{112} &:= \int_B a(\mathbf{y})\partial_{y_2}U_2^{11}(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \langle a(\theta_{12} + \theta_{21} + \partial_{y_1}(\beta_{112} + \beta_{121}) + \beta_{211}), 1 \rangle_{\Gamma_0}, \\
 c_3^{122} &:= \int_B a(\mathbf{y})\partial_{y_2}U_2^{12}(\mathbf{y}) + a(\mathbf{y})U_1^1d\mathbf{y} + \langle a(\theta_{22} + \partial_{y_1}(\beta_{122} + \beta_{212}) + \beta_{221}), 1 \rangle_{\Gamma_0}, \\
 c_3^{222} &:= \int_B a(\mathbf{y})\partial_{y_2}U_2^{22}(\mathbf{y}) + a(\mathbf{y})U_1^2d\mathbf{y} + \langle a\partial_{y_1}\beta_{222}, 1 \rangle_{\Gamma_0}.
 \end{aligned}$$

On en déduit que  $\hat{u}_2$  est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 -\operatorname{div}[A^*\nabla\hat{u}_2] - \omega^2\rho^*\hat{u}_2 &= \sum_{ijkl} d_{ijkl}^*\partial_{x_ix_jx_kx_l}^4u_0 + \omega^2\sum_{ij} e_{ij}^*\partial_{x_ix_j}^2u_0 + \omega^4h^*u_0 & \text{dans } \Omega \\
 A^*\nabla\hat{u}_2 \cdot \vec{\mathbf{n}} &= \sum_{i\leq j} c_2^{ij}\partial_{x_ix_j}^2\hat{u}_{1|\Gamma} + \omega^2c_2^0\hat{u}_{1|\Gamma} + \sum_{i\leq j\leq k} c_3^{ijk}\partial_{x_ix_jx_k}^3u_{0|\Gamma} \\
 &\quad + \omega^2\sum_i c_3^i\partial_{x_i}u_{0|\Gamma} & \text{sur } \Gamma
 \end{array} \right.$$

### 3.1.4 Formalisme pour un développement à tout ordre

**Théorème 3.5.** Soit  $n \geq 1$ . Il existe une unique solution de (3.4) qui tend vers 0 à l'infini seulement si

$$A^* \nabla \hat{u}_{n-1} \cdot \bar{\mathbf{n}}|_{\Gamma} = \delta_{n,1} g + \sum_{k=0}^{n-2} [c_{n-k}(\partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k]|_{\Gamma} \quad (3.12)$$

et  $U_n$  est donné par

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^2, U_n(x_2; \mathbf{y}) = \sum_{p=0}^{n-1} [\Upsilon_{n-p}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_p]|_{\Gamma}(x_2)$$

où on définit pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$   $\Upsilon_p(\cdot; \boldsymbol{\eta})$  qui dépend de  $\boldsymbol{\eta}$  de manière polynomiale, de degré  $p$  et pour tout  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^2$ ,  $\Upsilon_n(\cdot; \boldsymbol{\eta})$  est l'unique solution dans  $W_{\#}(B)$  qui tend vers 0 à l'infini du problème défini par récurrence

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \Upsilon_p(\cdot; \boldsymbol{\eta})] = F_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) & \text{dans } B \\ a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \Upsilon_p \cdot \bar{\mathbf{n}} = G_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) - c_p(\boldsymbol{\eta}) & \text{sur } \Gamma_0 \\ \Upsilon_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) & y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (3.13)$$

(avec  $\Upsilon_0 = \Upsilon_{-1} = 0$ ) où

$$F_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) = \eta_2 (a(\cdot) \partial_{y_2} + \partial_{y_2} a(\cdot)) \Upsilon_{p-1}(\cdot; \boldsymbol{\eta}) + (a(\cdot) \eta_2^2 + \omega^2 \rho(\cdot)) \Upsilon_{p-2}(\cdot; \boldsymbol{\eta}),$$

$$G_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) = a(\cdot) \Theta_{p-1|_{\Gamma_0}} \eta_1 + a(\cdot) \partial_{y_1} \Theta_{p|_{\Gamma_0}}$$

où  $\Theta_p$  est donné dans le théorème 1.9, et  $c_p(\boldsymbol{\eta})$  est un polynôme en  $\boldsymbol{\eta}$  de degré  $p$  défini par

$$c_p(\boldsymbol{\eta}) = \int_B F_p(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) d\mathbf{y} + \langle G_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}), 1 \rangle_{\Gamma_0}. \quad (3.14)$$

De plus, on montre que

$$u_0 \in H^{n+1}(\Omega) \implies \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \hat{u}_k \in H^{n+1-k}(\Omega).$$

Les premiers coefficients  $c_n$  valent :

- $c_1(\boldsymbol{\eta}) = a_{11}^* \eta_1 + a_{12}^* \eta_2$ ,
- $c_2(\boldsymbol{\eta}) = c_2^{12} \eta_1 \eta_2 + c_2^{22} \eta_2^2 + \omega^2 c_2^0$ ,
- $c_3(\boldsymbol{\eta}) = c_3^{111} \eta_1^3 + c_3^{112} \eta_1^2 \eta_2 + c_3^{122} \eta_1 \eta_2^2 + c_3^{222} \eta_2^3 + \omega^2 (c_3^1 \eta_1 + c_3^2 \eta_2)$ .

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence sur  $p$ . Pour  $p = 1$ , on a que  $U_1$  s'écrit

$$U_1(x_2; \mathbf{y}) = \sum_i U_1^i(\mathbf{y}) \partial_{x_i} u_0|_{\Gamma}(x_2)$$

où  $U_1^i$  satisfait

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U_1^i] = 0 & \text{dans } B \\ a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U_1^i \cdot \bar{\mathbf{n}} = a(\mathbf{y}) (\delta_{1i} + \partial_{y_1} w_i) - a_{1i}^* & \text{sur } \Gamma_0 \\ U_1^i & y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

Donc en posant

$$\Upsilon_1(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) = U_1^1(\mathbf{y}) \eta_1 + U_1^2(\mathbf{y}) \eta_2,$$

(on constate que  $\Upsilon_1$  est bien de degré 1),  $F_1(\cdot; \boldsymbol{\eta}) = 0$  et  $G_1(\cdot; \boldsymbol{\eta}) = a(\cdot)\eta_1 + a(\cdot)\partial_{y_1}(w_{1|\Gamma_0}\eta_1 + w_{2|\Gamma_0}\eta_2)$ , on obtient que  $c_1(\boldsymbol{\eta}) = a_{11}^*\eta_1 + a_{12}^*\eta_2$  (de degré 1 en  $\boldsymbol{\eta}$ ) et on a bien, par linéarité, que  $\Upsilon_1$  satisfait (3.13) et que  $U_1(x_2; \mathbf{y}) = \Upsilon_1(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}})u_{0|\Gamma}(x_2)$ .

On suppose à présent la propriété vraie pour tout  $1 \leq k \leq p-1$ . L'équation volumique satisfaite par  $U_p$  peut se réécrire

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_p] &= \operatorname{div}_{x_2}a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_{p-1} + \operatorname{div}_{\mathbf{y}}a(\mathbf{y})\nabla_{x_2}U_{p-1} + a(\mathbf{y})\partial_{x_2}^2U_{p-2} + \omega^2\rho(\mathbf{y})U_{p-2} \\ &= \sum_{k=0}^{p-2} (a(\mathbf{y})\partial_{y_2}\Upsilon_{p-1-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) + \partial_{y_2}(a(\mathbf{y})\Upsilon_{p-1-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}})))\partial_{x_2}\hat{u}_{k|\Gamma}(x_2) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{p-3} a(\mathbf{y})\Upsilon_{p-2-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}})\partial_{x_2}^2\hat{u}_{k|\Gamma}(x_2) + \omega^2\rho(\mathbf{y})\Upsilon_{p-2-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_{k|\Gamma}(x_2) \\ &= \sum_{k=0}^{p-2} [F_{p-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_k]_{|\Gamma} = \sum_{k=0}^{p-1} [F_{p-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_k]_{|\Gamma} \end{aligned}$$

car  $F_1 \equiv 0$ . La condition au bord satisfaite par  $U_p$  se décompose sous la forme

$$\begin{aligned} a(\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}U_p \cdot \vec{\mathbf{n}}_{|\Gamma_0} &= a(\cdot)\partial_{x_1}u_{p-1|\Gamma} + a(\cdot)\partial_{y_1}u_{p|\Gamma} \\ &= a(\cdot)\sum_{k=0}^{p-1} \Theta_{p-1-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}})_{|\Gamma_0}\partial_{x_1}\hat{u}_{k|\Gamma} + a(\cdot)\sum_{k=0}^p \partial_{y_1}\Theta_{p-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}})_{|\Gamma_0}\hat{u}_{k|\Gamma} \\ &= a(\cdot)\sum_{k=0}^{p-1} (\Theta p - 1 - k(\cdot; \partial_{\mathbf{x}})_{|\Gamma_0}\partial_{x_1} + \partial_{y_1}\Theta p - k(\cdot; \partial_{\mathbf{x}})_{|\Gamma_0})\hat{u}_{k|\Gamma} \\ &= a(\cdot)\sum_{k=0}^{p-1} [G_{p-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_k]_{|\Gamma} \end{aligned}$$

Ainsi, l'existence de  $U_p$  impose que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \left( \int_B F_{p-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}})d\mathbf{y} + \langle G_{p-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}}), 1 \rangle_{\Gamma_0} \right) \hat{u}_{k|\Gamma} &= 0 \\ \iff \sum_{k=0}^{p-1} [c_{p-k}(\partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_k]_{|\Gamma} &= 0 \\ \iff \sum_{k=0}^{p-2} [c_{p-k}(\partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_k + c_1(\partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_{p-1}]_{|\Gamma} &= 0 \\ \iff \sum_{k=0}^{p-2} [c_{p-k}(\partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_k]_{|\Gamma} - A^*\nabla_{\mathbf{y}}\hat{u}_{p-1} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{|\Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\hat{u}_{p-1}$  satisfait la condition sur  $\Gamma$

$$A^*\nabla_{\mathbf{y}}\hat{u}_{p-1} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{|\Gamma} = \sum_{k=0}^{p-2} [c_{p-k}(\partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_k]_{|\Gamma}.$$

Par la suite, on peut réécrire la condition satisfaite par  $U_p$  sur  $\Gamma_0$  se réécrit

$$a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_p \cdot \vec{\mathbf{n}}_{|\Gamma_0} = \sum_{k=0}^{p-1} [G_{p-k}(y_2; \partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_k]_{|\Gamma} - \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} [c_{p-k}(\partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_k]_{|\Gamma}}_{=0} = \sum_{k=0}^{p-1} [(G_{p-k}(y_2; \partial_{\mathbf{x}}) - c_p(\partial_{\mathbf{x}}))\hat{u}_k]_{|\Gamma}.$$

Ainsi, si  $\tilde{\Upsilon}_p$  est l'unique solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\Upsilon}_p] &= F_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) \quad \text{dans } B \\ a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\Upsilon}_p \cdot \vec{\mathbf{n}} &= G_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) - c_p(\boldsymbol{\eta}) \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \int_{\Gamma_0} \tilde{\Upsilon}_p dy_2 &= 0 \\ \tilde{\Upsilon}_p & \text{y}_2\text{-périodique} \end{array} \right.$$

en posant

$$\tilde{c}_p(\boldsymbol{\eta}) = \int_B F_p(\boldsymbol{\eta}) \mathcal{N} d\mathbf{y} - \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\Upsilon}_p \rangle_{\Gamma_0},$$

alors  $\Upsilon_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) = \tilde{\Upsilon}_p(\cdot; \boldsymbol{\eta}) - \tilde{c}_p(\boldsymbol{\eta})$  satisfait le problème (3.13), tend vers 0 quand  $y_1$  tend vers  $+\infty$  et on a, par linéarité du problème (3.4),

$$U_p = \sum_{k=0}^p [\Upsilon_{p-k}(\cdot; \partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k]_{|\Gamma}.$$

Par hypothèse de récurrence,  $\Upsilon_{p-1}$  et  $\Upsilon_{p-2}$  sont des polynômes en  $\boldsymbol{\eta}$  de degré respectif  $p-1$  et  $p-2$ . Par définition, on en déduit que  $F_p(\boldsymbol{\eta})$  est un polynôme de degré  $p$ . De plus, d'après le théorème 1.9,  $\Theta_{p-1}$  et  $\Theta_p$  sont des polynômes en  $\boldsymbol{\eta}$  de degré respectif  $p-1$  et  $p$ . On en déduit par définition que  $G_p$  est un polynôme de degré  $p$ . Finalement, on en déduit que  $c_p(\boldsymbol{\eta})$  est un polynôme de degré  $p$ . Alors on en déduit que  $\tilde{\Upsilon}_p$  est de degré  $p$  et donc que  $\tilde{c}_p(\boldsymbol{\eta})$  est de degré  $p$  et finalement que  $\Upsilon_p$  est de degré  $p$ .

Il nous reste à montrer le résultat de régularité sur les termes macroscopiques. On suppose que  $u_0 \in H^{n+1}(\Omega)$ . Pour  $p=1$ , on a que  $\hat{u}_1$  vérifie le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_1] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ A^* \nabla \hat{u}_1 \cdot \tilde{\mathbf{n}} = c_2^{12} \partial_{x_1 x_2}^2 u_{0|\Gamma} + c_2^{22} \partial_{x_2}^2 u_{0|\Gamma} + \omega^2 c_2^0 u_{0|\Gamma} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Comme  $u_0 \in H^{n+1}(\Omega)$ , on a que  $\partial_{x_1 x_2}^2 u_{0|\Gamma}$  et  $\partial_{x_2}^2 u_{0|\Gamma}$  sont dans  $H^{n-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ . Cela nous donne que  $A^* \nabla \hat{u}_1 \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{|\Gamma} \in H^{n-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ . Cela nous permet de conclure que  $\hat{u}_1 \in H^n(\Omega)$ . Par la suite, on suppose que pour tout  $1 \leq k \leq p-1$ ,  $\hat{u}_k \in H^{n+1-k}(\Omega)$ . On veut montrer que  $\hat{u}_p \in H^{n+1-p}(\Omega)$ . En utilisant le théorème 1.9, on a que  $\hat{u}_p$  vérifie le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[A^* \nabla \hat{u}_p] - \omega^2 \rho^* \hat{u}_p = -\sum_{k=0}^{p-1} m_{p+1-k}(\partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k & \text{dans } \Omega \\ A^* \nabla \hat{u}_p \cdot \tilde{\mathbf{n}} = \sum_{k=0}^{p-1} [c_{p+1-k}(\partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k]_{|\Gamma} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Du fait que pour tout  $1 \leq k \leq p-1$ ,  $\hat{u}_k \in H^{n+1-k}(\Omega)$  et que les  $c_k(\boldsymbol{\eta})$  sont des polynômes de degré  $k$ , on en déduit que  $A^* \nabla \hat{u}_p \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{|\Gamma} = \sum_{k=0}^{p-1} [c_{p+1-k}(\partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k]_{|\Gamma} \in H^{n-p-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . De plus, les  $m_k(\boldsymbol{\eta})$  étant de degré  $k+1$  (voir le théorème 1.9), on a que  $\sum_{k=0}^{p-1} m_{p+1-k}(\partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_k \in H^{n-1+p}(\Omega)$ . Par conséquent, on obtient que  $\hat{u}_p \in H^{n+1-p}(\Omega)$ .  $\square$

**Remarque 3.6.** On peut voir ici que dans la condition au bord pour  $\hat{u}_{n-1}$  apparaît le terme  $c_n$  (quand  $k=0$ ) faisant intervenir le terme source et la condition au bord du terme de champ proche d'ordre  $n$ . Autrement dit, contrairement au cas des conditions de Dirichlet, pour déterminer la condition au bord pour le terme homogénéisé d'ordre  $n-1$ , nous devons étudier le terme de champ proche d'ordre  $n$ .

Tout comme dans le chapitre précédent, les  $\Upsilon_n$  sont des polynômes que nous écrivons

$$\forall \mathbf{y} \in B, \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^2, \Upsilon_n(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) = \sum_{|\alpha| \leq n} \Upsilon_n^\alpha(\mathbf{y}) \boldsymbol{\eta}^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}^2.$$

## 3.2 Estimations d'erreur

**Théorème 3.7.** Soit  $(u_\varepsilon)$  la famille des solutions de (1.2). Soit  $n \in \mathbb{N}$  et les familles  $(u_k)_{k \leq n+1}$  et  $(U_k)_{k \leq n+1}$  définies respectivement par (1.33) et (2.9). On suppose  $(\mathcal{H}_{n+2}) : f \in H^n(\Omega)$  et que  $a$  et  $\rho$  sont suffisamment réguliers pour que pour tout  $k \leq n+1$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^2$  tel que  $|\alpha| \leq k$ ,  $\Theta_k^\alpha \in W^{1,\infty}(Y)$  et  $\Upsilon_k^\alpha \in W^{1,\infty}(B)$ . On a alors

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left[ u_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + U_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right] \right\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^n).$$

*Démonstration.* La démonstration est très semblable à celle du théorème 1.10. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Dans un premier temps, nous allons montrer que

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k \left[ u_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + U_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right] \right\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^n)$$

où on a rajouté les termes d'ordre  $n+1$ , ce qui nous permettra ensuite de montrer le résultat attendu. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on pose

$$e_\varepsilon^{n+1}(\mathbf{x}) = u_\varepsilon(\mathbf{x}) - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k u_k \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k U_k \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right).$$

On va montrer que  $L_\varepsilon e_\varepsilon^{n+1} = r_\varepsilon$  avec  $\|r_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^n)$ . Ainsi, par le théorème de Lax-Milgram, on aura que

$$\|e_\varepsilon^{n+1}\|_{H^1(\Omega)} \leq K\varepsilon^n.$$

On a

$$\begin{aligned} L_\varepsilon e_\varepsilon^{n+1} &= -\operatorname{div} \left[ a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla e_\varepsilon^{n+1} \right] - \omega^2 \rho \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) e_\varepsilon^{n+1} \\ &= f - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k L_\varepsilon u_k - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k L_\varepsilon U_k \end{aligned}$$

On a encore

$$\sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k L_\varepsilon u_k = f + \varepsilon^{n+1} ((\operatorname{div} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}})(a(\cdot) \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+2}) + L_2 u_{n+1}).$$

et de la même manière

$$\sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k L_\varepsilon U_k = \varepsilon^{n+1} ((\operatorname{div} - \operatorname{div}_{x_2})(a(\cdot) \nabla_{\mathbf{y}} U_{n+2}) + \tilde{L}_2 U_{n+1}).$$

On en conclut que

$$L_\varepsilon e_\varepsilon^{n+1} = r_\varepsilon$$

où

$$r_\varepsilon = -\varepsilon^{n+1} ((\operatorname{div} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}})[a(\cdot) \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+2}] + L_2 u_{n+1}) + (\operatorname{div} - \operatorname{div}_{x_2})[a(\cdot) \nabla_{\mathbf{y}} U_{n+2}] + \tilde{L}_2 U_{n+1}. \quad (3.15)$$

Montrons que pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ ,

$$(r_\varepsilon, v) \leq K\varepsilon^n \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Soit  $v \in H^1(\Omega)$ . On a

$$\begin{aligned}
 |(r_\varepsilon, v)| &\leq \varepsilon^{n+1} \left| \int_{\Omega} \left[ (\operatorname{div} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}})[a(\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}u_{n+2}] \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + L_2u_{n+1} \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\operatorname{div} - \operatorname{div}_{x_2})[a(\cdot)\nabla_{\mathbf{y}}U_{n+2}] \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \mathcal{L}_2U_{n+1} \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| \\
 &\leq \varepsilon^{n+1} \left| - \int_{\Omega} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{y}}u_{n+2} \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{y}}u_{n+2} \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}\bar{v}(\mathbf{x})dx_2 \right. \\
 &\quad - \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{y}}u_{n+2} \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\Omega} L_2u_{n+1} \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\
 &\quad - \int_{\Omega} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{y}}U_{n+2} \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{y}}U_{n+2} \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}\bar{v}(\mathbf{x})dx_2 \\
 &\quad \left. - \int_{\Omega} \operatorname{div}_{x_2} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{y}}U_{n+2} \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{L}_2U_{n+1} \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right|
 \end{aligned}$$

Or on a

$$a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}U_{n+2} \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_0} + a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}u_{n+2} \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_0} + a(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{x}}u_{n+1} \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_0} = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{y}}U_{n+2} \left( x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}\bar{v}(\mathbf{x})dx_2 + \int_{\Gamma} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{y}}u_{n+2} \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}\bar{v}(\mathbf{x})dx_2 \\
 &= - \int_{\Gamma} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{x}}u_{n+1} \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}\bar{v}(\mathbf{x})dx_2 \\
 &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}[a(\cdot)\nabla_{\mathbf{x}}u_{n+1}] \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{\Omega} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{x}}u_{n+1} \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\
 &= - \int_{\Omega} (\operatorname{div}_{\mathbf{x}} + \varepsilon^{-1}\operatorname{div}_{\mathbf{y}})[a(\cdot)\nabla_{\mathbf{x}}u_{n+1}] \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{\Omega} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{x}}u_{n+1} \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\
 &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\cdot)\nabla_{\mathbf{x}}u_{n+1}] \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\cdot)\nabla_{\mathbf{x}}u_{n+1}] \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\
 &\quad - \int_{\Omega} a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla_{\mathbf{x}}u_{n+1} \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 |(r_\varepsilon, v)| &\leq \Lambda\varepsilon^{n+1} \left[ \|\nabla_{\mathbf{y}}u_{n+2}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\operatorname{div}_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}}u_{n+2}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
 &\quad \left. + \|\Delta_{\mathbf{x}}u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + |\omega^2| \|u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right] \\
 &\quad + \varepsilon^{n+1} \Lambda \left[ \|\nabla_{\mathbf{y}}U_{n+2}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\operatorname{div}_{x_2}\nabla_{\mathbf{y}}U_{n+2}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
 &\quad \left. + \|\partial_{x_2}^2 U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + |\omega^2| \|U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right] \\
 &\quad + \varepsilon^{n+1} \Lambda \left[ \|\Delta_{\mathbf{x}}u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\mathbf{x}}u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} \right] \\
 &\quad + \varepsilon^n \left| \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\cdot)\nabla_{\mathbf{x}}u_{n+1}] \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \bar{v}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right|
 \end{aligned}$$

De même que dans la démonstration du théorème 1.10, en utilisant la décomposition de  $u_n$  (1.33) :

$$u_n(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^n \Theta_{n-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}})\hat{u}_k(\mathbf{x}),$$

on a

$$\begin{aligned}
 \Lambda\varepsilon^{n+1} \left[ \|\nabla_{\mathbf{y}}u_{n+2}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\operatorname{div}_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}}u_{n+2}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
 \left. + \|\nabla_{\mathbf{x}}u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} + |\omega^2| \|u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right] \leq K\varepsilon^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque  $\Theta_n(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) = \sum_{|\alpha| \leq n} \Theta_n^\alpha(\mathbf{y}) \partial_{\mathbf{x}}^\alpha$ , on peut également montrer que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a(\cdot) \nabla_{\mathbf{x}} u_{n+1}] \left( \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \bar{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_i \int_{\Omega} |\partial_{y_i} (a(\cdot) \Theta_{n+1-k})(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) \partial_{x_i} \hat{u}_k(\mathbf{x}) \bar{v}(\mathbf{x})| d\mathbf{x}, \\ &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \sum_i \int_{\Omega} |\partial_{y_i} (a(\cdot) \Theta_{n+1-k}^\alpha) \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_{x_i} \hat{u}_k(\mathbf{x}) \bar{v}(\mathbf{x})| d\mathbf{x}, \\ &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \sum_i \underbrace{\|\partial_{y_i} (a(\cdot) \Theta_{n+1-k}^\alpha)\|_{L^\infty(Y)}}_{< +\infty} \|\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \partial_{x_i} \hat{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Enfin on a

$$U_n(x_2; \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{n-1} \Upsilon_{n-k}(\mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}) \hat{u}_{k|\Gamma}(x_2).$$

Or,  $\Upsilon_k(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta})$  est polynomiale par rapport à  $\boldsymbol{\eta}$ . On l'écrit alors sous la forme  $\Upsilon_k(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \Upsilon_k^\alpha(\mathbf{y}) \boldsymbol{\eta}^\alpha$  où  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$  est un multi-indice,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ . Ainsi,

$$U_n(x_2; \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq n-k} \Upsilon_{n-k}^\alpha(\mathbf{y}) \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_{k|\Gamma}(x_2),$$

où  $\partial_{\mathbf{x}}^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2}$ . De plus, par la proposition (2.3), il existe  $\gamma > 0$  tel que, pour tout  $k \geq 0$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^2$  tel que  $|\alpha| \leq k$ ,

$$e^{\gamma y_1} \Upsilon_k^\alpha \in W^{1,\infty}(B).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\mathbf{y}} U_{n+2}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+2-k} \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbf{y}} \Upsilon_{n+2-k}^\alpha \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) e^{\frac{\gamma x_1}{\varepsilon}}|^2 |e^{-\frac{\gamma x_1}{\varepsilon}} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_{k|\Gamma}(x_2)|^2 dx \\ &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+2-k} \|\nabla_{\mathbf{y}} \Upsilon_{n+2-k}^\alpha e^{\gamma y_1}\|_{L^\infty(B)^2}^2 \|e^{-\frac{\gamma x_1}{\varepsilon}} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_{k|\Gamma}\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\|\nabla_{\mathbf{y}} U_{n+2}\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+2-k} \underbrace{\|\nabla_{\mathbf{y}} \Upsilon_{n+2-k}^\alpha e^{\gamma y_1}\|_{L^\infty(B)^2}}_{< +\infty \text{ par hyp. sur } a \text{ et } \rho} \|e^{-\gamma x_1} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_{k|\Gamma}\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.16)$$

et de la même manière

$$\|\operatorname{div}_{x_2} \nabla_{\mathbf{y}} U_{n+2}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+2-k} \underbrace{\|\partial_{y_1} \Upsilon_{n+2-k}^\alpha e^{\gamma y_1}\|_{L^\infty(B)}}_{< +\infty} \|e^{-\gamma x_1} \partial_{x_2} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_{k|\Gamma}\|_{L^2(\Omega)}.$$

On a également

$$\|\partial_{x_2}^2 U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \underbrace{\|\Upsilon_{n+1-k}^\alpha e^{\gamma y_1}\|_{L^\infty(B)}}_{< +\infty} \|e^{-\gamma x_1} \partial_{x_2}^2 \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_{k|\Gamma}\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.17)$$

et

$$\|U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{k=0}^{n+1-1} \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \underbrace{\|\Upsilon_{n+1-k}^\alpha e^{\gamma y_1}\|_{L^\infty(B)}}_{< +\infty} \|e^{-\gamma x_1} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \hat{u}_{k|\Gamma}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par hypothèse de régularité sur  $f$ , on a que  $u_0 \in H^{n+2}(\Omega)$  et ainsi par le théorème 3.5, pour tout  $k \leq n$ ,  $\hat{u}_k \in H^{n-k+2}(\Omega)$ . Les normes de ces dérivées qui interviennent dans les inégalités qui précèdent sont donc bornées. On en déduit qu'il existe  $K > 0$  tel que

$$(r_\varepsilon, v) \leq K\varepsilon^n \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc  $\|r_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^n)$ , d'où

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k \left[ u_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + U_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right] \right\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^n).$$

On déduit de ce premier résultat que

$$\begin{aligned} \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left[ u_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + U_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right] \right\|_{H^1(\Omega)} &= \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k [u_k + U_k] - \varepsilon^{n+1} [u_{n+1} + U_{n+1}] \right\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k [u_k + U_k] \right\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon^{n+1} \| [u_{n+1} + U_{n+1}] \|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq K\varepsilon^n + \varepsilon^{n+1} \| u_{n+1} + U_{n+1} \|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Or

$$\|u_{n+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En utilisant la décomposition de  $u_{n+1}$  et celle des  $\Theta_k$ , on obtient que

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \|\Theta_{n+1-k}^\alpha \partial_\alpha \hat{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \underbrace{\|\Theta_{n+1-k}^\alpha\|_{L^\infty(Y)}^2}_{<+\infty \text{ par hyp sur } a \text{ et } \rho} \underbrace{\|\partial_\alpha \hat{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2}_{<+\infty \text{ par hyp sur } f}. \end{aligned}$$

En utilisant la règle de dérivation de fonctions composées (1.5), on a que

$$\|\nabla u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\nabla_{\mathbf{x}} u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varepsilon^{-1} \nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En utilisant la décomposition de  $u_{n+1}$  et celle des  $\Theta_k$ , on obtient que

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\mathbf{x}} u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \|\Theta_{n+1-k}^\alpha \nabla_{\mathbf{x}} \partial_\alpha \hat{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \underbrace{\|\Theta_{n+1-k}^\alpha\|_{L^\infty(Y)}^2}_{<+\infty \text{ par hyp sur } a \text{ et } \rho} \underbrace{\|\nabla_{\mathbf{x}} \partial_\alpha \hat{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2}_{<+\infty \text{ par hyp sur } f} \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\mathbf{y}} u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \|\nabla_{\mathbf{y}} \Theta_{n+1-k}^\alpha \partial_\alpha \hat{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{|\alpha| \leq n+1-k} \underbrace{\|\nabla_{\mathbf{y}} \Theta_{n+1-k}^\alpha\|_{L^\infty(Y)}^2}_{<+\infty \text{ par hyp sur } a \text{ et } \rho} \underbrace{\|\partial_\alpha \hat{u}_k\|_{L^2(\Omega)}^2}_{<+\infty \text{ par hyp sur } f} \end{aligned}$$

donc il existe  $K > 0$  tel que

$$\|u_{n+1}\|_{H^1(\Omega)} \leq K\varepsilon^{-1}.$$

De la même manière, en la méthode des inégalités (3.16) et (3.17), on montre qu'il existe  $K > 0$  tel que

$$\|U_{n+1}\|_{H^1(\Omega)} \leq K\varepsilon^{-1}.$$

On en déduit que

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left[ u_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + U_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right] \right\|_{H^1(\Omega)} \leq K\varepsilon^n + K\varepsilon^{n+1}\varepsilon^{-1} \leq K\varepsilon^n.$$

□

**Corollaire 3.8.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Sous l'hypothèse  $(\mathcal{H}_{n+1})$  du théorème 3.7, on a

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left[ u_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + U_k \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right] \right\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Sous l'hypothèse  $(\mathcal{H}_{n+1})$ , on a par le théorème 3.7 que

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k (u_k + U_k) \right\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (u_k + U_k) \right\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k (u_k + U_k) + \varepsilon^{n+1} (u_{n+1} + U_{n+1}) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k (u_k + U_k) \right\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^{n+1} \|u_{n+1} + U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k (u_k + U_k) \right\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon^{n+1} \|u_{n+1} + U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq K\varepsilon^{n+1} + \varepsilon^{n+1} \|u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^{n+1} \|U_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que dans le théorème précédent, on montre que  $u_{n+1}$  et  $U_{n+1}$  sont bornés en norme  $L^2$  indépendamment de  $\varepsilon$ . On en déduit que

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (u_k + U_k) \right\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

□

### 3.3 Résultats numériques

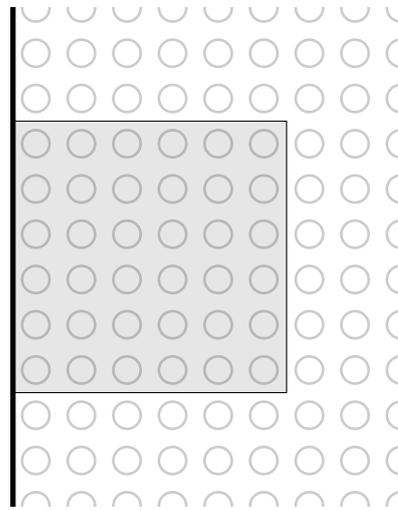
Dans cette section, nous présentons des résultats numériques obtenus avec la librairie éléments finis **XLiFE++**.

