Factorisations des mots de basse complexité

Caius Wojcik

N°d'ordre NNT : 2019LYSE1340

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée au sein de
l'Université Claude Bernard Lyon 1

Ecole Doctorale 512
Informatique et Mathématiques de Lyon (InfoMaths)

Spécialité de doctorat : **Mathématiques**
Discipline : Mathématiques

Soutenue publiquement le 16/12/2019,
par : **Caïus François Wojcik**

Factorisations des mots de basse complexité

Devant le jury composé de :

Adamczewski, Boris	Directeur de Recherche CNRS Lyon	Co-Directeur de thèse
Allouche, Jean-Paul	Directeur de Recherche CNRS Paris	Rapporteur
Charlier, Emilie	Chargée de Cours Université de Liège Belgique	Examinatrice
Fici Gabriele	Professeur associé Université de Palerme Italie	Rapporteur
Frid, Anna	Maître de Conférences Université Aix-Marseille	Examinatrice
Zamboni, Luca	Professeur des Universités Université Lyon 1	Directeur de thèse
Zeng, Jiang	Professeur des Universités Université Lyon 1	Examinateur

Université Claude Bernard Lyon 1

Ecole Doctorale Lyon 1 MathInfo

Doctorat de Mathématiques

Discipline : Mathématiques

présentée par

Caïus Wojcik

Factorisations des mots de basse complexité

---

dirigée par Boris Adamczewski et Luca Zamboni

Contenant les deux contributions :

Factorisations monochromatiques et périodicité

et

Intercepts formels des mots sturmiens

Soutenue le *à déterminer* devant le jury composé de :

M. Boris Adamczewski	Université Claude Bernard Lyon 1	Directeur
M. Jean-Paul Allouche	Université Paris Rive Gauche	Rapporteur
Mme. Emilie Charlier	Université de Liège	Examinatrice
Mme. Anna Frid	Université Aix-Marseille	Examinatrice
M. Luca Zamboni	Université Claude Bernard Lyon 1	Directeur
M. Jiang Zeng	Université Claude Bernard Lyon 1	Examinateur
M. Gabriele Fici	Université de Palerme	Rapporteur (hors jury)

Présentation

Nous présentons dans ce doctorat de mathématiques le travail effectué pendant trois ans à l'Université Claude Bernard Lyon 1, financé par la bourse de thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon. Ce doctorat a été réalisé sous les directions de Boris Adamczewski et Luca Zamboni, tous deux chercheurs à l'UCBL. Le thème général abordé est la combinatoire des mots, sous la forme de deux contributions, l'une concernant la théorie de Ramsey développée dans la première partie, et l'autre la classe des mots sturmiens développée dans la seconde partie.

La combinatoire des mots est un domaine à la croisée des mathématiques, et plus généralement des sciences. Avec l'essor de l'informatique théorique, ou encore des progrès de la génétique, l'étude des suites de symboles est devenu un sujet de recherche incontournable à l'importance grandissante. Les mots vus comme suites de symboles sont en effet intrinsèquement soumis à des lois mathématiques d'une profonde subtilité. L'exemple historique d'Axel Thue d'un mot infini sans facteurs carrés sur un alphabet à trois lettres a été un des points de départ de cette théorie, via une construction non-triviale d'un mot infini soumis à une condition pourtant très simple en apparence. Que ce soit dans la structure des décimales des nombre réels, dans les codes informatiques omniprésents dans le fonctionnement des ordinateurs, ou dans notre propre code génétique, la combinatoire des mots fournit un cadre commun pour une étude en profondeur de problématiques actuelles.

Le présent doctorat s'inscrit naturellement dans ce processus scientifique. Directement inspiré par les travaux fondateurs d'Axel Thue, nous étudions dans la première partie les conditions d'existence d'objets combinatoires (en outre, des colorations) soumis à des contraintes d'apparence simples, et nous apportons une réponse optimale à une conjecture qui est restée ouverte pendant une décennie. Cette solution exploite les différences et liens entre les notions naturelles de préfixe et de suffixe en combinatoire des mots. Notre seconde partie, quant à elle, étudie une version infinie du système de numération d'Ostrowski, à l'aide des mots de basse complexité donnés par les mots infinis non-ultimement périodiques de plus petite fonction de complexité que sont les mots sturmiens. Construit d'une manière analogue aux nombres p-adiques, le formalisme introduit et développé concernant les intercepts formels en vue de donner une description combinatoire de la classe des mots sturmiens a pour conséquences plusieurs résultats concernant les factorisations de ces mots. Le calcul des compléments étudié à la fin de cette partie montre comment la comparaison des opérations de préfixe et de suffixe peut être utilisée pour obtenir des résultats non-triviaux concernant les factorisations des mots de basse complexité.

La première contribution de ce doctorat étudie les limites de la théorie de Ramsey dans le contexte de la combinatoire des mots. Les résultats de facture dynamiques ou ergodiques provenant de la théorie de Ramsey se trouvent parfois en défaut dans le contexte de la combinatoire des mots, qui est nécessairement plus rigide. Est démontré en outre le théorème de la factorisation monochromatique, problème qui a été ouvert pendant plusieurs années, et dont la solution se révèle particulièrement simple. Il s'énonce ainsi, on réfère ce théorème à la publication [166] :

Théorème (Factorisation monochromatique)
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. Alors le mot x est périodique si et seulement si pour toute coloration de ses facteurs il admet une factorisation monochromatique.

Dans cette première partie, nous étudions les contours de ce théorème et les divers résultats obtenus dans cette thématique. Nous abordons dans un premier chapitre la classe des mots de Lyndon infinis, dont la structure apparaît dans le théorème de la factorisation monochromatique, que nous relions aux motifs de Zimin via l'introduction de la notion d'orbite de Lyndon. Nous présentons plusieurs résultats permettant un codage diadique des éléments de l'orbite dynamique du mot de Zimin. Dans le second chapitre, nous donnons les principaux théorèmes et résultats issus de la théorie de Ramsey, qui concernent des résultats d'existence de colorations satisfaisant à des conditions de monochromatismes sur les structures discrètes, puis nous donnons l'état de l'art concernant le théorème de la factorisation monochromatique, pour enfin terminer sur sa preuve et ses conséquences. Dans le troisième chapitre, nous introduisons une nouvelle problématique concernant l'existence de factorisations satisfaisant à des contraintes plus fortes que celles du théorème de la factorisation monochromatique et fondée sur le théorème des sommes finies de Hindman. Ce troisième chapitre introduit la notion de longueur consécutive, permettant de mettre en évidence les différences intrinsèques entre les suffixe d'un mot infini et les éléments de son orbite, et par laquelle nous présentons quelques conséquences. Les deux questions concernant des existences de colorations sont systématiquement mises

en parallèle avec les résultats de la théorie de Ramsey, qui dictent dans les deux cas les contraintes auxquelles sont soumises de telles colorations.

La seconde contribution de ce doctorat concerne une étude de la classe des mots sturmiens. Les mots sturmiens sont définis comme des mots de basse complexité et dont la structure peut être décrite à l'aide des fractions continues. Celles-ci permettent, via leurs dénominateurs, de dresser un pont fondamental entre approximation diophantienne et arithmétique. Nous introduisons en outre le formalisme des intercepts formels, permettant de décrire de manière combinatoire les mots sturmiens en tenant compte de leur structure asymptotique. Notre résultat principal s'énonce ainsi :

Théorème (Intercepts formels des mots sturmiens)
Soit x un mot sturmien de pente $\alpha = [0, a_0, a_1, a_2, \cdots]$ décrite par son développement en fraction continue, de continuants $(q_n)_{n\geq -1}$. Alors il existe un unique intercept formel

$$\rho = \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i+1} q_i$$

de la pente α, où les coefficients $(b_i)_{i\geq 1}$ satisfont aux conditions d'Ostrowski, tel que

$$x = T^{\rho}(c_\alpha).$$

Dans cette seconde partie, nous donnons un sens à l'expression définissant l'intercept formel ρ ci-dessus via notre formalisme des intercepts formels, et nous étudions les propriétés et conséquences fournies par le développement de ce point de vue. Dans le premier chapitre de cette partie, quatrième chapitre de ce doctorat, nous rappelons certaines généralités concernant les mots sturmiens, ainsi qu'une construction purement combinatoire du mot caractéristique associé à une pente. Nous étudions ensuite la fonction de répétition pour les mots sturmiens, ainsi que leur graphe des facteurs, dont nous précisons les caractéristiques combinatoires. Dans le chapitre suivant, nous introduisons la définition des intercepts formels et démontrons le théorème central de cette partie stipulant qu'ils sont en bijection naturelle avec l'ensemble des mots sturmien d'une pente donnée. Les liens avec l'approximation diophantienne sont ensuite précisés, via l'étude de divers exposants, dont l'exposant diophantien et l'exposant d'irrationalité. Dans un chapitre final, nous développons le formalisme introduit pour en déduire des résultats de factorisations des mots sturmiens. La notion de complémentaire est alors introduite et nous étudions les propriétés de cette opération. Cette dernière opération et son caractère involutif constituent la démonstration la plus significative issue d'un point de vue comparant les notions de préfixes et de suffixes pour les mots sturmiens, et est à mettre en parallèle avec les résultats correspondant obtenus dans la première partie. Nous terminons ce chapitre par la description et la construction des intercepts formels équivalents à leurs complémentaires, et terminons en énonçant une conjecture les réalisant comme points de 2-torsion pour une loi de groupe sur l'ensemble des classes d'équivalences d'intercepts formels.

Remerciements

Je remercie chaleureusement mes directeurs, Boris Adamczewski et Luca Zamboni, pour avoir encadré mon doctorat pendant ces années de recherches. Outre leurs expertises qui m'ont inspiré pendant tout ce travail, ils m'ont aussi enseigné les principes et valeurs qui incombent au chercheur au travers de leur engagement et leur professionnalisme de tous les instants. N'hésitant pas à prendre du temps et de la patience pour leurs étudiants, ils feront toujours partie des chercheurs qui mettent un point d'honneur à soutenir les jeunes dans leurs parcours professionnels, conscients de la richesse scientifique qu'ils apportent.

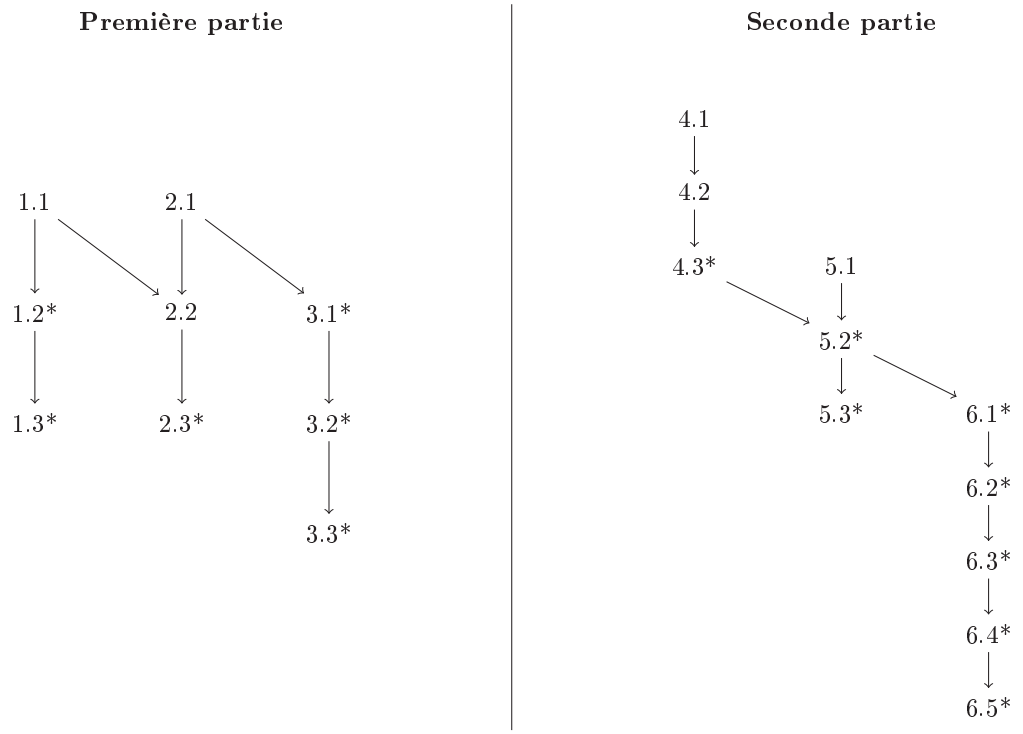
Je remercie aussi les membres du personnel de l'université Lyon 1 dans leurs ensemble, sans qui ce travail n'aurait pas pu voir le jour. Je remercie profondément les membres, permanents ou non, de l'équipe de combinatoire et théorie des nombres, qui ont su m'impliquer dans leurs activités scientifiques tout en me procurant un soutient et une amitié qui, de façon indirecte, a été l'une des clefs de l'aboutissement de ce travail. Je remercie aussi les membres de l'équipe

d'algèbre et géométrie pour leur acceuil et leurs sympathies, ainsi que tous les chercheurs ou scientifiques que j'ai pu rencontrer pendant ces années d'études.

Je remercie aussi tous mes proches pour la confiance qu'ils me donnent chaque jour, et leur soutient indéfectible dans mon parcours de chercheur en mathématiques. Tous ceux qui ont suivi mes avancées, de près ou de loin, avec ou sans inquiétudes, dans les bons comme les mauvais moments, je vous remercie du fond du coeur pour avoir toujours été à mes cotés pendant ce long travail.

Table des matières

Dépendance des sections :



Les sections contenant des contributions et nouveaux résultats sont marquées d'une étoile (*).

Notations et conventions

L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs. Un entier $a \in \mathbb{Z}$ sera dit positif lorsque $a \geq 0$, et strictement positif lorsque $a > 0$. Pour un ensemble A fini, on notera $Card(A)$ son cardinal, c'est-à-dire le nombre d'éléments qu'il contient.

Nous travaillerons pour la plupart du temps avec des intervalles entiers. Pour $a \leq b$, on notera $]a, b[$ (resp. $[a, b[$, $]a, b]$ et $[a, b]$) les intervalles entiers constitués des entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que $a < k < b$ (resp. $a \leq k < b$, $a < k \leq b$ et $a \leq k \leq b$). Nous rencontrerons dans la seconde partie l'ensemble des nombres réels α tels que $0 < \alpha < 1$, et nous éviterons à ce moment là le recourt aux notations d'intervalles réels. Dans la seconde partie, le terme « pente » désignera un nombre réel α, irrationnel, tel que $0 < \alpha < 1$.

La lettre $\mathcal{A}$ désignera toujours un alphabet, c'est-à-dire un ensemble quelconque, dont les éléments sont appelés les lettres. Les alphabets que nous considérons pourront être infinis, et l'hypothèse de finitude sur $\mathcal{A}$ sera toujours précisée le cas échéant. Un mot sur $\mathcal{A}$ désigne un mot fini, c'est-à-dire un élément de la réunion disjointe $\cup_{n\geq 1}\mathcal{A}$. Un tel mot u s'écrit de manière unique $u_1u_2\cdots u_n$ pour un entier $n \geq 1$ et des lettres $(u_i)_{i=1}^n$, l'entier n se note alors $|u|$ et s'appelle la longueur du mot u. On notera $\mathcal{A}^+$ l'ensemble des mots finis sur un alphabet $\mathcal{A}$.

Si $u = u_1u_2\cdots u_n$ est un mot fini sur un alphabet $\mathcal{A}$, on note $\widetilde{u} = u_nu_{n-1}\cdots u_1$ le mot miroir de u. On dit que le mot u est un palindrome, ou qu'il est palindromique, si $u = \widetilde{u}$.

La plupart de nos résultats (factorisations, préfixe commun...), tombent en défaut lorsque le mot vide est considéré au même titre que les mots finis non-vides. Ainsi, par convention ou abus de langage, tout au long de ce doctorat :

le terme « mot » désignera un mot fini non-vide.

De plus, nos résultats s'énonceront souvent par rapport à un mot infini x fixé. On pourra donc supposer que les alphabets considérés sont tous dénombrables.

Un mot infini x sur un alphabet $\mathcal{A}$ désigne un mot infini à droite, et est un élément de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, qui se note $x = x_0x_1x_2\cdots$ où les $(x_i)_{i\geq 0}$ sont des lettres. Deux mots infinis $x = x_0x_1x_2\cdots$ et $y = y_0y_1y_2\cdots$ sont égaux si et seulement si, pour tout $i \geq 0$, $x_i = y_i$.

Un mot bi-infini ω sur un alphabet $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. On dira que deux mots bi-infinis $\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sont égaux lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\omega_{i+k} = \tau_i$. Si $x = x_0x_1x_2\cdots$ et $y = y_0y_1y_2\cdots$ sont deux mots infini, on note

$$\widetilde{y} \cdot x$$

le mot bi-infini $\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ définit par : $\omega_i = x_i$ pour tout $i \geq 0$ et $w_{-i} = y_{i-1}$ pour tout entier $i > 0$.

Pour x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$, on désigne par factorisation de x une expression de la forme

$$x = u_1u_2u_3\cdots$$

où les mots $(u_i)_{i\geq 1}$ sont des mots finis.

On dit qu'un mot v est un préfixe d'un mot u si $v = u$ ou s'il existe un mot fini w tel que $u = vw$. De même on dit qu'un mot w est un suffixe d'un mot fini u si $w = u$ ou s'il existe un mot fini v tel que $u = vw$. Pour $x = x_1x_2x_3\cdots$ un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$ et $n \geq 1$, on note

$$\mathbb{P}_n(x) = x_1x_2\cdots x_n$$

le préfixe de longueur $n \geq 1$ de x. On note

$$T : x = x_1x_2x_3\cdots \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \longmapsto T(x) = x_2x_3x_4\cdots \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$$

l'opérateur de décalage, aussi appelé le shift sur les mots infinis. On désigne par suffixe de x un mot infini de la forme $T^k(x)$ pour un certain $k \geq 0$. Un mot infini y est un suffixe de x lorsque $y = x$ ou qu'il existe un mot fini u tel que $x = uy$, et un mot fini u est un préfixe d'un mot infini x lorsqu'il existe un mot infini y tel que $x = uy$. Pour un mot bi-infini $\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, on désigne par un suffixe de ω tout mot infini de la forme $y = \omega_k\omega_{k+1}\omega_{k+2}\cdots$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. Un préfixe de ω est un mot infini de la forme $x = \omega_k\omega_{k-1}\omega_{k-2}\cdots$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

On considérera l'ensemble $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ comme munit de la topologie produit associée à la topologie discrète sur $\mathcal{A}$. Pour x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$, on note

$$\Omega(x) = \overline{\{T^k(x) \mid k \geq 0\}}$$

et on appellera cet ensemble l'orbite dynamique de x. On désignera par une orbite bi-infinie de x tout mot bi-infini $\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dont tous les suffixes sont des éléments de $\Omega(x)$.

Première partie

Factorisations monochromatiques et périodicité

1

Mots de Lyndon et motifs de Zimin

Ce chapitre présente certaines classes de mots infinis liés à l'ordre lexicographique. Nous présentons les mots de Lyndon, finis et infinis, puis nous introduisons la classe des mots dont l'orbite est de Lyndon. Nous étudions ensuite le mot de Zimin, et nous montrons la propriété remarquable qu'il admet une orbite de Lyndon.

Dans une première section, nous définissons les mots de Lyndon finis, puis nous présentons leur analogues infinis, ces derniers seront ceux que l'on rencontrera dans nos travaux. Le théorème de la factorisation monochromatique faisant intervenir l'ordre lexicographique, il est naturel de considérer les mots de Lyndon qui lui sont naturellement liés. Leur grande importance en combinatoire des mots et leur présence dans plusieurs domaines font d'eux un sujet incontournable au carrefour des interactions mathématiques. Dans la seconde section de ce chapitre, nous introduisons la classe des mots dont l'orbite est de Lyndon. Nous étudions certaines propriétés de cloture vérifiée par cette classe, et nous montrons qu'un mot dont l'orbite est de Lyndon doit nécessairement être défini sur un alphabet infini. La dernière section de ce chapitre présente une étude du mot de Zimin. Nous présentons plusieurs résultats existant concernant la structure de l'ensemble de ses facteurs, puis nous donnons un codage à l'aide des systèmes de numération des éléments de son orbite dynamique. Enfin, nous démontrons que le mot de Zimin admet une orbite de Lyndon.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une présentation lors de la conférence « École de jeunes chercheurs en informatique mathématique », présentée au Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) à Marseille, France.

1.1 Mots de Lyndon

Cette section ne contient pas de nouveaux résultats.

Cette section présente des définitions classiques ainsi que quelques résultats connus sur les mots de Lyndon et ne comporte pas de nouvelle contribution. La propriété principale des mots de Lyndon en lien avec le théorème de la factorisation monochromatique, à savoir le fait qu'ils n'admettent pas de factorisation monochromatique pour la coloration préfixiale, est énoncé dans la section (2.2).

Les mots de Lyndon ont été introduit et étudié par Roger Lyndon [121, 122] en investiguant les bases de groupes libres. Ils apparaissent dans des contextes très divers, on pourra par exemple consulter l'article de C. Hohlweg et C. Reutenauer [95] pour une des réalisations combinatoires des mots de Lyndon.

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet, et $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ un mot fini de longueur $n \geq 1$, où les $(w_i)_{i=1}^n$ sont des lettres. La famille des mots finis

$$w_i w_{i+1} \cdots w_n w_1 w_2 \cdots w_{i-1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n,$$

est nommée la classe de conjugaison de w, et les éléments la constituant sont appelés les conjugués de w, qui sont donc obtenus par permutation cyclique des lettres constituant w.

Lorsque l'alphabet $\mathcal{A}$ est muni d'un ordre total $\leq$, il induit lexicographiquement, pour tout $n \geq 1$, un ordre sur l'ensemble des mots sur $\mathcal{A}$ de longueur n de la manière suivante : pour $u = u_1u_2\cdots u_n$ et $v = v_1v_2\cdots v_n$ deux mots finis distincts de longueur n, on écrit $u < v$ lorsque $u_j < v_j$ où $j = \min\{i \in [1,n] \mid u_i \neq v_i\}$, le minimum étant pris sur un ensemble non-vide puisque u et v ont été supposés distincts. Si $u = u_1u_2\cdots u_n$ et $v = v_1v_2\cdots v_m$ sont de longueurs respectives $n \geq 1$ et $m \geq n$, et que u n'est pas un préfixe de v, alors on pose à nouveau $u \leq v$ lorsque $u_j < v_j$ où $j = \min\{i \in [1,n] \mid u_i \neq v_i\}$. Dans le cas où u est un préfixe de v, on pose alors par convention que $u < v$.

Nous insistons sur ce dernier point. L'ordre lexicographique correspond à « l'ordre du dictionnaire », et il est alors compréhensible que le mot u apparaisse avant le mot v lorsque u est préfixe de v. Cette convention n'est pas si naturelle que ça, en particulier car elle ne dépend pas de l'ordre total dont $\mathcal{A}$ est muni. En particulier on peut même affirmer que, pour deux mots u et v avec $|u| < |v|$, alors u est un préfixe de v si et seulement si u est strictement plus petit lexicographiquement que v pour tout ordre total sur $\mathcal{A}$. En outre, si on considère un ordre total $\leq$ sur $\mathcal{A}$, et son ordre opposé $\leq_o$ défini pour deux lettres $a, b \in \mathcal{A}$ par $a \leq_o b$ si et seulement si $b \leq a$, alors deux mots u et v satisfont à $u \leq v$ et à $u \leq_o v$ pour les ordres lexicographiques associés si et seulement si u est un préfixe de v. Ainsi cette définition de la comparaison lexicographique de deux mots dont l'un est le préfixe de l'autre manifeste une préférence arbitraire pour un sens de l'inégalité $\leq$ qui ne repose sur aucun argument scientifique rationnel autre que le consensus, et est donc bel et bien une « convention d'usage » et n'a rien de canonique. Ce type de convention nous amène donc à éviter de comparer lexicographiquement deux mots lorsque l'un est un préfixe de l'autre, ce qui sera la clef du théorème de la factorisation monochromatique démontré au chapitre 2.

Nous donnons maintenant la définition des mots de Lyndon finis.

Définition 1.1.1 (Mots de Lyndon finis)
On dit qu'un mot fini u sur un alphabet $\mathcal{A}$ est de Lyndon s'il existe un ordre total $\leq$ sur $\mathcal{A}$ pour lequel u vérifie la propriété suivante : pour toute factorisation $u = vw$ où v et w sont des mots finis (non-vides), alors $u < wv$ pour l'ordre lexicographique associé à $\leq$.

Par exemple les mots suivant sur l'alphabet $\{0 < 1\}$ sont de Lyndon : 0, 01, 001, 0001001001.

Nous définissons maintenant les mots de Lyndon infinis, qui forment la classe de mots qui nous intéressera dans ce doctorat. On rappelle que l'on note T l'opérateur de décalage sur les mots infinis, qui prive un mot infini de sa première lettre.

Définition 1.1.2 (Mot de Lyndon infini)
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. Le mot x est dit de Lyndon (infini) s'il existe un ordre total $\leq$ sur $\mathcal{A}$ tel que :

$$\forall n \geq 1, \quad x < T^n(x)$$

pour l'ordre lexicographique associé.

Comme exemple de tel mot, on peut donner par exemple le mot infini

$$0101101110111101111101\cdots = \prod_{i\geq 1} 01^i$$

définit sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0 < 1\}$. D'autres exemples peuvent être construits à l'aide des mots sturmiens (qui sont le sujet d'étude de la seconde partie de ce doctorat, même si nous n'y utiliserons pas cette propriété). Soit f le mot de Fibonacci, égal au mot sturmien caractéristique $c_{1/\varphi}$ de la pente $1/\varphi$ où φ est le nombre d'or, qui peut être défini de la manière suivante :

$$f = \lim f_n = 0100101001001010010100100101001001\cdots \text{ où } f_{-1} = 1,\ f_0 = 0, \text{ et } f_{n+1} = f_nf_{n-1} \text{ pour } n \geq 0,$$

les mots $(f_n)_{n\geq 0}$ étant alors préfixes les uns des autres. Il jouit de la propriété remarquable que les deux mots $0f$ et $1f$ sont de Lyndon sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, munit respectivement des ordres définit par $0 < 1$ d'une part et $1 < 0$ d'autre part. Plus généralement, on peut montrer que pour toute pente α, le mot sturmien caractéristique c_α de la pente α est tel que $0c_\alpha$ et $1c_\alpha$ sont de Lyndon, voir [29]. On renvoit à la seconde partie de ce doctorat pour une étude algébrique des mots sturmiens, mais nous n'aborderons pas leur liens avec les mots de Lyndon.

Nous verrons dans le chapitre 2 que les mots de Lyndon infinis ne peuvent pas se factoriser à l'aide de leurs préfixes, ce qui constituera un exemple remarquable du théorème de la factorisation monochromatique. La preuve du théorème de la factorisation monochromatique se faisant elle-même à l'aide de l'ordre lexicographique, le cas des mots de Lyndon ne forme pas seulement un exemple arbitraire du théorème de la factorisation monochromatique, mais bien une illustration mettant en évidence les liens ténus existant entre les idées de Lyndon et les problèmes de factorisations des mots.

1.2 Mots dont l'orbite est de Lyndon

Cette section contient de nouveaux résultats. Le résultat principal de cette section est le théorème 1.2.2.

Les mots de Lyndon ont été généralisés à plusieurs reprises. Citons d'abord l'étude récente menée par E. Charlier, M. Philibert et M. Stipulanti [55] sur la variante des mots de Lyndon appelés mots de Nyldon. L'étude de A. Carpi, G. Fici, S. Holub, J. Oprsal, M. Sciortino menée dans [48] correspond à une généralisation des mots de Lyndon finis pour lesquels les ordres totaux impliqués dans l'alphabet peuvent varier. Enfin, C. Reutenauer a aussi donné une généralisation des mots de Lyndon dans [150], où c'est l'ordre lexicographique qui est généralisé et construit à partir d'une suite d'ordres totaux sur l'alphabet de base. Nous introduisons dans ce doctorat une nouvelle généralisation des mots de Lyndon, que nous apellons les mots dont l'orbite est de Lyndon.

Notre contribution considère les mots infinis sur un alphabet $\mathcal{A}$ dont tous les suffixes sont de Lyndon pour un ordre lexicographique obtenu à partir d'un ordre total sur l'alphabet $\mathcal{A}$, l'ordre total sur l'alphabet $\mathcal{A}$ étant susceptible de changer en fonction du suffixe considéré.

Définition 1.2.1
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. On dit que l'orbite de x est de Lyndon si tous les suffixes de x sont de Lyndon.

C'est-à-dire que l'orbite d'un mot x est de Lyndon si, pour tout suffixe y de x, il existe un ordre total sur l'alphabet $\mathcal{A}$ tel que y soit un mot de Lyndon infini pour cet ordre. Le point clef est que l'ordre total considéré sur l'alphabet $\mathcal{A}$ pour lequel ce suffixe y soit de Lyndon dépend de y. Un exemple trivial de tel mot est donné par le mot infini

$$L = x_1x_2x_3x_4\cdots$$

définit sur l'alphabet $\mathcal{A}_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Nous exhibons un premier exemple de mot infini non-trivial satisfaisant à la définition 1.2.1 à la fin de ce chapitre.

Le fait qu'il existe des mots de Lyndon infini sur un alphabet (ayant au moins deux lettres) n'est pas si trivial que cela, le seul moyen de le démontrer est de construire un tel mot de Lyndon, ce qui nécessite tout de même un minimum de reflexion, même si trouver un tel exemple ne pose pas de grande difficulté. Ceci suggère déjà que la condition d'être de Lyndon est une condition assez forte. De même, trouver un exemple de mot infini satisfaisant à la définition 1.2.1, n'est pas quelque chose d'évident, surtout en supposant l'alphabet $\mathcal{A}$ fini. En fait, on démontre dans ce doctorat le résultat 1.2.2, qui consiste à montrer qu'il est impossible de contruire un mot dont l'orbite est de Lyndon sur un alphabet fini.

Pour $\mathcal{A}$ un alphabet quelconque, on munit l'ensemble $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ des mots infinis sur $\mathcal{A}$ de la topologie produit induite par la topologie discrète sur $\mathcal{A}$. Pour x un mot infini sur $\mathcal{A}$, on note

$$\Omega(x) = \overline{\{T^k(x) \mid k \geq 0\}}$$

la fermeture topologique de l'ensemble des suffixes de x dans cet espace, et on appelle $\Omega(x)$ l'orbite dynamique de x.

Théorème 1.2.2
Si x est un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$ dont l'orbite est de Lyndon, alors l'alphabet $\mathcal{A}$ est infini.

Preuve. Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$ satisfaisant à la définition 1.2.1. On remarque en premier lieu que x n'est pas ultimement périodique, puisqu'un mot de Lyndon n'est pas périodique et que tous les suffixes de x sont supposés de Lyndon. On suppose par l'absurde que l'alphabet $\mathcal{A}$ est infini. L'espace topologique $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est alors compact, et l'orbite dynamique $\Omega(x)$ admet un élément qui est un mot infini y récurrent, c'est-à-dire dont tous les facteurs apparaissent une infinité de fois. Montrons que ce mot y est définit sur un alphabet infini. On procède par l'absurde en supposant qu'il existe un mot fini u qui est un préfixe de y et dans lequel apparaissent toutes les lettres qui apparaissent dans y. Soient i et j deux entiers naturels distincts tels que u soit préfixe de $T^i(x)$ et de $T^j(x)$. Les deux mots $T^i(x)$ et $T^j(x)$ sont distincts et au moins l'un d'entre eux est donc différent de y, et on suppose sans perte de généralité qu'il s'agit de $T^i(x)$. On considère alors deux lettres distinctes $a, b \in \mathcal{A}$, et un mot v tel que $|v| \geq |u|$, tel que vb soit un préfixe de y et tel que va soit un préfixe de $T^i(x)$. Puisque toutes les lettres apparaissant dans y apparaissent dans u, il existe un mot fini w, éventuellement vide, qui soit un suffixe de u tel que bwa soit un facteur de y et tel que bwb soit un facteur de x. De plus, comme y est récurrent, le facteur bwa apparaissant dans y apparait une infinité de fois dans x. Soit z un suffixe de x dont le mot bwa soit préfixe. Par la définition 1.2.1, le mot z est de Lyndon pour un ordre total $\leq$ sur l'alphabet $\mathcal{A}$. Alors puisque bwa est un préfixe du mot z qui est de Lyndon, par la définition 1.1.2 on a nécessairement $b < a$. D'autre part, comme le facteur bwb apparait une infinité de fois dans le mot x, il est aussi facteur de z. Ceci implique que $bwa < bwb$, et donc, par les propriétés de l'ordre lexicographique, que l'on ait $a < b$, mais ceci est une contradiction. □

On pourrait définir de manière analogue la notion de mot infini dont l'orbite dynamique est de Lyndon, en stipulant qu'il s'agit d'un mot dont tous les éléments de l'orbite dynamique sont de Lyndon. Cependant, nous démontrons dans ce doctorat en tant que contribution que ces deux définitions coincident, et c'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 1.2.3
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. Si x admet une orbite de Lyndon, alors tous les éléments de l'orbite dynamique de x sont de Lyndon. En particulier, tous les éléments de l'orbite dynamique de x admettent une orbite de Lyndon.

Preuve. Vu la définition 1.2.1, la première partie de la proposition 1.2.3 implique bien la seconde. Soit y un élément de l'orbite dynamique de x, montrons qu'il est de Lyndon pour un ordre total sur $\mathcal{A}$. Soit $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que la suite des longueurs des plus longs préfixes communs w_k aux mots y et $T^{u_k}(x)$ soit strictement croissante, et pour tout $k \geq 1$, soit $\leq_k$ un ordre total sur $\mathcal{A}$ tel que $T^{u_k}(x)$ soit de Lyndon pour l'ordre $\leq_k$, selon les définitions 1.1.2 et 1.2.1. On peut supposer sans perte de généralité que l'alphabet $\mathcal{A}$ est dénombrable, constitué des lettres apparaissant dans x. On considère l'alphabet $\mathcal{B}$ constitué des lettres apparaissant dans y. On écrit $\mathcal{B}$ comme la réunion croissante $\mathcal{B} = \cup F_i$ avec $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$, l'ensemble F_i étant l'ensemble des i premières lettres deux à deux distinctes apparaissant dans y. Si l'ensemble $\mathcal{B}$ est fini, cette suite de parties finies est finie, mais cela n'interférera pas dans la suite de la démonstration. Noter qu'une fois la proposition 1.2.3 démontrée, d'après le théorème 1.2.2, cette partie $\mathcal{B}$ ne peut pas être finie.

Pour un ensemble X, on note $Ot(X)$ l'ensemble des ordres totaux sur X, et on considère l'ensemble produit $\Gamma = \prod_{i\geq 1} Ot(F_i)$. On munit cet espace de la topologie produit associée à la topologie discrète sur chacun des ensembles finis $Ot(F_i)$, et l'espace topologique Γ est alors compact, et métrique. Les applications de restrictions induisent une application naturelle injective $Ot(\mathcal{B}) \longrightarrow \Gamma$, et un élément $\leq$ de Γ est dans l'image de cette application si et seulement si, pour tout $1 \leq i \leq j$ la restriction à F_i de la restriction à F_j de $\leq$ coincide avec la restriction à F_i de $\leq$. Ceci montre que l'image de $Ot(\mathcal{B}) \longrightarrow \Gamma$ est fermée, et donc compacte. Il existe donc une extraction de la suite $(u_k)_{k\geq 1}$, c'est-à-dire une application $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante, et un ordre total $\leq$ sur $\mathcal{B}$ tels que, pour tout entier $i \geq 1$, la suite des restrictions à F_i des ordres totaux $\leq_{\psi(k)}$ stationne pour k grand vers la restriction à F_i de l'ordre total $\leq$.

Montrons que y est de Lyndon pour cet ordre, et soit donc $z = T^l(y)$ un suffixe de y, avec $l \geq 0$. Considérons le plus long préfixe w commun à y et $T^l(z)$, et deux lettres distinctes $a, b \in \mathcal{B}$ tels que wa soit préfixe de y et wb soit préfixe de z, et soit $i \geq 1$ un entier tel que toutes les lettres apparaissant dans le préfixe de longueur $|w| + 1 + l$ de y appartiennent à F_i. Par construction de l'extraction ψ, il existe un entier $k \geq 1$ tel que d'une part $|w_{\psi(k)}| \geq |w| + l + 1$, et tel que d'autre part, la suite des restrictions à F_i des ordres totaux $\leq_{\psi(j)}$ avec $j \geq k$ soit constante avec j, égale à la restriction à F_i de $\leq$. Puisque le mot $T^{\psi(k)}(x)$ est de Lyndon pour l'ordre $\leq_{\psi(k)}$ par hypothèse, on a $wa <_{\psi(k)} wb$, et sachant que les lettres présentes dans ces deux mots appartiennent à F_i, et étant donné que la restriction de $\leq_{\psi(k)}$ à F_i coincide avec $\leq$, on en déduit que $wa < wb$, et donc que $y < T^l(z)$ par les propriétés de l'ordre lexicographique. Ainsi, le mot y est bien de Lyndon et la proposition en découle. □

Corollaire 1.2.4
Si x est un mot infini dont l'orbite est de Lyndon, alors tout élément de l'orbite dynamique de x est défini sur un alphabet infini.

Ce corollaire est un critère qui peut permettre de déterminer rapidement si un mot infini n'admet pas d'orbite de Lyndon. Par exemple, le mot

$$x = \prod_{i \geq 1} x_i x_1^i$$

définit sur l'alphabet $\mathcal{A}_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ n'admet pas d'orbite de Lyndon, car son orbite dynamique contient le mot périodique $x_1 x_1 x_1 \cdots$.

1.3 Motifs de Zimin

Cette section contient de nouveaux résultats. Le résultat principal de cette section est le théorème 1.3.7.

Les motifs de Zimin sont des mots finis définis sur un alphabet dont les lettres peuvent être assimilées à des indéterminées. Ils forment une suite de mots finis qui sont préfixes les uns des autres, et on peut ainsi définir à partir d'eux un mot infini, appelé le mot de Zimin. Ce mot est un mot infini défini sur un alphabet infini, et dispose de nombreuses propriétés remarquables. Dans cette section, nous définissons ces mots et donnons plusieurs de leurs propriétés. Nous présentons aussi quelques résultats permettant de coder les éléments de l'orbite dynamique du mot de Zimin à l'aide des nombres 2-adiques.

Les motifs de Zimin ont commencés à être considérés en profondeur en même temps que les différents travaux concernant les motifs inévitables sur les mots infinis. Le thème des motifs inévitable est devenu un sujet incontournable depuis les travaux fondateurs de A. Thue [164, 165], qui a démontré en 1906 l'existence d'un mot infini sans facteurs carrés sur un alphabet à 3 lettres. Plus récemment, en 1992, V. Keränen [100] a démontré que les carrés abéliens étaient évitables sur un alphabet à 4 lettres. La considération des motifs de Zimin provient quant à elle du fait qu'ils sont des motifs inévitables pour les mots définis sur un alphabet fini. Cette propriété fondamentale des motifs de Zimin est présentée dans le livre de M. Lothaire [116]. La question des motifs inévitables est à l'intersection de plusieurs domaines des mathématiques, comme le montrent par exemple de récents travaux de J. Bell et T. Goh [22]. Les motifs de Zimin font partie des motifs qui sont inévitables dans les contextes les plus généraux (les alphabets finis), et sont ainsi très étudiés de par leur structure aux multiples facettes, voir [58, 59, 60]. Une étude des facteurs de Zimin à des fins de compression de données, dont nous présentons certains résultats équivalents ici, est effectuée dans l'article [82].

Définition 1.3.1
On considère l'alphabet infini $\mathcal{A}_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Les motifs de Zimin sont les mots finis $(Z_n)_{n \geq 1}$ constuits à l'aide de la relation de récurrence suivante :

$$Z_1 = x_1, \quad \text{et} \quad Z_{n+1} = Z_n x_{n+1} Z_n \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Les premières valeurs de cette suite de mots sont données par :

$$Z_1 = x_1,\ Z_2 = x_1x_2x_1,\ Z_3 = x_1x_2x_1x_3x_1x_2x_1,\ Z_4 = x_1x_2x_1x_3x_1x_2x_1x_4x_1x_2x_1x_3x_1x_2x_1.$$

Comme nous avons expliqué, les motifs de Zimin sont inévitables sur les alphabets finis. C'est-à-dire que pour tout mot infini x sur un alphabet fini $\mathcal{A}$ et tout $n \geq 1$, il existe un morphisme $\psi : \mathcal{A}_X \longrightarrow \mathcal{A}^+$ non-effaçant (c'est-à-dire dont l'image de chaque lettre est un mot non-vide) tel que $\psi(Z_n)$ soit un facteur de x, voir [116].

Les motifs de Zimin sont préfixes les uns des autres, et cela permet de définir le mot de Zimin comme l'unique mot infini Z sur $\mathcal{A}_X$ tel que les mots Z_n pour $n \geq 1$ soient tous préfixes de Z. Nous donnons différentes caractérisations de ce mot dans la définition suivante.

Définition 1.3.2
Le mot de Zimin Z est défini sur l'alphabet infini $\mathcal{A}_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ par l'une des trois caractérisations suivantes :

1. $Z = \lim Z_n$,
2. $Z = \prod_{k\geq 1} x_{val_2(k)+1}$ *où val_2 est la valuation 2-adique,*
3. *Z est l'unique point fixe du morphisme $\varphi : x_i \in \mathcal{A}_X \mapsto x_1x_{i+1} \in \mathcal{A}_X^+$, pour $i \geq 1$.*

Cette définition montre donc que le mot de Zimin est le point fixe d'un morphisme dont l'image de toute lettre est un mot de longueur 2 (on parle alors de morphisme 2-uniforme). Ce type de propriété est à mettre en parallèle avec l'une des caractérisations des suites automatiques, qui forment une classe de mots infinis aux nombreuses applications arithmétiques. Le lecteur pourra consulter l'ouvrage de référence [8] de J.-P. Allouche et J. Shallit pour une étude en profondeur de cette classe de mots. A noter que le mot de Zimin n'est pas un mot 2-automatique malgré le fait qu'il soit point fixe d'un morphisme 2-uniforme, pour la simple et bonne raison qu'il est défini sur un alphabet infini. Tout comme les mots 2-automatiques, le mot de Zimin est donc profondément relié au système de numération en base 2, et cette remarque pourrait être utilisée pour entreprendre de définir un analogue du mot de Zimin correspondant aux systèmes de numérations dans d'autres bases. Cependant ce type de généralisation impliquerait de privilégier certaines caractérisations ou propriétés du mot de Zimin, et nous n'en proposerons pas dans le présent doctorat. Nous donnons dans la suite de ce chapitre plusieurs propriétés qui mettent en valeurs les liens entre le mot de Zimin et le système de numération en base 2.

Nous présentons maintenant plusieurs résultats conséquences des travaux présentés dans l'article [82] concernant le mot de Zimin. Dans cet article, le mot de Zimin est étudié dans le but d'établir des méthodes de compression de données pour la reconnaissance de motifs dans les suites de symboles. Le théorème 1.3.4 est une réécriture de ces résultats.

Nous donnons une définition des deux suites $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ suivantes, qui nous serviront pour étudier la structure du mot de Zimin.

Définition 1.3.3
Pour $n \geq 1$, on définit les suites de mots $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ par les relations de récurrence suivantes :

— $U_1 = V_1 = x_1$,
— $U_{n+1} = x_{n+1}U_1U_2\cdots U_n$ *pour $n \geq 1$,*
— $V_{n+1} = V_nV_{n-1}\cdots V_1x_{n+1}$ *pour $n \geq 1$.*

On dispose, pour $n \geq 1$, des relations suivantes :
— Z_n est un palindrome, et $\widetilde{U_n} = V_n$,
— $|Z_n| = 2^n - 1$, et $|U_n| = |V_n| = 2^{n-1}$,
— $U_{n+1} = x_{n+1}Z_n$ et $V_{n+1} = Z_nx_{n+1}$. De manière équivalente, $Z_n = U_1U_2\cdots U_n = V_nV_{n-1}\cdots V_1$.
On en déduit en particulier que le mot de Zimin admet la factorisation :

$$Z = \prod_{i\geq 1} U_i.$$

Pour deux parties finies non-vides A et B de $\mathbb{N}^*$, on définit les mots :

$$U_A = \prod_{i\in A}^{\rightarrow} U_i = U_{i_1}U_{i_2}\cdots U_{i_k} \quad \text{où} \quad A = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$$

et

$$V_B = \prod_{j\in B}^{\leftarrow} V_j = V_{j_k}V_{j_{k-1}}\cdots V_{j_1} \quad \text{où} \quad B = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_k\}$$

où l'on voit par exemple que $U_n = U_{\{n\}}$ pour $n \geq 1$.

Pour $n \geq 1$, les suffixes stricts de U_n sont tous de la forme U_A où $\emptyset \neq A \subset [1, n[$. Aussi, pour tout $A \subset [1, n[$, $Z_{n-1} = V_{[1,n[\setminus A}U_A$ et $U_n = x_n V_{[1,n[\setminus A}U_A$.

Par les propriétés de la valuation 2-adique val_2, entre deux occurrences consécutives d'une lettre x_k avec $k \geq 1$ dans Z se trouve au milieu des deux exactement une occurrence d'une lettre x_l avec $l > k$. En effet, si n et m sont deux entiers avec $n < m$ vérifiant $val_2(n) = val_2(m)$, tels que pour tout entiers $n < p < m$ on ait $val_2(p) \neq val_2(n)$, alors l'entier $q = (n + m)/2$ vérifie $val_2(q) > val_2(n)$, et il est unique car entre deux tels entiers se trouverait nécessairement un entier de même valuation 2-adique que n. On définit ainsi le sommet $k(u)$ d'un facteur u de Z par :

$$k(u) = \max\{k \geq 0 \mid x_k \text{ apparaît dans } u\}.$$

Cet entier est caractérisé par la propriété suivante : u est un facteur de $Z_{k(u)}$ mais n'est pas facteur de $Z_{k(u)-1}$, et ceci se voit facilement à l'aide de la définition récursive 1.3.1 des mots Z_n pour $n \geq 1$ et de la définition de Z comme limite des mots Z_n dans la définition 1.3.2. D'après le début de ce paragraphe, la lettre $x_{k(u)}$ n'apparait qu'une seule fois dans un facteur u du mot de Zimin. Pour d'autres points de vue sur le mot de Zimin, on pourra consulter [60]. La démonstration des propriétés suivantes peut être trouvée dans [82], théorème 1.

Théorème 1.3.4
Tout facteur u de Z s'écrit de manière unique sous la forme :

$$u = U_A x_{k(u)} V_B$$

où $A, B \subset [1, k(u)[$.

Pour u et v deux facteurs de Z tels que $k(u) < k(v)$, avec

$$u = U_{A_1}x_{k(u)}V_{B_1} \quad \text{et} \quad v = U_{A_2}x_{k(v)}V_{B_2}$$

où $A_1, B_1 \subset [1, k(u)[$ et $A_2, B_2 \subset [1, k(v)[$, on a :

1. *le mot uv est un facteur de Z si et seulement si $k(u) \notin A_2$ et $B_1 = [1, k(u)[\setminus(A_2 \cap [1, k(u)[)$.*
2. *si le mot uv est facteur de Z alors*
$$uv = U_{A_1\cup\{k(u)\}\cup(A_2\cap]k(u),k(v)[)}x_{k(v)}V_{B_2}$$
3. *le mot u est suffixe de v si et seulement si $k(u) \in B_2$ et $B_2 \cap [1, k(u)[= B_1$. De même, u est un préfixe de v si et seulement si $k(u) \in A_2$ et $A_2 \cap [1, k(u)[= A_1$.*

Le théorème précédent décrit donc de manière bijective les facteurs du mot de Zimin, et ce type de résultat permet de pratiquer des calculs algébriques sur les parties de $\mathbb{N}^*$ en lieux et places des calculs sur les facteurs du mot de Zimin, comme le soulignent les résultats obtenus dans [82].

Corollaire 1.3.5
Soient u, v et w trois facteurs de Z avec $k(u) < k(v) < k(w)$. Alors :

1. *si uv et vw sont facteurs de Z, alors uvw est facteur de Z,*
2. *si uw et vw sont facteurs de Z, alors u est suffixe de v.*

Avec l'introduction dans ce doctorat de la notion de mot dont l'orbite est de Lyndon, et après avoir démontré qu'un tel mot doit nécessairement être défini sur un alphabet infini, nous donnons maintenant un exemple non-trivial de tel mot, donné par le mot de Zimin, décrit dans la définition 1.3.2. Ce type d'exemple fait partie, au même titre que le théorème de Shirshov présenté dans [116], des différents résultats mettant en évidence les liens existant entre les mots de Lyndon et les motifs de Zimin.

La présence de l'ordre lexicographique dans les problèmes de factorisations des mots n'est pas seulement illustrée par les divers résultats de ce chapitre, mais sera aussi mise en évidence dans le chapitre 2 lors de la démonstration du théorème de la factorisation monochromatique.

Le mot de Zimin est un exemple de mot infini dont l'orbite est de Lyndon, ce que l'on montre dans la proposition suivante. On rappelle que $\Omega(Z)$ désigne l'orbite dynamique du mot de Zimin, et peut être décrit dans le cas du mot de Zimin comme l'ensemble des mots infinis sur $\mathcal{A}_X$ partageant les mêmes facteurs que le mot Z.

Lemme 1.3.6
Tout élément Y de l'orbite dynamique $\Omega(Z)$ du mot de Zimin s'écrit de manière unique sous la forme

$$Y = Y_M = \prod_{i \in M} U_i$$

pour une partie infinie M de $\mathbb{N}^*$.

Preuve. On a vu peu après la définition 1.3.3 que

$$Z = \prod_{i \geq 1} U_i.$$

Soit Y un élément de $\Omega(Z)$, que l'on écrit comme limite de facteurs de Z : $Y = \lim w_n$ avec la suite $(k(w_n))_{n\geq 0}$ strictement croissante. Alors en écrivant $w_n = U_{A_n} x_{k(w_n)} V_{B_n}$ par le théorème 1.3.4, puisque pour tout $n \geq 1$, w_n est préfixe de w_{n+1}, on a :

$$Y = \lim_n U_{A_n}, \quad k(w_n) \in A_{n+1} \quad \text{et} \quad A_n = A_{n+1} \cap [1, k(w_n)[,$$

de telle sorte qu'avec la partie infinie

$$\bigcup_{n\geq 0} A_n = \bigcup_{n\geq 0} \{k(w_n)\} \cup (A_{n+1} \cap]k(w_n), k(w_{n+1})[) = M,$$

on ait d'une part $A_n = M \cap [1, k(w_n)[$ pour tout $n \geq 0$ et

$$Y = Y_M = \prod_{i \in M} U_i.$$

La partie infinie M ainsi construite est uniquement déterminée, elle est caractérisée par l'ordre d'apparition des lettres dans Y : Si l'on écrit $M = \{a_1 < a_2 < a_3 < \cdots\}$, et si l'on note $x_k <_Y x_l$ pour $k \neq l$ lorsque la lettre x_k apparait pour la première fois avant la lettre x_l dans Y, alors on a :

$$\begin{aligned}
& x_{a_1} <_Y x_1 <_Y \cdots <_Y x_{a_1-1} \\
<_Y\ & x_{a_2} <_Y x_{a_1+1} <_Y \cdots <_Y x_{a_2-1} \\
<_Y\ & x_{a_3} <_Y x_{a_2+1} <_Y \cdots \\
& \cdots \\
x_{a_{i-1}-1} <_Y\ & x_{a_i} <_Y x_{a_{i-1}+1} <_Y \cdots <_Y x_{a_i-1} \\
<_Y\ & x_{a_{i+1}} <_Y \cdots
\end{aligned}$$

puisqu'après une lettre x_k doit apparaitre le mot $Z_{k-1} = U_1 U_2 \cdots U_{k-1}$ d'après 1.3.1 et 1.3.2. □

Théorème 1.3.7
Le mot de Zimin est un mot dont l'orbite est de Lyndon.

Preuve. Il suffit de montrer que tous les éléments de $\Omega(Z)$ sont de Lyndon. Soit $Y \in \Omega(Z)$, que l'on écrit

$$Y = Y_M = \prod_{i \in M} U_i$$

pour une partie infinie M de $\mathbb{N}^*$ en vertu du lemme 1.3.6 démontré. Ecrivons $M = \{a_1 < a_2 < a_3 < \cdots\}$. On considère sur l'alphabet $\mathcal{A}_X$ l'ordre total $\leq_M$ donné par

$$x_{a_1} <_M x_{a_2} <_M x_{a_3} <_M \cdots <_M x_{a_i} <_M \cdots <_M x_1 <_M x_2 <_M \cdots x_{a_1-1} <_M x_{a_1+1} <_M \cdots <_M x_{a_2-1} <_M x_{a_2+1} <_M \cdots$$

qui est l'unique ordre total sur $\mathcal{A}_X$ dont les restrictions à M et son complémentaire coincident avec l'odre induit par $\mathbb{N}^*$, et tel que les éléments de M soient tous strictement plus petits que les éléments de son complémentaire dans $\mathbb{N}^*$. Montrons que Y_M est de Lyndon pour cet ordre. Pour $k \geq 1$, vu la définition de $\leq_M$, si $T^k(Y_M)$ ne commence pas par la lettre x_{a_1}, alors $Y_M <_M T^k(Y_M)$. Si $T^k(Y_M)$ commence par la lettre x_{a_1}, alors le mot U_{a_1} est préfixe de $T^k(Y_M)$ par la définition 1.3.2, et la lettre qui suit ce préfixe est de la forme x_l avec $l > a_1$. Si $l \neq a_2$, alors $Y_M <_M T^k(Y_M)$, et on est donc ramené au cas où $U_{a_1}U_{a_2}$ est préfixe de $T^k(Y_M)$. En continuant ce raisonnement, on en déduit que tous les mots Y_N pour une partie infinie $N \subset \mathbb{N}^*$ distincte de M sont strictement plus grand que Y_M pour l'ordre $\leq_M$, d'où le résultat. □

L'étude, menée dans le chapitre 3, de la conjecture 3.1.2 de la factorisation super-monochromatique nécessite d'établir les liens et différences entre les suffixes d'un mot infini et les éléments généraux de son orbite dynamique. Nous donnons dans la suite de cette section une description à l'aide des nombres 2-adiques de ces différences pour le cas du mot de Zimin. Nous donnons en particulier une description complète des orbites bi-infinies dont tous les suffixes sont des éléments de l'orbite dynamique du mot de Zimin. Ceci mène à un principe de dualité entre les notions de préfixe et de suffixe d'une orbite bi-infinie. Ce type de résultat est à mettre en parallèle direct avec les résultats obtenus dans la seconde partie de ce doctorat, au travers du théorème 6.3.2. Notre cadre d'étude de la conjecture 3.1.2 de la factorisation super-monochromatique, qui consiste à étudier les différences entre les suffixes d'un mot infini et les éléments de son orbite dynamique, justifie la présence de ce résultat dans ce chapitre de ce doctorat. Nous donnons une description complète et bijective de l'orbite dynamique du mot de Zimin à l'aide du système de numération des entiers en base 2. Ce lien entre le système de numération en base 2 et le mot de Zimin peut être mis en parallèle avec les études existantes des mots automatiques [8], puisque comme nous l'avons souligné à l'occasion de la définition 1.3.2, le mot de Zimin n'est pas loin d'être un mot 2-automatique puisqu'il est point fixe d'un morphisme 2-uniforme. Nous commençons cette étude par une description des préfixes et des suffixes du mot de Zimin à l'aide du système de numération en base 2. Ce type de résultat est à mettre en parallèle avec le résultat 6.2.2.

Proposition 1.3.8
Soit $m \geq 1$, que l'on écrit $m = \sum_{i=0}^{N} b_i 2^i$ en base deux, où les $(b_i)_{i=0}^{+\infty}$ valent 0 ou 1 et sont nuls à partir d'un certain rang. Alors les m-ièmes préfixes et suffixes de Z sont donnés par :

$$\mathbb{P}_m(Z) = \prod_{i=0}^{N}{}^{\downarrow} V_{i+1}^{b_i} \quad \text{et} \quad T^m(Z) = \prod_{i \geq 0} U_{i+1}^{1-b_i}.$$

Preuve. Cette proposition découle des résultats suivant la définition 1.3.3. □

On considère l'anneau des entiers 2-adiques $\mathbb{Z}_2$, défini comme la limite projective des ensembles $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$, muni des morphismes de réduction naturels associés. Un nombre 2-adique γ s'écrit de manière unique $\gamma = \sum_{i \geq 0} b_i 2^i$, où $b_i \in \{0, 1\}$ pour tout $i \geq 0$, les opérations d'additions et de multiplications provenant des morphismes de réductions. On considère la relation d'équivalence sur les nombres 2-adiques donnée par le quotient par le groupe additif des entiers relatifs, c'est-à-dire que deux nombres 2-adiques seront dits équivalents s'ils sont égaux à un entier relatif près. Si l'on considère deux entiers 2-adiques qui ne sont pas des entiers relatifs $\gamma = \sum b_i 2^i$ et $\rho = \sum c_i 2^i$, dire qu'ils sont équivalents revient à dire que $b_i = c_i$ pour tout $i \geq 0$ assez grand. D'autre part, dire que $\gamma = \sum b_i 2^i$ n'est pas un entier naturel revient à dire que $b_i \neq 0$ pour une infinité d'indice $i \geq 0$.

Définition 1.3.9
Soit $\gamma = \sum_i b_i 2^i$ un nombre 2-adique. Si γ n'est pas un entier naturel, on définit le mot infini :

$$\widetilde{\mathbb{P}}_\gamma(Z) = \prod_{i\geq 0} U_{i+1}^{b_i}.$$

D'autre part, si $-1-\gamma$ n'est pas un entier naturel, on définit le mot infini

$$T^\gamma(Z) = \prod_{i\geq 0} U_{i+1}^{1-b_i} = \widetilde{\mathbb{P}}_{\overline{\gamma}}(Z),$$

où $\overline{\gamma} = -1-\gamma = \sum(1-b_i)2^i$ est appelé le complémentaire de γ.

Le terme « complémentaire » enployé se justifie par la relation

$$\overline{\sum_{i\in A} 2^i} = \sum_{i\in A^c} 2^i$$

où $A \subset \mathbb{N}$ est de complémentaire infini, et où A^c désigne le complémentaire $\mathbb{N}\backslash A$ de A dans $\mathbb{N}$. Nous rencontrerons dans le chapitre 6 une notion similaire concernant les mots sturmiens et le système de numération d'Ostrowski.

Proposition 1.3.10
Soit $\gamma = \sum_i b_i 2^i$ un nombre 2-adique, qui n'est pas équivalent à 0. On a la relation de réciprocité :

$$T^{\overline{\gamma}}(Z) = \widetilde{\mathbb{P}}_\gamma(Z).$$

De plus, le mot bi-infini

$$\widetilde{T^{\overline{\gamma}}(Z)} \cdot T^\gamma(Z)$$

est une orbite de Zimin, au sens où tous ses suffixes sont des éléments de $\Omega(Z)$.

En particulier, l'ensemble des orbites bi-infinies du mot de Zimin est en bijection naturelle avec l'ensemble des classes d'équivalence non-nulles des nombres 2-adiques modulo l'ensemble des entiers relatifs.

