Cohomologies p-adiques et espaces de Rapoport-Zink

Damien Junger

▶ **To cite this version:**

Damien Junger. Cohomologies p-adiques et espaces de Rapoport-Zink. Théorie des nombres [math.NT]. Université de Lyon, 2020. Français. NNT : 2020LYSEN091 . tel-03172041

HAL Id: tel-03172041
https://theses.hal.science/tel-03172041

Submitted on 17 Mar 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro National de Thèse : 2020LYSEN091

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée par
l'Ecole Normale Supérieure de Lyon

Ecole Doctorale N° 512
École Doctorale Informatique et Mathématiques

Discipline : Mathématiques

Soutenue publiquement le 14/12/2020, par :
Damien JUNGER

Cohomologies p-adiques des espaces de Rapoport-Zink

Après l'avis de :

M. Benjamin SCHRAEN	Université Paris-Sud
M. Sascha ORLIK	Bergische Universität Wuppertal

Devant le jury composé de :

M. Benjamin SCHRAEN	Professeur	Université Paris-Sud	Rapporteur
M. Jean-François DAT	Professeur	IMJ-PRG, Paris	Examinateur
Mme. Christine HUYGHE	CR, CNRS	IRMA, Strasbourg	Examinatrice
Mme Wieslawa NIZIOL	DR, CNRS	IMJ-PRG, Paris	Examinatrice
M. Andrea PULITA	Professeur	Institut Fourier, Grenoble	Examinateur
M. Tobias SCHMIDT	Professeur	IRMAR, Rennes	Examinateur
M. Vincent PILLONI	CR, CNRS	ENS de Lyon	Directeur de thèse
M. Gabriel DOSPINESCU	CR, CNRS	ENS de Lyon	Co-encadrant

Table des matières

1 Introduction **6**
- 1.1 Un survol très rapide . . . 6
- 1.2 Théorie du corps de classe local . . . 6
- 1.3 Tour de Lubin-Tate en dimension plus grande . . . 7
- 1.4 Espace symétrique de Drinfeld . . . 8
- 1.5 Cohomologie étale l-adique . . . 9
- 1.6 Dimension 1 . . . 9
- 1.7 Le niveau 0 . . . 9
- 1.8 Le niveau 1 . . . 12

2 Préliminaires **14**
- 2.1 Conventions générales . . . 14
- 2.2 Cohomologie étale et torseurs . . . 15
- 2.3 Cohomologie de De Rham et torseurs . . . 16
- 2.4 Cohomologie rigide . . . 17

3 Rappels sur la géométrie de l'espace de Drinfeld **18**
- 3.1 L'immeuble de Bruhat-Tits . . . 18
- 3.2 L'espace des hyperplans K-rationnels . . . 19
- 3.3 Géométrie de l'espace symétrique . . . 19
- 3.4 Les recouvrements par les tubes au-dessus des faces et des cellules . . . 20
- 3.5 Géométrie de la fibre spéciale de $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_K}$ . . . 22

4 Fonctions inversibles sur $\mathbb{H}^d_K$ **22**
- 4.1 Enoncé du résultat principal . . . 23
- 4.2 Cohomologie de $\mathbb{H}^d_C$, symboles et distributions . . . 24
- 4.3 Fonctions inversibles et distributions . . . 25
- 4.4 Résidus et cochaines harmoniques . . . 27
- 4.5 Cohomologie étale arithmétique . . . 30
- 4.6 Preuve du théorème 4.1 . . . 31

5 Cohomologie analytique des arrangements d'hyperplans **33**
- 5.1 Géométrie des arrangements . . . 34
- 5.2 Enoncés et stratégies . . . 37
- 5.3 Cas des arrangements algébriques . . . 38
- 5.4 Cohomologie analytique à coefficients dans $\mathscr{O}^{(r)}$ . . . 42
- 5.5 Cohomologie analytique à coefficients dans $\mathbb{G}_m$ . . . 49
- 5.6 Etude des arrangements algébriques généralisés . . . 52
- 5.7 Quelques commentaires sur la cohomologie étale et de de Rham des arrangements d'hyperplans . . . 53

6 Le revêtement modéré **54**
- 6.1 Modèle de Deligne . . . 54
- 6.2 Interprétation modulaire de l'espace de Drinfeld . . . 56
- 6.3 La tour de Drinfeld . . . 56
- 6.4 Le premier revêtement . . . 57
- 6.5 Schémas de Raynaud . . . 58
- 6.6 Application à $\mathfrak{X}[\Pi_D]$ . . . 60
- 6.7 Équations pour le premier revêtement de l'espace symétrique de Drinfeld . . . 62

6.8 Calcul des fonctions inversibles du revêtement modéré 64

7 Cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig 67
7.1 Variétés de Deligne-Lusztig 67
7.2 Cohomologie étale des variétés de Deligne-Lusztig 69
7.3 Cohomologie rigide des variétés de Deligne-Lusztig 69

8 Cohomologie de de Rham et revêtements cycliques modérés 70
8.1 Réduction semi-stable généralisée 70
8.2 Enoncé du résultat principal 70
8.3 Tores monômiaux et leurs revêtements cycliques modérés 72
8.4 Cohomologie de de Rham d'un revêtement cyclique modéré d'un tore monomial 73
8.5 Une première réduction 76
8.6 Une deuxième réduction 78
8.7 Fin de la preuve du théorème 8.1 80

9 Cohomologie de De Rham du premier revêtement de la tour de Drinfeld 83
9.1 Le tube au-dessus d'une composante irréductible 83
9.2 Le tube au-dessus d'une intersection de composantes irréductibles 84
9.3 Réalisation de la correspondance de Langlands locale 86

Références 88

Résumé

Ce travail porte sur la géométrie et la cohomologie des revêtements de l'espace symétrique de Drinfeld. On sait que la partie supercuspidale de la cohomologie étale l-adique de ces espaces fournit des réalisations géométriques des correspondances de Langlands et de Jacquet-Langlands locales (Drinfeld, Carayol, Harris-Taylor, Boyer, Dat, ...). En s'inspirant des méthodes de la thèse de Wang, nous prouvons les mêmes correspondances en cohomologie de De Rham (en oubliant l'action du groupe de Weil) pour le premier revêtement. Cela nécessite la généralisation d'un théorème de Grosse-Klönne sur la cohomologie de De Rham des espaces analytiques admettant un modèle semi-stable.

Nous aurons aussi besoin d'une description plus fine du niveau 0. En particulier, nous calculons les fonctions inversibles de l'espace symétrique. Nous allons plus loin et calculons aussi toute la cohomologie analytique du groupe multiplicatif (nous le faisons en fait dans le cadre plus général des arrangements d'hyperplan) montrant ainsi l'annulation de son groupe de Picard. On en déduit alors une équation pour le premier revêtement essentielle pour le calcul de la cohomologie de De Rham.

Mots-clés : Géométrie arithmétique, Géométrie rigide analytique, Espaces de Rapoport-Zink, Tour de Drinfeld, Programme de Langlands, Correspondance de Langlands locale, Cohomologie de De Rham, Cohomologie analytique

Abstract

This thesis studies the geometry and the cohomology of the Drinfeld symmetric space and its coverings. It has been shown that the supercuspidal part of the l-adic cohomology of this spaces provides a geometric realization of the local Langlands and the Jacquet-Langlands correspondence (Drinfeld, Carayol, Harris-Taylor, Boyer, Dat, ...). Following the methods in the thesis of Wang Hoaran, we establish the same correspondances for the De Rham cohomology (forgetting the action of the Weil group) for the first covering. For that matter, we need to generalize a result of Grosse-Klönne on the De Rham cohomology of analytic spaces with a semi-stable model.

We also need some informations on the level 0. In particular, we compute the invertible functions on the Drinfeld space. Indeed, we have stronger result where we compute the whole analytic cohomology on the sheaf of invertible function (all these calculations are done in the more general context of hyperplan arrangement). This allows us to give an explicit equation for the first covering essential for the computation of De Rham cohomology.

Keywords : Arithmetic geometry, Rigid analytic geometry, Rapoport-Zink spaces, Drinfeld tower, Langlands program, Local Langlands correspondance, De Rham cohomology, Analytic cohomology

Remerciements

Je tenais tout d'abord à remercier mes deux maîtres de thèse Gabriel Dospinescu and Vincent Pilloni pour leur accompagnement pendant ces trois années. Grâce à leur très grande disponibilité, ils ont pu me prodiguer de précieux conseils. Ils ont su me donner assez de liberté pour pouvoir pleinement m'épanouir durant mon apprentissage. Enfin, ce manuscrit n'aurait pu être aussi abouti sans leur exigence et leur bienveillance.

Je souhaitais aussi exprimer ma gratitude envers le jury composé de Jean-François Dat, Andrea Pulita, Christine Huyghe, Benjamin Shraen, Wieslawa Niziol, Vincent Pilloni, Gabriel Dospinescu et Tobias Schmidt et les rapporteurs Benjamin Shraen et Sascha Orlik pour leurs précieux commentaires.

Cette thèse n'aurait pu être aussi fournie ni être terminée à temps sans la contribution logistique formidable de Sally, Juan, mes grands-parents et certains de mes auxiliaires de vie. Je vous en suis très reconnaissant. J'ai aussi une pensée particulière pour mes amis Quentin, Niels, Manh-Tu, Simon, Dorian, Arnaud... qui m'ont beaucoup apporter. Enfin, je voulais remercier l'école normale (le département, le laboratoire, les hébergements...) pour m'avoir fourni pendant sept ans les conditions optimales pour pouvoir réaliser mon projet d'étude.

Encore merci !

1 Introduction

1.1 Un survol très rapide

Le but de cette thèse est d'étudier quelques aspects de la géométrie p-adique d'une famille d'espaces analytiques (appelés espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld) et de certains de leurs revêtements, qui jouent un rôle particulièrement important dans le programme de Langlands. Plus précisément, nous voulons relier la cohomologie de de Rham de ces espaces et la théorie des représentations des groupes $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$ et D^*, où K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et D est l'algèbre centrale sur K, à division et d'invariant $1/(d+1)$.

Nous allons fixer pour toute la suite une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$, dont on note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers, $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ le corps résiduel et ϖ une uniformisante. Soit $C = \widehat{\overline{K}}$ le complété d'une clôture algébrique de K et $\breve{K} = \widehat{K^{nr}}$ le complété de l'extension maximale non ramifiée de $\overline{K}$.

Soit $d \geq 1$ un entier et soit $\mathbb{H}^d_K$ l'espace de Drinfeld de dimension d sur K. C'est un espace analytique rigide tel que

$$\mathbb{H}^d_K(C) = \mathbb{P}^d_K(C) \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H,$$

où $\mathcal{H}$ est l'ensemble des hyperplans K-rationnels de $\mathbb{P}^d_K$. Le groupe $G = \mathrm{GL}_{d+1}(K)$ agit naturellement sur $\mathbb{H}^d_K$.

Dans un article monumental [Dri76], Drinfeld a construit une tour de revêtements finis étales G-équivariants $(\mathcal{M}^n_{Dr})_{n\geq 0}$ de l'espace $\mathcal{M}^0_{Dr} := \mathbb{H}^d_{\breve{K}} \times \mathbb{Z}$ (avec $\mathbb{H}^d_{\breve{K}} = \mathbb{H}^d_K \otimes_K \breve{K}$), de groupe de Galois $\mathcal{O}_D^*$. La cohomologie étale l-adique pour $l \neq p$ de cette tour fournit une réalisation géométrique de la correspondance de Langlands et de Jacquet-Langlands locales, cf. [Har97], [Boy99], [HT01]. Pour $l = p$, $d = 1$ et $K = \mathbb{Q}_p$, il est montré dans [CDN20] que la cohomologie étale p-adique de ces espaces encode aussi la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la cohomologie de De Rham de la tour de Drinfeld, guidés par le principe informel suivant : les résultats l-adiques établis dans [Har97], [Boy99], [HT01] doivent avoir des analogues en cohomologie de de Rham, obtenus en oubliant simplement l'action du groupe de Weil W_K de K et en changeant les coefficients. L'action de W_K sur les groupes de cohomologie l-adique est très intéressante, mais elle devient invisible sur les groupes de cohomologie de de Rham, qui encodent uniquement les liens entre les représentations de G et de D^*. Ce genre de résultat a été démontré pour $d = 1$ dans [DLB17] (pour $K = \mathbb{Q}_p$) et dans [CDN20] (pour K quelconque), pour toute la tour de Drinfeld. Nous renvoyons aussi à [SS91], [IS01] et [DS01] pour illustrer ce principe en niveau 0. Notre résultat principal est une preuve (purement locale) de ce principe pour la "partie supercuspidale" de la cohomologie quand $n = 1$ et d est quelconque. Il s'agit d'un analogue en cohomologie de de Rham du résultat l-adique démontré par voie locale par Wang [Wan14a]. Nous utilisons de manière cruciale les résultats géométriques concernant $\mathcal{M}^1_{Dr}$ obtenus dans loc.cit (la situation est nettement plus compliquée pour $\mathcal{M}^n_{Dr}$ quand $n > 1$, et il est peu probable qu'une approche purement locale puisse résoudre ce problème).

1.2 Théorie du corps de classe local

Avant d'introduire les espaces de Lubin-Tate, il convient de rappeler un certain nombre de résultats classiques concernant la théorie du corps de classe local.

Considérons le groupe de Weil W_K des K-automorphismes de $\overline{K}$ qui agissent via une puissance entière du Frobenius d'ordre q sur le corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}$ de C. C'est un sous-groupe dense du groupe de Galois absolu $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. L'étude des représentations de dimension 1 de

W_K revient à l'étude de l'abélianisé W_K^{ab} de W_K. Le résultat principal de la théorie du corps de classe établit l'existence d'un isomorphisme

$$\mathrm{Art} : K^* \xrightarrow{\sim} W_K^{ab}$$

En particulier, les représentations de dimension 1 du groupe de Weil sont en bijection avec celles de $\mathrm{GL}_1(K) = K^*$. Une description explicite et particulièrement élégante de l'isomorphisme ci-dessus a été donnée par Lubin et Tate dans l'article monumental [LT65]. Rappelons brièvement leur construction. Pour cela, nous avons besoin de la notion de $\mathcal{O}_K$–module formel sur $\mathcal{O}_K$. Cela revient à la donnée de séries formelles $F(X,Y) \in \mathcal{O}_K[\![X,Y]\!]$ et $[a]_F(X) \in \mathcal{O}_K[\![X]\!]$ pour $a \in \mathcal{O}_K$ telles que

$$\begin{cases} F(X,Y) \equiv X+Y \pmod{(X,Y)^2} \\ [a]_F(X) \equiv aX \pmod{X^2} \end{cases}$$

et en posant $x+y = F(x,y)$ et $a.x = [a]_F(x)$ pour $x, y \in \mathfrak{m}_C$, on obtient une structure de $\mathcal{O}_K$-module sur $\mathfrak{m}_C$. Nous dirons que le module formel est de type Lubin-Tate si l'on a la congruence supplémentaire $[\varpi]_F(X) \equiv X^q \pmod{\varpi}$. Les points de ϖ^n-torsion de ce module forment un sous-groupe cyclique d'ordre q^n que l'on notera $F[\varpi^n]$. En rajoutant ces points de torsion à K, on obtient la construction fondamentale :

$$K_{\varpi,F} = \bigcup_n K(F[\varpi^n]).$$

Cette construction est bien sûr un analogue local d'une construction classique sur les courbes elliptiques.

Par exemple, si l'on prend $K = \mathbb{Q}_p$ et $\varpi = p$, alors $[p]_F(X) = (1+X)^p - 1$ et on obtient l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$. L'intérêt de cette construction et que l'on peut aisément donner un morphisme :

$$K^* \to \mathrm{Gal}(K_{\varpi,F} \cdot K^{nr}/K) = \mathrm{Gal}(K_{\varpi,F}/K) \times \mathrm{Gal}(K^{nr}/K).$$

Ce morphisme envoie l'uniformisante ϖ sur le Frobenius $\mathrm{Frob}_q \in \mathrm{Gal}(K^{nr}/K)$, et sa restriction à $\mathcal{O}_K^* \subset K^*$ est décrite comme suit : l'action de $\mathrm{Gal}(K_{\varpi,F}/K)$ sur les points de torsion induit une action sur le module de Tate $T_pF := \varprojlim_n F[\varpi^n] \cong \mathcal{O}_K$, et cela induit un isomorphisme $\mathrm{Gal}(K_{\varpi,F}/K) \cong \mathcal{O}_K^*$, dont l'inverse est le morphisme que l'on cherchait.

Par construction, le morphisme ci-dessus induit une injection $K^* \to W_K^{ab}$ qui est l'application d'Artin recherchée. Pour établir la surjectivité, il suffit de prouver que $K_{\varpi,F} \cdot K^{nr}$ est l'extension maximale abelienne K^{ab}. Il s'agit d'un analogue local du théorème de Kronecker–Weber.

1.3 Tour de Lubin-Tate en dimension plus grande

Nous avons vu comment on pouvait étudier le représentations de dimension 1 de W_K, en étudiant son action sur les points de torsion d'une loi de groupe formel. Pour généraliser cette approche aux représentations de dimension plus grande, il faut étudier la tour de Lubin-Tate, que nous allons décrire succinctement dans ce paragraphe.

La notion de $\mathcal{O}_K$-module formel garde un sens sur toute $\mathcal{O}_K$-algèbre A : il s'agit de la donnée de séries formelles $F(X,Y) \in A[\![X,Y]\!]$ et $[a]_F(X) \in A[\![X]\!]$ pour $a \in \mathcal{O}_K$, vérifiant des congruences et des conditions similaires à celles décrites dans le paragraphe précédent. Si A est de caractéristique p, nous appelons hauteur (relativement à $\mathcal{O}_K$) d'un $\mathcal{O}_K$-module formel F sur A le plus grand entier h pour lequel la série $[\varpi]_F(X)$ se factorise par Frob_q^h. Les $\mathcal{O}_K$-modules formels sur un corps algébriquement clos de caractéristique p sont classifiés par leur hauteur.

Partons maintenant d'un entier $d \geq 1$ et d'un $\mathcal{O}_K$-module formel Φ sur $\overline{\mathbb{F}}$ de hauteur $d+1$. Lubin et Tate ont montré [LT66] que l'espace des déformations de Φ sur des $\mathcal{O}_K$-algèbres locales, noethériennes et complètes est isomorphe (non canoniquement) au schéma formel

$$\widehat{\mathrm{LT}}_0 = \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K[\![T_1, \cdots, T_d]\!]),$$

un modèle entier de la boule unité ouverte rigide $\mathring{\mathbb{B}}^d_K$. Si à la place des déformations de Φ, on étudie le problème des "déformations par quasi-isogénies" (notion que l'on ne détaillera pas ici), l'espace associé est une réunion disjointe dénombrable de copies de $\widehat{\mathrm{LT}}_0$. Ce dernier espace a l'avantage d'avoir une action du groupe des quasi-isogénies de Φ, qui s'identifie à D^*, où D est l'algèbre à division sur K d'invariant $1/(d+1)$, i.e. l'algèbre non–commutative $D = K_{d+1}[\Pi_D]$, où K_{d+1} est l'extension maximale non ramifiée de degré $d+1$ sur K et $\Pi_D^{d+1} = \varpi$, $\Pi_D a = {}^{\sigma}a\Pi_D$ pour $a \in K_{d+1}$, σ étant le Frobenius sur K_{d+1}.

On peut aussi chercher à classifier des déformations de Φ munies d'une structure de niveau $\Gamma \subset \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$. Ce problème est encore représentable et donne lieu à un système projectif de schémas formels

$$(\widehat{\mathrm{LT}}^{\Gamma})_{\Gamma \subset \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)}$$

où les morphismes de transition sont finis et plats, et même des revêtements étales en fibre générique. On appellera $\widehat{\mathrm{LT}}^n$ l'espace $\widehat{\mathrm{LT}}^{1+\varpi^n \mathrm{M}_{d+1}(\mathcal{O}_K)}$.

On a ainsi des actions de $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$ et de D^* sur le système projectif $(\widehat{\mathrm{LT}}^{\Gamma})_{\Gamma \subset \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)}$. De plus, tous ces espaces sont définis sur $\breve{K}$ et sont munis d'une donnée de descente naturelle (mais pas effective), d'où une action du groupe de Weil W_K. Toutes ces actions commutent entre elles. Nous chercherons à comprendre le lien entre ces actions sur la cohomologie de ces espaces.

1.4 Espace symétrique de Drinfeld

En quelque sorte, le "jumeau" de l'espace de Lubin-Tate est l'espace de Drinfeld, i.e. l'espace rigide $\mathbb{H}^d_K$ dont les C-points sont donnés par

$$\mathbb{H}^d_K(C) = \mathbb{P}^d_K(C) \backslash \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H,$$

où $\mathcal{H}$ est l'ensemble des hyperplans K-rationnels de $\mathbb{P}^d_K$. Il s'agit d'un espace Stein qui admet un modèle entier semistable $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_K}$, construit par Deligne.

Dans un article fondamental de Drinfeld [Dri76] il a été montré que $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_K}$ classifie aussi des déformations par quasi-isogénies d'un groupe formel sur $\mathbb{F}$ (qui n'est plus de dimension 1, comme pour les espaces de Lubin-Tate) muni d'une action de $\mathcal{O}_D$, l'ordre maximal de D. On dispose donc d'un $\mathcal{O}_D$-module formel universel $\mathfrak{X}$ sur $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}}}$ et on peut construire comme du côté Lubin-Tate une tour des revêtements en fibre générique

$$\Sigma^n := (\mathfrak{X}[\Pi_D^n] \backslash \mathfrak{X}[\Pi_D^{n-1}])^{rig}$$

avec Π_D une uniformisante de D et $\mathfrak{X}[\Pi_D^n]$ les points de Π_D^n-torsion de $\mathfrak{X}$. Le groupe $\mathcal{O}_D^*$ permute les points de Π_D^n-torsion et $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$ s'identifie au groupe de quasi-isogénies de $\mathfrak{X}$ [1]. On a ainsi une action de trois groupes $\mathcal{O}_D^*$, $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$ et W_K sur la tour des revêtements. Là encore, si on remplace $\mathbb{H}^d_K$ par une réunion disjointe dénombrable de copies de $\mathbb{H}^d_K$, on obtient une action de $D^* \times \mathrm{GL}_{d+1}(K) \times W_K$.

1. Il s'agit aussi de l'action naturelle sur $\mathbb{H}^d_K \subset \mathbb{P}^d_K$

1.5 Cohomologie étale l-adique

Il a été conjecturé par Carayol dans [Car90] que la cohomologie l–adique des tours de Drinfeld et de Lubin–Tate réalise la correspondance de Langlands locale ainsi que la correspondance de Jacquet–Langlands, au moins pour les représentations supercuspidales. Cette conjecture a été démontrée dans les travaux de [Har97], [Boy99], [HT01]. Les formules des traces de Lefschetz et d'Arthur-Selberg jouent un rôle crucial dans les preuves de ces résultats, qui sont de nature globale. En effet, les objets étudiés, qui sont de nature purement locale, sont reliés à des espaces géométriques globaux. Ainsi, les espaces de la tour de Lubin-Tate peuvent s'interpréter comme des complétions formelles de certaines variétés de Shimura en des points supersinguliers. Par exemple, pour le cas des courbes modulaires, se donner une déformation d'une courbe elliptique supersingulière revient à se donner une déformation du groupe de Barsotti–Tate associé et donc un objet du problème modulaire représenté par LT^0. Du côté Drinfeld, certaines variétés de Shimura peuvent être uniformisés par les espaces Σ^n d'après le théorème de Cerednick–Drinfeld. Ensuite, les cycles proches, outils propres à la cohomologie étale, permettent d'étudier la cohomologie de la tour de Lubin-Tate via celle de la variété de Shimura associé.

Nous pouvons alors nous demander quelles correspondances peuvent être réalisées par d'autres théories cohomologiques et si nous pouvons les établir par des arguments purement locaux. Pour la cohomologie p-adique, nous pourrons alors espérer établir une correspondance de Langlands locale p-adique. La cohomologie p-adique la plus simple et la plus naturelle est celle de de Rham. Son défaut est qu'elle ne possède pas d'action naturelle du groupe de Weil, mais elle reste parfaitement intéressante pour l'étude de la correspondance de Jacquet-Langlands. Malheureusement, les méthodes l–adiques ne semblent pas d'adapter pour son étude et seuls quelques cas particuliers sont connus suivant la dimension d de l'espace et le niveau n.

1.6 Dimension 1

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons en niveau n quelconque et nous nous intéressons aux petites dimensions. Seul le cas des courbes est bien compris [DLB17], [CDN20]. La cohomologie de de Rham de la tour de Drinfeld pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est calculée dans [DLB17] en utilisant des méthodes globales et la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Avec une méthode différente, ce résultat est étendu à $\mathrm{GL}_2(K)$ (où l'on ne dispose plus d'une correspondance de Langlands p-adique) et l'on obtient aussi une description de la cohomologie de de Rham de la tour de Lubin-Tate (via un théorème de comparaison avec la tour de Drinfeld). Il est montré dans [CDN20] que la cohomologie étale p-adique de Σ^n encode aussi la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, d'une manière parfaitement similaire à ce qui passe en l-adique.

1.7 Le niveau 0

1.7.1 Cohomologie étale l-adique et de de Rham

Maintenant, raisonnons en dimension quelconque et étudions les espaces de déformations suivant leur niveau n. La géométrie du niveau 0 est bien comprise et explicite et celle du niveau 1 reste encore accessible. Nous doutons qu'il soit possible d'étendre aux niveaux supérieurs les méthodes que nous allons présenter.

Commençons par le niveau 0. Dans ce cas on ne peut pas espérer étudier la correspondance de Jacquet–Langlands car seul le groupe de quasi-isogénies du groupe formel agit non–trivialement. Toutefois la représentation obtenue est primordiale du côté Drinfeld pour comprendre la géométrie du niveau 1. Du côté Lubin-Tate, l'espace considéré est une boule rigide ouverte dont la cohomologie est facile à déterminer.

Du côté Drinfeld, on utilise de manière clé l'existence d'un modèle entier semi-stable $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_K}$ construit par Deligne et le fait que la fibre générique admet une compactification naturelle $\mathbb{P}^d_K$. En particulier, ces observations ont permis à Schneider et Stuhler le calcul de la cohomologie de de Rham et la cohomologie étale l-adique dans [SS91]. En fait, ces méthodes s'appliquent à toute théorie cohomologique sur la catégorie des espaces analytiques lisses, vérifiant certains axiomes abstraits, la plus importante étant l'axiome d'homotopie (i.e. la projection $X \times \mathring{\mathbb{B}}^1 \to X$ induit un isomorphisme $\mathrm{H}^*(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(X \times \mathring{\mathbb{B}}^1)$). On demande aussi que l'espace projectif $\mathbb{P}^d_K$ ait pour cohomologie

$$\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^d_K) = \begin{cases} A & \text{Si } i = 2k \in [\![0, 2d]\!] \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

pour un anneau artinien A fixé. La cohomologie de de Rham resp. étale l-adique vérifient ces hypothèses quand $A = K$ resp. $A = \mathbb{Q}_l$.

Si on note $(\mathcal{T}^{(k)}_\bullet)$ la suite de complexes simpliciaux donnée par

$$\mathcal{T}^{(k)}_r = \{(W_0, \cdots, W_r)\ K-\mathrm{ev} : \{0\} \neq W_0 \subseteq \cdots \subseteq W_r \subseteq (K^{d+1})^*, \dim(W_r) \leq k\}$$

et si on note

$$\mathrm{St}_k(A) := \tilde{\mathrm{H}}^{k-1}_{\mathrm{Simp}}(|\mathcal{T}^{(k)}_\bullet|, A)$$

son homologie simpliciale relative, le résultat principal de [SS91] établit un isomorphisme G–équivariant

$$\mathrm{H}^k(\mathbb{H}^d_K) \cong \mathrm{St}_k(A)^\vee$$

où $\mathrm{St}_k(A)^\vee$ est le A-dual algébrique $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{St}_k(A), A)$.

Notons que Iovita-Spiess [IS01] ont donné une interpretation explicite de cet isomorphisme en termes de distributions. Par exemple, le dual de la représentation Steinberg de degré 1 peut s'interpréter comme l'espace des mesures de masse totale 0 sur $\mathcal{H}^2$. Le calcul de de Shalit [DS01] quant à lui relie la cohomologie de de Rham à des fonctions harmoniques sur l'immeuble de Bruhat-Tits. Enfin, les cohomologies étale p-adique et pro-étale p-adique ont été déterminées dans [CDN], par des arguments complètement différents de théorie de Hodge p-adique.

1.7.2 Représentation Steinberg à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et fonctions inversibles

Le calcul précédent montre que les représentations $\mathrm{St}_k(K)^\vee$ et $\mathrm{St}_k(\mathbb{Q}_l)^\vee$ sont des invariants cohomologiques pour l'espace symétrique de Drinfeld. Nous aimerions comprendre quelles théories cohomologiques pourraient être décrites par $\mathrm{St}_k(A)^\vee$ pour un anneau artinien quelconque. Plus généralement, on peut définir pour tout anneau quelconque A la représentation Steinberg via la cohomologie du complexe simplicial $\mathcal{T}^{(k)}_\bullet$. Quelle interprétation donner à l'objet $\mathrm{St}_k(A)^\vee$? Par exemple quand $A = \mathbb{Z}$, la représentation $\mathrm{St}_k(\mathbb{Z})^\vee$ fournirait une $\mathbb{Z}$–structure à $\mathrm{St}_k(K)^\vee$ et à $\mathrm{St}_k(\mathbb{Q}_l)^\vee$, donc aux cohomologies l–adique et de de Rham de $\mathbb{H}^d_K$. Le premier résultat de cette thèse fournit une telle interprétation quand $k = 1$.

Théorème A. *On a un isomorphisme G–équivariant :*

$$\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_K)/K^* \cong \mathrm{St}_1(\mathbb{Z})^\vee$$

où $\mathscr{O}^*$ désigne le faisceau des fonctions inversibles.

