



**HAL**  
open science

# On the Vlasov-Maxwell System : régularité and non-relativistic limit

Nicolas Brigouleix

► **To cite this version:**

Nicolas Brigouleix. On the Vlasov-Maxwell System : régularité and non-relativistic limit. Analysis of PDEs [math.AP]. Institut Polytechnique de Paris, 2020. English. NNT : 2020IPPAX098 . tel-03166920

**HAL Id: tel-03166920**

**<https://theses.hal.science/tel-03166920v1>**

Submitted on 11 Mar 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT  
POLYTECHNIQUE  
DE PARIS

NNT : 2020IPPAX098

Thèse de doctorat



# Sur le système de Vlasov-Maxwell: régularité et limite non-relativiste.

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris  
préparée à l'École polytechnique

École doctorale n°574 Ecole Doctorale de Mathématiques Hadamard (EDMH)  
Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

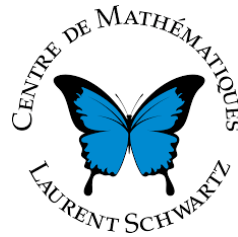
Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 22 Décembre 2020, par

**NICOLAS BRIGOULEIX**

Composition du Jury :

Mme Marjolaine Puel Professeur, Université Nice Sophia (Laboratoire J.A Dieudonné)	Présidente
M. Ansgar Jüngel Professeur, Université technique de Vienne (Institute for Analysis and Scientific Computing)	Rapporteur
M. Francis Filbet Professeur, Université de Toulouse III (Institut de Mathématiques de Toulouse)	Rapporteur
M. Kleber Carrapatoso Professeur Monge, Ecole Polytechnique (CMLS)	Examineur
M. François Golse Professeur, Ecole Polytechnique (CMLS)	Directeur de thèse
M. Daniel Han-Kwan Chargé de Recherche, École Polytechnique (CMLS)	Co-directeur de thèse

# Remerciements



Je tiens naturellement en premier lieu à remercier mes deux directeurs de thèse, François Golse et Daniel Han-Kwan. Je leur suis redevable pour leur patience à mon égard, et pour toutes les mathématiques qu'ils ont contribué à me faire découvrir. François m'a fait découvrir le monde passionnant de la théorie cinétique et m'a donné accès à son recul et ses connaissances exceptionnelles sur le sujet. Daniel, par sa bienveillance, ses encouragements, ses nombreuses idées et intuitions, a alimenté et soutenu infatigablement mes recherches. Travailler avec François et Daniel fut à tout point de vue une expérience très riche.

Je tiens à remercier Francis Filbet et Ansgar Jüngel pour avoir accepté de rapporter ma thèse. Je remercie également Kleber Carrapatoso et Marjolaine Puel pour avoir bien voulu faire parti de mon jury.

Je dois ici témoigner de ma gratitude à Ning Jiang et à Linjie Xiong, pour le temps qu'ils ont consacré à notre collaboration, pour toutes les discussions et les échanges que nous avons eu, et leur persévérance quand il semblait que nous tournions en rond. J'espère Linjie que j'aurai l'occasion d'honorer un jour l'invitation à te rendre visite en Chine. Merci également à tous ceux qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à forger ma culture scientifique ou à stimuler ma curiosité. J'ai une pensée particulière pour mes enseignants de lycée et de classes préparatoires, Monsieur Tauziède et Monsieur Dorra. Je pense aussi à Aymeric et Laurent qui, me devançant d'une année, ont pu gentiment me tracer la voie du doctorat. Il me faut aussi faire mention des conditions de travail exceptionnelles qui m'ont été fournies par le CMLS, particulièrement grâce à son secrétariat. Je remercie donc Pascale Fuseau, Marine Amier et Carole Juppín pour leur bienveillance face à mes errements administratifs et leur faculté à rendre bien des choses simples. Je pense aussi à tous ceux, Nicolas, Mathieu, Stéphane, Omid et David, qui auront participé à l'équipe de foot du CMLS, qui en dépit sa petite taille aura vaillamment défendu son avant dernière place dans la bonne humeur. Mes nombreux cobureaux auront aussi contribué à rendre les journées de travail parfois longues plus légères et amusantes, je pense tout particulièrement à Fabio, Te Hoang, Dorian et Saeed. Merci aussi à Ludovic et Jérémie avec qui enseigner fut un plaisir, à Emiliano et Matilde qui m'ont permis de manger à l'heure latine ma première année de thèse et à Vincent pour avoir partagé ses conseils de lectures

---

et m'avoir réappris à jouer aux échecs.

Je dédie également ces quelques lignes à ceux qui, non mathématiciens mais néanmoins aimants, m'auront apporté un soutien ou simplement les opppprtunités de me changer les idées, et qui ainsi ont rendu possible la réalisation de ma thèse.

Ainsi du groupe des *tifosis*, qui entre discussions intenses, matchs de football au centre Elisabeth et sur petit écran, m'auront beaucoup fait rire durant ces trois années. Par extension, j'ai une pensée chaleureuse pour les nombreuses personnes qui auront égayé mes divers séjours en Corse. Merci à Mathieu de m'avoir accompagner dans des escapades plus ou moins maitrisées sur des pénincules écossaises ou dans des hautes vallées alpine en plein hiver. Merci à mon cher ami conducteur de Twingo Thibault, sans qui bien des trajets pour Palaiseau auraient été plus mornes. Quoiqu'un peu pointilleux sur les horaires je dois lui reconnaître un sens de l'humour et une bonne humeur indémontables qui m'ont permis de garder un bon moral.

Bien entendu mes parents et ma petite soeur Emilie, par leur soutien tranquille et indéfectible, ont contribué grandement à l'aboutissement de cette thèse. De fait ils m'auront toujours accompagné et épaulé avec bienveillance durant ma scolarisation et mes études supérieures, je leur exprime ici ma profonde gratitude.

Enfin, j'adresse mes remerciements les plus chaleureux à Soledad qui m'aura accompagné ces dernières années et avec qui j'aurai partagé beaucoup de moments de doutes et de joie et qui a cru en moi bien plus que je ne l'ai fait.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Présentation générale et éléments de physique des plasmas . . . . .	3
1.1.1	Le plasma . . . . .	3
1.1.2	Interactions électromagnétiques dans un plasma . . . . .	3
1.1.3	Paramètres physiques . . . . .	5
1.1.4	Potentiel électromagnétique . . . . .	6
1.2	Physique statistique et modèles cinétiques . . . . .	8
1.2.1	Trois échelles de description . . . . .	9
1.2.2	Equation de Vlasov, modèles non collisionnels . . . . .	11
1.2.3	Modèle adimensionné de référence . . . . .	13
1.3	Sur le problème de Cauchy . . . . .	15
1.3.1	Le système de Vlasov-Poisson . . . . .	15
1.3.2	Le système de Vlasov-Maxwell . . . . .	18
1.3.3	Non-résonance d'un système couplant une équation de Vlasov et une équation de Transport (Chapitre2) . . . . .	21
1.4	Approximation non-relativiste et système de Vlasov-Darwin . . . . .	23
1.4.1	Le système de Vlasov-Poisson : limite non-relativiste du système de Vlasov-Maxwell . . . . .	24
1.4.2	Un système d'approximation d'ordre supérieur : le système de Vlasov- Darwin . . . . .	25
1.4.3	Approximation non relativiste d'ordre arbitrairement élevé de type Vlasov-Elliptique (Chapitre 3) . . . . .	27
1.5	Méthodes de Transport optimal et limite non relativiste . . . . .	30
1.5.1	Le transport optimal et les équations aux dérivées partielles cinétiques	30
1.5.2	Limite non-relativiste en distance de Wasserstein pour des solutions à densité bornée (Chapitre 4) . . . . .	31
1.5.3	Une classe de solutions à valeurs dans un espace de mesures vérifiant les hypothèses du Théorème 1.5.7 . . . . .	34
1.6	Perspectives . . . . .	37
1.6.1	Généralisation des résultats du Chapitre 3 au cas $\Omega = \mathbf{R}^3$ . . . . .	37
1.6.2	Amortissement radiatif . . . . .	37
1.6.3	Faire usage de l'approximation d'ordre élevé pour l'analyse numé- rique du système de Vlasov-Maxwell . . . . .	38
1.6.4	Affaiblissement de la condition sur $\rho^{\text{VM}}$ dans le Théorème du Cha- pitre 5 . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Non-Resonant system coupling Vlasov and transport equations.</b>	<b>41</b>
2.1	Introduction . . . . .	42
2.1.1	The Toy-Model and the Vlasov Maxwell system . . . . .	42

2.1.2	Motivation of the Model . . . . .	45
2.1.3	Main results . . . . .	47
2.1.4	Outline of the paper . . . . .	49
2.2	Global existence of weak solutions : proof of Theorem 2.1.2. . . . .	50
2.2.1	Conservation of the energy and a priori bounds . . . . .	50
2.2.2	Weak limit . . . . .	52
2.2.3	Compactness and averaging lemma . . . . .	53
2.2.4	Continuity in time with respect to the weak topologies . . . . .	55
2.3	Local classical solvability : proof of Theorem 2.1.4. . . . .	55
2.3.1	Glassey-Strauss criterion . . . . .	55
2.3.2	The initial value problem. . . . .	60
2.4	A larger class of adapted initial data : proof of Theorem 2.1.5. . . . .	62
2.5	A refined criterion : proof of Theorem 2.1.6 . . . . .	67
2.5.1	Time integral of the force field. . . . .	67
2.5.2	An upper bound for $I_E$ . . . . .	67
2.6	Appendix : Technical results . . . . .	69
2.6.1	Estimates (2.3.5), (2.3.6) . . . . .	69
2.6.2	Homogeneous distributions and average of $B_i^k$ . . . . .	69
<b>3</b>	<b>High order Vlasov-Darwin systems as high-order non-relativistic approximation of the relativistic Vlasov-Maxwell system</b>	<b>73</b>
3.1	Introduction . . . . .	74
3.2	Main results . . . . .	81
3.2.1	Definitions and preliminary comments . . . . .	81
3.3	Derivation of the higher Vlasov-Darwin systems. . . . .	87
3.3.1	Description of the recursive construction method. . . . .	88
3.3.2	Propagation of the structure through the iterative construction method. . . . .	91
3.3.3	The system beyond the Vlasov Darwin system : VD-3. . . . .	96
3.4	Local well-posedness for the $k$ -th Vlasov-Darwin approximation system (3.2.9). . . . .	98
3.5	Approximation rates . . . . .	101
3.6	Appendix . . . . .	104
3.6.1	The Leray operator $\mathbf{P}$ . . . . .	104
3.6.2	The space mean-value and the average free part . . . . .	105
<b>4</b>	<b>The non-relativistic limit of the Vlasov-Maxwell system with uniform macroscopic bounds</b>	<b>107</b>
4.1	Introduction . . . . .	108
4.1.1	The Vlasov-Poisson and Vlasov-Maxwell systems . . . . .	108
4.1.2	The non-relativistic limit . . . . .	110
4.1.3	Main results . . . . .	111
4.1.4	Comments on Theorem 4.1.7 . . . . .	114
4.1.5	The Cauchy problem for the Vlasov-Maxwell and Vlasov-Poisson systems : a short review . . . . .	115
4.1.6	Organization of the paper . . . . .	116
4.2	Definitions, notations and classical results about the Wasserstein distance $W_2$ . . . . .	117
4.3	Proof of Theorem 4.1.7 . . . . .	118
4.3.1	Lagrangian formulation for weak solutions of Vlasov-Poisson and relativistic Vlasov-Maxwell . . . . .	118

4.3.2	Log-Grönwall estimate on the square of the $W_2$ distance between the Lagrangian trajectories . . . . .	119
4.3.3	Final estimate . . . . .	127
4.3.4	The case $\Omega = \mathbf{R}^3$ . . . . .	128
4.4	A class of measure-valued solutions which satisfies the assumptions of Theorem 4.1.7 . . . . .	129
4.4.1	Weak in $\xi$ and strong in $x$ solutions . . . . .	129
4.4.2	A multifluid representation . . . . .	130
4.5	Proof of Theorem 4.4.4 . . . . .	133
4.5.1	Definitions, notations and preliminary results . . . . .	133
4.5.2	Estimate on the force field $F_L$ . . . . .	134
4.5.3	Estimates for $\rho_\theta$ and $\xi_\theta$ . . . . .	139
4.5.4	The iterative scheme . . . . .	140
4.5.5	The Vlasov-Poisson case . . . . .	143
4.6	Appendix . . . . .	144
4.6.1	On the Leray projection $\mathbf{P}$ . . . . .	144
4.6.2	Proof of Lemma 4.5.5 . . . . .	145
4.7	Références . . . . .	147

# Chapitre 1

## Introduction

### Contents

---

<b>1.1</b>	<b>Présentation générale et éléments de physique des plasmas</b>	<b>3</b>
1.1.1	Le plasma	3
1.1.2	Interactions électromagnétiques dans un plasma	3
1.1.3	Paramètres physiques	5
1.1.4	Potentiel électromagnétique	6
<b>1.2</b>	<b>Physique statistique et modèles cinétiques</b>	<b>8</b>
1.2.1	Trois échelles de description	9
1.2.2	Equation de Vlasov, modèles non collisionnels	11
1.2.3	Modèle adimensionné de référence	13
<b>1.3</b>	<b>Sur le problème de Cauchy</b>	<b>15</b>
1.3.1	Le système de Vlasov-Poisson	15
1.3.2	Le système de Vlasov-Maxwell	18
1.3.3	Non-résonance d'un système couplant une équation de Vlasov et une équation de Transport (Chapitre2)	21
<b>1.4</b>	<b>Approximation non-relativiste et système de Vlasov-Darwin</b>	<b>23</b>
1.4.1	Le système de Vlasov-Poisson : limite non-relativiste du système de Vlasov-Maxwell	24
1.4.2	Un système d'approximation d'ordre supérieur : le système de Vlasov-Darwin	25
1.4.3	Approximation non relativiste d'ordre arbitrairement élevé de type Vlasov-Elliptique (Chapitre 3)	27
<b>1.5</b>	<b>Méthodes de Transport optimal et limite non relativiste</b>	<b>30</b>
1.5.1	Le transport optimal et les équations aux dérivées partielles cinétiques	30
1.5.2	Limite non-relativiste en distance de Wasserstein pour des solutions à densité bornée (Chapitre 4)	31
1.5.3	Une classe de solutions à valeurs dans un espace de mesures vérifiant les hypothèses du Théorème 1.5.7	34
<b>1.6</b>	<b>Perspectives</b>	<b>37</b>
1.6.1	Généralisation des résultats du Chapitre 3 au cas $\Omega = \mathbf{R}^3$	37
1.6.2	Amortissement radiatif	37
1.6.3	Faire usage de l'approximation d'ordre élevé pour l'analyse numérique du système de Vlasov-Maxwell	38



## 1.1 Présentation générale et éléments de physique des plasmas

Dans ce travail de thèse on s'intéresse d'un point de vue mathématique au comportement de particules chargées dans un plasma. Plus précisément on s'intéresse à la fonction de distribution de ces particules et à son évolution au cours du temps décrite par des modèles, des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP), issues de la théorie cinétique des gaz et des plasmas. Notre étude porte sur le régime asymptotique dit *non-relativiste* dans lequel la vitesse caractéristique des particules est supposée faible devant la vitesse de la lumière. Dans un premier temps on effectuera quelques rappels de physique des plasmas afin notamment de préciser le cadre dans lequel nos modèles sont pertinents. Pour de plus complètes informations sur le sujet nous renvoyons le lecteur aux monographies de Bellan [20], Boyd et Sanderson [28] ou de Rax [124].

### 1.1.1 Le plasma

Le plasma est un état de la matière que l'on peut qualifier de *gaz ionisé*. Lorsque les conditions de température ou de pression sont réunies au sein d'un gaz de particules alors le nombre de particules chargées libres (c'est à dire les électrons libres ou les ions positifs) devient comparable au nombre de particules neutres. Le milieu est alors conducteur électriquement et les phénomènes de nature électromagnétique concurrencent ou supplantent les phénomènes relevant de la mécanique tels que les phénomènes collisionnels. Le mot de *plasma* est introduit par le physicien Langmuir en 1928 pour décrire ces gaz ionisés.

Les conditions thermodynamiques requises sont rarement atteintes sur Terre mais sont tout à fait répandues dans l'univers puisque 99% de la matière y est à l'état de plasma. Les étoiles et les vents occupant les milieux interstellaires en sont majoritairement composés. Sur Terre on le rencontre de manière naturelle dans les éclairs, l'ionosphère ou les aurores boréales. Les applications industrielles sont nombreuses, que ce soit les applications déjà maîtrisées telles les écrans plasmas ou les néons ou les applications en cours de développement comme la gravure à froid ou la fusion nucléaire contrôlée (par fusion inertielle à l'aide de laser de grande puissance ou par confinement magnétique dans des *tokamak* [124],[112], [49]).

Quelque soit le type de plasma, un modèle le décrivant tiendra compte de la dynamique des particules (relativistes ou non) et du couplage avec les interactions électromagnétiques entre ces mêmes particules chargées. Nous allons donc décrire brièvement le type d'interactions électromagnétique régnant au sein d'un plasma.

### 1.1.2 Interactions électromagnétiques dans un plasma

Afin de simplifier la présentation nous considérerons que les particules chargées en interactions sont des électrons de charge  $q_e = -q$ , ou des ions de charge  $q_i = q$ , où  $q$  désigne la charge élémentaire. On désignera indifféremment par  $q_s$ , avec  $s \in \{e, i\}$  la charge

d'une particule chargée. On indicera de la même manière par  $s$  toute quantité physique qui dépendrait de la nature de la particule. La généralisation à des systèmes multi-espèces pose peu de problème en soi puisque que les équations que l'on étudiera ne dépendent pas du numéro atomique.

La répartition des particules chargées et leur dynamique sont mesurées macroscopiquement par la densité de charge et la densité de courant notées  $\rho \equiv \rho(t, x)$  et  $j \equiv j(t, x)$ , et induisent un champ électromagnétique  $(E, B)$ , phénomène décrit par les équations de Maxwell dans le vide [108]

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot B = 0, \\ \nabla \times E + \partial_t B = 0, \\ \nabla \times B - \frac{1}{c^2} \partial_t E = \mu_0 j. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Ces équations sont définies localement au voisinage de tout point de l'espace  $x \in \mathbf{R}^3$  et peuvent être également considérées sur des variétés différentielles. L'opérateur  $\nabla$  désigne ici l'opérateur différentiel classique  $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ . Ces équations sont respectivement dénommées Maxwell-Gauss, Maxwell-Thompson, Maxwell-Faraday et Maxwell Ampère. La constante  $c$  désigne la vitesse de la lumière,  $\epsilon_0$  est la constante de permittivité du vide,  $\mu_0$  la constante de perméabilité du vide.

Dans la littérature mathématique, le système de Maxwell est préalablement redimensionné (selon une procédure que l'on présentera en section 1.2.3) et est le plus souvent considéré (par exemple dans le chapitre 1 de [57] ou le chapitre 3 de [98]) sous la forme

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \rho \\ \nabla \cdot B = 0, \\ \nabla \times E + \frac{1}{c} \partial_t B = 0, \\ c \nabla \times B - \partial_t E = j. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Il est à noter que nous conservons volontairement la constante  $c$ , bien qu'elle soit souvent omise dans la littérature, dans la mesure où il s'agit pour nous du paramètre principal pour déterminer de la prédominance ou non des effets relativistes.

Il est également possible par des manipulations algébriques simples de réduire ce système d'équations aux dérivées partielles à un système de deux équations d'ondes

$$\begin{cases} -\Delta E + \frac{1}{c^2} E = -\nabla \rho - \partial_t j \\ -\Delta B + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 B = \nabla \times j. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Ce système présente l'avantage de rendre apparent la nature hyperbolique du système des équations de Maxwell et le caractère ondulatoire du champ électromagnétique.

L'approximation *électrostatique*, qui peut être également vue comme une approximation *non-relativiste* de premier ordre, consiste à considérer que le champ magnétique

auto-induit  $B$  est nul et à ne conserver que l'équation de Maxwell-Gauss. Nous reviendrons sur cette approximation en des termes plus précis une fois le cadre formel posé.

De plus, en présence d'un champ électrique  $E$  et d'un champ magnétique  $B$ , une particule de charge  $q_s$  et de vitesse  $v_s$  sera soumise à la force de Lorentz

$$F_s = q_s (E + v_s \times B), \quad (1.1.4)$$

où  $\times$  désigne le produit vectoriel usuel. Il est à noter que le champ électromagnétique  $(E, B)$  qui règne au sein d'un plasma est la somme d'une composante collectivement générée (phénomène décrit par les équations de Maxwell (1.1.1)) et éventuellement d'une composante imposée de l'extérieur et donc indépendante de la répartition de charge

Ainsi la force Lorentz dirige le mouvement des particules, modifiant par la même les répartitions de charge et de courant  $\rho$  et  $j$  mesurées à l'échelle du fluide, ce qui influence en retour le champ électromagnétique  $(E, B)$ . Cette dynamique non linéaire est source de nombreux effets cinétiques et électromagnétiques au sein d'un plasma et il existe donc une variété de modèles se focalisant selon le contexte physique sur le ou les aspects prédominants. Dans la prochaine section on introduira un certain nombre de paramètres faisant intervenir des constantes physiques et qui permettent de situer le domaine de pertinence du système que l'on étudie.

### 1.1.3 Paramètres physiques

Dans cette section on notera par  $n$  le nombre caractéristique d'ions ou d'électrons par unité spatiale, et on dénotera par  $\theta_s$  la température caractéristique d'une espèce. On peut considérer cette température commune à toutes les espèces uniquement si le plasma est très énergétique, hypothèse aussi dénommée *plasma chaud*. Pour de plus amples informations sur les divers paramètres physiques caractérisant un plasma, exposés ci-dessous, le lecteur pourra se référer à la section 1.2 de [75] et aux références qui y sont citées, ainsi qu'à [98] et au chapitre 1 de [57].

**Paramètre cinétique.** En mécanique classique les vitesses caractéristiques de déplacement des particules de masse  $m_s$  sont reliées à la température du plasma par la relation

$$V_s = \left( \frac{k_b \theta}{m_s} \right)^{1/2}, \quad (1.1.5)$$

où  $k_b$  désigne la constante de Boltzmann.

Dans notre étude on sera amené à considérer le paramètre adimensionnel

$$\epsilon = \frac{V_s}{c},$$

mesurant le rapport entre la vitesse caractéristique des particules et la vitesse de la lumière, et la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  caractérisera ce que l'on dénomme la *limite classique* ou la *limite non-relativiste*.

Pour un *plasma froid* (la ionosphère par exemple) l'ordre de grandeur de  $\epsilon$  est de  $10^{-4}$ , pour un *plasma chaud*, au sein d'un tokamak par exemple, il est de 0.1.

**Paramètre électromagnétique** On définit la longueur de Debye  $\lambda_D$  par la relation

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{4\pi}{T} nq^2, \quad (1.1.6)$$

où  $T$  désigne la température globale du plasma. C'est la distance au-delà de laquelle on considère que le champ Coulombien émis par une particule est écranté (de l'ordre de  $10^{-5}$  mètres dans un plasma de fusion par exemple [112]).

La distance moyenne entre deux particules est  $r \sim n^{-1/3}$ . Lorsque

$$\frac{r^2}{a} \ll 1,$$

on considère les collisions entre particules comme négligeables en comparaison avec les effets électromagnétiques collectifs auto-induits. On parle dans ce cas d'un *plasma raréfié*.

On peut aussi considérer le ratio  $\frac{\lambda_D}{L}$ , où  $L$  désigne la longueur caractéristique du plasma considéré. Lorsque ce ratio tend vers 0 le plasma est considéré comme *quasi-neutre* dans la mesure où une perturbation de charge locale ne modifiera pas la neutralité de charge globale du plasma. Bien que l'étude de la limite quasi-neutre ne soit pas à proprement parler le sujet de cette thèse, nos travaux sur la limite non relativiste, du chapitre 4 notamment, y ont puisé plusieurs méthodes.

**Rapport de masse** Il peut être également pertinent de considérer le rapport  $\lambda$  entre la masse d'un électron et la masse d'un ion,

$$\lambda = \frac{m_e}{m_s}.$$

Ce rapport est de l'ordre de  $10^{-4}$  pour un plasma composées d'atomes légers. Si le plasma est suffisamment énergétique pour considérer que l'énergie thermique  $m_s V_s^2$  des différentes espèces sont comparables, alors on peut constater que la vitesse des ions, qui sont bien plus lourds, est négligeable devant la vitesse des électrons.

Lorsque nous serons amené à étudier le système de Vlasov-Poisson ou de Vlasov-Maxwell sur le tore  $\mathbf{T}^3$  nous reprendrons cette hypothèse. Pour des justifications de celle-ci, le lecteur pourra se référer à la thèse de Herda [75].

#### 1.1.4 Potentiel électromagnétique

Il existe une autre manière de représenter le champ électromagnétique  $(E, B)$  satisfaisant les équations de Maxwell (1.1.1). Il s'agit du formalisme des potentiels scalaires et vecteurs, aussi appelés potentiels retardés ou potentiels de Liénard-Wiechert. On renvoie à la section 14.1 de la monographie de Jackson [89] ou au chapitre 8 de Landau et Lifschitz [99] pour une présentation plus complète de ces potentiels.

L'analyse vectorielle montre aisément que

$$\nabla \cdot \nabla \times = 0,$$

ainsi il est naturel de postuler l'existence d'un potentiel vecteur  $A$  tel que

$$B = \nabla \times A.$$

De même notant que

$$\nabla \times \nabla = 0,$$

on pourra supposer l'existence d'un potentiel scalaire  $\phi$  satisfaisant

$$E = -\nabla\phi - \epsilon\partial_t A.$$

On remarquera que ces potentiels ne seraient alors pas définis univoquement puisque toute transformation

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A + \nabla f, \\ \phi &\rightarrow \phi - \partial_t f, \end{aligned}$$

laisse invariante le champ électromagnétique  $(E, B)$  quelque soit la fonction  $f$  régulière choisie. C'est pourquoi lorsque l'on utilise le formalisme potentiel on y adjoint généralement une contrainte géométrique que l'on nomme *condition de jauge*. Les deux conditions de jauge les plus classiques sont la condition de jauge de Lorentz

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi = 0,$$

et la condition de jauge de Coulomb

$$\nabla \cdot A = 0.$$

Dans la suite et dans tous les articles de cette thèse c'est muni de la condition de jauge de Coulomb que l'on travaillera.

Sous cette hypothèse le potentiel vecteur  $A$  et le champ magnétique  $B$  sont liés par la relation

$$-\Delta A = \nabla \times B,$$

où  $\Delta$  désigne ici le laplacien vectoriel (nous utilisons l'abus de notation consistant à conserver la même notation pour le laplacien scalaire et le laplacien vectoriel).

Par ailleurs si l'on note par  $\mathbf{P}$  le projecteur de Leray, c'est à dire l'opérateur de projection de l'espace des champs de vecteurs à valeurs dans  $L^2$  sur l'espace des champs de vecteurs à valeurs dans  $L^2$  de divergence nulle, alors le potentiel vecteur est défini de manière univoque par l'équation suivante

$$\epsilon^2 \partial_t^2 A - \Delta A = \epsilon \mathbf{P}(j). \quad (1.1.7)$$

Le potentiel scalaire vérifie quant à lui l'équation de Poisson

$$-\Delta \phi = \rho. \quad (1.1.8)$$

Sous ce formalisme il est donc possible de réduire le système d'équation de Maxwell à une équation elliptique (1.1.8) et une équation hyperbolique (1.1.7).

## 1.2 Physique statistique et modèles cinétiques

La théorie cinétique est la branche des sciences qui, s'inscrivant dans l'histoire longue de la compréhension de la matière, cherche à poser les fondations mathématiques d'une description statistique des fluides. Nous rappelons ici les grandes étapes de son développement et renvoyons le lecteur à l'introduction de la monographie [31] pour une chronologie plus exhaustive. On peut faire remonter l'origine de la discipline aux philosophes matérialistes antiques Démocrite (Vè siècle avant J-C), Épicure (341 – 270 avant J-C) et Lucrèce (99 – 55 avant J-C), qui les premiers envisagèrent la matière constituée de sphères dures microscopiques, les *atomes*.

C'est réellement avec D. Bernouilli (1700 – 1782) que cette théorie entre dans le champ scientifique. Il est le premier à tenter d'expliquer des mesures macroscopiques réalisées sur un gaz, telles que la pression ou la température, à partir d'une description statistique de la matière. L'introduction de la notion de *libre parcours moyen* par Clausius (1822 – 188) fait franchir un pas décisif à la théorie cinétique. Sur cette base, J.C Maxwell (1831 – 1879) développe une première théorie des processus de transport, dans laquelle il dérive de manière heuristique la célèbre distribution de vitesse qui porte son nom. En 1866 [108], bien qu'il n'ait pas tout à fait réussi à établir d'équation d'évolution des distributions de particules dans un état hors-équilibre, il jette de manière plus rigoureuse les bases de la théorie cinétique. C'est Boltzmann (1844 – 1906) qui résoudra ce problème, et qui introduira donc l'équation qui porte son nom dans l'article fondateur [24] dans lequel il déduisit également le célèbre théorème H.

Toutefois l'approche de Boltzmann ne fit pas immédiatement consensus dans la mesure où elle amenait à des paradoxes apparents. Dans la pratique l'équation s'imposa toutefois comme un outil utile dans la compréhension des gaz. En 1912, le mathématicien allemand Hilbert proposa une méthode pour trouver une solution approchée de l'équation de Boltzmann [77], utilisant un développement en série dont les termes sont des puissances d'un paramètre inversement proportionnels à la densité du gaz. Quelques années plus tôt en 1900, lors de la célèbre conférence de Paris [76], il ouvre la question de la fondation rigoureuse des équations cinétiques à partir des équations du mouvement à l'échelle microscopique.

La méthode de développement de Hilbert suivant un petit paramètre a ensuite été reprise et affinée simultanément mais de manière différente par Chapman (1888 – 1970) et Enskog (1884 – 1947) en 1917. Chapman et Cowling adoptèrent finalement la méthode de Enskog, qui porte désormais le nom de méthode de Chapman-Enskog, dans leur traité [34].

La discipline s'est ensuite fortement diversifiée et de nombreux autres modèles tenant compte des forces collectivement produites par les particules furent mis au point. En 1946, afin de modéliser l'évolution de la densité d'électrons dans un plasma, le physicien théoricien Vlasov introduisit l'équation aux dérivées partielles qui porte son nom [143].

Avant d'introduire le système d'équations aux dérivées partielles cinétiques que nous avons étudiés dans cette thèse, on rappellera brièvement les trois échelles de modélisation d'un système de particules en interaction afin de situer la *théorie cinétique* dans cette

hiérarchie. Pour une présentation plus complète des modèles collisionnels on renverra aux articles de Villani [139; 140], ainsi qu'aux notes de cours [27].

Dans la suite  $d$  désignera en toute généralité la dimension de l'espace considéré et pourra en particulier être égale à 3 dans tous les chapitres de cette thèse. On notera l'espace physique

$$\Omega = \mathbf{R}^d \quad \text{ou} \quad \mathbf{T}^d,$$

où  $\mathbf{T}^d = (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^d$  est le tore plat  $d$ -dimensionnel, correspondant donc à un domaine périodique. Cela permet en pratique de ne pas se préoccuper des effets de bord et correspond expérimentalement à une situation où le plasma est confiné dans une cavité toroïdale sans contact avec les parois, tel un *tokamak* par exemple.

### 1.2.1 Trois échelles de description

Lorsqu'il s'agit de décrire la dynamique d'un système physique il existe essentiellement trois échelles d'observation. La *microscopique* où l'on étudie la dynamique de chaque particule, la *mésoscopique* où l'on étudie la dynamique d'une densité de probabilité dans l'espace des phases, et la *macroscopique* où, en *dézoomant* d'avantage, on suppose que toutes les particules en un point de l'espace physique ont la même vitesse. Au fur et à mesure que l'on dézoom la justification de la modélisation que l'on emploie se complexifie tandis que le nombre de variables et d'inconnues diminue lui drastiquement.

#### La description microscopique

Considérons un système composé d'un nombre  $N$  de particules de masse  $m$  (chargées ou non) évoluant dans l'espace  $\Omega$ , chaque particule étant soumise à un champ de force  $F_k$  dépendant de ses caractéristiques propres. Dans le cadre de la mécanique classique, la connaissance de la position et de la vitesse de chaque particule suffit à décrire complètement l'état du système. Mathématiquement, si on dénote  $t \in \mathbf{R}_+$  la variable de temps,  $X_k(t) \in \Omega$ , et  $V_k(t) \in \mathbf{R}^d$ , respectivement la position et la vitesse au temps  $t$  de la particule numérotée  $k$ , alors le mouvement de la  $k$ -ième particule est donnée selon le principe fondamental de la dynamique par les équations

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X_k(t) = V_k(t) \\ m \frac{d}{dt}V_k(t) = F_k(t, X_k(t), V_k(t)). \end{cases} \quad (1.2.1)$$

La résolution de ces  $2N$  équations différentielles ordinaires permet la description la plus complète de l'état du système que l'on peut encoder dans une densité de probabilité de présence  $f(X_1, V_1, \dots, X_N, V_N)$  sur l'espace des phases  $(\Omega \times \mathbf{R}^d)^N$ . Toutefois dans un gaz ou un plasma, l'ordre de grandeur typique du nombre de particules  $N$  est le nombre d'Avogadro, c'est à dire  $N \sim 10^{24}$ . De plus les équations sont couplées les unes aux autres via le champ de force qui est en partie créé par la dynamique du système. Il est ainsi invisible de résoudre analytiquement une telle quantité d'équations ou d'en faire une analyse numérique. Les limites de cette échelle de description ne portent donc pas sur ses fondements théoriques mais sur son utilisation pratique. Ainsi, pour le modèle historique des *sphères dures* dans lequel les particules d'un gaz rebondissent de manière élastique les

unes sur les autres telles des boules de billard, il a été prouvé que le flot associés au système des équation de la dynamique est bien défini pour presque toute condition initiale (voir chapitre 4 de [31]).

### Description macroscopique

Une autre approche historiquement plus ancienne que la théorie cinétique consista à faire l'hypothèse d'une continuité de la matière, et de déduire des bilans de matière et de force sur des volumes infinitésimaux dans  $\Omega$ , les équations d'évolution de grandeurs macroscopiques fonctions de  $(t, x)$ , telles que la pression, la température, ou la vitesse moyenne. Ce sont typiquement les *équations d'Euler* ou les *équations de Navier-Stokes* en mécanique des fluides, et dans le domaine de la physique des plasmas les équations de la *magnétohydrodynamique* (MHD) introduites par le physicien suédois Alfvén dans les années 1940. Ces systèmes présentent l'avantage d'être d'une étude plus simple pour l'analyse numérique, et de modéliser l'évolution de quantités que l'on peut mesurer expérimentalement.

Il est théoriquement possible de justifier le passage d'un modèle microscopique à un modèle macroscopique par des méthodes probabilistes (en considérant que la dynamique à l'échelle microscopique suit un processus aléatoire de Markov, voir par exemple [92]). Plus fréquemment on justifie les modèles macroscopiques à partir des modèles cinétiques sous-jacent, c'est ce qu'on appelle les *limites hydrodynamiques* (voir à ce sujet [11; 12; 65]). Les modèles macroscopiques reposent cependant sur l'hypothèse que le fluide est localement à l'équilibre thermodynamique, c'est à dire qu'en tout point  $x$  de l'espace et à chaque instant  $t$ , la distribution de vitesse des particules suit une loi normale centrée sur la vitesse moyenne au point  $(t, x)$  (plus généralement, une distribution de probabilité invariante sous l'action des termes d'interaction, la distribution *maxwellienne* correspondant au cas de l'opérateur de collisions de Boltzmann).

### Description cinétique

La théorie cinétique se situe donc à une échelle de description intermédiaire entre le microscopique et le macroscopique, que l'on qualifie généralement de mésoscopique. Pour chaque espèce  $s$ , on étudie l'évolution au cours du temps  $t \in \mathbf{R}_+$  d'une fonction de distribution  $f_s = f_s(t, x, v)$  des particules dans l'espace des phases  $\Omega \times \mathbf{R}^d$ . Cette fonction de distribution est toujours supposé mesurable et intégrable (ce qui correspond en pratique à l'hypothèse raisonnable que la masse totale est finie) de sorte que l'on considère souvent la fonction de distribution normalisée (qui est alors une distribution de probabilité). Concrètement cela signifie que pour tout espace mesurable  $\omega \subset \Omega$  et  $\mathcal{V} \in \mathbf{R}^d$ , le nombre de particule au temps  $t$  de l'espèce  $s$  dans la région  $\omega \times \mathcal{V}$  de l'espace des phases est

$$\int_{\omega} \int_{\mathcal{V}} f_s(t, x, v) dx dv.$$

Toutes les quantités hydrodynamiques, ou *mesurables* macroscopiquement, du moins les grandeurs extensives, peuvent s'exprimer comme des moments de la fonction de distribution  $f_s$ . Ainsi de la densité de particules de l'espèce  $s$ ,

$$\rho_s(t, x) = \int_{\mathbf{R}^d} f_s(t, x, v) dv,$$



de la densité de courant,

$$j_s(t, x) = \int_{\mathbf{R}^d} v f_s(t, x, v) dv,$$

ou encore de la densité d'énergie cinétique,

$$e(t, x) = \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|v|^2}{2} f_s(t, x) dv.$$

En l'absence de collisions et de force extérieure ou collectivement produite par les particules, un bilan de masse sur un volume infinitésimal de l'espace des phases conduit à l'équation de transport libre

$$\partial_t f_s + v \cdot \nabla_x f_s = 0. \quad (1.2.2)$$

La très classique méthode des caractéristiques (voir par exemple l'introduction de [27]) démontre que pour toute donnée initiale  $f_0 : \Omega \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}_+$  intégrable il existe une unique solution à cette équation. Si l'on tient compte des collisions alors il faut introduire un terme intégral bilinéaire, souvent noté  $Q(f_s, f_s)$  dans le second membre de (1.2.2). L'expression de cet opérateur intégral de collision dépend bien évidemment du choix de la modélisation. Lorsque l'on se place dans le cas du *modèle de sphères dures* et que l'on ne considère que les collisions binaires alors on obtient l'équation de Boltzmann.

Si on néglige les collisions mais que les particules sont soumises à un champ de force  $F = F(t, x, v)$  (dont tout ou partie peut être collectivement produit), alors le bilan de masse sur un volume infinitésimal de l'espace des phases aboutit à l'équation de *Vlasov* [143],

$$\partial_t f_s + v \cdot \nabla_x f_s + F \cdot \nabla_v f_s = 0. \quad (1.2.3)$$

C'est ce type d'équations qui est au coeur de notre étude.

Enfin, afin de compléter le panorama des systèmes existants, il existe également des équations modélisant les phénomènes collectivement auto-induits et les collisions. L'équation prend alors la forme

$$\partial_t f_s + v \cdot \nabla_x f_s + F \cdot \nabla_v f_s = C(f_s, f_s),$$

où l'opérateur de collision  $C$  dépend de la nature de la modélisation. On pourra citer par exemple les modèles de *Fokker-Planck-Landau* ou de *Vlasov-Maxwell-Boltzmann*. Le problème du passage de ce type d'équations aux équations de la magnétohydrodynamique est également source de recherche. On pourra se référer à l'ouvrage [5] de Arsénio et Saint-Raymond concernant la transition du modèle cinétique de *Vlasov-Maxwell-Boltzmann* aux modèles de la MHD.

### 1.2.2 Equation de Vlasov, modèles non collisionnels

Nous considérons désormais un plasma non collisionnel, c'est à dire dans lequel les conditions physiques sont réunies pour qu'il soit pertinent de ne pas tenir compte des collisions entre les particules dans les équations.

Plutôt que de raisonner directement à l'échelle mésoscopique il est possible de retrouver l'équation de Vlasov à partir des équations de Newton s'appliquant à notre système de  $N$  particules de positions  $X_k^{(s)}(t)$ , et de vitesses  $V_k^{(s)}(t)$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

Pour cela, on considère la mesure dite *empirique*, son action sur une région de l'espace des phases étant exactement l'action de comptage des particules dans cette région :

$$\mu_N(t, x, v) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta(x - X_k(t)) \otimes \delta(v - V_k(t)).$$

Lorsque le champ de force  $F$  est suffisamment régulier, disons  $C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3)$ , alors il est aisé de vérifier par le calcul (c'est l'objet du Théorème 1.4 de [27]) que la mesure empirique vérifie l'équation de Vlasov (aussi appelée équation de Klimontovitch dans la littérature de physique des plasmas [133], lorsque l'on parle de la mesure empirique) :

$$\partial_t \mu_N + v \cdot \nabla_x \mu_N + F \cdot \nabla_v \mu_N = 0.$$

Lorsque la force  $F$  est régulière et non auto-induite, c'est à dire qu'il n'y a pas de couplage non-linéaire, alors on peut prouver par compacité dans l'espace des mesures de Radon finies et positives, qu'à l'extraction d'une sous-suite près la mesure empirique converge vers une densité  $f(t, x, v)$  vérifiant l'équation de Vlasov linéaire (1.2.3). Les hypothèses amenant à la convergence de la mesure empirique vers la solution de l'équation de Vlasov sont affinés par Fournier et Guillin dans [48].

Le problème du passage à la limite du niveau microscopique au niveau cinétique est en revanche bien plus complexe et encore largement ouvert lorsque l'on considère les interactions entre les particules, s'inscrivant dans le champ de recherche associé au *sixième problème de Hilbert* [76]. Pour être physiquement réaliste et mathématiquement rigoureux cette *limite de champ moyen* s'est munie petit à petit d'un cadre théorique. On pourra consulter à ce propos les ouvrages de Braun et Hepp [29], Spohn [137] ou le chapitre de Golse [63] recensant l'état actuel de la recherche. Dans le cas de l'interaction coulombienne, donc dans le cas de la limite de champ moyen pour les systèmes de type Vlasov-Poisson, le problème n'est pas entièrement résolu. Les premiers résultats sur la question ont été obtenus par Dobrushin et Fritz [42; 43; 50] et Neunzert et Wick [115], et concernant l'état actuel de la recherche on pourra consulter les résultats de Hauray et Jabin [87; 88] et ceux de Lazarovici et Pickle [100]. Concernant le système de Vlasov-Maxwell, en 2012, un résultat de champ moyen pour une version régularisé a été démontré par Golse [62].

Quoique la justification rigoureuse des modèles de Vlasov-Poisson ou de Vlasov-Maxwell à partir des équations de Newton régissant la dynamique du grand nombre de particules ne soit pas achevée, ces modèles sont couramment utilisés par les physiciens et source d'une recherche active dans le domaine des équations aux dérivées partielles cinétiques.

Le modèle de Vlasov-Poisson, qui décrit l'évolution de la densité d'une espèce de particule chargée (disons pour simplifier des électrons) dans le cadre de l'approximation électrostatique s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m} \nabla_x \phi \cdot \nabla_v f = 0, \\ -\epsilon_0 \Delta \phi = \rho. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

En toute généralité il faudrait considérer toutes les espèces de particules chargées du plasma (le plasma étant globalement neutre il y a nécessairement plusieurs telles espèces), et considérer l'éventuel composante non auto induite  $(E_{ext}, B_{ext})$  dans l'expression de la force de Lorentz. Nous l'omettons ici car c'est le couplage non-linéaire qui est l'objet de notre attention.

Le système de Vlasov-Poisson qui est à l'origine d'une littérature mathématique fournie n'en reste pas moins une approximation du système plus complètement descriptif qu'est le système de Vlasov-Maxwell. De plus, jusqu'à présent nous nous sommes placés dans le cadre de la mécanique classique, où vitesse des particules et impulsion de celles-ci sont reliées par une simple relation de proportionnalité. En toute généralité il faut se placer dans le cadre relativiste, et l'espace des phases  $\Omega \times \mathbf{R}^d$  précédemment décrit, concerne alors les variables d'espace  $x$  et d'impulsion  $\xi$ . La vitesse relativiste d'une particule de masse  $m$  et d'impulsion  $\xi$  est alors selon la théorie de la relativité restreinte

$$v(\xi) = \frac{\frac{\xi}{m}}{\left(1 + \frac{|\xi|^2}{m^2 c^2}\right)^{1/2}}.$$

Dans ce cadre (cf l'article de Weibel [144]), on peut écrire le système de Vlasov-Maxwell relativiste (dans la littérature l'adjectif relativiste est parfois omis) comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f^{\text{VM}} + v(\xi) \cdot \nabla_x f^{\text{VM}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + v(\xi) \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VM}} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho^{\text{VM}}}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 j^{\text{VM}}, \end{array} \right. \quad (1.2.5)$$

où  $\rho^{\text{VM}}$  et  $j^{\text{VM}}$  désignent respectivement la densité de charge et le courant

$$\rho^{\text{VM}}(t, x) = \int_{\mathbf{R}} f^{\text{VM}}(t, x, \xi) d\xi, \quad j^{\text{VM}}(t, x) = \int_{\mathbf{R}} v(\xi) f^{\text{VM}}(t, x, \xi) d\xi.$$

### 1.2.3 Modèle adimensionné de référence

Pour finir, nous expliquons ici la méthode de rééchelonnement qui permet de réduire le système de Vlasov-Maxwell, tel que donné par la théorie physique, au modèle réduit tel qu'il est étudié dans la littérature mathématique. La méthode présentée ici est fortement inspirée de celle exposée dans [47]. Pour ce faire, pour chaque grandeur physique  $A$  intervenant dans les équations de Vlasov ou de Maxwell nous dénoterons par  $\bar{A}$  la grandeur caractéristique associée, et nous écrirons ensuite  $A = \bar{A} A'$ . Les équations seront alors simplifiées en tenant compte des rapports qui existent entre les constantes physiques et les grandeurs caractéristiques, soit qu'ils soient donnés par le contexte physique soit qu'ils soient eux même issus des équations.

Nous pouvons en premier lieu déterminer le rapport entre l'ordre de grandeur du champ électrique  $\bar{E}$  et celui du champ magnétique  $\bar{B}$ . Considérant les équations de Maxwell sous leur forme ondulatoire (1.1.3), on constate que les grandeurs  $E$  et  $B$  se propagent dans le vide à la vitesse de la lumière. Si on dénote par  $\lambda$  la longueur caractéristique d'oscillation et  $\tau$  le temps caractéristique d'oscillation de ces deux quantités alors elles sont reliées par la relation

$$\frac{\lambda}{\tau} = c.$$

En implémentant cette relation dans l'une ou l'autre des équations de Maxwell-Farraday ou Maxwell-Ampère, on obtient alors

$$\frac{\bar{E}}{\bar{B}} = c.$$

Nous considérons désormais les échelles caractéristiques suivantes

- $\bar{L}$  = longueur caractéristique de l'espace physique,
- $\bar{t}$  = temps caractéristique,
- $\bar{e}$  = impulsion caractéristique des particules,
- $\bar{v}$  = vitesse caractéristique,
- $\bar{\rho}, \bar{j}$  = densité et courant caractéristique,
- $\bar{E}, \bar{B}$  = Champ électrique caractéristique et champ magnétique caractéristique,
- $\bar{f}$  = densité de particules caractéristique.

Il est important de noter que la longueur et le temps caractéristiques désignent ici un ordre de grandeur de l'échelle à laquelle on étudie le système et n'a pas de rapport avec l'échelle d'oscillation du champ électromagnétique dont nous avons discuté auparavant.

On impose naturellement les conditions suivantes

$$\frac{\bar{L}}{\bar{t}} = \bar{v}, \quad \frac{e}{m\bar{v}} = 1, \quad \bar{j} = \bar{v}\bar{\rho} \quad \frac{c\bar{B}}{\bar{E}} = 1.$$

De plus on choisit d'imposer la relation

$$\frac{\epsilon_0 \bar{E}}{\bar{L}\bar{\rho}} = 1.$$

Par ailleurs on dénotera par le paramètre  $\epsilon$ , qui sera amené dans le cadre de l'étude du régime non-relativiste à tendre vers zéro, le rapport entre la vitesse caractéristique des particules et la vitesse de la lumière :

$$\epsilon = \frac{\bar{v}}{c}.$$

Pour finir on supposera que la quantité

$$\omega_c = q \frac{\bar{B}}{m},$$

aussi appelée *pulsation cyclotron*, est de l'ordre de  $\frac{\epsilon}{\bar{t}}$ .

Pour alléger les notations on persistera à dénoter  $f, E, B$  ce qui devrait être écrit  $f', E', B'$ . L'équation de Vlasov initialement écrite sous la forme

$$\partial_t f + v(\xi) \cdot \nabla_x f + q(E + v(\xi) \times B) \cdot \nabla_\xi f = 0,$$

devient

$$\partial_t f + \frac{\bar{v}\bar{t}}{\bar{L}} v(\xi) \cdot \nabla_x f + q\bar{B}\bar{E} \left( \frac{c}{\bar{\xi}} \frac{\bar{E}}{c\bar{B}} E + \frac{\bar{v}}{\bar{\xi}} v(\xi) \times B \right) \nabla_\xi f = 0,$$

où par ailleurs

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \frac{\bar{\xi}}{m} \frac{\xi}{\left(1 + \frac{\bar{\xi}^2}{m^2 c^2} |\xi|^2\right)^{1/2}} \\ &= \frac{\xi}{(1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Il suit des relations entre les différents ordres de grandeur que la densité de particule, après rééchelonnement, est régie par l'équation d'évolution

$$\partial_t f + v(\xi) \cdot \nabla_x f + (E + \varepsilon v(\xi) \times B) \cdot \nabla_\xi f = 0. \quad (1.2.6)$$

Enfin le système des équations de Maxwell une fois redimensionné s'écrit

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \rho \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \varepsilon \partial_t B + \nabla \times E = 0 \\ \nabla \times B = \varepsilon \partial_t E + \varepsilon j. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

C'est la conjonction des équations (1.2.6) et du système (1.2.7) auquel nous ferons référence lorsque nous parlerons du système de Vlasov-Maxwell relativiste.

### 1.3 Sur le problème de Cauchy

Dans cette section nous dressons un état de l'art concernant le problème fondamental dit de Cauchy, c'est à dire le problème de l'existence et de l'unicité d'une solution, étant donnée une donnée initiale, aux systèmes de Vlasov-Poisson et de Vlasov-Maxwell. Concernant ce dernier, l'existence de solutions fortes globales en temps est aujourd'hui encore un problème ouvert, la dernière grande avancée étant le critère de Glassey et Strauss démontré en 1986 [55]. Dans leur article les auteurs établissent un critère de non formation de singularités. Dans le chapitre 2 nous insistons sur ce *critère de Glassey Strauss* et illustrons son argument crucial de non résonance sur un système d'EDPs couplant une équation de Vlasov et une équation de transport.

#### 1.3.1 Le système de Vlasov-Poisson

Le système de Vlasov-Poisson une fois adimensionné s'écrit de la manière suivante

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \gamma E \cdot \nabla_v f = 0, & x, v \in \Omega \times \mathbf{R}^3, \\ E(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(x-y)\rho(t, y)}{|x-y|^3} dy, \\ \rho(t, x) = \int f(t, x, v) dv, \\ f(0, x, v) = f^0(x, v), \end{cases} \quad (1.3.1)$$

où  $f^0$  est la donnée initiale du système, et  $\gamma$  est égale à +1 ou -1 selon que l'on se place dans le cadre électrostatique ou gravitationnel (par défaut et sauf mention contraire on

prendra toujours  $\gamma = -1$  dans la suite). On peut aussi noter que l'on peut remplacer directement le champ électrique  $E$  par  $-\nabla\phi$ , où le potentiel  $\phi$  vérifie l'équation de Poisson

$$-\Delta\phi = \rho, \quad (1.3.2)$$

ce qui permet de considérer le même système dans des dimensions différentes de trois.

Dans la suite, on entendra par solutions faibles, des solutions  $(f, E)$  qui sont des fonctions continues en temps à valeur dans un espace de Sobolev pas assez régulier pour définir leurs dérivées par rapport à  $x$  ou  $\xi$  en un sens classique (typiquement  $C([0, T], L^p(\Omega \times \mathbf{R}^3))$  pour un exposant  $1 \leq p < \infty$ ) qui sont des solutions de (1.3.1) au sens des distributions. On entendra par solutions fortes des fonctions  $(f, E)$  de régularité au moins Lipschitz (typiquement  $W^{1, \infty}$  ou  $C^2$ ) vérifiant l'équation (1.3.1) au sens classique.

Pour obtenir des solutions faibles au système de Vlasov-Poisson, on considère tout d'abord un système "régularisé". On considère une suite de fonctions régularisantes  $\delta_n(t, x)$  et on remplace le champ électrique  $E$  dans (1.3.1) par  $E_n := E * \delta_n$  (de manière équivalente le produit de convolution peut porter sur la densité de charge  $\rho$  dans l'équation de Poisson (1.3.2)),

$$\begin{cases} \partial_t f_n + v \cdot \nabla_x f_n - \nabla_x \phi_n \cdot \nabla_v f_n = 0, \\ -\Delta \phi_n = \rho_n * \delta_n * \delta_n, \quad \text{avec } \nabla_x \phi_n \rightarrow 0 \text{ quand } |x| \rightarrow \infty, \\ \rho_n(t, x) = \int_{\mathbf{R}^3} f_n(t, x, v) dv, \\ f_n|_{t=0}(x, v) = \delta_n * (\mathbf{1}_{0 \leq |x| \leq n} \mathbf{1}_{0 \leq |v| \leq n} f_0(x, v)). \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Il s'agit toujours d'un système non linéaire intégral-différentiel mais dont le potentiel est régulier. De plus l'équation de Poisson étant elliptique, le champ  $E_n$  gagne un degré de régularité par rapport à la fonction de distribution  $f$  (c'est à dire que  $\nabla_x E$  a la même régularité que  $f$ ). La structure de l'équation propage de plus certaines propriétés de la donnée initiale. Si  $f_0$  est positive,  $f_0 \in L^1 \cap L^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^3)$  (masse finie et densité finie), et l'énergie initiale

$$\int_{\Omega \times \mathbf{R}^3} |v|^2 f_0(x, v) dx dv + \int_{\Omega} |E_0(x)|^2 dx \quad (1.3.4)$$

est finie, alors sous réserve qu'une solution existe (ce que l'on nomme les estimations *a priori*) ces propriétés seront vérifiées tout au long de son existence. Avec une méthode de point fixe de type Schauder ou Banach on peut alors prouver l'existence de solutions faibles (ou même l'existence de solutions classiques globales, on pourra en trouver la preuve dans [13] ou [114]) pour ces systèmes régularisés. Les estimations *a priori* énoncées précédemment étant uniformes en  $n$  il s'avère (sous réserve de vérifier les hypothèses du Théorème de Dunford-Pettis) qu'il est possible à l'extraction d'une sous-suite près de passer à la limite faible dans  $L^1(\Omega \times \mathbf{R}^3)$  sur  $n$ , et obtenir ainsi des solutions faibles globales au problème initial. Les premiers travaux prouvant ces résultats sont dus à Arseniev en 1975 [4] puis Illner et Neunzert [85] et Horst et Hunze [83].

**Proposition 1.3.1.** *Si  $f_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$ ,  $f_0 \geq 0$ , est telle que*

$$|v|^2 f_0 \in L^1(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3), \quad \Delta_x^{-1} \left( \int f_0(x, v) dv \right) \in L^2(\mathbf{R}^3),$$

alors il existe  $f \in C([0, \infty), L^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) - w^*)$  solution de (1.2.4) avec la donnée initiale  $f_0$  et vérifiant pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\|f(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)} \leq \|f_0\|_{L^p(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$\frac{1}{2} \iint |v|^2 f(x, v) dx dv + \frac{1}{2} \int |E(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \iint |v|^2 f_0(t, x, v) dx dv + \frac{1}{2} \int |E_0(t, x)|^2 dx.$$

Ces résultats ont tous été démontrés dans le cas  $\Omega = \mathbf{R}^d$  mais se généralise aisément si l'on se place sur le tore  $\mathbf{T}^d$ , dans ce dernier cas la condition sur la donnée initiale étant

$$\Delta_x^{-1} \left( \int f_0(x, v) dv - 1 \right) \in L^2(\mathbf{T}^d).$$

L'existence et l'unicité de solutions fortes pour une donnée initiale régulière donnée (par exemple  $C_c^1(\Omega \times \mathbf{R}^d)$ ) a d'abord été prouvée en dimension 1 localement en temps par Kurth en 1954 [97] puis globalement en temps en 1964 par Iordanski [86]. Le problème de l'existence locale de solutions classiques fut ensuite résolue en toute dimension par Arsenev [3] et Ukai et Okabe [138]. Schématiquement, si l'on adopte le point de vue Lagrangien et que l'on suit les courbes caractéristiques de l'équation de Vlasov, pour obtenir une solution classique il faut contrôler la norme  $L^\infty$  du champ électrique  $E$  et de son gradient. Partant d'une donnée à support compact, Batt a montré que l'on peut obtenir de telles estimées a priori sur le champ électrique si l'on arrive à contrôler l'évolution au cours du temps du diamètre du support en vitesse de la fonction de distribution

$$Q(t) := \sup \{ |v| \mid \exists \tau \in [0, t], x \in \Omega, f(\tau, x, v) \neq 0 \}. \quad (1.3.5)$$

**Proposition 1.3.2.** (Batt, 1977 [14]) Soit  $f$  solution forte de (1.2.4) sur un intervalle  $[0, T]$ , où  $0 < T < \infty$ , avec un support compact en la variable  $v$  :

$$\exists R > 0, \text{ tel que } f(t, x, v) = 0 \text{ si } |v| > R.$$

Il existe alors une constante positive  $C$ , dépendant uniquement des quantités  $\|f_0\|_{L^1(\Omega \times \mathbf{R}^3)}$ ,  $\|f_0\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^3)}$ ,  $\|f_0\|_{W^{1,\infty}(\Omega \times \mathbf{R}^3)}$ ,  $R$ , et  $T$ , telle que pour tout  $t \in [0, T]$

$$\|E(t, \cdot)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C, \quad \|f(t, \cdot, \cdot)\|_{W^{1,\infty}(\Omega \times \mathbf{R}^3)} \leq C.$$

Dans un premier temps le contrôle de  $Q(t)$  s'est avérée plus simple en dimension 2 (voir les travaux de Ukai et Okabe [138] et Wollman [145]) ou dans le cas de solutions à symétries particulières ramenant à une dimension inférieure : symétrie sphérique [14], ou cylindrique [80]. En 1984 Bardos et Degond [10] prouvent un résultat d'existence globale en dimension 3 pour des données "petites" (hypothèse également nommé *plasma dilué*), c'est à dire pour des données initiales petites devant leurs deux premières dérivées, exploitant pour ce faire le caractère dispersif des équations de Vlasov-Poisson. Leur technique s'inspire d'une méthode développée dans le contexte de l'équation des ondes par Klainermann et Ponce [93]. Finalement le problème de l'existence globale de solutions classiques a été résolu en 1990 par Pfaffelmoser [122], une étude fine des équations caractéristiques de l'équation de Vlasov lui ayant permis de contrôler suffisamment la croissance de  $Q(t)$ . Par la suite de meilleurs contrôles de  $Q(t)$  ont été obtenus par Schaeffer [130] puis par Horst [82] permettant d'affaiblir les hypothèses de régularité sur la donnée initiale.

Parallèlement, adoptant une approche distincte, Lions et Perthame [102] prouvèrent également un résultat d'existence globale de solutions classiques, et cela pour des solutions non nécessairement à support compact en vitesse mais avec un certain nombre de moments finis (permettant ainsi de considérer des distributions maxwelliennes comme donnée initiale). Le résultat clé étant la propagation des moments de la distribution initiale à la distribution considérée à des temps ultérieurs. Cette propagation des moments permet ensuite de démontrer la propagation de la régularité  $C^1$ .

**Proposition 1.3.3.** (Lions et Perthame [102], 1990) Soit  $k_0 > 6$ , et  $T > 0$ . Soit une distribution initiale  $f_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$  telle que presque partout  $f_0(x, v) \geq 0$ , et telle que l'énergie initiale (1.3.4) du système est finie. On suppose de plus que,

$$\iint |v|^{k_0} f_0(x, v) dx dv < \infty.$$

Alors il existe une solution faible  $f$  du système de Vlasov-Poisson (1.2.4) avec donnée initiale  $f_0$ , telle que pour tout  $0 \leq t \leq T$ ,

$$\iint |v|^k f(t, x, v) dx dv < \infty,$$

pour tout  $0 \leq k \leq k_0$ .

Cette propagation des moments a depuis été améliorée notamment par Pallard [119]. Batt et Rein [15] prouvèrent avec des modifications mineures en 1993 un résultat similaire sur le tore  $\mathbf{T}^3$ . Le lecteur trouvera les preuves des propriétés marquant chaque étape du raisonnement décrit dans cette section dans le chapitre 1 de la synthèse [27] ou les chapitres 4, 5 de [57].

Les méthodes précédemment exposées pour prouver l'existence de solutions fortes prouvent également l'unicité de telles solutions pour une donnée initiale prescrite. En revanche, pour les solutions faibles, le premier résultat d'unicité est dû à Robert en 1997 [127], et ne concerne que les solutions faibles à support compact. En 2005, en utilisant le formalisme et les outils du domaine du transport optimal, Loeper prouve un résultat d'unicité sous la condition plus faible et d'avantage physique de finitude de la densité macroscopique  $\rho$ . Ce résultat fut ensuite amélioré par Miot [111] et Holding et Miot [78], l'hypothèse de contrôle  $L^\infty$  sur la densité  $\rho$  étant réduite à un contrôle de la croissance en l'indice  $p$  des normes  $L^p$  de  $\rho$ .