Preuve. La relation de réciprocité s'obtient par le fait que l'application $\gamma \in \mathbb{Z}_2 \mapsto -1-\gamma = \overline{\gamma} \in \mathbb{Z}_2$ est une involution, qui laisse stable l'ensemble des nombres 2-adiques qui ne sont pas équivalents à 0. Vu que, pour toute les familles finie $(b_i)_{i=0}^N$, le mot

$$Z_{N+1} = \prod_{i=0}^{N\downarrow} V_{i+1}^{1-b_i} \cdot \prod_{i=0}^{N\uparrow} U_{i+1}^{b_i} = \mathbb{P}_m(Z)\widetilde{\mathbb{P}}_p(Z)$$

est un facteur de Z, où m et p sont deux entiers tels que $m+p = 2^N-1$, le mot bi-infini

$$\left(\lim_N \prod_{i=0}^{N\downarrow} V_{i+1}^{1-b_i}\right)^{\sim} \cdot \lim_N \prod_{i=0}^{N\uparrow} U_{i+1}^{b_i}$$

est une orbite de Zimin. □

Perspectives

Nous présentons ici certaines perspectives du travail effectué dans la thématique des mots de Lyndon et des motifs de Zimin. Ces questions n'ont pas pu être encore élucidées, et mériteraient une recherche plus approfondies.

Nous avons étudié et démontré plusieurs résultats concernant le mot de Zimin, qui apparait alors comme un mot infini disposant de nombreuses propriétés remarquables. Il est aussi clair, par nos résultat, que le mot de Zimin est profondément lié au système de numération en base 2. Il est alors naturel de se poser la question s'il existe un mot infini présentant des propriétés analogues au mot de Zimin, mais qui soit lié au système de numération en base 3, ou plus généralement aux systèmes de numération en base N quelconque, ou plus généralement aux systèmes de numération généraux.

Question 1
Existe-t-il un analogue du mot de Zimin pour d'autres systèmes de numérations ?

On pourrait par exemple penser au système de numération d'Ostrowski, étudié en profondeur dans la seconde partie de ce doctorat. Compte tenu des propriétés 1.3.10 et 6.3.2, on pourrait être tenté de penser que le mot de Zimin est au système de numération en base 2, ce que sont les mots sturmiens au système de numération d'Ostrowski. Cependant, cela nécessite donc de considérer que les mots sturmiens, qui sont définis sur un alphabet à deux lettres, sont un analogue du mot de Zimin, et donc de nombreuses propriétés remarquables du mot de Zimin seraient en défaut de ce point de vue.

Notre résultat stipulant que le mot de Zimin est un mot infini dont l'orbite est de Lyndon soulève de nombreuses questions. Cette propriété remarquable ne peut pas être une caractérisation du mot de Zimin, puisque rien que tous les éléments de son orbite dynamique vérifient la propriété d'avoir une orbite de Lyndon. Parmis les propriétés importantes du mot de Zimin, on trouve évidemment le fait qu'il soit définit sur un alphabet infini, impliqué par le fait que son orbite soit de Lyndon comme nous l'avons établi dans ce doctorat, mais aussi le fait que les occurrences d'une même lettre sont séparés par des écarts constants. Cette dernière propriété est remarquable, car un mot infini satisfaisant à cette propriété et défini sur un alphabet fini est nécessairement périodique, ce qui n'est évidemment pas le cas du mot de Zimin. On citera aussi la propriété que le mot de Zimin Z n'admet aucune extension à gauche, c'est-à-dire que pour toute lettre a, le mot aZ n'a pas les même facteurs que le mot de Zimin. On se pose donc tout naturellement la question :

Question 2
Quelles sont les propriétés du mot de Zimin qui le caractérisent ? Peut-on trouver un ensemble minimal de propriétés le caractérisant ?

Répondre à cette question reviendrait à mettre en évidence la pertinence intrinsèque de ce mot infini aux nombreuses propriétés remarquables. Peut-on trouver une propriété d'extrémalité, de nature combinatoire, qui caractériserait le mot de Zimin ?

Parmis les énoncés que nous obtenons, la dualité entre les préfixes et les suffixes du mot de Zimin obtenus dans le théorème 1.3.10, mettant en jeu les nombres 2-adiques, pourrait être généralisée à des mots infinis profondéments liés aux systèmes de numération dans d'autres bases. Les mots p-automatiques, où p est premier, étant reliés au système de numération en base p, pourraient donc vérifier un tel résultat. Ceci nous permettrait de comprendre la structure algébrique des orbites bi-infinies des mots p-automatiques.

Question 3
Peut-on trouver une généralisation du théorème 1.3.10 pour les mots automatiques ?

Ce type de généralisation pourrait apporter une meilleure compréhension des aspects dynamiques, arithmétiques et combinatoire des mots p-automatiques. Leurs liens avec les nombres p-adiques pourrait ainsi voir sa branche combinatoire se développer, et ceci pourrait mener à des constructions explicites de mots automatiques vérifiant des propriétés combinatoires particulières. Ceci pourrait permettre de classifier les mots p-automatiques suivant la structure de leur orbite dynamique, ce qui permettrait une compréhension plus générale de cette classe de mot.

Notre étude des mots dont l'orbite est de Lyndon peut aussi être étendue. On peut tout d'abord se poser naturellement la question de savoir caractériser les mots dont l'orbite est de Lyndon. On peut penser à une caractérisation en termes d'évitements de motifs : un mot infini contenant le motif $xyxx$ ne peut pas avoir une orbite de Lyndon, mais ce type de propriété peut-elle caractériser les mots dont l'orbite est de Lyndon ? Le mot de Zimin lui-même est un mot infini sans facteurs carrés, ce qui le rends potentiellement très spécifique.

Question 4
Peut-on donner une caractérisation des mots dont l'orbite est de Lyndon ?

On a vu que le mot de Zimin est lui-même le point fixe d'un morphisme. Une question naturelle qui se pose alors est de savoir le niveau de décidabilité de la question, pour un mot morphique, de savoir s'il admet une orbite de Lyndon. La théorie des mots morphiques dont l'orbite est de Lyndon est-elle une théorie du second ordre ? ou plus ? Le mot infini

$$\prod_{n\geq 1} x_{s_2(n)},$$

où s_2 est la fonction somme des coefficients en base 2, admet-il une orbite de Lyndon ?

Le point de vue que nous introduisons à travers la notion de mot dont l'orbite est de Lyndon, s'inscrit tout naturellement dans la théorie de l'ordre. Du point de vue de cette théorie, une question naturelle serait d'essayer de déterminer quels sont les ordres totaux sur l'alphabet infini considéré qui peuvent être impliqués dans de tels résultats. Existe-il un lien entre l'ordre d'apparition des lettres dans un mot infini dont l'orbite est de Lyndon et les ordres totaux pour lesquels ses suffixes sont de Lyndon ? Nous établissons dans nos résultats que le mot de Zimin est un mot dont l'orbite est de Lyndon, et les ordres que nous obtenons sur les éléments de son orbite dynamique qui ne sont pas ses suffixes sont des ordres de type 2, c'est-à-dire sont obtenus comme un recollement croissant de deux ordres isomorphes à $\mathbb{N}$.

Question 5
Peut-on classifier ou décrire à isomorphisme près les ordres pour lesquels les suffixes d'un mot dont l'orbite est de Lyndon sont de Lyndon ? Peut-on mener une telle étude pour tous les éléments de son orbite dynamique ?

Cette question s'inscrit dans la continuité de nos résultats puisque nous avons déjà établi que tous les éléments de l'orbite dynamique d'un mot dont l'orbite est de Lyndon ont une orbite de Lyndon. Il est aussi possible de considérer la suite des ordres pour lesquels les suffixes d'un mot dont l'orbite est de Lyndon sont de Lyndon, et de la voir comme une suite de symboles. Existe-il un mot dont l'orbite est de Lyndon, pour lequel la suite des ordres totaux sur l'alphabet pour lesquels ses suffixes sont de Lyndon soit une suite dont l'orbite est de Lyndon ?

2

Théorème de la factorisation monochromatique

Ce chapitre présente le théorème de la factorisation monochromatique, principale contribution présentée dans cette première partie de doctorat. Il s'énonce de la manière suivante, et est l'objet de la publication [166] :

Théorème (Factorisation monochromatique)
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. Alors le mot x est périodique si et seulement si, pour toute coloration de ses facteurs il admet une factorisation monochromatique.

Nous présentons dans ce chapitre la démonstration de ce résultat ainsi que son inscription dans les problématiques de la théorie de Ramsey. Ce théorème est à mettre en parallèle avec le fait que pour tout mot infini x et toute coloration de ses facteurs, le mot x admet un suffixe ayant une factorisation monochromatique. Ainsi, le théorème de la factorisation monochromatique met en évidence les limites de la théorie de Ramsey dans le contexte de la combinatoire des mots.

La première section de ce chapitre donne les énoncés de résultats issus de la théorie de Ramsey que nous utilisons dans ce chapitre et le suivant. Nous présentons les théorèmes de Ramsey et de Hindman, en donnant plusieurs mises en contexte des problèmes de colorations. La seconde section se concentre sur les liens entre la théorie de Ramsey et la combinatoire des mots. Nous insistons dans notre présentation sur les constructions explicites de colorations vérifiant des propriétés remarquables, et nous donnons plusieurs résultats partiels qui ont précédé le théorème de la factorisation monochromatique. Dans la suite de cette section, nous faisons le lien entre le théorème de la factorisation monochromatique et les mots de Lyndon avec l'exemple important de la coloration préfixiale. Nous donnons aussi une application du théorème de Ramsey, qui représente l'apport de la théorie de Ramsey aux problème de factorisations des mots. La troisième section fournit enfin la démonstration du théorème de la factorisation monochromatique, et présente diverses conséquences directes de ce résultat.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de deux publications, « Monochromatic factorisations of words and periodicity », dans la revue Mathematika, ainsi que le chapitre « Colouring problems for infinite words », chapitre de Sequences, Groups and Number Theory (éd. Cambridge). Les résultats démontrés comme contribution principale de cette première partie de doctorat ont aussi donné l'opportunité à Luca Zamboni de les présenter lors de la conférence « Ramsey theory of equations and related topics », à l'Université de Pise, Italie, en présence de spécialistes de la théorie de Ramsey. Les deux publications concernées admettent Luca Zamboni comme co-auteur.

2.1 Théorie de Ramsey

Cette section ne contient pas de nouveaux résultats.

La théorie de Ramsey, trouvant son origine dans les travaux de F. Ramsey [146], mathématicien ayant apporté beaucoup de contributions à des domaines variés allant de la combinatoire à la logique, étudie dans des contextes

divers et multidisciplinaires les problèmes de colorations sur des structures, discrètes ou continues. Une coloration sur un ensemble quelconque est simplement une application dont l'image est un ensemble fini, qui est souvent considéré comme l'ensemble des couleurs. Très souvent (mais pas toujours), cet ensemble est à considérer comme un ensemble sans structure, où les « couleurs » sont effectivement interchangeables, et même leur nom n'a alors pas d'importance. La théorie de Ramsey propose un cadre théorique pour étudier ces objets, constitué par de nombreux résultats à l'intersection de différents domaines des mathématiques. Elle fait autant appel à des méthodes de théorie ergodique, des méthodes de théorie des graphes, de théorie des groupes, ou de théorie des nombres, et admet de nombreux développements en théorie de la complexité. On pourra consulter [141] pour une introduction à la théorie de Ramsey, et [146] pour l'article historique de F. Ramsey.

Le type de question que se pose la théorie de Ramsey concerne l'existence ou la non-existence de colorations satisfaisant à certaines propriétés soit de monochromatisme, c'est-à-dire étant constante sur un sous-ensemble particulier de son ensemble de définition, ou de non-monochromatisme, qui stipulent qu'une coloration soit soumise à des restrictions impliquant de manière nécessaire l'apparition de couleurs différentes. La classe des graphes bi-partis peut par exemple être décrite dans le contexte de la théorie de Ramsey comme étant la classe des graphes tels qu'il existe une coloration à deux couleurs sur l'ensemble de leur sommet, telle que deux sommets reliés par une arrête soient de couleurs différentes. Ce type de cadre permet de considérer très facilement des graphes qui seraient par exemple tri-parti, c'est-à-dire satisfaisant à la même condition mais avec une coloration à trois couleurs.

De manière générale, les questions d'existence de colorations peuvent mener à l'utilisation d'outils mathématiques d'une grande diversité. On pourra autant invoquer différentes notions de densité sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ par exemple, donnant lieu à de nombreuses applications des théories ergodiques et dynamiques, ou encore des outils beaucoup plus algébriques faisant intervenir des groupes d'automorphismes de graphes. La question par exemple de savoir, étant donné un graphe G, quel est le nombre minimum de couleurs que doit posséder une coloration sur l'ensemble de ses sommets telle que deux sommets reliés par une arrête ne soient pas de la même couleur, conduit à la définition du nombre chromatique $\chi(G)$ du graphe G. La considération de cette quantité mène à de nombreux développements, où l'on essaie par exemple d'en donner des encadrements dépendants de propriétés facilement accessibles du graphe, et admet des applications concrètes concernant par exemple les structures de réseaux, avec de multiples conséquences et interactions scientifiques. Du nombre chromatique d'un graphe on peut aussi trouver diverses variantes, comme l'indice chromatique qui est défini à partir de colorations sur l'ensemble des arrêtes d'un graphe, ou encore on peut considérer le polynome chromatique d'un graphe. Voir [109, 157] pour des exposés généraux concernant ces problématiques en lien avec la théorie des graphes.

La théorie de Ramsey en elle-même utilise cependant beaucoup de raisonnements sur les ensembles, à l'aide d'outils de base. On peut ainsi la voir comme une théorie étendant et développant le résultat mathématique fondamental que représente le principe des tiroirs de Dirichlet. Le premier résultat de cette théorie, le théorème de Ramsey, utilise dans sa démonstration de manière clef le principe des tiroirs. Nous utiliserons le théorème de Ramsey 2.1.1 pour en déduire des conditions d'existence de factorisations sur les mots infinis dans tout ce chapitre 2. Le théorème de Hindman 2.1.2 sera quant à lui utilisé dans le chapitre 3, pour donner le cadre de la théorie de Ramsey pour notre étude de la conjecture de la factorisation super-monochromatique.

Pour un entier $k \geq 1$ et un ensemble X, on note $\mathcal{P}_k(X)$ l'ensemble des parties à k éléments de X. Etant donné une partie $Y \subset X$ et une coloration C de $\mathcal{P}_k(X)$, la coloration induite $\widetilde{C}$ de $\mathcal{P}_k(Y)$ est la coloration définie par $\widetilde{C}(A) = C(A)$ pour $A \subset Y$. Voir [146], théorème A.

Théorème 2.1.1 (Ramsey infini)
Soit $k \geq 1$. Pour toute coloration de $\mathcal{P}_k(\mathbb{N})$, il existe une partie infinie $M \subset \mathbb{N}$ telle que l'ensemble $\mathcal{P}_k(M)$ soit monochromatique pour la coloration induite.

Le théorème de Ramsey, présenté ici sous sa forme infini, admet de nombreux développements et applications. Par exemple on peut en déduire que de toute suite réelle on peut en extraire une suite croissante ou une suite décroissante. On cite aussi souvent le principe suivant comme application de ce théorème : parmis six personnes on peut nécéssairement en trouver trois qui soit se connaissent mutuellement, soit ne se connaissent pas du tout. En fait, la version finie du théorème de Ramsey, que nous n'utiliserons pas dans ce doctorat, stipule que pour tout nombre $c \geq 2$ de couleurs, et tout entiers $k \geq 1$ et $m \geq 1$, il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour toute coloration à c couleurs

sur l'ensemble $\mathcal{P}_k([1,N])$, il existe une partie $M \subset [1,N]$ de cardinal m tel que $\mathcal{P}_k(M)$ soit monochromatique pour la coloration induite. Aux nombres c, k et m fixés, le plus petit entier $N \geq 1$ satisfaisant à cette propriété est apellé un nombre de Ramsey, et on le notera $Ram(c,k,m)$. Certains nombres de Ramsey sont connus, mais ils restent très difficiles à calculer. L'exemple selon lequel parmis six personnes on peut en trouver trois qui se connaissent ou ne se connaissent pas consiste en la valeur $Ram(2,2,3) = 6$. Pour voir qu'en effet $Ram(2,2,3) \geq 6$, il suffit de considérer l'exemple de cinq personnes jouant au tarot, et qui, lorsque placés en cercle autour d'une table pour jouer à leur jeu préféré, ne connaissent que leurs deux voisins. On connait d'autre part la valeur $Ram(2,2,4) = 18$. Erdös et Szekeres [73, 74] ont obtenu des encadrements du type

$$C_1 m\sqrt{2}^m \leq Ram(2,2,m) \leq C_2 \frac{4^m}{\sqrt{m}}$$

pour tout $m \geq 2$ et des constantes positives C_1 et C_2, qui n'ont pas été significativement améliorées depuis leurs travaux. Ces méthodes, de nature non-constructive, sont basées sur des techniques probabilistes qui ont été parmis les travaux fondateurs de ce point de vue en combinatoire des graphes.

Les déterminations explicites des valeurs des nombres de Ramsey sont pour la plupart extrêmement difficiles, et les calculs impliqués sont d'une grande complexité, et quasiment toutes les valeurs connues concernent deux couleurs. Pour plus de couleurs, on connait essentiellement uniquement la valeur

$$Ram(3,2,3) = 17.$$

Pour voir que cette valeur est un majorant, on considère un graphe complet dont les arrêtes sont colorées avec trois couleurs et qui ne contient aucun triangle monochromatique. On sélectionne un sommet parmis les plus méritant, puis une couleur par un procédé démocratique choisi aléatoirement, et on considère l'ensemble des sommets du graphe relié à notre sommet fixé par une arrête de la couleur choisie. Ces sommets ne peuvent pas être reliés entre eux par une arrête de la couleur fixée, et vu la valeur $Ram(2,2,3) = 6$, on en déduit que tout sommet du graphe complet considéré admet au plus 5 voisins auxquels il est relié par une même couleur, et vu que l'on considère le problème à trois couleurs, un sommet de ce graphe complet a au plus $3 \cdot 5 = 15$ voisins, et donc que le graphe admet au plus 16 sommets, et ceci démontre que $Ram(3,2,3) \leq 17$. Pour voir que cette valeur est atteinte, on construit une coloration sur les arrêtes du graphe complet à 16 sommets de la manière suivante. On considère le corps fini $\mathbb{F}_{16}$, dont chaque élément représente un sommet du graphe, et on considère le sous-groupe H de $\mathbb{F}_{16}^*$ formé par les cubes, de telle sorte que le quotient $\mathbb{F}_{16}^*/H$ soit un groupe de cardinal 3. On colorie alors une arrête $a \longleftrightarrow b$ entre deux éléments distincts de $\mathbb{F}_{16}$ comme la classe dans ce quotient de l'élément $a - b$. Alors le graphe ainsi construit munit de cette coloration n'admet pas de triangle monochromatique. Pour démontrer cela, il suffit d'établir que dans $\mathbb{F}_{16}$, l'équation $x^3 + y^3 = 1$ n'admet aucune solution où les inconnues x et y sont toutes deux non-nulles, ce qui implique déjà que l'on ne peut pas avoir $x^3 = 1$. Puisque $\mathbb{F}_{16}$ est de caractéristique 2, et que $x^{15} = y^{15} = 1$:

$$(x^3 + y^3)^4 = 1 = x^{12} + y^{12} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$$

d'où l'on tire successivement

$$1 = x^3 + y^3 = x^3 y^3, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = 1, \quad x^6 + x^3 + 1 = 0 \quad \text{puis} \quad x^9 = 1$$

et puisque $\mathbb{F}_{16}^*$ est d'ordre 15 on en déduit que $x^3 = 1$, et cela forme une contradiction. Ceci démontre que $Ram(3,2,3) > 16$ et on en déduit la valeur exacte $Ram(3,2,3) = 17$.

Nous présentons maintenant un second théorème issue de la théorie de Ramsey, démontré par N. Hindman [89]. Comme pour le théorème de Ramsey, il garantit l'existence pour toute coloration d'une partie infinie satisfaisant à une hypothèse de monochromatisme. Ce théorème profond de la théorie de Ramsey, admet une preuve beaucoup plus difficile que le théorème de Ramsey. Comme pour le théorème de Ramsey, on peut définir des « nombres de Hindman », qui sont définis comme des plus petits entiers pour lesquels on peut garantir que l'on peut trouver une partie d'une certaine taille qui soit monochromatique. Les nombres de Hindman sont cependant beaucoup plus difficiles à majorer que les nombres de Ramsey, et les majorant obtenus sont en général des fonctions à croissance extrêmement rapides.

Pour un ensemble X, on note $\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des parties finies de X. Lorsque $A, B \in \mathcal{P}_f(X)$, on note $A < B$ pour signifier que $\max A < \min B$. Voir [89], théorème 9.

Théorème 2.1.2 (Hindman)
Les propriétés suivantes sont vérifiées.

i) Pour toute coloration de $\mathbb{N}$, il existe une partie infinie $M = \{m_1 < m_2 < m_3 < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$ telle que la famille

$$(m_{n_1} + m_{n_2} + \cdots + m_{n_k})_{k \geq 1, n_1 < n_2 < \cdots < n_k}$$

soit monochromatique.

ii) Pour toute coloration de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, il existe une partie infinie $M = \{A_1 < A_2 < A_3 < \cdots\}$ de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ telle que la famille

$$(A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \cdots \cup A_{n_k})_{k \geq 1, n_1 < n_2 < \cdots < n_k}$$

soit monochromatique.

Voir [89] pour la démonstration originale de ce résultat, et [19] pour une preuve plus concise. Les deux énoncés *i*) et *ii*) du théorème 2.1.2 sont en fait équivalents, le lien entre les deux s'établissant à l'aide de la correspondance bijective entre les entiers et les parties finies de $\mathbb{N}$ donnée par les coefficients de l'écriture d'un entier en base 2.

Nous utiliserons le théorème de Hindman au chapitre 3, lorsque nous étudierons le problème de la factorisation super-monochromatique. Le théorème de Hindman admet de nombreuses conséquences et applications, dans les domaines par exemple de la combinatoire, des probabilités ou de la logique. Le théorème de Hindman concerne les sommes finies d'un ensemble, mais de nombreuses variantes existent. Une conjecture importante de la théorie de Ramsey stipule que pour toute coloration de $\mathbb{N}$, il existerait deux entiers x et y tels que l'ensemble

$$\{x, y, x + y, xy\}$$

soit de cardinal 4 et monochromatique. Ce résultat n'est pas démontré, mais des résultats obtenus par J. Moreira et V. Bergelson [23] montrent que pour toute coloration des entiers $\mathbb{N}$ on peut trouver une paire de la forme $\{x + y, xy\}$ qui soit monochromatique. Les problèmes de la théorie de Ramsey impliquant de « mélanger » les opérations d'additions et de multiplications sont très étudiés et forment des problèmes très souvent ouverts, et les démonstrations de J. Moreira et V. Bergelson utilisent des méthodes ergodiques mettant en évidence les interactions, délicates à traiter, entre les dynamiques des opérations d'additions et de multiplications.

Le théorème de la factorisation monochromatique, démontré dans ce doctorat dans la section (2.4) comme contribution principale de cette première partie, s'inscrit naturellement dans la classe des problèmes de la théorie de Ramsey, en particulier ceux où l'on montre que des variantes des théorèmes classiques de la théorie de Ramsey n'ont pas lieu dans certains contextes. Parmis des problèmes de ce type, on peut citer l'exemple de W. Sierpinski [161] d'une coloration de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ telle qu'il n'existe pas de partie $X \subset \mathbb{R}$ non-dénombrable (infinie) telle que $\mathcal{P}_2(X)$ soit monochromatique. En d'autres termes, le théorème de Ramsey ne s'étend pas pour les ensembles non-dénombrables de $\mathbb{R}$.

Par le théorème de Ramsey, pour toute coloration de $\mathbb{N}$, et pour toute partie infinie $X \subset \mathbb{N}$, il existe une partie infinie $Y \subset X$ telle que l'ensemble

$$(Y + Y) \backslash (2Y) = \{x + y \mid x, y \in Y,\ x \neq y\}$$

soit monochromatique. N. Hindman, I. Leader et D. Strauss ont exhibé dans [93], en utilisant l'hypothèse du continu, une coloration de $\mathbb{R}$ telle qu'il n'existe pas de sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}$ non-dénombrable tel que $(X + X) \backslash (2X)$ soit monochromatique. Le problème d'Owings [133], quant à lui, demande quel est le nombre minimal de couleur d'une coloration satisfaisant à la propriété suivante : pour toute partie infinie $X \subset \mathbb{N}$, la partie $X + X$ n'est pas monochromatique, où

$$X + X = \{x + y \mid x, y \in X\} = (2X) \bigcup (X + X) \backslash (2X).$$

N. Hindman a prouvé l'existence d'une telle coloration à trois couleurs, et le problème d'Owings consiste à déterminer s'il en existe ou non à deux couleurs.

Le théorème de Hindman lui-même présente une forme d'optimalité. En effet, la coloration à deux couleurs obtenue par la réduction modulo 2 de la valuation 2-adique des entiers, fournit une coloration de $\mathbb{N}$ telle que l'ensemble

$$X \bigcup (X + X)$$

ne soit pas monochromatique.

Citons enfin les problèmes de la théorie de Ramsey faisant intervenir des équations algébriques. Le théorème de Rado [91, 92, 143] donne une caractérisation très simple des matrices A de taille $n \times m$ à coefficients entiers telles que l'équation

$$Ax = 0$$

où $x \in (\mathbb{N}^*)^m$ admette pour toute coloration des entiers non-nuls $\mathbb{N}^*$ une solution monochromatique (c'est-à-dire dont tous les coefficients de x sont de la même couleur). Cette condition est équivalente à la condition des colonnes : si on note $c_1, c_2, \ldots, c_m$ les colonnes de la matrice A, alors cette dernière propriété est équivalente au fait qu'il existe une partition $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_p = [1, m]$, avec $p \geq 1$ telle que $\sum_{i \in S_1} c_i = 0$ et $\sum_{i \in S_k} c_i$ est combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire des $(c_l)_{l \in S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{k-1}}$ pour tout $2 \leq k \leq p$ (en particulier cette condition est vérifiable par un algorithme). Dans le théorème de Rado est aussi contenu le fait que si la propriété est satisfaite pour toutes les colorations ayant $r \geq 2$ couleurs, alors elle est vraie pour toutes les colorations. La preuve mets en valeur le fait que, pour cette question, les seules colorations véritablement pertinentes sont constituées par celles distinguant les entiers suivant la valeur de leur derniers digits non-nuls dans une base entière.

Récemment a été démontré par S. Lindqvist et B. Green [85] le fait que pour toute coloration à deux couleurs de $\mathbb{N}^*$, l'équation $x + y = z^2$ admette une solution monochromatique non-triviale (c'est-à-dire avec $(x, y, z) \neq (2, 2, 2)$). Cependant, il existe une coloration à trois couleurs telle que cette équation n'admette pas de solution monochromatique. Pour cela, on colorie dans un premier temps les entiers $i \geq 0$ avec trois couleurs, de telle manière que les trois nombres $i = 0, 1$ et 2 aient des couleurs distinctes, et ensuite par récurrence on colorie $i \geq 3$ d'une couleur qui soit différentes de celles de $\lfloor i/2 \rfloor$ et $\lfloor i/2 \rfloor + 1$. On colorie dans un second temps un entier x comme la couleur premièrement définie de la longueur i de son écriture en base 2. Si on dispose d'une solution de $x + y = z^2$, avec $x \leq y$ qui soit monochromatique et y de longueur $i \geq 3$ en base 2 (en isolant les cas $i = 0, 1$ ou 2), alors la longueur de l'écriture en base 2 de $x + y = z^2$ est comprise entre i et $i + 2$, et donc celle de z entre $\lfloor i/2 \rfloor$, et $\lfloor i/2 \rfloor + 1$, ce qui par construction et hypothèse de monochromatisme est une contradiction.

2.2 Présentation des résultats existants

Cette section ne contient pas de nouveaux résultats.

En 2006, T. Brown énonça la question suivante [40] : Etant donné un mot infini non-périodique, existe-t-il une coloration de l'ensemble de ses facteurs telle qu'il n'admet aucune factorisation monochromatique ? La question a été énoncée à nouveau par Luca Zamboni [170], indépendamment en 2011. Cette question, à laquelle nous répondons de manière optimale dans ce doctorat, s'inscrit naturellement dans la classe des problèmes de la théorie de Ramsey où l'on cherche à construire des exemples et contre-exemples de colorations empêchant l'apparition de sous-structures monochromatiques d'un objet mathématique.

Donnons l'exemple du mot de Thue-Morse

$$TM = 01101001100101101001 0 \cdots$$

défini comme le mot dont le n-ième terme vaut la réduction modulo 2 de la somme des coefficients dans l'écriture en base 2 de $n \geq 0$. Ce mot intervient dans la preuve historique d'Axel Thue de l'existence d'un mot infini sur trois lettres évitant les facteurs carrés, et de nombreux travaux étudient ses propriétés. Constituant un mot 2-automatique parmis les plus classiques, ses nombreuses propriétés se généralisent pour la plupart à la classe des

mots automatiques, soulignant les aspects arithmétiques et dynamiques de cette classe de mots. Le mot de Thue-Morse n'admet pas de factorisation monochromatique pour la coloration $C_{TM,3}$, à trois couleurs, définie pour un facteur u de TM de la manière suivante :

— $C_{TM,3}(u) = \mathbf{0}$ si u est un préfixe de TM terminant par la lettre 0,
— $C_{TM,3}(u) = \mathbf{1}$ si u est un préfixe de TM terminant par la lettre 1,
— $C_{TM,3}(u) = \mathbf{2}$ si u n'est pas un préfixe de TM.

Donnons rapidement la démonstration de ce résultat. Supposons qu'une factorisation $TM = u_1u_2u_3\cdots$ monochromatique existe, où u_1 est un préfixe terminant par exemple par 0. En considérant un indice $i \geq 2$ tel que $|u_i| \leq |u_{i+1}|$, puisque tous les u_i pour $i \geq 1$ sont par hypothèse des préfixes de TM, u_i est un préfixe de u_{i+1}. Mais alors $0u_iu_{i+1}$ contient un chevauchement, c'est-à-dire un facteur de la forme $avava$ où a est une lettre et v un mot fini éventuellement vide. Et il est bien connu que le mot de Thue-Morse n'admet aucun chevauchement, voir [9].

Citons la coloration suivante, à deux couleurs, trouvée par O. Parshina et S. Avgustinovich (non-publiée), pour laquelle le mot TM n'admet pas de factorisation monochromatique. Soit $\mu : 0 \mapsto 01, 1 \mapsto 10$ le morphisme de Thue-Morse, dont TM est point fixe. On dit qu'un facteur u de TM est morphique s'il existe un facteur v (qui est alors unique) de TM tel que $u = \mu(v)$, et on dit qu'un facteur u de TM est riche en la lettre 0 (resp. en la lettre 1) si $|u|_0 \geq |v|_0$ (resp. $|u|_1 \geq |v|_1$) pour tout facteur v de TM avec $|v| = |u|$. On définit la coloration $C_{TM,2}$ pour un facteur u de TM de la manière suivante :

— $C_{TM,2}(u) = C_{TM,2}(v)$ si u est morphique avec $u = \mu(v)$,
— $C_{TM,2}(u) = \mathbf{0}$ si $|u|$ est pair et u est riche en 0,
— $C_{TM,2}(u) = \mathbf{1}$ si $|u|$ est pair et u est riche en 1,
— $C_{TM,2}(u) = \mathbf{0}$ si $|u|$ est impair et u commence par 0,
— $C_{TM,2}(u) = \mathbf{1}$ si $|u|$ est impair et u commence par 1.

Le mot de Thue-Morse TM n'admet pas de factorisation monochromatique pour la coloration $C_{TM,2}$, et la démonstration repose à nouveau sur le fait que le mot de Thue-Morse TM évite les chevauchements.

Pour l'ancienne conjecture de la factorisation monochromatique, nous disposions de quelques résultats partiels. L. Zamboni et A. de Luca [119, 120] ont démontré que la conjecture était vraie pour les mots non-uniformément récurrents sur un alphabet fini, ce qui correspond à un ensemble de mesure pleine pour la mesure produit uniforme. Ils ont aussi établi le résultat pour certaines classes de mots, comme celle des mots sturmiens. V. Salo et I. Törmä [155] ont quant à eux montré la conjecture pour les mots non-périodiques linéairement récurrents, sous la restriction que les facteurs d'une factorisation monochromatique aient des longueurs croissantes. A. Bernardino, R. Pacheco et M. Silva [26] ont montré la conjecture dans le cas des points fixes de morphismes fortement reconnaissables. Cependant ces résultats concernaient des classes restreintes de mots. Dans tous ces résultats partiels, le nombre de couleurs impliquées était plutot élevé, en plus de dépendre des paramètres des mots étudiés. Par exemple, dans le cas du résultat de V. Salo et I. Törmä [155], pour un mot x linéairement récurrent satisfaisant à $|w| \leq K|u|$ pour une constante $K > 0$, pour tout facteur u et tout mot w dans lequel u apparait exactement deux fois, dont une comme suffixe de w, le nombre de couleurs obtenues peut être majoré par la quantité $2+\sum_{i=0}^{K^5-1} 2K^i(K+1)^{2i}$, sous la restriction que les facteurs apparaissant dans une factorisation monochromatique soient de longueur croissante. Dans le cas des points fixes de morphismes fortement reconnaissables est alors obtenue une majoration très grossière, dépendant de l'indice de reconnaissabilité du morphisme. Pour la classe des mots sturmiens, on obtenait cependant une solution à trois couleurs. Au début du présent doctorat, on ne disposait même pas de solution à deux couleurs pour le célèbre mot de Fibonacci.

Dans ce doctorat nous répondons donc de manière optimale à la question de T. Brown, en construisant, pour un mot infini x non-périodique, une coloration à deux couleurs pour laquelle x n'admet pas de factorisation monochromatique. La démonstration met en évidence les différentes symmétries naturelles qu'il existe sur les mots infinis, comme par exemple la symétrie consistant, étant donné un ordre lexicographique sur l'ensemble des mots infinis sur un alphabet $\mathcal{A}$ associé à un ordre total sur $\mathcal{A}$, à considérer l'ordre lexicographique associé à l'ordre total opposé sur $\mathcal{A}$. Ce type de remarque souligne les liens existant entre les idées de Lyndon et le théorème de la factorisation monochromatique.

Nous donnons maintenant une reformulation du théorème de la factorisation monochromatique à l'aide de la notion d'ultrafiltres. On renvoit aux ouvrages [57, 94] pour une étude plus en détails de cette notion mathématique.

Un filtre sur un ensemble X est un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X, vérifiant les conditions suivantes :

— $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$,

— toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$,

— Si $A \subset B \subset X$ et $A \in \mathcal{F}$, alors $B \in \mathcal{F}$.

Noter que la seconde ligne de ces conditions implique la condition $X \in \mathcal{F}$, l'ensemble X étant réalisé comme une intersection indexée sur l'ensemble vide.

Un filtre $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre lorsqu'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

— pour tout $A \in \mathcal{F}$, A ou $X \backslash A$ appartient à $\mathcal{F}$,

— pour toute famille finie $(A_i)_{i=1}^n$ de parties de $\mathcal{F}$, si $\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$, alors il existe un indice $i \in [1, n]$ tel que $A_i \in \mathcal{F}$,

— pour tout filtre $\mathcal{G}$ sur X tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, on a $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Un ultrafiltre $\mathcal{F}$ est dit trivial lorsqu'il existe un élément $x \in X$ tel que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x = \{A \subset X \mid x \in A\}$. L'ensemble des filtres triviaux est donc en bijection naturelle avec X. L'existence d'ultrafiltre non-triviaux n'est possible que sur un ensemble X infini et n'est assurée que par l'axiome du choix et le lemme de Zorn.

On note βX l'ensemble des ultrafiltres sur X, et on le munit de la topologie définie par la base d'ouverts

$$(\{\mathcal{F} \text{ ultrafiltre sur } X \mid A \in \mathcal{F}\})_{A \subset X}.$$

L'ensemble βX est alors un compact séparé pour cette topologie, pour lequel l'ensemble des ultrafitres triviaux est dense, et on peut caractériser βX comme l'unique espace topologique satisfaisant à la propriété universelle suivante : toute application continue $X \to K$ où K est un espace topologique compact séparé, et où X est munit de la topologie discrète, se prolonge de manière unique en une application continue $\beta X \to K$. Cette méthode de compactification s'appelle la compactification de Stone-Čech, pour laquelle une référence est [94].

Si on suppose de plus que X est munit d'une loi de semi-groupe, en plus de la topologie discrète, alors cette loi induit sur βX la loi de semi-groupe donnée par

$$p.q = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \{x \in X \mid \{y \in X \mid xy \in A\} \in q\} \in p\}$$

qui étend celle de X, et pour laquelle la multiplication à droite par un élément de βX est continue et la multiplication à gauche par un élément de X est continue. Un lemme de Ellis-Numakura [94] implique que βX contienne au moins un idempotent pour cette loi, et les parties de X qui appartiennent à un tel idempotent de βX sont caractérisées par la propriété qu'elles contiennent au moins tous les produits finis ordonnés d'une certaine suite d'éléments de X, et ce type de propriété explique pourquoi les ultrafiltres apparaissent dans plusieurs problèmes combinatoires.

Le théorème de la factorisation monochromatique peut ainsi être reformulé en ces termes : un mot infini x sur un alphabet $\mathcal{A}$ est périodique si et seulement si il existe un ultrafiltre dans $\beta\mathcal{A}^+$ dont tous les éléments fournissent un ensemble de facteurs à travers lequel x se factorise. Montrons que cette dernière assertion est équivalente à ce que x admette, pour toute coloration de $\mathcal{A}^+$, une factorisation monochromatique. Pour le sens direct, en partitionnant $\mathcal{A}^+$ selon la réunion finie formée des parties monochromatiques, alors l'ultrafiltre qui existe par hypothèse contient tous les éléments de $\mathcal{A}^+$ d'une certaine couleurs, et par les propriétés fondamentales des ultrafiltres, x admet une factorisation monochromatique. Pour le sens indirect, l'existence d'une factorisation monochromatique pour toute coloration signifie que pour toute partition finie de $\mathcal{A}^+$, x se factorise selon une de ces parties. Si l'on applique le lemme de Zorn à la famille des parties de $\mathcal{A}^+$ telles que toutes leurs partitions finies admettent un membre à travers lequel x se factorise, un élément minimal pour l'inclusion dans cette famille vérifiera la propriété cherchée.

Nous donnons dans la suite de cette section le contexte du théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique. Principale contribution de cette première partie de doctorat, ce résultat fondamental permet de donner une caractérisation en termes de coloration des mots périodiques. La démonstration, faisant intervenir les ordres lexicographiques est dans la continuité naturelle des idées de Lyndon. Nous donnons à ce titre en premier lieu l'exemple 2.2.1 des mots de Lyndon, pour lesquels on se réfère au chapitre 1, et dont nous donnons l'énoncé de la propriété remarquable stipulant qu'ils n'admettent pas de factorisation en terme de leurs préfixes, c'est-à-dire de factorisation monochromatique pour la coloration préfixiale. Cet exemple est loin d'être anodin, puisque dans le cas des mots

de Lyndon, la coloration C_W, définie en 2.3.2 et fournissant la démonstration du théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique, coincide avec la coloration préfixiale. Cet exemple fait donc office de cas particulier fondamental, généralisé à l'ensemble des mots infinis, et dont la considération a mené à la résolution du théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique.

Nous donnons d'abord la définition de la coloration préfixiale. Cette coloration, à deux couleurs, qui consiste, pour un mot infini x fixé, à séparer les mots qui sont préfixes de x et ceux qui ne le sont pas, est une coloration naturelle à considérer, en particulier à la lumière de la résolution dans le cas particulier des mots de Lyndon 2.2.1 et de l'application du théorème de Ramsey donnée dans la proposition 2.2.2. On rappelle que la notation $\mathbb{P}_n(x)$ désigne, pour un entier $n \geq 1$ et un mot infini x sur un alphabet $\mathcal{A}$, le préfixe de longueur n de x. L'idée de considérer séparément les préfixes d'un mot infini x et ses autres facteurs provient de la proposition 2.2.2 et du fait que dans une factorisation d'un mot infini x, le premier terme de la factorisation est nécessairement un préfixe de x, voir [120].

Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. La coloration préfixiale est la coloration $C_{\mathbb{P}}$ définie pour un mot fini u sur $\mathcal{A}$ par :

— $C_{\mathbb{P}}(u) =$ **rouge** si $u = \mathbb{P}_{|u|}(x)$,

— $C_{\mathbb{P}}(u) =$ **bleu** si $u \neq \mathbb{P}_{|u|}(x)$.

Nous donnons maintenant l'énoncé 2.2.1 du fait qu'un mot de Lyndon n'admet pas de factorisation monochromatique pour la coloration préfixiale. Le cas des mots de Lyndon est donc optimalement résolu par la coloration préfixiale, puisqu'il s'agit d'une coloration à deux couleurs. Comme nous l'avons expliqué, cet exemple est une étape fondamentale dans la compréhension de la résolution du théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique. La preuve du théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique repose de manière essentielle sur la considération de l'ordre lexicographique associé à un ordre total sur l'alphabet $\mathcal{A}$. Cette idée, de relier des factorisations aux ordres lexicographiques en comparant lexicographiquement un mot infini à ses suffixes, est au coeur des idées fécondes de Lyndon [121, 122]. La proposition suivante n'est néanmoins pas nécessaire d'un point de vue logique pour la résolution du théorème de la factorisation monochromatique, on renvoit à [118] pour plus de détails, la proposition suivante étant énoncée comme conséquence du corollaire 3.8. Voir aussi [166].

Proposition 2.2.1
Un mot de Lyndon n'admet pas de factorisation monochromatique pour la coloration préfixiale.

Nous donnons maintenant un énoncé qui permet d'inscrire le théorème de la factorisation monochromatique dans la théorie générale de Ramsey. La proposition 2.2.2 suivante stipule en effet, comme conséquence du théorème de Ramsey 2.1.1, que pour tout mot infini et toute coloration sur l'ensemble de ses facteurs, le mot infini considéré possède un suffixe admettant une factorisation monochromatique. On peut même aller plus loin, et garantir qu'un tel suffixe admettra une factorisation monochromatique, pour lequel en plus toutes les concaténations de facteurs juxtaposés dans la factorisation forment un ensemble monochromatique. Cette propriété importante mets donc en valeur ce qui pourrait apparaitre comme une obstruction au théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique. De plus, cette propriété 2.2.2 montre ce que la théorie générale de Ramsey apporte aux problématiques de factorisations des mots infinis et des colorations, étant une conséquence d'un résultat fondamental 2.1.1 de cette théorie. Le théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique permet de voir que l'apport de cette théorie aux problèmes liés aux factorisations monochromatiques d'un mot infini se limite en quelque sorte à la proposition 2.2.2 suivante. Cette propriété montre aussi la pertinence de la coloration préfixiale, et justifie aussi que l'on considère séparément les préfixes d'un mot infini et ses autres facteurs dans notre étude du théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique. La clef du théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique se trouve en effet dans la distinction entre ces deux types de facteurs, étant donné un mot infini fixé. Cette proposition a été démontrée dans l'article [158]. Voir [118], proposition 3.1.

Proposition 2.2.2
Soit $\mathcal{A}$ un alphabet quelconque, et x un mot infini sur $\mathcal{A}$. Pour toute coloration des mots finis sur $\mathcal{A}$, le mot x admet un suffixe ayant une factorisation monochromatique. De plus, cette factorisation peut être choisie de telle sorte que l'ensemble des concaténations de facteurs juxtaposés dans la factorisation soit monochromatique.

C'est-à-dire que pour tout mot infini x sur $\mathcal{A}$ et toute coloration des mots finis sur $\mathcal{A}$, il existe un entier $k \geq 0$ et une famille de mots finis $(u_i)_{i\geq 1}$, tels que

$$T^k(x) = u_1 u_2 u_3 \cdots$$

et tels que la famille de mots

$$\left(\prod_{N\leq i\leq M} u_i \right)_{1\leq N\leq M}$$

soit monochromatique.

2.3 Démonstration du théorème de la factorisation monochromatique et conséquences

Cette section contient de nouveaux résultats. Le résultat principal de cette section est le théorème 2.3.1.

Nous présentons maintenant la démonstration du théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique. Ce théorème, inscrit dans la catégorie des problèmes à présents résolus de la théorie de Ramsey, permet de donner une caractérisation fondamentale des mots périodiques en terme de colorations. Cette conjecture est résolue de manière optimale, c'est-à-dire en donnant une construction explicite d'une coloration à deux couleurs pour laquelle un mot infini non-périodique fixé n'admette pas de factorisation monochromatique. Après la démonstration de ce théorème, nous donnons quelques corollaires et conséquences concernant les factorisations des mots infinis.

Le théorème de la factorisation monochromatique met en évidence les limites de la théorie de Ramsey dans le contexte de la combinatoire des mots. Les résultats d'existence asymptotiques de colorations 2.1.1 ou 2.1.2 satisfaisant à certaines propriétés de monochromatismes peuvent se retrouver en défaut dans certains contextes plus rigides, dont la combinatoire des mots fait partie. Une application du théorème de Ramsey permet en effet, étant donné un mot infini et une coloration sur l'ensemble de ses facteurs, de garantir qu'un de ses suffixes admette une factorisation monochromatique selon 2.2.2. La question posée par le problème de la factorisation monochromatique consiste à se demander si l'on peut garantir que ce suffixe qui existe ne puisse pas être le mot considéré lui-même.

Tout comme l'exemple du mot infini sur un alphabet à trois lettres sans facteurs carrés construit par A. Thue [164, 165], la démonstration du théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique repose sur la construction d'un objet combinatoire, en l'occurrence une coloration 2.3.2, satisfaisant à certaines propriétés remarquables, voir 2.3.3 et 2.3.4. Ce type de résultats ouvre la voie à plusieurs développements, et marque une certaine profondeur mathématique du domaine de la combinatoire des mots. Elle symbolise aussi la réussite d'un processus scientifique collectif basé sur le travail de la multitude, afin de faire émerger des idées scientifiques fondamentales, qui pourront servir d'inspiration aux générations futures. Elle marque aussi la puissance des raisonnements et des idées face à des conjectures réputées imprenables.

Le théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique stipule qu'un mot infini x est périodique, c'est-à-dire admet une écriture de la forme $x = uuu\cdots$ pour un mot fini u, si et seulement si, pour toute coloration sur l'ensemble de ses facteurs, il admet une factorisation monochromatique. Il est très simple de voir que si un mot x est périodique, et s'écrit donc $x = uuu\cdots$ où u est un mot fini, alors cette factorisation est une factorisation nécessairement monochromatique pour toute coloration définie sur l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$. Le sens non-trivial consiste donc, étant donné un mot infini x qui est supposé non-périodique, à justifier l'existence d'une coloration sur l'ensemble des facteurs de x pour laquelle x n'admette pas de factorisation monochromatique. Nous démontrons dans cette section qu'il est toujours possible d'en trouver une, que nous construisons explicitement, voir 2.3.2. Notre construction est de facture optimale : la coloration 2.3.2 que nous construisons est définie sur deux couleurs. Le théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique, énoncé tel quel, aurait été aussi vérifié si notre solution fournissait une coloration répondant au problème dont le nombre de couleurs dépendait de x ou de $\mathcal{A}$. Nous démontrons ce théorème dans la suite de ce chapitre, en tant que contribution principale de ce doctorat, objet de la publication [166].

Théorème 2.3.1 (Factorisation monochromatique)
Soit $\mathcal{A}$ un alphabet quelconque, et x un mot infini sur $\mathcal{A}$. Alors le mot x est périodique si et seulement si, pour toute coloration des mots finis sur $\mathcal{A}$, il admet une factorisation monochromatique.

En plus de la résolution de cette conjecture, la coloration 2.3.2 que nous construisons dispose de propriétés remarquable, par exemple la propriété que la concaténation de deux mots de la même couleur est encore de cette même couleur. Cette propriété 2.3.4 jouera un rôle important dans la démonstration. La seconde propriété 2.3.3 de la coloration qui fournit la solution est quant à elle beaucoup plus profonde. Elle repose sur une manière naturelle d'associer à un préfixe de x un suffixe de x. Le mot x n'étant que supposé non-périodique, on pouvait espérer n'utiliser que le fait crucial que x est distinct de tous ses suffixes stricts. Pour résoudre ce problème mathématique, nous exploitons une hypothèse selon laquelle deux objets mathématiques sont toujours différents pour les comparer, à l'aide d'une comparaison qui n'aurait pas pu être considérée en cas d'égalité. Une méthode de démonstration qui rappelera aux esprits mal tournés pourquoi une fonction continue d'un disque sur lui-même admet un point fixe.

Pour démontrer le théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique, on fixe jusqu'à la fin de cette section un mot infini x sur un alphabet $\mathcal{A}$.

On munit $\mathcal{A}$ d'un ordre total quelconque, et on considère l'ordre lexicographique associé. Il n'est pas évident que tout ensemble quelconque admette un ordre total, cette propriété est en fait équivalente à l'axiome du choix. En fait, dans notre situation, ce problème est très facilement contournable. D'abord, on peut très facilement restreindre $\mathcal{A}$ à l'ensemble des lettres qui apparaissent dans x. De cette manière, on peut se contenter de considérer le problème lorsque $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable, ce qui permet déjà de n'envisager l'utilisation que de l'axiome du choix dénombrable. Mais vu que le problème de la factorisation monochromatique est énoncé à x fixé, on peut tout simplement considérer l'ordre total sur $\mathcal{A}$ donné par l'ordre d'apparition des lettres dans x. Ceci permet de construire un ordre total sur $\mathcal{A}$ sans avoir à invoquer de forme générale ou dénombrable de l'axiome du choix.

Cette étape n'est pas anodine du tout, car la considération d'un ordre lexicographique sur l'ensemble des mots infinis sur $\mathcal{A}$ sera la clef de notre résolution de la conjecture de la factorisation monochromatique. C'est d'autant plus surprenant que l'énoncé du théorème de la factorisation monochromatique ne fait pas du tout intervenir un quelconque ordre total sur l'alphabet $\mathcal{A}$. On peut naturellement privilégier l'ordre d'apparition des lettres sur $\mathcal{A}$, ce qui est une idée de facture canonique, mais on fait bel et bien un choix. En particulier, notre solution donne en fait la construction d'autant de colorations différentes répondant à la conjecture que d'ordre total sur $\mathcal{A}$, même si deux colorations obtenues ainsi par des ordre totaux opposés peuvent largement être considérée comme les mêmes, puisque cette opération revient à échanger les noms des deux couleurs.

A cet instant, où l'on choisit un ordre total sur l'alphabet $\mathcal{A}$, la démonstration du théorème de la factorisation monochromatique a en fait déjà commencé. On a montré dans les propositions 2.2.1 et 2.2.2 précédentes à quel point la distinction entre les préfixes et les autres facteurs de x était primordiale dans les questions de factorisations des mots infinis. On a vu aussi au chapitre 1 en quoi la notion d'ordre lexicographique se comportait de manière particulière sur deux mots dont l'un est préfixe de l'autre. On a en effet vu au chapitre 1 que pour deux mots u et v sur un même alphabet $\mathcal{A}$, le mot u est un préfixe de v si et seulement si u est lexicographiquement inférieur à v pour *tout* ordre total sur $\mathcal{A}$. En choisissant un ordre total de manière arbitraire sur $\mathcal{A}$, nous avons donc mathématiquement pris en compte l'idée de considérer comme particuliers les mots qui sont des préfixes de x. Ainsi nous savons déjà que nous sommes sur la bonne voie, et la suite ne nous donnera pas défaut.

La démonstration du théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique consiste en la construction d'une coloration sur l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$. La démonstration que nous donnons est optimale, au sens où la coloration 2.3.2 que nous définissons est à deux couleurs, que nous avons choisis de noter **rouge** et **bleue**.

Définition 2.3.2
*Soit x un mot infini non-périodique sur un alphabet $\mathcal{A}$ totalement ordonné. A partir de x, on définit la coloration C_W sur l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$ de la manière suivante à l'aide de l'ordre lexicographique : on dit qu'mot fini u sur $\mathcal{A}$ est **rouge** si et seulement si $ux > x$ pour l'ordre lexicographique associé à l'ordre total sur $\mathcal{A}$.*

Si x est non-périodique, on ne peut jamais avoir $ux = x$, et ainsi un mot est **bleu** si et seulement si $ux < x$.

On peut aussi définir la coloration C_W sur l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$ de la manière suivante. Pour u un mot fini sur $\mathcal{A}$, on pose $C_W(u) =$ **rouge** si $u > \mathbb{P}_{|u|}(x)$, $C_W(u) =$ **bleu** si $u < \mathbb{P}_{|u|}(x)$, et si $u = \mathbb{P}_{|u|}(x)$, $C_W(u) =$ **rouge** si $x > T^{|u|}(x)$, $C_W(u) =$ **bleu** si $x < T^{|u|}(x)$.

Noter que la définition est consistante car x est non-périodique, c'est-à-dire que $x \neq T^n(x)$ pour tout $n > 0$. On profite du fait que les mots x et $T^n(x)$, pour $n > 0$, soient distincts pour les comparer. Il s'agit d'un point de vue qui permet d'exploiter au maximum l'hypothèse pourtant relativement faible pour un mot d'être non-périodique. Il est en effet remarquable que notre démonstration du théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique s'adapte à tous les mots, allant des mots de complexité maximale sur un alphabet fini, passant par les mots définis sur un alphabet infini aux mots qui sont ultimement périodiques sans être périodiques.

La propriété 2.3.3 suivante souligne comment la coloration C_W brise le monochromatisme, voir [166].

Proposition 2.3.3
Soit $n \geq 1$. Pour la coloration C_W, on a l'équivalence :

$$\mathbb{P}_n(x) \text{ est } \textbf{\textit{rouge}} \iff \textit{Les préfixes suffisamment longs de } T^n(x) \textit{ sont } \textbf{\textit{bleus}}.$$

Preuve. En effet, pour deux mots infinis distincts y et z, on a $y < z$ pour l'ordre lexicographique si et seulement si on a $\mathbb{P}_m(y) < \mathbb{P}_m(z)$ pour m assez grand. En appliquant cela avec les deux mots x et $T^n(x)$, on obtient le résultat. □

Cette propriété 2.3.3 mets en évidence le caractère naturel de la coloration C_W définie en 2.3.2. Noter qu'elle aurait pu être définie sur les préfixes de x justement à l'aide de la proposition 2.3.3. Ce type de définition naturelle, où l'on cherche à définir une coloration intrinsèquement vis-à-vis des propriétés que l'on cherche à obtenir, est à la base de nos résultats.

Nous passons maintenant à la seconde propriété 2.3.4 importante vérifiée par la coloration C_W, le fait que la concaténation de deux facteurs de la même couleur est de cette même couleur. Cette propriété signifie aussi que la coloration 2.3.2 que nous avons introduit, comme solution au problème 2.3.1 de la factorisation monochromatique, fournit une partition de l'ensemble $\mathcal{A}^+$ en deux semi-groupes. Voir [166].

Proposition 2.3.4
Pour la coloration C_W, la concaténation de deux facteurs de la même couleur est de cette même couleur.

Preuve. En effet, si on considère deux facteurs u et v supposés **rouges** pour la coloration C_W, alors par la définition 2.3.2, alors on a $uvx > ux > x$, la première inégalité résultant de l'hypothèse faite sur v et la seconde de celle sur u. □

Nous donnons maintenant l'étape finale de la démonstration du théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique, où nous utiliserons les deux propriétés fondamentales 2.3.3 et 2.3.4 vérifiées par la coloration C_W. Voir [166].

Théorème 2.3.5
Le mot x n'admet pas de factorisation monochromatique pour la coloration C_W.

Preuve. Supposons en effet que x admettre une factorisation monochromatique

$$x = u_1 u_2 u_3 \cdots$$

supposée **rouge**. Alors, puisque u_1 est préfixe de x, les préfixes suffisamment long de $T^{|u_1|}(x) = u_2 u_3 u_4 \cdots$ sont **bleus** selon 2.3.3. En particulier, les mots $u_2 u_3 \cdots u_i$ pour $i \geq 2$ assez grand sont **bleus**. Mais ils sont des concaténations de facteurs **rouges**, et donc par 2.3.4 sont **rouges** aussi. Il s'agit d'une contradiction. □

Nous donnons dans la fin de cette section diverses conséquences du résultat constitué par le théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique. La première conséquence de notre résultat 2.3.1 permet de conclure à la périodicité d'un mot infini, sous une hypothèse d'existence de factorisation préfixiale où les termes de la factorisation vérifient une hypothèse de richesse en une lettre. Pour un mot infini x sur $\mathcal{A}$ et une lettre $a \in \mathcal{A}$, un facteur u de x est dit

riche en la lettre a lorsque $|u|_a \geq |v|_a$ pour tout facteur v de x avec $|v| = |u|$. Les prochains corollaires apparaissent dans [166].

Corollaire 2.3.6
Soit x un mot infini sur l'alphabet $\{0,1\}$, et $a \in \{0,1\}$. On suppose que x admette une factorisation préfixiale dont tous les termes sont riches en a. Alors x est périodique.

Preuve. On suppose par l'absurde que x n'est pas périodique. Ecrivons

$$x = u_1 u_2 u_3 \cdots$$

où les mots $(u_i)_{i\geq 1}$ sont des préfixes de x riches en la lettre a. On prends sur l'alphabet $\{0,1\}$ l'ordre total pour lequel a est la plus petite lettre, et on considère pour chaque $i \geq 1$ le plus grand préfixe commun à x et $T^{|u_i|}(x)$, qui est un mot fini par hypothèse de non-périodicité. Supposons par l'absurde que $x > T^{|u_i|}(x)$ pour un $i \geq 1$, alors on a

$$x = u_i T^{|u_i|}(x) = u_i w_i a T^{|u_i w_i|+1}(x) = w_i b T^{|w_i|+1}(x)$$

ce qui montre que le facteur v_i de x précédent $T^{|u_i w_i|+1}(x)$ dans x est tel que $|v_i|_a > |u_i|_a$, ce qui contredit l'hypothèse de richesse en a des mots $(u_i)_{i\geq 1}$. Ainsi on a nécesairement $x < T^{|u_i|}(x)$ pour tout $i \geq 1$, et donc la factorisation $x = u_1 u_2 u_3 \cdots$ de x est monochromatique pour la coloration C_W, ce qui est une contradiction par 2.3.5. □

La conséquence suivante du théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique permet de comprendre la structure de l'ensemble des indices d'occurrence d'une lettre dans un mot infini qui admet une factorisation préfixiale. Ce type de propriété est à mettre en parallèle avec une propriété fondamentale des suites linéaires récurrentes : si une suite vérifie une relation linéaire de récurrence, alors l'ensemble des indices en lesquelles elle s'annule est réunion d'un ensemble fini et d'un nombre fini de progressions arithmétiques, voir [31, 112, 123, 139, 153, 162]. La démonstration du corollaire suivant apparait dans [166].