En nous inspirant des méthodes de Iovita–Spiess, on construit un morphisme G-équivariant $\alpha : \mathrm{St}_1(\mathbb{Z})^\vee \to \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_K)/K^*$ compatible avec les isomorphismes $\beta : \mathrm{St}_1(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\vee \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_K \otimes$

$C, \mu_l)$ et $\gamma : \mathrm{St}_1(K)^\vee \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_{K,L})$ de Iovita–Spiess décrit dans la section précédente, i.e. on dispose de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{St}_1(\mathbb{Z})^\vee & \xrightarrow{\alpha} & \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_K)/K^* \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\kappa}} \\ \mathrm{St}_1(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\vee & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_K \otimes C, \mu_l) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{St}_1(\mathbb{Z})^\vee & \xrightarrow{\alpha} & \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_K)/K^* \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d\log} \\ \mathrm{St}_1(K)^\vee & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_K) \end{array}$$

avec $\overline{\kappa}$ le morphisme de bord dans la suite exacte longue de Kummer. Le reste de l'argument consiste à prouver que seul un isomorphisme peut s'inscrire dans de tels diagrammes. Plus précisément, en utilisant la théorie des résidus de de Shalit [DS01] nous montrons que l'image de α est un facteur direct. La compatibilité avec la cohomologie étale géométrique implique que le supplémentaire de l'image de α est l^∞-divisible modulo les constantes. Il s'agira alors d'établir qu'une fonction inversible l^∞-divisible dans $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_K)/K^*$ est en fait constante, ce qui se fait en utilisant la géométrie du modèle formel et le lien avec l'immeuble de Bruhat-Tits.

1.7.3 Cohomologie analytique de l'espace symétrique de Drinfeld

Le résultat précédent décrit la cohomologie analytique du faisceau $\mathbb{G}_m$ en degré 0 et nous aimerions comprendre cette cohomologie en degré supérieur. Par exemple, le premier groupe de cohomologie est isomorphe au groupe de Picard pour tout espace analytique X d'après [Ber93, proposition 4.1.10]. Nous parvenons à calculer ces groupes pour une classe plus générale d'arrangement d'hyperplan dont l'espace symétrique fait partie. En fait ce degré de généralité est essentiel pour la preuve, même dans le cas de l'espace de Drinfeld.

Introduisons quelque notations relatives à cette classe d'espaces. Soit $\mathcal{A}$ une partie fermée (par exemple une partie finie) de $\mathcal{H}$ (rappelons qu'il s'agit de l'ensemble des hyperplans K-rationnels de $\mathbb{P}^d_K$) et posons

$$\mathrm{Int}(\mathcal{A}) = \mathbb{P}^d_K \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H.$$

Alors $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ possède encore une structure naturelle d'espace rigide analytique sur K. Si L est une extension complète de K et si X est un K-espace analytique, on note $X_L = X \otimes_K L$. Soit $\mathbb{Z}[\![\mathcal{A}]\!]^0$ le sous-groupe des mesures de masse nulle de $\mathbb{Z}[\![\mathcal{A}]\!]$.

Théorème B. *Pour toute partie fermée $\mathcal{A}$ de $\mathcal{H}$ et toute extension complète L de K on a $\mathrm{H}^i_{\mathrm{an}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A})_L, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $i \geq 1$. De plus, il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathscr{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{A})_L)/L^* \simeq \mathbb{Z}[\![\mathcal{A}]\!]^0 .$$

Cela donne en particulier une autre preuve du théorème A. L'ingrédient technique principal de la preuve est un résultat d'annulation de van der Put [VdP82], qui affirme que pour tout $r \in p^{\mathbb{Q}}$ le faisceau $\mathscr{O}^{(r)}$ des fonctions de norme spectrale strictement plus petite que r est acyclique sur les boules fermées et les polycouronnes de dimension arbitraire. Pour se ramener à ce type d'espaces nous utilisons les constructions géométriques de Schneider et Stuhler [SS91]. Plus précisément, l'espace $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ possède un recouvrement de type Stein par des affinoïdes $\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)$ obtenus en enlevant de $\mathbb{P}^d_K$ les tubes ouverts d'épaisseur $|\varpi|^n$ autour des hyperplans dans $\mathcal{A}$. Cela nous amène à étudier la géométrie d'un arrangement tubulaire

$$X_I = \mathbb{P}^d_K \setminus \bigcup_{i \in I} H_i(|\varpi|^n),$$

où $H_i(|\varpi|^n)$ est le voisinage tubulaire ouvert d'épaisseur $|\varpi|^n$ de l'hyperplan H_i. Nous allons supposer que ces voisinages tubulaires sont deux à deux distincts. Suivant Schneider et Stuhler,

pour comprendre la géométrie de X, il s'agit de comprendre la géométrie des espaces de la forme

$$Y_J = \mathbb{P}^d_K \setminus \bigcap_{j\in J} H_j(|\varpi|^n)$$

avec $J \subset I$. Le point essentiel est que les espaces Y_J sont des fibrations localement triviales en boules fermées au-dessus d'espaces projectifs (dont la dimension dépend de la combinatoire des hyperplans). Cela permet d'utiliser les résultats d'annulation de van der Put et nous ramène à l'étude de certains complexes de Cech relativement explicites. Pour transférer l'étude des faisceaux sur les Y_J à X_I nous montrons un lemme combinatoire (essentiellement basé sur la suite de Mayer-Vietoris), qui remplace la suite spectrale utilisée par Schneider et Stuhler (et dont l'étude devient assez compliquée dans notre situation). Cela permet de démontrer que les faisceaux $\mathscr{O}^{(r)}$ sont acycliques sur X_I. Un argument basé sur le logarithme tronqué permet d'en déduire l'acyclicité du faisceau $\mathscr{O}^{**} = 1 + \mathscr{O}^{++}$ des fonctions f vérifiant $|f-1| < 1$ sur les X_I. Enfin, l'étude du quotient $\mathbb{G}_m/\mathscr{O}^{**}$ fait apparaître des complexes de Cech identiques à ceux apparaissant en géométrie algébrique, ce qui permet de passer de $\mathscr{O}^{**}$ à $\mathbb{G}_m$.

Le paragraphe précédent explique la preuve de l'acyclicité de $\mathbb{G}_m$ sur les espaces X_I. Le passage de ces espaces à $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ n'est pas trivial et représente en fait le coeur technique du calcul. Pour expliquer la difficulté, notons que l'on dispose d'un recouvrement Stein $\mathrm{Int}(\mathcal{A}) = \cup_{n\geq 1} X_{I_n}$, où les X_{I_n} sont des espaces du même type que ceux introduits ci-dessus, les I_n étant des ensembles finis, de plus en plus grands. On en déduit une suite exacte

$$0 \to \mathrm{R}^1 \varprojlim_n \mathrm{H}^{s-1}_{\mathrm{an}}(X_{I_n}, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}), \mathbb{G}_m) \to \varprojlim_n \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X_{I_n}, \mathbb{G}_m) \to 0.$$

Pour $s > 1$ cela permet de démontrer l'annulation de $\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m)$, mais pour $s = 1$ il s'agit de démontrer que

$$R^1 \varprojlim_n \mathscr{O}^*(X_{I_n}) = 0.$$

Pour cela, on se ramène à démontrer le même résultat avec le faisceau $\mathscr{O}^{**}$ à la place de $\mathbb{G}_m$. Le point crucial à démontrer est alors une version en dimension quelconque du lemme 1.12 de [CDN20], qui permet de comprendre la flèche de restriction $\mathscr{O}^{**}(X_{I_{n+1}}) \to \mathscr{O}^{**}(X_{I_n})$. Plus précisément, nous montrons qu'il existe une constante c telle que pour tout n et tout $f \in \mathscr{O}^{**}(X_{I_{n+c}})$ on a $f - 1 \in \varpi\mathscr{O}^{++}(X_{I_n})$. C'est le point le plus délicat et la preuve en est assez indirecte car nous n'avons pas de description explicite des groupes $\mathscr{O}^{**}(X_{I_n})$.

1.8 Le niveau 1

1.8.1 Cohomologie l–adique

En niveau 1, le calcul de la cohomologie l-adique (pour la partie supercuspidale) a été fait par voie purement locale dans les thèses de Yoshida [Yos10] du côté Lubin–Tate et de Wang [Wan14a] du côté Drinfeld. Ces travaux se basent sur une étude fine de la géométrie de ces revêtements. L'une des difficultés principales est de trouver un modèle entier convenable pour ces espaces. Du côté Lubin–Tate, un modèle semi-stable (généralisé) a pu être construit. Ce n'est pas le cas du côté Drinfeld et l'astuce est de transférer les questions du niveau 1 au niveau 0, qui lui admet un modèle semi-stable. Ce jeu est possible côté Drinfeld car le revêtement en fibre générique est cyclique d'ordre premier à p.

Dans tous les cas, on exhibe des ouverts de Σ^1 et LT^1 admettant un modèle lisse dont la fibre spéciale est isomorphe à une variété de Deligne–Lusztig. Ensuite on montre que ces ouverts capturent toute la cohomologie des espaces étudiés grâce à des résultats profonds sur les cycles évanescents et les cycles proches de Zheng [Zhe08] et Saito [Sai93] (voir aussi [Dat12]). Ainsi la cohomologie des espaces de déformations est liée à celle des variétés de Deligne–Lusztig, dont on sait qu'elles vérifient les bonnes correspondances.

1.8.2 Cohomologie de de Rham du côté Drinfeld

Nous allons maintenant pouvoir énoncer le résultat principal de cette thèse, qui établit un résultat analogue de celui de Haoran Wang pour la cohomologie de de Rham. Notons que le cas de la dimension 1 et du niveau 1 a déjà été étudié par Lue Pan dans [Pan17]. Il réussit en particulier à construire un modèle entier semi-stable du premier revêtement grâce à une étude plus approfondie du problème modulaire associé valable uniquement en dimension 1.

Introduisons d'abord quelques notations. Le groupe de Galois du revêtement $\Sigma^1 \to \mathbb{H}^d_{\breve{K}}$ est $\mathbb{F}^*_{q^{d+1}}$, un groupe cyclique d'ordre premier à p (ce qui jouera un rôle fondamental par la suite). Soit $\theta : \mathbb{F}^*_{q^{d+1}} \to C^*$ un caractère *primitif* de ce groupe, i.e. qui ne se factorise pas par la norme $\mathbb{F}^*_{q^{d+1}} \to \mathbb{F}^*_{q^e}$ pour tout diviseur e de $d+1$, différent de $d+1$. On peut associer à θ les objets suivants :

- une représentation de Deligne-Lusztig (ou de Green) $\overline{\pi}_\theta$ du groupe $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q)$.
- une représentation de D^*
$$\rho(\theta) := \mathrm{ind}_{\mathcal{O}_D^* \varpi^{\mathbb{Z}}}^{D^*} \theta.$$
- une représentation de $G := \mathrm{GL}_{d+1}(K)$
$$\mathrm{JL}(\rho(\theta)) := \text{c-ind}_{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\varpi^{\mathbb{Z}}}^{G} \overline{\pi}_\theta.$$

La notation est bien entendu inspirée par la correspondance de Jacquet-Langlands pour les représentations supercuspidales de niveau 0 et de caractère central trivial sur $\varpi^{\mathbb{Z}}$. Enfin, nous nous intéresserons à deux autres problèmes modulaires $\mathcal{M}^1_{Dr}$ et $\mathcal{M}^0_{Dr}$ isomorphes non canoniquement à $\Sigma^1 \times \mathbb{Z}$ et $\mathbb{H}^d_{\breve{K}} \times \mathbb{Z}$ sur lesquels s'étendent les actions de G et D^*. Le résultat est alors :

Théorème C. *Pour tout caractère primitif $\theta : \mathbb{F}^*_{q^{d+1}} \to C^*$ il existe des isomorphismes de G-représentations*
$$\mathrm{Hom}_{D^*}(\rho(\theta), \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR},c}((\mathcal{M}^1_{Dr,C}/\varpi^{\mathbb{Z}}))) \cong \begin{cases} \mathrm{JL}(\rho(\theta))^{d+1} & \text{si } i = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Expliquons les difficultés qu'il faut surmonter pour prouver ce théorème. La principale est l'absence d'un modèle semi-stable (ou semi-stable généralisé, cf. ci-dessous) de l'espace $\mathcal{M}^1_{Dr}$, alors que l'on dispose d'un tel modèle (construit par Deligne) $\widehat{\mathcal{M}}^0_{Dr}$ pour $\mathcal{M}^0_{Dr}$. L'interprétation modulaire de $\widehat{\mathcal{M}}^0_{Dr}$ fournit un $\mathcal{O}_D$-module formel special universel $\mathfrak{X}$ sur $\widehat{\mathcal{M}}^0_{Dr}$. Si Π_D est une uniformisante de $\mathcal{O}_D$, alors $\mathfrak{X}[\Pi_D]$ est un schéma formel en $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels de Raynaud, et on connait [Ray74] la classification de ces objets. De plus, $\widehat{\mathcal{M}}^1_{Dr}$ est directement relié à $\mathfrak{X}[\Pi_D]$ (c'est l'espace obtenu en analytifiant $\mathfrak{X}[\Pi_D] \setminus \{0\}$).

En utilisant les observations ci-dessus, on peut étudier certains ouverts de l'espace $\mathcal{M}^1_{Dr}$, qui admettent un modèle lisse dont la fibre spéciale est isomorphe à une variété de Deligne-Lusztig (cette observation cruciale a été faite en premier par Teitelbaum [Tei90] quand $d = 1$ et a été généralisée par Wang [Wan14a]). La difficulté est alors de montrer que l'étude de ces ouverts suffit pour comprendre la cohomologie de l'espace tout entier. En cohomologie l-adique, cela se fait par une étude délicate des cycles évanescents pour relier des questions sur $\mathcal{M}^1_{Dr}$ à des questions sur la fibre spéciale et plus particulièrement, sur la variété de Deligne-Lusztig. Ces méthodes sont propres à la cohomologie l-adique et pour surmonter cet obstacle, nous avons besoin du résultat suivant, qui est l'un des points les plus techniques de ce travail, mais dont l'énoncé demande quelques préliminaires.

Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel sur $\mathcal{O}_K$, localement de type fini. On dit que $\mathcal{X}$ est de réduction semi-stable généralisée si Zariski-localement sur $\mathcal{X}$ on peut trouver un morphisme étale vers $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K\langle X_1, ..., X_n\rangle/(X_1^{\alpha_1}...X_r^{\alpha_r} - \varpi)$ pour certains $r \leq n$ et $\alpha_i \geq 1$ (ou ϖ est une uniformisante de K). Si l'on peut choisir les α_i égaux à 1, on parle de réduction semi-stable.

Théorème D. *Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel de réduction semi-stable généralisée, $\mathcal{X}_s = \bigcup_{i\in I} Y_i$ la décomposition en composantes irréductibles de la fibre spéciale et $\pi : \mathcal{T} \to \mathcal{X}_\eta$ un revêtement étale en fibre générique de groupe de Galois $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \wedge p = 1$. Si $\mathcal{T} = \mathcal{X}_\eta$ ou bien $\mathcal{X}$ est de réduction semi-stable et $\mathcal{T}$ est quelconque, alors pour toute partie finie J de I on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]Y_J[_{\mathcal{X}})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]Y_J \setminus \bigcup_{i\notin J} Y_i[_{\mathcal{X}}))$$

où $Y_J = \bigcap_{j\in J} Y_j$.

Le cas $n = 1$ et $\mathcal{X}$ semi-stable (non généralisé) est dû à Grosse-Klönne [GK02]. On a un analogue en cohomologie étale l-adique en termes de cycles évanescents quand $\mathcal{X}$ est algébrisable et $|J| = n = 1$ démontré par Zheng [Zhe08] (voir aussi la généralisation par Dat [Dat12]). Nous aurons besoin uniquement du cas où $\mathcal{X}$ est semi-stable ici (par contre il est indispensable de travailler avec J et $\mathcal{T}$ quelconques), mais le cas semi-stable généralisé devrait être utile pour l'étude du premier revêtement de l'espace de Lubin-Tate.

Au vu de la description de la géométrie de $\mathcal{M}^1_{Dr}$ et du théorème D, nous pouvons établir :

Théorème E. *Soit θ un caractère primitif de $\mathbb{F}^*_{q^{d+1}}$ et notons $\mathcal{BT}_0$ l'ensemble des sommets de l'immeuble de Bruhat-Tits semi-simple de G. On a des isomorphismes*

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR},c}(\Sigma^1)[\theta] \cong \bigoplus_{s\in\mathcal{BT}_0} \mathrm{H}^i_{\mathrm{rig},c}(\mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}/\breve{K})[\theta]$$

où $\mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}$ est la variété de Deligne-Lusztig introduite dans 7.1.

Le théorème principal C découlera alors de la théorie de Deligne-Lusztig que nous rappelons dans la partie 7.2.

Pour obtenir cet énoncé, nous nous intéressons au recouvrement $\Sigma^1 = \bigcup_i \pi^{-1}(]Y_i[)$ où Y_i parcourt l'ensemble des composantes irréductibles du modèle semi-stable $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}}}$. Par suite spectrale de Cech, on se ramène à étudier les espaces $\pi^{-1}(]Y_J[)$ et donc (par le théorème ci-dessus) les espaces $\pi^{-1}(]Y_J \setminus \bigcup_{i\notin J} Y_i[)$. Quand l'ensemble J est un singleton, la cohomologie de de Rham du tube $\pi^{-1}(]Y_J[)$ est isomorphe à la cohomologie rigide d'une variété de Deligne–Lusztig grâce aux travaux de Wang [Wan14a] et Teitelbaum [Tei90]. Quand l'ensemble J n'est pas un singleton, nous raisonnons différemment de Wang pour prouver l'égalité $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]Y_J[))[\theta] = 0$. En fait, d'après les résultats obtenus au niveau 0 (calcul des fonctions inversibles et annulation du groupe de Picard), on montre que $\pi : \Sigma^1 \to \mathbb{H}^d_{\breve{K}}$ et un revêtement de type Kummer pour une section inversible que nous calculons. Cela caractérise l'espace Σ^1 muni de l'action de $\mathbb{F}^*_{q^{d+1}}$. Nous obtiendrons alors une description explicite du tube $\pi^{-1}(]Y_J \setminus \bigcup_{i\notin J} Y_i[)$ pour laquelle il sera aisé de prouver l'annulation de la cohomologie voulue.

2 Préliminaires

2.1 Conventions générales

On fixe dans tout ce qui va suivre un nombre premier p et une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$, dont on note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers, ϖ une uniformisante et $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ le corps résiduel. On note $C = \widehat{\overline{K}}$ le complété d'une clôture algébrique de K et $\breve{K}$ le complété de l'extension maximale non ramifiée de K. Soit $L \subset C$ une extension complète de K, susceptible de varier, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_L$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_L$ et de corps résiduel κ.

Soit S un L-espace rigide analytique. On note $\mathbb{A}^n_{rig,S}$ (respectivement $\mathbb{P}^n_{rig,S}$) l'espace affine (resp. projectif) rigide analytique de dimension relative n sur S. Si $s=(s_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de nombres rationnels, le polydisque rigide fermé sur S de polyrayon $(|\varpi|^{s_i})_i$ sera noté $\mathbb{B}^n_S(|\varpi|^s)$ ou $\mathbb{B}^n_S(s)$ par abus. L'espace $\mathbb{B}^n_S$ sera la boule unité et les boules ouvertes seront notées $\mathring{\mathbb{B}}^n_S$ et $\mathring{\mathbb{B}}^n_S(s)$. Si S est maintenant un schéma, $\mathbb{A}^n_{zar,S}$ sera l'espace affine sur S et $\mathbb{P}^n_{zar,S}$ l'espace projectif.

Si X est un L-espace analytique réduit, on note $\mathscr{O}_X^+$ le faisceau des fonctions à puissances bornées, $\mathscr{O}_X^{++}$ le faisceau des fonctions topologiquement nilpotentes, $\mathscr{O}_X^{(r)}$ le faisceau des fonctions bornées strictement en norme par r. Si $X=\mathrm{Sp}(L)$, on écrit $\mathcal{O}_L^{(r)}=\mathscr{O}_X^{(r)}(X)$. On note $\mathscr{O}_X^{**}$ le faisceau $1+\mathscr{O}_X^{++}$ et $\mathscr{O}^{**}_{X,k}=1+\varpi^k\mathscr{O}_X^{++}$.

Si X est un L-espace analytique et si $F\subset\mathscr{O}(X)$ est une famille finie de fonctions analytiques sur X et g une autre fonction analytique, on note

$$X\left(\frac{F}{g}\right)=\{x\in X|\,\forall f\in F,|f(x)|\leq|g(x)|\}\,,\ X\left(\frac{g}{F}\right)=\{x\in X|\,\forall f\in F,|g(x)|\leq|f(x)|\}\,.$$

De même, $X\left(\left(\frac{F}{g}\right)^{\pm1}\right)$ ou $X\left(\frac{F}{g},\frac{g}{F}\right)$ désignera $\{x\in X|\,\forall f\in F,|f(x)|=|g(x)|\}$. Pour $s\in|C^*|$ on note $X\left(\frac{F}{s}\right)=\{x\in X|\,\forall f\in F,|f(x)|\leq s\}$ (idem pour $X\left(\frac{s}{F}\right)$).

Les éléments de la base canonique de $\mathbb{Z}^n$ seront notés $(\delta_i)_i$. Si $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $\alpha\in\mathbb{Z}^n$ et $A\in\mathrm{M}_{k,n}(\mathbb{Z})$, nous adopterons la notation multi-indice, i.e. $x^\alpha=\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ et $x^A=(x^{A\delta_i})_{1\leq i\leq k}$.

2.2 Cohomologie étale et torseurs

Si X est un espace analytique sur L (resp. un schéma), la cohomologie d'un faisceau $\mathscr{F}$ sur le site analytique (resp. de Zariski) sera notée $\mathrm{H}^*_{\mathrm{an}}(X,\mathscr{F})$ (resp. $\mathrm{H}^*_{\mathrm{zar}}(X,\mathscr{F})$). Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement de X (pour une des topologies précédemment nommées), la cohomologie de Cech de X pour le faisceau $\mathscr{F}$ par rapport au recouvrement $\mathcal{U}$ sera notée $\check{\mathrm{H}}^*(X,\mathscr{F},\mathcal{U})$ et le complexe de cochaînes sera noté $\check{\mathcal{C}}^*(X,\mathscr{F},\mathcal{U})$. Pour toutes ces théories cohomologiques, quand $U\subset X$ est un ouvert de X, la cohomologie à support dans le complémentaire de U sera notée $\mathrm{H}^*(X,U)$. Soit n premier à p, on identifie $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X,\mu_n)$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de μ_n-torseurs sur X (i.e. des revêtements galoisiens $\pi:\mathcal{T}\to X$ de groupe de Galois μ_n). On note $[\mathcal{T}]$ la classe d'isomorphisme du torseur $\mathcal{T}$, vue comme un élément de $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X,\mu_n)$. Si $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ sont des μ_n-torseurs sur X, alors $\mathcal{T}_1\times_X\mathcal{T}_2\to X$ est un revêtement de groupe de Galois μ_n^2 et en notant $H\subset\mu_n^2$ l'antidiagonal, le quotient $\mathcal{T}_3=\mathcal{T}_1\times_X\mathcal{T}_2/H$ est un revêtement de X de groupe de Galois $H\cong\mu_n$ et $[\mathcal{T}_1]+[\mathcal{T}_2]=[\mathcal{T}_3]$. Il est à remarquer que $\mathcal{T}_1\times_X\mathcal{T}_2$ est encore un revêtement de $\mathcal{T}_3$ de groupe de Galois μ_n.

Le morphisme de Kummer sera noté $\kappa:\mathscr{O}^*(X)\to\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X,\mu_n)$. Le torseur $\delta(u)$ associé à une fonction inversible u sur X sera noté $\pi:X(u^{1/N})\to X$ (il est donc bien défini à isomorphisme près). Si $U\subset X$ est un ouvert affinoïde, alors

$$\pi_*\mathscr{O}_{X(u^{1/N})}(U)\simeq\mathscr{O}_X(U)[t]/(t^N-u).$$

Si de plus X est muni d'une action d'un groupe G, un μ_n-torseur $\mathcal{T}\to X$ est G-invariant si pour tout g dans G, on a un isomorphisme de μ_n-torseurs, $g^{-1}\mathcal{T}\xrightarrow{\sim}\mathcal{T}$. Le groupe des torseurs G-invariants s'identifie à $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X,\mu_n)^G$. Nous dirons que $\mathcal{T}$ est G-équivariant si les isomorphismes $g^{-1}\mathcal{T}\xrightarrow{\sim}\mathcal{T}$ induisent une action de G sur $\mathcal{T}$ qui commute avec le revêtement. On a deux notions d'équivalence sur les torseurs G-équivariants. $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont faiblement équivalents si on a un isomorphisme de μ_n-torseurs $\mathcal{T}\xrightarrow{\sim}\mathcal{T}'$ et fortement équivalents s'il est de plus G-équivariant. On note $\mathrm{Tors}^{(G)}(X)$ l'ensemble des μ_n-torseurs G-équivariants à équivalence forte près. Le résultat suivant explicite le lien entre ces notions.

Proposition 2.1. *On a une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(G, \mu_n(X)) \to \mathrm{Tors}^{(G)}(X) \xrightarrow{\beta} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X, \mu_n)^G \xrightarrow{\gamma} \mathrm{H}^2_{\mathrm{Gal}}(G, \mu_n(X))$$

Démonstration. Décrivons d'abord les flèches β et γ. Le morphisme β est simplement l'oubli de l'action de G. Pour γ, prenons $\pi : \mathcal{T} \to X$ un torseur G-invariant et des isomorphismes $\rho_g : g^{-1}\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$. On considère

$$(g, h) \in G^2 \mapsto \rho_{gh} \circ (\rho_h \circ h^{-1}\rho_g)^{-1}$$

C'est un cocycle d'ordre 2 qui est un cobord si et seulement si les isomorphismes ρ_g peuvent être modifiés pour induire une action de G sur $\mathcal{T}$. Cela prouve l'exactitude en $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X, \mu_n)^G$.

Pour terminer la preuve, il suffit de décrire le noyau de β. Ce groupe classifie les actions de G qui commutent à μ_n sur le torseur trivial $\pi : X(1^{1/n}) \to X$. Prenons $t \in \mathscr{O}^*(X(1^{1/n}))$ tel que $t^n = 1$, on a la décomposition en parties isotypiques $\pi_* \mathscr{O}_{X(1^{1/n})} = \bigoplus t^i \mathscr{O}_X$. Une action de G sera $\mathscr{O}_X$-linéaire et sera donc déterminée par sa restriction sur t. Si de plus cette dernière commute avec celle de μ_n, on pourra trouver des fonctions inversibles λ_g pour tout g telles que $g.t = \lambda_g t$. Mais on a $(g.t)^n = 1$ donc $g \mapsto \lambda_g$ définit un cocycle de degré 1 de $\mu_n(X)$ qui est un cobord si et seulement si l'action est triviale. Ceci prouve l'exactitude à gauche. □

Nous finissons par décrire les composantes connexes géométriques d'un μ_n-torseur.

Proposition 2.2. *Soit $X = \mathrm{Sp}(A)$ un C-affinoïde lisse connexe et $u \in A^*$. Soit π_0 le plus grand diviseur de n pour lequel u possède une racine π_0-ième dans A. Alors $X(u^{1/n})$ possède π_0 composantes connexes.*

Démonstration. On se ramène facilement au cas $\pi_0 = 1$, et l'on veut montrer que $A[T]/(T^n - u)$ est intègre dans ce cas. Puisque $T^n - u$ est unitaire, $A[T]/(T^n - u)$ s'injecte dans $M[T]/(T^n - u)$, où M est le corps des fractions de A (notons que A est intègre par hypothèse). Il suffit donc de montrer que M est un corps, i.e. que $T^n - u$ est irréductible dans $M[T]$. Soit $P \in M[T]$ un facteur irréductible unitaire et k son degré. Soit t une racine n-ième de u dans une clôture algébrique de M. Alors $T^n - u = \prod_{\zeta \in \mu_n(C)}(T - t\zeta)$, donc P est un produit de k facteurs de la forme $T - \zeta t$. Puisque $P(0) \in M$, on obtient $t^k \in M$. Puisque $(t^k)^n = u^k \in A^*$ et A est normal, on en déduit que $t^k \in A^*$ et donc $t^{\mathrm{pgcd}(n,k)} \in A^*$. L'hypothèse $\pi_0 = 1$ force alors $\mathrm{pgcd}(n, k) = n$ et donc $k = n$ et $P = T^n - u$.

□

2.3 Cohomologie de De Rham et torseurs

Si X est un affinoïde sur L, on notera $X^\dagger$ l'espace surconvergent associé. Si $X^\dagger$ est un espace surconvergent lisse, d'espace rigide analytique sous-jacent X, on note $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X)$ et $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X^\dagger)$ les hypercohomologies des complexes de de Rham $\Omega^\bullet_{X/L}$ et $\Omega^\bullet_{X^\dagger/L}$. Par [GK00, Proposition 2.5], le théorème B de Kiehl [Kie67, Satz 2.4.2] et la suite spectrale de Hodge-de Rham, si X est Stein, ces cohomologies sont calculées directement à partir du complexe de de Rham correspondant [2]. Les deux cohomologies coïncident si X est partiellement propre (par exemple Stein).

Soit Λ un groupe abélien fini d'ordre premier à p. Soit $\pi : \mathcal{T} \to X$ Λ-torseur d'un espace analytique lisse X. On a une décomposition $\pi_* \mathscr{O}_\mathcal{T} = \bigoplus_{\chi \in \Lambda^\vee} \mathcal{L}_\chi$ où $\mathcal{L}_\chi$ est l'espace propre associé au caractère χ pour l'action de Λ (c'est un faisceau localement libre de rang 1). Le morphisme π étant étale, on a

$$\pi_* \Omega^q_{\mathcal{T}/L} = \Omega^q_{X/L} \otimes \pi_* \mathscr{O}_\mathcal{T} = \bigoplus_{\chi \in \Lambda^\vee} \Omega^q_{X/L} \otimes \mathcal{L}_\chi$$

2. En cohomologie de de Rham (non surconvergente), l'hypothèse X quasi-Stein suffit.

et de même pour le complexe surconvergent. Les différentielles des complexes de de Rham étant Λ-équivariantes, elles respectent ces décompositions en somme directe donnant lieu pour chaque χ à des complexes de cochaînes $\Omega^\bullet_{X/L}\otimes\mathcal{L}_\chi =: \Omega^\bullet_{\mathcal{T}/L}[\chi]$ et $\Omega^\bullet_{X^\dagger/L}\otimes\mathcal{L}_\chi =: \Omega^\bullet_{\mathcal{T}^\dagger/L}[\chi]$ dont les cohomologies seront notées $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T})[\chi]$ et $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}^\dagger)[\chi]$. C'est la partie isotypique associée à χ. En particulier,

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X)=\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T})^\Lambda=\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T})[1] \text{ et } \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X^\dagger)=\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}^\dagger)^\Lambda=\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}^\dagger)[1]$$

Soit $\mathcal{T}_1\to X$, $\mathcal{T}_2\to Y$ deux Λ-torseurs sur des L-espaces lisses X et Y. On obtient deux revêtements $\mathcal{T}_1\times_L Y$, $X\times_L\mathcal{T}_2$ sur $X\times_L Y$ et on construit

$$\mathcal{T}_3=((\mathcal{T}_1\times_L Y)\times_{X\times Y}(X\times_L\mathcal{T}_2))/H=(\mathcal{T}_1\times_L\mathcal{T}_2)/H$$

C'est un revêtement de $X\times_L Y$ dont la classe s'identifie à $[\mathcal{T}_1\times_L Y]+[X\times\mathcal{T}_2]$ (voir plus haut). Comme $\mathcal{T}_1\times_L\mathcal{T}_2$ est un revêtement de $\mathcal{T}_3$ étale de groupe de Galois H, on a

Proposition 2.3. *On a des isomorphismes naturels*

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_3)=\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_1\times_L\mathcal{T}_2)^H=\bigoplus_{q_1+q_2=q}\bigoplus_{\chi\in\Lambda^\vee}\mathrm{H}^{q_1}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_1)[\chi]\otimes\mathrm{H}^{q_2}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_2)[\chi]$$

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_3)[\chi]=\bigoplus_{q_1+q_2=q}\mathrm{H}^{q_1}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_1)[\chi]\otimes\mathrm{H}^{q_2}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_2)[\chi]$$

et de même pour la cohomologie de de Rham surconvergente.