Pour réaliser ces calculs numériques, nous utilisons les mêmes méthodes numériques que dans le chapitre précédent (voir 2.5) que nous adaptons pour traiter des problèmes avec condition de Neumann.

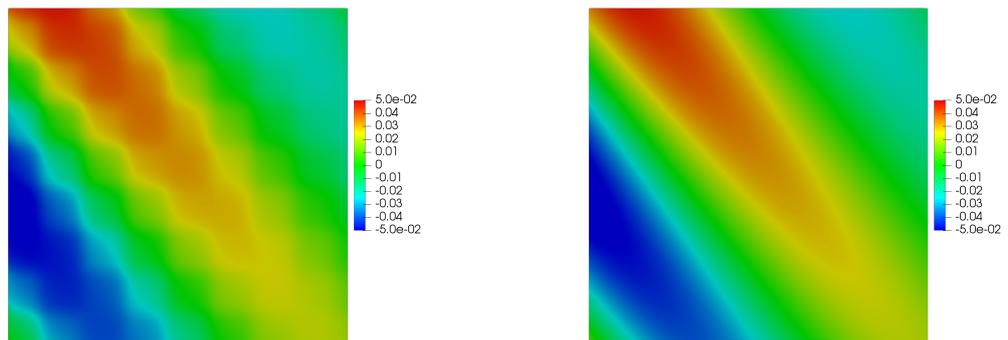
Pour le calcul de la solution exacte et des solutions de problèmes effectifs, nous utilisons à nouveau une transformée de Flochet-Bloch afin de nous ramener à des problèmes posés dans

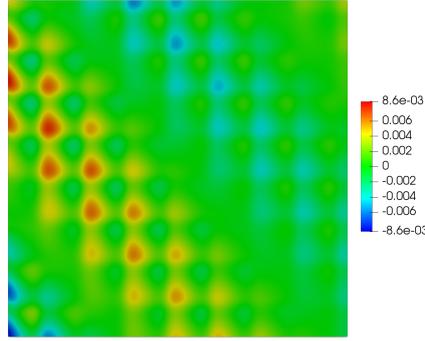
une demi-bande infinie. La méthode de résolution de ces problèmes venant de [79] permet de construire un opérateur DtN. Il s'avère que cet opérateur DtN peut être inversé et son inverse nous permet d'obtenir une condition de Dirichlet à partir d'une condition de Neumann. Pour le calcul des termes de champs proches, nous renvoyons au chapitre 4.

Nous prenons comme fonctions  $a(y_1, y_2) = (2 + \sin(2\pi y_1))(2 + \sin(2\pi y_2)) = \rho(y_1, y_2)$  et nous fixons le paramètre de la forme  $\omega^2 = (k_x + i)^2 + k_y^2$  avec  $k_x = 4.5, k_y = 4$ . Nous prenons également pour terme source  $f = 0$  et pour condition au bord  $g(y_2) = e^{ik_y y_2}$ . Comme précédemment, nous prenons des  $\varepsilon$  de la forme  $\varepsilon = 1/N$  avec  $N \in \mathbb{N}^*$  pour avoir un nombre entier de cellules dans notre domaine de calcul. Nous représentons les solutions dans le domaine  $\Omega = (0, 1)^2$ , l'unique bord « physique » à gauche.

FIGURE 3.1 – Domaine  $\Omega$ 

Sur la figure 3.2, on représente  $u_\varepsilon$  pour  $\varepsilon = 1/8$  et  $u_0$ . Une nouvelle fois, on voit que  $u_0$  représente bien le comportement macroscopique de  $u_\varepsilon$ .

FIGURE 3.2 –  $u_\varepsilon$  (à gauche) et  $u_0$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$


 FIGURE 3.3 –  $u_\varepsilon - u_0$  dans  $\Omega = (0, 1)^2$ 

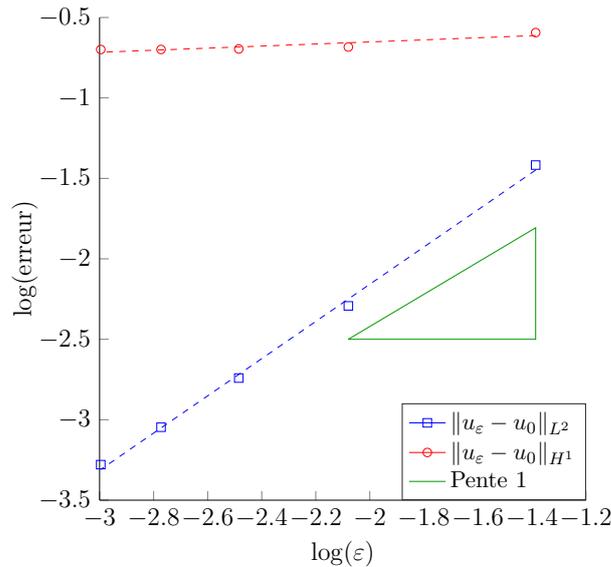
À la différence du problème avec condition de Dirichlet, on observe à l'ordre 0 des oscillations sur le bord de  $\Omega$ . En effet, la condition au bord pour les termes de champs proche s'écrit

$$-\delta_{n,0}g = a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \left[ \partial_{x_1} u_n \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + \partial_{y_1} u_{n+1} \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + \partial_{y_1} U_{n+1} \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right]_{|\Gamma}.$$

On a donc pour  $n = 0$ , comme  $a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{n}}_{|\Gamma} = g$ ,

$$a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \nabla(u_\varepsilon - u_0) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{|\Gamma} = a \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \left[ \partial_{y_1} u_1 \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + \partial_{y_1} U_1 \left( \cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right]_{|\Gamma}.$$

Ainsi, la dérivée normale de  $u_\varepsilon - u_0$  oscille sur le bord, et c'est que nous voyons sur la figure 3.3. Il faut noter qu'il y a deux types d'oscillations : une partie vient de la partie oscillante de  $u_1$ , l'autre correspond au phénomène de couches limites que nous corrigerons avec  $U_1$ . Les courbes de convergence de la figure 3.4 illustrent que  $u_\varepsilon - u_0$  converge en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  en norme  $L^2$  et en  $\mathcal{O}(1)$  en norme  $H^1$ .


 FIGURE 3.4 – Erreur  $u_\varepsilon - u_0$  en norme  $L^2$  et  $H^1$  en échelle logarithmique

La figure 3.5 représente côte à côte les différences  $u_\varepsilon - u_0$  et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc})$  pour  $\varepsilon = 1/8$  à la même échelle. On constate que les oscillations dans le domaine ainsi qu'une partie des oscillations sur le bord sont corrigées par la partie oscillante  $u_1^{osc}$ .

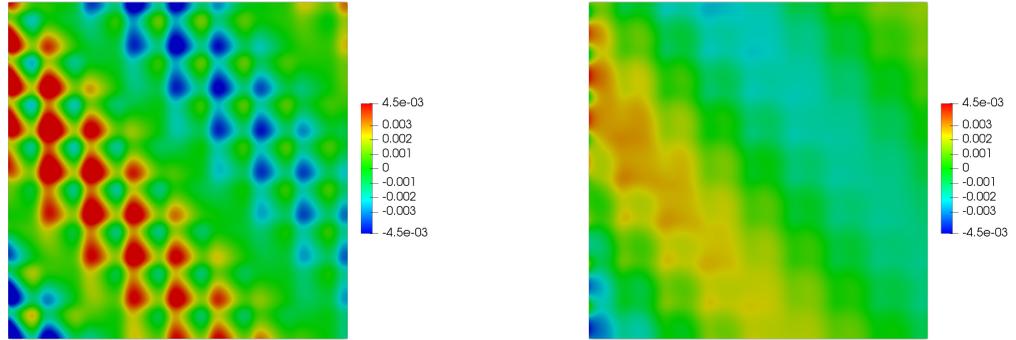


FIGURE 3.5 –  $u_\varepsilon - u_0$  (à gauche) et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc})$  (à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$

Sur la figure 3.6, nous représentons  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc})$ ,  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)$  et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon U_1)$  à la même échelle, différente de celle de la figure 2.7. L'ajout de  $\hat{u}_1$  au développement permet de prendre en compte le comportement macroscopique que nous avons observé au-dessus. Puis, l'ajout de  $U_1$  permet de corriger une partie des oscillations sur le bord.

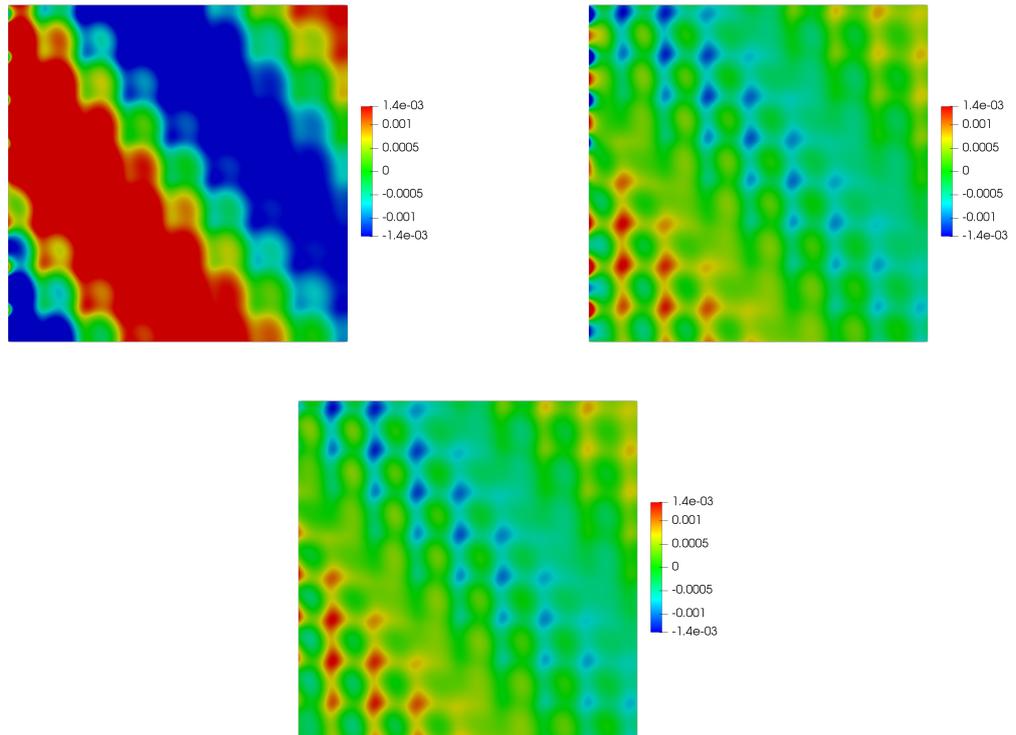


FIGURE 3.6 –  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc})$  (à gauche),  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)$  (à droite) et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon U_1)$  (au centre) dans  $\Omega = (0, 1)^2$

La figure 3.7 représente les courbes de convergence de  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1^{osc})$ ,  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)$  et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon U_1)$  en fonction de  $\varepsilon$  en norme  $L^2$  et en norme  $H^1$ . On observe qu'il est nécessaire d'ajouter  $\hat{u}_1$  et  $U_1$  au développement pour obtenir une vitesse de convergence en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  en norme  $L^2$  et en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  en norme  $H^1$ .

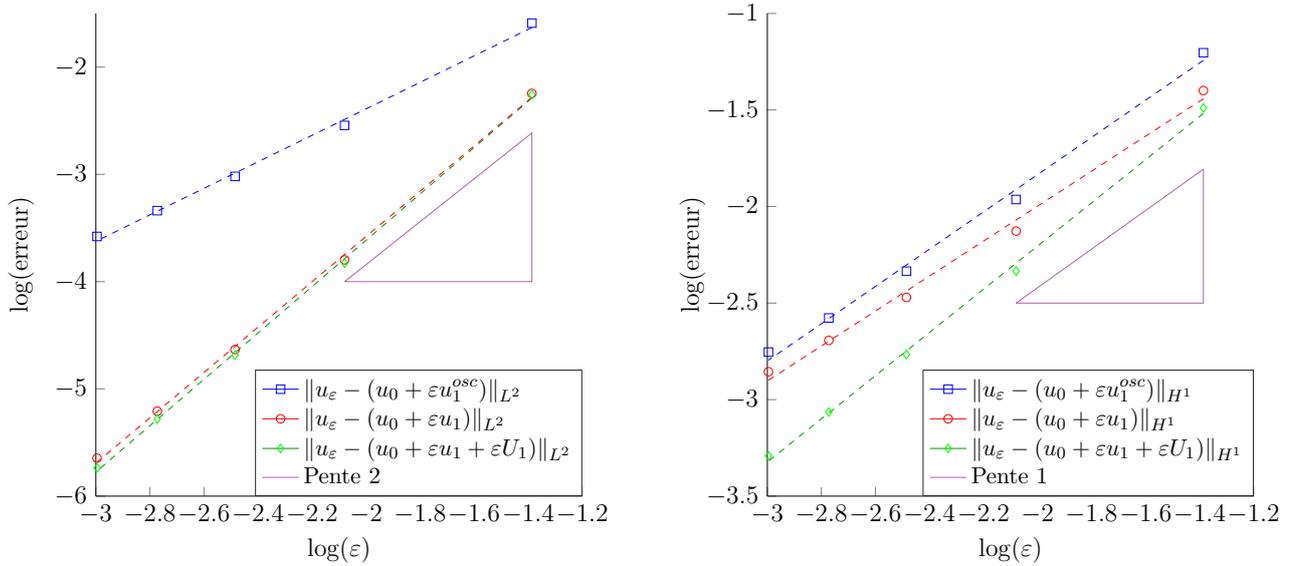


FIGURE 3.7 – Erreurs  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1^{osc})$ ,  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1)$  et  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1)$  en norme  $L^2$  (à gauche) et  $H^1$  (à droite) en échelle logarithmique

Nous arrivons maintenant au développement à l'ordre 2. La figure 3.8 représente les différences  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1)$ ,  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 u_2^{osc})$ ,  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 u_2)$  et  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^2 U_2)$  à la même échelle, différente de celle de la figure 2.8. On constate une nouvelle fois que  $u_2^{osc}$  permet de corriger les oscillations dans le volume mais on observe encore un comportement macroscopique que l'on corrige grâce à  $\hat{u}_2$ . L'ajout de  $U_2$  est censé corriger les oscillations sur le bord. Malheureusement, nous ne sommes pas parvenus à corriger pleinement ces oscillations. Il est possible que ce soit un bug ou un problème d'approximation numérique.

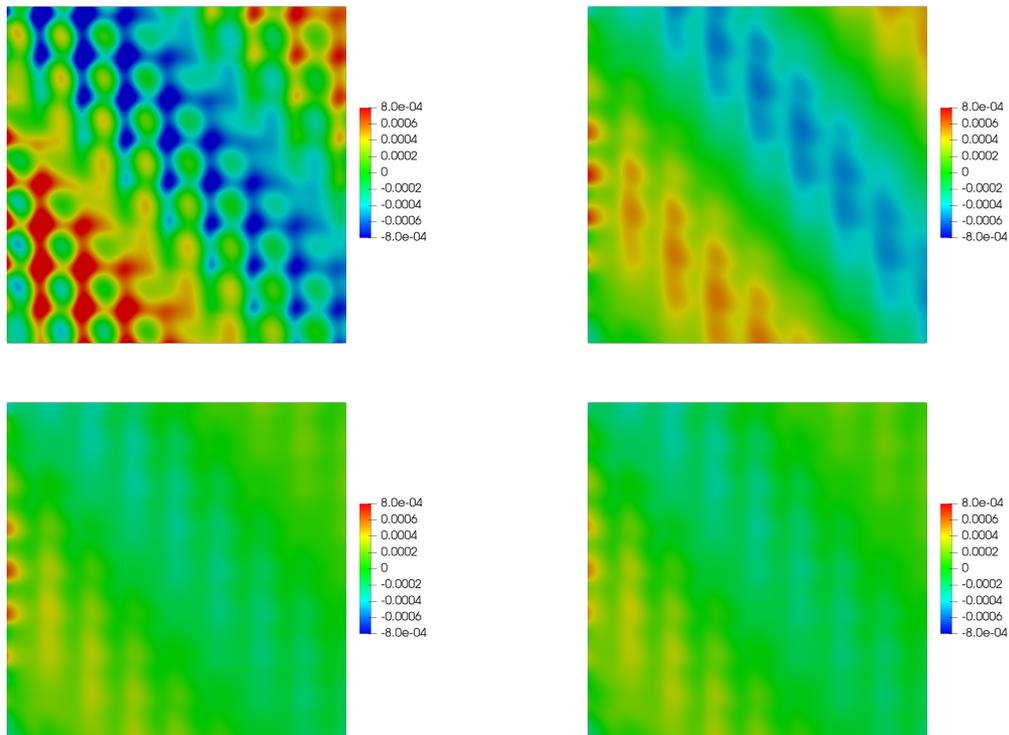


FIGURE 3.8 –  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1)$  (en haut à gauche),  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 u_2^{osc})$  (en haut à droite),  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 u_2)$  (en bas à gauche) et  $u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^2 U_2)$  (en bas à droite) dans  $\Omega = (0, 1)^2$

Notre soucis dans le calcul des termes d'ordre 2 se manifeste également dans les courbes de convergences de la figure 3.9 : nous obtenons bien une convergence en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  en norme  $H^1$  pour  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^2 U_2)$  mais pas une convergence en  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$  en norme  $L^2$  comme nous l'espérons.

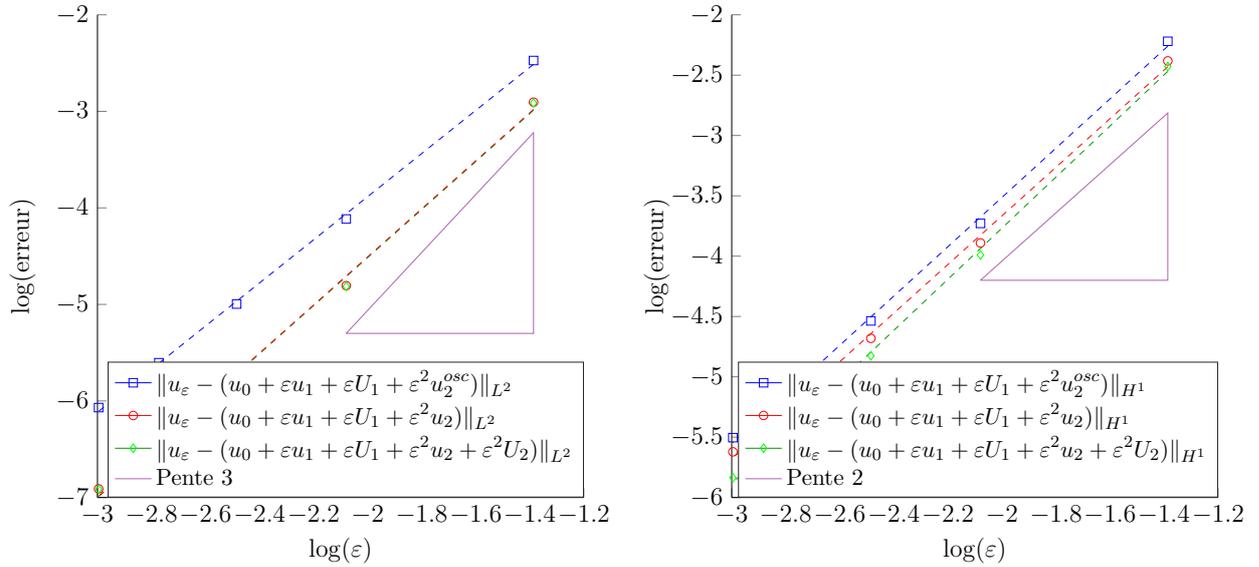


FIGURE 3.9 – Erreurs  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 u_2^{osc})$ ,  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 u_2)$  et  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^2 U_2)$  en norme  $L^2$  (à gauche) et  $H^1$  (à droite) en échelle logarithmique



# Résolution de problèmes posés dans des demi-bandes périodiques

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Problème sans terme source et avec condition de Dirichlet . . . . .</b>	<b>99</b>
<b>4.2</b>	<b>Problème avec terme source et condition de Dirichlet homogène .</b>	<b>107</b>
<b>4.3</b>	<b>Problème sans terme source et avec condition de Neumann . . . . .</b>	<b>112</b>
4.3.1	Développement de la méthode . . . . .	113
4.3.2	Alternative utilisant l'opérateur Dirichlet-to-Neumann . . . . .	117
<b>4.4</b>	<b>Résolutions et applications numériques . . . . .</b>	<b>118</b>
4.4.1	Calcul des opérateurs de propagation . . . . .	118
4.4.2	Calcul des conditions au bord . . . . .	120

Dans ce chapitre, nous expliquons la méthode de résolution de problèmes posés dans des demi-bandes périodiques avec conditions de Dirichlet ou de Neumann. Il s'agit d'une extension de la méthode développée pour des équations Helmholtz dans [67, 68, 79] à des problèmes de type Laplace. C'est une extension car cette méthode a été développée et justifiée pour l'équation de Helmholtz sauf pour une quantité dénombrable de fréquences correspondant aux fréquences de coupure du problème (voir [67, 68, 79] pour une définition précise). Le problème de Laplace étudié ici correspond au problème de Helmholtz à la fréquence  $\omega = 0$  qui est justement une fréquence de coupure du problème. Ce travail est donc bien une extension et non une application.

## 4.1 Problème sans terme source et avec condition de Dirichlet

On considère une demi-bande  $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in B = \mathbb{R}^+ \times (0, 1)$  et on note ses bords  $\Gamma_0 = \{0\} \times (0, 1)$ ,  $\Sigma_0 = \mathbb{R}^+ \times \{0\}$  et  $\Sigma_1 = \mathbb{R}^+ \times \{1\}$ . On définit l'espace de Hilbert

$$W(B) = \left\{ u \in H_{loc}^1(B) / \int_B \frac{|u|^2}{1 + y_1^2} + |\nabla u|^2 dy < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\forall u \in W(B), \|u\|_{W(B)} = \left( \int_B \frac{|u|^2}{1 + y_1^2} + |\nabla u|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On remarque que cet espace contient  $H^1(B)$  ainsi que les fonctions constantes sur  $B$ . Nous notons  $W_{\#}(B)$  le sous-espace de  $W(B)$  des fonctions 1-périodique par rapport à  $y_2$  :

$$W_{\#}(B) = \left\{ u \in W(B) / u|_{\Sigma_0} = u|_{\Sigma_1} \right\}$$

Enfin, on note  $H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$  l'espace des traces sur  $\Gamma_0$  des fonctions de  $W_{\#}(B)$  :

$$H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) = \{u|_{\Gamma_0}, u \in W_{\#}(B)\},$$

et son dual sera noté  $H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0)$ . Dans toute la suite, une fonction sera  $y_2$ -périodique si sa trace et la trace de sa dérivée normale sont 1-périodiques dans la direction  $\vec{e}_2$ . On fixe une fonction  $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  1-périodique par rapport à  $y_1$  :  $a(y_1 + 1, y_2) = a(y_1, y_2) \forall (y_1, y_2)$ . On suppose que cette fonction est bornée et strictement positive :  $\exists c, C > 0 / c \leq a \leq C$ .

Pour une donnée  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$ , on cherche une solution  $u(\varphi)$  dans  $W_{\#}(B)$  du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla u(\varphi)] = 0 & \text{dans } B \\ u(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_0 \\ u(\varphi) \text{ } y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (4.1)$$

où une fonction est  $y_2$ -périodique si sa trace et la trace de sa dérivée normale sont 1-périodiques dans la direction  $\vec{e}_2$ . Pour toute donnée  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$ , on montre qu'il y a existence et de unicité d'une solution  $u(\varphi) \in W_{\#}(B)$  au problème (4.1) en utilisant une inégalité de type Hardy (voir 2.2).

Le but de cette partie est de déterminer une méthode de calcul de la solution  $u(\varphi) \in W_{\#}(B)$  de (4.1) associée à la donnée  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$ .

Nous commençons par introduire quelques notations : on note pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{C}_n = (n, n+1) \times (0, 1)$ . Ces cellules sont séparées par les segments  $\Gamma_n = \{n\} \times (0, 1)$ . Par la suite, nous identifierons toutes ces interfaces  $\Gamma_n$  à  $\Gamma_0$ . On introduit également les bords inférieurs  $\Sigma_0^n = (n, n+1) \times \{0\}$  et supérieurs  $\Sigma_1^n = (n, n+1) \times \{1\}$  des cellules  $\mathcal{C}_n$ .

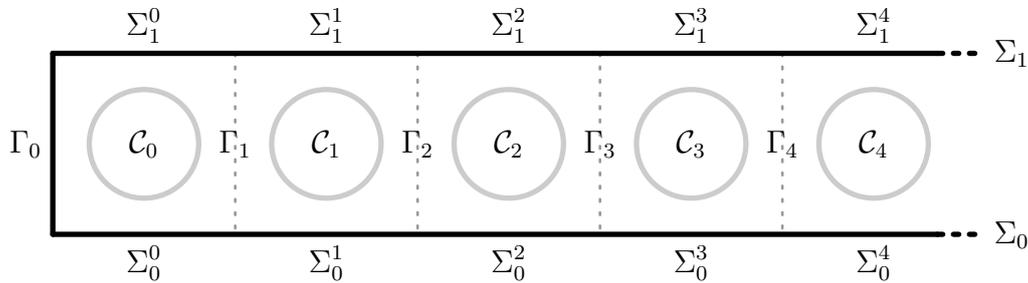


FIGURE 4.1 – Demi-bande infinie  $B$ .