Corollaire 2.3.7
Soit $x = x_0 x_1 x_2 x_3 \cdots$ un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$ où les $(x_i)_{i\geq 0}$ sont des lettres, et $a \in \mathcal{A}$ une lettre. On suppose que x admet une factorisation préfixiale dont chaque terme est riche en a. Alors l'ensemble des indices où la lettre a apparait est une réunion finie de progressions arithmétiques.

Preuve. En effet, en appliquant à x le morphisme $\gamma : a \mapsto 1, b \mapsto 0$ pour toutes les lettres $b \in \mathcal{A}$ distinctes de a, et en appliquant le corollaire 2.3.6 précédent au mot infini $\gamma(x)$, on obtient le résultat. □

Les deux corollaires suivant du théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique nous permettent de déduire à partir d'hypothèses de factorisations le caractère périodique d'un mot infini. Voir [166].

Corollaire 2.3.8
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$ et $k \geq 1$. Supposons qu'il existe un ensemble B de facteurs de x avec $Card(B) \geq 2k-1$, et tel que pour toute partie $D \subset B$ avec $Card(D) = k$, le mot x admette une factorisation dont les termes sont des élements de D. Alors x est périodique.

Preuve. De l'hypothèse $Card(B) \geq 2k-1$ on tire que pour toute coloration à deux couleurs des éléments de B, la partie B contient une partie de cardinal k qui est monochromatique. Si x n'est pas périodique, c'est en particulier le cas pour la coloration C_W définie en 2.3.2, ce qui contredit l'hypothèse d'existence d'une partie D de cardinal k à travers laquelle x se factorise d'après 2.3.5. □

On se réfère à [166] pour la démonstration du corollaire suivant.

Corollaire 2.3.9
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$ et $k \geq 1$. On suppose qu'il existe $2k+1$ mots u_1, u_2, ..., u_{2k+1} sur $\mathcal{A}$ tels que x admette une factorisation à travers chaque partie $\{u_i, u_{i+1}\}$ pour $1 \leq i \leq 2k$, ainsi que pour la partie $\{u_1, u_{2k+1}\}$. Alors x est périodique.

Preuve. Supposons que x ne soit pas périodique, et considérons la coloration C_W définie en 2.3.2 qui est à deux couleurs. Par le théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique, le théorème 2.3.5, et les hypothèses d'existence de factorisation de l'énoncé, pour tout $1 \leq i \leq 2k$, les deux mots u_i et u_{i+1} n'ont pas la même couleur. Vu que $2k+1$ est impair et que la coloration C_W est à deux couleurs par 2.3.2, on en déduit que les deux mots u_1 et u_{2k+1} ont la même couleur, et x admet donc une factorisation monochromatique pour la coloration C_W, ce qui est une contradiction d'après 2.3.5. □

Perspectives

Nous présentons ici certaines perspectives du travail effectué dans la thématique de la théorie de Ramsey et des factorisations monochromatiques de mots infinis. Ces questions n'ont pas encore pu être élucidées, et mériteraient une recherche plus approfondie.

La théorie de Ramsey est un domaine des mathématiques présentant de nombreuses questions ouvertes, ainsi que de nombreux développements à l'interaction de divers domaines mathématiques. Les questions concernant l'évaluation des nombres de Ramsey font typiquement partie des problèmes ouverts délicats soulevés par cette théorie. Les constructions, qui étaient connues, que nous donnons pour les évaluations de $Ram(2,2,3)$ et $Ram(3,2,3)$ font apparaitre des graphes dont la structure possède beaucoup de symmétries, de propriétés géométriques et algébriques. Il est alors naturel de se poser la question, difficile, de pouvoir fournir des propriétés de ce type pour des exemples réalisant les valeurs des nombres de Ramsey.

Question 6
Peut-on déterminer des propriétés algébriques ou géométrique vérifiée par des graphes réalisant les bornes optimales du théorème de Ramsey ?

Cette question fait naturellement appel à l'aspect algébrique très riche de la théorie des graphes. L'exemple lui-même du calcul de $Ram(3,2,3)$ fait intervenir de manière suprenante le corps fini $\mathbb{F}_{16}$, et ses propriétés arithmétiques de base fournissent la borne de Ramsey, qui est pourtant souvent difficile à calculer. Beaucoup de problématiques mathématiques en combinatoire font appel à des constructions suprenantes faisant intervenir des notions d'algèbres qui sont pourtant à première vue très éloignées de la théorie étudiée initialement. D'autre part, les résultats généraux concernant les plongements de graphes dans des variétés orientables ou non-orientables, et les problèmes de coloration qui émergent naturellement de ce point de vue méritent une attention scientifique toute particulière.

Les problèmes de la théorie de Ramsey dans le contexte de la combinatoire des mots ne sont aussi pas tous résolus. Il apparait avec nos résultats généraux obtenus dans les chapitres 2 et 3 que la théorie de Ramsey présente des limites dans le contexte de la combinatoire des mots. En particulier, des études algébriques faisant intervenir la structure de semi-groupe de l'ensemble des mots finis sur un alphabet $\mathcal{A}$ devraient pouvoir être effectuées plus en profondeur afin de faire émerger de nouvelles problématiques, à la lumière des constructions fondamentales des groupes de Grothendieck obtenus à partir de structures plus faibles comme les semi-groupes. Nous donnons à ce titre l'énoncé de la conjecture non-résolue suivante, pour laquelle on renvoit à [24, 25, 156] :

Question 7
Existe-t-il une coloration sur l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$ telle que tout ensemble de la forme $\{u, v, uv, vu\}$ de mots finis non-vides ne soit pas monochromatique ?

Cette question est à mettre en parallèle avec la conjecture énoncée selon laquelle, pour toute coloration sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$, il existe une partie de la forme $\{x, y, x+y, xy\}$, qui soit de cardinal 4 et monochromatique. Comme pour les résultats partiels obtenus par J. Moreira et V. Bergelson, le point de vue de la théorie ergodique peut mener à des avancées significatives pour la résolution de cette question. La théorie des ultrafiltres, reposant de manière essentielle sur l'axiome du choix, ne semble cependant pas fournir de quelconque résultat pertinent dans le cadre de la combinatoire des mots.

Notre contribution donnée par la démonstration du théorème de la factorisation monochromatique, de facture optimale dans tous les sens du terme, au niveau du résultat, au niveau de la démonstration, au niveau de la

constructibilité de la solution, est un obstacle considérable à la considération de développements futurs, outre la conjecture de la factorisation super-monochromatique que nous étudions dans le chapitre 3. On peut tout de même se demander si l'on peut caractériser l'ensemble des colorations répondant au problème.

Question 8
Peut-on caractériser l'ensemble des colorations, pour lequel un mot fixé n'admet pas de factorisations monochromatiques ?

On a en effet vu qu'une manière de construire d'autres telles colorations pouvait être effectuée en considérant différents ordres totaux sur l'alphabet de base. Ces différentes colorations suggèrent déjà qu'il peut y avoir beaucoup d'autres colorations répondant au théorème de la factorisation monochromatique. On pourrait être tenté de trouver une telle caractérisation à l'aide de la décomposition en mots de Lyndon d'un mot infini, ce qui passerait par exemple par une description à l'aide de cette décomposition de la coloration C_W que l'on considère pour notre démonstration.

3

Factorisations super-monochromatiques et ultime périodicité

Nous continuons notre étude des limites de la théorie de Ramsey dans le contexte de la combinatoire des mots, en introduisant et en fournissant de premiers exemples concernant une nouvelle conjecture basée cette fois sur le théorème de Hindman 2.1.2. Cette conjecture est introduite dans ce doctorat, ainsi notre objectif a été de fournir une première étude de cette conjecture, en donnant quelques résultats allant dans la direction de sa validation.

Cette conjecture demande de mettre en évidence les différences intrinsèques qui existent entre les suffixes d'un mot infini et les éléments de son orbite dynamique. Dans cet esprit, nous démontrons plusieurs résultats permettant de mettre en évidence ces différences. Nous donnons certaines réductions du problème, en montrant ainsi quels types d'hypothèses peuvent être atteintes via l'utilisation de colorations définies de manière générale sur les mots infinis. Ces différentes réductions vont nous permettre de considérablement réduire le problème posé, et de cerner avec plus de précision les enjeux de cette conjecture.

Nous continuons par l'introduction et l'étude d'une nouvelle notion de longueur, que nous appelons la longueur consécutive, qui permet de mesurer la capacité d'un mot infini à faire apparaitre de nouveaux motifs. Nous démontrons plusieurs propriétés concernant cette notion, puis nous l'utilisons pour construire une coloration répondant au problème pour la classe des mots infinis qui ne contiennent pas de carrés arbitrairement grands.

Dans ce chapitre, nous introduisons donc une nouvelle question, énoncée sous la forme de la conjecture suivante :

Conjecture
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. Alors x est ultimement périodique si et seulement si, pour toute coloration de l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$, il admet un suffixe ayant une factorisation super-monochromatique.

La notion de factorisation super-monochromatique est une variation de la notion de factorisation monochromatique. Sa considération est justifiée étant donné l'application 2.2.2 du théorème 2.1.1 de Ramsey présentée dans le chapitre précédent. Une factorisation $y = u_1u_2u_3\cdots$, où y est un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$ et où les mots $(u_i)_{i\geq 1}$ sont des mots finis, est dite super-monochromatique selon une coloration des mots finis sur $\mathcal{A}$ lorsque la famille

$$(u_{n_1}u_{n_2}\cdots u_{n_k})_{k\geq 1, n_1<n_2<\cdots<n_k}$$

est monochromatique.

Comme pour le résultat de la factorisation monochromatique, ce que l'on cherche à montrer est antagoniste à l'application d'un théorème de la théorie de Ramsey, qui est dans ce cas le théorème 2.1.2 de Hindman. On montre dans une première section que l'on trouvera toujours une factorisation super-monochromatique pour un élément de

l'orbite dynamique d'un mot infini. Nous présentons ensuite certaines réductions qui permettent de renforcer les hypothèses de la conjecture ou encore de mettre de coté certains cas. Nous terminons par l'introduction et l'étude de la longueur consécutive associée à un mot infini, notion que l'on utilise pour résoudre la conjecture pour une certaine classe de mots.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de la pré-publication « On a conjecture about super-monochromatic factorisations » présentée sur ArXiv, ainsi que d'une présentation lors de la conférence « Ramsey theory of equations and related topics », à l'Université de Pise, Italie.

3.1 Limites du résultat de Hindman et premières occurrences

Cette section ne contient pas de nouveaux résultats significatifs.

Nous donnons dans cette section l'énoncé de la conjecture que nous allons étudier dans ce chapitre, et nous allons décrire en quoi elle s'insère dans la catégorie des problèmes de la théorie de Ramsey. De manière analogue au théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique, cette conjecture énonce une caractérisation des mots ultimement périodiques au moyen d'existence de coloration satisfaisant à certaines conditions de monochromatismes. Ces conditions se doivent cependant d'être plus restrictives que pour le théorème de la factorisation monochromatique, et cette problématique fait partie des questions où l'on essaie de produire des exemples et contre-exemples de colorations empêchant explicitement l'apparition de sous-structures monochromatiques. Dans le cadre de la conjecture étudiée dans ce chapitre de doctorat, on impose en plus de l'hypothèse de monochromatisme des mots constituant une factorisation, que les concaténations ordonnées des termes de la factorisation soient monochromatiques, hypothèse que l'on qualifie de super-monochromatisme. Ce choix terminologique a été choisi par L. Zamboni.

Définition 3.1.1
Une factorisation $y = u_1u_2u_3\cdots$, où y est un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$ et où les mots $(u_i)_{i\geq 1}$ sont des mots finis, est dite super-monochromatique selon une coloration des mots finis sur $\mathcal{A}$ lorsque la famille

$$(u_{n_1}u_{n_2}\cdots u_{n_k})_{k\geq 1, n_1<n_2<\cdots<n_k}$$

est monochromatique.

Nous énonçons maintenant la conjecture de la factorisation super-monochromatique, qui fournirait une caractérisation en terme de coloration des mots ultimement périodiques. Une validation de cette conjecture mettrait à nouveau en évidence les limites de la théorie de Ramsey dans le contexte de la combinatoire des mots.

Conjecture 3.1.2
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. Alors x est ultimement périodique si et seulement si, pour toute coloration de l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$, il admet un suffixe ayant une factorisation super-monochromatique.

Le fait qu'un mot ultimement périodique admet, pour toute coloration des mots finis sur l'alphabet, un suffixe ayant une factorisation super-monochromatique découle du théorème de Hindman, et est contenu dans l'énoncé suivant dont la preuve repose sur le premier théorème de Hindman 2.1.2. Voir [170].

Proposition 3.1.3
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$, et C une coloration sur l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$. On suppose x ultimement périodique, alors x admet un suffixe ayant une factorisation super-monochromatique.

Comme dans le cas du théorème de la factorisation monochromatique, la conjecture étudiée se place dans le contexte de la théorie de Ramsey. Cette fois-ci, on montre l'existence d'un élément de l'adhérence de l'orbite répondant à la condition de factorisation super-monochromatique.

On rappelle que l'on munit $\mathcal{A}$ de la topologie discrète, et l'ensemble des mots infinis sur $\mathcal{A}$ de la topologie produit associée. On définit l'orbite dynamique d'un mot infini x sur $\mathcal{A}$ comme la fermeture topologique

$$\Omega(x) = \overline{\{T^k(x) \mid k \geq 1\}}$$

de l'ensemble des suffixes de x.

Un facteur récurrent d'un mot infini est un facteur apparaissant une infinité de fois dans le mot infini considéré. On dit qu'un mot infini est récurrent si tous ses facteurs sont récurrent. Lorsque l'alphabet $\mathcal{A}$ est fini, par un argument de compacité, tout mot infini x sur $\mathcal{A}$ admet dans son orbite dynamique un mot infini récurrent.

Le résultat suivant est un résultat original, dont la preuve est dûe à L. Zamboni et L. Nguyen Van Thé, et est présenté dans [167].

Proposition 3.1.4
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$, tel que son orbite dynamique $\Omega(x)$ admette un mot infini récurrent (ce qui est le cas si $\mathcal{A}$ est fini). Alors pour toute coloration des mots finis sur $\mathcal{A}$, l'orbite dynamique $\Omega(x)$ admet un élément ayant une factorisation super-monochromatique.

Preuve. La preuve repose sur le second théorème de Hindman 2.1.2. Soit $z \in \Omega(x)$ un mot infini récurrent, définit sur l'alphabet $\mathcal{A}$.

On construit à partir de z une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de facteurs de x vérifiant la propriété des suffixes :

$$\text{pour tout } n \geq 1, \quad u_1 u_2 \cdots u_n \text{ est un suffixe de } u_{n+1},$$

équivalente à l'extension

$$\text{pour toute partie finie } A \subset \mathbb{N}^*, \quad \prod_{i\in A} u_i \text{ est un suffixe de } u_{\max A+1},$$

de la manière suivante. On considère un facteur u_1 de z quelconque. Puisque z est récurrent, il existe un mot fini v tel que $u_1 v u_1$ soit facteur de z, et on pose alors $u_2 = v u_1$. Supposons maintenant que $u_1, u_2, \dots u_n$ soient construits pour $n \geq 1$, et on construit u_{n+1}. Puisque z est récurrent, il existe un mot fini v tel que

$$u_1 u_2 \cdots u_n v u_1 u_2 \dots u_n$$

soit facteur de z. On pose alors $u_{n+1} = v u_1 u_2 \cdots u_n$, et la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ ainsi construite vérifie la propriété recherchée.

On note, pour une partie finie $A \subset \mathbb{N}^*$, le mot

$$u_A = \prod_{i\in A} u_i$$

et soit C une coloration des mots finis sur $\mathcal{A}$. On applique le second théorème de Hindman 2.1.2 à la coloration $\widetilde{C}$ de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}^*)$ définie pour une partie finie $A \subset \mathbb{N}^*$ par

$$\widetilde{C}(A) = C(u_A)$$

pour obtenir une partie infinie $M = \{A_1 < A_2 < A_3 < \cdots\}$ telle que l'ensemble

$$\left(u_{A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \cdots \cup A_{n_k}}\right)_{k\geq 1, n_1 < n_2 < \cdots < n_k}$$

soit monochromatique.

La condition des suffixes implique que pour toute suite finie $B_1 < B_2 < \cdots < B_k$ de parties finies de $\mathbb{N}^*$, avec $k \geq 1$, le mot

$$u_{B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k} = u_{B_1} u_{B_2} \cdots u_{B_k}$$

soit un facteur de z, et donc de x. Ainsi, le mot infini et sa factorisation

$$y = \prod_{i\geq 1} u_{A_i}$$

fournissent un élément de l'orbite dynamique $\Omega(x)$ admettant une factorisation super-monochromatique selon 3.1.1. □

Notre étude de la conjecture de la factorisation super-monochromatique va faire intervenir à plusieurs reprise la notion de première occurrence d'un facteur dans un mot infini. Cette notion nous servira pour les démonstrations concernant les différentes réductions que nous ferons du problème de la factorisation super-monochromatique, et sera aussi une notion centrale que nous utiliserons pour définir et étudier la notion de longueur consécutive. Il est important de saisir que la notion de première occurrence dans un mot infini est généralement essentiellement pertinente dans la considération d'un mot infini qui n'est pas ultimement périodique, et ceci justifie, outre nos résultats, notre considération de cette notion mathématique.

Nous définissons ici les fonctions premières occurrences, qui, étant donné un facteur u de x, renvoient les coordonnées dans x de la première occurrence de u dans x.

Définition 3.1.5
Soit $x = x_0x_1x_2\cdots$ un mot infini sur $\mathcal{A}$, où les $(x_i)_{i\geq 0}$ sont des lettres. Pour un facteur u de x, on définit les entiers $A(u)$ et $B(u)$ tels que le mot

$$x_{A(u)}x_{A(u)+1}\cdots x_{B(u)-1}$$

soit la première occurrence de u dans x. En d'autres termes :

$$A(u) = \min\{k \geq 0 \mid u = x_kx_{k+1}\cdots x_{k+|u|-1}\} = \min\{k \geq 0 \mid u = \mathbb{P}_{|u|}(T^k(x))\}$$

et

$$B(u) = \min\{k \geq 0 \mid u \text{ est suffixe de } \mathbb{P}_k(x)\}.$$

On donne les propriétés élémentaires suivantes sur les deux fonctions premières occurrences A et B :

Proposition 3.1.6 — *Pour tout facteur u de x, on a $|u| = B(u) - A(u)$,*
— *si v est préfixe de u, alors $A(v) \leq A(u)$,*
— *si v est suffixe de u, alors $B(v) \leq B(u)$.*

La propriété 3.1.7 suivante indique en quoi la considération des fonctions premières occurrences est pertinente principalement dans le cas des mots infinis non-ultimement périodiques. Puisque la conjecture 3.1.2 que nous étudions cherche à donner une caractérisation des mots ultimement périodiques, on cherche naturellement à considérer des objets mathématiques qui mettent en valeur les propriétés intrinsèques des mots non-ultimement périodiques. La présence de ce type de propriété est donc parfaitement justifiée pour notre étude dans le cadre de ce doctorat.

Proposition 3.1.7
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$, non-ultimement périodique. Alors pour tout $k \geq 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait :

$$k = A(\mathbb{P}_n(T^k(x))).$$

En d'autre termes, dans le cas non-ultimement périodique, les préfixes assez longs d'un suffixe de x ont leur première occurence là où le suffixe considéré commence.

Preuve. Le mot infini x est non-ultimement périodique si et seulement si

$$\text{pour tout } n, m \in \mathbb{N}, \quad n \neq m \quad \Longrightarrow \quad T^n(x) \neq T^m(x).$$

Soit $k \geq 0$. Pour tout $0 \leq j < k$, il existe un entier N_j tel que pour tout $n \geq N_j$, on ait $\mathbb{P}_n(T^j(x)) \neq \mathbb{P}_n(T^k(x))$. Ainsi, pour tout $n \geq \max_{0\leq j<k} N_j$ on a $\mathbb{P}_n(T^j(x)) \neq \mathbb{P}_n(T^k(x))$, et ceci montre que pour tout $n \geq 0$ assez grand, on a bien

$$k = A(\mathbb{P}_n(T^k(x))).$$

□

Vu la définition d'une factorisation super-monochromatique, si l'on suppose que le mot x est non-ultimement périodique, alors étant donné une factorisation

$$T^k(x) = u_1u_2u_3\cdots,$$

si l'on suppose que les mots $(u_i)_{i\geq 1}$ sont assez grand, on peut supposer que

$$A(u_1) = k \quad \text{et} \quad B(u_i) = A(u_{i+1}) = k + |u_1u_2\cdots u_i| \text{ pour tout } i \geq 1,$$

c'est-à-dire que l'on peut se ramener, dans le cas d'une factorisation

$$y = u_1u_2u_3\cdots$$

et que l'on étudie des problématiques liées aux factorisations super-monochromatiques, à l'hypothèse que les termes de la factorisation ci-dessus ont leurs premières occurrences exactement à l'endroit fournit par la factorisation. Afin de faciliter la compréhension de cette notion, nous exprimons ce raisonnement sous la forme d'un corollaire.

Corollaire 3.1.8
Soit x un mot non-ultimement périodique sur un alphabet $\mathcal{A}$ et C une coloration sur l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$, telle que x admette un suffixe ayant une factorisation super-monochromatique par rapport à C. Alors le mot infini x admet un suffixe admettant une factorisation

$$T^k(x) = u_1u_2u_3\cdots,$$

pour $k \geq 0$, super-monochromatique par rapport à C, et telle que

$$A(u_1) = k \quad \textit{et} \quad B(u_i) = A(u_{i+1}) = k + |u_1u_2\cdots u_i| \textit{ pour tout } i \geq 1.$$

3.2 Réductions

Cette section contient de nouveaux résultats. Le résultat principal de cette section est la proposition 3.2.4.

Nous donnons dans cette section plusieurs réductions du problème formulé par la conjecture 3.1.2 de la factorisation super-monochromatique. Cette étape permet d'établir différentes implications qui peuvent être espérées par une hypothèse de monochromatisme associée à une coloration sur l'ensemble des mots finis sur un alphabet $\mathcal{A}$. Les réductions que nous obtenons permettent de mieux cerner le contenu de la conjecture étudiée. En particulier, nous utiliserons à plusieurs reprises les fonctions premières occurrences, soulignant leur pertinence pour l'étude de ce problème.

De manière générale il est délicat d'anticiper les conséquences, en terme de factorisation d'un mot infini, d'une hypothèse de monochromatisme associée à une coloration. Une coloration ainsi définie se doit donc de présenter un certain contenu logique ensembliste, qui mette en valeur les différences fondamentales qui doivent exister entre les suffixes d'un mot infini et les éléments de son orbite dynamique. Le problème est d'autant plus délicat que, à la lumière de nos contributions concernant le théorème de la factorisation monochromatique, c'est certainement à l'aide de la définition d'une coloration bien choisie que la conjecture pourra être résolue. La notion de longueur consécutive introduite et étudiée dans la section (3.3) de ce chapitre, s'incrira dans cet esprit comme dans la continuité de ces principes, et permettra l'obtention de résultats partiels dans la direction d'une validation de la conjecture 3.1.2.

La première réduction que nous présentons est la réduction au cas où x est un mot récurrent. Elle démontre plus précisément que les mots dont aucun suffixe n'est récurrent satisfont à la conjecture 3.1.2. L'utilisation des fonctions premières occurrences 3.1.5 dans la démonstration de la proposition 3.2.2 y joue un rôle particulièrement important.

Définition 3.2.1
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. Soit C_{rec} la coloration des mots finis sur $\mathcal{A}$ définie pour un mot fini u sur $\mathcal{A}$ par

- $C_{rec}(u) =$ ***rouge*** *si u est un facteur non-récurrent de x,*
- $C_{rec}(u) =$ ***bleu*** *si u est un facteur récurrent de x, ou n'est pas facteur de x.*

La proposition suivante démontre que la considération de la coloration introduite et définie en 3.2.1 permet de ramener l'étude de la conjecture 3.1.2 au cas des mots récurrents.

Proposition 3.2.2
Soit x un mot infini non-ultimement périodique sur un alphabet $\mathcal{A}$. Supposons qu'aucun suffixe de x ne soit récurrent. Alors le mot x n'admet aucun suffixe ayant une factorisation super-monochromatique pour la coloration C_{rec}.

Preuve. En effet, supposons que x admette un suffixe ayant une factorisation

$$T^k(x) = u_1u_2u_3u_4\cdots$$

super-monochromatique pour la coloration C_{rec}, selon la définition 3.1.1. Alors, puisque par hypothèse aucun suffixe de x n'est récurrent, il existe un indice $i \geq 1$ tel que $u_1u_2\cdots u_i$ ne soit pas un facteur récurrent de x. Ceci montre que la factorisation monochromatique est **rouge**.

Considérons maintenant les mots u_1u_n, qui sont **rouges** vu que la fatorisation est super-monochromatique et d'après la définition 3.1.1. Ces mots sont donc facteurs de x d'après 3.2.1. Si l'on se met dans le cas où $A(u_1) = k$ et $B(u_i) = A(u_{i+1}) = k + |u_1u_2\cdots u_i|$ pour tout $i \geq 1$ grâce au corollaire 3.1.8, alors via la minoration, pour $n \geq 1$,

$$A(u_1u_{n+1}) = B(u_1u_{n+1}) - |u_1u_{n+1}| \geq B(u_{n+1}) - |u_1u_{n+1}| = k + |u_2\cdots u_n|$$

provenant de 3.1.5, 3.1.6 et 3.1.8 on obtient $\lim_{n\to+\infty} A(u_1u_n) = +\infty$. Ceci implique en particulier que le facteur u_1 de x apparaisse une infinité de fois dans x, mais c'est une contradiction car il était supposé non-récurrent d'après 3.2.1 et 3.1.1. □

Dans le théorème 2.3.1 de la factorisation monochromatique démontré dans le chapitre 2, la coloration 2.3.2 cherchée n'a pas besoin d'être définie sur l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$, il suffit en effet de la définir sur l'ensemble des facteurs du mot de base x compte tenu de 2.3.1. Dans le cas de la conjecture 3.1.2 concernant les factorisations super-monochromatiques, il est néanmoins nécessaire de prendre en considération cette contrainte. Rien n'indique en effet que dans une factorisation d'un suffixe d'un mot infini x sur un alphabet $\mathcal{A}$:

$$T^k(x) = u_1u_2u_3\cdots$$

les mots $(u_{n_1}u_{n_2}\cdots u_{n_k})_{k\geq 2, n_1<n_2<\cdots<n_k}$ soient des facteurs de x. Tout au plus peut on assurer qu'ils sont des concaténations de facteurs de x. Cette remarque est à la base de la définition 3.2.3 de la coloration suivante, et de la réduction 3.2.4 proposée.

L'introduction et la considération de la coloration 3.2.3 suivante, nous permet de nous ramener au cas où tous les mots finis $(u_{n_1}u_{n_2}\cdots u_{n_k})_{k\geq 2, n_1<n_2<\cdots<n_k}$ obtenus à partir d'une factorisation

$$T^k(x) = u_1u_2u_3\cdots \qquad (k \geq 0)$$

d'un suffixe d'un mot infini x définit sur un alphabet $\mathcal{A}$ sont des facteurs de x, par la preuve de la proposition 3.2.4. Cette hypothèse peut s'avérer très restrictive pour certains mots infinis x, en particulier un mot x de basse complexité. La coloration 3.2.1 que nous introduisons est essentiellement définie sur l'ensemble des mots qui ne sont pas facteurs de x. Ainsi elle permet, compte tenu de la réduction 3.2.4 démontrée ci-après, de se ramener au cas où toutes les concaténations $(u_{n_1}u_{n_2}\cdots u_{n_k})_{k\geq 2, n_1<n_2<\cdots<n_k}$ obtenus à partir d'une factorisation

$$T^k(x) = u_1u_2u_3\cdots \qquad (k \geq 0)$$

d'un suffixe d'un mot infini x définit sur un alphabet $\mathcal{A}$ sont des facteurs de x sans recourir à l'utilisation d'une couleur supplémentaire. Il s'agit donc d'un résultat remarquable, que nous établissons comme résultat principal de cette section, compte tenu des autres réductions 3.2.2 et 3.2.6 que nous obtenons, qui nécessitent pour la plupart l'utilisation d'une nouvelle couleur afin de garantir certaines hypothèses techniques sur les factorisations considérées.

Définition 3.2.3
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. Soit C_{NF} la coloration définie sur l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$ qui sont produits de facteurs de x, mais qui ne sont pas facteurs de x, définie pour un mot u de la manière suivante :

— $C_{NF}(u) =$ ***rouge*** *si u n'est pas facteur de x et si toute décomposition de u en produit de facteurs de x possède au moins trois termes.*
— $C_{NF}(u) =$ ***bleu*** *si u n'est pas facteur de x, mais s'écrit comme la concaténation de deux facteurs de x.*

La notation NF est utilisée pour signifier « non-facteur ». La proposition suivante 3.2.4 utilise la coloration 3.2.3 fraichement introduite pour permettre la réduction aux factorisations

$$T^k(x) = u_1u_2u_3\cdots \qquad (k \geq 0)$$

d'un suffixe d'un mot infini x définit sur un alphabet $\mathcal{A}$ pour lesquelles la famille des concaténations

$$(u_{n_1}u_{n_2}\cdots u_{n_k})_{k\geq 2, n_1<n_2<\cdots<n_k}$$

soient des facteurs de x. Ceci est une avancée qui permet de s'affranchir de la contrainte de devoir attribuer une couleur aux mots qui ne sont pas facteurs du mot infini x considéré. On utilisera cette réduction 3.2.4 systématiquement dans la suite de ce chapitre, en supposant que les concaténations des termes d'une factorisation super-monochromatique d'un suffixe de x sont encore des facteurs de x, ce qui nous permettra par exemple de faire un usage toujours licite des fonctions premières occurrences 3.1.5.

Proposition 3.2.4
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. Soit $T^k(x) = u_1u_2u_3\cdots$ une factorisation d'un suffixe de x, et pour $A \subset \mathbb{N}^*$ une partie finie, notons $u_A = \prod_{i\in A} u_i$. On suppose que, pour tout $\nu \geq 0$, il existe $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}^*)$ tel que $\min A \geq \nu$ et tel que u_A ne soit pas facteur de x.

Soit C une coloration des mots finis sur $\mathcal{A}$ telle que $C(u) = C_{NF}(u)$ pour tout u qui n'est pas facteur de x. Alors l'ensemble de mots

$$(u_{n_1}u_{n_2}\cdots u_{n_k})_{k\geq 1, n_1<n_2<\cdots<n_k}$$

n'est pas monochromatique pour la coloration C.

Preuve. Supposons en effet que l'ensemble de mots

$$(u_{n_1}u_{n_2}\cdots u_{n_k})_{k\geq 1, n_1<n_2<\cdots<n_k}$$

soit monochromatique, d'après 3.1.1. Par hypothèse il existe une partie finie $A \subset \mathbb{N}^*$ telle que u_A ne soit pas facteur de x. Encore par hypothèse, il existe une partie finie $B \subset \mathbb{N}^*$ avec $\min B > \max A$ telle que u_B ne soit pas non plus facteur de x. Considérons alors le mot $z = u_Au_B$, qui appartient à l'ensemble monochromatique d'après 3.1.1. On sait déjà que z n'est pas facteur de x puisque par exemple u_A ne l'est pas. D'autre part, si $z = w_1w_2$ admettait une décomposition en produit de deux facteurs w_1 et w_2 de x selon 3.2.3, alors u_A serait préfixe de w_1 ou bien u_B serait suffixe de w_2, et donc l'un des deux mots u_A ou u_B serait facteur de x. C'est une contradiction qui montre que le facteur $z = u_Au_B$ est nécessairement **rouge**, et la factorisation est alors **rouge** d'après 3.1.1.

Considérons maintenant les mots u_A où la partie finie $A \subset \mathbb{N}^*$ est réunion $A = I_1 \cup I_2$ de deux intervalles, non-consécutifs (c'est-à-dire avec $\min I_2 > 1 + \max I_1$). Ces mots appartiennent à l'ensemble monochromatique d'après 3.1.1 et sont donc **rouge**. S'il n'étaient pas facteurs de x, alors puisqu'ils s'écrivent comme la concaténation de deux facteurs de x, ils seraient **bleus** d'après 3.2.3, ce qui n'est pas le cas par monochromatisme. Ils sont donc facteurs de x. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que les mots u_A où la partie finie $A \subset \mathbb{N}^*$ est réunion

$$A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$$

de n intervalles non-consécutifs (c'est-à-dire avec $\min I_{j+1} > 1 + \max I_j$ pour tout $j = 1 \ldots n-1$) sont des facteurs de x, sachant que l'on vient de voir que c'est le cas pour $n = 2$ (et c'est clair pour $n = 1$). Supposons donc le résultat vrai au rang $n-1$. Par hypothèse, les mots

$$u_{I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_{n-1}} \quad \text{et} \quad u_{I_n}$$

sont des facteurs de x. Leur concaténation z est alors produit de deux facteurs de x, et puisque z appartient à l'ensemble monochromatique, il est **rouge**, et est donc nécessairement un facteur de x, achevant la récurrence.

Comme toute partie finie A de $\mathbb{N}^*$ est réunion finie d'intervalles non-consécutifs, on en déduit que tous les mots u_A sont des facteurs de x, contrairement à notre hypothèse de départ. Ceci montre la proposition 3.2.4. □

La preuve du résultat 3.1.4 stipulant qu'au moins un élément de l'orbite dynamique de x possède une factorisation super-monochromatique, définie en 3.1.1, repose sur la construction d'une famille de mots $(u_i)_{i\geq 1}$ vérifiant l'hypothèse des suffixes : pour tout $n \geq 1$, le mot $u_1u_2\cdots u_n$ est un suffixe de u_{n+1}. La prochaine réduction 3.2.6 permet d'assurer cette hypothèse en présence d'une factorisation super-monochromatique définie en 3.1.1. Cependant cette réduction 3.2.6 n'est pas aussi puissante que la réduction 3.2.4 que nous venons d'obtenir précédemment : se ramener à cette hypothèse des suffixes dans l'étude de la conjecture 3.1.2 nécessite l'utilisation d'une couleur supplémentaire.

Définition 3.2.5
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. Soit C_{suff} la coloration définie sur l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$, pour u un facteur de x par :
— $C_{suff}(u) =$ ***rouge*** *s'il existe une décomposition $u = v_1v_2$ avec $A(v_1) = A(u)$ et $B(v_2) = B(u)$,*
— $C_{suff}(u) =$ ***bleu*** *dans le cas contraire.*

On voit grâce à cette définition 3.2.5 ainsi qu'a la proposition 3.2.6 suivante à quel point l'utilisation des fonctions premières occurrence 3.1.5 s'avère pertinente pour cerner le problème de la factorisation super-monochromatique 3.1.2. On rappelle que la considération de ces fonctions réalise un des aspects intrinsèques et général des mots infinis non-ultimement périodique selon 3.1.7 et 3.1.8.

Proposition 3.2.6
Soit x un mot infini non-ultimement périodique sur un alphabet $\mathcal{A}$. Supposons qu'un suffixe y de x admette une factorisation super-monochromatique pour la coloration C_{suff}. Alors ce suffixe admet une factorisation super-monochromatique $y = u_1u_2u_3\cdots$, où les $(u_i)_{i\geq 1}$ satisfont à l'hypothèse des suffixes, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 1$, le mot $u_1u_2\cdots u_n$ est un suffixe de u_{n+1}.

Preuve. Soit

$$T^k(x) = u_1u_2u_3\cdots$$

un suffixe de x admettant une factorisation super-monochromatique pour la coloration C_{suff}, selon 3.1.1. On suppose que

$$A(u_1) = k \quad \text{et } B(u_i) = A(u_{i+1}) \text{ pour tout } i \geq 1$$

et on suppose aussi, quitte à allonger à nouveau les facteurs de la factorisation, que

$$\text{Pour tout } n \geq 1, \quad |u_{n+1}| \geq |u_1u_2\cdots u_n|$$

d'après 3.1.8. Dans ces conditions, il est clair que u_1u_2 est **rouge** d'après 3.2.5, et la factorisation est donc monochromatique selon la couleur **rouge**.

Soit $n \geq 1$, et considérons le facteur $u_1u_2\cdots u_nu_{n+2}$, qui est **rouge** d'après 3.1.1. Il existe alors une décomposition

$$u_1u_2\cdots u_nu_{n+2} = v_1v_2$$

avec $A(v_1) = A(u_1u_2\cdots u_nu_{n+2})$ et $B(v_2) = B(u_1u_2\cdots u_nu_{n+2})$ d'après 3.2.5.

Si v_1 était un préfixe de $u_1u_2\cdots u_n$, alors on aurait

$$A(u_1u_2\cdots u_nu_{n+2}) = A(v_1) \leq A(u_1u_2\cdots u_n) = A(u_1) = k$$

d'après 3.1.8 et de plus u_{n+2} serait un suffixe de v_2, de sorte que

$$B(u_{n+2}) \leq B(v_2) = B(u_1u_2\cdots u_nu_{n+2}),$$

de telle manière que, d'après 3.1.5, 3.1.6 et 3.1.8,

$$\begin{aligned}|u_1u_2\cdots u_nu_{n+2}| &= B(u_1u_2\cdots u_nu_{n+2}) - A(u_1u_2\cdots u_nu_{n+2})\\ &\geq B(u_{n+2}) - A(u_1) = |u_1u_2\cdots u_nu_{n+1}u_{n+2}|\\ &= |u_{n+1}| + |u_1u_2\cdots u_nu_{n+2}|\\ &> |u_1u_2\cdots u_nu_{n+2}|\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Ainsi v_1 n'est pas préfixe de $u_1u_2\cdots u_n$, et c'est donc $u_1u_2\cdots u_n$ qui est préfixe de v_1.

On en déduit v_2 est un suffixe de u_{n+2}, et on a :

$$B(v_2) \leq B(u_{n+2}) \leq B(u_1u_2\cdots u_nu_{n+2}) = B(v_2)$$

d'après 3.1.5 et 3.1.6, d'où l'on déduit $B(u_1u_2\cdots u_nu_{n+2}) = B(u_{n+2})$. Et cette égalité implique que $u_1u_2\cdots u_n$ est un suffixe de u_{n+1}. □

3.3 Longueur consécutive et cas des mots sans facteurs carrés arbitrairement grands

Cette section contient de nouveaux résultats. Le résultat principal de cette section est le théorème 3.3.10.

Dans le but d'étudier la conjecture énoncée, on a vu qu'il était pertinent d'étudier les premières occurrences des facteurs dans un mot infini. En allant plus loin dans cette optique, nous introduisons la notion de longueur consécutive. Face à un mot infini x sur un alphabet $\mathcal{A}$, munit d'une factorisation

$$T^m(x) = u_1u_2u_3\cdots$$

d'un de ses suffixes, cette notion sert à mettre en évidence les différences intrinsèques entre les mots de la forme

$$u_iu_{i+1}\cdots u_{j-1}u_j$$

pour lesquels on saura garantir une longueur consécutive arbitrairement grande, et les mots de la forme

$$u_{n_1}u_{n_2}\cdots u_{n_k}$$

avec $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, pour lesquels on peut espérer une longueur consécutive proche de 1. On renvoit le lecteur à l'énoncé 3.1.5 pour la définition des fonctions premières occurrences A et B.

Définition 3.3.1
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$, et u un facteur de x. Une décomposition

$$u = v_1v_2\cdots v_l$$

est dite consécutive lorsque

$$A(v_1) = A(u), \quad B(v_l) = B(u)$$

et si, pour tout $1 \leq i \leq l-1$, on a

$$B(v_i) = A(v_{i+1}).$$

On dit que deux facteurs u et v de x sont consécutifs si $B(u) = A(v)$.

On a vu dans 3.1.8, pour un mot infini x non-ultimement périodique sur un alphabet $\mathcal{A}$, dans une factorisation d'un suffixe de x

$$T^m(x) = u_1u_2u_3\cdots\ ,$$

si les $(u_i)_{i\geq 1}$ sont assez long, alors toutes les décompositions

$$u_i u_{i+1} \cdots u_j$$

sont des décompositions consécutives. Cette remarque est en fait à la base de notre considération de la longueur consécutive, que nous définissons maintenant. D'après la propriété 3.1.7, les fonctions premières occurrences A et B ne sont pertinente que dans le cas non-ultimement périodique, c'est pourquoi nous énonçons nos résultats pour les mots infinis non-ultimement périodiques.

Définition 3.3.2 (Longueur consécutive)
Soit x un mot infini défini sur un alphabet $\mathcal{A}$, et u un facteur de x. On définit la longueur consécutive $L(u)$ de u, associée à x, comme le nombre maximal de termes pouvant apparaitre dans une décomposition consécutive de u. Une décomposition consécutive d'un facteur u de x est dite maximal lorsqu'elle a $L(u)$ termes.

On prendra garde que la notion de longueur consécutive change considérablement en fonction du mot x, et qu'en particulier, un mot $y \in \Omega(x)$ définira une longueur consécutive bien différente.

Définition 3.3.3
Soit x un mot infini défini sur un alphabet $\mathcal{A}$, et soit L la longueur consécutive associée. On dit qu'un facteur u de x est irréductible pour la longueur consécutive de x (ou tout simplement irréductible), lorsque $L(u) = 1$. Une décomposition consécutive d'un facteur u de x est dite irréductible lorsque tous ses termes sont irréductibles.

Les facteurs irréductibles d'un mot infini x sont en général les plus difficiles à saisir. La proposition 3.3.4 suivante indique que tout facteur u de x admet une décomposition irréductible.

Proposition 3.3.4
Soit x un mot infini défini sur un alphabet $\mathcal{A}$, L la longueur consécutive associée, et u un facteur de x. Alors toute décomposition maximale de u est irréductible. De plus, si $u = v_1 v_2 \cdots v_{L(u)}$ est une décomposition maximale, alors on a

$$L(v_i v_{i+1} \cdots v_j) = j - i + 1$$

pour tout $1 \leq i \leq j \leq L(u)$.

Preuve. En effet, étant donné une décomposition consécutive maximale $u = v_1 v_2 \cdots v_{L(u)}$, selon la définition 3.3.3, tous les termes sont nécessairement de longueur consécutive valant 1, car sinon il existerait une décomposition consécutive définie en 3.3.1 de u de longueur strictement plus grande que sa longueur consécutive, en contradiction avec sa définition 3.3.2. La seconde partie de la proposition se montre de la même manière, en remarquant qu'une décomposition extraite d'une décomposition consécutive est encore consécutive. □

La longueur consécutive définie en 3.3.2, en tant que longueur, est amenée à se comporter comme telle. Cependant, la longueur consécutive d'une concaténation de deux facteurs, même supposés consécutifs selon 3.3.1, n'est pas nécessairement la somme de leur deux longueurs consécutives selon 3.3.2. Cependant, on dispose d'un encadrement 3.3.5, optimal, dont on appelle l'énoncé le défaut de la longueur consécutive.

Proposition 3.3.5 (Défaut de la longueur consécutive)
Soit x un mot infini non-ultimement périodique sur un alphabet $\mathcal{A}$, et L la longueur consécutive associée. Soient u et v deux facteurs consécutifs de x. Alors on a

$$L(u) + L(v) \leq L(uv) \leq L(u) + L(v) + 1.$$

Preuve. Pour la première inégalité, si

$$u = v_1 v_2 \cdots v_{L(u)} \quad \text{et} \quad v = w_1 w_2 \cdots w_{L(v)}$$

sont deux décompositions maximales de u et v. On en déduit que la décomposition

$$uv = v_1 v_2 \cdots v_{L(u)} w_1 w_2 \cdots w_{L(v)}$$

est consécutive selon 3.3.1 puisque les deux facteurs u et v sont consécutifs d'après 3.3.1.

Pour la seconde, écrivons

$$uv = v_1 v_2 \cdots v_{L(uv)}$$

une décomposition maximale de uv. Soit $1 \leq i \leq L(uv)$ un indice tel que $v_1 v_2 \cdots v_{i-1}$ soit un préfixe de u et $v_{i+1} v_{i+2} \cdots v_{L(uv)}$ soit un suffixe de v. Alors ces deux décompositions sont des décompositions consécutives, définies en 3.3.1, vu que u et v sont consécutifs, selon 3.3.1, et on a les deux inégalités

$$L(v_1 v_2 \cdots v_{i-1}) = i - 1 \leq L(u) \quad \text{et} \quad L(uv) - i \leq L(v)$$

d'où le résultat 3.3.5 en sommant. □

Il peut arriver que l'on ait $L(uv) \neq L(u) + L(v)$, même avec des facteurs u et v consécutifs. Par exemple, pour le mot

$$x = abcdef(acd)(bfc)edsuiacdzemiadsuovd \cdots$$

et les deux facteurs $U = acd$ et $V = bfc$, qui sont consécutifs irréductibles, on a

$$L(UV) = 3$$

vu la décomposition consécutive $UV = (ac)(db)(fc)$.

Lorsque les deux facteurs considérés ne sont pas consécutifs, selon 3.3.1, la longueur consécutive de leur concaténation peut drastiquement diminuer.

Proposition 3.3.6
Soient x un mot infini non-ultimement périodique sur un alphabet $\mathcal{A}$, et L la longueur consécutive associée. Soient u et v deux facteurs de x tels que uv soit un facteur de x, et tels que $B(u) < A(v)$. Si $B(uv) \neq B(v)$, alors uv est irréductible. Si $B(uv) = B(v)$, alors $L(v) \leq L(uv) \leq L(v) + 1$.

Preuve. Supposons d'abord que $B(uv) \neq B(v)$ et supposons qu'il existe une décomposition consécutive $uv = v_1 v_2$ avec $A(v_1) = A(uv)$ et $B(v_2) = B(uv)$, selon 3.1.5 et 3.3.1. Puisque $B(uv) \geq B(v)$ d'après 3.1.6, on a l'inégalité stricte $B(uv) > B(v)$. Si v_1 est préfixe de u, alors on a

$$A(uv) = A(v_1) \leq A(u) \leq A(uv)$$

d'après 3.1.6, et ces inégalités sont des égalités, d'où l'on tire

$$\begin{aligned} B(u) &= A(u) + |u| \\ &= A(uv) + |u| \\ &= B(uv) - |uv| + |u| \\ &= B(uv) - |v| \\ &> B(v) - |v| \\ &= A(v) \end{aligned}$$

d'après 3.1.6, contredisant notre hypothèse $B(u) < A(v)$.

Pour la seconde partie, la première inégalité s'obtient en remarquant que si $v = v_1 v_2 \cdots v_{L(v)}$ est une décomposition consécutive maximale de v, alors $uv = (uv_1)v_2 \cdots v_{L(v)}$ est une décomposition consécutive de uv, selon la définition 3.3.1. Pour la seconde inégalité, écrivons $uv = v_1 v_2 \cdots v_{L(uv)}$ une décomposition maximale, et puisque

$$\begin{aligned} B(u) &< A(v) \\ &= B(v) - |v| \\ &\leq B(uv) - |v| \\ &= A(uv) + |uv| - |v| \\ &= A(uv) + |u|, \end{aligned}$$

d'après 3.1.6, on a $A(u) < A(uv)$ et donc v_1 n'est pas préfixe de u. Ceci entraine que u est préfixe de v_1 et donc $v_2 v_3 \cdots v_{L(uv)}$ est une décomposition consécutive, définie en 3.3.1, d'un suffixe de v, et ainsi $L(uv) - 1 \leq L(v)$. □

On termine par une propriété 3.3.7 précisant les valeurs possibles de la longueur consécutive. Cette propriété 3.3.7 stipule en particulier qu'il est licite d'assurer l'existence de facteurs irréductibles, définis en 3.3.3, commençant à des positions arbitraires dans un mot infini x non-ultimement périodique.

Proposition 3.3.7
Soit x un mot infini non-ultimement périodique, et L la longueur consécutive associée. Alors pour tout $k \geq 0$ et tout $l \geq 1$, il existe un facteur u de x avec $A(u) = k$ et $L(u) = l$.

Preuve. On considère une factorisation $T^k(x) = u_1 u_2 u_3 \cdots$ où les $(u_i)_{i \geq 1}$ sont assez longs pour garantir que $B(u_i) = A(u_{i+1})$ pour tout $i \geq 1$ et $A(u_1) = k$. Alors $L(u_1 u_2 \cdots u_i) \geq i \to +\infty$. Etant donné un facteur u de x avec $A(u) = k$ et $L(u) = m$ pour $m \geq 1$ qui peut être pris arbitrairement grand, et en écrivant $u = v_1 v_2 \cdots v_m$, on voit que le mot $v_1 v_2 \cdots v_l$ satisfait aux conditions recherchées. □

La dernière propriété 3.3.8 que nous démontrons concernant la longueur consécutive stipule qu'elle constitue une fonction définie sur l'ensemble des facteurs d'un mot infini qui permet de différencier un suffixe d'un mot infini d'un élément de son orbite dynamique.

Proposition 3.3.8
Soit x un mot infini non-ultimement périodique sur un alphabet $\mathcal{A}$ et L la longueur consécutive associée. Soit $y \in \Omega(x)$, alors y est un suffixe de x si et seulement si il n'admet qu'un nombre fini de préfixe irréductibles.

Preuve. On a vu qu'un préfixe suffisament long d'un suffixe de x aura une longueur consécutive arbitrairement grande. Réciproquement, on remarque en premier lieu qu'un mot infini $y \in \Omega(x)$ est un suffixe de x si et seulement si

$$\lim_n A(\mathbb{P}_n(y)) < +\infty.$$

Si on suppose que y n'est pas un suffixe de x, puisque dans une décomposition consécutive maximale d'un mot $u = v_1 v_2 \cdots v_{L(u)}$, le mot v_1 est irréductible et qu'il vérifie $A(v_1) = A(u)$, on peut associer de manière injective à chaque valeurs de la suite $(A(\mathbb{P}_n(y)))_{n \geq 1}$ un facteur irréductible. C'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble $M \subset \mathbb{N}$, infini, et une fonction φ injective définie sur M à valeurs dans l'ensemble des facteurs irréductibles qui sont préfixes de y. Ceci démontre que y admet un nombre infini de préfixes irréductibles. □

Dans la suite de cette section on utilise la longueur consécutive pour construire une coloration répondant à la conjecture dans le cas des mots infinis ne contenant pas de carrés arbitrairement grands. Cette classe est plus grande que la classe des mots sans facteurs carrés, puisqu'on sait qu'il existe, selon [145] un tel mot infini sur un alphabet à seulement deux lettres. Pour les articles historiques de A. Thue sur les évitements des carrés [164, 165].

Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. Pour u un facteur de x, on définit les quatres ensembles :
— $\lambda_+(u) = \{v \text{ irréductible avec } B(vu) = B(u) \mid B(v) = A(u)\}$,
— $\lambda_-(u) = \{v \text{ irréductible avec } B(vu) = B(u) \mid B(v) < A(u)\}$,
— $\rho_+(u) = \{v \text{ suffixe irréductible de } u \mid B(v) = A(u)\}$,
— $\rho_-(u) = \{v \text{ suffixe irréductible de } u \mid B(v) < A(u)\}$,
en renvoyant à 3.3.3 pour la définition d'un facteur irréductible.

Vu les propriétés énoncées en 3.3.7 de la longueur consécutive, pour un mot u qui n'est pas un préfixe de x, les ensembles $\lambda_+(u)$ et $\rho_+(u)$ ne sont pas vides. Nous donnons dans la définition suivante, à l'aide de ces ensembles, une coloration nous permettant de donner une validation de la conjecture 3.1.2 de la factorisation super-monochromatique dans le cas des mots infinis ne contenant pas de carrés arbitrairement grands.

Définition 3.3.9
Soit x un mot infini non-ultimement périodique, et L la longueur consécutive associée. On définit la coloration C, à trois couleurs, pour u un facteur de x par :

— $C(u) = C_{NF}(u)$ *si* u *n'est pas un facteur de* x*, selon la définition 3.2.3,*
— $C(u) =$ ***blanc*** *si* u *est irréductible.*
— $C(u) =$ ***rouge*** *si* $L(u) \geq 2$ *et qu'on a les égalités d'ensembles*

$$\lambda_+(u) = \rho_+(u) \quad \text{et} \quad \lambda_-(u) = \rho_-(u)$$

— $C(u) =$ ***bleu*** *dans les autres cas,*

La couleur **blanc** sera utilisée pour fournir l'hypothèse des suffixes d'après 3.2.6. On notera que le mot de Zimin est un mot sans facteurs carrés.

Théorème 3.3.10
On suppose que le mot infini x *ne contient pas de carrés arbitrairement grands. Alors* x *n'admet aucun suffixe ayant une factorisation super-monochromatique pour la coloration* C*.*

Preuve. Soit

$$T^k(x) = u_1u_2u_3\cdots$$

une factorisation super-monochromatique d'un suffixe de x, selon 3.1.1. Compte tenu de 3.2.4 et de 3.3.9, on peut supposer que tous les mots de la famille :

$$(u_{n_1}u_{n_2}\cdots u_{n_k})_{k\geq 1, n_1<n_2<\cdots<n_k}$$

sont des facteurs de x. D'après les remarques précédent la définition 3.3.2 et la définition 3.1.1, on peut supposer que les termes $(u_i)_{i\geq 1}$ sont de longueur consécutive plus grande que 2, et ainsi la factorisation ne peut pas être monochromatique pour la couleur **blanc**. Par la définition 3.1.1, la définition 3.3.9, la définition 3.2.5 et la proposition 3.2.6, on en déduit que x admet une factorisation super-monochromatique dont les termes satisfont à la propriété des suffixes. Quitte à renommer les termes de la factorisation, on peut donc supposer que les $(u_i)_{i\geq 1}$ satisfont à la propriété des suffixes : pour tout $n \geq 1$, $u_1u_2\cdots u_n$ est un suffixe de u_{n+1}. De plus, on peut supposer, selon les remarques suivant la définition 3.3.2, que la factorisation est consécutive, c'est-à-dire que $B(u_i) = A(u_{i+1})$ pour tout $i \geq 1$, et que $A(u_1) = k$, avec l'aide de 3.1.5. On va montrer que u_{n+1} est de couleur **rouge** selon 3.3.9, et pour cela on procède par double inclusion pour les deux égalités d'ensemble. Quitte à considérer la factorisation à partir du mot u_2, on peut supposer que $k > 0$, et on a vu dans les remarques précédent la définition 3.3.9 que cela impliquait que les deux ensembles $\lambda_+(u)$ et $\rho_+(u)$ ne soient pas vides. On suppose de plus sans pertes de généralités que $|u_n| < |u_{n+1}|$ pour tout $n \geq 1$, grâce à 3.1.1.

Montrons que $\lambda_+(u_{n+1}) \subset \rho_+(u_{n+1})$. Soit $v \in \lambda_+(u_{n+1})$, c'est-à-dire tel que $L(v) = 1$, $B(vu_{n+1}) = B(u_{n+1})$ et $B(v) = A(u_{n+1})$, d'après 3.1.5. Puisque $B(vu_{n+1}) = B(u_{n+1})$, soit v est un suffixe de u_n, soit u_n est un suffixe de v. Mais puisque v est irréductible, notion pour laquelle on renvoit à 3.3.3, et que u_n est supposé de longueur consécutive plus grande que 2, v est nécessairement un suffixe de u_n. Par l'hypothèse des suffixes que l'on a obtenue au début de la démonstration à l'aide de la proposition 3.2.6, v est un suffixe de u_{n+1}. Puisque l'on a de plus $B(v) = A(u_{n+1})$, on en déduit que $v \in \rho_+(u_{n+1})$.

Montrons que $\rho_+(u_{n+1}) \subset \lambda_+(u_{n+1})$. Soit $v \in \rho_+(u_{n+1})$, de sorte que v est un suffixe irréductible de u_{n+1} avec $B(v) = A(u_{n+1}) = B(u_n)$. Ceci montre que soit v est un suffixe de u_n, soit u_n est un suffixe de v. Mais comme v est supposé irréductible, v est nécessairement suffixe de u_n, et on en déduit que $v \in \lambda_+(u_{n+1})$.

Montrons que $\lambda_-(u_{n+1}) \subset \rho_-(u_{n+1})$. Soit $v \in \lambda_-(u_{n+1})$, alors puisque $B(vu_{n+1}) = B(u_{n+1})$, soit v est un suffixe de u_n, soit u_n est un suffixe de v. Mais puisque $B(v) < A(u_{n+1}) = B(u_n)$, u_n n'est pas suffixe de v, d'où le fait que v est un suffixe de u_n, et par l'hypothèse des suffixes, v est un suffixe de u_{n+1}. On en déduit que $v \in \rho_-(u_{n+1})$.

Montrons que $\rho_-(u_{n+1}) \subset \lambda_-(u_{n+1})$. Soit $v \in \rho_-(u_{n+1})$, puisque v est un suffixe irréductible de u_{n+1}, par l'hypothèse des suffixes soit u_n est suffixe de v soit v est suffixe de u_n. Mais si u_n était suffixe de v, on aurait $A(u_{n+1}) = B(u_n) \leq B(v)$ d'après 3.1.6, alors qu'on a supposé le contraire. C'est donc que v est suffixe irréductible de u_n et on en déduit que $v \in \lambda_-(u_{n+1})$.

Ceci montre que le mot u_{n+1} est **rouge**, et que la factorisation est super-monochromatique pour la couleur **rouge**, d'après les définitions 3.3.9 et 3.1.1.

Le mot u_nu_{n+2} est donc **rouge** lui aussi, d'après 3.3.9 et 3.1.1. Soit $v \in \lambda_+(u_nu_{n+2})$, de sorte que v est irréductible avec $B(v) = A(u_nu_{n+2}) = A(u_{n+2}) - |u_n|$. Puisque $\lambda_+(u_nu_{n+2}) = \rho_+(u_nu_{n+2})$, v est un suffixe de u_nu_{n+2}, mais vu que $B(v) < A(u_{n+2}) = B(u_{n+1})$, u_{n+1} n'est pas suffixe de v, et donc c'est v qui est suffixe de

u_{n+1}. Ainsi $v \in \rho_-(u_{n+2}) = \lambda_-(u_{n+2})$. Mais on a $A(v) > B(u_n)$ sous l'hypothèse $|u_{n+1}| > |u_n|$, et la propriété des suffixes implique que u_n est un suffixe de v. Mais puisque $B(v) = A(u_n u_{n+2})$, le suffixe $u_n u_n$ de vu_n est un facteur de x. Vu que le mot $u_n u_n$ peut être choisit arbitrairement grand avec n, on en déduit que x contient des carrés arbitrairement grands. C'est une contradiction avec notre hypothèse initiale. □

Perspectives

Nous présentons ici certaines perspectives du travail effectué dans la thématique de l'analyse des différences entre les suffixes d'un mot infini et les éléments de son orbite dynamique, ainsi que des problématiques générales des factorisations monochromatiques de suffixes de mots infinis. Ces questions n'ont pas pu être encore élucidées, et mériteraient une recherche plus approfondie.

Il serait intéressant de fournir d'autres constructions optimales pour d'autres mots, célèbres ou non. Des constructions pour les mots de Thue-Morse, ou encore de Fibonacci, ou plus généralement les mots automatiques, morphiques ou sturmiens peuvent être envisagées, même s'il faudrait se poser la question de l'importance donnée à de telles constructions. La structure du mot de Zimin est inhérente aux problèmes de factorisation super-monochromatique, comme on le voit par l'application du théorème de Hindman, ou par ce que l'on a appelé l'hypothèse des suffixes, et c'est pour cela que traiter une classe de mots à laquelle il appartient était scientifiquement justifié.