### 1.3.2 Le système de Vlasov-Maxwell

Le système de Vlasov-Maxwell relativiste après redimensionnement s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f^{\text{VM}} + v(\xi) \cdot \nabla_x f^{\text{VM}} + (E + \epsilon v(\xi) \times B) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VM}} = 0, \quad t \in [0, \infty), x, \xi \in \mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3, \\ \epsilon \partial_t E = \nabla \times B - j^{\text{VM}}, \\ \nabla \cdot E = \rho^{\text{VM}} - 1, \\ \epsilon \partial_t B = -\nabla \times E, \\ \nabla \cdot B = 0, \\ \rho^{\text{VM}}(t, x) = \int f^{\text{VM}}(t, x, \xi) d\xi, \\ j^{\text{VM}}(t, x) = \int v(\xi) f^{\text{VM}}(t, x, \xi) d\xi. \end{array} \right. \quad (\text{RVM})$$



De la même manière que dans le système de Vlasov-Poisson (1.2.4), le champ de transport  $(v(\xi), (E + \epsilon v(\xi) \times B))$  du système (RVM) est à divergence nulle dans l'espace des phases  $\Omega \times \mathbf{R}^d$ . Ainsi la positivité et les normes  $L^p$  de la donnée initiale seront conservées par la dynamique de (RVM). La principale et fondamentale différence entre le système de Vlasov-Poisson et le système de Vlasov-Maxwell réside dans le fait que les équations gouvernant l'évolution des champs dans ce dernier sont hyperboliques et non elliptiques. Par conséquent, le champ  $(E, B)$  possède, dans un espace de Sobolev de type  $H^s$ , a priori le même degré de régularité que la distribution  $f^{\text{VM}}$  elle-même (tandis que nous pouvions gagner un degré de régularité dans le cas du système de Vlasov-Poisson).

La théorie de l'existence locale de solutions fortes (et à fortiori faibles) n'est pas fortement influencée par la remarque précédente. Les premiers résultats sont obtenus en petite dimension par Duniec [44] et Cooper et Kilimas [36] respectivement en 1973 et 1980. En adaptant une méthode développée par Kato dans le cadre abstrait des systèmes d'équations aux dérivées partielles quasi-linéaires [91], Wollman montre les premiers résultats d'existence locale dans des espaces  $H^s$  (avec  $s \geq 5$ ) [146; 147]. Une méthode itérative plus classique est utilisée par Degond [38] pour montrer l'existence locale de solutions fortes, pour des données initiales de régularité  $H^s$  ( $s \geq 3$ ) à support compact, du système de Vlasov-Maxwell non-relativiste. L'hypothèse de compacité du support de la donnée initiale est utilisée dans ce contexte pour surmonter la difficulté supplémentaire à contrôler les effets des grandes vitesses provenant du terme  $\xi \times B$  dans l'expression de la force de Lorentz. Cette difficulté qui est spécifique au cas du système de Vlasov-Maxwell non-relativiste peut être également surmontée en travaillant avec des espaces de Sobolev à poids, ce que fait concomitamment Asano [7]. En tout état de cause, nous travaillons pour notre part avec le système de Vlasov-Maxwell relativiste dans lequel la vitesse des particules ne dépasse pas celle de la lumière  $c$ .

L'existence globale de solution faibles est obtenue en 1989 par DiPerna et Lions [40] (pour le modèle de Vlasov-Maxwell non-relativiste, la preuve étant adaptable avec des modifications mineures au cas de (RVM) [126]). De même que pour Vlasov-Poisson, la première étape du raisonnement consiste à régulariser le système (RVM) en convolant les termes de sources  $\rho^{\text{VM}}$  et  $j^{\text{VM}}$  par une fonction  $\delta_n$  de régularité  $C^\infty$  à support compact, paire, de masse totale égale à 1, amenée à tendre vers la distribution de Dirac lorsque l'indice  $n$  tend vers l'infini. Un tel système régularisé admet des solutions fortes globalement en temps (on pourra trouver une démonstration de ce fait dans l'article de Horst [81]), et ses solutions vérifient de plus certaines estimations uniformes. On dénote par  $(f_n^{\text{VM}}, E_n, B_n)$  les solutions des systèmes régularisés. Le passage à la limite sur l'indice  $n$  procure, à l'extraction d'une sous-suite près, une solution faible de (RVM). La principale difficulté est de justifier que la limite est bien un solution au sens des distributions de (RVM), car il n'est pas évident que le terme non-linéaire  $(E_n + \epsilon v(\xi) \times B_n) \cdot f_n^{\text{VM}}$  ait bien une limite, dans la mesure où a priori chaque facteur ne converge que faiblement, ce qui est insuffisant. Dans le cas de Vlasov-Poisson cette difficulté est surmontée par le degré de régularité supplémentaire du champ électrique  $E$  par rapport à la fonction de distribution  $f$ , et un théorème de compacité de Rellich donne alors la convergence forte du facteur de force. Pour Vlasov-Maxwell le facteur de force n'est pas a priori plus régulier que la fonction de distribution, mais le lemme des moyennes pour les équations de transport permet tout de même d'obtenir la propriété de compacité nécessaire [40]. Les lemmes de moyenne, initialement établi par Golse, Perthame et Sentis [64], s'est révélée depuis très fécond pour la théorie cinétique (concernant les récentes avancées sur ce sujet son ren-

voit le lecteur à l'article de Arsénio et Masmoudi [6]). On donne ici la version simplifiée utilisée par Rein dans son article [126].

**Lemma 1.3.4.** *Soit  $R > 0$  et  $\psi \in C_c^\infty(B(0, R))$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toutes fonctions  $h, g_0, g_1 \in L^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times B(0, R))$  qui satisfont l'équation de transport inhomogène suivante*

$$\partial_t h + v(\xi) \cdot \nabla_x h = g_0 + \nabla_\xi \cdot g_1$$

au sens des distributions, on a les estimations suivantes

$$\int \psi(\xi) h(\cdot, \cdot, \xi) d\xi \in H^{1/4}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3),$$

et

$$\left\| \int \psi(\xi) h(\cdot, \cdot, \xi) \right\|_{H^{1/4}} \leq C \left( \|h\|_{L^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times B(0, R))} + \|g_0\|_{L^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times B(0, R))} + \|g_1\|_{L^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times B(0, R))} \right).$$

Un résultat d'existence globale de solutions faibles analogue à celui de DiPerna et Lions dans le cas d'un domaine borné a par ailleurs été démontré par Guo peu de temps après [68].

La théorie de l'existence globale en dimension 3 de solutions de (RVM) est aujourd'hui encore ouverte. Une étape fondamentale a été franchie en 1987 par Glassey et Strauss [56] qui démontrent dans leur article qu'une solution forte régulière (que l'on sait exister au moins localement en temps) ne développe pas de singularités tant que son support en moment reste compact, ou de manière équivalente tant qu'il n'existe pas de particules (de manière mesurable) dont la vitesse serait arbitrairement proche de la vitesse de la lumière  $c$ . Le critère de Glassey-Strauss est analogue dans son énoncé au critère énoncé par Batt et Horst pour le système de Vlasov-Poisson mais repose sur des arguments différents dans la mesure où la structure des équations qui régissent l'évolution des champs électriques et magnétiques est ici hyperbolique. En dimension strictement inférieure à 3, Glassey et Schaeffer ont été en mesure de prouver que des données génériques satisfont leur critère et ont donc résolu le problème d'existence et d'unicité de solutions fortes globalement en temps en petites dimensions [58–61]. On notera également que le contrôle du support en moment est possible dans le cas de données initiales petites [56], proche de la neutralité électrique [54], ou proche de la symétrie sphérique [125]. Plus récemment, Bouchut, Golse et Pallard [25], et Klainerman et Staffilani [94] ont simplifié l'obtention du critère de Glassey-Strauss par des approches novatrices. Par ailleurs, des récents travaux ont amélioré successivement le critère de non formation de singularités [104; 105; 116; 119; 136] en énonçant des conditions suffisantes (de plus en plus faibles) sur une solution a priori pour contrôler son support en moments. Néanmoins, si ces améliorations affaiblissent nettement le critère selon lequel des solutions fortes demeurent régulières, nous ne savons pas à ce jour si pour des données initiales générales, la solution du système de Vlasov-Maxwell correspondante développera ou non des singularités en temps fini.

Plus précisément, le résultat le plus abouti à ce jour [119] démontre qu'un contrôle a priori de la norme  $L^6$  de la densité macroscopique  $\rho$  est une condition suffisante de non explosion du support en moment d'une solution régulière. Toutefois, les estimations dont on dispose, pour l'instant, pour une solution régulière donnée du système de Vlasov-Maxwell (1.2.5), sont au mieux en norme  $L^{4/3}$ . Le problème reste donc ouvert.

La méthode des champs de vecteurs, provenant du domaine de la relativité générale, a initié une nouvelle approche du problème de Cauchy. On renverra le lecteur aux articles [23; 46] et aux références qu'ils contiennent.

### 1.3.3 Non-résonance d'un système couplant une équation de Vlasov et une équation de Transport (Chapitre2)

Le critère de Glassey-Strauss, qui est le fondement des développements récents sur la théorie de l'existence de solutions fortes au problème de Cauchy pour le système de Vlasov-Maxwell, peut s'écrire de la manière suivante.

**Theorem 1.3.5.** (Glassey-Strauss, 1987) Soit  $0 \leq f_0 \in C_c^1(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$ ,  $E_0, B_0 \in C^2$  satisfaisant les relations de compatibilité

$$\nabla \cdot E_0 = \rho_0, \quad \nabla \cdot B_0 = 0.$$

Supposons qu'il existe une estimation a priori sur le support en la variable de moment  $\xi$  : il existe de plus une fonction continue  $\beta$  telle que pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,  $x \in \mathbf{R}^3$ , toute solution  $f$  du système de Vlasov-Maxwell (RVM) satisfait

$$f(t, x, v) = 0 \quad \text{pour } |\xi| > \beta(t).$$

Alors, il existe une unique solution  $C^1$  de (RVM) sur  $[0, \infty)$ .

On peut reformuler le théorème précédent en définissant le diamètre du support en moment d'une solution locale de (RVM), que l'on nommera  $f$ , et que l'on supposera a priori définie sur un intervalle de temps  $[0, T_{max})$ ,

$$R_f(t) := \inf\{r \geq 0 \text{ s.t } \text{supp}(f(s, x, \cdot)) \subset B(0, r) \quad \forall (s, x) \in [0, t] \times \mathbf{R}^3\}. \quad (1.3.6)$$

Le critère de Glassey-Strauss devient alors équivalent à

$$\limsup_{t \rightarrow T_{max}^-} R_f(t) < \infty \implies \limsup_{t \rightarrow T_{max}^-} \left( \|f(t, \cdot, \cdot)\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)} + \|(E, B)(t, \cdot)\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)} \right) < \infty.$$

L'idée de la preuve consiste à écrire en coordonnées physiques les champs  $E$  et  $B$  comme solutions d'une équation d'ondes. Comme nous l'avons déjà explicité, le principal obstacle à l'obtention de solutions régulières pour le système de Vlasov-Maxwell, en comparaison avec le système de Vlasov-Poisson, provient du contrôle de la régularité des dérivées du champ électromagnétique. Pour surmonter cet obstacle, sous l'hypothèse que  $R_f(t)$  est fini pour tout  $t \in [0, T_{max})$ , Glassey et Strauss réalisèrent une astucieuse intégration par partie dans la représentation intégrale des champs  $E$  et  $B$ . Si la preuve relève d'une certaine technicité calculatoire, l'idée sous-jacente est plus facilement appréhendable. Lorsque l'on considère des particules strictement dans l'intérieur du cône de lumière, micro-localement l'équation des ondes n'est plus hyperbolique mais elliptique. Le caractère résonnant de l'équation des ondes couplée à l'équation de Vlasov n'apparaît que lorsque la vitesse des particules transportées approche la vitesse de propagation de l'équation des ondes régissant l'évolution du champ accélérant les particules.

Nos premiers travaux, conjointement menés avec F.Golse, ont consisté à illustrer ce phénomène sur un système couplant une équation de Vlasov et un système d'équations de transport, jouant le rôle des équations de Maxwell dans le système (RVM).

**Modèle jouet et non-résonance** Le modèle jouet que nous avons étudié est le suivant

$$\begin{cases} \partial_t f + v(\xi) \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_\xi f = 0, & x, \xi \in \mathbf{R}^3, \\ (\partial_t + \omega \cdot \nabla_x) \phi = -f(t, x, \xi), & \phi|_{t=0} = 0 \quad \omega \in \mathbf{S}^3, \\ \mathcal{E}(t, x, \omega) = \int_{\mathbf{R}^3_\xi} v(\xi) \phi(t, x, \xi, \omega) d\xi, \\ E(t, x) = \int \mathcal{E}(t, x, \omega) d\omega, \end{cases} \quad (1.3.7)$$

où  $\int$  désigne l'intégrale normalisée sur la sphère unité en dimension 3,

$$\mathbf{S}^3 := \{\omega \in \mathbf{R}^3, |\omega| = 1\}.$$

On définit également les densités de charges et de courant de la manière suivante :

$$\rho_f(t, x) = \int_{\mathbf{R}^3} f(t, x, \xi) d\xi, \quad j_f(t, x) = \int_{\mathbf{R}^3} f(t, x, \xi) v(\xi) d\xi. \quad (1.3.8)$$

Le champ électrique qui accélère les particules est ici le fruit de la somme de champs transportés à une vitesse  $\omega$ , pour  $\omega$  parcourant toute la sphère unité (qui joue ici l'analogie du cône d'onde pour Vlasov-Maxwell, où l'on aurait considéré la renormalisation  $c = 1$ ). On conserve ainsi la structure hyperbolique des équations gouvernant le champ accélérateur mais la structure algébrique est plus simple.

On peut montrer pour ce système l'existence globale de solutions faibles à la manière de Rein [126].

Nos deux résultats principaux sont les suivants :

**Theorem 1.3.6.** *Soit  $(f, \phi) \in C^1([0, T] \times \mathbf{R}^6) \times C^1([0, T] \times \mathbf{R}^6 \times \mathbf{S}_\omega^2)$  une solution classique de (1.3.7). Le critère d'extension suivant est valide :*

$$\limsup_{t \uparrow T} R_f(t) < \infty \implies \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ x, \xi \in \mathbf{R}^3}} (|\nabla_{t,x,\xi} f(t, x, \xi)| + |\nabla_{t,x,\xi,\omega} \phi(t, x, \xi, \omega)|) < \infty.$$

*Il s'ensuit que, étant donné une donnée initiale positive  $f^{ini} \in C_c^1(\mathbf{R}^6)$ , il existe  $T > 0$ , tel qu'il existe une unique solution forte*

$$(f, \phi) \in W^{1,\infty}([0, T] \times \mathbf{R}^6) \times W^{1,\infty}([0, T] \times \mathbf{R}^6 \times \mathbf{S}_\omega^2)$$

de (1.3.7).

De manière similaire à ce qui est fait pour Vlasov-Maxwell, on peut améliorer ce critère en l'étendant à des données initiales qui ne sont plus nécessairement à support compact en  $\xi$  mais avec les propriétés de décroissance adéquates.

On dénotera par  $p \in C^1(\mathbf{R})$  la fonction de poids utilisée pour contrôler la décroissance en  $|\xi|$  de la donnée initiale. On fait l'hypothèse suivante sur  $p$  :

$$0 \leq p \leq 1, \quad p' \leq 0, \quad \text{et } p(r) = O(r^{-\alpha}) \text{ avec } \alpha > 7.$$

**Theorem 1.3.7.** *Supposons que  $f^{ini} \in C^1(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$ ,  $\phi|_{t=0} \equiv 0$  et*

$$\begin{cases} 0 \leq f^{ini}(x, \xi) \leq p(|\xi|), \\ |\nabla_{x, \xi} f^{ini}(x, v)| \leq p(|\xi|) \end{cases} \quad (1.3.9)$$

*Alors il existe  $T > 0$  tel qu'il existe une unique solution classique,  $(f, \phi) \in W^{1, \infty}((0, T) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) \times W^{1, \infty}((0, T) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}_\omega^2)$ , au problème de Cauchy associé au système (1.3.7).*

La preuve s'appuie fortement sur la méthode employée par Bouchut, Golse et Pallard dans leurs articles [25], [26]. L'idée consiste à écrire les dérivées spatiales  $\partial_{x_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  ou temporelle  $\partial_t$  comme une combinaison linéaire de l'opérateur de transport

$$S := \partial_t + v(\xi) \cdot \nabla_x$$

et de l'opérateur

$$T_\omega = \omega \partial_t - \nabla_x.$$

Il s'avère que les coefficients de ces combinaisons linéaires ne sont singuliers que lorsque  $v(\xi)$  tend vers 1.

Enfin, le dernier résultat de ce chapitre est l'affaiblissement de la condition de compacité Glassey et Strauss en une condition sur la finitude de la norme  $L^3$  de la densité macroscopique. Pour ce faire on étudie de manière plus fine les courbes caractéristiques en exploitant les récents travaux de Pallard [116; 121].

**Theorem 1.3.8.** *Soit une donnée initiale positive  $f^{ini} \in C_c^1(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$ . Soit  $f \in C^1([0, T_{max}) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$ , la solution classique correspondante au problème de Cauchy associé à (1.3.7) et soient  $\rho_f$  et  $R_f$  définis respectivement dans (1.3.8) et (1.3.6). Alors, on a*

$$\limsup_{t \rightarrow T_{max}^-} R_f(t) \implies \limsup_{t \rightarrow T_{max}^-} \|\rho_f(t, \cdot)\|_{L^3(\mathbf{R}^3)} = +\infty.$$

On obtient une condition plus faible que celle requise à ce jour pour le système de Vlasov-Maxwell (condition sur la norme  $L^6$ ) mais cet affaiblissement provient essentiellement de la plus grande simplicité de notre modèle jouet, qui requiert une utilisation moindre de l'inégalité de Hölder dans les estimations. Toutefois, l'exposant 3 reste strictement supérieur à l'exposant  $4/3$  correspondant aux estimations a priori dont on dispose réellement.

## 1.4 Approximation non-relativiste et système de Vlasov-Darwin

On se focalise dans ce chapitre sur les modèles réduits de Vlasov-Maxwell que sont les systèmes de Vlasov-Poisson et de Vlasov-Darwin. On rappelle que ce sont des systèmes réduits, dans la mesure où l'on ne conserve qu'une partie des équations de Maxwell, et sont par conséquent des modélisations moins précises de l'évolution de la densité de particules dans le plasma, mais ils possèdent la propriété intéressante de combiner l'équation de Vlasov avec une ou plusieurs équations de type elliptique. De plus, ces systèmes sont des *approximations non relativistes*, puisqu'on peut montrer qu'ils sont des approximations, dans un sens qui sera précisé par la suite, du système de Vlasov-Maxwell à une puissance de  $\epsilon$  près (où  $\epsilon$  est le rapport entre la vitesse caractéristique des particules et la vitesse de la lumière).

### 1.4.1 Le système de Vlasov-Poisson : limite non-relativiste du système de Vlasov-Maxwell

Formellement, si on passe à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  dans le système des équations de Maxwell (1.2.7), on obtient

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \rho, \\ \nabla \times E = 0, \\ \nabla \cdot B = 0, \\ \nabla \times B = 0. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

On en déduit qu'il existe un potentiel  $\phi$  tel que

$$E = -\nabla\phi, \quad \text{et} \quad -\Delta\phi = \rho,$$

et que le champ magnétique est nul

$$B = 0.$$

Ainsi, d'un point de vue formel, le système de Vlasov-Poisson est la limite classique ou non-relativiste du système de Vlasov-Maxwell, aussi parfois appelée *approximation électrostatique*.

Les premiers résultats validant rigoureusement cette approximation sont dûs de manière simultanée à Degond [38], Schaeffer [129], et Asano et Ukai [8]. Dans tous ces articles, la première étape consiste à prouver un résultat d'existence locale pour le système de Vlasov-Maxwell (RVM) où l'intervalle de temps  $[0, T_{max})$  ne dépend pas du paramètre  $\epsilon$  (ou du moins ne décroît pas lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.) Enfin on démontre que la différence entre les solutions  $(f_\epsilon^{VM}, E_\epsilon^{VM}, B_\epsilon^{VM})$  et  $(f^{VP}, E^{VP})$  est, uniformément en temps, dans un espace de Sobolev (ou dans un espace de Sobolev à poids similaire dans l'article de Asano et Ukai), un  $O(\epsilon)$ . On donne ici une version proche de celle proposée par Schaeffer.

**Theorem 1.4.1.** (Schaeffer [129], 1986) *Soit  $f_0$  une fonction positive appartenant à  $C_c^1(\mathbf{R}^6)$  et soit*

$$E_0 = \iint \frac{(x-y)f_0(y, \xi)}{|x-y|^3} dy d\xi.$$

*On notera  $(f^{VP}, E^{VP})$  la solution du système de Vlasov-Poisson (1.2.4) muni de cette donnée initiale, et  $(f_\epsilon^{VM}, E_\epsilon^{VM}, B_\epsilon^{VM})$  la solution locale sur  $[0, T)$  du système de Vlasov-Maxwell (RVM) avec les mêmes données initiales auxquelles on ajoute la condition*

$$B_\epsilon^{VM}(0, x) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^3.$$

*Alors il existe une constante  $C > 0$ , dépendante de  $T$  et des données initiales mais indépendante du paramètre  $\epsilon$ , telle que pour tout  $\epsilon \leq 1$ ,  $t \in [0, T)$ ,  $(x, \xi) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ ,*

$$|f^{VP} - f_\epsilon^{VM}| + |E^{VP} - E_\epsilon^{VM}| + |B_\epsilon^{VM}| \leq C\epsilon.$$

Dans l'énoncé initial du théorème la solution de Vlasov-Poisson est seulement locale en temps car il est antérieur aux travaux de Pfaffelmoser et Lions et Perthame. Par ailleurs, Pallard a depuis montré dans l'article [118] que le temps de vie d'une solution du système de Vlasov-Maxwell (RVM) est minoré par une quantité tendant vers  $+\infty$  lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, plus précisément  $O(\epsilon^{-1/401})$ .

### 1.4.2 Un système d'approximation d'ordre supérieur : le système de Vlasov-Darwin

En 1920 le physicien Darwin propose un nouveau système d'équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution d'un champ électromagnétique (E, B) en présence de particules chargées [37]. Son système d'équations est plus simple que le système des équations de Maxwell mais, contrairement à l'approximation électrostatique, ne néglige pas les effets magnétiques.

Son approximation repose sur la décomposition de Helmholtz du champ électrique E :

$$E = E_L + E_T,$$

où la composante longitudinale (aussi appelée *irrotationnelle*)  $E_L$  et la composante transversale (aussi appelée *solénoïdale*)  $E_T$  du champ électrique satisfont

$$\nabla \times E_L = 0, \quad \nabla \cdot E_T = 0.$$

L'approximation de Darwin consiste ensuite à négliger dans l'équation d'Ampère la dérivée temporelle de la composante transversale du champ électrique, ou la partie solénoïdale du courant de déplacement, c'est à dire

$$\partial_t E_T \ll \partial_t E_L.$$

Les équations restantes forment alors un système d'EDPs elliptique. Pour s'en convaincre on peut reprendre le formalisme potentiel introduit dans la section 1.1.4. Les champs  $E_T$  et  $E_L$  s'expriment simplement en fonction des potentiels  $(\phi, A)$  :

$$E_L = -\nabla\phi, \quad \text{et} \quad E_T = -\varepsilon\partial_t A.$$

Dans ce contexte les équations de Darwin se réduisent au système elliptique

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \rho, \\ -\Delta A = \mathbf{P}(j). \end{cases} \quad (1.4.2)$$

On peut ainsi voir l'opération d'approximation de Darwin comme la troncature de l'équation des ondes (1.1.7) gouvernant l'évolution du potentiel A .

Combiné à l'équation de Vlasov on obtient un nouveau système d'EDPs modélisant l'évolution au cours du temps d'une densité de particules chargées dans un plasma. Ce système est généralement dénommé système de Vlasov-Darwin dans la littérature. Il s'écrit, lorsque  $\Omega$  l'espace physique est indifféremment  $\mathbf{R}^3$  ou  $\mathbf{T}^3$ , de la manière suivante

$$\begin{cases} \partial_t f^{\text{VD}} + v(\xi) \cdot \nabla_x f^{\text{VD}} + (-\nabla_x \phi - \varepsilon_- t A + \varepsilon v(\xi) \times (\nabla \times A)) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VD}} = 0, \\ -\Delta_x \phi = \rho - \lambda_\Omega, \\ -\Delta_x A = \mathbf{P}(j). \\ \rho^{\text{VD}}(t, x) = \int_{\mathbf{R}^3} f^{\text{VD}}(t, x, \xi) d\xi, \\ j^{\text{VD}}(t, x) = \int v(\xi) f^{\text{VD}} d\xi, \end{cases} \quad (\text{RVD})$$

où la constante  $\lambda_\Omega$  prend respectivement les valeurs 0 ou 1 selon que  $\Omega$  désigne respectivement  $\mathbf{R}^3$  ou  $\mathbf{T}^3$ .

Il a été l'objet d'investigation récentes, démontrant l'existence globale de solutions faibles et de solutions fortes pour des données initiales "petites" (on renverra le lecteurs aux articles [21; 47; 117; 136] pour les différentes étapes aboutissant à ces résultats).

Similairement au système de Vlasov-Poisson le système de Vlasov-Darwin s'avère être une approximation qualifiée de *quasi-statique* dans la littérature physique et *non-relativiste* dans la littérature mathématique. Degond et Raviart montrèrent [39] en développant un schéma numérique pour le modèle de Vlasov-Darwin que ce dernier constituait une approximation d'ordre  $\epsilon^3$  du système de Vlasov-Maxwell. De plus le caractère elliptique permet d'utiliser des outils numériques plus performant s'affranchissant par exemple d'une condition CFL (voir aussi [22; 47]). En dimension strictement inférieure à 3 des résultats analogues ont été démontrés par Lee [101], et par McGillen à des fins de modélisation numérique [109; 110].

Le modèle de Poisswell est un autre modèle intermédiaire entre le système de Vlasov-Poisson et celui de Vlasov-Maxwell, consistant à effectuer un développement en  $\epsilon$  du potentiel  $\phi$  et du potentiel A. Il s'exprime donc à l'aide du formalisme potentiel mais muni de la jauge de Lorentz et non de Coulomb. On en trouvera une présentation dans l'article de Besse, Mauser et Sonnendrücker [22].

A des fins de modélisations numériques, Sonnendrücker et Raviart ont introduit une méthode, s'inspirant du développement de Hilbert initialement utilisé dans le contexte de l'équation de Boltzmann décrivant l'évolution d'un gaz de faible densité, pour établir une échelle hiérarchique de modèles approchant l'équation de Maxwell [123]. Leur méthode est essentiellement abstraite et non constructive.

Plus récemment, Bauer et Kunze, reprenant eux aussi la méthode du développement de Hilbert en un petit paramètre, ont ébauché une méthode de construction de systèmes de type Vlasov-Elliptique d'ordre arbitrairement élevé en  $\epsilon$  [19]. Leur but est de bâtir, en s'inspirant des modèles *post-newtoniens* dans le cadre gravitationnel [96], des modèles descriptifs de la physique des plasmas suffisamment proches du modèle de Vlasov-Maxwell pour pouvoir interpréter les effets radiatifs (on renverra sur ce sujet précis le lecteur aux articles [16–18] et à leurs références). La méthode consiste à écrire les développements suivants

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots, \\ E &= E_0 + \epsilon E_1 + \epsilon^2 E_2 + \dots, \\ B &= B_0 + \epsilon B_1 + \epsilon^2 B_2 + \dots, \end{aligned}$$

puis à introduire ces développements dans le système de Vlasov-Maxwell (RVM) et enfin identifier terme à terme selon la puissance en  $\epsilon$ . Ainsi à l'ordre 0, le champ  $B_0$  est nul et  $(f_0, E_0)$  satisfait le système de Vlasov-Poisson (1.2.4). A l'ordre 1 on retrouve une version légèrement modifiée du système de Vlasov-Darwin. Les auteurs montrent en outre que ce système de Vlasov-Darwin modifié est bien une approximation d'ordre  $\epsilon^3$  du modèle de Vlasov-Maxwell, et retrouve par voie de conséquence le résultat de Degond et Raviart [39] qui montrait que le système de Vlasov-Darwin était une approximation non-relativiste du même ordre de Vlasov-Maxwell.

Le principal défaut de cette méthode est son caractère non constructif, le système à l'étape  $2n+1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  possédant des termes de sources qui sont dépendants de solutions des



systèmes d'ordres inférieurs. La structure algébrique de ces sources n'est pas explicitée (et n'est pas évidente en raison de la non-linéarité de l'équation de Vlasov) si bien qu'il n'est pas a priori évident que les approximations d'ordres élevés soient bien posées. De même, les systèmes ne sont pas auto-cohérents et ne possèdent pas de structure hamiltonienne, ce qui rend leur interprétation physique plus difficile.

### 1.4.3 Approximation non relativiste d'ordre arbitrairement élevé de type Vlasov-Elliptique (Chapitre 3)

On dispose donc de deux systèmes combinant une équation de Vlasov et des équations elliptiques, les systèmes de Vlasov-Poisson, et qui constituent une approximation non-relativiste à  $\varepsilon$  ou  $\varepsilon^3$  près du système de Vlasov-Maxwell. On peut donc se demander si cette hiérarchie de systèmes ne pourrait pas être complétée en une échelle de systèmes de type Vlasov + Elliptique, le  $k$ -ième système étant une approximation non-relativiste d'ordre  $\varepsilon^{2k+1}$ .

Dans le chapitre 3 nous nous sommes attelés à établir une méthode de construction de système de type Vlasov-Elliptique approximant le système de Vlasov-Maxwell à un ordre arbitrairement élevé en  $\varepsilon$ . Notre méthode pourrait être implémentable dans un algorithme, et du reste nous sommes en mesure de préciser la structure des sources des équations elliptiques que satisfont les termes de la force de Lorentz. Il s'agit d'une combinaison de moments en  $\xi$  d'ordres élevés de la fonction de distribution.

Plutôt qu'un développement hilbertien nous avons employé une technique plus proche de la méthode de Chapman-Enskog [34], c'est à dire que seul le potentiel vecteur  $A$  est l'objet d'une écriture en somme de puissances de  $\varepsilon$ . Autrement dit seules les parties transverses du champ électrique et le champ magnétique satisfont des équations modifiées. Ceci permet à peu de frais de conserver la structure hamiltonienne de notre système de Vlasov-Darwin d'ordre élevé. Cette idée fut inspirée par la lecture des travaux récents de D. Han-Kwan, T. Nguyen et F. Rousset, [73] dans lequel les auteurs démontrent un résultat de limite non-relativiste pour des ordres arbitrairement élevés en  $\varepsilon$  pour un système de Vlasov-Maxwell linéarisé autour d'une solution stationnaire à symétrie radiale sur  $\mathbf{T}^3$ . La principale difficulté réside dans la généralisation au cas général non-linéaire. Dans notre étude, effectuée en collaboration avec D. Han-Kwan, N. Jiang et L. Xiong, aussi bien que dans l'article [73] nous nous sommes placés dans le cas  $\Omega = \mathbf{T}^3$ .

Sur le tore  $\mathbf{T}^3$  l'équation de Poisson n'est résoluble que lorsque le terme de source est de moyenne nulle, c'est pourquoi on écrit en premier lieu

$$A = A - \langle A \rangle + \langle A \rangle := \hat{A} + \langle A \rangle,$$

où

$$\hat{A} = A - \langle A \rangle$$

et

$$\langle A \rangle = \int_{\mathbb{T}^3} A(t, x) dx.$$

Pour des raisons de simplification des preuves de l'existence locale de solutions fortes et du taux de convergence en  $\varepsilon$ , nous avons fait le choix de développer conjointement le

potentiel vecteur et sa dérivée temporelle

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i \mathcal{A}_i, \\ \epsilon \partial_t \hat{A} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i \mathcal{A}_i^\sharp.\end{aligned}\tag{1.4.3}$$

Nous rappelons que selon le système de Vlasov-Maxwell la partie de moyenne nulle du champ de vecteur satisfait les deux équation des ondes

$$\begin{aligned}\epsilon^2 \partial_t^2 \hat{A} - \Delta \hat{A} &= \epsilon \widehat{\mathbf{P}(j)}, \\ \epsilon^2 \partial_t^2 (\partial_t \hat{A}) - \Delta (\partial_t \hat{A}) &= \epsilon \widehat{\mathbf{P}(\partial_t j)}.\end{aligned}\tag{1.4.4}$$

Le but de notre méthode est d'écrire les équations elliptiques que satisfont les termes  $\mathcal{A}_i$  et  $\mathcal{A}_i^\sharp$ , pour tout  $i \in \mathbf{N}$ , et de décrire la structure des termes de sources de ces équations.

On pourra tout d'abord remarquer par un raisonnement par récurrence que pour tout  $i \in \mathbf{N}$ ,

$$\mathcal{A}_{2i+2} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{2i+2}^\sharp = 0.$$

Dans la suite on désignera par  $H^s$  l'espace de Sobolev standard de degré  $s$ , basé sur  $L^2$  muni de la mesure de Lebesgue. On aura également besoin de travailler avec des espaces de Sobolev à poids basés sur  $L^2(\mathbf{T}^3)$ , que l'on notera  $\mathcal{H}_r^k$ , et qui seront définis, pour  $k \in \mathbf{N}, r \in \mathbf{R}$  de la manière suivante

$$\|f\|_{\mathcal{H}_r^k} := \left( \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq k} \int_{\mathbf{T}^3} \int_{\mathbf{R}^3} (1 + |\nu(\xi)|^2)^r |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f|^2 d\xi dx \right)^{1/2},$$

où  $\alpha, \beta$  désignent des multi-indices dans  $\mathbf{N}^3$ .

Afin de rendre plus simple la compréhension de notre système de Vlasov-Darwin d'ordre  $k$ , que l'on dénommera  $\text{VD}k$ , nous donnons les définitions liminaires suivantes.

**Definition 1.4.2.** Soit  $n \in \mathbf{N}$ , pour une distribution donnée  $f \in \mathcal{M}^+(\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3)$  solution d'une équation de Vlasov, on dénotera par  $M_n$ , ou  $M_n(f)$ , l'ensemble de moments en vitesse de la fonction de distribution  $f$  :

$$M_n \equiv M_n(f) = \left( \int_{\mathbf{R}^3} \prod_{1 \leq l \leq n} \partial_\xi^{\alpha_l} v_{\beta_l}(\xi) f(\cdot, \cdot, \xi) d\xi \right)_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\{1, 2, 3\}^{\mathbf{N}})^n \\ (\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\{1, 2, 3\}^{\mathbf{N}})^n}}.\tag{1.4.5}$$

On désignera indifféremment par  $m_n(f)$  n'importe quel élément de  $M_n(f)$ . Lorsque qu'une application  $g$  a comme argument un ou plusieurs éléments de  $M_n(f)$  on utilisera l'abus de notation suivant  $g \equiv g(m_n)$ . Lorsque la fonction de distribution  $f$  à laquelle on se réfère est identifiable sans ambiguïté, on procédera aux abus de notation  $M_n \equiv M_n(f)$  et  $m_n \equiv m_n(f)$ .

**Definition 1.4.3.** Soit  $j, n \in \mathbf{N}$ , avec  $n > 4$ . On dit qu'une application

$$\mathcal{S} : L^2 \cap L^\infty(0, t; H_x^n(\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3)) \times L^2 \cap L^\infty(0, t; H_x^n(\mathbf{T}^3)) \rightarrow L^\infty(0, t; H_x^n(\mathbf{T}^3))$$

satisfait l'hypothèse de régularité ( $\mathbb{H}\mathbb{S}_j^n$ ) ( $j$  désigne la taille des moments en vitesse et  $n$  le degré de régularité) si pour tout  $f \in L^2 \cap L^\infty(0, t; H_x^n(\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3)) \times L^2 \cap L^\infty(0, t; H_x^n(\mathbf{T}^3))$  :

- $\mathcal{S}(0) = 0$ ,
- il existe une positive constante  $C$  telle que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{S}$  satisfait,

$$\|\mathcal{S}(f, g)\|_{L^2(0, t; H_x^n(\mathbb{T}^3))} \leq C\Gamma\left(t, (\|m_{2j+2}(f)\|_{L^2(0, t; H_x^{n+1}(\mathbb{T}^3))}, \|g\|_{H_x^{n+1}})\right), \quad (1.4.6)$$

$$\|\mathcal{S}(f, g)\|_{L^\infty(0, t; H_x^n(\mathbb{T}^3))} \leq C\Gamma'\left(t, (\|m_{2j+2}(f)\|_{L^\infty(0, t; H_x^{n+1}(\mathbb{T}^3))}, \|g\|_{H_x^{n+1}})\right), \quad (1.4.7)$$

avec  $\Gamma, \Gamma'$  deux polynômes croissants en chacune de leurs variables.

Dans la section 2 du Chapitre 3 nous exposons une méthode itérative permettant de construire, à partir du système de Vlasov-Poisson, le " $k$ -ième" système de Vlasov Darwin.

On considère des données initiales "bien-préparées" dans le sens suivant.

**Définition 1.4.4.** On dira qu'une donnée initiale  $(f_0, E_0, B_0)$  est "bien-préparée" d'ordre  $2k+1$  à un degré de régularité  $N_0 \in \mathbf{N}$  si

$$\begin{aligned} (-\Delta_x)^{-1} \nabla_x \times B_0 &= \sum_{i=1}^k e^{2i-1} \mathcal{A}_{2i-1}|_{t=0} + \mathcal{O}(e^{2k+1})_{H_{2k+1}^{N_0}}, \\ \nabla_x (-\Delta_x)^{-1} \left( \int_{\mathbb{R}^3} f_0(x, \xi) d\xi - E_0 \right) &= \sum_{i=1}^k e^{2i} \mathcal{A}_{2i-1}^\#|_{t=0} + \mathcal{O}(e^{2k+1})_{\mathcal{H}_{2k+1}^{N_0}}. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Notre résultat principal est le suivant.

**Theorem 1.4.5.** Soit  $k \in \mathbf{N}$ ,  $N_0 > 4$  et  $r > 2k + 2$ . Let  $f_0 \in \mathcal{H}_r^{N_0+1}$ ,  $(E_0, B_0) \in \left(H_x^{N_0+1}\right)^2$  satisfaisant les conditions de compatibilité

$$\nabla_x \cdot E^0 = \int_{\mathbb{R}^3} f_0 d\xi - 1, \quad \nabla_x \cdot B^0 = 0,$$

et "bien-préparées" d'ordre  $2k+1$  de régularité  $N_0$  au sens de la Définition 1.4.4.

Il existe alors des applications  $(\mathcal{S}_j^{(k)}, \mathcal{S}_j^{\#, (k)})_{1 \leq j \leq k}$  satisfaisant l'hypothèse  $(\mathbb{H}\mathbb{S}_j^{N_0})$  définie dans la Définition 1.4.3, telles que le système

$$\left\{ \begin{aligned} &\partial_t f^{\text{VD}k} + v(\xi) \cdot \nabla_x f^{\text{VD}k} + \left(E^k + \epsilon v(\xi) \times B^k\right) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VD}k} = 0, \\ &-\Delta_x \phi^k = \rho^k - 1, \\ &\mathcal{A}_{2j-1}^{(k)} = \mathcal{S}_j^{(k)}\left(f^{\text{VD}k}, E_0\right), \quad \forall 1 \leq j \leq k, \\ &\mathcal{A}_{2j-1}^{\#, (k)} = \mathcal{S}_j^{\#, (k)}\left(f^{\text{VD}k}, E_0\right), \quad \forall 1 \leq j \leq k, \\ &E^k = -\nabla \phi^k + \langle E_0 \rangle - \int_0^t \langle j^k \rangle(s) ds - \sum_{j=1}^k e^{2j-1} \mathcal{A}_{2j-1}^{\#, (k)}, \\ &B^k = \nabla \times \left( \sum_{j=1}^k e^{2j-1} \mathcal{A}_{2j-1}^{(k)} \right), \\ &\rho^k(t, x) = \int_{\mathbb{R}_\xi^3} f^{\text{VD}k}(t, x, \xi) d\xi, \quad j^k(t, x) = \int_{\mathbb{R}_\xi^3} v(\xi) f^{\text{VD}k}(t, x, \xi) d\xi, \\ &f^{\text{VD}k}|_{t=0} = f_0, \end{aligned} \right. \quad (1.4.9)$$

soit bien posé, et telles que de plus on ait l'approximation non-relativiste suivante :

$$\|f^{\text{VM}} - f^{\text{VD}k}\|_{L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_r^{N_0})} + \|(E - E^k, B - B^k)\|_{L^\infty(0, T; H^{N_0})} \lesssim e^{2k+1}. \quad (1.4.10)$$

Ainsi, on est en mesure de bâtir un système de type Vlasov-Darwin approchant le système de Vlasov-Maxwell à une puissance arbitrairement élevé du paramètre non-relativiste  $\varepsilon$ . La finesse de l'approximation étant indexée sur le nombre de moments en  $\xi$  de la donnée initiale que l'on peut contrôler.

## 1.5 Méthodes de Transport optimal et limite non relativiste

Dans le chapitre 4 nous démontrons un résultat de limite non relativiste pour des solutions faibles des système de Vlasov-Maxwell et Vlasov-Poisson sous la condition que la densité macroscopique de charge est uniformément bornée en  $\varepsilon$ . La limite est considérée en un sens plus faible que dans les travaux classiques [8; 38; 129], plus précisément en norme de Wasserstein. Pour ce faire nous avons adopté une approche lagrangienne, particulièrement propice à l'utilisation des outils du transport optimal, qui est à mettre en relation avec la méthode utilisée par Dobrushin pour démontrer des résultats de convergence de champ moyen [43], ou plus récemment la preuve de l'unicité des solutions faibles à densité bornée de Vlasov-Poisson par Loeper [103]. Dans un premier temps on fera un bref rappel des outils élémentaires du transport optimal.

### 1.5.1 Le transport optimal et les équations aux dérivées partielles cinétiques

L'objet de la théorie du transport optimal, dont on peut dater la naissance au mémoire de Monge *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais* paru en 1781, est l'étude du problème d'optimisation sous contrainte du transfert d'une mesure donnée à une autre. Cette théorie est reliée à beaucoup de domaines et on renverra le lecteur au livre de Villani [142] pour une introduction sur le sujet.

Lorsque l'on adopte le point de vue Lagrangien en théorie cinétique, c'est à dire que l'on suit les particules le long des courbes caractéristiques, il est équivalent de dire que la fonction de distribution des particules (qui est une mesure de probabilité si on l'a normalisée) est transportée le long des caractéristiques. De ce fait certains outils développés dans la théorie du transport optimal se révèlent utiles dans l'étude de retour à l'équilibre [141], de champ moyen (voir par exemple la méthode utilisée par Dobrushin [42]), etc. En 2005, Loeper améliore les résultats d'unicité obtenus par Robert [127] pour le système de Vlasov-Poisson et par Yudovitch [90] pour le système Euler-2D, en adoptant un point de vue Lagrangien et les outils du transport optimal. Nous donnons ci-dessous les définitions et les propriétés dont nous aurons l'usage par la suite. Les démonstrations de ces propriétés pourront être trouvées dans la Section 2 de l'article de Loeper [103].

**Definition 1.5.1.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces polonais. Soient  $\rho_1, \rho_2$  deux mesures boréliennes de probabilité sur respectivement  $X$  et  $Y$ . On définit la distance de Wasserstein d'ordre 2 entre  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , dénotée  $W_2(\rho_1, \rho_2)$ , par :

$$W_2(\rho_1, \rho_2) = \inf_Y \left( \int_{X \times Y} d(x, y)^2 d\gamma(x, y) \right)^{1/2},$$

où l'infimum  $\inf$  est considéré sur l'ensemble des mesures de probabilité  $\gamma$  sur  $X \times Y$  dont les marginales  $\mathbb{P}_x \gamma$  et  $\mathbb{P}_y \gamma$  sont respectivement égales à  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

On peut formuler deux remarques suite à cette définition. En réalité nous n'aurons pas besoin d'un tel degré de généralité et dans notre étude les espaces  $X$  et  $Y$  désigneront soit  $\mathbf{R}^d$  soit  $\mathbf{T}^d$ . Ces distances, que l'on peut généraliser en remplaçant  $d(x, y)^2$  par  $d(x, y)^p$ , sont liées à la norme de Sobolev  $H^{-1}$  (on pourra consulter le chapitre 7 de [142] à ce sujet). On énonce ici un résultat dû à Loeper concernant les solutions d'une équation de Poisson.

**Theorem 1.5.2.** (Loeper [103].) Soit  $\rho_1, \rho_2$  deux mesures de probabilité sur  $\mathbf{R}^d$  avec des densités  $L^\infty$  par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit  $\psi_i, i = 1, 2$ , les solutions des équations de Poisson :

$$-\Delta\psi_i = \rho_i, \quad \text{on } \mathbf{R}^d.$$

Alors

$$\|\nabla\psi_1 - \nabla\psi_2\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \leq (\max\{\|\rho_1\|_{L^\infty}, \|\rho_2\|_{L^\infty}\})^{1/2} W_2(\rho_1, \rho_2).$$

On peut également démontrer une version analogue de ce théorème dans le cas du tore, où l'équation de Poisson est modifiée en conséquence.

## 1.5.2 Limite non-relativiste en distance de Wasserstein pour des solutions à densité bornée (Chapitre 4)

Le point de départ de notre travail mené en collaboration avec D.Han-Kwan est la similitude des preuves de limite non-relativiste du système de Vlasov-Maxwell vers le système de Vlasov-Poisson dans des espaces de Sobolev [8; 38; 129], et les preuves d'unicité des solutions fortes locales du système de Vlasov-Maxwell [56] ou de solutions faibles du système de Vlasov-Poisson par Robert [127]. Elles reposent sur des estimations Lipschitz ou Sobolev dans un cas sur la différence  $f^{VP} - f^{VM}$ , dans l'autre sur la différence entre deux éventuelles solutions  $f_1^{VP} - f_2^{VP}$ . L'amélioration du résultat de Robert par Loeper repose sur l'abandon du point de vue Eulerien où l'on effectue les estimations directement sur l'équation de Vlasov elle-même, et à procéder à des estimations de type Gronwall sur une fonctionnelle quantifiant la distance en norme de Wasserstein de deux potentielles solutions de Vlasov-Poisson. C'est ce point de vue que nous avons adapté à la problématique de la limite non-relativiste.

Dans cette section nous exposons le principal résultat du chapitre 4 qui énonce un résultat de limite non-relativiste en distance  $W_2$  sous conditions de borne uniforme en  $\epsilon$  sur la densité macroscopique  $\rho^{VM}$  (et à fortiori sur  $\rho^{VP}$ ).

Avant d'énoncer notre principal résultat, nous établissons quelques définitions préliminaires.

On dénotera par  $\mathcal{P}_2(\Omega \times \mathbf{R}^3)$ , l'ensemble des mesures de probabilités sur  $\Omega \times \mathbf{R}^3$  dont les deux premiers moments sont finis, muni de la topologie faible-\* standard.

Nous précisons maintenant la notion de solution faible que nous emploierons.

**Definition 1.5.3.** (Solution faible (VP)). Pour  $T > 0$ , on appellera  $f^{VP}$  une solution faible de (1.3.1) sur  $[0, T)$  associée à la donnée initiale  $f^0$  si

- $f \in C([0, T), \mathcal{P}_2(\Omega \times \mathbf{R}^3) - w^*)$ ,
- $-\nabla\phi^{VP} \in L^1(0, T; C(\Omega))$ ,

— pour toutes fonctions test  $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^3)$ ,

$$\int_{[0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^3} (\partial_t \varphi + v(\xi) \cdot \nabla_x \varphi - \nabla_x \phi^{VP} \cdot \nabla_\xi \varphi) f(t, d\xi, dx) dt = - \int_{\Omega \times \mathbf{R}^3} \varphi|_{t=0} f^0(d\xi, dx), \quad (1.5.1)$$

— pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\phi^{VP}(t)$  est une solution de l'équation de Poisson :

$$-\Delta \phi^{VP} = \rho^{VP} - \lambda_\Omega.$$

— pour tout  $t \in [0, T]$ , la densité de courant  $j^{VP}$  satisfait la loi de conservation :

$$\partial_t j^{VP} + \nabla_x : \langle f, 1 \otimes |\xi|^2 \rangle = -\nabla_x \phi^{VP} \rho^{VP}.$$

On rappelle que le scalaire  $\lambda_\Omega$  désigne 0 si  $\Omega = \mathbf{R}^3$  et 1 si  $\Omega = \mathbf{T}^3$ .

**Definition 1.5.4.** (Solution faible de Vlasov-Maxwell). Pour  $T > 0$ , on appellera  $(f^{VM}, E, B)$  une solution faible de (RVM) sur  $[0, T]$  associée aux données initiales  $(f^0, E^0, B^0)$  si

- $f^{VM} \in C([0, T]; \mathcal{D}'_2(\Omega \times \mathbf{R}^3) - w^*)$ ,
- $E, B \in L^1(0, T; C^0 \cap L^\infty(\Omega)) \cap L^1(0, T; \text{LogLip}(\Omega))$ ,
- pour toutes fonctions test  $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^3)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{[0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^3} (\partial_t \varphi + v(\xi) \cdot \nabla_x \varphi + E \cdot \nabla_\xi \varphi + \varepsilon v(\xi) \times B \cdot \nabla_\xi \varphi) f(t, d\xi, dx) dt \\ = - \int_{\Omega \times \mathbf{R}^3} \varphi|_{t=0} f^0(d\xi, dx), \end{aligned}$$

— pour toutes fonctions test  $\psi \in C_c^\infty([0, T] \times \Omega, \mathbf{R})$ ,  $\Psi \in C_c^\infty([0, T] \times \Omega, \mathbf{R}^3)^3$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon \langle E, \partial_t \Psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \langle \nabla \times B, \Psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \varepsilon \langle j^{VM}, \Psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= -\varepsilon \langle E^0, \Psi|_{t=0} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \\ \langle \nabla \cdot E, \Psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= \langle \rho^{VM} - \lambda_\Omega, \Psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ \varepsilon \langle \partial_t B, \Psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \langle \nabla \times E, \Psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= \varepsilon \langle B^0, \Psi|_{t=0} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ \langle \nabla \cdot B, \Psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= 0. \end{aligned}$$

**Definition 1.5.5.** On dira qu'une solution faible  $f^{VP}$  du système de Vlasov-Poisson dans le sens de la Définition 1.5.3 est adaptée si la densité macroscopique de charge possède un moment d'ordre 4 borné dans le sens suivant :

$$\|\rho^{VP}\|_{L^\infty(0, T; L^1 \cap L^\infty(\Omega))} < +\infty, \quad \left\| \int_{\mathbf{R}^3} |\xi|^4 f^{VP}(t, x, d\xi) \right\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega))} < +\infty.$$

Une telle solution est de plus unique selon [103].

On requerra de plus certaines conditions sur les données initiales.

**Definition 1.5.6.** On dit que la donnée initiale  $(f^0, E_\varepsilon^0, B_\varepsilon^0) \in \mathcal{D}'_2(\Omega \times \mathbf{R}^3) \times \mathcal{D}'(\Omega)^2$  est normalisée si les conditions suivantes sont respectées. Premièrement,

$$\nabla \cdot E_\varepsilon^0 = \int_{\mathbf{R}^3} f^0(x, d\xi) - \lambda_\Omega, \quad \text{et} \quad \nabla \cdot B_\varepsilon^0 = 0 \quad \text{dans} \mathcal{D}'(\Omega).$$

Dans le cas  $\Omega = \mathbf{T}^3$ , on demande de plus que

— la moyenne spatiale de la densité de courant est supposée initialement égale à zéro<sup>1</sup>

$$\int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} \xi f^0(dx, d\xi) = 0;$$

— La moyenne spatiale de  $E_\varepsilon^0$  satisfait

$$\langle E_\varepsilon^0 \rangle := \int_{\mathbf{T}^3} E_\varepsilon^0(x) dx = 0.$$

Certaines des conditions imposées dans les définitions précédentes peuvent sembler inhabituellement abstraites, et sont en effet des conditions *ad hoc* pour que notre théorème soit vrai. Nous expliquons cependant plus en détail dans le chapitre 4 pourquoi les critères usuels demandés aux conditions initiales sont compatibles avec les nôtres.

Notre résultat principal, obtenu en collaboration avec D.Han-Kwan, est le suivant :

**Theorem 1.5.7.** *Soit  $f^0$  dans  $\mathcal{P}_2(\Omega \times \mathbf{R}^3)$ ,  $(E_\varepsilon^0, B_\varepsilon^0) \in \mathcal{D}'(\Omega)^2$  des données initiales normalisées dans le sens de la Définition 1.5.6. Soit  $T > 0$  (indépendant du paramètre  $\varepsilon$ ) et supposons que  $f^{VP}$  et  $(f_\varepsilon^{VM}, E_\varepsilon, B_\varepsilon)$  sont des solutions faibles respectives de (1.3.1) et (RVM) sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ , de données initiales respectives  $f^0$  et  $(f^0, E_\varepsilon^0, B_\varepsilon^0)$ . On suppose de plus que  $f^{VP}$  est une solution faible dans le sens 1.5.5.*

*Enfin, on suppose qu'il existe des constantes  $C_0 > 0$ , et  $(\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2) \in [0, 1]^4$  vérifiant*

$$\kappa := \min(\alpha - (\beta + 2\gamma_2), 1 - (\gamma_1 + \gamma_2)) > 0, \quad (1.5.2)$$

*telles que*

— la densité macroscopique  $\rho^{VM}$  est uniformément bornée en  $\varepsilon$  :

$$\|\rho_\varepsilon^{VM}\|_{L^\infty(0, T; L^1 \cap L^\infty(\Omega))} \leq C_0, \quad (1.5.3)$$

— le moment d'ordre  $\alpha$

$$m_\alpha(t, x) := \int_{\mathbf{R}^3} f_\varepsilon^{VM}(t, x, d\xi) |v(\xi)|^\alpha,$$

*possède une borne uniforme dont on contrôle la croissance en  $\varepsilon$  :*

$$\|m_\alpha\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} \leq C_0 \varepsilon^{-\beta}, \quad (1.5.4)$$

— le champ électrique longitudinal et le champ magnétique croissent en norme  $L^2$  au plus comme  $\varepsilon^{-\gamma_2}$  :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon \partial_t A_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} &\leq C_0 \varepsilon^{-\gamma_1}, \\ \|B_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} &\leq C_0 \varepsilon^{-\gamma_2}. \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$ , une constante  $C > 0$  dépendant uniquement de la condition initiale, telle que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  et pour tout  $t$  dans  $[0, T]$ ,

$$W_2(f^{VP}, f_\varepsilon^{VM})(t) \leq (C(1+T)^2 \varepsilon^\kappa)^{\exp(-C(1+T)^2)}. \quad (1.5.6)$$

1. On notera que cette hypothèse sur la densité de courant correspond physiquement à un changement de repère Galiléen.

La démonstration repose sur l'obtention d'une inégalité de type Grönwall pour la fonctionnelle

$$Q(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) (|X^{\text{VP}} - X^{\text{VM}}|^2 + |\Xi^{\text{VP}} - \Xi^{\text{VM}}|^2) \quad (1.5.7)$$

où,  $(X^{\text{VP}}, \Xi^{\text{VP}})$  (respectivement  $(X^{\text{VM}}, \Xi^{\text{VM}})$ ) désigne le flot Lagrangien associé à Vlasov-Poisson (respectivement Vlasov-Maxwell). On remarquera ainsi que

$$(X^{\text{VP}}, \Xi^{\text{VP}})(t), (X^{\text{VM}}, \Xi^{\text{VM}})(t) \# f^0$$

est une mesure de probabilité sur  $(\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3)^2$ , de sorte qu'il nous sera possible d'établir les relations suivantes entre la fonctionnelle  $Q$  et la distance de Wasserstein entre les deux solutions  $f^{\text{VP}}$  et  $f^{\text{VM}}$

$$W_2^2(f^{\text{VP}}(t), f^{\text{VM}}(t)) \leq 2Q(t),$$

et

$$W_2^2(\rho^{\text{VP}}(t), \rho^{\text{VM}}(t)) \leq 2Q(t).$$

### 1.5.3 Une classe de solutions à valeurs dans un espace de mesures vérifiant les hypothèses du Théorème 1.5.7

Similairement au résultat de Loeper [103], le Théorème 1.5.7 est un "if-théorème". Les solutions de Vlasov-Maxwell pour lesquelles Degond, Asano-Ukaï, et Schaeffer [8; 38; 129] démontrent leurs résultats de limite non-relativiste, satisfont également notre critère. Afin de justifier que notre critère est en effet moins contraignant, dans une deuxième partie du chapitre 4, nous avons démontré l'existence d'une classe particulière de solutions faibles des équations de Vlasov-Poisson et de Vlasov-Maxwell, qui ne sont pas compatibles avec les hypothèses des résultats connus de Degond, Asano-Ukaï, et Schaeffer, mais qui satisfont toutefois les hypothèses de notre théorème.

**Solutions fortes en  $x$  et faibles en  $\xi$**  Les solutions que nous serons amenés à considérer seront très régulières en la variable d'espace  $x$  (de régularité analytique) mais faiblement régulière en la variable de moment  $\xi$  (de simples mesures possédant un nombre fini de moments). Nous donnons ici la définition, donnée par Baradat dans [9], d'une solution forte en  $x$  et faible en  $\xi$ .

Soit  $T > 0$ . On considère une fonction  $f : [0, T] \times \mathbf{T}^3 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ , telle que pour toutes fonctions test  $\varphi \in C_b^1(\mathbf{R}^3)$ , l'observable hydrodynamique correspondant à  $\varphi$  :

$$\langle f, \varphi \rangle(t, x) := \int_{\mathbf{R}^3} \varphi(\xi) f(t, x, d\xi), \quad (1.5.8)$$

est une fonction lisse, plus précisément dans  $C^1([0, T] \times \mathbf{T}^3)$ .

**Definition 1.5.8.** On dit que  $f : [0, T] \times \mathbf{T}^3 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$  est une solution faible en  $\xi$  et forte en  $x$  de (1.3.1) si elle satisfait au sens classique, pour toutes fonctions test  $\varphi \in C_b^1(\mathbf{R}^3)$ , le système

$$\begin{cases} \partial_t \langle f, \varphi \rangle(t, x) + \nabla_x \cdot \langle f, \xi \varphi \rangle(t, x) + \nabla_x \phi^{\text{VP}} \cdot \langle f, \nabla \varphi \rangle(t, x) = 0, \\ -\Delta_x \phi^{\text{VP}} = \langle f, 1 \rangle - 1, \\ f(0, x, d\xi) = f^0(x, d\xi). \end{cases} \quad (1.5.9)$$



**Definition 1.5.9.** On dit que  $f : [0, T] \times \mathbf{T}^3 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$  est une solution faible en  $\xi$  et forte en  $x$  de (RVM) si elle satisfait au sens classique, pour toutes fonctions test  $\varphi \in C_b^1(\mathbf{R}^3)$ , le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \langle f, \varphi \rangle(t, x) + \nabla_x \cdot \langle f, v(\xi) \varphi \rangle(t, x) \\ \quad + E \cdot \langle f, \nabla \varphi \rangle + \varepsilon \sum_{i=1}^3 B_{\sigma^2(i)} \langle f, v_{\sigma(i)}(\xi) \partial_i \varphi \rangle - B_{\sigma(i)} \langle f, v_{\sigma^2(i)}(\xi) \partial_i \varphi \rangle = 0, \\ -\Delta_x \phi = \langle f, 1 \rangle - 1, \\ \varepsilon^2 \partial_t A - \Delta_x A = \varepsilon \mathbf{P}(\langle f, v(\xi) \rangle), \\ f(0, x, d\xi) = f^0(x, d\xi), \\ \varepsilon \partial_t A|_{t=0} = E^0 + \nabla_x \phi|_{t=0}, \\ \nabla \times A|_{t=0} = B^0 - \langle B^0 \rangle, \quad \langle A|_{t=0} \rangle = 0, \end{array} \right. \quad (1.5.10)$$

où  $\sigma$  désigne la permutation  $\sigma = (1, 2, 3)$ .

**Une représentation multi-fluides** Nous donnons ici une autre formulation du système de Vlasov-Maxwell, que l'on nommera "multi-fluides". Elle a été introduite par Grenier [66] pour analyser la limite quasi-neutre de systèmes de type Vlasov-Poisson.

On cherche une solution  $f$  sous la forme

$$f(t, x, d\xi) = \int_M \rho_\theta(t, x) \delta(\xi - \xi_\theta(t, x)) \mu(d\theta), \quad (1.5.11)$$

où  $(M, \mu)$  est un espace de probabilité donné,  $\delta$  la masse de Dirac centrée en 0,  $(\rho_\theta)_{\theta \in M}$ ,  $(\xi_\theta)_{\theta \in M}$  sont des familles de fonctions et de champs de vecteurs lisses sur  $\mathbf{T}^3$ . Cela correspond physiquement à diviser l'ensemble des particules du plasma en différentes phases, chacune d'entre elles étant caractérisée par sa densité macroscopique ponctuelle  $\rho_\theta(t, x)$  et son moment  $\xi_\theta(t, x)$ . Chaque densité est transportée par la vitesse relativiste  $v(\xi_\theta)$  selon une équation de continuité, et chaque phase est accélérée par une force de Lorentz  $F_L$  collectivement générée.