A présent, nous introduisons l'opérateur dit « de propagation »  $\mathcal{R}$  défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) &\rightarrow H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) \\ \varphi &\mapsto u(\varphi)|_{\Gamma_1} \end{aligned}$$

où on le rappelle, l'interface  $\Gamma_1$  est identifiée à  $\Gamma_0$ . Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}$  l'opérateur de translation par rapport à la première variable  $\tau_n : v \in L_{loc}^2(B) \mapsto v(\cdot + n, \cdot) \in L_{loc}^2(B)$ . Le terme d'opérateur « de propagation » s'explique par la proposition suivante :

**Proposition 4.1.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$ ,

$$\tau_n u(\varphi) = u(\mathcal{R}^n \varphi). \quad (4.2)$$

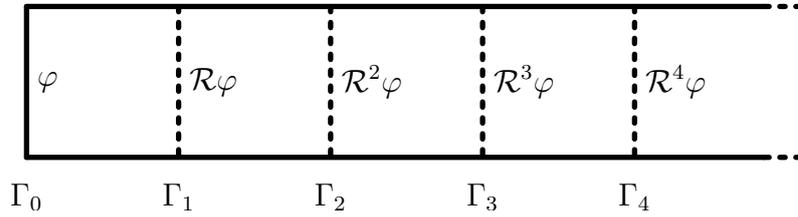
*Démonstration.* Cette proposition se démontre par récurrence sur  $n$ . Soit  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$ . On remarque que la propriété est vraie pour  $n = 0$  et  $n = 1$  (par définition).

Supposons que  $\tau_{n-1}u(\varphi) = u(\mathcal{R}^{n-1}\varphi)$ . On remarque qu'alors  $\tau_n u(\varphi) \in W_{\#}(B)$  et satisfait le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla\tau_n u(\varphi)] &= 0 & \text{dans } B \\ \tau_n u(\varphi) &= \mathcal{R}^n \varphi & \text{sur } \Gamma_0 \\ \tau_n u(\varphi) & & y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

car  $a$  est périodique et sur  $\Gamma_0$ ,  $\tau_n u(\varphi) = \tau_{n-1}u(\varphi)|_{\Gamma_1} = \mathcal{R}(\mathcal{R}^{n-1}\varphi) = \mathcal{R}^n \varphi$ . Comme le problème admet une unique solution dans  $W_{\#}(B)$ , on en déduit donc que  $\tau_n u(\varphi) = u(\mathcal{R}^n \varphi)$ .  $\square$

Grâce à cette proposition, on constate que nous pouvons connaître la trace de  $u(\varphi)$  sur toutes les interfaces  $\Gamma_n$  : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u(\varphi)|_{\Gamma_n} = \mathcal{R}^n \varphi$ , et on pourrait donc en déduire  $u(\varphi)$  dans chaque cellule.



Attardons-nous sur les propriétés de l'opérateur de propagation  $\mathcal{R}$ .

**Proposition 4.2.**  $\mathcal{R}$  est un opérateur compact de  $H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$  dans lui-même, et de rayon spectral  $\rho(\mathcal{R})$  égal à 1. De plus, 1 est l'unique valeur propre de  $\mathcal{R}$  de module 1 et son espace propre est constitué des fonctions constantes.

*Démonstration.* Dans le cas où  $a$  est régulier, la compacité de  $\mathcal{R}$  découle des propriétés de la régularité intérieure des solutions de (4.1) :

$$\forall \varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0), \forall \delta > 0, \forall s \geq 1, u(\varphi) \in H^s(B_\delta), \quad \text{où } B_\delta = \{(y_1, y_2) \in B / y_1 > \delta\}.$$

Ainsi, on a que pour tout  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$ ,  $\mathcal{R}\varphi \in H^s(\Gamma_0)$  pour tout  $s > 1/2$  par théorème de trace. Comme  $H^s(\Gamma_0)$  s'injecte de manière compacte dans  $H^{1/2}(\Gamma_0)$ , on déduit que  $\mathcal{R}$  est compact. Si  $a$  est seulement  $L^\infty$ , c'est un peu plus technique (voir [115]).

L'opérateur étant compact, le rayon spectral correspond à la borne supérieure des valeurs propres. Soit  $r \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $\mathcal{R}$  et  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$  un vecteur propre associé à  $r$ . La propriété (4.2) nous donne pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tau_n u(\varphi) = r^n u(\varphi)$ . On obtient donc que

$$\begin{aligned} \int_B |\nabla u(\varphi)|^2 d\mathbf{y} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_n} |\nabla u(\varphi)|^2 d\mathbf{y} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} |\nabla \tau_n u(\varphi)|^2 d\mathbf{y} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} |r|^{2n} \int_{\mathcal{C}_0} |\nabla u(\varphi)|^2 d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

On note  $C = \int_{\mathcal{C}_0} |\nabla u(\varphi)|^2 d\mathbf{y}$  indépendant de  $n$ . Deux cas se présentent à nous :

— soit  $C > 0$ . Alors, comme

$$\int_B |\nabla u(\varphi)|^2 d\mathbf{y} \leq \|u(\phi)\|_{W(B)} < +\infty,$$

et

$$\int_B |\nabla u(\varphi)|^2 d\mathbf{y} = C \sum_{n=0}^{+\infty} |r|^{2n},$$

on en déduit que

$$\int_B |\nabla u(\varphi)|^2 d\mathbf{y} < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |r|^{2n} < +\infty \Leftrightarrow |r| < 1.$$

— soit  $C = 0$ . Alors  $|\nabla u(\varphi)| = 0$  dans  $\mathcal{C}_0$ .  $\mathcal{C}_0$  étant connexe, on en déduit que  $u(\varphi)$  est constante dans  $\mathcal{C}_0$ . Donc 1 est valeur propre de  $\mathcal{R}$ .

Finalement, on a montré que les valeurs propres de  $\mathcal{R}$  sont soit de module plus petit que 1, soit c'est 1. On en déduit que  $\rho(\mathcal{R}) = 1$ .  $\square$

Revenons au calcul de  $u(\varphi)$ . La proposition 2.3 nous assure que  $u(\varphi)$  tend vers une constante  $C_\varphi$  quand  $y_1$  tend vers l'infini et que cette constante est caractérisée par

$$C_\varphi = \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \mathbf{e}_1, \varphi \rangle_{\Gamma_0}$$

où  $\mathcal{N}$  est une fonction  $H_{loc}^1(B)$  de la forme  $\mathcal{N} = \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} + \tilde{\mathcal{N}}$  avec  $\tilde{\mathcal{N}} \in W_{\#}(B)$  et vérifiant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla\mathcal{N}] = 0 & \text{dans } B \\ \mathcal{N} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \mathcal{N} \text{ } y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (4.3)$$

(voir 2.3.2 pour plus de détails sur cette fonction). Ceci implique que  $u(\varphi)$  décroît exponentiellement à l'infini ssi

$$\langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \mathbf{e}_1, \varphi \rangle_{\Gamma_0} = 0.$$

Introduisons la forme linéaire

$$\begin{aligned} l: H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \mathbf{e}_1, \varphi \rangle_{\Gamma_0} \end{aligned} \quad (4.4)$$

et notons  $V_0(\Gamma_0) = \ker l$  le noyau de cette forme linéaire.

**Proposition 4.3.**  $l$  est une forme linéaire continue non nulle. De plus, on a que pour tout  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$ ,

$$l(\mathcal{R}\varphi) = l(\varphi).$$

*Démonstration.* En effet, de par le lemme 2.5, on a que  $l(1) = \langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \mathbf{e}_1, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 1$ . Donc  $l$  est non nulle.

La deuxième propriété vient du fait que pour tout  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$ ,

$$l(\mathcal{R}\varphi) = \lim_{y_1 \rightarrow +\infty} u(\mathcal{R}\varphi) = \lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \tau_1 u(\varphi) = \lim_{y_1 \rightarrow +\infty} u(\varphi) = l(\varphi).$$

$\square$

$V_0(\Gamma_0)$  est alors un hyperplan et est donc de codimension 1. De plus, on a

$$H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) = \mathbb{C} \oplus V_0(\Gamma_0) \quad (4.5)$$

où on identifie  $\mathbb{C}$  aux fonctions constantes sur  $\Gamma_0$ . De par la preuve de la proposition précédente, on sait que  $\mathbb{C}$  est l'espace propre de la valeur propre 1. Regardons ce que l'on peut dire de la restriction de  $\mathcal{R}$  à  $V_0(\Gamma_0)$ .

**Proposition 4.4.** L'espace  $V_0(\Gamma_0)$  est stable par  $\mathcal{R}$ . La restriction  $\mathcal{R}_0$  de  $\mathcal{R}$  à  $V_0(\Gamma_0)$  est continue, compacte et de rayon spectral strictement inférieur à 1.

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in V_0(\Gamma_0)$ . On a donc que la solution  $u(\varphi)$  décroît exponentiellement à l'infini. On veut montrer qu'il en est de même pour  $u(\mathcal{R}\varphi)$ . On a par la relation de propagation que

$$u(\mathcal{R}\varphi) = \tau_1 u(\varphi).$$

Comme  $\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} u(\varphi) = 0$ , on a également par translation que  $\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \tau_1 u(\varphi) = 0$ . On en déduit que  $\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} u(\mathcal{R}\varphi) = 0$  et donc  $l(\mathcal{R}\varphi) = 0$  et  $\mathcal{R}\varphi \in V_0(\Gamma_0)$ .

Puisque  $\rho(\mathcal{R}) = 1$ , comme  $\mathcal{R}_0$  est la restriction de  $\mathcal{R}$  à  $V_0(\Gamma_0)$ , on a que  $\rho(\mathcal{R}_0) \leq 1$ . Or on a vu que si 1 est valeur propre, ses vecteurs propres sont les constantes qui ne sont pas dans  $V_0(\Gamma_0)$  donc 1 n'est pas valeur propre de  $\mathcal{R}_0$ . Donc, par la proposition 4.2 toutes les valeurs propres de  $\mathcal{R}_0$  sont de module strictement plus petit que 1. Comme  $\mathcal{R}_0$  est compact, le seul point d'accumulation possible de valeurs propres est 0, donc,  $\rho(\mathcal{R}_0) < 1$ .  $\square$

Revenons au calcul de  $u(\varphi)$ . Comme nous l'avons dit précédemment, la connaissance de  $\mathcal{R}$  nous permet de déterminer  $u(\varphi)$  dans chacune des cellules  $\mathcal{C}_n$ . Par la relation de propagation (4.2), cela revient à calculer  $\tau_n u(\varphi)$  dans la cellule  $\mathcal{C}_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \Sigma_1^n \\ \square \\ \Gamma_n \quad \Sigma_0^n \quad \Gamma_{n+1} \end{array} & \longleftrightarrow & \begin{array}{c} \Sigma_1^0 \\ \square \\ \Gamma_0 \quad \Sigma_0^0 \quad \Gamma_1 \end{array} \\
 \mathcal{R}^n \varphi \quad u(\varphi) \quad \mathcal{R}^{n+1} \varphi & & \mathcal{R}^n \varphi \quad \tau_n u(\varphi) \quad \mathcal{R}^{n+1} \varphi \\
 \mathcal{C}_n & & \mathcal{C}_0
 \end{array}$$

Par linéarité, nous allons donc introduire les problèmes de cellule suivant :  
 Trouver  $e_0(\varphi)$  et  $e_1(\varphi)$  dans  $H_{\#}^1(\mathcal{C}_0) = \{u \in H^1(\mathcal{C}_0) / u|_{\Sigma_0^0} = u|_{\Sigma_1^0}\}$  tels que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla e_0(\varphi)] = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_0 \\ e_0(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_0 \\ e_0(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ e_0(\varphi) & y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \Sigma_1^0 \\ \square \\ \Gamma_0 \quad \Sigma_0^0 \quad \Gamma_1 \end{array}$$

$\varphi$     0    0

et

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla e_1(\varphi)] = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_0 \\ e_1(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ e_1(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Gamma_1 \\ e_1(\varphi) & y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \Sigma_1^0 \\ \square \\ \Gamma_0 \quad \Sigma_0^0 \quad \Gamma_1 \end{array}$$

0    0     $\varphi$

On montre que ces deux problèmes sont bien posés en utilisant une inégalité de type Hardy. En utilisant ces deux solutions de problèmes de cellules, on a donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tau_n u(\varphi)|_{\mathcal{C}_0} = e_0(\mathcal{R}^n \varphi) + e_1(\mathcal{R}^{n+1} \varphi). \quad (4.6)$$

Maintenant, il nous faut déterminer l'opérateur de propagation  $\mathcal{R}$ .

On a obtenu une expression de  $u(\varphi)$  dans chacune des cellules mais il ne faut pas oublier que  $u(\varphi) \in W_{\#}(B)$  est solution du problème (4.1) dans toute la bande  $B$ . Cela impose donc la continuité de  $u(\varphi)$  et de sa dérivée normale à travers les interfaces  $\Gamma_n$ . Par la relation de propagation (4.2), il nous suffit de garantir la continuité à travers  $\Gamma_1$  pour l'avoir sur toutes les interfaces. L'expression de  $u(\varphi)$  dans chacune des cellules nous assure la continuité de ce dernier à travers  $\Gamma_1$ . La continuité de la dérivée normale à travers  $\Gamma_1$  nous donne la relation

$$a(\mathbf{y}) \nabla(u(\varphi)|_{\mathcal{C}_0}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}|_{\Gamma_1} = a(\mathbf{y}) \nabla(u(\varphi)|_{\mathcal{C}_1}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}|_{\Gamma_1}$$

qui est équivalente à

$$a(\mathbf{y}) \nabla(u(\varphi)|_{\mathcal{C}_0}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}|_{\Gamma_1} = a(\mathbf{y}) \nabla(\tau_1 u(\varphi)|_{\mathcal{C}_0}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}|_{\Gamma_0}.$$

Donc en utilisant (4.6)

$$a(\mathbf{y}) \nabla(e_0(\varphi) + e_1(\mathcal{R}\varphi)) \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}|_{\Gamma_1} = a(\mathbf{y}) \nabla(e_0(\mathcal{R}\varphi) + e_1(\mathcal{R}^2\varphi)) \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}|_{\Gamma_0} \quad (4.7)$$

Pour  $i, j = 0, 1$ , on pose les opérateurs  $\mathcal{T}_{ij}$  définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ij} : H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) &\rightarrow H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0) \\ \varphi &\mapsto (-1)^{j+1} a(\mathbf{y}) \nabla e_i(\varphi) \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}|_{\Gamma_j}. \end{aligned}$$

où on a identifié respectivement  $H_{\#}^{1/2}(\Gamma_1)$  et  $H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_1)$  à  $H_{\#}^{1/2}(\Gamma_1)$  et  $H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0)$ .



(4.7) est donc équivalente à

$$\mathcal{T}_{01}\varphi + \mathcal{T}_{11}\mathcal{R}\varphi = -\mathcal{T}_{00}\mathcal{R}\varphi - \mathcal{T}_{10}\mathcal{R}^2\varphi.$$

Cette relation étant valable pour tout  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$ , on en déduit que  $\mathcal{R}$  est solution de l'équation de Riccati :

$$\mathcal{T}_{10}\mathcal{R}^2 + (\mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{11})\mathcal{R} + \mathcal{T}_{01} = 0. \quad (4.8)$$

**Théorème 4.5.**  $\mathcal{R}$  est l'unique solution dans  $\mathcal{L}(H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0))$  de (4.8) telle que :

- (1)  $\rho(\mathcal{R}) = 1$ ,
- (2) si  $r \in \sigma(\mathcal{R})$  le spectre de  $\mathcal{R}$  est tel que  $|r| = 1$ , alors  $r = 1$  et son espace propre est constitué des fonctions constantes,
- (3)  $V_0(\Gamma_0)$  est stable par  $\mathcal{R}$  et sa restriction à  $V_0(\Gamma_0)$  est de rayon spectral strictement inférieur à 1.

*Démonstration.* Nous venons de voir que  $\mathcal{R}$  vérifie (4.8). Nous avons également vu par les propositions 4.2 et 4.4 que  $\mathcal{R}$  vérifie bien les propriétés (1), (2) et (3). Montrons que c'est la seule.

Soit  $\mathcal{R}'$  un opérateur continu sur  $H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$  solution de l'équation (4.8) et vérifiant les propriétés (1), (2) et (3). Soit  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$  et définissons la fonction  $u'(\varphi)$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tau_n u'(\varphi)|_{\mathcal{C}_0} = e_0(\mathcal{R}'^n \varphi) + e_1(\mathcal{R}'^{n+1} \varphi).$$

De part les problèmes de cellules vérifiés par  $e_0$  et  $e_1$ , on a que  $u'(\varphi)$  est solution de l'équation  $-\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla u'(\varphi)] = 0$  dans chacune des cellules  $\mathcal{C}_n$  et que  $u(\varphi)|_{\Gamma_0} = \varphi$ . De plus,  $u'(\varphi)$  est continu à travers les interfaces  $\Gamma_n$  et comme  $\mathcal{R}'$  satisfait l'équation (4.8), sa dérivée normale à travers chacune des interfaces  $\Gamma_n$  est également continue. On en déduit que  $u'(\varphi) \in H_{loc}^1(B)$  satisfait l'équation volumique dans  $B$ . Montrons que  $u'(\varphi) \in W_{\#}(B)$ . Comme  $e_0(\varphi)$  et  $e_1(\varphi)$  sont dans  $H_{\#}^1(\mathcal{C}_0)$  et que leur dérivée normale est périodique dans la direction  $\vec{\mathbf{e}}_2$ ,  $u'(\varphi)$  est périodique dans la direction  $\vec{\mathbf{e}}_2$ , de même que sa dérivée normale. Il ne reste qu'à montrer que  $u'(\varphi) \in W(B)$ . Par l'égalité (4.5), il existe des uniques  $\varphi_1 \in \mathbb{R}$  et  $\varphi_2 \in V_0(\Gamma_0)$  telles que  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ . De ce fait, par linéarité,  $u'(\varphi) = u'(\varphi_1) + u'(\varphi_2)$ . Nous allons donc montrer que  $u'(\varphi_1)$  et  $u'(\varphi_2)$  sont dans  $W(B)$ .

Commençons par  $u'(\varphi_1)$ . Comme  $\varphi_1$  est constant, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tau_n u'(\varphi_1)|_{\mathcal{C}_0} = e_0(\varphi_1) + e_1(\varphi_1).$$

Or,  $e_0(\varphi_1) + e_1(\varphi_1)$  satisfait le problème bien posé

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla(e_0(\varphi_1) + e_1(\varphi_1))] = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_0 \\ (e_0(\varphi_1) + e_1(\varphi_1)) = \varphi_1 & \text{sur } \Gamma_0 \\ (e_0(\varphi_1) + e_1(\varphi_1)) = \varphi_1 & \text{sur } \Gamma_1 \\ e_0(\varphi_1) + e_1(\varphi_1) & y_2\text{-périodique} \end{array} \right.$$

Donc comme la fonction constante égale à  $\varphi_1$  est solution, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tau_n u'(\varphi_1)|_{\mathcal{C}_0} \equiv \varphi_1.$$

Donc  $u'(\varphi_1)$  est constant dans  $B$  et on en déduit que  $u'(\varphi_1) \in W(B)$ .

Maintenant regardons  $u'(\varphi_2)$ . Nous allons utiliser le fait que l'application

$$\begin{array}{ccc} H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) & \rightarrow & H_{\#}^1(\mathcal{C}_0) \\ \varphi & \mapsto & e_0(\varphi) + e_1(\mathcal{R}'\varphi) \end{array}$$

est continue. Il existe donc  $C > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|u'(\varphi_2)\|_{H^1(\mathcal{C}_n)} = \|\tau_n u'(\varphi_2)\|_{H^1(\mathcal{C}_0)} = \|e_0(\mathcal{R}'^n \varphi_2) + e_1(\mathcal{R}'^{n+1} \varphi_2)\|_{H^1(\mathcal{C}_0)} \leq C \|\mathcal{R}'^n \varphi_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}.$$

Or la restriction de  $\mathcal{R}'$  à  $V_0(\Gamma_0)$  est de rayon spectral strictement inférieur à 1 et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{R}'^n|_{V_0(\Gamma_0)}\|_{\mathcal{L}(V_0(\Gamma_0))}^{1/n} = \rho(\mathcal{R}'|_{V_0(\Gamma_0)}).$$

Donc pour  $\rho_* \in ]\rho(\mathcal{R}'|_{V_0(\Gamma_0)}), 1[$ , il existe  $n_0$  tel que

$$\forall n \geq n_0, \|\mathcal{R}'^n|_{V_0(\Gamma_0)}\|_{\mathcal{L}(V_0(\Gamma_0))} \leq \rho_*^n.$$

Ainsi, pour  $n \geq n_0$ ,

$$\|u'(\varphi_2)\|_{H^1(\mathcal{C}_n)} \leq C \|\mathcal{R}'^n \varphi_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} \leq C \rho_*^n \|\varphi_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}.$$

Comme  $\rho_* < 1$ , on en déduit que  $u'(\varphi_2) \in H^1(B) \subset W(B)$ .

On a donc que  $u'(\varphi) \in W(B)$  et par périodicité de  $e_0(\varphi)$  et  $e_1(\varphi)$ , on a même  $u'(\varphi) \in W_{\#}(B)$ . Par unicité de la solution de (4.1), on en déduit que  $u'(\varphi) = u(\varphi)$  et donc leur trace sur  $\Gamma_1$  sont égales et ce pour tout  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$  :

$$\mathcal{R}\varphi = u(\varphi)|_{\Gamma_1} = u'(\varphi)|_{\Gamma_1} = \mathcal{R}'\varphi.$$

D'où l'unicité de  $\mathcal{R}$ . □

Nous avons également montré le corollaire suivante

**Corollaire 4.6.**

$$V_0(\Gamma_0) = \{\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) / u(\varphi) \text{ unique solution de (4.1) est dans } H_{\#}^1(B)\}.$$

Une fois que nous connaissons cet opérateur de propagation  $\mathcal{R}$ , on peut calculer  $u(\varphi)$  cellule par cellule et la reconstruire dans toute la bande  $B$ . On peut également déterminer l'opérateur DtN (Dirichlet-to-Neumann)  $\Lambda^{\text{DtN}}$  associé au problème (4.1) :

$$\begin{aligned} \Lambda^{\text{DtN}} : H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) &\rightarrow H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0) \\ \varphi &\mapsto a(\mathbf{y})\nabla u(\varphi) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|_{\Gamma_0}. \end{aligned}$$

**Proposition 4.7.** L'opérateur DtN vérifie les propriétés suivantes :

- $\langle \Lambda^{\text{DtN}}\varphi, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 0$  pour tout  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$ ,
- le noyau de  $\Lambda^{\text{DtN}}$  est constitué des fonctions constantes sur  $\Gamma_0$ .

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$ . Pour la première propriété, prenons l'équation volumique vérifiée par l'unique solution  $u(\varphi) \in W_{\#}(B)$  de (4.1) et intégrons par parties sur une bande  $B_L = (0, L) \times (0, 1)$  :

$$\underbrace{\int_{B_L} a(\mathbf{y})\nabla u(\varphi)\nabla 1 d\mathbf{y}}_{=0} + \underbrace{\langle a\nabla u(\varphi) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, 1 \rangle_{\Gamma_0}}_{=\Lambda^{\text{DtN}}\varphi} - \langle a\nabla u(\varphi) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, 1 \rangle_{\Gamma_L} = 0.$$

d'où

$$\langle \Lambda^{\text{DtN}}\varphi, 1 \rangle_{\Gamma_0} = \langle a\nabla u(\varphi) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1, 1 \rangle_{\Gamma_L}.$$

En faisant tendre  $L$  vers  $+\infty$ , comme  $u(\varphi)$  tend vers une constante, on en déduit que  $\langle \Lambda^{\text{DtN}}\varphi, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 0$ . □

On peut l'exprimer aisément grâce aux opérateurs  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{T}_{ij}$  :

$$\begin{aligned} \Lambda^{\text{DtN}}\varphi &= a(\mathbf{y})\nabla u(\varphi) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|_{\Gamma_0} \\ &= a(\mathbf{y})\nabla(e_0(\varphi) + e_1(\mathcal{R}\varphi)) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|_{\Gamma_0} \\ &= -(\mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{10}\mathcal{R})\varphi. \end{aligned}$$

## 4.2 Problème avec terme source et condition de Dirichlet homogène

A présent, et toujours pour une donnée  $\varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$ , nous nous intéressons au problème suivant :

Trouver  $v(\varphi) \in W_{\#}(B)$  tel que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla v(\varphi)] = \mathcal{L}u(\varphi) & \text{dans } B \\ v(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ v(\varphi) \text{ } y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (4.9)$$

où  $u(\varphi)$  est solution du problème (4.1) et l'opérateur  $\mathcal{L}$  est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : W(B) &\rightarrow W(B) \\ v &\mapsto a(\mathbf{y})\partial_{y_2}v + \partial_{y_2}(a(\mathbf{y})v). \end{aligned}$$

Pour que le problème (4.9) soit bien posé, il faut s'assurer de remplir les hypothèses de la proposition 2.2 à savoir que  $\mathcal{L}u(\varphi)\sqrt{1+y_1^2} \in L^2(B)$ . D'après le comportement des solutions de (4.1) vu dans la section précédente, cette condition impose que  $u(\varphi)$  décroisse exponentiellement vers 0 à l'infini ce qui, d'après le corollaire 4.6 de la section précédente, nécessite que  $\varphi \in V_0(\Gamma_0)$ . Ainsi, le problème (4.9) admet une unique solution si et seulement si  $\varphi \in V_0(\Gamma_0)$ .

A présent et comme nous l'avons fait pour le problème sans terme source, nous cherchons à calculer la solution  $v(\varphi)$  du problème (4.9). Pour cela, nous allons définir un nouvel opérateur de propagation  $\tilde{\mathcal{R}}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}} : V_0(\Gamma_0) &\rightarrow H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) \\ \varphi &\mapsto v(\varphi)|_{\Gamma_1}. \end{aligned}$$

Pour caractériser ce nouvel opérateur, nous commençons par établir une nouvelle relation de propagation.

**Proposition 4.8.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $\varphi \in V_0(\Gamma_0)$ ,

$$\tau_n v(\varphi) = v(\mathcal{R}^n \varphi) + u(\psi_n) \quad (4.10)$$

où  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dépend de  $\varphi$  et est définie par récurrence de la façon suivante :  $\psi_0 \equiv 0$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $\psi_n = \tilde{\mathcal{R}}\mathcal{R}^{n-1}\varphi + \mathcal{R}\psi_{n-1}$ .

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in V_0(\Gamma_0)$ . On démontre cette propriété par récurrence sur  $n$ . On remarque qu'elle est vraie pour  $n = 0$ .

Supposons  $\tau_{n-1}v(\varphi) = v(\mathcal{R}^{n-1}\varphi) + u(\psi_{n-1})$ . On cherche le problème satisfait par  $\tau_n v(\varphi)$ . Par translation,  $\tau_n v(\varphi)$  vérifie l'équation volumique

$$-\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla \tau_n v(\varphi)] = \mathcal{L}(\tau_n u(\varphi)) = \mathcal{L}(u(\mathcal{R}^n \varphi)).$$

Au niveau du bord  $\Gamma_0$ , on a

$$\begin{aligned} \tau_n v(\varphi)|_{\Gamma_0} &= \tau_{n-1}v(\varphi)|_{\Gamma_1} \\ &= v(\mathcal{R}^{n-1}\varphi)|_{\Gamma_1} + u(\psi_{n-1})|_{\Gamma_1} \\ &= \tilde{\mathcal{R}}\mathcal{R}^{n-1}\varphi + \mathcal{R}\psi_{n-1} \end{aligned}$$

Donc  $\tau_n v(\varphi) \in W_{\#}(B)$  satisfait le problème

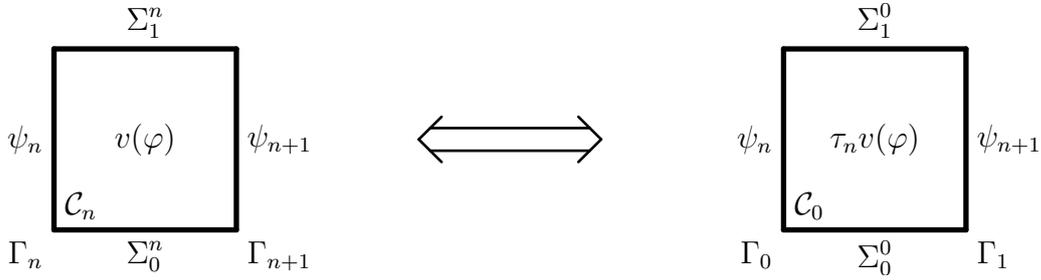
$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla\tau_n v(\varphi)] = \mathcal{L}(u(\mathcal{R}^n\varphi)) & \text{dans } B \\ \tau_n v(\varphi) = \tilde{\mathcal{R}}\mathcal{R}^{n-1}\varphi + \mathcal{R}\psi_{n-1} & \text{sur } \Gamma_0 \\ \tau_n v(\varphi) & y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

Ainsi, en décomposant par linéarité en deux problèmes : l'un avec terme source et condition de Dirichlet homogène, et l'autre sans terme source et avec condition de Dirichlet non-homogène, on obtient alors, par unicité de la solution de ces deux problèmes :

$$\tau_n v(\varphi) = v(\mathcal{R}^n\varphi) + u(\tilde{\mathcal{R}}\mathcal{R}^{n-1}\varphi + \mathcal{R}\psi_{n-1}) = v(\mathcal{R}^n\varphi) + u(\psi_n).$$

□

Comme pour le problème précédent, il suffit de déterminer  $\tilde{\mathcal{R}}$  pour calculer  $v(\varphi)$  dans chacune des cellules et par la relation de propagation (4.10), cela revient à calculer  $\tau_n v(\varphi)$  dans la cellule  $\mathcal{C}_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .



Dans  $\mathcal{C}_0$ ,  $\tau_n v(\varphi)$  vérifie

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla\tau_n v(\varphi)] = \mathcal{L}u(\mathcal{R}^n\varphi) & \text{dans } \mathcal{C}_0 \\ \tau_n v(\varphi) = \psi_n & \text{sur } \Gamma_0 \\ \tau_n v(\varphi) = \psi_{n+1} & \text{sur } \Gamma_1 \\ \tau_n v(\varphi) & y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

Comme pour le problème (4.1), on aimerait introduire des problèmes de cellule. Nous allons utiliser la structure particulière du terme source  $\mathcal{L}u(\mathcal{R}^n\varphi)$ . En effet, dans la cellule  $\mathcal{C}_0$ , on a

$$\mathcal{L}u(\mathcal{R}^n\varphi) = \mathcal{L}(e_0(\mathcal{R}^n\varphi) + e_1(\mathcal{R}^{n+1}\varphi)) = \mathcal{L}e_0(\mathcal{R}^n\varphi) + \mathcal{L}e_1(\mathcal{R}^{n+1}\varphi). \quad (4.11)$$

Par linéarité, nous allons donc introduire les problèmes de cellule suivant :

Trouver  $\tilde{e}_0(\varphi)$  et  $\tilde{e}_1(\varphi)$  dans  $H_{\#}^1(\mathcal{C}_0)$  tels que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla\tilde{e}_0(\varphi)] = \mathcal{L}e_0(\varphi) & \text{dans } \mathcal{C}_0 \\ \tilde{e}_0(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \tilde{e}_0(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \tilde{e}_0(\varphi) & y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (4.12)$$

et

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla\tilde{e}_1(\varphi)] = \mathcal{L}e_1(\varphi) & \text{dans } \mathcal{C}_0 \\ \tilde{e}_1(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \tilde{e}_1(\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \tilde{e}_1(\varphi) & y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (4.13)$$

Tout comme les premiers problèmes de cellule, ces derniers sont bien posés (grâce à une inégalité de Poincaré).

Ainsi, par linéarité, nous avons dans la première cellule

$$\tau_n v(\varphi)|_{\mathcal{C}_0} = e_0(\psi_n) + e_1(\psi_{n+1}) + \tilde{e}_0(\mathcal{R}^n \varphi) + \tilde{e}_1(\mathcal{R}^{n+1} \varphi). \quad (4.14)$$

Il nous reste à calculer l'opérateur de propagation  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Comme  $v(\varphi) \in W_{\#}(B)$ , cela impose donc la continuité de  $v(\varphi)$  et de sa dérivée normale à travers les interfaces  $\Gamma_n$ . En utilisant la relation de propagation (4.10), nous pouvons garantir la continuité seulement à travers  $\Gamma_1$  pour l'avoir sur toutes les interfaces. L'expression de  $v(\varphi)$  dans chacune des cellules nous assure la continuité de ce dernier à travers  $\Gamma_1$  puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v(\varphi)|_{\Gamma_n} = \psi_n$ . La continuité de la dérivée normale à travers  $\Gamma_1$  nous donne la relation

$$a(\mathbf{y}) \nabla(v(\varphi)|_{\mathcal{C}_0}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|_{\Gamma_1} = a(\mathbf{y}) \nabla(v(\varphi)|_{\mathcal{C}_1}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|_{\Gamma_1}$$

qui est équivalente à

$$a(\mathbf{y}) \nabla(v(\varphi)|_{\mathcal{C}_0}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|_{\Gamma_1} = a(\mathbf{y}) \nabla(\tau_1 v(\varphi)|_{\mathcal{C}_0}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|_{\Gamma_0}.$$

En utilisant (4.14), on obtient

$$\begin{aligned} a(\mathbf{y}) \nabla(e_1(\tilde{\mathcal{R}}\varphi) + \tilde{e}_0(\varphi) + \tilde{e}_1(\mathcal{R}\varphi)) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|_{\Gamma_1} = \\ a(\mathbf{y}) \nabla(e_0(\tilde{\mathcal{R}}\varphi) + e_1(\tilde{\mathcal{R}}\mathcal{R}\varphi + \mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}\varphi) + \tilde{e}_0(\mathcal{R}\varphi) + \tilde{e}_1(\mathcal{R}^2\varphi)) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|_{\Gamma_0}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pour  $i, j = 0, 1$ , on introduit les opérateurs  $\tilde{\mathcal{T}}_{ij} : V_0(\Gamma_0) \rightarrow H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0)$  définis par

$$\tilde{\mathcal{T}}_{ij}\varphi = (-1)^{j+1} a(\mathbf{y}) \nabla \tilde{e}_i(\varphi) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|_{\Gamma_j},$$



(4.15) est donc une équation de type Sylvester qui se réécrit

$$\mathcal{T}_{10} \tilde{\mathcal{R}} \mathcal{R} + (\mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{11} + \mathcal{T}_{10} \mathcal{R}) \tilde{\mathcal{R}} = - [\tilde{\mathcal{T}}_{10} \mathcal{R}^2 + (\tilde{\mathcal{T}}_{00} + \tilde{\mathcal{T}}_{11}) \mathcal{R} + \tilde{\mathcal{T}}_{01}]. \quad (4.16)$$

**Proposition 4.9.**  $\tilde{\mathcal{R}}$  est l'unique solution dans  $\mathcal{L}(V_0(\Gamma_0); H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0))$  de (4.16).

*Démonstration.* Soit  $\tilde{\mathcal{R}}' \in \mathcal{L}(V_0(\Gamma_0); H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0))$  vérifiant (4.16). Soit  $\varphi \in V_0(\Gamma_0)$ . On définit la fonction  $v'(\varphi)$  par

$$\forall n \geq 0, \tau_n v'(\varphi)|_{\mathcal{C}_0} = e_0(\psi'_n) + e_1(\psi'_{n+1}) + \tilde{e}_0(\mathcal{R}^n \varphi) + \tilde{e}_1(\mathcal{R}^{n+1} \varphi)$$

où les  $\psi'_n$  sont définis par  $\psi'_0 = 0$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $\psi'_n = \tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^{n-1} \varphi + \mathcal{R} \psi'_{n-1}$ . De part les problèmes de cellules vérifiés par  $e_0$ ,  $e_1$ ,  $\tilde{e}_0$  et  $\tilde{e}_1$ , on a que  $v'(\varphi)$  est solution de l'équation  $-\text{div}[a(\mathbf{y}) \nabla v'(\varphi)] = \mathcal{L}u(\varphi)$  dans chacune des cellules  $\mathcal{C}_n$  et que  $v'(\varphi)|_{\Gamma_0} = 0$ . De plus,  $v'(\varphi)$  est continu à travers les interfaces  $\Gamma_n$  et comme  $\tilde{\mathcal{R}}'$  satisfait l'équation (4.16), sa dérivée normale à travers chacune des interfaces  $\Gamma_n$  est également continue. On en déduit que  $v'(\varphi) \in H_{loc}^1(B)$

satisfait l'équation volumique dans  $B$ . Montrons que  $v'(\varphi) \in W_{\#}(B)$ . Comme  $e_0(\varphi)$ ,  $e_1(\varphi)$ ,  $\tilde{e}_0(\varphi)$  et  $\tilde{e}_1(\varphi)$  sont dans  $H_{\#}^1(\mathcal{C}_0)$  et que leur dérivée normale est périodique dans la direction  $\vec{e}_2$ ,  $v'(\varphi)$  est périodique dans la direction  $\vec{e}_2$ , de même que sa dérivée normale. Il ne reste qu'à montrer que  $v'(\varphi) \in W(B)$ .

Dans un premier temps, nous utilisons la relation de récurrence vérifiée par les  $\psi'_n$  pour décomposer  $v'(\varphi)$  dans chacune des cellules sous la forme

$$\forall n \geq 0, \tau_n v'(\varphi)|_{\mathcal{C}_0} = E(\psi'_n) + e_1(\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^n \varphi) + \tilde{E}(\mathcal{R}^n \varphi)$$

où  $E$  et  $\tilde{E}$  sont les applications continues définies respectivement par  $E(\varphi) = e_0(\varphi) + e_1(\mathcal{R}\varphi)$  et  $\tilde{E}(\varphi) = \tilde{e}_0(\varphi) + \tilde{e}_1(\mathcal{R}\varphi)$ . Pour montrer que  $v'(\varphi) \in W(B)$ , il nous faut montrer que

$$\int_B \frac{|v'(\varphi)|^2}{1 + y_1^2} + |\nabla v'(\varphi)|^2 dy < +\infty.$$

On commence par décomposer l'intégrale cellule par cellule et on a

$$\begin{aligned} \int_B \frac{|v'(\varphi)|^2}{1 + y_1^2} + |\nabla v'(\varphi)|^2 dy &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_n} \frac{|v'(\varphi)|^2}{1 + y_1^2} + |\nabla v'(\varphi)|^2 dy \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{|\tau_n v'(\varphi)|^2}{1 + (n + y_1)^2} + |\nabla \tau_n v'(\varphi)|^2 dy \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{|E(\psi'_n)|^2}{1 + (n + y_1)^2} + |\nabla E(\psi'_n)|^2 dy \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{|e_1(\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^n \varphi)|^2}{1 + (n + y_1)^2} + |\nabla e_1(\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^n \varphi)|^2 dy \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{|\tilde{E}(\mathcal{R}^n \varphi)|^2}{1 + (n + y_1)^2} + |\nabla \tilde{E}(\mathcal{R}^n \varphi)|^2 dy \end{aligned}$$

Nous allons montrer que ces trois sommes convergent.

Commençons par la deuxième somme. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{|e_1(\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^n \varphi)|^2}{1 + (n + y_1)^2} + |\nabla e_1(\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^n \varphi)|^2 dy &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} |e_1(\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^n \varphi)|^2 + |\nabla e_1(\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^n \varphi)|^2 dy \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|e_1(\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^n \varphi)\|_{H^1(\mathcal{C}_0)}^2. \end{aligned}$$

Or l'application  $\varphi \mapsto e_1(\tilde{\mathcal{R}}' \varphi)$  est continue sur  $V_0(\Gamma_0)$  donc il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $n$ ,

$$\|e_1(\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^n \varphi)\|_{H^1(\mathcal{C}_0)} \leq C \|\mathcal{R}^n \varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}.$$

Or  $\varphi \in V_0(\Gamma_0)$  et  $\rho(\mathcal{R}|_{V_0(\Gamma_0)}) < 1$  donc il existe  $\rho^* \in ]\rho(\mathcal{R}|_{V_0(\Gamma_0)}), 1[$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\|\mathcal{R}^n\|_{\mathcal{L}H^{1/2}(\Gamma_0)} \leq \rho^{*n}$ . Ainsi, pour tout  $n \leq n_0$ , on a que

$$\|e_1(\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^n \varphi)\|_{H^1(\mathcal{C}_0)} \leq C \rho^{*n} \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}.$$

On a donc bien que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{|e_1(\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^n \varphi)|^2}{1 + (n + y_1)^2} + |\nabla e_1(\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^n \varphi)|^2 dy.$$

En utilisant un raisonnement analogue et la continuité sur  $V_0(\Gamma_0)$  de l'application  $\tilde{E}$ , on obtient également que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{|\tilde{E}(\mathcal{R}^n \varphi)|^2}{1 + (n + y_1)^2} + |\nabla \tilde{E}(\mathcal{R}^n \varphi)|^2 dy < +\infty.$$

Il nous reste à montrer que la première somme converge. Seulement, nous ne pouvons pas utiliser directement la propriété  $\rho(\mathcal{R}|_{V_0(\Gamma_0)}) < 1$  puisqu'en général,  $\psi'_n \notin V_0(\Gamma_0)$ . Pour y remédier, nous allons leur retrancher respectivement  $l(\psi'_n)$ . On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{|E(\psi'_n)|^2}{1+(n+y_1)^2} + |\nabla E(\psi'_n)|^2 d\mathbf{y} &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{|E(\psi'_n - l(\psi'_n))|^2}{1+(n+y_1)^2} + |\nabla E(\psi'_n - l(\psi'_n))|^2 d\mathbf{y} \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{|E(l(\psi'_n))|^2}{1+(n+y_1)^2} + |\nabla E(l(\psi'_n))|^2 d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Or pour tout  $n$ ,  $l(\psi'_n) \in \mathbb{R}$  donc  $E(l(\psi'_n)) = l(\psi'_n)$ . De plus, on peut montrer que la suite  $(l(\psi'_n))_n$  converge. Pour cela, on remarque tout d'abord que par récurrence, les  $\psi'_n$  peuvent s'écrire explicitement sous la forme : pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\psi'_n = \sum_{p=0}^{n-1} \mathcal{R}^{n-1-p} \tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^p \varphi.$$

On a donc, en utilisant la proposition 4.3,

$$\begin{aligned} l(\psi'_n) &= \sum_{p=0}^{n-1} l(\mathcal{R}^{n-1-p} \tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^p \varphi) \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} l(\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^p \varphi) \\ &= l\left(\sum_{p=0}^{n-1} \tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^p \varphi\right) \end{aligned}$$

La forme linéaire étant continue, on a par passage à la limite que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} l(\psi'_n) &= l\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^p \varphi\right) \\ &= l(\tilde{\mathcal{R}}'(I - \mathcal{R})^{-1} \varphi). \end{aligned}$$

Donc comme la suite  $(l(\psi'_n))_n$  converge, elle est bornée. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{|E(l(\psi'_n))|^2}{1+(n+y_1)^2} + |\nabla E(l(\psi'_n))|^2 d\mathbf{y} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{|l(\psi'_n)|^2}{1+(n+y_1)^2} d\mathbf{y} \\ &\leq C \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{1}{1+(n+y_1)^2} d\mathbf{y} \\ &\leq C \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Finalement, il nous reste une dernière somme à majorer. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{|E(\psi'_n - l(\psi'_n))|^2}{1+(n+y_1)^2} + |\nabla E(\psi'_n - l(\psi'_n))|^2 d\mathbf{y} &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \|E(\psi'_n - l(\psi'_n))\|_{H^1(\mathcal{C}_0)}^2 \\ &\leq C \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \|\psi'_n - l(\psi'_n)\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}^2 \end{aligned}$$

par continuité de l'application  $E$  sur  $V_0(\Gamma_0)$ . Or on peut écrire  $\psi'_n - l(\psi'_n)$  sous la forme

$$\psi'_n - l(\psi'_n) = \sum_{p=0}^{n-1} \mathcal{R}^{n-1-p} \tilde{\varphi}'_p$$

où  $\tilde{\varphi}'_p = \tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^p \varphi - l(\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{R}^p \varphi)$ . Nous allons une nouvelle fois utiliser la propriété  $\rho(\mathcal{R}|_{V_0(\Gamma_0)}) < 1$ . Pour  $n \geq 2n_0 + 1$ , on découpe la somme en trois morceaux :

$$\psi'_n - l(\psi'_n) = \sum_{p=0}^{n_0+1} \mathcal{R}^{n-1-p} \tilde{\varphi}'_p + \sum_{p=n_0+2}^{n-1-n_0} \mathcal{R}^{n-1-p} \tilde{\varphi}'_p + \sum_{p=n-n_0}^{n-1} \mathcal{R}^{n-1-p} \tilde{\varphi}'_p$$

Or, pour tout  $p \geq n_0$ ,  $\|\tilde{\varphi}'_p\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} \leq C \|\mathcal{R}^p \varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} \leq C \rho^{*p}$ . On en déduit que la suite  $(\tilde{\varphi}'_p)_p$  converge et est donc bornée. Il en est de même pour la suite d'opérateurs  $(\mathcal{R}^p)_p$ . Donc

$$\begin{aligned} \|\psi'_n - l(\psi'_n)\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} &\leq \sum_{p=0}^{n_0+1} \|\mathcal{R}^{n-1-p} \tilde{\varphi}'_p\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} + \sum_{p=n_0+2}^{n-1-n_0} \|\mathcal{R}^{n-1-p} \tilde{\varphi}'_p\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} \\ &\quad + \sum_{p=n-n_0}^{n-1} \|\mathcal{R}^{n-1-p} \tilde{\varphi}'_p\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} \\ &\leq C \sum_{p=0}^{n_0+1} \rho^{*n-1-p} + C \sum_{p=n_0+2}^{n-1-n_0} \rho^{*n-1-p} \rho^{*p} + C \sum_{p=n-n_0}^{n-1} \rho^{*p} \\ &\leq C(\rho^{*n-1} + (n-2n_0)\rho^{*n-1} + \rho^{*n-n_0}) \\ &\leq Cn\rho^{*n} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{|E(\psi'_n - l(\psi'_n))|^2}{1 + (n + y_1)^2} + |\nabla E(\psi'_n - l(\psi'_n))|^2 d\mathbf{y} < +\infty$$

On a donc que  $v'(\varphi) \in W(B)$ .

On a montré que  $v'(\varphi) \in W_{\#}(B)$  vérifie (4.1). Donc par unicité de la solution, on a que  $v'(\varphi) = v(\varphi)$ . En particulier, on en conclut que

$$\tilde{\mathcal{R}}' \varphi = v'(\varphi)|_{\Gamma_1} = v(\varphi)|_{\Gamma_1} = \tilde{\mathcal{R}} \varphi$$

et ce pour tout  $\varphi \in V_0(\Gamma_0)$ . □

Une fois que nous avons  $\tilde{\mathcal{R}}$ , nous sommes en mesure de calculer  $v(\varphi)$  cellule par cellule et finalement le reconstruire dans toute la bande  $B$ . Enfin, nous pouvons déterminer l'opérateur DtN  $\tilde{\Lambda}^{\text{DtN}} : V_0(\Gamma_0) \rightarrow H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0)$  associé au problème (4.9)

$$\tilde{\Lambda}^{\text{DtN}} \varphi = a(\mathbf{y}) \nabla v(\varphi) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|_{\Gamma_0},$$

que l'on peut exprimer

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}^{\text{DtN}}(\varphi) &= a(\mathbf{y}) \nabla v(\varphi) \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \\ &= a(\mathbf{y}) \nabla [e_1(\tilde{\mathcal{R}} \varphi) + \tilde{e}_0(\varphi) + \tilde{e}_1(\mathcal{R} \varphi)] \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \\ &= (\mathcal{T}_{10} \tilde{\mathcal{R}} + \tilde{\mathcal{T}}_{00} + \tilde{\mathcal{T}}_{10} \mathcal{R}) \varphi. \end{aligned}$$

### 4.3 Problème sans terme source et avec condition de Neumann

Dans cette partie, nous expliquons la méthode de résolution dans le cas d'une condition de Neumann sur  $\Gamma_0$ . Dans la pratique, nous nous ramènerons à une condition de Dirichlet.

### 4.3.1 Développement de la méthode

Pour une donnée  $\varphi \in H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0)$ , on cherche désormais une solution  $w(\varphi)$  dans  $W_{\#}(B)$  du problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla w(\varphi)] = 0 & \text{dans } B \\ a(\mathbf{y})\nabla w(\varphi) \cdot \mathbf{e}_1 = \varphi & \text{sur } \Gamma_0 \\ \int_{\Gamma_0} w(\varphi) dy_2 = 0 \\ w(\varphi) \quad y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (4.17)$$

Ce problème admet une solution si et seulement si  $\langle \varphi, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 0$ . On introduit donc l'espace

$$\tilde{V}_0(\Gamma_0) = \left\{ \varphi \in H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0) / \langle \varphi, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

Fixons donc  $\varphi \in \tilde{V}_0(\Gamma_0)$ . Alors le problème (4.17) admet une unique solution  $w(\varphi) \in W_{\#}(B^+)$  (grâce à la condition  $\int_{\Gamma_0} w(\varphi) dy_2 = 0$ ). Le but de cette section est de d'expliquer comment calculer l'unique solution  $w(\varphi) \in W_{\#}(B)$  de (4.17). Nous allons à nouveau utiliser le découpage en cellules  $\mathcal{C}_n$  de  $B$  et définir un opérateur de propagation  $\mathcal{P}$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \tilde{V}_0(\Gamma_0) &\rightarrow H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0) \\ \varphi &\mapsto a(\mathbf{y})\nabla w(\varphi) \cdot \mathbf{e}_1|_{\Gamma_1}. \end{aligned}$$

**Proposition 4.10.** L'opérateur de propagation  $\mathcal{P}$  a pour image  $\tilde{V}_0(\Gamma_0)$  et pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\tau_n w(\varphi) = w(\mathcal{P}^n \varphi) + \mathcal{M} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}^k \varphi \quad (4.18)$$

où l'opérateur  $\mathcal{M}$  est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \tilde{V}_0(\Gamma_0) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \int_{\Gamma_1} w(\varphi) dy_2. \end{aligned}$$

Dans cette proposition,  $\mathcal{M}\varphi \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in \tilde{V}_0(\Gamma_0)$ . Dans (4.18),  $\mathcal{M}\varphi$  désigne une fonction constante sur  $B$  égale à  $\mathcal{M}\varphi$ .

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \tilde{V}_0(\Gamma_0)$ . Il existe un unique  $w(\varphi) \in W_{\#}(B)$  solution de (4.17). Regardons le problème satisfait par  $\tau_1 w(\varphi)$ . On peut aisément voir que  $\tau_1 w(\varphi) \in W_{\#}(B)$  satisfait le problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla \tau_1 w(\varphi)] = 0 & \text{dans } B \\ a(\mathbf{y})\nabla \tau_1 w(\varphi) \cdot \mathbf{e}_1 = a(\mathbf{y})\nabla w(\varphi) \cdot \mathbf{e}_1|_{\Gamma_1} = \mathcal{P}\varphi & \text{sur } \Gamma_0 \\ \int_{\Gamma_0} \tau_1 w(\varphi) dy_2 = \int_{\Gamma_1} w(\varphi) dy_2 = \mathcal{M}\varphi \\ \tau_1 w(\varphi) \quad y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (4.19)$$

On a bien existence d'une solution dans  $W_{\#}(B)$  puisque  $\tau_1 w(\varphi)$  satisfait le problème. Or il y a existence du problème si et seulement si  $\langle \mathcal{P}\varphi, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 0$ . On en déduit donc que  $\mathcal{P}\varphi \in \tilde{V}_0(\Gamma_0)$ , et ce pour tout  $\varphi \in \tilde{V}_0(\Gamma_0)$ . L'unicité de la solution est assurée par la dernière condition.

Enfin, il nous reste à montrer par récurrence la relation (4.18). Pour  $n = 1$ , on remarque que  $v = \tau_1 w(\varphi) - \mathcal{M}\varphi \in W_{\#}(B)$  est solution du problème (4.17) avec la donnée  $\varphi = \mathcal{P}\varphi$ .

Par unicité de la solution, on en déduit que  $\tau_1 w(\varphi) - \mathcal{M}\varphi = w(\mathcal{P}\varphi)$ . Puis, pour  $n \geq 1$ , si  $\tau_n w(\varphi) = w(\mathcal{P}^n \varphi) + \mathcal{M} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}^k \varphi$ , on observe que  $\tau_{n+1} w(\varphi)$  satisfait le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla\tau_{n+1}w(\varphi)] = 0 & \text{dans } B \\ a(\mathbf{y})\nabla\tau_{n+1}w(\varphi) \cdot \mathbf{e}_1 = \mathcal{P}(\mathcal{P}^n \varphi) = \mathcal{P}^{n+1} \varphi & \text{sur } \Gamma_0 \\ \int_{\Gamma_0} \tau_{n+1}w(\varphi) dy_2 = \int_{\Gamma_1} \tau_n w(\varphi) dy_2 = \mathcal{M}\mathcal{P}^n \varphi + \mathcal{M} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}^k \varphi = \mathcal{M} \sum_{k=0}^n \mathcal{P}^k \varphi \\ \tau_{n+1}w(\varphi) \quad y_2\text{-périodique} \end{cases}$$

Ainsi,  $v = \tau_{n+1}w(\varphi) - \mathcal{M} \sum_{k=0}^n \mathcal{P}^k \varphi \in W_{\#}(B)$  est solution du problème (4.17) avec la donnée  $\varphi = \mathcal{P}^{n+1} \varphi$  et donc  $\tau_{n+1}w(\varphi) - \mathcal{M} \sum_{k=0}^n \mathcal{P}^k \varphi = w(\mathcal{P}^{n+1} \varphi)$ .  $\square$

Finalement, si les opérateurs  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{M}$  sont connus, nous serons en mesure de calculer  $w(\varphi)$  dans chacune des cellules.

**Proposition 4.11.**  $\mathcal{P}$  est un opérateur continu de  $\tilde{V}_0(\Gamma_0)$  dans lui-même, compact et de rayon spectral  $\rho(\mathcal{P})$  strictement inférieur à 1.

*Démonstration.*  $\mathcal{P}$  est compact pour les mêmes raisons que  $\mathcal{R}$  (voir la preuve de 4.2). Ainsi, son rayon spectral correspond à la borne supérieure de ses valeurs propres. Soit  $r \in \mathbb{C}$  valeur propre de  $\mathcal{P}$  et  $\varphi \in \tilde{V}_0(\Gamma_0)$  un vecteur propre associé à  $r$ . Par la relation de propagation (4.18), on a par linéarité que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\tau_n w(\varphi) = r^n w(\varphi) + \sum_{k=0}^{n-1} r^k \mathcal{M}\varphi = r^n w(\varphi) + \frac{1-r^n}{1-r} \mathcal{M}\varphi$ . On obtient donc que

$$\begin{aligned} \int_B |\nabla w(\varphi)|^2 d\mathbf{y} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_n} |\nabla w(\varphi)|^2 d\mathbf{y} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} |\nabla \tau_n w(\varphi)|^2 d\mathbf{y} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} |r|^{2n} \int_{\mathcal{C}_0} |\nabla w(\varphi)|^2 d\mathbf{y} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1-r^n}{1-r} \right|^2 \int_{\mathcal{C}_0} |\nabla \mathcal{M}\varphi|^2 d\mathbf{y}}_{=0}. \end{aligned}$$

On note  $C = \int_{\mathcal{C}_0} |\nabla w(\varphi)|^2 d\mathbf{y}$  indépendant de  $n$ .  $w(\varphi)$  ne peut pas être constant dans la première cellule car  $\varphi = a(\mathbf{y})\nabla w(\varphi) \cdot \mathbf{e}_1|_{\Gamma_0} \neq 0$ . Cela implique que  $C > 0$ . Par définition de la norme sur  $W(B)$ , on a

$$\int_B |\nabla w(\varphi)|^2 d\mathbf{y} \leq \|w(\varphi)\|_{W(B)}^2 < +\infty,$$

et comme

$$\int_B |\nabla w(\varphi)|^2 d\mathbf{y} = C \sum_{n=0}^{+\infty} |r|^{2n},$$

on en déduit que

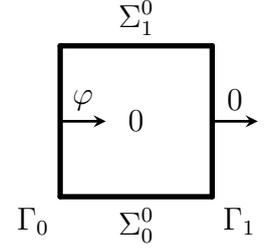
$$\int_B |\nabla w(\varphi)|^2 d\mathbf{y} < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |r|^{2n} < +\infty \Leftrightarrow |r| < 1.$$

Finalement, on a montré que  $|r| < 1$  et par passage à la borne supérieure, comme  $\mathcal{P}$  est compact, on en déduit que  $\rho(\mathcal{P}) < 1$ .  $\square$

Revenons au calcul de  $w(\varphi)$ . En utilisant la relation de propagation (4.18), calculer  $w(\varphi)$  dans chacune des cellules  $\mathcal{C}_n$  revient à calculer  $\tau_n w(\varphi)$  dans la première cellule  $\mathcal{C}_0$ . Il est alors naturel d'introduire les problèmes de cellule :

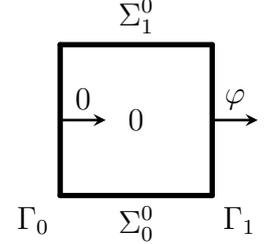
Trouver  $e_0(\varphi)$  et  $e_1(\varphi)$  dans  $H_{\#}^1(\mathcal{C}_0)$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla e_0(\varphi)] = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_0 \\ a(\mathbf{y})\nabla e_0(\varphi) \cdot \mathbf{e}_1 = \varphi & \text{sur } \Gamma_0 \\ a(\mathbf{y})\nabla e_0(\varphi) \cdot \mathbf{e}_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \int_{\Gamma_0} e_0(\varphi) dy_2 = 0 & \\ e_0(\varphi) & y_2\text{-périodique} \end{array} \right. \quad (4.20)$$



et

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla e_1(\varphi)] = 0 & \text{dans } \mathcal{C}_0 \\ a(\mathbf{y})\nabla e_1(\varphi) \cdot \mathbf{e}_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ a(\mathbf{y})\nabla e_1(\varphi) \cdot \mathbf{e}_1 = \varphi & \text{sur } \Gamma_1 \\ \int_{\Gamma_0} e_1(\varphi) dy_2 = 0 & \\ e_1(\varphi) & y_2\text{-périodique} \end{array} \right. \quad (4.21)$$



Ainsi, on peut écrire que dans la première cellule

$$w(\varphi)|_{\mathcal{C}_0} = e_0(\varphi) + e_1(\mathcal{P}\varphi),$$

et que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par (4.18),

$$\tau_n w(\varphi)|_{\mathcal{C}_0} = e_0(\mathcal{P}^n \varphi) + e_1(\mathcal{P}^{n+1} \varphi) + \mathcal{M} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}^k \varphi.$$

Il ne nous reste plus qu'à caractériser les opérateurs  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{M}$ . Tout d'abord, on remarque que

$$\int_{\Gamma_1} w(\varphi) dy_2 = \int_{\Gamma_1} e_0(\varphi) + e_1(\mathcal{P}\varphi) dy_2 = \mathcal{M}\varphi.$$

Donc en notant pour  $i = 0, 1$ ,  $\mathcal{M}_i \varphi = \int_{\Gamma_1} e_i(\varphi) dy_2$ , on en déduit que

$$\mathcal{M}\varphi = \mathcal{M}_0 \varphi + \mathcal{M}_1 \mathcal{P}\varphi.$$

Ensuite, la relation de propagation (4.18) garantit la continuité de la dérivée normale à travers chaque interface  $\Gamma_n$ . Comme  $w(\varphi)$  est continue à travers chacune de ces interfaces, notamment à travers  $\Gamma^1$ , on a

$$(w(\varphi)|_{\mathcal{C}_0})|_{\Gamma_1} = (w(\varphi)|_{\mathcal{C}_1})|_{\Gamma_1}$$

ce qui se ré-écrit

$$w(\varphi)|_{\Gamma_1} = \tau_1 w(\varphi)|_{\Gamma_0}$$

d'où

$$(e_0(\varphi) + e_1(\mathcal{P}\varphi))|_{\Gamma_1} = (e_0(\mathcal{P}\varphi) + e_1(\mathcal{P}^2\varphi) + \mathcal{M}\varphi)|_{\Gamma_0}.$$

Donc en posant pour  $i, j = 0, 1$  les opérateurs

$$\mathcal{S}_{ij} : \begin{array}{l} \tilde{V}_0(\Gamma_0) \rightarrow H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) \\ \varphi \mapsto e_i(\varphi)|_{\Gamma_j} \end{array},$$

et en utilisant les opérateurs  $\mathcal{M}_i$ , on montre que  $\mathcal{P}$  est solution de l'équation de Riccati

$$\mathcal{S}_{10} \mathcal{P}^2 \varphi + (\mathcal{S}_{00} - \mathcal{S}_{11} + \mathcal{M}_1) \mathcal{P} \varphi - \mathcal{S}_{01} \varphi + \mathcal{M}_0 \varphi = 0. \quad (4.22)$$

**Proposition 4.12.**  $\mathcal{P}$  est l'unique solution  $\mathcal{L}(\tilde{V}_0(\Gamma_0))$  de (4.22) de rayon spectral  $\rho(\mathcal{P}) < 1$ .