Question 9
Peut-on trouver des résultats partiels concernant d'autres classes de mots pour la conjecture de la factorisation super-monochromatique ?

La classe des mots automatiques, déjà considérée spécifiquement dans le cas du théorème de la factorisation monochromatique, pourrait permettre de mieux cerner la validité de la conjecture de la factorisation super-monochromatique. Ce type de conjecture a tendance à se comporter assez mal vis-à-vis des morphismes de mots, mais il pourrait être possible d'obtenir certains résultats significatifs. L'auteur du présent doctorat souligne tout de même que la construction explicite de colorations ayant peu de couleurs mais beaucoup de propriétés remarquables devrait apporter des résultats plus significatifs que des résultats techniques portant sur des colorations ayant un nombre très important de couleurs. Enfin, notons que pour le théorème de la factorisation monochromatique, les cas qui posaient le plus de problème étaient les cas des mots infinis de basse complexité, alors que dans le cas des factorisations super-monochromatiques, le cas des mots normaux par exemple semble pour l'instant hors d'atteinte.

On peut soulever des questions concernant les conditions de monochromatisme des factorisations des mots infinis. Dans notre étude de la conjecture de la factorisation super-monochromatique, nous demandons à ce que l'ensemble des suffixes d'un mot infini fixé x n'admette pas de factorisation super-monochromatique, mais on pourrait se poser des questions similaires concernant d'autres mots infinis construits à partir de x.

Question 10
Pour x un mot infini non-ultimement périodique sur un alphabet $\mathcal{A}$, et $S \subset \Omega(x)$ dénombrable, existe-il une coloration de l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$ tel qu'aucun élément de S n'admette de factorisation super-monochromatique ?

Ce type de question pourrait mettre en jeu d'autres théorèmes issus de la théorie de Ramsey, qui pourraient assurer l'existence de mots ou familles de mots construit à partir d'un mot fixé x vérifiant des conditions de factorisations monochromatiques. Le cas par exemple des factorisations dont les concaténations, pas nécessairement ordonnées, des termes pourrait admettre des dévellopement mettant en évidence d'autres limites de la théorie de Ramsey dans le contexte de la combinatoire des mots.

La dernière notion que nous introduisons comme contribution de ce doctorat, la longueur consécutive, nécessite d'être l'objet d'analyses plus spécifiques. Calculer la longueur consécutive exacte d'un facteur d'un mot infini est en général une question très difficile, et au contenu intuitif très important. Des expressions de cette longueur dans les systèmes de numérations en base p pour les mots automatiques, ou dans le système de numération d'Ostrowski pour le cas des mots sturmiens, peuvent être envisagés.

Question 11
Peut-on donner des formules générales décrivant la longueur consécutive des facteurs d'un mot infini non-ultimement périodique ? Peut-on controler cette quantité, ou donner des formules de comparaisons avec la longueur classique des mots ?

De manière générale, comprendre le comportement de la longueur consécutive devrait apporter des informations quantitatives sur la capacité d'un mot à présenter de nouveaux motifs, c'est-à-dire sa faculté à présenter des répétitions. Ce type de considération s'inscrit donc naturellement dans le cadres d'étude de ce doctorat. De même, donner une caractérisation ou une description des facteurs irréductibles pour la longueur consécutive d'un mot infini font partie des problématiques naturellement soulevée par cette notion introduite comme contribution de ce doctorat.

"It was indeed a filthy process in which I was engaged."

- Bernie Wrightson's Frankenstein (illustration).

Deuxième partie

Intercepts formels des mots sturmiens

4

Fonction de répétition et Graphe de Rauzy

Le premier chapitre de la seconde partie de ce doctorat présente la classe des mots sturmiens, en se concentrant sur leur construction combinatoire. Outre les définitions et résultats classiques liés à cette classe de mots de basse complexité, nous étudions certains objets qui leurs sont associés, à savoir leur fonction de répétition ainsi que leur graphe de Rauzy, qui permettent une description précise de leur structure.

Dans une première section, nous énonçons les différentes étapes de la construction des mots sturmiens. Nous donnons la définition de la fonction de complexité des mots infinis, puis nous énonçons le théorème de Morse-Hedlund, pour donner la définition des mots sturmiens, en précisant la structure de leur ensemble de facteur et du mot caractéristique associé à une pente. Dans une seconde section, nous donnons la description du mot caractéristique à l'aide des fractions continues, en précisant leur lien avec la classe des mots centraux. Dans la troisième section, nous utilisons cette construction combinatoire pour étudier la fonction de répétition et le graphe de Rauzy du mot caractéristique, dans l'optique de pouvoir étendre cette étude aux mots sturmiens généraux dans le chapitre 5.

4.1 Généralités sur les mots sturmiens

Cette section ne contient pas de nouveaux résultats.

Dans cette section nous donnons les définitions, résultats généraux et théorèmes concernant la classe des mots sturmiens, en insistant sur les énoncés de nature combinatoire, puisque le formalisme que nous introduisons dans cette seconde partie de doctorat consiste en une construction purement combinatoire de la classe des mots sturmiens, en particulier du second paramètre qui les caractérise, leur intercept. Nous donnons en outre la définition et plusieurs caractérisations classiques du mot caractéristique associé à une pente.

La définition suivante présente la fonction de complexité $p(x, \cdot)$ d'un mot infini x sur un alphabet $\mathcal{A}$. Cette fonction a été introduite par Morse et Hedlund [129], à l'occasion de la démonstration du théorème 4.1.2 portant leur nom. Ce théorème stipule qu'un mot infini admet une fonction de complexité qui est soit bornée, soit de complexité au moins linéaire, et l'article [129] est considéré comme l'article ayant donné naissance à la discipline de la dynamique symbolique. La fonction de complexité est une fonction fondamentale de la combinatoire des mots, et son comportement général est très difficile à comprendre. L'article [3] étudie les nombres réels dont le développement dans une base entière admet une fonction de complexité sous-linéaire, et présente de nombreux résultats basés sur cette notion de complexité, dont nous reparlerons plus en détail dans le chapitre 5. La fonction de complexité des mots infinis a fait l'objet de multiples travaux, voir [49, 50, 75, 83, 130], et plusieurs variantes et généralisations sur les mots infinis ont été introduites et étudiées, par exemple dans [11, 15, 53, 54, 107, 151]. De manière générale, la notion de complexité d'un système dynamique est un sujet très vaste, thème de diverses

recherches [14, 27, 65, 84, 125, 126, 142]. Le théorème de Morse et Hedlund 4.1.2, démontré pour la première fois dans [129], a été l'objet de plusieurs travaux, dont [52]. Une généralisation multidimensionnelle est par exemple étudiée dans [70].

Définition 4.1.1
Soit $x = x_1x_2x_3\cdots$ un mot infini défini sur un alphabet $\mathcal{A}$ fini. Pour $n \geq 1$, on pose

$$p(x,n) = Card\{x_ix_{i+1}\cdots x_{i+n-1} \mid i \geq 1\}.$$

La fonction $p(x,\cdot)$ est appelée la fonction de complexité de x.

Voir [129], théorème 7.3.

Théorème 4.1.2 (Morse-Hedlund)
Soit x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) x est ultimement périodique,

ii) il existe un entier $n \geq 1$ tel que $p(x,n) = p(x,n+1)$,

iii) il existe un entier $n \geq 1$ tel que $p(x,n) \leq n$,

iv) la fonction de complexité $p(x,\cdot)$ est bornée.

Ce théorème admet la reformulation suivante : si x est un mot non-ultimement périodique, alors $p(x,n) \geq n+1$ pour tout $n \geq 1$. Il donne aussi une illustration de la raison pour laquelle la fonction de complexité mesure effectivement la complexité d'un mot infini, les mots infini ultimement périodique étant naturellement attendus comme ceux de complexité minimale.

Définition 4.1.3 (Mots sturmiens)
Un mot infini x est dit sturmien lorsque

$$\forall n \geq 1,\ p(x,n) = n+1.$$

Les mots sturmiens ont fait l'objet de multiples études à la suite de la découverte du théorème de Morse et Hedlund. On pourra consulter sur ce thème les articles [17, 18, 28, 34, 41, 117, 137]. La définition des mots sturmiens à l'aide de la fonction de complexité et les nombreuses propriétés qu'ils vérifient soulignent la richesse de la fonction de complexité : il est remarquable que cette contrainte spécifique mène à une classe de mots disposant d'autant de facettes arithmétiques, dynamiques, géométriques et combinatoires.

Noter qu'un mot sturmien x est nécessairement défini sur un alphabet à deux lettres, puisque $p(x,1) = 2$ selon la définition 4.1.3. Nous allons donc supposer à partir de maintenant que

$$\mathcal{A} = \{0,1\}.$$

Le théorème suivant caractérise les mots sturmiens à l'aide d'une propriété d'équilibre, qui traduit une certaine homogénéité dans l'apparition d'une des deux lettres constituant un mot sturmien. On pourra trouver une démonstration de cet énoncé dans [116], théorème 2.1.5.

Théorème 4.1.4
Soit x un mot infini sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0,1\}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *le mot x est sturmien,*
2. *le mot x est non-ultimement périodique, et satisfait à la propriété d'équilibre : pour tout facteur u et v de x avec $|u| = |v|$, on a :*

$$||u|_1 - |v|_1| \leq 1,$$

3. *le mot x est non-ultimement périodique, et satisfait à la propriété suivante, équivalente à la propriété d'équilibre : pour tout facteurs u, v de x,*

$$\left|\frac{|u|_1}{|u|} - \frac{|v|_1}{|v|}\right| < \frac{1}{|u|} + \frac{1}{|v|},$$

4. *le mot x satisfait à la propriété d'équilibre, et le nombre*

$$\alpha = \lim_{|u|\to+\infty} \frac{|u|_1}{|u|}$$

est un nombre irrationnel.

Le nombre $\alpha \in]0,1[$ présenté dans le théorème 4.1.4 existe par la propriété d'équilibre, en effet cette propriété implique que la famille des nombres $|u|_1/|u|$ se comporte comme une suite de Cauchy lorsque u parcourt les facteurs de x. On notera le fait remarquable, contenu dans l'énoncé 4.1.4, que pour un mot sturmien ce nombre ne peut être rationnel. Ce nombre α s'appelle la pente du mot sturmien x. Il est le premier paramètre caractérisant un mot sturmien, il code en particulier l'orbite dynamique $\Omega(x)$. Par la suite,

on désignera par « pente » tout réel $\alpha \in]0,1[$ qui est irrationnel.

La proposition suivante, classique propriété connue des mots sturmiens [116], montre que la donnée de la pente caractérise l'ensemble des facteurs, et donc l'orbite dynamique d'un mot sturmien. Voir [116], proposition 2.1.18.

Proposition 4.1.5 1. *Deux mots sturmiens de même pente partagent les mêmes ensembles de facteurs et la même orbite dynamique.*

2. *Deux mots sturmiens de pentes différentes n'ont qu'un nombre fini de facteurs en communs, et des orbites dynamiques disjointes.*

En remarquant que, pour un mot sturmien x, $T(x)$ n'est pas ultimement périodique selon 4.1.2 et 4.1.3, on voit que les mots infinis x et $T(x)$ ont les même ensemble de facteurs. Pour tout $n \geq 1$, il existe un unique facteur L_n de x de longueur n tel que les deux mots $0L_n$ et $1L_n$ soient tout deux facteurs de x selon la définition 4.1.3, et on les appelle les facteurs spéciaux à gauche. De même, pour tout $n \geq 1$, selon 4.1.3, il existe un unique facteur R_n de x de longueur n tel que les deux mots R_n0 et R_n1 soient facteurs de x, et ce mot est appelé un facteur spécial à droite. Par unicité, les facteurs spéciaux à gauche d'un mot sturmien sont préfixes les uns des autres et les facteurs spéciaux à droite sont suffixes les uns des autres.

On précise rapidement comment reconstruire l'ensemble des facteurs d'un mot sturmien à partir de sa pente α. En prenant $u = 0L_n$ d'une part, et $u = 1L_n$ d'autre part dans la relation d'équilibre 4.1.4.3), et en passant à la limite sur v dans les deux inégalités, on obtient les relations

$$\left|\frac{|L_n|_1}{n} - \alpha\right| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \left|\frac{1+|L_n|_1}{n} - \alpha\right| < \frac{1}{n},$$

et ceci détermine uniquement à partir de la pente le nombre $|L_n|_1$ comme l'unique entier dans l'intervalle $]n\alpha - 1, n\alpha + 1[\cap]n\alpha - 2, n\alpha[=]n\alpha - 1, n\alpha[$ et en écrivant

$$L_n = \prod_{i=1}^{n} (|L_i|_1 - |L_{i-1}|_1)$$

où $|L_0|_1 = 0$ et $|L_i|_1 - |L_{i-1}|_1 \in \{0,1\}$ est considéré comme une lettre. La suite des $(L_n)_{n\geq 1}$ est donc bien déterminée par la pente, et définit un mot infini $c_\alpha = \lim L_n$ vérifiant la propriété d'équilibre et de pente irrationnelle, dont les facteurs sont les facteurs du mot sturmien considéré.

Définition 4.1.6
Pour tout mot sturmien de pente α, la suite $(L_n)_{n\geq 1}$ de ses facteurs spéciaux à gauche définit un mot infini :

$$c_\alpha = \lim L_n$$

ne dépendant que de la pente α, noté c_α et appelé le mot caractéristique de la pente α.

La proposition suivante rassemble quelques propriétés connues et basiques concernant le mot caractéristique, ainsi que la propriété importante que l'ensemble des facteurs d'un mot sturmien est stable par image miroir. Pour un mot fini $u = u_1u_2\cdots u_n$ un mot fini, où les $(u_i)_{i=1}^n$ sont des lettres, on rappelle que l'on note $\widetilde{u} = u_nu_{n-1}\cdots u_1$ l'image miroir de u. Voir [116], proposition 2.1.22.

Proposition 4.1.7
Soit $(L_n)_{n\geq 1}$ et $(R_n)_{n\geq 1}$ les suites des facteurs spéciaux à gauche et à droite d'une pente α. Alors :

1) le mot sturmien x est caractéristique si et seulement si $0x$ et $1x$ sont sturmiens,

2) $c_\alpha = \lim \widetilde{R_n}$,

3) pour tout $n \geq 1$, $R_n = \widetilde{L_n}$,

4) l'ensemble des facteurs d'un mot sturmien est stable par image miroir,

5) pour tout mot sturmien x, au moins l'un des deux mots $0x$ ou $1x$ est sturmien.

On a vu qu'un premier paramètre décrivant un mot sturmien était donné par sa pente, nombre irrationnel α vérifiant $0 < \alpha < 1$. Le second paramètre caractérisant un mot sturmien de pente α est donné par son intercept. Nous allons présenter dans le chapitre 5 l'interprétation classiquement fournie (par exemple dans [116]) pour comprendre géométriquement et dynamiquement l'intercept d'un mot sturmien. Une des principales contributions de ce doctorat consiste en l'introduction, l'étude et le développement d'une description combinatoire, arithmétique et algébrique de ce second paramètre. Le chapitre 5 sera consacré à ce point de vue.

La notion d'intercept des mots sturmien telle que communément définie par des moyens dynamique n'est parfois pas adaptée au cadre combinatoire de certaines études. Cette présentation dynamique, qui est plus adéquate face à des problématiques liées aux fréquences d'apparition des facteurs, ou à la mesure de certains ensembles, n'est pas nécessairement un cadre judicieux pour étudier certaines propriétés combinatoires des mots sturmiens. Les questions de factorisations des mots sturmiens, du niveau logique requis pour les décrire entièrement ou les problèmes faisant intervenir l'arithmétique du système de numération d'Ostrowski sont typiquement des questions de factures discrètes pour lesquelles un point de vue dynamique peut s'avérer inadapté.

Le formalisme introduit dans cette seconde partie de doctorat permet une construction purement combinatoire des mots sturmiens, ne faisant intervenir que leur propriétés combinatoires les plus fondamentales. En particulier, nous présenterons des preuves et des résultats qui ne font pas appel aux mots mécaniques présentés dans [116]. Ceci justifie que nous précisions les preuves permettant d'accèder aux résultats classiques concernant les mots sturmiens qui n'utilisent pas la notion de mots mécaniques. La vérification de la consistance logique de l'introduction d'un tel formalisme, celui des intercepts formels, est tout autant l'un des aspects principaux des contributions de ce doctorat qu'une étape scientifique indispensable concernant le formalisme que nous développons.

Nous donnons dans les sections suivantes les étapes de la construction combinatoire des mots sturmiens et quelques propriétés qu'ils vérifient et que nous utiliserons dans notre étude.

4.2 Mots caractéristiques et centraux

Cette section ne contient pas de nouveaux résultats.

Nous donnons dans cette section des résultats connus concernant les mots caractéristiques et centraux. Les propriétés du mot caractéristique associé à une pente nous seront utiles tout au long de cette seconde partie de doctorat. La donnée d'une pente permet la construction du mot caractéristique associé, et nous verrons que le second paramètre décrivant un mot sturmien, donné par son intercept formel, permet de construire le mot sturmien considéré à l'aide du mot caractéristique correspondant à sa pente.

D'autre part, nous donnons quelques propriétés des mots centraux et standard, qui sont des classes de mots finis permettant de définir et de construire les mots sturmiens. Nous donnons certaines démonstrations concernant ces mots, ainsi que les propriétés qui les relient aux mots caractéristiques. Bien entendu, les classes des mots centraux et standard ont leur intérêt propre. Nous utiliserons les propriétés des mots centraux pour établir certains résultats, de caractère technique, sur la fonction de répétition et les graphes de Rauzy des mots sturmiens.

Nous énoncerons en particulier différentes caractérisations des mots centraux, et donnerons, rapidement, la démonstration de l'équivalence de ces définitions. Il s'agit de démonstrations connues dans un sens large, même si la présentation se voudra plus concise et combinatoire par rapport à celles qui peuvent être trouvées dans les références classiques telles que [116]. Cependant, cette étape revêt un caractère scientifique fondamental, puisque notre formalisme des intercepts formels introduit dans ce doctorat a justement pour but de donner une caractérisation combinatoire du second paramètre décrivant les mots sturmiens. Ainsi, il a fallu vérifier, notamment au travers de la démonstration du théorème 4.2.4, que les propriétés de base des mots centraux étaient bien toutes accessibles via des méthodes et des arguments purement combinatoires, ne faisant typiquement pas intervenir les mots mécaniques. Ce type de considérations interviennent dans certaines questions soulevées récemment, liées à la classe des mots sturmiens, concernant la décidabilité de cette théorie, on pourra consulter le récent article [69] dans ce thème.

Mot caractéristique et fractions continues

On rappelle que tout nombre irrationnel $\alpha \in]0,1[$ s'écrit de manière unique sous la forme de la fraction continue

$$\begin{aligned}\alpha &= [0; a_1, a_2, \ldots] \\ &= \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}\end{aligned}$$

où les $(a_i)_{i\geq 1}$ sont des entiers strictement positifs, appelés les quotients partiels de α.

On définit, pour $n \geq 1$ les entiers strictement positifs p_n et q_n comme les numérateurs et dénominateurs du quotient irréductible

$$\begin{aligned}\frac{p_n}{q_n} &= [0; a_1, \ldots, a_n] \\ &= \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ldots + \frac{1}{a_n}}}\end{aligned}$$

en posant de plus $q_{-1} = 0$ et $q_0 = 1$. La suite $(q_n)_{n\geq -1}$ s'appelle la suite des continuants de α, elle vérifie la relation de récurrence

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$$

pour $n \geq 0$. Les étapes de cette relation de récurrence peuvent être vus comme les étapes de l'algorithme d'Euclide, effectuées dans l'ordre opposé, soulignant le fait que q_n et q_{n+1} sont premiers entre eux pour $n \geq 0$.

La relation de récurrence linéaire à coefficients entiers vérifiée par la suite $(q_n)_{n\geq -1}$ constitue la relation fondamentale vérifiée par la suite des continuants de la pente α. Les conditions d'Ostrowski, que nous rencontrerons à de nombreuses reprises pendant notre étude du système de numération d'Ostrowski au chapitre 5, ainsi que dans notre définition des intercepts formels, s'interprètent comme des conditions assurant que cette relation ne puisse pas être appliquée pour procéder à des simplifications. Cette relation mène naturellement à la définition des conditions d'Ostrowski pour une suite d'entier, et comme nous l'expliquons après la proposition 5.1.2, elle garantit l'unicité de l'écriture d'un entier dans le système de numération d'Ostrowski.

Le théorème suivant, démontré dans [116], permet la construction du mot caractéristique associé à une pente α. Nous utiliserons à de nombreuses reprises cette construction fondamentale. La suite $(s_n)_{n\geq -1}$ qui y est présentée constitue une suite de mots standard, ceux-ci jouissant de nombreuses propriétés structurelles, présentées plus loin dans cette section. Cette construction explicite et combinatoire du mot caractéristique permet de cerner l'aspect algorithmique lié aux mot caractéristiques. Voir [116], proposition 2.2.24.

Théorème 4.2.1
Soit $\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]$ un nombre irrationnel de $]0,1[$. Le mot sturmien caractéristique c_α de la pente α est donné par

$$c_\alpha = \lim s_n$$

où la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ est définie par la relation de récurrence

$$s_{-1} = 1, \quad s_0 = 0, \quad s_1 = s_0^{a_1 - 1} s_{-1},$$

$$s_{n+1} = s_n^{a_{n+1}} s_{n-1}$$

pour tout $n \geq 1$.

Ce résultat connu permet donc de coder un mot sturmien caractéristique de manière bijective et constructive par une suite d'entiers strictement positifs. L'ensemble des mots sturmiens caractéristiques est ainsi en bijection naturelle avec l'ensemble $(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$. On peut même dire que cette application est un homéomorphisme, où les deux ensembles sont munis de la topologie produit associée à la topologie discrète sur l'alphabet ($\mathcal{A} = \{0,1\}$ pour l'ensemble des mots sturmiens caractéristiques, et $\mathbb{N}^*$ pour l'ensemble des suites d'entiers strictement positifs) puisqu'un préfixe suffisamment long d'un mot sturmien caractéristique caractérise un préfixe suffisament long de sa suite d'entiers strictement positifs naturellement associée, et réciproquement. Il faut saisir qu'il ne peut pas exister d'homéomorphisme entre l'ensemble des nombres réels, munit de sa topologie usuelle, et un espace du type $X^{\mathbb{N}}$, munit de la topologie produit associée à la topologie discrète sur X, puisque le premier est un espace connexe infini alors que le second est un espace totalement discontinu.

Compte tenu de cette description des mots caractéristiques, un des objectifs poursuivi dans ce doctorat a été de donner une description de la même nature qui soit valable pour tous les mots sturmiens. Cet objectif est atteint avec l'introduction des intercepts formels, associés avec le théorème 5.2.5, que nous présenterons plus en détail dans le chapitre 5.

Mots standard et centraux

Cette sous-section se consacre à la présentation des classes mots standard et des mots centraux, dont nous donnerons diverses caractérisations et propriétés. Les mots standard et centraux sont intimements liés aux mots de Christoffel et interviennent dans des contextes variés des mathématiques. On pourra consulter [10, 36, 108, 128].

Définition 4.2.2
Le sous-ensemble de $(\mathcal{A}^+)^2$ des paires standard est définit récursivement par la règle :
— *$(0,1)$ est une paire standard,*
— *si (u,v) est une paire standard, alors (vu,v) et (u,uv) sont des paires standard.*
On dit qu'un mot est standard s'il apparait comme une composante d'une paire standard.

On rappelle la notation u^- pour un mot u privé de sa dernière lettre. Si u est le mot vide, alors on adopte la convention que u^- est vide lui aussi. Des démonstrations de ces propriétés peuvent être trouvée dans [116], proposition 2.2.2.

Proposition 4.2.3
Soit (u,v) une paire standard, et w un mot standard. Alors

1) $(uv)^{--} = (vu)^{--}$,

2) si $|u| \geq 2$, alors u se termine par 10, et si $|v| \geq 2$, alors u se termine par 01,

3) u^{--} et v^{--} sont des palindromes,

4) on a la relation $|u||v|_1 - |u|_1|v| = 1$,

5) w^{--} est un palindrome,

6) w est primitif (c'est-à-dire, ne s'écrit pas sous la forme $w = z^k$ où z est un mot fini et $k \geq 2$ est un entier),

7) La suite $(s_n)_{n\geq 0}$ définie permettant de construire le mot caractéristique dans le théorème 4.2.1 est constituée de mots standard. En particulier, si $n \geq 1$ est pair, s_n se termine par 10, et si $n \geq 2$ est impair, s_n se termine par 01.

Le théorème suivant définit et donne plusieurs caractérisation des mots centraux, qui sont eux-mêmes intimement liés aux mots standard (définition 4.2.2). Nous donnons l'énoncé de l'équivalence de ces définitions. Nous utiliserons ces différentes caractérisations dans le reste de ce chapitre, durant nos études de la fonction de répétition des mots sturmiens et de leurs graphes de Rauzy.

Comme expliqué au début de cette section, cette étape n'est pas qu'une étape technique permettant de mettre en valeurs différentes caractérisations des mots centraux, mais elle est aussi un aspect fondamentale de notre étude des intercepts formels. Il est en effet essentiel de vérifier que les propriétés générales des mots centraux peuvent être obtenues de manière purement combinatoire, et non dynamique, et donc ne faisant pas appel aux mots mécaniques (qui seront brièvement discutés dans la section (5.1) du chapitre 5). Voir [116], corollaire 2.2.9.

Théorème 4.2.4
On définit l'ensemble des mots centraux par l'une des définitions équivalentes suivantes :

(i) un mot w est central si et seulement si il existe un mot standard u tel que $w = u^{--}$,

(ii) l'ensemble des mots centraux est définit de manière récursive par la règle :
- *les puissances des lettres sont des mots centraux,*
- *si p et q sont centraux, et que $p01q$ est un palindrome, alors $p01q$ est central,*

(iii) un mot w est central si et seulement si il est la puissance d'une lettre, ou un palindrome de la forme $p01q$ où p et q sont des palindromes,

(iv) un mot est central si et seulement si il est un palindrome préfixe d'un mot sturmien caractéristique.

La décomposition d'un mot central de la forme $w = p01q$ où p et q sont des palindromes est alors unique.

4.3 Fonction de répétition et graphe de Rauzy des mots sturmiens

Cette section contient de nouveaux résultats. Le résultat principal de cette section est le théorème 4.3.10.

Pour notre étude des mots sturmiens, nous faisons appel à deux notions issues de la combinatoire des mots, à savoir la fonction de répétition et le graphe des facteurs d'un mot infini, encore appelé graphe de Rauzy.

La fonction de répétition a été étudiée dans plusieurs travaux [45, 163], et est un représentant de ce que l'on appelle dans un sens large les « fonctions de complexité ». Ce type de fonction a pour but de donner un sens quantitatif à des paramètres mettant en jeu des apparitions, dénombrements ou répétitions de facteurs dans les mots infinis. Bien évidemment, « la » fonction de complexité $p(x, \cdot)$ que nous avons présenté en 4.1.1 fait partie de la classe des fonctions de complexité. L'étude de différentes fonctions de complexité a gagné de l'importance suite à la découverte du théorème de Morse-Hedlund [129], que nous avons présenté dans l'énoncé 4.1.2, qui dans ce même article étudient la fonction de complexité récurrente. Dans [45], la fonction de répétition est introduite en tant que fonction de complexité, quoique légèrement différente de celle que nous étudions : si $r_0(x, m)$ est la fonction de répétition introduite par Y. Bugeaud et D. Kim, alors elle est reliée à notre fonction de répétition par la relation $r_0(x, m) = r(x, m) + m$, et contient donc les mêmes informations. La fonction de répétition semble toutefois avoir été définie en premier lieu par Moothathu dans [163], et a été de plus étudiée par J. Nicholson et N. Rampersad dans [131].

Pour ce qui est du graphe de Rauzy, nommé après feu Gérard Rauzy, il a été introduit justement avec l'étude des suites arithmétiques [148]. En effet, c'est typiquement dans cette classe de suites (en fait de mots) que l'on peut voir avec précision les informations dynamiques, combinatoire et arithmétique que le graphe de Rauzy peut contenir en relation avec un mot infini. C'est par exemple un fait remarquable que dans le cas des suites sturmiennes, les deux cycles constituant le graphe de Rauzy soient de longueur premières entre elles. Les idées de G. Rauzy, qui ne se limitent bien évidemment pas aux suites arithmétiques, ont donné naissance à divers recherches et développements, voir par exemple [13, 149].

On définit le graphe de Rauzy dans l'énoncé suivant. Cet objet, constitué d'une suite de graphes indexée sur les entiers strictement positifs et naturellement associée à un mot infini, fournit une interprétation visuelle éclairante de certaines propriétés de l'ensemble des facteurs d'un mot infini. Il est néanmoins très difficile à comprendre dans le cas général. Le nombre de sommet du graphe de Rauzy de degré m d'un mot infini x sur un alphabet fini $\mathcal{A}$ vaut $p(x,m)$, où $p(x,\cdot)$ est la fonction de complexité de x dont nous donnons la définition en 4.1.1. Ainsi le nombre de sommets des graphes apparaissant lorsque l'on considère les graphes de Rauzy se comporte comme la fonction de complexité, cette dernière étant déjà délicate à cerner en toute généralité. Pour l'étude des mots de basse complexité, dont les mots sturmiens font partie et pour lesquelles on connait les valeurs de la fonction de complexité, l'utilisation des graphes de Rauzy s'avère pertinente puisque les quantités les décrivant sont accessibles dans ce cas. L'utilisation de ces graphes permet des études en profondeur de la structure combinatoire des mots de basse complexité, dépassant le cadre des mots sturmiens, voir [16, 51, 53, 54].

Définition 4.3.1 (Graphe de Rauzy)
Soit x un mot infini sur un alphabet fini $\mathcal{A}$, et $m \geq 1$. On définit le graphe de Rauzy de degré m de x comme le graphe dirigé dont :

- *les sommets sont étiquetés par les facteurs de x de longueur m,*
- *deux facteurs s et t sont reliés par une arrête dirigée, ce que l'on note $s \to t$, lorsqu'il existe un facteur w de longueur $m+1$ dont s est un préfixe et t est un suffixe.*

Pour tout $m \geq 1$ et tout mot infini x, le mot x définit un chemin dans son graphe de Rauzy de degré m via

$$\mathbb{P}_m(x) \longrightarrow \mathbb{P}_m(T(x)) \longrightarrow \mathbb{P}_m(T^2(x)) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{P}_m(T^k(x)) \longrightarrow \cdots$$

où l'on rappelle que la notation $\mathbb{P}_m(x)$ désigne le préfixe de longueur $m \geq 1$ du mot infini x. La considération de ces chemins est propre au mot x lui-même, et pas seulement à l'ensemble de ses facteurs. Ce type de considération permet de comprendre les interactions entre les aspects dynamiques et combinatoires de l'étude des mots infinis, et aussi de saisir les aspects globaux d'un mot, donnés par son ensemble de facteur, tout comme ses aspects locaux, donnés par le chemin qu'il définit dans son graphe de Rauzy.

La proposition suivante permet de comprendre la structure générale du graphe de Rauzy des mots sturmiens. Puisque les mots sturmiens sont les mots de plus basse complexité parmis les mots non-ultimement périodique, selon les énoncés 4.1.2 et 4.1.3, les graphes de Rauzy des mots sturmiens sont plus faciles à décrire que pour d'autres mots. Dans le cas de l'étude des mots sturmiens, on verra qu'ils permettent d'accéder au contenu arithmétique donné par la suite des continuants de la pente. L'énoncé suivant était connu dans les études des mots sturmiens, et est à mettre en parallèle avec le théorème des trois longueurs, voir [33, 160].

Proposition 4.3.2
Le graphe de Rauzy de degré $m \geq 1$ d'un mot sturmien x consiste en la fusion de deux cycles, partageant une partie commune.

En effet, pour tout $m \geq 1$, le mot x n'admet qu'un seul facteur spécial à gauche, de degré entrant 2, et qu'un seul facteur spécial à droite, de degré sortant 2. Tous les autres facteurs ont des degrés entrant et sortant égaux à 1. Le chemin reliant le facteur spécial à gauche L_m au facteur spécial à droite R_m est la partie commune mentionnée dans la proposition. Deux mots sturmiens de même pente ont même ensemble de facteurs, et donc ont même graphes de Rauzy. Dans un tel graphe, le chemin du mot caractéristique commence donc toujours à l'endroit du facteur spécial à gauche.

Fonction de répétition

On donne dans l'énoncé suivant la définition de la fonction de répétition, qui peut être considérée pour un mot infini quelconque. Elle admet une interprétation utile sur le graphe de Rauzy : il s'agit du plus long chemin hamiltonien, c'est-à-dire ne passant pas deux fois par le même sommet, qui correspond à un préfixe de x. On verra que la fonction de répétition que nous considérons admet régulièrement des valeurs consécutives égales. Ceci est dû au fait que le facteur qui est répété a des chances de produire la répétition à l'étape suivante du calcul de la fonction de répétition.

Définition 4.3.3
Soit x un mot infini sur un alphabet fini $\mathcal{A}$. On définit, pour $m \geq 1$, $r(x,m)$ comme le plus grand entier $k \geq 0$ tel que les mots

$$\mathbb{P}_m(x),\ \mathbb{P}_m(T(x)),\ \ldots,\ \mathbb{P}_m(T^{k-1}(x))$$

soient deux à deux distincts. La fonction $r(x,\cdot)$ s'appelle la fonction de répétition de x.

Noter que l'entier k mentionné ci-dessus existe toujours sous l'hypothèse que l'alphabet $\mathcal{A}$ est fini. On dispose de l'inégalité $r(x,m) \leq p(x,m)$ pour tout $m \geq 1$, qui devient $r(x,m) \leq m+1$ dans le cas où x est sturmien.

La fonction de répétition est une fonction qui prends ses valeurs « par paliers », au sens où son comportement général consiste principalement à être constante sur des intervalles entiers prédisposés à devenir grands. Le résultat suivant met en évidence ce comportement : la fonction de répétition des mots sturmiens est entièrement caractérisée par l'ensemble des entiers $m \geq 1$ tels que $r(x,m) = m+1$. Notre démonstration se base sur l'utilisation de l'interprétation sur le graphe de Rauzy que l'on peut faire de la fonction de répétition, voir [45] pour d'autres propriétés de la fonction de répétition.

Théorème 4.3.4
Soit x un mot sturmien et $m \geq 2$. Les conditions suivantes sont equivalentes :

i) $r(x,m) = m+1$,

ii) $r(x,m) \neq r(x,m-1)$.

Preuve. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est claire puisque $r(x,m-1) \leq m$. Pour le sens indirect, soient A_m et B_m les deux sommets distincts de G_m tels que

$$R_m \to A_m \quad \text{et} \quad R_m \to B_m$$

dans G_m. On considère le chemin

$$\mathbb{P}_{m-1}(x) \to \mathbb{P}_{m-1}(T(x)) \to \cdots \to \mathbb{P}_{m-1}(T^{r(x,m-1)}(x)).$$

dans G_{m-1}. Il existe un unique entier $0 \leq j < r(x,m-1)$ tel que

$$\mathbb{P}_{m-1}(T^{r(x,m-1)}(x)) = \mathbb{P}_{m-1}(T^j(x)).$$

Dans G_m, on ne peut pas avoir $\mathbb{P}_m(T^{r(x,m-1)}(x)) = \mathbb{P}_m(T^j(x))$ car ceci impliquerait que $r(x,m) = r(x,m-1)$, contrairement à notre hypothèse. On a donc

$$\mathbb{P}_m(T^{r(x,m-1)}(x)) \neq \mathbb{P}_m(T^j(x))$$

et ces deux mots diffèrent donc uniquement par leurs dernières lettres. Ceci montre l'égalité d'ensemble

$$\{A_m, B_m\} = \{\mathbb{P}_m(T^{r(x,m-1)}(x)), \mathbb{P}_m(T^j(x))\}$$

de telle sorte que le chemin

$$\mathbb{P}_m(x) \to \mathbb{P}_m(T(x)) \to \cdots \to \mathbb{P}_m(T^{r(x,m)-1}(x))$$

passe par les deux sommets A_m et B_m. Ce chemin est le plus long chemin hamiltonien commençant au sommet $\mathbb{P}_m(x)$ dans le chemin défini par x, et vu la forme du graphe, il passe par les $m+1$ commets de G_m. D'où la valeur $r(x,m) = m+1$. □

Dans le cas des mots sturmiens caractéristiques, pour tout $n \geq 1$, le premier facteur de longueur n qui est répété deux fois est nécessairement un préfixe, comme le montre la proposition suivante.

Lemme 4.3.5
Soit c_α un mot caractéristique de pente α. Alors

$$\mathbb{P}_m(T^{r(c_\alpha,m)}(c_\alpha)) = \mathbb{P}_m(c_\alpha) = L_m$$

pour tout $m > 0$.

Preuve. La seconde égalité provient de la définition de c_α comme limite des facteurs spéciaux à gauche. Soit $0 \leq j < r(c_\alpha, m)$ l'unique entier tel que

$$\mathbb{P}_m(T^{r(c_\alpha,m)}(c_\alpha)) = \mathbb{P}_m(T^j(c_\alpha))$$

et supposons par l'absurde que $j \neq 0$. Alors

$$\mathbb{P}_m(T^{r(c_\alpha,m)-1}(x)) \neq \mathbb{P}_m(T^{j-1}(c_\alpha))$$

et ces deux mots ne diffèrent que par leur premières lettres. On en déduit que $\mathbb{P}_m(T^j(c_\alpha))$ est spécial à gauche, et donc que $j = 0$, ce qui est une contradiction.

□

On étend la fonction de répétition en définissant $r(z, m)$ pour un mot fini z et $m > 0$, en supposant que z admet un facteur de longueur m ayant deux occurrences dans z, comme la valeur commune $r(x, m)$ obtenue pour tout mot infini x tel que z soit préfixe de x. Nous utilisons dans la démonstration du lemme suivant plusieurs propriétés obtenues à l'aide de l'équivalence des différentes définitions des mots centraux contenues dans le théorème 4.2.4.

Lemme 4.3.6
Soit $z = p01q$ *un mot central avec* $|p| \leq |q|$*, et où* p *et* q *sont des palindromes. Alors*

$$r(z, |p| + 1) = |p| + 2.$$

Preuve. La considération d'un mot central écrit sous la forme $p01q$ où p et q sont des palindromes provient du théorème 4.2.4.

Soit c_α un mot caractéristique ayant z comme préfixe, selon le théorème 4.2.4. Alors par le lemme 4.3.5 précédent on a

$$\mathbb{P}_{|p|+1}(T^{r(z,|p|+1)}(c_\alpha)) = p0.$$

On prouve alors le résultat par récurrence sur $|z|$. Puisque z est un palindrome selon 4.2.4, on ne peut avoir $|p| = |q|$, et si $|p| = |q| - 1$ alors $q = p0 = 0p$, et donc $z = 0^{|p|+1}10^{|p|+1}$, ce qui démontre le résultat dans ce cas. On suppose donc que $|p| \leq |q| - 2$ et on écrit $q = p01u$. Le mot u est un palindrome puisque $z = q10p = p01u10p$ en est un, de telle sorte que $q = p01u$ est la décomposition de q comme mot central, unique par le théorème 4.2.4.

Si $|p| \leq |u|$, alors le résultat découle de l'hypothèse de récurrence. On suppose donc que $|u| \leq |p|$, de telle sorte que $r(z, |u| + 1) = r(q, |u| + 1) = |u| + 2$ par hypothèse de récurrence. Puisque $r(z, |u| + 1) \leq r(z, |p|) \leq |u| + 2$, on a nécessairement $r(z, |p|) = |u| + 2$. Mais $z = u10p10p$, et ainsi on voit que le mot $u10p0$ n'est pas préfixe de z, et on en déduit

$$\begin{aligned} r(z, |p| + 1) &> r(z, |u| + 1) \\ &= |u| + 2 \\ &= r(z, |p|) \end{aligned}$$

d'où l'on tire $r(z, |p| + 1) \neq r(z, |p|)$. On conclut par application du lemme 4.3.5. □

La démonstration suivante présente le calcul de la fonction de répétition du mot caractéristique. Nous donnerons plus loin des énoncés donnant la valeur de la fonction de répétition des mots sturmiens généraux, à l'aide de notre description combinatoire des mots sturmiens fournit par les intercepts formels. Nous en déduirons en particulier la longueur des cycles constituant les graphes de Rauzy des mots sturmiens. La longueur de ces cycles peut être aussi déduite des résultats concernant les fréquences d'apparition des facteurs d'un mot sturmien, et l'on peut trouver cette étude dans l'article [33].

Corollaire 4.3.7
Soit c_α *le mot caractéristique de la pente* α*, et soit* $(q_n)_{n\geq -1}$ *la suite des continuants associée à la pente* α*. Alors on a l'égalité*

$$r(c_\alpha, m) = q_n \quad \textit{pour} \quad q_n - 1 \leq m \leq q_{n+1} - 2.$$

Preuve. Soit $(s_n)_{n\geq -1}$ la suite de mots associée à α pour construire le mot caractéristique $c_\alpha = \lim s_n$ d'après le théorème 4.2.1. Il est clair par récurrence que l'on a $|s_n| = q_n$ pour $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} c_\alpha &= \lim_{n\geq 1} s_{n+2} \\ &= \lim_{n\geq 1} s_{n+1}s_n \\ &= \lim_{n\geq 1} s_{n+1}s_n^{--} \\ &= \lim_{n\geq 1} s_n^{--}t_n s_{n+1}^{--} \end{aligned}$$

où $t_n = 10$ si n est pair, et $t_n = 01$ si n est impair, en accord avec la proposition 4.2.3 et où l'on rappelle la notation u^- désignant un mot u privé de sa dernière lettre. Les mots $s_n^{--}t_n s_{n+1}^{--}$ pour $n \geq 2$ sont des préfixes centraux de c_α, écrit dans leurs décompositions centrales, en accord avec le théorème 4.2.4. Ainsi, par le lemme 4.3.6, on a

$$\begin{aligned} r(c_\alpha, |s_n^{--}| + 1) &= |s_n^{--}| + 2 \\ &= |s_n| \\ &= q_n \end{aligned}$$

et puisque le préfixe s_{n+1}^{--} de c_α se répète en position $|s_n^{--}| + 2$ dans c_α, on a bien, selon la définition 4.3.3,

$$r(c_\alpha, m) = q_n$$

pour $n \geq 2$ et $q_n - 1 \leq m \leq q_{n+1} - 2$. La formule est triviale lorsque $n = 0$ ou $n = 1$, l'ensemble des $m \geq 1$ tels que $q_n - 1 \leq m \leq q_{n+1} - 2$ pouvant cependant être vide. □

Graphes de Rauzy des mots sturmiens

Soit x un mot sturmien de pente α, de suite de continuants $(q_n)_{n\geq -1}$. La suite de ces continuants permet de construire une partition des entiers régissant la structure du graphe de Rauzy d'un mot sturmien de pente α. Le graphe de Rauzy des mots sturmiens est toujours constitué de deux cycles, d'après la proposition 4.3.2, et les notations que nous introduisons maintenant nous permettrons de travailler avec ces cycles. Pour la fin de ce chapitre, nous donnons certaines valeurs et quantités pertinentes concernant les graphes de Rauzy, et on s'attachera par exemple à déterminer les caractéristiques différenciant les deux cycles constituant le graphe de Rauzy des mots sturmiens.

Il faut garder en tête qu'une telle étude précise des graphes de Rauzy n'est possible que par le fait que les mots sturmiens constituent une classe de mots de basse complexité. Pour un mot sturmien général, on ne peut pas espérer une description aussi détaillée du chemin parcouru par un mot infini dans son graphe de Rauzy, sachant que cette question elle-même ne peut être soulevée que lorsque l'on arrive à décrire précisément le graphe de Rauzy lui-même. Dans le cas des mots sturmiens, l'étude de ces objets combinatoires, qui contiennent par ailleurs une bonne partie de leur contenu arithmétiques, nous permet d'accéder à de nombreux résultats qui nous permettrons de définir de manière naturelle la notion d'intercept formel, contribution principale de cette seconde partie de doctorat.

On définit les intervalles d'entiers I_n, pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} I_n &= [q_n - 1, q_{n+1} - 2], \\ I_n^0 &= [q_n - 1, q_n + q_{n-1} - 2], \end{aligned}$$

et pour $1 \leq l \leq a_{n+1} - 1$,

$$I_n^l = [lq_n + q_{n-1} - 1, (l+1)q_n + q_{n-1} - 2].$$

Ces intervalles forment une partition des entiers naturels :

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{n\geq 0} I_n = \bigcup_{n\geq 0} \bigcup_{l=0}^{a_{n+1}-1} I_n^l$$

de sorte que tout entier naturel $m \geq 1$ s'écrit de manière unique $m = \max I_n^l - r = (l+1)q_n + q_{n-1} - 2 - r$ où $n \geq 1$, $0 \leq l \leq a_{n+1} - 1$ et $0 \leq r < |I_n^l|$, sachant que $|I_n^0| = q_{n-1}$ et que $|I_n^l| = q_n$ pour $1 \leq l \leq a_{n+1} - 1$. Si $a_1 = 1$ ou $a_1 = 2$ alors I_0 est vide. Si $a_1 = 1$ et $a_2 = 1$, alors les deux intervalles I_0 et I_1 sont vides.

Un chemin eulérien dans un graphe dirigé est un chemin ne passant pas deux fois par la même arrête. Un cycle eulérien dans un graphe dirigé est un chemin eulérien $s_1 \to s_2 \to \cdots \to s_k$ tel que $s_1 = s_k$, et dans ce cas on note k sa longueur. Dans toute la suite, on fera l'abus de désigner par cycle tout cycle eulérien du graphe de Rauzy d'un mot sturmien. On rappelle la notation u^* pour un mot fini u, désignant le suffixe de longueur $|u| - 1$ de u, c'est-à-dire u privé de sa première lettre.

La proposition suivante permet de voir comment la suite des continuants de la pente α permet effectivement de décrire le graphe de Rauzy d'un mot sturmien de pente α. Cette proposition donne en particulier la définition du cycle référent. Cette définition du cycle référent repose sur sa longueur, ce qui est une caractérisation qui présente un coté pratique. On caractérisera plus tard dans ce chapitre le cycle référent comme le cycle autour duquel le mot caractéristique tourne en premier.

Les longueurs des cycles constituant le graphe de Rauzy d'un mot sturmien peuvent être déduites des valeurs des fréquences des facteurs d'une suite sturmienne, étudiées en détails dans l'article [33] de V. Berthé. L'étude menée dans cet article se base aussi sur l'utilisation des graphes de Rauzy, et est justifiée par le fait que pour chaque branche du graphe de Rauzy, c'est-à-dire de suite $s_1 \to s_2 \to \cdots \to s_k$ de sommets tous de degrés entrant et sortant valant 1, les facteurs représentés par les sommets s_i, pour $1 \leq i \leq k$ ont tous la même fréquence d'apparition. Nous présentons comment retrouver les longueurs de ces cycles à partir de nos valeurs obtenus pour la fonction de répétition des mots caractéristiques, ce qui fournit une description un petit peu plus précise puisque nous donnons le chemin pris par le mot caractéristique au début de son parcours dans le graphe de Rauzy.

Le graphe de Rauzy étant constitué de deux cycles, il est important de pouvoir les différencier. Suivant la manière dont nous découpons l'ensemble des entiers pour décrire les longueurs des cycles du graphe de Rauzy, plusieurs points de vue peuvent être adoptés. Les valeurs obtenues pour les longueurs des cycles du graphe de Rauzy présentent cependant la particularité de n'être jamais égales, et même premières entre elles. Ceci pourrait nous permettre de prendre comme référence systématiquement le cycle de la plus grande longueur. Nous privilégions cependant de prendre comme cycle référent le premier cycle parcouru par le mot caractéristique. Ceci se justifie par le fait que le mot caractéristique est un mot particulier naturellement associé à un mot sturmien, et que ce cycle référent est alors de longueur constante sur les intervalles délimités par les continuants compte tenu des valeurs de la fonction de répétition que nous avons obtenu pour le mot caractéristique, et ce découpage est celui que nous considérons. Avec ce point de vue, on ne peut pas caractériser le cycle référent comme étant celui qui est le plus petit ou le plus grand des deux cycle du graphe de Rauzy.

Proposition 4.3.8
Soit $m \in I_n^l$ avec $n \geq 0$ et $0 \leq l \leq a_{n+1} - 1$, alors :

1. *un des deux cycles de G_m est de longueur q_n, il est appelé le cycle référent,*
2. *l'autre cycle est de longueur $lq_n + q_{n-1}$,*
3. *la flèche $R_m \to R_m^* t_{n-1}^-$ apparatient au cycle référent, et la flèche $R_m \to R_m^* t_n^-$ appartient au cycle non-référent. Aucune de ces flèches n'appartient à la partie commune.*

Preuve. 1) Puisque deux mots partageant le même ensemble de facteurs ont même graphe de Rauzy d'après la définition 4.3.1, on se ramène au cas où $x = c_\alpha$, le mot caractéristique de la pente α définit en 4.1.6. Puisque l'on a vu que $r(c_\alpha, m) = q_n$ d'après le lemme 4.3.5, par la définition 4.3.3 de la fonction de répétition, le chemin

$$\mathbb{P}_m(c_\alpha) \to \mathbb{P}_m(T(c_\alpha)) \to \cdots \to \mathbb{P}_m(T^{r(c_\alpha,m)}(c_\alpha))$$

définit un cycle de longueur q_n dans G_m.

2) La partie commune des deux cycles de G_m est le chemin le plus court commençant au sommet L_m et finissant au sommet R_m, en accord avec la proposition 4.3.2. Le mot fini w défini par ce chemin est spécial à gauche et à

droite, et est donc le plus court facteur central de x de longueur $|w| \geq m$, sa longueur vaut donc $(l+1)q_n + q_{n-1} - 2$, d'après les résultats 4.2.4 et 4.3.6. La partie commune est donc de longueur $(l+1)q_n + q_{n-1} - 2 - m$. Mais puisque la somme des longueurs des deux cycles vaut la somme du nombre de sommets de G_m et du nombre de sommets présents dans la partie commune, on obtient, en notant μ la longueur du cycle non-référent :

$$q_n + \mu = m + 1 + (l+1)q_n + q_{n-1} - 1 - m$$

de telle manière que le cycle non-référent est de longueur

$$\mu = lq_n + q_{n-1}.$$

Puique les deux nombres q_n et $lq_n + q_{n-1}$ sont premiers entre eux, ils sont en particulier distincts, et le cycle référent est bien déterminé par le fait qu'il est de longueur q_n.

3) La partie commune $L_m \to \cdots \to R_m$ correspond au mot central de longueur $(l+1)q_n + q_{n-1} - 2$, qui est le mot $s_n^{l+1}s_{n-1}^{--}$, d'après le théorème 4.3.5. Le cycle référent est le cycle

$$\mathbb{P}_m(c_\alpha) \to \mathbb{P}_m(T(c_\alpha)) \to \cdots \to \mathbb{P}_m(T^{r(c_\alpha,m)}(c_\alpha))$$

et on n'a ainsi qu'à voir que $s_n^{l+1}s_{n-1}^{-}$ est un préfixe de c_α puisque s_{n-1} finit par le mot t_{n-1} d'après la proposition 4.2.3. Mais s_{n-1} est un préfixe de s_n d'après 4.2.1, et $s_{n+1} = s_n^{a_{n+1}}s_{n-1}$, de telle manière que la flèche $R_m \to R_m^* t_{n-1}^-$ appartient au cycle référent. Le fait que la flèche $R_m \to R_m^* t_n^-$ appartienne au cycle non-référent provient du fait que le mot $s_n^{l+1}s_{n-1}^{--}t_n$ n'est pas un préfixe c_α. La dernière remarque est claire, les deux flèches sortantes du facteur spécial à droite ne peuvent pas être sur le même cycle. □

Afin de comprendre le chemin pris par un mot infini x sur le graphe de Rauzy associé à sa pente, on introduit la définition suivante pour dire qu'un mot passe autour d'un cycle. On parle essentiellement du début d'un mot infini, c'est-à-dire que l'on dit qu'un mot infini tourne autour d'un cycle lorsque le chemin qu'il définit commence par un tour d'un cycle. Etant donné que tous les mots sturmiens sont récurrents, comme conséquence de la définition 4.1.3, c'est-à-dire que tous les facteurs d'un mot sturmiens apparaissent une infinité de fois dans celui-ci, il est très maladroit et non-pertinent de dire qu'un mot infini tourne autour d'un cycle si l'un de ses facteurs correspond à un tour autour d'un cycle, car dans ce cas tous les mots sturmiens tourneraient autour de tous les cycles! On insiste aussi sur le fait que tourner autour d'un cycle signifie que le mot infini passe par toutes les arrêtes d'un cycle, et non tous ses sommets. En effet, dans le cas où $m = q_n - 1$ pour un entier $n \geq 1$, selon la proposition 4.3.8, tous les sommets du cycle non-référent appartiennent au cycle référent, alors que ce n'est pas le cas pour les arrêtes. Comme conséquence de ce choix terminologique, un mot sturmien ne peut pas tourner autour de deux cycles simultanément, d'où la consistance d'une telle définition.

Définition 4.3.9
- *On dit x tourne autour un cycle de longueur k dans G_m lorsque $r(x,m) = k$ et que le chemin $\mathbb{P}_m(x) \to \mathbb{P}_m(T(x)) \to \cdots \to \mathbb{P}_m(T^k(x))$ partage les même flèches que ce cycle.*
- *On dit que x tourne d fois autour d'un cycle de longueur k si pour tout $1 \leq i \leq d-1$, $T^{ik}(x)$ tourne autour de ce cycle.*

Pour un mot sturmien x, puisque les deux cycles de son graphe de Rauzy G_m ont des longueurs différentes, x tourne autour d'un cycle de longueur k si et seulement si $r(x,m) = k$. Ce type de propriété est conséquence de la proposition 4.3.8, et en particulier du fait que les deux cycles qui constituent le graphe de Rauzy des mots sturmiens sont distincts, et même ont des longueurs premières entre elles. On voit donc que les propriétés arithmétiques des mots sturmiens régissent les règles générales de structure de leur graphe de Rauzy. Le théorème suivant décrit le parcours pris par le mot caractéristique dans son graphe de Rauzy. Ce résultat justifie le terme utilisé pour désigner le cycle référent : il peut être caractérisé avec le mot sturmien qui fait office de référence parmis les mots sturmiens d'une pente donnée, le mot caractéristique. L'article [33] repose sur une étude du graphe de Rauzy des mots sturmiens, cependant les résultats que nous présentons vont un peu plus loin en caractérisant le cycle référent, et en précisant le nombre exact de tours effectués par le mot caractéristique dans son graphe de Rauzy.

Théorème 4.3.10
Pour $m \in I_n^l$, le mot caractéristique c_α tourne $a_{n+1} - l$ fois autour du cycle référent, et pas plus.

Preuve. On considère d'abord le cas $l = 0$. Le mot central s_n^{--} est un préfixe strict de L_m et L_m est un préfixe strict du mot central $s_n^{--}t_n s_{n-1}^{--}$, d'après les théorèmes 4.2.1, 4.2.3 et 4.2.4. Le mot $z = s_{n+1}s_n^{--} = s_n^{a_{n+1}+1}s_{n-1}^{--}$ est central d'après 4.2.4 et on a donc

$$\begin{aligned} r(z,m) &= q_n \\ &= r(T^{q_n}(z), m) \\ &= \cdots \\ &= r(T^{(a_{n+1}-1)q_n}(c_\alpha), m), \end{aligned}$$

et ceci montre que c_α tourne au moins a_{n+1} fois autour du cycle référent, d'après la définition 4.3.9.

Puisque $s_{n+1}s_n$ est un préfixe de c_α d'après 4.2.1, le mot $s_{n+1}s_n = zt_n = s_n^{a_{n+1}+1}s_{n-1}^{--}t_n$ est un préfixe de c_α et $s_n s_{n-1}^{--}t_n$ est un préfixe de $T^{a_{n+1}q_n}(c_\alpha)$, et de là on voit que le mot $T^{a_{n+1}q_n}(c_\alpha)$ passe en premier lieu par la flèche $R_m \to R_m^* t_n^-$, qui n'appartient pas au cycle référent d'après la propriété 4.3.8. Ceci montre que c_α ne tourne pas $a_{n+1}+1$ autour du cycle référent.

Le cas $l > 0$ est similaire : le mot central $s_n^l s_{n-1}^{--}$ est un préfixe strict de L_m, et L_m est un préfixe strict du mot central $s_n^{l+1}s_{n-1}^{--}$, d'après les théorèmes 4.2.4, 4.2.3 et 4.2.1. Le mot $z = s_{n+1}s_n^{--} = s_n^{a_{n+1}+1}s_{n-1}^{--}$ est central d'après 4.2.4 et on a donc

$$\begin{aligned} r(z,m) &= q_n \\ &= r(T^{q_n}(z), m) \\ &= \cdots \\ &= r(T^{(a_{n+1}+1-l)q_n}(c_\alpha), m), \end{aligned}$$

et ceci montre que c_α tourne au moins $a_{n+1} - l$ fois autour du cycle référent.

Puisque $s_{n+1}s_n$ est un préfixe de c_α d'après le théorème 4.2.1, le mot $s_{n+1}s_n = zt_n = s_n^{a_{n+1}+1}s_{n-1}^{--}t_n$ est un préfixe de c_α et $s_n s_{n-1}^{--}t_n$ est un préfixe de $T^{a_{n+1}q_n}(c_\alpha)$, et de là on voit que le mot $T^{a_{n+1}q_n}(c_\alpha)$ passe en premier lieu par la flèche $R_m \to R_m^* t_n^-$, qui n'appartient pas au cycle référent d'après 4.3.8. Ceci montre que c_α ne tourne pas $a_{n+1}+1-l$ autour du cycle référent. □

Nous terminons ce chapitre par la démonstration d'un lemme concernant les graphes de Rauzy que nous utiliserons par la suite, et qui fournit une autre caractérisation du cycle référent.

Lemme 4.3.11
Soit x un mot sturmien de pente α, et $m > 0$. Alors, dans G_m, x ne tourne pas deux fois autour du cycle non-référent. Le cycle non-référent est caractérisé par le fait qu'aucun mot sturmien de pente α ne tourne autour de ce cycle.

Preuve. Puisque l'ensemble des facteurs d'un mot sturmien est stable par image miroir d'après la proposition 4.1.7, on voit que si $s \to t$ est une flèche de G_m, alors $\tilde{t} \to \tilde{s}$ est une flèche de G_m. Puisque les deux cycles de G_m sont de longueurs différentes d'après le théorème 4.3.8, et puisqu'une seule des deux flèches

$$R_m \to R_m^* t_{n-1}^- \quad \text{et} \quad R_m \to R_m^* t_n^-$$

appartient au cycle référent, on en déduit qu'une seule des deux flèches

$$0L_m^- \to L_m \text{ et } 1L_m^- \to L_m$$

appartient au cycle référent. Les deux mots $0c_\alpha$ et $1c_\alpha$ sont sturmiens d'après 4.1.7, et ainsi il existe un unique mot u de longueur q_n tel que uc_α soit sturmien et tourne autour du cycle référent. Puisque c_α tourne toujours au moins une fois autour du cycle référent d'après 4.3.10, uc_α tourne au moins deux fois autour du cycle référent. Puisque x et c_α partagent les mêmes ensembles de facteurs d'après 4.1.6, on peut au moins affirmer qu'il existe un suffixe de x qui tourne deux fois autour du cycle référent.