Plus précisément, étant donnée une donnée initiale  $(\rho_\theta^0)_{\theta \in M}$ ,  $(\xi_\theta^0)_{\theta \in M}$  on considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \theta \in M, \partial_t \rho_\theta(t, x) + \nabla_x \cdot (v(\xi_\theta(t, x)) \rho_\theta(t, x)) = 0, \\ \forall \theta \in M, \partial_t \xi_\theta(t, x) + (v(\xi_\theta(t, x)) \cdot \nabla_x) \xi_\theta(t, x) \\ \quad = (-\nabla_x \phi - \varepsilon \partial_t A + \varepsilon v(\xi_\theta) \times (\nabla_x \times A + \langle B^0 \rangle))(t, x), \\ \varepsilon^2 \partial_t^2 A - \Delta_x A = \varepsilon \mathbf{P} \left( \int_{\mathbf{T}^3} v(\xi_\theta(t, x)) \rho_\theta(t, x) \mu(d\theta) \right), \\ -\Delta_x \phi = \int_M \rho_\theta(t, x) \mu(d\theta) - 1, \\ \forall \theta \in M, \rho_\theta|_{t=0} = \rho_\theta(0), \quad \xi_\theta|_{t=0} = \xi_\theta(0), \\ -\varepsilon \partial_t A|_{t=0} = E^0 + \nabla_x \phi|_{t=0}, \\ \nabla \times A|_{t=0} = B^0 - \langle B^0 \rangle, \quad \langle A|_{t=0} \rangle = 0, \end{array} \right. \quad (1.5.12)$$

auquel on ajoute la définition suivante des champs électriques et magnétiques  $E_\varepsilon$  et  $B_\varepsilon$

$$\begin{aligned} E_\varepsilon &:= -\varepsilon \partial_t A - \nabla_x \phi, \\ B_\varepsilon &:= \nabla_x \times A + \langle B^0 \rangle. \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

On notera que ceci correspond à la condition initiale

$$f^0(x, d\xi) = \int_M \rho_\theta(0, x) \delta(\xi - \xi_\theta(0, x)) \mu(d\theta).$$

Comme cela est expliqué dans [66], plusieurs configurations peuvent être modélisées de la sorte, notamment

- les fonctions continues en  $x$  et  $\xi$ , en prenant  $(M, \mu) = (\mathbf{R}^3, \lambda \frac{d\theta}{1+\theta^2})$  (où  $\lambda > 0$  est choisi pour normaliser cette mesure),

$$\xi_\theta(0, x) = \theta, \quad \rho_\theta(0, x) = \pi(1 + \theta^2) f(t, x, \theta);$$

- les sommes finies de masses de Dirac en vitesse supportées en  $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{R}^3$ , ce qui correspond à une somme de données initiales mono-cinétiques.

Un calcul sans difficulté montre que la formule (1.5.8) rend les résolutions du système (1.5.10) et (1.5.12) équivalentes.

**Existence locale par une méthode de type Cauchy-Kowalevski.** Pour prouver l'existence locale de solutions faibles en  $\xi$  et fortes en  $x$  au système multi-fluide précédent on adapte la méthode employée par Grenier dans [66]. Il s'agit d'une méthode de point fixe de type Cauchy-Kowalevski inspirée de la reformulation qu'en propose Cafilich [32]. Avant d'énoncer le théorème, il nous faut définir la hiérarchie d'espaces de Banach avec lequel nous travaillons.

**Definition 1.5.10.** Pour  $\delta > 1$ ,  $B_\delta$  est l'espace des fonctions à valeurs réelles  $f$  sur  $\mathbf{T}^3$  telles que

$$|f|_\delta := \sum_{k \in \mathbf{Z}^3} |\mathcal{F}f(k)| \delta^{|k|} < +\infty,$$

où  $(\mathcal{F}f(k))$  sont les coefficients de Fourier de  $f$ . On désignera par  $\mathbb{B}_\delta$  l'espace des fonctions à valeurs vectorielles réelles  $h$  sur l'espace  $\mathbf{T}^3$  dont les composantes sont dans  $B_\delta$ . On gardera la notation  $|h|_\delta$  pour désigner la somme des normes  $|\cdot|_\delta$  des composantes de  $h$ .

Le second résultat principal du chapitre 4 est le suivant.

**Theorem 1.5.11.** Soit  $(M, \mu)$  l'espace de probabilité utilisé pour définir le système multi-fluides (1.5.12), soit  $\delta_0 > \delta_1 > 1$ , soit  $C_0 > 0$  et soit  $(\rho_\theta(0))_\theta$  une famille de  $B_{\delta_0}$ , et  $(\xi_\theta(0))_\theta$  et  $(E_\varepsilon^0, B_\varepsilon^0)$  deux familles de  $\mathbb{B}_{\delta_0}$  satisfaisant

$$\nabla \cdot E_\varepsilon^0 = \int_M \rho_\theta(0) d\mu(\theta), \quad \nabla \cdot B_\varepsilon^0 = 0,$$

et telles que

$$\begin{aligned} \sup_\theta |\rho_\theta(0)|_{\delta_0} &\leq C_0, \\ \sup_\theta |\xi_\theta(0)|_{\delta_0} &\leq C_0. \end{aligned} \tag{1.5.14}$$

On suppose aussi qu'il existe  $\gamma \in [0, 1]$ , tel que

$$|E_\varepsilon^0|_{\delta_0} + |B_\varepsilon^0|_{\delta_0} \leq C_0 \varepsilon^{-\gamma}. \tag{1.5.15}$$

Alors, il existe une constante  $\varepsilon_0 > 0$ , et une constante  $T > 0$ , telles que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , il existe des fonctions  $(\rho_\theta^\varepsilon)_\theta$  dans  $C([0, T], B_{\delta_1})$ , et  $(\xi_\theta^\varepsilon)_\theta$  dans  $C([0, T], \mathbb{B}_{\delta_1})$ , solutions de (1.5.12) avec les données initiales  $(\rho_\theta(0))_\theta, (\xi_\theta(0))_\theta, (E_\varepsilon^0, B_\varepsilon^0)$ .

De plus, les solutions satisfont les estimations uniformes suivantes : il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ,

$$\sup_{\theta} |\rho_{\theta}^{\varepsilon}|_{L^{\infty}(0, T; B_{\delta_1})} + \sup_{\theta} |\xi_{\theta}^{\varepsilon}|_{L^{\infty}(0, T; B_{\delta_1})} \leq C \quad (1.5.16)$$

$$|E_{\varepsilon}|_{L^{\infty}(0, T; B_{\delta_1})} + |B_{\varepsilon}|_{L^{\infty}(0, T; B_{\delta_1})} \leq C\varepsilon^{-\gamma}. \quad (1.5.17)$$

Nous montrons de plus que les solutions obtenues dans le Théorème 1.5.11 satisfont les conditions requises par le Théorème 1.5.7.

## 1.6 Perspectives

Nous abordons dans cette ultime section les améliorations et les perspectives qui sont susceptibles d'être entamées à la suite des travaux précédemment exposés.

### 1.6.1 Généralisation des résultats du Chapitre 3 au cas $\Omega = \mathbf{R}^3$

La méthode itérative aboutissant au système (1.4.9) ne dépend pas de l'espace physique dans lequel on aura choisi de se placer. Toutefois, la preuve de l'existence locale de solutions fortes pour ce système repose sur la théorie établie dans un cadre plus général par Han-Kwan dans [69]. Or elle y est développée dans le cas du tore  $\mathbf{T}^3$ . Il faudrait donc modifier la preuve par une méthode de point fixe pour l'adapter au cas  $\Omega = \mathbf{R}^3$ . La preuve du taux de convergence devrait être modifiée dans les mêmes proportions mais est essentiellement le fruit de la structure du système (1.4.9).

### 1.6.2 Amortissement radiatif

Les développements post-Newtoniens effectués par Bauer et Kunze[19] ont été en partie motivés par l'obtention du modèle d'approximation suivant Vlasov-Darwin (que l'on dénommerait VD-2) afin de justifier des phénomènes d'amortissement radiatifs [16–18]. On sait qu'une particule chargée qui accélère perd de l'énergie par émission d'un champ radiatif (voir [137]). Ce phénomène, lorsque l'on utilise un système d'équations non complètement relativiste pour décrire un phénomène électromagnétique, se manifeste pour la première fois à l'ordre  $\varepsilon^4$  [16; 137].

Dans le cas d'un plasma non-collisionnel à deux espèces de charges opposées, de densités respectives  $(f^+, f^-)$ , on peut définir le dipôle,

$$D(t) := \int_{\mathbf{R}^3} x \left( \int_{\mathbf{R}^3} f^+(t, x, \xi) - f^-(t, x, \xi) d\xi \right) dx.$$

On dénotera par  $\mathcal{E}_r$  la quantité d'énergie d'un système contenue dans une boule de rayon  $r$ , c'est à dire

$$\mathcal{E}_r(t) = \int_{|x| \leq r} e(t, x) dx,$$

où  $e$  désigne la densité d'énergie. Pour le système de Vlasov-Maxwell en particulier,

$$e(t, x) = \int_{\mathbf{R}^3} \sqrt{\varepsilon^4 + |\xi|^2} (f^+ + f^-)(t, x, \xi) d\xi + |E(t, x)|^2 + |B(t, x)|^2.$$

On peut alors montrer [18] que pour des solutions adéquates du système de Vlasov-Maxwell (isolées des radiations entrantes, ce qui revient à ne considérer que la partie "retardée" de

la solution de l'équation des ondes que satisfait (E, B) [16; 18]), lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, la part de l'énergie qui se dissipe par radiation est  $\frac{2\varepsilon^3}{3} \left| \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{D}(t) \right|^2$ . Autrement dit, pour tout  $t \in \mathbf{R}$  tel que  $|t - r\varepsilon| \leq 1$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 et  $r$  vers  $+\infty$ , on a l'équivalence suivante

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_r(t) \sim \frac{2\varepsilon^3}{3} \left| \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{D}(t) \right|^2.$$

Motivé par ce résultat, Bauer [16] introduit un système semi-relativiste similaire à celui de Vlasov-Poisson mais dont le champ de force est corrigé d'un terme de réaction dû aux radiations.

Après avoir adapté notre méthode au cas d'un système à deux espèces posé sur  $\Omega = b\mathbf{R}^3$ , il pourrait être intéressant de voir dans quelle mesure il est possible de reconnaître les termes qui sont liés aux phénomènes de radiation.

### 1.6.3 Faire usage de l'approximation d'ordre élevé pour l'analyse numérique du système de Vlasov-Maxwell

Pour des raisons précédemment évoquées, il semble que l'analyse numérique des systèmes de type Vlasov-Elliptique est plus commode que celle de Vlasov-Maxwell, du fait qu'elle ne nécessite pas de conditions CFL et donc de contraintes sur les pas de temps. En effet une partie des recherches sur les modèles d'approximation non relativiste, ou *basse-fréquence* dans la littérature numérique, a été effectuée dans le but de produire des simulations numériques (voir les articles de Degond et Raviard et Sonnendrücker ou ceux de McGillen [39; 109; 110; 123]). Des codes numériques aboutis ont été mis au point pour le système de Vlasov-Darwin [22; 35] et il pourrait être intéressant de voir dans quelle mesure ces méthodes peuvent s'appliquer à notre système d'approximation d'ordre arbitrairement élevé.

Il pourrait également être intéressant de comparer notre approche avec celle utilisée pour produire le modèle de Poisswell, introduit dans le cadre de la mécanique quantique [107], qui semble être l'analogue de l'approximation de Vlasov-Darwin pour la jauge de Lorentz. Il y a cependant des raisons de penser que la difficulté technique pour développer un modèle d'approximation d'ordre arbitrairement élevé avec la jauge de Lorentz serait plus conséquente. En effet, la jauge de Lorentz s'écrit,

$$\varepsilon \partial_t \phi + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

et il serait alors nécessaire de considérer également le développement en  $\varepsilon$  du terme  $\varepsilon \partial_t \phi$ . De plus, le potentiel  $\phi$  ne satisfait plus une équation de Poisson mais une équation des ondes et il faudrait alors procéder à la même méthode de troncature que celle que l'on utilise pour le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ .

### 1.6.4 Affaiblissement de la condition sur $\rho^{\text{VM}}$ dans le Théorème du Chapitre 5

Nous l'avons expliqué, le point de départ de notre étude de la limite non-relativiste du système de Vlasov-Maxwell est l'article de Loeper [103]. Loeper y démontre un résultat d'unicité pour le système de Vlasov-Poisson sous la condition de finitude de  $\|\rho^{\text{VP}}\|_{L^\infty}$ . Or ce résultat a depuis été amélioré par Miot et Holding dans [78; 111]. Ils y démontrent

que l'on peut remplacer la condition de borne uniforme par une condition de croissance linéaire en  $p$  des normes  $\|\rho^{VP}\|_{L^p}$ .

On peut donc se demander s'il est également possible de transposer les techniques employées par Holding et Miot dans le cadre de l'étude non-relativiste.



## Chapitre 2

# Non-Resonant system coupling Vlasov and transport equations.

This chapter is a collaboration with F.Golse.

### **Abstract :**

This chapter tackles the Cauchy problem for a coupled system of PDEs close to the Vlasov-Maxwell system. We study a toy-model where the Maxwell equations are replaced by a collection of transport equations. The goal is to illustrate the key argument of the seminal work of Glassey and Strauss [56] about formation of singularities for strong solutions to the Vlasov-Maxwell system. To this end we make use of the formalism settled by Bouchut, Golse, and Pallard in [26].

### **Résumé :**

Ce chapitre traite du problème de Cauchy pour un système d'EDPs couplées proche du système de Vlasov-Maxwell. On étudie un modèle jouet où les équations de Maxwell sont remplacées par une famille d'équations de transport. Le but est d'illustrer l'argument clé du travail fondateur de Glassey et Strauss [56] sur la formation de singularités pour les solutions fortes du système de Vlasov-Maxwell. A cette fin on utilise le formalisme mis en place par Bouchut, Golse et Pallard dans [26].

## Contents

---

<b>2.1 Introduction . . . . .</b>	<b>42</b>
2.1.1 The Toy-Model and the Vlasov Maxwell system . . . . .	42
2.1.2 Motivation of the Model . . . . .	45
2.1.3 Main results . . . . .	47
2.1.4 Outline of the paper . . . . .	49
<b>2.2 Global existence of weak solutions : proof of Theorem 2.1.2. . . . .</b>	<b>50</b>
2.2.1 Conservation of the energy and a priori bounds . . . . .	50
2.2.2 Weak limit . . . . .	52
2.2.3 Compactness and averaging lemma . . . . .	53
2.2.4 Continuity in time with respect to the weak topologies . . . . .	55
<b>2.3 Local classical solvability : proof of Theorem 2.1.4. . . . .</b>	<b>55</b>
2.3.1 Glassey-Strauss criterion . . . . .	55
2.3.2 The initial value problem. . . . .	60
<b>2.4 A larger class of adapted initial data : proof of Theorem 2.1.5. . . . .</b>	<b>62</b>
<b>2.5 A refined criterion : proof of Theorem 2.1.6 . . . . .</b>	<b>67</b>
2.5.1 Time integral of the force field. . . . .	67
2.5.2 An upper bound for $I_E$ . . . . .	67
<b>2.6 Appendix : Technical results . . . . .</b>	<b>69</b>
2.6.1 Estimates (2.3.5), (2.3.6) . . . . .	69
2.6.2 Homogeneous distributions and average of $B_i^k$ . . . . .	69

---

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 The Toy-Model and the Vlasov Maxwell system

This paper tackles the Cauchy problem for a coupled system of PDEs (Partial Differential Equations) close to the Vlasov-Maxwell system. These systems govern the evolution of a distribution function  $f(t, x, \xi)$  describing a system of identical particles interacting through electromagnetic forces,  $t \in [0, \infty)$  being the time variable,  $x \in \mathbf{R}^3$  the space variable, and  $\xi \in \mathbf{R}^3$  the momentum variable. More precisely, for any  $t \in [0, \infty)$ ,  $f(t, \cdot, \cdot)$  is the probability density of particles with phase-space coordinates  $(x, \xi) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ .

Such systems come from the study of magnetized collisionless plasma. The difference between them lies in the way the electromagnetic force is defined. One can look to the monography of Glassey [57] (in particular the chapters IV, V, VI) for an overview on the background of these kinetic equations.

For the sake of simplicity we consider a system with a single species of particles with charge and mass equal to one. For a given momentum  $\xi \in \mathbf{R}^3$ , the particles have a relativistic energy

$$e(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{1/2},$$

and a velocity

$$v(\xi) = \nabla e(\xi) = \frac{\xi}{(1 + |\xi|^2)^{1/2}}. \tag{2.1.1}$$



Their motion is governed by the Vlasov equation :

$$\partial_t f + v(\xi) \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_\xi f = 0,$$

where  $F$  designates the electromagnetic force. The evolution of the force  $F$  is then governed by a set of equations (depending then on the model one chooses) describing the interplay between the evolution of the macroscopic distribution of the charged particles and the electromagnetic force they collectively induce.

Such systems are well understood when the self-induced force  $F$  is the result of an elliptic equation, as in the Vlasov-Poisson system where one only considers the action of the electric field stemming from the Coulomb potential. The proof of the existence of global weak solutions for this system is due to Arseniev [2] and the uniqueness under certain conditions of such weak solutions has been proved by Robert and later by Loeper citeRobert-97,Loeper-2006). Since the seminal works of Lions and Perthame [40] and Pfaffelmoser [122] (see also [130] for a revisited and simplified proof) the initial value problem for strong solutions defined globally in times is solved.

When the force  $F$  is the Lorentz force produced by the electromagnetic field  $(E, B)$ , which is a solution to the Maxwell equations, the system takes the form

$$\begin{cases} \partial_t f + v(\xi) \cdot \nabla_x f + \left( E + \frac{v(\xi)}{c} \times B \right) \cdot \nabla_\xi f = 0, & t \in [0, \infty), x, \xi \in \mathbf{R}^3, \\ \partial_t E = c \nabla_x \times B - j_f, \\ \nabla \cdot E = \rho_f, \\ \partial_t B = -c \nabla_x \times E, \\ \nabla \cdot B = 0, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

where  $\nabla := (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$  is the standard derivation operator and  $\nabla \cdot$  and  $\nabla \times$  designate respectively the divergence and the rotational operators. Moreover,  $\rho_f(t, x)$  stands for the macroscopic density function of particles in the plasma, and  $j_f(t, x)$  for the current density vector, defined as following,

$$\rho_f(t, x) = \int_{\mathbf{R}^3} f(t, x, \xi) d\xi, \quad j_f(t, x) = \int_{\mathbf{R}^3} f(t, x, \xi) v(\xi) d\xi$$

The global existence of weak solutions to the system of Vlasov-Maxwell is known since the work of DiPerna and Lions [40] (although their proof is done for the case of the nonrelativistic case, it is adaptable with minor changes, and the reader can find this adaptation in the very didactic paper of Rein [126]). At the same time, the existence locally in time of strong solutions has been proved by a fix point theorem in some Banach spaces in the simultaneous works of Degond [38] and Asano and Ukai [8]. Yet the main question of global existence of strong solutions in the whole space in the 3-dimension case is still open. One has nevertheless due to the seminal work of Glassey and Strauss [53] in 1987 a criterion under which a solution remains regular , a result which has been then reformulated in [25; 26; 94].

More precisely, given an initial data  $f^{ini} \in C_c^1(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$ , and initial electromagnetic fields  $E^{ini}, B^{ini} \in C^2(\mathbf{R}^3)$  satisfying the classical compatibility conditions associated to the Maxwell equations,

$$\nabla \cdot E^{ini} = \int f^{ini}(x, \xi) d\xi, \quad \nabla \cdot B^{ini} = 0,$$

we denote by  $f \in C^1([0, T_{max}) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$  the corresponding classical solution to the initial value problem to (2.1.2) and the size of the support in the momentum variable of  $f$  by

$$R_f(t) := \inf\{r \geq 0, \text{supp}(f(s, x, \cdot)) \subset B(0, r), \forall (s, x) \in [0, t] \times \mathbf{R}^3\}. \quad (2.1.3)$$

Glassey and Strauss showed that a classical solutions remains regular as long as the size of the support is bounded :

$$\limsup_{t \rightarrow T_{max}^-} (\|f(t, \cdot, \cdot)\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)} + \|(E, B)(t, \cdot)\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)}) = +\infty \implies \limsup_{t \rightarrow T_{max}^-} R_f(t) = +\infty.$$

After this pioneering work, several conditions under which a solution remains regular have been found. It was first found by Glassey and Strauss in [55] that is was enough to bound uniformly the kinetic energy density :

$$\limsup_{t \rightarrow T_{max}^-} R_f(t) \implies \limsup_{t \rightarrow T_{max}^-} \left\| \int_{\mathbf{R}^3} \sqrt{1 + |\xi|^2} f(t, \cdot, \xi) d\xi \right\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} = +\infty.$$

In [116; 136], it has been shown that for any  $\theta \geq 4/p$  and  $6 \leq p \leq +\infty$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow T_{max}^-} R_f(t) \implies \limsup_{t \rightarrow T_{max}^-} \left\| \int_{\mathbf{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{\theta/2} f(t, \cdot, \xi) d\xi \right\|_{L^p(\mathbf{R}^3)} = +\infty.$$

Finally, in [119], Pallard proved that controlling the  $L^6$  norm of the macroscopic density is enough, namely,

$$\limsup_{t \rightarrow T_{max}^-} R_f(t) \implies \limsup_{t \rightarrow T_{max}^-} \|\rho_f(t, \cdot)\|_{L^6(\mathbf{R}^3)} = +\infty.$$

It remains insufficient to obtain the global existence since, as we shall see later, one only have estimates on the  $L^{4/3}$  of the macroscopic density of a given classical solution.

The main difference between the Vlasov-Poisson system and the Vlasov-Maxwell system is that the system of Maxwell equations is hyperbolic. Thus there is no gain of regularity for the field  $(E, B)$ , compared to the sources  $\rho_f$  and  $j_f$ . Unlike the Poisson equation where the gradient of the field lives in the same  $L^p$ -space as  $\rho_f$  ( $1 < p < \infty$ ), by the Calderón-Zygmund continuity theorem for singular integrals (Theorem 4.12 in [45]).

The argument of Glassey-Strauss is based on the fact that, assuming the momentum support of the solution is bounded, the velocity  $v(\xi)$  of the particles remains in the interior of the wave cone of the Maxwell equations. Which means that micro-locally, in the region where the dynamics of the Vlasov equation are, the Maxwell equations is not hyperbolic anymore, yet elliptic. Then they are able to develop an integration by parts technique, writing all derivatives as a combination of the streaming operator

$$S := \partial_t + v(\xi) \cdot \nabla_x,$$

and the tangential operator to the wave cone

$$T_\omega = \omega \partial_t - \nabla_x.$$

The toy model we are working with in this article is the following coupled system

$$\begin{cases} \partial_t f + v(\xi) \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_\xi f = 0, & x, \xi \in \mathbf{R}^3, \\ (\partial_t + \omega \cdot \nabla_x) \phi(t, x, \xi, \omega) = -f(t, x, \xi), & \phi|_{t=0} = 0, \omega \in \mathbf{S}^2, \\ \mathcal{E}(t, x, \omega) = \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) \phi(t, x, \xi, \omega) d\xi, \\ E(t, x) = \int \mathcal{E}(t, x, \omega) d\omega, \end{cases} \quad (2.1.4)$$

where  $\int$  designates the normalized integral, that is

$$\int h d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} h d\omega.$$

In the following we will often denote by  $\mathbf{S}^2$  the 2-dimensional sphere  $\{\omega \in \mathbf{R}^3, |\omega| = 1\}$ .

The unknown of this coupled system is  $(f, \phi)$ , where

$$f \equiv f(t, x, \xi) \quad \text{and} \quad \phi \equiv \phi(t, x, \xi, \omega).$$

Moreover we will keep the same notations concerning the macroscopic density and the density of current,

$$\rho_f(t, x) = \int_{\mathbf{R}^3} f(t, x, \xi) d\xi, \quad j_f(t, x) = \int_{\mathbf{R}^3} f(t, x, \xi) v(\xi) d\xi. \quad (2.1.5)$$

The acceleration field  $E$  is computed in terms of a function  $\phi$  as described by (2.1.4). Loosely speaking it is a sum of transported moments of  $f$  over all the possible velocities lying on the unit sphere  $\mathbf{S}^2$ . The transport equation defining  $\phi$  is hyperbolic as the wave equation is but the underlying algebraic structure is easier to manipulate.

## 2.1.2 Motivation of the Model

This work aims to develop a series of results analogous to those already obtained in the context of the Vlasov-Maxwell system in [53], [25] to highlight the crucial arguments, needed in the hyperbolic case. To explain why we can replace the Maxwell equation by a simple transport equation we need to recall the key idea of the work of Bouchut, Golse and Pallard [25].

The authors first rephrase the Maxwell equations in terms of the Lienard-Wiechert potentials formulation (for a physical background see chapter VIII of [99] or the section 14.1 of [89]). To build these potentials we first consider the solution of the following wave equation

$$\begin{cases} \square_{ct,x} u_f = f(t, x, \xi), \\ u_f|_{t=0} = \partial_t u_f|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (2.1.6)$$

where

$$\square_{ct,x} = \frac{1}{c^2} \partial_{tt} - \Delta_x,$$

is the d'Alembert operator for waves propagating at speed  $c$ . The constant  $c$  is left in the equations to make appear the transport equation more naturally, yet eventually  $c$  will be

replaced with 1.

In fact all the information on the (non linear) interaction-part (E, B) is contained in  $u_f$ . The electromagnetic potential  $(\phi, A)$  is defined in the following way :

$$\varphi(t, x) = \int_{\mathbf{R}^3} u_f(t, x, \xi) d\xi, \quad A(t, x) = A^0(t, x) + \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) u_f(t, x, \xi) d\xi. \quad (2.1.7)$$

Then one obtains an electromagnetic field  $(E_f, B_f)$  by the usual formulas :

$$E_f = -\frac{1}{c^2} \partial_t A - \nabla_x \varphi, \quad B_f = \frac{1}{c} \nabla_x \times A. \quad (2.1.8)$$

The term  $A^0$  is added to fit the initial conditions :

$$\square_{ct, x} A^0 = 0, \quad A^0|_{t=0} = A_I, \quad \partial_t A^0|_{t=0} = -c^2 E^{ini}, \quad (2.1.9)$$

with  $A_I$  defined by the conditions

$$\nabla_x \cdot A_I = 0, \quad \nabla_x \times A_I = c B^{ini}. \quad (2.1.10)$$

This construction makes sense in view of the following result

**Lemma 2.1.1.** *If we consider  $(f, E, B)$  a  $C^1$  solution of the system of Vlasov-Maxwell on  $[0, T] \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ , with  $T > 0$ , and  $(f, E, B)|_{t=0} = (f^{ini}, E^{ini}, B^{ini}) \in C^1(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) \times C_c^2(\mathbf{R}^3)$  satisfying*

$$\nabla_x \cdot B^{ini} = 0, \quad \nabla_x \cdot E^{ini} = \int_{\mathbf{R}^3} f^{ini} d\xi,$$

then  $(E_f, B_f) = (E, B)$ .

With this formulation, estimating the  $W^{1, \infty}$ -norm of  $(E, B)$  means estimating the second derivatives of  $u_f$ .

To do so one introduces the fundamental solution  $Y$  of the d'Alembert operator defined as the solution of

$$\square_{t, x} Y = \delta_{(t, x) = (0, 0)}, \quad \text{supp } Y \subset \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3,$$

where  $\text{supp}$  stands for the support of the tempered distribution  $Y$ . In space dimension 3 this solution is given by the Kirchoff formula

$$Y(t, x) = \frac{\mathbf{1}_{t > 0}}{4\pi c^2 t} \delta(|x| - ct). \quad (2.1.11)$$

Estimating the derivatives of  $u_f$  finally leads to control the derivatives of  $Y$ . This is the approach chosen by the authors of [25]. With that approach, the ingenious integration by parts argument in the seminal work of Glassey-Strauss [53] is a consequence of certain properties of the fundamental solution  $Y$  of the wave equation.

The key idea in [25] is to represent all derivatives of the form  $\partial_x^\alpha \partial_t^\beta Y$  with  $|\alpha| + |\beta| \leq 2$  as linear combinations of  $S^k Y$  for  $k = 0, 1, 2$ , with smooth (in  $(t, x)$ ) coefficients.

For  $j = 1, 2, 3$  we define the Lorentz boosts as

$$L_j := \frac{x_j}{c} \partial_t + ct \partial_{x_j},$$

and we observe that these operators commute with the d'Alembert operator

$$[\square, L_j] = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Together with the relation

$$L_j \delta_{(t,x)=(0,0)} = 0,$$

it implies that

$$L_j Y = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

A suitable combination of these relations

$$\sum_{i=1}^3 x_i L_i Y = 0$$

leads to the right integration by parts. It yields indeed to

$$\frac{|x|^2}{c} \partial_t Y + \sum_{i=1}^3 ct x_i \partial_{x_i} Y = 0$$

which can be formally simplified in

$$\partial_t Y + \frac{ct}{|x|} \frac{cx}{|x|} \cdot \nabla_x Y = 0,$$

with the condition

$$\text{supp } Y(t, \cdot) \subset \{|x| = ct\}.$$

At this point one only uses that  $Y$  satisfies a transport equation with a velocity field of norm  $c$ . For that reason, in (2.1.4), the governing equation for the field is taken right away in the form of a transport equation with unit speed of propagation.

### 2.1.3 Main results

In the first section we recall the standard steps used to obtain the existence of weak solutions, with an initial distribution

$$f|_{t=0} := f^{ini} \in L^1(\mathbf{R}^6) \cap L^\infty(\mathbf{R}^6) \cap L^1_{kin}(\mathbf{R}^6), \quad (2.1.12)$$

with  $L^1_{kin}(\mathbf{R}^6)$  the set of functions with finite kinetic energy

$$L^1_{kin}(\mathbf{R}^6) := \left\{ f \in L^1(\mathbf{R}^6), \quad \sqrt{1 + |\xi|^2} f^{ini} \in L^1(\mathbf{R}^6) \right\}. \quad (2.1.13)$$

The statement of the theorem and its proof follow the compactness arguments used in in [40] and [126] on the original Vlasov-Maxwell system.

**Theorem 2.1.2.** *Let  $f^{ini} \geq 0$  be an initial data such that condition (2.1.12) holds, then a weak solution  $(f, \phi)$  of (2.1.4) exists, satisfying*

$$f \in C_b([0, \infty), L^\infty(\mathbf{R}^6) - w^*), \quad \phi \in C_b([0, \infty) L^\infty(\mathbf{R}^6 \times \mathbf{S}^2) - w^*), \quad (2.1.14)$$

and

$$j_f \in C_b([0, \infty), L^{4/3}(\mathbf{R}^3) - w), \quad E \in C_b([0, \infty), L^2(\mathbf{R}^3) - w).$$

Moreover, the energy of the system remains finite : for all  $t \geq 0$  one has

$$\mathfrak{E}(t) := \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} e(\xi) f(t, x, \xi) dx d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |E(t, x)|^2 dx \leq \mathfrak{E}(0). \quad (2.1.15)$$

**Remark 2.1.3.** *Even formally,  $\mathfrak{E}(t)$  is not conserved , contrary to the energy in the case of the Vlasov-Maxwell system. In fact this is the quantity*

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} e(\xi) f(t, x, \xi) dx d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\mathcal{E}(t, x, w)|^2 dx dw$$

which is formally conserved. In virtue of the Jensen inequality, we loose the conservation for  $\mathfrak{E}$ . Besides, the quantity formally conserved is only bounded by its initial value when we take the limit in the compactness method.

Secondly we establish a criterion, analogous to the one used by Glassey and Strauss in [53], making the continuation of local (in time) classical ( $C^1$ ) solution of (2.1.4) possible.

Given a smooth solution  $(f, E)$  to (2.1.4) with a bounded momentum support, we recall the definition of the size of the  $\xi$ -support (2.1.3)

$$R_f(t) := \inf\{r \geq 0, \text{supp}(f(s, x, \cdot)) \subset B(0, r), \forall (s, x) \in [0, t] \times \mathbf{R}^3\}.$$

**Theorem 2.1.4.** *Let  $(f, \phi) \in C^1([0, T] \times \mathbf{R}^6) \times C^1([0, T] \times \mathbf{R}^6 \times \mathbf{S}^2)$  be a classical solution to (2.1.4), we have the following continuation criterion*

$$\limsup_{t \uparrow T} R_f(t) < \infty \implies \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ x, \xi \in \mathbf{R}^3}} (|\nabla_{t,x,\xi} f(t, x, \xi)| + |\nabla_{t,x,\xi,\omega} \phi(t, x, \xi, \omega)|) < \infty.$$

It follows that, given an initial positive data  $f^{ini} \in C_c^1(\mathbf{R}^6)$ , there is  $T > 0$ , such that there exists a unique strong solution

$$(f, \phi) \in W^{1,\infty}([0, T] \times \mathbf{R}^6) \times W^{1,\infty}([0, T] \times \mathbf{R}^6 \times \mathbf{S}^2)$$

to the system (2.1.4).

Based on the same approach, we prove a local in time regularity result which does not need to assume the compactness of the momentum support of the initial data, yet good decay property in  $|\xi|$ . This is indeed closer to what is expected in physical settings, for instance a Maxwellian distribution (see paragraph 29 of [98] for the physical background), namely

$$f^{ini}(x, \xi) = h(x) f^{ini}(x, \xi) = h(x) \exp(-C\sqrt{1 + |\xi|^2}),$$

with  $h$  a sufficiently smooth function.

Let precise the notion of good property of decay in the variable  $|\xi|$ . We will denote by  $p \in C^1(\mathbf{R})$  the weight function used to control this decay of the initial data. We make the following assumptions on  $p$  :

$$0 \leq p \leq 1, \quad p' \leq 0, \quad \text{and} \quad p(r) = O(r^{-\alpha}) \quad \text{with} \quad \alpha > 7.$$

The local existence of classical solution result is then the following.

**Theorem 2.1.5.** *Suppose we are given  $f^{ini} \in C^1(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$ ,  $\phi|_{t=0} \equiv 0$  and*

$$\begin{cases} 0 \leq f^{ini}(x, \xi) \leq p(|\xi|), \\ |\nabla_{x, \xi} f^{ini}(x, v)| \leq p(|\xi|). \end{cases} \quad (2.1.16)$$

*Then, there is  $T > 0$  such that there exists a unique classical solution to the initial value problem associated to the system of equations (2.1.4)  $(f, \phi) \in W^{1, \infty}((0, T) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) \times W^{1, \infty}((0, T) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2)$ .*

In view of reducing the problem of global classical solvability, we revisit the method used by Pallard in[121], and prove that a control of a Lebesgue norm of the macroscopic density  $\rho_f$  is sufficient to prove the boundedness of the momentum support. Our last theorem is the following.

**Theorem 2.1.6.** *Suppose we are given a non-negative initial data  $f^{ini} \in C_c^1(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$ . Let  $f \in C^1([0, T_{max}) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$  be the corresponding classical solution to the initial value problem associated to (2.1.4) and let  $\rho$  and  $R_f$  a defined in (2.1.5) and (2.1.3). Then we have,*

$$\limsup_{t \rightarrow T_{max}^-} R_f(t) \implies \limsup_{t \rightarrow T_{max}^-} \|\rho_f(t, \cdot)\|_{L^3(\mathbf{R}^3)} = +\infty.$$

**Remark 2.1.7.** *One can observe that we manage to obtain a condition on the  $L^3$  norm and not the  $L^6$  norm as in the Vlasov-Maxwell case. This is due to the simpler structure of the equation ruling the evolution of the field  $\mathcal{E}$ . The estimates will need a use of less Hölder inequality compare to the Vlasov-Maxwell case. However the exponent 3 remains far from the exponent  $4/3$  and we are not able to prove the global classical solvability problem.*

## 2.1.4 Outline of the paper

In the sequel, we shall work with regularized systems, meaning that we regularize the field  $E$ , and the source term in the transport equation governing the evolution of  $\phi$ , by using a sequence of mollifiers. A mollifying sequence is built in the following standard way : one takes a non-negative function  $d \in C_c^\infty(\mathbf{R}^d)$  (the space of smooth compactly supported functions), radially symmetric and satisfying

$$\int_{\mathbf{R}^3} d(x) = 1,$$

and  $d_n$  is defined by the following formula

$$d_n(x) = n^d d\left(\frac{x}{n}\right), n \geq 1.$$

The sequence of regularized systems is then the following

$$\begin{cases} \partial_t f_n + v(\xi) \cdot \nabla_x f_n + E_n \cdot \nabla_\xi f_n = 0, \\ (\partial_t + \omega \cdot \nabla_x) \phi_n = -f_n(t, x, \xi) \star_x d_n \star_x d_n, \\ \mathcal{E}_n(t, x, \omega) = \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) \phi_n(t, x, \xi, \omega) d\xi, \\ E_n(t, x) = \int \mathcal{E}_n(t, x, \omega) d\omega, \\ f|_{t=0} = f_n^0 := ((f^{ini} \star_\xi d_n) \star_x d_n) \chi_n. \end{cases} \quad (\text{TMn})$$

The symbols  $\star_x$  and  $\star_\xi$  respectively designate the convolution product with respect to the variable  $x$  and  $\xi$ , and by  $\chi_n \in C_c^\infty(\mathbf{R}^6)$  a cut-off function constantly equal to 1 on  $[0, n]$ . The reason for making a double convolution in the equation defining  $\phi_n$  is technical, needed for the energy conservation and will be explained in detail in 2.2.1.

One knows by standard arguments —that can be found in [21] for instance (in the context of Vlasov-Darwin, or in the work of Horst for the Vlasov-Maxwell system [79])— that there exists a smooth global in time solution  $(f, \phi) \in C_c^1([0, \infty) \times \mathbf{R}^6) \times C^1([0, \infty) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2)$  to this system. Assuming that the index  $n$ , the mollifier  $d_n$  and  $\chi$  are fixed, we prove some a priori estimates that are uniform in  $n \geq 1$ .

The proof of Theorem 2.1.2 uses the conservation of energy and an interpolation inequality that enable us to control some  $L^p$  norms of  $f$ ,  $E$ ,  $j$  and then to take a weak limit of our sequence of approximate solutions. To pass to the limit in the nonlinear term, we use the weak compactness of one factor and prove strong compactness for the other factor with the help of the velocity averaging lemma (see [64] for a generic version of averaging lemmas and the section 3 of [40] for its application in the context of Vlasov equations).

Theorem 2.1.4 and Theorem 2.1.5 are proved with the Glassey-Strauss integration by parts technique. As in [53], the key argument in this proof is the separation between the characteristic curves of the Vlasov equation and those of the transport equation satisfied by  $\phi$ .

The proof of Theorem 2.1.6 is very similar to the one of [119], but requires less computations. The idea is to estimate the integral over a period of time of the force field against the velocity field along the characteristic curves.

## 2.2 Global existence of weak solutions : proof of Theorem 2.1.2.

### 2.2.1 Conservation of the energy and a priori bounds

One assumes in this section that one already has a smooth solution  $(f, \phi) \in C_c^1([0, \infty) \times \mathbf{R}^6) \times C^1([0, \infty) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2)$  of the system (2.1.4), provided with a non negative initial data  $f^0 \in C_c^1(\mathbf{R}^6)$ ; and one will then prove that certain quantities remain bounded through the dynamics.

Firstly, since  $f$  satisfies a transport equation whose transport field  $(v(\xi), E(t, x))$  is a divergence-free vector field, one can say by the Liouville theorem (stating that the phase-space volume is preserved by such a flow) that

$$0 \leq \|f(t, \cdot, \cdot)\|_{L^p(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)} \leq \|f^0(\cdot, \cdot)\|_{L^p(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)} \quad \text{for any } 1 \leq p \leq \infty, \text{ for all } t \geq 0.$$

Secondly one shall prove by a sequence of formal computations, that the energy of the system, defined by

$$\mathfrak{E}(t) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} e(\xi) f(t, x, \xi) dx d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |E(t, x)|^2 dx,$$

decreases in time.



We will denote by

$$\mathfrak{E}_{cin}(t) := \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} e(\xi) f(t, x, \xi) dx d\xi,$$

the total kinetic energy of our system.

A standard computation using the Vlasov equation leads to

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathfrak{E}_{cin}(t) &= - \int_{\mathbf{R}^3} j_f(t, x) \cdot E(t, x) dx, \\ &= - \int_{\mathbf{R}^3} j_f(t, x) \cdot \mathcal{E}(t, x, \omega) dx d\omega. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Then multiplying the equation of (2.1.4) defining  $\phi$  by  $v(\xi)$ , and integrating with respect to  $\xi$ ,

$$\partial_t \mathcal{E}(t, x, \omega) + \omega \cdot \nabla_x \left( \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) \phi(t, x, \xi, \omega) d\xi \right) = -j_f(t, x), \quad (2.2.2)$$

is obtained, and then it comes that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^3} -j_f \cdot \mathcal{E} dx d\omega &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\mathcal{E}(t, x, \omega)|^2 dx d\omega \right) + \int_{\mathbf{R}^3} \omega \cdot \left( \int_{\mathbf{R}^3} \nabla_x |\mathcal{E}(t, x, \omega)|^2 dx \right) d\omega, \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\mathcal{E}(t, x, \omega)|^2 dx d\omega \right). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Finally, it implies

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} e(\xi) f(t, x, \xi) dx d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\mathcal{E}(t, x, \omega)|^2 dx d\omega \right) = 0.$$

By the Jensen inequality we deduce that the energy of the system (sum of the kinetic energy and the electromagnetic energy) remains bounded :

$$\mathfrak{E}(t) := \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} e(\xi) f(t, x, \xi) dx d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |E(t, x)|^2 dx \leq C. \quad (2.2.4)$$

A result that one can summarize in the following lemma :

**Lemma 2.2.1.** *Let  $(f, E)$  be a classical solution to (2.1.4) with initial data  $f^0 \in C_c^\infty(\mathbf{R}^6)$  non-negative, as long as this solution exists, its energy and the quantities  $\|f(t, \cdot)\|_{L^p}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , are bounded by some constant  $C$  independent of the time*

$$\frac{1}{2} \iint_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} e(\xi) f(t, x, \xi) dx d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |E(t, x)|^2 dx \leq C < \infty. \quad (2.2.5)$$

An interpolation argument gives the boundedness in some Lebesgue space of the macroscopic density  $\rho_f$  :

$$\begin{aligned} \rho_f(t, x) &= \int_{|x| \leq R} f(t, x, \xi) d\xi + \int_{|\xi| > R} f(t, x, \xi) d\xi \\ &\leq \frac{4\pi}{3} R^3 \|f(t)\|_{L^\infty} + R^{-1} \int_{\mathbf{R}^3} e(\xi) f d\xi, \\ &\leq C \left( \int_{\mathbf{R}^3} e(\xi) f(t, x, \xi) d\xi \right)^{3/4}, \end{aligned}$$

the result being a consequence of a suitable choice of  $R$  :

$$R = \left( \frac{\int_{\mathbf{R}^3} e(\xi) f(t, x, \xi) d\xi}{\|f(t)\|_{L^\infty}} \right)^{1/4}.$$

Moreover, as we are in the relativistic case,  $v(\xi) \leq 1$ , the density of current  $j$  is dominated by  $\rho_f$ , and one has therefore the same estimate on  $j$ . We can gather these two estimates in the following lemma :

**Lemma 2.2.2.** *For any solution satisfying the conditions of Lemma 2.2.1, the following estimates on the first moments of  $f$  hold*

$$\|\rho_f(t)\|_{4/3}, \|j_f(t)\|_{4/3} \leq C, \quad (2.2.6)$$

where the constant  $C$  only depends on the initial data.

In addition, as

$$\Phi(t, x, \xi, \omega) = - \int_0^t f(s, x + \omega(s-t), \xi) ds,$$

we immediately get that for any bounded interval  $I \subset [0, \infty)$ ,

$$\|\Phi\|_{L^2(I \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}_\omega^2)} \leq |I| \|f\|_{L^\infty}. \quad (2.2.7)$$

These estimates will be needed for the compactness argument in the following section.

## 2.2.2 Weak limit

This part is standard, but for the sake of completeness we will resume and adapt to our system the frame of what is done in [126], sections 3 – 5.

As mentioned in the Section 2.1.4, we consider a sequence of solutions  $(f_n, \phi_n)$  — which are known to exist — to the sequence of regularized systems described by (TMn). This sequence of solutions satisfy the estimates derived in the previous Section 2.2.1 uniformly in  $n$ . To simplify the notations, the density of current associated to  $f_n$  will be denoted by  $j_n$ .

By compactness arguments we can extract from this sequence a weak solution to the initial system (2.1.4). This is the purpose of the following proposition.

**Proposition 2.2.3.** *There are functions*

$$\begin{aligned} f &\in L^\infty([0, \infty), L^1_{kin} \cap L^\infty(\mathbf{R}^6)), \quad E \in L^\infty([0, \infty), L^2(\mathbf{R}^3)), \\ \mathcal{E} &\in L^\infty([0, \infty), L^2(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2)), \\ \rho_f, j_f &\in L^\infty([0, \infty), L^{4/3}(\mathbf{R}^3)), \\ \phi &\in L^2([0, \infty) \times \mathbf{R}^6 \times \mathbf{S}^2) \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

such that, up to a subsequence,

$$\begin{aligned} f_n &\rightharpoonup f \quad \text{in } L^2(I \times \mathbf{R}^6 - w), \\ E_n &\rightharpoonup E \quad \text{in } L^2(I \times \mathbf{R}^6 - w), \quad \mathcal{E}_n \rightharpoonup \mathcal{E} \quad \text{in } L^2(I \times \mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}^3 - w), \\ j_n &\rightharpoonup j_f \quad \text{in } L^{4/3}(I \times \mathbf{R}^3 - w), \\ \phi_n &\rightharpoonup \phi \quad \text{in } L^2(I \times \mathbf{R}^6 \times \mathbf{S}^2 - w) \end{aligned}$$

for every bounded interval  $I \subset \mathbb{R}$ ,

$$f \geq 0, \quad j_f = \int_{\mathbb{R}^3} v(\xi) d\xi \quad a.e$$

and the transport equation (2.2.2) is satisfied by  $\mathcal{E}$ .

For almost every  $t \in [0, \infty)$ , the energy of  $(f(t), E(t))$ ,

$$\mathfrak{E}(t) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} e(\xi) f(t, x, \xi) dx d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E(t, x)|^2 dx$$

is bounded by its initial value.

The existence of a weakly-convergent subsequence is a consequence of the Banach-Alaoglu theorem and the uniform estimates (2.2.5), (2.2.6), (2.2.7). The fact that one can choose the sequence independantly of the interval  $I$  follows from a diagonal extraction argument.

Otherwise the transport equation defining  $\mathcal{E}$  is linear and

$$d_n \star_x d_n \star_x j_n \rightarrow j_f$$

in  $\mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$  (see Theorem 6.32 in [128] for instance), so that the limits  $\mathcal{E}$  and  $f$  satisfy (2.2.2) in the sense of distributions. Likewise,

$$\partial_t f_n + \operatorname{div}_x(v(\xi) f_n) \rightarrow \partial_t f + \operatorname{div}_x(v(\xi) f)$$

in  $\mathcal{D}'((0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ .

### 2.2.3 Compactness and averaging lemma

This paragraph deals with the limit of the non-linear term of the Vlasov equation, which is the main difficulty of the method. More precisely, one has to prove that for all  $\phi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^6)$ ,

$$\iiint_{I \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} (E_n(t, x) \cdot \nabla_\xi \phi(t, x, \xi, \omega) f_n(t, x, \xi)) dt dx d\xi \rightarrow \iiint_{I \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} (E(t, x) \cdot \nabla_\xi \phi(t, x, \xi, \omega) f(t, x, \xi)) dt dx d\xi$$

up to the choice of a subsequence.

By a classical argument of density on the test functions, one can separate the variables and restrict itself to the case where

$$\phi(t, x, \xi) = \phi_1(t, x) \phi_2(\xi).$$

To prove the convergence of the nonlinear term we will prove that one factor converges in fact strongly in  $L^2$ . Namely, we will obtain the desired convergence once proved that, for all open bounded interval

$$I \subset [0, \infty), \quad \mathbf{B}_R := \{\xi, |\xi| \leq R\}, \quad \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3),$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi(\xi) f_n(\cdot, \cdot, \xi) d\xi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\xi) f(\cdot, \cdot, \xi) d\xi \quad \text{strongly in } L^2(I \times \mathbf{B}_R) \quad (2.2.9)$$

up to the choice of a subsequence.

The crucial tool at this step is the averaging lemma (or velocity averaging lemma), a draft of which can be the following (see Lemma 5.1 in [126])

**Lemma 2.2.4.** *Let  $R > 0$  and  $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{B}_R)$ . There is a constant  $C > 0$  such that for all functions*

$$h, g_0, g_1 \in L^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{B}_R),$$

*satisfying in  $\mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{B}_R)$  the inhomogeneous transport equation :*

$$\partial_t h + v(\xi) \cdot \nabla_x h = g_0 + \operatorname{div}_\xi g_1 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3), \quad (2.2.10)$$

*we have*

$$\left\| \int_{\mathbf{R}^3} \psi(\xi) h(\cdot, \cdot, \xi) d\xi \right\|_{H^{1/4}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3)} \leq C \left( \|h\|_{L^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{B}_R)} + \|g_0\|_{L^2(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)} + \|g_1\|_{L^2(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)} \right).$$

One can not directly apply the previous lemma to the system because the function  $h$  is defined on the whole  $\mathbf{R}$  (which is necessary for the proof of the averaging lemma, whose proof requires the Fourier transform), and this is not the case of the functions  $f_n$ .

We consider an open bounded interval

$$I \subset [0, \infty), \psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^3) \text{ and } R > 0,$$

such that,

$$\operatorname{supp}(\psi) \subset \mathbf{B}_R.$$

We also pick a truncation function  $\zeta \in C_c^\infty(\mathbf{R})$  such that,

$$0 \leq \zeta \leq 1 \text{ and } \zeta|_I = 1,$$

and we define

$$\tilde{f}_n(t, x, \xi) := \zeta(t) f_n(t, x, \xi).$$

The Vlasov equation under the conservative form can be rewritten as

$$\partial_t \tilde{f}_n + v(\xi) \cdot \nabla_x \tilde{f}_n = g_0 + \nabla_\xi \cdot g_1,$$

with

$$g_0 = \zeta' f_n, \quad g_1 = E_n \zeta f_n.$$

According to the inequality (2.2.7), the  $L^2$  norms of the previous functions are uniformly bounded in  $n$ ; which implies by the average lemma that

$$\left\| \int_{\mathbf{R}^3} \psi(\xi) \tilde{f}_n(\cdot, \cdot, \xi) d\xi \right\|_{H^{1/4}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3)} \leq C,$$

with  $C$  a uniform bound in  $n$ . Yet, on the bounded open set  $I \times \mathbf{B}_R$  the Rellich theorem ensures that the embedding

$$H^{1/4}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \quad , \text{ for any bounded regular set } \Omega \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3,$$

is compact. The function  $\zeta$  having been chosen so that  $\tilde{f}_n$  is equal to  $f_n$  on  $I \times \mathbf{B}_R$ , we have shown that the limit (2.2.9) holds.

## 2.2.4 Continuity in time with respect to the weak topologies

In order to justify that the weak solution  $(f, \phi)$  satisfies the initial conditions to complete the proof of Theorem 2.1.2), one needs to prove that there is some continuity properties with respect to the time  $t$ . We will only consider the case of  $f$  since the arguments for all the other functions,  $\phi, \mathcal{E}, E$  are similar.

By integrating in time the Vlasov equation in divergence form satisfied by  $f_n$ , we obtain

$$f_n(t, x, \xi) = f^{ini}(x, \xi) + \int_0^t (\nabla_x \cdot (f_n(s, x, \xi)v(\xi)) + \nabla_\xi \cdot (f_n(s, x, \xi)E(s, x))) ds.$$

We then multiply then by a test function  $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^6)$  and integrate with respect to  $x$  and  $\xi$ . After an integration by parts, one obtains :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} f_n(t, x, \xi) \psi(x, \xi) dx d\xi &= \iint_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} f^{ini}(x, \xi) \psi(x, \xi) dx d\xi \\ &+ \int_0^t \iint_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} f_n(s, x, \xi) (v(\xi) \cdot \nabla_x \psi(x, \xi) + E(s, x) \cdot \nabla_\xi \psi(x, \xi)) dx d\xi ds. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

For  $t \in \mathbf{R}$ , one can prove, by taking the weak-limite as  $n \rightarrow \infty$  in (2.2.11), that the following relation defines a distribution  $\tilde{f}(t) \in D'(\mathbf{R}^6)$  :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}(t), \psi \rangle_{(\mathcal{D}', \mathcal{D})} &= \iint_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} f^{ini}(x, \xi) \psi(x, \xi) dx d\xi \\ &+ \int_0^t \iint_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} f(s, x, \xi) (v(\xi) \cdot \nabla_x \psi(x, \xi) + E(s, x) \cdot \nabla_\xi \psi(x, \xi)) dx d\xi ds. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

The mapping

$$t \mapsto \tilde{f}(t),$$

is continuous in the sense of distributions, because of the bounds gathered in (2.2.8). Especially, it implies that

$$\tilde{f}(0) = f^{ini},$$

and since  $C_c^\infty(\mathbf{R}^6)$  is dense in any  $L^p(\mathbf{R}^6)$ , for any  $1 \leq p < \infty$ , it follows that  $f$  belongs to  $C_b([0, \infty), L^\infty(\mathbf{R}^6) - w^*)$ . Finally, the Theorem 2.1.2 is proved.

## 2.3 Local classical solvability : proof of Theorem 2.1.4.

### 2.3.1 Glassey-Strauss criterion

We wish to obtain a similar result to the one stated in [53] for the Vlasov-Maxwell system. Namely that, if  $(f, E)$  is a local classical solution of (2.1.4), it remains regular as long as its momentum-support remains bounded.

We then assume that  $(f, \phi)$  is a local classical solution and that we have the a priori estimate on the size of the  $\xi$ -support,

$$R_f(t) := \inf\{r \geq 0, \text{supp}(f(s, x, \cdot)) \subset B(0, r), \forall (s, x) \in [0, t] \times \mathbf{R}^3\} = r_* < \infty,$$

and we aim to prove that,

$$\|(f, E)\|_{W^{1, \infty}(0, T)} < \infty.$$

First, the method of characteristics ensures that

$$\|f(t, \cdot, \cdot)\|_{L^\infty} = \|f^{ini}\|_{L^\infty}.$$

As,

$$E(t, x) = \int_{\mathbf{S}^2} \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) \int_0^t f(t - \tau, x - \tau\omega, \xi) d\tau d\xi d\omega, \quad (2.3.1)$$

we have the following estimate :

$$\|E\|_{L^\infty((0, T) \times \mathbf{R}^3)} \leq 4/3\pi r_*^3 T \|f^{ini}\|_{L^\infty}. \quad (2.3.2)$$

In the following, the notation  $C$  will be used for any constant independent of the time  $t$  (yet it could depends on  $T$ ,  $r_*$  or on the initial data and have a different expression from a line to another).

The main difficulty lies in bounding the norm of the time and space derivatives of the force , namely the quantities

$$\|\partial_{x_i} E\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}, \quad i = 0, 1, \dots, 3.$$

One has,

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} E(t, x) &= \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) \int_{\mathbf{S}^2} \int_0^t \partial_{x_i} f(t - \tau, x - \tau\omega, \xi) d\tau d\omega d\xi, \\ &= \int_{|\xi| \leq r_*} v(\xi) \int_{|z| \leq t} \partial_{x_i} f(t - |z|, x - z, \xi) \frac{dz}{|z|^2} d\xi. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

The idea is to express the partial derivative  $\partial_{x_i}$  as a combination of the streaming operator

$$S(\xi) := \partial_t + v(\xi) \cdot \nabla_x,$$

and the operators

$$T_\omega^k = \omega_k \partial_t - \partial_k,$$

as it is done in [25], where  $\xi$  is fixed with  $|\xi| \leq t$ , and  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  is a vector of norm 1. The result is summarized in the following lemma.

**Lemma 2.3.1.** *There are homogeneous functions of degree 0,*

$$a(\xi, \omega) \in W^{1, \infty}(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2),$$

and

$$b_i^k(\xi, \omega) \in W^{1, \infty}(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2), \quad i = 0, 1, 2, 3, k = 1, 2, 3,$$

such that for any  $\omega \in \mathbf{S}^2$  and  $\xi \in \mathbf{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} \partial_t &= a(\xi, \omega) S + \sum_{k=1}^3 b_i^k(\xi, \omega) T_\omega^k, \\ \partial_{x_i} &= a(\xi, \omega) S + \sum_{k=1}^3 b_i^k(\xi, \omega) T_\omega^k. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Moreover, these functions satisfy the following inequalities :

i)

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in \mathbf{S}^2} |a(\xi, \omega)| &\leq 2(1 + |\xi|^2), \\ \sup_{\omega \in \mathbf{S}^2} |\nabla_\xi a(\xi, \omega)| &\leq 4(1 + |\xi|^2)^2, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

for all  $\xi \in \mathbf{R}^3$ ,  
ii)

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in \mathbf{S}^2} |b_i^k(\xi, \omega)| &\leq 2(1 + |\xi|^2), \\ \sup_{\omega \in \mathbf{S}^2} |\nabla_\xi b_i^k(\xi, \omega)| &\leq 4(1 + |\xi|^2)^2, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

for all  $i = 0, 1, 2, 3, k = 1, 2, 3$  and  $\xi \in \mathbf{R}^3$ .

*Démonstration.* Taking

$$a(\xi, \omega) = \frac{1}{1 + \nu(\xi) \cdot \omega}, \quad (2.3.7)$$

and

$$b_i^k(\xi, \omega) = \frac{\omega \nu_k(\xi)}{1 + \nu(\xi) \cdot \omega} - \delta_{ik} \quad (2.3.8)$$

for all  $(i, k) \in \{1, 2, 3\}$  we have indeed (2.3.4).

These functions are well defined since  $|\nu(\xi) \cdot \omega| < 1$ . The first estimate of (2.3.5), follows from the fact that for any  $\xi \in \mathbf{R}^3$ ,

$$|\nu(\xi)| \leq 1, \quad |\nabla \nu(\xi)| \leq 1.$$

One has indeed

$$\partial_{\xi_i} \nu_k(\xi) = \delta_{ik} - \frac{\xi_i \xi_k}{(1 + |\xi|^2)^{3/2}}.$$

Moreover, since the mapping

$$x \in (0, 1) \mapsto \frac{1}{1 - x},$$

is increasing, one can deduce that,

$$\begin{aligned} a(\xi, \omega(z)) &= \frac{1}{1 + \nu(\xi) \cdot \omega}, \\ &\leq \frac{1}{1 - \nu(r_*)}, \\ &\leq \frac{(1 + r_*^2)^{1/2}}{r_*} \frac{1}{(1 + \frac{1}{r_*^2})^{1/2} - 1}, \\ &\leq 2(1 + r_*^2). \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Concerning the other estimates of (2.3.5), (2.3.6) the computations are very similar and we postpone them to the Appendix.  $\square$

One obtains

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} E(t, x) &= \int_{|\xi| \leq r_*} \nu(\xi) \int_{|z| \leq t} a(\xi, \omega(z)) S f(t - |z|, x - z, \xi) \frac{dz}{|z|^2} d\xi \\ &\quad + \int_{|\xi| \leq r_*} \nu(\xi) \int_{|z| \leq t} \sum_{k=1}^3 b_i^k(\xi, \omega(z)) T_\omega^k f(t - |z|, x - z, \xi) \frac{dz}{|z|^2} d\xi, \\ &:= I + J, \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

where we used the change of variable

$$\omega = \frac{-z}{|z|}.$$

**Estimate on I.**

The first term of the right-hand side can be simplified since  $f$  satisfies the Vlasov equation

$$Sf = -\nabla_{\xi} \cdot (fE),$$

so by integration by parts in  $\xi$ ,

$$I = \int_{|\xi| \leq r_*} \nabla_{\xi}(v(\xi)a(\xi, \omega(z))) \cdot \int_{|z| \leq t} f(t-|z|, x-z, \xi)E(t-|z|, x-z) \frac{dz}{|z|^2} d\xi. \quad (2.3.11)$$

Then

$$|I(t, x)| \leq C_T \|v\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)} \sup_z \|a(\xi, \omega(z))\|_{W_{\xi}^{1,\infty}}.$$

The boundedness of I follows from

$$\|v\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)} \leq 1,$$

and

$$\sup_{\xi \in \mathbf{R}^3} \sup_{z \in \mathbf{R}^3} \|a(\xi, \omega(z))\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)} \leq (1 + r_*^2).$$

**Estimate on J.**

For the second term, one estimates each integral

$$J_k := \int_{|\xi| \leq r_*} v(\xi) \int_{|z| \leq t} b_i^k(\xi, \omega(z)) T_{\omega}^k f(t-|z|, x-z, \xi) \frac{dz}{|z|^2} d\xi.$$

One can integrate by parts since

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dz_k}(f(t-|z|, x-z, \xi)) &= -\frac{-z_k}{|z|} \partial_t f(t-|z|, x-z, \xi) + \partial_{x_k} f(t-|z|, x-z, \xi), \\ &= (T_{\omega} f)(t-|x-y|, y, \xi). \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned} J_k &= - \int_{|\xi| \leq r_*} v(\xi) \int_{|z|=t} \frac{b_i^k(\xi, \omega(z))}{z^2} f(0, x-z, \xi) dz d\xi \\ &\quad + \int_{|\xi| \leq r_*} v(\xi) \int_{|z| \leq t} \frac{d}{dz_k} \left( \frac{b_i^k(\xi, \omega(z))}{|z|^2} \right) f(t-|z|, x-z, \xi) dz d\xi, \\ &= J_k^1 + J_k^2. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

The function

$$z \mapsto \frac{1}{|z|^2}$$

belonging to  $L^1_{loc}(\mathbf{R}^3)$ , it follows that

$$|J_k^1| \leq C \|f^{ini}\|_{L^{\infty}([0,\infty) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)}.$$

Concerning  $J_k^2$  one has to deal with the estimate of the factor

$$\frac{d}{dz_k} \left( \frac{b_i^k(\xi, \omega(z))}{z^2} \right).$$



This difficulty can be overcome with the technique of section II of [53], noticing that

$$\frac{d}{dz_k} \left( \frac{b_i^k(\xi, \omega(z))}{z^2} \right) = B_i^k(\xi, \omega(z)) / |z|^3,$$

with  $B_i^k$  being zero-average on  $\mathbf{S}^2$ . One can take this fact for granted for the moment (we postpone the proof to the section 2.6.2) and observes that,

$$\begin{aligned} J_k^2 &= \int_{|\xi| \leq r_*} v(\xi) \int_{|z| \leq t} \left( \frac{B_i^k(\xi, \omega(z))}{|z|^3} \right) f(t - |z|, x - z, \xi) dz d\xi, \\ &= \int_{|\xi| \leq r_*} v(\xi) \int_0^{\theta_t} \int_{\mathbf{S}^2} B_i^k(\xi, -\omega) \frac{f(t - r, x - r\omega, \xi) - f(t - r, x, \xi)}{r} dr d\omega d\xi \\ &\quad + \int_{|\xi| \leq r_*} v(\xi) \int_{\theta_t}^t \int_{\mathbf{S}^2} B_i^k(\xi, -\omega) \frac{f(t - r, x - r\omega, \xi)}{r} dr d\omega d\xi, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

with  $\theta_t$  to be chosen later.