2.4 Cohomologie rigide

La cohomologie rigide d'un schéma algébrique Y sur le corps résiduel κ de L sera notée $\mathrm{H}^*_{\mathrm{rig}}(Y/L)$. On rappelle la dualité de Poincaré :

Proposition 2.4. *1. Si X est un L-affinoïde lisse, pur de dimension d, alors*

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X^\dagger)\cong\mathrm{H}^{2d-i}_{\mathrm{dR},c}(X^\dagger)^\vee \text{ et } \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR},c}(X^\dagger)\cong\mathrm{H}^{2d-i}_{\mathrm{dR}}(X^\dagger)^\vee$$

2. Si X est un L-espace lisse et Stein, pur de dimension d, alors

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X)\cong\mathrm{H}^{2d-i}_{\mathrm{dR},c}(X)^\vee \text{ et } \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR},c}(X)\cong\mathrm{H}^{2d-i}_{\mathrm{dR}}(X)^\vee$$

3. Si Y est un schéma lisse sur κ, pur de dimension d, alors

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{rig}}(Y/L)\cong\mathrm{H}^{2d-i}_{\mathrm{rig},c}(Y/L)^\vee \text{ et } \mathrm{H}^i_{\mathrm{rig},c}(Y/L)\cong\mathrm{H}^{2d-i}_{\mathrm{rig}}(Y/L)^\vee$$

Démonstration. Voir [GK00, proposition 4.9] pour le premier point, [GK00, proposition 4.11] pour le second et [Ber97, théorème 2.4] pour le dernier. □

Le théorème de comparaison suivant nous sera très utile :

Théorème 2.5. *Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel affine sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$, de fibre spéciale $\mathcal{X}_s$ et de fibre générique $\mathcal{X}_\eta$. Si $\mathcal{X}_s$ est lisse, alors on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{X}^\dagger_\eta)\cong\mathrm{H}^*_{\mathrm{rig}}(\mathcal{X}_s).$$

Démonstration. Il s'agit de [GK04, proposition 3.6]. □

3 Rappels sur la géométrie de l'espace de Drinfeld

Nous rappelons quelques résultats standards concernant la géométrie de l'espace symétrique de Drinfeld en renvoyant à ([BC91, section 1], [DS01, sous-sections I.1. et II.6.], [Dat07, sous-section 3.1.], [Wan14a, sous-sections 2.1. et 2.2]) pour les détails. Nous ne traitons que les aspects combinatoires ici. Pour l'approche modulaire et la construction des revêtements, nous renvoyons à la section 6. On fixe une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$, une uniformisante ϖ de K et un entier $d \geq 1$. On note $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ le corps résiduel de K et $G = \mathrm{GL}_{d+1}(K)$.

3.1 L'immeuble de Bruhat-Tits

Notons $\mathcal{BT}$ l'immeuble de Bruhat-Tits associé au groupe $\mathrm{PGL}_{d+1}(K)$. Le 0-squelette $\mathcal{BT}_0$ de l'immeuble est l'ensemble des réseaux de K^{d+1} à homothétie près, i.e. $\mathcal{BT}_0$ s'identifie à $G/K^* \mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$. Un $(k+1)$-uplet de sommets $\sigma = \{s_0, \cdots, s_k\} \subset \mathcal{BT}_0$ est un k-simplexe de $\mathcal{BT}_k$ si et seulement si, quitte à permuter les sommets s_i, on peut trouver pour tout i des réseaux M_i avec $s_i = [M_i]$ tels que

$$M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k \supsetneq \varpi M_0.$$

La donnée d'un tel ordre sur le sommets est unique à permutation circulaire près et est déterminée par le choix du sommet s_0 que l'on appellera distingué. Nous appellerons $\widehat{\mathcal{BT}}_k$ l'ensemble des k-simplexes pointés par un sommet.

La réalisation topologique de l'immeuble sera notée $|\mathcal{BT}|$. On confondra les simplexes avec leur réalisation topologique de telle manière que $|\mathcal{BT}| = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{BT}} \sigma$. Les différents k-simplexes, vus comme des compacts de la réalisation topologique, seront appelés faces. L'intérieur d'une face σ sera noté $\mathring{\sigma} = \sigma \setminus \bigcup_{\sigma' \subsetneq \sigma} \sigma'$ et sera appelé cellule.

Fixons un simplexe pointé $\sigma \in \widehat{\mathcal{BT}}_k$ et considérons une présentation :

$$M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k \supsetneq \varpi M_0 = M_{k+1}$$

En posant

$$\overline{M}_i = M_i / \varpi M_0$$

on obtient un drapeau $\overline{M}_0 \supsetneq \overline{M}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \overline{M}_k \supsetneq \overline{M}_{k+1} = 0$ dans $\overline{M}_0 \cong \mathbb{F}_q^{d+1}$. On note

$$d_i = d + 1 - \dim_{\mathbb{F}_q}(\overline{M}_i), \ e_i = d_{i+1} - d_i.$$

Nous dirons que le simplexe σ est de type $(e_0, e_1, \cdots, e_k)$.

Considérons une base $(\overline{f}_0, \cdots, \overline{f}_d)$ adaptée au drapeau i.e. telle que $\overline{M}_i = \left\langle \overline{f}_{d_i}, \cdots, \overline{f}_d \right\rangle$ pour tout i. Pour tout choix de relevés $(f_0, \cdots, f_d)$ de $(\overline{f}_0, \cdots, \overline{f}_d)$ dans M_0, on a

$$M_i = \langle \varpi f_0, \cdots, \varpi f_{d_i - 1}, f_{d_i}, \cdots, f_d \rangle = \varpi(N_0 \oplus \cdots \oplus N_{i-1}) \oplus N_i \oplus \cdots \oplus N_k,$$

où

$$N_i = \left\langle f_{d_i}, \cdots, f_{d_{i+1}-1} \right\rangle.$$

Si $(f_0, \cdots, f_d)$ est la base canonique de K^{d+1}, nous dirons que σ est le simplexe standard de type $(e_0, e_1, \cdots, e_k)$.

Considérons la projection naturelle $M_i \setminus M_{i+1} \subset M_i \to (M_i/\varpi M_i)/\mathbb{F}^*$. On choisit un sous-ensemble R_i de $M_i \setminus M_{i+1}$ qui intersecte chaque fibre de la projection en un point. On fait de même avec $N_i \setminus \varpi N_i$ et la projection $N_i \to (N_i/\varpi N_i)/\mathbb{F}^*$, obtenant ainsi un sous-ensemble $\tilde{R}_i$ de $N_i \setminus \varpi N_i$.

3.2 L'espace des hyperplans K-rationnels

On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans K-rationnels dans $\mathbb{P}^d$. Si $a = (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{C}_p^{d+1} \backslash \{0\}$, l_a désignera l'application

$$b = (b_0, \dots, b_d) \in \mathbb{C}_p^{d+1} \mapsto \langle a, b \rangle := \sum_{0 \leq i \leq d} a_i b_i$$

Ainsi $\mathcal{H}$ s'identifie à $\{\ker(l_a),\ a \in K^{d+1} \backslash \{0\}\}$ et à $\mathbb{P}^d(K)$.

Le vecteur $a = (a_i)_i \in \mathbb{C}_p^{d+1}$ est dit unimodulaire si $\max(|a_i|) = 1$. L'application $a \mapsto H_a := \ker(l_a)$ induit une bijection entre le quotient de l'ensemble des vecteurs unimodulaires $a \in K^{d+1}$ par l'action évidente de $\mathcal{O}_K^*$ et l'ensemble $\mathcal{H}$.

L'ensemble $\mathcal{H}$ est profini car il s'identifie à $\mathbb{P}^d(K)$. Pour $a \in K^{d+1}$ unimodulaire et $n \geq 1$ on considère l'application $l_a^{(n)}$

$$b \in (\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\varpi^n)^{d+1} \mapsto \langle a, b \rangle \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\varpi^n$$

et on note

$$\mathcal{H}_n = \{\ker(l_a^{(n)}),\ a \in K^{d+1} \backslash \{0\} \text{ unimodulaire}\} \simeq \mathbb{P}^d(\mathcal{O}_K/\varpi^n).$$

Alors $\mathcal{H} = \varprojlim_n \mathcal{H}_n$ et chaque $\mathcal{H}_n$ est fini.

Nous fixons un système de représentants $S \subset \mathcal{O}_K^{d+1}$ de $\mathcal{H}$, formé de vecteurs unimodulaires. Pour tout n, on choisit $S_n \subset S \subset \mathcal{O}_K^{d+1}$ un système de représentants de $\mathcal{H}_n$ tel que $S_n \subset S_{n+1}$. Les choix des $(S_n)_n$ et de S n'auront pas d'incidence par la suite.

Soit $a \in K^{d+1}$ unimodulaire et $z \in \mathbb{P}^d(\mathbb{C}_p)$. La quantité $|l_a(b)|$ ne dépend pas du choix du représentant unimodulaire b de z, et ne dépend que de la classe de a dans $\mathbb{P}^d(K)$. Cela permet de définir les tubes fermés et ouverts de rayon $\varepsilon > 0$ autour de l'hyperplan $H = \ker(l_{a_H}) \in \mathcal{H}$ par

$$\overline{H}(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{P}_K^d, |l_{a_H}(z)| \leq \varepsilon\} \text{ et } \mathring{H}(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{P}_K^d, |l_{a_H}(z)| < \varepsilon\}$$

Les extensions des scalaires par L seront notées $\overline{H}(\varepsilon)_L$ et $\mathring{H}(\varepsilon)_L$ et les complémentaires dans $\mathbb{P}_{rig,L}^d$ seront $\overline{H}(\varepsilon)_L^c$ et $\mathring{H}(\varepsilon)_L^c$. Il est à noter que $\overline{H}(|\varpi|^n)$ (resp. $\mathring{H}(|\varpi|^n)$) ne dépendent que de la classe de H dans $\mathcal{H}_n$ (resp. $\mathcal{H}_{n+1}$).

3.3 Géométrie de l'espace symétrique

Nous allons maintenant décrire l'espace symétrique de Drinfeld $\mathbb{H}_K^d$. Il s'agit de l'espace analytique sur K dont les $\mathbb{C}_p$-points sont

$$\mathbb{H}_K^d(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^d(\mathbb{C}_p) \backslash \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H.$$

On a deux recouvrements admissibles croissants par des ouverts admissibles $\mathbb{H}_K^d = \bigcup_{n>0} \mathring{U}_n = \bigcup_{n \geq 0} \overline{U}_n$ où

$$\mathring{U}_n = \mathbb{P}_{rig,K}^d \backslash \bigcup_{a \in S_n} \overline{H}_a(|\varpi|^n) = \{z \in \mathbb{P}_{rig,K}^d : |\varpi|^{-n} > |\frac{l_a(z)}{l_b(z)}| > |\varpi|^n, \forall a \neq b \in S_n\}$$

et

$$\overline{U}_n = \mathbb{P}_{rig,K}^d \backslash \bigcup_{a \in S_{n+1}} \mathring{H}_a(|\varpi|^n) = \{z \in \mathbb{P}_{rig,K}^d : |\varpi|^{-n} \geq |\frac{l_a(z)}{l_b(z)}| \geq |\varpi|^n, \forall a \neq b \in S_{n+1}\}$$

Le recouvrement par les affinoïdes $\overline{U}_n$ est Stein. Le deuxième est cofinal et chaque $\mathring{U}_n$ est Stein. On note $\overline{U}_{n,L} = \overline{U}_n \hat{\otimes}_K L$ et $\mathring{U}_{n,L} = \mathring{U}_n \hat{\otimes}_K L$.

Il nous sera très utile pour la suite de considérer d'autres recouvrements de $\mathbb{H}^d_K$, reliés à l'application de réduction vers l'immeuble de Bruhat-Tits. On a une application G-équivariante

$$\tau : \mathbb{H}^d_K(\mathbb{C}_p) \to \{\text{normes sur } K^{d+1}\}/\{\text{homothéties}\}$$

donnée par

$$\tau(z) : v \mapsto |\sum_{i=0}^{d} z_i v_i|$$

si $z = [z_0, \cdots, z_d] \in \mathbb{H}^d_K(\mathbb{C}_p)$. L'image $\tau(z)$ ne dépend pas du représentant de z car les normes sont vues à homothétie près. Le fait de prendre le complémentaire des hyperplans K-rationnels assure que $\tau(z)$ est bien une norme sur K^{d+1}.

D'après un résultat classique de Iwahori-Goldmann [GI63] l'espace des normes sur K^{d+1} à homothétie près s'identifie bijectivement (et de manière G-équivariante) à l'espace topologique $|\mathcal{BT}|$, ce qui permet de voir τ comme une application

$$\tau : \mathbb{H}^d_K(\mathbb{C}_p) \to |\mathcal{BT}|.$$

Plus précisément, pour toute norme sur $|\cdot|$ sur K^{d+1}, on peut trouver une base $(f_i)_{0\leq i\leq d}$ de K^{d+1} telle que $|\sum_i a_i f_i| = \sup_i |a_i||f_i|$ pour tous a_i, et $|\varpi| \leq |f_{i+1}| \leq |f_i| \leq 1$ pour $i < d$. Les boules $B(0,r)$ centrées en 0 et de rayon r forment une suite croissante de réseaux et on a $B(0,|\varpi|r) = \varpi B(0,r)$. Se donner les rayons minimaux de ces réseaux entre $|\varpi|$ et 1 revient à se donner une famille de nombres $(t_i)_{0\leq i\leq k} \in]0,1[^{k+1}$ dont la somme vaut 1. En particulier, on peut associer à la norme $|\cdot|$ le point x de la cellule $\mathring{\sigma}$ de poids $(t_i)_i$ avec $\sigma = \{B(0,r)\}_r$. De plus, $|\cdot|$ est déterminée par les réseaux $B(0,r)$.

3.4 Les recouvrements par les tubes au-dessus des faces et des cellules

Soit $\sigma \in \mathcal{BT}_k$ un simplexe de type $(e_0, e_1, \cdots, e_k)$ de présentation :

$$M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k \supsetneq \varpi M_0$$

Nous chercherons à décrire

$$\mathbb{H}^d_{K,\sigma} := \tau^{-1}(\sigma),\ \mathbb{H}^d_{K,\mathring{\sigma}} := \tau^{-1}(\mathring{\sigma})$$

en suivant [DS01, Section 7.].

Comme dans 3.1, donnons-nous une base adaptée $(f_0, \cdots, f_d)$ et les objets N_i, R_i et $\tilde{R}_i$ qui s'en déduisent. Tous les vecteurs de K^{d+1} seront écrits dans cette base. Si $x = \sum_i x_i f_i$ et $y = \sum_i y_i f_i$ on note $\langle x, y\rangle = \sum_i x_i y_i$. Pour simplifier, nous allons écrire $l_i(z) = \langle z, f_{d_i}\rangle$. L'espace recherché $\mathbb{H}^d_{K,\sigma}(C)$ est l'ensemble des points $z \in \mathbb{P}^d_{rig,K}(C)$ pour lesquels l'ensemble des boules fermées de $\tau(z)$ sont contenues dans σ. Justifions l'égalité

$$\mathbb{H}^d_{K,\sigma} = \{z \in \mathbb{P}^d_{rig,K} |\, \forall a \in M_i \backslash M_{i+1}, 1 = |\frac{\langle z, a\rangle}{l_i(z)}| \text{ et } |l_0(z)| \geq \cdots \geq |l_i(z)| \geq \cdots \geq |\varpi||l_0(z)|\}$$

Par construction, les éléments f_{d_i} sont dans $M_i \backslash M_{i+1}$. Le premier jeu d'égalités garantit que tous les éléments de M_i ne rencontrant pas M_{i+1} ont même norme pour $\tau(z)$. La chaîne d'inégalités entraîne que les rayons des boules M_i sont cohérents. On n'en déduit l'inclusion en sens direct. Réciproquement, prenons z vérifiant les inégalités ci-dessus et intéressons-nous à une boule de

rayon r de $\tau(z)$ pour $|\varpi||l_0(z)| \leq r < |l_0(z)|$. Il existe un entier i pour lequel $|l_{i-1}(z)| > r \geq |l_i(z)|$. Si a est dans M_i, $r \geq |l_i(z)| \geq |\langle z, a\rangle|$. Sinon, $|\langle z, a\rangle| \geq |l_{i-1}(z)| > r$ Ainsi, $M_i = B(0, r)$ ce qui prouve l'inclusion en sens inverse.

Par ultramétrie, il suffit de vérifier ces inégalités pour un système de représentants modulo ϖ et $\mathcal{O}_K^*$. Ainsi :

$$\mathbb{H}^d_{K,\sigma} = \{z \in \mathbb{P}^d_{rig,K} | \, \forall a \in R_i,\ 1 = |\frac{\langle z, a\rangle}{l_i(z)}| \text{ et } |l_0(z)| \geq \cdots \geq |l_i(z)| \geq \cdots \geq |\varpi||l_0(z)|\}$$

Par finitude de R_i, l'espace ci-dessus est bien un ouvert rationnel affinoïde.

Soit $1 \leq j \leq d$ un entier et soit i_0 l'unique entier tel que $d_{i_0} < j \leq d_{i_0+1}$. On pose

$$X_j = \frac{\langle z, f_j\rangle}{l_{i_0}(z)},\ X_0 = \varpi\frac{l_0(z)}{l_k(z)}.$$

On a $|X_j| \leq 1$ avec égalité si $j \neq d_{i_0+1}$. On obtient un système de coordonnées $(X_0, \cdots, X_d)$ qui vérifie $\prod_{i=0}^{k} X_{d_i} = \varpi$. Pour tout a les quantités $\frac{\langle z,a\rangle}{l_i(z)}$ s'expriment comme des polynômes $P_a(X_0, \cdots, X_d)$ à coefficients dans $\mathcal{O}_K$. En posant $P_\sigma = \prod_{i=0}^{k} \prod_{a \in R_i} P_a$, on obtient la description suivante :

Proposition 3.1. *On a*

$$\mathbb{H}^d_{K,\sigma} = \{(X_0, \cdots, X_d) \in \mathbb{B}^{d+1}_K | \ \prod_{i=0}^{k} X_{d_i} = \varpi \ et\ |P_\sigma(X)| = 1\}.$$

On en déduit que $\mathbb{H}^d_{K,\sigma}$ admet un modèle entier $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_K,\sigma} = \mathrm{Spf}(\hat{A}_\sigma)$ ou $\hat{A}_\sigma$ est le complété p-adique de

$$\mathcal{O}_K[X_0, \cdots, X_d, \frac{1}{P_\sigma}]/(\prod_{i=0}^{k} X_{d_i} - \varpi) \tag{1}$$

On obtient alors $\mathbb{H}^d_{K,\sigma} = \mathrm{Sp}(A_\sigma)$ avec $A_\sigma = \hat{A}_\sigma[\frac{1}{\varpi}]$. De même, la fibre spéciale est donnée par $\mathbb{H}^d_{\mathbb{F},\sigma} = \mathrm{Spec}(\overline{A}_\sigma)$ avec

$$\overline{A}_\sigma = \hat{A}_\sigma/\varpi = \mathbb{F}[X_0, \cdots, X_d, \frac{1}{\overline{P}_\sigma}]/(\prod_{i=0}^{k} X_{d_i}).$$

Des arguments identiques fournissent

$$\mathbb{H}^d_{K,\hat{\sigma}} = \{z \in \mathbb{P}^d_{rig,K} | \, \forall a \in R_i,\ 1 = |\frac{\langle z, a\rangle}{l_i(z)}| \text{ et } |l_0(z)| > \cdots > |l_i(z)| > \cdots > |\varpi||l_0(z)|\}$$

et l'on peut remplacer R_i par $\tilde{R}_i$.

Considérons l'affinoïde

$$C_r = \{x = (x_1, \cdots, x_r) \in \mathbb{B}^r_K | \, \forall a \in \mathcal{O}_K^{r+1} \backslash \varpi\mathcal{O}_K^{r+1},\ 1 = |\langle (1, x), a\rangle|\},$$

la polycouronne

$$A_k = \{y = (y_1, \cdots, y_k) \in \mathbb{B}^k_K | \, 1 > |y_1| > \cdots > |y_k| > |\varpi|\}.$$

et les morphismes

$$\mathbb{H}^d_{K,\mathring{\sigma}} \to C_{e_i-1},\ [z_0,\cdots,z_d] \mapsto (\frac{z_{d_i+1}}{z_{d_i}}, \frac{z_{d_i+2}}{z_{d_i}}, \cdots, \frac{z_{d_{i+1}-1}}{z_{d_i}})$$

et

$$\mathbb{H}^d_{K,\mathring{\sigma}} \to A_k,\ [z_0,\cdots,z_d] \mapsto (\frac{z_{d_1}}{z_{d_0}}, \frac{z_{d_2}}{z_{d_0}}, \cdots, \frac{z_{d_k}}{z_{d_0}}).$$

Proposition 3.2 ([DS01] 6.4)**.** *Les morphismes ci-dessus induisent un isomorphisme*

$$\mathbb{H}^d_{K,\mathring{\sigma}} \cong A_k \times \prod_{i=0}^{k} C_{e_i-1} \cong A_k \times C_\sigma$$

3.5 Géométrie de la fibre spéciale de $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_K}$

Si s est un sommet de $\mathcal{BT}$ on note

$$\mathrm{Ost}(s) = \bigcup_{\sigma \ni s} \mathring{\sigma},\ \mathrm{Fst}(s) = \bigcup_{\sigma \ni s} \sigma$$

l'étoile ouverte, respectivement fermée de s. Pour un simplexe σ on note

$$\mathrm{Ost}(\sigma) = \bigcap_{s\in\sigma} \mathrm{Ost}(s),\ \mathrm{Fst}(\sigma) = \bigcap_{s\in\sigma} \mathrm{Fst}(s).$$

Les composants irréductibles de la fibre spéciale de $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_K}$ sont indexées par l'ensemble des sommets de $\mathcal{BT}_0$: pour chaque sommet s la composante correspondante est $\mathbb{H}^d_{\mathbb{F}_q,\mathrm{Ost}(s)}$. On obtient ainsi un recouvrement admissible $(\mathbb{H}^d_{K,\mathrm{Ost}(s)})_{s\in\mathcal{BT}_0}$ de $\mathbb{H}^d_K$ dont les intersections d'ouverts sont de la forme $\mathbb{H}^d_{K,\mathrm{Ost}(\sigma)}$ pour $\sigma \subset \mathcal{BT}$ un simplexe. En fibre spéciale, le lieu lisse de cette intersection est l'ouvert

$$\mathbb{H}^d_{\mathbb{F}_q,\mathrm{Ost}(\sigma)} \setminus \bigcup_{s\notin\sigma} \mathbb{H}^d_{\mathbb{F}_q,\mathrm{Ost}(s)} = \mathbb{H}^d_{\mathbb{F}_q,\mathring{\sigma}}$$

car $\mathring{\sigma} = \sigma \setminus \bigcup_{\sigma'\subsetneq\sigma} \sigma'$. En particulier, le lieu lisse d'une composante irréductible est

$$\mathbb{H}^d_{\mathbb{F}_q,s} \cong \mathbb{P}^d_{\mathbb{F}_q} \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{H}_1} H.$$

Justifiant un peu plus précisément cette décomposition en irréductibles. Les espaces $\mathbb{H}^d_{\mathbb{F}_q,\mathrm{Ost}(s)}$ sont bien des fermés de la fibre spéciale qui la recouvre. Il s'agit de prouver que chacun est irréductible ce qui repose sur la description explicite suivante (voir [Gen96, sous-section III.1.] ou [Wan14b, 4.1.2]). Posons $Y_0 = \mathbb{P}^d_{\mathbb{F}_q}$ et construisons par éclatements successifs une suite d'espaces

$$Y_d \to Y_{d-1} \to \cdots \to Y_0$$

Supposons que l'on ait construit $Y_0,\cdots,Y_i$. On a des morphismes $p_i : Y_i \to Y_{i-1}$ et $\tilde{p}_i = p_i \circ \cdots \circ p_1 : Y_i \to Y_0$. On pose Z_i le transformé strict par $\tilde{p}_i$ de l'union des espaces de codimension $i+1$ dans Y_0. On définit Y_{i+1} comme l'éclaté de Y_i suivant Z_i. Alors, on a $Y_d \cong \mathbb{H}^d_{\mathbb{F},\mathrm{Ost}(s)}$.

4 Fonctions inversibles sur $\mathbb{H}^d_K$

Le but de ce chapitre est de décrire $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})$ en tant que $G := \mathrm{GL}_{d+1}(K)$-module.

4.1 Enoncé du résultat principal

Si A est un groupe abélien, on note

$$\tilde{\mathrm{D}}_1(A) := A\left[\!\left[\mathcal{H}\right]\!\right]^0 := \varprojlim_n A[\mathcal{H}_n]^0,$$

où $A[\mathcal{H}_n]^0$ est l'ensemble des $\mu \in A[\mathcal{H}_n]$ de masse totale nulle. L'action naturelle de G sur $\mathcal{H}$ induit une action de G sur $\tilde{\mathrm{D}}_1(A)$. Le choix d'un système de représentants S_n de $\mathcal{H}_n$ induit une identification pour tout i

$$\mathbb{Z}[\mathcal{H}_n]^0 \cong \left\langle \frac{l_a}{l_b} : a \neq b \in S_n \right\rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}} \subset \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})$$

Notre résultat principal s'énonce alors

Théorème 4.1. *Il existe un isomorphisme G-équivariant*

$$\alpha : \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}) \simeq \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^*$$

On va en fait construire un isomorphisme explicite et canonique α, compatible avec les inclusions

$$\mathbb{Z}[\mathcal{H}_n]^0 \cong \left\langle \frac{l_a}{l_b} : a \neq b \in S_n \right\rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}} \subset \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})$$

Notre preuve met l'emphase sur les différentes compatibilités entre les théories cohomologiques et s'inscrit dans la continuité des travaux de Schneider-Stuhler [SS91] et Iovita-Spiess [IS01]. Plus précisément, Iovita et Spiess ont construit des isomorphismes

$$\beta : \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,C}, \mu_l) \text{ et } \gamma : \tilde{\mathrm{D}}_1(L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_{K,L})$$

en interpretant les éléments de $\tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ comme des mesures sur $\mathcal{H}^2$ et en intégrant des symboles en cohomologie étale et de de Rham (en fait ils ont construit de tels isomorphismes en tout degré cohomologique, comme nous allons le rappeler plus tard). En utilisant leur méthode nous construisons un morphisme G-équivariant

$$\alpha : \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}) \to \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^*$$

compatible avec les morphismes β et γ

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^* \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\kappa}} \\ \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,C}, \mu_l) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^* \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d\log} \\ \tilde{\mathrm{D}}_1(L) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_{K,L}) \end{array}$$

En utilisant la théorie des résidus de de Shalit [DS01] nous montrons ensuite que l'image de α est un facteur direct. La compatibilité avec la cohomologie étale géométrique implique 4.15 que le supplémentaire de l'image de α est l^∞-divisible modulo les constantes. Il s'agira alors d'établir par 4.16 qu'une fonction inversible l^∞-divisible dans $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^*$ est en fait constante.

4.2 Cohomologie de $\mathbb{H}^d_C$, symboles et distributions

Nous allons rappeler, suivant Iovita et Spiess [IS01] le calcul de la cohomologie étale l-adique et de de Rham de $\mathbb{H}^d_C$ par intégration des symboles. Nous adapterons dans le paragraphe suivant leur méthode pour étudier les fonctions inversibles sur $\mathbb{H}^d_C$.

Soit $k \geq 0$ un entier. Rappelons que $\mathcal{H}$ désigne l'ensemble des hyperplans K-rationnels et que $\mathcal{H}^{k+1} = \varprojlim_n \mathcal{H}_n^{k+1}$ est un espace profini. Si M est un A-module, on note $M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ son dual algébrique. L'ensemble des distributions sur $\mathcal{H}^{k+1}$ à valeurs dans A, le dual algébrique des fonctions localement constantes sur $\mathcal{H}^{k+1}$ à valeurs dans A, est défini par

$$\mathrm{Dist}(\mathcal{H}^{k+1}, A) := \mathrm{LC}(\mathcal{H}^{k+1}, A)^\vee \simeq \varprojlim_n A[\mathcal{H}_n^{k+1}],$$

les flèches de transition $A[\mathcal{H}_{n+1}^{k+1}] \to A[\mathcal{H}_n^{k+1}]$ dans le système projectif étant induites par les projections naturelles $\mathcal{H}_{n+1}^{k+1} \to \mathcal{H}_n^{k+1}$. L'isomorphisme ci-dessus provient du fait que la donnée d'une distribution est équivalente à la donnée d'une fonction à valeurs dans A, additive sur les ouverts de la base usuelle pour la topologie profinie. De manière équivalente, cela revient à écrire $\mathrm{LC}(\mathcal{H}^{k+1}, A) = \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\mathcal{H}_n^{k+1}, A)$ et à identifier $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\mathcal{H}_n^{k+1}, A)^\vee = A[\mathcal{H}_n^{k+1}]$.

Si M est un A-module, notons $\Lambda_k(M) \subset \mathrm{LC}(\mathcal{H}^{k+1}, M)$ l'ensemble des fonctions localement constantes $f : \mathcal{H}^{k+1} \to M$ vérifiant les deux relations

i) $f(H_{a_0} \cdots, H_{a_k}) = 0$ si $a_0, ..., a_k$ sont linéairement dépendants.

ii) $\sum_{0 \leq j \leq k+1} (-1)^j f(H_{a_0}, \cdots, \widehat{H_{a_j}}, \cdots, H_{a_{k+1}}) = 0$ pour tous $H_{a_0}, \cdots, H_{a_{k+1}}$.