S'il existe un mot sturmien x qui tourne deux fois autour du cycle non-référent, on voit que le mot central (voir le théorème 4.2.4) défini par la partie commune des deux cycles de G_m, selon le théorème 4.3.2, est tel que les quatres mots $0w0$, $1w0$, $0w1$ et $1w1$ soient facteurs de x. Mais ceci contredit la propriété d'équilibre 4.1.4 des mots sturmiens. □

Perspectives

Nous présentons ici certaines perspectives du travail effectué dans la thématique de l'étude des mots sturmiens au travers de leurs graphes de Rauzy et des fonctions de complexité comme la fonction de répétition. Ces questions n'ont pas pu être encore élucidées, et mériteraient une recherche plus approfondie.

Notre étude des mots sturmiens se base sur une utilisation en détail des graphes de Rauzy. Ces graphes sont des objets très naturels à considérer dans l'étude des mots infinis, car ils correspondent à une version mathématique d'une lecture lettre par lettre d'un mot infini, ce qui est un procédé très naturel. On a vu que beaucoups d'informations étaient contenues dans ces graphes, par exemples la complexité d'un mot infini, les répétitions de facteurs, ainsi que la fréquence d'apparition des facteurs. Ces objets complexes ont néanmoins des attributs de graphes, ils ont des cycles, des braches (dans des cas non-sturmiens), et disposent de plusieurs niveaux de lecture. On peut les considérer en ommettant leurs sommets de degré entrant et sortant valant 1, on peut considérer uniquement les graphes sans tenir compte du chemin parcouru par un mot spécifique, et on peut considérer le chemin du mot étudié ainsi que les chemins des éléments de son orbite dynamique. Ces objets très riches méritent de faire l'objet de recherches poussées et générales.

Question 12
Peut-on développer un formalisme concernant les graphes de Rauzy, qui permettrait un traitement formel des propriétés d'apparition de facteurs dans un mot infini ?

Les questions par exemple d'évitement des carrés abéliens peuvent faire naturellement apparaitre des études de chemins dans des réseaux affines, au moyen d'un graphe de Rauzy abélien. Les notions de répétitions pourraient alors être mis en parallèle avec les caractéristiques du graphe, comme le nombre de cycle ou leur longueur. Des questions comme, à quelle condition sur une suite de graphes peut-on assurer qu'il s'agit de la suite des graphes de Rauzy d'un mot infini, sont largement des questions naturelles à se poser. Il s'agirait aussi de cerner les liens existant entre différents graphes de Rauzy de degrés différents : un facteur d'un mot infini donne naturellement naissance à des arcs dans les graphes de Rauzy de degré plus petit que la longueur du facteur considéré, et ces arcs doivent être cohérents entre eux. La longueur consécutive elle-même, introduite dans le chapitre 3 de la première partie de ce doctorat, peut peut-être être étudiée à l'aide d'une telle analyse précise des graphes de Rauzy.

Un mot sturmien de même pente que le mot caractéristique présente les même facteurs que celui-ci, et a donc le même graphe de Rauzy. D'autre part, ce mot définit un chemin dans le graphe de Rauzy. Il conviendrait alors d'étudier le chemin emprunté par un mot sturmien quelconque, et bien évidemment de déterminer entièrement le chemin pris par le mot caractéristique. Il apparait de manière conjecturale, que la suite des directions prises par un mot sturmien dans son graphe de Rauzy, c'est-à-dire la suite des bifurcations prises au sommet correspondant au facteur spécial à droite, forme elle-même un mot sturmien.

Question 13
Quel est le mot obtenu codant le chemin pris par un mot sturmien dans son graphe de Rauzy ? Si ce mot est sturmien, quel est son lien avec le mot sturmien de base ?

Il est alors conjecturé que le mot obtenu serait une image inverse par un morphisme sturmien du mot sturmien de base. Ces énoncés, encore conjecturaux, pourrons être étudiés de manière générale au travers d'une étude précise des chemins parcourus par les mots sturmiens dans leur graphe de Rauzy. De manière générale, calculer le chemin parcouru par certains mots dans leur graphe de Rauzy est une piste qui permettrait d'établir des résultats significatifs concernant les mots étudiés.

5

Intercepts formels des mots sturmiens

Ce chapitre est consacré à l'introduction et à quelques applications du formalisme des intercepts formels des mots sturmiens. L'introduction de ce formalisme constitue la contribution principale de ce doctorat. Le théorème 5.2.5 constitue le résultat central de ce chapitre.

Les systèmes de numérations les plus standard sont donnés par les suites de la forme $(b^n)_{n\geq 0}$ où b est un entier naturel, et sont étudiés de manière centrale en arithmétique. Les nombreux travaux mathématiques menés concernant les nombres premiers, à l'aide de congruences et de réductions modulo un entier peuvent être vus comme des études de ces systèmes de numérations, dits en base entière. Le point de vue des systèmes de numération permet de se poser la question de quels procédés ou raisonnements fonctionnant pour les entiers ou les nombres premiers peuvent se transposer pour d'autres systèmes de numérations. La considération, par exemple, d'un analogue des nombres p-adiques pour d'autres systèmes de numérations est une approche naturelle qui aurait pour objectif de comprendre le comportement asymptotique des règles de calculs des systèmes de numération considérés.

Le système de numération d'Ostrowski, fourni par la suite des dénominateurs d'un développement en fraction continue d'un réel positif irrationnel, est un bon candidat pour de telles études. En effet, compte tenu du fait qu'une telle suite satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre deux à coefficients entiers, les règles de calculs dans ce système restent assez simples à comprendre, et obéissent à des principes proches des règles des retenues que l'on rencontre dans les systèmes de numérations en base entières. D'autre part, ce système de numération peut être considéré comme un système de numération qui est à la fois plus complexe que les systèmes de numération en base entière, mais relié à des objets relativement simples et de basse complexité, comme en témoigne le théorème de Morse-Hedlund 4.1.2 et la définition des mots sturmiens, qui sont profondément liés à ce système de numération.

Un des points de vue développé dans ce doctorat consiste donc à présenter un analogue des nombres p-adiques pour le système de numération d'Ostrowski, en considérant des sommes infinies satisfaisant aux conditions propres au système de numération d'Ostrowski. Nous investiguons, dans ce chapitre et le suivant, diverses propriétés et opérations régissant la structure d'un tel analogue. Un second point de vue développé dans ce doctorat s'appuie sur les liens exigues existant entre ce système de numération et les mots sturmiens. Dans cette optique, nous nous servons des mots sturmiens comme d'un outil à caractère théorique qui permettrait d'étudier le système de numération d'Ostrowski. Le lien bijectif existant entre les mots sturmiens et les sommes infinies satisfaisant aux conditions d'Ostrowski est établi dans le théorème 5.2.5, et justifie que l'on ait nommé ces sommes infinies des intercepts formels. Cette bijection est la colonne vertébrale de cette seconde partie de doctorat, et nous permettra, au chapitre 6, de considérer, pour certaines opérations naturelles sur l'ensemble des mots sturmiens leurs analogues sur les intercepts formels.

Nous présentons dans une première section certains résultats connus concernant le système de numération d'Ostrowski et les notions d'intercepts des mots sturmiens. L'intercept d'un mot sturmien est le deuxième paramètre décrivant un tel mot, après la pente. La seconde section concerne la définition des intercepts formels, et précise la

construction d'un mot sturmien d'un intercept donné. Avec cette définition vient le résultat principal de cette seconde partie de doctorat :

Théorème (Intercepts formels des mots sturmiens)
Soit x un mot sturmien de pente $\alpha = [0, a_0, a_1, a_2, \cdots]$ décrite par son développement en fraction continue, de continuants $(q_n)_{n\geq -1}$. Alors il existe un unique intercept formel

$$\rho = \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i+1} q_i$$

de la pente α, où les coefficients $(b_i)_{i\geq 1}$ satisfont aux conditions d'Ostrowski, tel que

$$x = T^{\rho}(c_\alpha).$$

Dans une troisième section, nous présentons le calcul exact de la fonction de répétition des mots sturmiens, en exploitant notre résultat concernant les intercepts formels des mots sturmiens. Nous donnons ensuite une formule générale pour l'exposant diophantien des mots sturmiens à l'aide de ces calculs. L'exposant diophantien d'un mot infini mesure quantitativement à quel point un mot infini est proche d'un mot ultimement périodique, et comme l'ont montré les travaux de B. Adamczewski [3], il permet un encadrement de la mesure d'irrationalité d'un nombre réel à partir des propriétés combinatoires de son dévelopement dans une base entière.

Les résultats présentés dans ce chapitre ainsi que le précédent ont fait l'objet de la pré-publication « Formal intercepts of Sturmian words », présentée sur ArXiv, ainsi que d'une présentation à la conférence 17ème Journées Montoises à Bordeaux, France.

5.1 Système de numération d'Ostrowski

Cette section ne contient pas de nouveaux résultats.

La notion d'intercept des mots sturmiens intervient de manière centrale dans de nombreux travaux concernant les mots de basse complexité. De manière générale, l'étude des suites arithmétiques, considérées modulo les nombres entiers, c'est-à-dire des suites de la forme $(n\alpha \texttt{[mod 1]})_{n\geq 0}$, se base toujours sur les résultats de décomposition des nombres réels ou entiers dans le système de numération d'Ostrowski, voir par exemple [114, 67, 98, 134, 135, 136, 132, 1, 124, 99, 147]. La notion d'intercept intervient dès que l'on considère l'ensemble des mots sturmiens, c'est-à-dire dans les situations où l'on ne se limite pas au langage qu'ils définissent.

Cependant, ces différentes études se basent pour la plupart sur la construction dynamique des mots sturmiens, d'un point de vue ergodique appliqué aux transformations du cercle, et utilisent les définitions standard des intercepts qui empêchent parfois de faire le lien entre les caractérisations numériques obtenues pour les intercepts classiques, et la construction combinatoire des mots sturmiens étudiés. Nous présentons dans ce doctorat un formalisme permettant de construire combinatoirement les mots sturmiens à l'aide d'une définition formelle des intercepts, offrant un nouveau point de vue permettant de saisir comment les écritures d'Ostrowski sont reliées bijectivement avec les mots sturmiens. L'introduction de ce formalisme et son étude permettra donc aux travaux existant de bénéficier d'un regard nouveau en faveur de descriptions et constructions combinatoires des mots sturmiens, comme une limite, qui est le thème de ce chapitre 5, ou par des factorisations, comme on le verra au chapitre 6.

Nous donnons maintenant la description classique, basée sur les mots mécaniques, des mots sturmiens et de leur intercept selon leur approche dynamique. Le lecteur intéressé pourra consulter [116] pour plus de détails concernant cette approche. Nous reviendrons à la fin de cette section plus en détail sur le système de numération d'Ostrowski. Le début de cette section constitue donc un bref exposé de résultats qui étaient connus au début de ce doctorat.

Les mots sturmiens sont obtenus en traçant une ligne droite dans le plan, sur lequel on a tracé le quadrillage dont les intersections sont données par les points à coordonnées entières. On étudie les points d'intersections de la droite tracée avec ce quadrillage, en notant un 0 lorsque la droite considérée croise le quadrillage selon une ligne horizontale, et en notant 1 lorsque la droite croise le quadrillage selon une ligne verticale. En parcourant la droite

tracée en partant de l'axe des ordonnées, on obtient une suite de 0 et de 1 qui forme un mot sturmien lorsque la pente de la droite considérée est irrationnelle, et tous les mots sturmiens sont obtenus de cette façon. Cette description générale permet de voir comment les mots sturmiens sont construits, cette construction géométrique correspond à la définition des « cutting sequences », voir [116] pour plus de détails.

La définition des mots mécaniques revient conceptuellement à la même chose, même si la construction obtenue est un petit peu différente. On peut définir directement, avec α et ρ deux nombres réels, avec $0 \leq \alpha \leq 1$, les mots mécaniques supérieurs $\overline{s}_{\alpha,\rho} : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ et inférieurs $\underline{s}_{\alpha,\rho} : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ par les formules, pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \overline{s}_{\alpha,\rho}(n) &= \lfloor (n+1)\alpha + \rho \rfloor - \lfloor n\alpha + \rho \rfloor, \\ \underline{s}_{\alpha,\rho}(n) &= \lceil (n+1)\alpha + \rho \rceil - \lceil n\alpha + \rho \rceil \end{aligned}$$

pour lesquelles il n'est pas difficile de voir qu'elles sont effectivement à valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}$. Les mots mécaniques admettent aussi une interprétation géométrique, pas très éloignée de celle correspondant pour les « cutting sequences » : pour chaque ligne verticale du plan d'abcisse entière, on considère les deux points à coordonnées entière située sur cette ligne, directement au dessus et en dessous de la droite d'équation $y = \alpha x + \rho$. Les deux points correspondant à une abscisse n et les deux points correspondant à l'abcisse $n+1$ auront des ordonnées qui seront soit inchangées, soit incrémentées, dans le premier cas on utilisera le symbole 0, et dans le second le symbole 1. Le mot ainsi obtenu est sturmien si et seulement si le nombre α est irrationnel. Evidemment, il faut aussi considérer la subtilité du cas où la droite $y = \alpha x + \rho$ passe par un point entier, ce qui va correspondre au mot sturmien particulier qui est le mot caractéristique. On renvoit à [116] pour les détails concernant ces constructions. Comme suggéré, le nombre α va correspondre à la pente du mot sturmien, et le nombre réel ρ à l'intercept.

Cette construction géométrique ne met cependant pas toujours en évidence certaines propriétés combinatoires des mots sturmiens. Selon ces constructions, deux intercepts qui diffèrent d'un entier mènent à des mots sturmiens égaux, ce qui montre un certain aspect non-bijectif de ces descriptions. D'autre part, les subtilités liées au cas où la droite considérée passe par un point entier montre qu'un même intercept peut permettre de définir naturellement deux mots sturmiens différents. Notre doctorat et nos contributions répondent en partie à ces problématiques, et détaillent la structure combinatoire des raisonnements concernant les mots sturmiens. Il est en effet remarquable que ce sont les dénominateurs apparaissant dans le développement en fraction continue de la pente α qui contiennent les informations combinatoire importantes pour les mots sturmiens caractéristiques, et il est alors naturel de se poser la question si l'on peut disposer d'une telle description aussi combinatoirement pertinente pour le second paramètre décrivant les mots sturmiens, l'intercept. Cette question constitue un des leitmotiv principaux de ce doctorat.

Une description à l'aide des rotations sur le cercle permet un point de vue dynamique sur les mots sturmiens. On considère pour cela un point ρ sur le cercle, correspondant à un état initial pour le système dynamique formé par la rotation R_α d'angle $0 < \alpha < 1$:

$$R_\alpha : x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longmapsto x + \alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

On définit alors une partition de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ donnée par les intervalles $[0, 1-\alpha[$ et $[1-\alpha, 1[$, et on obtient alors $\underline{s}_{\alpha,\rho}(n) = 0$ si et seulement si $R_\alpha^n(\rho) \in [0, 1-\alpha[$, pour $n \geq 0$. Pour obtenir des énoncés similaire pour le mot mécanique supérieur associé à α et ρ, il nous faut choisir la partition donnée par les intervalles $]0, 1-\alpha]$ et $]1-\alpha, 1]$. C'est en partie pour éviter à faire ce choix que nous introduisons les intercepts formels. Ce choix correspond en fait, pour le système de numération d'Ostrowski, à choisir l'un des deux intercepts formels σ_0 et σ_1 tels que $\sigma_0 + 1 = 0$ et $\sigma_1 + 1 = 0$, les intercepts formels σ_0 et σ_1 étant ceux qui correspondent respectivement aux mots sturmiens $0c_\alpha$ et $1c_\alpha$, pour lesquels on renvoit à notre calcul 5.2.6, et à 6.1.1 pour l'addition d'un intercept formel avec un entier positif.

Le théorème des trois longueurs, présenté par exemple dans [33, 34, 160], stipule que la rotation d'angle α, où α est un nombre irrationnel vérifiant $0 < \alpha < 1$, itérée n fois à partir d'un point quelconque, découpe le cercle en $n+1$ arcs, d'au plus trois longueurs différentes. Dans les références indiquées, les longueurs des arcs obtenues ainsi sont précisées, et sont exprimées à l'aide des dénominateurs et numérateurs du développement en fraction continue de α.

Plus précisément, soit $\alpha = [0, a_1, a_2, \ldots]$ le développement en fraction continue de α. On note $(p_n)_{n \geq -1}$ et $(q_n)_{n \geq -1}$ les numérateurs et dénominateurs respectivement des différentes approximations rationnelles de α obtenues par son développement en fraction continue. Tout nombre réel de l'intervalle $x \in [-\alpha, 1-\alpha]$ s'écrit, dans ce qui s'appelle le système de numération d'Ostrowski des nombres réels, sous la forme :

$$x = \sum_{i \geq 0} b_{i+1}(p_i - \alpha q_i)$$

où les $(b_i)_{i\geq 1}$ satisfont aux conditions d'Ostrowski (que nous décrivons à la fin de cette section), voir par exemple les études menées dans [32, 147]. Comme les représentations des nombres réels dans les bases entières, certaines représentations d'Ostrowski différentes peuvent mener à des réels égaux. Nous verrons au chapitre 6 plus en détail comment ces subtilités extrêmales se manifestent dans les factorisations des mots sturmiens.

L'intercept d'un mot sturmien, vu comme un réel de l'intervalle $[-\alpha, 1-\alpha[$ est alors décomposé dans le système de numération d'Ostrowski, et cette représentation permet de nombreuses études dynamiques reliant ce système au mot sturmien considéré. Comme nous l'avons indiqué, deux décompositions d'Ostrowski différentes peuvent mener à un même mot sturmien. C'est ce type de propriété que nous cherchons à préciser, via le développement dans cette seconde partie de doctorat, du formalisme lié aux intercepts formels.

Différentes études ont démontré l'importance du système de numération d'Ostrowski, malgré le fait qu'il soit plus difficile à utiliser que le systèmes de numération dans une base entière. Ce système intervient autant dans des problèmes probabilistes et ergodiques que dans les aspects analytique et algorithmiques de la théorie des nombres, on pourra consulter [62, 63, 86, 87, 96, 97, 101, 110, 113, 115, 159] pour des travaux issus de différents domaines mathématiques où le système de numération d'Ostrowski intervient. La notion d'intercept formels que nous présentons dans ce doctorat, se base sur un point de vue inspiré des nombres p-adiques.

On considère une pente α et $(q_n)_{n\geq -1}$ la suite de ses continuants. Cette suite d'entier définit naturellement un système de numération, comme étudié dans [8]. Ce système de numération, apellé aussi le système de numération de Zeckendorf lorsque l'on considère la pente $1/\varphi$, où φ est le nombre d'or, a été l'objet de nombreuses études et travaux, voir [37, 38, 72, 102, 103, 138, 171, 172]. On emploie plutot le terme de système de numération d'Ostrowski lorsque l'on parle du système de numération associé à la suite des continuants d'une pente générale.

Nous donnons l'énoncé du résultat suivant de facture très élémentaire, la caractérisation que nous donnons des conditions d'Ostrowski peut permettre de mieux comprendre les définitions 5.2.1 associées aux intercepts formels. Dans cette proposition réside aussi le fait que l'écriture dans le système de numération d'Ostrowski s'obtient en appliquant un algorithme glouton. On renvoit à [8] pour plus de détails concernant les systèmes de numérations généraux. Pour une preuve de ce résultat, voir [8], théorème 3.9.1.

Proposition 5.1.1

Soit $\alpha = [0, a_1, a_2a_3, \cdots]$ une pente de continuants $(q_n)_{n\geq -1}$. Soit $N = \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1}q_i$ avec $b_i \geq 0$ pour tout $i \geq 1$, et soit $n \geq 1$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall l = 1 \dots k, \quad \sum_{i=0}^{l-1} b_{i+1}q_i < q_l,$

ii) On a :
- $0 \leq b_1 \leq a_1 - 1,$
- $\forall i \geq 1,\ 0 \leq b_i \leq a_i,$
- $\forall i \geq 1,\ b_{i+1} = a_{i+1} \Rightarrow b_i = 0.$

Pour une suite d'entiers naturels $(b_i)_{i\geq 1}$, on appelle conditions d'Ostrowski l'ensemble des conditions énoncées en *ii)* dans la proposition 5.1.1. Nous utiliserons très souvent ces conditions, en particulier dans nos manipulations sur les intercepts formels. Ces conditions aparaissent naturellement comme des conditions de simplifications des expressions sous la forme de somme à coefficients entiers naturels des continuants de la pente, et font office de règle des retenues dans le système de numération d'Ostrowski. Voir [8], théorème 3.9.1.

Proposition 5.1.2

Soit $n \geq 1$, et $\alpha = [0, a_1, a_2a_3, \cdots]$ une pente de continuants $(q_n)_{n\geq -1}$. Tout entier $N \in [0, q_n[$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1}q_i$$

où les entiers $(b_i)_{i\geq 1}$ satisfont aux conditions d'Ostrowski.

De manière générale, face à une expression d'un entier $N \geq 0$ sous la forme

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} q_i$$

où les $(b_i)_{i=1}^{n}$ sont des entiers positifs, la relation fondamentale de récurrence

$$q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1},$$

valable pour $n \geq 0$, permet d'opérer à des simplifications dans l'écriture de l'entier N. On peut en fait voir que les conditions d'Ostrowski permettent de garantir l'unicité de l'écriture d'un entier N sous la forme $N = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} q_i$, selon la proposition 5.1.2.

On démontre dans le chapitre 6, dans la section (6.5), un lemme 6.5.1 qui permet de controler dans certains cas la forme de la décomposition d'Ostrowski d'un entier pour lequel on connait une écriture qui ne satisfait pas les conditions d'Ostrowski. En général cependant, ce problème est inhérent aux manipulations sur le système de numération d'Ostrowski. Il est par exemple très délicat de maitriser l'écriture dans le système de numération d'Ostrowski de la somme de deux entiers dont on connait les écritures dans ce système. Typiquement, et il s'agit d'une différence majeure avec le cas des systèmes de numération en base entière, on ne dispose pas d'analogue de l'inégalité ultramétrique. On reviendra sur ces considérations dans la dernière section du chapitre 6.

5.2 Intercepts formels

Cette section contient de nouveaux résultats. Le résultat principal de cette section est le théorème 5.2.5.

La définition suivante introduit l'ensemble des intercepts formels. Comme pour les nombres p-adiques, cette définition se base sur la considération de suite cohérente d'entiers vis-à-vis des opérations de réduction modulo les continuants d'une pente.

Définition 5.2.1
Soit $\alpha = [0, a_1, a_2, \cdots]$ une pente de continuants $(q_n)_{n\geq -1}$. On définit l'ensemble :

$$\mathcal{I}_\alpha = \left\{ (k_n)_{n>0} \in \prod_{n>0} [0, q_n[\;\middle|\; \forall n \geq 0,\ k_n = k_{n+1} \texttt{[mod } q_n\texttt{]} \right\}$$

des intercepts formels de la pente α.

Vu les propositions précédentes, si $\rho = (\rho_n)_{n\geq 0}$ est un intercept formel, il existe une unique suite d'entiers naturels $(b_i)_{i\geq 1}$, satisfaisant aux conditions d'Ostrowski, telle que

$$\rho_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} q_i$$

pour tout $n \geq 0$. Dans ce cas, on écrit directement :

$$\rho = \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i+1} q_i.$$

Cette notation des intercepts formels nous sera très utile par la suite, par exemple au chapitre 6 lorsque nous définirons la somme d'un intercept formel avec un entier naturel. On essaiera donc effectivement de considérer les intercepts formels comme des sommes infinies, ces sommes infinies étant définies formellement comme la suite de leurs sommes partielles, sachant qu'il ne s'agit ni de réels, ni de fonctions, ni de nombre p-adiques. Cette construction à l'aide d'une limite projective est à mettre en parallèle avec les autres occurrences de cette opération, comme par

exemple pour définir les séries formelles, les schémas formels, ou encore les nombres p-adiques. Ces derniers étant les objets mathématiques les plus proches des intercepts formels.

Pour $n > 0$, on pose :

$$\Psi_n^{n+1} : \begin{array}{ccc} [0, q_{n+1}[& \longmapsto & [0, q_n[\\ k & \longmapsto & k \ \texttt{[mod } q_n\texttt{]} \end{array},$$

et pour des entiers $m \geq n > 0$:

$$\Psi_n^m = \Psi_n^{n+1} \circ \Psi_{n+1}^{n+2} \circ \cdots \circ \Psi_{m-1}^m \ : \ [0, q_m[\longrightarrow [0, q_n[,$$

alors

$$\mathcal{I}_\alpha = \varprojlim [0, q_n[= \left\{ (k_n)_{n>0} \in \prod_{n>0} [0, q_n[\ \middle| \ n \leq m \Longrightarrow \Psi_n^m(k_m) = k_n \right\}$$

est la limite projective des ensembles $[0, q_n[$ munis des fonctions Ψ_n^m.

La limite projective intervenant dans la définition des intercepts formels définit des applications de projection $\Psi_m : \mathcal{I}_\alpha \to [0, q_m[$ pour $m \geq 1$. Elles correspondent à l'opération de troncation d'une somme écrite dans le système de numération d'Ostrowski. Leur comportement est aussi difficile à comprendre que le système de numération d'Ostrowski lui-même, et pour calculer $\Psi_m(N)$ pour un entier $m \geq 1$ et $N \geq 1$, on est obligé de considérer l'écriture dans le système d'Ostrowski de N sous la forme

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} q_i$$

à l'aide de la propriété 5.1.2, et on a alors, par définition,

$$\Psi_m(N) = \sum_{i=0}^{m-1} b_{i+1} q_i.$$

Ainsi, par définition, pour un intercept formel ρ qui s'écrit

$$\rho = \sum_{i \geq 0} b_{i+1} q_i,$$

on a, pour tout $m \geq 1$:

$$\Psi_m(\rho) = \sum_{i=0}^{m-1} b_{i+1} q_i.$$

Nous donnerons au chapitre 6 plusieurs propriétés vérifiées par les fonctions Ψ_m. Pour le moment, on peut au moins dire que l'on a $\Psi_m(\rho) < q_m$ pour tout $m \geq 1$ et tout intercept formel ρ. Pour ce chapitre cependant, nous noterons systématiquement

$$\rho_n = \Psi_n(\rho)$$

pour un intercept formel ρ.

La définition des intercepts formels est à mettre en parallèle direct avec la définition des nombres p-adiques à l'aide des anneaux $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, pour un nombre premier p. En effet, l'anneau des entiers p-adiques peut être défini comme la limite projective

$$\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

des anneaux $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ munis des morphismes de réduction naturels. Cette approche donne lieu à l'étude du système de numération classique en base p, et dans ce cas on étudie la suite définie par la relation de récurrence :

$$p_{n+1} = p^{n+1} = p \cdot p^n = p \cdot p_n.$$

Dans le cas du système de numération d'Ostrowski, il s'agit de l'étude d'une suite définie par une relation de récurrence de la forme

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$$

et de comparer les structures algébriques (opposé, somme, produit...) obtenues avec l'ensemble des nombres p-adiques. Une première obtruction à ces considérations algébriques étant que les applications de réductions utilisées dans le cas des intercepts formels ne sont pas des morphismes, et les ensembles $[0, q_n[$ ne peuvent pas être considérés de la même manière que les anneaux $\mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$. On pourra trouver dans [144] une construction algébrique et topologique des nombres p-adiques, ainsi que certaines démonstrations sur les limites projectives d'ensembles. Pour certaines considérations combinatoires et algébriques sur les nombres p-adiques, on pourra consulter [71].

Notre objectif, par l'introduction des intercepts formels, a été de donner un cadre rigoureux à des manipulations formelles sur les sommes infinies satisfaisant aux conditions d'Ostrowski. Le théorème 5.2.5, qui montre que les mots sturmiens de la pente α sont en bijection naturelle avec les intercepts formels de la pente α, ne se limite pas à l'existence d'une bijection entre deux ensembles, mais il démontre que les calculs sur les sommes infinies d'Ostrowski que sont les intercepts formels reviennent à des opérations sur les mots sturmiens, ces dernières pouvant être de nature algébrique comme dynamique. Ce type de point de vue nous sera très utile dans le chapitre 6, lorsque nous introduirons la notion de complémentaire d'un intercept formel.

En vue de démontrer le théorème 5.2.5, il convient d'étudier, pour $\rho = (\rho_n)_{n\geq 0}$ un intercept formel, les mots infinis de la forme

$$T^{\rho_n}(c_\alpha)$$

pour $n \geq 1$, et en particulier de déterminer la longueur de leur plus long préfixe commun. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 5.2.2
Soit $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$ un intercept formel de la pente α de continuants $(q_n)_{n\geq -1}$, et $n \geq 1$. Soit

$$\lambda_n = q_{n+1} + q_n - \rho_{n+1} - 2,$$

alors

1. *les mots $T^{\rho_n}(c_\alpha)$ et $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$ partagent les même préfixes de longueur λ_n,*
2. *si $b_{n+1} \neq 0$, alors λ_n est la longueur du plus long préfixe commun entre $T^{\rho_n}(c_\alpha)$ et $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$,*
3. *la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ tend vers l'infini en croissant.*

Preuve. 1) Soit $m = q_n - 1 \in I_n^0$, selon les notations de 4.3.8. On a vu lors de la démonstration du théorème 4.3.9 que le mot $T^{b_{n+1}q_n}(c_\alpha)$ tourne $a_{n+1} - b_{n+1}$ fois autour du cycle référent, avant de tourner autour du cycle non-référent. Ceci montre que les deux mots

$$T^{b_{n+1}q_n}(c_\alpha) \quad \text{et} \quad c_\alpha$$

partagent le même préfixe de longueur

$$m + (a_{n+1} - b_{n+1})q_n + r,$$

où r est la longueur de la partie commune des deux cycles formant G_m, en accord avec le théorème 4.3.2. Puisque $m = q_n - 1$, tous les sommets du cycle non-référent sont sur le cycle référent, selon la proposition 4.3.8. Ceci implique que $r = q_{n-1} - 1$, et les deux mots $T^{b_{n+1}q_n}(c_\alpha)$ et c_α partagent le même préfixe de longueur $m + (a_{n+1} - b_{n+1})q_n + r = q_n - 1 + (a_{n+1} - b_{n+1})q_n + q_{n-1} - 1$. On en déduit que les deux mots

$$T^{\rho_n}(T^{b_{n+1}q_n}(c_\alpha)) = T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha) \quad \text{et} \quad T^{\rho_n}(c_\alpha)$$

partagent le même préfixe de longueur

$$\begin{aligned} q_n + (a_{n+1} - b_{n+1})q_n + q_{n-1} - 2 - \rho_n &= q_{n+1} + q_n - \rho_{n+1} - 2 \\ &= \lambda_n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2) Si $b_{n+1} \neq 0$, alors le plus grand préfixe commun aux mots $T^{b_{n+1}q_n}(c_\alpha)$ et c_α est de longueur $q_n - 1 + (a_{n+1} - b_{n+1})q_n + q_{n-1} - 1$, et de là on obtient que la longueur du plus long préfixe commun aux mots $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$ et $T^{\rho_n}(c_\alpha)$ est égale à λ_n.

3) On a

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} - \lambda_n &= q_{n+2} + q_{n+1} - q_{n+1} - q_n - (\rho_{n+2} - \rho_{n+1}) \\ &= (a_{n+2} - b_{n+2})q_{n+1} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire que la suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ est croissante. Puisque $\rho_{n+1} < q_{n+1}$ d'après la définition 5.2.1, on obtient :

$$\lambda_n \geq q_n - 1$$

et ceci implique que $\lambda_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. □

La définition suivante permet de construire un mot sturmien à partir d'un intercept formel. Ce type de propriété justifie en partie l'interprétation d'un intercept formel comme une somme infinie satisfaisant aux conditions d'Ostrowski, en accord avec les remarques suivant la définition 5.2.1. Cette définition d'un mot sturmien à partir d'un intercept formel est à mettre en parallèle avec la définition classique des intercepts déjà connue, mentionnée au début de la section (4.1). Le formalisme introduit conduit naturellement à cette définition, qui se fait sans choix préalables et présentant des caractéristiques quantifiées. Il est alors remarquable que cette association soit bijective, et ce résultat fera l'objet du théorème 5.2.5, contribution principale de cette seconde partie de doctorat.

Définition 5.2.3
Soit ρ un intercept formel de la pente α. On définit le mot sturmien $T^\rho(c_\alpha)$ de pente α et d'intercept formel ρ comme le mot

$$T^\rho(c_\alpha) = \lim T^{\rho_n}(c_\alpha)$$

ayant le même préfixe de longueur $q_n - 1$ que $T^{\rho_n}(c_\alpha)$ pour tout $n \geq 1$.

Proposition 5.2.4
Soit ρ un intercept formel de la pente α et $n \geq 1$. Alors la longueur du plus long préfixe commun aux mots

$$T^\rho(c_\alpha) \quad \text{et} \quad T^{\rho_n}(c_\alpha)$$

vaut λ_N, où N est le plus petit entier $N \geq n$ tel que $b_{N+1} \neq 0$, où la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est définie en 5.2.2. Si un tel N n'existe pas, alors les deux mots susmentionnés coincident.

Preuve. Le résultat découle de l'égalité $\rho_n = \rho_k$ pour tous les $n \leq k \leq N$ dans le cas où un tel N existe, et grâce à la proposition 5.2.2 et la définition 5.2.1. Pour la seconde partie, on a alors les égalités $\rho_n = \rho_k$ pour tout $n \leq k$, d'où le résultat. □

Le théorème suivant justifie l'introduction des intercepts formels, comme description bijective et combinatoire de l'ensemble des mots sturmiens de pente α. Il quantifie exactement et formellement les liens unissant le second paramètre décrivant un mot sturmien et le mot sturmien lui-même. L'application bijective ainsi définie est au centre des résultats de cette seconde partie : le chapitre 4 a été construit pour mener à la démonstration de ce théorème, et la suite de ce chapitre 5 étudiera ses applications et conséquences, et le chapitre 6 développera ce formalisme pour mener à des formules de factorisations. L'application bijective entre les intercepts formels de la pente α et les mots sturmiens de la pente α n'est pas seulement bijective, elle est aussi naturelle. La structure du graphe de

Rauzy, entité combinatoire étudiée dans notre chapitre 4, y intervient de manière fondamentale. C'est la structure du graphe de Rauzy, et le chemin parcouru par un mot sturmien dans ce graphe, qui permet de relier les aspects globaux d'un mot sturmiens avec ses aspects locaux. La bijectivité de l'opération associant à un intercept formel un mot sturmien repose donc sur la bijectivité du parcours d'un mot infini sur son graphe de Rauzy. Ceci souligne à nouveau le contenu arithmétique qui peut être trouvé dans le graphe de Rauzy d'un mot infini.

Théorème 5.2.5
Soit x un mot sturmien de pente α. Alors il existe un unique intercept formel de la pente α tel que

$$x = T^{\rho}(c_\alpha).$$

Preuve. On considère la suite, définie pour $n \geq 0$ par :

$$\rho_n = \min\{k \geq 0 \mid x \text{ et } T^k(c_\alpha) \text{ partagent le même préfixe de longueur } q_n - 1\}$$

et on montre que la suite $\rho = (\rho_n)_{n\geq 1}$ définit un intercept formel, selon la définition 5.2.1. Soit $n \geq 1$ et $m = q_n - 1 \in I_n^0$, selon les notations de la proposition 4.3.8. Puisque le cycle référent est de longueur $m = q_n - 1$ selon les propositions 4.3.2 et 4.3.8, tous les sommets de G_m sont sur le cycle référent d'après la proposition 4.3.2, et ceci implique que $0 \leq \rho_n < q_n$. Puisque $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$, $T^{\rho_n}(c_\alpha)$ et x partagent le même préfixe de longueur $q_n - 1$ d'après la proposition 5.2.2, les chemins qu'ils définissent commencent au même sommet.

Ecrivons $\rho_{n+1} = bq_n + c$ avec $c < q_n$ comme dans la proposition 5.1.2, en vue de la définition 5.2.1. Puisque $\rho_{n+1} = bq_n + c < q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, on a $b \leq a_{n+1}$ et si $b = a_{n+1}$ alors $c < q_{n-1}$. Puisque le mot caractéristique c_α tourne a_{n+1} fois autour du cycle référent d'après 4.3.9, si $b < a_{n+1}$ alors $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$ et $T^c(c_\alpha)$ commencent au même sommet, et donc partagent le même préfixe de longueur $q_n - 1$. Puisque le cycle référent est de longueur q_n d'après la proposition 4.3.8, et que $\rho_n < q_n$ on doit avoir $c = \rho_n$ d'après la définition 5.2.1 et la proposition 5.1.2. Dans le cas où $b = a_{n+1}$, alors $c < q_{n-1}$, de telle sorte que $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$ commence sur la partie commune des deux cycles formant G_m via les propositions 4.3.2 et 4.3.8, et ainsi $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$ et $T^c(c_\alpha)$ commencent sur le même sommet, qui est sur le cycle référent, et on doit encore avoir $\rho_n = c$. Donc $\rho_n = \rho_{n+1} \pmod{q_n}$, et $\rho = (\rho_n)_{n\geq 1}$ définit bien un intercept formel d'après la définition 5.2.1. D'après la définition 5.2.3, x est le mot sturmien associé à cet intercept formel.

Pour l'unicité, noter que, puisque $m = q_n - 1$ et que le cycle référent est de longueur q_n via la proposition 4.3.8, il ne peut y avoir qu'un seul $k < q_n$ tel que $T^k(c_\alpha)$ et $T^\rho(c_\alpha)$ partagent le même préfixe de longueur $q_n - 1$ d'après la définition 5.2.3, et puisque ρ_n est un tel k, tout intercept formel γ tel que $x = T^\gamma(c_\alpha)$ doit satisfaire $\gamma_n = \rho_n$. Ceci démontre l'unicité, et le théorème. □

On déduit en particulier de la preuve du théorème 5.2.5 que si $0 \leq k < q_{n+1}$ est tel que $T^k(c_\alpha)$ et $T^\rho(c_\alpha)$ partagent le même préfixe de longueur $q_n - 1$, alors on a $\Psi_n(\rho) = \Psi_n(k) = k \pmod{q_n}$, selon les notations présentées après la définition 5.2.1. De plus, il est évident que l'intercept formel correspondant au mot caractéristique de la pente α est l'intercept formel formé par la suite nulle, c'est-à-dire l'intercept formel dont tous les coefficients dans le système de numération d'Ostrowski sont nuls. Ce type de résultat met en évidence le mot caractéristique comme un mot sturmien singulier parmis les mots sturmiens de la pente α. Suivant le point de vue, le mot caractéristique est parfois considéré comme un mot sturmien d'intercept valant $-\alpha$, ou α. A la lumière de nos résultat, pour le point de vue des systèmes de numérations, il apparait plus naturel de considérer, à pente fixée, le mot caractéristique comme le mot sturmien d'intercept nul.

Procédons maintenant à un calcul d'intercept formel. Les deux mots sturmiens $0c_\alpha$ et $1c_\alpha$ sont des mots sturmiens remarquables (pas seulement parce qu'ils sont de Lyndon !), et il apparait naturel de vouloir déterminer leurs intercepts formels. Cet exemple de calcul n'est pas un exemple arbitraire et anodin, il s'agit d'un calcul fondamental qui permet une bonne compréhension des règles de calcul sur les intercepts formels. Ces deux mots sturmiens sont typiquement des endroits où un choix arbitraire devait être fait.

Proposition 5.2.6
Les deux mots infinis $0c_\alpha$ et $1c_\alpha$ sont les mots sturmiens d'intercepts formels respectifs :

$$\sum_{i\geq 0} a_{2i+2}q_{2i+1} = (q_{2\lfloor n/2\rfloor} - 1)_{n\geq 1} \quad et \quad (a_1 - 1) + \sum_{i\geq 1} a_{2i+1}q_{2i} = (q_{2\lfloor n/2\rfloor+1} - 1)_{n\geq 1},$$

que nous notons respectivement σ_0 et σ_1.

Preuve. On vérifie d'abord rapidement les égalités entre les suites mentionnées. On a clairement $q_2 - 1 = q_2 - q_0 = a_2q_1$, et le résultat pour la première suite s'en déduit de la formule $q_{2(n+1)} - q_{2n} = a_{2n+2}q_{2n+1}$, la preuve pour la seconde étant similaire.

Soit x le mot sturmien d'intercept formel $\sum_{i\geq 0} a_{2i+2}q_{2i+1}$, et calculons $T(x)$. On sait que x et $T^{q_{2\lfloor n/2\rfloor}-1}(c_\alpha)$ partagent le même préfixe de longueur $q_{2\lfloor n/2\rfloor} - 1$ d'après 5.2.2, donc $T(x)$ et $T^{q_{2\lfloor n/2\rfloor}}(c_\alpha)$ partagent le même préfixe de longueur $q_{2\lfloor n/2\rfloor} - 2$, sachant que cette quantité tend vers l'infini avec n. Mais $T^{q_{2\lfloor n/2\rfloor}}(c_\alpha)$ admet le même préfixe de longueur $q_{2\lfloor n/2\rfloor} - 1$ que c_α d'après 5.2.4. On en déduit que $T(x) = c_\alpha$. La même preuve est valable pour le second intercept formel présenté.

Il résulte de l'unicité de l'écriture selon les conditions d'Ostrowski d'un intercept formel que les deux intercepts mentionnés sont distincts. On conclut en remarquant que le mot $T^{a_1-1}(c_\alpha)$ commence par la lettre 1 d'après le théorème 4.2.1. □

On en déduit en particulier, que si c_α est un suffixe strict de $T^\rho(c_\alpha)$, alors il existe un $k \geq 0$ et un entier $N \geq 0$ tel que, soit $\Psi_n(\rho) = q_{2\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} - 1 - k$ pour tout $n \geq N$, soit $\Psi_n(\rho) = q_{2\lfloor \frac{n}{2}\rfloor+1} - 1 - k$ pour tout $n \geq N$, d'après les notations suivant la définition 5.2.1.

Ces deux calculs sont des analogues de la formule

$$-1 = \sum_{i\geq 0}(p-1)p^i$$

pour les nombres p-adiques. Contrairement au cas p-adique, pour les itercepts formels il y a deux analogues du nombre « -1 ». Ces considérations seront étudiées plus en détails dans le chapitre 6. D'autre part, nous verrons que cet aspect des intercepts formels admet des conséquences concernant les factorisations des mots sturmiens. Les deux mots $0c_\alpha$ et $1c_\alpha$ seront deux mots particuliers présentant des singularités vis-à-vis de leurs factorisations.

5.3 Fonction de répétition et mesures d'irrationalité

Cette section contient de nouveaux résultats. Le résultat principal de cette section est le théorème 5.3.8.

Nous étudions en premier lieu dans cette section les valeurs exactes prises par la fonction de répétition des mots sturmiens, définie en 4.3.3. Les travaux de Y. Bugeaud et H. Kim [45] ou de S. Moothatu [163] se concentrent sur le comportement asymptotique de la fonction de répétition. Cependant, déterminer les valeurs exactes de différentes fonctions numériques définies sur les mots infinis, comme la fonction de complexité 4.1.1, constitue une partie importante de la dynamique symbolique. Evaluer différentes grandeurs liées aux répétitions dans les mots de basse complexité constitue un thème important de la combinatoire des mots aux multiples interactions mathématiques, voir [76, 99, 106].

Proposition 5.3.1
Soit $x = T^\rho(c_\alpha)$ un mot sturmien de pente α, où α est de continuant $(q_n)_{n\geq -1}$, et $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$ est un intercept formel de la pente α, et soient $m \in I_n^l$ pour $n \geq 0$ et $0 \leq l \leq a_{n+1} - 1$. On écrit $m = (l+1)q_n + q_{n-1} - 2 - r$ où r est la longueur de la partie commune des deux cycles du graphe de Rauzy G_m de degré m de x d'après 4.3.2. Alors :

1. $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = q_n$ *si* $0 \leq \rho_{n+1} \leq (a_{n+1} - l - 1)q_n + r$,
2. $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = q_{n+1} - \rho_{n+1}$ *si* $(a_{n+1} - l - 1)q_n + r < \rho_{n+1} < (a_{n+1} - l)q_n$,
3. $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = lq_n + q_{n-1}$ *si* $(a_{n+1} - l)q_n \leq \rho_{n+1} \leq (a_{n+1} - l)q_n + r$,
4. $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = q_{n+1} - \rho_{n+1} + q_n$ *si* $(a_{n+1} - l)q_n + r < \rho_{n+1} \leq q_{n+1} - 1$.

Preuve. 1) Puisque le mot c_α tourne $a_{n+1}-l$ fois autour du cycle référent d'après 4.3.2 et 4.3.9, si $0 \leq \rho_{n+1} \leq (a_{n+1}-l-1)q_n+r$, alors $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$ commence sur le sommet appartenant au cycle référent d'après la proposition 4.3.8, et tourne autour du cycle référent. Ceci implique que

$$r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = q_n.$$

2) Si $(a_{n+1}-l-1)q_n+r < \rho_{n+1} < (a_{n+1}-l)q_n$, alors $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$ commence sur le cycle référent d'après la proposition 4.3.8, mais ne tourne pas autour de celui-ci d'après 4.3.9. Puisque $T^{(a_{n+1}-l)q_n-\rho_{n+1}}(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha))$ commence au sommet correspondant au facteur spécial à gauche L_m, et que ce mot ne tourne pas autour du cycle référent, il doit tourner autour du cycle non-référent d'après 4.3.2, et on a donc :

$$r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = (a_{n+1}-l)q_n - \rho_{n+1} + lq_n + q_{n-1} = q_{n+1} - \rho_{n+1}.$$

3) Si $(a_{n+1}-l)q_n \leq \rho_{n+1} \leq (a_{n+1}-l)q_n+r$, alors $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$ commence sur la partie commune des deux cycles constituants le graphe de Rauzy de degré m de x d'après 4.3.2. Puisque ce mot ne tourne pas autour du cycle référent d'après 4.3.8, il tourne autour du cycle non-référent par la proposition 4.3.2, et on a donc :

$$r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = lq_n + q_{n-1}.$$

4) Noter que le préfixe de longueur m de $T^{q_{n+1}-1}(c_\alpha)$ est le seul sommet w de G_m tel que la flèche $w \to L_m$ n'appartienne pas au cycle référent d'après 4.3.8. Ceci montre que si $(a_{n+1}-l)q_n+r < \rho_{n+1} \leq q_{n+1}-1$, alors $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$ commence sur un sommet qui est sur le cycle non-référent, et qui n'est pas sur le cycle référent. Puisqu'un mot sturmien ne peut pas tourner deux fois autour du cycle non-référent d'après 4.3.11, le mot $T^{q_{n+1}-\rho_{n+1}}(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha))$ commence au point L_m de G_m et tourne autour du cycle référent par 4.3.2 et 4.3.8. Ceci montre que :

$$r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = q_{n+1} - \rho_{n+1} + q_n$$

□

On en déduit le corollaire suivant, où l'on se ramène à un énoncé portant sur l'entier m. Il faut toutefois faire attention aux situations où certaines des inégalités de 5.3.1 n'apparaissent pas pour les valeurs de m considérées. Ces valeurs de la fonction de répétition pour des mots sturmiens suffixes du mot caractéristique, qui représentent des approximations successives d'un mot sturmien arbitraire par la définition 5.2.3, vont nous permettre de calculer précisément les valeurs de la fonction de répétition d'un mot sturmien d'intercept formel donné.

Corollaire 5.3.2
Soit $x = T^\rho(c_\alpha)$ un mot sturmien de pente α, où α est de continuant $(q_n)_{n\geq -1}$, $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$ est un intercept formel de la pente α, et soit $m \in I_n = [q_n - 1, q_{n+1} - 1[$ pour $n \geq 0$. Alors :

1. *on a $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = q_n$ si $q_n - 1 \leq m \leq q_{n+1} - \rho_{n+1} - 2$, ce cas étant inexistant dans le cas où $b_{n+1} = a_{n+1}$ ou bien dans le cas où $b_{n+1} = a_{n+1} - 1$ et $b_n \neq 0$,*
2. *on a $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = q_{n+1} - \rho_{n+1}$ si $q_{n+1} - \rho_{n+1} - 1 \leq m \leq q_{n+1} - b_{n+1}q_n - 2$, ce cas étant inexistant dans le cas où $b_{n+1} = a_{n+1}$,*
3. *si $m \leq q_{n+1} + q_n - \rho_{n+1} - 2$:*
   — On a $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = q_{n-1}$ si $b_{n+1} = a_{n+1}$, pour $q_n - 1 \leq m$,
   — on a $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = q_{n+1} - b_{n+1}q_n$ si $0 < b_{n+1} < a_{n+1}$, pour $q_{n+1} - b_{n+1}q_n - 1 \leq m$,
   ces cas étant inexistant dans le cas où $b_{n+1} = 0$,
4. *on a $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = q_{n+1} - \rho_{n+1} + q_n$ si $q_{n+1} - \rho_{n+1} + q_n - 1 \leq m \leq q_{n+1} - 2$, ce cas étant inexistant dans le cas où $b_{n+1} = 0$.*

Preuve. On conserve les notations de 5.3.1.
1) D'après 5.3.1.1), $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = q_n$ si $0 \leq \rho_{n+1} \leq (a_{n+1}-l-1)q_n + r$, ce qui avec la relation $m = (l+1)q_n + q_{n-1} - 2 - r$ fournit l'inégalité :

$$0 \leq \rho_{n+1} \leq q_{n+1} - m - 2$$

qui mène, sachant que $m \in I_n$, à :

$$q_n - 1 \leq m \leq q_{n+1} - \rho_{n+1} - 2.$$

Cette situation ne peut pas apparaitre si $q_{n+1} - \rho_{n+1} - 2 < q_n - 1$, ce qui arrive exactement lorsque $b_{n+1} = a_{n+1}$ ou bien lorsque $b_{n+1} = a_{n+1} - 1$ et $b_n \neq 0$.

2) D'après 5.3.1.2), $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = q_{n+1} - \rho_{n+1}$ si $(a_{n+1} - l - 1)q_n + r < \rho_{n+1} < (a_{n+1} - l)q_n$, ce qui implique l'égalité $b_{n+1} = a_{n+1} - l - 1$, et puisque $l \geq 0$, ce cas n'arrive pas lorsque $b_{n+1} = a_{n+1}$. L'inégalité

$$(a_{n+1} - l - 1)q_n + r < \rho_{n+1} < (a_{n+1} - l)q_n$$

mène alors à :

$$b_{n+1}q_n + r < \rho_{n+1} < (b_{n+1} + 1)q_n$$

dont la partie de droite est trivialement vérifiée. L'inégalité de gauche fournit, à l'aide de la relation $m = (l+1)q_n + q_{n-1} - 2 - r$:

$$q_{n+1} - 2 - \rho_{n+1} < m \leq \max I_n^l = (a_{n+1} - b_{n+1})q_n + q_{n-1} - 1 = q_{n+1} - b_{n+1}q_n.$$

ceci démontre l'énoncé 2).

3) D'après 5.3.1.3), $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = lq_n + q_{n-1}$ si $(a_{n+1} - l)q_n \leq \rho_{n+1} \leq (a_{n+1} - l)q_n + r$. Ceci implique que $b_{n+1} = a_{n+1} - l$, c'est-à-dire que $l = a_{n+1} - b_{n+1}$. Puisque $0 \leq l \leq a_{n+1} - 1$, ce cas ne peut pas arriver si $b_{n+1} = 0$. D'autre part, l'inégalité

$$(a_{n+1} - l)q_n \leq \rho_{n+1} \leq (a_{n+1} - l)q_n + r$$

mène, à l'aide de la relation $m = (l+1)q_n + q_{n-1} - 2 - r$, à

$$b_{n+1}q_n \leq \rho_{n+1} \leq q_{n+1} + q_n - 2 - m$$

l'inégalité de gauche étant trivialement vérifiée, et ceci fournit $m \leq q_{n+1} + q_n - \rho_{n+1} - 2$. La disjonction des cas provient de l'appartenance $m \in I_n^{a_{n+1} - b_{n+1}}$.

4) D'après 5.3.1.4), $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = q_{n+1} - \rho_{n+1} + q_n$ si

$$(a_{n+1} - l)q_n + r < \rho_{n+1} \leq q_{n+1} - 1,$$

l'inégalité de droite étant trivialement vérifiée. Celle de gauche mène à

$$q_{n+1} + q_n - \rho_{n+1} - 2 \leq m$$

ceci n'étant possible, vu l'appartenance $m \in I_n$, que si $q_n \leq \rho_{n+1}$, ce qui est équivalent à la condition $b_{n+1} \neq 0$. □

Nous mettons en garde le lecteur attentif que rien n'indique que l'égalité $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) = r(T^{\rho_{n+2}}(c_\alpha), m)$ soit vérifiée pour un entier $m \in I_n$. C'est l'une des obtructions à laquelle nous allons faire face dans la proposition suivante.

Proposition 5.3.3
Soit $x = T^\rho(c_\alpha)$ un mot sturmien de pente α, où α est de continuant $(q_n)_{n \geq -1}$, $\rho = \sum_{i \geq 0} b_{i+1}q_i$ est un intercept formel de la pente α, et soit $m \in I_n^l$ pour $n \geq 0$ et $0 \leq l \leq a_{n+1} - 1$. On écrit $m = (l+1)q_n + q_{n-1} - 2 - r$ où r est la longueur de la partie commune des deux cycles de G_m, le graphe de Rauzy de degré m de x.

Si $b_{n+2} \neq a_{n+2}$, alors :

$$r(x, m) = r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m).$$

Si $b_{n+2} = a_{n+2}$, alors :

$$r(x, m) = r(T^{\rho_{n+2}}(c_\alpha), m).$$

Preuve. Pour la première partie, montrons que la quantité $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) + m$ est plus petite que la longueur du plus long préfixe commun aux deux mots $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$ et $T^{\rho}(c_\alpha)$. La quantité $r(x, m) + m$ est caractérisée comme la longueur du plus petit préfixe w de x, ayant un facteur de longueur m apparaissant deux fois dans w. Soit N le plus petit $N \geq n+1$ tel que $b_{N+1} \neq 0$, de sorte que le plus long préfixe commun aux deux mots $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$ et $T^{\rho}(c_\alpha)$ soit de longueur $\lambda_N = q_{N+1} + q_N - 2 - \rho_{N+1}$. On procède au cas par cas.

1) Si $0 \leq \rho_{n+1} \leq (a_{n+1} - l - 1)q_n + r$, alors :

$$\begin{aligned} r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) + m &= q_n + (l+1)q_n + q_{n-1} - 2 - r \\ &\leq q_n + q_{n-1} + a_{n+1}q_n - \rho_{n+1} - 2 \\ &= q_{n+1} + q_n - \rho_{n+1} - 2 \\ &= \lambda_n \leq \lambda_N \end{aligned}$$

2) Si $(a_{n+1} - l - 1)q_n + r < \rho_{n+1} < (a_{n+1} - l)q_n$, alors on doit avoir $b_{n+1} = a_{n+1} - l - 1$, et donc :

$$\begin{aligned} r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) + m &= q_{n+1} - \rho_{n+1} + (l+1)q_n + q_{n-1} - 2 - r \\ &= q_{n+1} - \rho_{n+1} + (a_{n+1} - b_{n+1})q_n + q_{n-1} - 2 - r \end{aligned}$$

On procède par équivalences :

$$\begin{aligned} & r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) + m + r \leq \lambda_{n+1} \\ \iff \quad & q_{n+1} - \rho_{n+1} + (a_{n+1} - b_{n+1})q_n + q_{n-1} \leq (a_{n+2} - b_{n+2})q_{n+1} + q_n + q_{n+1} - \rho_{n+1} \\ \iff \quad & (a_{n+1} - b_{n+1})q_n + q_{n-1} \leq (a_{n+2} - b_{n+2})q_{n+1} + q_n \end{aligned}$$

Ce qui est vrai si $b_{n+2} < a_{n+2}$.

3) Si $(a_{n+1} - l)q_n \leq \rho_{n+1} \leq (a_{n+1} - l)q_n + r$, alors on doit avoir $b_{n+1} = a_{n+1} - l$ puisque $r < q_n$. Puisque $0 \leq l \leq a_{n+1} - 1$, on a $b_{n+1} \neq 0$ et donc on est dans le cas où $b_{n+2} \neq a_{n+2}$. Alors :

$$\begin{aligned} r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) + m &= lq_n + q_{n-1} + (l+1)q_n + q_{n-1} - 2 - r \\ &= 2(a_{n+1} - b_{n+1})q_n + 2q_{n-1} + q_n - 2 - r \end{aligned}$$

On procède à nouveau par équivalences :

$$\begin{aligned} & r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) + m + r \leq \lambda_{n+1} \\ \iff \quad & 2(a_{n+1} - b_{n+1})q_n + 2q_{n-1} + q_n \leq (a_{n+2} - b_{n+2})q_{n+1} + q_n + q_{n+1} - \rho_{n+1} \\ \iff \quad & 2(a_{n+1} - b_{n+1})q_n + 2q_{n-1} \leq (a_{n+2} - b_{n+2})q_{n+1} + (a_{n+1} - b_{n+1})q_n + q_{n-1} - \rho_n \\ \iff \quad & (a_{n+1} - b_{n+1})q_n + q_{n-1} + \rho_n \leq (a_{n+2} - b_{n+2})q_{n+1} \end{aligned}$$

Puisque $b_{n+1} \neq 0$ et $b_{n+2} \neq a_{n+2}$, $(a_{n+1} - b_{n+1})q_n \leq (a_{n+1} - 1)q_n$ et $q_{n+1} \leq (a_{n+2} - b_{n+2})q_{n+1}$, de telle manière que :

$$\begin{aligned} (a_{n+1} - b_{n+1})q_n + q_{n-1} + \rho_n &\leq (a_{n+1} - 1)q_n + q_{n-1} + \rho_n = q_{n+1} + \rho_n - q_n \\ &\leq q_{n+1} \\ &\leq (a_{n+2} - b_{n+2})q_{n+1} \end{aligned}$$

démontrant la proposition.

4) Si $(a_{n+1} - l)q_n + r < \rho_{n+1} \leq q_{n+1} - 1$, alors $0 < (a_{n+1} - l) \leq b_{n+1}$ de telle manière que $b_{n+2} \neq a_{n+2}$ et on a alors :

$$\begin{aligned} & r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) + m + r \leq \lambda_{n+1} \\ \iff \quad & q_{n+1} + q_n - \rho_{n+1} + (l+1)q_n + q_{n-1} \leq (a_{n+2} - b_{n+2})q_{n+1} + q_n + q_{n+1} - \rho_{n+1} \\ \iff \quad & (l+1)q_n + q_{n-1} \leq (a_{n+2} - b_{n+2})q_{n+1}, \end{aligned}$$

mais cela est vrai puisque $a_{n+2} - b_{n+2} \geq 1$ et $l + 1 \leq a_{n+1}$.