Furthermore,

$$|z| \frac{d}{dz_k} \left( b_i^k(z) \right) \leq \frac{3}{(1 + v(\xi) \cdot \omega(z))^2} \leq 12(1 + |\xi|^2)^2,$$

and so that for all  $\xi \in \mathbf{R}^3$  and  $z \in \mathbf{R}^3$ ,

$$B_i^k(\xi, \omega(z)) \leq C(1 + |\xi|^4).$$

It follows that

$$|J_k^2| \leq C r_*^3 \|B_i^k\|_{L^\infty} \|f\|_{L^\infty} \log(t/\theta_t) + C \theta_t r_*^3 \|B_i^k\|_{L^\infty} \|\nabla_x f\|_{L^\infty((0,t) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)}. \quad (2.3.15)$$

Taking

$$\theta_t = \frac{1}{\|\nabla f\|_{L^\infty((0,t) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)}},$$

the inequality becomes

$$|J_k^2| \leq C(1 + \log_+(\|\nabla f\|_{L^\infty((0,t) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)})),$$

where

$$\log_+(z) := \max(0, \log(z)).$$

Then

$$\|\partial_{x_i} E(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C(1 + \log_+(\|\nabla f\|_{L^\infty((0,t) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)})), \quad (2.3.16)$$

which is enough to obtain a Grönwall inequality in the logarithmic shape, in order to estimate  $\|f\|_{W^{1,\infty}((0,T) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)}$  and then  $\|E\|_{W^{1,\infty}((0,T) \times \mathbf{R}^3)}$ .

To estimate the quantity

$$N(t) := \|\nabla_{x,\xi} f(t, \cdot, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)},$$

we apply  $\nabla_{x,\xi}$  to the Vlasov equation satisfied by  $f$ , and we obtain the following inhomogeneous transport equation :

$$\partial_t ((\nabla_{x,\xi} f) + v \cdot \nabla_x ((\nabla_{x,\xi} f) + E(t, x) \cdot \nabla_\xi (\nabla_{x,\xi} f)) = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla_x E^T \\ -\nabla_\xi v(\xi)^T & 0 \end{pmatrix} \nabla_{x,\xi} f, \quad (2.3.17)$$

where we used the notations

$$((\nabla v(\xi))_{ij} = \partial_{\xi_j} v_i(\xi),$$

and

$$(\nabla E(x))_{ij} = \partial_{x_j} E_i(\xi).$$

Integrating on a characteristic curve, the following estimate is obtained

$$N(t) \leq \|f^{ini}\|_{L^\infty} + \int_0^t (\|\nabla_\xi v(\xi)\|_{L^\infty} + \|\nabla_x E(s)\|_{L^\infty}) N(s) ds.$$

Given the inequality (2.3.16),  $N(t)$  satisfies a logarithmic-Grönwall inequality on  $(0, T)$  :

$$N(t) \leq N(0) + C \int_0^t N(s)(1 + \log_+(N(s))) ds.$$

It gives

$$N(t) \leq \exp(C \exp(CT)),$$

and so

$$\|\nabla_{x,\xi} f(t, \cdot, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)} \leq CT. \quad (2.3.18)$$

Plugging it in (2.3.16), it also proves that

$$E \in W^{1,\infty}([0, T] \times \mathbf{R}^3).$$

## 2.3.2 The initial value problem.

### Local existence in time.

In the sequel we will prove that, given an initial data  $f^{ini} \in C_c^1(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$ , there exists a local in time strong solution  $(f, \phi)$  to the system of equations to (2.1.2) such that  $f|_{t=0} = f^{ini}$ . To do so, we use the continuation criterion derived before. More explicitly, we consider a global weak solution, obtain as we explained previously, to the regularized system (TMn). We prove that for such a solution  $f$  there exists a time  $T > 0$ , such that the diameter of the  $\xi$ -support of  $f$ ,  $R_f(t)$ , is finite. To do so we derive an a priori estimate on  $R_f(t)$ . All the estimates being uniform in  $n$ , they remain valid passing to the weak limit, and due to the continuation criteria the weak solution happens to be a strong one. For the sake of simplicity the a priori estimate is derived without the indexes  $n$ .

Let us pick  $(x, \xi) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ , and consider the characteristic curve  $(X(s, t, x, \xi), \Xi(s, t, x, \xi))$  associated to the Vlasov equation in (2.1.4) :

$$\begin{cases} \partial_s X(s, t, 0, \xi) = v(\Xi(s, t, x, \xi)), \\ X(t, t, x, \xi) = x, \\ \partial_s \Xi(s, t, x, \xi) = E(s, X(s, t, x, \xi)), \\ \Xi(t, t, x, \xi) = \xi. \end{cases} \quad (\text{Char})$$

Thus,

$$\xi = \Xi(0, t, x, \xi) + \int_0^t E(s, X(s, t, x, \xi)) ds, \quad (2.3.19)$$

and together with the estimate on the field (2.3.2), the following Grönwall inequality is obtained :

$$R_f(t) \leq R_f(0) + C_T \int_0^t R_f^3(s) ds. \quad (2.3.20)$$

We consider next the solution  $\bar{R}$  of the Riccati equation

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{R}(t) = C_T \bar{R}^3(t), \\ \bar{R}(0) = 2R_f(0), \end{cases} \quad (2.3.21)$$

and  $\bar{T} < 0$  the blow up time of  $\bar{R}$ . By continuity of  $R_f, \bar{R}$  and since  $\bar{R}(0) = 2R_f(0)$ , it comes that the set

$$A := \{t \in (0, \bar{T}) \text{ s.t for all } s \in [0, t), R_f(s) \leq \bar{R}(s)\},$$

is closed and non empty. Moreover if one takes  $t_* \in A$ , then

$$\begin{aligned} R_f(t_*) &\leq R_f(0) + C_T \int_0^{t_*} R_f^3(s) ds, \\ &\leq R_f(0) + C_T \int_0^{t_*} \bar{R}^3(s) ds, < R_f(t_*). \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Thus, A is non empty open and closed in  $[0, \bar{T})$ , and therefore

$$R_f(t) \leq \bar{R}(t) \text{ for all } t \in [0, \bar{T}).$$

Finally the local in time boundedness of the radius of the momentum support is proved.

### Uniqueness.

Concerning the uniqueness, one assumes that there are two solutions  $(f, \phi_f), (g, \phi_g)$  to (2.1.4) with the same initial data and proves that,

$$h(t, x, \xi) := f(t, x, \xi) - g(t, x, \xi), \quad h|_{t=0} = 0,$$

is in fact the zero function.

Let  $T > 0$  be such that both  $f$  and  $g$  exist on  $[0, T)$ . Then the function  $h$  satisfies the following system :

$$\begin{cases} \partial_t h + v(\xi) \cdot \nabla_x h + E_f \cdot \nabla_\xi h = (E_g - E_f) \cdot \nabla_\xi g, & t \in (0, T) \quad x, \xi \in \mathbf{R}^3, \\ (\partial_t + \omega \cdot \nabla_x) \phi_h = g(t, x, \xi) - f(t, x, \xi) = -h(t, x, \xi), & \phi_h|_{t=0} = 0, \\ \mathcal{E}_h(t, x, \omega) = \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) \phi_h(t, x, \xi, \omega) d\xi, \\ E_h(t, x) = \int \mathcal{E}_h(t, x, \omega) d\omega, \end{cases} \quad (2.3.23)$$

where  $E_f, E_g, E_h$  designate respectively the force fields associated to  $f, g, h$ .

Since the field  $(v, E_f)$  is Lipschitz, the characteristics are well defined on  $[0, T)$  (see for instance [41]),

$$\begin{cases} \partial_s X_h(s, t, x, \xi) = v(\Xi_h(s, t, x, \xi)), \\ X_h(t, t, x, \xi) = x, \\ \partial_s \Xi_h(s, t, x, \xi) = E_f(s, X_h(s, t, x, \xi)), \\ \Xi_h(t, t, x, \xi) = \xi. \end{cases} \quad (2.3.24)$$

and integrating along a characteristic curve, one can say that the inhomogeneous transport equation in (2.3.23) leads to the inequality

$$0 \leq \|h(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)} \leq \|h|_{t=0}\| + \int_0^t \|E_g(s) - E_f(s)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \|\nabla_\xi g(s)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)} ds.$$

Then, by linearity of the equation defining the fields  $\mathcal{E}$  and  $E$ ,

$$E_g - E_f = E_h,$$

and with the help of the estimates (2.3.1), we deduce that

$$\|E_g - E_f\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^3)} = \|E_h\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^3)} \leq C(r_*)T \|h\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)}. \quad (2.3.25)$$

Moreover, by (2.3.18) one knows that the gradient with respect to  $\xi$  of the density function remains bounded, and therefore

$$\|\nabla_\xi g(s)\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^3)} \leq C < \infty.$$

Then, the following Grönwall inequality

$$|h(t)| \leq C(r_*)T \int_0^t \|h(s)\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)},$$

implies that

$$h \equiv 0,$$

and the uniqueness of a strong local solution associated to a given initial data as stated in the Theorem 2.1.5 is proved.

## 2.4 A larger class of adapted initial data : proof of Theorem 2.1.5.

One of the limitations of the classical Glassey-Strauss criterion, as they formulated it initially in [56], is its nonphysical nature. Indeed, in reality, physicists may prefer to work with distributions of particles that are not compactly supported but may have very good properties of decay in  $|\xi|$ . The typical exemple is the case of Maxwellian (see the paragraph 29 of [98]) :

$$f^{ini}(x, \xi) = h(x) \exp(-\beta \sqrt{1 + |\xi|^2}),$$

with

$$\beta = \frac{1}{k_B \theta},$$

$k_B$  beeing the Boltzman constant, and  $\theta$  the temperature of the medium.

Therefore, it would be natural to look for a different condition on the initial data on which one should only require good decay properties as  $|\xi| \rightarrow \infty$ , as Lions and Perthame did in [102] for the Vlasov-Poisson system.

In the sequel, we will denote by

$$p \in C^1(\mathbf{R}),$$

a weight function used to control the decay in  $|\xi|$  of the initial data. We make the following assumptions on the function  $p$  :

$$0 \leq p \leq 1, \quad p' \leq 0, \quad \text{and } p(r) = O(r^{-\alpha}) \text{ with } \alpha > 7. \quad (2.4.1)$$

Moreover, all the computations are done formally, but they can be done on an approximate solution  $(f^n, E^n)$ , with uniform estimates in  $n$  which are therefore preserved by the limit as  $n \rightarrow \infty$ .

### $L^\infty$ bound on the field E

It is already known that

$$0 \leq f(t, x, \xi) \leq \|f^{ini}\|_{L^\infty},$$

and we want to estimate the quantity  $\|E(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}$ , which leads to estimate

$$\int_0^t \int_{\mathbf{R}^3} f(\tau, x + \omega(t - \tau, \xi)) d\xi d\tau.$$

The first step is then to see how the decay property in  $|\xi|$  on the initial data propagates.

We a priori assume that  $(f, \phi)$  is a classical  $C^1$  solution of (2.1.4), with the additional assumptions (2.1.16) of Theorem 2.1.5.

Moreover, we assume that there is  $T > 0$  such that the estimate

$$A_T := \sup_{0 \leq t \leq T} \|E(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} < \infty$$

holds.

In the sequel we will denote by  $A(\tau)$  the quantity

$$A(\tau) := \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|E(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}.$$

One has, by the method of characteristics,

$$f(t, x, \xi) = f^{ini}(X(0, t, x, \xi), \Xi(0, t, x, \xi)),$$

where

$$\begin{cases} \partial_s X(s, t, x, \xi) = v(\Xi(s, t, x, \xi)), \\ X(t, t, x, \xi) = x, \\ \partial_s \Xi(s, t, x, \xi) = E(X(s, t, x, \xi)), \\ \Xi(t, t, x, \xi) = \xi. \end{cases}$$

Then, for all  $x, \xi \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$  and for all  $0 \leq t \leq T$ ,

$$0 \leq f(t, x, \xi) \leq p(|\Xi(0, t, x, \xi)|).$$

Furthermore,

$$|\Xi(0, t, x, \xi)| \geq |\xi| - \int_0^t A(s) ds \geq |\xi| - tA(t)$$

and  $p$  is nonincreasing, therefore, finally for all  $(t, x, \xi) \in [0, T] \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ ,

$$0 \leq f(t, x, \xi) \leq p(|\xi| - tA(t)).$$

In this paragraph, it is shown that the a priori assumption (2.4) on the boundedness of  $A_T$  leads to a Grönwall inequality on  $A(\tau)$ , which implies the boundedness of this quantity locally in time.

One has, for all  $x \in \mathbf{R}^3$ ,  $\omega \in \mathbf{S}^2$ , and  $t \in [0, T)$ ,

$$\begin{aligned}
 |E(t, x)| &\leq |\mathcal{E}(t, x, \omega)|, \\
 &\leq \int_{\mathbf{R}^3} \int_0^t f(\tau, x + \omega(t - \tau), \xi) d\tau d\xi, \\
 &\leq \int_{\mathbf{R}^3} \int_0^t p(|\xi| - \tau A(\tau)) d\tau d\xi, \\
 &\leq \int_{|\xi| \leq tA(t)} \int_0^t p(|\xi| - \tau A(\tau)) d\xi d\tau \\
 &\quad + \int_{|\xi| \geq tA(t)} \int_0^t p(|\xi| - \tau A(\tau)) d\xi d\tau, \\
 &\leq 4\pi \int_0^t \tau^3 A(\tau)^3 d\tau + 4\pi \int_0^t \int_0^\infty p(r)(r + \tau A(\tau))^2 dr d\tau, \\
 &\leq C_T \left( 1 + \int_0^t (A(\tau)^3 + A(\tau)^2) d\tau \right).
 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

where  $C_T$  is a constant depending only on  $T$  and on the initial data.

Therefore there exists a time  $0 < T' < T$  such that,

$$A_{T'} \leq \infty.$$

We can indeed follow the same argument used at the end of Section 2.3.2, and compare  $E$  to the solution  $\bar{E}$  of the following Riccati ODE

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{E}(t) = C_T \left( \bar{E}^3(t) + \bar{E}^2(t) \right), \\ \bar{E}(0) = 2C_T. \end{cases} \tag{2.4.3}$$

### Estimates of the derivatives

#### Estimate of $\nabla_{x, \xi} f$

We define

$$N(t) := \|\nabla_{x, \xi} f(t, \cdot, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)}.$$

Differentiating the Vlasov equation with respect to  $x$  and  $\xi$ , we obtain

$$(\partial_t + \nu(\xi) \cdot \nabla_x + E(t, x) \cdot \nabla_\xi)(\nabla_{x, \xi} f) = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla_x E^T \\ -\nabla_\xi \nu(\xi)^T & 0 \end{pmatrix} \nabla_{x, \xi} f$$

which leads, by integrating along a characteristic curve, and using the bound

$$\nabla_\xi \nu(\xi) \leq 1 \text{ for all } \xi \in \mathbf{R}^3,$$

to

$$N(t) \leq N(0) + \int_0^t (1 + \|\nabla_x E(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}) N(s) ds, \text{ for all } t \in [0, T).$$

By the Gronwall inequality,

$$N(t) \leq N(0) \exp(H(t)),$$

where

$$H(t) := \int_0^t (1 + \|\nabla_x E(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}) ds.$$

The key issue is then to estimate  $H(t)$ .

One can also notice with the above calculations that, the condition on the derivatives of the initial data propagates in the following way

$$\begin{aligned} |\nabla_{x,\xi} f(t, x, \xi)| &\leq |\nabla_{x,\xi} f^{ini}(X(0, t, x, \xi), \Xi(0, t, x, \xi)) \exp(H(t))|, \\ &\leq p(|\xi| - A_T t) \exp(H(t)), \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

for all  $(t, x, \xi) \in [0, T] \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ .

### Estimate of $\nabla_x E$

Similarly to what is done in the section 2.3.1, concerning the case of compactly supported distribution functions, one has

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} E(t, x) &= \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) \int_{|z| \leq t} a(\xi, \omega(z)) S f(t - |z|, x - z, \xi) \frac{dz}{|z|^2} d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) \int_{|z| \leq t} \sum_{k=1}^3 b_i^k(\xi, \omega(z)) T_\omega^k f(t - |z|, x - z, \xi) \frac{dz}{|z|^2} d\xi \\ &:= I + J. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Then we have to estimate I and J, taking into account the decay property of  $f$  that we have already studied.

### Estimate of I

Similarly to what we have already done in (2.3.11)

$$|I(t, x)| \leq \int_{|z| \leq t} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla_\xi ((v(\xi) a(\xi, \omega)))| f(t - |z|, x - z, \xi) d\xi \frac{dz}{z^2}.$$

Yet

$$0 \leq f(t - |z|, x - z, \xi) \leq p(|\xi| - A_T t)$$

for  $|z| \leq t$ , and due to estimate (2.3.5),

$$|I(t, x)| \leq A_T,$$

for all  $x \in \mathbf{R}^3$ , provided that

$$p(r)(1 + r^4)r^2 \in L^1(\mathbf{R}).$$

It is indeed the case because of the condition  $\alpha > 7$ .

### Estimate of J

We write

$$J = \sum_{k=1}^3 J_k,$$

and by integration by parts as in (2.3.13), we see that

$$\begin{aligned} J_k &= - \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) \int_{|z|=t} \frac{b_i^k(\xi, \omega(z))}{z^2} f(0, x-z, \xi) dz d\xi, \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) \int_{|z|\leq t} \frac{d}{dz_k} \left( \frac{b_i^k(\xi, \omega(z))}{|z|^2} \right) f(t-|z|, x-z, \xi) dz d\xi, \\ &= J_k^1 + J_k^2. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

We recall that here, as in the previous section,  $\omega(z) = \frac{-z}{|z|}$ . The first term,  $J_k^1$  is bounded since by (2.3.6) we have

$$b_i^k(\xi, \omega(z)) f(0, x-z, \xi) \leq C(1 + |\xi|^2) p(|\xi|),$$

with  $C$  a constant. For the term  $J_k^2$ , we use the same technique as in (2.3.14) :

$$\begin{aligned} J_k^2 &= \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) \int_0^{\theta_t} \int_{\mathbf{S}^2} B_i^k(\xi, -\omega) \frac{f(t-r, x-r\omega, \xi) - f(t-r, x, \xi)}{r} dr d\omega d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) \int_{\theta_t}^t \int_{\mathbf{S}^2} B_i^k(\xi, -\omega) \frac{f(t-r, x-r\omega, \xi)}{r} dr d\omega d\xi. \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Since

$$|f(t-r, x-r\omega, \xi) - f(t-r, x, \xi)| \leq r p(|x| - TA_T), \text{ for all } t \in [0, T],$$

we conclude that

$$|J_k^2(t, x)| \leq C_T \left( \log \left( \frac{t}{\theta_t} \right) + \theta_t \exp(H(t)) \right).$$

Choosing

$$\theta_t = \exp(-H(t)),$$

we obtain

$$|J_k^2(t, x)| \leq C_T(1 + H(t)), \quad \text{for all } x \in \mathbf{R}^3,$$

and then to

$$|\partial_{x_i} E(t, x)| \leq C_T \left( 1 + \int_0^t (1 + \|\nabla_x E(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} ds) \right).$$

The Grönwall inequality implies that

$$\|\mathbf{D}_x E(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \leq C_T \exp(C_T t),$$

for all  $0 \leq t \leq T$ .

### Conclusion

Since

$$N(t) \leq N(0) \exp(H(t)),$$

we deduce from the previous bound on the field that

$$N(t) \leq N(0) \exp(T \exp(C_T T)),$$

and the Theorem 2.1.5 is proved.



## 2.5 A refined criterion : proof of Theorem 2.1.6

In this section, we consider a given initial data  $f^{ini} \in C_c^1(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$  and we denote by  $(f, \phi)$  the corresponding classical solution on an interval of time  $[0, T_{max})$ . We pick  $T \in [0, T_{max})$  and we want to derive a Grönwal inequality for the size of the momentum support  $R_f(T)$  in the same Pallard did for the Vlasov-Maxwell in [119]. We will use the notation  $C$  of any constant depending only on  $T$  and the initial data.

### 2.5.1 Time integral of the force field.

Rather than reasoning directly on  $R_f(t)$ , we work on the increase of  $e(\xi)$  along a characteristic line. Although it is not exactly the method used in section 2.3.2 the ideas and the equations are very close to (2.3.19), (2.3.20). We pick  $(x_0, \xi_0)$  in the support of  $f^{ini}$ , and we consider the characteristic curve  $(X_0, \Xi_0)$  of the transport equation

$$(X_0, \Xi_0)'(t) = (v(\Xi_0(t)), E(t, X_0(t))), \quad (X_0, \Xi_0)(0) = (x_0, \xi_0).$$

Because of (2.1.1) one has,

$$\sqrt{1 + |\Xi(T)|^2} = \sqrt{1 + |\Xi(0)|^2} + \int_0^T E(t, X_0(t)) \cdot v(\Xi_0(t)) dt. \quad (2.5.1)$$

Since,

$$\|v\|_{L^\infty} \leq 1, \quad (2.5.2)$$

the problem is reduced to the estimation of

$$I_E := \int_0^T E(t, X_0(t)) dt.$$

**Remark 2.5.1.** *It has been noted in the work of Klainerman and Staffilani [94] that for a class of initial data compactly supported, the control of the integral of the electromagnetic fields over a characteristic line is essentially equivalent to the Glassey Strauss criterion. Moreover this makes sens for even non compactly supported solution, that is why this point of view enables Luk and Strain [105] to prove a continuation criterion for a larger class of initial data.*

### 2.5.2 An upper bound for $I_E$ .

Thanks to (2.3.1), and using Fubini's theorem, we can write,

$$I_E = \int_0^T \int_0^t \int_{\mathbf{S}^2} \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) f(s, X_0(t) - (t-s)\omega, \xi) d\xi d\omega ds dt.$$

Using the Fubini's theorem and taking into account (2.5.2), one obtains,

$$|I_E| \leq \int_0^T \int_s^T \int_{|y|=t-s} \rho_f(s, X_0(t) - y) \frac{d\sigma(y)}{|t-s|^2} dt ds,$$

where  $d\sigma$  designates the standard measure on the unit sphere  $\mathbf{S}^2$ . Then, we split the integral on the right hand side in two parts,

$$|I_E| \leq \int_0^T \int_s^{s+\epsilon(s)} \dots dt ds + \int_0^T \int_{s+\epsilon(s)}^T \dots dt ds := I_E' + I_E''.$$

The most singular term  $I_{E'}$  will be under control by setting

$$\epsilon(s) = \frac{T-s}{1+R_f^3(s)}.$$

Indeed, one has

$$\begin{aligned} I_E' &\leq C \int_0^T \int_s^{s+\epsilon(s)} \|\rho_f(s)\|_{L^\infty}, \\ &\leq C \int_0^T \epsilon(s) \|\rho_f(s)\|_{L^\infty} ds, \\ &\leq C \int_0^T \frac{R_f^3(s)}{1+R_f^3(s)} ds, \\ &\leq C. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

To deal with the term  $I_{E''}$  one has to perform the change of variable

$$(t, \theta, \varphi) \mapsto X_0(t) - (t-s)\omega(\theta, \varphi),$$

where we set  $\omega = \omega(\theta, \varphi) = (\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta))$ .

The following is very similar to the method of Pallard in [116; 119], and we use in particular the following Lemma (Lemma 2.1 in [116]) whose proof can be found in these references.

**Lemma 2.5.2.** *Given  $0 \leq s < s_1 < s_2$ , define  $\Omega_{s_1, s_2} = (s_1, s_2) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ . The map*

$$\begin{aligned} \pi : \Omega_{s_1, s_2} &\rightarrow \pi(\Omega_{s_1, s_2}) \\ (t, \theta, \varphi) &\mapsto X_0(t) - (t-s)\omega(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

is a  $C^1$ -diffeomorphism with Jacobian  $J\pi(t, \theta, \varphi) = (v(\Xi_0(t)) \cdot \omega - 1)(t-s)^2 \sin(\theta)$ .

We thus make appear the factor  $(v(\Xi_0(t)) \cdot \omega - 1)$  in the integrand of  $I_E''$  and then use the most favorable Hölder inequality :

$$\begin{aligned} I_E'' &\leq \int_0^T \left| \int_{s+\epsilon(s)}^t \int_{|y|=t-s} \rho_f^3(s, X_0(t) - y) (v(\Xi_0(t)) \cdot \omega - 1) d\sigma(y) dt \right|^{1/3} ds \\ &\quad \times \left| \int_{s+\epsilon(s)}^T \int_{|y|=t-s} \frac{1}{(v(\Xi_0(t)) \cdot \omega - 1)^{1/2}} \frac{d\sigma(y) dt}{|t-s|^3} \right|^{2/3} ds. \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

By standard computations, that one can find in the section 2.3 of [119], we obtain that for any  $t \in [0, T]$ ,

$$\int_{-1}^1 \frac{du}{(v(\Xi_0(t))u - 1)^{1/2}} \leq C.$$

It implies,

$$\int_{s+\epsilon(s)}^T \int_{|y|=t-s} \frac{1}{(v(\Xi_0(t)) \cdot \omega - 1)^{1/2}} \frac{d\sigma(y) dt}{|t-s|^3} \leq C \ln \left( \frac{T-s}{\epsilon(s)} \right).$$

Using the change of variable of Lemma 2.5.2, we obtain

$$I_E'' \leq C \int_0^T \left| \int_{\pi(\Omega_{s+\epsilon(s), T})} \rho_f^3(s, x) dx \right|^{1/3} \ln^{2/3}(1+R_f(s)) ds.$$

Finally,

$$I_E'' \leq C \int_0^T \|\rho_f(s)\|_{L^3(\mathbf{R}^3)} \ln^{2/3}(1 + R_f(s)) ds. \quad (2.5.5)$$

Gathering both (2.5.3) and (2.5.5) and bringing it in (2.5.1) we infer that,

$$\sqrt{1 + |\Xi(T)|^2} = \sqrt{1 + |\Xi(0)|^2} + C \left( 1 + \int_0^T \|\rho_f(s)\|_{L^3(\mathbf{R}^3)} \ln^{2/3}(1 + R_f(s)) ds \right).$$

Therefore, for any  $T \in [0, T_{max})$  we have the inequality

$$R_f(T) \leq R_f(0) + C \left( 1 + \int_0^T \|\rho_f(s)\|_{L^3(\mathbf{R}^3)} \ln^{2/3}(1 + R_f(s)) ds \right),$$

and we conclude by the Grönwall lemma.

## 2.6 Appendix : Technical results

### 2.6.1 Estimates (2.3.5), (2.3.6)

We recall that,

$$a(\xi, \omega) = \frac{1}{1 + v(\xi) \cdot \omega},$$

and

$$b_i^k(\xi, \omega) = \frac{\omega v_k(\xi)}{1 + v(\xi) \cdot \omega}, -\delta_{ik}.$$

Since,

$$\|\nabla_\xi v\|_{L^\infty} \leq 1,$$

one can deduce that,

$$\begin{aligned} |\nabla_\xi a(\xi, \omega)| &\leq \frac{1}{(1 + v(\xi) \cdot \omega)^2}, \\ &\leq (1 + |\xi|^2)^2. \end{aligned}$$

In the same time, since  $|\omega| = 1$  and  $\|v\|_{L^\infty} \leq 1$ ,

$$\left| b_i^k(\xi, \omega) \right| \leq 1 + \frac{1}{1 + v(\xi) \cdot \omega}$$

. Therefore the estimates on  $b_i^k$  and its  $\xi$ -derivatives are a direct consequences of the previous results.

### 2.6.2 Homogeneous distributions and average of $B_i^k$

First, we recall some of the results on homogeneous distributions, which can be found in [52] (Chapter III section 3.3) or in [84] (pp 75 – 79 and Theorem 3.2.3).

For all  $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ , one will denote by  $M_\lambda$  the application from  $\mathbf{R}^d$  to itself :

$$M_\lambda : x \mapsto \lambda x.$$

Let  $\Omega$  be a cone of  $\mathbf{R}^d$ , one says that a distribution  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  is homogeneous of degree  $n$  if, for all  $\lambda > 0$ ,

$$T \circ M_\lambda = \lambda^n T \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Another way to characterize homogeneous distributions  $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$  of degree  $n$  is the Euler relation (in the sense of distributions) :

$$\nabla_x \cdot (xf) = (n + d)f.$$

One has the following extension property :

**Proposition 2.6.1.** *Let  $T$  be an homogeneous distribution of degree  $n$  on  $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ . If  $n > -d$ , there exists a unique homogeneous distribution on  $\mathbf{R}^d$  of degree  $n$ , noticed  $\dot{T}$ , such that*

$$\dot{T}|_{\mathbf{R}^d \setminus \{0\}} = T.$$

Whenever  $T \in (\mathcal{D}'\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$  is homogeneous of degree  $-n$ , the distribution  $\text{div}_x((xT))$  is a homogeneous of degree  $-n$  sur  $\mathbf{R}^d$  supported on  $\{0\}$ . Therefore there exists a constant  $\lambda \in \mathbf{R}$  such that

$$\nabla_x \cdot ((xT)) = c\delta_{x=0} \tag{2.6.1}$$

in the distributional sense on  $\mathbf{R}^d$ .

The constant  $\lambda$  in (2.6.1) is called the residue of  $T$  at 0, and is denoted by  $\text{Res}_0 T$ . It is also defined by the following relation

$$\langle T, \phi \rangle = \text{Res}_0 T \frac{1}{\mathbf{S}^d} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\phi(x)}{|x|^d} dx, \tag{2.6.2}$$

where  $\mathbf{S}^d$  denotes the unit sphere in dimension  $d$ , for every

$$\phi(x) = \varphi(|x|) \quad \text{with } \varphi \in C_c^\infty((0, +\infty)).$$

**Proposition 2.6.2.** *Every distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$  that is homogeneous of degree  $-n$  has a homogeneous extension  $\dot{T}$  of degree  $-n$  to  $\mathbf{R}^n$ , if and only if*

$$\text{Res}_0 T = 0.$$

To compute the average of  $B_i^k$  on the unite sphere, rather than calculations as in [53], it is more simple to see the result as a consequence of the properties, recalled above, of the homogeneous distributions of degree  $-3$  on  $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ .

A direct computation gives,

$$B_i^k(\xi, \omega(z)) = |z| \frac{d}{dz_k} \left( b_i^k(\xi, \omega(z)) \right) - 2\omega b_i^k,$$

which is a homogeneous distribution of degree 0 on  $\mathbf{R}^3$ . Therefore

$$\frac{B_i^k}{|z|^3} = \partial_{y^k} \left( \frac{b_i^k}{|z|^2} \right)$$

is a homogeneous distribution of degree  $-3$  on  $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ .

Since

$$\frac{b_i^k}{|z|^2} \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^3),$$

one can deduce that  $\partial_{y_k} \left( \frac{b_i^k}{|z|^2} \right)$  is a homogeneous distribution of degree  $-3$  on the whole  $\mathbf{R}^3$ , and naturally defines an extension of  $\frac{B_i^k}{|z|^3}$  from  $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$  to  $\mathbf{R}^3$ .

Hence

$$\text{Res}_0 \left( \frac{B_i^k}{|z|^3} \right) = 0,$$

which implies that for all  $\chi \in C_c^\infty((0, \infty))$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbf{R}^3} \chi(|z|) \frac{B_i^k(\xi, \omega)}{|z|^3} dz \\ &= \int_0^\infty \frac{\chi(r)}{r} \int_{\mathbf{S}^2} B_i^k(\xi, \omega) d\omega dr. \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

It immediately follows that

$$\int_{|\omega|=1} B_i^k(\xi, \omega) d\omega = 0.$$



## Chapitre 3

# High order Vlasov-Darwin systems as high-order non-relativistic approximation of the relativistic Vlasov-Maxwell system

This chapter is a collaboration work with D. Han-Kwan, N.Jiang, L. Xiong.

### Abstract :

In this chapter we tackle the problem of the nonrelativistic approximation of the Vlasov-Maxwell system by a manufactured Vlasov-Darwin type system. Namely, when the characteristic speed of the particles is small compared to the speed of light  $c$ , one can replace the hyperbolic Vlasov-Maxwell system by a system coupling the Vlasov equation to a system of elliptic PDEs, whose expression is obtained by a perturbative method inspired by a recent work [73] of Han-Kwan, Nguyen and Rousset and close to the Chapman-Enskog method developed in another context. We explain the construction of the nonlinear high order Vlasov-Darwin type systems, study its local well-posedness and give its rate of approximation in terms of inverse power of  $c$ .

### ‘Résumé :

Dans ce chapitre on traite du problème de l'approximation relativiste du système de Vlasov-Maxwell par un système de type Vlasov-Darwin. Plus précisément, lorsque la vitesse caractéristique des particules d'un plasma est petite devant la vitesse de la lumière  $c$ , on peut remplacer le système de Vlasov-Maxwell qui est hyperbolique par un système couplant l'équation de Vlasov à un système d'EDPs elliptiques, dont l'expression est obtenu par une méthode perturbative inspiré d'un travail récent [73] de Han-Kwan, Nguyen and Rousset et proche de la méthode de Chapman-Enskog développée dans un autre contexte. Nous expliquons la construction de ces systèmes de "Vlasov-Darwin d'odres élevés", étudions leurs caractères bien posés et donnons un taux d'approximation qui est une puissance de l'inverse de  $c$ .

## Contents

<b>3.1 Introduction</b> . . . . .	<b>74</b>
<b>3.2 Main results</b> . . . . .	<b>81</b>
3.2.1 Definitions and preliminary comments . . . . .	81
<b>3.3 Derivation of the higher Vlasov-Darwin systems.</b> . . . . .	<b>87</b>
3.3.1 Description of the recursive construction method. . . . .	88
3.3.2 Propagation of the structure through the iterative construction method. . . . .	91
3.3.3 The system beyond the Vlasov Darwin system : VD-3. . . . .	96
<b>3.4 Local well-posedness for the <math>k</math>-th Vlasov-Darwin approximation system</b> (3.2.9). . . . .	<b>98</b>
<b>3.5 Approximation rates</b> . . . . .	<b>101</b>
<b>3.6 Appendix</b> . . . . .	<b>104</b>
3.6.1 The Leray operator <b>P</b> . . . . .	104
3.6.2 The space mean-value and the average free part . . . . .	105

---

## 3.1 Introduction

This article is concerned with the question of the description of the non-relativistic regime in a dilute collisionless single species plasma with spatial periodic boundary conditions. Such a plasma is described by a distribution function  $f(t, x, \xi)$  in the phase space  $\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3$  (with  $\mathbf{T}^3 = \mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3$  the flat torus endowed with the normalized Lebesgue measure) of a family of identical particles (typically electrons) interacting through electromagnetic forces. The choice of periodic boundary conditions for the space variables is made here for the sake of simplicity.

The conservation of the mass in the phase space yields the so-called Vlasov equation

$$\partial_t f + v(\xi) \cdot \nabla_x f + F(t, x, \xi) \cdot \nabla_\xi f = 0, \quad (3.1.1)$$

where  $v$  is the velocity field, and  $F$  is the force field, satisfying  $\nabla_\xi F = 0$ . The expression of the field  $v$  depends whether one works in a relativistic or non-relativistic framework and the choice of the force field  $F$  depends on the electromagnetic model one decides to chose. After a rescaling, all the physical units (mass, elementary charge etc.) are reduced to one and we consider the parameter

$$\epsilon := \frac{1}{c},$$

where  $c$  designates the speed of light. The parameter  $\epsilon$  characterizes the transition between a relativistic and a non-relativistic regime (it can also be seen as the ratio between the characteristic speed of the particles and the speed of light).

In a classical framework the expression of the velocity field is simply  $v(\xi) = \xi$ , whereas in the relativistic framework taking into account relativistic corrections it becomes

$$v(\xi) = \frac{\xi}{(1 + \epsilon^2 |\xi|^2)^{1/2}}.$$



In the following  $\nu(\xi)$  will always designate the relativistic expression, even in systems considered as non-relativistic approximation, and we will explicitly write  $\xi$  instead of  $\nu(\xi)$  in the classical case.

The force field  $F$  is most of the time the Lorentz force

$$F_L(t, x, \xi) := E(t, x) + \epsilon \nu(\xi) \times B(t, x),$$

where  $(E, B)$  is the electromagnetic field in the system, and  $\times$  is our notation for the vector product. Focusing on the part of the field which is self induced by the dynamic of the system, one can expect different behaviour whether we choose the *quasi-static approximation* model (i.e there is no magnetic field and  $E$  is a gradient of a potential satisfying the Poisson equation) or the full Maxwell equations model. In the first case the result is the so-called Vlasov-Poisson system and in the second case the Vlasov-Maxwell system (sometimes called the relativistic Vlasov-Maxwell system).

The Vlasov-Poisson system combines the Vlasov equation with an elliptic equation and is particularly relevant in the non-relativistic framework. The more fully descriptive Vlasov-Maxwell system combines the Vlasov equation with the hyperbolic system of Maxwell equations, which makes the analysis more complicated, and is generally set up in the relativistic framework. It is known since Degond [38] and Asano and Ukai [8], that the first system can be seen as the *non-relativistic limit* of the second.

The objective of this work is to establish a scale of Vlasov-Elliptic systems approximating the Vlasov-Maxwell system at an arbitrary high order power of the parameter  $\epsilon$ . The starting point of this scale is the Vlasov-Darwin model we will discuss later in the introduction. Our method of expansion in  $\epsilon$  is inspired by a recent work of Han-Kwan, Nguyen and Rousset [73] studying the stability of a class of homogeneous equilibria for the Vlasov-Maxwell system and can be compared to the Chapman-Enskog method developed in the context of the Boltzmann equations.

## The Vlasov-Maxwell system

In dimension 3 the relativistic Vlasov-Maxwell system (which we will simply call the Vlasov-Maxwell system) is, as established by Weibel in [144],

$$\begin{cases} \partial_t f^{\text{VM}} + \nu(\xi) \cdot \nabla_x f^{\text{VM}} + (E + \epsilon \nu(\xi) \times B) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VM}} = 0, & t \in [0, \infty), x, \xi \in \mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3, \\ \epsilon \partial_t E = \nabla \times B - j^{\text{VM}}, \\ \nabla \cdot E = \int_{\mathbf{R}^3} f_0(x, \xi) - 1, \\ \epsilon \partial_t B = -\nabla \times E, \\ \nabla \cdot B = 0 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

where

$$\rho^{\text{VM}}(t, x) = \int_{\mathbf{R}_\xi^3} f^{\text{VM}}(t, x, \xi) d\xi, \quad j^{\text{VM}}(t, x) = \int_{\mathbf{R}_\xi^3} \nu(\xi) f^{\text{VM}}(t, x, \xi) d\xi,$$

are respectively the macroscopic density and the density of current. The system is generally associated to a set of initial conditions :

$$f|_{t=0} = f_0, \quad (E, B)|_{t=0} = (E_0, B_0), \quad (3.1.3)$$

and compatibility conditions

$$\nabla_x \cdot E_0 = \rho^{\text{VM}}(0) - 1, \quad \nabla_x \cdot B_0 = 0. \quad (3.1.4)$$

The Cauchy problem for the system (3.1.2) has been intensively studied these last decades. Here is a (non-exhaustive) list of significant results :

- the existence of global weak solutions has been proved by DiPerna and Lions [40];
- the existence of local strong solutions and the conditions under which they remain regular has been tackled in many papers [7; 25; 38; 55; 56; 94; 104; 121; 146; 147].

The problem of the global existence of strong solutions remains open to this day, since it is not clear that a general class of initial data can provide enough a priori estimates to use the continuation criterion established by Glassey and Strauss in [56]. The main difference between the Vlasov-Maxwell and the Vlasov-Poisson systems, which prevents from filling this gap, is the hyperbolic character of the Maxwell equations which do not provide a gain of regularity, contrary to the Poisson equation.

One can also consider the Vlasov-Maxwell system using the formalism of the Liénard-Wiechert potentials (we refer to the chapter VIII of [98] or to the section 14.1 of [89] for the physical background and to the section 2 of [25] for the equivalence of the two formulations in the context of the Vlasov systems). Since we work on the torus  $\mathbf{T}^3$  we need to pay attention to the space mean value of the unknowns. Namely, for a function or vector field  $G$  we define its spatial mean-value as

$$\langle G \rangle := \int_{\mathbf{T}^3} G(x) dx,$$

and its average free part as

$$\hat{G} := G - \langle G \rangle.$$

In the following we will consider electromagnetic fields  $(E, B)$  deriving from a couple of potentials  $(\phi, A)$  according to the expressions

$$E(t, x) = -\nabla_x \phi(t, x) - \epsilon \partial_t A(t, x), \quad B(t, x) - \langle B \rangle(t) = \nabla_x \times A(t, x),$$

with the additional Coulomb gauge condition :

$$\nabla_x \cdot A = 0.$$

To encode this gauge condition into the equations we will use the Leray operator  $\mathbf{P}$ , which is the projection from the set of vector fields whose components are in  $L^2(\mathbf{T}^3)$  in the subspace of free-divergence free vector fields (we refer to the Appendix for its construction and its continuity property into the Sobolev spaces).

As in [74], without loss of our generality, we assume the normalization

$$\int_{\mathbf{T}^3} A|_{t=0} dx = 0.$$

In this context the Vlasov-Maxwell system takes the form

$$\begin{cases} \partial_t f^{\text{VM}} + v(\xi) \cdot \nabla_x f^{\text{VM}} + (E + \epsilon v(\xi) \times B) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VM}} = 0, & t \in [0, \infty), x, \xi \in \mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3, \\ E = -\nabla_x \phi - \epsilon \partial_t A, \quad B = \langle B_0 \rangle \nabla_x \times A, \\ -\Delta_x \phi = \rho^{\text{VM}} - 1, \\ \epsilon^2 \partial_t^2 A - \Delta_x A = \epsilon j^{\text{VM}} + \epsilon \partial_t \nabla_x \phi^{\text{VM}}, \quad \mathbf{P}(A) = 0. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

We can then decompose the vector potential  $A$ ,

$$A = \hat{A} + \langle A \rangle,$$

and since

$$\langle \partial_t \nabla_x \phi^{\text{VM}} \rangle = 0,$$

the integration over  $\mathbf{T}^3$  of the wave equation (3.1.5)<sub>4</sub> leads to

$$\epsilon \partial_t^2 \langle A \rangle = \langle j^{\text{VM}} \rangle.$$

It follows that,

$$\epsilon \frac{d}{dt} \langle A \rangle = -\langle E_0 \rangle + \int_0^t \langle j^{\text{VM}}(s) \rangle ds.$$

Moreover, because of the conservation of the charge relation

$$\partial_t \rho^{\text{VM}} + \nabla_x \cdot j^{\text{VM}} = 0,$$

one can check that

$$\mathbf{P}(j^{\text{VM}}) = j^{\text{VM}} + \partial_t \nabla_x \phi^{\text{VM}}.$$

Gathering these observations, we are now able to set the Vlasov-Maxwell system under the form we will study it.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f^{\text{VM}} + \nu(\xi) \cdot \nabla_x f^{\text{VM}} + (E + \epsilon \nu(\xi) \times B) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VM}} = 0, \\ E = E_T + E_L, \\ E_T(t, x) = \langle E_0 \rangle + \int_0^t \langle j^{\text{VM}} \rangle(s) ds - \nabla_x \phi, \\ E_L = -\epsilon \partial_t \hat{A}, \\ \hat{B} = \nabla \times \hat{A}, \\ -\Delta \phi^{\text{VM}} = \rho^{\text{VM}} - 1, \\ \epsilon^2 \partial_t^2 \hat{A} - \Delta_x \hat{A} = \epsilon \mathbf{P}(j). \end{array} \right. \quad (3.1.6)$$

### The Vlasov-Poisson system.

In dimension 3, in the potentials formalism, the Vlasov-Poisson system takes the form

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f^{\text{VP}} + \xi \cdot \nabla_x f^{\text{VP}} + E(t, x) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VP}} = 0, \\ E = -\nabla \phi^{\text{VP}}, \\ -\Delta \phi = \rho^{\text{VP}} - 1, \\ f^{\text{VP}}|_{t=0} = f_0, \quad E|_{t=0} = E_0, \end{array} \right. \quad (3.1.7)$$

with  $f_0, E_0$ , some given initial conditions.

The Cauchy problem for the Vlasov-Poisson system (3.1.7) has been studied by many authors :

- the existence of global weak solutions by Arseniev in [2], the uniqueness problem under certain conditions by Robert [127] and Loeper [103],
- the existence of local strong solutions was first established by Ukai and Okabe in [138], and the existence of global strong solutions firstly by Pfaffelmoser and Lions and Perthame [102; 122] and other authors later [60; 82; 130], and in particular by Batt and Rein on the torus [15].

The arguments yielding to the existence of global strong solutions need in particular the gain of regularity of the field  $E$  compared to the macroscopic density  $\rho$ , which is a consequence of the elliptic structure of the Poisson equation.

One can verify that, at least formally, when the parameter  $\epsilon$  tends to zero, the Vlasov-Maxwell system (3.1.2) reduced to the Vlasov-Poisson system (3.1.7). This *quasi-static* or non-relativistic limit was justified rigorously by Asano [8], Degond [38], and by Schaeffer [129] on finite interval of times (necessarily since the existence of strong solutions for the Vlasov-Maxwell system is only known locally). They compared the strong solutions of the two systems, for a given well-prepared initial data, and proved that in a certain Sobolev norm the asymptotic rate is of order  $O(\epsilon)$ . We shall also mention that, when the physical space is  $\mathbf{R}^3$ , Pallard [118] proved that the previous non-relativistic approximation is valid on intervals of time of order  $O(\epsilon^{1/401})$ .

### The Vlasov-Darwin system.

Between the quasi-static Poisson equation and the Maxwell equations, there exists a system of elliptic equations which does not neglect the magnetic effects, called the Darwin equations, named after the physicist Darwin who introduced them in 1920 [37]. His idea is first to consider the Helmholtz decomposition of the electric field  $E$  :

$$E = E_T + E_L,$$

where the longitudinal component (or irrotational part)  $E_L$  and the transverse part (or solenoidal part)  $E_T$  respectively satisfy

$$\nabla_x \times E_L = 0, \quad \nabla_x \cdot E_T = 0.$$

The Darwin approximation is based on the assumption

$$\partial_t E_T \ll \partial_t E_L.$$

Neglecting the time derivative of the transverse part of the electric field, simplifies greatly the Maxwell equations, and yields to the so-called Vlasov-Darwin system

$$\begin{cases} \partial_t f^{\text{VD}} + \nu(\xi) \cdot \nabla_x f^{\text{VD}} + (E_L + E_T + \epsilon \nu(\xi) \times B(t, x)) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VD}} = 0, & t \in [0, \infty), x, \xi \in \mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3, \\ \epsilon \partial_t B + \nabla_x \times E_T = 0, \\ \nabla_x \cdot E_L = \rho^{\text{VD}} - 1, \\ -\epsilon \partial_t E_L + \nabla_x \times B = \epsilon j^{\text{VD}}, \\ \nabla_x \cdot B = 0. \end{cases} \quad (3.1.8)$$

This system, particularly when settled on the space  $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ , was studied per se :

- global weak solutions exist (for small-initial data) [21], or for initial data in  $L^1 \cap L^\infty$  [117];
- the existence of local strong solutions was first proved by Pallard [117], the global existence was first proved under smallness assumptions by Seehafer [134], and by Sospreda-Alfonso, Agueh and Illner [135].

With the potential formalism, it is possible to express the transverse and the longitudinal components in terms of the electromagnetic potential  $(\phi, A)$  :

$$E_L = -\nabla\phi,$$

and

$$E_T = -\epsilon\partial_t A.$$

The Vlasov-Darwin system can then be rewritten

$$\begin{cases} \partial_t f^{\text{VD}} + \nu(\xi) \cdot \nabla_x f^{\text{VD}} + (E + \epsilon\nu(\xi) \times B(t, x)) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VD}} = 0, \\ E = -\nabla_x \phi - \epsilon\partial_t A, \\ B = \nabla_x \times A, \\ -\Delta_x \phi = \rho^{\text{VD}} - 1, \\ -\Delta_x A = \epsilon \mathbf{P}(j^{\text{VD}}), \\ f^{\text{VD}}|_{t=0} = f_0, \quad (E, B)|_{t=0} = (E_0, B_0). \end{cases} \quad (3.1.9)$$

Despite its apparent complexity, the Vlasov-Darwin system presents the advantage to be a Vlasov-elliptic system. In particular it seems to be of interest for numerical analysis, have investigated its numerical analysis and the rate of non-relativistic approximation (sometimes called *low frequency approximation* in this literature) it provides for the Vlasov-Maxwell system. We mention here the work of McGillen [109], or Besse, Mauer and Sonnendrücker [22]. In particular, Degond and Raviart [39] proved that the Darwin approximation of the Maxwell equations is accurate at an order  $O(\epsilon^3)$ . It was proved more recently by Benachour, Filbet et Laurençot [21] that the Vlasov-Darwin system also converge to the Vlasov-Poisson system when  $\epsilon$  tends to zero. Bauer and Kunze [19], in a slightly different way and framework, proved that the Vlasov-Darwin system is a non-relativistic approximation at an order  $O(\epsilon^3)$  of the Vlasov-Maxwell system.

## High order non-relativistic approximation

The problem of non-relativistic approximation has been of interest also in gravitational context (we refer to the work of Kunze, Rendall and Spohn [95; 96] and the references therein). Because of the complexity of the Vlasov-Einstein system (or other similar systems, we refer to [96]) it was interesting to look for simpler system that could be seen as truncated expansion in the parameter  $\epsilon$  of the whole system. In the gravitational context this method is called post-newtonian expansion (and sometimes post-coulombian for plasma systems). The method is somehow similar to the Hilbert expansion method for the Boltzmann equation. Namely, for each quantity  $f, \nu, E, B, \rho, j$  one makes the expansion in terms of the small parameter  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots, \\ E &= E_0 + \epsilon E_1 + \epsilon^2 E_2 + \dots, \\ &\dots, \end{aligned}$$

and then, after plugging this expansions in the initial system of PDEs, one identifies terms by terms. It gives a list of systems whose sources will be some function of the solutions of the systems of lower order.

This method is also the one used by Bauer and Kunze to derive a Vlasov-Darwin like system of equations in [19] which yields an approximation of order  $O(\epsilon^3)$ . This Hilbert expansion method has been the object of further investigations by Bauer [16; 17] in order to find some higher approximations to the Vlasov-Maxwell system than the Vlasov-Darwin system.

In a recent work [73], the authors used some linear tools devised by Mouhot and Villani [113] in the context of Landau damping to reach large time intervals for the non-relativistic limit of the Vlasov-Maxwell system. They study the stability of a homogeneous equilibrium in this non-relativistic limit, and they derived a different kind of expansion in  $\epsilon$  to reach approximation beyond Vlasov-Darwin. To do so, they chose the potential formalism we mentioned before, and chose to only make the expansion in  $\epsilon$  in the expression of the potential  $\hat{A}$ . More precisely, they write

$$\hat{A} = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i \mathcal{A}_i,$$

and then put this expansion in the wave equation (3.1.6)<sub>7</sub> before identifying term by term. It gives a hierarchy of Vlasov/elliptic systems, whose source terms are high order  $\xi$ -moments of the distribution function  $f$ . One can see the difference between the two methods similar to the difference between the Hilbert expansion method and the Chapman-Enskog expansion method (we refer for instance to the chapter VII of the monograph of Chapman and Cowling [34]).

## Our non-relativistic expansion method

In this paper we adapt the expansion technique derived in [73] to the non-linear Vlasov-Maxwell case. Our expansion only concerns the magnetic part and the transverse electric part of the electromagnetic field (E, B). More precisely, we write :

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i \mathcal{A}_i, \\ \partial_t \hat{A} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i \mathcal{A}_i^\sharp, \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

and we plug these expansions into the wave equations

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \partial_t^2 \hat{A} - \Delta_x \hat{A} &= \epsilon \widehat{\mathbf{P}(j^{\text{VM}})}, \\ \epsilon^2 \partial_t^2 (\partial_t \hat{A}) - \Delta_x (\partial_t \hat{A}) &= \epsilon \widehat{\mathbf{P}(\partial_t j^{\text{VM}})}. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

In fact, due to the structure of the waves equations (3.1.11), only the odd terms in the expansions (3.1.10) will be non-zero.

To simplify the notations, in the following we will denote by  $\hat{\mathbf{P}}$  the operator which associates to a vector field G the quantity  $\widehat{\mathbf{P}(G)}$ .

Our goal is to write the consistent corresponding high-order Vlasov-Darwin type systems, to explain why each  $\mathcal{A}_i$  and  $\mathcal{A}_i^\sharp$  will satisfy an elliptic equation, to justify the well-posedness in the appropriate Sobolev spaces of such systems, and finally to verify that it

indeed is a well-suited approximation system with a rate of approximation being an arbitrary high power of  $\epsilon$ .

The obtained result is different from the one [16; 19] in the sense that for a given target rate of approximation  $O(\epsilon^{2k+1})$ , we obtain a unique consistent Hamiltonian system and not a list of linearized Vlasov-Poisson like system whose source terms are computed from a system to another.

The main difficulty compared to [73] is the complexity of the structure of the source terms of the elliptic equation ruling the evolution of the potential  $\hat{A}$ , due to the non-linearity that we take into account here.

We will call our approximating system at a rate  $O(\epsilon^{2k+1})$  the  $k$ -th Vlasov-Darwin system (denoted  $\text{VD}k$ ) and its unknown  $f^{\text{VD}k}, E^k, B^k$ .

## 3.2 Main results

### 3.2.1 Definitions and preliminary comments

#### The analysis framework

We first give the definitions of the weighed Sobolev spaces (based on  $L^2$ ) we will work with.

We consider the weighed Sobolev norms, defined, for any  $k \in \mathbf{N}$ ,  $r \in \mathbf{R}$ , by

$$\|f\|_{\mathcal{H}_r^k} := \left( \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq k} \int_{\mathbf{T}^3} \int_{\mathbf{R}^3} (1+|\xi|^2)^r |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f|^2 dx d\xi \right)^{1/2}, \quad (3.2.1)$$

where for  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \{1, 2, 3\}^n$ , we denote the length of the multi indices by

$$|\alpha| = n, \quad |\beta| = n,$$

and

$$\partial_x^\alpha := \partial_{x_{\alpha_1}} \dots \partial_{x_{\alpha_n}}, \quad \partial_\xi^\beta := \partial_{\xi_{\beta_1}} \dots \partial_{\xi_{\beta_n}}.$$

The inverse Laplacian operator  $\Delta_x^{-1}$  on the torus  $\mathbf{T}^3$  is defined by mapping an average free distribution in  $L^2(\mathbf{T}^3)$  to the only solution of the Poisson equation

$$\Delta_x(g) = f.$$

As usual the notation  $\mathbf{H}^s$  will stand for the standard without weighted Sobolev spaces. When the considered function depends only on the space variable  $x$  we will precise it by  $\mathbf{H}_x^s$ .

We also introduce the weighted  $W^{k,\infty}$  spaces, to estimate the polynomial growth of functions of the momentum  $\xi$ . Its norm is defined, for any  $k \in \mathbf{N}$ ,  $r \in \mathbf{R}$ , by

$$\|h\|_{W_r^{k,\infty}} := \sum_{|\beta|\leq k} \left\| (1+|\xi|^2)^{r/2} \partial_\xi^\beta h \right\|_{L_\xi^\infty}. \quad (3.2.2)$$

In all the computations we will designate by  $C$  any constant depending only on the initial data and the lifespan of the solutions  $T$ . We will also use the notation  $\lesssim$  to write inequalities without constant of proportionality  $C$ .

One can notice that the operators  $\mathbf{P}$ , and  $\hat{\mathbf{P}}$  are continuous in all the  $L^2$ -base Sobolev spaces we defined above. This is essentially due to the Plancherel equality and we refer to the Appendix for more details.

### About the initial data.

The mean value  $\langle B \rangle(t)$  is in fact constant and then imposed by the initial data.

**Lemma 3.2.1.** *The space mean-value of  $B$  is constant, for any  $t$  in  $[0, T)$  :*

$$\langle B(t) \rangle = \langle B_0 \rangle$$

*Démonstration.* It is straightforward since from the Maxwell equations, for any  $t$  in  $[0, T)$  we have

$$\epsilon \frac{d}{dt} \langle B(t) \rangle = \epsilon \langle \partial_t B(t) \rangle = -\langle \nabla \times E(t) \rangle = 0.$$

□

For the sake of simplicity, we will assume in the following that

$$\langle B_0 \rangle = 0.$$

In particular, because of the previous lemma, it only shifts the magnetic field by a constant. Because of the scaling of the Maxwell equations,  $\langle B_0 \rangle = O(\epsilon)$ , and therefore our normalization only subtracts a constant in the second term of the expansion in  $\epsilon$  of the Lorentz force  $F_L = E + \epsilon v(\xi) \times B$ .

The unknowns of our approximating system will be the quantities  $f^{\text{VD}k}$ , and the potentials  $\phi^{\text{VD}k}, \mathcal{A}_i^k, \mathcal{A}_i^{\#,k}$  from which we build the electromagnetic field  $(E^k, B^k)$ . As in the case of the Vlasov-Poisson or Vlasov-Darwin systems, and because we do it on purpose, the equations governing the potentials are elliptic, and therefore we do not need to prescribe the initial data for them. It will be given by the trace at  $t = 0$  of some particular combination of moments of  $f^{\text{VD}k}$ . However, since we want to justify the approximation in  $\epsilon$  at the right order compared to the solution of the Vlasov-Maxwell system, given an initial data  $(f_0, E_0, B_0)$  (or equivalently the data of  $(f_0, A|_{t=0}, \epsilon \partial_t A|_{t=0})$ ), we need to precise that initially the approximation is at the correct order.

Let suppose that the  $\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_j^{\#}$  are properly defined (it is the object of Section 3.3), we set here the definition of what we mean by well-prepared initial conditions. Our definition will be very similar to Definition 8.6 of [74].

**Definition 3.2.1.** *We say that the initial data  $(f_0, E_0, B_0)$  is "well-prepared" of order  $2k + 1$  at a degree of regularity  $N_0 \in \mathbf{N}$  if*

$$\begin{aligned} (-\Delta_x)^{-1} \nabla_x \times B_0 &= \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i-1} \mathcal{A}_{2i-1}|_{t=0} + \mathcal{O}(\epsilon^{2k+1})_{\mathbb{H}_{2k+1}^{N_0}}, \\ \nabla_x (-\Delta_x)^{-1} \left( \int_{\mathbf{R}^3} f_0(x, \xi) d\xi - E_0 \right) &= \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i} \mathcal{A}_{2i-1}^{\#}|_{t=0} + \mathcal{O}(\epsilon^{2k+1})_{\mathcal{H}_{2k+1}^{N_0}}. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Recall that

$$A|_{t=0} = (-\Delta_x)^{-1} \nabla_x \times B_0$$

and

$$\epsilon \partial_t A|_{t=0} = \nabla_x (-\Delta_x)^{-1} \left( \int_{\mathbf{R}^3} f_0(x, \xi) d\xi - E_0 \right).$$



### About high order moments of the distribution function $f$ .

The more accurate will be our approximation system VDK the more higher degree and complex will be the moments of  $f^{\text{VD}k}$  arising in the source terms of the elliptic equations ruling the  $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i^\sharp$ .