On définit

$$\tilde{\mathrm{D}}_k(A) = \Lambda_k(A)^\vee = \mathrm{Dist}(\mathcal{H}^{k+1}, A)/\mathrm{Dist}(\mathcal{H}^{k+1}, A)_{deg}$$

où $\mathrm{Dist}(\mathcal{H}^{k+1}, A)_{deg}$ est l'ensemble des distributions (dites dégénérées) s'annulant sur $\Lambda_k(A)$. On vérifie facilement que

$$\tilde{\mathrm{D}}_k(A) = \varprojlim_n A[\mathcal{H}_n^{k+1}]/I_{k,n} = \varprojlim_n \tilde{\mathrm{D}}_{k,n}(A)$$

avec $I_{k,n}$ l'ensemble des formes de $A[\mathcal{H}_n^{k+1}] = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\mathcal{H}_n^{k+1}, A)^\vee$ qui s'annulent sur $\Lambda_k(A) \cap \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\mathcal{H}_n^{k+1}, A)$ si l'on voit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\mathcal{H}_n^{k+1}, A) \subset \mathrm{LC}(\mathcal{H}^{k+1}, A)$.

Remarque 4.2. Quand k vaut 1, les modules $\tilde{\mathrm{D}}_{1,n}(A)$ ont une interprétation explicite. On peut les voir comme les ensembles $A[\mathcal{H}_n]^0$ de fonctions f de $A[\mathcal{H}_n]$ de masse totale nulle. Ainsi, le choix d'un système de représentants S_n de $\mathcal{H}_n$ induit une identification pour tout i

$$\tilde{\mathrm{D}}_{1,n}(\mathbb{Z}) \cong \left\langle \frac{l_a}{l_b} : a \neq b \in S_n \right\rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}} \subset \mathscr{O}^*(\mathring{U}_{i,L})$$

De même, on voit $\tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z})$ comme $\mathbb{Z}[\![\mathcal{H}]\!]^0 = \varprojlim_n \mathbb{Z}[\mathcal{H}_n]^0$.

Exemple 4.3. Dans les exemples ci-dessous nous souhaitons mettre l'emphase sur les conditions i) et ii) ci-dessus. Le caractère localement constant n'est pas évident et est démontré dans 4.7 ci-dessous (cf. aussi [IS01] pour le second et le troisième exemple). Soit L une extension complète de K.

- En posant $M = \mathscr{O}^*(\mathring{U}_{i,L})/L^* \mathscr{O}_m^{**}(\mathring{U}_{i,L})$, l'application

$$f : (H_a, H_b) \mapsto \frac{l_a}{l_b}$$

est un élément de $\Lambda_1(M)$. La condition i) revient à écrire $f(H, H) = 1$. La condition ii) est équivalente à la relation $\frac{l_a}{l_c} = \frac{l_a}{l_b}\frac{l_b}{l_c}$.

- En posant $M = \mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(\mathring{U}_{i,L})$, l'application

$$g : (H_{a_0}, \cdots, H_{a_k}) \mapsto d\log \frac{l_{a_1}}{l_{a_0}} \wedge d\log \frac{l_{a_2}}{l_{a_0}} \wedge \cdots \wedge d\log \frac{l_{a_k}}{l_{a_0}}$$

est un élément de $\Lambda_k(M)$.

- En posant $M = \mathrm{H}^k_{\text{ét}}(\mathring{U}_{i,C}, \mu_l^{\otimes k})$ pour l premier à p et en notant $\cup$ le cup-produit et $\overline{\kappa}(f) \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathring{U}_{i,C}, \mu_l)$ l'image de $f \in \mathscr{O}^*(\mathring{U}_{i,C})$ par l'application de Kummer, l'application

$$h : (H_{a_0}, \cdots, H_{a_k}) \mapsto \overline{\kappa}(\frac{l_{a_1}}{l_{a_0}}) \cup \overline{\kappa}(\frac{l_{a_2}}{l_{a_0}}) \cup \cdots \cup \overline{\kappa}(\frac{l_{a_k}}{l_{a_0}})$$

est un élément de $\Lambda_k(M)$.

Iovita et Spiess ont construit dans [IS01] des morphismes (pour $l \neq p$ premier)

$$\beta^{(k)} : \tilde{\mathrm{D}}_k(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^k_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,C}, \mu_l^{\otimes k}) \text{ et } \gamma^{(k)} : \tilde{\mathrm{D}}_k(L) \to \mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_{K,L})$$

à partir des symboles en cohomologie étale et de de Rham, i.e. à partir des fonctions g et h dans l'exemple ci-dessus. Plus précisément, ces morphismes sont uniquement caractérisés par le fait que

$$\beta^{(k)}(\delta_{(H_{a_0},\cdots,H_{a_k})}) = \overline{\kappa}(\frac{l_{a_1}}{l_{a_0}}) \cup \overline{\kappa}(\frac{l_{a_2}}{l_{a_0}}) \cup \cdots \cup \overline{\kappa}(\frac{l_{a_k}}{l_{a_0}}) \in \mathrm{H}^k_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,C}, \mu_l^{\otimes k})$$

et

$$\gamma^{(k)}(\delta_{(H_{a_0},\cdots,H_{a_k})}) = d\log \frac{l_{a_1}}{l_{a_0}} \wedge d\log \frac{l_{a_2}}{l_{a_0}} \wedge \cdots \wedge d\log \frac{l_{a_k}}{l_{a_0}} \in \mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_{K,L}),$$

où $\delta_{(H_{a_0},\cdots,H_{a_k})}$ est la masse de Dirac en $(H_{a_0}, \cdots, H_{a_k}) \in \mathcal{H}^{k+1}$. Nous allons écrire

$$\beta^{(k)}(\mu) := \int_{(H_{a_0},\cdots,H_{a_k}) \in \mathcal{H}^{k+1}} \overline{\kappa}(\frac{l_{a_1}}{l_{a_0}}) \cup \cdots \cup \overline{\kappa}(\frac{l_{a_k}}{l_{a_0}}) \mathrm{d}\mu$$

et de même avec $\gamma^{(k)}$.

Le théorème principal de [IS01] (voir [IS01, lemme 3.2 + théorème 4.5]) est le suivant :

Théorème 4.4. *Les morphismes $\beta^{(k)}$ et $\gamma^{(k)}$ sont des isomorphismes $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$-équivariants*

$$\beta^{(k)} : \tilde{\mathrm{D}}_k(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}^k_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,C}, \mu_l^{\otimes k}) \text{ et } \gamma^{(k)} : \tilde{\mathrm{D}}_k(L) \simeq \mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_{K,L})$$

En fait, un résultat récent décrit la cohomologie étale à coefficients dans μ_N pour des entiers N non nécessairement premier à p. Nous n'aurons pas besoin de ce résultat dans la suite.

Théorème 4.5 ([CDN] Theorem 5.1.)**.** *On a un isomorphisme pour tout entier n :*

$$\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,C}, \mu_N^{\otimes i}) \cong \tilde{\mathrm{D}}_k(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

4.3 Fonctions inversibles et distributions

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Proposition 4.6. *Il existe un morphisme*

$$\alpha : \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}) \to \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^*$$

uniquement caractérisé par

$$\alpha(\delta_{H_a,H_b}) = \frac{l_a}{l_b}$$

pour tous $H_a, H_b \in \mathcal{H}$. *De plus on dispose de diagrammes commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^* \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\kappa}} \\ \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,C}, \mu_l) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^* \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d\log} \\ \tilde{\mathrm{D}}_1(L) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_{K,L}) \end{array}$$

avec $\beta = \beta^{(1)}$ *et* $\gamma = \gamma^{(1)}$

Comme ci-dessus, nous allons écrire

$$\alpha(\mu) := \int_{(H_a,H_b)\in\mathcal{H}^2} \frac{l_a}{l_b} \mathrm{d}\mu \in \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})$$

Démonstration. Le point crucial est le lemme suivant :

Lemme 4.7. *Si* (H_{a_1}, H_{b_1}) *et* (H_{a_2}, H_{b_2}) *sont dans* $\mathcal{H}^2$ *et vérifient* $(H_{a_1}, H_{b_1}) \equiv (H_{a_2}, H_{b_2})$ $(\mathrm{mod}\ \varpi^n)$ *alors pour* $i < n$,

$$\frac{l_{a_1}}{l_{b_1}} \frac{l_{b_2}}{l_{a_2}} \in L^* \mathscr{O}^{**}_{n-i}(\mathring{U}_{i,L})$$

Démonstration. Prenons $\tilde{a}$, un vecteur unimodulaire tel que $a_1 = u(a_2 + \varpi^{n'}\tilde{a})$ avec $n' \geq n$ et $u \in \mathcal{O}_K^*$, alors $\frac{l_{a_1}}{l_{a_2}} = u(1 + \varpi^{n'-i}(\varpi^i \frac{l_{\tilde{a}}}{l_{a_2}}))$. Mais $\varpi^i \frac{l_{\tilde{a}}}{l_{a_2}} \in \mathscr{O}^{++}(\mathring{U}_{i,L})$ d'où $\frac{l_{a_1}}{l_{a_2}} \in L^* \mathscr{O}^{**}_{n-i}(\mathring{U}_{i,L})$. On raisonne de même pour (b_1, b_2) et on conclut par stabilité multiplicative de $L^* \mathscr{O}^{**}_{n-i}(\mathring{U}_{i,L})$. □

Remarquons les isomorphismes

$$\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^* \cong \varprojlim_i \mathscr{O}^*(\mathring{U}_{i,L})/L^*, \quad \mathscr{O}^*(\mathring{U}_{i,L})/L^* \simeq \varprojlim_m \mathscr{O}^*(\mathring{U}_{i,L})/L^* \mathscr{O}^{**}_m(\mathring{U}_{i,L}).$$

Fixons, pour tout n, S_n et S'_n des systèmes de représentants de $\mathcal{H}_n$. Considérons la flèche

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{n,i} : \mathbb{Z}[\mathcal{H}_n^2] &\to \mathscr{O}^*(\mathring{U}_{i,L})/L^* \\ \delta_{(H_a,H_b)} &\mapsto \frac{l_a}{l_b} \qquad\qquad a, b \in S_n \end{aligned}$$

elle induit par passage au quotient une application $\alpha_{n,i} : \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}) \to \mathscr{O}^*(\mathring{U}_{i,L})/L^*$ donnée par

$$\alpha_{n,i}(\mu) = \prod_{a,b\in S_n} (\frac{l_a}{l_b})^{\mu_{a,b}} \in \mathscr{O}^*(\mathring{U}_{i,L})/L^*$$

avec $\mu = (\sum_{a,b\in S_n} \mu_{a,b}\delta_{H_a,H_b})_n \in \varprojlim_n \tilde{\mathrm{D}}_{1,n}(\mathbb{Z}) = \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z})$. On définit de même une flèche $\alpha'_{n,i}$ grâce aux systèmes de représentants S'_n.

On observe grâce au lemme 4.7 les congruences suivantes pour $n' > n > i$:

$$\alpha_{n',i}(\mu) \equiv \alpha_{n,i}(\mu) \equiv \alpha'_{n,i}(\mu) \pmod{L^* \mathscr{O}^{**}_{n-i}(\mathring{U}_{i,L})}$$

On ainsi deux suites de Cauchy $(\alpha_{n,i}(\mu))_n$ et $(\alpha'_{n,i}(\mu))_n$ qui convergent vers la même valeur $\alpha_i(\mu)$. Par construction, $\alpha_i(\mu)$ est la restriction de $\alpha_{i+1}(\mu)$ sur $\mathring{U}_{i,L}$ ce qui détermine $\alpha(\mu) \in \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^*$. De plus, on vérifie aisément l'identité $\alpha(\delta_{H_a,H_b}) = \frac{l_a}{l_b}$.

Passons à l'application γ (le procédé est le même pour β). Puisque la série formelle du logarithme converge sur $\mathscr{O}^{**}(\mathring{U}_{i,L})$, on a $L^*\mathscr{O}^{**}(\mathring{U}_{i,L}) \subset \ker(d\log)$. Ainsi d'après 4.7, pour tout $i > 0$ et $\mu = (\sum_{a,b\in S_n} \mu_{a,b}\delta_{H_a,H_b})_n \in \tilde{\mathrm{D}}_1(L)$, la somme suivante ne dépend pas de n pour $n > i$:

$$\sum_{a,b\in S_n} \mu_{a,b} d\log(\frac{l_a}{l_b}) \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathring{U}_{i,L})$$

On obtient alors un morphisme de groupe $\gamma_i : \tilde{\mathrm{D}}_1(L) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathring{U}_{i,L})$. Par construction, $\gamma_i(\mu)$ est la restriction de $\gamma_{i+1}(\mu)$ sur $\mathring{U}_{i,L}$ ce qui détermine une application $\gamma : \tilde{\mathrm{D}}_1(L) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_{K,L})$.

Pour la compatibilité avec le morphisme α, on observe la congruence

$$\alpha(\mu) \equiv \alpha_{n,i}(\mu) \pmod{L^*\mathscr{O}^{**}_{n-i}(\mathring{U}_{i,L})}$$

pour $n > i$ et $\mu \in \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z})$. On en déduit la suite d'égalité pour $n > i$

$$d\log(\alpha(\mu))|_{\mathring{U}_{i,L}} = d\log(\alpha_{n,i}(\mu)) = \gamma_i(\mu) = \gamma(\mu)|_{\mathring{U}_{i,L}}$$

Pour l'avant dernière, il suffit de la vérifier sur les dirac où le résultat est vrai par construction. On a alors $d\log(\alpha(\mu)) = \gamma(\mu)$.

□

Nous allons étudier l'application α dans les deux sections suivantes.

4.4 Résidus et cochaines harmoniques

Le but de ce paragraphe est de démontrer que $\mathrm{im}(\alpha)$ est un facteur direct de $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^*$. Cela repose sur le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^* \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d\log} \\ \tilde{\mathrm{D}}_1(L) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_{K,L}) \end{array},$$

mais nous avons besoin du raffinement suivant :

Proposition 4.8. *On a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^* \\ & \searrow^{\mathrm{Id}} & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\gamma}} \\ & & \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z}) \end{array}$$

où $\tilde{\gamma}$ est induite par $\gamma^{-1} \circ d\log$.

La preuve de ce résultat est basée sur la théorie des résidus utilisée par de Shalit dans [DS01] pour calculer la cohomologie de de Rham des espaces de Drinfeld. Nous allons donc commencer par rappeler ses constructions. Si A est un groupe abélien, on note $\mathcal{C}^k_{\mathrm{har}}(A)$ l'ensemble des cochaines harmoniques d'ordre k à valeurs dans A. Il s'agit d'applications $c : \widehat{\mathcal{BT}}_k \to A$ vérifiant certaines conditions d'harmonicité, reliant la valeur d'un simplexe pointé à celle des simplexes contigus (plus une relation entre les différents pointages d'un même simplexe). Nous renvoyons à [DS01, paragraphe 3.1] pour l'énoncé explicite de ces conditions (ces relations y sont données sur K, mais les combinaisons linéaires sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et peuvent être vues dans n'importe quel groupe abélien).

Nous allons maintenant construire un morphisme $\mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_{K,L}) \to \mathcal{C}^k_{\mathrm{har}}(L)$. Nous renvoyons le lecteur aux paragraphes 3.4 et 3.1 pour les notations à suivre. Fixons un simplexe pointé $\sigma \in \widehat{\mathcal{BT}}_k$:

$$M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k \supsetneq \varpi M_0$$

de type $(e_0, e_1, \cdots, e_k)$ et donnons-nous une base adaptée $(f_0, \cdots, f_d)$ (cf 3.1). Le choix de cette base détermine un isomorphisme

$$\mathbb{H}^d_{K,\mathring{\sigma}} \cong A_k \times \prod_{i=0}^{k} C_{e_i - 1} \cong A_k \times C_\sigma$$

On notera encore A_k et C_σ les changements de base à L.

On a une notion naturelle de résidu sur A_k : si $\omega = \sum a_\nu z^\nu d\log(z_1) \wedge \cdots \wedge d\log(z_k) \in \Omega^k_{A_k}$ (avec les bonnes conditions de convergence sur les $a_\nu \in L$), alors $\mathrm{res}_{A_k}(\omega) = a_0$. Étendons-la à $\Omega^k_{\mathbb{H}^d_{K,L,\mathring{\sigma}}}$ en écrivant

$$\Omega^k_{\mathbb{H}^d_{K,L,\mathring{\sigma}}} = \bigoplus_{s+t=k} \Omega^s_{A_k} \widehat{\otimes} \Omega^t_{C_\sigma}$$

et en définissant $\mathrm{res}_\sigma : \Omega^k_{\mathbb{H}^d_{K,L,\mathring{\sigma}}} \to \Omega^k_{A_k} \widehat{\otimes} \mathscr{O}_{C_\sigma} \to \mathscr{O}_{C_\sigma}$ comme $\mathrm{res}_\sigma = \mathrm{res}_{A_k} \widehat{\otimes} \mathrm{Id}_{\mathscr{O}_{C_\sigma}}$. Par calcul direct, pour toute ω fermée dans $\Omega^k_{\mathbb{H}^d_{K,L,\mathring{\sigma}}}$, $\mathrm{res}_\sigma(\omega)$ est une 0-forme fermée donc un élément de L. De même, on vérifie que $\mathrm{res}_\sigma(\omega) = 0$ si ω est exacte et que le résidu ne dépend pas de la décomposition en produit du tube au-dessus de $\mathring{\sigma}$ ni du choix de la base adaptée au simplexe σ. Cela définit l'application

$$\mathrm{res} : \mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_{K,L}) \to \mathcal{C}^k_{\mathrm{har}}(L),\ \omega \mapsto (\sigma \mapsto \mathrm{res}_\sigma(\omega|_{\mathbb{H}^d_{K,L,\mathring{\sigma}}})).$$

En effet, pour ω une k-forme fermée, $\mathrm{res}(\omega)$ vérifie bien les conditions d'harmonicité [DS01, théorème 7.7]. Le résultat principal de [DS01] montre

Théorème 4.9. *[DS01, théorème 8.2] Le morphisme* res *est un isomorphisme.*

Nous allons expliciter l'isomorphisme ϕ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{H}^d_{K,L}) & & \\ {\scriptstyle \gamma^{(k)}}\uparrow & \searrow^{\mathrm{res}} & \\ \tilde{\mathrm{D}}_k(L) & \xrightarrow[\sim]{\phi} & \mathcal{C}^k_{\mathrm{har}}(L) \end{array}$$

Pour tout $\sigma \in \widehat{\mathcal{BT}}_k$, on définit la fonction localement constante $\lambda_\sigma \in \Lambda_k(\mathbb{Z})$ par

$$(H_{a_0}, \cdots, H_{a_k}) \mapsto \mathrm{res}_\sigma(d\log \frac{l_{a_1}}{l_{a_0}} \wedge d\log \frac{l_{a_2}}{l_{a_0}} \wedge \cdots \wedge d\log \frac{l_{a_k}}{l_{a_0}}|_{\mathbb{H}^d_{K,L,\mathring{\sigma}}}) \in \{-1, 0, 1\}$$

La valeur de λ_σ en un $(k+1)$-uplet d'hyperplans est déterminée par l'arrangement de ces hyperplans par rapport aux modules M_i définissant le simplexe σ (cf [AdS02, paragraphe 1.3]). L'application recherchée est donnée par

$$\phi : \mu \mapsto (\sigma \mapsto \mu(\lambda_\sigma))$$

Pour vérifier la commutation, il suffit de travailler sur les masses de Dirac et cela découle de la construction des λ_σ. Comme les λ_σ vivent dans $\Lambda_k(\mathbb{Z})$, on peut construire pour tout groupe abélien un morphisme $\tilde{\mathrm{D}}_k(A) \to \mathcal{C}^k_{\mathrm{har}}(A)$. En fait, on a le résultat remarquable :

Théorème 4.10. *[AdS02, corollaire 2.2] On a*

$$\Lambda_k(\mathbb{Z}) = \left\langle \lambda_\sigma, \sigma \in \widehat{\mathcal{BT}}_k \right\rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}$$

Corollaire 4.11. *La flèche $\phi : \tilde{\mathrm{D}}_k(\mathbb{Z}) \to \mathcal{C}^k_{\mathrm{har}}(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $c \in \mathcal{C}^k_{\mathrm{har}}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{C}^k_{\mathrm{har}}(L)$ et $\mu = \phi^{-1}(c) \in \tilde{\mathrm{D}}_k(L)$ la mesure correspondante par 4.9. On veut $\mu \in \tilde{\mathrm{D}}_k(\mathbb{Z})$. Il suffit d'observer l'équivalence suivante qui est conséquence directe du théorème précédent

$$\forall \sigma \in \widehat{\mathcal{BT}}_k, \mu(\lambda_\sigma) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda_k(\mathbb{Z}), \mu(\lambda) \in \mathbb{Z}$$

□

Revenons maintenant à la preuve de la proposition 4.8. D'après la discussion précédente il suffit de montrer pour toute fonction inversible u et tout $\sigma \in \widehat{\mathcal{BT}}_1$ de type (e_0, e_1), $\mathrm{res}_\sigma(d\log(u)) \in \mathbb{Z}$. Puisque A_1 est une couronne ouverte, le lemme 4.12 ci-dessous fournit une égalité

$$\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L,\mathring{\sigma}}) = \mathscr{O}^*(C_\sigma \times A_1) = \mathscr{O}^*(C_\sigma)\mathscr{O}^{**}(\mathbb{H}^d_{K,L,\mathring{\sigma}}) \times z^{\mathbb{Z}},$$

où z est la variable de A_1. Comme $u|_{\mathbb{H}^d_{K,L,\mathring{\sigma}}}$ est dans $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L,\mathring{\sigma}})$, on peut donc décomposer $u = g(1+h)z^\alpha$ comme ci-dessus. On a

$$d\log(u) = d\log(g) + d\log(1+h) + \alpha d\log(z)$$

Or $d\log(g) \in \Omega^1_{C_\sigma}$, son résidu est donc nul. La forme $d\log(1+h)$ est exacte (puisque $\log(1+h)$ est bien une fonction analytique), son résidu est donc nul. Donc $\mathrm{res}_\sigma(d\log(u)) = \alpha \in \mathbb{Z}$, ce qui permet de conclure.

Lemme 4.12. *Soient $I \subset [\![1, n]\!]$, $(s_i)_I$, $(r_i)_I$ des nombres rationnels tels que $s_i \geq r_i$ pour tout i, $\mathrm{Sp}(A)$ un L-affinoïde réduit et connexe, et soit C la polycouronne*

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n_L \mid |\varpi|^{s_i} \leq |x_i| \leq |\varpi|^{r_i} \text{ si } i \in I\}.$$

Alors

$$\mathscr{O}^*(C \times \mathrm{Sp}(A)) = \mathscr{O}^*(\mathrm{Sp}(A))\mathscr{O}^{**}(C \times \mathrm{Sp}(A)) \times \langle x_i : \ i \in I\rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}.$$

Le résultat reste vrai si la polycouronne C est ouverte.

Démonstration. Par récurrence sur n, on se ramène au cas $n = 1$ et à la distinction $I = \{1\}$ ou $I = \emptyset$. La variable sur C sera notée x. Le cas où A est une extension complète du corps L et C une couronne fermée est traité dans [FvdP04, 2.2.6].

Toujours dans le cas où A est un corps, on suppose que C est une couronne ouverte. On se donne un recouvrement croissant $C = \bigcup_n C_n$ par des couronnes fermés. On a alors :

$$\mathscr{O}^*(C) = \bigcap_n \mathscr{O}^*(C_n) = \left(\bigcap_n A^*\mathscr{O}^{**}(C_n)\right) \times T$$

avec $T = \{1\}$ si $I = \emptyset$ et $T = x^{\mathbb{Z}}$ si $I = \{1\}$. Il s'agit d'établir $\bigcap_n A^*\mathscr{O}^{**}(C_n) = A^*\mathscr{O}^{**}(C)$. Prenons u dans cette intersection écrivons $u = \lambda_n(1+h_n)$ dans chaque $A^*\mathscr{O}^{**}(C_n)$. Fixons $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n > n_0$, on observe

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n_0}} = \frac{1+h_{n_0}}{1+h_n} \in \mathscr{O}^{**}(C_{n_0}) \cap A^* = 1 + \mathfrak{m}_A$$

Donc $\frac{u}{\lambda_{n_0}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n_0}}(1+h_n) \in \bigcap_n \mathscr{O}^{**}(C_n) = \mathscr{O}^{**}(C)$ et ainsi $u \in \lambda_{n_0}\mathscr{O}^{**}(C)$.

On suppose maintenant la couronne C ouverte ou fermée, nous allons en déduire le résultat pour A général. Soit u une section inversible de $\mathrm{Sp}(A) \times C$, alors pour tout $z \in \mathrm{Sp}(A)$ on a une décomposition

$$u(z) = \lambda_z(1+h_z)x^{\beta_z} \in \mathscr{O}^*(\mathrm{Sp}(K(z)) \times C)$$

avec $\lambda_z \in K(z)^*$, $h_z \in K^{++}(z)$ et $\beta_z \in \mathbb{Z}$. Si $I = \emptyset$, on a $\beta_z = 0$. Par connexité de A, $\beta = \beta_z$ ne dépend pas de z. Quitte à multiplier u par $x^{-\beta}$, on peut supposer $\beta = 0$. On écrit u comme une somme

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a_\nu x^\nu = a_0 + \tilde{u}$$

Si $I = \emptyset$, on a $a_\nu = 0$ si $\nu < 0$. En évaluant sur chaque point z, on a $\frac{a_0(z)}{\lambda_z} - 1 + \frac{\tilde{u}(z)}{\lambda_z} \in \mathscr{O}^{++}(\mathrm{Sp}(K(z)) \times C)$. Comme $\frac{\tilde{u}(z)}{\lambda_z}$ n'a pas de terme constant, on a

$$\frac{a_0(z)}{\lambda_z} - 1 \in \mathscr{O}^{++}(\mathrm{Sp}(K(z)) \times C) \text{ et } \frac{\tilde{u}(z)}{\lambda_z} \in \mathscr{O}^{++}(\mathrm{Sp}(K(z)) \times C)$$

D'où pour tout z, $|a_0(z)| = |\lambda_z| > |\tilde{u}(z)|$ et $|a_0(z)| \neq 0$. Donc a_0 est inversible et $\frac{\tilde{u}}{a_0} \in \mathscr{O}^{++}$. On a exhibé la décomposition escomptée.

□

4.5 Cohomologie étale arithmétique

Nous aurons besoin du premier degré de la cohomologie étale l-adique arithmétique de $\mathbb{H}^d_{K,L}$.

Proposition 4.13. *Soit l un entier premier à p (non nécessairement premier), $L \subset C$ une extension complète de K, on a*

$$\widetilde{\kappa(\mathrm{im}(\alpha))} = \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,L}, \mu_l)$$

où $\widetilde{\mathrm{im}(\alpha)} \subset \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})$ est la préimage de $\mathrm{im}(\alpha) \subset \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^*$

Démonstration. Cela découle de la compatibilité entre α et l'application de Kummer, du calcul de la cohomologie étale géométrique 4.4 et du point technique suivant :

Lemme 4.14. *Soit l un entier premier à p (non nécessairement premier), X un L-espace analytique géométriquement connexe et $\overline{X} = X\hat{\otimes}C$. Supposons que $\overline{\kappa}(\mathscr{O}^*(X)) = \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_l)$. Alors, on a une suite exacte courte*

$$0 \to L^*/(L^*)^l \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X, \mu_l) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_l) \to 0$$

Si, de plus, il existe un sous-groupe $H \subset \mathscr{O}^*(X)$ l-saturé dans $\mathscr{O}^*(\overline{X})$ vérifiant $\overline{\kappa}(H) = \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_l)$, cette suite est scindée.

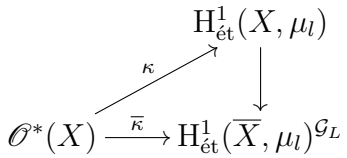
Démonstration. La suite spectrale de Hochschild-Serre (où $\mathcal{G}_L$ est le groupe de Galois absolu du corps L)

$$E_2^{r,s} : \mathrm{H}^r_{\mathrm{Gal}}(\mathcal{G}_L, \mathrm{H}^s_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_l)) \Rightarrow \mathrm{H}^{r+s}_{\text{ét}}(X, \mu_l)$$

induit une suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(\mathcal{G}_L, \mu_l(\overline{X})) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X, \mu_l) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_l)^{\mathcal{G}_L}.$$

Considérons le diagramme commutatif



L'application $\overline{\kappa}$ est $\mathcal{G}_L$-équivariante et surjective (par hypothèse). Puisque $\mathscr{O}^*(X) \subset \mathscr{O}^*(\overline{X})^{\mathcal{G}_L}$, on en déduit que $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X},\mu_l)^{\mathcal{G}_L} = \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X},\mu_l) = \overline{\kappa}(\mathscr{O}^*(X))$, ainsi que la surjectivité de $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X,\mu_l) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X},\mu_l) = \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X},\mu_l)^{\mathcal{G}_L}$.

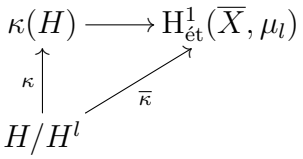
On a la suite d'isomorphismes

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(\mathcal{G}_L,\mu_l(\overline{X})) \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{Gal}}(\mathcal{G}_L,\mu_l(C)) \cong L^*/(L^*)^l$$

La première égalité provient de la connexité géométrique de X, la deuxième se déduit de la suite exacte de Kummer et du théorème de Hilbert 90. On en déduit la suite exacte courte

$$0 \to L^*/(L^*)^l \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X,\mu_l) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X},\mu_l) \to 0$$

Supposons maintenant l'existence du sous-groupe H. Par hypothèse de surjectivité de $\overline{\kappa}_{|H}$, on obtient un diagramme commutatif où toutes les flèches sont surjectives :



Par hypothèse de saturation sur H la flèche diagonale est injective. Ainsi, les trois flèches du diagramme précédent sont bijectives, ce qui permet de scinder la suite exacte. □

□

4.6 Preuve du théorème 4.1

Nous allons prouver le théorème 4.1. Prenons l un entier premier à p. Reprenons les notations dans la proposition 4.8. Cette proposition montre que $\ker(\tilde{\gamma})$ est un supplémentaire de $\mathrm{im}(\alpha) \cong \tilde{\mathrm{D}}_1(\mathbb{Z})$ dans $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^*$. On veut montrer que $\ker(\tilde{\gamma}) = 0$. Nous commençons par :

Lemme 4.15. $\ker(\tilde{\gamma})$ *est l-divisible.*

Démonstration. Soit f dans $\ker(\tilde{\gamma})$ que l'on relève en $\tilde{f} \in \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})$. D'après la proposition 4.13, on peut trouver $\tilde{g}$ dans $\widetilde{\mathrm{im}(\alpha)}$ tel que $\kappa(\tilde{g}) = \kappa(\tilde{f})$. Alors $\tilde{f}\tilde{g}^{-1}$ admet une racine l-ième dans $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})$ et donc une racine u dans $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^* = \ker(\tilde{\gamma}) \oplus \mathrm{im}(\alpha)$. L'élément f est la composante de u^l dans $\ker(\tilde{\gamma})$ donc, en projetant u dans $\ker(\tilde{\gamma})$, on obtient une racine l-ième de f.