On notera que le cas 2) est le seul cas où l'on utilise notre hypothèse $b_{n+2} < a_{n+2}$. Puisque la longueur du plus long préfixe commun à $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$ et $T^\rho(c_\alpha)$ est plus petite que la longueur du plus long préfixe commun à $T^{\rho_{n+2}}(c_\alpha)$ et $T^\rho(c_\alpha)$ selon la proposition 5.2.4, du fait de la croissance de la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, l'égalité $r(T^\rho(c_\alpha), m) = r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m)$ et le fait que la quantité $r(T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha), m) + m$ est plus petite que la longueur du plus long préfixe commun aux deux mots $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha)$ et $T^\rho(c_\alpha)$ entrainent l'égalité $r(T^\rho(c_\alpha), m) = r(T^{\rho_{n+2}}(c_\alpha), m)$. Ceci montre la seconde partie de la proposition, sauf dans le cas 2).

Notre hypothèse $b_{n+2} = a_{n+2}$ entraine $b_{n+1} = 0$ et donc $\rho_{n+1} = \rho_n$. L'inégalité du cas 2), donnée par $(a_{n+1} - l - 1)q_n + r < \rho_{n+1} < (a_{n+1} - l)q_n$ entraine alors que $l = a_{n+1} - 1$. La longueur du plus long préfixe commun aux mots $T^{\rho_{n+1}}(c_\alpha) = T^{\rho_n}(c_\alpha)$ et $T^\rho(c_\alpha)$ vaut alors $\lambda_{n+1} = q_{n+2} + q_{n+1} - \rho_{n+2} - 2 = q_{n+1} + q_n - \rho_n - 2 = \lambda_n$. Puisque $m = q_{n+1} - 2 - r$, on a $\lambda_n = q_n - \rho_n + m + r$, et ceci implique que les chemins pris par les mots $T^\rho(c_\alpha)$ et $T^{\rho_n}(c_\alpha)$ divergent au point R_m correspondant au facteur spécial à droite. Puisque, d'après le théorème 4.3.9, le mot $T^{\rho_n}(c_\alpha)$ bifurque vers le cycle non-référent à ce moment là, c'est que le mot $T^\rho(c_\alpha)$ doit tourner autour du cycle référent. Cet argument, appliqué à l'intercept formel entier définit par le nombre ρ_{n+2}, montre de la même façon que le mot $T^{\rho_{n+2}}(c_\alpha)$ tourne autour du cycle référent. Ceci démontre que

$$r(T^\rho(c_\alpha), m) = r(T^{\rho_{n+2}}(c_\alpha), m) = q_n$$

dans ce cas là. D'où la seconde partie de la proposition.

□

Nous déduisons de cette étude et de ce dernier résultat les valeurs de la fonction de répétition d'un mot sturmien pour un entier quelconque. La détermination exacte de la fonction de répétition des mots sturmiens constitue l'un des résultats principaux de ce doctorat.

Théorème 5.3.4
Soit $x = T^\rho(c_\alpha)$ un mot sturmien de pente $\alpha = [0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$ de continuant $(q_n)_{n\geq -1}$, où $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$ est un intercept formel de la pente α, et soit $m \in I_n = [q_n - 1, q_{n+1} - 1[$. Alors :

1. *Si $b_{n+1} = 0$ et $b_{n+2} = a_{n+2}$, alors*
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_n$ *pour* $q_n - 1 \leq m \leq q_{n+1} - 2$,
2. *Si $b_{n+1} = 0$, $b_{n+2} \neq a_{n+2}$ et $b_n = 0$, alors*
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_n$ *pour* $q_n - 1 \leq m \leq q_{n+1} - \rho_{n-1} - 2$,
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_{n+1} - \rho_{n-1}$ *pour* $q_{n+1} - \rho_{n-1} - 1 \leq m \leq q_{n+1} - 2$,
3. *Si $b_{n+1} = 0$, $b_{n+2} \neq a_{n+2}$ et $a_{n+1} \neq 1$, alors*
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_n$ *pour* $q_n - 1 \leq m \leq q_{n+1} - \rho_n - 2$,
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_{n+1} - \rho_n$ *pour* $q_{n+1} - \rho_n - 1 \leq m \leq q_{n+1} - 2$,
4. *Si $b_{n+1} = 0$, $b_{n+2} \neq a_{n+2}$, $a_{n+1} = 1$ et $b_n \neq 0$, alors*
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_{n+1} - \rho_n = q_n + q_{n-1} - \rho_n$ *pour* $q_n - 1 \leq m \leq q_{n+1} - 2$,
5. *Si $0 < b_{n+1} < a_{n+1} - 1$, alors*
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_n$ *pour* $q_n - 1 \leq m \leq q_{n+1} - \rho_{n+1} - 2$,
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_{n+1} - \rho_{n+1}$ *pour* $q_{n+1} - \rho_{n+1} - 1 \leq m \leq q_{n+1} - b_{n+1}q_n - 2$,
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_{n+1} - b_{n+1}q_n$ *pour* $q_{n+1} - b_{n+1}q_n - 1 \leq m \leq q_{n+1} + q_n - \rho_{n+1} - 2$
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_{n+1} + q_n - \rho_{n+1}$ *pour* $q_{n+1} + q_n - \rho_{n+1} - 1 \leq m \leq q_{n+1} - 2$
6. *Si $b_{n+1} = a_{n+1} - 1$, $a_{n+1} \neq 1$ et $b_n = 0$, alors*
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_n$ *pour* $q_n - 1 \leq m \leq q_n + q_{n-1} - \rho_{n-1} - 2$,
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_n + q_{n-1} - \rho_{n-1}$ *pour* $q_n + q_{n-1} - \rho_{n-1} - 1 \leq m \leq q_n + q_{n-1} - 2$,
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_n + q_{n-1}$ *pour* $q_n + q_{n-1} - 1 \leq m \leq 2q_n + q_{n-1} - \rho_{n-1} - 2$
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = 2q_n + q_{n-1} - \rho_{n-1}$ *pour* $2q_n + q_{n-1} - \rho_{n-1} - 1 \leq m \leq q_{n+1} - 2$
7. *Si $b_{n+1} = a_{n+1} - 1$, $a_{n+1} \neq 1$ et $b_n \neq 0$, alors*
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_n + q_{n-1} - \rho_{n-1}$ *pour* $q_n - 1 \leq m \leq q_n + q_{n-1} - 2$,
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_n + q_{n-1}$ *pour* $q_n + q_{n-1} - 1 \leq m \leq 2q_n + q_{n-1} - \rho_{n-1} - 2$
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = 2q_n + q_{n-1} - \rho_{n-1}$ *pour* $2q_n + q_{n-1} - \rho_{n-1} - 1 \leq m \leq q_{n+1} - 2$

8. *Si* $b_{n+1} = a_{n+1}$, *alors*
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_{n-1}$ *pour* $q_n - 1 \leq m \leq q_n + q_{n-1} - \rho_{n-1} - 2$,
   — $r(T^\rho(c_\alpha), m) = q_n + q_{n-1} - \rho_{n-1}$ *pour* $q_n + q_{n-1} - \rho_{n-1} - 1 \leq m \leq q_{n+1} - 2$

Dans la suite de cette section nous présentons différents exposants. Le premier, l'exposant d'irrationalité, permet de mesurer d'une certaine manière à quel point un nombre peut être efficacement approximer par des rationnels. Ce procédé s'inscrit dans le cadre de l'approximation diophantienne, où la qualité d'approximation d'un nombre par des éléments de certaines classes permet une étude du niveau d'irrationalité ou de transcendance d'un nombre. L'exemple historique du nombre de Liouville

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^{n!}}$$

est ainsi un nombre transcendant, ce que l'on montre en établissant que son exposant d'irrationalité est infini. On définit alors un nombre de Liouville comme un nombre dont l'exposant d'irationnalité est infini.

L'exposant d'irrationalité est très difficile à calculer en général, et a été étudié dans de nombreux travaux, voir par exemple l'échantillon [6, 20, 43, 44, 47, 77, 152, 154].

Définition 5.3.5 (Exposant d'irrationalité)
Pour x *un réel quelconque, on définit son exposant d'irrationalité* $\mu(x)$ *comme le supremum des réels* μ *tels que l'inégalité :*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\mu}$$

ait une infinité de solution en la fraction rationnelle irréductible p/q.

Cet exposant mesure la qualité que l'on peut espérer d'une approximation de x par des nombres rationels. L'exposant d'irrationalité d'un rationnel vaut 1, et l'approximation obtenue par un dévellopement en fraction continue d'un irrationnel fournie l'inégalité $\mu(x) \geq 2$ pour tout x irrationnel, cette approximation se basant sur le principe des tiroirs de Dirichlet. Comme nous l'avons précisé, lorsque $\mu(x) = +\infty$, on dit que x est un nombre de Liouville, et il est bien connu que les nombres de Liouville sont les premiers exemples de nombres transcendant à avoir été exhibés. Montrer que pour un nombre algébrique x de degré $d \geq 1$ on a l'inégalité $\mu(x) \leq d$ constitue par ailleurs un exercice classique. En fait, le théorème de Thue-Siegel-Roth [154], pour lequel K. Roth a été récompensé de la médaille Fields, a montré que pour tout nombre algébrique irrationnel x on a en fait l'égalité $\mu(x) = 2$, et on sait de manière plus élémentaire que presque tous les nombres réels, pour la mesure de Lebesgue, admettent 2 comme exposant d'irrationalité. En général, cet exposant est très difficile à calculer explicitement pour un nombre transcendant donné, on connait la valeur $\mu(e) = 2$ mais pas la valeur de $\mu(\pi)$ (on sait cependant qu'elle est finie).

En 1932, Mahler introduit la classification des nombres réels suivante. Pour $P(X)$ un polynome à coefficient entiers, on définit sa hauteur $H(P)$ comme le maximum des valeurs absolues de ses coefficients. Pour $d \geq 1$ un nombre entier et x un réel, on définit $w_d(x)$ comme le supremum des nombres réels w pour lesquels les inégalités

$$0 < |P(x)| \leq \frac{1}{H(P)},$$

soient vérifiées par une infinité de polynome $P(X)$ à coefficients entiers de degré au plus d. On définit ensuite

$$w(x) = \limsup_d \frac{w_d(x)}{d}$$

et Mahler définit x comme étant :
— un A-nombre si $w(x) = 0$,
— un S-nombre si $0 < w(x) < +\infty$,
— un T-nombre si $w(x) = +\infty$ et $w_d(x) < +\infty$ pour tout $d \geq 1$,
— un U-nombre si $w(x) = +\infty$ et $w_d(x) = +\infty$ pour un entier $d \geq 1$.

Il est alors un résultat remarquable que deux nombres réels transcendant appartenant à des classes différentes sont algébriquement indépendant. Cette classification s'inscrit dans les méthodes d'approximation diophantienne comme une certaine mesure de la transcendance d'un nombre.

Nous présentons maintenant deux exposants définis sur les mots infinis. Le lien entre nombre réel et mots infinis est donné par l'écriture dans une base entière d'un nombre réel. Pour u un mot fini, et $w \geq 0$ un réel, on définit la puissance fractionnaire u^w comme le mot fini $u^w = u^{\lfloor w \rfloor} v$ où v est le préfixe de u de longueur $\lfloor (w - \lfloor w \rfloor)|u| \rfloor$, de sorte que $u^{k/|u|}$ soit le préfixe de longueur k de u, pour $0 \leq k \leq |u|$.

Définition 5.3.6 (Exposant critique, initial)
Pour x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$, on note $ce(x)$ (resp. $ice(x)$) l'exposant critique (resp. exposant critique initial) de x le supremum des réels $w \geq 0$ tels qu'il existe une infinité de mots u tels que u^w soit facteur (resp. préfixe) de x.

L'exposant critique initial a été introduit et étudié par L. Zamboni, C. Holton et V. Berthé dans l'article [35]. On trouve aussi dans cette référence une formule pour la valeur de l'exposant critique initial d'un mot sturmien en fonction de son intercept, qui est du même acabit que la formule que nous obtenons dans le théorème 5.3.8.

Définition 5.3.7 (Exposant diophantien)
Pour x un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$, on note $dio(x)$ l'exposant diophantien de x, défini comme le supremum des réels $\rho \geq 0$ tels qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ de mots finis et une suite de réels $(w_n)_{n\geq 1}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

1. *$u_n v_n$ est préfixe de x pour tout $n \geq 1$,*
2. *la suite des longueurs $(|v_n^{w_n}|)_{n\geq 1}$ est strictement croissante,*
3. *$\dfrac{|u_n v_n^{w_n}|}{|u_n v_n|} \geq \rho$.*

L'exposant diophantien a été introduit par B. Adamczewski et Y. Bugeaud dans l'article [4]. Dans un autre de leur article, *Nombres réels de complexité sous-linéaire* [3], ils montrent que pour un mot infini $x = x_1 x_2 x_3 \cdots$ sur un alphabet digital $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, b-1\}$ pour un $b \geq 2$, dont l'exposant diophantien $dio(x)$ est fini et vérifiant la condition de complexité sous-linéaire selon laquelle il existe une constante $C > 1$ telle que $p(x, n) \leq Cn$ pour tout $n \geq 1$, alors l'exposant d'irrationalité du nombre réel

$$y = \sum_{k\geq 1} \frac{x_k}{b^k}$$

dont x est le développement en base b est soumis à l'encadrement

$$\max\{2, dio(x)\} \leq \mu(y) \leq (2C+1)^3 (dio(x)+1)$$

et en particulier est fini lui aussi. Vu l'inégalité générale $\mu(y) \geq dio(x)$, on en déduit, sous cette condition de complexité sous-linéaire sur x, que le nombre y dont x est le développement dans une base est de Liouville si et seulement si son exposant diophantien est infini. L'exposant diophantien appliqué à un développement dans une base entière d'un nombre réel, mesure de manière combinatoire à quel point ce nombre est proche d'être un nombre rationnel. Il permet de quantifier la compréhension apportée par la combinatoire à l'arithmétique de l'approximation diophantienne.

Dans la référence [3] est démontré que pour les nombres de la forme

$$y = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor k\gamma \rfloor}} = 0, x_1 x_2 x_3 \cdots$$

où le membre de droite $x = x_1 x_2 x_3 \cdots$ désigne le dévelopement de y en base $b \geq 2$, on a l'égalité

$$\mu(y) = dio(x) = 1 + \limsup_n [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1] = dio(c_{1/\alpha})$$

où $\gamma > 1$ est un irrationnel dont le dévelopement en fraction continue admet comme quotients partiels la suite $(a_k)_{k\geq 1}$. B. Adamczewski et Y. Bugeaud démontrent quant à eux que pour une suite sturmienne quelconque, son exposant diophantien est fini si et seulement si la suite des quotients partiels de la pente est bornée. Ces résultats se basent sur le calcul

$$dio(c_\alpha) = 1 + \limsup \frac{q_{n+1}}{q_n}$$

pour une pente α de continuant $(q_n)_{n\geq -1}$.

D'autre part, les travaux de Y. Bugeaud et D. Kim [45] montrent que l'exposant diophantien d'un mot infini est relié à la fonction de répétition par la formule

$$(dio(x) - 1) \liminf \frac{r(x,n)}{n} = 1$$

valable pour un mot infini x sur un alphabet fini $\mathcal{A}$. Dans cet article est aussi démontrée l'égalité

$$dio(x) = \mu\left(\sum_{k\geq 0} \frac{x_k}{b^k}\right)$$

valable pour un mot sturmien $x = x_0x_1x_2\cdots$.

On déduit de ces résultats, à l'aide de notre étude de la fonction de répétition des mots sturmien, la formule asymptotique donnée par le théorème suivant, comme contribution de ce doctorat.

Théorème 5.3.8
Soit $x = x_0x_1x_2\cdots = T^\rho(c_\alpha)$ un mot sturmien de la pente α. On écrit $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$ où les $(b_i)_{i\geq 1}$ satisfont aux conditions d'Ostrowski et tels que $0 < b_i < a_i - 1$ pour tout $i \geq 1$ assez grand. Alors on a la formule asymptotique générale :

$$\begin{aligned} dio(x) &= \mu\left(\sum_{k\geq 0} \frac{x_k}{b^k}\right) \\ &= 1 + \limsup\left(\frac{q_{n+1} - \rho_{n+1}}{q_n}, \frac{q_{n+1} - b_{n+1}q_n}{q_{n+1} - \rho_{n+1}}, \frac{q_{n+1} - \rho_{n+1} + q_n}{q_{n+1} - b_{n+1}q_n}, \frac{q_{n+1}}{q_{n+1} - \rho_{n+1} + q_n}\right). \end{aligned}$$

Preuve. D'après les résultats de [45], on a les égalités

$$\begin{aligned} dio(x) &= \mu\left(\sum_{k\geq 0} \frac{x_k}{b^k}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{\liminf \frac{r(x,n)}{n}} \\ &= 1 + \limsup \frac{n}{r(x,n)}. \end{aligned}$$

On note

$$r(x, \mathbb{N}^*) = \{v_1 < v_2 < v_3 < \cdots\}$$

l'ensemble des valeurs de la fonction de répétition associée à x. Le résultat obtenu dans le théorème 4.3.4, à savoir l'équivalence $r(x, m-1) \neq r(x, m) \Leftrightarrow r(x, m) = m+1$, associé à la croissance de la fonction de répétition, permettent

de ramener la considération de la limite supérieure ci-dessus à celle associée à la suite extraite formée par les valeurs de la fonction de répétition. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\limsup \frac{n}{r(x,n)} &= \limsup \frac{v_{k+1}-1}{v_k} \\ &= \limsup \frac{v_{k+1}}{v_k}.\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $0 < b_i < a_i - 1$ pour tout $i \geq 1$ assez grand, on obtient, compte tenu de nos résultat concernant les valeurs de la fonction de répétition énoncés dans le théorème 5.3.4 :

$$\limsup \frac{n}{r(x,n)} = \limsup \left(\frac{q_{n+1}-\rho_{n+1}}{q_n}, \frac{q_{n+1}-b_{n+1}q_n}{q_{n+1}-\rho_{n+1}}, \frac{q_{n+1}-\rho_{n+1}+q_n}{q_{n+1}-b_{n+1}q_n}, \frac{q_{n+1}}{q_{n+1}-\rho_{n+1}+q_n} \right)$$

d'où le théorème. □

Corollaire 5.3.9
Soit $x = T^{\rho}(c_\alpha)$ un mot sturmien de pente α, où α est de continuant $(q_n)_{n\geq -1}$, et $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$ est un intercept formel de la pente α. Alors :

— *Si $b_i < a_i$ pour tout $i \geq 1$ assez grand, alors*
$$dio(x) \leq dio(c_\alpha)$$
— *Si $b_i < a_i$ pour tout $i \geq 1$ assez grand et si l'ensemble des indices $i \geq 1$ tels que $b_i = 0$ contient des intervalles arbitrairement grand, alors*
$$dio(x) = dio(c_\alpha).$$

Preuve. Pour la première assertion, compte tenu des valeurs de la fonction de répétition obtenues par le théorème 5.3.4, on a, pour tout $i \geq 1$ assez grand :

$$r(x,m) \geq q_i \quad \text{pour } q_i - 1 \leq m \leq q_{i+1} - 2.$$

Ceci implique que

$$\frac{m}{r(x,m)} \leq \frac{q_{i+1}}{q_i}$$

et en passant à la limite supérieure, on obtient :

$$\begin{aligned}dio(x) &= 1 + \limsup \frac{m}{r(x,m)} \\ &\leq 1 + \limsup \frac{q_{m+1}}{q_m} \\ &= dio(c_\alpha).\end{aligned}$$

Pour la seconde assertion, compte tenu de la première, on a l'inégalité

$$dio(x) \leq dio(c_\alpha).$$

De sorte qu'il suffit maintenant de démontrer l'inégalité opposée. Soient $1 \leq i \leq j$ deux entiers naturels, et on suppose que $b_{k+1} = 0$ pour tout $i \leq k \leq j$. A nouveau grâce aux valeurs de la fonction de répétition obtenues par le théorème 5.3.4, on a :

— $r(x,m) = q_k \quad$ pour $q_k - 1 \leq m \leq q_{k+1} - \rho_i - 2$,
— $r(x,m) = q_{k+1} - \rho_i \quad$ pour $q_{k+1} - \rho_i - 1 \leq m \leq q_{k+1} - 2$,

de sorte que

$$\frac{m}{r(x,m)} = \frac{q_{k+1} - \rho_i - 2}{q_k - 1}.$$

Pour en déduire le résultat de la seconde assertion, nous allons montrer que le second membre de l'inégalité

$$\frac{\rho_i}{q_k} < \frac{q_i}{q_k}$$

peut être rendue arbitrairement petit en le majorant par une quantité dépendant de $k-i$, ce qui nous permettra de conclure par passage à la limite supérieure sous nos hypothèses.

Pour ce faire, on introduit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant la relation de récurrence de Fibonacci, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et satisfaisant aux conditions initiales $u_0 = q_{i-1}$ et $u_1 = q_i$. Soit alors $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci, définie par $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. On peut exprimer la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par

$$u_n = q_i F_n + q_{i-1} F_{n-1}.$$

On peut alors minorer par récurrence la suite $(q_n)_{n\geq 0}$ par

$$q_n \geq u_{n-i}$$

compte tenu de l'initialisation $q_{i-1} \geq u_0$ et $q_i \geq u_1$ et à l'aide de la minoration triviale $q_{n+2} \geq q_{n+1} + q_n$. Ceci fournit, en prenant $k = n$,

$$\begin{aligned}\frac{q_i}{q_k} &\leq \frac{q_i}{q_i F_{k-i} + q_{i-1} F_{k-i-1}} \\ &\leq \frac{1}{F_{k-i}},\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Perspectives

Nous présentons ici certaines perspectives du travail effectué dans la thématique de notre introduction du formalisme lié au intercepts formels des mots sturmiens. Ces questions n'ont pas pu être encore élucidées, et mériteraient une recherche plus approfondie.

Tout comme notre introduction, comme contribution de ce doctorat, du formalisme des intercepts formels, nous a permis de calculer les valeurs exactes de la fonction de répétition, il apparaitrait naturel de chercher à calculer les valeurs d'autres fonctions de complexité définies sur les mots sturmiens grâce à cette description combinatoire bijective des mots sturmiens. Des fonctions de tri-répétitions peuvent ainsi être considérée, comme correspondant aux première fois où un facteur d'une longueur donnée est répété trois fois.

Question 14
Peut-on calculer les valeurs d'autres fonctions de complexité sur les mots sturmiens à l'aide de notre de notre formalisme combinatoire décrivant bijectivement les mots sturmiens ?

Il apparait d'après des travaux en cours et des résultats conjecturaux par J. Shallit que la théorie des mots sturmiens soit une théorie du second ordre, et ceci pourrait être démontré à l'aide de notre formalisme des intercepts formels, introduit comme contribution de ce doctorat. Il apparaitrait alors naturel de se poser des questions sur des fonctions de complexité qui ne soient pas des fonctions du premier ordre, et de déterminer les limites de notre description dans ce cadre là.

Notre formalisme des intercepts formels permet de donner une description bijective et purement combinatoire de la famille des mots sturmiens. Il permet une profonde compréhension de cette classe de mot, compréhension développée encore plus en détail dans le chapitre 6 de ce doctorat. Ce type de raisonnement peut être adapté aux nombreuses généralisations et variantes des mots sturmiens.

Question 15
Peut-on considérer le développement d'un formalisme analogue à celui des intercepts formels des mots sturmiens pour des généralisations des mots sturmiens ?

Répondre à ce type de question pourrait permettre de cerner les dimensions logiques liés aux études des mots sturmiens. Ces diverses généralisations pourraient être réduite aux variantes des mots sturmiens, comme les mots épisturmiens, ou bien être faite dans des contextes plus subtils, comme le contexte des mots de basse complexité qui ne sont pas sturmiens, définit par des inégalités sur la fonction de complexité. Dans un contexte beaucoup plus délicat, ce type de formalisme et nos travaux généraux pourraient aider à la compréhension de la structure des mots de complexité sous-linéaire. Bien entendu, les mots automatiques forment un excellent candidat à l'établissement d'un formalisme analogue.

Notre étude de l'exposant diophantien des mots sturmiens nous permet de donner une formule asymptotique pour son calcul, même si la perspective d'un calcul expricite de cette quantité demande des calculs très lourds. Cependant, notre formule, analogue à celle trouvée pour des exposants comme l'exposant critique initial. Ce type d'exposant permet une étude quantitative dans l'analyse des propriétés générales des mots sturmiens, et des mots infinis en général.

Question 16
Peut-on calculer les valeurs d'autres exposants ou mesures de complexité asymptotiques sur les mots sturmiens à l'aide de notre de notre formalisme des intercepts formels ?

Ce type de question permet de mettre en relation les deux paramètres décrivant les mots sturmiens, la pente et l'intercept formel. A l'aide de ce formalisme, qui permet de donner une description bijective de la famille des mots sturmiens, nous permettons un calcul de ces exposant à partir d'informations très précises données exclusivement par des entiers.

De manière générale, l'étude des mots sturmiens permet de considérer les nombres sturmiens, c'est-à-dire les nombres dont l'écriture dans une base entière correspond à un mot sturmien. Comme nous l'avons expliqué, l'étude des exposants asymptotiques permet d'encadre l'exposant d'irrationalité de ces nombres. Ces études mènent à développer de nouvelles techniques et méthodes d'approximation diophantienne pour les nombres, et forment un point de vue riche et fécond, qui vient s'ajouter aux résultats de Nesterenko concernant les méthodes de transcendances obtenues par des aspects analytiques complexes. Les résultats liés à la méthode de Mahler, qui ramènent l'étude des nombres réels à des études de séries, vues comme fonctions analytiques complexes ou p-adiques, s'inscrivent dans cette optique de fusion des points de vue.

Question 17
Peut-on établir un lien entre les approches combinatoires de l'étude de l'exposant d'irrationalité ou des mesures de transcendance des nombres dont l'écriture dans une base donnée présente des caractéristiques dynamiques spécifiques, avec les résultats de type fonctionnels obtenus par la théorie générale des méthodes de transcendance obtenue par des méthodes d'analyse complexe ?

Ces thématiques d'approximation diophantienne, qu'elle soit numériques ou fonctionnelles, vont pouvoir être étudiée dans la continuité de nos travaux. En exploitant naturellement les aspects combinatoire de ce domaine des mathématiques, associée aux méthodes d'approximation polynomiales des fonctions analytiques dans divers contextes, l'union de ces deux approches des méthodes de transcendance pourront permettre l'apparition de nouveaux résultats significatifs.

6

Factorisations des mots sturmiens

Dans ce chapitre, nous présentons différents résultats concernant le formalisme des intercepts formels que nous avons mis en place dans le chapitre 5. Nous présentons en premier lieu une relation d'équivalence sur les intercepts formels, selon si l'un peut être obtenu par l'autre par addition d'un entier, opération que nous définissons grâce au théorème 5.2.5. On étudie ensuite des formules produits naturellement liées aux intercepts formels, et nous caractérisons les orbites bi-infinie sturmiennes. En particulier, on définit le complémentaire d'un intercept formel, qui illustre une forme de dualité entre les opérations de préfixe et de suffixe présentée dans ce doctorat. Comme application de ce formalisme, nous en déduisons des formules de factorisations des mots sturmiens. Nous terminons par une étude des intercepts formels qui sont équivalents à leur complémentaire, ce qui revient à étudier les orbites bi-infinies sturmiennes qui sont palindromiques, et nous concluons par une généralisation partielle de nos constructions, ainsi qu'une réalisation algébrique de facture conjecturale de ces résultats.

On se donne, dans tout ce chapitre, une pente $\alpha = [0, a_1, a_2, a_3, \cdots]$ quelconque donnée par son développement en fraction continue, de continuant $(q_n)_{n\geq -1}$. Sauf mention explicite du contraire, tous les intercepts formels considérés sont définis relativement à cette pente.

6.1 Equivalence d'intercepts formels

Cette section contient de nouveaux résultats. Le résultat principal de cette section est le théorème 6.1.3.

Dans cette section nous présentons une relation d'équivalence sur l'ensemble des intercepts formels de la pente α. Puisque, par le théorème 5.2.5, l'ensemble des intercepts formels est en bijection naturelle avec l'ensemble des mots sturmiens de pente α, les opérations naturelles sur l'ensemble des mots sturmiens se transforment en opérations naturelles sur l'ensemble des intercepts formels. Ces opérations, de nature combinatoire sur les mots sturmiens, deviennent des opérations sur l'ensemble des intercepts formels qui permettent de mettre en évidence les propriétés asymptotiques arithmétiques du système de numération d'Ostrowski, à la manière des nombres p-adiques qui représentent une version asymptotique « infinie » du système de numération en base p. Ce type de raisonnement prendra tout son effet lorsque nous définirons la notion de complémentaire d'un intercept formel.

Cette section se consacre à la compréhension de l'opération d'addition d'un intercept formel avec un entier positif. Pour ce faire, nous utilisons de manière fondamentale le théorème 5.2.5. S'il n'est pas évident d'ajouter un entier positif à un intercept formel, il est cependant très facile d'appliquer k-fois l'opérateur de décalage T à un mot sturmien. En accord avec les notations de 5.2.3, appliquer l'opérateur de décalage à un mot sturmien devrait correspondre, par transport de structure, à l'opération d'incrémentation d'un intercept formel.

Définition 6.1.1
Soit $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$ un intercept formel. On définit l'intercept formel $\rho + 1$ comme l'intercept formel du mot sturmien

$$T(T^{\rho}(c_\alpha)),$$

et pour $k \geq 1$ un entier, on définit l'intercept formel

$$\rho + k$$

comme l'intercept formel du mot sturmien

$$T^k(T^{\rho}(c_\alpha)).$$

On dit que deux intercepts formels ρ et γ sont équivalents s'il existe deux entiers $k, l \geq 0$ tels que $\rho + k = \gamma + l$, de sorte que :

$$\rho \equiv \gamma \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k, l \geq 0,\ \rho + k = \gamma + l,$$

et dans ce cas on note $[\rho]$ la classe d'équivalence de l'intercept formel ρ.
On dit que ρ est un entier s'il correspond, par le théorème 5.2.5, à un suffixe du mot caractéristique.

Lorsque l'on transpose cette relation d'équivalence à l'ensemble des mots sturmiens par le théorème 5.2.5, pour deux mots sturmiens x et y de même pente, leurs intercepts formels associés sont équivalents si et seulement si x et y ont un suffixe en commun.

La proposition suivante fournit une étude complète de la classe d'équivalence correspondant à l'intercept formel nul, c'est-à-dire au mot caractéristique d'après le théorème 5.2.5.

Proposition 6.1.2
Soit $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$ un intercept formel, et pour tout $n \geq 1$, soit $\rho_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1}q_i$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) ρ est équivalent à l'intercept formel nul,

ii) l'une des deux suites $(\rho_n)_{n\geq 0}$ ou $(q_n - \rho_n)_{n\geq 0}$ converge,

iii) on a l'une des alternatives suivantes :
- *il existe un entier $N \geq 1$ tel que $b_i = 0$ pour tout $i \geq N$,*
- *il existe un entier $N \geq 1$ tel que $b_{2i} = a_{2i}$ et $b_{2i+1} = 0$ pour tout $i \geq N$,*
- *il existe un entier $N \geq 1$ tel que $b_{2i} = 0$ et $b_{2i+1} = a_{2i+1}$ pour tout $i \geq N$.*

Preuve. On rappelle que ρ est un entier si et seulement si $T^{\rho}(c_\alpha)$ est un suffixe du mot caractéristique, ce qui arrive si et seulement si la suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est constante à partir d'un certain rang vu la démonstration de 5.2.5, et que toutes ces conditions sont équivalentes à ce que les coefficients $(b_i)_{i\geq 1}$ soient nuls à partir d'un certain rang.

D'autre part, si x est un mot sturmien d'intercept formel $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$, et si $k = \liminf(q_n - \rho_n) < +\infty$, alors vu que la suite considérée est à valeurs entières, la valeur k est atteinte une infinité de fois, dont les indices correspondant peuvent être pris de même parité. Si on suppose par exemple que $q_{2(n+1)} - \rho_{2(n+1)} = k$ pour une infinité de $n \geq 1$, alors, pour un tel n, puisque x et $T^{\rho_{2(n+1)}}(c_\alpha)$ partagent le même préfixe de longueur $q_{2n+3} + q_{2n+2} - 2 - \rho_{2n+3} \geq q_{2(n+1)} + q_{2n+1} - 2 - \rho_{2n+2} = q_{2n+1} - 2 + k$ d'après 5.2.4, les mots $T^k(x)$ et $T^{\rho_{2(n+1)}+k}(c_\alpha) = T^{q_{2(n+1)}}(c_\alpha)$ partagent le même préfixe de longueur $q_{2n+1} - 2$, qui est le préfixe correspondant de c_α. Cette quantité tend vers l'infini avec n, et on en déduit donc que $T^k(x) = c_\alpha$, et que ρ est de classe d'équivalence nulle.

D'autre part, pour $k \geq 0$, les suites $(q_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1 - k)_{n\geq 1}$ et $(q_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1 - k)_{n\geq 1}$ sont les intercepts formels de mots dont le mot caractéristique est un suffixe strict d'après 5.2.6. Vu que pour ces deux suites, les coefficients $(b_i)_{i\geq 1}$ vérifient les conditions de la proposition d'après 5.2.6, on en déduit le résultat.

□

La proposition suivante permet de définir l'opération d'addition d'un intercept formel avec un entier positif. Elle stipule que, dans le cas où l'intercept formel étudié n'est pas dans la classe d'équivalence du mot caractéristique, ajouter un entier à cet intercept formel n'affecte pas les coefficients d'indices assez grands de l'écriture dans le sytème de numération d'Ostrowski de l'intercept formel considéré. On rappelle que les fonctions $(\Psi_n : \mathcal{I}_\alpha \to \mathbb{N})_{n\geq 1}$ sont définies sur l'ensemble des intercepts formels de la pente α par :

$$\Psi_n(\rho) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1}q_i$$

pour un intercept formel $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$.

Proposition 6.1.3
Soit $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$ un intercept formel de classe d'équivalence non-nulle. Alors, pour tout $k \geq 0$, l'intercept formel $\gamma = \rho + k$ est asymptotiquement donné par la formule $\gamma_n = \rho_n + k$ pour n assez grand. Autrement dit, pour tout $k \geq 0$, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\Psi_n(\rho + k) = \Psi_n(\rho) + k.$$

Cette propriété est encore valable dans le cas où ρ est de classe d'équivalence nulle sous l'hypothèse que $\rho + k$ n'est pas un entier.

Preuve. Soit $x = T^\rho(c_\alpha)$ le mot sturmien d'intercept formel ρ, selon la correspondance donnée par le théorème 5.2.5. Puisque ρ n'est pas équivalent à l'intercept nul, la suite $(q_n - \Psi_n(\rho))_{n\geq 1}$ tend vers l'infini d'après 6.1.2, et il existe $N \geq 1$ tel que $q_n > \Psi_n(\rho) + k$ pour tout $n \geq N$. Les mots $T^{\Psi_n(\rho)+k}(c_\alpha)$ partagent le même préfixe de longueur $q_{n+1} + q_n - 2 - \Psi_{n+1}(\rho) - k \geq q_n - 1$ d'après 5.2.4, et donc $\Psi_n(\rho + k) = \Psi_n(\rho) + k$ pour tout $n \geq N$ via la bijection entre intercept formels et mots sturmiens donné par le théorème 5.2.5.

Pour le cas où l'on suppose seulement que $\rho + k$ n'est pas un entier et que ρ est équivalent à l'intercept formel nul, il suffit d'appliquer la remarque suivant la proposition 5.2.6. □

Dans le cas de l'intercept formel d'un mot sturmien admettant l'un des deux mots $0c_\alpha$ ou $1c_\alpha$ comme suffixe, la proposition 6.1.3 précédente n'est plus valide, compte tenu du corollaire 5.2.6. Lorsque l'on ne se trouve pas dans cette situation, la proposition 6.1.3 permet néanmoins de calculer l'intercept formel obtenu en ajoutant un entier de manière pratique.

La proposition 6.1.4 suivante permet de vérifier, à l'aide de leurs coefficients, si deux intercepts formels sont équivalents ou non. Comme pour la proposition 6.1.3 précédente, il faut prendre garde que cet énoncé n'est plus valable pour les intercepts formels de classe d'équivalence nulle.

Proposition 6.1.4
Soient $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$ et $\gamma = \sum_{i\geq 0} c_{i+1}q_i$ deux intercepts formels dont aucun n'est équivalent à l'intercept formel nul. Alors ρ et γ sont équivalents si et seulement si, il existe $N \geq 1$ tel que

$$b_i = c_i \quad \text{pour tout } i \geq N.$$

Preuve. Soient $k \geq 0$ et $l \geq 0$ tels que $\rho + k = \gamma + l$ d'après 6.1.1, et soit, d'après 6.1.3, $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait les deux égalités :

$$\Psi_n(\rho + k) = \Psi_n(\rho) + k$$

et

$$\Psi_n(\gamma + l) = \Psi_n(\gamma) + l$$

alors, par les formules

$$\begin{aligned} b_{n+1}q_n &= \Psi_{n+1}(\rho) - \Psi_n(\rho) \\ &= \Psi_{n+1}(\rho + k) - \Psi_n(\rho + k) \\ &= \Psi_{n+1}(\gamma + l) - \Psi_n(\gamma + l) \\ &= \Psi_{n+1}(\gamma) - \Psi_n(\gamma) \\ &= c_{n+1}q_n \end{aligned}$$

on en déduit que $b_i = c_i$ pour tout i assez grand.

Réciproquement, si $b_i = c_i$ pour tout i assez grand, alors pour n assez grand, on a

$$\Psi_{n+1}(\rho) - \Psi_n(\rho) = \Psi_{n+1}(\gamma) - \Psi_n(\gamma)$$

ce qui implique que les suites $(\Psi_n(\rho))_{n\geq 1}$ et $(\Psi_n(\gamma))_{n\geq 1}$ diffèrent asymptotiquement d'une constante, et ceci implique à son tour que les intercepts formels ρ et γ sont équivalents d'après 6.1.1. □

Nous définissons maintenant le support d'un intercept formel. Celui-ci est définit comme le sous-ensemble des entiers correspondant aux indices des coefficients non-nuls dans l'écriture dans le système de numération d'Ostrowski, en accord avec la définition 5.2.1. Ces notions techniques nous serviront dans la section (6.2). On rappelle qu'un intercept formel est un entier s'il correspond par le théorème 5.2.5 à un suffixe du mot caractéristique.

Définition 6.1.5
Soit $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$ un intercept qui n'est pas un entier. On définit le support $\mathrm{Supp}(\rho)$ *de ρ comme*

$$\mathrm{Supp}(\rho) = \{n \geq 0 \mid b_{n+1} \neq 0\}$$

et la fonction Λ_ρ de la manière suivante :

$$\Lambda_\rho(n) = \min(\mathrm{Supp}(\rho) \cap [n, +\infty[)$$

qui est toujours bien définie puisque ρ n'est pas entier.

Nous terminons par certaines propriétés de facture élémentaires concernant le formalisme et les notations introduites. Nous donnons les démontrations de ces résultats, mais nous conseillons vivement au lecteur de les traiter comme des exercices dans le but de se familiariser avec le formalisme introduit.

Proposition 6.1.6
Soient $n \geq 0$, et ρ un intercept formel. Alors

1. *$n \in \mathrm{Supp}(\rho)$ si et seulement si $\Psi_{n+1}(\rho) \geq q_n$, en particulier on a les inégalités :*
$$\Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho) \geq q_{\Lambda_\rho(n)} \geq q_n,$$
2. *si $n \in \mathrm{Supp}(\rho)$, alors $b_{n+2} \neq a_{n+2}$, en particulier on a l'inégalité :*
$$\Psi_{\Lambda_\rho(n)+2}(\rho) < q_{\Lambda_\rho(n)+2} - q_{\Lambda_\rho(n)} = a_{\Lambda_\rho(n)+2}q_{\Lambda_\rho(n)+1},$$
3. $\Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho) = b_{\Lambda_\rho(n)+1}q_{\Lambda_\rho(n)} + \Psi_n(\rho)$.

Preuve. On écrit l'intercept formel ρ sous la forme $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$, où les coefficients $(b_i)_{i\geq 1}$ satisfont aux conditions d'Ostrowski. L'existence et l'unicité d'une telle écriture sont données peu après la définition 5.2.1 à l'aide de la propriété 5.1.2.

1) D'après la définition 6.1.5, $n \in \mathrm{Supp}(\rho)$ si et seulement si $b_{n+1} \neq 0$, et donc, d'après 5.1.1, si et seulement si $\Psi_{n+1}(\rho) = \sum_{i=0}^{n} b_{i+1}q_i \geq q_n$. Pour la seconde partie énoncée, il suffit d'appliquer le résultat que l'on vient d'obtenir à l'entier $\Lambda_\rho(n)$ qui selon la définition 6.1.5 fait partie du support de l'intercept formel ρ. L'inégalité de droite étant obtenue via la croissance de la suite $(q_n)_{n\geq -1}$ et l'inégalité, encore plus triviale par la définition 6.1.5, $\Lambda_\rho(n) \geq n$.

2) Il est évident, via la description des conditions d'Ostrowski énoncées avec les propositions 5.1.1 et 5.1.2, que si $n \in \mathrm{Supp}(\rho)$, alors $b_{n+2} \neq a_{n+2}$. L'inégalité s'obtient en écrivant

$$\begin{aligned}
\Psi_{\Lambda_\rho(n)+2}(\rho) &= \sum_{i=0}^{\Lambda_\rho(n)+1} b_{i+1}q_i \\
&= \sum_{i=0}^{\Lambda_\rho(n)} b_{i+1}q_i + b_{\Lambda_\rho(n)+2}q_{\Lambda_\rho(n)+1} \\
&< q_{\Lambda_\rho(n)+1} + b_{\Lambda_\rho(n)+2}q_{\Lambda_\rho(n)+1} \\
&< (b_{\Lambda_\rho(n)+2}+1)q_{\Lambda_\rho(n)+1} \\
&\leq a_{\Lambda_\rho(n)+2}q_{\Lambda_\rho(n)+1} \\
&= q_{\Lambda_\rho(n)+2} - q_{\Lambda_\rho(n)}
\end{aligned}$$

d'après 5.1.1.

3) On écrit :

$$\begin{aligned}
\Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho) &= \sum_{i=0}^{\Lambda_\rho(n)} b_{i+1}q_i \\
&= b_{\Lambda_\rho(n)+1}q_{\Lambda_\rho(n)} + \Psi_{\Lambda_\rho(n)}(\rho) \\
&= b_{\Lambda_\rho(n)+1}q_{\Lambda_\rho(n)} + \Psi_n(\rho)
\end{aligned}$$

d'après la définition 6.1.5.

□

6.2 Produits infinis et complémentaire

Cette section contient de nouveaux résultats. Le résultat principal de cette section est le théorème 6.2.4.

Qu'il s'agisse de mots sturmiens, de mots de basse complexité, ou plus généralement de classes particulières de mots infinis, les problèmes de factorisations jouent un rôle central de ce sujet d'étude. Nous donnons dans cette section certaines définitions et propriétés que nous utiliserons dans les sections suivantes afin d'obtenir des formules de factorisations pour les mots sturmiens.

Le problème de pouvoir décrire les différentes factorisations d'un mot sturmien est un thème de recherche qui possède de nombreuses variantes. On pourra trouver dans [116] plusieurs exemples de résultats concernant les factorisations de mots liés aux mots sturmiens, comme le mot caractéristique ou les mots centraux. De manière générale, suivant la forme des factorisations que l'on souhaite obtenir ou étudier, ce problème peut être très simple comme très délicat. La situation la plus souhaitable est de trouver des formules de factorisations simple, avec des conditions très générales d'existence et d'unicité. Nous donnons un tel résultat concernant la classe des mots sturmiens. Concernant les problèmes de factorisations des mots sturmiens, on pourra consulter [42, 78, 79, 80, 81]. De manière générale, l'étude des mots sturmiens implique très souvent des formules de factorisations. On pourra citer à ce titre les travaux de J. Peltomäki [135, 136], qui, dans sa thèse sous la direction de T. Harju et L. Zamboni, définit une application « racine carrée » sur les mots sturmiens, qui se base sur d'autres formes de factorisations que celles que nous considérons. Il démontre en particulier la formule

$$\sqrt{f} = \prod_{i\geq 0} \widetilde{f_{3i+2}}$$

où $(f_n)_{n\geq -1}$ est la suite des mots standard associés au mot de Fibonacci f. Il constate alors par des moyens élémentaires que ce produit définit un mot sturmien. Ce type de résultat mets en lumière les formules plus générales que l'on obtiendra dans cette section.

La proposition suivante donne une première formule de factorisation pour le préfixe du mot caractéristique à l'aide des mots standard, voir la proposition 4.2.1. La preuve se fait par une récurrence sur l'entier N, et peut être trouvée dans [8], ou comme exercice dans [116].

Pour une pente $\alpha = [0, a_1, a_2, a_3, \cdots]$ décrite à l'aide de son développement en fraction continue, on rappelle que sa suite standard $(s_n)_{n\geq -1}$ associée est donnée par la relation de récurrence

$$s_{-1} = 1, \quad s_0 = 0, \quad s_1 = s_0^{a_1 - 1} s_{-1},$$

$$s_{n+1} = s_n^{a_{n+1}} s_{n-1}$$

pour tout $n \geq 1$, et qu'on a $c_\alpha = \lim s_n$ d'après 4.2.1. Pour une preuve de la proposition suivante, voir [8], théorème 9.1.13.

Proposition 6.2.1
Soit $m \geq 1$ un entier, que l'on écrit $m = \sum_{i=0}^{N} b_{i+1} q_i$ où les $(b_i)_{i=1}^{N+1}$ satisfont aux conditions d'Ostrowski. Alors le préfixe de longueur m du mot caractéristique c_α est donné par :

$$\mathbb{P}_m(c_\alpha) = \prod_{i=0}^{N}{}^{\downarrow} s_i^{b_{i+1}} = s_N^{b_{N+1}} s_{N-1}^{b_N} \cdots s_0^{b_1}.$$

On en déduit en particulier le corollaire suivant.

Corollaire 6.2.2
Soient $m \geq 1$ et $p \geq 1$ deux entiers et $N \geq 1$ tels que $m + p = q_{N+1} - 2$. On écrit :

$$m = \sum_{i=0}^{N} b_{i+1} q_i \quad \text{et} \quad p = \sum_{i=0}^{N} c_{i+1} q_i$$

où les $(b_i)_{i=1}^{N+1}$ et $(c_i)_{i=1}^{N+1}$ satisfont aux conditions d'Ostrowski. Alors on a la formule produit :

$$s_{N+1}^{--} = \prod_{i=0}^{N}{}^{\downarrow} s_i^{b_{i+1}} \cdot \prod_{i=0}^{N}{}^{\uparrow} \widetilde{s_i}^{c_{i+1}}.$$

En particulier, le mot

$$\widetilde{\mathbb{P}}_p(c_\alpha) = \prod_{i=0}^{N}{}^{\uparrow} \widetilde{s_i}^{c_{i+1}} = \widetilde{s_0}^{c_1} \widetilde{s_1}^{c_2} \cdots \widetilde{s_N}^{c_{N+1}}$$

est un facteur de c_α.

Preuve. Noter que l'existence et l'unicité des écritures dans le système de numération d'Ostrowski découlent de la proposition 5.1.2. D'après la propriété 6.2.1 précédente, et le fait que le mot s_{N+1}^{--} est un palindrome d'après 4.2.3 et 4.2.4, on obtient la formule produit :

$$s_{N+1}^{--} = \mathbb{P}_m(c_\alpha) \widetilde{\mathbb{P}}_p(c_\alpha)$$

d'où le résultat découle.

□

La proposition 6.2.2 fait intervenir des mots finis de la forme

$$\widetilde{\mathbb{P}}_m(c_\alpha) = \prod_{i=0}^{N}{}^{\uparrow} \widetilde{s_i}^{b_{i+1}} = \widetilde{s_0}^{b_1} \widetilde{s_1}^{b_2} \cdots \widetilde{s_N}^{b_{N+1}}$$

où $m = \sum_{i=0}^{N} b_{i+1}q_i$ est un entier écrit dans le système de numération d'Ostrowski. Vu la forme de ce produit, il est naturel de considérer les mots infinis de la forme

$$\prod_{i=0}^{+\infty} \widetilde{s}_i^{\,b_{i+1}}$$

où la famille $(b_i)_{i\geq 1}$ d'entiers vérifie les conditions d'Ostrowski. Cela conduit naturellement à la définition du mot infini $\widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)$ pour un intercept formel ρ. Noter qu'un tel produit définit bien un mot sturmien d'après le corollaire 6.2.2, puisque tous les préfixes de ce produit infini sont facteurs du mot caractéristique.

Cette opération permettra donc d'associer de manière naturelle un mot sturmien à partir d'un intercept formel. Nous étudions cette opération sur les intercepts formels plus en détail dans la suite de ce chapitre.

Définition 6.2.3
Soit $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}q_i$ un intercept formel qui n'est pas un entier. On définit le mot sturmien $\widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)$ comme le produit, infini,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha) &= \prod_{i=0}^{+\infty} \widetilde{s}_i^{\,b_{i+1}} \\ &= \lim_{N\to+\infty} \prod_{i=0}^{N}{}^{\uparrow}\, \widetilde{s}_i^{\,b_{i+1}} \\ &= \lim_{N\to+\infty} \widetilde{\mathbb{P}}_{\rho_N}(c_\alpha).\end{aligned}$$

Il faut prendre garde au fait que ce produit n'est pas infini si ρ est un entier, et que dans ce cas le mot $\widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)$ ne peut pas être considéré comme un mot sturmien, puisqu'il est fini d'après 4.1.3.

L'utilisation de la notation $\widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)$ pour ce produit infini ne vient pas seulement de la proposition 6.2.1. Nous allons établir dans le reste du chapitre une forme de dualité entre les opérations

$$\rho \to T^\rho(c_\alpha) \quad \text{et} \quad \rho \to \widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha).$$

On verra que cette correspondance permet la considération d'une involution naturelle sur l'ensemble des intercepts formels, le complémentaire, qui aura une interprétation très pratique sur les mots sturmiens, et qui nous permettra d'en déduire des formules de factorisations générales.

La première chose naturelle à faire après l'introduction de ce produit infini est de donner une formule pour son intercept formel associé par le théorème 5.2.5. On va pouvoir l'exprimer à l'aide des fonctions $(\Psi_n)_{n\geq 1}$ définies dans le cadre de la définition 5.2.1, et avec l'aide de la définition 6.1.5. Ceci conduit à la proposition suivante, qui sert aussi de définition du complémentaire d'un intercept formel. Les deux intercepts formels σ_0 et σ_1 sont introduits dans la proposition 5.2.6.

Proposition 6.2.4
Soit ρ un intercept formel de la pente α qui n'est pas un entier, avec $\rho \notin \{\sigma_0, \sigma_1\}$. L'intercept formel du mot sturmien $\widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)$ est donné asymptotiquement par la suite

$$\overline{\rho} = (\Psi_n(q_{\Lambda_\rho(n)+1} - 2 - \rho_{\Lambda_\rho(n)+1}))_{n\geq 0}.$$

On appelle cet intercept formel le complémentaire de l'intercept formel ρ.

Preuve. Soit en effet $n \geq 0$ tel que $\rho_{\Lambda_\rho(n)+1} \leq q_{\Lambda_\rho(n)+1} - 2$. Le préfixe de longueur $\rho_{\Lambda_\rho(n)+1}$ de $\widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)$ est donné par

$$\mathbb{P}_{\rho_{\Lambda_\rho(n)+1}}(\widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)) = \prod_{i=0}^{\Lambda_\rho(n)}{}^{\uparrow}\, \widetilde{s}_i^{\,b_{i+1}}$$

d'après 6.2.2 et vu que $\rho_{\Lambda_\rho(n)+1} \geq q_{\Lambda_\rho(n)}$ d'après 6.1.6, on voit que les deux mots

$$T^{q_{\Lambda_\rho(n)+1}-2-\rho_{\Lambda_\rho(n)+1}}(c_\alpha) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)$$

partagent le même préfixe de longueur $q_{\Lambda_\rho(n)} - 1$. De plus, d'après l'inégalité générale

$$q_{\Lambda_\rho(n)+1} - 2 - \rho_{\Lambda_\rho(n)+1} < q_{\Lambda_\rho(n)+1}$$

vue en 6.1.6. D'après la démonstration du théorème 5.2.5, le $\Lambda_\rho(n)$-ième terme de l'intercept formel de $\widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)$ est donné par la réduction modulo $q_{\Lambda_\rho(n)}$ de $q_{\Lambda_\rho(n)+1}-2-\rho_{\Lambda_\rho(n)+1}$, qui vaut précisément $\Psi_{\Lambda_\rho(n)}(q_{\Lambda_\rho(n)+1}-2-\rho_{\Lambda_\rho(n)+1})$. Le résultat en découle puisque $n \leq \Lambda_\rho(n)$ d'après 6.1.6. □

Le résultat ainsi obtenu indique en particulier que pour tout $M \in \mathrm{Supp}(\rho) \cap [N, +\infty[$, on a :

$$\Psi_N(q_{\Lambda_\rho(N)+1} - 2 - \rho_{\Lambda_\rho(N)+1}) = \Psi_N(q_{\Lambda_\rho(M)+1} - 2 - \rho_{\Lambda_\rho(M)+1}).$$

L'intercept formel obtenu par ce procédé est appelé le complémentaire de l'intercept formel considéré. La propriété ci-dessus permet de le définir, mais nous en étudierons plus en détail les conséquences de la considération de cette notion dans la section suivante, à l'occasion de nos énoncés et démonstrations concernant les factorisations des mots sturmiens.

En appliquant le résultat 6.2.4 aux deux intercepts formels correspondant à $01c_\alpha$ et $10c_\alpha$, on obtient les factorisations suivantes du mot caractéristique.

Corollaire 6.2.5
Si $a_1 \geq 2$, on a :

$$c_\alpha = \widetilde{s_0}^{a_1-2} \prod_{i\geq 1} \widetilde{s_{2i}}^{a_{2i+1}} \quad et \quad c_\alpha = \widetilde{s_0}^{a_1-1} \widetilde{s_1}^{a_2-1} \prod_{i\geq 1} \widetilde{s_{2i+1}}^{a_{2i+2}}.$$

Si $a_1 = 1$ et $a_2 \geq 2$, on a :

$$c_\alpha = \widetilde{s_1}^{a_2-2} \widetilde{s_2}^{a_3-1} \prod_{i\geq 2} \widetilde{s_{2i}}^{a_{2i+1}} \quad et \quad c_\alpha = \widetilde{s_1}^{a_2-2} \prod_{i\geq 1} \widetilde{s_{2i+1}}^{a_{2i+2}}$$

Si $a_1 = 1$ et $a_2 = 1$, on a :

$$c_\alpha = \widetilde{s_2}^{a_3-1} \prod_{i\geq 2} \widetilde{s_{2i}}^{a_{2i+1}} \quad et \quad c_\alpha = \prod_{i\geq 1} \widetilde{s_{2i+1}}^{a_{2i+2}}.$$

Preuve. On considère les deux intercepts formels définis par les suites :

$$(a_4q_3 - 2) + \sum_{i\geq 2} a_{2i+2}q_{2i+1} = (q_{2\lfloor n/2 \rfloor} - 2)_{n\geq 1} \quad \text{et} \quad (a_3q_2 - 2) + \sum_{i\geq 2} a_{2i+1}q_{2i} = (q_{2\lfloor n/2 \rfloor+1} - 2)_{n\geq 1},$$

pour lesquels on rappelle qu'ils correspondent par la bijection du théorème 5.2.5, aux deux mots $10c_\alpha$ et $01c_\alpha$, d'après la proposition 5.2.6. Lorsque l'on calcule $\overline{\rho}$ pour ces deux intercepts formels, on voit que leurs intercepts formels complémentaires sont nuls pour tous les deux. On en déduit ainsi les formules de factorisations du mot caractéristique compte tenu de la proposition 6.2.4. Les différents cas correspondent à la forme des écritures dans le système de numération d'Ostrowski des entiers $a_4q_3 - 2$ et $a_3q_2 - 2$. □

6.3 Factorisations des mots sturmiens

Cette section contient de nouveaux résultats. Le résultat principal de cette section est le théorème 6.3.2.

Cette section poursuit l'investigation des propriétés concernant les produits infinis étudiés dans la section précédente, notamment l'étude des produits infinis introduits dans la définition 6.2.3. On y étudie la notion fondamentale de ce chapitre, à savoir la notion de complémentaire d'un intercept formel.

Le théorème 5.2.5 fournit une bijection entre les intercepts formels d'une pente α et les mots sturmiens de la pente α. Il est alors naturel de considérer l'opération définie à l'aide de produits infinis 6.2.3, et de se demander si elle est bijective.

Le complémentaire d'un intercept formel est définit comme l'intercept formel naturellement associé par le théorème 5.2.5 au mot sturmien définit en 6.2.3. Cette opération, va s'avérer non seulement bijective sur l'ensemble des intercepts formels de la pente α de classe d'équivalence non-nulle, voir la définition 6.1.1 et la proposition 6.1.4, mais aussi involutive, et ceci nous permettra d'obtenir des formules de factorisations pour les mots sturmiens.

La considération du complémentaire d'un intercept formel va nous permettre d'établir une forme de dualité entre le résultat 5.2.5, qui exprime un mot sturmien à l'aide de l'opérateur de décalage, et les résultats de factorisations que nous allons obtenir. Nous présenterons ce résultat sous la forme d'une dualité entre les notions de préfixe et de suffixes des mots infinis. On renvoit à la proposition 6.2.4 pour la définition du complémentaire d'un intercept formel. Nous donnerons plus tard une caractérisation du complémentaire d'un intercept formel à partir des propriétés des mots sturmiens.

Nous commençons par un lemme de facture technique. Il exprime que l'application de passage au complémentaire est effectivement bien définie lorsque restreinte à l'ensemble des intercepts formels de la pente α de classe d'équivalence non-nulle vers lui-même.

Lemme 6.3.1
Si ρ n'est pas équivalent à l'intercept nul, alors $\overline{\rho}$ ne l'est pas non plus.

Preuve. Supposons par l'absurde que $\overline{\rho}$ soit équivalent à l'intercept nul. Alors c'est que l'une des deux suites $(\Psi_n(\overline{\rho}))_{n\geq 1}$ ou $(q_n - \Psi_n(\overline{\rho}))_{n\geq 1}$ est convergente d'après 6.1.2.

Dans le cas où $(\Psi_n(\overline{\rho}))_{n\geq 1}$ converge, c'est que $\overline{\rho}$ est un entier, et donc qu'il existe $k \geq 0$ et $N \geq 0$ tel que $\Psi_n(q_{\Lambda_\rho(n)+1} - 2 - \Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho)) = k$ pour tout $n \geq N$ d'après 6.2.4. Pour tout $n \geq N$, il existe un coefficient c_{n+1} avec $0 \leq c_{\Lambda_\rho(n)+1} \leq a_{\Lambda_\rho(n)+1}$ tel que

$$q_{\Lambda_\rho(n)+1} - 2 - \Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho) = c_{\Lambda_\rho(n)+1} q_{\Lambda_\rho(n)} + k.$$

d'après 5.2.1.