*Démonstration.* La démonstration est similaire à celle de 4.5.  $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(\tilde{V}_0(\Gamma_0))$  vérifie (4.22) et d'après la proposition 4.11,  $\rho(\mathcal{P}) < 1$ . Montrons qu'il est unique.

Soit  $\mathcal{P}'$  un opérateur continu sur  $\tilde{V}_0(\Gamma_0)$  solution de l'équation (4.22) tel que  $\rho(\mathcal{P}') < 1$ . Soit  $\varphi \in \tilde{V}_0(\Gamma_0)$  et définissons la fonction  $w'(\varphi)$  par

$$w'(\varphi)|_{\mathcal{C}_0} = e_0(\varphi) + e_1(\mathcal{P}'\varphi),$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \tau_n w'(\varphi)|_{\mathcal{C}_0} = e_0(\mathcal{P}'^n \varphi) + e_1(\mathcal{P}'^{n+1} \varphi) + \mathcal{M}' \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}'^k \varphi$$

où  $\mathcal{M}' = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 \mathcal{P}'$ . On a que  $w'(\varphi)$  est solution de l'équation  $-\operatorname{div}[a(\mathbf{y})\nabla w'(\varphi)] = 0$  dans chacune des cellules  $\mathcal{C}_n$ . De plus, la dérivée normale de  $w'(\varphi)$  est continue à travers les interfaces  $\Gamma_n$  par construction et comme  $\mathcal{P}'$  satisfait l'équation (4.22), sa trace sur chacune des interfaces  $\Gamma_n$  est également continue. On en déduit que  $w'(\varphi) \in H_{loc}^1(B)$  satisfait l'équation volumique dans  $B$ . Montrons que  $w'(\varphi) \in W_{\#}(B)$ . Comme  $e_0(\varphi)$  et  $e_1(\varphi)$  sont dans  $H_{\#}^1(\mathcal{C}_0)$  et que  $\mathcal{M}'$  est un opérateur à valeur réelle,  $w'(\varphi)$  est périodique dans la direction  $\vec{e}_2$ . Il ne reste qu'à montrer que  $w'(\varphi) \in W(B)$ .

Nous posons la fonction intermédiaire  $\tilde{w}'(\varphi) = w'(\varphi) - \mathcal{M}' \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{P}'^k \varphi$ , la série étant convergente car  $\rho(\mathcal{P}') < 1$ . Nous allons montrer que  $\tilde{w}'(\varphi) \in H^1(B)$ . On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tau_n \tilde{w}'(\varphi)|_{\mathcal{C}_0} = e_0(\mathcal{P}'^n \varphi) + e_1(\mathcal{P}'^{n+1} \varphi) - \mathcal{M}' \sum_{k=n}^{+\infty} \mathcal{P}'^k \varphi.$$

Nous allons utiliser le fait que l'application

$$\begin{aligned} \tilde{V}_0(\Gamma_0) &\rightarrow H_{\#}^1(\mathcal{C}_0) \\ \varphi &\mapsto e_0(\varphi) + e_1(\mathcal{P}'\varphi) \end{aligned}$$

est continue. Il existe donc  $C > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}'(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C}_n)} &= \|\tau_n \tilde{w}'(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C}_0)} \\ &\leq \|e_0(\mathcal{P}'^n \varphi) + e_1(\mathcal{P}' \mathcal{P}'^n \varphi)\|_{H^1(\mathcal{C}_0)} + \left| \mathcal{M}' \sum_{k=n}^{+\infty} \mathcal{P}'^k \varphi \right| \\ &\leq C \|\mathcal{P}'^n \varphi_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} + \left| \mathcal{M}' \sum_{k=n}^{+\infty} \mathcal{P}'^k \varphi \right|. \end{aligned}$$

Or  $\mathcal{P}'$  a un rayon spectral strictement inférieur à 1 et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{P}'^n\|_{\mathcal{L}(\tilde{V}_0(\Gamma_0))}^{1/n} = \rho(\mathcal{P}').$$

Donc pour  $\rho_* \in ]\rho(\mathcal{P}'_{|\tilde{V}_0(\Gamma_0)}), 1[$ , il existe  $n_0$  tel que

$$\forall n \geq n_0, \|\mathcal{P}'^n\|_{\mathcal{L}(\tilde{V}_0(\Gamma_0))} \leq \rho_*^n.$$

Ainsi, pour  $n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}'(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C}_n)} &\leq C \rho_*^n \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} + \|\mathcal{M}'\|_{\mathcal{L}(\tilde{V}_0(\Gamma_0; \mathbb{R}))} \sum_{k=n}^{+\infty} \rho_*^k \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} \\ &\leq C \rho_*^n \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} + \frac{\rho_*^n}{1 - \rho_*} \|\mathcal{M}'\|_{\mathcal{L}(\tilde{V}_0(\Gamma_0; \mathbb{R}))} \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)}. \end{aligned}$$

Comme  $\rho_* < 1$ , on en déduit que  $\tilde{w}'(\varphi) \in H^1(B)$ . Comme  $\tilde{w}'(\varphi)$  et  $w'(\varphi)$  diffèrent d'une constante, et que  $W(B)$  contient  $H^1(B)$  et les fonctions constantes sur  $B$ , on en déduit que  $w'(\varphi) \in W(B)$ .

On a donc que  $w'(\varphi) \in W_{\#}(B)$ . Par unicité de la solution de (4.17), on en déduit que  $w'(\varphi) = w(\varphi)$  et donc leur dérivée normale sur  $\Gamma_1$  sont égales et ce pour tout  $\varphi \in \tilde{V}_0(\Gamma_0)$  :

$$\mathcal{P}\varphi = a(\mathbf{y})\nabla w(\varphi) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{1}}|_{\Gamma_1} = a(\mathbf{y})\nabla w'(\varphi) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{1}}|_{\Gamma_1} = \mathcal{P}'\varphi.$$

D'où l'unicité de  $\mathcal{P}$ . □

Une fois que nous connaissons cet opérateur de propagation  $\mathcal{P}$ , on peut calculer l'opérateur  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1\mathcal{P}$  et enfin calculer  $w(\varphi)$  cellule par cellule et la reconstruire dans toute la bande  $B$ . On peut également déterminer l'opérateur NtD (Neumann-to-Dirichlet)  $\Lambda^{\text{NtD}}$  associé au problème (4.17) :

$$\begin{aligned} \Lambda^{\text{NtD}} : \tilde{V}_0(\Gamma_0) &\rightarrow H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) \\ \varphi &\mapsto w(\varphi)|_{\Gamma_0}. \end{aligned}$$

On peut l'exprimer aisément grâce aux opérateurs  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{S}_{ij}$  :

$$\begin{aligned} \Lambda^{\text{NtD}}\varphi &= w(\varphi)|_{\Gamma_0} \\ &= (e_0(\varphi) + e_1(\mathcal{P}\varphi))|_{\Gamma_0} \\ &= (\mathcal{S}_{00} + \mathcal{S}_{10}\mathcal{P})\varphi. \end{aligned}$$

### 4.3.2 Alternative utilisant l'opérateur Dirichlet-to-Neumann

En pratique, nous n'utilisons pas cette méthode de résolution pour les problèmes avec condition de Neumann. Nous avons préféré réutiliser ce qui a été fait pour le problème avec condition de Dirichlet. L'idée est d'inverser l'opérateur Dirichlet-to-Neumann (DtN) et d'appliquer cet inverse à la condition de Neumann afin de se ramener à un problème avec condition de Dirichlet.

Soit  $\psi \in \tilde{V}_0(\Gamma_0)$ . Le problème qui nous intéresse est le suivant :  
Trouver  $v(\psi) \in H_{\#}^1(B)$  vérifiant

$$\begin{cases} -\text{div}[a(\mathbf{y})\nabla v(\psi)] = 0 & \text{dans } B \\ a(\mathbf{y})\nabla v(\psi) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{1}} = \psi & \text{sur } \Gamma_0 \\ v(\psi) \quad y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (4.23)$$

**Théorème 4.13.** Le problème (4.23) admet une unique solution dans  $H_{\#}^1(B)$ .

*Démonstration.* Considérons l'unique solution  $w(\psi) \in W_{\#}(B)$  du problème (4.17) pour la donnée  $\psi$ . On note  $\phi = w(\psi)|_{\Gamma_0}$  la trace de  $w(\psi)$  sur  $\Gamma_0$  et on pose

$$w' = w(\psi) - l(\phi).$$

Alors  $w' = u(\phi_{w'})$  l'unique solution du problème dans  $W_{\#}(B)$  de (4.1) avec la donnée  $\phi_{w'} = w(\psi)|_{\Gamma_0} - l(\phi) = \phi - l(\phi)$ . Par linéarité, on a  $\phi_{w'} \in V_0(\Gamma_0)$ . Donc par le corollaire 4.6, on en déduit que  $w' \in H_{\#}^1(B)$ . De plus, par construction,  $w'$  satisfait (4.23). Il nous reste à montrer qu'il est unique.

Soit  $\tilde{w} \in H_{\#}^1(B)$  satisfaisant (4.23). Alors  $\tilde{w}' = \tilde{w} - \int_{\Gamma_0} \tilde{w} dy_2$  satisfait le problème (4.17) avec la donnée  $\psi$ . Donc par unicité, on a  $\tilde{w}' = w(\psi)$ . Donc, comme  $\phi = w(\psi)|_{\Gamma_0} = \tilde{w}'|_{\Gamma_0}$ ,

$$\begin{aligned} w' &= \tilde{w}' - l(\tilde{w}'|_{\Gamma_0}) \\ &= \tilde{w} - \int_{\Gamma_0} \tilde{w} dy_2 - l(\tilde{w}|_{\Gamma_0}) + \int_{\Gamma_0} \tilde{w} dy_2 \\ &= \tilde{w} - l(\tilde{w}|_{\Gamma_0}). \end{aligned}$$

Or  $\tilde{w} \in H_{\#}^1(B)$  donc  $l(\tilde{w}|_{\Gamma_0}) = 0$  et ainsi  $w' = \tilde{w}$ .  $\square$

Soit  $v(\psi) \in H_{\#}^1(B)$  l'unique solution de (4.23). On cherche à résoudre ce problème numériquement en utilisant la méthode développée dans le paragraphe 4.1.

L'opérateur DtN est défini sur l'espace  $H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$  à valeur dans  $H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_0)$  par

$$\forall \varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0), \quad \Lambda^{\text{DtN}} \varphi = a(\mathbf{y}) \nabla u(\varphi) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|_{\Gamma_0}$$

où  $u(\varphi)$  est l'unique solution dans  $W_{\#}(B)$  de

$$\begin{cases} -\text{div}[a(\mathbf{y}) \nabla u(\varphi)] & = 0 & \text{dans } B \\ u(\varphi) & = \varphi & \text{sur } \Gamma_0 \\ u(\varphi) & & y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (4.24)$$

Cet opérateur possède un noyau qui est constitué des fonctions constantes. On rappelle que  $H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) = \mathbb{R} \oplus V_0(\Gamma_0)$  où  $V_0(\Gamma_0)$  est le noyau de la forme linéaire  $l$  définie en (4.4), et que  $\mathcal{R}_0$  est défini comme la restriction de  $\mathcal{R}$  sur  $V_0(\Gamma_0)$ . Nous notons également  $\Lambda_0^{\text{DtN}}$  la restriction de  $\Lambda^{\text{DtN}}$  à  $V_0(\Gamma_0)$ .

Pour tout  $\varphi \in V_0(\Gamma_0)$ , on a par la proposition 4.7 que  $\langle \Lambda^{\text{DtN}} \varphi, 1 \rangle_{\Gamma_0} = 0$ , ce qui implique que  $\Lambda^{\text{DtN}} \varphi \in \tilde{V}_0(\Gamma_0)$ . Donc  $\text{Im}(\Lambda_0^{\text{DtN}}) = \tilde{V}_0(\Gamma_0)$ .

Par ailleurs, l'opérateur NtD  $\Lambda^{\text{NtD}} : \tilde{V}_0 \rightarrow H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$  associé au problème (4.23) est défini sur  $\tilde{V}_0(\Gamma_0)$  par

$$\forall \psi \in \tilde{V}_0(\Gamma_0), \quad \Lambda^{\text{NtD}} \psi = v(\psi)|_{\Gamma_0}.$$

Pour tout  $\psi \in \tilde{V}_0(\Gamma_0)$ ,  $v(\psi) \in H_{\#}^1(B)$  donc par le corollaire 4.6, on a que  $\Lambda^{\text{NtD}} \psi = v(\psi)|_{\Gamma_0} \in V_0(\Gamma_0)$ . Donc  $\text{Im}(\Lambda^{\text{NtD}}) = V_0(\Gamma_0)$ .

Finalement, en utilisant l'unicité des solutions des problèmes (4.24) et (4.23), on en déduit que

$$\forall \varphi \in V_0(\Gamma_0), \quad \Lambda^{\text{NtD}} \circ \Lambda_0^{\text{DtN}} \varphi = \varphi,$$

et

$$\forall \psi \in \tilde{V}_0(\Gamma_0), \quad \Lambda_0^{\text{DtN}} \circ \Lambda^{\text{NtD}} \psi = \psi.$$

On en déduit donc que  $\Lambda_0^{\text{DtN}}$  est inversible et que son inverse est  $\Lambda^{\text{NtD}}$ .

## 4.4 Résolutions et applications numériques

Dans cette partie, nous expliquons la résolution numérique des méthodes établies pour le problème avec condition de Dirichlet.

### 4.4.1 Calcul des opérateurs de propagation

Commençons par le calcul numérique de l'opérateur de propagation  $\mathcal{R}$ . Nous fixons  $N \in \mathbb{N}^*$  et nous discrétisons l'espace  $H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$  par une base  $(\varphi_n)_{n \leq N}$ . Pour la suite, nous utiliserons la même notation pour l'opérateur et sa matrice dans la base. Les sections  $\Gamma_i$  étant toutes identifiées à  $\Gamma_0$ , nous identifierons les discrétisations des espaces  $H_{\#}^{1/2}(\Gamma_i)$  à celle de  $H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0)$ .

Dans un premier temps, il est nécessaire de calculer pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  les solutions  $e_0(\varphi_n)$  et  $e_1(\varphi_n)$  des problèmes de cellule (4.1) et (4.1).

Ensuite, nous pouvons calculer les matrices  $T_{ij}$ . Le choix d'une base orthonormée permet de grandement simplifier les calculs. En effet, en utilisant les problèmes de cellule et en intégrant par partie, on aura que pour tout  $i, j = 0, 1$  et pour tout  $n, m \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}_{ij}]_{nm} &= \langle \mathcal{T}_{ij} \varphi_n, \varphi_m \rangle_{\Gamma_j} \\ &= (-1)^{j+1} \langle a \nabla e_i(\varphi_n) \cdot \mathbf{e}_1, \overline{e_j(\varphi_m)} \rangle_{\Gamma_j} \\ &= \int_{\mathcal{C}_0} a(\mathbf{y}) \nabla e_i(\varphi_n) \overline{\nabla e_j(\varphi_m)} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Désormais, il reste à résoudre l'équation de Riccati (4.8) pour trouver  $\mathcal{R}$ .

Soit  $r$  une valeur propre de  $\mathcal{R}$  et  $\varphi$  un vecteur propre associé :  $\mathcal{R}\varphi = r\varphi$ . En utilisant ce vecteur propre dans l'équation de Riccati, on a

$$(\mathcal{T}_{10}r^2 + (\mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{11})r + \mathcal{T}_{01})\varphi = 0.$$

Si on note  $\psi = r\varphi (= \mathcal{R}\varphi)$ , on a alors le problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & Id \\ \mathcal{T}_{01} & \mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & -\mathcal{T}_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}$$

Par le théorème 4.5, les valeurs propres qui nous intéressent sont celles vérifiant  $|r| \leq 1$ . Grâce aux valeurs propres et vecteurs propres, on peut reconstruire la matrice de  $\mathcal{R}$  dans la base des  $\varphi_n$ .

Enfin, avec les matrices de  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{T}_{00}$  et  $\mathcal{T}_{11}$  dans la base  $(\varphi_n)$ , on peut donc obtenir celle de l'opérateur DtN  $\Lambda^{\text{DtN}}$ .

Le calcul numérique de l'opérateur  $\tilde{\mathcal{R}}$  est plus délicat. Cette fois-ci, nous devons discrétiser l'espace

$$V_0(\Gamma_0) = \ker l = \left\{ \varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Gamma_0) / \langle a \nabla \mathcal{N} \cdot \mathbf{e}_1, \varphi \rangle_{\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

Nous avons vu que la forme linéaire  $l$  est non nulle car  $l(1) = 1$ . Donc pour  $N$  assez grand, il existe  $n_0 \leq N$  tel que  $l(\varphi_{n_0}) \neq 0$ . Quitte à re-numéroter les vecteurs de la base, on prendra  $n_0 = N$ . On pose donc pour tout  $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ ,

$$\psi_n = \varphi_n - \frac{l(\varphi_n)}{l(\varphi_N)} \varphi_N. \quad (4.25)$$

Alors l'espace vectoriel engendré par la famille  $(\psi_n)_{n \leq N-1}$  est une discrétisation de  $V_0(\Gamma_0)$ . Pour réutiliser les matrices précédemment calculées, nous calculons les opérateurs  $\tilde{T}_{ij}$  dans la base des  $\varphi_n$  puis nous projetons sur  $V_0(\Gamma_0)$  avec une matrice de projection  $P \in \mathcal{M}_{N, N-1}(\mathbb{C})$  :

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{T}}_{ij}]_{nm} &= \langle \tilde{\mathcal{T}}_{ij} \varphi_n, \varphi_m \rangle_{\Gamma_j} \\ &= \langle a \nabla \tilde{e}_i(\varphi_n), e_j(\varphi_m) \rangle_{\Gamma_j} \\ &= \int_{\mathcal{C}_0} a(\mathbf{y}) \nabla \tilde{e}_i(\varphi_n) \overline{\nabla e_j(\varphi_m)} d\mathbf{y} - \int_{\mathcal{C}_0} \mathcal{L} e_i(\varphi_n) \overline{e_j(\varphi_m)} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Revenons à l'équation (4.16) vérifiée par  $\tilde{\mathcal{R}}$  :

$$\mathcal{T}_{10} \tilde{\mathcal{R}} \mathcal{R} + (\mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{11} + \mathcal{T}_{10} \mathcal{R}) \tilde{\mathcal{R}} = - \left[ \tilde{\mathcal{T}}_{10} \mathcal{R}^2 + (\tilde{\mathcal{T}}_{00} + \tilde{\mathcal{T}}_{11}) \mathcal{R} + \tilde{\mathcal{T}}_{01} \right].$$

Afin de résoudre l'équation dans les bons espaces, nous allons utiliser la matrice de projection  $P$  ainsi qu'une matrice  $I \in \mathcal{M}_{N-1, N}(\mathbb{C})$  de « relèvement » correspondant à l'identité de taille  $N$  à laquelle on retire la dernière ligne correspondant à  $\varphi_N$  et nous obtenons :

$$\mathcal{T}_{10} \tilde{\mathcal{R}} I R P + (\mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{11} + \mathcal{T}_{10} \mathcal{R}) \tilde{\mathcal{R}} = - \left[ \tilde{\mathcal{T}}_{10} \mathcal{R}^2 + (\tilde{\mathcal{T}}_{00} + \tilde{\mathcal{T}}_{11}) \mathcal{R} + \tilde{\mathcal{T}}_{01} \right] P.$$

Nous résolvons numériquement cette équation en utilisant la méthode d'Hessenberg-Schur [69].

## 4.4.2 Calcul des conditions au bord

### Condition de Dirichlet

Dans le chapitre 2, nous avons déterminé une condition au bord pour le terme homogénéisé  $\hat{u}_1$  :

$$\hat{u}_1|_{\Gamma} = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_0|_{\Gamma},$$

où

$$d_1^i = -\langle a \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \bar{\mathbf{n}}, g_i^1 \rangle_{\Gamma_0}.$$

Pour calculer ce terme, nous décomposons  $\mathcal{N}$  sous la forme  $\mathcal{N} = \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} + \tilde{\mathcal{N}}$  où  $\tilde{\mathcal{N}}$  est la solution dans  $W_{\#}(B)$  de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathcal{N}}] = 0 & \text{dans } B \\ \tilde{\mathcal{N}} = -\frac{w_1}{a_{11}^*} & \text{sur } \Gamma_0 \\ \tilde{\mathcal{N}} \text{ } y_2\text{-périodique} \end{cases} \quad (4.26)$$

On a alors  $a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{N} \cdot \bar{\mathbf{n}} = a(\mathbf{y}) \nabla \left( \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} \right) \cdot \bar{\mathbf{n}} + a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathcal{N}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$ . Comme  $\tilde{\mathcal{N}}$  est solution de (4.26), par définition de l'opérateur DtN, on a  $a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathcal{N}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \Lambda^{\text{DtN}} \left( -\frac{w_1}{a_{11}^*} \right)$ . On peut alors utiliser ce que nous avons fait dans la section 4.1 pour calculer ce terme et ainsi calculer les coefficients  $d_1^i$ .

A présent, regardons la condition au bord satisfaite par  $\hat{u}_2$  :

$$\hat{u}_2|_{\Gamma} = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} \hat{u}_1|_{\Gamma} + \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_0|_{\Gamma} + d_2^0 u_0|_{\Gamma}.$$

Dans cette expression, les coefficients  $d_2^{ij}$  et  $d_2^0$  font intervenir un terme de bord qui se calcule de la même manière que pour les  $d_1^i$ . Pour les coefficients  $d_2^{12}$  et  $d_2^{22}$ , nous avons également besoin de calculer une intégrale dans la demi-bande infinie :

$$d_2^{i2} = \int_B f_2^{i2} \mathcal{N} d\mathbf{y} - \langle a \nabla \mathcal{N} \cdot \bar{\mathbf{n}}, g_2^{i2} \rangle_{\Gamma_0}$$

où

$$f_2^{i2} = \mathcal{L}U_1^i = a(\mathbf{y}) \partial_{y_2} U_1^i(\mathbf{y}) + \partial_{y_2}(a(\mathbf{y}) U_1^i(\mathbf{y})).$$

Or les  $U_1^i$  sont solutions des problèmes respectifs

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U_1^i] = 0 & \text{dans } B \\ U_1^i = g_1^i - d_1^i & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

et leur condition au bord  $\varphi^i = g_1^i - d_1^i$  vérifie  $\varphi^i \in V_0(\Gamma_0)$ .

Finalement, pour  $\varphi \in V_0(\Gamma_0)$ , nous devons être en mesure de calculer l'intégrale

$$I(\varphi) = \int_B \mathcal{L}u(\varphi) \mathcal{N} d\mathbf{y}$$

avec  $u(\varphi)$  solution du problème (4.1).

On rappelle que  $\mathcal{N} = \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} + \tilde{\mathcal{N}}$ . On a donc

$$I(\varphi) = \int_B \mathcal{L}u(\varphi) \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} d\mathbf{y} + \int_B \mathcal{L}u(\varphi) \tilde{\mathcal{N}} d\mathbf{y}.$$

Regardons la première intégrale. Nous avons montré que dans chaque cellule  $\mathcal{C}_n$ ,  $u(\varphi)$  s'écrit sous la forme

$$u(\varphi)|_{\mathcal{C}_n} = e_0(\mathcal{R}^n\varphi) + e_1(\mathcal{R}^{n+1}\varphi).$$

On commence par décomposer l'intégrale sur la demi-bande en somme d'intégrales sur chacune des cellules :

$$\int_B \mathcal{L}u(\varphi) \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} d\mathbf{y} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_n} \mathcal{L}u(\varphi) \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} d\mathbf{y}.$$

On a donc en utilisant la périodicité de  $w_1$ ,

$$\int_B \mathcal{L}u(\varphi) \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} d\mathbf{y} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}_0} \mathcal{L}(e_0(\mathcal{R}^n\varphi) + e_1(\mathcal{R}^{n+1}\varphi)) \frac{y_1 + n + w_1}{a_{11}^*} d\mathbf{y}.$$

Donc par linéarité,

$$\begin{aligned} \int_B \mathcal{L}u(\varphi) \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} d\mathbf{y} &= \int_{\mathcal{C}_0} \mathcal{L}e_0 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{R}^n\varphi \right) + \mathcal{L}e_1 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{R}^{n+1}\varphi \right) \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} d\mathbf{y} \\ &\quad + \frac{1}{a_{11}^*} \int_{\mathcal{C}_0} \mathcal{L}e_0 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathcal{R}^n\varphi \right) + \mathcal{L}e_1 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathcal{R}^{n+1}\varphi \right) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Bien que pour l'instant les calculs étaient formels, on peut affirmer que les sommes  $\sum \mathcal{R}^n$  et  $\sum n\mathcal{R}^{n-1}$  sont bien convergentes. En effet, l'espace propre associé à la valeur propre 1 est constitué des fonctions constantes. Donc sur  $V_0(\Gamma_0)$ , le rayon spectral de  $\mathcal{R}$  est strictement inférieur à 1. Ainsi, les deux sommes sont convergentes et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{R}^n = (Id - \mathcal{R})^{-1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathcal{R}^{n-1} = (Id - \mathcal{R})^{-2}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \int_B \mathcal{L}u(\varphi) \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} d\mathbf{y} &= \int_{\mathcal{C}_0} \mathcal{L}e_0 \left( (Id - \mathcal{R})^{-1}\varphi \right) + \mathcal{L}e_1 \left( \mathcal{R}(Id - \mathcal{R})^{-1}\varphi \right) \frac{y_1 + w_1}{a_{11}^*} d\mathbf{y} \\ &\quad + \frac{1}{a_{11}^*} \int_{\mathcal{C}_0} \mathcal{L}e_0 \left( \mathcal{R}(Id - \mathcal{R})^{-2}\varphi \right) + \mathcal{L}e_1 \left( \mathcal{R}^2(Id - \mathcal{R})^{-2}\varphi \right) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

En revanche, ce procédé ne peut être appliqué sur la deuxième intégrale. Cependant, les deux termes intégrés sont exponentiellement décroissants ( $\mathcal{L}u(\varphi)$  tend vers 0 et  $\tilde{\mathcal{N}}$  vers une constante), on peut donc avoir une bonne estimation en calculant l'intégrale sur une bande tronquée.