□

Il suffit donc de montrer que les fonctions inversibles f de $\mathbb{H}^d_{K,L}$, l^∞-divisibles (modulo les constantes), sont en fait constantes. Pour cela, on la projette dans $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma})/L^*\mathscr{O}^{**}(\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma})$ qui est de type fini pour tout simplexe σ de l'immeuble $\mathcal{BT}$ d'après la proposition 4.16 ci-dessous (combiné avec les résultats du paragraphe 3.4). Mais f est encore l^∞-divisible dans $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma})/L^*\mathscr{O}^{**}(\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma})$ pour tout simplexe σ d'où $\forall\sigma, f \in L^*\mathscr{O}^{**}(\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma})$.

On écrit alors $f = \lambda_\sigma(1+g_\sigma) \in L^*\mathscr{O}^{**}(\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma})$. On a en particulier $\|f\|_{\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma}} = |\lambda_\sigma|$ pour tout σ. Soit maintenant deux simplexes σ_1 et σ_2 s'intersectant, alors $f = \lambda_{\sigma_1}(1+g_{\sigma_1})$ est encore une décomposition dans $L^*\mathscr{O}^{**}(\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma_1\cap\sigma_2})$ et on a

$$\|f\|_{\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma_1}} = |\lambda_{\sigma_1}| = \|f\|_{\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma_1\cap\sigma_2}} = |\lambda_{\sigma_2}| = \|f\|_{\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma_2}}$$

Ainsi par connexité, la quantité $\|f\|_{\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma}}$ ne dépend pas de σ. D'où $\|f\|_{\mathbb{H}^d_{K,L}} = \|f\|_{\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma}} < \infty$. La fonction f est bornée donc constante d'après [Ber95a, lemme 3].

Proposition 4.16. *Soit $P \in \mathcal{O}_K[X_0, \cdots, X_d]$ non nul, $Y = \mathrm{Sp}(A)$ un affinoïde sur L de la forme*

$$A = L\langle X_0, \cdots, X_d, \frac{1}{P}\rangle/(X_0 \cdots X_r - \varpi)$$

alors le groupe $\mathscr{O}^*(Y)/L^*\mathscr{O}^{**}(Y)$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini.

Démonstration. Quitte à renormaliser le polynôme P et à prendre r minimal, on peut supposer que les éléments ϖ et $(X_i)_{0\leq i\leq r}$ ne divisent pas P. Notons $\hat{A}$ le complété p-adique de $\mathcal{O}_L[X_0, \cdots, X_d, \frac{1}{P}]/(X_0 \cdots X_r - \varpi)$ et $\overline{A} = \hat{A}/\mathfrak{m}_L\hat{A}$. La composée suivante est un morphisme schéma formel pluri-nodal au sens de [Ber99, Definition 1.1]

$$\mathrm{Spf}(\hat{A}) \to \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L\langle X_0, \cdots, X_d\rangle/(X_0 \cdots X_r - \varpi)) \to \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$$

car le premier morphisme est étale et le second est poly-stable (voir [Ber99, Definition 1.2]). D'après [Ber99, Proposition 1.4], on a $\hat{A} = \mathscr{O}^+(Y)$ et la norme spectrale prend ses valeurs dans $|L^*|$. Pour u dans A^*, on peut alors trouver une constante inversible λ telle que $u/\lambda \in \hat{A}\backslash\mathfrak{m}_L\hat{A}$. On peut alors supposer $u \neq 0$ dans $\overline{A}$.

La fibre spéciale $\mathrm{Spec}(\overline{A})$ de $\mathrm{Spf}(\hat{A})$ a exactement $r+1$ composantes irréductibles $(V(X_i))_i$ et notons α_i l'ordre d'annulation de u sur $V(X_i)$. Comme $u \neq 0$ dans $\overline{A}$, il existe i_0 tel que $\alpha_{i_0} = 0$. Alors $X^\alpha \in \hat{A}$ a même ordre d'annulation que u sur chaque composante irréductible et $\frac{u}{X^\alpha} \in \hat{A}^*$. Dit autrement la flèche naturelle $\hat{A}^*/\mathcal{O}_L^* \to A^*/(L^* \prod_{i=0}^{r-1} X_i^{\mathbb{Z}})$ est surjective et il suffit donc de montrer que $\hat{A}^*/\mathcal{O}_L^*(1+\mathfrak{m}_L\hat{A})$ est de type fini. On a une suite exacte :

$$0 \to 1 + \mathfrak{m}_L\hat{A} \to \hat{A}^* \to \overline{A}^* \to 0$$

Une fonction est inversible en fibre spéciale si et seulement si elle l'est sur chaque composante irréductible. Or sur $V(X_i)$, les fonctions inversibles sont de la forme

$$\mathscr{O}^*(V(X_i)) \cong \kappa^* \times \prod_j (P_j^{(i)})^{\mathbb{Z}}$$

où $P(X_0, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_d) = \prod_j (P_j^{(i)})^{\alpha_{i,j}}$ est la décomposition en produit d'irréductibles. Ainsi, le quotient $\hat{A}^*/\mathcal{O}_L^*(1+\mathfrak{m}_L\hat{A})$ est un sous-groupe du groupe libre de type fini

$$\prod_{i=0}^{r} \mathscr{O}^*(V(X_i))/\kappa^*.$$

□

Remarque 4.17. Si $X = \mathrm{Sp}(A)$ est un L-affinoïde géométriquement connexe et géométriquement normal, avec L une extension finie de K (ou plus généralement si la ramification de L/K est finie) alors $\mathscr{O}^*(X)/L^*\mathscr{O}^{**}(X)$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini. La preuve découle des arguments de 4.16 quand $L = K$. Dans le cas particulier de 4.16, on peut facilement relier les fonctions inversibles pour L quelconque au cas où $L = K$, et obtient ce résultat de finitude sur n'importe quel corps de base (pas forcément local).

5 Cohomologie analytique des arrangements d'hyperplans

Dans cette sous-section, nous chercherons à déterminer $\mathrm{Pic}_L(\mathbb{H}^d_K) := \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,L}, \mathbb{G}_m)$. D'après un résultat de Berkovich [Ber93, proposition 4.1.10], on a un isomorphisme

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,L}, \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{H}^1_{\text{an}}(\mathbb{H}^d_{K,L}, \mathbb{G}_m)$$

Tous nos calculs utilisent de manière cruciale le résultat suivant de van der Put [VdP82, th. 3.10, th. 3.15, th. 3.25], décrivant la cohomologie de quelques affinoïdes simples.

Théorème 5.1 (Van der Put)**.** *Les produits de polycourrones et polydisques fermés*[3] *n'ont pas de cohomologie analytique en degré strictement positif pour :*

1. *les faisceaux constants*
2. *le faisceaux $\mathscr{O}^{(r)}$*
3. *le faisceau $\mathscr{O}^+$ en dimension* 1
4. *le faisceau $\mathbb{G}_m$*

Remarque 5.2. Un théorème de Bartenwerfer affirme que les boules fermées sont aussi acycliques pour le faisceau $\mathscr{O}^+$, en toute dimension. Nous ne savons pas si le théorème ci-dessus est valable pour le faisceau $\mathscr{O}^+$ (sauf en dimension 1, comme indiqué). Si c'était le cas, beaucoup des résultats à suivre pourraient aussi être énoncés pour ce faisceau.

Rappelons que $\mathbb{H}^d_{K,L} = \bigcup_n \overline{U}_{n,L}$ est un recouvrement Stein. Nous allons montrer :

Théorème 5.3. *Soit L un corps complet tel que $K \subset L \subset C$, les espaces $\mathbb{H}^d_{K,L}$ et $\overline{U}_{n,L}$ n'ont pas de cohomologie analytique en degrés positifs pour les faisceaux $\mathscr{O}^{(r)}$, $\mathscr{O}^{**}$ et $\mathbb{G}_m$. En particulier,* $\mathrm{Pic}_L(\mathbb{H}^d_K) = 0$*. De plus, on a*

$$\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})/L^* = \mathbb{Z}\,[\![\mathcal{H}]\!]^0 \quad \textit{et } \mathscr{O}^*(\overline{U}_{n,L})/L^*\mathscr{O}^{**}(\overline{U}_{n,L}) = \mathbb{Z}[\mathcal{H}_{n+1}]^0$$

Les deux dernières égalités sont similaires au résultat 4.1. Ce théorème sera prouvé dans le cadre plus général des arrangements d'hyperplans que nous allons définir dans la section suivante. Nous renvoyons à la section 5.2 pour l'énoncé plus général.

Finissons cette discussion par quelques remarques sur la cohomologie étale à coefficients dans $\mathbb{G}_m$. Les méthodes présentées ici ne semblent pas adaptées pour un tel problème. Nous pouvons cependant tirer quelques informations sur $\mathrm{Br}_C(\mathbb{H}^d_K) := \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,C}, \mathbb{G}_m)$. D'après la suite exacte de Kummer, on a une flèche surjective $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,C}, \mu_N) \to \mathrm{Br}_C(\mathbb{H}^d_K)_{N-tors}$ de noyau $\mathrm{Pic}_C(\mathbb{H}^d_K)/n\mathrm{Pic}_C(\mathbb{H}^d_K) = 0$. En passant à la limite inductive sur N, on en déduit un isomorphisme de groupes abéliens

$$\mathrm{Br}_C(\mathbb{H}^d_K)_{tors} \cong \mathrm{St}_2(\mathbb{Z})^* \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

La question naturelle que l'on peut se poser est la suivante : $\mathrm{Br}_C(\mathbb{H}^d_K)$ est-il de torsion ?

En géométrie algébrique, le résultat de Grothendieck [Gro95, PROPOSITION 1.4.] suggère quelques faibles espoirs. En effet, pour tout schéma algébrique X régulier noethérien normal, les groupes $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ est de torsion pour $i \geq 2$. Malheureusement, la preuve repose sur une étude des faisceaux gratte-ciel que l'on ne peut réaliser en géométrie rigide analytique. Peut-on espérer un tel résultat pour une classe restreinte d'espaces analytiques ?

3. Plus généralement les polydisques généralisés au sens de [VdP82, 3.9]

5.1 Géométrie des arrangements

5.1.1 Définitions et exemples

Pour toute collection $\mathcal{A}$ de parties de $\mathbb{P}^d_{rig,K}$ on note

$$\mathrm{Int}(\mathcal{A}) = \mathbb{P}^d_{rig,K} \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} H$$

et

$$\mathrm{Uni}(\mathcal{A}) = \mathbb{P}^d_{rig,K} \setminus \bigcap_{H\in\mathcal{A}} H.$$

Définition 5.4. Une collection $\mathcal{A}$ de parties de $\mathbb{P}^d_{rig,K}$ est appelée

• *arrangement algébrique (resp. algébrique généralisé)* (d'hyperplans K-rationnels) si $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble fini (resp. fermé) de $\mathcal{H}$.

• *arrangement tubulaire ouvert (resp. fermé) d'ordre n* si $\mathcal{A}$ est une famille finie de voisinages tubulaires *fermés (resp. ouverts)* $\overline{H}(|\varpi|^n)$ (resp. $\mathring{H}(|\varpi|^n)$) avec $H \in \mathcal{H}$.

Remarque 5.5.
— Se donner un arrangement tubulaire ouvert (resp. fermé) d'ordre n revient à se donner une partie de $\mathcal{H}_n$ (resp. $\mathcal{H}_{n+1}$).

— Si $m > n$, tout arrangement tubulaire ouvert (ou fermé) d'ordre m induit un arrangement tubulaire ouvert (ou fermé) d'ordre n, appelé sa projection. Plus précisément, la projection d'un arrangement défini par une collection de voisinages tubulaires $(\overline{H}(|\varpi|^m))_{H\in I}$ est l'arrangement défini par la collection de voisinages tubulaires $(\overline{H}(|\varpi|^n))_{H\in I}$. Cela revient à considérer la projection d'une partie de $\mathcal{H}_m$ (resp. $\mathcal{H}_{m+1}$) sur $\mathcal{H}_n$ (resp. $\mathcal{H}_{n+1}$). Cette construction s'étend bien sûr au cas d'un arrangement algébrique (resp. algébrique généralisé).

— Une famille d'arrangements tubulaires $(\mathcal{A}_n)_n$ telle que l'ordre de $\mathcal{A}_n$ soit n est dite compatible si, pour tout $m > n$, $\mathcal{A}_n$ est la projection de $\mathcal{A}_m$. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ est un arrangement algébrique généralisé, on construit par projection deux familles compatibles d'arrangements tubulaires ouverts (resp. fermés) $(\mathcal{A}_n)_n$ par projection.

— Dans tous les cas $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ et $\mathrm{Uni}(\mathcal{A})$ possèdent des structures naturelles d'espaces rigides analytiques sur K. Le seul cas non trivial est celui d'un arrangement algébrique généralisé, qui découle du point précédent.

— Plus précisément, l'espace $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ est un affinoïde (resp. Stein) si $\mathcal{A}$ est un arrangement tubulaire fermé (resp. ouvert) voir [SS91, Proposition 4].

Exemple 5.6. L'espace symétrique de Drinfeld $\mathbb{H}^d_K$ est l'arrangement d'hyperplan généralisé $\mathrm{Int}(\mathcal{H})$ et les espaces $\mathring{U}_n$ et $\overline{U}_n$ forment les deux familles compatibles d'arrangements tubulaires ouverts et fermés associées.

Nous allons définir le rang d'un arrangement $\mathcal{A}$, qui permettra de décrire la géométrie de $\mathrm{Uni}(\mathcal{A})$

Définition 5.7. Nous donnons la notion de rang pour des parties finies de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{H}_n$. D'après la première observation de 5.5, cela induit une notion pour les arrangements algébriques et tubulaires ouverts ou fermés.

— Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$, on se donne pour tout $H \in \mathcal{A}$ un vecteur a_H unimodulaire tel que $H = \ker(l_{a_H})$. On pose $\mathrm{rg}(\mathcal{A}) = \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K}(\sum_{H\in\mathcal{A}} \mathcal{O}_K a_H)$.

— Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_n$, on se donne pour tout H dans $\mathcal{A}$, a_H un vecteur unimodulaire dans $\mathcal{O}_K^{d+1}/\varpi^n\mathcal{O}_K^{d+1}$ tel que $H = \ker(l_{a_H})$ et $\tilde{a}_H$ un relevé dans $\mathcal{O}_K^{d+1}$. On écrit [4]

$$\sum_{H\in\mathcal{A}} \mathcal{O}_K \tilde{a}_H = \bigoplus_{i=0}^{d} \varpi^{\alpha_i}\mathcal{O}_K e_i$$

pour (e_i) une base de $\mathcal{O}_K^{d+1}$ bien choisie. On pose alors $\mathrm{rg}(\mathcal{A}) = \mathrm{card}\{i : \alpha_i < n\}$. Cette quantité ne dépend pas des choix des a_H et de leur relevé. Intuitivement, le rang correspond à $\mathrm{rg}(\mathcal{A}) = \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K/\varpi^n\mathcal{O}_K}(\sum_{H\in\mathcal{A}}(\mathcal{O}_K/\varpi^n\mathcal{O}_K)a_H)$.

5.1.2 La suite spectrale associée à un arrangement

Dorénavant, pour tout arrangement d'hyperplans $\mathcal{A}$, nous verrons $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ et $\mathrm{Uni}(\mathcal{A})$ comme des L-espaces analytiques par extension des scalaires. Si H désigne la cohomologie de de Rham ou la cohomologie d'un faisceau $\mathscr{F}$ sur le site étale ou analytique, on a par un argument général [SS91, § 2, Proposition 6+Lemma 7] de suites spectrales :

$$E_1^{-r,s} = \bigoplus_{(H_i)_{0\le i\le r}\in\mathcal{A}^{r+1}} \mathrm{H}^s(\mathbb{P}^d_{rig,L}, \mathrm{Uni}(\{H_i\})) \Rightarrow \mathrm{H}^{s-r}(\mathbb{P}^d_{rig,L}, \mathrm{Int}(\mathcal{A})) \tag{2}$$

où $\mathcal{A}$ est un arrangement algébrique, tubulaire d'ordre n ouvert ou fermé et $\mathrm{H}(X, Y)$ représente la cohomologie de X à support dans $X \setminus Y$.

Soit $\mathcal{A}$ un arrangement (algébrique, tubulaire ouvert ou fermé) et $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ non vide de cardinal $r + 1$, nous allons donc chercher à décrire la géométrie de $\mathrm{Uni}(\mathcal{B})$ suivant si $\mathcal{A}$ est algébrique, tubulaire ouvert ou fermé. Si $r = 0$, $\mathrm{Uni}(\mathcal{B})$ devient un espace affine dans le cas algébrique, une boule ouverte dans le cas tubulaire ouvert et une boule fermée dans le cas tubulaire fermé.

Supposons maintenant $r \neq 0$ et posons $t + 1 = \mathrm{rg}(\mathcal{B})$. Par hypothèse, on a $t \neq 0$. Nous allons construire en suivant [SS91, §1, Proposition 6] une fibration $f : \mathrm{Uni}(\mathcal{B}) \to \mathbb{P}^t_{rig,L}$. Les fibres seront des espaces affines dans le cas algébrique, des boules ouvertes dans le cas tubulaire ouvert et des boules fermées dans le cas tubulaire fermé. Pour chaque $H_i \in \mathcal{B}$, choisissons un vecteur unimodulaire de K^{d+1} de la même manière que dans 5.7 et écrivons $M := \sum_{0\le i\le r} \mathcal{O}_K a_i \subset M_0 := \sum_{0\le i\le d} \mathcal{O}_K e_i$ où (e_i) est la base canonique de K^{d+1}. Réalisons un changement de base similaire à 5.7 pour obtenir des entiers positifs croissants $(\alpha_i)_{0\le i\le d}$ tels que $\alpha_0 = 0$ et obtenir une décomposition $M = \sum_{0\le i\le d} \varpi^{\alpha_i}\mathcal{O}_K e_i \subset M_0 = \sum_{0\le i\le d} \mathcal{O}_K e_i$. On a alors les descriptions suivantes de $\mathrm{Uni}(\mathcal{B})$, avec la convention que pour la suite on choisit un représentant unimodulaire de chaque point $[b_0, \cdots, b_d]$, i.e. tel que $\max_{0\le i\le d} |b_i| = 1$:

- dans le cas algébrique

$$\mathrm{Uni}(\mathcal{B}) = Z_t^d := \{z = [b_0, \cdots, b_d] \in \mathbb{P}^d_{rig,L}, \exists i \le t, b_i \neq 0\}$$

- dans le cas tubulaire fermé posons $\beta = (\beta_i)_{0\le i\le t} = (n - \alpha_i)_{0\le i\le t}$ et notons

$$X_t^d(\beta) = \{z = [b_0, \cdots, b_d] \in \mathbb{P}^d_{rig,L}, \exists i \le t, |b_i| \ge |\varpi|^{\beta_i}\}$$

- dans le cas tubulaire ouvert posons $\gamma = (\gamma_i)_{0\le i\le t} = (n + 1 - \alpha_i)_{0\le i\le t}$ et notons

$$Y_t^d(\gamma) = \{z = [b_0, \cdots, b_d] \in \mathbb{P}^d_{rig,L}, \exists i \le t, |b_i| > |\varpi|^{\gamma_i}\}$$

dans le cas tubulaire ouvert. Alors $\mathrm{Uni}(\mathcal{B}) = X_t^d(\beta)$ (resp. $\mathrm{Uni}(\mathcal{B}) = Y_t^d(\gamma)$) dans le cas tubulaire fermé (resp. ouvert).

4. α_i peut être infini et dans ce cas on adopte la convention $\varpi^{\alpha_i} = 0$.

La flèche f donnée par $[b_0,\cdots,b_d]\mapsto[b_0,\cdots,b_t]$ induit bien des fibrations $X_t^d(\beta)\to\mathbb{P}^t_{rig,L}$, $Y_t^d(\gamma)\to\mathbb{P}^t_{rig,L}$, $Z_t^d\to\mathbb{P}^t_{rig,L}$ [5]. Soit $\mathcal{V}(\beta)=\{V(\beta)_i\}$, $\mathring{\mathcal{V}}(\gamma)=\{\mathring{V}(\gamma)_i\}$, $\mathcal{V}=\{V_i\}$ les recouvrements admissibles de $\mathbb{P}^t_{rig,L}$ où

$$V(\beta)_i=\{z=[z_0,\cdots,z_t]\in\mathbb{P}^t_{rig,L},\forall j\leq t,|\frac{z_i}{\varpi^{\beta_i}}|\geq|\frac{z_j}{\varpi^{\beta_j}}|\}$$

$$\mathring{V}(\gamma)_i=\{z=[z_0,\cdots,z_t]\in\mathbb{P}^t_{rig,L},\forall j\leq t,|\frac{z_i}{\varpi^{\gamma_i}}|\geq|\frac{z_j}{\varpi^{\gamma_j}}|\}$$

$$V_i=\{z=[z_0,\cdots,z_t]\in\mathbb{P}^t_{rig,L},z_i\neq 0\}$$

Alors, $X_t^d(\beta)\to\mathbb{P}^t_{rig,L}$ se trivialise sur $\mathcal{V}(\beta)$, $Y_t^d(\gamma)\to\mathbb{P}^t_{rig,L}$ sur $\mathring{\mathcal{V}}(\gamma)$, $Z_t^d\to\mathbb{P}^t_{rig,L}$ sur $\mathcal{V}$ ie.

$$f^{-1}(V(\beta)_i)\cong V(\beta)_i\times\mathbb{B}_L^{d-t}(-\beta_i)$$

$$f^{-1}(\mathring{V}(\gamma)_i)\cong\mathring{V}(\gamma)_i\times\mathring{\mathbb{B}}_L^{d-t}(-\gamma_i)$$

$$f^{-1}(V_i)\cong V_i\times\mathbb{A}^{d-t}$$

par le biais de l'application

$$[z_0,\cdots,z_d]\to[z_0,\cdots,z_t]\times(\frac{z_{t+1}}{z_i},\cdots,\frac{z_d}{z_i})$$

Appelons $\mathcal{U}=\{U_i\}$ le recouvrement adapté (au cas algébrique, tubulaire ouvert ou fermé) et F_i la fibre sur U_i (soit $\mathbb{B}_L^{d-t}(-\beta_i)$ pour les tubulaires fermés, $\mathring{\mathbb{B}}_L^{d-t}(-\gamma_i)$ pour les tubulaires ouverts, $\mathbb{A}^{d-t}$ en algébrique). La variable sur la base $\mathbb{P}^t_{rig,L}$ sera notée $z=[z_0,\cdots,z_t]$ et celle de la fibre $w=(w_1,\cdots,w_{d-t})$. Sur chaque intersection $U_{\{i,j\}}=U_i\cap U_j$, l'application de transition rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U_{\{i,j\}}) & \xrightarrow{\sim} & U_{\{i,j\}}\times F_i \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\times m_{\frac{z_i}{z_j}}} \\ f^{-1}(U_{\{i,j\}}) & \xrightarrow{\sim} & U_{\{i,j\}}\times F_j \end{array}$$

où $m_{\frac{z_i}{z_j}}$ est l'homothétie de rapport $\frac{z_i}{z_j}$. On écrira $f^*(\mathcal{V}(\beta))=\{f^{-1}(V(\beta)_i)\}$, $f^*(\mathring{\mathcal{V}}(\gamma))=\{f^{-1}(\mathring{V}(\gamma)_i)\}$, $f^*(\mathcal{V})=\{f^{-1}(V_i)\}$ les recouvrements de $X_t^d(\beta)$, $Y_t^d(\gamma)$, Z_t^d obtenus.

Dans le cas algébrique, les intersections d'éléments du recouvrement $f^*(\mathcal{V})$ sont des produits de copies de $\mathbb{A}^1$ et de $\mathbb{A}^1\backslash\{0\}$. Dans le cas tubulaire fermé, les intersections sur $f^*(\mathcal{V}(\beta))$ sont des produits de polycouronnes et de polydisques fermés et sont en particulier acycliques pour les faisceaux $\mathscr{O}^{(r)}$, $\mathscr{O}^{**}$ et $\mathbb{G}_m$ en topologie analytique 5.1. Dans tous les cas, toutes ces intersections sont connexes non vides et le nerf du recouvrement choisi est alors contractile.

Remarquons que si $t=d$, $X_d^d(\beta)=\mathbb{P}^d_{rig,L}$, la famille des $(X_t^d(\beta))_{\beta,m,t}$ contient les espaces projectifs. Enfin, il pourra être utile de renormaliser les variables de $\mathbb{P}^t_{rig,L}$ et de les réécrire sous la forme

$$\tilde{z}_i=\frac{z_i}{\varpi^{\beta_i}}.$$

5. La flèche f est bien définie sur ces espaces

5.2 Enoncés et stratégies

Dans les énoncés ci-dessous nous utiliserons systématiquement la topologie analytique. Nous allons prouver (voir 5.17, 5.18, 5.19, 5.24, 5.38) :

Théorème 5.8. *1. Les espaces projectifs, les fibrations Z_t^d, les arrangements tubulaires fermés et les arrangements algébriques généralisés* $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ *sont $\mathscr{O}^{(r)}$-acycliques.*

2. Les sections globales de $\mathscr{O}^{(r)}$ sur les arrangements algébriques généralisés sont constantes.

3. La cohomologie de $\mathscr{O}^{(r)}$ sur $X_t^d(\beta)$ est concentrée en degrés 0 et t. Quand $t \neq 0$, les sections globales sont constantes et la cohomologie en degré t s'identifie au complété p-adique de

$$\bigoplus_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{d-t}\\ |\alpha|\geq t+1+k}} \mathrm{H}^t_{\mathrm{zar}}(\mathbb{P}^t_{zar,\mathcal{O}_L}, \mathscr{O}(k-|\alpha|)) \otimes \mathcal{O}_L^{(r)}$$

Voir 5.17, 5.18, 5.31, 5.38 pour le résultat suivant :

Théorème 5.9. *1. Les espaces projectifs, les fibrations Z_t^d, les arrangements tubulaires fermés et les arrangements algébriques généralisés* $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ *sont $\mathscr{O}^{**}$-acycliques.*

2. Les sections globales de $\mathscr{O}^{**}$ sur les arrangements algébriques généralisés sont constantes.

3. La cohomologie de $\mathscr{O}^{**}$ sur $X_t^d(\beta)$ est concentrée en degrés 0 et t. Les sections globales sont constantes quand $t \neq 0$.

Le résultat suivant est une combinaison de 5.33, **??**, **??**, 5.38.

Théorème 5.10. *1. Les espaces projectifs vérifient :*

$$\mathrm{H}^k_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L}, \mathbb{G}_m) = \begin{cases} L^* \text{ si } k=0 \\ \mathbb{Z} \text{ si } k=1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2. La fibration $f : X_t^d(\beta) \to \mathbb{P}^t_{rig,L}$ induit une décomposition en produit direct :

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{an}}(X_t^d(\beta), \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{an}}(X_t^d(\beta), \mathscr{O}^{**}) \times \mathrm{H}^*_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L}, \mathbb{G}_m)$$

De plus, les sections globales sont constantes quand $t \neq 0$.

3. Les arrangements tubulaires fermés $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ *sont $\mathbb{G}_m$-acycliques et*

$$\mathscr{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{A}))/L^* \mathscr{O}^{**}(\mathrm{Int}(\mathcal{A})) = \mathbb{Z}[\mathcal{A}]^0$$

4. Les arrangements algébriques généralisés $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ *sont $\mathbb{G}_m$-acycliques et*

$$\mathscr{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{A}))/L^* = \mathbb{Z}\,[\![\mathcal{A}]\!]^0$$

Pour obtenir ces résultats, il faut d'abord calculer la cohomologie de $\mathscr{O}^{(r)}$ sur $X_t^d(\beta)$ (point 3. de 5.8) grâce aux résultats d'acyclicité de Van der Put et au calcul de la cohomologie de Cech sur le recouvrement $f^*(\mathcal{V}(\beta))$ (cf 5.19). Plus précisément, la fibration f permet de relier le complexe de Cech de $X_t^d(\beta)$ aux complexes de $\mathbb{P}^t_{rig,L}$ pour les faisceaux tordus $\mathscr{O}^{(r)}(k)$ (point 1. de 5.8 et 5.21 pour un énoncé plus fin). Le résultat se déduit de la cohomologie des faisceaux $\mathscr{O}(k)$ sur les espaces projectifs algébriques sur $\mathcal{O}_L$.

Le résultat d'acyclicité pour les arrangements tubulaires fermés découle de l'annulation de la cohomologie de $X_t^d(\beta)$ à partir du degré $t+1$ et de l'argument combinatoire 5.25 qui remplace la suite spectrale (2).

Le transfert des énoncés sur $\mathscr{O}^{(r)}$ à ceux de $\mathscr{O}^{**}$ résulte d'un argument sur les logarithmes tronqués 5.30. Pour le faisceau $\mathbb{G}_m$, on calcule encore la cohomologie de Cech des fibrations $X_t^d(\beta)$ sur le recouvrement $f^*(\mathcal{V}(\beta))$. Mais on a pour tout $I \subset [\![0,t]\!]$ une décomposition

$$\mathscr{O}^*(f^{-1}(V(\beta)_I)) = L^*\mathscr{O}^{**}(f^{-1}(V(\beta)_I)) \times \langle \frac{z_i}{z_j} : i,j \in I \rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}$$

qui induit les décompositions de la cohomologie du point 2. de 5.10 (cf 5.33) et celle des sections inversibles dans 5.10 point 3. (cf 5.31). Nous notons aussi que le complexe induit par les facteurs directes $\langle \frac{z_i}{z_j} : i,j \in I \rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}$ est celui apparaissant en géométrie algébrique, ce qui permet d'établir le point 1. de 5.10 par comparaison. D'après ce qui précède, on sait que la cohomologie de $X_t^d(\beta)$ s'annule à partir du degré $t+1$ ce qui nous donne l'acyclicité des arrangements tubulaires fermés pour $\mathbb{G}_m$ toujours grâce au lemme combinatoire 5.25.