We first set the definition of what we call high-order moments.

**Definition 3.2.2.** Let  $n \in \mathbf{N}$ , for a given distribution function  $f \in \mathcal{M}^+(\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3)$  solution to a Vlasov equation like (3.1.1), we will denote by  $M_n$ , or  $M_n(f)$ , the following set of momentum moments of a distribution  $f$  :

$$M_n \equiv M_n(f) = \left( \int_{\mathbf{R}^3} \prod_{1 \leq l \leq p} \partial_\xi^{\alpha_l} v_{\beta_l}(\xi) f(\cdot, \cdot, \xi) d\xi \right)_{\substack{0 \leq p \leq n, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\{1, 2, 3\}^{\mathbf{N}})^n \\ (\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\{1, 2, 3\}^{\mathbf{N}})^n}}. \quad (3.2.4)$$

**Remark 3.2.1.** We formulate the following remarks on the previous definition.

- We emphasize the fact that  $M_n$  is not a moment but a collection of moments in  $f$  whose highest order is  $n$ . We can also notice that there exists a positive constant  $C$ , such that for any  $k \in \mathbf{N}$ ,

$$\|\nabla_\xi^k v(\xi)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \leq C(1 + |v(\xi)|).$$

What really matters for our analysis is that the quantity  $\prod_{1 \leq l \leq n} \partial_\xi^{\alpha_l} v(\xi)$  has a polynomial growth with a degree less than  $n$ .

- Our notation is to consider  $M_n$ , with a capital  $M$ , the space of all the  $\xi$ -moments as defined above and to designate by  $m_n$ , with a little  $m$ , any elements of  $M_n$ . We will also often use the notation  $(m_n)$  to designate a subset of  $M_n$ , that is a finite collection of moments of order less than  $n$ .
- Our definition is based on a given distribution function  $f$  in the set of bounded measures  $\mathcal{M}^+(\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3)$ , hence we should write  $M_n(f)$  or  $m_n(f)$ . But in the following when we will consider such moments it will be clear to which distribution function we refer to and then we will often drop the reference to it.

We will now define a set whose elements are defined in a formal and general way, but the source terms that will appear in the iteration process of construction of the  $k$ -th Vlasov Darwin system VDK will embed into this abstract framework. Before explaining rigorously the definition of these sets let us give an idea of what it will be. We will denote, for  $k \in \mathbf{N}$  by  $\mathbf{D}_k$  the set whose elements are of the form :

$$\Delta^{-k} \left( Q \left( \left( \Lambda_{i_1} \left( Q_{i_1} \left( \dots Q_{i_1, \dots, i_{2k-2}} \left( \Lambda_{i_1, \dots, i_{2k-1}} \left( (m_{k+2}), E_L \right)_{1 \leq i_{k+1} \leq N_{i_1, \dots, i_{2k-2}}} \right) \dots \right)_{1 \leq i_1 \leq N_Q} \right) \right) \right) \right), \quad (3.2.5)$$

where :

- each  $Q_{i_1, \dots, i_k}$  designates a polynomial of degree 2 with valuation 1 taking  $N_{i_1, \dots, i_k}$  arguments,
- each  $\Lambda_{i_1, \dots, i_{k+1}}$  designates an operator being the composition of a pseudo-differential operator of degree belonging to  $\{-2, -1, 0\}$  with an operator  $\hat{\mathbf{P}}^\alpha$ , with  $\alpha \in \{0, 1\}$ ,
- $E_L := -\nabla_x \Phi + \int_{\mathbf{T}^3} E_0(x) dx - \int_0^t \int_{\mathbf{T}^3} j(s, x) dx ds$  is the so-called transverse part of the electric field,

—  $(m_{k+2})$  designates a finite set of  $\xi$ -moments of order at most  $k + 2$  of  $f^{\text{VD}k}$ .

Let us precise what we mean by a polynomial of degree less than 2 of valuation greater than 1. We will denote the set of such element  $\mathcal{Q}$ . For all  $n \in \mathbf{N}$  we denote by  $\mathcal{Q}_n$  the set

$$\{P \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n] : P(., X_j = 0, .) = 0, \forall j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

We then set  $\mathcal{Q} := \cup_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{Q}_n$ .

**Remarks.**

- It is important to notice that this definitions is based at the end on  $\xi$ -moments of a distribution function  $f$  in the set of bounded measure  $\mathcal{M}^+(\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3)$ . Then we should write  $\mathbf{D}_k(f)(t, x)$  but for the sake of simplicity we will not, most of the time, make mention of the dependence to the variables  $t$  and  $x$ . Also, in our context, the set will be associated to the distribution function  $f^{\text{VD}j}$ , the unknown of the system  $\text{VD}j$ , and should then be noted  $\mathbf{D}_k(f^{\text{VD}j})$ . In order to enlighten the notations, when it will be clear to which system and distribution function we work with, we will only write  $\mathbf{D}_k$ .
- For our purpose it is enough to say that the considered operators are continuous in the weight-Sobolev norms we will use to prove the local existence of a regular solution. It is indeed the case because of the non-positive degree of the pseudo-differential operators  $\Lambda$  of  $\mathcal{L}$  which are the cornerstone of the structure of  $\mathbf{D}_k$ , and because the Leray projector  $\mathbf{P}$  is continuous in the Sobolev-spaces (the continuity property of the Leray projector is proved in the Appendix).

Loosely speaking elements of  $\mathbf{D}_k$  have a structure of "russian dolls" with at the very end, arguments being either moments of order  $2k$  or a combination  $E_0$  and  $B_0$ . In other words, it is a quadratic form applied to arguments which are operators applied to quadratic forms etc. At the end of this chain of composition lies a quantity which can be either a part of the initial data (if one looks at what the longitudinal part  $E_L$  of the electric field  $E$  is) or a  $\xi$ -moment of  $f^{\text{VD}k}$  of order at most  $2k$ . The index  $k$  measures the size of the  $\nu(\xi)$ -moments and the length of the chain of composition in the "russian doll" structure.

Let formalize this structure in the following definitions.

For the sake of simplicity, we first introduce the following notation.

**Definition 3.2.3.** For any  $n \in \mathbf{N}$  we set,

$$\tilde{M}_n := M_n \cup \{E_L\}$$

**Definition 3.2.4.** We introduce now some operations on the sets we will consider.

- We introduce the shifting operator  $S$  in the following manner. For a given set  $A \equiv A(M_n)$ , we define

$$S(A) := A(M_{n+1}).$$

We also define  $S^{k+1}(A) = S(S^k(A))$ .

- For a given  $Q \in \mathcal{Q}$  we define

$$Q(A) := \{Q(a) : a \in A\}.$$

— We set

$$D_x^k(A) := \{\partial_x^\alpha a : a \in A, |\alpha| \leq k\},$$

for any  $k \in \mathbf{N}$ .

— We define

$$\mathcal{L} := \{D_x^2(\{\Delta_x^{-1} \circ \hat{\mathbf{P}}\}), Id\},$$

that is a space of pseudo-differential operators with degree in  $\{-2, -1, 0\}$ .

— We set,

$$\mathcal{L}(A) := \{\Lambda(a) : a \in A, \Lambda \in \mathcal{L}\}.$$

— We define in the same manner the sets  $\Delta_x(A)$  and  $\Delta_x^{-k} \circ \hat{\mathbf{P}}(A)$ .

— For any set  $A$  we define

$$A^{(1)} := S \circ Q \circ D_x(A),$$

and recursively  $A^{(j+1)} := (A^{(j)})'$ .

**Remark 3.2.2.** The definition of  $A'$  has to be thought as the time derivative of  $\mathbf{D}_k$ . Indeed, if one look at the Vlasov equation, taking the time derivatives of moments is equivalent to apply the operation  $S \circ Q \circ D_x$  to it.

We are now in position to define the sets  $\mathbf{D}_k$  in which the terms  $\mathcal{A}_{2k-1}, \mathcal{A}_{2k-1}^\sharp$  will live.

**Definition 3.2.5.** For  $k \in \mathbf{N}^*$ , we define the sets  $\mathbf{D}_k$  as follows :

$$\mathbf{D}_k := \Delta_x^{-k} \circ \hat{\mathbf{P}} \left( (Q \circ \mathcal{L})^{2k-1} \left( D_x^{2k-1} (\tilde{M}_{2k}) \right) \right).$$

**Remark 3.2.3.** From the previous definition defined by iteration, there is a hierarchy between the sets  $\mathbf{D}_k^{(j)}$  that we can resume in the following diagram

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{M}_0 & \subset & (\tilde{M}_0)^{(1)} & \subset & \dots & (\tilde{M}_0)^{(j)} & \dots \\ \cap & & \cap & & \dots & \cap & \dots \\ \mathbf{D}_1 & \subset & \mathbf{D}_1^{(1)} & \subset & \dots & \mathbf{D}_1^{(j)} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \dots \end{array} \quad (3.2.6)$$

The definition of the set  $\mathbf{D}_k$  is quite formal and much more general than the one of the source terms  $\mathcal{S}_k$  and  $\mathcal{S}_k^\sharp$  that will appear in the next paragraph, but this little effort give us the necessary flexibility to prove rigorously the evolution of the regularity of the source terms  $\mathcal{S}_k$  and  $\mathcal{S}_k^\sharp$  when transitioning from the system  $\text{VD}k$  to the system  $\text{VD}(k+1)$ .

### The source terms

We now state the regularity assumptions we expect the source terms to satisfy in order to justify the well-posedness of our approximation systems.

**Definition 3.2.6.** Let  $j, n \in \mathbf{N}$ , with  $n > 4$ . We say that an application

$$\mathcal{S} : L^2 \cap L^\infty(0, t; H_x^n(\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3)) \times L^2 \cap L^\infty(0, t; H_x^n(\mathbf{T}^3)) \rightarrow L^\infty(0, t; H_x^n(\mathbf{T}^3))$$

satisfies the regularity assumption  $(\mathbb{H}\mathcal{S}_j^n)$  ( $j$  stands for the size of the moments and  $n$  for the degree of regularity) if for all  $f \in L^2 \cap L^\infty(0, t; H_x^n(\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3)) \times L^2 \cap L^\infty(0, t; H_x^n(\mathbf{T}^3)) :$

—  $\mathcal{S}(0) = 0$ ,

— there exists a positive constant  $C$  such that for any  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{S}$  satisfies,

$$\|\mathcal{S}(f, g)\|_{L^2(0, t; H_x^n(\mathbf{T}^3))} \leq C\Gamma\left(t, (\|m_{2j+2}(f)\|_{L^2(0, t; H_x^{n+1}(\mathbf{T}^3))}, \|g\|_{H_x^{n+1}})\right), \quad (3.2.7)$$

$$\|\mathcal{S}(f, g)\|_{L^\infty(0, t; H_x^n(\mathbf{T}^3))} \leq C\Gamma'\left(t, (\|m_{2j+2}(f)\|_{L^\infty(0, t; H_x^{n+1}(\mathbf{T}^3))}, \|g\|_{H_x^{n+1}})\right), \quad (3.2.8)$$

with  $\Gamma, \Gamma'$  two polynomials non-decreasing with respect to each of their arguments.

**Remark 3.2.4.** In fact the maps  $\mathcal{S}$  will not only satisfy some boundedness properties as stated in the definition of the hypothesis (HS), they will also satisfy some stability estimates, crucial for the well-posedness of the system, as we can see by looking at the results of [69]. But we do not add this stability property in the definition because it will be a consequence of the bounds (3.2.7) and the Vlasov equation of the system.

### Statement of the main result

We are now able to state the main result of this paper.

**Theorem 3.2.1.** Let  $k \in \mathbf{N}$ ,  $N_0 > 4$  and  $r > 2k + 2$ . Let  $f_0 \in \mathcal{H}_r^{N_0+1}$ ,  $(E_0, B_0) \in (H_x^{N_0+1})^2$  satisfying the compatibility conditions (3.1.4) and well-prepared of order  $2k + 1$  at regularity  $N_0$  in the sense of Definition 3.2.1.

There exist then some applications  $(\mathcal{S}_j^{(k)}, \mathcal{S}_j^{\#, (k)})_{1 \leq j \leq k}$  satisfying the assumption (HS) $_j^{N_0}$  defined in Definition 3.2.6, such that the system

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f^{\text{VD}k} + v(\xi) \cdot \nabla_x f^{\text{VD}k} + (E^k + \epsilon v(\xi) \times B^k) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VD}k} = 0, \quad t \in [0, \infty), \quad x, \xi \in \mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3, \\ -\Delta_x \phi^k = \rho^k - 1, \\ \mathcal{A}_{2j-1}^{(k)} = \mathcal{S}_j^{(k)}(f^{\text{VD}k}, E_0), \quad \forall 1 \leq j \leq k, \\ \mathcal{A}_{2j-1}^{\#, (k)} = \mathcal{S}_j^{\#, (k)}(f^{\text{VD}k}, E_0), \quad \forall 1 \leq j \leq k, \\ E^k = -\nabla \phi^k + \langle E_0 \rangle - \int_0^t \langle j^k \rangle(s) ds - \sum_{j=1}^k \epsilon^{2j-1} \mathcal{A}_{2j-1}^{\#, (k)}, \\ B^k = \nabla \times \left( \sum_{j=1}^k \epsilon^{2j-1} \mathcal{A}_{2j-1}^{(k)} \right), \\ \rho^k(t, x) = \int_{\mathbf{R}^3} f^{\text{VD}k}(t, x, \xi) d\xi, \quad j^k(t, x) = \int_{\mathbf{R}^3} v(\xi) f^{\text{VD}k}(t, x, \xi) d\xi, \\ f^{\text{VD}k}|_{t=0} = f_0, \end{array} \right. \quad (3.2.9)$$

is well-posed, and such that moreover the non-relativistic approximation holds :

$$\|f^{\text{VM}} - f^{\text{VD}k}\|_{L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_r^{N_0})} + \|(E - E^k, B - B^k)\|_{L^\infty(0, T; H^{N_0})} \lesssim \epsilon^{2k+1}. \quad (3.2.10)$$

### Remarks.

— We must precise the convention about our indexation of the set of Vlasov-Darwin systems. We index by  $k$  all quantities that appear in the system (3.2.9) called the  $k$ -th Vlasov-Darwin system, or the  $\text{VD}_k$  system, but we will avoid to mention it as the "Vlasov-Darwin system of order  $k$ ", because the system (3.2.9) is in fact an approximation of order  $\epsilon^{2k+1}$  of the Vlasov-Maxwell system. Then, without any possible confusion, the index  $k$  refer to the  $k$ -th step of the construction of the set of approximating Vlasov-Darwin systems, and thus to a leading term of order  $\epsilon^{2k+1}$ .

- The proof of the existence of the system (3.2.9) (the core of the Theorem) is constructive. We will not be able to give an analytic expression of the source terms but we will explain in detail how the structure and the regularity of the source terms propagates from step  $k$  to step  $k + 1$ . The step  $k = 0$  (the Vlasov-Poisson system) and  $k = 1$  (the Vlasov-Darwin system) being already known.
- There is no uniqueness in our result, and for good reasons since an acceptable perturbation of order  $O(\epsilon^{2k+1})$  of the equations does not change the rate of approximation nor the well-posedness. In particular, our statement can be generalized on at least two points :
  - If we did not initially assume that the initial magnetic field satisfied  $\langle B_0 \rangle = 0$ , we could have take, in the Vlasov equation (3.2.9)<sub>1</sub>,  $B^k + \langle B^k \rangle$ , with  $\langle B^k \rangle$  a constant such that  $|\langle B^k \rangle - \langle B_0 \rangle| \lesssim \epsilon^{2k+1}$ .
  - In the same manner, we could have taken a slightly more general Definition of well-prepared initial solution (Definition 3.2.1), that is to say a wider layer in which the initial data  $(f^{\text{VD}k}(0, \cdot, \cdot), E^k(0, \cdot), B^k(0, \cdot))$  is acceptable. Taking

$$|f^{\text{VD}k}(0) - f_0| \lesssim \epsilon^{2k+1}$$

does not change the result. However, since this generalizations can be made with minor changes we choose to take the simplest case.

## Outline of the proof

The proof of Theorem 3.2.1 is divided in three parts.

The first one, the most original, is the existence part. As explained in the Introduction it will rely on an iterative process which builds the expansion of the potential  $A$  and its time derivative by truncating the waves equations (3.1.11). The heuristic of the method is detailed before justifying rigorously the propagation of the structure of the source terms when building our expansions in  $\epsilon$  of  $\hat{A}$  and  $\partial_t \hat{A}$ . We then present in concrete terms the system just after the Vlasov-Darwin system, that is VD3 to illustrate the particular structure of the source terms.

In section 4 we tackle the issue of the well-posedness of the system. It is essentially a consequence of the Vlasov/elliptic structure. We use here a local existence result settled by Han-Kwan in [69] for a wide class of Vlasov systems. Despite the complexity of the structure of the source terms, they behave well for the  $H_x^n$  norms since  $H_x^n$  is a Banach algebra for  $n > 4$  and we do not lose any degree of regularity compared to the distribution function because the pseudo-differential operators involved in the definition of the sets  $\mathbf{D}_k$  are all of non-positive degree.

Finally, in Section 5 we prove the non-relativistic approximation by standard arguments. To do so, the fact that the initial condition is well-prepared at the correct order is essential.

## 3.3 Derivation of the higher Vlasov-Darwin systems.

We first give a heuristic of the iterative process that leads to the construction of (3.2.9).

### 3.3.1 Description of the recursive construction method.

We recall the expression of the Vlasov-Maxwell system in its potential form :

$$\begin{cases} \partial_t f^{\text{VM}} + v(\xi) \cdot \nabla_x f^{\text{VM}} + (E_L + \epsilon(-\partial_t \widehat{A} + v(\xi) \times \nabla_x \widehat{A})) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VM}} = 0, \\ -\Delta_x \phi = \rho^{\text{VM}} - 1, \\ \epsilon^2 \partial_t^2 \widehat{A} - \Delta_x \widehat{A} = \epsilon \mathbb{P} \widehat{j}_F. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

The idea of the construction is to approximate the potential vector  $\widehat{A}$  (and thus all its spatial derivatives, in particular  $\nabla \times \widehat{A}$ ) and its time derivative  $\partial_t \widehat{A}$ , which acts on the distribution function through the Vlasov equation since the transverse part of the electric field reads  $E_T = -\epsilon \partial_t \widehat{A}$ , by a sum of terms which satisfy high order elliptic equations.

The procedure is done at a formal level. Loosely speaking the approximation can be seen as a truncation of the expansion in  $\epsilon$  of  $\widehat{A}$  and  $\partial_t \widehat{A}$  by keeping the right orders in the auxiliary wave equations (3.1.11). Therefore one will have to manipulate  $\xi$ -moments, that is elements of  $M_n(f^{\text{VM}})$  defined in Definition 3.2.2. One has to keep in mind that we want to build a closed system for equations approximating (3.3.1). In this perspective the definitive  $\xi$ -moments that will appear as sources in the final system will be elements of  $M_n(f^{\text{VD}k})$ . We are going then to use the notation  $f(t, x, \xi)$  to designate the distribution function, being either  $f^{\text{VM}}$  or  $f^{\text{VD}k}$  for some integer  $k$ , when we will still be working at the formal level of constructing the systems.

At first glance, one would have the idea to decompose  $\widehat{A}$  as follows

$$\widehat{A} = \mathcal{A}_0 + \epsilon \mathcal{A}_1 + \epsilon^2 \mathcal{A}_2 + \dots + \epsilon^k \mathcal{A}_k + \dots, \quad (3.3.2)$$

in which each  $\mathcal{A}_k$  is divergence-free and is  $O(1)$ . Formally,  $\partial_t \widehat{A}$  and  $\partial_t^2 \widehat{A}$  could also be expanded as

$$\begin{aligned} \partial_t \widehat{A} &= \partial_t \mathcal{A}_0 + \epsilon \partial_t \mathcal{A}_1 + \epsilon^2 \partial_t \mathcal{A}_2 + \dots + \epsilon^k \partial_t \mathcal{A}_k + \dots \\ \partial_t^2 \widehat{A} &= \partial_t^2 \mathcal{A}_0 + \epsilon \partial_t^2 \mathcal{A}_1 + \epsilon^2 \partial_t^2 \mathcal{A}_2 + \dots + \epsilon^k \partial_t^2 \mathcal{A}_k + \dots, \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

assuming that again for each integer  $k$ ,  $\partial_t \mathcal{A}_k$  and  $\partial_t^2 \mathcal{A}_k$  are  $O(1)$ . Then one will plug these expansions into the equations (3.1.11) and obtain a series of relations between the  $\mathcal{A}_k$  and the  $\partial_t^2 \mathcal{A}_k$  for each integer  $k$ .

It leads to two observations. The first one, a consequence of the structure of (3.1.11), which is going to hold even after we modify the process described before, is obtained by a straight forward induction : for any  $k \in \mathbf{N}$ ,

$$-\Delta_x \mathcal{A}_{2k} = 0,$$

and thus  $\mathcal{A}_{2k} = 0$ . It implies in particular that we can write a similar expansion for the Lorentz force  $F_L$  :

$$F_L = \epsilon F_L^0 + \epsilon^2 F_L^2 + \dots \quad (3.3.4)$$

Secondly one can observe that this method does not offer a closed system of elliptic equations due to the presence of time derivatives. To explain why, let us consider the case of  $\partial_t \mathcal{A}_1$ . Namely,

$$-\Delta_x (\partial_t \mathcal{A}_1) = \epsilon \widehat{\mathbb{P}} \partial_t j^{\text{VM}},$$

and looking at the Vlasov equation we obtain the relation

$$\partial_t j^{\text{VM}} = -\nabla \cdot \int_{\mathbf{R}^3} (\nu(\xi) \otimes \nu(\xi) f^{\text{VM}}(t, x, \xi) d\xi) + \int_{\mathbf{R}^3} \nu(\xi) (F_L^0 + \epsilon^2 F_L^2 + \dots) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VM}}(t, x, \xi) d\xi. \quad (3.3.5)$$

But  $F_L^4$  for instance is defined through terms involving  $\partial_t A_3$  and so the easiest way to have a closed system of elliptic equations is to only keep the 0-order term in the expression of  $\partial_t j^{\text{VM}}$ .

For these reasons we will work on the expansions of both  $\hat{A}$  and  $\partial_t \hat{A}$  :

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \epsilon \mathcal{A}_1 + \epsilon^3 \mathcal{A}_3 + \dots + \epsilon^{2k+1} \mathcal{A}_{2k+1} + \dots \\ \partial_t \hat{A} &= \epsilon \mathcal{A}_1^\# + \epsilon^3 \mathcal{A}_3^\# + \dots + \epsilon^{2k+1} \mathcal{A}_{2k+1}^\# + \dots \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Using the Vlasov equation and the expansion of  $F_L$  (3.3.4) we can formally write :

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \mathcal{A}_1 &= J_{1,0} + \epsilon^2 J_{1,1} + \dots + \epsilon^{2k} J_{1,i} + \dots \\ \partial_t^2 \mathcal{A}_3 &= J_{3,0} + \epsilon^2 J_{3,1} + \dots + \epsilon^{2i} J_{3,i} + \dots \\ &\dots \\ \partial_t^2 \mathcal{A}_{2k-1} &= J_{2k-1,0} + \epsilon^2 J_{2k-1,1}^\# + \dots + \epsilon^{2i} J_{2k-1,i} + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

and similarly

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \mathcal{A}_1^\# &= J_{1,0}^\# + \epsilon^2 J_{1,1}^\# + \dots + \epsilon^{2k} J_{1,i}^\# + \dots \\ \partial_t^2 \mathcal{A}_3^\# &= J_{3,0}^\# + \epsilon^2 J_{3,1}^\# + \dots + \epsilon^{2i} J_{3,i}^\# + \dots \\ &\dots \\ \partial_t^2 \mathcal{A}_{2k-1}^\# &= J_{2k-1,0}^\# + \epsilon^2 J_{2k-1,1}^\# + \dots + \epsilon^{2i} J_{2k-1,i}^\# + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

To compute these expansions we will use the expansion in  $\epsilon$  of the first two time derivatives of the distribution function  $f$  obtained thanks to the Vlasov equation. However it will require the expansion in  $\epsilon$  of  $\partial_t F_L$  and consequently the expansions of  $\partial_t \mathcal{A}_k$  and  $\partial_t^2 \mathcal{A}_k$ . Therefore we build in parallel the same tables for the single time derivative, that is

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{A}_1 &= I_{1,0} + \epsilon^2 I_{1,1} + \dots + \epsilon^{2k} I_{1,i} + \dots \\ \partial_t \mathcal{A}_3 &= I_{3,0} + \epsilon^2 I_{3,1} + \dots + \epsilon^{2i} I_{3,i} + \dots \\ &\dots \\ \partial_t \mathcal{A}_{2k-1} &= I_{2k-1,0} + \epsilon^2 I_{2k-1,1}^\# + \dots + \epsilon^{2i} I_{2k-1,i} + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

and

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{A}_1^\# &= I_{1,0}^\# + \epsilon^2 I_{1,1}^\# + \dots + \epsilon^{2k} I_{1,i}^\# + \dots \\ \partial_t \mathcal{A}_3^\# &= I_{3,0}^\# + \epsilon^2 I_{3,1}^\# + \dots + \epsilon^{2i} I_{3,i}^\# + \dots \\ &\dots \\ \partial_t \mathcal{A}_{2k-1}^\# &= I_{2k-1,0}^\# + \epsilon^2 I_{2k-1,1}^\# + \dots + \epsilon^{2i} I_{2k-1,i}^\# + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

The goal is now to give a method of construction of these two list of expansions, the issue being that the term  $J_{2k-1,i}$ , for some  $(k, i) \in \mathbb{N}^2$ , depend on the term  $J_{2k'-1,i'}$  if  $2k-1+i > 2k'-1+i'$ .

We first give an heuristic of the method.

- we first construct  $\mathcal{A}_1$ , which we emphasize only depends on the first moments of  $f$ ,  $M_1$ ,
- then we can compute  $\partial_t \mathcal{A}_1$  and expand it in  $\epsilon$ , we can construct  $A_1^\sharp$  which will only depend on  $E_0(x)$  and the second momentum of  $f$ , saying,  $J_{1,0}^\sharp = J_{1,0}^\sharp(\tilde{M}_2)$ ,
- ...
- for the general case, after constructing  $\mathcal{A}_{2k-1}$  and  $\mathcal{A}_{2k-1}^\sharp$ , we can expand them as

$$\begin{aligned}\partial_t^2 \mathcal{A}_{2k-1} &= J_{2k-1,0} + \epsilon^2 J_{2k-1,1} + \dots + \epsilon^{2i} J_{2k-1,i} + \dots, \\ \partial_t^2 \mathcal{A}_{2k-1}^\sharp &= J_{2k-1,0}^\sharp + \epsilon^2 J_{2k-1,1}^\sharp + \dots + \epsilon^{2i} J_{2k-1,i}^\sharp + \dots,\end{aligned}\tag{3.3.11}$$

and then we define  $\mathcal{A}_{2k+1}$  as the inverse Laplacian of the sum of the main part of  $\partial_t^2 \mathcal{A}_{2k-1}$ , the  $\epsilon^2$  part of  $\partial_t^2 \mathcal{A}_{2k-3}$ , ..., the  $\epsilon^{2k-2}$  part of  $\partial_t^2 \mathcal{A}_1$ , and the  $\epsilon^{2k+2}$  part of  $\overline{\mathbb{P}} \partial_t j^{\text{VM}}$ , namely

$$\Delta_x \mathcal{A}_{2k+1} = J_{2k-1,0} + J_{2k-3,1} + J_{2k-5,2} + \dots + J_{3,k-2} + J_{1,k-1},\tag{3.3.12}$$

and likewise,

$$\Delta_x \mathcal{A}_{2k+1}^\sharp = J_{2k-1,0}^\sharp + J_{2k-3,1}^\sharp + J_{2k-3,2}^\sharp + \dots + J_{5,k-2}^\sharp + J_{1,k-1}^\sharp - J_{0,k}^\sharp.\tag{3.3.13}$$

We shall emphasize here that each  $J_{2k-1-2i,i}$  and  $J_{2k-1-2i,i}^\sharp$ , with  $0 \leq i \leq k-1$  only depend on the moments of  $f$  in  $\tilde{M}_{2k}$ , and the already known  $\mathcal{A}_{2j-1}^\sharp$ ,  $\mathcal{A}_{2j-1}$ , for  $1 \leq j \leq k$ .

Before describing step by step the construction we mention that by definition :

$$\partial_t E_L = -\partial_t \nabla_x \phi - \langle j_F \rangle = -\nabla_x \nabla_x \cdot (\Delta_x^{-1}(\rho)) - \langle j_F \rangle.\tag{3.3.14}$$

**Step 1 :  $k = 1$ , calculate  $\mathcal{A}_1$  and  $\mathcal{A}_1^\sharp$  :** We start from the Vlasov-Poisson system, in which the force field is given by  $F_L^0 := -\nabla_x \rho$ . We set :

- $\mathcal{A}_1 := -\Delta_x^{-1} \circ \hat{\mathbf{P}}(j)$ ,
- $\mathcal{A}_1^\sharp := -\Delta_x^{-1} \circ \hat{\mathbf{P}}(-\nabla \cdot \int_{\mathbf{R}^3} (v(\xi) \otimes v(\xi)) f(t, x, \xi) + E_L v(\xi) \cdot \nabla_\xi f(t, x, \xi) d\xi)$ .

Using the Vlasov equation we can write the expansion of  $\partial_t \mathcal{A}_1$  and  $\partial_t \mathcal{A}_1^\sharp$  up to "order 0" :

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{A}_1 &= I_{1,0}, \\ \partial_t \mathcal{A}_1^\sharp &= I_{1,0}^\sharp.\end{aligned}\tag{3.3.15}$$

**Step  $k \leq 2$  : build  $\mathcal{A}_{2j-1}, \hat{A}_{2j-1}^\sharp$  for all  $1 \leq j \leq k$  :** We assume that the step  $k-1$  has been realized and that  $\mathcal{A}_{2j-1}, \mathcal{A}_{2j-1}^\sharp \in \mathbf{D}_j$ , for all  $1 \leq j \leq k$ . Then we can write

$$F_L^k = \sum_{i=1}^{k-1} \epsilon^{2i} F_{L,i}^k.$$



From this expansion up to an order  $2i$ , we have, thanks to the Vlasov equation integrated against  $\nu(\xi)^\alpha$ , for  $\alpha \in \{1, 2, 3\}^N$ ,  $|\alpha| \leq n$ , that for any  $m_n \in M_n$

$$\begin{cases} \partial_t m_n = m'_{n,0} + \dots + \epsilon^{2k} m'_{n,k}, \\ \partial_t^2 m_n = m''_{n,0} + \dots + \epsilon^{2k} m''_{n,k} + \epsilon^{2k+2} R_{m_n,k}, \end{cases} \quad (3.3.16)$$

with  $m'_{n,j} \in S^{n+1} \circ Q \circ \mathcal{L}(D_j)$  and  $m''_{n,j} \in S^{n+2} \circ Q \circ \mathcal{L} \circ Q(D_x^2(D_j))$ , and the remainder  $R_{m_n,k}(\epsilon)$  a polynomial in  $\epsilon$  of degree  $2k-2$ , valuation 0, and with coefficients in  $S^{n+2} \circ Q \circ \mathcal{L} \circ Q(D_x^2(D_j))$ . From the second line of these expansions, and the knowledge of the structure of

$$\mathcal{A}_1^{(1)}, \mathcal{A}_1^{\sharp,(1)}, \dots, \mathcal{A}_{2k-1}^{(1)}, \mathcal{A}_{2k-1}^{\sharp,(1)},$$

in terms of  $\nu(\xi)$ -moments of  $f$ , we can deduce the list of expansions

$$\begin{aligned} \partial_t j^k &= J_{0,0}^{\sharp,(k)} + \dots + \epsilon^{2k} J_{0,k}^{\sharp,(k)}, \\ \partial_t^2 \mathcal{A}_1^{(k)} &= J_{1,0}^{(k)} + \dots + \epsilon^{2k} J_{1,k}^{(k)} + \epsilon^{2k+2} R_1^k, \\ \partial_t^2 \mathcal{A}_1^{\sharp,(k)} &= J_{1,0}^{\sharp,(k)} + \dots + \epsilon^{2k} J_{1,k}^{\sharp,(k)} + \epsilon^{2k+2} R_1^{\sharp,k}, \\ &\dots, \\ \partial_t^2 \mathcal{A}_{2k-1}^{(k)} &= J_{2k-1,0}^{(k)} + \dots + \epsilon^{2k} J_{2k-1,k}^{(k)} + \epsilon^{2k+2} R_{2k-1}^k, \\ \partial_t^2 \mathcal{A}_{2k-1}^{\sharp,(k)} &= J_{2k-1,0}^{\sharp,(k)} + \dots + \epsilon^{2k} J_{2k-1,k}^{\sharp,(k)} + \epsilon^{2k+2} R_{2k-1}^{\sharp,k}, \end{aligned}$$

We then set, for any  $2 \leq i \leq k+1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2i-1}^{(k+1)} &= \Delta_x^{-1} \left( \sum_{l=0}^{i-1} J_{2(i-l)-1,l}^{(k)} \right) \in \mathbf{D}_i, \\ \mathcal{A}_{2i-1}^{\sharp,(k+1)} &= \Delta_x^{-1} \left( \sum_{l=0}^{i-1} J_{2(i-l)-1,l}^{\sharp,(k)} - J_{0,i}^{\sharp,(k)} \right) \in \mathbf{D}_i. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

From the first line of (3.3.16) we can upgrade the expansion in  $\epsilon$  of the first time derivative of all the  $\mathcal{A}_{2j-1}, \mathcal{A}_{2j-1}^{\sharp}$ ,  $1 \leq j \leq k+1$  up to the "order  $2k$ ", which concludes the step  $k+1$ .

The previous iteration process has a triangular structure. It means that going from the  $k$ -th step to the next one consists essentially in adding (or constructing) the next diagonal in the table formed by the expansions (3.3.11). More precisely, if we consider the table whose  $(i, j)$  elements is the  $\epsilon^{2j-2}$  part of the expansion of  $\partial_t^2 \hat{A}_{2i-1}$ , then the iterative construction of this table, on which relies our approximate system, is done by adding a diagonal after another. The same is valid for the  $\epsilon$  expansions of the  $\partial_t^2 \mathcal{A}_{2i-1}^{\sharp}$ .

We furthermore say that the elements of these diagonals share the same structure. In the following paragraph we will detail it and prove the validity of our induction.

### 3.3.2 Propagation of the structure through the iterative construction method.

In this section we formalize the process described before by explaining how the structure of the terms in the expansion propagates from step  $k$  to step  $k+1$ . It will yield the

existence part of the Theorem 3.2.1.

Before going into the rigorous justification of the iterative construction method, we verify that the elements of the set  $\mathbf{D}_k$  have indeed the correct degree of regularity.

**Lemma 3.3.1.** *Let  $k \in \mathbf{N}$ , then for any  $n > 4$ , for any  $d_k \in \mathbf{D}_k$ , any  $t \geq 0$ ,*

$$\|d_k(t)\|_{H_x^n} \lesssim \Gamma(t, (\|m_{k+2}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}, \|E_0\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}), \quad (3.3.18)$$

where  $\Gamma$  is a polynomial and  $(\|m_{k+2}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)})$  designates a finite set of  $L^2$ -norms of  $\xi$ -moments of order at most  $k+2$  of a distribution function  $f$ .

*Démonstration.* First, we shall recall that for  $n$  large enough (in the dimension 3 we chose to work,  $n > 4$  is enough), the Sobolev space  $H_x^n$  has a Banach algebra structure and in particular the norm of products are products of norms.

Then,

$$E_L := -\nabla_x ((-\Delta)^{-1}(\rho)) + \langle E_0 \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} j(s, x) dx ds,$$

and it follows that for any  $n > 4$  and any  $t \geq 0$ ,

$$\|E_L(t)\|_{H_x^n} \lesssim \Gamma(t, (\|m_1\|_{H_x^n}, \|E_0\|_{H_x^n}).$$

with  $\Gamma$  a polynomial of degree 2.

The Leray projector  $\mathbf{P}$  is continuous in  $H_x^n$  (see the Appendix), any pseudo-differential operators of non-positive degree from  $H_x^n$  into  $H_x^n$  is continuous, therefore any  $\Lambda \in \mathcal{L}$  will be continuous as well in these Sobolev spaces. For any  $d_k \in \mathbf{D}_k$  the estimate 3.3.18 is a consequence of the previous continuity property, the structure of Banach algebra of  $H_x^n$  for  $n$  large enough, and the structure of the set  $\mathbf{D}_k$ .  $\square$

We are now in measure to state the "Induction process" Proposition.

**Proposition 3.3.1.** *Let  $k \in \mathbf{N}^*$ . We consider the following property  $(P_k)$  :*

- *The system VDK (3.2.9) with  $\mathcal{A}_j^{(k)}, \mathcal{A}_j^{\sharp, (k)} \in \mathbf{D}_j$  for any  $0 \leq j \leq k$ , is built.*
- *For any  $1 \leq j \leq k$ , we have the following expansions in  $\epsilon^2$  for the partial time derivatives :*

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{A}_{2j-1}^{(k)} &= I_{2j-1,0}^{(k)} + \epsilon^2 I_{2j-1,1}^{(k)} + \dots + \epsilon^{2k} I_{2j-1,k}^{(k)} = \sum_{l=0}^k \epsilon^{2l} I_{2j-1,l}^{(k)}, \\ \partial_t \mathcal{A}_{2j-1}^{\sharp, (k)} &= I_{2j-1,0}^{\sharp, (k)} + \epsilon^2 I_{2j-1,1}^{\sharp, (k)} + \dots + \epsilon^{2k} I_{2j-1,k}^{\sharp, (k)} = \sum_{l=0}^k \epsilon^{2l} I_{2j-1,l}^{\sharp, (k)}, \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

such that for any  $1 \leq l \leq k$ ,  $I_{2j-1,l}^{(k)}, I_{2j-1,l}^{\sharp, (k)} \in \mathcal{S} \circ \mathcal{Q} \circ \mathcal{D}_x(\mathbf{D}_{j+l})$ .

- *The remainders*

$$J_R^k := \epsilon \hat{\mathbf{P}}(j^k) - \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i+1} \partial_t^2 \mathcal{A}_{2i-1}^{(k)} + \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i-1} \Delta_x \left( \mathcal{A}_{2i-1}^{(k)} \right), \quad (3.3.20)$$

and

$$J_R^{\sharp, k} := \epsilon \hat{\mathbf{P}}(\partial_t j^{VM}) - \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i-1} \partial_t^2 \mathcal{A}_{2i-1}^{\sharp, (k)} + \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i-1} \Delta_x \mathcal{A}_{2i-1}^{\sharp, (k)}, \quad (3.3.21)$$

are polynomials in  $\epsilon$  of valuation  $2k+1$  with coefficients in  $\Delta_x(\mathbf{D}_k)$ .

If the property  $(P_k)$  is true then one can build the system  $VD(k+1)$  such that  $(P_{k+1})$  is also true.

The proof of this proposition will rely on two propositions, one about the propagation of the expansion in  $\epsilon$  if one has access to the expansion of the time derivatives of the  $\nu(\xi)$ -moments of  $f$ , the other on the justification of the expansion of the time derivatives of the moments of  $f$  up to an order  $\epsilon^{2k}$  if the property  $(P_k)$  is known.

**Proposition 3.3.2.** *Let  $i \in \mathbf{N}^*$ . Let assume that the initial hypothesis  $(\mathbb{H}_0^i)$  is true : for any  $n \in \mathbf{N}$ ,  $d_n \in \mathbf{M}_n$  :*

$$\begin{aligned}\partial_t m_n &= \sum_{l=0}^i \epsilon^{2l} m_{n,l}^{(1)}, \\ \partial_t^2 m_n &= \sum_{l=0}^n \epsilon^{2l} m_{n,l}^{(2)} + \epsilon^{2i+2} R_{m_n}(\epsilon),\end{aligned}\tag{3.3.22}$$

with, for any  $1 \leq l \leq i$ ,

- $m_{n,l}^{(1)} \in \mathbf{M}_{n,l}^{(1)} := \mathbf{S}^{n+1} \circ \mathbf{Q}(\mathbf{D}_x(\mathbf{D}_l))$ ,
- $m_{n,l}^{(2)} \in \mathbf{M}_{n,l}^{(2)} := \mathbf{S}^{n+2} \circ \mathbf{Q} \circ \Lambda \circ \mathbf{Q}(\mathbf{D}_x^2(\mathbf{D}_l))$ ,
- $R_{m_n}(\epsilon)$  a polynomial of degree  $2k-2$  and valuation 0 with coefficients in  $\mathbf{M}_{n,i}^{(2)}$ .

Then, for any  $k \in \mathbf{N}$ , the property  $(\mathbb{H}_k^i)$  is true : for any  $d_k \in \mathbf{D}_k$ ,

$$\begin{aligned}\partial_t d_k &= \sum_{l=0}^i \epsilon^{2l} d_{k,l}^{(1)}, \\ \partial_t^2 d_k &= \sum_{l=0}^n \epsilon^{2l} d_{k,l}^{(2)} + \epsilon^{2i+2} R_{d_k}(\epsilon),\end{aligned}\tag{3.3.23}$$

with

- $d_{k,l}^{(1)} \in \mathbf{D}'_{k+l}$ ,  $d_{k,l}^{(2)} \in \Delta_x(\mathbf{D}_{k+1+l})$  for any  $0 \leq l \leq n$ , and
- $R_{d_k}(\epsilon) \in \Delta_x(\mathbf{D}_{k+1+l})$ ,  $\forall \epsilon \in [0, 1]$ .

We now state the initialization proposition.

**Proposition 3.3.3.** *If  $(P_k)$  is true, then  $(\mathbb{H}_0^{2k})$  is true.*

We first explain why Proposition 3.3.3 and Proposition 3.3.2 imply Proposition 3.3.1.

*Démonstration.* (Proof of Proposition 3.3.1.) If  $(P_k)$  is true, then by Proposition 3.3.3  $(\mathbb{H}_0^{2k})$  is true, and by Proposition 3.3.2, for any  $1 \leq i \leq k$ ,

$$\begin{aligned}\partial_t^2 \mathcal{A}_{2i-1}^{(k)} &= \sum_{l=0}^k \epsilon^{2l} \mathbf{J}_{2i-1,l}^{(k)} + \epsilon^{2k+2} \mathbf{R}_{2i-1}^{(k)}(\epsilon), \\ \partial_t^2 \mathcal{A}_{2i-1}^{\sharp,(k)} &= \sum_{l=0}^k \epsilon^{2l} \mathbf{J}_{2i-1,l}^{\sharp,(k)} + \epsilon^{2k+2} \mathbf{R}_{2i-1}^{\sharp,(k)}(\epsilon),\end{aligned}\tag{3.3.24}$$

with  $\mathbf{J}_{2i-1,l}^{(k)}, \mathbf{J}_{2i-1,l}^{\sharp,(k)} \in \Delta_x(\mathbf{D}_{i+l+1})$ , and  $\mathbf{R}_{2i-1}^{(k)}(\epsilon), \mathbf{R}_{2i-1}^{\sharp,(k)}(\epsilon) \in \Delta_x(\mathbf{D}_{i+l+1})$  for all  $\epsilon \in [0, 1]$ .

We then set, for any  $2 \leq i \leq k+1$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{2i-1}^{(k+1)} &= \Delta_x^{-1} \left( \sum_{l=0}^{i-1} J_{2(i-l)-1, l}^{(k)} \right) \in \mathbf{D}_i, \\ \mathcal{A}_{2i-1}^{\sharp, (k+1)} &= \Delta_x^{-1} \left( \sum_{l=0}^{i-1} J_{2(i-l)-1, l} - J_{0, i}^{\sharp, (k)} \right) \in \mathbf{D}_i.\end{aligned}\tag{3.3.25}$$

The remainder  $J_R$  as defined in (3.3.20) appears to be, looking at both (3.3.24) and (3.3.25), the lower triangular part of the table formed by the expansions (3.3.24). The Proposition 3.3.3 and in particular the expansions (3.3.23) prove the third point of the property  $(P_k)$ .  $\square$

The construction of the system  $VDk$  is now achieved and the expansion part of the property  $(P_{k+1})$  is a consequence of the first line of the equation (3.3.23) for the property  $(\mathbb{H}_{2k}^{2k})$ .

*Démonstration.* (Proof of Proposition 3.3.2) We assume that  $(\mathbb{H}_0^l)$  is true. Let  $k \in \mathbf{N}$  and  $d_k \in \mathbf{D}_k$ . By definition,  $d_k \in \Delta_x^{-k} \circ \hat{\mathbf{P}} \left( (Q \circ \Lambda)^{2k-1} \left( D_x^{2k-1} \left( \tilde{M}_{2k} \right) \right) \right)$ .

Since  $\partial_t E_L, D_x(E_L) \in Q \circ \Lambda(\tilde{M}_1)$  we will in the following, without loss of generality, make our computations as if  $\tilde{M}_{2k} = M_{2k}$ .

If we set

$$\partial_t(A) := \{ \partial_t^\alpha a : a \in A, \alpha \in \{0, 1\} \},$$

it is clear that

$$\Lambda(\partial_t A) = \partial_t(\Lambda(A)), \quad \partial_t Q(A) \subset Q(\partial_t(A)).$$

Therefore,

$$\partial_t d_k \in \Delta_x^{-k} \circ \hat{\mathbf{P}} \left( (Q \circ \Lambda)^{2k-1} \left( D_x^{2k-1} \left( \partial_t \tilde{M}_{2k} \right) \right) \right).$$

Noticing that

$$M_{n, l}^{(1)} \subset M_{n, l'}^{(1)} \quad \forall l \leq l',$$

a combinatorial analysis yields

$$\partial_t d_k \in \sum_{l=0}^{2i} e^{2l} \Delta_x^{-k} \circ \hat{\mathbf{P}} \left( (Q \circ \Lambda)^{2k-1} \left( D_x^{2k-1} \left( M_{2k, l}^{(1)} \right) \right) \right).$$

Then, for a given  $1 \leq l \leq i$ ,

$$\begin{aligned}\Delta_x^{-k} \circ \hat{\mathbf{P}} \left( (Q \circ \Lambda)^{2k-1} \left( D_x^{2k-1} \left( M_{2k, l}^{(1)} \right) \right) \right) &\subset S^{2k+1} \circ \Delta_x^{-k} \circ \hat{\mathbf{P}} \left( (Q \circ \Lambda)^{2k-1} \circ \left( D_x^{2k}(\mathbf{D}_l) \right) \right), \\ &\subset S^{2k+1} \circ \Delta_x^{-k+l} \circ \hat{\mathbf{P}} \left( (Q \circ \Lambda)^{2k-1} \circ \left( D_x^{2k+2l}(\mathbf{D}_l) \right) \right),\end{aligned}$$

because  $D_x(Q(A)) \subset Q(D_x(A))$  for any set  $A$  and  $\Delta_x^{-k} = \Delta_x^{-k+l} \circ \Delta_x^l$ . Moreover,

$$Q \left( D_x^{2i+2l}(\mathbf{D}_l) \right) \subset (Q \circ \Lambda)^{2l-1} \left( D_x^{2(i+l)-1}(M_{2l}) \right),$$

and finally

$$\Delta_x^{-k} \circ \hat{\mathbf{P}} \left( (Q \circ \Lambda)^{2k-1} \left( D_x^{2k-1} \left( M_{2k, l}^{(1)} \right) \right) \right) \subset \Delta_x^{-(k+l)} \circ \hat{\mathbf{P}} \left( (Q \circ \Lambda)^{2k+2l-1} \left( D_x^{2(k+l)-1}(M_{2k+2l+1}) \right) \right).\tag{3.3.26}$$

The same reasoning for  $\partial_t^2 d_k$  holds, if we replace  $S^{2k+1} \circ Q \circ D_x$  by  $S^{2k+2} \circ Q \circ \Lambda \circ Q \circ D_x^2$  in (3.3.26).

It gives,

$$\partial_t^2 d_k = \sum_{l=0}^i \epsilon^{2l} d_{k,l}^{(2)} + \epsilon^{2i+2} R_{d_k}^{(i)}(\epsilon),$$

such that for any  $0 \leq l \leq i$ ,

$$\begin{aligned} d_{k,l}^{(2)} &\subset \Delta_x^{-(k+l)} \circ \hat{\mathbf{P}} \left( (Q \circ \Lambda)^{2k+2l} \left( D_x^{2(k+l)} (M_{2k+2l+2}) \right) \right), \\ &\subset \Delta_x (\mathbf{D}_{k+l+1}), \end{aligned}$$

and for any  $\epsilon \in [0, 1]$ ,

$$R_{d_k}^{(i)}(\epsilon) \in \Delta_x (\mathbf{D}_{k+l+1}).$$

□

*Démonstration.* (Proof of Proposition 3.3.3) We again assume for the sake of simplicity that  $\tilde{M}_{2k} = M_{2k}$ .

If  $(P_k)$  is true, then by construction the Lorentz force

$$F_L^{(k)} := E_L^k + \sum_{j=1}^k \epsilon^{2j-1} \mathcal{A}_{2j-1}^\# + \epsilon v(\xi) \times \left( \nabla_x \times \left( \sum_{j=1}^k \epsilon^{2j-1} \mathcal{A}_{2j-1} \right) \right)$$

can be rewritten as

$$F_L = E_L + \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i} F_{L,i}^{(k)}$$

with

$$F_{L,i}^{(k)} = \mathcal{A}_{2j-1}^{\#, (k)} + v(\xi) \times \left( \nabla_x \times \mathcal{A}_{2j-1}^{(k)} \right).$$

Let  $n \in \mathbf{N}$  and  $m_n \in M_n$ , such that

$$m_n(t, x) = \int_{\mathbf{R}^3} \prod_{1 \leq l \leq n} \partial_\xi^{\alpha_l} v_{\beta_l}(\xi) f(t, x, \xi) d\xi,$$

with  $(\alpha, \beta) \in (\{1, 2, 3\}^{\mathbf{N}})^n$ . We consider then the Vlasov equation of the system (VDk) (3.2.9)

$$\partial_t f^{\text{VDk}} + v(\xi) \cdot \nabla_x f^{\text{VDk}} + \left( E^k + \epsilon v(\xi) \times B^k \right) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VDk}} = 0,$$

and we integrate it over  $\mathbf{R}^3$  against  $\prod_{1 \leq l \leq n} \partial_\xi^{\alpha_l} v_{\beta_l}(\xi) f(t, x, \xi) d\xi$ , one has

$$\begin{aligned} \partial_t m_n &= -\nabla_x \cdot \left( \int_{\mathbf{R}^3} \prod_{1 \leq l \leq n} \partial_\xi^{\alpha_l} v_{\beta_l}(\xi) v(\xi) f(t, x, \xi) d\xi \right) \\ &+ \int_{\mathbf{R}^3} \nabla_\xi \left( \prod_{1 \leq l \leq n} \partial_\xi^{\alpha_l} v_{\beta_l}(\xi) \right) \cdot \left( E_L + \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i} F_{L,i}^k \right) f(t, x, \xi) d\xi, \\ &= \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i} m_{n,i}^{(1)}, \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

by assumption on the  $\mathcal{A}_{2i-1}, \mathcal{A}_{2i-1}^\#$ , we have  $m_{n,i}^{(1)} \in S \circ Q \circ D_x (\mathbf{D}_i)$ .

Then we use the Vlasov equation one more time to compute  $\partial_t^2 m_n$  :

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 m_n &= -\nabla_x \cdot \left( \nabla_x \cdot \left( \int_{\mathbf{R}^3} \prod_{1 \leq l \leq n} \partial_\xi^{\alpha_l} v_{\beta_l}(\xi) v(\xi) \otimes v(\xi) f(t, x, \xi) d\xi \right) \right) \\
&+ \nabla_x \cdot \left( \int_{\mathbf{R}^3} \prod_{1 \leq l \leq n} \partial_\xi^{\alpha_l} v_{\beta_l}(\xi) v(\xi) \left( E_L + \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i} F_{L,i}^k \right) f(t, x, \xi) d\xi \right) \\
&+ \int_{\mathbf{R}^3} \prod_{1 \leq l \leq n} \partial_\xi^{\alpha_l} v_{\beta_l}(\xi) v(\xi) \cdot \nabla_x f(t, x, \xi) d\xi \\
&- \int_{\mathbf{R}^3} \nabla_\xi^2 \left( \prod_{1 \leq l \leq n} \partial_\xi^{\alpha_l} v_{\beta_l}(\xi) v(\xi) \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^{2k} \epsilon^{2i} \left( \sum_{\substack{j_1+j_2=i \\ 0 \leq j_1, j_2 \leq k}} F_{L,j_1} F_{L,j_2} \right) \right) f(t, x, \xi) d\xi \\
&+ \int_{\mathbf{R}^3} \nabla_\xi \left( \prod_{1 \leq l \leq n} \partial_\xi^{\alpha_l} v_{\beta_l}(\xi) v(\xi) \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^{2k} \epsilon^{2i} \left( \sum_{\substack{j_1+j_2=i \\ 0 \leq j_1, j_2 \leq k}} I_{2j_1-1, j_2}^{\#, (k)} + v(\xi) \times \nabla_x \times I_{2j_1-1, j_2}^{(k)} \right) \right) f(t, x, \xi) d\xi,
\end{aligned}$$

where for the last line we used the equations (3.3.19). Gathering terms by terms one can check that  $(\mathbb{H}_0^{2k})$  is true. □

To conclude the existence part of Theorem 3.2.1 we justify that the property  $(P_1)$  is true.

**Proposition 3.3.4.** *The property  $(P_1)$  is true.*

*Démonstration.* We consider the system VD1 as

$$\begin{cases}
\partial_t f^{\text{VD1}} + v(\xi) \dot{\nabla}_x f^{\text{VD1}} + \left( E_L + \mathcal{A}_1^\# + v(\xi) \times \mathcal{A}_1 \right) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VD1}} = 0, \\
\mathcal{A}_1 := -\Delta_x^{-1} \circ \hat{\mathbf{P}}(j), \\
\mathcal{A}_1^\# := -\Delta_x^{-1} \circ \hat{\mathbf{P}} \left( -\nabla \cdot \int_{\mathbf{R}^3} (v(\xi) \otimes v(\xi)) f(t, x, \xi) + E_L v(\xi) \cdot \nabla_\xi f(t, x, \xi) d\xi \right).
\end{cases} \tag{3.3.28}$$

Using the Vlasov equation, one can check by a computation similar in all points to (3.3.27) that

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathcal{A}_1 &\in S \circ Q \circ D_x(\mathbf{D}_0) + \epsilon^2 S \circ Q \circ D_x(\mathbf{D}_1), \\
\partial_t \mathcal{A}_1^\# &\in S \circ Q \circ D_x(\mathbf{D}_0) + \epsilon^2 S \circ Q \circ D_x(\mathbf{D}_1).
\end{aligned}$$
□

### 3.3.3 The system beyond the Vlasov Darwin system : VD-3.

We now give concretely what one would obtain for the second Vlasov Darwin system, by giving the analytic expressions of the source terms for this system. It will illustrate the structure analyzed previously and the increase of the complexity of the equation.

We then write :

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \epsilon \mathcal{A}_1 + \epsilon^3 \mathcal{A}_3 + O(\epsilon^4), \\
\partial_t \hat{A} &= \epsilon \mathcal{A}_1^\# + \epsilon^3 \mathcal{A}_3^\# + O(\epsilon^4).
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

First we have that,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= -\Delta_x^{-1}(\hat{\mathbf{P}}j) \in \mathbf{D}_1, \\ \mathcal{A}_1^\sharp(t, x) &= -\Delta_x^{-1} \circ \hat{\mathbf{P}} \left( \int_{\mathbf{R}^3} \nu(\xi) (\nu(\xi) \cdot \nabla_x f + E_L \cdot \nabla_\xi f) d\xi \right) \in \mathbf{D}_1.\end{aligned}$$

Moreover, the integration of the Vlasov-equation against  $\nu(\xi)$  on  $\mathbf{R}^3$  leads to

$$\partial_t j = J_{0,0}^\sharp + \epsilon^2 J_{0,1}^\sharp + O(\epsilon^4),$$

with

$$\begin{aligned}J_{0,0}^\sharp &= \int_{\mathbf{R}^3} \nu(\xi) (\nu(\xi) \cdot \nabla_x f + E_L \cdot \nabla_\xi f) d\xi \\ &\equiv J_{0,0}^\sharp(M_2(f), E_0) \in \Delta_x(\mathbf{D}_1),\end{aligned}\tag{3.3.30}$$

and

$$\begin{aligned}J_{0,1}^\sharp &= \int_{\mathbf{R}^3} \nu(\xi) \left( \left( \Delta_x^{-1} \circ \hat{\mathbf{P}} \left( \int_{\mathbf{R}^3} \nu(\xi) (\nu(\xi) \cdot \nabla_x f + E_L \cdot \nabla_\xi f) d\xi \right) - \nu(\xi) \times (\nabla_x \times \Delta_x^{-1} \circ \hat{\mathbf{P}}(j)) \right) \cdot \nabla_\xi f \right) d\xi \\ &\equiv J_{0,1}^\sharp(M_2(f), E_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1^\sharp) \in \Delta_x(\mathbf{D}_2).\end{aligned}\tag{3.3.31}$$

For the sake of simplicity we kept terms with factors  $\nabla_\xi f$ , but one can perform an integration by parts with respect to  $\xi$  on  $\mathbf{R}^3$  and recover moments in  $\xi$  of  $f$ .

Now, to determine the system VD-3 we need to compute the first terms of the expansions of both  $\partial_t^2 \mathcal{A}_1$  and  $\partial_t^2 \mathcal{A}_1^\sharp$ . Namely,

$$\partial_t^2 \mathcal{A}_1 = J_{1,0} + O(\epsilon^2),$$

and

$$\partial_t^2 \mathcal{A}_1^\sharp = J_{1,0}^\sharp + O(\epsilon^2),$$

and we will then be able to conclude by setting

$$\begin{aligned}-\Delta_x \mathcal{A}_3 &= J_{1,0}, \\ -\Delta_x \mathcal{A}_3^\sharp &= -J_{0,1}^\sharp + J_{1,0}^\sharp.\end{aligned}\tag{3.3.32}$$

The double derivation of the Vlasov equation and the derivation of the electromagnetic fields give :

$$\begin{aligned}\partial_t E_L &= \nabla_x \nabla_x \cdot (\Delta_x^{-1}(\rho)) - \langle j \rangle, \\ \partial_t^2 E_L &= \nabla_x \nabla_x \cdot (\Delta_x^{-1}(\nabla_x \cdot j)) - \langle j_{0,0}^\sharp \rangle + O(\epsilon^2),\end{aligned}\tag{3.3.33}$$

and

$$\begin{aligned}\partial_t^2 f &= (\nu(\xi) \cdot \nabla_x)^2 f + (\nu(\xi) \cdot \nabla_x) (E_L \cdot \nabla_x f) \\ &\quad + E_L \cdot \nabla_\xi (\nu(\xi) \cdot \nabla_x f) + (\nabla_\xi \cdot)^2 (E_L \otimes E_L f) \\ &\quad + (\nabla_x \nabla_x \cdot (\Delta_x^{-1}(\rho)) - \langle j \rangle) \cdot \nabla_\xi f \\ &\quad + O(\epsilon^2).\end{aligned}\tag{3.3.34}$$

We deduce that,

$$\begin{aligned}J_{1,0} &= -\Delta_x^{-1} \circ \hat{\mathbf{P}} \left\{ \int_{\mathbf{R}^3} \nu(\xi) \left\{ (\nu(\xi) \cdot \nabla_x)^2 (f + (\nu(\xi) \cdot \nabla_x) (E_L \cdot \nabla_\xi f)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\nabla_x \nabla_x \cdot (\Delta_x^{-1}(\rho)) - \langle j \rangle) \cdot \nabla_\xi f + E_L \cdot \nabla_\xi (\nu(\xi) \cdot \nabla_x f + E_L \cdot \nabla_\xi f) \right\} d\xi \right\}, \\ &\equiv J_{1,0}(M_3(F), E_L) \in \Delta_x(\mathbf{D}_2),\end{aligned}\tag{3.3.35}$$

and then that,

$$\begin{aligned}
J_{1,0}^\sharp &= -\Delta^{-1} \circ \hat{\mathbf{P}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \nu(\xi) \left\{ (\nu(\xi) \cdot \nabla_x + E_L \cdot \nabla_\xi) \left\{ (\nu(\xi) \cdot \nabla_x)^2 f + (\nabla_x \nabla_x \cdot (\Delta_x^{-1}(\rho)) - \langle j \rangle) \cdot \nabla_\xi f \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + E_L \cdot \nabla_\xi (\nu(\xi) \cdot \nabla_x f) + (\nabla_\xi \cdot)^2 (E_L \otimes E_L f) \right\} \right. \\
&\quad \left. + (\nabla_x \nabla_x \cdot (\Delta_x^{-1}(\nabla_x \cdot j)) - \langle J_{0,0}^\sharp \rangle) \cdot \nabla_\xi f \right. \\
&\quad \left. + 2(\nabla_x \nabla_x \cdot (\Delta_x^{-1}(\rho)) - \langle j \rangle) \cdot \nabla_\xi (\nu(\xi) \cdot \nabla_x f + E_L \cdot \nabla_\xi f) \right\} d\xi \Big\} \\
&\equiv J_{1,0}^\sharp(M_4(f), E_L) \in \Delta_x(\mathbf{D}_2).
\end{aligned}$$

### 3.4 Local well-posedness for the $k$ -th Vlasov-Darwin approximation system (3.2.9).

To prove the local well-posedness of our systems, we use a result proved by Han-Kwan in [69], which justifies the local well-posedness character of a wide class of Vlasov systems. We first recall this result in a non-optimal form, in order to simplify the notations and to make more clear that our systems enter into this framework.