### Condition de Neumann

De manière analogue, nous avons montré dans le chapitre 3 que la condition au bord pour  $\hat{u}_1$  est

$$A^* \nabla \hat{u}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}|_{\Gamma} = c_1^{12} \partial_{x_1 x_2}^2 u_0|_{\Gamma} + c_1^{22} \partial_{x_2}^2 u_0|_{\Gamma} + \omega^2 c_1^0 u_0|_{\Gamma}.$$

où les coefficients  $c_1^{12}$  et  $c_1^{22}$  font intervenir le calcul d'intégrale de la forme  $\int_B U_1^i d\mathbf{y}$ . En utilisant l'inverse de l'opérateur DtN et la méthode de calcul du problème de bande avec condition de Dirichlet, nous avons à calculer une intégrale de la forme  $\int_B u(\varphi) d\mathbf{y}$  avec  $\varphi \in V_0(\Gamma_0)$  et  $u(\varphi)$  solution du problème (4.1). Par de calculs analogues, on trouve

$$\int_B u(\varphi) d\mathbf{y} = \int_{\mathcal{C}_0} e_0((I - \mathcal{R})^{-1}\varphi) + e_1(\mathcal{R}(I - \mathcal{R})^{-1}\varphi) d\mathbf{y}.$$

Enfin, dans la condition au bord de  $\hat{u}_2$ , les coefficients font apparaitre des intégrales du type  $\int_B v(\varphi) d\mathbf{y}$  où  $\varphi \in V_0(\Gamma_0)$  et  $v(\varphi) \in W_{\#}(B)$  est solution du problème (4.9). Encore une fois, nous allons décomposer l'intégrale sur les différentes cellules et utiliser la linéarité par rapport à  $\varphi$  des problèmes de cellule :

$$\begin{aligned} \int_B v(\varphi) d\mathbf{y} &= \sum_n \int_{\mathcal{C}_n} v(\varphi) d\mathbf{y} \\ &= \sum_n \int_{\mathcal{C}_0} e_0(\psi_n) + e_1(\psi_{n+1}) + \tilde{e}_0(\mathcal{R}^n \varphi) + \tilde{e}_1(\mathcal{R}^{n+1} \varphi) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathcal{C}_0} e_0 \left( \sum_n \psi_n \right) + e_1 \left( \sum_n \psi_{n+1} \right) + \tilde{e}_0 \left( \sum_n \mathcal{R}^n \varphi \right) + \tilde{e}_1 \left( \sum_n \mathcal{R}^{n+1} \varphi \right) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Nous voyons apparaitre la somme  $\sum_n \psi_n$ . On rappelle qui sont défini par la relation de récurrence  $\psi_0 = 0$  et  $\psi_{n+1} = \tilde{\mathcal{R}} \mathcal{R}^n \varphi + \mathcal{R} \psi_n$ . On peut obtenir une expression explicite de cette suite de fonction : pour tout  $n \geq 1$ ,  $\psi_n = \sum_{p=0}^{n-1} \mathcal{R}^p \tilde{\mathcal{R}} \mathcal{R}^{n-1-p} \varphi$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_n \psi_n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \mathcal{R}^p \tilde{\mathcal{R}} \mathcal{R}^{n-1-p} \varphi \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=p+1}^{+\infty} \mathcal{R}^p \tilde{\mathcal{R}} \mathcal{R}^{n-1-p} \varphi \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{R}^p \tilde{\mathcal{R}} \mathcal{R}^n \varphi \\ &= (I - \mathcal{R})^{-1} \tilde{\mathcal{R}} (I - \mathcal{R})^{-1} \varphi \end{aligned}$$

Et de même, comme  $\psi_0 = 0$ ,  $\sum_n \psi_{n+1} = (I - \mathcal{R})^{-1} \tilde{\mathcal{R}} (I - \mathcal{R})^{-1} \varphi$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_B v(\varphi) d\mathbf{y} &= \int_{\mathcal{C}_0} e_0((I - \mathcal{R})^{-1} \tilde{\mathcal{R}} (I - \mathcal{R})^{-1} \varphi) + e_1((I - \mathcal{R})^{-1} \tilde{\mathcal{R}} (I - \mathcal{R})^{-1} \varphi) + \tilde{e}_0((I - \mathcal{R})^{-1} \varphi) \\ &\quad + \tilde{e}_1(\mathcal{R} (I - \mathcal{R})^{-1} \varphi) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

# Homogénéisation de l'équation des ondes en temps long : prise en compte d'un bord de Dirichlet

## Sommaire

---

<b>5.1 Homogénéisation de l'équation des ondes en temps long dans <math>\mathbb{R}^d</math> .</b>	<b>123</b>
5.1.1 Développement asymptotique double échelle . . . . .	123
5.1.2 Modèle homogénéisé d'ordre élevé . . . . .	125
<b>5.2 Homogénéisation de l'équation des ondes en temps long dans <math>\mathbb{R}^+</math> .</b>	<b>127</b>

---

Dans ce chapitre, nous appliquons notre stratégie de modèle enrichi d'ordre élevé à l'homogénéisation de l'équation des ondes en régime transitoire en présence de bord avec une condition. Contrairement aux précédents chapitres, les résultats qui seront présentés ici sont purement formels.

Plusieurs travaux traitent de l'homogénéisation de l'équation des ondes dans  $\mathbb{R}^d$ . Par exemple, les travaux de Santosa et Symes [110] proposent un modèle effectif construit à partir des premiers termes du développements qui a été analysé et modifié par [82] puis par [57, 8]. On retrouve également des modèles similaires dans le cadre elliptique dans les travaux [14]. La difficulté qui apparaît dans le modèle de [110] vient de l'introduction dans l'équation d'un opérateur différentiel en espace d'ordre 4, rendant le problème pas toujours bien posé. Les travaux récents de [4, 3] et de [17] proposent un modèle approché en temps long pertinent (c'est à dire que le problème sous-jacent est bien posé). Tous ces travaux considèrent l'équation des ondes sans bord : nous cherchons à proposer des modèles d'ordre élevé en présence de bords.

## 5.1 Homogénéisation de l'équation des ondes en temps long dans $\mathbb{R}^d$

### 5.1.1 Développement asymptotique double échelle

Nous allons utiliser la méthode du développement double échelle comme nous l'avons fait pour l'équation de Helmholtz : formellement, la démarche est la même.

Nous nous intéressons au problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_\varepsilon - \operatorname{div} \left[ a \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right] = f & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u_\varepsilon(t=0; \cdot) = g^0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ \partial_t u_\varepsilon(t=0; \cdot) = g^1 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.1)$$

où :

- $\Omega = \mathbb{R}^d$ .
- la fonction  $a_\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$  où  $a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est  $Y$ -périodique où  $Y = (0, 1)^d$  est la cellule de périodicité. Ainsi  $a_\varepsilon$  est  $\varepsilon Y$ -périodique. De plus, on suppose que  $a$  est bornée et strictement positive :

$$\exists \lambda, \Lambda > 0, \quad \lambda \leq a \leq \Lambda.$$

- $f$  est un terme source de  $\mathbb{R}^+ \times \Omega$  tel que  $f(t; \cdot)$  est à support compact, et  $g^0, g^1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Comme pour l'équation de Helmholtz, nous faisons l'hypothèse que  $u_\varepsilon$  se décompose sous la forme

$$u_\varepsilon(t, \mathbf{x}) = u_0 \left( t; \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \varepsilon u_1 \left( t; \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 u_2 \left( t; \mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \dots, \quad \mathbf{x} \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+. \quad (5.2)$$

avec des termes  $u_n$   $Y$ -périodiques en la variable rapide  $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ .

En appliquant la méthode double échelle, comme nous l'avons fait dans la section 1.2, on montre que

- $u_0$  ne dépend pas de la variable rapide  $\mathbf{y}$  et est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_0 - \operatorname{div} [A^* \nabla u_0] = f & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u_0(t=0; \cdot) = g^0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ \partial_t u_0(t=0; \cdot) = g^1 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.3)$$

où  $A^* = (a_{ij}^*) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  est la matrice homogénéisée définie par

$$a_{ij}^* := \langle a \partial_{y_i} (w_j + y_j) \rangle_Y$$

avec pour  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $w_i$  est l'unique solution du problème de cellule défini par

$$\text{Trouver } w_i \in \dot{H}_\#^1(Y) \text{ tel que } \forall \psi \in \dot{H}_\#^1(Y),$$

$$(a \nabla w_i, \nabla \psi)_Y = - (a, \partial_{y_i} \psi)_Y$$

où  $(\cdot, \cdot)_Y$  désigne le produit scalaire de  $L^2(Y)$ . Nous rappelons que  $\dot{H}_\#^1(Y)$  est l'espace des fonctions de  $H_\#^1(Y)$  à moyenne nulle.

- $u_1$  s'écrit sous la forme

$$u_1(t; \mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_i w_i(\mathbf{y}) \partial_{x_i} u_0(t; \mathbf{x}) + \hat{u}_1(t; \mathbf{x})$$

où  $\hat{u}_1$  est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u}_1 - \operatorname{div} [A^* \nabla \hat{u}_1] = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \hat{u}_1(t=0; \cdot) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ \partial_t \hat{u}_1(t=0; \cdot) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.4)$$

Ainsi, on a  $\hat{u}_1 \equiv 0$  et  $u_1(t; \mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_i \partial_{x_i} u_0(t; \mathbf{x}) w_i(\mathbf{y})$ .

—  $u_2$  s'écrit sous la forme

$$u_2(t; \mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_{ij} \theta_{ij}(\mathbf{y}) \partial_{x_i x_j}^2 u_0(t; \mathbf{x}) + \sum_i w_i(\mathbf{y}) \partial_{x_i}(t; \mathbf{x}) + \hat{u}_2(t; \mathbf{x}),$$

où pour  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ ,  $\theta_{ij}$  est la solution du problème de cellule

$$\text{Trouver } \theta_{ij} \in \dot{H}_{\#}^1(Y) \text{ tel que } \forall \psi \in \dot{H}_{\#}^1(Y),$$

$$(a \nabla \theta_{ij}, \nabla \psi)_Y = (a \partial_{y_i} w_j, \psi)_Y - (a w_j, \partial_{y_i} \psi)_Y + (\delta_{ij} a - a_{ij}^*, \psi)_Y$$

et  $\hat{u}_2$  est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u}_2 - \operatorname{div} [A^* \nabla \hat{u}_2] = \sum_{ijkl} d_{ijkl}^* \partial_{x_i x_j x_k x_l}^4 u_0 - \sum_{ij} e_{ij}^* \partial_t^2 \partial_{x_i x_j}^2 u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \hat{u}_2(t=0; \cdot) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ \partial_t \hat{u}_2(t=0; \cdot) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.5)$$

où les coefficients  $d_{ijkl}^*$  et  $e_{ij}^*$  sont donnés par

$$d_{ijkl}^* = \langle a \partial_{y_i} \beta_{jkl} + \delta_{ij} a \theta_{kl} \rangle_Y, \quad e_{ij}^* = \langle a \partial_{y_i} \alpha_j \rangle_Y$$

avec  $\beta_{ijk}$  les solutions des problèmes de cellule

$$\text{Trouver } \beta_{ijk} \in \dot{H}_{\#}^1(Y) \text{ tel que } \forall \psi \in \dot{H}_{\#}^1(Y),$$

$$(a \nabla \beta_{ijk}, \nabla \psi)_Y = (a \partial_{y_i} \theta_{jkl}, \psi)_Y - (a \theta_{jkl}, \partial_{y_i} \psi)_Y + (\delta_{jk} a w_i, \psi)_Y - (c_{ijk}^*, \psi)_Y$$

et  $\alpha_i$  les solutions des problèmes de cellule

$$\text{Trouver } \alpha_i \in \dot{H}_{\#}^1(Y) \text{ tel que } \forall \psi \in \dot{H}_{\#}^1(Y),$$

$$(a \nabla \alpha_i, \nabla \psi)_Y = (w_i, \psi)_Y.$$

### 5.1.2 Modèle homogénéisé d'ordre élevé

La méthode du développement double échelle nous permet d'obtenir un problème homogénéisé dont la solution  $u_0$  approche le comportement macroscopique de  $u_\varepsilon$ . Cette approximation est valable lorsque le temps final  $T$  est de l'ordre de  $\mathcal{O}(1)$ . En revanche, en temps long, c'est-à-dire dans des temps de l'ordre de  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ , on observe dans le comportement macroscopique de  $u_\varepsilon$  un phénomène de dispersion (les ondes de longueur d'onde différentes se propagent à des vitesses différentes), qui n'est pas présent dans la solution  $u_0$  de l'équation des ondes avec coefficients homogènes. Plus précisément, dans [109], il est montré que

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C(T) \varepsilon$$

où la constante  $C(T)$  dépend linéairement du temps final  $T$ . Ainsi, si  $T^\varepsilon = \varepsilon^{-2} T = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ , on obtient la majoration

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^\infty(0, T^\varepsilon; L^2(\Omega))} \leq C(T) \varepsilon^{-1}.$$

La convergence de  $u_\varepsilon$  vers  $u_0$  est donc fortement dégradée en temps long. Numériquement, on voit apparaître de la dispersion dans  $u_\varepsilon$  non présente dans  $u_0$ . Afin de prendre en compte ce phénomène de dispersion, il est possible d'utiliser un modèle effectif d'ordre plus élevé. L'écriture d'une équation effective à partir de la somme tronquée des termes macroscopiques (non oscillants)

dans l'ansatz a été étudiée dans plusieurs travaux (citons notamment [14, 110, 82, 57]). L'idée serait de modifier l'équation homogénéisée satisfaite par  $u_0$  en y ajoutant des termes d'ordre élevé qui reproduiraient le phénomène de dispersion.

Ici, nous donnons l'équation effective d'ordre 2 qui permet d'avoir une meilleure approximation de la solution jusqu'à des temps en  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-4})$ . Pour des équations effectives d'ordre supérieurs, il faut se reporter par exemple à [17, 109, 4].

Cette équation effective d'ordre 2 est obtenue en considérant l'équation approchée vérifiée par  $v_\varepsilon = u_0 + \varepsilon^2 \hat{u}_2$ . Dans ce qui suit, nous présentons le « Boussinesq trick » appliqué à une équation effective obtenue à partir des équations satisfaites par  $u_0$  et  $\hat{u}_2$ . L'équation volumique satisfaite par  $\hat{u}_2$  s'écrit

$$\partial_t^2 \hat{u}_2 - \operatorname{div} [A^* \nabla \hat{u}_2] = \sum_{ijkl} d_{ijkl}^* \partial_{x_i x_j x_k x_l}^4 u_0 - \sum_{ij} e_{ij}^* \partial_t^2 \partial_{x_i x_j}^2 u_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \quad (5.6)$$

En additionnant (5.3) et  $\varepsilon^2 \times (5.6)$ , on obtient l'équation effective

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v_\varepsilon - \operatorname{div} [A^* \nabla v_\varepsilon] - \varepsilon^2 \underbrace{\mathbb{D}^* \nabla^4 v_\varepsilon}_{= \sum_{ijkl} d_{ijkl}^* \partial_{x_i x_j x_k x_l}^4 v_\varepsilon} + \varepsilon^2 \underbrace{\partial_t^2 \nabla \cdot [\mathbb{E}^* \cdot \nabla v_\varepsilon]}_{= - \sum_{ij} e_{ij}^* \partial_t^2 \partial_{x_i x_j}^2 v_\varepsilon} = f. \end{aligned}$$

Le matrice  $\mathbb{E}^*$  est positive (voir [9]). Si le tenseur  $\mathbb{D}^*$  était positif, le problème associé serait bien posé. Malheureusement (voir notamment [82, 57, 9]), le tenseur  $\mathbb{D}^*$  a le mauvais signe i.e.  $\sum_{ijkl} d_{ijkl}^* \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \leq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^4$ . Le problème obtenu n'est donc pas toujours bien posé dans le cadre fonctionnel naturel à ces équations (voir [109] section 2.1.2). Notons que le problème effectif obtenu à partir de la méthode par ondes de Bloch peut s'obtenir en ré-écrivant l'équation (5.6) (voir [9]) : du fait que  $\partial_t^2 u_0 = \operatorname{div} [A^* \nabla u_0] + f$ , on obtient alors que

$$\begin{aligned} \sum_{ij} e_{ij}^* \partial_t^2 \partial_{x_i x_j}^2 u_0 &= \sum_{ij} e_{ij}^* \partial_{x_i x_j}^2 (\operatorname{div} [a(\mathbf{y}) \nabla u_0] + f) \\ &= \sum_{ijkl} e_{ij}^* a_{kl}^* \partial_{x_i x_j x_k x_l}^2 u_0 + \sum_{ij} e_{ij}^* \partial_{x_i x_j}^2 f. \end{aligned}$$

On a alors que  $\hat{u}_2$  satisfait l'équation

$$\partial_t^2 \hat{u}_2 - \operatorname{div} [A^* \nabla \hat{u}_2] = - \sum_{ijkl} \tilde{d}_{ijkl}^* \partial_{x_i x_j x_k x_l}^4 u_0 - \sum_{ij} e_{ij}^* \partial_{x_i x_j}^2 f \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega$$

où

$$\tilde{d}_{ijkl}^* = -d_{ijkl}^* + e_{ij}^* a_{kl}^*.$$

Ce problème est malheureusement aussi mal posé (voir [110, 9]).

Pour modifier ces problèmes effectifs, on peut utiliser le « Boussinesq trick » ou « astuce de Boussinesq » (voir [57, 2, 66]).

Comme  $\mathbb{D}^*$  n'est pas positif, on a

$$m = \min_{\xi, \|\xi\|=1} \frac{\sum_{ijkl} d_{ijkl}^* \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l}{\sum_{ij} a_{ij}^* \xi_i \xi_j} < 0$$

et  $\sum_{ijkl} d_{ijkl}^* \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l - (\sum_{ij} a_{ij}^* \xi_i \xi_j) (\sum_{kl} m \xi_k \xi_l) \geq 0$ . On note  $\hat{d}_{ijkl}^* = d_{ijkl}^* - m a_{ij}^*$ . On écrit ensuite

$$\begin{aligned} \sum_{ijkl} d_{ijkl}^* \partial_{x_i x_j x_k x_l}^4 v_\varepsilon &= \sum_{ijkl} \hat{d}_{ijkl}^* \partial_{x_i x_j x_k x_l}^4 v_\varepsilon + \sum_{kl} m \partial_{x_k x_l}^2 \sum_{ij} a_{ij}^* \partial_{x_i x_j}^2 v_\varepsilon \\ &= \sum_{ijkl} \hat{d}_{ijkl}^* \partial_{x_i x_j x_k x_l}^4 v_\varepsilon + \sum_{kl} m \partial_{x_k x_l}^2 [\partial_t^2 v_\varepsilon - \tilde{f} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] \end{aligned}$$

En négligeant les termes d'ordre 2, on obtient la nouvelle équation effective

$$\partial_t^2 \tilde{v}_\varepsilon - \operatorname{div}[A^* \nabla \tilde{v}_\varepsilon] + \varepsilon^2 \sum_{ijkl} \hat{d}_{ijkl} \partial_{x_i x_j x_k x_l}^4 \tilde{v}_\varepsilon + \varepsilon^2 m \sum_{ij} \partial_t^2 \partial_{x_i x_j}^2 \tilde{v}_\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_t^2 \nabla \cdot [\mathbb{E}^* \cdot \nabla v_\varepsilon] = f - \varepsilon^2 m \sum_{x_i x_j} \partial_{x_i x_j}^2 f.$$

Il est même possible de proposer une classe d'équation qui garde les mêmes propriétés :

$$\partial_t^2 \tilde{v}_\varepsilon - \operatorname{div}[A^* \nabla \tilde{v}_\varepsilon] + \varepsilon^2 \sum_{ijkl} \hat{d}_{ijkl}^e \partial_{x_i x_j x_k x_l}^4 \tilde{v}_\varepsilon + \varepsilon^2 \sum_{ij} (\hat{e}_{ij} + e_{ij}^*) \partial_t^2 \partial_{x_i x_j}^2 \tilde{v}_\varepsilon = \tilde{f} - \varepsilon^2 \sum_{x_i x_j} \hat{e}_{ij} \partial_{x_i x_j}^2 \tilde{f}.$$

qui est bien posé dès que  $\sum_{ijkl} \hat{d}_{ijkl}^e \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \geq 0$  avec  $d_{ijkl}^e = d_{ijkl}^* - a_{ij}^* \hat{e}_{kl}$ .

Remarquons qu'en 1D, le Boussinesq trick est plus facile à comprendre. En effet, l'équation effective d'ordre 2 est dans ce cas

$$\partial_t^2 v_\varepsilon - a^* \partial_x^2 v_\varepsilon + \varepsilon^2 \tilde{d}^* \partial_x^4 v_\varepsilon = \tilde{f}$$

Comme  $\tilde{d}^* = -a^* d^* < 0$ , alors en réutilisant l'équation, on obtient

$$\partial_t^2 v_\varepsilon - a^* \partial_x^2 v_\varepsilon + \varepsilon^2 \frac{\tilde{d}^*}{a^*} \partial_x^2 \underbrace{(a^* \partial_x^2 v_\varepsilon)}_{\partial_t^2 v_\varepsilon - f + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} = \tilde{f}$$

soit en négligeant les termes d'ordre 4

$$\partial_t^2 \tilde{v}_\varepsilon - a^* \partial_x^2 \tilde{v}_\varepsilon + \varepsilon^2 \frac{\tilde{d}^*}{a^*} \partial_t^2 \partial_x^2 \tilde{v}_\varepsilon = \tilde{f} + \varepsilon^2 \frac{\tilde{d}^*}{a^*} \partial_x^2 \tilde{f}.$$

Ces modèles sont validés par des estimations d'erreur ([82, 57]). Signalons également les travaux obtenus par Pouchon et Abdulle ([109, 4]) qui proposent avec une autre approche une classe de modèles effectifs d'ordre élevé en temps plus ou moins long (ordre 2,4,6,...) et les travaux de Gloria et Benoit ([17]) qui, à partir d'une approche par ondes de Bloch, proposent aussi des modèles effectifs d'ordres élevés, l'avantage de leur approche est qu'elle s'étend à des milieux non nécessairement périodiques (aléatoires par exemple).

## 5.2 Homogénéisation de l'équation des ondes en temps long dans $\mathbb{R}^+$

Dans cette section, nous appliquons l'approche du chapitre 2 à l'équation des ondes dans un domaine unidimensionnel présentant un bord.

Nous nous intéressons donc à l'équation des ondes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u_\varepsilon - \partial_x \left[ a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_x u_\varepsilon \right] = f & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u_\varepsilon(\cdot; 0) = g & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ u_\varepsilon(t=0; \cdot) = g^0 + \varepsilon w \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \frac{d}{dx} g^0 + \varepsilon^2 \theta \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \frac{d^2}{dx^2} g^0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ \partial_t u_\varepsilon(t=0; \cdot) = g^1 + \varepsilon w \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \frac{d}{dx} g^1 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \quad (5.7)$$

où :

- la fonction  $a_\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$  où  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est 1-périodique. Ainsi  $a_\varepsilon$  est  $\varepsilon$ -périodique. De plus, on suppose que  $a$  est bornée et strictement positive :

$$\exists \lambda, \Lambda > 0, / \lambda \leq a \leq \Lambda.$$

—  $f$  est un terme source,  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g^0, g^1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ .

On note toujours  $Y = (0, 1)$  la cellule de périodicité. Les conditions initiales font intervenir les solutions de problème de cellule  $w$  et  $\theta$ . Cette préparation des conditions initiales est essentielle pour ne pas introduire dans le problème de phénomène de couche limites en temps (voir [109, 8]).

Comme pour l'équation de Helmholtz, nous faisons l'hypothèse que  $u_\varepsilon$  se décompose sous la forme

$$u_\varepsilon(t, x) = u_0\left(t; x; \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(t; x; \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(t; x; \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}^+. \quad (5.8)$$

avec des termes  $u_n$   $Y$ -périodiques en la variable rapide  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ .

En appliquant la méthode double échelle, comme nous l'avons fait dans la section 2.1, on montre que

—  $u_0$  ne dépend pas de la variable rapide  $y$  et est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_0 - a^* \partial_x^2 u_0 = f & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u_0(\cdot; 0) = g & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ u_0(t = 0; \cdot) = g^0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ \partial_t u_0(t = 0; \cdot) = g^1 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.9)$$

où  $a^* \in \mathbb{R}$  est le coefficient homogénéisé défini par

$$a^* := \left\langle a \frac{d}{dy} (w + y) \right\rangle_Y$$

avec  $w$  l'unique solution du problème de cellule défini par

$$w \in \dot{H}_\#^1(Y) \quad \text{telle que pour tout } v \in H_\#^1(Y), \left(a \frac{d}{dy} w, \frac{d}{dy} v\right)_Y = -\left(a, \frac{d}{dy} v\right)_Y.$$

—  $u_1$  s'écrit sous la forme

$$u_1(t; x; y) = \partial_x u_0(t; x) w(y) + \hat{u}_1(t; x)$$

où  $\hat{u}_1$  est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u}_1 - a^* \partial_x^2 \hat{u}_1 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \hat{u}_1(\cdot; 0) = d_1 \partial_x u_0(\cdot; 0) & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ \hat{u}_1(t = 0; \cdot) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ \partial_t \hat{u}_1(t = 0; \cdot) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.10)$$

où  $d_1 = -w(0)$ .

—  $u_2$  s'écrit sous la forme

$$u_2(t; x; y) = \partial_x^2 u_0(t; x) \theta(y) + \partial_x \hat{u}_1(t; x) w(y) + \hat{u}_2(t; x),$$

où  $\theta$  est la solution du problème de cellule

Trouver  $\theta \in \dot{H}_\#^1(Y)$  tel que pour tout  $v \in H_\#^1(Y)$ ,

$$\left(a \frac{d}{dy} \theta, \frac{d}{dy} v\right)_Y = -\left(aw, \frac{d}{dy} v\right)_Y + \left(a \frac{d}{dy} w, v\right)_Y + (a - a^*, v)_Y \quad (5.11)$$

et  $\hat{u}_2$  est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u}_2 - a^* \partial_x^2 \hat{u}_2 = d^* \partial_x^4 u_0 - e^* \partial_t^2 \partial_x^2 u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \hat{u}_2(\cdot; 0) = d_2 \partial_x^2 u_0(\cdot; 0) + d_1 \partial_x \hat{u}_1(\cdot; 0) & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ \hat{u}_2(t = 0; \cdot) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ \partial_t \hat{u}_2(t = 0; \cdot) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.12)$$

où  $d_2 = -\theta(0)$  et les coefficients  $d^*$  et  $e^*$  sont donnés par

$$d^* = \left\langle a \frac{d}{dy} \beta + a\theta \right\rangle_Y, \quad e^* = \left\langle a \frac{d}{dy} \alpha \right\rangle_Y.$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  les solutions des problèmes de cellule

Trouver  $\alpha \in \dot{H}_\#^1(Y)$  tel que pour tout  $v \in H_\#^1(Y)$ ,

$$\left( a \frac{d}{dy} \alpha, \frac{d}{dy} v \right)_Y = (w, v)_Y$$

et

Trouver  $\beta \in \dot{H}_\#^1(Y)$  tel que pour tout  $v \in H_\#^1(Y)$ ,

$$\left( a \frac{d}{dy} \beta, \frac{d}{dy} v \right)_Y = -(a\theta, \frac{d}{dy} v)_Y + \left( a \frac{d}{dy} \theta, v \right)_Y + (aw, v)_Y.$$

Le modèle effectif que nous souhaitons obtenir doit approcher  $u_0 + \varepsilon \hat{u}_1 + \varepsilon^2 \hat{u}_2$  à l'ordre 3. À partir des équations que satisfont ces différents termes, comme nous l'avons fait dans la section 2.7, on obtient une équation de la forme

$$\partial_t^2 v_\varepsilon - a^* \partial_x^2 v_\varepsilon - \varepsilon^2 d^* \partial_x^4 v_\varepsilon + \varepsilon^2 e^* \partial_t^2 \partial_x^2 v_\varepsilon = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

Bien que cette équation ne soit pas bien posée (voir la section précédente), nous nous concentrons pour l'instant sur la condition aux limites.

La présence de l'opérateur d'ordre 4 dans l'équation nécessite deux conditions au bord. La première se déduit naturellement des conditions au bord des termes  $u_0$ ,  $\hat{u}_1$  et  $\hat{u}_2$ , qui vérifient respectivement

$$u_0(\cdot; 0) = g, \quad (5.13)$$

$$\hat{u}_1(\cdot; 0) = d_1 \partial_x u_0(\cdot; 0) \quad (5.14)$$

et

$$\hat{u}_2(\cdot; 0) = d_2 \partial_x^2 u_0(\cdot; 0) + d_1 \partial_x \hat{u}_1(\cdot; 0). \quad (5.15)$$

En écrivant (5.13) +  $\varepsilon$ (5.14) +  $\varepsilon^2$ (5.15), on obtient en omettant les termes d'ordre 3

$$v_\varepsilon(\cdot; 0) - \varepsilon d_1 \partial_x v_\varepsilon(\cdot; 0) - \varepsilon^2 d_2 \partial_x^2 v_\varepsilon(\cdot; 0) = g. \quad (5.16)$$

On remarque que cette première condition contient des opérateurs d'ordre au plus 2. Il nous faut donc trouver une seconde condition au bord faisant intervenir par exemple la dérivée d'ordre 3 de  $v_\varepsilon$ .