Pour les arrangements algébriques généralisés $\mathcal{A}$, ils peuvent être approximés par des arrangements tubulaires fermés compatibles $\mathcal{A}_n$ d'ordre n. On dispose d'une suite exacte pour tout $s > 0$

$$0 \to \mathrm{R}^1 \varprojlim_n \mathrm{H}^{s-1}_{\mathrm{an}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n), \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}), \mathbb{G}_m) \to \varprojlim_n \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n), \mathbb{G}_m) \to 0$$

Le calcul dans le cas tubulaire fermé induit l'annulation de la cohomologie de $\mathbb{G}_m$ pour $s > 1$ et l'égalité $\mathrm{H}^1_{\mathrm{an}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}), \mathbb{G}_m) = \mathrm{R}^1 \varprojlim_n \mathscr{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n))$. Il s'agit alors de prouver $\mathrm{R}^1 \varprojlim_n \mathscr{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)) = 0$. D'après la décomposition 5.10 point 3. et le lemme 5.14, il suffit de trouver une constante c indépendante de n pour laquelle on a l'inclusion

$$\mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)) \subset \mathcal{O}_L^{(r)} + \varpi \mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{n-c}))$$

Pour établir cette identité, on raisonne par récurrence sur le rang de $\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)$ et on se ramène à montrer (cf 5.27 et 5.28 pour voir que cette condition est bien suffisante) que l'image de la flèche

$$\mathrm{H}^{\mathrm{rg}(\mathcal{A}_n)-1}_{\mathrm{an}}(\mathrm{Uni}(\mathcal{A}_n), \mathscr{O}^{(r)}) \to \mathrm{H}^{\mathrm{rg}(\mathcal{A}_n)-1}_{\mathrm{an}}(\mathrm{Uni}(\mathcal{A}_{n-1}), \mathscr{O}^{(r)})$$

est contenu dans $\varpi \mathrm{H}^{\mathrm{rg}(\mathcal{A}_n)-1}_{\mathrm{an}}(\mathrm{Uni}(\mathcal{A}_{n-1}), \mathscr{O}^{(r)})$. Grâce à 5.8 point 1., on peut voir ces groupes de cohomologie comme des sous-groupes des fonctions bornés de polycouronnes (cf 5.23) dont les flèches de restriction sont explicites et bien comprises 5.12. Le résultat découle alors de ce cas particulier.

Etudier la cohomologie des arrangements tubulaires fermés les espaces $X_t^d(\beta)$ est semblable à la stratégie de [SS91].Par exemple, le point 3. de 5.8 mimique l'axiome d'homotopie de [SS91, §2]. S'intéresser à $\mathscr{O}^{(r)}$ puis à $\mathscr{O}^{**}$ et enfin à $\mathbb{G}_m$ rappelle la preuve de [VdP82, théorème 3.25]. L'argument de passage à la limite s'inspire de [CDN20, sous-section 1.2].

Tous nos calculs utilisent de manière cruciale le résultat 5.1 de van der Put décrivant la cohomologie de quelques affinoïdes simples.

5.3 Cas des arrangements algébriques

Nous traitons d'abord le cas des arrangements algébriques. Les méthodes sont semblables dans le cas algébrique généralisé, qui sera étudié plus tard. Le résultat suivant est relativement élémentaire dans ce cas, alors que pour la deuxième preuve 5.29, nous aurons besoin d'une version plus forte qui nécessitera le point technique 5.22. Nous avons donc choisi de présenter cette preuve plus simple.

Lemme 5.11. *On considère le produit de polycouronnes et de polydisques suivant*

$$U = \{x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{A}^d_{rig,L} : \forall i, |\varpi|^{-r_i} \geq |x_i| \geq |\varpi|^{s_i}\}$$

où $(r_i)_i$ et $(s_i)_i$ sont des entiers (on s'autorisera $s_i = \infty$ pour les facteurs isomorphes à une boule fermée). De même on considère

$$V = \{x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{A}^d_{rig,L} : \forall i, |\varpi|^{-r_i-1} \geq |x_i| \geq |\varpi|^{s_i+1}\}$$

Pour toute fonction $f \in \mathscr{O}^+(U)$ qui est restriction d'une section à puissance bornée de V, on peut trouver $\lambda \in \mathcal{O}_L$ tel que $f - \lambda$ est divisible par ϖ dans $\mathscr{O}^+(U)$.

Démonstration. La description des espaces U et V nous fournit un système de coordonnées commun $(X_i)_i$. La famille de monômes $(\prod_{i:\nu_i\geq 0}(\varpi^{r_i}X_i)^{\nu_i}\prod_{j:\nu_j\geq 0}(\frac{\varpi^{s_j}}{X_j})^{\nu_j})_{\nu\in\mathbb{Z}^d}$ forme une base de Banach de $\mathscr{O}(U)$. Il en est de même pour la famille $(\prod_{i:\nu_i\geq 0}(\varpi^{r_i+1}X_i)^{\nu_i}\prod_{j:\nu_j\geq 0}(\frac{\varpi^{s_j+1}}{X_j})^{\nu_j})_{\nu\in\mathbb{Z}^d}$ sur $\mathscr{O}(V)$. Mais on remarque que pour tout ν (avec $|\nu| = \sum_j \nu_j$)

$$\prod_{i:\nu_i\geq 0}(\varpi^{r_i+1}X_i)^{\nu_i}\prod_{j:\nu_j\geq 0}(\frac{\varpi^{s_j+1}}{X_j})^{\nu_j} = \varpi^{|\nu|}\prod_{i:\nu_i\geq 0}(\varpi^{r_i}X_i)^{\nu_i}\prod_{j:\nu_j\geq 0}(\frac{\varpi^{s_j}}{X_j})^{\nu_j}$$

Il est alors aisé de voir que si une section à puissance bornée de V n'a pas de terme constant, sa restriction est dans $\varpi\mathscr{O}^+(U)$.

□

Nous avons une version relative de ce résultat

Lemme 5.12. *Soit Y un affinoïde sur L et U,V les affinoïdes définis dans le lemme précédent, alors la flèche naturelle de restriction induit un morphisme*

$$\mathscr{O}^+(Y\times V)/\mathscr{O}^+(Y) \to \varpi\mathscr{O}^+(Y\times U)/\mathscr{O}^+(Y)$$

Démonstration. C'est le même argument que pour 5.11 et cela s'obtient en comparant les développements uniques en série sur les deux espaces U,V :

Lemme 5.13. *Soit $Y = \mathrm{Sp}(A)$ un affinoïde sur L et U comme précédemment. Toute section de $Y \times U$ admet une écriture unique $\sum_\alpha f_\alpha Z^\alpha$ où $\|f_\alpha\|_Y \|Z^\alpha\|_U \to 0$ et la variable α parcourt l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{Z}^d$ tel que $\alpha_i \geq 0$ quand $s_i = \infty$. De plus, la norme spectrale vérifie l'identité $\|\sum_\alpha f_\alpha Z^\alpha\|_{Y\times U} = \max_\alpha \|f_\alpha\|_Y \|Z^\alpha\|_U$*

Démonstration. Par récurrence immédiate sur la dimension de U, et quitte à renormaliser les variables z_i, on se ramène aux cas $U = \mathrm{Sp}(L\langle Z_1\rangle)$ ou $U = \mathrm{Sp}(L\left\langle Z_1, \frac{p}{Z_1}\right\rangle)$. Nous nous plaçons dans le deuxième cas car le premier se traite de manière similaire. Écrivons $A = L\langle X_1, \cdots, X_n\rangle/I$. Par exactitude à droite du produit tensoriel, on a :

$$A\hat{\otimes}L\left\langle Z_1, \frac{p}{Z_1}\right\rangle \cong L\langle X_1, \cdots, X_n, Z_1, Z_2\rangle/(I, Z_1Z_2 - p)$$

On en déduit l'écriture en somme voulue.

Prouvons l'égalité pour la norme spectrale. Développons une section $f = \sum_{n\geq 0} f_n Z_1^n + \sum_{m>0} f_m(\frac{p}{Z_1})^m$ et appelons $\pi : Y\times U \to Y$ la projection. Pour tout $y \in Y(C)$, la restriction de f sur $\pi^{-1}(y) = \mathrm{Sp}(K(y)\left\langle Z_1, \frac{p}{Z_1}\right\rangle)$ s'écrit :

$$f = \sum_{n\geq 0} f_n(y)Z_1^n + \sum_{m>0} f_m(y)(\frac{p}{Z_1})^m$$

la norme spectrale sur $\pi^{-1}(y)$ est donnée par $\max_{n,m}(|f_n(y)|, |f_m(y)|)$. La norme spectrale totale vérifie $\|f\|_{Y\times U} = \max_y \max_{n,m}(|f_n(y)|, |f_m(y)|) = \max_{n,m}(|f_n|, |f_m|)$ et on en déduit l'égalité voulue. □

En tronquant ces développements, on voit que $\mathscr{O}^+(Y)$ est un facteur direct de $\mathscr{O}^+(Y \times V)$ et $\mathscr{O}^+(Y \times U)$ et que la flèche de l'énoncé est exactement la restriction naturelle au niveau des supplémentaires usuels. □

Le résultat intermédiaire 5.12 est utile au vu du point technique général suivant :

Proposition 5.14. *Soit $X = \bigcup_n U_n = \bigcup_n \mathrm{Sp}(A_n)$ une réunion croissante de L–affinoïdes. Supposons l'existence d'une constante c indépendante de n tel que*

$$\mathscr{O}^+(U_{n+c}) \subset \mathcal{O}_L + \varpi \mathscr{O}^+(U_n)$$

Alors les sections globales des faisceaux $\mathscr{O}^+$, $\mathscr{O}^{(r)}$, $\mathscr{O}^{**}$ et $L^*\mathscr{O}^{**}$ sont constantes et on a

$$\mathrm{R}^1 \varprojlim_n \mathscr{F}(U_n) = 0$$

pour $\mathscr{F} = \mathscr{O}^+, \mathscr{O}^{(r)}, \mathscr{O}^{**}, L^*\mathscr{O}^{**}$.

Cela découle du résultat suivant :

Lemme 5.15. *Soit une suite décroissante de groupes abéliens complets $(G_n)_n$ dont la topologie est induite par des bases de voisinage par des sous groupes ouverts $(G_n^{(i)})_i$ avec $G_n = G_n^{(0)}$. Supposons $G_{n+1}^{(i)} \subset G_n^{(i)}$ pour tous i, n (en particulier les inclusions sont continues).*

S'il existe un sous-groupe $H \subset \bigcap_n G_n$ fermé dans chaque G_n ie. $H = \bigcap_i H + G_n^{(i)}$ vérifiant

$$G_{n+c}^{(i)} \subset H + G_n^{(i+1)} \tag{3}$$

pour une constante c indépendante de i, n alors

$$\bigcap_n G_n = \varprojlim_n G_n = H \text{ et } \mathrm{R}^1 \varprojlim_n G_n = 0.$$

Démonstration. On rappelle que pour un système projectif de groupes additifs $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de transition $\varphi_n : \Gamma_{n+1} \to \Gamma_n$, le groupe $\mathrm{R}^1 \varprojlim_n \Gamma_n$ est le conoyau de la flèche [6]

$$\begin{aligned} \delta : \prod_n \Gamma_n &\to \prod_n \Gamma_n \\ (g_n)_n &\mapsto (g_n - \varphi_n(g_{n+1}))_n \end{aligned}$$

Par abus, les éléments de $\prod_n \Gamma_n$ seront appelés cocycles et ceux de l'image de δ seront des cobords.

Revenons à G_n. On veut prouver la première égalité de l'énoncé et donc l'inclusion $\bigcap_n G_n \subset H$ (l'autre étant vérifiée par hypothèse). D'après (3), on vérifie aisément par récurrence l'inclusion $G_{cn} \subset H + G_0^{(n)}$ pour tout n d'où

$$\bigcap_n G_{cn} \subset \bigcap_n H + G_0^{(n)} = H$$

par hypothèse de fermeture de H.

Calculons maintenant le groupe $\mathrm{R}^1 \varprojlim_n G_n$. Prenons un cocycle $(f_n)_n$ et montrons que c'est un cobord. Toujours d'après (3), on peut trouver par récurrence immédiate un élément $h_n \in H$ tq pour tout k, $r < c$, on a

$$f_{n+kc+r} - h_{n+kc+r} \in G_n^{(k)}$$

6. Dans le cas où on a un préfaisceau $\mathscr{F}$ sur un espace topologique $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ où $\mathcal{U} = \{U_n\}$ est un recouvrement croissant admissible par des ouverts et $(G_n)_n = (\mathscr{F}(U_n))_n$, on a en fait $\mathrm{R}^1 \varprojlim_n \mathscr{F}(U_n) = \check{\mathrm{H}}^1(X, \mathcal{U}, \mathscr{F})$

Dans ce cas, la somme $\sum_{m\geq n} f_m - \lambda_m$ converge dans G_n pour tout entier n et vérifie

$$\delta((\sum_{m\geq n} f_m - \lambda_m)_n) = (f_n)_n - (h_n)_n$$

Donnons-nous $\tilde{h}_0 \in H$ et construisons par récurrence une suite $(\tilde{h}_n)_n$ tq $\tilde{h}_{n+1} = \tilde{h}_n - h_n$ ie. $\delta((\tilde{h}_n)_n) = (h_n)_n$. On en déduit que $(f_n)_n$ est en fait en cobord.

□

Démonstration. (5.14) Les constantes $\mathscr{F}(U_n) \cap L$ forment des fermés de $\mathscr{F}(U_n)$ pour $\mathscr{F} = \mathscr{O}^+, \mathscr{O}^{(r)}, \mathscr{O}^{**}, L^*\mathscr{O}^{**}$. Les suites décroissantes $(\mathscr{O}^+(U_n))_n$ et $(\mathscr{O}^{(r)}(U_n)_n)$ de groupes topologiques vérifient clairement l'inclusion (3) par hypothèse. Montrons que c'est encore le cas pour les suites $(L^*\mathscr{O}^{**}(U_n))_n$ et $(\mathscr{O}^{**}(U_n)_n)$. Raisonnons uniquement pour le second, le premier s'en déduira aisément. Soit $1 + \varpi^k f$ avec $f \in \mathscr{O}^{++}(U_n)$, on peut trouver une constante $\lambda \in \mathfrak{m}_L$ tq $f - \lambda \in \varpi\mathscr{O}^{++}(U_{n-1})$. Alors, on a

$$\frac{1+\varpi^k f}{1+\varpi^k\lambda} = 1 + \varpi^k \frac{f-\lambda}{1+\varpi^k\lambda} \in 1 + \varpi^{k+1}\mathscr{O}^{++}(U_{n-1})$$

Le résultat 5.14 est alors une conséquence directe du lemme précédent. □

Corollaire 5.16. *La base canonique $(e_i)_{0\leq i\leq d}$ de K^{d+1} définit une collection de $d+1$ hyperplans $V^+(z_i) \subset \mathbb{P}^d_{rig,L}$ et on note $\mathcal{B}$ l'arrangement $\{V^+(z_i)\}_{0\leq i\leq r}$. L'espace* $\mathrm{Int}(\mathcal{B})$ *est acyclique pour les faisceaux $\mathscr{O}^{(r)}$, $\mathscr{O}^{**}$ et $\mathbb{G}_m$. Les sections globales de $\mathscr{O}^+$ et $\mathscr{O}^{**}$ sont constantes et*

$$\mathcal{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{B})) = L^* \times \left\langle \frac{z_i}{z_0} \right\rangle_{1\leq i\leq r}$$

Démonstration. On voit cet arrangement d'hyperplans comme le produit $(\mathbb{A}^1_{rig,L}\backslash\{0\})^r \times \mathbb{A}^{d-r}_{rig,L}$ On le recouvre par $(X_n)_n$ où (en posant $x_i = z_i/z_0$)

$$X_n = \{x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{A}^d_{rig,L} : \forall i \leq r, |\varpi|^{-n} \geq |x_i| \geq |\varpi|^n, \forall j \geq r+1, |\varpi|^{-n} \geq |x_j|\}$$

On a la suite exacte :

$$0 \to R^1 \varprojlim \mathrm{H}^{s-1}_{\mathrm{an}}(X_n, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathrm{Int}(\mathcal{B}), \mathscr{F}) \to \varprojlim \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X_n, \mathscr{F}) \to 0$$

Mais $\mathrm{Int}(\mathcal{B}) = \bigcup_n X_n$ est un recouvrement admissible constitué de produits de polycouronnes et polydisques, chacun des termes est acyclique pour les faisceaux $\mathscr{O}^{(r)}$, $\mathscr{O}^{**}$ et $\mathbb{G}_m$ d'après 5.1. Grâce au résultat 5.12 on peut appliquer 5.14 et on en déduit l'énoncé pour les faisceaux $\mathscr{O}^{(r)}$ et $\mathscr{O}^{**}$.

D'après 4.12, on a pour tout n

$$\mathscr{O}^*(X_n) = L^*\mathscr{O}^{**}(X_n) \times \langle x_i \rangle_{1\leq i\leq r} = L^*\mathscr{O}^{**}(X_n) \times \left\langle \frac{z_i}{z_0} \right\rangle_{1\leq i\leq r}$$

Ainsi $\mathscr{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{B})) = \varprojlim_n L^*\mathscr{O}^{**}(X_n) \times \varprojlim_n \left\langle \frac{z_i}{z_0} \right\rangle_{1\leq i\leq r} = L^* \times \left\langle \frac{z_i}{z_0} \right\rangle_{1\leq i\leq r}$ (en utilisant 5.14) et

$$\mathrm{Pic}_L(\mathrm{Int}(\mathcal{B})) = \mathrm{R}^1 \varprojlim_n L^*\mathscr{O}^{**}(X_n) \times \mathrm{R}^1 \varprojlim_n \left\langle \frac{z_i}{z_0} \right\rangle_{1\leq i\leq r} = 0$$

□

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de cette section :

Théorème 5.17. *Les arrangements algébriques sont $\mathscr{O}^{(r)}$, $\mathscr{O}^{**}$-acycliques et les sections globales sont constantes.*

Démonstration. Étudions d'abord le cas des fibrations :

Lemme 5.18. *Les fibrations Z_t^d sont acycliques pour $\mathscr{O}^{(r)}$ et $\mathscr{O}^{**}$, et les sections globales sont constantes.*

Démonstration. On raisonne sur la suite spectrale de Cech pour le recouvrement $f^*(\mathcal{V})$ de Z_t^d. D'après le théorème 5.1 point 2., chaque intersection est $\mathscr{O}^{(r)}$-acyclique et on se ramène à calculer la cohomologie de Cech sur le recouvrement $f^*(\mathcal{V})$. Mais par (5.16), le complexe de Cech est isomorphe au complexe de Cech sur $f^*(\mathcal{V})$ associé au faisceau constant $\mathcal{O}_L^{(r)}$. Mais le nerf du recouvrement est le simplexe standard Δ^t de dimension t, qui est contractile. Ceci montre l'annulation de la cohomologie en degré supérieur ou égal à 1. On obtient aussi aisément que $\mathscr{O}^{(r)}(Z_t^d) = \mathcal{O}_L^{(r)}$. On raisonne de même pour $\mathscr{O}^{**}$. □

Nous pouvons maintenant terminer la preuve de 5.17. La flèche d'inclusion $Z_t^d \to \mathbb{P}^d_{rig,L}$ induit alors des isomorphismes

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^d_{rig,L}, \mathscr{O}^{(r)}) \cong \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(Z_t^d, \mathscr{O}^{(r)})$$

pour tout s positif. D'où l'annulation de $\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^d_{rig,L}, Z_t^d, \mathscr{O}^{(r)})$. Alors la suite spectrale (2) dégénère et on obtient $\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^d_{rig,L}, \mathrm{Int}(\mathcal{A}), \mathscr{O}^{(r)}) = 0$ pour tout s. Ce qui se traduit par

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}), \mathscr{O}^{(r)}) = \begin{cases} \mathcal{O}_L^{(r)} \text{ si } s = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

On raisonne de même pour $\mathscr{O}^{**}$.

□

5.4 Cohomologie analytique à coefficients dans $\mathscr{O}^{(r)}$

5.4.1 Cohomologie des fibrations $X_t^d(\beta)$.

Nous allons chercher à déterminer la cohomologie des espaces $X_t^d(\beta)$. Commençons par faire quelques rappels sur les faisceaux localement libres de rang 1 sur $\mathbb{P}^t_{rig,L}$ et $\mathbb{P}^t_{zar,L}$. Dans le cas algébrique, ils sont décrits par les faisceaux tordus $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^t_{zar,L}}(k)$ avec k dans $\mathbb{Z}$. Ce faisceau se trivialise sur le recouvrement usuel $\mathcal{V}$ et les fonctions de transition font commuter le diagramme [7]

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^t_{zar,L}}(k)|_{V_{\{i,j\}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{O}_{V_i}|_{V_j} \\ \downarrow \mathrm{Id} & & \downarrow m_{(\frac{\tilde{z}_i}{\tilde{z}_j})^{-k}} \\ \mathscr{O}_{\mathbb{P}^t_{zar,L}}(k)|_{V_{\{i,j\}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{O}_{V_j}|_{V_i} \end{array}$$

En géométrie rigide, on peut encore définir les faisceaux tordus $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k)$, $\mathscr{O}^+_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k)$ (version à puissance bornée) et $\mathscr{O}^{(r)}_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k)$ grâce aux mêmes morphismes de transition :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}^+_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k)|_{V(\beta)_{\{i,j\}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{O}^+_{V(\beta)_i}|_{V(\beta)_j} \\ \downarrow \mathrm{Id} & & \downarrow m_{(\frac{\tilde{z}_i}{\tilde{z}_j})^{-k}} \\ \mathscr{O}^+_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k)|_{V(\beta)_{\{i,j\}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{O}^+_{V(\beta)_j}|_{V(\beta)_i} \end{array}$$

7. Dans ce qui suit, on note aussi $\tilde{z}$ la variable sur $\mathbb{P}^t_{zar,A}$ ie. $\mathbb{P}^t_{zar,A} = \mathrm{Proj}(A[\tilde{z}_0, \cdots, \tilde{z}_t])$

On rappelle que l'on a bien $\frac{\tilde{z}_i}{\tilde{z}_j} \in \mathscr{O}^+(V(\beta)_{\{i,j\}})$. On construit grâce à un diagramme similaire $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k)$, $\mathscr{O}^{(r)}_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k)$. D'après GAGA (voir aussi 5.33), les $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k)$ sont les seuls faisceaux localement libres de rang 1. Nous pouvons aussi définir ces faisceaux tordus sur les fibrations $X^d_t(\beta)$ en tirant en arrière par f i.e. $\mathscr{O}_{X^d_t(\beta)}(k) = f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k)$, $\mathscr{O}^+_{X^d_t(\beta)}(k) = f^*\mathscr{O}^+_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k)$ et $\mathscr{O}^{(r)}_{X^d_t(\beta)}(k) = f^*\mathscr{O}^{(r)}_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k)$. L'un des points techniques de l'argument 5.36 montrera que $\mathscr{O}_{X^d_t(\beta)}(k) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_{rig,L}}(k)|_{X^d_t(\beta)}$.

En algébrique, la cohomologie de Zariski de ces faisceaux tordus est connue et peut être trouvée dans ([Har77, théorème 5.1 section III]) par exemple. Pour tout anneau A et k un entier, la cohomologie de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^t_{zar,A}}(k)$ est concentrée en degré 0 si k est positif et en degré t si k est négatif. Plus précisément, on a des isomorphismes :

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{zar}}(\mathbb{P}^t_{zar,A}, \mathscr{O}(k)) \cong A[T_0, \dots, T_t]_k \text{ si } k \text{ est positif}$$

$$\mathrm{H}^t_{\mathrm{zar}}(\mathbb{P}^t_{zar,A}, \mathscr{O}(k)) \cong (\frac{1}{T_0 \dots T_t} A[\frac{1}{T_0}, \dots, \frac{1}{T_t}])_k \text{ si } k \text{ est négatif}$$

où $A[T_0, \dots, T_t]_k$ désigne l'ensemble des polynômes homogènes de degré k.

On se propose de calculer la cohomologie de $\mathscr{O}^{(r)}$ des fibrations $X^d_t(\beta)$. Plus précisément, nous souhaitons montrer :

Théorème 5.19. — *La cohomologie à coefficients dans $\mathscr{O}^{(r)}(k)$ de l'espace projectif $\mathbb{P}^t_{rig,L}$ est concentrée en degré 0 si k est positif et en degré t si k est strictement négatif. De même la cohomologie des fibrations $X^d_t(\beta)$ est concentrée en degrés 0 et t.*

— *Plus précisément, on a des isomorphismes :*

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L}, \mathscr{O}^{(r)}(k)) \cong \mathcal{O}^{(r)}_L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathrm{H}^0_{\mathrm{zar}}(\mathbb{P}^t_{zar,\mathcal{O}_L}, \mathscr{O}(k)) \cong \mathcal{O}^{(r)}_L[T_0, \dots, T_t]_k$$

$$\mathrm{H}^t_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L}, \mathscr{O}^{(r)}(k)) \cong \mathcal{O}^{(r)}_L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathrm{H}^0_{\mathrm{zar}}(\mathbb{P}^t_{zar,\mathcal{O}_L}, \mathscr{O}(k)) \cong (\frac{1}{T_0 \dots T_t} \mathcal{O}^{(r)}_L[\frac{1}{T_0}, \dots, \frac{1}{T_t}])_k$$

De plus, pour $r \leq r'$, les flèches suivantes sont injectives

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L}, \mathscr{O}^{(r)}(k)) \to \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L}, \mathscr{O}^{(r')}(k))$$

— *On dispose d'isomorphismes*

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{an}}(X^d_t(\beta), \mathscr{O}^{(r)}(k)) \simeq \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{d-t} \\ |\alpha| \leq k}} \mathrm{H}^0_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L}, \mathscr{O}^{(r)}(k - |\alpha|)),$$

en particulier elle est nulle si $k < 0$ et s'identifie à $\mathcal{O}_L$ si $k = 0$. Enfin, $\mathrm{H}^t_{\mathrm{an}}(X^d_t(\beta), \mathscr{O}^{(r)}(k))$ est isomorphe au complété p-adique de

$$\bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{d-t} \\ |\alpha| \geq t+1+k}} \mathrm{H}^t_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L}, \mathscr{O}^{(r)}(k - |\alpha|))$$

Démonstration. Les intersections d'éléments du recouvrement $\mathcal{V}(\beta)$ et $f^*(\mathcal{V}(\beta))$ sont des produits de polycouronnes et de polydisques fermés dont les polyrayons sont dans $|L^*|$. Ainsi, on se ramène à calculer la cohomologie de Cech sur les recouvrements $\mathcal{V}(\beta)$ et $f^*(\mathcal{V}(\beta))$ (cf 5.1). De plus, pour toute section non nulle h de $\mathscr{O}^{(r)}(V(\beta)_I)$ (resp. $\mathscr{O}^{(r)}(f^{-1}(V(\beta)_I))$), il existe une constante $\lambda \in \mathscr{O}^{(r)}_L$ telle que h/λ soit de norme 1. On en déduit $\mathscr{O}^{(r)}(V(\beta)_I) = \mathscr{O}^+(V(\beta)_I) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathscr{O}^{(r)}_L$ (resp. $\mathscr{O}^{(r)}(f^{-1}(V(\beta)_I)) = \mathscr{O}^+(f^{-1}(V(\beta)_I)) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathscr{O}^{(r)}_L$) donc

$$\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbb{P}^t_{rig,L}; \mathscr{O}^{(r)}(k), f^*(\mathcal{V}(\beta))) = \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbb{P}^t_{rig,L}; \mathscr{O}^+(k), \mathcal{V}(\beta)) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathscr{O}^{(r)}_L$$

$$\check{\mathcal{C}}^\bullet(X_t^d(\beta);\mathscr{O}^{(r)}(k),\mathcal{V}(\beta))=\check{\mathcal{C}}^\bullet(X_t^d(\beta);\mathscr{O}^+(k),f^*(\mathcal{V}(\beta)))\otimes_{\mathcal{O}_L}\mathscr{O}_L^{(r)}$$

Par platitude, on obtient les isomorphismes au niveau des groupes de cohomologie

$$\check{\mathrm{H}}^*(\mathbb{P}^t_{rig,L};\mathscr{O}^{(r)}(k),\mathcal{V}(\beta))=\check{\mathrm{H}}^*(\mathbb{P}^t_{rig,L};\mathscr{O}^+(k),\mathcal{V}(\beta))\otimes_{\mathcal{O}_L}\mathscr{O}_L^{(r)}$$

$$\check{\mathrm{H}}^*(X_t^d(\beta);\mathscr{O}^{(r)}(k),f^*(\mathcal{V}(\beta)))=\check{\mathrm{H}}^*(X_t^d(\beta);\mathscr{O}^+(k),f^*(\mathcal{V}(\beta)))\otimes_{\mathcal{O}_L}\mathscr{O}_L^{(r)}$$

et l'injectivité des inclusions quand r varie. Le reste de cette section sera consacré au calcul de ces groupes de cohomologie de Cech sur $\mathscr{O}^+$. Cela repose sur le lemme général suivant :

Lemme 5.20. *Soit $\mathcal{C}^\bullet$ un complexe de $\mathbb{Z}_p$-modules plats. Si $\mathrm{H}^j(\mathcal{C}^\bullet)$ est sans p-torsion pour tous j, alors on a un isomorphisme naturel entre les complétions p-adiques $\mathrm{H}^j(\widehat{\mathcal{C}^\bullet})\simeq\widehat{\mathrm{H}^j(\mathcal{C}^\bullet)}$.*

Démonstration. Soit $A^j=\mathrm{Im}(d^{j-1}:\mathcal{C}^{j-1}\to\mathcal{C}^j)$ et $B^j=\ker(d^j:\mathcal{C}^j\to\mathcal{C}^{j+1})$. On a une suite exacte $0\to A^j\to B^j\to\mathrm{H}^j(\mathcal{C}^\bullet)\to 0$ d'où l'exactitude de $0\to A^j/p^n\to B^j/p^n\to\mathrm{H}^j(\mathcal{C}^\bullet)/p^n\to 0$ car $\mathrm{H}^j(\mathcal{C}^\bullet)$ est sans p-torsion par hypothèse. Par Mittag-Leffler, on obtient encore une suite exacte $0\to\widehat{A}^j\to\widehat{B}^j\to\widehat{\mathrm{H}^j(\mathcal{C}^\bullet)}\to 0$. Il suffit donc de montrer que $\widehat{A}^j=\mathrm{Im}(\hat{d}^{j-1}:\widehat{\mathcal{C}}^{j-1}\to\widehat{\mathcal{C}}^j)$ et $\widehat{B}^j=\ker(\hat{d}^j:\widehat{\mathcal{C}}^j\to\widehat{\mathcal{C}}^{j+1})$. Par platitude de $\mathcal{C}^{j+1}$, on a l'exactitude de la suite $0\to B^j/p^n\to\mathcal{C}^j/p^n\to A^{j+1}/p^n\to 0$ d'où celle de

$$0\to B^j/p^n\to\mathcal{C}^j/p^n\to\mathcal{C}^{j+1}/p^n$$

car on a montré que $A^{j+1}/p^n\to B^{j+1}/p^n$ est injective. En passant à la limite projective dans les deux suites précédentes, on obtient $\widehat{B}^j=\ker\hat{d}^j$ et $\widehat{A}^{j+1}\cong\widehat{\mathcal{C}}^j/\widehat{B}^j=\widehat{\mathcal{C}}^j/\ker\hat{d}^j\cong\mathrm{Im}\,\hat{d}^j$.