The proposition will stand for Vlasov equations of the form :

$$\partial_t f + \nu(\xi) \cdot \nabla_x f + F_L \cdot \nabla_\xi f = 0, \quad (3.4.1)$$

where the force field  $F_L \equiv F_L(t, x, \xi)$  satisfies some conditions that we state in the next paragraph.

#### Assumptions on the force field.

We assume that the vector field  $F_L$  is divergence-free in  $\xi$  and can be written as

$$F_L(t, x, \xi) = \sum_{j=1}^l A_j(\xi) F^j(x, \xi).$$

We assume, that for all  $j \in \{1, \dots, l\}$ ,  $A_j$  is a scalar function satisfying for all  $\alpha \in \mathbf{N}$ ,

$$\|\partial_\xi^\alpha A_j\|_{L^\infty} \leq C_\alpha.$$

Moreover, there must be  $C^\infty$  functions  $\psi(\xi), \dots, \psi_r(\xi)$  with at most polynomial growth, which means that there exist  $r_0 > 0$  such that for all  $k \in \mathbf{N}$ ,

$$\|\psi_i(\xi)\|_{W_{-r_0}^{k,\infty}} \leq C_{i,k}, \quad (3.4.2)$$

such that defining the hydrodynamic quantities

$$m_{\psi_i}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, \xi) \psi_i(\xi) d\xi,$$

for all  $j = 1, \dots, l$ , the vector field  $F^j$  is uniquely determined by these  $\xi$ -moments and by the initial conditions.



Finally we request the vector fields  $F^j$  to satisfy the following three hypothesis :

( $\mathbb{T}_1$ ) : For all  $n > 4$ , and all  $t > 0$  we have

$$\|F^j\|_{L^2(0,t;H_x^n)} \leq \Gamma_n^{(j)} \left( t, \|m_{\psi_1}\|_{L^2(0,t;H_x^n)}, \dots, \|m_{\psi_r}\|_{L^2(0,t;H_x^n)}, \sum_{j=1}^l \|F^j(0)\|_{H_x^n} \right)$$

with  $\Gamma_n^{(j)}$  a polynomial function non increasing with respect to each of its arguments.

( $\mathbb{T}_2$ ) : For all  $n > 4$ , and all  $t > 0$  we have,

$$\|F^j\|_{L^\infty(0,t;H_x^n)} \leq \Gamma_n^{(j)'} \left( t, \|m_{\psi_1}\|_{L^\infty(0,t;H_x^n)}, \dots, \|m_{\psi_r}\|_{L^\infty(0,t;H_x^n)}, \sum_{j=1}^l \|F^j(0)\|_{H_x^n} \right)$$

with  $\Gamma_n^{(j)'}$  a polynomial function non increasing with respect to each of its arguments.

( $\mathbb{T}_3$ ) : The force field satisfy some stability property. If  $f$  and  $g$  are two solutions of the Vlasov equation (3.4.1) with the same initial, if we denote by  $F_L[f]$  and  $F_L[g]$  their associated force fields, and if we assume the initial conditions to be the same, then for all  $j = 1, \dots, l$ ,

$$\|F^j[f] - F^j[g]\|_{L^2(0,t;H_x^n)} \leq \Gamma_n^{(j)\sharp} \left( t, \left( \|m_{\psi_i}(f - g)\|_{L^2(0,t;H_x^n)} \right)_i, \left( \|m_{\psi_i}(f)\|_{L^2(0,t;H_x^n)} \right)_i, \left( \|m_{\psi_i}(g)\|_{L^2(0,t;H_x^n)} \right)_i \right), \quad (3.4.3)$$

where  $\Gamma_n^{(j)\sharp}$  is a polynomial function non-increasing with respect to each of its arguments, and such that  $\Gamma_n^{(j)\sharp}(., 0, ..) = 0$ .

This framework settled we can give a version of the Proposition 3.2 of [69].

**Proposition 3.4.1.** (Han-Kwan, 2018) *Let  $n > 4$  and  $r > r_0 + 3/2$ . Assume that  $f_0 \in \mathcal{H}_r$  and  $F^j(0) \in H_x^n$ . Then there exists  $T > 0$  such that there exists a unique solution  $(f(t), F_L(t))$  with initial data  $(f_0, F(0))$  to (3.4.1) such that  $f \in C(0, T, \mathcal{H}_r^n)$  and  $F^j \in L^\infty(0, T; H_x^n)$ .*

**Remark 3.4.1.** *In our context, the index  $r_0$ , as defined in (3.4.2), represents the highest order of  $\xi$ -moments of  $f$  being present in the equation VDK (3.2.9). Namely  $r_0 = 2k$ .*

### Proof of the well-posedness part of Theorem 3.2.1.

Before stating our well-posedness result, we state the following stability lemma.

**Lemma 3.4.1.** *Let  $n > 4$ ,  $k \in \mathbf{N}$ ,  $d_k \in \mathbf{D}_k$ , and  $f, g \in \mathcal{H}_r^n$ . We have the following stability estimate :*

$$\|d_k(f(t)) - d_k(g(t))\|_{H_x^n} \leq \Gamma \left( t, \left( \|m_{2k}^{(i)}(f - g)\|_{L^2(0,t;H_x^n)} \right)_i \right). \quad (3.4.4)$$

*Démonstration.* We have  $d_k \in \Delta^{-k} \circ \hat{\mathbf{P}}((Q \circ \Lambda)^{2k-1} \circ D_x^{2k-1}(\tilde{M}_{2k}))$ , and the operators  $\Delta^{-k} \circ \hat{\mathbf{P}}$  and  $\Lambda \in \mathcal{L}$  are linear. If we denote by  $X$  the non commutative algebra whose elements are the polynomials of valuation greater than one of elements of  $\{Q \circ \Lambda, Q \in \mathcal{Q}, \Lambda \in \mathcal{L}\}$ , we have, for any  $\Gamma \in X$ ,  $k \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} \Gamma((m_k(f))) - \Gamma((m_k(g))) &= \sum_{l=0}^N \Gamma_l((m_k(f)), (m_k(g))) m_k^{(l)}(f) - m_k^{(l)}(g), \\ &= \sum_{l=0}^N \Gamma_l((m_k(f)), (m_k(g))) m_k^{(l)}(f - g). \end{aligned}$$

The estimate (3.4.4) follows from the structure of Banach algebra of  $\mathcal{H}_r^n$  when  $n > 4$ , and the Cauchy-Schwarz inequality in the integral overt  $(0, t)$ .  $\square$

Our local well-posedness result is the following :

**Proposition 3.4.2.** *Let  $k \in \mathbf{N}$ ,  $N_0 > 4$ ,  $r_0 = 2k$ , and  $r > r_0 + 3/2 = 2k + 5/2$ . Given  $f_0 \in \mathcal{H}_r^{N_0}$ ,  $(E_0, B_0) \in H_x^{N_0}$  satisfying the compatibility conditions (3.1.4), such that the following estimate holds :*

$$\|f_0\|_{L^\infty(0, T; \mathcal{H}_r^{N_0})} + \|(E_0, B_0)\|_{L^\infty(0, T; H_x^{N_0})} \leq M_0,$$

with  $M_0 > 0$  a constant independent of  $\epsilon$ . Then,

(i) *there exists a time  $T_1 = T_1(M_0) > 0$  independent of  $\epsilon$ , such that there is a unique solution to (3.1.5),  $(f^{VM}(t), E(t), B(t)) \in C(0, T; \mathcal{H}_r^{N_0}) \times \left(L^\infty(0, T; H_x^{N_0})\right)^2$ , satisfying the following estimates*

$$\|f^{VM}\|_{L^\infty(0, T; \mathcal{H}_r^{N_0})} + \|(E, B)\|_{L^\infty(0, T; H_x^{N_0})} \leq 2M_0.$$

(ii) *There exists a time  $T_2 = T_2(M_0) > 0$  independent of  $\epsilon$ , such that there is a unique solution*

$$(f^{VDk}(t), \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_{2k+1}; A_1^\sharp, \dots, A_{2k+1}^\sharp) \in C(0, T; H_r^{N_0}) \times \left(L^\infty(0, T; H_x^{N_0})\right)^{2k+4},$$

to the system (3.2.9), satisfying moreover the estimate

$$\|f^{VDk}\|_{L^\infty(0, T; \mathcal{H}_r^{N_0})} + \|(E, B; \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_k; A_1^\sharp, \dots, A_k^\sharp)\|_{L^\infty(0, T; H_x^{N_0})} \leq 2M_0.$$

**Remark 3.4.2.** *The first part (i) of this theorem is in fact is the well-posedness of relativistic Vlasov-Maxwell in  $L^2$  based Sobolev systems, a result which is known since Degond [38]. In our specific framework it has been proved by D. Han-Kwan in [69] (Section 8B), we just state it here for the sake of completeness.*

*Démonstration.* Let  $k \in \mathbf{N}$  be fixed and let us consider an a priori solution

$$(f^{VDk}(t), \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_{2k+1}, A_1^\sharp, \dots, A_{2k+1}^\sharp),$$

to the  $k$ -th Vlasov Darwin system (3.2.9). Thanks to Proposition 3.4.1, we only need to prove the a priori estimates corresponding to the hypothesis  $(T_1) - (T_3)$ . Instead of exhibiting a list  $m_{\psi_1}, \dots, m_{\psi_r}$  of  $\xi$ -moments of  $f^{VDk}$ , we will directly use the notations  $m_n$  to refer to moments of order  $n$  of  $M_n(f^{VDk})$  as defined in Definition 3.2.2.

We first estimate the longitudinal part of the electric field  $E_L$  in  $L^\infty(0, t; H_x^{N_0})$ . The scalar potential  $\phi^k(t, x)$  satisfies the Poisson equation, so we have, for all  $t \geq 0$ ,

$$\|\nabla_x \phi\|_{H_x^{N_0}} \lesssim \|m_1(t)\|_{H_x^{N_0-1}},$$

and thus

$$\|\nabla_x \phi\|_{L^\infty(0, t; H_x^{N_0})} \lesssim \|m_1(t)\|_{L^\infty(0, t; H_x^{N_0-1})}.$$

Moreover, for ant  $t \in [0, T)$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \langle E_0 \rangle(t) - \int_0^t \langle j^k(s) ds \rangle \right\|_{H_x^{N_0}} &\lesssim \|E_0(t)\|_{H_x^{N_0}} + t \|m_1\|_{L^\infty(0, T; H_x^{N_0})}, \\ &\lesssim \|E_0(t)\|_{H_x^{N_0}} + \|m_1\|_{L^\infty(0, T; H_x^{N_0})}. \end{aligned}$$

We deduce that ,

$$\|E_L(t)\|_{H^{N_0}} \lesssim \|E_0(t)\|_{H_x^{N_0}} + \|m_1\|_{L^\infty(0,T;H_x^{N_0})}.$$

For the magnetic field  $B^k$  and the transverse part of the electric field  $E_T$  one can just use the structure of  $\mathcal{A}_{2j+1}$  and  $\mathcal{A}_{2j+1}^\sharp$  (see (3.3.1)) and the continuity property of the operator  $S_j, S_j^\sharp$ .

The stability property  $(T_3)$  is a consequence of Lemma 3.4.1.

The three assumptions  $(T_1), (T_2), (T_3)$  are satisfied and we can conclude the proof with Proposition 3.4.1. □

### 3.5 Approximation rates

In this section we justify that the  $k$ -th Vlasov-Darwin system (3.2.9) is indeed a non-relativistic approximation of order  $O(\epsilon^{2k+1})$  of the Vlasov-Maxwell system.

We fix  $k \in \mathbf{N}$ ,  $N_0 > 4$ , and consider a solution  $f^{\text{VD}k}$  to the  $k$ -th Vlasov Darwin system (3.2.9) and a solution  $f^{\text{VM}}$  to the Vlasov-Maxwell system (3.1.6) on an interval  $[0, T)$ . We will call  $(E^k, B^k)$ ,  $(E, B)$  the corresponding electromagnetic fields. We define them the following "remainder" quantities :

$$\begin{aligned} f_R &= f^{\text{VM}} - f^{\text{VD}k}, \\ E_R &= E - E^k, \\ B_R &= B - B^k, \\ A_R &= \hat{A} - \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i-1} \mathcal{A}_{2i-1}, \\ A_R^\sharp &= \partial_t \hat{A} - \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i-1} \mathcal{A}_{2i-1}^\sharp. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

We assume moreover that for any  $(x, \xi) \in \mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3$ ,

$$f^{\text{VM}}(0, x, \xi) = f^{\text{VD}k}(0, x, \xi) = f_0,$$

and that the initial data  $(f_0, E_0, B_0)$  is well-prepared of order  $2k + 2$  at regularity  $N_0 + 1$  in the sense of Definition 3.2.1.

We moreover assume that,

$$\left\| f^{\text{VD}k} \right\|_{L^\infty(0,T; \mathcal{H}_{2k+2}^{N_0+1})} + \left\| E^k \right\|_{L^\infty(0,T; H_x^{N_0+1})} + \left\| B^k \right\|_{L^\infty(0,T; H_x^{N_0+1})} \leq M_0. \tag{3.5.2}$$

We can deduce the system of equations governing the evolution of  $f_R$  from (3.1.6) and

(3.2.9),

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_R + \nu(\xi) \cdot \nabla_x f_R + (E + \epsilon \nu(\xi) \times B) \cdot \nabla_\xi f_R = (E_R + \epsilon \nu(\xi) \times B_R) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VD}k}, \\ E_R = -(\nabla_x \phi^{\text{VM}} - \nabla_x \phi^k) - A_R^\# - \int_0^t \langle j^{\text{VM}} - j^k \rangle(s) ds, \\ -\Delta_x (\phi^{\text{VM}} - \phi^k) = \rho_{f_R}, \quad B_R = \nabla_x \times A_R, \\ \epsilon^2 \partial_t^2 A_R - \Delta_x A_R = \epsilon \widehat{\mathbb{P}} j^{\text{VM}} - \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i-1} \partial_t^2 \mathcal{A}_{2i-1} + \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i-1} \Delta_x \mathcal{A}_{2i-1} \equiv J_R^k, \\ \epsilon^2 \partial_t^2 A_R^\# - \Delta_x A_R^\# = \epsilon \widehat{\mathbb{P}} (\partial_t j^{\text{VM}}) - \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i-1} \partial_t^2 \mathcal{A}_{2i-1}^\# + \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i-1} \Delta_x \mathcal{A}_{2i-1}^\# \equiv J_R^{\#,k}, \\ f_R(0, x, \xi) = 0, \quad E_R(0, x) = E_{R,0}. \end{array} \right. \quad (3.5.3)$$

Looking at our lists of expansion in  $\epsilon$  (3.3.23) and (3.3.25) on which our construction lies, and using the Proposition 3.3.1, one can deduce the following Lemma.

**Lemma 3.5.1.** *The following estimates holds for any  $0 \leq t \leq T$ ,*

$$\left\| \left( J_R^k, J_R^{\#,k} \right) (t) \right\|_{H_x^n} \lesssim \epsilon \|f_R(t)\|_{H_x^n} + \epsilon^{2k+1}. \quad (3.5.4)$$

*Démonstration.* It suffices to remark that

$$J_R^k = \widehat{\mathbb{P}} \left( j^{\text{VM}} - j^k \right) + \epsilon \widehat{\mathbb{P}} j^k - \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i+1} \partial_t^2 \mathcal{A}_{2i-1} + \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i-1} \Delta_x \mathcal{A}_{2i-1},$$

and by the third point of the property  $(P_k)$  as defined in Proposition 3.3.1,

$$\epsilon \widehat{\mathbb{P}} j^k - \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i-1} \partial_t^2 \mathcal{A}_{2i-1} + \sum_{i=1}^k \epsilon^{2i-1} \Delta_x \mathcal{A}_{2i-1} = \epsilon^{2k+1} R_k(\epsilon),$$

with  $R_k$  a polynomial whose coefficients are in  $\Delta_x (\mathbf{D}_k(f^{\text{VD}k}))$ . In particular, uniformly in  $\epsilon \in [0, 1)$ , for any  $t \in [0, T)$ ,

$$\begin{aligned} \|R_k\|_{H_x^{N_0}} &\leq \Gamma \left( \left\| m_{2k+2}(f^{\text{VD}k}) \right\|_{L^\infty(0, T; H_x^{N_0+1})} \right), \\ &\lesssim 1, \end{aligned}$$

by the assumption (3.5.2). The same proof holds for  $J_R^{\#,k}$ .  $\square$

By classical energy estimates for the wave equation, we deduce some regularity on the differential of the remainders.

**Lemma 3.5.2.** *The following estimates holds for any  $0 \leq t \leq T$ ,*

$$\left\| \left( \nabla A_R, \nabla A_R^\# \right) (t) \right\|_{H_x^{N_0}} \lesssim \epsilon \|f_R(t)\|_{H_x^{N_0}} + \epsilon^{2k+1}. \quad (3.5.5)$$

The two quantities  $A_R, \nabla A_R^\#$  are average-free by construction, thus the standard Poincaré inequality on bounded domains gives the same estimates on the remainders themselves.

**Lemma 3.5.3.** *The following estimates holds,*

$$\left\| \left( A_R, A_R^\# \right) (t) \right\|_{H_x^{N_0}} \lesssim \epsilon \|f_R(t)\|_{H_x^{N_0}} + \epsilon^{2k+1}. \quad (3.5.6)$$

A direct consequence of the two previous lemmas is bound on the field remainder  $(E_R, B_R)$ .

**Lemma 3.5.4.** *The following estimates holds for  $0 \leq t \leq T$ ,*

$$\begin{aligned} \|E_R(t)\|_{H_x^{N_0}} &\lesssim \int_0^t \|f_R(s)\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}} ds + \epsilon^{2k+1} + \|f_R(t)\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}}, \\ \|B_R(t)\|_{H_x^{N_0}} &\lesssim \|f_R(t)\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}} + \epsilon^{2k+1}. \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

By definition (3.5.1)<sub>5</sub> of the remainders  $A_R, A_R^\sharp$ , one gets the following Lemma (similar to Lemma 8.8 of [73]), which is a direct consequence of the Definition (3.2.1) on our notion of "well-prepared" initial data.

**Lemma 3.5.5.** *If the initial condition is well-prepared in the sense of Definition 3.2.1, then*

$$\begin{aligned} \|(\epsilon \partial_t A_R, \nabla_x A_R)|_{t=0}\|_{H^{N_0}} &\lesssim \epsilon^{2k}, \\ \|(\epsilon \partial_t A_R^\sharp, \nabla_x A_R^\sharp)|_{t=0}\|_{H^{N_0-1}} &\lesssim \epsilon^{2k}. \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Let us now state the main Proposition of the section.

**Proposition 3.5.6.** *Let  $k \in \mathbf{N}$ ,  $N_0 > 4$ , and  $r > 2k + 2$ . Let  $f^{VM}, f^{VDk}$  the two strong solutions on a common interval of time  $[0, T]$  to respectively, (3.1.2) and (3.2.9) associated to an initial data  $(f_0, E_0, B_0) \in \mathcal{H}_r^{N_0+1} \times (H_x^{N_0+1})^2$  well-prepared of order  $k$  and regularity  $N_0 + 1$  in the sense of Definition 3.2.1. We moreover assume that there exist a positive constant independent of  $\epsilon, M_0$ , such that*

$$\|f_0\|_{\mathcal{H}_r^{N_0+1}} + \|(E_0, B_0)\|_{H_x^{N_0+1}} \leq M_0. \quad (3.5.9)$$

Then, the following non-relativistic approximation estimate holds :

$$\|f^{VM} - f^{VDk}\|_{L^\infty(0, T; \mathcal{H}_r^{N_0})} + \|(E - E^k, B - B^k)\|_{L^\infty(0, T; H_x^{N_0})} \lesssim \epsilon^{2k+1}. \quad (3.5.10)$$

**Remark 3.5.1.** *The case  $k = 1$ , corresponding to the classical Vlasov-Darwin approximation system (3.1.8), is coherent with the approximation rate  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$  proved by Bauer and Kunze in [19] or by Degond and Raviart in [39].*

*Démonstration.* The classical energy estimate for the electromagnetic fields  $(E, B)$  associated to the Vlasov-Maxwell system (3.1.2) (which can be found in section 4 of [38] for instance) yields

$$\|(E, B)\|_{H_x^{N_0}} \lesssim \|f^{VM}\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}}. \quad (3.5.11)$$

To estimate  $\|f_R\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}}$ , we apply the operator  $\partial_{x, \xi}^{\alpha, \beta}$ , that is  $\alpha$  derivatives with respect to  $x$  and  $\beta$  derivatives with respect to  $\xi$ ,  $\alpha, \beta$  being some multi-index in  $\{1, 2, 3\}^{\mathbf{N}}$ , with  $|\alpha| + |\beta| \leq N_0$ , to the Vlasov equation (3.5.3)<sub>1</sub>. We obtain then,

$$\begin{aligned} &\partial_t \partial_{x, \xi}^{\alpha, \beta} f_R + \nu(\xi) \cdot \nabla_x \partial_{x, \xi}^{\alpha, \beta} f_R + (E + \epsilon \nu(\xi) \times B) \cdot \nabla_\xi \partial_{x, \xi}^{\alpha, \beta} f_R = \\ &- \sum_{\beta_1 < \beta} \binom{\beta}{\beta_1} \partial_\xi^{\beta - \beta_1} \nu(\xi) \cdot \nabla_x \partial_{x, \xi}^{\alpha, \beta_1} f_R \\ &- \sum_{\substack{\alpha_1 \leq \alpha \\ \beta_1 \leq \beta}} \left( \binom{\alpha}{\alpha_1} \partial_x^{\alpha - \alpha_1} E_R + \epsilon \binom{\alpha, \beta}{\alpha_1, \beta_1} \partial_\xi^{\beta - \beta_1} \nu(\xi) \times \partial_x^{\alpha - \alpha_1} B_R \right) \cdot \nabla_\xi \partial_{x, \xi}^{\alpha_1, \beta_1} f^{VDk} \\ &- \sum_{\substack{\alpha_1 \leq \alpha \\ \beta_1 < \beta}} \left( \binom{\alpha}{\alpha_1} \partial_x^{\alpha - \alpha_1} E + \epsilon \binom{\alpha, \beta}{\alpha_1, \beta_1} \partial_\xi^{\beta - \beta_1} \nu(\xi) \times \partial_x^{\alpha - \alpha_1} B \right) \cdot \nabla_\xi \partial_{x, \xi}^{\alpha_1, \beta_1} f_R. \end{aligned}$$

We then multiply the previous equation by  $(1 + |\xi|^2)^r \partial_{x,\xi}^{\alpha,\beta} f_R$  and integrate over  $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$ . Summing the results for all  $|\alpha| + |\beta| \leq N_0$ , one obtains by using the Cauchy-Schwarz inequality and the uniform boundedness of  $\nu(\xi)$  and its derivatives,

$$\frac{d}{dt} \|f_R\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}} \lesssim \|f_R\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}} + \|(E_R, B_R)\|_{H_x^{N_0}} \|f^{VDk}\|_{H_r^{N_0+1}} + \|(E, B)\|_{H_x^{N_0}} \|f_R\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}}. \quad (3.5.12)$$

Moreover, thanks to the assumptions of the Proposition 3.5.6 and to the Proposition 3.2.1, we also have the estimates

$$\|f^{VDk}\|_{H_r^{N_0+1}} \lesssim 1, \quad \|(E, B)\|_{H^{N_0}} \lesssim \|f^{VM}\|_{H_r^{N_0}} \lesssim 1. \quad (3.5.13)$$

We then plug the estimates (3.5.7), (3.5.11), and (3.5.13) into (3.5.12),

$$\frac{d}{dt} \|f_R\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}} \lesssim e^{2k+1} + \|f_R(t)\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}} + \int_0^t \|f_R(s)\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}} ds. \quad (3.5.14)$$

We integrate over  $[0, t]$ , for any  $0 \leq t \leq T$ , and obtain

$$\|f_R(t)\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}} \leq Ce^{2k+1} + C \int_0^t \left( \|f_R(s)\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}} + \int_0^s \|f_R(\tau)\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}} d\tau \right) ds,$$

and thus the function  $\chi(t) := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|f_R(\tau)\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}}$  satisfies the following Grönwall inequality

$$\chi(t) \leq Ce^{2k+1} + C \int_0^t \chi(s) ds.$$

It yields

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|f_R(\tau)\|_{\mathcal{H}_r^{N_0}} \lesssim e^{2k+1}. \quad (3.5.15)$$

Going back then to the estimates (3.5.7), we can deduce

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|E_R(\tau)\|_{H^{N_0-1}} \lesssim e^{2k+1},$$

and,

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|B_R(\tau)\|_{H^{N_0-1}} \lesssim e^{2k+1},$$

which concludes the proof. □

## 3.6 Appendix

### 3.6.1 The Leray operator $\mathbf{P}$

We will in this paragraph give some remarks (taken from the Appendix of [134]) on the Leray operator  $\mathbf{P} : L^2(\mathbf{T}^3) \rightarrow L^2(\mathbf{T}^3)$ , its Fourier transform and its continuity property with respect to any norm  $H^s$ ,  $s \in [0, +\infty)$ .

More generally let explain how a vector field can be decomposed in a divergence free part and an irrotational part (the Helmholtz decomposition). Given  $F \in C_c^1(\mathbf{T}^3, \mathbf{T}^3)$  one can define  $\mathbf{P}(F)$  as follows :

$$\mathbf{P}(F)(x) = F(x) + \nabla_x \psi(x), \quad \text{for any } x \in \mathbf{T}^3,$$

with  $\psi$  satisfying the equation

$$-\Delta\psi = \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

One can check that it implies that

$$\nabla_x \cdot \mathbf{P}(\mathbf{F}) = 0.$$

Applying the Fourier transform, one obtains for any  $k \in \mathbf{Z}^3$  :

$$\mathcal{F}(\mathbf{P}(\mathbf{F}))(k) = \mathcal{F}(\mathbf{F})(k) + ik\mathcal{F}(\psi),$$

and

$$\mathcal{F}(\psi)(k) = \frac{i}{|k|^2} k \cdot \mathcal{F}(\mathbf{F})(k),$$

which implies

$$\mathcal{F}(\mathbf{P}(\mathbf{F}))(k) = \left( \text{Id} - \frac{k \otimes k}{|k|^2} \right) \mathcal{F}(\mathbf{F})(k). \quad (3.6.1)$$

Therefore

$$|\mathcal{F}(\mathbf{P}(\mathbf{F}))(k)| \leq C |\mathcal{F}(\mathbf{F})(k)|,$$

and by the Plancherel Theorem  $\mathbf{P}$  extends to a continuous operator on  $L^2(\mathbf{T}^3)$  characterised by the formula (3.6.1). From the same formula we have the continuity with respect to any Sobolev norm  $H^s$ ,  $s \in [0, +\infty)$ .

### 3.6.2 The space mean-value and the average free part

In this section, we justify the fact that for a given function  $F \in L^2(\mathbf{T}^3)$ ,

$$\|\hat{F}\|_{L^2(\mathbf{T}^3)} \leq \|F\|_{L^2(\mathbf{T}^3)}.$$

To do so, we invoke the Plancherel formula stating that

$$\|F\|_{L^2(\mathbf{T}^3)}^2 = \sum_{k \in \mathbf{Z}^3} |\mathcal{F}(F)(k)|^2,$$

and just remark that for any  $k \in \mathbf{Z}$ ,

$$\mathcal{F}(\hat{F})(k) = (1 - \delta_{0k}) \mathcal{F}(F)(k).$$

This argument works also for weighted  $H^s$  spaces.

From the previous description of the operators  $\mathbf{P}$  and  $\hat{\mathbf{P}}$  in the Fourier space, we deduce that these operators commute with any spatial derivatives.





## Chapitre 4

# The non-relativistic limit of the Vlasov-Maxwell system with uniform macroscopic bounds

This chapter is a common work with D.Han-Kwan accepted in *Ann. Fac. Sci. Toulouse* (to appear).

### abstract :

We study in this paper the non-relativistic limit from Vlasov-Maxwell to Vlasov-Poisson, which corresponds to the regime where the speed of light is large compared to the typical velocities of particles. In contrast with [8], [38], [129] which handle the case of classical solutions, we consider measure-valued solutions, whose moments and electromagnetic field are assumed to satisfy some uniform bounds. To this end, we use a functional inspired by the one introduced by Loeper in his proof of uniqueness for the Vlasov-Poisson system [103]. We also build a special class of measure-valued solutions, that enjoy no higher regularity with respect to the momentum variable, but whose moments and electromagnetic fields satisfy all required conditions to enter our framework.

### Résumé :

Nous étudions dans cet article la limite non-relativiste de Vlasov-Maxwell vers Vlasov-Poisson, ce qui correspond au régime où la vitesse de la lumière est grande par rapport à la vitesse typique des particules. Contrairement à [8], [38], [129] qui traitent le cas de solutions classiques, nous considérons des solutions à valeurs dans les mesures, dont les moments et champ électro-magnétique sont supposés satisfaire certaines bornes uniformes. À cette fin, nous utilisons une fonctionnelle inspirée par celle introduite par Loeper dans sa preuve d'unicité pour le système de Vlasov-Poisson [103]. Nous construisons également une classe particulière de solutions à valeurs dans les mesures, qui ne sont pas lisses par rapport à la variable de moment, mais dont les moments et champ électro-magnétiques satisfont toutes les conditions requises pour entrer dans notre cadre de travail.

# Table des matières

## 4.1 Introduction

### 4.1.1 The Vlasov-Poisson and Vlasov-Maxwell systems

This paper is concerned with the non-relativistic limit of the relativistic Vlasov-Maxwell system towards the classical Vlasov-Poisson system. These equations govern the evolution of a distribution function  $f(t, x, \xi)$  describing a system of charged particles interacting through electromagnetic forces,  $t \in [0, \infty)$  being the time variable,  $x \in \mathbf{R}^3$  or  $\mathbf{T}^3$  (the 3-dimensional torus  $\mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3$ , equipped with the normalized Lebesgue measure) the space variable, and  $\xi \in \mathbf{R}^3$  the momentum variable. Namely, for any  $t \in [0, \infty)$ ,  $f(t, \cdot, \cdot)$  stands for the probability density of particles with phase-space coordinates  $(x, \xi)$ .

Such systems come from the study of magnetized collisionless plasma. The difference between them lies in the way the electromagnetic force is defined. One can refer to the reference monograph [57] of Glassey (in particular Chapters IV, V, VI) for an overview on the background of these kinetic equations.

For the sake of simplicity we consider a system with a single species of particles with charge and mass equal to one, say electrons. For the case of periodic boundary conditions, we shall assume the presence of a background of fixed particles of opposite charge and unit density (typically ions whose mass is much larger than that of electrons). We will denote by  $c$  the speed of light and by  $|v_p|$  the typical velocity of particles, and we will consider

$$\varepsilon := \frac{|v_p|}{c} \in (0, 1]$$

as the small parameter converging to 0, characterizing the so-called non-relativistic limit.

For a given momentum  $\xi \in \mathbf{R}^3$ , the particles have in the non-relativistic framework a velocity

$$v(\xi) = \xi,$$

while in the relativistic framework a velocity

$$v(\xi) = \frac{\xi}{(1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{1/2}}.$$

Their motion is governed by the Vlasov equation :

$$\partial_t f + v(\xi) \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_\xi f = 0,$$

where  $F$  stands for the electromagnetic force.

To avoid any confusion the quantity  $v(\xi)$  will always designate the relativistic velocity in the following.

Such Vlasov equations are well understood when the self-induced force  $F$  enjoys a gain of regularity compared to the distribution function  $f$ , as in the Vlasov-Poisson system where one only considers the action of the electric field stemming from the Coulomb

potential (in the non-relativistic framework). On the whole space, the existence and uniqueness of global in time classical solutions has been known (either for smooth initial data with compact support or with bounded high order velocity moments) since the seminal work of Lions and Perthame [102] and Pfaffelmoser [122] (see also [130] for a simplified proof). For periodic boundary conditions, adapting the proof of [122], the global existence of classical solutions has been established by Batt and Rein in [15].

In our framework, that is

- either with no other charged particles in the case of the space domain  $\Omega = \mathbf{R}^3$ ,
- or with a background of massive fixed ions in the case of the space domain  $\Omega = \mathbf{T}^3$ ,

the Vlasov-Poisson system is the following :

$$\begin{cases} \partial_t f^{\text{VP}} + \xi \cdot \nabla_x f^{\text{VP}} + E(t, x) \cdot \nabla_\xi f^{\text{VP}} = 0, & t \in [0, \infty), x, \xi \in \Omega \times \mathbf{R}^3, \\ E = -\nabla \phi^{\text{VP}}, \\ -\Delta \phi^{\text{VP}} = \rho^{\text{VP}} - \lambda_\Omega, \end{cases} \quad (\text{VP})$$

where  $\rho^{\text{VP}}(t, x)$  stands for the macroscopic density function of particles in the plasma and  $j^{\text{VP}}(t, x)$  for the current density vector which are defined in the following way :

$$\rho^{\text{VP}}(t, x) = \int_{\mathbf{R}_\xi^3} f^{\text{VP}}(t, x, d\xi), \quad j^{\text{VP}}(t, x) = \int_{\mathbf{R}_\xi^3} \xi f^{\text{VP}}(t, x, d\xi).$$

To distinguish between  $\mathbf{R}^3$  and  $\mathbf{T}^3$ , we use the notation

$$\lambda_{\mathbf{R}^3} = 0, \quad \lambda_{\mathbf{T}^3} = 1.$$

The system is endowed with an initial condition

$$f|_{t=0} = f^0,$$

normalized so that  $\int_{\Omega \times \mathbf{R}_\xi^3} f^0(dx, d\xi) = 1$ . We will denote by  $f^{\text{VP}}$  a solution to (VP).

When the force  $F$  is the Lorentz force produced by an electromagnetic field  $(E(t, x), B(t, x))$  whose evolution is governed by the Maxwell equations, we obtain the Vlasov-Maxwell system :

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon^{\text{VM}} + v(\xi) \cdot \nabla_x f_\varepsilon^{\text{VM}} + (E_\varepsilon + \varepsilon v(\xi) \times B_\varepsilon) \cdot \nabla_\xi f_\varepsilon^{\text{VM}} = 0, \\ \varepsilon \partial_t E_\varepsilon = \nabla \times B_\varepsilon - \varepsilon j_\varepsilon^{\text{VM}}, & t \in [0, \infty), x, \xi \in \Omega \times \mathbf{R}^3, \\ \nabla \cdot E_\varepsilon = \rho_\varepsilon^{\text{VM}} - \lambda_\Omega, \\ \varepsilon \partial_t B_\varepsilon = -\nabla \times E_\varepsilon, \\ \nabla \cdot B_\varepsilon = 0, \end{cases} \quad (\text{VM})$$

where this time

$$\rho_\varepsilon^{\text{VM}}(t, x) = \int_{\mathbf{R}_\xi^3} f_\varepsilon^{\text{VM}}(t, x, d\xi), \quad j_\varepsilon^{\text{VM}}(t, x) = \int_{\mathbf{R}_\xi^3} v(\xi) f_\varepsilon^{\text{VM}}(t, x, d\xi).$$

The system is endowed with an initial condition

$$f^\varepsilon|_{t=0} = f^0, \quad E_\varepsilon|_{t=0} = E_\varepsilon^0, \quad B_\varepsilon|_{t=0} = B_\varepsilon^0.$$

We will denote by  $(f_\varepsilon^{\text{VM}}, E_\varepsilon, B_\varepsilon)$  a solution to (VM). We will often omit to index the quantities involved in (VM) by  $\varepsilon$  when not needed, in order to enlighten the notations.

In the following we will use the potential formulation of the Maxwell equations, sometimes called the Lienard-Wiechert formulation (see for instance Section 2 of [25] for a proof of the equivalence of the two formulations, and [99] for the physical point of view) that consists in introducing the potentials  $(\phi_\varepsilon, A_\varepsilon)$  solving

$$\begin{cases} -\Delta\phi_\varepsilon^{\text{VM}} = \rho_\varepsilon^{\text{VM}} - \lambda_\Omega, \\ \varepsilon^2\partial_t^2 A_\varepsilon - \Delta A_\varepsilon = \varepsilon\mathbf{P}(j_\varepsilon^{\text{VM}}), \end{cases} \quad (4.1.1)$$

where  $\mathbf{P}$  stands for the Leray projection, that is the projection from the set of vector fields whose components belong to  $L^2(\Omega)$  onto the subspace of divergence free vector fields. It appears in the equations because to have a unique pair of potentials  $(\phi_\varepsilon, A_\varepsilon)$  corresponding to the electromagnetic field  $(E_\varepsilon, B_\varepsilon)$  we need an additional gauge condition. We make the choice of the Coulomb gauge condition

$$\nabla \cdot A_\varepsilon = 0,$$

which is encoded in the equations thanks to the operator  $\mathbf{P}$ . Then one obtains  $E_\varepsilon$  by the formula

$$E_\varepsilon = -\nabla\phi_\varepsilon^{\text{VM}} - \varepsilon\partial_t A_\varepsilon, \quad (4.1.2)$$

while  $B_\varepsilon$  is recovered

- for  $\Omega = \mathbf{R}^3$ , thanks to the equation

$$B_\varepsilon = \nabla \times A_\varepsilon, \quad (4.1.3)$$

- for  $\Omega = \mathbf{T}^3$ , this requires to take into account the mean space value, which results in the equation

$$B_\varepsilon = \nabla \times A_\varepsilon + \int_{\mathbf{T}^3} B_\varepsilon dx. \quad (4.1.4)$$

We shall also endow (4.1.1) with initial conditions  $(A_\varepsilon|_{t=0}, \varepsilon\partial_t A_\varepsilon|_{t=0})$  that must be compatible with  $E_\varepsilon|_{t=0} = E_\varepsilon^0, B_\varepsilon|_{t=0} = B_\varepsilon^0$ .

In this paper, as we shall manipulate solutions to the Vlasov-Maxwell and Vlasov-Poisson systems, we will index the quantities  $f, \rho, j, \phi$  etc. by VP or VM when needed to make the distinction.

### 4.1.2 The non-relativistic limit

Formally taking  $\varepsilon = 0$  in the Vlasov-Maxwell system (VM), one almost readily obtains the Vlasov-Poisson system (VP). The general goal is to determine, given a sequence  $(f_\varepsilon^{\text{VM}})_\varepsilon$  of weak solutions to (VM), whether it converges (in a sense to be made precise) to a solution  $f^{\text{VP}}$  to (VP). This is what we refer to as the non-relativistic limit.

Until now this problem has been tackled in the pioneering (simultaneous and independent) works of Asano-Ukai [8], Degond [38] and Schaeffer [129], which all concern classical solutions to (VM) and (VP) on  $\Omega = \mathbf{R}^3$ . They rely on high order (Sobolev or Lipschitz) estimates on the difference  $f^{\text{VP}} - f_\varepsilon^{\text{VM}}$ , i.e. between two classical solutions stemming from the same smooth initial distribution function. These non-relativistic limits require at least Lipschitz uniform regularity and boundedness for the distribution function (with respect to  $x$  and  $\xi$ ) and for the electromagnetic field (with respect to  $x$ ). We would like to be able to relax such an assumption. Let us also mention that the non-relativistic limit has also been treated for the Vlasov-Nordström system in [33], for the Vlasov-Maxwell

system in lower dimensions in [101] and more recently in [131]. Large time (with respect to  $1/\varepsilon$ ) estimates are studied in [118] for  $\Omega = \mathbf{R}^3$  and in [72], [73], in relation with Penrose stability issues for  $\Omega = \mathbf{T}^3$ .

We observe that the structure of the proofs in [8], [38], [129] is in fact somehow similar to the one used by Robert in [127] to prove a uniqueness result for the Vlasov-Poisson system, when the initial distribution function  $f^0$  is a bounded measurable and compactly supported function. More recently, this assumption on the initial data has been weakened by Loeper in [103] who was able to handle measure-valued solutions without compact support. Using tools from optimal transport, he proved, given an initial condition, the uniqueness of weak solutions to the Vlasov-Poisson system which have a bounded macroscopic density. Let us mention that this result has been refined by Miot [111] and Holding-Miot [78].

Our idea in this work is to adopt the same point of view as Loeper in [103], that is to consider measure-valued solutions to (VM) and (VP) and prove the non-relativistic limit with conditional bounds on macroscopic quantities (moments or force fields). Loosely speaking, we shall prove that given a fixed initial distribution function  $f^0$  and

- a sequence of solutions  $(f_\varepsilon^{\text{VM}})$  to (VM) with a bounded density  $\rho^{\text{VM}}$  that is uniformly bounded in  $\varepsilon$  and with a higher order moment and and electromagnetic field of controlled growth in  $\varepsilon$ ,
- a solution  $f^{\text{VP}}$  to (VM) with a uniformly bounded density  $\rho^{\text{VP}}$ ,

together with some other milder conditions to be later stated, the sequence  $(f_\varepsilon^{\text{VM}})$  must converge to  $f^{\text{VP}}$  in the weak- $\star$  sense of measures (which will be quantified using a Wasserstein distance). Perhaps surprisingly, this framework allows to consider solutions to the Vlasov-Maxwell system with electromagnetic fields that are not even bounded in  $\varepsilon$ .

To do so, we will derive an Osgood-type inequality on a functional involving the two regular Lagrangian flows associated to the solutions  $f^{\text{VP}}$  and  $f_\varepsilon^{\text{VM}}$ , an argument related to the proof developed by Dobrushin in [43] for the purpose of the Mean-Field limit and then used by Loeper in [103] to prove his uniqueness result for the Vlasov-Poisson system. Finally, we mention that the idea of using Wasserstein stability estimates for studying singular limits of Vlasov equations has also recently been used in [71], [70] (in the context of the so-called quasineutral limit).

### 4.1.3 Main results

Before being allowed to state our main result, we have to specify the notions of weak solutions we will manipulate.

We denote by  $\mathcal{P}_2(\Omega \times \mathbf{R}^3)$  the set of probability measures on  $\Omega \times \mathbf{R}^3$ , with finite first two moments, endowed with the standard weak- $\ast$  topology. We look for solutions to (VP) and (VM) such that

$$f|_{t=0} = f^0.$$

with  $f^0 \in \mathcal{P}_2(\Omega \times \mathbf{R}^3)$ .

**Definition 4.1.1.** (*Weak solution to (VP)*). For  $T > 0$ , we will call  $f^{\text{VP}}$  a weak solution to (VP) on  $[0, T)$  associated to the initial condition  $f^0$  if

- $f \in C([0, T), \mathcal{P}_2(\Omega \times \mathbf{R}^3) - w\ast)$ ,
- $-\nabla\phi^{\text{VP}} \in L^1(0, T; C(\Omega))$ ,

— for all test functions  $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^3)$ ,

$$\int_{[0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^3} (\partial_t \varphi + v(\xi) \cdot \nabla_x \varphi - \nabla_x \phi^{VP} \cdot \nabla_\xi \varphi) f(t, d\xi, dx) dt = - \int_{\Omega \times \mathbf{R}^3} \varphi|_{t=0} f^0(d\xi, dx),$$

— for all  $t \in [0, T)$ ,  $\phi^{VP}(t)$  solves the Poisson equation :

$$-\Delta \phi^{VP} = \rho^{VP} - \lambda_\Omega.$$

— for all  $t \in [0, T)$ , the density of current  $j^{VP}$  satisfies the conservation law :

$$\partial_t j^{VP} + \nabla_x : \langle f, 1 \otimes |\xi|^2 \rangle = -\nabla_x \phi^{VP} \rho^{VP}.$$

**Remark 4.1.2.** We should mention that in the following we only consider solutions such that the macroscopic density  $\rho^{VP}$  belongs to  $L^\infty(0, T; L^1 \cap L^\infty(\Omega))$  and therefore  $\nabla \phi^{VP}$  will actually be log-Lipschitz.

**Definition 4.1.3.** (Weak solution to (VM)). For  $T > 0$ , we will call  $(f^{VM}, E, B)$  a weak solution to (VM) on  $[0, T)$  associated to the initial condition  $(f^0, E^0, B^0)$  if

- $f^{VM} \in C([0, T]; \mathcal{D}'_2(\Omega \times \mathbf{R}^3) - w^*)$ ,
- $E, B \in L^1(0, T; C^0 \cap L^\infty(\Omega)) \cap L^1(0, T; \text{LogLip}_{loc}(\Omega))$ ,
- for all test functions  $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^3)$ ,

$$\int_{[0, T] \times \Omega \times \mathbf{R}^3} (\partial_t \varphi + v(\xi) \cdot \nabla_x \varphi + E \cdot \nabla_\xi \varphi + \varepsilon v(\xi) \times B \cdot \nabla_\xi \varphi) f(t, d\xi, dx) dt = - \int_{\Omega \times \mathbf{R}^3} \varphi|_{t=0} f^0(d\xi, dx),$$

— for all test functions  $\psi \in C_c^\infty([0, T] \times \Omega, \mathbf{R})$ ,  $\Psi \in C_c^\infty([0, T] \times \Omega, \mathbf{R}^3)^3$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon \langle E, \partial_t \Psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \langle \nabla \times B, \Psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \varepsilon \langle j^{VM}, \Psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= -\varepsilon \langle E^0, \Psi|_{t=0} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \\ \langle \nabla \cdot E, \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= \langle \rho^{VM} - \lambda_\Omega, \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ \varepsilon \langle \partial_t B, \Psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \langle \nabla \times E, \Psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= \varepsilon \langle B^0, \Psi|_{t=0} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ \langle \nabla \cdot B, \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= 0. \end{aligned}$$

**Remark 4.1.4.** Let us provide some remarks about Definition 4.1.3.

- Again, we shall only consider solutions such that the density  $\rho^{VM}$  belongs to  $L^\infty(0, T; L^1 \cap L^\infty(\Omega))$ . The assumption on the regularity of  $E$  is therefore only a condition on  $\varepsilon \partial_t A$ .
- The LogLip-regularity on  $E$  and  $B$  is ad hoc in order to be able to define characteristics using Osgood's theorem. Note however that this regularity is not asked to be uniform with respect to  $\varepsilon$ . It is likely that less regularity can be asked for, using the more recent theories developed by DiPerna and Lions [41] and Ambrosio [1], but the situation is not clear as we deal with measure data.
- To ensure this regularity, we can for instance impose some Sobolev regularity for  $j^{VM}$ . Thanks to the wave equation satisfied by  $A$  in (4.1.1) and the Sobolev embedding, it is for instance enough to set the condition  $j^{VM} \in L^\infty(0, T; H^s(\Omega))$  for some  $s > 3/2$ .

Before stating our main result we also need to specify further assumptions that the solutions we are considering need to satisfy.

**Definition 4.1.5.** *We say that a weak solution  $f^{VP}$  to the Vlasov-Poisson system in the sense of Definition 4.1.1 is suitable if the macroscopic density and the fourth moment of  $f^{VP}$  are bounded in the following sense :*

$$\|\rho^{VP}\|_{L^\infty(0,T;L^1 \cap L^\infty(\Omega))} < +\infty, \quad \left\| \int_{\mathbf{R}^3} |\xi|^4 f^{VP}(t, x, d\xi) \right\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} < +\infty.$$

Such a solution is actually unique according to [103] (recalled in Theorem 4.1.8 below).

Finally, some normalization conditions are required for the initial conditions that we are going to consider. These are stated in the following definition.

**Definition 4.1.6.** *We say that the initial data  $(f^0, E_\varepsilon^0, B_\varepsilon^0) \in \mathcal{P}_2(\Omega \times \mathbf{R}^3) \times \mathcal{D}'(\Omega)^2$  are normalized if the following conditions hold. First of all,*

$$\nabla \cdot E_\varepsilon^0 = \int_{\mathbf{R}^3} f^0(x, d\xi) - \lambda_\Omega, \quad \text{and} \quad \nabla \cdot B_\varepsilon^0 = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

In the case  $\Omega = \mathbf{T}^3$ , we furthermore ask that

— the spatial mean of the current density is initially assumed to be zero<sup>1</sup>

$$\int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} \xi f^0(dx, d\xi) = 0;$$

— the spatial mean value of  $E_\varepsilon^0$  satisfies

$$\langle E_\varepsilon^0 \rangle := \int_{\mathbf{T}^3} E_\varepsilon^0(x) dx = 0.$$

We are finally in position to state our main result :

**Theorem 4.1.7.** *Let  $f^0$  in  $\mathcal{P}_2(\Omega \times \mathbf{R}^3)$ ,  $(E_\varepsilon^0, B_\varepsilon^0) \in \mathcal{D}'(\Omega)^2$  be normalized initial data in the sense of Definition 4.1.6. Let  $T > 0$  (independent of the parameter  $\varepsilon$ ) and assume that  $f^{VP}$  and  $(f_\varepsilon^{VM}, E_\varepsilon, B_\varepsilon)$  are weak solutions to respectively (VP) and (VM) on the interval of time  $[0, T]$ , with respective initial data  $f^0$  and  $(f^0, E_\varepsilon^0, B_\varepsilon^0)$ . Assume furthermore that  $f^{VP}$  is a suitable solution in the sense of Definition 4.1.5.*

*Finally assume that there exists  $C_0 > 0$  and  $(\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2) \in [0, 1]^4$  such that*

$$\kappa := \min(\alpha - (\beta + 2\gamma_2), 1 - (\gamma_1 + \gamma_2)) > 0, \tag{4.1.5}$$

so that

— the macroscopic density  $\rho^{VM}$  is uniformly bounded in  $\varepsilon$  :

$$\|\rho_\varepsilon^{VM}\|_{L^\infty(0,T;L^1 \cap L^\infty(\Omega))} \leq C_0, \tag{4.1.6}$$

— the moment of order  $\alpha$

$$m_\alpha(t, x) := \int_{\mathbf{R}^3} f_\varepsilon^{VM}(t, x, d\xi) |\nu(\xi)|^\alpha,$$

has a uniform bound that has a controlled growth in  $\varepsilon$  :

$$\|m_\alpha\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq C_0 \varepsilon^{-\beta}, \tag{4.1.7}$$

---

1. Note that this assumption on the current density can be ensured by a Galilean change of frame.

— the longitudinal electric and magnetic fields have a  $L^2$  norm that has a controlled growth in  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon \partial_t A_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C_0 \varepsilon^{-\gamma_1}, \\ \|B_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C_0 \varepsilon^{-\gamma_2}. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Then there exist  $\varepsilon_0 > 0$  a constant  $C > 0$  depending only on the initial data such that<sup>2</sup> for all  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  and for all  $t$  in  $[0, T]$ ,

$$W_2(f^{\text{VP}}, f_\varepsilon^{\text{VM}})(t) \leq (C(1+T)^2 \varepsilon^\kappa)^{\exp(-C(1+T)^2)}. \quad (4.1.9)$$

The proof of Theorem 4.1.7 is based on the study of the functional

$$Q(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega \times \mathbb{R}^3} f^0(dx, d\xi) (|X^{\text{VP}} - X^{\text{VM}}|^2 + |\Xi^{\text{VP}} - \Xi^{\text{VM}}|^2) \quad (4.1.10)$$

where, loosely speaking,  $(X^{\text{VP}}, \Xi^{\text{VP}})$  (resp.  $(X^{\text{VM}}, \Xi^{\text{VM}})$ ) stand for the characteristic curves (more precisely the lagrangian flow) associated to Vlasov-Poisson (resp. Vlasov-Maxwell).

The core of the proof will consist in proving the following Osgood-type inequality. For all  $t \in [0, T]$ ,

$$Q(t) \leq C(1+T)^2 \varepsilon^\kappa + \int_0^t C(1+T)^2 Q(s) \left(1 + \log^+ \left(\frac{1}{Q(s)}\right)\right) ds, \quad (4.1.11)$$

from which we can deduce the stability estimate (4.1.9).

Of course, it is possible to apply Theorem 4.1.7 to the strong solutions built in [8], [38], [129], for which we already know that the non-relativistic limits holds. But Theorem 4.1.7 is designed to handle other types of solutions. It is the purpose of a second result (see Theorem 4.4.4 later in this paper) to build measure-valued weak solutions to (VM) and (VP) that do not enjoy higher regularity with respect to  $\xi$ , but whose moments and electromagnetic field satisfy all required conditions.

#### 4.1.4 Comments on Theorem 4.1.7

A few comments on the statement of Theorem 4.1.7 are in order.

**1.** Contrary to the classical results of [8], [38], [129], we obtain in the stability estimate (4.1.9) a polynomial rate of convergence whose exponent decreases exponentially fast to zero with the time running.

It is not clear whether the method of [78] instead of that of [103] can be adapted to study the non-relativistic limit : if it were the case, this would allow to improve the rates of convergence in the stability estimate (4.1.9). This is left to future studies.

**2.** As already mentioned, Theorem 4.1.7 allows electromagnetic fields that may blow up in  $\varepsilon$ . No well-prepared assumption is either required. Note however that the convergence result only concerns distribution functions and not these fields.

**3.** One can observe that the condition on the moments of the solution to the Vlasov-Maxwell system  $f^{\text{VM}}$  is (perhaps as expected) more restrictive than the one imposed on  $f^{\text{VP}}$  (which corresponds to the criterion of Loeper [103] in view of uniqueness), since we

<sup>2</sup>. Here  $W_2$  stands for the Wasserstein-2 distance on which we refer to Section 4.2 for a definition and some properties.



require a control of a higher order moment  $m_\alpha$ . But the parameter  $\alpha$  can be taken arbitrarily close to 0 and some growth in  $\varepsilon$  is even permitted. The price to pay is that the rate of convergence in (4.1.9) gets deteriorated at the same time.

**4.** Our framework shows little dependence on the space dimension : all statements could be modified to handle other dimensions than 3. This aspect differs from the classical approaches on  $\Omega = \mathbf{R}^d$  where explicit formulas for solutions to wave equations are used and are thus dependent on the dimension  $d$  (in particular on its evenness or oddness).

**5.** If additionally  $f^0$  is in  $L^1 \cap L^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^3)$  and  $E_\varepsilon^0, B_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega)$ , then for all  $\varepsilon \in (0, 1]$ , one can build a global weak solution  $f_\varepsilon^{\text{VM}}$  to (VM) satisfying an energy inequality (see Theorem 4.1.10 below, and Proposition 1.6 of [27]). If we additionally assume that the initial energy is uniformly bounded in  $\varepsilon$ , that is to say

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \mathbf{R}^3} \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\xi|^2} - 1 \right) f^0 d\xi dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|E_\varepsilon^0|^2 + |B_\varepsilon^0|^2) dx \\ & \leq \int_{\Omega \times \mathbf{R}^3} |\xi|^2 f^0 d\xi dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|E_\varepsilon^0|^2 + |B_\varepsilon^0|^2) dx \leq C_0, \end{aligned}$$

we obtain the existence of  $C_1 > 0$  such that for all  $\varepsilon \in (0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} & \| |\xi| f_\varepsilon^{\text{VM}} \|_{L^\infty(0, +\infty; L^1(\Omega \times \mathbf{R}^3))} + \| E_\varepsilon \|_{L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega))} \\ & \qquad \qquad \qquad + \| B_\varepsilon \|_{L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega))} \leq C_1. \end{aligned}$$

This means that the control (4.1.8) with  $\gamma = 0$  is automatically ensured for such solutions.

**6.** In the case  $\Omega = \mathbf{T}^3$ , it is also possible to consider initial data such that that the spatial mean-value of the initial electric field satisfies

$$|\langle E_\varepsilon^0 \rangle| \leq C_0 \varepsilon^\delta,$$

for some  $\delta > 0$ . The rate of convergence in (4.1.9) can get worse if  $\delta$  is close to 0.

**7.** It is finally possible to consider initial conditions that fully depend on  $\varepsilon$ , i.e.  $(f_\varepsilon^0, E_\varepsilon^0, B_\varepsilon^0)$  for Vlasov-Maxwell and an initial condition  $f^0$  for Vlasov-Poisson. Loosely speaking, the final stability estimate (4.1.9) is then replaced by

$$W_2(f^{\text{VP}}, f_\varepsilon^{\text{VM}})(t) \leq C \left( C(1+T)^2 \varepsilon^\kappa + CW_2(f_\varepsilon^0, f^0) \right)^{\exp(-C(1+T)^2)}, \quad (4.1.12)$$

assuming  $W_2(f_\varepsilon^0, f^0)$  is small enough. To obtain such a result, this requires to modify the functional  $Q$  introduced in (4.1.10) (see for instance the proof of Theorem 3.1 in [70]).

### 4.1.5 The Cauchy problem for the Vlasov-Maxwell and Vlasov-Poisson systems : a short review

The study of the Cauchy problem (either for classical or weak solutions) for the Vlasov-Poisson and the Vlasov-Maxwell system has a long history. We will only (quickly) review some aspects that are pertaining to this work.

**Vlasov-Poisson.** For what concerns classical solutions, we have already discussed the landmark works [102], [122] and [130], [15] (see also the earlier important works [138] and [10]). On the other hand, Arsenev in [2] built the first global weak solutions to (VP). Let us also state the uniqueness result of [103] to which this work is related.

**Theorem 4.1.8.** (Loeper [103]) Given  $f^0$  in  $\mathcal{P}_2(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$ , there exists at most one weak solution  $f$  to (VP) such that

$$\left\| \int_{\mathbf{R}^3} f(t, x, d\xi) \right\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbf{R}^3)} < +\infty.$$

The propagation of moments is also an important issue that was studied in [102] on  $\mathbf{R}^3$ . Recently, Pallard in [119] was able to prove the propagation of moments on  $\mathbf{T}^3$  (see also [120]).

**Theorem 4.1.9.** (Pallard [119]) Given  $k > 14/3$  and a non-negative initial data  $f^0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3)$  such that :

$$\int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} |\xi|^k f^0(x, \xi) d\xi dx < +\infty,$$

there exists a weak solution  $f \in C([0, T], \mathcal{P}_2(\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3) - w^*)$  to the Cauchy problem for the Vlasov-Poisson system (VP) such that for any  $T > 0$  we have the following propagation of the moments :

$$\int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} |\xi|^k f(t, x, \xi) d\xi dx < +\infty.$$

**Vlasov-Maxwell.** The theory of (local) classical solutions to the Vlasov-Maxwell system (seen as a quasi-linear equation) was first developed in [146], [7], [55]. In particular in [55], Glassey and Strauss found a criterion for the formation of possible singularities : loosely speaking, they can occur only at large velocities. This was later revisited in [25], [94]. We also refer to [121] and [104] (and references therein) for some recent developments. Global existence is only known for special cases, in particular for small data (see [54], [132], [23]). The existence of global weak solutions was proved in the landmark work by DiPerna and Lions in [40].

**Theorem 4.1.10.** (DiPerna-Lions [40]) Let  $f^0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3)$  be a non-negative function that satisfies :

$$\int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} |\xi|^2 f^0(x, \xi) d\xi dx < +\infty.$$

Let  $E^0, B^0 \in L^2(\mathbf{R}^3)$  satisfy the following compatibility conditions on the initial data :

$$\nabla_x \cdot E^0 = \int_{\mathbf{R}^3} f^0(x, \xi) d\xi, \quad \text{and} \quad \nabla \cdot B^0 = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3).$$

Then there exist  $f \in L^\infty(0, +\infty; L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3))$  and an electromagnetic field  $E, B \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\mathbf{R}^3))$  which satisfy (VM) in the sense of distributions.

As far as we know, propagation of moments for solutions to (VM) remains largely open.

#### 4.1.6 Organization of the paper

The paper is organized as follows. In the next Section 4.2 we recall some basic definitions and facts about the Wasserstein distance in order to set up the framework we will work in and also recall a very useful property proved by Loeper in [103]. Then we proceed to the proof of Theorem 4.1.7 in Section 4.3. Namely we provide an Osgood inequality for the functional  $Q$ . Finally in Section 4.4 and in Section 4.5, in the case  $\Omega = \mathbf{T}^3$ , we construct a special class of measure-valued solutions, that have no higher regularity in  $\xi$  but that are

very regular in  $x$ , namely real-analytic. This is based on a multifluid representation (introduced by Grenier in [66]), with analyticity regularity in space variable but only measure in the momentum variable.

Throughout this paper,  $C$  will designate a positive constant depending on the initial data but independent of the parameter  $\varepsilon$ , that may change from line to line.

**Acknowledgements.** Partial support of the grant ANR-19-CE40-0004 is acknowledged.

## 4.2 Definitions, notations and classical results about the Wasserstein distance $W_2$

This section is devoted to the exposition of a few classical results from Optimal Transportation Theory (see [142] for an overview of the tools needed here) and the links between the Wasserstein distances and the  $H^{-1}$ -Sobolev norm. For the proofs of the following theorems we refer to Section 2 of [103].

**Definition 4.2.1.** *Let  $X$  and  $Y$  be two polish spaces. Let  $\rho_1, \rho_2$  be two Borel probability measures on respectively  $X$  and  $Y$ . We define the Wasserstein distance of order 2 between  $\rho_1$  and  $\rho_2$ , denoted  $W_2(\rho_1, \rho_2)$ , by :*

$$W_2(\rho_1, \rho_2) = \inf_{\gamma} \left( \int_{X \times Y} d(x, y)^2 d\gamma(x, y) \right)^{1/2},$$

where the inf runs over the set of probability measures  $\gamma$  on  $X \times Y$  whose marginals  $\mathbb{P}_x \gamma$  and  $\mathbb{P}_y \gamma$  are equal respectively to  $\rho_1$  and  $\rho_2$ .