Pour obtenir une telle condition, nous avons cherché à obtenir un modèle approché à l'ordre 3, c'est à dire un modèle effectif dont la solution approche  $u_0 + \varepsilon \hat{u}_1 + \varepsilon^2 \hat{u}_2 + \varepsilon^3 \hat{u}_3$ . L'approche

du chapitre 2 (voir notamment le développement à tout ordre 2.3.4) nous donne que  $\hat{u}_3$  satisfait un problème de la forme

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u}_3 - a^* \partial_x^2 \hat{u}_3 = d^* \partial_x^4 \hat{u}_1 - e^* \partial_t^2 \partial_x^2 \hat{u}_1 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \hat{u}_3(\cdot; 0) = d_3^1 \partial_x^3 u_0(\cdot; 0) + d_2 \partial_x^2 \hat{u}_1(\cdot; 0) + d_1 \partial_x \hat{u}_2(\cdot; 0) + d_3^2 \partial_t^2 \partial_x u_0(\cdot; 0) & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ \hat{u}_3|_{t=0} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ \partial_t \hat{u}_3|_{t=0} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

(on rappelle que l'opérateur d'ordre 3 appliqué à  $\hat{u}_2$  s'annule (voir 1.2.2). On pourrait montrer que l'opérateur d'ordre 5 s'annule aussi.) A partir de ce problème et des problèmes vérifiés respectivement par  $u_0$ ,  $\hat{u}_1$  et  $\hat{u}_2$ , en procédant comme dans la section 2.7, en négligeant les termes d'ordre au moins 4, on obtient la même équation volumique que précédemment à savoir

$$\partial_t^2 \tilde{v}_\varepsilon - a^* \partial_x^2 \tilde{v}_\varepsilon - \varepsilon^2 d^* \partial_x^4 \tilde{v}_\varepsilon + \varepsilon^2 e^* \partial_t^2 \partial_x^2 \tilde{v}_\varepsilon = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

ainsi que la condition au bord

$$\tilde{v}_\varepsilon(\cdot; 0) - d_1 \partial_x \tilde{v}_\varepsilon(\cdot; 0) - \varepsilon^2 d_2 \partial_x^2 \tilde{v}_\varepsilon(\cdot; 0) - \varepsilon^3 d_3^1 \partial_x^3 \tilde{v}_\varepsilon(\cdot; 0) - \varepsilon^3 d_3^2 \partial_t^2 \partial_x \tilde{v}_\varepsilon(\cdot; 0) = g$$

qui fait intervenir un opérateur d'ordre 3. On imagine que  $\tilde{v}_\varepsilon$  pourrait être une bonne approximation à l'ordre 4 de  $u_\varepsilon$ . Mais on voulait construire une approximation à l'ordre 3 de  $u_\varepsilon$ . Si on s'autorise une erreur à l'ordre 3,  $\tilde{v}_\varepsilon$  satisfait non pas une mais deux conditions au bord :

$$\begin{cases} \tilde{v}_\varepsilon(\cdot; 0) - \varepsilon d_1 \partial_x \tilde{v}_\varepsilon(\cdot; 0) - \varepsilon^2 d_2 \partial_x^2 \tilde{v}_\varepsilon(\cdot; 0) = g, \\ d_3^1 \partial_x^3 \tilde{v}_\varepsilon(\cdot; 0) + d_3^2 \partial_t^2 \partial_x \tilde{v}_\varepsilon(\cdot; 0) = 0. \end{cases}$$

Cela nous permet de construire un nouveau modèle effectif d'ordre 2 :

$$\begin{cases} \partial_t^2 w_\varepsilon - a^* \partial_x^2 w_\varepsilon - \varepsilon^2 d^* \partial_x^4 w_\varepsilon + \varepsilon^2 e^* \partial_t^2 \partial_x^2 w_\varepsilon = f & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ w_\varepsilon(\cdot; 0) - \varepsilon d_1 \partial_x w_\varepsilon(\cdot; 0) - \varepsilon^2 d_2 \partial_x^2 w_\varepsilon(\cdot; 0) = g & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ d_3^1 \partial_x^3 w_\varepsilon(\cdot; 0) + d_3^2 \partial_t^2 \partial_x w_\varepsilon(\cdot; 0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ w_\varepsilon(t=0; \cdot) = g^0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \\ \partial_t w_\varepsilon(t=0; \cdot) = g^1 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.17)$$

Il reste à montrer que le problème est bien posé. La difficulté est double : nous avons vu dans la section précédente que le coefficient  $d^*$  de l'équation volumique est négatif, et, comme nous l'avons évoqué dans la section 2.6, les coefficients intervenant dans les conditions risquent de ne pas avoir le bon signe. Pour résoudre cela, nous pouvons utiliser deux approches :

- la première consiste à changer la moyenne de la solution du problème de cellule  $w$  pour modifier le signe des coefficients intervenant dans la condition au bord (voir 2.6), puis on applique le « Boussinesq trick » pour l'équation volumique (voir section précédente)
- la deuxième approche s'appuie sur le travail [109] qui part d'un problème bien posé et détermine des solutions de problèmes de cellule adaptées. Cette méthode est complémentaire avec notre approche de la section 2.6 pour modifier les coefficients de la condition au bord.

L'extension au problème en dimension deux est naturelle. Pour obtenir un modèle de la même forme que (5.17), il nous faut les conditions au bord satisfaites par les termes macroscopiques. En appliquant l'approche présentée dans la section 2.3, on montre que

$$\hat{u}_{1|\Gamma} = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} u_{0|\Gamma}, \quad (5.18)$$

et

$$\hat{u}_{2|\Gamma} = \sum_i d_1^i \partial_{x_i} \hat{u}_{1|\Gamma} + \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u_{0|\Gamma} \quad (5.19)$$

où les coefficients  $d_2^{ij}$  et  $d_1^i$  sont définis dans la section 2.3, et on montre que  $\hat{u}_3$  satisfait une condition au bord de la forme

$$\hat{u}_3|_\Gamma = \sum_{i \leq j \leq k} d_3^{ijk} \partial_{x_i x_j x_k}^3 u_{0|\Gamma} + \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 \hat{u}_1|_\Gamma + \sum_i d_1^i \partial_{x_i} \hat{u}_2|_\Gamma - \sum_i d_3^i \partial_t^2 \partial_{x_i} u_{0|\Gamma} \quad (5.20)$$

où les coefficients  $d_3^{ijk}$  et  $d_3^i$  sont définis de la même manière que les  $d_1^i$  et  $d_2^{ij}$  en appliquant le corollaire 2.8 au problème vérifié par  $U_3$  le terme de champ proche d'ordre 3 (voir la section 2.3.4).

En utilisant ces trois conditions et en utilisant le « Boussinesq trick », on pose le modèle approché à l'ordre 2, analogue au modèle (5.17) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 w_\varepsilon - \operatorname{div}[A^* \nabla w_\varepsilon] - \varepsilon^2 \sum_{ijkl} d_{ijkl}^* \partial_{x_i x_j x_k x_l}^4 w_\varepsilon + \varepsilon^2 \sum_{ij} e_{ij}^* \partial_t^2 \partial_{x_i x_j}^2 w_\varepsilon = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ w_\varepsilon - \varepsilon \sum_i d_1^i \partial_{x_i} w_\varepsilon - \varepsilon^2 \sum_{i \leq j} d_2^{ij} \partial_{x_i x_j}^2 w_\varepsilon = g \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Gamma \\ \sum_{i \leq j \leq k} d_3^{ijk} \partial_{x_i x_j x_k}^3 w_\varepsilon - \sum_i d_3^i \partial_t^2 \partial_{x_i} w_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Gamma \\ w_\varepsilon(t=0; \cdot) = g^0 \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_t w_\varepsilon(t=0; \cdot) = g^1 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (5.21)$$

L'approche proposée dans cette thèse permettrait donc de proposer des conditions aux bords aux modèles effectifs d'ordre élevé qui apparaissent en homogénéisation en temps long de l'équation des ondes. Ce n'était pas évident de trouver comment construire assez de conditions aux bord pour les opérateurs d'ordre élevé qui apparaissent dans ces modèles. Il reste à :

- montrer que les modèles proposés sont bien posés quitte à utiliser les méthodes données dans la section 2.6 pour jouer sur le signe des coefficients apparaissant dans les conditions au bord
- établir des estimations d'erreur pour justifier rigoureusement cette construction formelle
- implémenter une méthode numérique pour ces modèles. Les difficultés principales proviennent de l'opérateur d'ordre 4 dans l'équation volumique demandant d'utiliser des méthodes numériques adaptées, mais également les conditions au bord font intervenir des dérivées d'ordre élevé (voir [89] où des conditions similaires apparaissent).



# Conclusion et perspectives

## 6.1 Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'homogénéisation de problèmes posés dans un milieu périodique présentant des bords, plus précisément dans un demi-espace.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à l'équation de Helmholtz dans un demi-plan avec une condition au bord de type Dirichlet. La méthode du développement à double-échelle donne un développement asymptotique ne prenant pas en compte les bords. Nous avons enrichi ce modèle avec des termes dit de champ proche qui nous ont permis de corriger les erreurs au bord du modèle classique mais surtout, en étudiant leur comportement à l'infini, de déterminer des conditions au bord adaptées pour les différents termes du développement. Nous avons appliqué cette méthode aux premiers ordres, puis nous l'avons généralisée à tout ordre. Afin de pouvoir calculer ces termes de champ proche, nous avons été amenés à résoudre des problèmes posés dans une demi-bande infinie. Nous avons pour cela adapté la méthode de [67, 68, 79] pour la résolution de problèmes de type Laplace dans une demi-bande infinie avec condition de Dirichlet. Notre méthode nous a permis de déterminer des modèles effectifs bien posés à l'ordre 1 et à l'ordre 2 (sous forme d'un système d'équations).

Dans un second temps, nous avons adapté cette méthode pour l'équation de Helmholtz dans un demi-plan avec une condition au bord de type Neumann. La méthode est similaire à celle pour les conditions de Dirichlet et introduit des termes de champ proche dans le développement asymptotique classique. A la différence du problème avec condition de Dirichlet, c'est l'existence des termes de champ proche qui nous permet de déterminer les conditions au bord pour les autres termes, et non leur comportement à l'infini. Nous avons appliqué la méthode aux premiers ordres, puis nous l'avons généralisée à tout ordre. Afin de calculer les termes de champ proche, nous avons proposé une méthode numérique pour la résolution de problèmes de type Laplace dans une demi-bande infinie avec condition de Neumann, ainsi qu'une alternative utilisant un opérateur Dirichlet-to-Neumann permettant de se ramener à un problème avec condition de Dirichlet.

Finalement, nous avons appliqué notre méthode à l'équation des ondes dans un demi-plan avec une condition de type Dirichlet afin de proposer un modèle effectif à l'ordre 2 bien posé permettant d'obtenir une bonne approximation de la solution exacte en temps long, c'est-à-dire en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ .

## 6.2 Perspectives

Pour finir, nous détaillons dans cette section différentes perspectives qui s'ouvrent à la suite de ces travaux. Nous les classons par ordre de difficulté croissante.

## Problèmes de transmission

Dans cette thèse, nous avons traité le cas de conditions de Dirichlet et de Neumann. Pour des problèmes de transmission entre deux demi-espaces (deux milieux périodiques ou un milieu homogène et un milieu périodique), il apparaît deux conditions de transmission sur la trace et la trace de la dérivée normale à la frontière des deux milieux. Il s'agirait alors de combiner les deux méthodes (pour condition de Dirichlet et de Neumann) afin d'obtenir des conditions de transmission pour le modèle homogénéisé.

## Implémentation du modèle effectif à l'ordre 2 pour l'équation des ondes

Dans le chapitre 5, nous avons proposé un modèle effectif à l'ordre 2 en  $\varepsilon$ . Ce modèle, contrairement au modèle homogénéisé classique i.e. le modèle satisfait par  $u_0$ , permet de décrire le phénomène de dispersion qui apparaît en temps long.

Ces résultats étant formels, il reste :

1. à montrer que le problème obtenu est bien posé ou à le modifier de manière astucieuse pour qu'il le soit ;
2. à les justifier par des estimations d'erreurs ;
3. à les valider numériquement en utilisant une méthode permettant d'implémenter l'opérateur d'ordre 4 présent dans l'équation volumique, en utilisant par exemple des éléments finis de type Hermite ([56]), des éléments finis virtuels ou encore des méthodes isogéométriques.

## Étude de géométries plus complexes

Dans cette thèse, nous avons traité le cas simple d'un demi-plan dont l'unique bord est dans la direction de périodicité du milieu.

Une autre géométrie plus complexe pouvant être envisagée est le cas d'un demi-plan dont le bord ne coupe pas le milieu suivant la direction de périodicité, plus précisément si le coefficient directeur de la droite représentant le bord est un irrationnel. Notre méthode de construction des termes de champ proche repose sur la résolution de problèmes de demi-bande périodiques. Si la droite représentant le bord à un coefficient directeur rationnel, on peut se ramener à nos travaux en modifiant la cellule de périodicité. Dans le cas contraire, cette manipulation n'est pas possible et donc la méthode de résolution des termes de champ proche ne peut être utilisée. Dans [70, 21], ce problème est relié à l'homogénéisation dans des milieux quasi-périodiques. l'analyse mathématique et numérique est en cours d'investigation dans l'équipe Poems et fait l'objet d'une nouvelle thèse.

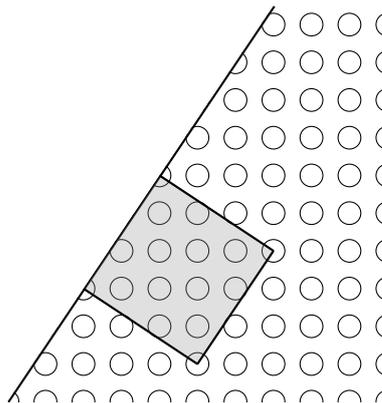


FIGURE 6.1 – Milieu périodique avec un bord de pente  $\frac{2}{3}$ . On obtient une nouvelle cellule de périodicité (en gris).

Une autre géométrie plus complexe consisterait à considérer un milieu avec un coin. Notre méthode, telle qu'elle est conçue, permet de déterminer des termes de champs proche ainsi que des conditions au bord pour les termes macroscopiques  $\hat{u}_n$  sur chacun des bords. La méthode traite ces bords indépendamment les uns des autres. Ainsi, on peut avoir, pour les termes macroscopiques  $\hat{u}_n$ , deux conditions différentes provenant de deux bords différents qui sont toutes deux valables sur le coin, sans pour autant être compatibles. Par ailleurs, comme les termes de champ proche correspondant à chaque bord sont déterminés indépendamment les uns des autres, ils ne prennent pas nécessairement correctement en compte le phénomène de couche limite au voisinage du coin. Il faudrait proposer un développement enrichi au niveau des interfaces d'une part, et au niveau du coin d'autre part. La question de la construction de modèles approchés est encore plus épineuse (elle l'est déjà pour des problèmes de couches minces homogénéisées avec un coin (voir [38, 122, 55])).

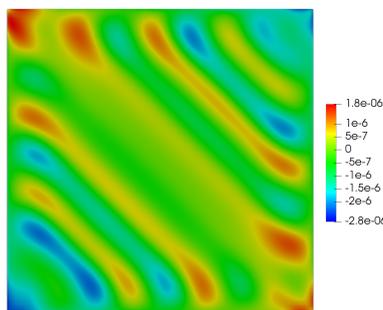


FIGURE 6.2 – Illustration du problème apparaissant au coin. Ici, nous représentons la différence  $u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon(u_1 + U_1) + \varepsilon^2(u_2 + U_2))$  dans le domaine  $\Omega = (0, 1)^2$ . D'après notre modèle, nous ne devrions pas observer de couches limites sur les 4 bords, mais on remarque que ce n'est pas le cas au niveau des coins.

Ces deux précédentes études permettraient d'envisager de traiter des milieux dont le bord n'est plus une droite mais une courbe.

## **Extensions aux équations de Maxwell et aux métamatériaux**

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, l'étude des métamatériaux est très motivante d'un point de vue théorique comme expérimental avec de nombreuses applications techniques (super-lentilles, revêtements furtifs, miniaturisation d'antenne,...).

Nous souhaitons tout d'abord étendre cette méthode aux équations de Maxwell puis des milieux de type métamatériaux. On pourrait également construire des modèles homogénéisés enrichis en présence de bords quand le milieu périodique possède des inclusions métamatériaux comme cela est fait dans [35, 36] sans prendre en compte les bords.

# A

## Décroissance exponentielle dans la demi-bande

On peut trouver plusieurs démonstrations de la proposition (2.3). Nous en présentons ici deux : la première est une démonstration constructive inspirée de [7], la seconde ne montre que le deuxième point de la proposition et utilise des outils variationnels [88].

### Première démonstration :

On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U = 0 & \text{dans } B \\ U = h & \text{sur } \Gamma_0 \\ U \text{ } y_2\text{-périodique} & \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

On note

$$D(B) = \{\phi \in H_{\#loc}^1(B) / \|\nabla \phi\|_{(L^2(B))^2} < +\infty\}.$$

Par le théorème de Lax-Milgram, le problème est bien posé dans  $D(B)$  et

$$\|\nabla U\|_{(L^2(B))^2} \leq C \|h\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}.$$

On note à présent pour  $k \in \mathbb{N}^*$

$$B_k = B \cap ((k, +\infty) \times (0, 1)),$$

$$\Gamma_k = \{\mathbf{y} \in B_k / y_1 = k\}.$$

Pour tout  $k \geq 1$ ,  $U$  est également solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U = 0 & \text{dans } B_k \\ U = U(k, y_2) & \text{sur } \Gamma_k \\ U \text{ } y_2\text{-périodique} & \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

On trouve de même que

$$\|\nabla U\|_{(L^2(B_k))^2} \leq C \|U\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)}$$

où  $C$  est indépendant de  $k$ . On pose  $U_k(\mathbf{y}) = U(\mathbf{y}) - \int_{\Gamma_k} U dy_2$ .  $U_k$  est alors solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} U_k = 0 & \text{dans } B_k \\ U_k = U - \int_{\Gamma_k} U dy_2 & \text{sur } \Gamma_k \\ U_k \text{ } y_2\text{-périodique} & \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

et on a

$$\|\nabla U\|_{(L^2(B_k))^2} = \|\nabla U_k\|_{(L^2(B_k))^2} \leq C \|U - \int_{\Gamma_k} U dy_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)}.$$

En appliquant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger dans le domaine  $B_k \setminus B_{k+1}$ , on a

$$\|U - \int_{\Gamma_k} U dy_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)} \leq C \|\nabla U\|_{(L^2(B_k \setminus B_{k+1}))^2}$$

avec  $C$  indépendant de  $k$ . D'où

$$\|\nabla U\|_{(L^2(B_k))^2}^2 \leq C (\|\nabla U\|_{(L^2(B_{k+1}))^2}^2 - \|\nabla U\|_{(L^2(B_k))^2}^2).$$

On en déduit que

$$\|\nabla U\|_{(L^2(B_k))^2}^2 \leq \left(\frac{C}{C+1}\right)^k \|\nabla U\|_{(L^2(B))^2}^2.$$

Comme  $\frac{C}{C+1} < 1$ , il existe  $\gamma_0 > 0$  tel que  $\frac{C}{C+1} = e^{-2\gamma_0}$ . Alors

$$\|\nabla U\|_{(L^2(B_k))^2}^2 \leq e^{-2\gamma_0 k} \|\nabla U\|_{(L^2(B))^2}^2.$$

On en déduit que pour tout  $0 < \gamma < \gamma_0$ ,  $e^{\gamma y_1} \nabla U \in L^2(B)^2$ . En effet,

$$\begin{aligned} \int_{B_0 \setminus B_K} e^{2\gamma y_1} |\nabla U|^2 dy &= \sum_{k=0}^{K-1} \int_k^{k+1} \int_{(0,1)} e^{2\gamma y_1} |\nabla U|^2 dy_2 dy_1 \\ &\leq \sum_{k=0}^{K-1} e^{2\gamma(k+1)} \underbrace{\int_k^{+\infty} \int_{(0,1)} |\nabla U|^2 dy_2 dy_1}_{\leq e^{-2\gamma_0 k} \|\nabla U\|_{(L^2(B))^2}^2} \\ &\leq \underbrace{e^{2\gamma} \sum_{k=0}^{K-1} e^{2(\gamma-\gamma_0)k}}_{< +\infty \text{ qd } k \rightarrow +\infty} \|\nabla U\|_{(L^2(B))^2}^2. \end{aligned}$$

D'où  $\|e^{\gamma y_1} \nabla U\|_{(L^2(B))^2}^2 < +\infty$ .

Maintenant, montrons le premier point : on pose

$$\bar{U}(y_1) = \int_{(y_1, y_1+1) \times (0,1)} U(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{(0,1)^2} U(z_1 + y_1, z_2) dz.$$

On a

$$|\bar{U}'(y_1)| = \left| \int_{(0,1)^2} \partial_{y_1} U(z_1 + y_1, z_2) dz \right| \leq \|\nabla U\|_{L^2((y_1, y_1+1) \times (0,1))}.$$

Or  $(y_1, y_1 + 1) \times (0, 1) = B_{y_1+1} \setminus B_{y_1}$  donc

$$|\bar{U}'(y_1)| \leq \|\nabla U\|_{L^2(B_{y_1+1} \setminus B_{y_1})^2} \leq C e^{-\gamma_0 y_1}.$$

On en déduit qu'il existe une constante  $d$  telle que

$$\lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \bar{U}(y_1) = C_U,$$

et  $|\bar{U}(y_1) - C_U| \leq C e^{-\gamma_0 y_1}$ .

De plus, en modifiant un peu l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on a

$$\|U(\mathbf{y}) - \bar{U}(y_1)\|_{L^2((k, k+1) \times (0,1))} \leq C \|\nabla U(\mathbf{y})\|_{L^2((k, k+2) \times (0,1))^2}$$

où  $C$  est indépendant de  $k$ .

On en déduit

$$\begin{aligned} \|U(\mathbf{y}) - C_U\|_{L^2((k,k+1)\times(0,1))} &\leq \|\bar{U}(y_1) - C_U\|_{L^2((k,k+1)\times(0,1))} + C\|\nabla U(\mathbf{y})\|_{L^2((k,k+2)\times(0,1))^2} \\ &\leq Ce^{-\gamma_0 k} \end{aligned}$$

donc en sommant sur  $k$ , on a le résultat :

$$\forall 0 < \gamma < \gamma_0, \quad e^{\gamma y_1}(U - C_U) \in L^2(B).$$

**Remarque A.1.** Cette démonstration ne montre que le cas où  $f = 0$ . Dans le cas où  $f$  est exponentiellement décroissante, on peut se ramener au cas précédent en utilisant des relèvements.

## Seconde démonstration :

**Lemme A.2** (Tartar). Soient  $V$  et  $V_0$  deux espaces de Hilbert sur  $\mathbb{R}$  tels que  $V_0 \subset V$  avec une injection continue. On note respectivement  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|_0$  les normes sur  $V$  et  $V_0$  et  $((\cdot, \cdot))$  et  $((\cdot, \cdot))_0$  les produits scalaires associés.

Soient  $b$  une forme bilinéaire continue sur  $V \times V_0$ ,  $M \in \mathcal{L}(V; V_0)$  surjectif. On suppose de plus que  $b$  est  $M$ -coercive : il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $u \in V$ ,

$$b(u, Mu) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Enfin prenons  $f \in V'_0$ .

Sous ces hypothèses, il existe un unique élément  $u \in V$  tel que

$$b(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V_0.$$

*Démonstration de (2.3).* On suppose qu'il existe  $\gamma_0$  tel que  $e^{\gamma_0 y_1} f \in L^2(B)$ .

Soit  $\gamma \leq \gamma_0$ . On pose

$$V = \{v \in L^2_{\#}((0, R) \times (0, 1)) \mid \forall R < +\infty / e^{\gamma y_1} \nabla v \in (L^2(B))^2, v|_{\Gamma} = 0\}$$

et

$$V_0 = \{v \in V / e^{\gamma y_1} v \in L^2(B)\}.$$

On note  $\|v\| = \|e^{\gamma y_1} \nabla v\|_{(L^2(B))^2}$  et  $\|v\|_0 = (\|v\|^2 + \|e^{\gamma y_1} v\|_{L^2(B)}^2)^{1/2}$ .

En écrivant la formulation variationnelle de (2.18) avec  $g = 0$ , après multiplication par  $e^{\gamma y_1} v$ , on cherche alors une solution  $u$  du problème :

$$\text{Pour tout } v \in V_0, \quad \int_B a(\mathbf{y}) \nabla u \nabla (e^{\gamma y_1} v) d\mathbf{y} = \int_B f e^{\gamma y_1} v d\mathbf{y}. \quad (\text{A.4})$$

On pose donc naturellement, pour  $(u, v) \in V \times V_0$ ,

$$b(u, v) = \int_B a(\mathbf{y}) \nabla u \nabla (e^{\gamma y_1} v) d\mathbf{y},$$

$$\langle f, v \rangle = \int_B f e^{\gamma y_1} v d\mathbf{y}.$$

On voit que  $v \mapsto \langle f, v \rangle \in V'_0$  car  $\gamma \leq \gamma_0$ .

Pour appliquer le lemme de Tartar, il ne nous reste plus qu'à construire l'opérateur  $M$  : pour  $u \in V$ , on pose

$$\bar{u}(y_1) = \int_0^1 u(y_1, y_2) dy_2$$

et

$$E_\gamma(y_1) = 2\gamma e^{-2\gamma y_1}.$$

Finalement, on définit  $M$  par

$$Mu = u - E_\gamma \star \bar{u}.$$

- Montrons que  $M \in \mathcal{L}(V; V_0)$  :  
L'inégalité de Poincaré nous donne que

$$\|u - \bar{u}(y_1)\|_{L^2(0,1)} \leq c \|\partial_{y_2} u\|_{L^2(0,1)}.$$

Comme  $e^{\gamma y_1} \partial_{y_2} u \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(0, 1))$ , on en déduit que  $e^{\gamma y_1} (u - \bar{u}) \in L^2(B)$ .  
De plus, on peut écrire  $Mu = u - \bar{u} + (\delta - E_\gamma) \star \bar{u}$ . Or

$$\frac{d}{dy_1} E_\gamma + 2\gamma E_\gamma = 2\gamma \delta,$$

d'où

$$Mu = u - \bar{u} + \frac{1}{2\gamma} \frac{d}{dy_1} E_\gamma \star \bar{u} = u - \bar{u} + \frac{1}{2\gamma} E_\gamma \star \frac{d}{dy_1} \bar{u}.$$

Comme  $e^{\gamma y_1} \partial_{y_1} u \in L^2(B)$ ,  $e^{\gamma y_1} \frac{d}{dy_1} \bar{u} \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , on a alors  $e^{\gamma y_1} (E_\gamma \star \frac{d}{dy_1} \bar{u}) \in L^2(B)$  (indépendant de  $y_2$ ). On en déduit que  $e^{\gamma y_1} Mu \in L^2(B)$ .

De plus, on peut voir que  $\partial_{y_2} Mu = \partial_{y_2} u$  et  $\partial_{y_1} Mu = \partial_{y_1} u - E_\gamma \star \frac{d}{dy_1} \bar{u}$ .

Donc  $Mu \in V_0$  et  $M \in \mathcal{L}(V, V_0)$ .

- Il nous reste à montrer que  $M$  est surjectif :  
Pour  $v \in V_0$ , on cherche  $u \in V$  tel que  $u - E_\gamma \star \bar{u} = v$ . On devrait donc avoir  $u = v + 2\gamma H \star \bar{v}$  où  $H$  désigne la fonction de Heaviside.  
En effet, on a alors  $\bar{u} = (\delta + 2\gamma H) \star \bar{v}$  d'où

$$u - E_\gamma \star \bar{u} = v + \underbrace{(2\gamma H - E_\gamma \star (\delta + 2\gamma H))}_{=0} \star \bar{v}.$$

- Maintenant que nous avons l'opérateur  $M$ , il n'y a plus qu'à montrer que  $b$  est  $M$ -coercive :  
On peut voir que

$$\begin{aligned} \partial_{y_1} [e^{2\gamma y_1} (u - E_\gamma \star \bar{u})] &= e^{2\gamma y_1} (\partial_{y_1} u - \underbrace{\frac{d}{dy_1} E_\gamma \star \bar{u}}_{=2\gamma \bar{u} - 2\gamma E_\gamma \star \bar{u}}) + 2\gamma [e^{2\gamma y_1} (u - E_\gamma \star \bar{u})] \\ &= e^{2\gamma y_1} (\partial_{y_1} u + 2\gamma (u - \bar{u})) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} b(u, Mu) &= \int_B a(\mathbf{y}) e^{2\gamma y_1} |\nabla u|^2 d\mathbf{y} - 2\gamma \int_B a(\mathbf{y}) e^{2\gamma y_1} \partial_{y_1} u (u - \bar{u}) d\mathbf{y} \\ &\geq (\alpha - c\gamma) \|u\|^2 \end{aligned}$$

---

en utilisant la première inégalité obtenu par l'inégalité de Poincaré et le fait que  $a$  soit bornée.