□

Corollaire 5.21. *La cohomologie de Cech de $\mathscr{O}^+_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k)$ sur le recouvrement $V(\beta)$ est concentrée en degré 0 si k est positif et en degré t si k est strictement négatif. Plus précisément, on a des isomorphismes :*

$$\check{\mathrm{H}}^0(\mathbb{P}^t_{rig,L},\mathscr{O}^+(k),V(\beta))\cong\mathcal{O}_L[T_0,\dots,T_t]_k\ \textit{si } k \textit{ est positif}$$

$$\check{\mathrm{H}}^t(\mathbb{P}^t_{rig,L},\mathscr{O}^+(k),V(\beta))\cong(\frac{1}{T_0\dots T_t}\mathcal{O}_L[\frac{1}{T_0},\dots,\frac{1}{T_t}])_k\ \textit{si } k \textit{ est négatif}$$

Démonstration. Considérons les complexes

$$\mathcal{C}^s_\alpha=\bigoplus_{\substack{|I|=s+1\\ \forall i\in I^c,\alpha_i\geq 0}}\mathcal{O}_L\tilde{z}^\alpha$$

et notons que l'on a

$$\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbb{P}^t_{zar,\mathcal{O}_L};\mathscr{O}_{\mathbb{P}^t_{zar,\mathcal{O}_L}}(k),\mathcal{V})=\bigoplus_{|\alpha|=k}\mathcal{C}^\bullet_\alpha$$

par la description des sections de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^t_{zar,\mathcal{O}_L}}(k)$ sur les ouverts de l'espace projectif. D'après la description des fonctions analytiques de norme spectrale au plus 1 sur un polydisque ou une polycouronne, le complexe $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbb{P}^t_{rig,L};\mathscr{O}^+_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k),\mathcal{V}(\beta))$ est la complétion p-adique du complexe $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbb{P}^t_{zar,\mathcal{O}_L};\mathscr{O}_{\mathbb{P}^t_{zar,\mathcal{O}_L}}(k),\mathcal{V})$. Le lemme 5.20 montre alors que les groupes de cohomologie de $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbb{P}^t_{rig,L};\mathscr{O}^+_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k),\mathcal{V}(\beta))$ s'identifient aux complétés p-adiques des groupes de cohomologie $\mathrm{H}^*_{\mathrm{zar}}(\mathbb{P}^t_{zar,\mathcal{O}_L},\mathscr{O}_{\mathbb{P}^t_{zar,\mathcal{O}_L}}(k))$. Comme ces derniers sont de type fini sur $\mathcal{O}_L$, la complétion est en fait inutile, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 5.22. *Soit k un entier. La cohomologie de Cech de $\mathscr{O}^+(k)$ sur $X_t^d(\beta)$ pour le recouvrement $f^*(\mathcal{V}(\beta))$ est concentrée en degrés 0 et t. De plus on dispose d'isomorphismes*

$$\check{\mathrm{H}}^0(X_t^d(\beta), \mathscr{O}^+(k), f^*(\mathcal{V}(\beta))) \simeq \bigoplus_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{d-t}\\ |\alpha|\leq k}} \mathrm{H}^0_{\mathrm{zar}}(\mathbb{P}^t_{zar,\mathcal{O}_L}, \mathscr{O}(k-|\alpha|)),$$

en particulier elle est nulle si $k<0$ et s'identifie à $\mathcal{O}_L$ si $k=0$. Enfin, $\check{\mathrm{H}}^t(X_t^d(\beta), \mathscr{O}^+(k), f^*(\mathcal{V}(\beta)))$ est isomorphe au complété p-adique de

$$\bigoplus_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{d-t}\\ |\alpha|\geq t+1+k}} \mathrm{H}^t_{\mathrm{zar}}(\mathbb{P}^t_{zar,\mathcal{O}_L}, \mathscr{O}(k-|\alpha|))$$

Démonstration. Pour tout $i\in I\subset[\![0,t]\!]$, on a une trivialisation $f^{-1}(V(\beta)_I)\cong V(\beta)_I\times\mathbb{B}_L^{d-t}(-\beta_i)$ et donc 5.13 tout $\lambda_I\in\mathscr{O}^+(k)(f^{-1}(V(\beta)_I))$ s'écrit de manière unique

$$\lambda_I=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{d-t}}\lambda_{I,\alpha}(z)\left(\frac{w^{(i)}}{\varpi^{-\beta_{i_I}}}\right)^\alpha$$

où $z=[z_0,\cdots,z_t]$ désigne la variable de $V(\beta)_I$ vu comme ouvert de $\mathbb{P}^t_{rig,L}$, $w^{(i)}=(w_1^{(i)},\cdots,w_{d-t}^{(i)})$ est la variable de $\mathbb{B}^{d-t}(\beta_i)$, les sections $\lambda_{I,\alpha}$ sont dans $\mathscr{O}^+(k)(V(\beta)_I)$ et tendent vers 0 p-adiquement.

Considérons les facteurs directs du complexe de Cech étudié $(\mathcal{C}^\bullet_\alpha)_\alpha$

$$\mathcal{C}^s_\alpha:=\bigoplus_{|I|=s+1}\left(\frac{w^{(i)}}{\varpi^{-\beta_i}}\right)^\alpha\mathscr{O}^+(k)(V(\beta)_I)$$

On a la relation $\frac{w^{(i)}}{\varpi^{-\beta_i}}=\frac{\tilde{z}_j}{\tilde{z}_i}\frac{w^{(j)}}{\varpi^{-\beta_j}}$ et l'élément $\left(\left(\frac{w^{(i)}}{\varpi^{-\beta_i}}\right)^\alpha\right)_i$ définit une section de $\mathscr{O}^+(-|\alpha|)(\mathbb{P}^t_{rig,L})$ d'où un isomorphisme :

$$\mathcal{C}^\bullet_\alpha\cong\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbb{P}^t_{rig,L};\mathscr{O}^+_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k-|\alpha|),\mathcal{V}(\beta))$$

D'après la discussion précédente $\check{\mathcal{C}}^s(X_t^d(\beta);\mathscr{O}^+_{X_t^d(\beta)}(k),\ f^*(\mathcal{V}(\beta)))$ s'identifie au complété p-adique des complexes $(\mathcal{C}^\bullet_\alpha)_\alpha$. Le lemme 5.20 permet alors de conclure. □

□

Remarque 5.23. En fixant une trivialisation $f^{-1}(V(\beta)_I)\cong V(\beta)_I\times\mathbb{B}_L^{d-t}(-\beta_i)$ pour $i\in I=[\![0,t]\!]$, on peut voir le groupe $\check{\mathrm{H}}^t(X_t^d(\beta);\mathscr{O}^+,f^*(\mathcal{V}))$ comme un facteur direct de $\mathscr{O}^+(V(\beta)_I\times\mathbb{B}_L^{d-t}(-\beta_i))/\mathscr{O}^+(V(\beta)_I)$

5.4.2 Cohomologie des complémentaires de tubes d'hyperplans

Nous pouvons maintenant déterminer la cohomologie de $\mathscr{O}^{(r)}$ d'un arrangement $\mathcal{A}$ tubulaire fermé d'ordre n. Nous souhaitons établir :

Théorème 5.24. *Les arrangements tubulaires fermés $\mathcal{A}$ sont $\mathscr{O}^{(r)}$-acycliques.*

Cela découle du principe général suivant :

Lemme 5.25. *Soit X un L-espace analytique et $\mathcal{U}=\{U_i:i\in I\}$ une famille d'ouverts de X. Soit* H *une théorie cohomologique vérifiant la suite exacte longue de Mayer-Vietoris tel que pour toute famille finie J de $\mathcal{U}$, les unions $\bigcup_{i\in J}U_i$ n'ont pas de cohomologie en degré supérieur ou égal à $|J|$. Sous ces hypothèses, toute intersection finie $\bigcap_{i\in J}U_i$ sont acycliques pour la cohomologie* H.

Il est à noter que d'après 5.22, les complémentaires des voisinages tubulaires d'hyperplans vérifient les hypothèses pour H la cohomologie analytique à coefficients dans $\mathscr{O}^{(r)}$. En effet, pour $\mathcal{A}$ un arrangement tubulaire fermé, la cohomologie d'un espace de la forme $\mathrm{Uni}(\mathcal{B})$, avec $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, s'annule en degré supérieur ou égal à $\mathrm{rg}(\mathcal{B}) \leq |\mathcal{B}|$.

Démonstration. On peut supposer que $I = [\![1, n]\!]$ et on raisonne par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant évident. Supposons que le résultat est vrai pour $n-1$. Il suffit de démontrer l'acyclicité de $Y = \cap_{i=1}^{n} U_i$ (les autres intersections étant traitées par l'hypothèse de récurrence). Notons $V_i = U_i \cap U_n$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et observons que $Y = V_1 \cap ... \cap V_{n-1}$. Il suffit donc (grâce à l'hypothèse de récurrence) de montrer que la cohomologie de $\cup_{i\in J} V_i$ s'annule en degré supérieur ou égal à $|J|$ quand $J \subset \{1, 2, ..., n-1\}$. Soit donc $k \geq |J|$ et $V^J = \cup_{i\in J} V_i = U^J \cap U_n$, où $U^J = \cup_{i\in J} U_i$. Une partie de la suite de Mayer-Vietoris s'écrit

$$\mathrm{H}^k(U^J \cup U_n) \to \mathrm{H}^k(U^J) \oplus \mathrm{H}^k(U_n) \to \mathrm{H}^k(V^J) \to \mathrm{H}^{k+1}(U^J \cup U_n).$$

Puisque $k+1 \geq |J \cup \{n\}|$, le terme $\mathrm{H}^{k+1}(U^J \cup U_n)$ s'annule par hypothèse, et il en est de même de $\mathrm{H}^k(U_n)$ et $\mathrm{H}^k(U^J)$, donc aussi de $\mathrm{H}^k(V^J)$, ce qui permet de conclure.

□

Nous pouvons aussi tirer des informations importantes sur les sections globales à puissances bornées des arrangements $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$. Nous commencerons par ce lemme général.

Lemme 5.26. *Soit X un espace analytique, $\mathscr{F}$ un faisceau en groupe abélien et $\mathcal{U} = \{U_i\}$ une famille d'ouverts de X tel que toute intersection finie U_I est $\mathscr{F}$-acyclique. Dans ce cas, on a :*

$$\mathscr{F}(U_I) = \sum_{J\in E_I} r_{J,I}(\mathscr{F}(U_J))$$

où $E_I = \{J \subset I : J \neq \emptyset$ et $\mathrm{H}^{|J|-1}_{\mathrm{an}}(\bigcup_{j\in J} U_j, \mathscr{F}) \neq 0\}$ et $r_{J,I} : \mathscr{F}(U_J) \to \mathscr{F}(U_I)$ est la flèche de restriction.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le cardinal de I. Le résultat est trivial quand ce dernier vaut 1. Fixons I et supposons le résultat pour toute partie stricte de I. Si $\mathrm{H}^{|I|-1}_{\mathrm{an}}(\bigcup_{i\in I} U_i, \mathscr{F}) \neq 0$, c'est tautologique car $I \in E_I$. Sinon, on a par hypothèse

$$\mathrm{H}^{|I|-1}_{\mathrm{an}}(\bigcup_{i\in I} U_i, \mathscr{F}) = \check{\mathrm{H}}^{|I|-1}(\bigcup_{i\in I} U_i, \{U_i : i \in I\}, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(U_I)/\sum_{i\in I} r_{I\setminus\{i\},I}(\mathscr{F}(U_{I\setminus\{i\}})) = 0$$

Mais par hypothèse de récurrence, $r_{I\setminus\{i\},I}(\mathscr{F}(U_{I\setminus\{i\}})) \subset \sum_{J\in E_{I\setminus\{i\}}} r_{J,I}(\mathscr{F}(U_J)) \subset \sum_{J\in E_I} r_{J,I}(\mathscr{F}(U_J))$ d'où le résultat.

□

Corollaire 5.27 (Décomposition en éléments simples)**.** *Soit $\mathcal{A}$ un arrangement tubulaire fermé, on a*

$$\mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A})) = \sum_{\substack{\mathcal{B}\subset\mathcal{A} \\ |\mathcal{B}|=\mathrm{rg}(\mathcal{B})<d+1}} \mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{B}))$$

Démonstration. On reprend les notations du lemme précédent. On remarque $E_{\mathcal{A}} = \{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} : |\mathcal{B}| = \mathrm{rg}(\mathcal{B}) < d+1\}$ d'après 5.22 et on conclut. □

Lemme 5.28. *Soit $\mathcal{A}_n$ un arrangement tubulaire fermé d'ordre $n > d$ et $\mathcal{A}_{n-d}$ la restriction de $\mathcal{A}_n$ d'ordre $n-d$. On a l'inclusion :*

$$\mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)) \subset \mathcal{O}_L^{(r)} + \mathscr{O}^{(r|\varpi|)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{n-d}))$$

Démonstration. D'après le résultat précédent, on peut supposer $|\mathcal{A}_n| = \mathrm{rg}(\mathcal{A}_n) < d+1$. On raisonne par récurrence sur $t = \mathrm{rg}(\mathcal{A}_n) - 1$. Plus précisément, nous montrons que pour tout arrangement $\mathcal{B}_m$ d'ordre m quelconque vérifiant $\mathrm{rg}(\mathcal{B}_m) \leq t+1$, on a l'inclusion $\mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{B}_m)) \subset \mathcal{O}_L^{(r)} + \mathscr{O}^{(r|\varpi|)}(\mathrm{Int}(\mathcal{B}_{m-(t+1)}))$.

Quand $t = 0$, cela découle du cas de la boule qui a été traité dans 5.11. Supposons l'énoncé vrai pour $t-1$ et montrons le résultat pour l'arrangement $\mathcal{A}_n$ de rang $t+1$. Par $\mathscr{O}^{(r)}$-acyclicité de $\mathrm{Int}(\mathcal{B})$ pour $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_n$ (resp. $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_{n-1}$), on a le diagramme suivant commutatif dont les lignes horizontales sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc} \sum_{a\in\mathcal{A}_n} \mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n\backslash\{a\})) & \longrightarrow & \mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^t_{\mathrm{an}}(\mathrm{Uni}(\mathcal{A}_n), \mathscr{O}^{(r)}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^{(r)}} & & \\ \sum_{a\in\mathcal{A}_{n-1}} \mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{n-1}\backslash\{a\})) & \longrightarrow & \mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{n-1})) & \longrightarrow & \mathrm{H}^t_{\mathrm{an}}(\mathrm{Uni}(\mathcal{A}_{n-1}), \mathscr{O}^{(r)}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{4}$$

avec $\mathcal{A}_{n-1}$ la projection de $\mathcal{A}_n$ d'ordre $n-1$. On veut montrer

$$\mathrm{Im}(\varphi^{(r)}) \subset \varpi \mathrm{H}^t_{\mathrm{an}}(\mathrm{Uni}(\mathcal{A}_{n-1}), \mathscr{O}^{(r)}) \tag{5}$$

Quand $\mathrm{rg}(\mathcal{A}_{n-1}) < \mathrm{rg}(\mathcal{A}_n)$, l'inclusion est triviale car $\mathrm{H}^t_{\mathrm{an}}(\mathrm{Uni}(\mathcal{A}_{n-1}), \mathscr{O}^{(r)}) = 0$.
Si $\mathrm{rg}(\mathcal{A}_{n-1}) = \mathrm{rg}(\mathcal{A}_n)$, on a des isomorphismes compatibles

$$\mathrm{Uni}(\mathcal{A}_n) \cong X^d_t(\beta) \text{ et } \mathrm{Uni}(\mathcal{A}_{n-1}) \cong X^d_t(\beta - (1, \cdots, 1)) := X^d_t(\tilde{\beta})$$

D'après 5.23, $\mathrm{H}^t_{\mathrm{an}}(\mathrm{Uni}(\mathcal{A}_n), \mathscr{O}^{(r)})$ est un facteur direct de $\mathscr{O}^{(r)}(V(\beta)_I \times \mathbb{B}_L(-\beta_i))/\mathscr{O}^{(r)}(V(\beta)_I)$ pour $I = [\![0, t]\!]$, $i \in I$ fixé (idem pour $\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{n-1})$). De plus, la flèche $\phi^{(r)}$ est induite par la restriction naturelle (notons l'égalité $V(\beta)_I = V(\tilde{\beta})_I$)

$$\mathscr{O}^{(r)}(V(\beta)_I \times \mathbb{B}_L(-\beta_i))/\mathscr{O}^{(r)}(V(\beta)_I) \to \mathscr{O}^{(r)}(V(\beta)_I \times \mathbb{B}_L(-(\beta_i - 1)))/\mathscr{O}^{(r)}(V(\beta)_I)$$

dont l'image est contenue dans $\varpi\mathscr{O}^{(r)}(V(\beta)_I \times \mathbb{B}_L(-(\beta_i - 1)))/\mathscr{O}^{(r)}(V(\beta)_I)$ d'après 5.12 ce qui entraîne (5).

D'après (4) et (5), on obtient, pour toute fonction $f \in \mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n))$, une décomposition dans $\mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{n-1}))$

$$f = \sum_{a\in\mathcal{A}_{n-1}} f_a + g$$

avec $f_a \in \mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{n-1}\backslash\{a\}))$ et $g \in \mathscr{O}^{(r|\varpi|)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{n-1}))$. Comme $\mathrm{rg}(\mathcal{A}_{n-1}\backslash\{a\}) < \mathrm{rg}(\mathcal{A}_n)$, on a $f_a \in \mathcal{O}_L^{(r)} + \mathscr{O}^{(r|\varpi|)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{n-1-(t+1)}\backslash\{a\}))$ par hypothèse de récurrence ce qui établit le résultat. □

Corollaire 5.29. *Soit $\mathcal{A}_n$ un arrangement tubulaire fermé d'ordre $n > 2d$ et $\mathcal{A}_{n-2d}$ la projection de $\mathcal{A}_n$ d'ordre $n-2d$. On a l'inclusion :*

$$\mathscr{O}^+(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)) \subset \mathcal{O}_L + \varpi\mathscr{O}^+(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{n-2d}))$$

Démonstration. Posons $r = |\varpi|^{-1}$ et prenons une fonction f dans $\mathscr{O}^+(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n))$ et donc dans $\mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n))$. En appliquant deux fois le résultat précédent, on montre l'inclusion $\mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)) \subset \mathcal{O}_L^{(r)} + \varpi^2\mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{n-2d}))$. Comme $\varpi^2\mathscr{O}^{(r)}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{n-2d})) \subset \varpi\mathscr{O}^+(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{n-2d}))$, la fonction f s'écrit

$$f = \lambda + \varpi\tilde{f}$$

avec $\tilde{f} \in \mathscr{O}^+(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{n-2d}))$ et $\lambda \in \mathcal{O}_L^{(r)}$. En particulier, $\lambda = f - \varpi\tilde{f} \in \mathcal{O}_L$ et on en déduit la décomposition voulue. □

5.4.3 Cohomologie analytique à coefficients dans $1+\mathscr{O}^{++}=\mathscr{O}^{**}$

Nous allons maintenant nous intéresser aux faisceaux $1+\mathscr{O}^{++}$ et démontrer un théorème d'acyclicité semblable au théorème 5.24. Le résultat suivant est le point clé de cette section. C'est une application du logarithme tronqué qui permet d'étudier $1+\mathscr{O}^{++}$ par le biais de $\mathscr{O}^{(r)}$. Le cas affinoïde a été énoncé dans ([VdP82, 3.26 remarque fin de page 195]) par Van Der Put. Nous allons donner les détails de la preuve et généraliser ce résultat à quelques espaces quasi-compacts très particuliers.

Lemme 5.30. *Soit X un affinoïde, s'il est $\mathscr{O}^{(r)}$-acyclique pour tout $r>0$, alors il est $1+\mathscr{O}^{++}$-acyclique.*

Plus généralement, soit X quasi-compact avec un recouvrement fini $\mathcal{U}$ par des affinoïdes tel que toute intersection d'ouverts de $\mathcal{U}$ soit $\mathscr{O}^{(r)}$-acyclique pour tout $r>0$, alors :

1. *si X est $\mathscr{O}^{(r)}$-acyclique pour tout $r>0$, alors X est $1+\mathscr{O}^{++}$-acyclique*
2. *si la cohomologie de X à coefficients dans $\mathscr{O}^{(r)}$ est concentré en degrés 0 et t pour tout $r>0$, et la flèche naturelle $\mathrm{H}^t_{\mathrm{an}}(X,\mathscr{O}^{(r)})\to\mathrm{H}^t_{\mathrm{an}}(X,\mathscr{O}^{(r')})$ est injective pour $r'\geq r$, alors la cohomologie de X à coefficients dans $1+\mathscr{O}^{++}$ est concentrée en degrés 0 et t.*

Démonstration. On suppose que la cohomologie de X à coefficients dans $\mathscr{O}^{(r)}$ est concentrée en degrés 0 et t pour tout $r>0$, et la flèche naturelle $\mathrm{H}^t_{\mathrm{an}}(X,\mathscr{O}^{(r)})\to\mathrm{H}^t_{\mathrm{an}}(X,\mathscr{O}^{(r')})$ est injective pour $r'\geq r$. Les autres cas s'en déduisent en supposant X affinoïde ou $t=0$. Soit $s\neq 0$ ou t, on veut l'annulation de la cohomologie de $1+\mathscr{O}^{++}$ en degré s. Remarquons que $1+\mathscr{O}^{++}=\varinjlim_{r\to 1^-}1+\mathscr{O}^{(r)}$ donc (quasi-compacité) :

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X;1+\mathscr{O}^{++})=\varinjlim_{r\to 1^-}\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X;1+\mathscr{O}^{(r)})$$

On fixe $r<1$. On a la suite exacte :

$$0\to 1+\mathscr{O}^{(r^2)}\to 1+\mathscr{O}^{(r)}\to\mathscr{O}^{(r)}/\mathscr{O}^{(r^2)}\to 0$$

où la surjection est donnée par $(1+x)\mapsto x$. Par hypothèse, $\mathscr{O}^{(r)}/\mathscr{O}^{(r^2)}$ a une cohomologie analytique concentrée en degrés 0 et t d'après la suite exacte :

$$0\to\mathscr{O}^{(r^2)}\to\mathscr{O}^{(r)}\to\mathscr{O}^{(r)}/\mathscr{O}^{(r^2)}\to 0$$

Il est à noter que l'on a besoin de l'hypothèse d'injectivité de $\mathrm{H}^t_{\mathrm{an}}(X,\mathscr{O}^{(r)})\to\mathrm{H}^t_{\mathrm{an}}(X,\mathscr{O}^{(r')})$ quand $s=t-1$. On a donc une surjection :

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X;1+\mathscr{O}^{(r^2)})\to\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X;1+\mathscr{O}^{(r)}). \tag{6}$$

Supposons maintenant X affinoïde. Il suffit de prouver que $\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X;1+\mathscr{O}^{(r)})=0$ pour r petit. Si $r<|p|$ et $\|x\|<r$, alors pour tout n, on a

$$\|\frac{x^n}{n!}\|<\|x\|\text{ et }\|\frac{x^n}{n}\|<\|x\|$$

Les séries usuelles du logarithme et de l'exponentielle sont bien définies et vérifient

$$\|\log(1+x)\|=\|\exp(x)-1\|=\|x\|$$

et elles induisent des morphismes inverses l'un de l'autre

$$\log:1+\mathscr{O}^{(r)}\xrightarrow{\sim}\mathscr{O}^{(r)}\text{ et }\exp:\mathscr{O}^{(r)}\xrightarrow{\sim}1+\mathscr{O}^{(r)}.$$

D'où la nullité, par hypothèse. On a même prouvé l'acyclicité pour tous les faisceaux intermédiaires $1+\mathscr{O}^{(r)}$ par surjectivité dans (6).

Si X est quasi-compact et $\mathcal{U}$ est un recouvrement vérifiant les hypothèses de l'énoncé, d'après la discussion du cas affinoïde, si $r<|p|$ alors pour tout n

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X;1+\mathscr{O}^{(r^{2^n})})\cong\check{\mathrm{H}}^s(X;1+\mathscr{O}^{(r^{2^n})},\mathcal{U}).$$

Du point de vue des complexes de Cech, les flèches de (6) sont induites par les inclusions naturelles

$$\check{\mathcal{C}}^s(X;1+\mathscr{O}^{(r^{2^{n+1}})},\mathcal{U})\to\check{\mathcal{C}}^s(X;1+\mathscr{O}^{(r^{2^n})},\mathcal{U}).$$

Soit c un cocycle de $\check{\mathcal{C}}^s(X;1+\mathscr{O}^{(r)},\mathcal{U})$, l'assertion (6) implique l'existence d'une suite $(c_n)_n$ avec c_n dans $\check{\mathcal{C}}^{s-1}(X;1+\mathscr{O}^{(r^{2^n})},\mathcal{U})$ telle que

$$\frac{c}{\prod_{j=0}^{n-1}d(c_j)}\in\check{\mathcal{C}}^s(X;1+\mathscr{O}^{(r^{2^n})},\mathcal{U}).$$

Comme chaque terme du complexe de Cech est p-adiquement séparé complet,

$$c=\prod_{j=0}^{\infty}d(c_j)=d(\prod_{j=0}^{\infty}c_j)$$

et c est un cobord (la famille de sous-complexes $(\check{\mathcal{C}}^s(X;1+\mathscr{O}^{(r^{2^n})},\mathcal{U}))_n$ forme une base de voisinages de 0 pour la toplogie p-adique). On a montré l'annulation de $\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X;1+\mathscr{O}^{(r)})$. □

Les estimés 5.24, 5.21, 5.22 et 5.19 de la section 5.4 permettent d'appliquer directement ce résultat et d'obtenir (on utilise partout la topologie analytique) :

Corollaire 5.31. *On a*

1. *Les arrangements tubulaires fermés $\mathcal{A}$ sont $\mathscr{O}^{**}$-acycliques.*
2. *Les espaces projectifs $\mathbb{P}^d_{rig,L}$ sont $\mathscr{O}^{**}$-acycliques.*
3. *La cohomologie des fibrations $X^d_t(\beta)$ pour le faisceau $\mathscr{O}^{**}$ est concentrée en degrés 0 et t.*

Corollaire 5.32 (Décomposition en éléments simples)**.** *Soit $\mathcal{A}$ un arrangement tubulaire fermé, on a*

$$\mathscr{O}^{**}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}))=\sum_{\substack{\mathcal{B}\subset\mathcal{A}\\ |\mathcal{B}|=\mathrm{rg}(\mathcal{B})<d+1}}\mathscr{O}^{**}(\mathrm{Int}(\mathcal{B}))$$

5.5 Cohomologie analytique à coefficients dans $\mathbb{G}_m$

5.5.1 Cohomologie des fibrations $X^d_t(\beta)$

Nous souhaitons montrer le théorème suivant :

Théorème 5.33. *Soit $s\geq 1$, les fonctions inversibles de $X^d_t(\beta)$ sont constantes et l'application f^* en cohomologie donnée par la fibration $f:X^d_t(\beta)\to\mathbb{P}^t_{rig,L}$ induit une décomposition :*

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X^d_t(\beta),\mathbb{G}_m)\cong\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X^d_t(\beta),\mathscr{O}^{**})\times\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L},\mathbb{G}_m)\tag{7}$$

De plus, l'inclusion $\iota:X^d_t(\beta)\to\mathbb{P}^d_{rig,L}$ induit une bijection entre $\mathrm{H}^*_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^d_{rig,L},\mathbb{G}_m)$ et le facteur direct $\mathrm{H}^*_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L},\mathbb{G}_m)$. Enfin, pour tout corps F on a une identification

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L},\mathbb{G}_m)=\mathrm{H}^s_{\mathrm{zar}}(\mathbb{P}^t_{zar,F},\mathbb{G}_m)=\begin{cases}\mathbb{Z} & \text{si } s=1\\ \{0\} & \text{si } s>1\end{cases}$$

Démonstration. D'après 5.1 point 3., les recouvrements $\mathcal{V}(\beta)$ et $f^*(\mathcal{V}(\beta))$ ont des intersections $\mathbb{G}_m$-acycliques et on se ramène à calculer la cohomologie de Cech sur ces recouvrements. Pour toute intersection $V(\beta)_I$, on fixe $f^{-1}(V(\beta)_I) \cong V(\beta)_I \times \mathbb{B}_L^{d-t}(-\beta_{i_0})$ pour $i_0 \in I$ et on a 4.12 :

$$\mathscr{O}^*(V(\beta)_I) = L^*\mathscr{O}^{**}(V(\beta)_I) \times T_I^{(t)}$$

et

$$\begin{aligned}\mathscr{O}^*\left(f^{-1}(V(\beta)_I)\right) &= \mathscr{O}^*\left(\mathbb{B}_L^{d-t}(-\beta_i)\right)\mathscr{O}^{**}\left(V(\beta)_I \times \mathbb{B}_L^{d-t}(-\beta_{i_0})\right) \times T_I^{(t)} \\ &= L^*\mathscr{O}^{**}\left(f^{-1}(V(\beta)_I)\right) \times T_I^{(t)}\end{aligned}$$

où $T_I^{(t)} = \left\langle \frac{z_i}{z_j} : \ i,j \in I \right\rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}} \subset \left\langle \frac{z_i}{z_j} : \ i,j \in [\![0,t]\!] \right\rangle_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}$ et i_0 est un élément de I fixé.