**Remark 4.2.2.** *Let us state some remarks about the previous definitions.*

- *We do not need this degree of generality for our purpose, in the following  $X$  and  $Y$  will always be either  $\mathbf{T}^3$  or  $\mathbf{R}^3$ .*
- *The Wasserstein distance of order  $p$  would have been defined in the same way, only replacing  $d(x, y)^2$  by  $d(x, y)^p$  but we restrict ourselves to the case  $p = 2$ .*
- *There is an important relation between this distance and the optimal transportation theory. This is what enables to relate the distance  $W_2$  and the  $H^{-1}$ -norm, a relation described in the next proposition. The proof and the intermediary lemmas that lead to this result for measure on  $\mathbf{R}^3$  are detailed in Section 2 of [103] (they adapt to  $\mathbf{T}^3$  with minor changes), based on the seminal results from optimal transportation theory by Brenier [30] and McCann and Gangbo [51].*

**Theorem 4.2.3.** (Loeper [103].) *Let  $\rho_1, \rho_2$  be two probability measures on  $\Omega$  with  $L^\infty$  density with respect to the Lebesgue measure. Let  $\psi_i, i = 1, 2$ , solve :*

$$-\Delta \psi_i = \rho_i - 1, \quad \text{on } \Omega.$$

Then

$$\|\nabla \psi_1 - \nabla \psi_2\|_{L^2(\Omega)} \leq (\max\{\|\rho_1\|_{L^\infty}, \|\rho_2\|_{L^\infty}\})^{1/2} W_2(\rho_1, \rho_2).$$

**Definition 4.2.4.** *Let  $\rho_1$  be a Borel probability measure on  $\Omega \times \mathbf{R}^3$  and  $T : \Omega \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \Omega \times \mathbf{R}^3$  be a measurable mapping. The push-forward of  $\rho_1$  by  $T$  is the measure  $\rho_2$  defined by*

$$\forall B \subset \Omega \times \mathbf{R}^3 \text{ Borel, } \rho_2(B) = \rho_1(T^{-1}(B)).$$

We will use the notation  $\rho_2 = T\#\rho_1$ .

We shall now give a useful remark in view of the estimates of section 3.

**Remark 4.2.5.** *Let  $(\Omega_0, \mu)$  be a probability space, and consider  $X_1, X_2$  two mappings from  $(\Omega_0, \mu)$  to  $\Omega \times \mathbf{R}^3$ . If  $X_1 \# d\mu = \rho_1$ ,  $X_2 \# d\mu = \rho_2$ , then  $\gamma := (X_1, X_2) \# d\mu$  has marginals  $\rho_1$  and  $\rho_2$ , which implies that*

$$\int_{\Omega_0} d(X_1, X_2)^2 d\mu = \int_{\Omega \times \mathbf{R}^3} d(x, y)^2 d\gamma(x, y) \leq W_2^2(\rho_1, \rho_2).$$

### 4.3 Proof of Theorem 4.1.7

In order to prove Theorem 4.1.7, we shall focus on the case  $\Omega = \mathbf{T}^3$  as the treatment of space mean values requires a specific analysis compared to the case of  $\mathbf{R}^3$ . We explain in a final subsection the (slight) required modifications to handle the case  $\Omega = \mathbf{R}^3$ .

#### 4.3.1 Lagrangian formulation for weak solutions of Vlasov-Poisson and relativistic Vlasov-Maxwell

We adopt a Lagrangian point of view, which means that our analysis will essentially rely on following the particles along their path. It means in concrete terms that we consider the two characteristic systems of ODEs corresponding to the Vlasov-Poisson system and the Vlasov-Maxwell system, starting at  $(x, \xi)$  at time 0.

We consider a weak solution  $f^{\text{VP}}$  to (VP) in the sense of Definition 4.1.1 and a weak solution  $f^{\text{VM}}$  to (VM) in the sense of Definition 4.1.3.

The macroscopic densities  $\rho^i$  are assumed to be bounded in  $L^1 \cap L^\infty$  and therefore  $\nabla_x \phi^i$  classically satisfies the following regularity properties (see Lemma 3.1 of [103] or Lemma 3.2 of [70]) :

**Lemma 4.3.1.** *Let  $\phi$  satisfy the Poisson equation*

$$-\Delta \phi = \rho - 1, \quad \text{in } \mathbf{T}^3.$$

*Then there exists  $C$  depending only on  $\|\rho - 1\|_{L^\infty((0, T) \times \mathbf{T}^3)}$ , such that*

$$\|\nabla \phi\|_{L^\infty((0, T) \times \mathbf{T}^3)} \leq C,$$

*and*

$$\forall t \in [0, T), \forall (x, y) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3,$$

$$|\nabla \phi(t, x) - \nabla \phi(t, y)| \leq C|x - y| \left( 1 + \log^+ \left( \frac{1}{|x - y|} \right) \right),$$

*where  $\log^+(z) = \log z$  if  $z \geq 1$ ,  $\log^+(z) = 0$  if  $z < 1$ .*

This is enough to define a unique Hölder continuous flow (see e.g. [106]) that satisfies

$$\begin{cases} \partial_t X^{\text{VP}}(t, x, \xi) = \Xi^{\text{VP}}(t, x, \xi), \\ \partial_t \Xi^{\text{VP}}(t, x, \xi) = -\nabla \phi^{\text{VP}}(t, X^{\text{VP}}), \end{cases} \quad (4.3.1)$$

with the initial conditions

$$\begin{cases} X^{VP}(0, x, \xi) = x, \\ \Xi^{VP}(0, x, \xi) = \xi. \end{cases} \quad (4.3.2)$$

On the other hand, for the Vlasov-Maxwell system, by definition of a weak solution, we also have that the electromagnetic field  $(E, B)$  belongs to  $L^1(0, T; \text{LogLip}(\mathbf{T}^3))$ . This is therefore enough to define a unique Hölder continuous flow that satisfies

$$\begin{cases} \partial_t X^{VM}(t, x, \xi) = v(\Xi^{VM}(t, x, \xi)), \\ \partial_t \Xi^{VM}(t, x, \xi) = E(t, X^{VM}) + \varepsilon v(\Xi^{VM}) \times B(t, X^{VM}), \end{cases} \quad (4.3.3)$$

endowed with the initial data

$$\begin{cases} X^{VM}(0, x, \xi) = x, \\ \Xi^{VM}(0, x, \xi) = \xi. \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Moreover, we have the following representation formula :

$$\forall t \in [0, T), \quad f^{VP} = (X^{VP}, \Xi^{VP})(t, \cdot, \cdot) \# f^0, \quad (4.3.5)$$

and

$$\forall t \in [0, T), \quad f^{VM} = (X^{VM}, \Xi^{VM})(t, \cdot, \cdot) \# f^0. \quad (4.3.6)$$

Likewise,

$$\forall t \in [0, T), \quad \rho^{VP} = X^{VP}(t, \cdot, \cdot) \# f^0, \quad (4.3.7)$$

and

$$\forall t \in [0, T), \quad \rho^{VM} = X^{VM}(t, \cdot, \cdot) \# f^0. \quad (4.3.8)$$

### 4.3.2 Log-Grönwall estimate on the square of the $W_2$ distance between the Lagrangian trajectories

We define the functional

$$Q(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) (|X^{VP} - X^{VM}|^2 + |\Xi^{VP} - \Xi^{VM}|^2) \quad (4.3.9)$$

which quantifies the distance between the two solutions in a weak sense that we are going to explain. One can notice that

$$((X^{VP}, \Xi^{VP})(t), (X^{VM}, \Xi^{VM})(t)) \# f^0$$

is a probability measure on  $(\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3)^2$  with marginals  $f^{VP}$  and  $f^{VM}$ , which leads to the important preliminary lemma :

**Lemma 4.3.2.** *Let  $Q$  be the quantity defined in (4.3.9), then*

$$W_2^2(f^{VP}(t), f^{VM}(t)) \leq 2Q(t),$$

and

$$W_2^2(\rho^{VP}(t), \rho^{VM}(t)) \leq 2Q(t).$$

Any control of the functional  $Q(t)$  will consequently imply an estimate of the Wasserstein distance between  $f^{\text{VP}}$  and  $f^{\text{VM}}$ .

One can notice that the same considerations as above on the Lagrangian flows for the quantities  $|X^{\text{VP}} - X^{\text{VM}}|^2$  and  $|\Xi^{\text{VP}} - \Xi^{\text{VM}}|^2$  lead to

$$|X^{\text{VP}} - X^{\text{VM}}|^2(t) = 2 \int_0^t (X^{\text{VP}} - X^{\text{VM}})(s) \cdot (\Xi^{\text{VP}} - \nu(\Xi^{\text{VM}}))(s) ds,$$

and

$$|\Xi^{\text{VP}} - \Xi^{\text{VM}}|^2(t) = 2 \int_0^t (\Xi^{\text{VP}} - \Xi^{\text{VM}})(s) \cdot (F^{\text{VP}}(s, X^{\text{VP}}) - F^{\text{VM}}(s, X^{\text{VM}}, \Xi^{\text{VM}})) ds.$$

with the notation

$$\begin{aligned} F^{\text{VP}}(t, x) &= -\nabla_x \phi^{\text{VP}}(t, x), \\ F^{\text{VM}}(t, x, \xi) &= -\nabla_x \phi^{\text{VM}}(t, x) - \varepsilon \partial_t A(t, x) + \varepsilon \nu(\xi) \times B(t, x). \end{aligned}$$

This yields for all  $t$  in  $[0, T)$  :

$$\begin{aligned} Q(t) &\leq Q(0) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |(X^{\text{VP}}(s) - X^{\text{VM}}(s)) \cdot (\Xi^{\text{VP}}(s) - \nu(\Xi^{\text{VM}}(s)))| ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |(\Xi^{\text{VP}}(s, x, \xi) - \Xi^{\text{VM}}(s, x, \xi)) \\ &\quad \cdot (\nabla_x \phi^{\text{VP}}(s, X^{\text{VP}}(s, x, \xi)) - \nabla_x \phi^{\text{VM}}(s, X^{\text{VM}}(s, x, \xi)))| ds \\ &+ \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |(\Xi^{\text{VP}} - \Xi^{\text{VM}}) \cdot (\nu(\Xi^{\text{VM}}) \times B(s, X^{\text{VM}}))| ds \\ &+ \varepsilon \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) \left| \int_0^t (\Xi^{\text{VP}} - \Xi^{\text{VM}}) \cdot \partial_t A(s, X^{\text{VM}}) ds \right|. \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

In the following, the  $C$  will stand for a generic positive constant (independent of  $\varepsilon$  but that may depend on the initial data) that may change from line to line.

We will be able to somehow systematically replace  $\Xi^{\text{VP}}(t) - \nu(\Xi^{\text{VM}})(t)$  by  $\Xi^{\text{VP}}(t) - \Xi^{\text{VM}}(t)$ , up to some error terms. This is the content of the next lemma.

**Lemma 4.3.3.** *Let  $G \in L^1_{loc}(\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3)$ . For almost all  $s \in [0, T)$ , we have the estimate*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |(\Xi^{\text{VP}} - \nu(\Xi^{\text{VM}})) \cdot G| &\leq \\ C \left( \varepsilon^2 + \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |G|^2 + \left| \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |\Xi^{\text{VP}} - \Xi^{\text{VM}}| |G| \right| \right). \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

*Démonstration.* We can write

$$\Xi^{\text{VP}} - \nu(\Xi^{\text{VM}}) = [\Xi^{\text{VP}} - \nu(\Xi^{\text{VP}})] + [\nu(\Xi^{\text{VP}}) - \nu(\Xi^{\text{VM}})]$$

We observe then that

$$|\nu(\xi) - \xi| \leq \frac{\varepsilon |\xi|^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\xi|^2}} \leq \varepsilon |\xi|^2,$$

and by the Cauchy-Schwarz inequality and the Young inequality, we infer

$$\int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |(\Xi^{\text{VP}} - \nu(\Xi^{\text{VP}})) \cdot G(x, \xi)| \leq \frac{1}{2} \left( \varepsilon^2 \left| \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} |\xi|^4 f^{\text{VP}}(t, dx, d\xi) \right| + \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |G(x, \xi)|^2 d\xi dx \right),$$

and the first term is bounded by  $C\varepsilon^2$  thanks to the assumption that the solution to Vlasov-Poisson is suitable in the sense of Definition 4.1.5, which implies

$$\left\| \int_{\mathbf{R}^3} |\xi|^4 f^{\text{VP}}(t, x, d\xi) \right\|_{L^\infty(0, T; L^1(\mathbf{T}^3))} \leq C_0.$$

Moreover, a straightforward computation ensures that the gradient of the velocity is bounded by a constant independent of  $\varepsilon$  :

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \leq C.$$

Therefore we have the estimate

$$|\nu(\Xi^{\text{VP}}) - \nu(\Xi^{\text{VM}})| \leq C|\Xi^{\text{VP}} - \Xi^{\text{VM}}|$$

and we can conclude.  $\square$

We apply Lemma 4.3.3 to the first term in the expansion of the rhs of (4.3.10), for  $G = X^{\text{VP}}(s) - X^{\text{VM}}(s)$ . We deduce a control by

$$C \left( T\varepsilon^2 + \int_0^t Q(s) ds \right).$$

To derive a suitable estimate for  $Q$  we therefore focus on the remaining terms of (4.3.10). We define the following three quantities  $I_1, I_2$  and  $I'_3$  for  $t \in [0, T)$ , which we will tackle one after another :

$$\begin{aligned} I_1 := & \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |X^{\text{VP}}(t) - X^{\text{VM}}(t)| |\Xi^{\text{VP}}(t) - \Xi^{\text{VM}}(t)| \\ & + \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) \left| (\Xi^{\text{VP}}(t) - \Xi^{\text{VM}}(t)) \right. \\ & \left. \cdot (\nabla_x \phi^{\text{VP}}(t, \Xi^{\text{VP}}(t)) - \nabla_x \phi^{\text{VM}}(t, \Xi^{\text{VM}}(t))) \right|, \end{aligned}$$

which will be estimated following the path traced in Section 3.2 of [103],

$$I_2 := \varepsilon \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |(\Xi^{\text{VP}}(t) - \Xi^{\text{VM}}(t)) \cdot (v(\Xi^{\text{VM}}) \times B(t, X^{\text{VM}}))|,$$

whose estimate is almost straightforward with the uniform control (4.1.8) on the  $L^2$  norm of the magnetic field  $B$ , and

$$I'_3 := \varepsilon \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) \left| \int_0^t (\Xi^{\text{VP}}(s) - \Xi^{\text{VM}}(s)) \cdot \partial_t A(t, X^{\text{VM}}(s)) ds \right|, \quad (4.3.12)$$

which requests a little more subtle integration by part arguments, which explains that we need to keep the integral in time for estimating this contribution.

**Estimate on  $I_1$**

In this paragraph we follow carefully the steps of the proof of Section 3 of [103].

By a straightforward Young inequality the first term of  $I_1$  is bounded by  $Q(t)$ . The Cauchy-Schwarz inequality implies that the second term is bounded by :

$$(2Q(t))^{1/2} \times \left( \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |\nabla_x \phi^{\text{VP}}(t, X^{\text{VP}}) - \nabla_x \phi^{\text{VM}}(t, X^{\text{VM}})|^2 \right)^{1/2}.$$

We then write

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |\nabla_x \phi^{\text{VP}}(t, X^{\text{VP}}) - \nabla_x \phi^{\text{VM}}(t, X^{\text{VM}})|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \left( \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |\nabla_x \phi^{\text{VP}}(t, X^{\text{VM}}) - \nabla_x \phi^{\text{VM}}(t, X^{\text{VM}})|^2 \right)^{1/2} \\ & + \left( \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |\nabla_x \phi^{\text{VP}}(t, X^{\text{VP}}) - \nabla_x \phi^{\text{VP}}(t, X^{\text{VM}})|^2 \right)^{1/2} \\ & =: J_1(t)^{1/2} + J_2(t)^{1/2}. \end{aligned}$$

We are now going to estimate  $J_1$  and  $J_2$ .

For  $J_1$ , the equations (4.3.7), (4.3.8) and Theorem 4.2.3 imply that

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \int_{\mathbf{T}^3} \rho^{\text{VP}}(t, x) |\nabla_x \phi^{\text{VP}}(t, x) - \nabla_x \phi^{\text{VM}}(t, x)|^2 dx \\ &\leq \max\{\|\rho^{\text{VP}}\|_{L^\infty}, \|\rho^{\text{VM}}\|_{L^\infty}\}^2 W_2^2(\rho^{\text{VP}}(t), \rho^{\text{VM}}(t)). \end{aligned}$$

Using Lemma 4.3.2, we conclude that

$$J_1(t) \leq 2 \max\{\|\rho^{\text{VP}}\|_{L^\infty}, \|\rho^{\text{VM}}\|_{L^\infty}\}^2 Q(t).$$

By assumption both  $\|\rho^{\text{VP}}\|_{L^\infty}$  and  $\|\rho^{\text{VM}}\|_{L^\infty}$  are uniformly bounded in  $\varepsilon$  (see (4.1.6)). The estimate of  $J_2$  can be done from standard arguments relying on the Log-Lipschitz regularity of  $\nabla_x \phi^{\text{VP}}$ , see Lemma 4.3.1. We refer to the end of the section 3 of [103] for the computations leading to the following estimate :

$$J_2(t) \leq CQ(t) \left( 1 + \log^+ \left( \frac{1}{Q(t)} \right) \right).$$

Gathering the previous estimates finally gives :

$$I_1 \leq CQ(t) \left( 1 + \log^+ \left( \frac{1}{Q(t)} \right) \right). \quad (4.3.13)$$

**Estimate on  $I_2$**

First, an application of the Cauchy-Schwarz inequality gives :

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \varepsilon Q(t)^{1/2} \left( \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |v(\Xi^{\text{VM}})|^2 |B(t, X^{\text{VM}})|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon Q(t)^{1/2} \left( \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^{\text{VM}}(t, dx, d\xi) |v(\xi)|^2 |B(t, x)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon Q(t)^{1/2} \|B(t)\|_{L^2(\mathbf{T}^3)} \left\| \int_{\mathbf{R}^3} f^{\text{VM}}(t, x, d\xi) |v(\xi)|^2 \right\|_{L^\infty(\mathbf{T}^3)}^{1/2}. \end{aligned}$$



By the assumption (4.1.8), we have

$$\|B(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq C\varepsilon^{-\gamma_2}.$$

It remains then to estimate the quantity  $\varepsilon^2 \left\| \int_{\mathbb{R}^3} f^{\text{VM}}(t, x, d\xi) |v(\xi)|^2 \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}$ .

To this end, we use the uniform bound (4.1.7) bearing on  $\|m_\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}$  and the general fact that  $\varepsilon|v(\xi)| \leq 1$ . This gives

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left\| \int_{\mathbb{R}^3} f^{\text{VM}}(t, x, d\xi) |v(\xi)|^2 \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} &\leq C\varepsilon^\alpha \left\| \int_{\mathbb{R}^3} f^{\text{VM}}(t, x, d\xi) |v(\xi)|^\alpha \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq C\varepsilon^{\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

Consequently we obtain using Young's inequality,

$$I_2 \leq C\varepsilon^{\alpha-(\beta+2\gamma_2)} + CQ(t). \quad (4.3.14)$$

### Estimate on $I'_3$

The same direct approach fails for the estimate of  $I'_3$  because it gives

$$I'_3 \leq CQ(t)^{1/2} \|\varepsilon \partial_t A(t, X^{\text{VP}}(t, \cdot))\|_{L^2(\mathbb{T}^3)},$$

but unfortunately, at first glance, we can only use (4.1.8), that gives

$$\|\varepsilon \partial_t A\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq C\varepsilon^{-\gamma_1},$$

and we seemingly lose some power of  $\varepsilon$ .

**Remark 4.3.4.** *Even if we assume some uniform bound in  $L^2$  for  $j^{\text{VM}}$ , the same problem of "loss of  $\varepsilon$ " will occur. Indeed, the energy estimate for the wave equation*

$$\varepsilon^2 \partial_t^2 A - \Delta_x A = \varepsilon \mathbf{P}(j^{\text{VM}})$$

*gives the estimate*

$$\|\varepsilon \partial_t A(t, X^{\text{VP}}(t, \cdot))\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq CT \|j\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{T}^3))},$$

*and the small parameter  $\varepsilon$  is lost as well.*

This is the reason why we have to deal with the Gronwall inequality in its integral form in order to perform an integration by parts with respect to the time variable. One must first observe that

$$\begin{aligned} \partial_s A(s, X^{\text{VM}}(s, x, \xi)) &= \frac{d}{ds} (A(s, X^{\text{VM}}(s, x, \xi))) - \partial_s X^{\text{VM}} \cdot \nabla_x A(s, X^{\text{VM}}) \\ &= \frac{d}{ds} (A(s, X^{\text{VM}}(s, x, \xi))) - v(\Xi^{\text{VM}}) \cdot \nabla_x A(s, X^{\text{VM}}). \end{aligned}$$

We then define

$$I'_{31} := \varepsilon$$

$$\left| \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^0(dx, d\xi) \left| \int_0^t \frac{d}{ds} [A(s, X^{\text{VM}}(s, x, \xi)) - \langle A \rangle] \cdot (\Xi^{\text{VP}} - \Xi^{\text{VM}}) ds \right| \right|,$$

$$I'_{32} := \varepsilon \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} \int_0^t f^0(dx, d\xi) |(\nu(\Xi^{\text{VM}}) \cdot \nabla_x A(s, X^{\text{VM}})) \cdot (\Xi^{\text{VP}} - \Xi^{\text{VM}})| ds,$$

and

$$I'_{33} := \varepsilon \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} \int_0^t f^0(dx, d\xi) |(\langle \partial_s A \rangle) \cdot (\Xi^{\text{VP}} - \Xi^{\text{VM}})(s)| ds,$$

so that

$$I'_3 \leq I'_{31} + I'_{31} + I'_{33}.$$

To estimate  $I'_{32}$  we perform again a Cauchy-Schwarz inequality in the integral over  $\mathbf{T}^3$  :

$$I'_{32} \leq \varepsilon \int_0^t \left( Q(s)^{1/2} \left( \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} |\nu(\xi)|^2 f^{\text{VM}}(s, dx, d\xi) |\nabla_x A(s, x)|^2 \right)^{1/2} \right) ds.$$

The factor  $\nabla_x A$  can be bounded in  $L^2$  by the  $L^2$  norm of  $B$  thanks to the Biot and Savart law.

**Lemma 4.3.5.** *Let  $B \in L^2(\mathbf{T}^3)$  and  $A$  such that*

$$\nabla \times A = B - \langle B \rangle.$$

*Then we have the Biot and Savart law :*

$$A - \langle A \rangle = \nabla \times (\Delta^{-1} (B - \langle B \rangle)).$$

*where  $\Delta^{-1}$  selects the unique solution with zero mean to the associated Poisson equation. It follows in particular that*

$$\|\nabla A\|_{L^2(\mathbf{T}^3)} \leq C \|B - \langle B \rangle\|_{L^2(\mathbf{T}^3)}.$$

*Démonstration.* There exist a unique distribution  $\psi$  such that

$$-\Delta \psi = B - \langle B \rangle, \quad \int_{\mathbf{T}^3} \psi dx = 0.$$

Then one can check that

$$\nabla \times (A - \nabla \times \psi) = -\nabla (\nabla \cdot \psi) = 0,$$

and therefore

$$A = \nabla \times \psi + \langle A \rangle.$$

The Biot and Savart law and the estimate follow. □

We also have the following conservation of the spatial mean of  $B$ .

**Lemma 4.3.6.** *The space mean-value of  $B$  is constant, for any  $t$  in  $[0, T)$  :*

$$\langle B(t) \rangle = \langle B^0 \rangle$$

*Démonstration.* It is straightforward since from the Maxwell equations, for any  $t$  in  $[0, T)$  we have

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \langle B(t) \rangle = \varepsilon \langle \partial_t B(t) \rangle = -\langle \nabla \times E(t) \rangle = 0.$$

□

We deduce from the above lemmas and (4.1.8) that

$$\|B - \langle B \rangle\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq \|B\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + |\langle B \rangle| \leq C\varepsilon^{-\gamma_2},$$

so that

$$\|\nabla_x A\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))} \leq C\varepsilon^{-\gamma_2}.$$

We then have using the Young inequality,

$$I'_{32} \leq C \int_0^t Q(s) ds + Ct\varepsilon^{\alpha - (\beta + \gamma_2)}. \quad (4.3.15)$$

To estimate  $I'_{33}$  we first use the Cauchy-Schwarz inequality

$$I'_{33} \leq \varepsilon \int_0^t Q(s)^{1/2} |\langle \partial_s A(s) \rangle| ds$$

and then rely on the fact that for any  $t$  in  $[0, T)$ , since  $\varepsilon \langle \partial_t A \rangle$  satisfies

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \langle \partial_t A \rangle = \langle j^{\text{VM}} \rangle,$$

we have

$$\varepsilon \langle \partial_t A \rangle = \int_0^t \langle j^{\text{VM}} \rangle(s) ds + \varepsilon \langle \partial_t A \rangle|_{t=0}. \quad (4.3.16)$$

The initial data being normalized, the last term is by assumption on the initial electric field  $E_\varepsilon^0$  equal to 0. We therefore must focus on the first term of (4.3.16).

We write that

$$\int_0^t \langle j^{\text{VM}} \rangle(s) ds = \int_0^t (\langle j^{\text{VM}} \rangle(s) - \langle j^{\text{VP}} \rangle(s)) ds + \int_0^t \langle j^{\text{VP}} \rangle(s) ds.$$

We then remark that

$$\begin{aligned} \int_0^t (\langle j^{\text{VM}} \rangle(s) - \langle j^{\text{VP}} \rangle(s)) ds &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^0(dx, d\xi) (\nu(\Xi^{\text{VM}}) - \Xi^{\text{VP}}) ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^0(dx, d\xi) (\nu(\Xi^{\text{VM}}) - \nu(\Xi^{\text{VP}})) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^0(dx, d\xi) (\nu(\Xi^{\text{VP}}) - \Xi^{\text{VP}}) ds, \end{aligned}$$

and since

$$|\nu(\xi) - \xi| \leq \varepsilon |\xi|^2$$

and

$$\|\nabla_\xi \nu\|_{L^\infty} \leq C,$$

we have

$$\left| \int_0^t (\langle j^{\text{VM}} \rangle(s) - \langle j^{\text{VP}} \rangle(s)) ds \right| \leq CTQ(t)^{1/2} + C\varepsilon T \left\| \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 f^{\text{VP}}(t, x, d\xi) \right\|_{L^1(\mathbb{T}^3)}.$$

Concerning  $\int_0^t \langle j^{\text{VP}} \rangle(s) ds$ , we use the fact that the Vlasov-Poisson equation preserves the current density which therefore will be equal to 0 because the initial data is normalized so that  $\langle j^{\text{VP}} \rangle|_{t=0} = 0$ .

**Lemma 4.3.7.** *We have the conservation of the spatial mean-value of the current density for the Vlasov-Poisson system :*

$$\forall t \in [0, T), \langle j^{VP} \rangle(t) = \langle j^{VP} \rangle(0).$$

*Démonstration.* We have the following conservation law ensured by Definition 4.1.1

$$\partial_t j^{VP} + \nabla_x : \langle f, 1 \otimes |\xi|^2 \rangle = \rho^{VP} E.$$

Therefore

$$\frac{d}{dt} \langle j^{VP} \rangle = \int_{\mathbf{T}^3} \Delta_x \phi^{VP} \nabla_x \phi^{VP} dx.$$

For any  $i \in \{1, 2, 3\}$ , we have

$$\int_{\mathbf{T}^3} \partial_{ii} \phi^{VP} \partial_i \phi^{VP} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{T}^3} \partial_i |\partial_i \phi^{VP}|^2 dx = 0.$$

Likewise, for any  $i \neq j$ , we have by integration by parts with respect to  $x_i$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}^3} \partial_{ii} \phi^{VP} \partial_j \phi^{VP} dx &= - \int_{\mathbf{T}^3} \partial_i \phi^{VP} \partial_{ij} \phi^{VP} dx \\ &= - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{T}^3} \partial_j |\partial_i \phi^{VP}|^2 dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

The lemma is finally proved. □

We end up with the following estimate for  $I'_{33}$ , for any  $t$  in  $[0, T)$  :

$$I'_{33}(t) \leq C(1+T)^2 \left( \varepsilon^2 + \int_0^t Q(s) ds \right). \quad (4.3.17)$$

To estimate  $I'_{31}$  we first perform the integration by parts with respect to the time variable, which yields

$$|I'_{31}| \leq \bar{K}_1 + K_2, \quad (4.3.18)$$

with

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &:= \varepsilon \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} \int_0^t f^0(dx, d\xi) ds \\ &\quad |(A(s, X^{VM}(s, x, \xi)) - \langle A \rangle(s)) \cdot (F^{VP}(X^{VP}(t)) - F^{VM}(X^{VM}(s), \Xi^{VM}(s)))| \\ K_2 &:= \varepsilon \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |(A(t, X^{VM}(t)) - \langle A \rangle(t)) \cdot (\Xi^{VP}(t) - \Xi^{VM}(t))|, \end{aligned}$$

where we recall

$$\begin{aligned} F^{VM}(s, X^{VM}) - F^{VP}(s, X^{VP}) &= \\ &\quad \nabla_x \phi^{VM}(s, X^{VM}) - \nabla_x \phi^{VP}(s, X^{VP}) + \varepsilon \nu (\Xi^{VM}) \times B(s, X^{VM}) + \varepsilon \partial_t A(s, X^{VM}). \end{aligned}$$

We first treat  $\bar{K}_1$ . We are somehow back to the terms  $I_1, I_2$  but with a gain of a power of  $\varepsilon$ . Then by (4.1.8),

$$\|\varepsilon \partial_t A\|_{L^2(\mathbf{T}^3)}(t) \leq C_0 \varepsilon^{-Y_1},$$

and performing the same analysis, one has

$$|\bar{K}_1| \leq C \|\rho^{\text{VM}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}^{1/2} \|A(t, \cdot) - \langle A \rangle\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{T}^3))} \\ \times \left( \varepsilon \int_0^t Q(s) \left( 1 + \log^+ \left( \frac{1}{Q(s)} \right) \right) ds + T \varepsilon^{1 + \frac{\alpha - \beta}{2} - \gamma_2} + \varepsilon^{1 - \gamma_1} T \right).$$

Now by the Poincaré inequality on  $\mathbb{T}^3$  and the Biot and Savart law, we have

$$\|A(t, \cdot) - \langle A \rangle\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq C \|\nabla A\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq C \|B - \langle B \rangle\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq C \varepsilon^{-\gamma_2}. \quad (4.3.19)$$

Summing up all these estimates, and noticing that the condition on  $\kappa$  in Theorem 4.1.7 implies  $\frac{\alpha - \beta}{2} - \gamma_2 > 0$ , we obtain that for all  $t$  in  $[0, T]$  :

$$|\bar{K}_1| \leq C(1 + T)^2 \left( \varepsilon^{1 - \gamma_2} + \varepsilon^{1 - (\gamma_1 + \gamma_2)} + \int_0^t Q(s) \left( 1 + \log^+ \left( \frac{1}{Q(s)} \right) \right) ds \right). \quad (4.3.20)$$

For  $K_2$ , we get by Cauchy Schwarz

$$|K_2| \leq \varepsilon \|\rho^{\text{VM}}(t)\|_{L^\infty}^{1/2} \|(A - \langle A \rangle)(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} Q(t)^{1/2}.$$

Therefore, by the Young inequality, we conclude that

$$|K_2| \leq \varepsilon^{1 + \gamma_2 - \gamma_1} \|\rho^{\text{VM}}(t)\|_{L^\infty}^2 \|(A - \langle A \rangle)(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \varepsilon^{1 + \gamma_1 - \gamma_2} Q(t) \\ \leq C \varepsilon^{1 - (\gamma_1 + \gamma_2)} + C \varepsilon^{1 + \gamma_1 - \gamma_2} Q(t), \quad (4.3.21)$$

where we have used again the Biot and Savart law and (4.1.8). Finally, gathering (4.3.15), (4.3.17), (4.3.18), (4.3.20) and (4.3.21), since  $\gamma_2 < 1$ , we obtain

$$|I'_3| \leq C(1 + T)^2 \varepsilon^{\min(\alpha - (\beta + 2\gamma_2), 1 - (\gamma_1 + \gamma_2))} \\ + \int_0^t C(1 + T)^2 Q(s) \left( 1 + \log^+ \left( \frac{1}{Q(s)} \right) \right) ds + C \varepsilon^{1 + \gamma_1 - \gamma_2} Q(t). \quad (4.3.22)$$

### 4.3.3 Final estimate

Finally by (4.3.13), (4.3.14) and (4.3.22) (for  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  with  $\varepsilon_0$  small enough to absorb the term  $C \varepsilon^{1 + \gamma_1 - \gamma_2} Q(t)$  in (4.3.22) by  $Q(t)$  of the left-hand side) we have the following Osgood estimate on the quantity  $Q(t)$  :

$$Q(t) \leq C(1 + T)^2 \varepsilon^\kappa + \int_0^t C(1 + T)^2 Q(s) \left( 1 + \log^+ \left( \frac{1}{Q(s)} \right) \right) ds. \quad (4.3.23)$$

with

$$\kappa = \min(\alpha - (\beta + 2\gamma_2), 1 - (\gamma_1 + \gamma_2)).$$

The procedure to obtain (4.1.9) from (4.3.23) is standard : let us quickly explain it for the sake of completeness. Set

$$\mu(z) = C(1 + T)^2 z(1 + \log^+(1/z)), \\ \varphi(t) = C(1 + T)^2 \varepsilon^\kappa + \int_0^t C(1 + T)^2 Q(s) \left( 1 + \log^+ \left( \frac{1}{Q(s)} \right) \right) ds.$$

Since  $\mu$  is non-decreasing, we have

$$\varphi'(t) = \mu(Q(t)) \leq \mu(\varphi(t)).$$

Set then

$$U(t) = \log \varphi(t).$$

It follows that  $U$  satisfies

$$U'(t) \leq C(1+T)^2(1-U(t)).$$

which we can explicitly integrate, yielding

$$U(t) \leq U(0)e^{-C(1+T)^2t} + (1 - e^{-C(1+T)^2t}).$$

Coming back to  $Q$ , by a continuity (in time) argument, taking  $\varepsilon_0 > 0$  small enough, we finally obtain that for all  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  and  $t \in [0, T]$ ,

$$Q(t) \leq C \exp(\log(C(1+T)^2\varepsilon^\kappa) \exp(-C(1+T)^2)),$$

which implies the desired inequality (4.1.9) and the proof of Theorem 4.1.7 is complete.

#### 4.3.4 The case $\Omega = \mathbf{R}^3$

As already mentioned, the proof for  $\Omega = \mathbf{R}^3$  is very similar, yet simplified in some aspects. The main difference is that we do not need to handle space mean values as in the torus case. This is in particular apparent in the treatment of the term  $I'_3$  (as defined in (4.3.12)). We have this time

$$I'_3 \leq I'_{31} + I'_{32},$$

where

$$I'_{31} = \varepsilon \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) \left| \int_0^t \frac{d}{ds} [A(s, X^{\text{VM}}(s, x, \xi))] \cdot (\Xi^{\text{VP}} - \Xi^{\text{VM}}) ds \right|,$$

$$I'_{32} = \varepsilon \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \int_0^t f^0(dx, d\xi) |(\nu(\Xi^{\text{VM}}) \cdot \nabla_x A(s, X^{\text{VM}})) \cdot (\Xi^{\text{VP}} - \Xi^{\text{VM}})| ds,$$

To study  $I'_{31}$ , we rely on the same integration by parts in time argument. Only the final estimate is different : in  $\mathbf{R}^3$  the Biot and Savart law gets simplified compared to the case of  $\mathbf{T}^3$ , so that

$$\|\nabla_x A\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \leq C\|B\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}$$

and we use the Sobolev embedding instead of the Poincaré inequality (4.3.19), which yields

$$\begin{aligned} \|A(s)\|_{L^6(\mathbf{R}^3)} &\leq C\|\nabla_x A\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \\ &\leq C\|B(s)\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}. \end{aligned}$$

Writing

$$|I'_{31}| \leq \bar{K}_1 + K_2,$$

with

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &:= \varepsilon \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \int_0^t f^0(dx, d\xi) \\ &\quad |(A(s, X^{\text{VM}}(s, x, \xi)) \cdot (F^{\text{VP}}(X^{\text{VP}}) - F^{\text{VM}}(X^{\text{VM}})))| ds, \\ K_2 &:= \varepsilon \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} f^0(dx, d\xi) |(A(t, X^{\text{VM}}(t)) \cdot (\Xi^{\text{VP}}(t) - \Xi^{\text{VM}}(t)))|, \end{aligned}$$

the outcome is the estimate

$$\begin{aligned} |\bar{K}_1| &\leq C \|\rho^{\text{VM}}\|_{L^3(\mathbf{R}^3)} \|B(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \\ &\quad \times \left( \varepsilon \int_0^t Q(s) \left( 1 + \log^+ \left( \frac{1}{Q}(s) \right) \right) ds + \varepsilon^{\alpha - (\beta + \gamma_2)} + \varepsilon^{1 - \gamma_1 T} \right), \\ |K_2| &\leq \varepsilon \|\rho^{\text{VM}}(t)\|_{L^{6/5}(\mathbf{R}^3)} \|B(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^3)} + \varepsilon Q(t). \end{aligned}$$

The remaining of the proof applies, *mutatis mutandis*.

## 4.4 A class of measure-valued solutions which satisfies the assumptions of Theorem 4.1.7

Let  $\Omega = \mathbf{T}^3$ . The goal of this section is to build measure-valued solutions to (VM) and (VP) that are not in the class of compactly supported  $C^1$  solutions in  $x$  and  $\xi$ , and to which Theorem 4.1.7 can nevertheless apply. More precisely we are interested in solutions with high regularity in the space variable  $x$ , namely real-analytic, and very little in the momentum variable  $\xi$  : basically we only ask for  $f(t, x, \cdot)$  to be a measure with some finite moments. The corresponding weak solutions to (VM) and (VP) will in fact be induced by a family of strong solutions in  $x$  to a related fluid system. In the first subsection we will give the definition of what we call weak in  $\xi$  and strong in  $x$  solutions, following Baradat [9]. Then we explain a multifluid representation (used by Grenier [66]) that will allow us to rewrite the Vlasov-Maxwell system as a system of fluid equations that we will effectively study. Finally we will prove a small time existence result for these systems by a Cauchy-Kovalevskaya argument, again following [66] (see also [67]).

### 4.4.1 Weak in $\xi$ and strong in $x$ solutions

We will consider in the following a particular class of the more general solutions we handled previously in Definitions 4.1.1 and 4.1.3. It concerns weak solutions that are regular in  $x$ , at least  $C^1$ , for which another convenient definition can be given, following Baradat [9].

Let  $T > 0$ . We consider a function  $f : [0, T] \times \mathbf{T}^3 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$ , such that for any test function  $\varphi \in C_b^1(\mathbf{R}^3)$ , the hydrodynamic observable corresponding to  $\varphi$  :

$$\langle f, \varphi \rangle(t, x) := \int_{\mathbf{R}^3} \varphi(\xi) f(t, x, d\xi),$$

is a smooth function, namely in  $C^1([0, T] \times \mathbf{T}^3)$ .

**Definition 4.4.1.** *We say that  $f : [0, T] \times \mathbf{T}^3 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$  is a weak in  $\xi$  and strong in  $x$  solution to (VP) if it satisfies in the classical sense, for all test functions  $\varphi \in C_b^1(\mathbf{R}^3)$  the system*

$$\begin{cases} \partial_t \langle f, \varphi \rangle(t, x) + \nabla_x \cdot \langle f, \xi \varphi \rangle(t, x) + \nabla_x \phi^{\text{VP}} \cdot \langle f, \nabla \varphi \rangle(t, x) = 0, \\ -\Delta_x \phi^{\text{VP}} = \langle f, 1 \rangle - 1, \\ f(0, x, d\xi) = f^0(x, d\xi). \end{cases} \quad (4.4.1)$$

**Definition 4.4.2.** We say that  $f : [0, T] \times \mathbf{T}^3 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R}^3)$  is a weak in  $\xi$  and strong in  $x$  solution to (VM) if it satisfies in the classical sense for all test functions  $\varphi \in C_b^1(\mathbf{R}^3)$  the system

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \langle f, \varphi \rangle(t, x) + \nabla_x \cdot \langle f, v(\xi) \varphi \rangle(t, x) \\ \quad + E \cdot \langle f, \nabla \varphi \rangle + \varepsilon \sum_{i=1}^3 B_{\sigma^2(i)} \langle f, v_{\sigma(i)}(\xi) \partial_i \varphi \rangle - B_{\sigma(i)} \langle f, v_{\sigma^2(i)}(\xi) \partial_i \varphi \rangle = 0, \\ - \Delta_x \phi = \langle f, 1 \rangle - 1, \\ \varepsilon^2 \partial_t A - \Delta_x A = \varepsilon \mathbf{P}(\langle f, v(\xi) \rangle), \\ f(0, x, d\xi) = f^0(x, d\xi), \\ \varepsilon \partial_t A|_{t=0} = E^0 + \nabla_x \phi|_{t=0}, \\ \nabla \times A|_{t=0} = B^0 - \langle B^0 \rangle, \quad \langle A|_{t=0} \rangle = 0, \end{array} \right. \quad (4.4.2)$$

where  $\sigma$  stands for the permutation  $\sigma = (1, 2, 3)$ .

#### 4.4.2 A multifluid representation

In this section we will set another formulation of the Vlasov-Maxwell system of equations, which we refer to as the multifluid representation, as introduced in [66] to prove a small time uniform existence result and analyze the quasineutral limit for Vlasov-Poisson type systems. It has also been used in [9] for studying nonlinear instabilities around rough velocity profiles in Vlasov-Poisson systems. We will be able to prove the existence of strong solutions to this system which in turn will provide some weak in  $\xi$  and strong in  $x$  solutions to the Vlasov-Maxwell system.

We look for solutions  $f$  under the form

$$f(t, x, d\xi) = \int_{\mathbf{M}} \rho_\theta(t, x) \delta(\xi - \xi_\theta(t, x)) \mu(d\theta), \quad (4.4.3)$$

where  $(\mathbf{M}, \mu)$  is (fixed) a probability space,  $\delta$  stands for the Dirac mass at 0,  $(\rho_\theta)_{\theta \in \mathbf{M}}$ ,  $(\xi_\theta)_{\theta \in \mathbf{M}}$  are families of smooth functions and vector fields on  $\mathbf{T}^3$ . This is a representation where the whole set of particles in the plasma can be divided into several phases, each of them characterized by its pointwise macroscopic density  $\rho_\theta(t, x)$  and its pointwise momentum  $\xi_\theta(t, x)$ . Each density will be transported by the relativistic velocity  $v(\xi_\theta)$  according to a continuity equation and each phase will be accelerated by the same electromagnetic field, producing a Lorentz force  $F_L$  that is computed by taking into account all the different phases.

More precisely, given smooth initial data  $(\rho_\theta^0)_{\theta \in \mathbf{M}}$ ,  $(\xi_\theta^0)_{\theta \in \mathbf{M}}$  we consider the following



system :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \theta \in M, \partial_t \rho_\theta(t, x) + \nabla_x \cdot (v(\xi_\theta(t, x)) \rho_\theta(t, x)) = 0, \\ \forall \theta \in M, \partial_t \xi_\theta(t, x) + (v(\xi_\theta(t, x)) \cdot \nabla_x) \xi_\theta(t, x) \\ \quad = (-\nabla_x \phi - \varepsilon \partial_t A + \varepsilon v(\xi_\theta) \times (\nabla_x \times A + \langle B^0 \rangle))(t, x), \\ \varepsilon^2 \partial_t^2 A - \Delta_x A = \varepsilon \mathbf{P} \left( \int_{\mathbf{T}^3} v(\xi_\theta(t, x)) \rho_\theta(t, x) \mu(d\theta) \right), \\ -\Delta_x \phi = \int_M \rho_\theta(t, x) \mu(d\theta) - 1, \\ \forall \theta \in M, \rho_\theta|_{t=0} = \rho_\theta(0), \quad \xi_\theta|_{t=0} = \xi_\theta(0), \\ -\varepsilon \partial_t A|_{t=0} = E^0 + \nabla_x \phi|_{t=0}, \\ \nabla \times A|_{t=0} = B^0 - \langle B^0 \rangle, \quad \langle A|_{t=0} \rangle = 0, \end{array} \right. \quad (4.4.4)$$

to which we can add a definition of the electric fields  $E_\varepsilon$  and  $B_\varepsilon$

$$\begin{aligned} E_\varepsilon &:= -\varepsilon \partial_t A - \nabla_x \phi, \\ B_\varepsilon &:= \nabla_x \times A + \langle B^0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Note that this corresponds to an initial condition

$$f^0(x, d\xi) = \int_M \rho_\theta(0, x) \delta(\xi - \xi_\theta(0, x)) \mu(d\theta).$$

As explained in [66], this allows to model a variety of initial conditions, including

- continuous functions in  $x$  and  $\xi$ , taking  $(M, \mu) = \left( \mathbf{R}^3, \lambda \frac{d\theta}{1+\theta^2} \right)$  (where  $\lambda > 0$  is chosen in order to normalize the measure),

$$\xi_\theta(0, x) = \theta, \quad \rho_\theta(0, x) = \pi(1 + \theta^2) f(t, x, \theta);$$

- finite sums of Dirac masses in velocity supported on  $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{R}^3$ , that corresponds to a sum of monokinetic data, in which case  $(M, \mu)$  is a discrete probability space with uniform measure.

Assuming that we are able to solve this system, we can define the measure  $f(t, x, \cdot)$  according to (4.4.3). Given a smooth test function  $\varphi$ , we have then

$$\langle f, \varphi \rangle(t, x) = \int_M \varphi(\xi_\theta(t, x)) \rho_\theta(t, x) \mu(d\theta).$$

This is a straightforward computation to check that if  $(\rho_\theta)_{\theta \in M}$ ,  $(\xi_\theta)_{\theta \in M}$  solve (4.4.4) then the measure valued function  $f$  defined above is a strong in  $x$  and weak in  $\xi$  solution to (4.4.2).

As System (4.4.4) does not seem to possess any hyperbolic structure, we are forced to solve it for initial data with analytic regularity, using a Cauchy-Kovalevskaya type scheme. The precise analytic spaces we work with are as follows.

**Definition 4.4.3.** For  $\delta > 1$ ,  $B_\delta$  is the space of real functions  $f$  on  $\mathbf{T}^3$  such that

$$|f|_\delta := \sum_{k \in \mathbf{Z}^3} |\mathcal{F} f(k)| \delta^{|k|} < +\infty,$$

where  $(\mathcal{F} f(k))$  are the Fourier coefficients of  $f$ . We will designate by  $\mathbb{B}_\delta$  the space of the vector-valued real functions  $h$  on  $\mathbf{T}^3$  whose components are in  $B_\delta$ . We keep the notation  $|h|_\delta$  to designate the sum of all the  $|\cdot|_\delta$  norms of the components of  $h$ .

We are now able to state the second main result of our paper.

**Theorem 4.4.4.** *Let  $(M, \mu)$  the probability space used to define the multifluid system (4.4.4), let  $\delta_0 > \delta_1 > 1$ , let  $C_0 > 0$  and let  $(\rho_\theta(0))_\theta$  be a family of  $B_{\delta_0}$ , and  $(\xi_\theta(0))_\theta$  and  $(E_\varepsilon^0, B_\varepsilon^0)$  be families of  $\mathbb{B}_{\delta_0}$  satisfying*

$$\nabla \cdot E_\varepsilon^0 = \int_M \rho_\theta(0) d\mu(\theta), \quad \nabla \cdot B_\varepsilon^0 = 0,$$

and such that

$$\begin{aligned} \sup_\theta |\rho_\theta(0)|_{\delta_0} &\leq C_0, \\ \sup_\theta |\xi_\theta(0)|_{\delta_0} &\leq C_0. \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Assume also that for some  $\gamma \in [0, 1]$ ,

$$|E_\varepsilon^0|_{\delta_0} + |B_\varepsilon^0|_{\delta_0} \leq C_0 \varepsilon^{-\gamma}. \tag{4.4.7}$$

Then there exist a constant  $\varepsilon_0 > 0$ , and a constant  $T > 0$ , such that for any  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , there exist functions  $(\rho_\theta^\varepsilon)_\theta$  in  $C([0, T], B_{\delta_1})$ , and  $(\xi_\theta^\varepsilon)_\theta$  in  $C([0, T], \mathbb{B}_{\delta_1})$ , solutions to (4.4.4) with initial conditions  $(\rho_\theta(0))_\theta, (\xi_\theta(0))_\theta, (E_\varepsilon^0, B_\varepsilon^0)$ .

Moreover the solutions enjoy the following uniform estimates. There exists  $C > 0$  such that for all  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ,

$$\sup_\theta |\rho_\theta^\varepsilon|_{L^\infty(0, T; B_{\delta_1})} + \sup_\theta |\xi_\theta^\varepsilon|_{L^\infty(0, T; B_{\delta_1})} \leq C \tag{4.4.8}$$

$$|E_\varepsilon|_{L^\infty(0, T; B_{\delta_1})} + |B_\varepsilon|_{L^\infty(0, T; B_{\delta_1})} \leq C \varepsilon^{-\gamma}. \tag{4.4.9}$$

The sequence of solutions that we have obtained thanks to Theorem 4.4.4 are so regular in  $x$  (see Lemma 4.5.2 below) that all requirements of Definition 4.1.3 are of course satisfied. The uniform initial controls required in Theorem 4.1.7 also follow : (4.1.8) with  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$  is a consequence of (4.4.9) (and of Lemma 4.5.2). We also have, by (4.4.8),

$$\begin{aligned} \|\rho_\varepsilon^{\text{VM}}\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbf{T}^3))} &= \left\| \int_M \rho_\theta^\varepsilon(t, x) \mu(d\theta) \right\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbf{T}^3))} \\ &\leq \sup_\theta \|\rho_\theta^\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbf{T}^3))} \leq C, \end{aligned}$$

and likewise, for  $\alpha = 1$ ,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{\mathbf{R}^3} |\nu(\xi)| f_\varepsilon^{\text{VM}}(t, x, d\xi) \right\|_{L^\infty(0, T; L^1(\mathbf{T}^3))} \\ &\leq \left\| \int_{\mathbf{R}^3} |\xi| f_\varepsilon^{\text{VM}}(t, x, d\xi) \right\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbf{T}^3))} \\ &= \left\| \int_M \rho_\theta^\varepsilon(t, x) |\xi_\theta^\varepsilon(t, x)| \mu(d\theta) \right\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbf{T}^3))} \\ &\leq \sup_\theta \|\rho_\theta^\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbf{T}^3))} \sup_\theta \|\xi_\theta^\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbf{T}^3))} \leq C, \end{aligned}$$

that corresponds to  $\beta = 0$ .

Section 4.5 is dedicated to the proof of Theorem 4.4.4. In order to be able to apply Theorem 4.1.7, we need to check that the associated Vlasov-Poisson solution is suitable, which is done in Theorem 4.5.11 in Section 4.5.5.

## 4.5 Proof of Theorem 4.4.4

In this section we prove an existence result to the multifluid system (4.4.4) by adapting the proof of Grenier in the paragraph 2 of [66], which is itself an adaptation of a simplified proof of the Cauchy-Kovalevskaya Theorem due to Caflisch [32].

### 4.5.1 Definitions, notations and preliminary results

To set up our Cauchy-Kovalevskaya argument we first need to consider a scale of Banach spaces  $B_\delta^\eta$ .

**Definition 4.5.1.** *Let  $0 < \beta < 1$ ,  $\delta_0 > 1$  and  $\eta > 0$  be fixed, we consider the following Banach space*

$$B_{\delta_0}^\eta := \left\{ u \in C^0([0, \eta(\delta_0 - 1)] \times \mathbf{T}^3), \forall 0 \leq t \leq \eta(\delta_0 - 1), \quad u(t) \in B_{\delta_0 - \frac{t}{\eta}} \right\},$$

*endowed with the norm :*

$$\|u\|_{\delta_0} =: \sup_{\substack{1 \leq \delta \leq \delta_0, \\ 0 \leq t \leq \eta(\delta_0 - \delta)}} \left( |u(t)|_\delta + \left( \delta_0 - \delta - \frac{t}{\eta} \right)^\beta |\nabla_x u(t)|_\delta \right).$$

The space  $B_{\delta_0}^\eta$  is a space of functions that are continuous with respect to time with values into the set of analytic functions over the torus  $\mathbf{T}^3$  which takes into account loss of analyticity (in other words, the shrinking of the analyticity domain) as time goes by. Time is as a result bounded by the parameter  $\eta(\delta_0 - 1)$ . In the following we are going to prove a local existence result thanks to an iteration scheme, and will consider the parameter  $\eta$  as a small parameter.

We list some lemmas that are useful for the analysis, whose proofs except the very last one are detailed in Section 2.2 of [66]. The proof of the last lemma is postponed to the Appendix.

**Lemma 4.5.2.** *For all  $\delta, \delta' > 1$ ,*

- $B_\delta \subset B_{\delta'}$  if  $\delta' \leq \delta$ ,
- $\forall s \in \mathbf{R}, B_\delta \subset H^s$ , *the map being compact.*
- $B_\delta$  *is a Banach algebra. Moreover, for  $f, g \in B_\delta$ , we have*

$$|fg|_\delta \leq |f|_\delta |g|_\delta.$$

The advantage of the norms  $|\cdot|_\delta$  lies in particular in the following lemma : loosely speaking, the  $|\cdot|_{\delta'}$  norm of the derivative of a function  $f$  in  $B_\delta$ ,  $1 < \delta' < \delta$ , can be controlled by the  $|\cdot|_\delta$  norm of  $f$ .

**Lemma 4.5.3.** *Let  $\delta > 1$ , if  $f \in B_\delta$  then for any  $1 < \delta' < \delta$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,*

$$|\partial_i f|_{\delta'} \leq \frac{\delta}{\delta - \delta'} |f|_\delta.$$

We have related results around the space  $B_{\delta_0}^\eta$ .

**Lemma 4.5.4.** — If  $f$  and  $g$  are in  $B_{\delta_0}^\eta$ , then  $fg$  is in  $B_{\delta_0}^\eta$  as well and

$$\|fg\|_{\delta_0} \leq \|f\|_{\delta_0} \|g\|_{\delta_0},$$

and in particular if  $\delta + \frac{t}{\eta} < \delta_0$ ,

$$|\nabla(fg)|_\delta \leq \|f\|_{\delta_0} \|g\|_{\delta_0} \left( \delta_0 - \delta - \frac{t}{\eta} \right)^{-\beta}.$$

— if  $f$  is in  $B_{\delta_0}^\eta$ , and if  $\delta + \frac{t}{\eta} < \delta_0$ ,

$$|\partial_{i,j}^2 f(t)|_\delta \leq C \|f\|_{\delta_0} \delta_0 \left( \delta_0 - \delta - \frac{t}{\eta} \right)^{-\beta-1}.$$

Finally, we have

**Lemma 4.5.5.** If  $h$  is analytic and can be written as

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

for  $z$  in the disk of center 0 and radius  $R$ ,  $B(0, R)$ , and if  $f$  is in  $B_\delta$  with  $|f|_\delta < R$ , then  $h(f)$  is in  $B_\delta$ , and

$$|h(f)|_\delta \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |f|_\delta^n.$$

## 4.5.2 Estimate on the force field $F_L$

Ultimately, we are going to set up an iterative scheme, therefore we will need some a priori analytic bounds on the different quantities that show up in the equation. We begin with the Lorentz force.

Before starting, let us state a useful consequence of Lemma 4.5.5.

**Lemma 4.5.6.** If

$$\sup_{0 \leq t \leq \eta(\delta_0 - \delta)} \sup_{\theta \in M} |\xi_\theta|_{\delta_0} \leq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$$

then there is  $C > 0$  such that for all  $\theta \in M$ ,

$$\|v(\xi_\theta)\|_{\delta_0} \leq C \|\xi_\theta\|_{\delta_0}. \quad (4.5.1)$$

*Démonstration.* We have for  $\delta \in (1, \delta_0]$ , by Lemma 4.5.2,

$$\begin{aligned} |v(\xi_\theta)|_\delta &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1/2 \times (1/2 - 1) \times \dots \times (1/2 - (n-1))}{n!} \varepsilon^{2n} |\xi_\theta|^{2n} \xi_\theta \right|_\delta \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{1/2 \times (1/2 - 1) \times \dots \times (1/2 - (n-1))}{n!} \right| \varepsilon^{2n} |\xi_\theta|_\delta^{2n+1} \\ &\leq \frac{|\xi_\theta|_\delta}{(1 - \varepsilon^2 |\xi_\theta|_\delta^2)^{1/2}} \\ &\leq \sqrt{2} |\xi_\theta|_\delta, \end{aligned}$$

where we have used the bound on  $(\xi_\theta)$  to conclude.

The other part of the estimate likewise follows, according to the formula

$$\partial_x v(\xi_\theta) = \frac{\partial_x \xi_\theta}{(1 + \varepsilon^2 |\xi_\theta|^2)^{1/2}} - \frac{\varepsilon^2 \xi_\theta (\xi_\theta \cdot \partial_x \xi_\theta)}{(1 + \varepsilon^2 |\xi_\theta|^2)^{3/2}}.$$

□

In the following we shall accordingly systematically assume the following uniform bound :

$$\sup_{0 \leq t \leq \eta(\delta_0 - \delta)} \sup_{\theta \in M} |\xi_\theta|_{\delta_0} \leq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

We recall that each phase labeled by  $\theta$  is accelerated by a Lorentz force  $F_L(t, x, \xi_\theta)$  produced by the electromagnetic field  $(E, B)$ , produced collectively by all the phases, and we have

$$F_{L,\theta}(t, x, \xi_\theta) := -\nabla_x \phi(t, x) - \varepsilon \partial_t A(t, x) + \varepsilon v(\xi_\theta) \times (\nabla \times A(t, x) + \langle B^0 \rangle),$$

with

$$-\Delta_x \phi = \int_M \rho_\theta \mu(d\theta) - 1, \quad (4.5.2)$$

and

$$\varepsilon^2 \partial_t^2 A - \Delta_x A = \varepsilon \mathbf{P} \left( \int_M v(\xi_\theta(t, x)) \rho_\theta(t, x) \mu(d\theta) \right). \quad (4.5.3)$$

We introduce the quantity

$$G_{L,\theta}(t, x, \xi_\theta) = \int_0^t F_L(s, x, \xi_\theta) ds,$$

because to obtain a priori estimates on the phase density  $\rho_\theta$  and the phase momentum field  $\xi_\theta$ , if we have a closer look at the equations (4.4.4), one can see that we need to control the force field integrated with respect to time. This is reminiscent of the characteristic equations (4.3.3) for the Vlasov-Maxwell system where the time derivative of the velocity of the particles are driven by the Lorentz force  $F_L$ .

**Lemma 4.5.7.** *Assume  $\sup_{0 \leq t \leq \eta(\delta_0 - \delta)} \sup_{\theta \in M} |\xi_\theta|_{\delta_0} \leq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$ . There exists a positive constant  $C$  depending only on the parameters  $\beta$  and  $\delta_0$  (and not on  $\varepsilon$  nor  $\eta$ ) such that*

$$\begin{aligned} \|G_{L,\theta}\|_{\delta_0} &\leq C\eta \sup_{\theta} \|\rho_\theta - 1\|_{\delta_0} \\ &\quad + C\eta \left( 1 + \sup_{\theta} \|\xi_\theta\|_{\delta_0} \right) \left( \sup_{\theta} \|\xi_\theta\|_{\delta_0} \sup_{\theta} \|\rho_\theta\|_{\delta_0} \right) \\ &\quad + C\varepsilon \left( 1 + \sup_{\theta} \|\xi_\theta\|_{\delta_0} \right) \left( \|B^0\|_{\delta_0} + \|E^0\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} |\rho_\theta(0)|_{\delta_0} \right). \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

and such that if we consider two solutions  $(\rho_\theta^1, \xi_\theta^1)$  and  $(\rho_\theta^2, \xi_\theta^2)$  to (4.4.4), we also have the following stability estimate

$$\begin{aligned} \|G_{L,\theta}^1 - G_{L,\theta}^2\|_{\delta_0} &\leq C\eta \sup_{\theta} \|\rho_\theta^1 - \rho_\theta^2\|_{\delta_0} \\ &\quad + C\eta \left( 1 + \left( \sup_{\theta} \|\xi_\theta^1\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\xi_\theta^2\|_{\delta_0} \right) \right) \\ &\quad \times \left[ \left( \sup_{\theta} \|\xi_\theta^1\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\xi_\theta^2\|_{\delta_0} \right) \sup_{\theta} \|\rho_\theta^1 - \rho_\theta^2\|_{\delta_0} \right. \\ &\quad \left. + \left( \sup_{\theta} \|\rho_\theta^1\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\rho_\theta^2\|_{\delta_0} \right) \sup_{\theta} \|\xi_\theta^1 - \xi_\theta^2\|_{\delta_0} \right] \\ &\quad + C\varepsilon \sup_{\theta} \|\xi_\theta^1 - \xi_\theta^2\|_{\delta_0} \left( \|B^0\|_{\delta_0} + \|E^0\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} |\rho_\theta(0)|_{\delta_0} \right). \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

The rest of the section 4.5.2 will be devoted to the proof of Lemma 4.5.7 and done in several steps. In the following  $\delta$  is a fixed constant in  $[1, \delta_0)$ .