Alors  $b$  est  $M$ -coercive si et seulement si  $\gamma \leq \min(\gamma_0, \alpha/c)$ .

On peut donc appliquer le lemme de Tartar : pour  $\gamma \leq \min(\gamma_0, \alpha/c)$  il existe un unique élément  $u \in V$  tel que pour tout  $v \in V_0$ ,

$$\int_B a(\mathbf{y}) \nabla u \nabla (e^{\gamma y_1} v) d\mathbf{y} = \int_B f e^{\gamma y_1} v d\mathbf{y}.$$

□



# Bibliographie

- [1] Toufic ABOUD et Habib AMMARI. « Diffraction at a curved grating: TM and TE cases, homogenization ». *In : Journal of mathematical analysis and applications* 202.3 (1996), p. 995-1026.
- [2] Assyr ABDULLE, Marcus J. GROTE et Christian STOHRER. « FE heterogeneous multiscale method for long-time wave propagation ». *In : Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique* 351 (juill. 2013), p. 495-499. DOI : 10.1016/j.crma.2013.06.002. URL : <https://hal-ensta-paris.archives-ouvertes.fr/hal-00968874>.
- [3] Assyr ABDULLE et Timothée POUCHON. « A priori error analysis of the finite element heterogeneous multiscale method for the wave equation over long time ». *In : SIAM Journal on Numerical Analysis* 54.3 (2016), p. 1507-1534.
- [4] Assyr ABDULLE et Timothée POUCHON. « Effective models for the multidimensional wave equation in heterogeneous media over long time and numerical homogenization ». *In : Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 26.14 (2016), p. 2651-2684.
- [5] Yves ACHDOU, Olivier PIRONNEAU et Frederic VALENTIN. « Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries ». *In : Journal of Computational Physics* 147.1 (1998), p. 187-218.
- [6] Grégoire ALLAIRE. « Homogenization and two-scale convergence ». *In : SIAM Journal on Mathematical Analysis* 23.6 (1992), p. 1482-1518.
- [7] Grégoire ALLAIRE et Micol AMAR. « Boundary layer tails in periodic homogenization ». *In : ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* 4 (1999), p. 209-243.
- [8] Grégoire ALLAIRE, Marc BRIANE et Muthusamy VANNINATHAN. « A comparison between two-scale asymptotic expansions and Bloch wave expansions for the homogenization of periodic structures ». *In : SEMA journal* 73.3 (2016), p. 237-259.
- [9] Grégoire ALLAIRE, Agnes LAMACZ et Jeffrey RAUCH. « Crime pays; homogenized wave equations for long times ». *In : arXiv preprint arXiv:1803.09455* (2018).
- [10] François ALOUGES. « Introduction to Periodic Homogenization ». *In : Interdisciplinary Information Sciences* 22 (déc. 2016), p. 147-186.
- [11] Chérif AMROUCHE, Vivette GIRAULT et Jean GIROIRE. « Dirichlet and neumann exterior problems for the n-dimensional laplace operator an approach in weighted sobolev spaces ». *In : Journal de mathématiques pures et appliquées* 76.1 (1997), p. 55-81.
- [12] Scott ARMSTRONG et al. « Quantitative analysis of boundary layers in periodic homogenization ». *In : Arch. Ration. Mech. Anal.* 226.2 (2017), p. 695-741.
- [13] Michel ARTOLA et Michel CESSENAT. « Diffraction d'une onde électromagnétique par une couche composite mince accolée à un corps conducteur épais. I, Cas des inclusions fortement conductrices ». *In : Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique* 313.5 (1991), p. 231-236.

- [14] Nikolai Sergeevich BAKHVALOV et Grigory PANASENKO. *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media: Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials*. Mathematics and its Applications. Springer Netherlands, 1989. ISBN : 9789400922471. URL : <https://books.google.fr/books?id=0mvyCAAQBAJ>.
- [15] Nathalie BARTOLI et Abderrahmane BENDALI. « Robust and high-order effective boundary conditions for perfectly conducting scatterers coated by a thin dielectric layer ». In : *IMA journal of applied mathematics* 67.5 (2002), p. 479-508.
- [16] Abderrahmane BENDALI et Keddour LEMRABET. « The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 56.6 (1996), p. 1664-1693.
- [17] Antoine BENOIT et Antoine GLORIA. « Long-time homogenization and asymptotic ballistic transport of classical waves ». In : *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*. T. 1. 52. 2019, p. 703-759.
- [18] Alain BENSOUSSAN, Jacques-Louis LIONS et Georges PAPANICOLAOU. *Asymptotic analysis for periodic structures*. T. 5. North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1978.
- [19] Mikhail Shlemovich BIRMAN et Tatiana Aleksandrovna SUSLINA. « Homogenization with corrector for periodic differential operators. Approximation of solutions in the Sobolev class  $H^1(\mathbb{R}^d)$  ». In : *Algebra i Analiz* 18.6 (2006), p. 1-130.
- [20] Mikhail Shlemovich BIRMAN et Tatiana Aleksandrovna SUSLINA. « Homogenization with corrector term for periodic elliptic differential operators ». In : *St. Petersburg Math. J.* 17.6 (2006), p. 897-973.
- [21] Xavier BLANC, Claude LE BRIS et Pierre-Louis LIONS. « Local profiles for elliptic problems at different scales: defects in, and interfaces between periodic structures ». In : *Communications in Partial Differential Equations* 40.12 (2015), p. 2173-2236.
- [22] Xavier BLANC, Claude LE BRIS et Pierre-Louis LIONS. « On correctors for linear elliptic homogenization in the presence of local defects ». working paper or preprint. Jan. 2018. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01697104>.
- [23] Virginie BONNAILLIE-NOËL et al. « On generalized Ventcel's type boundary conditions for Laplace operator in a bounded domain ». In : *SIAM journal on mathematical analysis* 42.2 (2010), p. 931-945.
- [24] Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, Lucas CHESNEL et Patrick CIARLET. « T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials ». In : *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 46.6 (2012), p. 1363-1387.
- [25] Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, Lucas CHESNEL et Patrick CIARLET. « T-coercivity for the Maxwell problem with sign-changing coefficients ». In : *Communications in Partial Differential Equations* 39.6 (2014), p. 1007-1031.
- [26] Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, Lucas CHESNEL et Patrick CIARLET. « Two-dimensional Maxwell's equations with sign-changing coefficients ». In : *Applied Numerical Mathematics* 79 (2014), p. 29-41.
- [27] Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, Lucas CHESNEL et Xavier CLAEYS. « Radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 23.09 (2013), p. 1629-1662.
- [28] Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, Dora DRISSI et Nabil GMATI. « Mathematical analysis of the acoustic diffraction by a muffler containing perforated ducts ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 15.07 (2005), p. 1059-1090.

- [29] Guy BOUCHITTÉ et Christophe BOUREL. « Multiscale nanorod metamaterials and realizable permittivity tensors ». *In : Commun. Comput. Phys.* 11.2 (2012), p. 489-507.
- [30] Guy BOUCHITTÉ, Christophe BOUREL et Didier FELBACQ. « Homogenization Near Resonances and Artificial Magnetism in Three Dimensional Dielectric Metamaterials ». *In : Arch. Ration. Mech. Anal.* 225.3 (2017), p. 1233-1277.
- [31] Guy BOUCHITTÉ, Christophe BOUREL et Didier FELBACQ. « Homogenization of the 3D Maxwell system near resonances and artificial magnetism ». *In : C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 347.9-10 (2009), p. 571-576.
- [32] Guy BOUCHITTÉ et Didier FELBACQ. « Homogenization near resonances and artificial magnetism from dielectrics ». *In : C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 339.5 (2004), p. 377-382.
- [33] Christophe BOUREL. « Etude mathématique et numérique de cristaux photoniques fortement contrastés ». Thèse de doct. Université du Sud Toulon Var, 2010.
- [34] Andrea BRAIDES et al. *Gamma-convergence for Beginners*. T. 22. Clarendon Press, 2002.
- [35] Renata BUNOIU et Karim RAMDANI. « Homogenization of materials with sign changing coefficients ». *In : Communications in Mathematical Sciences* 14.4 (2016), p. 1137-1154.
- [36] Renata BUNOIU et al. « Homogenization of Maxwell's equations and related scalar problems with sign-changing coefficients ». *In : Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques.* (2020).
- [37] Fioralba CAKONI, Bojan B GUZINA et Shari MOSKOW. « On the homogenization of a scalar scattering problem for highly oscillating anisotropic media ». *In : SIAM J. Math. Anal.* 48.4 (2016), p. 2532-2560.
- [38] Gabriel CALOZ et al. « Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer ». *In : Asymptotic Analysis* 50.1, 2 (2006), p. 121-173.
- [39] Gabriel CALOZ et al. « On the influence of the geometry on skin effect in electromagnetism ». *In : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200.9-12 (2011), p. 1053-1068.
- [40] Balamati CHOUDHURY et RM JHA. « A review of metamaterial invisibility cloaks ». *In : Computers, Materials & Continua* 33.3 (2013), p. 275-303.
- [41] Doina CIORANESCU, Alain DAMLAMIAN et Georges GRISO. « Periodic unfolding and homogenization ». *In : Comptes Rendus Mathématique* 335.1 (2002), p. 99-104. ISSN : 1631-073X. DOI : [https://doi.org/10.1016/S1631-073X\(02\)02429-9](https://doi.org/10.1016/S1631-073X(02)02429-9). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631073X02024299>.
- [42] Doina CIORANESCU, Alain DAMLAMIAN et Georges GRISO. « The Periodic Unfolding Method in Homogenization ». *In : SIAM Journal on Mathematical Analysis* 40.4 (2008), p. 1585-1620. DOI : 10.1137/080713148.
- [43] Doina CIORANESCU et Patrizia DONATO. *An Introduction to Homogenization*. Oxford lecture series in mathematics and its applications. Oxford University Press, 1999. ISBN : 9780198565543. URL : <https://books.google.fr/books?id=9f6SQgAACAAJ>.
- [44] Ionel CIUPERCA, Mohammed JAI et Clair POIGNARD. « Approximate transmission conditions through a rough thin layer. The case of the periodic roughness ». *In : European Journal of Applied Mathematics* 21.1 (2010), p. 51-75.
- [45] Xavier CLAEYS et Bérange DELOURME. « High order asymptotics for wave propagation across thin periodic interfaces ». *In : Asymptotic Analysis* 83.1-2 (2013), p. 35-82.

- [46] Carlos CONCA, Rafael ORIVE et Muthusamy VANNINATHAN. « Bloch approximation in homogenization and applications ». *In : SIAM journal on mathematical analysis* 33.5 (2002), p. 1166-1198.
- [47] Carlos CONCA et Muthusamy VANNINATHAN. « Homogenization of periodic structures via Bloch decomposition ». *In : SIAM Journal on Applied Mathematics* 57.6 (1997), p. 1639-1659.
- [48] Martin COSTABEL et Ernst STEPHAN. « A direct boundary integral equation method for transmission problems ». *In : J. Math. Anal. Appl.* 106.2 (1985), p. 367-413.
- [49] Gianni DAL MASO. *An introduction to  $\Gamma$ -convergence*. T. 8. Springer Science & Business Media, 2012.
- [50] Ennio DE GIORGI. *G-operators and  $\Gamma$ -convergence*. Proceedings of the international congress of mathematicians (Warsaw, August 1983), PWN Polish Scientific Publishers et North Holland (1984) 1175-1191.
- [51] Bérangère DELOURME. « Asymptotic models for thin periodic layers in electromagnetism ». Theses. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, déc. 2010. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00650354>.
- [52] Bérangère DELOURME. « High-order asymptotics for the electromagnetic scattering by thin periodic layers ». *In : Mathematical Methods in the Applied Sciences* 38.5 (2015), p. 811-833.
- [53] Bérangère DELOURME, Housseem HADDAR et Patrick JOLY. « Approximate models for wave propagation across thin periodic interfaces ». *In : Journal de mathématiques pures et appliquées* 98.1 (2012), p. 28-71.
- [54] Bérangère DELOURME, Housseem HADDAR et Patrick JOLY. « On the well-posedness, stability and accuracy of an asymptotic model for thin periodic interfaces in electromagnetic scattering problems ». *In : Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 23.13 (2013), p. 2433-2464.
- [55] Bérangère DELOURME, Kersten SCHMIDT et Adrien SEMIN. « On the homogenization of thin perforated walls of finite length ». *In : Asymptotic Analysis* 97.3-4 (2016), p. 211-264.
- [56] Gouri DHATT et Gilbert TOUZOT. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Collection Université de Compiègne. Maloine, 1981.
- [57] Tomas DOHNAL, Agnes LAMACZ et Ben SCHWEIZER. « Bloch-wave homogenization on large time scales and dispersive effective wave equations ». *In : Multiscale Modeling & Simulation* 12.2 (2014), p. 488-513.
- [58] Tomas DOHNAL, Agnes LAMACZ et Ben SCHWEIZER. « Dispersive homogenized models and coefficient formulas for waves in general periodic media ». *In : Asymptot. Anal.* 93.1-2 (2015), p. 21-49. DOI : 10.3233/ASY-141280.
- [59] Marc DURUFLÉ, Victor PÉRON et Clair POIGNARD. « Thin layer models for electromagnetism ». *In : Communications in Computational Physics* 16.1 (2014), p. 213-238.
- [60] Bjorn ENGQUIST et Jean-Claude NEDELEC. « Effective Boundary Conditions for Electromagnetic Scattering in Thin Layers ». *In :* (1993).
- [61] Nicholas FANG et al. « Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens ». *In : Science* 308.5721 (2005), p. 534-537.
- [62] Didier FELBACQ et Guy BOUCHITTÉ. « Homogenization of a set of parallel fibers ». *In : Waves in Random Media* 7.2 (1997), p. 245-256. DOI : 10.1088/0959-7174/7/2/006. eprint : <http://dx.doi.org/10.1088/0959-7174/7/2/006>. URL : <http://dx.doi.org/10.1088/0959-7174/7/2/006>.

- [63] Didier FELBACQ et Guy BOUCHITTÉ. « Left-handed media and homogenization of photonic crystals ». In : *Optics letters* 30.10 (2005), p. 1189-1191.
- [64] Didier FELBACQ et Guy BOUCHITTÉ. « Negative refraction in periodic and random photonic crystals ». In : *New Journal of Physics* 7.1 (2005), p. 159.
- [65] Didier FELBACQ et Guy BOUCHITTÉ. « Theory of mesoscopic magnetism in photonic crystals ». In : *Phys. Rev. Lett.* 94.18 (2005), p. 183902.
- [66] Jacob FISH, Wen CHEN et Gakuji NAGAI. « Non-local dispersive model for wave propagation in heterogeneous media: One-dimensional case ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54 (mai 2002), p. 331-346. DOI : 10.1002/nme.423.
- [67] Sonia FLISS. « Etude mathématique et numérique de la propagation des ondes dans des milieux périodiques localement perturbés. » Thèse de doct. Ecole nationale des sciences et techniques avancées, 2009.
- [68] Sonia FLISS et Patrick JOLY. « Exact boundary conditions for time-harmonic wave propagation in locally perturbed periodic media ». In : *Applied Numerical Mathematics* 59.9 (2009). Second Chilean Workshop on Numerical Analysis of Partial Differential Equations (WONAPDE 2007), p. 2155-2178. ISSN : 0168-9274. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2008.12.013>. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168927408002109>.
- [69] Judith GARDINER et al. « Solution of the Sylvester matrix equation  $AXB^T + CXD^T = E$  ». In : *ACM TRans. Maths. Softw.* 18.2 (juin 1992), p. 223-231.
- [70] David GÉRARD-VARET et Nader MASMOUDI. « Homogenization and boundary layers ». In : *Acta Math.* 209.1 (2012), p. 133-178.
- [71] David GÉRARD-VARET et Nader MASMOUDI. « Homogenization in polygonal domains ». In : *J. Eur. Math. Soc.* 13.5 (2011), p. 1477-1503.
- [72] Jean GIROIRE. « Étude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales. » Thèse de doct. Paris 6, 1987.
- [73] Housseem HADDAR et Patrick JOLY. « Stability of thin layer approximation of electromagnetic waves scattering by linear and nonlinear coatings ». In : *Journal of computational and applied mathematics* 143.2 (2002), p. 201-236.
- [74] Housseem HADDAR, Patrick JOLY et Hoai-Minh NGUYEN. « Generalized impedance boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles: the scalar case ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 15.08 (2005), p. 1273-1300.
- [75] Housseem HADDAR, Patrick JOLY et Hoai-Minh NGUYEN. « Generalized impedance boundary conditions for scattering problems from strongly absorbing obstacles: the case of Maxwell's equations ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 18.10 (2008), p. 1787-1827.
- [76] A. M. IL'IN. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*. T. 102. Translations of Mathematical Monographs. Translated from the Russian by V. Minachin [V. V. Minakhin]. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992, p. x+281. ISBN : 0-8218-4561-6.
- [77] Laboratoires Poems et IRMAR. « XLiFE++ - eXtended Library of Finite Elements in C++ ». URL : <https://uma.ensta-paris.fr/soft/XLiFE++/>.
- [78] Vasilii Vasil'evich JIKOV, Sergei M KOZLOV et Olga Arsen'evna OLEINIK. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.

- [79] Patrick JOLY, Jing-Rebecca LI et Sonia FLISS. « Exact boundary conditions for periodic waveguides containing a local perturbation ». In : *Communications in Computational Physics* 1.6 (2006), p. 945-973. URL : <https://hal-ensta-paris.archives-ouvertes.fr/hal-00977852>.
- [80] Marc JOSIEN. « Some quantitative homogenization results in a simple case of interface ». In : *Communications in Partial Differential Equations* 44.10 (2019), p. 907-939.
- [81] Nicolas KIELBASIEWICZ et Eric LUNÉVILLE. « XLiFE++: a FEM/BEM multipurpose library ». In : Numelec 2017 - 9ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme (Paris), nov. 2017.
- [82] Agnes LAMACZ. « Dispersive effective models for waves in heterogeneous media ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 21.09 (2011), p. 1871-1899.
- [83] Marie-Noëlle LE ROUX. « Résolution numérique du problème du potentiel dans le plan par une méthode d'éléments finis. » Thèse de doct. Université de Rennes, 1974.
- [84] Hyesog LEE et al. « Realization of optical superlens imaging below the diffraction limit ». In : *New Journal of Physics* 7.1 (2005), p. 255.
- [85] Ulf LEONHARDT. « Optical conformal mapping ». In : *science* 312.5781 (2006), p. 1777-1780.
- [86] Jichun LI. « A literature survey of mathematical study of metamaterials ». In : *Int. J. Numer. Anal. Model* 13.2 (2016), p. 230-243.
- [87] Ismo V LINDELL et al. « BW media? Media with negative parameters, capable of supporting backward waves ». In : *Microw. Opt. Techn. Lett.* 31.2 (2001), p. 129-133.
- [88] Jacques-Louis LIONS. *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control*. Science Press, 1981. ISBN : 9780677602004. URL : <https://books.google.fr/books?id=UZkOAAAAQAAJ>.
- [89] Bruno LOMBARD, Agnes MAUREL et Jean-Jacques MARIGO. « Numerical modeling of the acoustic wave propagation across an homogenized rigid microstructure in the time domain ». In : *Journal of Computational Physics* 335 (2017), p. 558-577.
- [90] Richard C MACCAMY et Ernst STEPHAN. « A skin effect approximation for eddy current problems ». In : *Analysis and Thermomechanics*. Springer, 1987, p. 175-186.
- [91] Jean-Jacques MARIGO et Agnès MAUREL. « Homogenization models for thin rigid structured surfaces and films ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 140.1 (2016), p. 260-273.
- [92] Jean-Jacques MARIGO et Agnès MAUREL. « Second order homogenization of subwavelength stratified media including finite size effect ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 77.2 (2017), p. 721-743.
- [93] Vladimir MAZ'YA, Serguei NAZAROV et Boris PLAMENEVSKIJ. *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*. T. 1. Birkhäuser, 2012.
- [94] Shari MOSKOW et Michael VOGELIUS. « First order corrections to the homogenized eigenvalues of a periodic composite medium. The case of Neumann boundary conditions. » In : *Indiana Univ. Math. J.* (1997).
- [95] Shari MOSKOW et Michael VOGELIUS. « First-order corrections to the homogenised eigenvalues of a periodic composite medium. A convergence proof ». In : *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 127.6 (1997), p. 1263-1299.

- [96] François MURAT et Luc TARTAR. « *H-convergence* ». In : Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique de l'Université d'Alger(1977). English translation to appear in "Topics in the mathematical modeling of composite materials", R.V. Kohn ed., series "Progress in Non-linear Differential Equations et their Applications", Birkhauser, Boston.
- [97] Jean-Claude NÉDÉLEC. « Approximation par potentiel de double couche du problème de Neumann extérieur. » In : *C.R. Acad. Sci. Paris* (1978), p. 103-106.
- [98] Gabriel NGUETSENG. « A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization ». In : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 20.3 (1989), p. 608-623.
- [99] Hoai-Minh NGUYEN. « Asymptotic behavior of solutions to the Helmholtz equations with sign changing coefficients ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 367.9 (2015), p. 6581-6595.
- [100] Hoai-Minh NGUYEN. « Limiting absorption principle and well-posedness for the Helmholtz equation with sign changing coefficients ». In : *J. Math. Pures Appl.* 106.2 (2016), p. 342-374.
- [101] Petri OLA. « Remarks on a transmission problem ». In : *J. Math. Anal. Appl.* 196.2 (1995), p. 639-658.
- [102] John B PENDRY, David SCHURIG et David R SMITH. « Controlling electromagnetic fields ». In : *science* 312.5781 (2006), p. 1780-1782.
- [103] John B. PENDRY et al. « Magnetism from conductors, and enhanced non-linear phenomena ». In : *IEEE T. Microw. Theory* 47 (1999), p. 2075-2084.
- [104] John Brian PENDRY. « Negative refraction makes a perfect lens ». In : *Physical review letters* 85.18 (2000), p. 3966.
- [105] Victor PÉRON. « Modélisation mathématique de phénomènes électromagnétiques dans des matériaux à fort contraste ». Thèse de doct. 2009.
- [106] Clair POIGNARD. « Approximate transmission conditions through a weakly oscillating thin layer ». In : *Mathematical methods in the applied sciences* 32.4 (2009), p. 435-453.
- [107] Clair POIGNARD. « Boundary layer correctors and generalized polarization tensor for periodic rough thin layers. A review for the conductivity problem ». In : *ESAIM: Proceedings*. T. 37. EDP Sciences. 2012, p. 136-165.
- [108] Clair POIGNARD et al. « Approximate conditions replacing thin layers ». In : *IEEE transactions on magnetics* 44.6 (2008), p. 1154-1157.
- [109] Timothée POUCHON. « Effective models and numerical homogenization methods for long time wave propagation in heterogeneous media ». In : (2017), p. 288. DOI : 10.5075/epfl-thesis-7881. URL : <http://infoscience.epfl.ch/record/231942>.
- [110] Fadil SANTOSA et William W SYMES. « A dispersive effective medium for wave propagation in periodic composites ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 51.4 (1991), p. 984-1005.
- [111] Richard A SHELBY, David R SMITH et Seldon SCHULTZ. « Experimental verification of a negative index of refraction ». In : *science* 292.5514 (2001), p. 77-79.
- [112] Zhongwei SHEN et Jinping ZHUGE. « Boundary layers in periodic homogenization of Neumann problems ». In : *arXiv preprint arXiv:1610.05273* (2016).
- [113] Mário G SILVEIRINHA et Carlos A FERNANDES. « Homogenization of 3-D-connected and nonconnected wire metamaterials ». In : *IEEE transactions on microwave theory and techniques* 53.4 (2005), p. 1418-1430.

- [114] David R SMITH et al. « Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity ». In : *Physical review letters* 84.18 (2000), p. 4184.
- [115] Vincent Lescarret SONIA FLISS Patrick Joly. « Mathematical analysis and numerical computation in waveguide domains with periodic outlet at infinity ». In : *in progress* (2020).
- [116] Luc TARTAR. « Compensated compactness and applications to partial differential equations ». In : *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt symposium 4* (1979), p. 136-212.
- [117] Luc TARTAR. *The general theory of homogenization: a personalized introduction*. T. 7. Springer Science & Business Media, 2009.
- [118] Sébastien TORDEUX, Grégory VIAL et Monique DAUGE. « Matching and multiscale expansions for a model singular perturbation problem ». In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 343.10 (2006), p. 637-642.
- [119] Milton VAN DYKE. *Perturbation methods in fluid mechanics*. T. 8. Academic Press, 1964.
- [120] Victor G. VESELAGO. « Electrodynamics of substances with simultaneously negative electrical and magnetic permeabilities ». In : *Soviet Physics Uspekhi* 10.4 (1968), p. 504-509.
- [121] Grégory VIAL. « Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème avec couche mince dans un domaine coin ». In : *PhD Thèse, École Normale Supérieure de Cachan, Paris* 26 (2003).
- [122] Grégory VIAL. « Efficiency of approximate boundary conditions for corner domains coated with thin layers ». In : *Comptes Rendus Mathématique* 340.3 (2005), p. 215-220.
- [123] Valentin VINOLES. « Problèmes d'interface en présence de métamatériaux : modélisation, analyse et simulations ». Thèse de doct. Ecole nationale des sciences et techniques avancées, 2016.
- [124] Vasilii Vasil'evich ZHIKOV. « On an extension of the method of two-scale convergence and its applications ». In : *Sbornik: Mathematics* 191.7 (2000), p. 973.
- [125] Richard W ZIOLKOWSKI. « Metamaterial-based antennas: Research and developments ». In : *IEICE transactions on electronics* 89.9 (2006), p. 1267-1275.
- [126] Richard W ZIOLKOWSKI et Allison D KIPPLE. « Application of double negative materials to increase the power radiated by electrically small antennas ». In : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 51.10 (2003), p. 2626-2640.



**Titre :** Modèles homogénéisés enrichis en présence de bords : Analyse et traitement numérique

**Mots clés :** homogénéisation, couches limites, modèle asymptotique, équation des ondes

**Résumé :** Quand on s'intéresse à la propagation des ondes dans un milieu périodique à basse fréquence (i.e. la longueur d'onde est grande devant la période), il est possible de modéliser le milieu périodique par un milieu homogène équivalent ou effectif qui a les mêmes propriétés macroscopiques. C'est la théorie de l'homogénéisation qui justifie d'un point de vue mathématique ce procédé. Ce procédé est très séduisant car les calculs numériques sont beaucoup moins coûteux (la petite structure périodique a disparu) et des calculs analytiques sont de nouveau possibles dans certaines configurations. Les ondes dans le milieu périodique et dans le milieu effectif sont très proches d'un point de vue macroscopique sauf en présence de bords ou d'interfaces.

En effet, il est bien connu que le modèle homogénéisé est obtenu en négligeant les effets de bords et par conséquent il est beaucoup moins précis aux bords du milieu périodique. Quand les phénomènes intéressants apparaissent aux bords du

milieu (comme la propagation des ondes plasmoniques à la surface des métamatériaux par exemple), il semble donc difficile de faire confiance au modèle effectif.

En revenant sur le processus d'homogénéisation, nous proposons un modèle homogénéisé qui est plus riche aux niveaux des bords. Le modèle homogénéisé enrichi est aussi simple que le modèle homogénéisé classique loin des interfaces, seule les conditions aux bords changent et prennent mieux en compte les phénomènes. Nous appliquons ce modèle à une équation elliptique dans le cas de la géométrie simple du demi-plan avec des conditions de type Dirichlet ou Neumann. D'un point de vue numérique, en plus des problèmes de cellule classiques qui apparaissent en homogénéisation, des problèmes de bandes périodiques doivent également être résolus. Pour finir, nous appliquons ces résultats à l'homogénéisation de l'équation des ondes en temps long et en présence de bords.

**Title :** Enriched homogenized models in presence of boundaries : analysis and numerical treatment

**Keywords :** homogenization, boundary layers, asymptotical model, wave equation

**Abstract :** When we are interested in the propagation of waves in a periodic medium at low frequency (i.e. wavelength large compared to the period length), it is possible to model the periodic medium by an equivalent or effective homogeneous medium which has the same macroscopic properties. It is the homogenization theory that mathematically justifies this process. This process is very attractive because numerical calculations are then much less expensive (the small periodic structure has disappeared) and analytical calculations are again possible in certain configurations. The waves in the periodic medium and in the effective medium are very close from a macroscopic point of view except in the presence of boundaries or interfaces.

Indeed, it is well known that the homogenized model is obtained by neglecting the boundary effects and consequently, it is much less precise at the bounda-

ries of the periodic medium. When interesting phenomena appear at the edges of the middle (such as the propagation of plasmonic waves on the surface of metamaterials for example), it therefore seems difficult to trust the effective model.

Returning to the homogenization process, we propose a homogenized model which is richer at the boundaries. The enriched homogenized model is as simple as the classical homogenized model far from the interfaces, only the boundary conditions change and take better account of the phenomena. We apply this model to an elliptical equation in the case of the simple geometry of the half-plane with Dirichlet or Neumann type conditions. From a numerical point of view, in addition to classic cell problems that appear in homogenization, periodic band problems must also be solved. Finally, we apply these results to the long time wave equation.