Si le coefficient $c_{\Lambda_\rho(n)+1}$ est nul pour une infinité de $n \geq N$, alors on a l'égalité

$$\Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho) = q_{\Lambda_\rho(n)+1} - 2 - k$$

d'après 5.2.1, pour une infinité de $n \geq N$. D'après la définition 5.2.1, les définitions 6.1.1 et la proposition 6.1.2, ceci implique que ρ est équivalent à l'intercept formel nul, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse. Dans le cas où une infinité des c_{n+1} sont non-nuls, alors compte tenu du fait que pour tout $n \geq N$, on a :

$$q_{\Lambda_\rho(n)+1} - 2 - \Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho) = c_{\Lambda_\rho(n)+1} q_{\Lambda_\rho(n)} + k$$

et puisque ρ n'est pas équivalent à l'intercept formel nul par hypothèse, pour n assez grand on a :

$$\begin{aligned}(a_{\Lambda_\rho(n)+1} - c_{\Lambda_\rho(n)+1}) q_{\Lambda_\rho(n)} + q_{\Lambda_\rho(n)-1} &= \Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho) + k + 2 \\ &= \Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho + k + 2)\end{aligned}$$

d'après 6.1.3, le membre de gauche étant écrit dans le système de numération d'Ostrowski. Mais ceci est impossible car la suite $(a_{\Lambda_\rho(n)+1} - c_{\Lambda_\rho(n)+1}) q_{\Lambda_\rho(n)} + q_{\Lambda_\rho(n)-1}$ ne définit pas asymptotiquement un intercept formel, vu que les supports des écritures dans le système de numération d'Ostrowski de ces entiers ont un minimum tendant vers l'infini avec n.

Dans le cas où $(q_n - \Psi_n(\overline{\rho}))_{n\geq 1}$ converge, c'est-à-dire lorsque c_α est un suffixe de $T^{\overline{\rho}}(c_\alpha)$, alors il existe $k \geq 0$ et $N \geq 0$ tel que l'on ait l'alternative :

$$\Psi_n(\overline{\rho}) = q_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1 - k$$

pour tout $n \geq N$, ou bien

$$\Psi_n(\overline{\rho}) = q_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} - 1 - k$$

pour tout $n \geq N$. On suppose sans perte de généralité être dans le premier cas, et on a alors :

$$\Psi_n(\overline{\rho}) = q_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1 - k = \Psi_n(q_{\Lambda_\rho(n)+1} - 2 - \Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho))$$

pour un $k \geq 0$ et tout $n \geq 1$ assez grand, d'après 5.2.6. On écrit comme précédemment, à l'aide de 6.2.4,

$$\Psi_{\Lambda_\rho(n)}(\overline{\rho}) = q_{\Lambda_\rho(n)+1} - 2 - \Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho) - c_{\Lambda_\rho(n)+1} q_{\Lambda_\rho(n)}$$

ce qui fournit l'égalité

$$(a_{\Lambda_\rho(n)+1} - c_{\Lambda_\rho(n)+1}) q_{\Lambda_\rho(n)} + q_{\Lambda_\rho(n)-1} + k = q_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1 + \Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho).$$

Si pour une infinité d'entiers $n \geq 1$ assez grand, on a $c_{\Lambda_\rho(n)+1} = 0$ alors pour cette infinité d'entier on aura :

$$q_{\Lambda_\rho(n)+1} - q_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + k = \Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho + 1)$$

ce qui est absurde puisque le membre de gauche ne définie pas un intercept formel asymptotiquement d'après 5.2.1. En effet, si l'on note M un entier tel que $k < q_M$, alors les écritures dans le système de numération d'Ostrowski de ces entiers ci-dessus n'ont pas de support dans l'intervalle $[M, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1[$, alors que n peut être choisi arbitrairement grand. Si une infinité d'entiers $n \geq 1$ satisfont à $c_{\Lambda_\rho(n)+1} \neq 0$, alors on a :

$$(a_{\Lambda_\rho(n)+1} - c_{\Lambda_\rho(n)+1}) q_{\Lambda_\rho(n)} + q_{\Lambda_\rho(n)-1} - q_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + k = \Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho + 1)$$

et le membre de gauche est un entier dont le dévelloppement dans le système de numération d'Ostrowski admet un support dans l'intervalle $[M, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor [$ et on conclut comme précédemment. □

L'énoncé suivant est celui du théorème principal de ce chapitre. Cet énoncé est à mettre en parallèle avec l'énoncé 1.3.10 similaire que nous avons obtenu pour le mot de Zimin dans la première partie. Ces énoncés, similaires dans leur formulation et leurs conséquences, mettent en évidence les liens existant entre les factorisations de mots infinis et les systèmes de numération.

Il est en effet remarquable que l'opération de complémentation se révèle involutive, ce qui justifie en grande partie l'emploi du terme « complémentaire » utilisé. D'autre part, cet énoncé permet de comprendre l'opération qui consiste à étendre un mot sturmien à gauche. On sait que pour tout mot sturmien x qui n'est pas suffixe du mot caractéristique, il existe un unique mot sturmien y tel que le mot bi-infini $\widetilde{y} \cdot x$ n'ait que des suffixes sturmiens. L'opération de complémentaire permet de décrire le mot sturmien y obtenu à l'aide de x, à la fois par son intercept associé au théorème 5.2.5, et par une formule produit du type de la définition 6.2.3. Cette opération est naturelle en tant qu'opération sur les mots sturmiens, et il en est ainsi de même pour l'opération obtenue par transport de structure sur les intercepts formels, bien que la formule la définissant n'en ait pas l'air. On notera que le fait que l'application correspondante sur les mots sturmiens soit involutive est très simple à constater, alors que son analogue sur les intercepts formels ne l'est pas. Cette propriété est donc une conséquence directe du point de vue adopté de dualité entre préfixes et suffixes d'un mot sturmien, et fournit une illustration de ce point de vue. On utilise ce point de vue de manière clef dans la preuve du résultat ci-dessous.

On appelle une orbite bi-infinie sturmienne un mot bi-infini dont tous les suffixes sont des mots sturmiens.

Théorème 6.3.2
L'application $\rho \longmapsto \overline{\rho}$, de l'ensemble des intercepts formels qui ne sont pas équivalents à l'intercept nul vers lui même est involutive, et on dispose donc de la formule de réciprocité

$$T^\rho(c_\alpha) = \widetilde{\mathbb{P}}_{\overline{\rho}}(c_\alpha)$$

. De plus, le mot bi-infini

$$\widetilde{T^{\overline{\rho}}(c_\alpha)} \cdot T^\rho(c_\alpha)$$

est une orbite bi-infinie sturmienne.

En particulier, l'ensemble des orbites bi-infinies du mot caractéristique de la pente α, dont le mot caractéristique n'est pas un suffixe, est en bijection naturelle avec l'ensemble des classes d'équivalence non-nulles d'intercepts formels.

Preuve. Soit ρ un intercept formel qui n'est pas équivalent à l'intercept nul. Pour $N \geq 1$, d'apres 6.2.2, on a la factorisation

$$s^{--}_{\Lambda_\rho(N)+1} = \mathbb{P}_{q_{\Lambda_\rho(N)+1}-2-\Psi_{\Lambda_\rho(N)+1}(\rho)}(c_\alpha)\widetilde{\mathbb{P}}_{\Psi_{\Lambda_\rho(N)+1}(\rho)}(c_\alpha)$$

et vu que le mot

$$\mathbb{P}_{\Psi_n(q_{\Lambda_\rho(N)+1}-2-\Psi_{\Lambda_\rho(N)+1}(\rho))}(c_\alpha)$$

est un suffixe de $\mathbb{P}_{q_{\Lambda_\rho(N)+1}-2-\Psi_{\Lambda_\rho(N)+1}(\rho)}(c_\alpha)$ d'après 6.2.1, on en déduit que pour tout $N \geq 1$, le mot

$$\mathbb{P}_{\Psi_N(q_{\Lambda_\rho(N)+1}-2-\Psi_{\Lambda_\rho(N)+1}(\rho))}(c_\alpha)\widetilde{\mathbb{P}}_{\Psi_{\Lambda_\rho(N)+1}(\rho)}(c_\alpha)$$

est un facteur de c_α. Puisque la suite $(\Psi_n(q_{\Lambda_\rho(n)+1} - 2 - \Psi_{\Lambda_\rho(N)+1}(\rho)))_{n\geq 1}$ définit un intercept formel qui n'est pas équivalent à l'intercept nul d'après 6.2.4 et 6.3.1, on en déduit que le mot bi-infini

$$\widetilde{\widetilde{\mathbb{P}}_{\overline{\rho}}(c_\alpha)} \cdot \widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)$$

est une orbite sturmienne.

D'autre part, toujours pour $N \geq 1$, on sait que les deux mots $T^{\Psi_{\Lambda_\rho(N)+1}(\rho)}(c_\alpha)$ et $T^\rho(c_\alpha)$ partagent le même préfixe de longueur $q_{\Lambda_\rho(N)+2} + q_{\Lambda_\rho(N)+1} - 2 - \Psi_{\Lambda_\rho(N)+2}(\rho) \geq q_{\Lambda_\rho(N)+1} - 2 - \Psi_{\Lambda_\rho(N)+1}(\rho)$ d'après 5.2.4. Puisque

$$\mathbb{P}_{q_{\Lambda_\rho(N)+1}-2-\Psi_{\Lambda_\rho(N)+1}(\rho)}(T^{\Psi_{\Lambda_\rho(N)+1}(\rho)}(c_\alpha)) = \widetilde{\mathbb{P}}_{q_{\Lambda_\rho(N)+1}-2-\Psi_{\Lambda_\rho(N)+1}(\rho)}(c_\alpha)$$

d'après 6.2.2, on en déduit que le mot

$$\widetilde{\mathbb{P}}_{\Psi_{\Lambda_\rho(N)}(q_{\Lambda_\rho(N)+1}-2-\Psi_{\Lambda_\rho(N)+1}(\rho))}(c_\alpha)$$

est un préfixe de $T^\rho(c_\alpha)$ d'après 5.2.3, d'où la relation de réciprocité

$$T^\rho(c_\alpha) = \widetilde{\mathbb{P}}_{\overline{\rho}}(c_\alpha).$$

Ceci implique que l'application $\rho \mapsto \overline{\rho}$ est involutive d'après le théorème 5.2.5.

□

On peut reformuler ce résultat sous la forme du corollaire suivant, qui résume nos résultats concernant l'opération de complémentation sur les intercepts formels.

Corollaire 6.3.3
Soit $\rho = \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i+1}q_i$ un intercept formel de la pente α de classe d'équivalence non-nulle. Alors les trois intercepts formels suivant coincident :

1. *L'intercept formel associé à l'unique mot sturmien y tel que le mot bi-infini $\widetilde{y}\cdot T^\rho(c_\alpha)$ soit sturmien, en accord avec 4.1.7,*
2. *L'intercept formel associé au mot sturmien*

$$\widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha) = \prod_{i=0}^{+\infty} \widetilde{s_i}^{b_{i+1}},$$

   où $(s_n)_{n\geq -1}$ est la suite des mots standard associée à la pente α, en accord avec le théorème 4.2.1,
3. *L'intercept formel définit par la suite $\Psi_n(\overline{\rho}) = \Psi_n(q_{\Lambda_\rho(n)+1} - 2 - \Psi_{\Lambda_\rho(n)+1}(\rho))$, où $\Lambda_\rho(n) = \min(\mathrm{Supp}(\rho) \cap [n, +\infty[)$ et les fonctions $\Psi_n : \mathcal{I}_\alpha \to [0, q_n[$ sont les projections associée à la limite projective de la définition 5.2.1.*

Nous déduisons de ces résultats le corollaire suivant, qui est à mettre en parallèle avec le théorème 5.2.5. Ce type de résultat pourrait faire songer que l'on aurait pu éventuellement établir une théorie des intercepts formels en n'utilisant que des formules produits. Cependant, le corollaire suivant, bien qu'assez général, n'est pas valable dans le cas d'un mot sturmien qui est de classe d'équivalence nulle, comme on le constatera dans les propositions démontrées à la fin de cette section.

Corollaire 6.3.4
Soit x un mot sturmien de classe d'équivalence non-nulle. Alors il existe un unique intercept formel ρ de classe d'équivalence non-nulle tel que

$$x = \widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha).$$

On énonce maintenant une propriété qui étudie l'opération de décalage sur les mots sturmiens écris sous forme d'un produit selon la définition 6.2.3. Compte tenu des résultats d'existence de factorisations obtenus ci-dessus, ceci permet de calculer très facilement l'opération de décalage d'un mot sturmien général, lorsque l'on dispose de sa factorisation associée selon la définition 6.2.3. Si l'opération de décalage sur les intercepts formels revient à incrémenter un tel intercept, lorsqu'appliquée aux formules de factorisations, l'opération de décalage revient à une opération qui permet de soustraire un entier à un intercept formel, pourvu que celui-ci ne soit pas un entier. On aurait pu définir cette opération directement sur les intercepts formels, mais nous choisissons de privilégier l'interprétation correspondante sur les mots sturmiens.

Proposition 6.3.5
Soit ρ un intercept formel qui n'est pas équivalent à l'intercept nul. Alors on a la formule :

$$T(\widetilde{\mathbb{P}}_{\rho+1}(c_\alpha)) = \widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha).$$

En particulier, pour tout $k \geq 0$ on a :

$$\overline{\rho + k} + k = \overline{\rho}.$$

Dans le cas où ρ est équivalent à l'intercept nul, mais n'est pas un entier, alors la première formule est vraie si $\rho + 1 \neq 0$, et la seconde est vraie si $\rho + k$ n'est pas un entier.

Preuve. Pour la première partie, il s'agit d'une conséquence immédiate du fait que les deux orbites sturmiennes

$$\widetilde{T^{\overline{\rho}}(c_\alpha)} \cdot T^\rho(c_\alpha) \quad \text{et} \quad \widetilde{T^{\overline{\rho+1}}(c_\alpha)} \cdot T^{\rho+1}(c_\alpha)$$

soient égales d'après 6.3.2.

Pour la seconde partie, cela découle des formules de factorisations obtenues pour le mot caractéristique d'après le corollaire 6.2.5, et le fait que si $\rho + k$ n'est pas un entier, alors $\Psi_N(\rho + k) = \Psi_N(\rho) + k$ pour N assez grand d'après 6.1.3. □

On donne dans la proposition suivante des formules de factorisations pour les mots $0c_\alpha$ et $1c_\alpha$. Ces calculs interviendront comme cas exceptionnels pour certaines propriétés démontrées dans la suite de cette section.

Proposition 6.3.6
Soit σ_0 l'intercept formel associé par le théorème 5.2.5 au mot $0c_\alpha$, et soit σ_1 l'intercept formel associé par le théorème 5.2.5 au mot $1c_\alpha$. Alors on a les formules de factorisations

$$\begin{aligned} 0c_\alpha &= T^{\sigma_0}(c_\alpha) \\ &= \widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma_1}(c_\alpha) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 1c_\alpha &= T^{\sigma_1}(c_\alpha) \\ &= \widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma_0}(c_\alpha). \end{aligned}$$

Preuve. Soit γ_0 l'intercept formel associé par le théorème 5.2.5 au mot $10c_\alpha$, et soit γ_1 l'intercept formel associé par le théorème 5.2.5 au mot $01c_\alpha$. Le corollaire 6.2.5 peut se reformuler sous la forme des égalités :

$$c_\alpha = \widetilde{\mathbb{P}}_{\gamma_0}(c_\alpha) = \widetilde{\mathbb{P}}_{\gamma_1}(c_\alpha)$$

et vu les égalités $\gamma_0 + 1 = \sigma_0$ et $\gamma_1 + 1 = \sigma_1$, d'après la proposition 6.3.5, les mots

$$\widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma_0}(c_\alpha) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma_1}(c_\alpha)$$

coincident avec le mot caractéristique une fois leurs première lettres ommises. On conclut comme pour la proposition 5.2.6 en constatant que le mot $\widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma_1}(c_\alpha)$ commence par la lettre 0, et que le mot $\widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma_0}(c_\alpha)$ commence par la lettre 1. □

On verra que le calcul qui vient d'être effectué n'est pas anodin, car les deux mots $0c_\alpha$ et $1c_\alpha$ sont des mots très particuliers, qui peuvent être présentés comme exceptionnels. On peut en fait les caractériser de la manière suivante. On dit qu'un mot sturmien x admet une unique extension infinie s'il existe un unique mot sturmien y tel que $\widetilde{y} \cdot x$ soit une orbite sturmienne, c'est-à-dire n'ait que des suffixes sturmiens, ces définitions étant cohérentes avec la proposition 4.1.7, et ce mot y est apellé l'unique extension infinie de x. Alors, avec cette terminologie, les deux mots $0c_\alpha$ et $1c_\alpha$ sont caractérisés comme les deux seuls mots de classe d'équivalence nulle, qui ont une unique extension infinie, et tels que cette unique extension infinie ait elle-même une unique extension infinie.

La proposition suivante fournit une caractérisation en terme de factorisations des suffixes du mot caractéristique.

Proposition 6.3.7
Soit x un mot sturmien de pente α. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) x est un suffixe du mot caractéristique,

ii) il existe exactement deux intercepts formels distincts ρ et γ tels que

$$\begin{aligned} x &= \widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha) \\ &= \widetilde{\mathbb{P}}_\gamma(c_\alpha). \end{aligned}$$

Preuve. On a obtenu deux formules de factorisations pour le mot caractéristique d'après 6.2.5, qui sont précisément :

$$\begin{aligned} c_\alpha &= \widetilde{\mathbb{P}}_{\gamma_0}(c_\alpha) \\ &= \widetilde{\mathbb{P}}_{\gamma_1}(c_\alpha) \end{aligned}$$

où γ_0 et γ_1 sont les deux intercepts formels distincts tels que $\gamma_0 + 2 = 0$ et $\gamma_1 + 2 = 0$. Ainsi, les suffixes du mot caractéristique sont donnés par

$$x = \widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)$$

où ρ parcourt l'ensemble des intercepts formels vérifiant $\rho + k = \gamma_0$ ou $\rho + k = \gamma_1$ pour $k \geq 0$, cette liste étant exhaustive et sans répétition. Ayant épuisé tous les intercepts formels possibles à cause du corollaire 6.3.4, les mots sturmiens infinis possédant les caractéristiques *ii)* vérifient aussi la propriété *i)*. □

Comme pour la proposition précédente, la proposition suivante fournit une caractérisation des mots sturmiens admettant l'un des deux mots $01c_\alpha$ ou $10c_\alpha$ comme suffixe en terme de factorisations.

Proposition 6.3.8
Soit x un mot sturmien de pente α. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) un des deux mots $01c_\alpha$ ou $10c_\alpha$ est un suffixe de x,

ii) le mot x n'admet aucune factorisation de la forme

$$x = \widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)$$

pour un intercept formel ρ.

Preuve. On a vu qu'un mot sturmien définit via le théorème 5.2.5 par un intercept formel qui n'est pas équivalent à l'intercept nul ne pouvait pas avoir le mot caractéristique comme suffixe. D'autre part, vu la proposition 6.3.7 précédente, les intercepts formels qui sont équivalents à l'intercept formel nul, mais qui ne sont pas des entiers fournissent par factorisation selon la définition 6.2.3 exactement les mots sturmiens suffixes du mot caractéristique ou les mots $1c_\alpha$ et $0c_\alpha$. La proposition découle de ces différentes caractérisations et du corollaire 6.3.4. □

Nous résumons les résultats obtenus dans le théorème suivant.

Théorème 6.3.9
Soit x un mot sturmien de pente α, avec $x \neq 0c_\alpha$ et $x \neq 1c_\alpha$. Alors :

1. *les conditions suivantes sont équivalentes :*
   — *le mot x et le mot caractéristique c_α n'ont aucun suffixe en commun,*
   — *il existe un unique intercept formel ρ de la pente α tel que $x = \widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)$,*
2. *les conditions suivantes sont équivalentes :*
   — *le mot x est un suffixe de c_α,*
   — *il existe exactement deux intercepts formels ρ de la pente α tels que $x = \widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)$,*
3. *les conditions suivantes sont équivalentes :*
   — *un des deux mots $10c_\alpha$ ou $01c_\alpha$ est un suffixe de x,*
   — *le mot x n'admet aucune factorisation de la forme $x = \widetilde{\mathbb{P}}_\rho(c_\alpha)$ pour un intercept formel ρ.*

Les mots exceptionnels $0c_\alpha$ et $1c_\alpha$ d'intercepts formels respectifs σ_0 et σ_1 vérifient $0c_\alpha = \widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma_1}(c_\alpha)$ et $1c_\alpha = \widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma_0}(c_\alpha)$, et ne possèdent pas d'autres factorisations de cette forme.

6.4 Calcul des compléments

Cette section contient de nouveaux résultats. Le résultat principal de cette section est le théorème 6.4.5.

Considérons la pente $\alpha = 1/\varphi^2$ du mot de Fibonacci c_α, où φ est le nombre d'or. On note $(q_n)_{n\geq -1} = (F_n)_{n\geq -1}$ la suite des continuants associés, où $F_{-1} = 0$, $F_0 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \geq -1$. Les intercepts formels associés s'écrivent tous de manière unique

$$\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1} F_i$$

où les coefficients $(b_i)_{i\geq 1}$ valent 0 ou 1, et sont soumis à la condition $b_i b_{i+1} = 0$ pour tout $i \geq 1$. Considérons, pour $j \in \{0,1,2,3\}$, les intercepts formels deux à deux non-équivalents :

$$\mathcal{F}_4^{(j)} = \sum_{i\geq 1} F_{4i+j},$$

et calculons leurs complémentaires. On calcule :

$$\Lambda_{\mathcal{F}_4^{(j)}}(n) = 4\left\lfloor \frac{n-j}{4} \right\rfloor + j$$

pour $j \in \{0,1,2,3\}$ et $n \geq 7$, ce qui fournit :

$$F_{4\left\lfloor \frac{n-j}{4} \right\rfloor + j + 1} - 2 - \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-j}{4} \right\rfloor} F_{4i+j} = m_j + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-j}{4} \right\rfloor - 1} F_{4i+j+2}$$

où $m_0 = F_2$, $m_1 = F_3$, $m_2 = F_2 + F_4$ et $m_3 = F_3 + F_5$, compte tenu des formules bien connues :

$$\sum_{i=1}^{N} F_{2i} = F_{2N+1} - 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{N} F_{2i+1} = F_{2N+2} - 1$$

pour $N \geq 1$. Ceci montre les formules

$$\overline{\mathcal{F}_4^{(0)}} = \mathcal{F}_4^{(2)} + F_2, \quad \overline{\mathcal{F}_4^{(1)}} = \mathcal{F}_4^{(3)} + F_3, \quad \overline{\mathcal{F}_4^{(2)}} = \mathcal{F}_4^{(0)} + F_2, \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{F}_4^{(3)}} = \mathcal{F}_4^{(1)} + F_3.$$

Si l'on considère l'indice $j \in \{0,1,2,3\}$ comme un élément du groupe additif $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, alors on vient de montrer que la classe du complémentaire de $\mathcal{F}_4^{(j)}$ est la classe de $\mathcal{F}_4^{(j+2)}$.

Plus généralement, pour une partie infinie $M \subset \mathbb{N}^*$ de complémentaire infini, on peut montrer que l'intercept formel complémentaire de

$$\sum_{i \in M} F_{2i}$$

est donné par

$$\overline{\sum_{i \in M} F_{2i}} = \sum_{i \in \mathbb{N}^* \setminus M} F_{2i}$$

d'où le terme « complémentaire ». En particulier les intercepts formels de cette forme de sont jamais équivalents à leur complémentaires.

Considérons maintenant les intercepts formels :

$$\mathcal{F}_3^{(j)} = \sum_{i \geq 1} F_{3i+j}$$

pour $j \in \{0,1,2\}$. On a comme précédemment

$$\Lambda_{\mathcal{F}_3^{(j)}}(n) = 3\left\lfloor \frac{n-j}{3} \right\rfloor + j$$

pour $n \geq 3$, et le calcul :

$$\begin{aligned}
F_{3\lfloor \frac{n-j}{3} \rfloor + j + 1} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-j}{3} \rfloor} F_{3i+j} &= F_{3(\lfloor \frac{n-j}{3} \rfloor - 1) + j + 2} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-j}{3} \rfloor - 1} F_{3i+j} \\
&= F_{3(\lfloor \frac{n-j}{3} \rfloor - 1) + j + 1} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-j}{3} \rfloor - 2} F_{3i+j} \\
&= F_{3(\lfloor \frac{n-j}{3} \rfloor - 1) + j} + F_{3(\lfloor \frac{n-j}{3} \rfloor - 2) + j + 2} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-j}{3} \rfloor - 2} F_{3i+j} \\
&= F_{3(\lfloor \frac{n-j}{3} \rfloor - 1) + j} + F_{3(\lfloor \frac{n-j}{3} \rfloor - 2) + j} + \cdots + F_{3+j+2} - F_{3+j} \\
&= F_{4+j} + \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n-j}{3} \rfloor - 1} F_{3i+j} \\
&= F_{2+j} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-j}{3} \rfloor - 1} F_{3i+j}
\end{aligned}$$

montre que

$$\overline{\mathcal{F}_3^{(0)}} = \mathcal{F}_3^{(0)}, \quad \overline{\mathcal{F}_3^{(1)}} = \mathcal{F}_3^{(1)} + F_1, \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{F}_3^{(2)}} = \mathcal{F}_3^{(2)} + F_3.$$

En particulier, les intercepts formels $\mathcal{F}_3^{(j)}$, pour $j \in \{0,1,2\}$, sont tous équivalents à leurs complémentaire.

Théorème 6.4.1
Soit $\alpha = [0, a_1, a_2, \cdots]$ une pente de continuant $(q_n)_{n\geq -1}$. Soit $M \subset \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ une partie infinie de complémentaire infini. Alors les complémentaires des intercepts formels de la pente α

$$\mathcal{F}_M^{(0)} = \sum_{i\in M} a_{2i+1}q_{2i} \quad et \quad \mathcal{F}_M^{(1)} = \sum_{i\in M} a_{2i+2}q_{2i+1}$$

sont donnés par les formules suivantes, où M^c désigne le complémentaire de M dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$:

$$\overline{\mathcal{F}_M^{(0)}} = q_3 - 2 + \mathcal{F}_{M^c}^{(0)} \quad et \quad \overline{\mathcal{F}_M^{(1)}} = q_4 - 2 + \mathcal{F}_{M^c}^{(1)}.$$

Preuve. Nous donnons la démonstration de ce résultat pour le calcul de $\overline{\mathcal{F}_M^{(0)}}$, le second calcul suivant les même lignes.

On constate tout d'abord que pour tout élément $m \in M$, on a

$$\Lambda_{\mathcal{F}_M^{(0)}}(2m) = 2m$$

et l'intercept formel $\overline{\mathcal{F}_M^{(0)}}$ admet alors pour $2m$-ième composante l'entier

$$\begin{aligned}\Psi_{2m}(q_{2m+1} - 2 - \Psi_{2m+1}(\mathcal{F}_M^{(0)})) &= \Psi_{2m}\left(q_{2m+1} - 2 - \sum_{i\in M, i\leq m} a_{2i+1}q_{2i}\right)\\ &= \Psi_{2m}\left(q_3 - 2 + \sum_{i\in M^c, i\leq m} a_{2i+1}q_{2i}\right)\\ &= q_3 - 2 + \sum_{i\in M^c, i\leq m-1} a_{2i+1}q_{2i}\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que $\overline{\mathcal{F}_M^{(0)}} = q_3 - 2 + \mathcal{F}_{M^c}^{(0)}$ □

Ce type de calcul justifie l'emploi du terme « complémentaire » employé. Ces calculs, d'une certaine simplicité dans ce cas là, peuvent se révéler beaucoup plus complexes lorsque l'on considère des intercepts formels dont le support n'est pas constitué uniquement d'entiers de même parité, comme l'on montré certains exemples donnés au début de cette section.

Les intercepts formels présentés dans le théorème précédent ne sont manifestement jamais équivalents à leurs complémentaires, leur supports (restreints à $[2, +\infty[$) étant disjoints avec ceux de leur complémentaires. Cependant, comme le montre les calculs effectués au début de cette section, il peut arriver qu'un intercept formel soit équivalent à son complémentaire.

En terme de mots sturmiens, cela revient à l'existence de mots sturmiens x tels qu'il existe un mot fini u tel que le mot bi-infini $\widetilde{x}\cdot u\cdot x$ soit une orbite sturmienne. On connait déjà un exemple de tel mot : le mot caractéristique. Même si le complémentaire du mot caractéristique n'est pas défini, on sait que les deux orbites bi-infinies

$$\widetilde{c_\alpha}\cdot 01\cdot c_\alpha \quad \text{et} \quad \widetilde{c_\alpha}\cdot 10\cdot c_\alpha$$

sont sturmiennes.

Dans la suite de cette section, nous cherchons à déterminer les intercepts formels des mots sturmiens x qui sont équivalents à leur complémentaires, et vu ce que l'on vient de dire sur le mot caractéristique et les orbites bi-infinies qu'il définit, nous pouvons nous restreindre à chercher de tels mots infinis x qui ne sont pas de classe d'équivalence nulle.

La réponse à cette problématique dépend beaucoup de la suite des quotients partiels $(a_i)_{i\geq 1}$ de la pente α, et même plus précisément de la parité de ces coefficients. Dans toute la suite de cette section, nous noterons $\overline{k}$ la valeurs, qui vaut 0 ou 1, de la réduction modulo 2 d'un entier k. Nous donnons maintenant un cas particulier où nous parvenons à exhiber très simplement trois intercepts formels, non-équivalents entre eux, qui sont équivalents à leurs complémentaires.

Proposition 6.4.2
Soit α une pente de quotients partiels $(a_i)_{i\geq 1}$ et de continuant $(q_n)_{n\geq -1}$. On suppose que la suite d'entiers $(a_i)_{i\geq 1}$ est formée d'entiers pairs à partir d'un certain rang, supposé pair et égal à $2k_0$. Alors les trois intercepts formels

$$\mathcal{S}_0 = \sum_{i\geq k_0} \frac{a_{2i+1}}{2} q_{2i}, \quad \mathcal{S}_1 = \sum_{i\geq k_0} \frac{a_{2i+2}}{2} q_{2i+1}, \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 = \sum_{i\geq 2k_0} \frac{a_{i+1}}{2} q_i$$

sont des intercepts formels de la pente α équivalents à leurs complémentaires, qui sont de plus deux à deux non-équivalents.

Preuve. Les calculs pour $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$ sont similaires, et nous ne donnerons donc que la preuve pour les intercepts formels $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_2$. Le fait qu'ils ne soient pas équivalents entre eux découle de la proposition 6.1.4.

Procédons au calcul de $\overline{\mathcal{S}_0}$. Comme pour la démonstration de la proposition 6.4.1, on a, pour tout entier $m \geq \lfloor k_0/2 \rfloor + 1$,

$$\Lambda_{\mathcal{S}_0}(2m) = 2m$$

et on calcule, pour un tel $m \geq k_0$,

$$\begin{aligned}
\Psi_{2m}(q_{2m+1} - 2 - \Psi_{2m+1}(\mathcal{S}_0)) &= \Psi_{2m}\left(q_{2m+1} - 2 - \sum_{i=k_0}^{m} \frac{a_{2i+1}}{2} q_{2i}\right) \\
&= \Psi_{2m}\left(q_{2k_0-1} - 2 + \sum_{i=k_0}^{m} \frac{a_{2i+1}}{2} q_{2i}\right) \\
&= q_{2k_0-1} - 2 + \sum_{i=k_0}^{m-1} \frac{a_{2i+1}}{2} q_{2i}
\end{aligned}$$

compte tenu de la formule classique

$$q_{2m+1} - q_{2k_0-1} = a_{2m+1}q_{2m} + a_{2m-1}q_{2m-2} + \cdots + a_{2k_0+1}q_{2k_0}$$

et puisque le support de l'écriture dans le système de numération d'Ostrowski de l'entier $q_{2k_0-1} - 2$ est contenu dans l'intervalle entier $[1, 2k_0 - 1[$. Ceci démontre que

$$\overline{\mathcal{S}_0} = q_{2k_0-1} - 2 + \sum_{i=k_0}^{+\infty} \frac{a_{2i+1}}{2} q_{2i}$$

ce qui, par la proposition 6.1.4, montre que $\mathcal{S}_0$ est équivalent à son complémentaire.

Pour le calcul de $\overline{\mathcal{S}_2}$, on voit en premier lieu que $\Lambda_{\mathcal{S}_2}(m) = m$ pour tout $m \geq 2k_0$. On calcule alors

$$\begin{aligned}
\Psi_m(q_{m+1} - 2 - \Psi_{m+1}(\mathcal{S}_2)) &= \Psi_m\left(q_{m+1} - 2 - \sum_{i=2k_0}^{m} \frac{a_{i+1}}{2} q_i\right) \\
&= \Psi_m\left(\left(\frac{a_{m+1}}{2} - 1\right) q_m + q_{2k_0-1} + q_{2k_0-2} - 2 + \sum_{i=2k_0}^{m-1} \frac{a_{i+1}}{2} q_i\right) \\
&= q_{2k_0-1} + q_{2k_0-2} - 2 + \sum_{i=2k_0}^{m-1} \frac{a_{i+1}}{2} q_{2i}
\end{aligned}$$

compte tenu de la formule

$$q_{m+1} + q_m - q_{2k_0-1} - q_{2k_0-2} = a_{m+1}q_m + a_m q_{m-1} + \cdots + a_{2k_0+1}q_{2k_0}$$

et du fait que l'entier $q_{2k_0-2} - 2$ admet une écriture dans le système de numération d'Ostrowski ayant un support contenu dans l'intervalle entier $[1, 2k_0 - 2[$. Ceci démontre que

$$\overline{\mathcal{S}_2} = q_{2k_0-1} + q_{2k_0-2} - 2 + \sum_{i=2k_0}^{+\infty} \frac{a_{i+1}}{2} q_{2i}$$

ce qui, par la proposition 6.1.4, montre que $\mathcal{S}_2$ est équivalent à son complémentaire. □

Nous cherchons maintenant à construire des intercepts formels équivalents à leur complémentaire pour des pentes générales. Vu le résultat 6.4.2 que l'on vient d'obtenir, nous pourrons nous restreindre au cas où les coefficients $(a_i)_{i\geq 1}$ ne sont pas tous pairs à partir d'un certain rang.

Afin de contruire des intercepts formels équivalents à leur complémentaire, nous allons utiliser les formules suivantes sur les continuants $(q_i)_{\geq -1}$, valable pour tout $i \geq 0$ et tout $k \geq 0$:

$$q_{i+2} - q_i = a_{i+2}q_{i+1} \quad \text{et} \quad q_{i+3+k} - q_i = (a_{i+3+k} - 1)q_{i+2+k} + \sum_{l=1}^{k} a_{i+2+l}q_{i+1+l} + (a_{i+2} + 1)q_{i+1}$$

qui se démontrent très facilement par récurrence sur $k \geq 1$ pour la seconde, la première étant triviale. La première nous servira dans le cas où a_{i+2} est pair, et la seconde nous servira dans le cas où a_{i+2} et a_{i+3+k} sont impairs, et dans le cas où tous les $(a_{i+2+l})_{l=1}^{k}$ sont pairs.

On considère l'ensemble $\mathcal{B}$ de mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ donné par :

$$\mathcal{B} = \{00, 01\} \cup \{10^k10, 10^k11 \mid k \geq 0\}$$

et on commence par un lemme.

Lemme 6.4.3
Soit u un mot fini sur l'alphabet $\{0, 1\}$, alors :

1. *le mot u admet au plus une factorisation dont les termes sont des éléments de $\mathcal{B}$,*
2. *un et un seul des trois mots u, $1u$ et $11u$ admet une factorisation dont les termes sont des éléments de $\mathcal{B}$,*
3. *tout mot infini y sur l'alphabet $\{0, 1\}$ dans lequel la lettre 1 apparait une infinité de fois admet une unique factorisation dont les termes sont des éléments de $\mathcal{B}$.*

Preuve. 1) Vu qu'aucun élément de $\mathcal{B}$ n'est préfixe d'un autre élément de $\mathcal{B}$, si u admet une factorisation par des éléments de $\mathcal{B}$, le premier terme d'une telle factorisation est uniquement déterminé. On réitère ensuite ce raisonnement au mot obtenu en omettant le premier facteur de la factorisation considérée.

2) La propriété se vérifie facilement pour des mots u de longueur $|u| \leq 3$. On procède alors par récurrence sur $|u|$, et on suppose donc que $|u| > 3$. Si u est une puissance de la lettre 0, le résultat est facilement vérifié. Si u termine par 00 ou 01, alors on peut conclure par récurrence. Si u contient au moins tois occurrences de la lettre 1, alors il admet un suffixe appartenant à l'ensemble $\{10^k10, 10^k11 \mid k \geq 0\}$, et on peut conclure par récurrence. De même si u contient deux occurrences de la lettre 1 et finit par la lettre 0. Enfin, si u est de la forme 0^k11 ou de la forme 0^k10 pour un entier $k \geq 0$, alors la propriété est clairement vérifiée.

3) D'après l'hypothèse, au moins un élément de $\mathcal{B}$ est préfixe de y, et il est uniquement déterminé vu la définition de $\mathcal{B}$. En ommettant ce préfixe à y, et en réitérant cet argument, on en déduit l'existence et l'unicité d'une telle factorisation. Noter que par exemple le mot $10000\cdots$ n'admet pas de factorisation dont les termes sont des éléments de $\mathcal{B}$. □

Pour construire des intercepts formels équivalents à leurs complémentaires, nous allons utiliser la notion de factorisation d'un suffixe indexé d'un mot infini y sur un alphabet fini. Ce mot sera voué à être le mot dont la i-ième lettre vaut 0 ou 1 suivant la parité de l'entier a_i. Une factorisation d'un suffixe indexé de y est un couple $(n, (u_j)_{j\geq 1})$ où $n \geq 0$ est un entier et $(u_j)_{j\geq 1}$ est une suite de mots tels que

$$T^n(y) = u_1u_2u_3\cdots.$$

On parlera de $\mathcal{B}$-factorisation lorsque tous les termes de la factorisation appartiennent à $\mathcal{B}$.

On dira que deux factorisations $(n,(u_j)_{j\geq 1})$ et $(m,(v_j)_{j\geq 1})$ d'un suffixe indexé de y, avec $n\leq m$ sont équivalentes s'il existe un entier $l\geq 0$ tel que pour tout $j\geq 1$, $v_j=u_{j+l}$ et si $m=n+|u_1u_2\cdots u_{l-1}|$.

Proposition 6.4.4
Soit y un mot infini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. On suppose que y contient une infinité de fois la lettre 1. Alors le mot y admet exactement trois classes d'équivalence de $\mathcal{B}$-factorisations de suffixes indexés.

Preuve. D'après le lemme 6.4.3, les trois mots y, $1y$ et $11y$ admettent une $\mathcal{B}$-factorisation. Ecrivons $y=u_1u_2u_3\cdots$, $1y=v_1v_2v_3\cdots$ et $11y=w_1w_2w_3\cdots$, où les mots $(u_i)_{i\geq 1}$, $(v_i)_{i\geq 1}$ et $(w_i)_{i\geq 1}$ sont tous des éléments de $\mathcal{B}$. Les factorisations $(0,(u_i)_{i\geq 1})$, $(|v_1|,(v_i)_{i\geq 2})$ et $(|w_1|,(w_i)_{i\geq 2})$ sont des $\mathcal{B}$-factorisations d'un suffixe indexé de y, et ne sont pas équivalentes d'après le point 2) du lemme 6.4.3, appliqué à un préfixe de y. Ce même lemme garantit que toute $\mathcal{B}$-factorisation d'un suffixe indexé de y est équivalente à une de ces trois $\mathcal{B}$-factorisations d'un suffixe indexé. □

Ce résultat de nature combinatoire va nous permettre de démontrer le théorème suivant, qui donne la construction des intercepts formels équivalents à leur complémentaire pour une pente dont les quotients partiels ne sont pas tous pairs à partir d'un certain rang. On aura donc bien traité le cas de toutes les pentes, vu nos résultats obtenus dans la proposition 6.4.2.

Théorème 6.4.5
Soit α une pente dont les quotients partiels $(a_i)_{i\geq 1}$ ne sont pas tous pairs à partir d'un certain rang. Alors il existe exactement trois classes non-nulles d'intercepts formels de la pente α qui soient équivalents à leurs complémentaires.

Preuve. On note $y=\overline{a_1a_2a_3}\cdots$ le mot infini dont la i-ième lettre est la réduction modulo 2 du coefficient a_i, c'est-à-dire que l'on note, pour un entier $k\geq 1$, $\overline{k}=0$ si k est pair, et $\overline{k}=1$ si k est impair. Par hypothèse, y contient une infinité de fois la lettre 1, et par la proposition 6.4.4, y admet exactement trois classes d'équivalences de $\mathcal{B}$-factorisations d'un suffixe indexé.

On va d'abord démontrer l'existence de trois telles classes, en les construisant à partir de classes d'équivalence de suffixes indexés de y de la manière suivante.

Soit $i\geq 1$ et $u=\overline{a_{i+2}a_{i+3}}$ un facteur de y de longueur 2, et on suppose que $u\in\mathcal{B}$, c'est-à-dire que $u=00$ ou $u=01$, ce qui revient à imposer que a_{i+2} est pair. Dans ce cas, on utilise la formule $q_{i+2}-q_i=a_{i+2}q_i$, que l'on réécrit comme l'égalité entre entiers :

$$\frac{q_{i+2}-q_i}{2}=\frac{a_{i+2}}{2}q_{i+1}.$$

On considère maintenant un facteur $u=\overline{a_{i+2}a_{i+3}}\cdots\overline{a_{i+2+k}a_{i+3+k}a_{i+4+k}}$ de y, avec $|u|\geq 3$ et $k\geq 0$ et tel que $u\in\mathcal{B}$, c'est-à-dire tel que $u=10^k10$ ou $u=10^k11$. Alors on utilise dans ce cas la formule

$$q_{i+3+k}-q_i=(a_{i+3+k}-1)q_{i+2+k}+\sum_{l=1}^{k}a_{i+2+l}q_{i+1+l}+(a_{i+2}+1)q_{i+1}$$

que l'on réécrit sous la forme suivante, le membre de droite étant écrit dans le système de numération d'Ostrowski :

$$\frac{q_{i+3+k}-q_i}{2}=\frac{a_{i+3+k}-1}{2}q_{i+2+k}+\sum_{l=1}^{k}\frac{a_{i+2+l}}{2}q_{i+1+l}+\frac{a_{i+2}+1}{2}q_{i+1}.$$

Soit maintenant $(n,(u_j)_{j\geq 1})$ une $\mathcal{B}$-factorisation d'un suffixe indexé de y. On écrit donc

$$T^n(y)=u_1u_2u_3\cdots=\overline{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}}\cdots,$$

et on note $(c_j)_{j\geq 1}$ la suite des indices où les termes de la factorisation apparaissent, c'est-à-dire $c_j=n+1+|u_1u_2\cdots u_{j-1}|$ de sorte que $T^{c_j}(y)=u_ju_{j+1}u_{j+2}\cdots$. On a vu précédemment qu'alors les entiers, pour $1\leq j_1<j_2$

$$\frac{q_{c_{j_2}} - q_{c_{j_1}}}{2} = \sum_{h=j_1}^{j_2-1} \frac{q_{c_{h+1}} - q_{c_h}}{2}$$

admettent des écritures dans le système de numération d'Ostrowski dont les support sont contenus dans les intervalles $[c_{j_1}, c_{j_2}[$. Ceci signifie, d'après la définition 5.2.1, que la somme infinie

$$\rho = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{q_{c_{j+1}} - q_{c_j}}{2}$$

définit un intercept formel. Cet intercept formel, construit à partir d'une $\mathcal{B}$-factorisation d'un suffixe indexé de y, définit donc un mot sturmien d'après le théorème 5.2.5, qui est obtenu en « recollant » les entiers de la forme $(q_{c_{j+1}} - q_{c_j})/2$, ce qui est une opération licite vu les supports de leurs écritures dans le système de numération d'Ostrowski.

Deux tels intercepts formels ainsi construits sont équivalents au sens de 6.1.1 si et seulement si les $\mathcal{B}$-factorisations de suffixes indexés de y sont équivalentes. En reprenant les notations ci-dessus, la suite des $(c_j)_{j\geq 1}$ peut être retrouvée à partir de l'intercept formel

$$\rho = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q_{c_{k+1}} - q_{c_k}}{2}$$

que l'on écrit $\rho = \sum_{i\geq 0} b_{i+1} q_i$ en considérant les indices $i \geq 1$ tels que $b_{i+1} = (a_{i+1} - 1)/2$, puisque ceux-ci vont correspondre exactement aux indices de l'avant-dernière lettre d'un facteur $u_j \in \mathcal{B}$ de la forme $u = 10^k10$ ou $u = 10^k11$ pour un $k \geq 0$. La position de ces indices déterminant la classe d'équivalence d'une $\mathcal{B}$-factorisation d'un suffixe indexé de y, on en déduit que deux $\mathcal{B}$-factorisations qui ne sont pas équivalentes mènent à des intercepts formels qui ne sont pas équivalents. A l'inverse, deux $\mathcal{B}$-factorisations de suffixes indexés de y qui sont équivalentes vont mener à des intercepts formels définis par des sommes infinies de termes qui seront égaux à partir d'un certain rang. Compte tenu des supports dans le système de numération d'Ostrowski de ces termes, les intercepts formels obtenus présenteront des coefficients qui sont égaux à partir d'un certain rang, et qui seront donc équivalents compte tenu de la proposition 6.1.4.

On a ainsi contruit 3 classes d'intercepts formels non-nulles, et il reste maintenant à vérifier qu'elles sont équivalentes à leur complémentaires.

Vu que le support de l'écriture dans le système de numération d'Ostrowski de l'entier $(q_{c_{k+1}} - q_{c_k})/2$ pour $k \geq 1$ contient l'indice $c_k + 1$, on a $\Lambda_\rho(c_k - 1) = c_k - 1$, et on calcule donc, avec $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\Psi_{c_{k-1}}(q_{c_k} - 2 - \Psi_{c_k}(\rho)) &= \Psi_{c_{k-1}}\left(q_{c_k} - 2 - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{q_{c_{l+1}} - q_{c_l}}{2}\right) \\
&= \Psi_{c_{k-1}}\left(q_{c_k} - 2 - \frac{q_{c_k} - q_{c_1}}{2}\right) \\
&= \Psi_{c_{k-1}}\left(\frac{q_{c_k} - q_{c_1}}{2} + q_{c_1} - 2\right) = \frac{q_{c_{k-1}} - q_{c_1}}{2} + q_{c_1} - 2 \\
&= q_{c_1} - 2 + \sum_{l=1}^{k-2} \frac{q_{c_{l+1}} - q_{c_l}}{2}
\end{aligned}$$

vu les différents supports dans le système de numération d'Ostrowski des entiers impliqués. Ceci démontre que ρ est bien équivalent à son complémentaire.

Pour voir que ce sont bien les seuls, on invoque le résultat stipulant qu'un mot sturmiens admet exactement un facteur palindromique de longueur n lorsque n est pair, et exactement deux facteurs palindromiques de longueur n lorsque n est impair, d'après [66]. Pour tout n, il existe un seul facteur de c_α de longueur $2n$ s'écrivant sous la forme $\widetilde{v}_n v_n$. Par unicité, ces facteur $(v_n)_{n\geq 1}$ sont préfixes les uns des autres, et définissent un mot sturmien x tel que le mot bi-infini $\widetilde{x} \cdot x$ soit une orbite sturmienne. Compte tenu de nos résultats 6.3.3 concernant le complémentaire d'un intercept formel, l'intercept formel associé au mot x est équivalent à son complémentaire. Un raisonnement similaire

s'applique concernant l'ensemble des facteurs palindromiques de c_α de longueur impairs. En fait, notre construction permet la détermination exacte et la construction explicite des intercepts formels associés par le théorème 5.2.5 aux mots sturmiens x tels qu'il existe un mot fini u tel que l'orbite bi-infinie $\widetilde{x} \cdot u \cdot x$ soit sturmienne. □

6.5 Relations de Torsion

Cette section contient de nouveaux résultats. Le résultat principal de cette section est le théorème 6.5.2.

Comprendre comment se comporte un système de numération sous des opérations arithmétiques comme l'addition, la multiplication ou la division est en général un problème très difficile. Même dans les systèmes de numération classique dans une base entière, la plupart de ces opérations restent des opérations complexes aux multiples facettes et applications. L'objet mathématique que forment les nombres p-adiques, constitue par exemple un objet mathématique étudié dans de nombreux travaux, et qui est loin d'avoir dévoilé tous ses secrets.

Le système de numération d'Ostrowski n'échappe pas à ce principe, bien au contraire. Comprendre la forme de l'écriture dans le système de numération d'Ostrowski d'une somme de deux entiers, en fonction de leurs écritures dans le système de numération d'Ostrowski est une tâche généralement très délicate. L'objet que nous avons introduit et étudié, incarné par les intercepts formels, est lui-même un objet mathématique complexe à étudier. Il faut saisir que le support dans le système de numération d'Ostrowski d'une somme peut se comporter de manière beaucoup plus complexe que la même question appliquée aux système de numération en base entière. Typiquement, pour les nombres p-adiques, le fait que la valuation p-adique v_p définie sur les entiers satisfait à l'inégalité ultramétrique $v_p(n+m) \geq \min(v_p(n), v_p(m))$ mène à de nombreuses considérations géométriques, topologiques, arithmétiques et analytiques, et constitue une facette clef de tous les travaux d'analyse p-adique existant.

Dans le cas du système de numération d'Ostrowski, on ne dispose pas d'une telle inégalité. On pourrait par exemple considérer la fonction φ_α qui, à un entier $m = \sum_{i=0}^{N} b_{i+1} q_i$ écris dans le système de numération d'Ostrowski, associe le premier indice i tel que l'on ait $b_{i+1} \neq 0$, et se poser la question si un analogue de l'inégalité ultramétrique existe. Cependant, l'inégalité $\varphi_\alpha(n+m) \geq \min(\varphi_\alpha(n), \varphi_\alpha(m))$ n'a pas lieu en général, par exemple dans le cas de la suite de Fibonacci, on a :

$$2F_n = F_{n+1} + F_{n-2}$$

ce qui dans ce cas fournit un exemple où $\varphi(n+m) = \min(\varphi(n), \varphi(m)) - 2$. Ce type de problématiques, assez bien comprises dans le cas des bases entières, apparait déjà inaccessible pour le système de numération d'Ostrowski. Nous allons donner dans cette section un résultat concernant l'opération de division par un entier dans le système de numération d'Ostrowski.

Notre construction de trois classes d'équivalences non-nulles d'intercepts formels équivalents à leurs complémentaires fait déjà écho à ce type de problématique. On y considère effectivement des expressions de la forme

$$\frac{q_{n+k} - q_n}{2}$$

et la clef de notre construction vient dans un bon choix de l'entier k, en fonction de n pour lequel cette quantité soit entière et, surtout, ait un support dans le système de numération d'Ostrowski qui est restreint à un intervalle entier dont on arrive à controler les bornes. Cette propriété nous permet de sommer des entiers de cette forme, et l'écriture dans le système d'Ostrowski sera obtenue par recollement des différentes écritures considérées.

On donne d'abord un lemme permettant de controler le support d'un entier lorsqu'il est donné sous la forme d'une écriture proche d'une écriture dans le système de numération d'Ostrowski.

Lemme 6.5.1
Soient $(b_i)_{i=N+1}^{M+1}$ une suite d'entiers positifs vérifiant $b_{i+1} \leq a_{i+1}$ pour tout $N \leq i \leq M$. Alors l'entier

$$n = \sum_{i=N}^{M} b_{i+1} q_i$$

admet une écriture dans le système d'Ostrowski dont le support est contenu dans l'intervalle $[N, M+1]$*, et le coefficient devant* q_{M+1} *vaut au plus 1.*

Preuve. La borne supérieure sur le support provient de la majoration :

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=N}^{M} b_{i+1} q_i \\ &\leq \sum_{i=N}^{M} a_{i+1} q_i \\ &= q_{M+1} + q_M - (q_N + q_{N-1}) \\ &< q_{M+1} + q_M \end{aligned}$$

qui implique que le « terme dominant » ne peut pas être plus grand que q_{M+1}.

Pour la minoration du support, on procède par récurrence sur le nombre d'indice $N \leq i \leq M$ tels que $b_{i+1} = a_{i+1}$. S'il n'y en a aucun, c'est que n est déjà écrit dans le système de numération d'Ostrowski. Sinon, on considère le plus grand d'entre eux, que nous notons i_0, et on a donc, selon cette notation, $b_{i_0+1} = a_{i_0+1}$.

Si $b_{i_0} = 0$, alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à l'entier $\sum_{i=N}^{i_0-2} b_{i+1} q_i$, dont le support est donc inclu dans l'ensemble $[N, i_0 - 1]$, avec un coefficient dominant valant au plus 1. Si ce coefficient est nul on a terminé, et s'il vaut 1, alors la simplification $q_{i_0+1} = a_{i_0+1} q_{i_0} + q_{i_0-1}$ se produit, et les coefficients apparaissant devant q_{i_0+1} et q_{i_0} sont respectivement inférieurs à a_{i_0+2} et nuls, ce qui signifie que l'écriture finale obtenue vérifie les conditions d'Ostrowski avec les conditions énoncées dans le lemme.

Dans le cas où $b_{i_0} \neq 0$, alors on peut procéder directement à la simplification $q_{i_0+1} = a_{i_0+1} q_{i_0} + q_{i_0-1}$, on obtient alors

$$n = \sum_{i=i_0+1}^{M} b_{i+2} q_i + (b_{i_0+2} + 1) q_{i_0+1} + (b_{i_0} - 1) q_{i_0-1} + \sum_{i=N}^{i_0-2} b_{i+1} q_i$$

et $b_{i_0+2} + 1 \leq a_{i_0+2}$ par définition de i_0. Par hypothèse de récurrence, l'entier $(b_{i_0+2} + 1) q_{i_0+1} + (b_{i_0} - 1) q_{i_0-1} + \sum_{i=N}^{i_0-2} b_{i+1} q_i$ a une écriture dans le système de numération d'Ostrowski dont le support est inclu dans l'ensemble $[N, i_0]$, et son coefficient dominant vaut au plus 1. Il peut encore se produire la simplification $q_{i_0+2} = a_{i_0+2} q_{i_0+1} + q_{i_0}$, mais dans tous les cas on obtient une écriture dans le système de numération d'Ostrowski de n dont le support est inclu dans l'ensemble $[N, M+1]$. □

Dans le système de numération d'Ostrowski, le processus de « retenue », est beaucoup plus difficile à controler que dans le cas des systèmes de numération dans des bases entières, comme d'ailleurs le montre la démonstration du lemme 6.5.1 ci-dessus. Les retenues peuvent influencer une écriture d'Ostrowski à la fois « vers la gauche » et « vers la droite », d'où la nécessité de lemmes de contrôle du support dans le système de numération d'Ostrowski comme le lemme 6.5.1, et la nécessité d'hypothèses plus ou moins restrictives sur les coefficients (b_i) qui ne vérifient pas les conditions d'Ostrowski.

Nous terminons notre étude par certains résultats allant dans la direction d'une compréhension de l'opération de division par un nombre entier N dans le système de numération d'Ostrowski, en généralisant la construction produite dans la preuve du résultat concernant la construction d'intercepts formels équivalents à leurs complémentaires.

On précise d'abord le cadre de la démonstration de ce théorème. Nous allons étudier, pour un entier $N \geq 2$, les écritures dans le système de numération d'Ostrowski d'entiers de la forme :

$$\frac{q_{n+k} - q_n}{N}$$

ce qui nécessite déjà que ces nombres soient entiers.

On considère, pour un entier a quelconque, la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de telle sorte que les continuants $(q_n)_{n\geq -1}$ soient soumis à la relation

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ q_n \end{pmatrix} &= A_{a_{n+1}} \begin{pmatrix} q_n \\ q_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= A_{a_{n+1}} A_{a_n} A_{a_{n-1}} \cdots A_{a_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On fixe maintenant un entier $N \geq 2$, et on va étudier le comportement de la suite des continuants prise modulo N. Pour k un entier, on va noter $\overline{k}$ son image dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, et on notera

$$A_{\overline{k}}$$

l'image de la matrice A_k dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. On considère le groupe G engendré par les matrices $A_{\overline{k}}$ dans $GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. D'après les relations

$$A_0 A_1 A_{-1} A_0 A_{-1}^{-1} A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ces deux matrices étant, lorsque vues à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des générateurs classiques de $SL_2(\mathbb{Z})$, et d'après la surjectivité de l'application de réduction $SL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ dont une preuve peut être trouvée dans le premier chapitre de [64], ajouté au fait que les matrices $A_{\overline{k}}$ sont de déterminant -1, on en déduit que

$$G = \langle A_{\overline{k}} \rangle_{\overline{k} \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} = \{A \in SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \mid \det A = \pm 1\}.$$

On considère le graphe suivant, qui encode l'action de G munit des générateurs $(A_{\overline{k}})_{\overline{k}\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ sur l'orbite de son action naturelle sur le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il s'agit du graphe dont l'ensemble V des sommets sont les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ tels qu'il existe une matrice A de G telle que $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et dont les arrêtes sont formées par les vecteurs colonnes reliés par un générateur de G appartenant à la famille $(A_{\overline{k}})_{\overline{k}\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{\overline{k}}} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = A_{\overline{k}} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Ce graphe, évidemment fini, sera pratique pour faire la démonstration de notre prochain résultat.

Le graphe de cette action permet d'adopter le point de vue des automates à notre situation. On considère l'alphabet $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, et on va considérer le graphe précédemment décrit comme un automate, dont l'état initial et l'état final correspondent au vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble Γ des mots sur l'alphabet $\mathcal{A}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ acceptés par cet automate :

$$\Gamma = \left\{ u = u_1 u_2 u_3 \cdots u_n \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^+ \;\middle|\; A_{\widetilde{u}} = A_{u_n} A_{u_{n-1}} \cdots A_{u_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

où l'on note, pour un mot fini $v = v_1 v_2 \cdots v_n$ sur l'alphabet $\mathcal{A}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$,

$$A_{\widetilde{v}} = A_{v_1} A_{v_2} \cdots A_{v_n}.$$

Maintenant que nous avons précisé le cadre et certaines notations, nous sommes en mesure de démontrer le théorème suivant.