**Estimates on**  $\|\int_0^t \nabla \phi\|_{\delta_0}$ .

First from (4.5.2), we have for any  $k$  in  $\mathbf{Z}^3 \setminus \{0\}$  :

$$|\mathcal{F}(\phi)(k)| = \frac{1}{|k|^2} \mathcal{F} \left( \int_{\mathbf{M}} \rho_{\theta} \mu(d\theta) - 1 \right) (k).$$

Lemma 4.5.4 implies then that for any  $t \leq \eta(\delta_0 - 1)$ ,

$$\left| \int_0^t \nabla_x \phi \right|_{\delta} \leq \int_0^t \frac{1}{\left(\delta_0 - \delta - \frac{s}{\eta}\right)^{\beta}} ds \left\| \int_{\mathbf{M}} \rho_{\theta} \mu(d\theta) - 1 \right\|_{\delta_0}. \quad (4.5.6)$$

Likewise, for any  $j$  in  $\{1, 2, 3\}$ , for any  $t \in [0, \eta(\delta_0 - 1))$

$$\left| \int_0^t \partial_j \nabla_x \phi \right|_{\delta} \leq \int_0^t \frac{1}{\left(\delta_0 - \delta - \frac{s}{\eta}\right)^{\beta+1}} ds \left\| \int_{\mathbf{M}} \rho_{\theta} \mu(d\theta) - 1 \right\|_{\delta_0}. \quad (4.5.7)$$

Moreover one has

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{ds}{\left(\delta_0 - \delta - \frac{s}{\eta}\right)^{\beta}} &= -\eta \left[ \frac{1}{1-\beta} \left(\delta_0 - \delta - \frac{s}{\eta}\right)^{1-\beta} \right]_0^t \\ &\leq \frac{\eta}{1-\beta} \left(\delta_0 - \delta - \frac{t}{\eta}\right)^{1-\beta} \leq \frac{\eta}{1-\beta} \delta_0^{1-\beta}, \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

and

$$\int_0^t \frac{ds}{\left(\delta_0 - \delta - \frac{s}{\eta}\right)^{\beta+1}} = -\eta \left[ \frac{-1}{\beta} \left(\delta_0 - \delta - \frac{s}{\eta}\right)^{-\beta} \right]_0^t \leq \frac{\eta}{\beta} (\delta_0 - \delta - t)^{-\beta}. \quad (4.5.9)$$

Therefore we have proved

$$\left\| \int_0^t \nabla_x \phi \right\|_{\delta_0} \leq C \eta \sup_{\theta} \|\rho_{\theta} - 1\|_{\delta_0}. \quad (4.5.10)$$

Likewise, if we consider two solutions  $(\rho_{\theta}^1, \xi_{\theta}^1, \phi^1, A^1)$  and  $(\rho_{\theta}^2, \xi_{\theta}^2, \phi^2, A^2)$  to (4.4.4), it comes

$$\left\| \int_0^t (\nabla_x \phi^1 - \nabla_x \phi^2) \right\|_{\delta_0} \leq C \eta \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^1 - \rho_{\theta}^2\|_{\delta_0}. \quad (4.5.11)$$

**Estimates on**  $\left\| \int_0^t \varepsilon \nu(\xi_{\theta}) \times B \right\|_{\delta_0}$ .

Using Lemmas 4.5.2 and 4.5.6, we obtain

$$\begin{aligned} \left| \left( \int_0^t \varepsilon \nu(\xi_{\theta}) \times B ds \right) \right|_{\delta} &\leq C \varepsilon \sup_{\theta} \|\nu(\xi_{\theta})\|_{\delta_0} \|B\|_{\delta_0} \int_0^t \\ &\leq C \varepsilon \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}\|_{\delta_0} \|B\|_{\delta_0} \end{aligned}$$

Likewise, for  $i$  in  $\{1, 2, 3\}$ , using Lemma 4.5.4, the formula (4.5.9), and proceeding as for the estimation of  $\partial_j \nabla \phi$  in (4.5.7) :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \varepsilon \partial_i (v(\xi_\theta) \times B) ds \right|_{\delta} &\leq C \varepsilon \sup_{\theta} \|\xi_\theta\|_{\delta_0} \|B\|_{\delta_0} \int_0^t \left( \delta_0 - \delta - \frac{s}{\eta} \right)^{-\beta} ds \\ &\leq C \varepsilon \eta \sup_{\theta} \|\xi_\theta\|_{\delta_0} \|B\|_{\delta_0} \left( \delta_0 - \delta - \frac{t}{\eta} \right)^{1-\beta}. \end{aligned}$$

In other words, we have

$$\left\| \left( \int_0^t \varepsilon v(\xi_\theta) \times B ds \right) \right\|_{\delta_0} \leq C \varepsilon \sup_{\theta} \|\xi_\theta\|_{\delta_0} \|B\|_{\delta_0}. \quad (4.5.12)$$

The next natural step consists in estimating  $\|B\|_{\delta_0}$ .

**Lemma 4.5.8.** *Assume  $\sup_{0 \leq t \leq \eta(\delta_0 - \delta)} \sup_{\theta \in M} |\xi_\theta|_{\delta_0} \leq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$ . The following estimate holds :*

$$\begin{aligned} \|B\|_{\delta_0} &\leq C \eta \sup_{\theta} \|\xi_\theta\|_{\delta_0} \sup_{\theta} \|\rho_\theta\|_{\delta_0} \\ &\quad + |B^0 - \langle B^0 \rangle|_{\delta_0} + 2|\langle B^0 \rangle| + |E^0|_{\delta_0} + \sup_{\theta} |\rho_\theta(0)|_{\delta_0}. \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

*Démonstration.* We first solve the wave equation (4.5.3) in the Fourier variable  $k \in \mathbf{Z}^3 \setminus \{0\}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A)(t, k) &= \int_0^t \frac{1}{|k|} \mathcal{F} \left( \mathbf{P} \left( \int_M v(\xi_\theta) \rho_\theta \mu(d\theta) \right) \right) (s, k) \sin \left( \frac{|k|}{\varepsilon} (t-s) \right) ds \\ &\quad + A|_{t=0}(k) \cos \left( \frac{|k|t}{\varepsilon} \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{|k|} \sin \left( \frac{|k|}{\varepsilon} t \right) \mathcal{F}(\partial_t A|_{t=0})(k). \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

Consequently, for any  $k \in \mathbf{Z}^3 \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\nabla_x \times A)(t, k) &= \int_0^t \frac{1}{|k|} \mathcal{F} \left( \nabla_x \times \mathbf{P} \left( \int_M v(\xi_\theta) \rho_\theta \mu(d\theta) \right) \right) (s, k) \sin \left( \frac{|k|}{\varepsilon} (t-s) \right) ds \\ &\quad + \nabla_x \times A^0(k) \cos \left( \frac{|k|t}{\varepsilon} \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{|k|} \sin \left( \frac{|k|}{\varepsilon} t \right) \mathcal{F}(\nabla_x \times \partial_t A|_{t=0})(k). \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

Let us study the  $\|\cdot\|_{\delta_0}$  norm corresponding to these terms. For the first term in (4.5.15), we use the fact that (see e.g. the appendix)

$$|\mathcal{F}(\mathbf{P}(*))(k)| \leq 2|\mathcal{F}(*)(k)|.$$

We can then argue as for the previous estimates to bound its contribution by

$$C \eta \sup_{\theta} \|\xi_\theta\|_{\delta_0} \sup_{\theta} \|\rho_\theta\|_{\delta_0}$$

The treatment of the contributions of the initial data is straightforward, yielding a bound by

$$C(|A^0|_{\delta_0} + |\varepsilon \partial_t A|_{t=0}|_{\delta_0}) \leq C|B^0 - \langle B^0 \rangle|_{\delta_0} + |E^0|_{\delta_0} + \sup_{\theta} |\rho_\theta(0)|_{\delta_0},$$

where we have used Lemma 4.3.5. Recalling that

$$B = \nabla_x \times A + \langle B^0 \rangle,$$

the proof of the lemma is finally complete.  $\square$

Gathering (4.5.12) and (4.5.13), we finally obtain

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \varepsilon v(\xi_\theta) \times (\nabla \times A + \langle B^0 \rangle) \right\|_{\delta_0} &\leq C\varepsilon\eta \left[ \sup_\theta \|\xi_\theta\|_{\delta_0}^2 \sup_\theta \|\rho_\theta\|_{\delta_0} \right] \\ &+ C\varepsilon \sup_\theta \|\xi_\theta\|_{\delta_0} \left( |B^0|_{\delta_0} + |E^0|_{\delta_0} + \sup_\theta |\rho_\theta(0)|_{\delta_0} \right). \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

Similarly, considering two solutions with the same initial data to (4.4.4) indexed by  $i \in \{1, 2\}$ , we moreover obtain the stability estimate

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t \varepsilon v(\xi_\theta^1) \times (\nabla \times A^1 + \langle B^0 \rangle) - \varepsilon v(\xi_\theta^2) \times (\nabla \times A^2 + \langle B^0 \rangle) \right\|_{\delta_0} \\ &\leq C\varepsilon\eta \left( \left( \sup_\theta \|\xi_\theta^1\|_{\delta_0}^2 + \sup_\theta \|\xi_\theta^2\|_{\delta_0}^2 \right) \sup_\theta \|\rho_\theta^1 - \rho_\theta^2\|_{\delta_0} \right. \\ &+ \left. \left( \sup_\theta \|\rho_\theta^1\|_{\delta_0} + \sup_\theta \|\rho_\theta^2\|_{\delta_0} \right) \left( \sup_\theta \|\xi_\theta^1\|_{\delta_0} + \sup_\theta \|\xi_\theta^2\|_{\delta_0} \right) \sup_\theta \|\xi_\theta^1 - \xi_\theta^2\|_{\delta_0} \right) \\ &+ C\varepsilon \sup_\theta \|\xi_\theta^1 - \xi_\theta^2\|_{\delta_0} \left( |B^0|_{\delta_0} + |E^0|_{\delta_0} + \sup_\theta |\rho_\theta(0)|_{\delta_0} \right). \end{aligned} \quad (4.5.17)$$

**Estimates on**  $\left\| \int_0^t \varepsilon \partial_t A(s, x) ds \right\|_{\delta_0}$ .

As we do not need to estimate directly  $\varepsilon \partial_t A(s, x)$  but its integral over  $(0, t)$ , we actually need to study

$$\int_0^t \varepsilon \partial_t A(s, x) ds = \varepsilon (A(t, x) - A^0(x)).$$

We can then use the formula (4.5.14) to obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A - A^0)(t, k) &= \\ &\int_0^t \frac{1}{|k|} \mathcal{F} \left( \mathbf{P} \left( \int_M v(\xi_\theta) \rho_\theta \mu(d\theta) \right) \right) (s, k) \sin \left( \frac{|k|}{\varepsilon} (t - s) \right) ds \\ &+ A^0(k) \left( \cos \left( \frac{|k|t}{\varepsilon} \right) - 1 \right) \\ &+ \frac{\varepsilon}{|k|} \sin \left( \frac{|k|}{\varepsilon} t \right) \mathcal{F}(\partial_t A|_{t=0})(k). \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

We study this term exactly as in the proof of Lemma 4.5.8. It follows that

$$\begin{aligned} \left\| \varepsilon \int_0^t \partial_t A(s, x) ds \right\|_{\delta_0} &\leq C\varepsilon\eta \left( \sup_\theta \|\xi_\theta\|_{\delta_0} \|\rho_\theta\|_{\delta_0} \right) \\ &+ C\varepsilon \left( |B^0 - \langle B^0 \rangle|_{\delta_0} + |E^0|_{\delta_0} + \sup_\theta |\rho_\theta(0)|_{\delta_0} \right). \end{aligned} \quad (4.5.19)$$



Again if we consider two solutions with the same initial data to (4.4.4), we obtain

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \varepsilon \partial_t A^1 ds - \int_0^t \varepsilon \partial_t A^2 ds \right\|_{\delta_0} \\ & \leq C\eta\varepsilon \left[ \left( \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^1\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^2\|_{\delta_0} \right) \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^1 - \rho_{\theta}^2\|_{\delta_0} \right. \\ & \quad \left. + \left( \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^1\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^2\|_{\delta_0} \right) \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^1 - \xi_{\theta}^2\|_{\delta_0} \right]. \end{aligned} \quad (4.5.20)$$

**Remark 4.5.9.** *The gain of a power of  $\varepsilon$  in (4.5.19) and (4.5.20) which is due to the integration in time is somehow reminiscent of the treatment of  $I'_3$  in Theorem 4.1.7 (see Section 4.3.2).*

Gathering (4.5.10), (4.5.16) and (4.5.19), we find that

$$\begin{aligned} \|G_{L,\theta}\|_{\delta_0} & \leq C\eta \sup_{\theta} \|\rho_{\theta} - 1\|_{\delta_0} \\ & \quad + C\eta \left( 1 + \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}\|_{\delta_0} \right) \left( \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}\|_{\delta_0} \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}\|_{\delta_0} \right) \\ & \quad + C\varepsilon \left( 1 + \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}\|_{\delta_0} \right) \left( |B^0|_{\delta_0} + |E^0|_{\delta_0} + \sup_{\theta} |\rho_{\theta}(0)|_{\delta_0} \right). \end{aligned} \quad (4.5.21)$$

and by (4.5.11), (4.5.17) and (4.5.20), we deduce the stability estimate

$$\begin{aligned} \|G_{L,\theta}^1 - G_{L,\theta}^2\|_{\delta_0} & \leq C\eta \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^1 - \rho_{\theta}^2\|_{\delta_0} \\ & \quad + C\eta \left( 1 + \left( \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^1\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^2\|_{\delta_0} \right) \right) \\ & \quad \times \left[ \left( \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^1\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^2\|_{\delta_0} \right) \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^1 - \rho_{\theta}^2\|_{\delta_0} \right. \\ & \quad \left. + \left( \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^1\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^2\|_{\delta_0} \right) \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^1 - \xi_{\theta}^2\|_{\delta_0} \right] \\ & \quad + C\varepsilon \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^1 - \xi_{\theta}^2\|_{\delta_0} \left( \|B^0\|_{\delta_0} + \|E^0\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}(0)\|_{\delta_0} \right). \end{aligned} \quad (4.5.22)$$

This concludes the proof of Lemma 4.5.7.

### 4.5.3 Estimates for $\rho_{\theta}$ and $\xi_{\theta}$

In this section, we prove some a priori analytic bounds on  $\rho_{\theta}$  and  $\xi_{\theta}$ . As in the previous subsections we assume that

$$\sup_{0 \leq t \leq \eta(\delta_0 - \delta)} \sup_{\theta \in M} |\xi_{\theta}|_{\delta_0} \leq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}},$$

which we recall by Lemma 4.5.6 implies that

$$\sup_{\theta} \|\nu(\xi_{\theta})\|_{\delta_0} \leq C \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}\|_{\delta_0}.$$

We consider  $\bar{\xi}_{\theta}$  the solution to

$$\partial_t \bar{\xi}_{\theta} + (\nu(\xi_{\theta}) \cdot \nabla_x) \bar{\xi}_{\theta} = F_{L,\theta}, \quad \bar{\xi}_{\theta}(0) = \xi_{\theta}(0).$$

By Lemma 4.5.2, Lemma 4.5.4 and Lemma 4.5.6, it comes that

$$\begin{aligned} |\bar{\xi}_\theta(t)|_\delta &\leq \int_0^t |\partial_t \bar{\xi}_\theta(s)|_\delta ds + |\bar{\xi}_\theta(0)|_\delta \\ &\leq \|\xi_\theta(0)\|_{\delta_0} + C \int_0^t \left( \delta_0 - \delta - \frac{s}{\eta} \right)^{-\beta} \|\xi_\theta\|_{\delta_0}^2 ds + \|G_{L,\theta}\|_{\delta_0} \\ &\leq \|\xi_\theta(0)\|_{\delta_0} + C\eta \|\xi_\theta\|_{\delta_0}^2 + \|G_{L,\theta}\|_{\delta_0}. \end{aligned}$$

The same argument holds for the estimate bearing on  $|\partial_i \bar{\xi}_\theta(t)|_\delta$  and it comes

$$\|\bar{\xi}_\theta\|_{\delta_0} \leq \|\xi_\theta(0)\|_{\delta_0} + C\eta \|\xi_\theta\|_{\delta_0}^2 + \|G_{L,\theta}\|_{\delta_0}. \quad (4.5.23)$$

Similarly, considering two solutions to (4.4.4), this analysis provides the stability estimate

$$\|\bar{\xi}_\theta^1 - \bar{\xi}_\theta^2\|_{\delta_0} \leq C\eta (\|\xi_\theta^1\|_{\delta_0} + \|\xi_\theta^2\|_{\delta_0}) \|\xi_\theta^1 - \xi_\theta^2\|_{\delta_0} + \|G_{L,\theta}^1 - G_{L,\theta}^2\|_{\delta_0}. \quad (4.5.24)$$

Now working on the equation for  $\rho_\theta$ , we consider the solution  $\bar{\rho}_\theta$  to the equation

$$\partial_t \bar{\rho}_\theta + \nabla_x \cdot (\nu(\xi_\theta) \rho_\theta) = 0, \quad \bar{\rho}_\theta(0) = \rho_\theta(0).$$

By a similar argument it turns out that

$$\|\bar{\rho}_\theta\|_{\delta_0} \leq \|\rho_\theta(0)\|_{\delta_0} + C\eta \|\xi_\theta\|_{\delta_0} \|\rho_\theta\|_{\delta_0}, \quad (4.5.25)$$

and

$$\begin{aligned} \|\bar{\rho}_\theta^1 - \bar{\rho}_\theta^2\|_{\delta_0} &\leq C\eta (\|\xi_\theta^1\|_{\delta_0} + \|\xi_\theta^2\|_{\delta_0}) \|\rho_\theta^1 - \rho_\theta^2\|_{\delta_0} \\ &\quad + C\eta (\|\rho_\theta^1\|_{\delta_0} + \|\rho_\theta^2\|_{\delta_0}) \|\xi_\theta^1 - \xi_\theta^2\|_{\delta_0}. \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

#### 4.5.4 The iterative scheme

We define inductively  $(\rho_\theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\xi_\theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(G_{L,\theta}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  as follows.

For  $n = 0$  we set

$$\begin{aligned} F_{L,\theta}^0 &= 0, \\ \xi_\theta^0(t) &= \xi_\theta(0), \end{aligned}$$

and

$$\rho_\theta^0(t) = \rho_\theta(0),$$

for all  $0 < t < \eta$ ; for  $n \geq 1$ , we rely on the induction relation

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_\theta^{n+1} + \nabla_x \cdot (\nu(\xi_\theta^n) \rho_\theta^n) &= 0, \\ \partial_t \xi_\theta^{n+1} + (\nu(\xi_\theta^n) \cdot \nabla_x) \xi_\theta^n &= F_{L,\theta}^n, \\ \text{with } \rho_\theta^{n+1}(0) = \rho_\theta^n(0) \quad \text{and} \quad \xi_\theta^{n+1}(0) &= \xi_\theta^n(0), \end{aligned}$$

in which

$$F_{L,\theta}^n(t, x, \xi_\theta) := -\nabla_x \phi^n(t, x) - \varepsilon \partial_t A^n(t, x) + \varepsilon \nu(\xi_\theta^n) \times (\nabla \times A^n(t, x) + \langle B^0 \rangle),$$

where  $\phi^n$  and  $A^n$  solve

$$-\Delta_x \phi^n = \int_{\mathbb{M}} \rho_\theta^n \mu(d\theta) - 1,$$

and

$$\varepsilon^2 \partial_t^2 A^n - \Delta_x A^n = \varepsilon \mathbf{P} \left( \int_{\theta \in \mathbb{M}} \nu(\xi_\theta^n(t, x)) \rho_\theta^n(t, x) \mu(d\theta) \right),$$

with the initial condition

$$\nabla \times A^n|_{t=0} = B^0 - \langle B^0 \rangle, \quad -\varepsilon \partial_t A^n|_{t=0} = E^0 + \nabla_x \phi^0.$$

**Contraction estimates for  $n \geq 1$**

**Lemma 4.5.10.** *There exist  $\eta > 0$ ,  $C_1, C_2 > 0$  and  $\varepsilon_0 > 0$  such that if  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ , then :*

— for all  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^n\|_{\delta_0} &\leq C_1, \\ \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^n\|_{\delta_0} &\leq 2C_1, \\ \sup_{\theta} \|G_{L,\theta}^n\|_{\delta_0} &\leq C_1; \end{aligned} \tag{4.5.27}$$

— for all  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^n - \rho_{\theta}^{n-1}\|_{\delta_0} &\leq \frac{C_2}{2^n}, \\ \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^n - \xi_{\theta}^{n-1}\|_{\delta_0} &\leq \frac{C_2}{2^n}, \\ \sup_{\theta} \|G_{L,\theta}^n - G_{L,\theta}^{n-1}\|_{\delta_0} &\leq \frac{C_2}{2^{n+2}}. \end{aligned} \tag{4.5.28}$$

*Démonstration.* Let us first focus on the first item, that is (4.5.27). We argue by induction. For  $n = 0$ , we can choose

$$C_1 := 4C_0,$$

which enforces (4.5.27) according of the assumptions on the initial data. We then pick  $\varepsilon_0 > 0$  such that  $\varepsilon_0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}C_1}$ , which will enable us to apply Lemma 4.5.6 and thus all the estimates of the previous subsections are valid.

Let assume that (4.5.27) holds for some  $n \geq 0$ . Then using (4.5.4) and (4.5.27), it follows that

$$\begin{aligned} \|G_{L,\theta}^{n+1}\|_{\delta_0} &\leq C\eta \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^n - 1\|_{\delta_0} \\ &\quad + C\eta \left(1 + \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^n\|_{\delta_0}\right) \left(\sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^n\|_{\delta_0} \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^n\|_{\delta_0}\right) \\ &\quad + C\varepsilon \left(1 + \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^n\|_{\delta_0}\right) \left(\|B^0\|_{\delta_0} + \|E^0\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}(0)\|_{\delta_0}\right) \\ &\leq \eta C (C_1 + 1 + (2C_1 + 1)2C_1^2) + 3\varepsilon_0^{1-\gamma} C(1 + 2C_1)C_0. \end{aligned} \tag{4.5.29}$$

Recalling that  $\gamma \in [0, 1)$ , choosing  $\eta$  and  $\varepsilon_0$  sufficiently small, we get

$$\|G_{L,\theta}^{n+1}\|_{\delta_0} \leq C_1.$$

Similarly, using (4.5.27) and the estimates (4.5.23), we obtain

$$\begin{aligned} \|\xi_{\theta}^{n+1}\|_{\delta_0} &\leq \|\xi_{\theta}^0\|_{\delta_0} + C\eta \|\xi_{\theta}^n\|_{\delta_0}^2 + \|G_{L,\theta}^n\|_{\delta_0} \\ &\leq C_0 + \eta C C_1^2 + C_1 \\ &\leq 2C_1, \end{aligned} \tag{4.5.30}$$

up to taking  $\eta$  small enough. We omit the treatment of  $\|\rho_{\theta}^{n+1}\|_{\delta_0}$  which is completely similar. We have therefore proved by induction (4.5.27).

We now prove (4.5.28) by induction. The case  $n = 1$  requires a special treatment. We actually use the rough bounds

$$\begin{aligned} \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^1 - \rho_{\theta}^0\|_{\delta_0} &\leq \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^1\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^0\|_{\delta_0} \leq 2C_1, \\ \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^1 - \xi_{\theta}^0\|_{\delta_0} &\leq \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^1\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^0\|_{\delta_0} \leq 4C_1, \\ \sup_{\theta} \|G_{L,\theta}^1 - G_{L,\theta}^0\|_{\delta_0} &\leq \sup_{\theta} \|G_{L,\theta}^1\|_{\delta_0} \leq C_1, \end{aligned}$$

and we choose  $C_2 := 2^3 C_1$ , so that (4.5.28) holds for  $n = 1$ .

Assume now (4.5.28) holds for some  $n \geq 1$ . Using (4.5.27) and (4.5.5) we obtain

$$\begin{aligned} &\|G_{L,\theta}^{n+1} - G_{L,\theta}^n\|_{\delta_0} \\ &\leq C\eta \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^n - \rho_{\theta}^{n-1}\|_{\delta_0} + C\eta \left( 1 + \left( \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^n\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^{n-1}\|_{\delta_0} \right) \right) \\ &\quad \times \left[ \left( \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^n\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^{n-1}\|_{\delta_0} \right) \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^n - \rho_{\theta}^{n-1}\|_{\delta_0} \right. \\ &\quad \left. + \left( \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^n\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}^{n-1}\|_{\delta_0} \right) \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^n - \xi_{\theta}^{n-1}\|_{\delta_0} \right] \quad (4.5.31) \\ &\quad + C\varepsilon \sup_{\theta} \|\xi_{\theta}^n - \xi_{\theta}^{n-1}\|_{\delta_0} \left( \|B^0\|_{\delta_0} + \|E^0\|_{\delta_0} + \sup_{\theta} \|\rho_{\theta}(0)\|_{\delta_0} \right) \\ &\leq \eta C(1 + (1 + 2C_1)2C_1 + 2C_1) \frac{C_2}{2^n} + 3\varepsilon_0^{1-\gamma} C C_0 \frac{C_2}{2^n} \\ &\leq \frac{C_2}{2^{n+3}}, \end{aligned}$$

up to taking  $\eta$  and  $\varepsilon_0$  small enough. Likewise, using (4.5.27), (4.5.28) and (4.5.24) we obtain

$$\begin{aligned} \|\xi_{\theta}^{n+1} - \xi_{\theta}^n\|_{\delta_0} &\leq C\eta (\|\xi_{\theta}^n\|_{\delta_0} + \|\xi_{\theta}^{n-1}\|_{\delta_0}) \|\xi_{\theta}^n - \xi_{\theta}^{n-1}\|_{\delta_0} + \|G_{L,\theta}^n - G_{L,\theta}^{n-1}\|_{\delta_0} \\ &\leq \left( 4\eta C C_1 + \frac{1}{2} \right) \frac{C_2}{2^n} \\ &\leq \frac{C_2}{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

up to taking  $\eta$  small enough. We argue similarly for  $\|\rho_{\theta}^{n+1} - \rho_{\theta}^n\|_{\delta_0}$ , which allows to close the induction argument. □

To conclude, Lemma 4.5.10 proves that for all  $\theta \in M$ ,  $(\rho_{\theta}^n)_n, (\xi_{\theta}^n)_n$  are Cauchy sequences in the Banach spaces  $B_{\delta_0}^{\eta}$  for a suitable small parameter  $\eta$ . As a result, they converge to functions  $\rho_{\theta}$  and  $\xi_{\theta}$  belonging to  $B_{\delta_0}^{\eta}$ . Letting  $n$  tend to infinity one can check that the pair  $(\rho_{\theta}, \xi_{\theta})_{\theta}$  is a solution to the system (4.4.4). Now let  $\delta_1 \in (1, \delta_0)$ . We pick  $T = \eta(\delta_0 - \delta_1)$  to conclude the existence part of the theorem.

There remains to derive the claimed uniform in  $\varepsilon$  estimates. The uniform bound in  $\varepsilon$  for  $(\rho_{\theta})_{\theta}, (\xi_{\theta})_{\theta}$  is a consequence of (4.5.27). The control of  $(E, B)$  is a consequence of the

formula (4.5.14), of the formula for  $\varepsilon \partial_t A$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\varepsilon \partial_t A)(t, k) = & \\
 & \int_0^t \frac{\varepsilon}{|k|} \mathcal{F} \left( \mathbf{P} \left( \int_{\mathbf{M}} \nabla_{\xi} v(\xi_{\theta}) : \partial_t \xi_{\theta} \rho_{\theta} + v(\xi_{\theta}) \partial_t \rho_{\theta} \mu(d\theta) \right) \right) \sin \left( \frac{|k|}{\varepsilon} (t-s) \right) ds \\
 & + \frac{1}{|k|} \sin \left( \frac{|k|}{\varepsilon} t \right) \mathcal{F} \left( \mathbf{P} \left( \int_{\mathbf{M}} v(\xi_{\theta}^0) \rho_{\theta}^0 \mu(d\theta) \right) \right) (k) \\
 & + \mathcal{F}(A|_{t=0})(k) |k| \sin \left( \frac{|k| t}{\varepsilon} \right) \\
 & + \cos \left( \frac{|k|}{\varepsilon} t \right) \mathcal{F}(\varepsilon \partial_t A|_{t=0})(k),
 \end{aligned} \tag{4.5.32}$$

of the assumption on the initial electromagnetic field (4.4.7) and of the above uniform bounds for  $(\rho_{\theta})_{\theta}$ ,  $(\xi_{\theta})_{\theta}$ .

#### 4.5.5 The Vlasov-Poisson case

In order to be able to apply Theorem 4.1.7, we also need to check that there exists a suitable weak solution to the Vlasov-Poisson system (in the sense of Definition 4.1.5) associated to the initial condition

$$f^0(x, d\xi) = \int_{\mathbf{M}} \rho_{\theta}(0, x) \delta(\xi - \xi_{\theta}(0, x)) \mu(d\theta).$$

We recall that according to [103], such a suitable weak solution is then unique. As in the Vlasov-Maxwell case, we look for the solution under the form

$$f^{VP}(t, x, \xi) = \int_{\mathbf{M}} \rho_{\theta}(t, x) \delta(\xi - \xi_{\theta}(t, x)) \mu(d\theta),$$

with  $(\rho^{\theta}, \xi^{\theta})$  solving the multifluid system

$$\begin{cases}
 \forall \theta \in \mathbf{M}, \partial_t \rho_{\theta}(t, x) + \nabla_x \cdot (\xi_{\theta}(t, x) \rho_{\theta}(t, x)) = 0, \\
 \forall \theta \in \mathbf{M}, \partial_t \xi_{\theta}(t, x) + (\xi_{\theta}(t, x) \cdot \nabla_x) \xi_{\theta}(t, x) = -\nabla_x \phi, \\
 -\Delta \phi = \int_{\mathbf{M}} \rho_{\theta}(t, x) \mu(d\theta) - 1, \\
 \forall \theta \in \mathbf{M}, \rho_{\theta}|_{t=0} = \rho_{\theta}(0), \quad \xi_{\theta}|_{t=0} = \xi_{\theta}(0).
 \end{cases} \tag{4.5.33}$$

We can obtain the following result.

**Theorem 4.5.11.** *Let  $(\mathbf{M}, \mu)$  the probability space used to define the multifluid system (4.5.33), let  $\delta_0 > \delta_1 > 1$ , let  $C_0 > 0$ , and  $(\rho_{\theta}(0))_{\theta}$ ,  $(\xi_{\theta}(0))_{\theta}$  be families of  $B_{\delta_0}^{\eta}$  such that*

$$\begin{aligned}
 \sup_{\theta} |\rho_{\theta}(0)|_{\delta_0} &\leq C_0, \\
 \sup_{\theta} |\xi_{\theta}(0)|_{\delta_0} &\leq C_0.
 \end{aligned} \tag{4.5.34}$$

*Then there exists a time  $T_0 > 0$ , and functions  $(\rho_{\theta})_{\theta}$ ,  $(\xi_{\theta})_{\theta}$  in  $C([0, T_0], B_{\delta_1})$ , solutions to (4.5.33) with initial conditions  $(\rho_{\theta}(0), \xi_{\theta}(0))_{\theta}$ .*

We will not give the proof of this result as it is already contained in that of Theorem 4.4.4 (see also [66]). We can check that this solution is suitable. Indeed,

$$\begin{aligned} \|\rho^{\text{VP}}\|_{L^\infty(0,T_0;L^\infty(\mathbf{T}^3))} &= \left\| \int_M \rho_\theta(t,x) \mu(d\theta) \right\|_{L^\infty(0,T_0;L^\infty(\mathbf{T}^3))} \\ &\leq \sup_\theta \|\rho_\theta\|_{L^\infty(0,T_0;L^\infty(\mathbf{T}^3))} < +\infty, \end{aligned}$$

and likewise

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{\mathbf{R}^3} |\xi|^4 f^{\text{VP}}(t,x, d\xi) \right\|_{L^\infty(0,T_0;L^1(\mathbf{T}^3))} \\ &= \left\| \int_M \rho_\theta(t,x) |\xi_\theta(t,x)|^4 \mu(d\theta) \right\|_{L^\infty(0,T_0;L^1(\mathbf{T}^3))} \\ &\leq \sup_\theta \|\rho_\theta\|_{L^\infty(0,T_0;L^\infty(\mathbf{T}^3))} \sup_\theta \|\xi_\theta\|_{L^\infty(0,T_0;L^\infty(\mathbf{T}^3))}^4 < +\infty. \end{aligned}$$

This finally shows that we can apply Theorem 4.1.7 to such solutions (note though that to completely enter the framework of Theorem 4.1.7, one also needs to enforce all conditions on the initial data of Definition 4.1.6).

## 4.6 Appendix

### 4.6.1 On the Leray projection $\mathbf{P}$

We gather in this paragraph some remarks on the Leray projection  $\mathbf{P} : L^2(\mathbf{T}^3) \rightarrow L^2(\mathbf{T}^3)$ , its Fourier transform and its continuity properties with respect to any norm  $H^s$ ,  $s \in [0, +\infty)$ .

More generally let us explain how a vector field can be decomposed in a divergence free part and an irrotational part (the Helmholtz decomposition). Given  $F \in C_c^1(\mathbf{T}^3, \mathbf{T}^3)$  one can define  $\mathbf{P}(F)$  as follows :

$$\mathbf{P}(F)(x) = F(x) + \nabla\psi(x), \quad \text{for any } x \in \mathbf{T}^3,$$

with  $\psi$  satisfying the equation

$$-\Delta\psi = \nabla \cdot F.$$

One can check that it implies that

$$\nabla_x \cdot \mathbf{P}(F) = 0.$$

Applying the Fourier transform, one obtains for any  $k \in \mathbf{Z}^3$  :

$$\mathcal{F}(\mathbf{P}(F))(k) = \mathcal{F}(F)(k) + ik\mathcal{F}(\psi),$$

and

$$\mathcal{F}(\psi)(k) = \frac{i}{|k|^2} k \cdot \mathcal{F}(F)(k),$$

which implies

$$\mathcal{F}(\mathbf{P}(F))(k) = \left( \text{Id} - \frac{k \otimes k}{|k|^2} \right) \mathcal{F}(F)(k). \quad (4.6.1)$$

Therefore

$$|\mathcal{F}(\mathbf{P}(F))(k)| \leq C |\mathcal{F}(F)(k)|,$$

and by the Plancherel Theorem  $\mathbf{P}$  extends to a continuous operator on  $L^2(\mathbf{T}^3)$  characterized by the formula (4.6.1). From the same formula we have the continuity with respect to any Sobolev norm  $H^s$ ,  $s \in [0, +\infty)$ .

### 4.6.2 Proof of Lemma 4.5.5

We recall that all the proofs concerning the properties of the analytic norms we use can be found in Section 2.2 of [66]. Let us however explain Lemma 4.5.5.

One can define the function  $h(f)$  over  $\mathbf{T}^3$  by the power series :

$$h(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x)^n.$$

Then we have the following inequality, thanks to Lemma 4.5.2 according to which the space  $B_\delta$  is a Banach algebra,

$$\|h(f)\|_\delta \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \|f^n\|_\delta,$$

and we can conclude.





## 4.7 Références

- [1] L. Ambrosio. Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields. *Invent. Math.*, 158(2) :227–260, 2004.
- [2] A. A. Arsenev. Existence in the large of a weak solution of Vlasov’s system of equations. *Ž. Vychisl. Mat i Mat. Fiz.*, 15 :136–147, 276, 1975.
- [3] A.A Arsen’ev. Existence and uniqueness of the classical solution of Vlasov’s system of equations. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 15(5) :252–258, 1975.
- [4] A.A. Arsen’ev. Global existence of a weak solution of vlasov’s system of equations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 15(1) :131 – 143, 1975.
- [5] D. Arsénio and L. Saint-Raymond. *From the Vlasov–Maxwell–Boltzmann System to Incompressible Viscous Electro-magneto-hydrodynamics*. European Mathematical Society Publishing House, 2019.
- [6] D. Arsénio and N. Masmoudi. Maximal gain of regularity in velocity averaging lemmas. *Anal. PDE*, 12(2) :333–388, 2019.
- [7] K. Asano. On local solutions of the initial value problem for the Vlasov-Maxwell equation. *Comm. Math. Phys.*, 106(4) :551–568, 1986.
- [8] K. Asano and S. Ukai. On the Vlasov-Poisson limit of the Vlasov-Maxwell equation. In *Patterns and waves*, volume 18 of *Stud. Math. Appl.*, pages 369–383. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [9] A. Baradat. Nonlinear instability in vlasov type equations around rough velocity profiles. *Ann. I. H. Poincaré -AN*, 2020.
- [10] C. Bardos and P. Degond. Global existence for the Vlasov-Poisson equation in 3 space variables with small initial data. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2(2) :101–118, 1985.
- [11] C. Bardos, F. Golse, and D. Levermore. Sur les limites asymptotiques de la théorie cinétique conduisant à la dynamique des fluides incompressibles. (On the asymptotic limits of kinetic theory towards incompressible fluid dynamics). *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I*, 309(11) :727–732, 1989.
- [12] C. Bardos, F. Golse, and D. Levermore. Fluid dynamic limits of kinetic equations. i. formal derivations. 63 :323–344, 1991.
- [13] J. Batt. Ein existenzbeweis für die vlasov gleichung der stellardynamik bei gemittelter dichte. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 313(13) :296–308, 1963.
- [14] J. Batt. Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics. *Journal of Differential Equations*, 25(3) :342 – 364, 1977.
- [15] J. Batt and G. Rein. Global classical solutions of the periodic vlasov-poisson system in three dimensions. *C.R.Acad.Sci Paris*, 313(1) :411–416, 1991.
- [16] S. Bauer. A non-relativistic model of plasma physics containing a radiation reaction term. *Kinet. Relat. Models*, 11(1) :25–42, 2018.

- 
- [17] S. Bauer. A post-newtonian expansion including radiation damping for a collisionless plasma. *J. Nonlinear Sci.*, 30 :487–536, 2020.
- [18] S. Bauer, G. Kunze, M. Rein, and A. D. Rendall. Multipole radiation in a collisionless gas coupled to electromagnetism or scalar gravitation. *Comm. Math. Phys.*, 266(1) :267–288, 2006.
- [19] S. Bauer and M. Kunze. The Darwin approximation of the relativistic Vlasov-Maxwell system. *Ann. Henri Poincaré*, 6(2) :283–308, 2005.
- [20] P. M. Bellan. *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press, 2006.
- [21] S. Benachour, F. Filbet, P. Laurençot, and E. Sonnendrücker. Global existence for the Vlasov-Darwin system in  $\mathbb{R}^3$  for small initial data. *Math. Methods Appl. Sci.*, 26(4) :297–319, 2003.
- [22] N. Besse, N. Mauser, and E. Sonnendrücker. Numerical approximation of self-consistent vlasov models for low-frequency electromagnetic phenomena. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 17(3) :361 – 374, 2007.
- [23] L. Bigorgne. Sharp asymptotic behavior of solutions of the 3d-vlasov-maxwell system with small data. *arXiv preprint arXiv :1812.11897*, 2018.
- [24] L. Boltzmann. Weitere studien über das wärmeleichgewicht unter gasmolekülen. 1970.
- [25] F. Bouchut, F. Golse, and C. Pallard. Classical solutions and the Glassey-Strauss theorem for the 3D Vlasov-Maxwell system. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 170(1) :1–15, 2003.
- [26] F. Bouchut, F. Golse, and C. Pallard. Nonresonant smoothing for coupled wave + transport equations and the Vlasov-Maxwell system. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 20(3) :865–892, 2004.
- [27] F. Bouchut, F. Golse, and M. Pulvirenti. *Kinetic equations and asymptotic theory*. Series in Applied Mathematics. Elsevier, 2000.
- [28] T. J. M. Boyd and J. J. Sanderson. *The Physics of Plasmas*. Cambridge University Press, 2003.
- [29] W. Braun and K. Hepp. The vlasov dynamics and its fluctuations in the  $1/n$  limit of interacting classical particles. *Comm. Math. Phys.*, 56(2) :101–113, 1977.
- [30] Y. Brenier. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 44(4) :375–417, 1991.
- [31] Cercignani C., Illner R., and Pulvirenti M. *The Mathematical Theory of Dilute Gases*. Springer-Verlag New York, 1994.
- [32] R. E. Caflisch. A simplified version of the abstract Cauchy-Kowalewski theorem with weak singularities. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 23(2) :495–500, 1990.
- [33] S. Calogero and H. Lee. The non-relativistic limit of the Nordström-Vlasov system. *Commun. Math. Sci.*, 2(1) :19–34, 2004.

- [34] S. Chapman and T. G. Cowling. *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*. Cambridge University Press, Cambridge, 1939.
- [35] G. Chen and L. Chacon. A multi-dimensional, energy- and charge-conserving, non-linearly implicit, electromagnetic vlasov–darwin particle-in-cell algorithm. *Computer Physics Communications*, 197 :73 – 87, 2015.
- [36] J. Cooper and A. Klimas. Boundary value problems for the vlasov-maxwell equation in one dimension. *J. Math. Anal. Appl.*, 75 :306–329, 1980.
- [37] C.G M.A. Darwin. The dynamical motions of charged particles. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39(233) :537–551, 1920.
- [38] P. Degond. Local existence of solutions of the Vlasov-Maxwell equations and convergence to the Vlasov-Poisson equations for infinite light velocity. *Math. Methods Appl. Sci.*, 8(4) :533–558, 1986.
- [39] P. Degond and P-A Raviart. An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell’s equations. *Forum Math.*, 4(1) :13–44, 1992.
- [40] R. J. DiPerna and P-L. Lions. Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(6) :729–757, 1989.
- [41] R. J. DiPerna and P-L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math.*, 98(3) :511–547, 1989.
- [42] R. L. Dobrushin and J. Fritz. Non-equilibrium dynamics of one-dimensional infinite particle systems with a hard-core interaction. *Comm. Math. Phys.*, 55(3) :275–292, 1977.
- [43] R. L. Dobrušin. Vlasov equations. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 13(2) :48–58, 96, 1979.
- [44] J. Duniec. On an initial value problem for a nonlinear system of vlasov-maxwell equations. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Tech*, 21(3) :97–102, 1973.
- [45] J. Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [46] D. Fajman, J. Joudioux, and J. Smulevici. A vector field method for relativistic transport equations with applications. *Anal. PDE*, 10(7) :1539–1612, 2017.
- [47] F. Filbet. *Contribution à l’analyse et la simulation numérique de l’équation de Vlasov*. PhD thesis, 2001. Thèse de doctorat dirigée par Benachour, Saïd et Clerc, Jean-Louis Mathématiques appliquées Nancy 1 2001.
- [48] N. Fournier and A. Guillin. On the rate of convergence in wasserstein distance of the empirical measure. *Probab. Theory Relat. Fields*, 162 :707–738, 2015.
- [49] J.P. Freidberg. *Plasma Physics and Fusion Energy*. Cambridge University Press, 2007.
- [50] J. Fritz and R. L. Dobrushin. Non-equilibrium dynamics of two-dimensional infinite particle systems with a singular interaction. *Comm. Math. Phys.*, 57(1) :67–81, 1977.

- 
- [51] W. Gangbo and R. J. McCann. The geometry of optimal transportation. *Acta Math.*, 177(2) :113–161, 1996.
- [52] I. Gelfand and J. Shilov. *Generalized functions*, volume 1. Academic Press, NewYork-London, 1964.
- [53] R. Glassey and W. Straus. Singularity formation in a collisionless plasma could occur only at high velocity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 92 :59–90.
- [54] R. T. Glassey and J. Schaeffer. Global existence for the relativistic Vlasov-Maxwell system with nearly neutral initial data. *Comm. Math. Phys.*, 119(3) :353–384, 1988.
- [55] R. T. Glassey and W.A. Strauss. Singularity formation in a collisionless plasma could occur only at high velocities. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 92(1) :59–90, 1986.
- [56] R. T. Glassey and W.A. Strauss. Absence of shocks in an initially dilute collisionless plasma. *Comm. Math. Phys.*, 113(2) :191–208, 1987.
- [57] R.T. Glassey. *The Cauchy problem in kinetic theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1996.
- [58] R.T. Glassey and J. Schaeffer. Control of velocities generated in a two—dimensional collisionless plasma with symmetry. *Transport Theory and Statistical Physics*, 17(5-6) :467–560, 1988.
- [59] R.T Glassey and J. Schaeffer. On the ‘one and one-half dimensional’ relativistic vlasov–maxwell system. 1990.
- [60] R.T Glassey and J. Schaeffer. The “two and one–half dimensional” relativistic vlasov maxwell system. *Communications in Mathematical Physics*, 185 :257–284, 1997.
- [61] R.T. Glassey and J. Schaeffer. The relativistic vlasov-maxwell system in two space dimensions : Part i. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 141 :331–354, 1998.
- [62] F. Golse. The mean-field limit for a regularized vlasov-maxwell dynamics. *Commun. Math. Phys.*, 310 :789–816, 2012.
- [63] F. Golse. On the dynamics of large particle systems in the mean field limit. In *Macroscopic and large scale phenomena : coarse graining, mean field limits and ergodicity*, volume 3 of *Lect. Notes Appl. Math. Mech.*, pages 1–144. Springer, [Cham], 2016.
- [64] F. Golse, P.-L. Lions, B. Perthame, and R. Sentis. Regularity of the moments of the solution of a transport equation. *J. Funct. Anal.*, 76(1) :110–125, 1988.
- [65] F. Golse and L. Saint-Raymond. The incompressible navier-stokes limit of the boltzmann equation for hard cutoff potentials. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 91(5) :508–552, 2009.
- [66] E. Grenier. Oscillations in quasineutral plasmas. *Comm. Partial Differential Equations*, 21(3-4) :363–394, 1996.
- [67] T. T Grenier, E. and Nguyen. Generator functions and their applications. *arXiv preprint arXiv :1912.00896*, 2019.

- [68] Y. Guo. Global weak solutions of the Vlasov-Maxwell system with boundary conditions. *Comm. Math. Phys.*, 154(2) :245–263, 1993.
- [69] D. Han-Kwan. On propagation of higher space regularity for nonlinear Vlasov equations. *Anal. PDE*, 12(1) :189–244, 2019.
- [70] D. Han-Kwan and M. Iacobelli. Quasineutral limit for Vlasov-Poisson via Wasserstein stability estimates in higher dimension. *J. Differential Equations*, 263(1) :1–25, 2017.
- [71] D. Han-Kwan and M. Iacobelli. The quasineutral limit of the Vlasov-Poisson equation in Wasserstein metric. *Commun. Math. Sci.*, 15(2) :481–509, 2017.
- [72] D. Han-Kwan and T. T. Nguyen. Nonlinear instability of Vlasov-Maxwell systems in the classical and quasineutral limits. *SIAM J. Math. Anal.*, 48(5) :3444–3466, 2016.
- [73] D. Han-Kwan, T. T. Nguyen, and F. Rousset. Long time estimates for the Vlasov-Maxwell system in the non-relativistic limit. *Comm. Math. Phys.*, 363(2) :389–434, 2018.
- [74] D. Han-Kwan and F. Rousset. Quasineutral limit for Vlasov-Poisson with Penrose stable data. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(6) :1445–1495, 2016.
- [75] M. Herda. *Analyse asymptotique et numérique de quelques modèles pour le transport de particules chargées*. PhD thesis, 2017. Thèse de doctorat dirigée par Filbet, Francis Mathématiques Lyon 2017.
- [76] D. Hilbert. Sur les problèmes futurs des Mathématiques (traduction par L. Laugel). Congrès. intern. des math. (Paris 1900) 58-114 (1902)., 1902.
- [77] D. Hilbert. Begründung der kinetischen gastheorie. *Mathematische Annalen*, 72 :562–577, 1912.
- [78] T. Holding and E. Miot. Uniqueness and stability for the Vlasov-Poisson system with spatial density in Orlicz spaces. In *Mathematical analysis in fluid mechanics—selected recent results*, volume 710 of *Contemp. Math.*, pages 145–162. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018.
- [79] E. Horst. On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation. I. General theory. *Math. Methods Appl. Sci.*, 3(2) :229–248, 1981.
- [80] E. Horst. On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation. II. Special cases. *Math. Methods Appl. Sci.*, 4(1) :19–32, 1982.
- [81] E. Horst. Global solutions of the relativistic Vlasov-Maxwell system of plasma physics. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 292 :63, 1990.
- [82] E. Horst. On the asymptotic growth of the solutions of the Vlasov-Poisson system. *Math. Methods Appl. Sci.*, 16(2) :75–86, 1993.
- [83] E. Horst and R. Hunze. Weak solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation. *Math. Methods Appl. Sci.*, 6(2) :262–279, 1984.

- [84] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators.I. Distributions and Fourier analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [85] R. Illner and H. Neunzert. An existence theorem for the unmodified vlasov equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1(4) :530–544, 1979.
- [86] S.V Iordanskii. A solution to cauchy problem for the kinetic equation of electron plasma. 1959.
- [87] P-E. Jabin. A review of the mean field limits for vlasov equations. *Kinetic and Related Models*, 7 :661, 2014.
- [88] P-E. Jabin and M. Hauray. Particle approximation of vlasov equations with singular forces : Propagation of chaos. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 48, 2011.
- [89] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. J. Wiley and Sons, 1999.
- [90] V. I. Judovič. Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid. *Ž. Vyčisl. Mat i Mat. Fiz.*, 3 :1032–1066, 1963.
- [91] T. Kato. The cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 58 :181–205, 1975.
- [92] C. Kipnis and C. Landim. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [93] S. Klainerman and G. Ponce. Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 36(1) :133–141, January 1983.
- [94] S. Klainerman and G. Staffilani. A new approach to study the Vlasov-Maxwell system. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 1(1) :103–125, 2002.
- [95] M. Kunze and A. Rendall. Simplified models of electromagnetic and gravitational radiation damping. *Classical and Quantum Gravity*, 18 :3573–3587, 2001.
- [96] M. Kunze and H. Spohn. Post-Coulombian dynamics at order  $c^{-3}$ . *J. Nonlinear Sci.*, 11(5) :321–396, 2001.
- [97] R. Kurth. Das anfangswertproblem der stellardynamik. *Zeitschrift für Astrophysik*, 30 :213, 1952.
- [98] L. Landau and E.M Lifschitz. *Physical Kinetics*, volume 10 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 1981.
- [99] L. Landau and E. Lifshitz. *Cours de physique théorique, Théorie des champs*, volume 2. 1970.
- [100] D. Lazarovici and P. Pickl. A mean field limit for the vlasov–poisson system. *Arch. Rational Mech. Anal*, 225(7) :1201–1231, 2017.
- [101] H. Lee. The classical limit of the relativistic Vlasov-Maxwell system in two space dimensions. *Math. Methods Appl. Sci.*, 27(3) :249–287, 2004.

- [102] P-L. Lions and B. Perthame. Propagations of moments and regularity for the 3-dimensional vlasov-poisson system. *Invent.Math*, 105 :415–430, 1991.
- [103] G. Loeper. Uniqueness of the solution to the Vlasov-Poisson system with bounded density. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 86(1) :68–79, 2006.
- [104] J Luk and R. M. Strain. A new continuation criterion for the relativistic Vlasov-Maxwell system. *Comm. Math. Phys.*, 331(3) :1005–1027, 2014.
- [105] J. Luk and R.M. Strain. Strichartz estimates and moment bounds for the relativistic Vlasov-Maxwell system. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 219(1) :445–552, 2016.
- [106] A.J. Majda and A.L. Bertozzi. *Vorticity and Incompressible Flow*, volume 27 of *Cambridge Texts Appl. Math.* Cambridge Univ. Press, 2002.
- [107] N. Masmoudi and N. Mauser. The selfconsistent pauli equation. *Mh Math*, 132 :19–24, 2001.
- [108] J.C. Maxwell. On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 157 :49–88, 1867.
- [109] D. J. McGillen. A particle scheme incorporating an elliptic approximation for the relativistic Vlasov-Maxwell system. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16(6) :1333–1348, 1995.
- [110] D.J. McGillen. A low velocity approximation for the relativistic Vlasov-Maxwell system. *Math. Methods Appl. Sci.*, 18(9) :739–753, 1995.
- [111] E. Miot. A uniqueness criterion for unbounded solutions to the Vlasov-Poisson system. *Comm. Math. Phys.*, 346(2) :469–482, 2016.
- [112] K. Miyamoto. *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [113] C. Mouhot and C. Villani. On Landau damping. *Acta Math.*, 207(1) :29–201, 2011.
- [114] H. Neunzert. Mathematical investigations on particle-incell methods. *Fluid Dynamics Transactions*, 9, 1978.
- [115] H. Neunzert and J. Wick. *Die Approximation der Lösung von IntegroDifferentialgleichungen durch endliche Punktmengen*, volume 392. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991.
- [116] C. Pallard. On the boundedness of the momentum support of solutions to the relativistic Vlasov-Maxwell system. *Indiana Univ. Math. J.*, 54(5) :1395–1409, 2005.
- [117] C. Pallard. The initial value problem for the relativistic Vlasov-Darwin system. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 57191, 31, 2006.
- [118] C. Pallard. A lower bound for the life span of solutions to relativistic Vlasov-Maxwell systems. *Asymptot. Anal.*, 56(3-4) :205–228, 2008.
- [119] C. Pallard. Moment propagation for weak solutions to the vlasov–poisson system. *Communications in Partial Differential Equations*, 37(7) :1273–1285, 2012.
- [120] C. Pallard. Space moments of the Vlasov-Poisson system : propagation and regularity. *SIAM J. Math. Anal.*, 46(3) :1754–1770, 2014.

- [121] C. Pallard. A refined existence criterion for the relativistic Vlasov-Maxwell system. *Commun. Math. Sci.*, 13(2) :347–354, 2015.
- [122] K. Pfaffelmoser. Global classical solutions of the vlasov-poisson system in three dimensions for general initial data. *J. Differential Equations*, 95 :281–303, 1992.
- [123] P. Raviart and E. Sonnendrücker. A hierarchy of approximate models for the max-well equations. *Numer. Math.*, 73 :329–372, 1996.
- [124] J.-M. Rax. *Physique des plasmas : cours et applications*. Dunod, 2005.
- [125] G. Rein. Generic global solutions of the relativistic Vlasov-Maxwell system of plasma physics. *Comm. Math. Phys.*, 135(1) :41–78, 1990.
- [126] G. Rein. Global weak solutions to the relativistic Vlasov-Maxwell system revisited. *Commun. Math. Sci.*, 2(2) :145–158, 2004.
- [127] R. Robert. Unicité de la solution faible à support compact de l'équation de Vlasov-Poisson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 324(8) :873–877, 1997.
- [128] W. Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, second edition, 1991.
- [129] J. Schaeffer. The classical limit of the relativistic Vlasov-Maxwell system. *Comm. Math. Phys.*, 104(3) :403–421, 1986.
- [130] J. Schaeffer. Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions. *Comm. Partial Differential Equations*, 16(8-9) :1313–1335, 1991.
- [131] J. Schaeffer and L. Wu. The nonrelativistic limit of the relativistic Vlasov-Maxwell system. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 40(3) :3784–3798, 2017.
- [132] Jack Schaeffer. A small data theorem for collisionless plasma that includes high velocity particles. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(1) :1–34, 2004.
- [133] P.P.J.M. Schram. *Kinetic Theory of Gases and Plasmas*. Springer, Dordrecht, 1991.
- [134] M. Seehafer. Global classical solutions of the Vlasov-Darwin system for small initial data. *Commun. Math. Sci.*, 6(3) :749–764, 2008.
- [135] R. Sospedra-Alfonso, M. Agueh, and R. Illner. Global classical solutions of the relativistic Vlasov-Darwin system with small Cauchy data : the generalized variables approach. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 205(3) :827–869, 2012.
- [136] R. Sospedra-Alfonso and R. Illner. Classical solvability of the relativistic vlasov-maxwell system with bounded spatial density. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 33(6) :751–757, 2010.
- [137] H. Spohn. *Scaling Limits of Interacting Particle Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991.
- [138] S. Ukai and T. Okabe. On classical solutions in the large in time of two-dimensional vlasov's equation. *Osaka J. Math.*, 15(2) :245–261, 1978.
- [139] C. Villani. Limites hydrodynamiques de l'équation de boltzmann. *Séminaire Bourbaki*, 43 :365–405, 2000-2001.



- [140] C. Villani. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. In *Handbook of mathematical fluid dynamics. Vol. 1*, pages 71–305. Amsterdam : Elsevier, 2002.
- [141] C. Villani. Optimal transportation, dissipative pde's and functional inequalities. In *Optimal Transportation and Applications.*, volume 1813, pages 71–305. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [142] C. Villani. *Topics in optimal transportation*, volume 58 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [143] A.A. Vlasov. The vibrationnal property of an electron gaz. *Soviet Physics Uspekhi*, 10(6) :721–733, jun 1938.
- [144] E. Weibel. L'équation de vlasov dans la théorie spéciale de la relativité. *PLasma. Phys.*, 9 :665–670, 1967.
- [145] S. Wollman. Global-in-time solutions of the two-dimensional vlasov-poisson systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 33(2) :173–197, 1980.
- [146] S. Wollman. An existence and uniqueness theorem for the Vlasov-Maxwell system. *Comm. Pure Appl. Math.*, 37(4) :457–462, 1984.
- [147] S. Wollman. Local existence and uniqueness theory of the Vlasov-Maxwell system. *J. Math. Anal. Appl.*, 127(1) :103–121, 1987.

**Titre :** Sur le système de Vlasov-Maxwell: régularité et limite non relativiste.

**Mots clés :** EDPs, théorie cinétique, Vlasov-Maxwell, régularité, limite non-relativiste.

**Résumé :** Cette thèse est consacrée à l'étude du système d'équations aux dérivées partielles de Vlasov-Maxwell qui décrit l'évolution au cours du temps de la fonction de distribution des particules chargées dans un plasma. Nos travaux portent plus particulièrement sur la régularité des solutions de ce système et le problème de la limite non-relativiste.

Dans un premier temps, on étudie un modèle jouet combinant une équation de Vlasov et un système d'équations de transport. On utilise les méthodes utilisées pour obtenir et améliorer le critère de Glassey-Strauss qui donne une condition suffisante sous laquelle une solution forte du système de Vlasov-Maxwell ne développe pas de singularités. La perte de régularité se manifeste lorsque la vitesse des particules est proche de la vitesse de résonance du système hyperbolique adjoint. Le même phénomène se produit pour les solutions de notre système jouet, mais il possède une structure moins complexe.

Dans un deuxième temps, on aborde la question de la limite non relativiste. Après redimensionne-

ment, la vitesse de la lumière peut être considérée comme un grand paramètre du système. Lorsque celui-ci tend vers l'infini, on parle de limite non-relativiste. Au premier ordre, la limite non relativiste du système de Vlasov-Maxwell est le système de Vlasov-Poisson. Dans un premier chapitre, on établit une méthode itérative qui permet formellement d'obtenir des systèmes couplant l'équation de Vlasov à un système elliptique et formant une approximation non relativiste d'ordre arbitrairement élevé du système de Vlasov-Maxwell. Ces systèmes sont de plus bien posés dans certains espaces de Sobolev. Dans un second chapitre on démontre un résultat de limite non relativiste vers le système de Vlasov-Poisson sous des conditions ne portant que sur la densité macroscopique de charges. Pour ce faire on étudie une fonctionnelle quantifiant la distance de Wasserstein entre les solutions faibles des deux systèmes. Ceci rend valide la limite non-relativiste pour une nouvelle classe de solutions, à valeurs dans des espaces de mesures.

**Title :** On the Vlasov-Maxwell System: regularity and non-relativistic limit.

**Keywords :** PDEs, kinetic Theory, Vlasov-Maxwell, regularity, non-relativistic limit.

**Abstract :** In this dissertation, we study the Vlasov-Maxwell system of partial differential equations, describing the evolution of the distribution function of charged particles in a plasma. More precisely, we study the regularity of solutions to this system, and the question of the non-relativistic limit. In the first part, we study a Toy-model, combining the Vlasov equation with a system of transport equations. We use the methods developed to obtain and improve the Glassey-Strauss criterion, which gives a sufficient condition under which strong solutions do not develop singularities. The loss of regularity occurs when the speed of the particles is close to the characteristic speed of the joined hyperbolic system. The same phenomenon occurs for the solutions of the Toy-model, but its structure is easier to handle. In the second part, we focus on the question of the non-relativistic limit.

After a rescaling of the equations, the speed of light can be considered as a big parameter. When it tends to infinity, it is called the non-relativistic limit. At first order, the non-relativistic limit of the Vlasov-Maxwell system is the Vlasov-Poisson system. First, an iterative method giving arbitrary high non-relativistic approximations is established. These systems combine the Vlasov-equation with elliptic systems of equations, and are well-posed in some weighted Sobolev spaces. We also prove a result on the non-relativistic limit to the Vlasov-Poisson system under the weaker assumption of boundedness of the macroscopic density. We study a functional quantifying the Wasserstein distance between weak solutions of both systems. It enables to justify the non-relativistic limit in this weaker sense for a larger class of solutions, taking value in a space of measures.