Théorème 6.5.2
Soit α une pente de continuant $(q_n)_{n\geq -1}$. Alors pour tout entier $N \geq 2$, il existe un rang n_0 à partir duquel pour tout $n \geq n_0$ il existe un entier $k \geq 2$ tel que N divise $q_{n+k} - q_n$ et telle que le quotient $(q_{n+k} - q_n)/N$ ait un support dans le système d'Ostrowski vérifiant :

$$\mathrm{Supp}\left(\frac{q_{n+k}-q_n}{N}\right)\subset]n,n+k[.$$

Preuve. On note $(a_i)_{i\geq 1}$ la suite des quotients partiels de la pente α, et on note $y=\overline{a_1a_2a_3}\cdots$, qui est un mot infini sur l'alphabet $\mathcal{A}_N=\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

On considère les application $R_N:\mathbb{N}\longrightarrow [0,N[$, qui à un entier k associent respectivement le reste dans la division euclidienne de k par N, de sorte que l'on ait la relation

$$k=\left\lfloor\frac{k}{N}\right\rfloor N+R_N(k).$$

On utilise cette notation plutot que la notation $\overline{k}$ lorsque nous travaillons avec des entiers positifs, et nous privilégions la notation $\overline{k}$ pour des raisonnements faisant intervenir la structure d'anneaux de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

On considère un entier $n\geq 1$ que l'on considère comme arbitrairement grand pour les calculs qui suivent. On écrit :

$$\begin{aligned}
q_n &= a_nq_{n-1}+q_{n-2}\\
&= (\lfloor a_n/N\rfloor N+R_N(a_n))q_{n-1}+q_{n-2}\\
&= (a_n-R_N(a_n))q_{n-1}+(a_{n-1}R_N(a_n)+1)q_{n-2}+R_N(a_n)q_{n-3}\\
&= (a_n-R_N(a_n))q_{n-1}+(a_{n-1}R_N(a_n)+1-R_N(a_{n-1}R_N(a_n)+1))q_{n-2}+\\
&\quad (R_N(a_n)+a_{n-2}R_N(a_{n-1}R_N(a_n)+1))q_{n-3}+R_N(a_{n-1}R_N(a_n)+1)q_{n-4}\\
&= (a_n-R_N(a_n))q_{n-1}+(a_{n-1}R_N(a_n)+1-R_N(a_{n-1}R_N(a_n)+1))q_{n-2}+\\
&\quad (R_N(a_n)+a_{n-2}R_N(a_{n-1}R_N(a_n)+1)-R_N(R_N(a_n)+a_{n-2}R_N(a_{n-1}R_N(a_n)+1))q_{n-3}+\cdots
\end{aligned}$$

de sorte que si l'on considère la suite $(r_i)_{i=0}^{n-1}$ définie par la récurrence :

$$r_0=1,\quad r_1=R_N(a_n),\quad \text{et}\quad r_{i+1}=R_N(a_{n-i}r_i+r_{i-1}),$$

on ait, pour tout $1\leq k\leq n-2$, la relation :

$$\begin{aligned}
q_n &= (a_n-r_1)q_{n-1}+\sum_{i=1}^{k-1}(a_{n-i}r_i+r_{i-1}-r_{i+1})q_{n-i-1}+(a_{n-k}r_k+r_{k-1})q_{n-k-1}+r_kq_{n-k-2}\\
&= (a_n-r_1)q_{n-1}+\sum_{i=1}^{k}(a_{n-i}r_i+r_{i-1}-r_{i+1})q_{n-i-1}+r_{k+1}q_{n-k-1}+r_kq_{n-k-2}\\
&= N\left\lfloor\frac{a_n}{N}\right\rfloor q_{n-1}+\sum_{i=1}^{k}N\left\lfloor\frac{a_{n-i}r_i+r_{i-1}}{N}\right\rfloor q_{n-i-1}+r_{k+1}q_{n-k-1}+r_kq_{n-k-2}.
\end{aligned}$$

La suite $(r_k)_{k=0}^{n-1}$, vue dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, satisfait la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}r_{k+1}\\ r_k\end{pmatrix} &= A_{\overline{a_{n-k}}}\begin{pmatrix}r_k\\ r_{k-1}\end{pmatrix}\\
&= A_{\overline{a_{n-k}}}A_{\overline{a_{n-k+1}}}A_{\overline{a_{n-k+2}}}\cdots A_{\overline{a_n}}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On va montrer que l'on peut trouver un entier $1\leq k\leq n-2$ tel que l'on ait $\begin{pmatrix}r_{k+1}\\ r_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, ce qui est équivalent à la relation

$$\begin{aligned}
A_{\overline{a_{n-k-1}}}\begin{pmatrix}r_{k+1}\\ r_k\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}r_{k+2}\\ r_{k+1}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pour montrer l'existence d'un tel k, on va utiliser le point de vue des automates que l'on a présenté juste avant la démonstration de ce théorème. L'existence d'un tel k est équivalente à la relation

$$A_{\overline{a_{n-k-1}}}A_{\overline{a_{n-k}}}A_{\overline{a_{n-k+1}}}A_{\overline{a_{n-k+2}}}\cdots A_{\overline{a_n}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

On considère alors la suite des vecteurs colonnes

$$\left(A_{\mathbb{P}_n(y)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)_{n\geq 1}=\left(A_{\overline{a_1}}A_{\overline{a_2}}A_{\overline{a_3}}\cdots A_{\overline{a_n}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)_{n\geq 1}$$

qui est une suite dont les valeurs appartiennent à un ensemble fini (de cardinal inférieur à N^2). Il existe donc un rang $n_1\geq 1$, à partir duquel cette suite ne prend que des valeurs qu'elle atteint une infinité de fois. C'est-à-dire qu'il existe un rang $n_1\geq 1$ tel que pour tout $n\geq n_0$, il existe un entier $m>n$ tel que

$$\begin{aligned}A_{\mathbb{P}_n(y)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}&=A_{\overline{a_1}}A_{\overline{a_2}}A_{\overline{a_3}}\cdots A_{\overline{a_n}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=A_{\mathbb{P}_m(y)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=A_{\overline{a_1}}A_{\overline{a_2}}A_{\overline{a_3}}\cdots A_{\overline{a_m}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

d'où l'on tire, puisque les matrices A_u sont inversibles,

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A_{\overline{a_{n+1}}}A_{\overline{a_{n+2}}}A_{\overline{a_{n+3}}}\cdots A_{\overline{a_m}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Ceci démontre l'existence d'un rang $n_0\geq 1$ tel que pour tout $n\geq n_0$, il existe un entier $0\leq k\leq n-1$ tel que

$$A_{\overline{a_{n-k-1}}}A_{\overline{a_{n-k}}}A_{\overline{a_{n-k+1}}}A_{\overline{a_{n-k+2}}}\cdots A_{\overline{a_n}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

qui on l'a vu vérifie alors $\begin{pmatrix}r_{k+1}\\r_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Dans ce cas, on a la relation

$$q_n=N\left\lfloor\frac{a_n}{N}\right\rfloor q_{n-1}+\sum_{i=1}^{k}N\left\lfloor\frac{a_{n-i}r_i+r_{i-1}}{N}\right\rfloor q_{n-i-1}+q_{n-k-2}$$

et vu que les entier $(r_i)_{i=0}^k$ appartiennent à l'ensemble $[0,N[$, on peut majorer chaque coefficient apparaissant devant les continuants par

$$\begin{aligned}\left\lfloor\frac{a_{n-i}r_i+r_{i-1}}{N}\right\rfloor&\leq\frac{a_{n-i}r_i+r_{i-1}}{N}\\&<a_{n-i}+1.\end{aligned}$$

Cette inégalité ayant lieu entre entiers, on obtient

$$\left\lfloor\frac{a_{n-i}r_i+r_{i-1}}{N}\right\rfloor\leq a_{n-i}$$

et on est donc dans les conditions d'application du lemme de contrôle 6.5.1. On en déduit que le nombre entier

$$\frac{q_n-q_{n-k-2}}{N}=\left\lfloor\frac{a_n}{N}\right\rfloor q_{n-1}+\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{a_{n-i}r_i+r_{i-1}}{N}\right\rfloor q_{n-i-1}$$

admet une écriture dans le système de numération d'Ostrowski ayant un support contenu dans l'intervalle entier $[n-k-1,n]$. En fait, vu la majoration évidente

$$\frac{q_n - q_{n-k-2}}{N} < q_n$$

on peut conclure que ce support est en fait inclu dans l'intervalle entier $]n-k-2, n[$.

Nos raisonnements s'appliquent pour deux entiers $n \leq m$ tels que

$$A_{\mathbb{P}_n(y)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A_{\mathbb{P}_m(y)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et on a vu qu'il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$ il existe un entier $m \geq n$ tel que l'égalité ci-dessus soit vérifiée, et ceci permet d'en déduire le résultat. □

Le théorème 6.5.2 permet donc de controler le support de l'écriture dans le système d'Ostrowski de certains entiers, et fournit quelques éléments de compréhension du comportement du système de numération d'Ostrowski sous l'opération de base qu'est la division par un entier $N \geq 2$. Ce théorème fournit une généralisation des relations du type suivant, où (F_n) est la suite de Fibonacci :

$$F_{n+3} - F_n = 2F_{n+1}, \quad F_{n+8} - F_n = 3(F_{n+5} + F_{n+3}) \quad \text{et} \quad F_{n+6} - F_n = 4F_{n+3}$$

ou encore

$$F_{n+20} - F_n = 5(F_{n+16} + F_{n+13} + F_{n+11} + F_{n+9} + F_{n+6} + F_{n+3})$$

pour lesquelles on insiste sur le fait que les supports des termes des membres de droite dans le système de numération d'Ostrowski sont parfaitement controlés. Notre démonstration est aussi de nature constructive dans le cas où l'on arrive à déterminer l'entier $n_1 \geq 1$ tel que la suite

$$\left(A_{\mathbb{P}_n(y)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{n \geq n_1}$$

prenne toutes ses valeurs une infinité de fois. Si l'on prend un entier $n \geq n_1$ quelconque, et que l'on détermine un entier $k \geq 1$ tel que

$$A_{\mathbb{P}_n(y)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A_{\mathbb{P}_{n+k}(y)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on calcule ensuite la suite $(r_i)_{i=0}^{k}$ de la démonstration du théorème 6.5.2 par des divisions euclidiennes successives. Les formules apparaissant dans la démonstration mènent alors à une expression du type étudié dans le lemme 6.5.1, qu'il suffira alors de simplifier selon les règles de calculs dans le système de numération d'Ostrowski, sachant que l'on sait à l'avance que ces opérations ne feront intervenir que des termes correspondant au support obtenu comme conclusion du théorème 6.5.2.

Les simplifications qui peuvent apparaître de cette manière peuvent effectivement apparaître, et le lemme de contrôle 6.5.1 est bel et bien une étape nécessaire et importante de la démonstration. On peut le constater avec l'établissement de la formule

$$F_{n+20} - F_n = 5(F_{n+16} + F_{n+13} + F_{n+11} + F_{n+9} + F_{n+6} + F_{n+3})$$

dans le cas de la suite de Fibonacci, que nous reproduisons maintenant. On écrit :

$$\begin{aligned}
F_{n+20} &= F_{n+19} + F_{n+18} \\
&= 2F_{n+18} + F_{n+17} \\
&= 3F_{n+17} + 2F_{n+16} \\
&= 5F_{n+16} + 3F_{n+15} \\
&= 5F_{n+16} + 3F_{n+14} + 3F_{n+13} \\
&= 5F_{n+16} + 6F_{n+13} + 3F_{n+12} \\
&= 5F_{n+16} + 5F_{n+13} + 4F_{n+12} + F_{n+11} \\
&= 5F_{n+16} + 5F_{n+13} + 5F_{n+11} + 4F_{n+10} \\
&= 5F_{n+16} + 5F_{n+13} + 5F_{n+11} + 4F_{n+9} + 4F_{n+8} \\
&= 5F_{n+16} + 5F_{n+13} + 5F_{n+11} + 8F_{n+8} + 4F_{n+7} \\
&= 5F_{n+16} + 5F_{n+13} + 5F_{n+11} + 5F_{n+8} + 7F_{n+7} + 3F_{n+6} \\
&= 5F_{n+16} + 5F_{n+13} + 5F_{n+11} + 5F_{n+8} + 5F_{n+7} + 5F_{n+6} + 2F_{n+5} \\
&= 5F_{n+16} + 5F_{n+13} + 5F_{n+11} + 5F_{n+8} + 5F_{n+7} + 5F_{n+6} + 2F_{n+4} + 2F_{n+3} \\
&= 5F_{n+16} + 5F_{n+13} + 5F_{n+11} + 5F_{n+8} + 5F_{n+7} + 5F_{n+6} + 4F_{n+3} + 2F_{n+2} \\
&= 5F_{n+16} + 5F_{n+13} + 5F_{n+11} + 5F_{n+8} + 5F_{n+7} + 5F_{n+6} + 6F_{n+2} + 4F_{n+1} \\
&= 5F_{n+16} + 5F_{n+13} + 5F_{n+11} + 5F_{n+8} + 5F_{n+7} + 5F_{n+6} + 5F_{n+2} + 5F_{n+1} + F_n
\end{aligned}$$

d'où l'on obtient

$$\frac{F_{n+20} - F_n}{5} = F_{n+16} + F_{n+13} + F_{n+11} + F_{n+8} + F_{n+7} + F_{n+6} + F_{n+2} + F_{n+1}.$$

Dans cette situation on doit procéder aux simplifications du système de numération d'Ostrowski pour obtenir la formule finale, sachant que ces simplifications ne pourront pas avoir une trop grande zone d'influence d'après le lemme de contrôle 6.5.1. Le lemme de contrôle 6.5.1 est ainsi un point important de la compréhension du système de numération d'Ostrowski, et est une étape clef de la démonstration du théorème 6.5.2.

Nous donnons maintenant une justification du terme de « relations de torsion » employé, associée à une interprétation de ce résultat du point de vue de notre formalisme des intercepts formels.

Nous commençons par une présentation similaire à celles résultats obtenus dans la section (6.4) lors de l'étude des intercepts formels équivalents à leurs complémentaires. La démonstration du théorème 6.5.2, montre que si on note

$$y = \overline{a_1 a_2 a_3} \cdots$$

alors l'un des suffixes de y admet une factorisation en terme de mot u appartenant à l'ensemble

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left\{ u \in \mathcal{A}_N^+ \;\middle|\; A_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \widetilde{\Gamma} \\
&= \{ u \in \mathcal{A}_N^+ \mid \widetilde{u} \in \Gamma \}
\end{aligned}$$

On démontre même plus précisément qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $T^n(y)$ admet une factorisation en terme d'éléments de Δ. On peut alors définir l'ensemble des mots $\mathcal{B}$ qui sont des éléments de Δ ne s'écrivant pas comme la concaténation de deux éléments de Δ, et il apparaît alors qu'un mot fini admet au plus une factorisation dont les termes sont des éléments de $\mathcal{B}$. D'autre part, y admet un suffixe z tel que tout suffixe de z admet une unique $\mathcal{B}$-factorisation. Ces propriétés sont des analogues directs de l'énoncé 6.4.3, dans le cas de la recherche des relations, non pas de 2-torsion comme dans la section (6.4), mais de N-torsion.

Si, par exemple, l'on considère un ensemble fini E de mots sur l'alphabet $\mathcal{A}_N$, tel que tout vecteur colonne qui soit sommet du graphe considéré pendant la démonstration du théorème 6.5.2, puisse s'écrire de manière unique sous la forme $A_v^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Alors on peut voir que pour tout mot fini $u \in \mathcal{A}_N^+$, il existe un unique mot v appartenant à E tel que vu admette une factorisation en terme d'éléments de $\mathcal{B}$. Ce type de remarque fournit une interprétation plus générale de l'énoncé 6.4.3.

Comme dans la section (6.4), on peut construire, à partir d'une $\mathcal{B}$-factorisation d'un suffixe indexé de y, un intercept formel par recollement des différentes expressions dans le système de numération d'Ostrowski que le théorème 6.5.2 nous fournit. En considérant un suffixe $T^n(y)$ de y qui admet une $\mathcal{B}$-factorisation, et que l'on considère la $\mathcal{B}$-factorisation $(n,(u_i)_{i\geq 1})$ de ce suffixe indexé, on peut construire, en notant $(c_j)_{j\geq 1}$ la suite des indices où les termes de la factorisation apparaissent, c'est-à-dire $c_j = n+1+|u_1u_2\cdots u_{j-1}|$ de sorte que $T^{c_j}(y) = u_ju_{j+1}u_{j+2}\cdots$ des intercepts formels que nous apellerons des points de N-torsions. On a vu au théorème 6.5.2 que les entiers, pour $1 \leq l < k$

$$\frac{q_{c_k} - q_{c_l}}{N} = \sum_{h=l}^{k-1} \frac{q_{c_{h+1}} - q_{c_h}}{N}$$

admettent des écritures dans le système de numération d'Ostrowski dont les support sont contenus dans les intervalles $]c_l, c_k[$. Ceci signifie, d'après la définition 5.2.1, que la somme infinie

$$\rho = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q_{c_{k+1}} - q_{c_k}}{N}$$

définie un intercept formel. Cet intercept formel, construit à partir d'une $\mathcal{B}$-factorisation d'un suffixe indexé de y, définit donc un mot sturmien d'après le théorème 5.2.5, qui est obtenu en « recollant » les entiers de la forme $(q_{c_{k+1}} - q_{c_k})/N$, ce qui est une opération licite vu les supports de leurs écritures dans le système de numération d'Ostrowski. Il est alors clair que deux tels intercepts ainsi construits sont équivalents au sens de 6.1.1 si et seulement si les $\mathcal{B}$-factorisations de suffixes indexés de y sont équivalentes. Ce type de construction pour N généralise donc la construction obtenue pour les intercepts formels équivalents à leurs complémentaires. Il est en effet très simple de vérifier qu'effectivement les constructions de cette section reviennent aux mêmes que celles présentées dans la section (6.4) à l'exception de la proposition 6.4.1, pour laquelle nous n'avons pas trouvé d'analogue direct. Le fait que la notion de complémentaire soit très particulière et riche à comprendre et à interpréter, en particulier en terme de mots sturmiens, justifie pourquoi nous avons séparé les études menées dans les cas $N = 2$ et N quelconque, les constructions de la section (6.4) étant en effet beaucoup plus précises que celles obtenues dans cette section (6.5).

Cependant, dans le cas des points de 2-torsion, c'est-à-dire des intercepts formels équivalents à leur complémentaires, on disposait d'une interprétation assez précise des propriétés de ces intercepts formels. On a vu d'ailleurs pendant notre étude de la notion complémentaire dans les sections (6.2) et (6.3), que cette notion a beaucoup d'aspects subtils et qui sont très difficiles à généralisés pour des entiers N quelconques, par exemple à l'aide de formules produit.

Ce que nous apellons les relations de torsion correspond aux écritures des entiers

$$\frac{q_{n+k} - q_n}{N}$$

dans le système de numération d'Ostrowski. On a vu que ces entiers étaient obtenus à l'aide des mots u constituant l'ensemble $\mathcal{B}$, et que les continuants apparaissant dans ces formules sont les continuants (q_i) dont les indices i parcours l'intervalle entier formé par une occurrence du mot u dans y. Ainsi, ces relations sont en fait valable pour toute occurrence d'un mot u dans le mot y associé à n'importe quelle pente. Ce type de raisonnement montre que ces formules ne sont pas du tout liées aux *valeurs* des continuants de la pente, mais sont en fait liées aux *relations qu'ils vérifient*.

Le terme employé de « torsion » provient de la théorie des groupes. Un point de torsion dans un groupe est un élément g de ce groupe vérifiant $N \cdot g = 0$ où 0 est l'élément neutre du groupe considéré. Vu que les intercepts formels sont écris sous forme d'une somme infinie, il est naturel de se poser la question de savoir si l'on peut les sommer.

Cela reviendrait à définir une loi de groupe sur l'ensemble des intercepts formels, c'est-à-dire sur l'ensemble des mots sturmiens par le théorème 5.2.5. Définir même une somme sur l'ensemble des intercepts formels eux-mêmes est une tâche très délicate, essentiellement car les conditions d'Ostrowski sont difficiles à manipuler, et dégager une structure additive sur ces sommes infinies reste un problème ouvert posé dans ce travail. Il apparaitrait par exemple naturel que le passage au complémentaire d'un intercept formel corresponde par cette loi de groupe à une inversion. Mais de nombreux calculs suggèrent que définir une loi de groupe sur l'ensemble des intercepts formels ne mènerait pas à des résultats satisfaisant, et on espèrerait plutot arriver à définir une telle loi sur les classes d'équivalence d'intercepts formels. D'autre part, le point de vue dynamique des mots sturmiens permet de voir un intercept formel comme un élément du tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, qui est évidemment muni d'une loi additive. On pourrait définir une loi de groupe sur l'ensemble des intercepts, même seulement dynamiques, et définir par transposition de structure cette loi sur les intercepts formels, mais ce procédé ne permettrait pas de comprendre la structure combinatoire de cette loi, en plus de poser des problèmes pour des mots sturmiens présentant des singularité comme le mot caractéristique. Cependant, à la lumière de travaux comme ceux de J. Peltomäki [135], qui définit, dans sa thèse sous la direction de T. Harju et L. Zamboni, sous une forme plutot multiplicative, une application racine carrée sur les mots sturmiens qui reviendrait à diviser par 2 selon la loi de groupe sur l'ensemble des classes d'intercepts formels, on peut espérer mettre en relation ces différents points de vue.

Le terme de point de torsion employé provient du fait que si une telle loi de groupe sur les classes d'équivalence d'intercepts formels existait, alors on pourrait « sommer termes à termes » de tels intercepts formels. En particulier, on espèrerait que, en considérant deux intercepts formels dont les supports sont tous deux contenus dans des ensembles du type

$$]c_1, c_2[\cup]c_2, c_3[\cup]c_3, c_4[\cup \cdots \subset \mathbb{N}$$

pour une suite strictement croissante $(c_i)_{i\geq 1}$ pour laquelle les intervalles entiers considérés sont non-vides, la somme de ces deux intercepts formels reviendrait à écrire sous une forme infinie recollant les sommes correspondantes à un même intervalle constitutant le support.

Vu les supports obtenus pour les intercepts formels qui seraient des points de N-torsion, cela reviendrait à définir une loi de groupe qui rendre cohérent un calcul du type suivant. On considère un intercept formel ρ qui est un point de N-torsion, c'est-à-dire est de la forme

$$\rho = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q_{c_{k+1}} - q_{c_k}}{N}$$

alors on aimerait que le calcul suivant ait du sens, c'est-à-dire que l'on pourrait sommer terme à terme lorsque l'on somme ρ avec lui-même, pour obtenir une somme téléscopique :

$$N \cdot \rho = N \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q_{c_{k+1}} - q_{c_k}}{N} = \sum_{k=1}^{+\infty} (q_{c_{k+1}} - q_{c_k})$$

qui devrait, par somme téléscopique, définir un intercept formel qui soit équivalent à l'une des deux suites

$$\sum_{i\geq 0} a_{2i+2}q_{2i+1} = (q_{2\lfloor n/2\rfloor} - 1)_{n\geq 1} \quad \text{ou} \quad (a_1 - 1) + \sum_{i\geq 1} a_{2i+1}q_{2i} = (q_{2\lfloor n/2\rfloor+1} - 1)_{n\geq 1}$$

et qu'en particulier il soit de classe d'équivalence nulle. Ceci justifie donc le terme employé pour cette section et pour le théorème 6.5.2 de « relations de torsions ». Dans le cas des points de 2-torsions, ce type de résultat et d'interprétation est atteint dans la démonstration du théorème 6.4.5, et ce théorème exploite de manière formelle toutes les propriétés que nous avons développé concernant le complémentaire d'un intercept formel.

Selon ce point de vue conjectural, le groupe des classes d'équivalence d'intercepts formels devrait être isomorphe au groupe additif $\mathbb{R}/(\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z})$, dont les points de N-torsions forment un sous-groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$, que nous avons certes rencontré à plusieurs reprises dans cette section, mais qui nous permet aussi de voir qu'il devrait y avoir exactement N^2-1 classes d'équivalences non-nulles d'intercepts formels qui constitueraient des points de N-torsions, sachant que ce type d'interprétation est exactement obtenue dans le cas $N = 2$ dans le théorème 6.4.5. D'autre part, le nombre de classe d'équivalence d'intercepts formels que nous construisons explicitement comme

ceux qui seraient des points de N-torsions vaut au plus N^2-1. Cependant, il est clair que notre construction fournit un nombre de points de N-torsion strictement plus petit que cette borne supérieure. Pour les points de 2-torsions que nous avons obtenus dans le cas de la suite de Fibonacci, une somme terme à terme de ces sommes infinies mène à des expressions tout à fait naturelles comme :

$$\sum_{i\geq 1} F_{3i} + \sum_{i\geq 1} F_{3i+1} = \sum_{i\geq 1} F_{3i+2}$$

sachant que l'on a vu que ces trois intercepts formels sont équivalents à leur complémentaire. On serait donc en présence des trois éléments non-nuls du groupe des classes d'intercepts formels de 2-torsions, qui vérifient toutes les relations attendues des éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Dans le cas de la relation de 3-torsion, on obtient les 8 classes d'intercepts formels non-nulles définies par les formules

$$\sum_{i\geq 1} F_{8i+3+j} + F_{8i+5+j}$$

pour $j = 0, 1, \ldots, 7$ fournissent $8 = 3^2 - 1$ classes d'intercepts formels non-nulles, distinctes deux à deux, et obtenues grâce au théorème 6.5.2 comme points de 3-torsions. Des calculs, beaucoup trop heuristiques pour être développés ici, permettent même de retrouver les relations qu'ils devraient définir dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. Tous ces éléments heuristiques vont dans le sens de l'existence conjecturale, d'une loi de groupe additif sur l'ensemble des classes d'équivalence d'intercepts formels.

Perspectives

Nous présentons ici certaines perspectives du travail effectué dans la thématique de notre étude de la dualité entre les notions de préfixe et de suffixe dans l'étude des éléments de l'orbite dynamique des mots sturmiens caractéristiques. Ces questions n'ont pas pu être encore élucidées, et mériteraient une recherche plus approfondie.

L'introduction de notre formalisme des intercepts formels des mots sturmiens, donnant une description combinatoire bijective de cette classe de mots infinis, permet comme nous l'avons expliqué de transposer sur l'ensemble des intercepts formels les opérations standard sur les mots sturmiens. Ceci inclut donc l'opération d'appliquer à un mot sturmien un morphisme dit sturmien (définie comme un morphisme transformant tout mot sturmien en un mot sturmien). La pente de deux mots sturmiens reliés ainsi change systématiquement si le morphisme n'est pas trivial, et ceci pourrait permettre de définir des notions de morphismes pour les intercepts formels.

Question 18
Peut-on décrire l'opération sur les intercepts formels correspondante à l'application d'un morphisme sturmien ?

Par exemple, la considération du morphisme qui échange les lettres 0 et 1 peut donner lieu à une autre opération bijective parfaitement naturelle sur l'ensemble des intercepts formels, même si cela nécessite de les considérer pour toutes les pentes puisque ce type d'opération modifie la valeur de la pente. Cette opération va d'ailleurs nécessairement commuter avec l'opération de complémentation sur les mots sturmiens, et ceci souligne sa pertinence. Cette question pourrait permettre de relier différents systèmes de numérations d'Ostrowski pour des pentes différentes, qui seront en fait reliées par des opérations algébriques standard.

Dans l'étude des mots de basse complexité, comme nous avons pu le constater dans certaines de nos études dans le chapitre 3 ou dans ce chapitre, nous sommes naturellement amené à considérer des formules de factorisations reliées à des systèmes de numérations, parfois considérés asymptotiquement via des procédés de compactifications. Ce type de travail permet d'obtenir des résultats aux puissantes conséquences théoriques et algorithmiques sur les classes de mots étudiées. En particulier, il serait attendu du développement d'un formalisme similaire à celui des intercepts formels pour les mots automatiques l'obtention de telles formules de factorisations.

Question 19
Peut-on considérer des formules de factorisations des mots automatiques et décrire, si possible bijectivement, ces mots comme des produits liés à des compactifications de systèmes de numérations donnés par des bases entières ?

Ce type de résultats pourrait permettre à la fois une bonne description de l'ensemble des mots automatiques, mais pourrait aussi mettre en évidence certaines propriétés combinatoires des systèmes de numérations p-adiques. En particulier, les questions et résultats considérés dans ce doctorat concernant les intercepts formels et les factorisations auraient-ils des analogues dans le cas des mots automatiques ?

Les formules de factorisations que nous obtenons dans le cadre de notre étude des mots sturmiens sont de facture très précises, et concernent des factorisations obtenues à partir d'un intercept formel, qui dont présente une certaine rigidité. Nous pouvons nous demander dans quelle mesure ces formules de factorisations sont effectivement optimales pour l'étude des mots sturmiens. On peut par exemple se poser la question suivante.

Question 20
Caractériser les sous-ensembles de l'ensemble $\{s_n^a,\ \widetilde{s_n}^b \mid a, b \geq 0, n \geq 0\}$ *aux travers desquels un mot sturmien donné admet une factorisation.*

Il est remarquable que l'on peut utiliser le théorème de la factorisation monochromatique pour en déduire des résultats de non-existence de factorisations sur les mots sturmiens. Puisque le mot caractéristique admet une factorisation à travers les ensembles à deux éléments $\{s_n, s_{n+1}\}$ pour tout $n \geq 1$, on en déduit qu'il n'admet pas de factorisation dont les termes appartiennent à l'ensemble $\{s_n, s_{n+2}\}$. Determiner exactement quelles sont les factorisations possibles d'un mot sturmien est donc une piste de recherche très pertinente.

Nous avons mentionné à plusieurs reprises la possibilité, conjecturale, de définir une loi de groupe additive sur l'ensemble des intercepts formels d'une pente donnée. Cette loi, difficile à définir, devrait correspondre à une loi d'addition terme à terme dans les cas où cette considération est facile à considérer. La définition d'une telle loi permettrait de donner une opération générale et combinatoire d'une opération d'addition sur l'ensemble des mots sturmiens. Il serait intéressant d'essayer de donner une version multiplicative de cette loi, à la lumière des travaux de J. Peltomäkki [135].

Question 21
Peut-on définir une loi d'addition sur l'ensemble des classes d'équivalences d'intercepts formels ? Peut-on déterminer les points de torsions pour cette loi de groupe additifs ?

Nous renvoyons à la dernière section de ce chapitre pour un développement en détail de ces heuristiques. Ceci permettrait de réaliser la structure algébrique du cercle sur le système de numération d'Ostrowski compactifié, et permettrait d'isoler des intercepts formels présentant certains caractéristiques particulières. Donner une description combinatoire de cette opération d'addition permettrait de repérer des mots sturmiens particuliers présentant des propriétés caractéristiques spécifiques, autre que le mot caractéristique.

Through time, only ideas remain.

Bibliographie

[1] B. Adamczewski, *Approche dynamique et combinatoire de la notion de discrépance*, Thèse de doctorat, Institut de Mathématiques de Luminy (2002).

[2] B. Adamczewski, J.-P. Allouche, *Reversals and palindromes in continued fractions*, Theoret. Comput. Sci. 320 (2007), 220-238.

[3] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, *Nombres réels de complexité sous-linéaire : mesures d'irrationalité et de transcendance*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 658 (2011), 65-98 DOI 10.1515/CRELLE.2011.061.

[4] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, *Dynamics for β-shifts and Diophantine approximation*, Ergod. Th. Dynam. Sys. 27 (2007), 1695-1710.

[5] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, *Palindromic continued fractions*, Annales de l'institut Fourier, Tome 57 (2007) no.5 , p.1557-1574.

[6] B. Adamczewski, T. Rivoal, *Irrationality measures for some automatic real numbers*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Volume 147, Issue 3, November 2009, pp. 659-678, https ://doi.org/10.1017/S0305004109002643 .

[7] W. W. Adams, J. L. Davison, *A remarkable class of continued fractions*, Proc. Amer. Math. Soc. 65, (1977), 194-198.

[8] J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic Sequences : Theory, Applications, Generalizations*, (2002) ISBN : 9780521823326.

[9] J.-P. Allouche, J. Shallit, *The Ubiquitous Prouhet-Thue-Morse Sequence*, in : Ding C., Helleseth T., Niederreiter H. (eds) Sequences and their Applications. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. Springer, London .

[10] A. D'Aniello, A. de Luca, A. de Luca, *On Christoffel and standard words and their derivatives*, arXiv :1602.03231 .

[11] H. Ardal, T. Brown, V. Jungić, J. Sahasrabudhe, *On abelian and additive complexity in infinite words*, INTEGERS - Elect. J. Combin. Number Theory 12 (2012), A21.

[12] P. Arnoux, *Some remarks about Fibonacci multiplication*, Appl. Math. Lett., 2 (1989), pp. 319-320.

[13] P. Arnoux, S. Ito, *Pisot Substitutions and Rauzy fractals*, Bull. Belg. Math. Soc. 8 (2001), 181-207.

[14] P. Arnoux, *Recoding Sturmian sequences on a subshift of finite type, chaos from order*, Complex systems, eds : E. Goles and S. Martinez, ISBN 9401009201, 9789401009201.

[15] S. Avgustinovich, D. Fon-Der-Flaass, A. Frid, *Arithmetical Complexity of Infinite Words*, Words, Languages and Combinatorics III, pp. 51-62 (2003).

[16] S. Avgustinovich, J. Cassaigne, A. Frid, *Sequences of low arithmetical complexity*, Theor. Inform. Appl. 40, no. 4, 569-582, 2006.

[17] P. Balàži, *Various Properties of Sturmian Word*, Acta Polytechnica Vol. 45 No. 5/2005.

[18] P. Baturo, M. Piatkowski, W. Rytter, *The number of runs in Sturmian words*, WORDS (Rouen, 1999). Theoret. Comput. Sci.273(2002), no. 1-2, 5-9.

[19] J. Baumgartner, *A short proof of Hindman's theorem*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Volume 17, Issue 3, November 1974, Pages 384-386.

[20] V. Becher, Y. Bugeaud, T. Slaman, *The Irrationality Exponents of Computable Numbers*, Proceedings of the American Mathematical Society 144(4), DOI : 10.1090/proc/12841.

[21] N. Bédaride, A. Hilion, T. Jolivet, *Topological substitutions and Rauzy fractals*, arXiv :1603.02790.

[22] J. Bell, T. L. Goh, *Exponential lower bounds for the number of words of uniform length avoiding a pattern*, Information and Computation, Volume 205, Issue 9, 2007, Pages 1295-1306, ISSN 0890-5401.

[23] V. Bergelson, J. Moreira, *Measure preserving actions of affine semigroups and* $\{x + y, xy\}$ *patterns*, arXiv :1509.07574.

[24] V. Bergelson, B. Rothschild, *A selection of open problems*, Topology and its Applications, 156, (2009), 2674-2681.

[25] V. Bergelson, R. McCutcheon, *Recurrence for semigroup actions and a non-commutative Schur theorem*, Contemporary Mathematics, Vol. 215, 1998, p. 205-224, 1991 Mathematics Subject Classifications : Primary 28D05.

[26] A. Bernardino, R. Pacheco, M. Silva, *Colouring factors of substitutive infinite words*, https ://arxiv.org/abs/1605.09343.

[27] J. Bernat, Z. Mazàkovà, *On a class of infinite words with affine factor complexity*, Theoretical Computer Science 389 (2007) 12-25, d. doi :10.1016/j.tcs.2007.07.001.

[28] J. Berstel, *Recent results in Sturmian words*, Acta Arithmetica, Instytut Matematyczny PAN, 2006, 122, pp.315-347. lirmm-00123046.

[29] J. Berstel, A. de Luca, *Sturmian words, Lyndon words and trees*, Theoretical Computer Science 178 (1997) 17 I-203 .

[30] J. Berstel, *Sturmian and episturmian words (a survey of some recent results)*, in S. Bozapalidis and G. Rahonis, editors, CAI 2007, volume 4728 of Lecture Notes in Computer Science, pages 23-47. Springer-Verlag, 2007.

[31] J. Berstel, M. Mignotte, *Deux propriétés décidables des suites récurrentes linéaires*, Bull. Soc. math. France, 104, 1976, p. 175 à 184.

[32] V. Berthé, *Autour du système d'énumération d'Ostrowski*, Bull. Belg. Math. Soc. 8 (2001), pp. 209-238.

[33] V. Berthé, *Fréquences des facteurs des suites sturmiennes*, Theoretical Computer Science, Volume 165, Issue 2, 1996, pp. 295-309, ISSN 0304-3975, https ://doi.org/10.1016/0304-3975(95)00224-3.

[34] V. Berthé, E. Cesaratto, P. Rotondo, B. Vallée, and A. Viola, *Recurrence function on Sturmian words : a probabilistic study*, In : Italiano G., Pighizzini G., Sannella D. (eds) Mathematical Foundations of Computer Science 2015. MFCS 2015. Lecture Notes in Computer Science, vol 9234. Springer, Berlin, Heidelberg.

[35] V. Berthé, C. Holton, Luca Q. Zamboni, *Initial powers of Sturmian sequences*, Acta Arithmetica, Instytut Matematyczny PAN, 2006, 122, pp.315-347. lirmm-00123046.

[36] V. Berthé, A. de Luca, C. Reutenauer, *On an involution of Christoffel words and Sturmian morphisms*, European Journal of Combinatorics Volume 29, Issue 2, February 2008, Pages 535-553, European Journal of Combinatorics.

[37] A. Best, P. Dynes, X. Edelsbrunner, B. Mcdonald, S. Miller, K. Tor, C. Turnage-Butterbaugh, M. Weinstein, *Benford Behavior of Zeckendorf Decomposition*, 2010 Mathematics Subject Classification, 11B39, 11B05, 60F05 (primary) 11K06, 65Q30, 62E20 (secondary).

[38] G. Bilgici, *New Generalizations of Fibonacci and Lucas Sequences*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 8, 2014, no. 29, 1429 -1437, http ://dx.doi.org/10.12988/ams.2014.4162.

[39] F. Blanchet-Sadri, S. Simmons, *Counting minimal semi-Sturmian words*, Discrete Applied Mathematics, Volume 161, Issue 18, December 2013, Pages 2851-2861

[40] T. C. Brown, *Colourings of the factors of a word*, Department of Mathematics, Simon Fraser University, Canada (2006).

[41] T. C. Brown, *Applications of standard Sturmian words to elementary number theory*, WORDS(Rouen, 1999). Theoret. Comput. Sci.273(2002), no. 1-2, 5-9.

[42] T. C. Brown, *Description of the characteristic sequence of an irrational*, Canad. Math. Bull. 36 (1993) 15-21.

[43] Y. Bugeaud, *On the rational approximation to the Thue-Morse-Mahler number*, Annales de l'Institut Fourier, Tome 61 (2011) no. 5, p. 2065-2076.

[44] Y. Bugeaud, *Approximation by Algebraic Numbers*, Cambridge University Press, ISBN : 9780511542886, DOI : https ://doi.org/10.1017/CBO9780511542886.

[45] Y. Bugeaud, D. H. Kim, *A new complexity function, repetitions in sturmian words*, arXiv :1510.00279.

[46] Y. Bugeaud, D.H. Kim, *On the b-ary expansions of* $\log(1+\frac{1}{a})$ *and* e, arXiv :1510.00282.

[47] Y. Bugeaud, T. Pejković, *Explicit examples of p-adic numbers with prescribed irrationality exponent*, ÖMG-DMV-Congress 2017 / - , 2017, 91-91, In hounour of J. Shallit's 60th birthday.

[48] A. Carpi, G. Fici, S. Holub, J. Opršal, M. Sciortino, *Universal Lyndon Words*, arXiv :1406.5895.

[49] J. Cassaigne, *Constructing Infinite Words of Intermediate Complexity*, Ito M., Toyama M. (eds) Developments in Language Theory. DLT 2002. Lecture Notes in Computer Science, vol 2450. Springer, Berlin, Heidelberg, https ://doi.org/10.1007/3-540-45005-X-15.

[50] J. Cassaigne, *Subword complexity and periodicity in two or more dimension*, Developments in Language Theory : Foundations, Applications, and Perspectives, World Scientific, 2000, editeurs : G. Rozenberg et W. Thomas, https ://doi.org/10.1142/4489, ISBN : 978-981-02-4380-7.

[51] J. Cassaigne, *Constructing infinite words of intermediate complexity*, Developments in Language Theory VI (DLT 2002), Kyoto (Japon), Lecture Notes in Comput. Sci. 2450, Springer Verlag, 173–184, 2002.

[52] J. Cassaigne, F. Nicolas, *On the Morse-Hedlund complexity gap*, arXiv :0903.1627v5 (version 5)

[53] J. Cassaigne, F. Nicolas, *Factor complexity*, Combinatorics, automata and number theory, 163–247, Encyclopedia Math. Appl., 135, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[54] J. Cassaigne, A. Mira, *Properties of the complexity function for finite words*, Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation, 33, 123–139, 2004.

[55] E. Charlier, M. Philibert, M. Stipulanti, *Nyldon words*, arXiv :1804.09735.

[56] D. Chi, D. Kwon, *Sturmian words, β-shifts, and transcendence*, arXiv :math/0308140.

[57] W. Comfort, S. Negrepontis, *The Theory of Ultrafilters*, Springer, DOI : 10.1007/978-3-642-65780-1, ISBN 978-3-642-65780-1.

[58] D. Conlon, J. Fox, B. Sudakov, *Tower-type bounds for unavoidable patterns in words*, arXiv :1704.03479.

[59] J. Connor, *A Self-Referential Property of Zimin Words*, arXiv :1611.01061.

[60] J. Cooper, D. Rorabaugh, *Asymptotic Density of Zimin Words*, arXiv :1510.03917.

[61] D. Damanik *Local symmetries in the period-doubling sequence*, Discrete Applied Mathematics 100 (2000) 115-121.

[62] R. Descombes, *Sur la répartition des sommets d'une ligne polygonale régulière non-fermée*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 75(1956), 284-355.

[63] R. Descombes, *Sur un problème d'approxiamtion diophantienne*, .R. Acad. Sci. Paris 242 (1956), 1669-1772.

[64] F. Diamond, J. Shurman, *A first course in modular forms*, ISBN 978-0-387-27226-9, Springer.

[65] S. Donoso, F. Durand, A. Maass, S. Petite, *On automorphism groups of low complexity subshifts*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Volume 36, Issue 1, February 2016 , pp. 64-95, https ://doi.org/10.1017/etds.2015.70.

[66] X. Doubray, G. Pirillo, *Palindromes and Sturmian words*, Theoretical Computer Science, Volume 223, Issues 1-2, 28 July 1999, Pages 73-85.

[67] Y. Dupain, V. Sós, *On the one-sided boundedness of the discrepancy-function of the sequence $n\alpha$*, Acta Arith.27(1980), 363-374.

[68] F. Durand, B. Host, C. Skau, *Substitutional dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups*, Ergodic Theory and Dynam. Systems 19 (1999), 953-993.

[69] F. Durand, *Decidability of the HD0L ultimate periodicity problem*, 2013, <hal-00640990v3>.

[70] F. Durand, M. Rigo, *Multidimensional extension of the Morse-Hedlund theorem*, European Journal of Combinatorics Volume 34, Issue 2, February 2013, Pages 391-409.

[71] B. Dwork, G. Gerotto, F. Sullivan, *An introduction to G-functions*, Annals of mathematics studies, AM-133, Vol. 133, ISBN : 9780691036816.

[72] M. Edson, S. Lewis, O. Yayenie, *The k-Periodic Fibonacci Sequence and an extended Binet formula*, Integers, Volume 11, Issue 6, Pages 739-751, ISSN (Print) 1867-0652, DOI : https ://doi.org/10.1515/INTEG.2011.056.

[73] P. Erdos, G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, Compos. Math. 2, 463-470 (1935).

[74] P. Erdos, G. Szekeres, *On some extremum problems in elementary geometry*, Ann. Univ. Sci. Bp. Eötvös Sect. Math. 3-4, 53-62, (1961).

[75] S. Ferenczi, P. Hubert, *Three complexity functions*, Informatique Théorique et Applications, 2012, <10.1051/ita/2011126>. <hal-01265520>, HAL Id : hal-01265520, version 1, DOI : 10.1051/ita/2011126.

[76] G. Fici, A. Langiu, T. Lecroq, A. Lefebvre, F. Mignosi, J. Peltomäkki, E. Prieur-Gaston, *Abelian Powers and Repetitions in Sturmian Words*, Theoretical Computer Science, Volume 635, 4 July 2016, Pages 16-34.

[77] S. Fischler, T. Rivoal, *Irrationality exponent and rational approwimations with prescribed growth*, proceedings of the american mathematical society, Volume 138, Number 3, March 2010, Pages 799-808S 0002-9939(09)10084-9.

[78] A. Fraenkel, *The use and usefulness of numeration systems*, Information and Computation, Volume 81, Issue 1, April 1989, Pages 46-61.

[79] A. Fraenkel, *Systems of numeration*, Amer. Math. Monthly, 92 (1985), pp. 105-114.

[80] A. Fraenkel, *Wythoff games, continued fractions, cedar trees and Fibonacci searches*, Theoret. Comput. Sci., 29 (1984), pp. 49-73.

[81] A. Fraenkel, *How to beat your Wythoff games' opponent on three fronts*, Amer. Math. Monthly, 89 (1982), pp. 353-361

[82] R. Glowinski, W. Rytter, *Compressed Pattern-Matching with Ranked Variables in Zimin Words*, Stringology 2011.

[83] M. le Gonidec, *On complexity functions of infinite words associated with generalized Dyck languages*, Theoretical Computer Science Volume 407, Issues 1-3, 6 November 2008, Pages 117-133, https ://doi.org/10.1016/j.tcs.2008.05.015.

[84] M. le Gonidec, *Drunken man infinite words complexity*, RAIRO - Theoretical Informatics and Applications - Informatique Théorique et Applications, Tome 42 (2008) no. 3, pp. 599-613. doi : 10.1051/ita :2008012.

[85] B. Green, S. Lindqvist, *Monochromatic solutions to $x + y = z^2$*, Canadian Journal of Mathematics, 2017.

[86] G. Hardy, J. Littlewood, *The lattice points of a right-angled triangle*, Proc. London Math. Soc.20(1922), 15-36.

[87] G. Hardy, J. Littlewood, *Some problems of Diophantine approximation : the lattice points of a right-angled triangle*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg (1922), 212-249.

[88] G. Hardy, E. Wright, *Introduction à la théorie des nombres*, Springer, ISBN : 2711771687.

[89] N. Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of* $\mathbb{N}$, Combinatorial Theory Ser. A 17 (1974), l-11.

[90] N. Hindman, *Partitions and sums of integers with repetition*, J. Combin. Theory Ser. A 27 (1979), 19-32.

[91] N. Hindman, *Partition regularity of matrices*, Electronic journal of combinatorial number theory, 7(2) (2007), num. A18 1.

[92] N. Hindman, I. Leader, D. Strauss, *Open Problems in Partition Regularity*, Combinatorics Probability and Computing 12(5-6) :571-583, DOI : 10.1017/S0963548303005716.

[93] N. Hindman, I. Leader, D. Strauss,, *Pairwise sums in colourings of the reals*, to appear in Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.

[94] N. Hindman, D. Strauss, *Algebra in the Stone-Čech compactification : theory and applications*, de Gruyter, Berlin, 2012.

[95] C. Hohlweg, C. Reutenauer, *Lyndon words, permutations and trees*, Theoretical Computer Science 307 (2003) 173-178, doi :10.1016/S0304-3975(03)00099

[96] S. Ito, *Some skew product transformations associated with continued fractions and their invariant measures*, Tokyo J. Math. 9 (1986), 115-133.

[97] S. Ito, *On periodic expansions of cubic numbers and Rauzy fractals*, Proceedings of the conference in honor of Gérard Rauzy on his 60th birthday, pp. 144-164, World Scientic (2000).

[98] S. Ito, H. Nakada, *Approximations of real numbers by the sequence $n\alpha$ and their metrical theory*, Acta Math. Hung.52(1988), 91-100.

[99] J. Justin, G Pirillo, *Episturmian words and episturmian morphisms*, Theoretical Computer Science 276 (2002) 281-31.

[100] V. Keränen, *Abelian squares are avoidable on 4 letters*, In : Kuich W. (eds) Automata, Languages and Programming. ICALP 1992. Lecture Notes in Computer Science, vol 623. Springer, Berlin, Heidelberg.

[101] M. Keane, *Sur les mesures quasi-ergodiques des translations irrationnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris 272 (1971), 54-55.

[102] E. Kilic, *The Binet formula, sums and representations ofgeneralized Fibonacci p-numbers*, European Journal of Combinatorics 29 (2008) 701-711.

[103] S. Klein, *Combinatorial representations of generalized Fibonacci numbers*, Fibonacci Quarterly 29 (2).

[104] D. E. Knuth, *Fibonacci multiplication*, Appl. Math. Lett., 1 (1988), pp. 57-60.

[105] Y. Kobayashi, *Repetition-free words*, Theoretical Computer Science, Volume 44, 1986, Pages 175-197.

[106] R. Kolpakov, G. Kucherov, Y. Tarannikov, *On repetition-free binary words of minimal density*, Theoretical Computer Science Volume 218, Issue 1, 28 April 1999, Pages 161-175.

[107] C. Krawchuk, N. Rampersad, *Cyclic Complexity of Some Infinite Words and Generalizations*, INTEGERS 18A (2018), A12.

[108] S. Labbé, C. Reutenauer, *A d-dimensional extension of Christoffel words*, Discrete and Computational Geometry, 54, 152-181, DOI : 10.1007/s00454-015-9681-2.

[109] S. Lando, A. Zvonkin, *Graphs on Surfaces and Their Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004, 978-3-642-05523-2, https ://doi.org/10.1007/978-3-540-38361-1.

[110] G. Larcher, *Probabilistic diophantine approximation and the distribution of Halton-Kronecker sequences*, Journal of Complexity Volume 29, Issue 6, December 2013, Pages 397-423.

[111] I. Leader, P. A. Russell, *Monochromatic Infinite Sumsets*, https ://arxiv.org/pdf/1707.08071.pdf.

[112] C. Lech, *A note on recurring series*, Arkiv der Math., t. 2, 1953, p. 417-421.

[113] V. Lefèvre, J.-M. Muller, A. Tisserand, *Towards correctly rounded transcendentals*, IEEE Transactions on Computers 47 (1998), 1235-1243.

[114] J. Lesca, *sur la répartition modulo 1 des suites* $n\alpha$, Séminaire Delange-Pisot-Poitou(1966-67), Théorie des Nombres, Fasc. 1, Exp. 15, 7 pp.

[115] M. Levin, *On the lower bound of the discrepancy of Halton's sequence I*, Comptes Rendus Mathematique Volume 354, Issue 5, May 2016, Pages 445-448.

[116] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*, Cambridge University Press, 2002.

[117] A. de Luca, *Sturmian words : structure, combinatorics, and their arithmetics*, Theoretical Computer Science, Volume 183, Issue 1, 30 August 1997, Pages 45-82, https ://doi.org/10.1016/S0304-3975(96)00310-6.

[118] A. de Luca, E. Pribavkina, L.Q. Zamboni, *A colouring problem for infinite words*, J. Combin. Theory Ser. A 125 (2014), 306-332.

[119] A. de Luca, L.Q. Zamboni, *On some variations of colouring problems of infinite words*, J. Combin. Theory Ser. A 137 (2016), 166-178.

[120] A. de Luca, L.Q. Zamboni, *On prefixal factorizations of words*, European J. Combin. 52 part A (2016), 59-73.

[121] R. C. Lyndon, *On Burnside problem I*, Trans. American Math. Soc. 77 (1954), 202-215.

[122] R. C. Lyndon, P. E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH and Co. KG (2001), ISBN10 : 3540411585.

[123] K. Mahler, *Eine arithmetische Eigenschaft der Taylor-Koeffizienten rationaler Funktionen*, Koninki. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc., t. 38, 1935, p. 50-60.

[124] Z. Masakova, E. Pelantova, *enumeration abelian returns to prefixes of Sturmian words*, J. Karhumäki, A. Lepisto, L. Zamboni (eds) : WORDS (2013), LNCS 8079, 2013, Springer-Verlag.

[125] C. Mauduit, C. Moreira, *Complexity and fractal dimensions for infinite sequences with positive entropy*, arXiv :1702.07698 [math.DS].

[126] C. Mauduit, C. Moreira, *Complexity of infinite sequences with zero entropy*, Acta Arithmetica 142(4) :331-346, DOI : 10.4064/aa142-4-3.

[127] M. Mayero, *The Three Gap Theorem*, arXiv :cs/0609124 [cs.LO].

[128] G. Melançon, C. Reutenauer, *On a class of Lyndon words extending christoffel words and related to a multidimensional continued fraction algorithm*, Journal of Integer Sequences, Vol. 16 (2013), Article 13.9.7.

[129] M. Morse, G. Hedlund, *Symbolic Dynamics*, American Journal of Mathematics Vol. 60, No. 4 (Oct., 1938), pp. 815-866, DOI : 10.2307/2371264.

[130] I. Nakashima, J.-I. Tamura, S.-I. Yasutomi, **-sturmian words and complexity*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux, Tome 15 (2003) no. 3, p. 767-804.

[131] J. Nicholson, N. Rampersad, *Initial non-repetitive complexity of infinite words*, Discrete Applied Mathematics 208, (2016), p.114-122.

[132] B. Nouvel, *Self-similar Discrete Rotation Configurationsand Interlaced Sturmian Words*, Lecture Notes in Computer Science. Springer, DGCI 2008.

[133] J. Owings, *Problem E2494*, Amer. Math. Monthly 81 (1974) , 902.

[134] J. Peltomäki, *Characterization of repetitions in Sturmian words : A new proof*, Information Processing Letters 115.11 (2015), 886-891, DOI : 10.1016/j.ipl.2015.05.011, arXiv :1411.5474v2.

[135] J. Peltomäki, M. Whiteland, *A Square Root Map on Sturmian Words*, Lecture Notes in Computer Science 24(1) (2015) DOI : 10.1007/978-3-319-23660-5 17.

[136] J. Peltomäki, M. Whiteland, *More on the dynamics of the symbolic square root map*, Theoretical Computer Science (2018), DOI : 10.1016/j.tcs.2018.08.019.

[137] D. Perrin, A. Restivo, *A note on Sturmian words*, Theoretical Computer Science, Elsevier, 2012, 429 (1), pp.265-272. <10.1016/j.tcs.2011.12.047>. <hal-00828351>.

[138] J. Pihko, *On Fibonacci and Lucas representations and a theorem of Lekkerkerker*, Fibonacci Quarterly, Vol. 26.3 (1988) : pp. 256-261.

[139] G. Pólya, *Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen*, J. reine und ang. Math., t. 151, 1921, p. 1-31.

[140] M. Pouzet, *Introduction à la théorie de l'ordre*, En préparation/Non-publié.

[141] H. J. Prömel, *Ramsey theory for discrete structures*, Spinger, ISBN : 978-3-319-01315-2.

[142] A. Quas, L. Zamboni, *Periodicity and local complexity*, Theoretical Computer Science 319 (2004) 229-24, doi :10.1016/j.tcs.2004.02.026.

[143] R. Rado, *Studien zur Kombinatorik*, Math Zeit 36 (1933), p. 242-280.

[144] D. Ramakrishnan, R. Valenza, *Fourier Analysis on Number Fields*, Springer Science, 17 avr. 2013 - 354 pages.

[145] N. Rampersad, J. O. Shallit, M. Wang, *Avoiding large squares in infinite binary words*, arXiv :math/0306081 [math.CO], 2003.

[146] F .P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London M ath. Soc. 30 (1930), 264-286.

[147] L. Ramshaw, *On the discrepancy of the sequence formed by the multiples of an irrational number*, Journal of Number Theory, Volume 13, Issue 2, 1981, pp. 138-175, ISSN 0022-314X, https ://doi.org/10.1016/0022-314X(81)90002-0.

[148] G. Rauzy, *Rauzy Gérard Propriétés statistiques de suites arithmétiques*, Le Mathématicien, Volume 15. Collection SUP, Presses Universitaires de France, Paris, 1976, (133 p.)

[149] G. Rauzy, *En hommage à Gérard Rauzy*, SMF - Gazette des Mathématiciens - 132, avril 2012.

[150] C. Reutenauer, *Mots de Lyndon généralisés*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire 54 (2006), article B54h.

[151] M. Rigo, *Binomial Complexity of Infinite Words*, Theoretical Computer Science 601 WORDS 2013, 47-57, DOI : 10.1016/j.tcs.2015.07.025.

[152] G. Rhin, C. Viola, *On the irrationality measure of* $\zeta(2)$, Annales de l'Institut Fourier, Tome 43 (1993) no. 1, pp. 85-109. doi : 10.5802/aif.1322.

[153] P. Robba, *Zéros de suites récurrentes linéaires*, Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 5 (1977-1978), exp. no 13, p. 1-5.

[154] K. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika, Volume 2, Issue 1, June 1955 , pp. 1-20.

[155] V. Salo, I. Törmä, *Factor colourings of linearly recurrent words*, ArXiv : 1504.0582, April 2015.

[156] T. Sanders, *Schur's coloring theorem for non-commuting pairs*, arXiv :1901.01738.

[157] K. Saoub, *A tour through graph theory*, Chapman and Hall/CRC, 2017, ISBN : 9781138197800, DOI : https ://doi.org/10.1201/9781315116839.

[158] M. P. Schützenberger, *Quelques problèmes combinatoires de la théorie des automates*, Cours professé à l'Institut de Programmation en 1966/67, (notes by J.-F. Perrot, http ://igm.univ-mlv.fr/ berstel/Mps/Cours/PolyRouge.pdf).

[159] N. Sidorov, A. Vershik, *Arithmetic expansions associated with rotations of the circle and continued fractions*, St. Petersburg Math. Journ. 5 (1994), 1121-1136.

[160] A. Siegel, *Théoréme des trois longueurs et suites sturmiennes : mots d'agencement des longueurs*, ACTA ARITHMETICA XCVII.3 (2001).

[161] W. Sierpiński, *Sur un problème de la théorie des relations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 2 (1933), 285-287.

[162] T. Skolem, *Ein Verfahren zur Behandiung gewisser exponentialer Gleichungen*, Comptes Rendus du 8-ième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm 1934, p. 163-188. - Lund, Hâkan Ohissons, 1935.

[163] T. K. Subrahmonian Moothathu, *Eulerian entropy and non-repetitive subword complexity*, Theor. Comput. Sci. 420, 80-88, 2012, DOI 10.1016/j.tcs.2011.11.013.

[164] A. Thue, *Über unendliche Zeichenreihen*, Norske Vid. Selsk. Skr. I. Mat-Nat. Kl. 7 (1906), 1-22.

[165] A. Thue, *Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen*, Norske Vid. Selsk. Skr. I. Mat-Nat. Kl. 1 (1912), 1-67.

[166] C. Wojcik, L. Zamboni, *Monochromatic factorisations of words and periodicity*, Mathematika, University College London, 2018. hal-01827917.

[167] C. Wojcik, L. Zamboni, *Colouring problems for infinite words*, Chapitre de Sequences, Groups and Number Theory, éd. Cambridge, 2017.

[168] C. Wojcik, *Formal intercepts of Sturmian words*, pré-publication, 2018, https ://arxiv.org/abs/1803.02073.

[169] C. Wojcik, *On a conjecture about super-monochromatic factorisations*, pré-publication, 2018, https ://arxiv.org/abs/1802.08670.

[170] L. Q. Zamboni, *A Note on colouring Factors of Words*, in Oberwolfach Report 37/2010, Mini-workshop : Combinatorics on Words, August 22-27, 2010, 42-44.

[171] E. Zeckendorf, *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 41 (1972), 179-182.

[172] E. Zeckendorf, *A generalized Fibonacci numeration*, Fibonacci Quart. 10 (4) (1972), 365-372.