Introduisons le complexe

$$(\mathcal{C}^i(T_\bullet^{(t)}))_{0\leq i\leq t} := (\bigoplus_{\substack{I\subset[\![0,t]\!]\\|I|=i+1}} T_I^{(t)})_i$$

avec pour différentielles les sommes alternées des inclusions. C'est un facteur direct du complexe de Cech $\check{\mathcal{C}}^\bullet(X_t^d(\beta);\mathbb{G}_m, f^*(\mathcal{V}(\beta)))$ et on en déduit un isomorphisme

$$\check{\mathrm{H}}^s(X_t^d(\beta);\mathbb{G}_m, f^*(\mathcal{V}(\beta))) \cong \check{\mathrm{H}}^s(X_t^d(\beta); L^*\mathscr{O}^{**}(f^*(\mathcal{V}(\beta))) \times \mathrm{H}^s(\mathcal{C}^*(T_\bullet^{(t)})) \tag{8}$$

Pour toute partie I, on a une suite exacte de groupes :

$$1 \to 1+\mathfrak{m}_L \to L^* \times \mathscr{O}^{**}(f^{-1}(V(\beta)_I)) \to L^*\mathscr{O}^{**}(f^{-1}(V(\beta)_I)) \to 1$$

D'où une suite exacte au niveau des complexes de Cech et une suite exacte longue entre les cohomologies de Cech sur le recouvrement $f^*(\mathcal{V}(\beta))$. Comme le nerf du recouvrement $f^*(\mathcal{V}(\beta))$ est contractile, on a $\check{\mathrm{H}}^s(X_t^d(\beta); 1+\mathfrak{m}_L, f^*(\mathcal{V}(\beta))) = \check{\mathrm{H}}^s(X_t^d(\beta); L^*, f^*(\mathcal{V}(\beta))) = 0$ pour $s \geq 1$, d'où un isomorphisme :

$$\check{\mathrm{H}}^s(X_t^d(\beta); L^*\mathscr{O}^{**}, f^*(\mathcal{V}(\beta))) \cong \check{\mathrm{H}}^s(X_t^d(\beta); \mathscr{O}^{**}, f^*(\mathcal{V}(\beta))) \cong \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X_t^d(\beta), \mathscr{O}^{**}).$$

Le dernier isomorphisme s'obtient par acyclicité des polycouronnes (5.1 point 2. et 5.30).

En degré 0, on vérifie aisément

$$\mathscr{O}^*(X_t^d(\beta)) = \check{\mathrm{H}}^0(X_t^d(\beta); L^*\mathscr{O}^{**}, f^*(\mathcal{V}(\beta))) = L^*\mathscr{O}^{**}(X_t^d(\beta)) = L^*$$

car $\mathrm{H}^0(\mathcal{C}^*(T_\bullet^{(t)})) = 0$ et $\mathscr{O}^{**}(X_t^d(\beta)) = 1+\mathfrak{m}_L$ (voir 5.22).

Si $t = d$, $f = \mathrm{Id}$, on traite alors le cas de l'espace projectif. Mais on sait que $\mathbb{P}^t_{rig,L}$ n'a pas de cohomologie pour le faisceau $\mathscr{O}^{**}$ en degré strictement positif d'où l'isomorphisme pour $s \geq 1$

$$\check{\mathrm{H}}^s(\mathbb{P}^t_{rig,L};\mathbb{G}_m, f^*(\mathcal{V}(\beta))) \cong \mathrm{H}^s(\mathcal{C}^*(T_\bullet^{(t)}))$$

et la décomposition (8) s'écrit alors

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X_t^d(\beta),\mathbb{G}_m) \cong \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X_t^d(\beta),\mathscr{O}^{**}) \times \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L},\mathbb{G}_m).$$

Remarque 5.34. Pour $s \geq 1$, nous avons pu prouver $\check{\mathrm{H}}^s(X_t^d(\beta); A, f^*(\mathcal{V}(\beta))) = 0$ pour tout faisceau constant A ce qui établit $\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X_t^d(\beta); A) = 0$ par 5.1. Enfin, grâce à 5.25, nous obtenons pour tout arrangement tubulaire $\mathcal{A}$ l'annulation $\mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}), A)$.

Il reste à calculer la cohomologie du complexe $(\mathcal{C}^*(T_\bullet^{(t)}))$.

Proposition 5.35. *On a pour tout corps F*

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{zar}}(\mathbb{P}^t_{zar,F};\mathbb{G}_m) \cong \mathrm{H}^s(\mathcal{C}^*(T^{(t)}_\bullet)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } s=1 \\ \{0\} & \text{si } s>1 \end{cases}$$

Démonstration. On note toujours $\mathcal{V}$ le recouvrement standard de $\mathbb{P}^t_{zar,F}$. Chaque intersection d'ouverts de $\mathcal{V}$ est le spectre d'une algèbre factorielle de type fini sur un corps et est donc $\mathbb{G}_m$-acyclique d'où $\mathrm{H}^s_{\mathrm{zar}}(\mathbb{P}^t_{zar,F};\mathbb{G}_m) \cong \check{\mathrm{H}}^s(\mathbb{P}^t_{zar,F};\mathbb{G}_m,\mathcal{V})$. En effet, pour une telle intersection U_I, on dispose d'une suite exacte

$$0 \to \mathbb{G}_m \to \mathcal{K}_{U_I} \to \mathrm{Div} \to 0$$

où $\mathcal{K}_{U_I}$ est le faisceau constant des fonctions rationnelles. Comme U_I est irréductible, chaque faisceau $\mathcal{K}_{U_I}$, Div est flasque donc acyclique. On a de plus la surjectivité $\mathcal{K}(U_I) \to \mathrm{Div}(U_I)$ de la flèche ce qui entraîne l'annulation voulue. En calculant explicitement le complexe de Cech, on montre

$$\check{\mathrm{H}}^s(\mathbb{P}^t_{zar,F};\mathbb{G}_m,\mathcal{V}) = \check{\mathrm{H}}^s(\mathbb{P}^t_{zar,F};F^*,\mathcal{V}) \times \mathrm{H}^s(\mathcal{C}^*(T^{(t)}_\bullet)) = \mathrm{H}^s(\mathcal{C}^*(T^{(t)}_\bullet))$$

La dernière égalité s'obtient toujours par contractibilité du nerf de $\mathcal{V}$. On rappelle comment calculer $\mathrm{H}^s_{\mathrm{zar}}(\mathbb{P}^t_{zar,F};\mathbb{G}_m)$. On reprend la suite exacte

$$0 \to \mathbb{G}_m \to \mathcal{K}_{\mathbb{P}^t_{zar,F}} \to \mathrm{Div} \to 0$$

Les faisceaux $\mathcal{K}_{\mathbb{P}^t_{zar,F}}$, Div sont encore acycliques par irréductibilité des espaces projectifs. Par suite exacte longue, on en déduit

$$\mathrm{H}^s_{\mathrm{zar}}(\mathbb{P}^t_{zar,F};\mathbb{G}_m) = 0 \text{ si } s \geq 2$$

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{zar}}(\mathbb{P}^t_{zar,F};\mathbb{G}_m) = \mathrm{Div}(\mathbb{P}^t_{zar,F})/\mathrm{div}(\mathcal{K}_{\mathbb{P}^t_{zar,F}}) \cong \mathbb{Z}$$

□

Montrons maintenant la compatibilité de la décomposition (7).

Lemme 5.36. *L'inclusion $\iota : X^d_t(\beta) \to \mathbb{P}^d_{rig,L}$ induit un isomorphisme de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^d_{rig,L},\mathbb{G}_m)$ sur le facteur direct $\mathrm{H}^*_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L},\mathbb{G}_m)$ de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{an}}(X^d_t(\beta),\mathbb{G}_m)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer l'isomorphisme en degré 1 car les groupes en degrés supérieurs sont nuls et les sections constantes sont identifiées en degré 0. On a, d'après 5.16 et la suite spectrale de Cech, $\check{\mathrm{H}}^1(\mathbb{P}^d_{rig,L};\mathbb{G}_m,\mathcal{V}) \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^d_{rig,L};\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}$. Ainsi un fibré en droite $\mathscr{O}(k)$ a pour fonction de transition $(m_{(\frac{\tilde{z}_i}{\tilde{z}_j})^{-k}})_{0\leq i,j\leq d}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k)|_{V_{\{i,j\}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{O}_{V_i}|_{V_j} \\ \downarrow \mathrm{Id} & & \downarrow m_{(\frac{\tilde{z}_i}{\tilde{z}_j})^{-k}} \\ \mathscr{O}_{\mathbb{P}^t_{rig,L}}(k)|_{V_{\{i,j\}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{O}_{V_j}|_{V_i} \end{array}$$

La restriction à $X^d_t(\beta)$ se trivialise sur $\mathcal{V}(\beta)$ et a toujours pour fonction de transition $(m_{(\frac{\tilde{z}_i}{\tilde{z}_j})^{-k}})_{0\leq i,j\leq t}$. Comme ces dernières vivent sur $\mathbb{P}^t_{rig,L}$, l'image de ι^* tombe dans le facteur direct $\mathrm{H}^1_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L},\mathbb{G}_m)$ □

Remarque 5.37. On a en fait montré un résultat plus fort ; on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(X^d_t(\beta),\mathbb{G}_m) & \xleftarrow{\iota^*} & \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^d_{rig,L},\mathbb{G}_m) \\ \uparrow{\scriptstyle f^*} & \swarrow{\scriptstyle \varphi^*}\ \sim & \\ \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathbb{P}^t_{rig,L},\mathbb{G}_m) & & \end{array}$$

où φ est le morphisme de $\mathbb{P}^t_{rig,L}$ dans $\mathbb{P}^d_{rig,L}$ donné par $[z_0,\dots,z_t] \mapsto [z_0,\dots,z_t,0\dots,0]$. Par contre, les morphismes au niveau des espaces ne commutent pas.

Ainsi tous les points ont été démontrés. □

5.6 Etude des arrangements algébriques généralisés

Théorème 5.38. *Si $\mathcal{A}$ est un arrangement algébrique généralisé, alors* $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ *est acyclique pour les faisceaux $\mathscr{O}^{(r)}$, $\mathscr{O}^{**}$ et $\mathbb{G}_m$ en topologie analytique. Les sections sur* $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ *de $\mathscr{O}^+$, $\mathscr{O}^{(r)}$, $\mathscr{O}^{**}$ sont constantes et on a une suite exacte :*

$$0 \to L^* \to \mathscr{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{A})) \to \mathbb{Z}[\![\mathcal{A}]\!]^0 \to 0$$

Démonstration. Considérons la famille $(\mathcal{A}_n)_n$ d'arrangements tubulaires fermés compatible définie dans (5.5). On obtient alors un recouvrement croissant de $\mathrm{Int}(\mathcal{A}) = \bigcup \mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)$ qui en fait un espace analytique Stein. Si $\mathscr{F}$ est l'un des faisceaux $\mathscr{O}^{(r)}$, $\mathscr{O}^{**}$, $\mathbb{G}_m$, on a la suite exacte

$$0 \to R^1 \varprojlim_n \mathrm{H}^{s-1}_{\mathrm{an}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n),\mathscr{F}) \to \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}),\mathscr{F}) \to \varprojlim_n \mathrm{H}^s_{\mathrm{an}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n),\mathscr{F}) \to 0$$

Par acyclicité des arrangements tubulaires d'hyperplans 5.24, 5.31, **??**, on a

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{an}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}),\mathscr{F}) = \begin{cases} \varprojlim_n \mathscr{F}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)) & \text{si } i=0 \\ R^1 \varprojlim_n \mathscr{F}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)) & \text{si } i=1 \\ 0 & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

On peut appliquer 5.14 grâce au point technique 5.29 pour obtenir l'acyclicité de $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ pour $\mathscr{O}^{(r)}$, $\mathscr{O}^{**}$. On en déduit aussi la description des sections globales de $\mathscr{O}^+$, $\mathscr{O}^{(r)}$, $\mathscr{O}^{**}$ ce qui donne en particulier une autre démonstration du résultat [Ber95a, lemme 3].

Pour $\mathbb{G}_m$, on a une suite exacte de systèmes projectifs **??** :

$$0 \to (L^*\mathscr{O}^{**}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n))_n \to (\mathscr{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)))_n \to (\mathbb{Z}[\mathcal{A}_n]^0)_n \to 0.$$

En appliquant le foncteur $\varprojlim_n$, on obtient une suite exacte longue :

$$0 \to L^* \to \mathscr{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{A})) \to \mathbb{Z}[\![\mathcal{A}]\!]^0 \to R^1 \varprojlim_n L^*\mathscr{O}^{**}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)) \to$$

$$R^1 \varprojlim_n \mathscr{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)) \to R^1 \varprojlim_n \mathbb{Z}[\mathcal{A}_n]^0$$

On a $R^1 \varprojlim_n L^*\mathscr{O}^{**}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)) = R^1 \varprojlim_n \mathbb{Z}[\mathcal{A}_n]^0 = 0$ d'après la surjectivité de $\mathbb{Z}[\mathcal{A}_{n-1}]^0 \to \mathbb{Z}[\mathcal{A}_n]^0$ et 5.14. Donc

$$\mathrm{Pic}_L(\mathrm{Int}(\mathcal{A})) = R^1 \varprojlim_n \mathscr{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)) = 0$$

et la suite suivante est exacte

$$0 \to L^* \to \mathscr{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{A})) \to \mathbb{Z}[\![\mathcal{A}]\!]^0 \to 0$$

□

5.7 Quelques commentaires sur la cohomologie étale et de de Rham des arrangements d'hyperplans

5.7.1 Cohomologie étale l-adique et de de Rham

En appliquant la suite exacte de Kummer, on obtient d'après **??**, **??**, 5.38

Corollaire 5.39. *Soit m un entier premier à p. On a les diagrammes :*

1. *si $\mathcal{A}_n$ est un arrangement tubulaire fermé*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n))/L^*\mathscr{O}^{**}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n)) & \xrightarrow{\kappa} & \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}_n),\mu_m)/\kappa(L^*) \\ \uparrow & & \wr\uparrow \\ \mathbb{Z}[\mathcal{A}_n]^0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[\mathcal{A}_n]^0 \end{array}$$

2. *si $\mathcal{A}$ est un arrangement algébrique généralisé*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}^*(\mathrm{Int}(\mathcal{A}))/L^* & \xrightarrow{\kappa} & \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}),\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/\kappa(L^*) \\ \uparrow & & \wr\uparrow \\ \mathbb{Z}\,[\![\mathcal{A}]\!]^0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\,[\![\mathcal{A}]\!]^0 \end{array}$$

Proposition 5.40. *Soit n un entier, $\mathcal{A}$ un arrangement tubulaire ouvert d'hyperplans d'ordre n et $\tilde{\mathcal{A}}$ sa projection fermée d'ordre $n-1$. Alors l'inclusion $\mathrm{Int}(\tilde{\mathcal{A}}) \to \mathrm{Int}(\mathcal{A})$ induit un isomorphisme au niveau des groupes de cohomologie de de Rham (de même pour la cohomologie étale l-adique pour $L = C = \widehat{\overline{K}}$).*

Démonstration. Écrivons H l'une des deux cohomologies considérées (avec $L = C$ pour la cohomologie étale l-adique). La suite spectrale (2) calculant H pour l'arrangement $\mathcal{A}$ sera notée $E_j^{-r,s}(\mathcal{A})$ et $E_j^{-r,s}(\tilde{\mathcal{A}})$ celle pour l'arrangement $\tilde{\mathcal{A}}$. Nous allons les comparer pour établir le résultat.

Considérons $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ sa projection dans $\tilde{\mathcal{A}}$. On a $\mathrm{rg}(\mathcal{B}) = \mathrm{rg}(\tilde{\mathcal{B}}) = t+1$. Alors il existe $\beta \in \mathbb{N}^{t+1}$ tel $\mathrm{Uni}(\mathcal{B}) \cong Y_t^d(\beta)$ et $\mathrm{Uni}(\tilde{\mathcal{B}}) \cong X_t^d(\beta)$. L'inclusion est la flèche naturelle. Les deux cohomologies H vérifient l'axiome d'homotopie ie. pour tout espace analytique X, on a des isomorphismes induits par les projections naturelles :

$$\mathrm{H}^*(X \times \mathbb{B}) \cong \mathrm{H}^*(X) \cong \mathrm{H}^*(X \times \mathring{\mathbb{B}})$$

Ainsi, les fibrations induisent des isomorphismes entre la cohomologie de $\mathbb{P}^t_{rig,L}$ et celles de $Y_t^d(\beta)$, $X_t^d(\beta)$ compatibles par commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X_t^m(\beta) & \longrightarrow & Y_t^m(\beta) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{P}^t_{rig,L} & \end{array}$$

Par somme directe, on obtient un isomorphisme entre les suites spectrales, d'où le résultat. □

5.7.2 Cohomologie étale p-adique des arrangements algébriques d'hyperplans

Ici, $L = C$ et on verra $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ comme un C-espace analytique par extension des scalaires pour $\mathcal{A}$ un arrangement d'hyperplans K-rationnels.

Proposition 5.41. *Soit $\mathcal{A}$ un arrangement algébrique K-rationnel, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^*_{\text{ét}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A}), \mathbb{Q}_p) \otimes C \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Int}(\mathcal{A})).$$

Remarque 5.42. Le résultat récent [CDN, Theorem 5.1.] semble suggérer que l'on a encore le résultat pour les arrangements algébriques généralisés.

Démonstration. Appelons $E_j^{-r,s}(\acute{e}t)$ et $E_j^{-r,s}(dR)$ les suites spectrales calculant respectivement la cohomologie étale p-adique et la cohomologie de de Rham. Nous allons exhiber un isomorphisme canonique $E_j^{-r,s}(\acute{e}t) \otimes C \to E_j^{-r,s}(dR)$. Considérons alors une union $\mathrm{Uni}(\mathcal{B})$ et écrivons la Z_t^d. Nous allons montrer

$$\mathrm{H}^*_{\text{ét}}(Z_t^d, \mathbb{Q}_p) \otimes C \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(Z_t^d).$$

Appelons Λ le faisceau constant $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. D'après un résultat de Berkovitch ([Ber95b, lemme 2.2]), pour tout espace analytique S, tout entier m et $\phi : \mathbb{A}^m_{rig,S} \to S$, on a $R^i\phi_*\Lambda_{\mathbb{A}^m_{rig,S}} = 0$ pour $i \geq 1$. On a alors, par la suite spectrale de Leray, pour toute intersection $f^{-1}(V_I)$ de $f^*(\mathcal{V})$, $R\psi_*\Lambda_{f^{-1}(V_I)} = R\psi_*\Lambda_{V_I}$ où $\psi : X \to \mathrm{Sp}(C)$ pour tout C-espace analytique X. Par Cech, on obtient que $R\psi_*\Lambda_{Z_t^d} = R\psi_*\Lambda_{\mathbb{P}^t_{rig,C}}$ d'où un isomorphisme

$$\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(Z_t^d, \mathbb{Q}_p) \cong \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathbb{P}^t_{rig,C}, \mathbb{Q}_p).$$

De plus, d'après ([dJvdP96, théorème 7.3.2.]), on a un isomorphisme canonique $\mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathbb{P}^t_{rig,C}, \mathbb{Q}_p) \cong \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathbb{P}^t_{zar,C}, \mathbb{Q}_p)$. Par étude du cas algébrique, on en déduit que $\mathrm{H}^*_{\text{ét}}(\mathbb{P}^t_{rig,C}, \mathbb{Q}_p) \otimes C$ est engendré en tant que C-algèbre graduée par l'image du faisceau tordu $\mathscr{O}(1)$ par l'application de Kummer $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^t_{rig,C}) \to \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^t_{rig,C}, \mathbb{Q}_p)$. On construit alors un isomorphisme en identifiant les classes logarithmiques. Ces morphismes commutent bien aux différentielles de la suite spectrale. On en déduit le résultat à la convergence.

□

6 Le revêtement modéré

6.1 Modèle de Deligne

Donnons une interprétation modulaire aux calculs réalisés dans 3.3. On appelle σ le Frobenius sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ i.e. $\sigma(x) = x^q$ et on notera encore σ un relevé sur $\mathcal{O}_{\breve{K}}$. Si X est un schéma algébrique sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ ou un schéma formel sur $\mathcal{O}_{\breve{K}}$, on appellera $\mathrm{Fr} : \sigma_*^{-1}X \to X$ le morphisme de Frobenius. De même, si R est une $\mathcal{O}_{\breve{K}}$-algèbre, on notera $R^{(\sigma)}$ l'algèbre sur $\mathcal{O}_{\breve{K}}$ tordue par σ.

Soit D l'algèbre centrale simple sur K d'invariant $\frac{1}{d+1}$ et $\mathcal{O}_D$ l'anneau des entiers de D. Si $K_{(d+1)}$ est une extension non ramifiée de K de degré $(d+1)$ contenue dans D et $\mathcal{O}_{(d+1)}$ l'ordre maximal associé, alors il existe Π_D dans $\mathcal{O}_D$ tel que $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_{(d+1)}\{\Pi_D\}$ avec $\Pi_D^{d+1} = \varpi$ et pour tout a dans $\mathcal{O}_{(d+1)}$, $\Pi_D \cdot a = \sigma(a) \cdot \Pi_D$. Si R est une $\mathcal{O}_K$-algèbre, on note $R[\Pi]$ l'algèbre $R[X]/(X^{d+1} - \varpi)$.

Pour tout simplexe $\sigma = \{s_0, \ldots, s_k\}$ dans $\mathcal{BT}_k$, on définit un foncteur

$$\mathcal{F}_\sigma : \mathrm{Nilp} \to \mathrm{Ens}$$

où Nilp est la catégorie des $\mathcal{O}_K$-algèbres R telles que ϖ soit nilpotent dans R. Si R est une telle algèbre, $\mathcal{F}_\sigma(R)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme des diagrammes :

$$\begin{array}{ccccccc}
\varpi M_0 & \hookrightarrow & M_k & \hookrightarrow & \ldots & \hookrightarrow & M_0 \\
\downarrow{\scriptstyle \frac{\alpha_0}{\varpi}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_k} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} \\
L_0 & \xrightarrow{\Pi} & L_k & \xrightarrow{\Pi} & \ldots & \xrightarrow{\Pi} & L_0 \\
 & \searrow & & & & \nearrow{\scriptstyle \cdot\varpi} &
\end{array} \tag{9}$$

tels que les L_i soient des faisceaux localement libres de rang 1 sur $S := \mathrm{Spec}(R)$, les applications Π des morphismes de $\mathscr{O}_S$-modules et les α_i des morphismes de $\mathcal{O}_K$-modules qui vérifient la condition :

$$\ker(\alpha_i(x) : M_i/\varpi M_i \to L_i \otimes_R k(x)) \subseteq M_{i+1}/\varpi M_i \tag{10}$$

pour tout $x \in |S|$ ($k(x)$ étant le corps résiduel de x).

Soit σ un simplexe, décrivons plus précisément le foncteur $\mathcal{F}_\sigma$. Soit R un objet de Nilp et $((L_i)_i, (\alpha_i)_i, (\Pi))$ un point de $\mathcal{F}_\sigma(R)$, donnons-nous une base $(f_0, \cdots, f_d)$ adaptée au simplexe σ. Pour $0 \leq j \leq d$ et i l'entier tel que $f_j \in M_i \backslash M_{i+1}$, la condition (10) impose que $\alpha_i(f_j)$ engendre L_i. On trouve alors un unique élément $x_j \in R$ tel que $\alpha_i(f_{d_i}) = x_j \alpha_i(f_j)$ quand $j \neq d_i$. On note $x_{d_{i+1}} \in R$ l'élément vérifiant $\alpha_i(d_i) = x_{d_{i+1}} \alpha_i(d_{i+1})$. L'égalité $\Pi \circ \cdots \circ \Pi = \varpi$ entraîne $\prod_{0 \leq i \leq k} x_{d_i} = \varpi$. La condition (10) implique l'inversibilité des éléments $P_a(x_0, \cdots, x_d)$ où P_a sont les polynômes introduits dans 3.3. Trouver un $(d+1)$-uplet $(x_0, \cdots, x_d)$ vérifiant ces deux conditions détermine les morphismes $(\alpha_i)_i$ et (Π) et nous avons en fait démontré

Proposition 6.1. *$\mathcal{F}_\sigma$ est représentable par le schéma formel $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_K,\sigma}$ défini précédemment.*

Si on considère $\sigma' = \sigma \backslash \{s_j\}$ pour j dans $[\![1, k]\!]$ alors $\mathcal{F}_{\sigma'}(R)$ correspond au sous-ensemble de $\mathcal{F}_\sigma(R)$ constitué des diagrammes (9) qui vérifient en plus la condition que L_j et L_{j+1} sont isomorphes. On obtient notamment une immersion ouverte $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_K,\sigma'} \hookrightarrow \mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_K,\sigma}$ et on définit $\mathcal{F}$ comme la limite sur $\mathcal{BT}$ des $\mathcal{F}_\sigma$.

Le foncteur $\mathcal{F}$ est en fait isomorphe au foncteur, qui à une algèbre R de Nilp associe l'ensemble des classes d'isomorphisme des quintuplets (ψ, η, T, u, r) avec

- η faisceau de $\mathcal{O}_D$-modules plat, $\mathbb{Z}/(d+1)\mathbb{Z}$-gradué et constructible sur S_{Zar} (où $S := \mathrm{Spec}(R)$),
- T faisceau de $\mathcal{O}_S[\Pi]$-modules, $\mathbb{Z}/(d+1)\mathbb{Z}$-gradué et tel que les composantes homogènes sont des faisceaux inversibles sur S,
- $u : \eta \to T$ morphisme $\mathcal{O}_D$-linéaire de degré 0 tel que $u \otimes \mathscr{O}_S : \eta \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathscr{O}_S \to T$ est surjectif,
- r isomorphisme K-linéaire du faisceau constant K^{d+1} vers $\eta_0 \otimes_{\mathcal{O}} K$,

qui vérifient les conditions :

1. la restriction de η_i au lieu d'annulation S_i de $\Pi : T_i \to T_{i+1}$ dans S est un faisceau constant isomorphe au faisceau constant $\mathcal{O}_K^{d+1}$,
2. pour tout x de S, $\eta_x/\Pi\eta_x \to (T_x/\Pi T_x) \otimes k(x)$ est injective,
3. pour tout i dans $[\![0, d]\!]$, $\bigwedge^{d+1}(\eta_i)|_{S_i} = \varpi^{-i} \bigwedge^{d+1}(\Pi^i r \mathcal{O}_K^d)|_{S_i}$.

Théorème 6.2. *Le foncteur $\mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}_\sigma$ est représentable par le schéma formel $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_K}$.*

Cela nous donne en particulier que le foncteur $\mathcal{F}^{Dr}$ est représentable par $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}}}$. Via cet isomorphisme, l'action naturelle de $\mathrm{PGL}_{d+1}(K)$ sur $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}}}$ vu comme un sous-espace stable de $\mathbb{P}^d_{rig,K}$ induit l'action suivante sur $\mathcal{F}^{Dr}$ ([BC91, Proposition 6.2] pour le cas $d = 1$) :

$$g \cdot (\psi, \eta, T, u, r) = (\psi, \eta[v(\det(g))], T[v(\det(g))], u[v(\det(g))], \Pi^{v(\det(g))} \circ r \circ g^{-1})$$

pour tout g dans $\mathrm{GL}_{d+1}(K)$, où $B[n]$ est l'algèbre $\mathbb{Z}/(d+1)\mathbb{Z}$-graduée décalée de n pour B une $\mathbb{Z}/(d+1)\mathbb{Z}$-algèbre graduée.

6.2 Interprétation modulaire de l'espace de Drinfeld

Pour construire le premier revêtement de l'espace de Drinfeld, nous avons besoin d'une autre interprétation modulaire de cet espace, ce qui demande quelques notions et notations.

Si A est une $\mathcal{O}_K$-algèbre, un *$\mathcal{O}_D$-module formel* sur $\mathrm{Spec}(A)$ (ou, plus simplement, sur A) est un groupe formel F sur A muni d'une action de $\mathcal{O}_D$, notée $\iota : \mathcal{O}_D \to \mathrm{End}(F)$, qui est compatible avec l'action naturelle de $\mathcal{O}_K$ sur l'espace tangent $\mathrm{Lie}(F)$, *i.e.* pour a dans $\mathcal{O}_K$, $d\iota(a)$ est la multiplication par a dans $\mathrm{Lie}(F)$. Le $\mathcal{O}_D$-module formel F est dit *spécial* si $\mathrm{Lie}(F)$ est un $\mathcal{O}_{(d+1)} \otimes_{\mathcal{O}_K} A$-module localement libre de rang 1. On a le résultat classique suivant :

Proposition 6.3. *Sur un corps algébriquement clos de caractéristique p il existe un unique $\mathcal{O}_D$-module formel spécial de dimension $d+1$ et de ($\mathcal{O}_K$-)hauteur $(d+1)^2$, à isogénie près.*

On notera $\Phi_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ l'unique (à isogénie près) $\mathcal{O}_D$-module formel spécial $\Phi_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ de dimension $d+1$ et hauteur $(d+1)^2$ (l'entier d étant fixé par la suite, nous ne le faisons pas apparaître dans la notation $\Phi_{\overline{\mathbb{F}}_q}$).

Considérons le foncteur $\mathcal{G}^{Dr}$: Nilp $\to$ Ens envoyant $A \in$ Nilp sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de triplets (ψ, F, ρ) avec :

- $\psi : \overline{\mathbb{F}}_q \to A/\varpi A$ est un $\mathbb{F}_q$-morphisme,
- F est un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial de dimension $d+1$ et de hauteur $(d+1)^2$ sur A,
- $\rho : \Phi_{\overline{\mathbb{F}}_q} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q, \psi} A/\varpi A \to F_{A/\varpi A}$ est une quasi-isogénie de hauteur zéro.

Le théorème fondamental suivant, à la base de toute la théorie, est dû à Drinfeld :

Théorème 6.4 ([Dri76])**.** *Le foncteur $\mathcal{G}^{Dr}$ est représentable par $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}}}$.*

Remarque 6.5. L'isomorphisme précédent identifie les parties isotypiques de $\mathrm{Lie}(\mathfrak{X})$ et les faisceaux T_i.

Remarque 6.6. On définit le foncteur $\tilde{\mathcal{G}}^{Dr}$ de la même manière que $\mathcal{G}^{Dr}$ mais en ne fixant plus la hauteur de la quasi-isogénie ρ. Alors $\tilde{\mathcal{G}}^{Dr}$ est, lui aussi, représentable par un schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}^0_{Dr}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$, qui se décompose

$$\tilde{\mathcal{G}}^{Dr} = \coprod_{h \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}^{Dr,(h)},$$

où $\mathcal{G}^{Dr,(h)}$ est défini comme précédemment en imposant que la quasi-isogénie ρ soit de hauteur $(d+1)h$. Chacun des $\mathcal{G}^{Dr,(h)}$ est alors isomorphe (non canoniquement) au foncteur $\mathcal{G}^{Dr}$, ce qui induit un isomorphisme non-canonique

$$\widehat{\mathcal{M}}^0_{Dr} \cong \mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}}} \times \mathbb{Z}.$$

6.3 La tour de Drinfeld

On note $\mathfrak{X}$ le $\mathcal{O}_D$-module formel spécial universel sur $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}}}$ (cf. th. 6.4) et $\tilde{\mathfrak{X}}$ le module formel spécial universel déduit de la représentabilité de $\tilde{\mathcal{G}}^{Dr}$. Pour tout entier $n \geq 1$ l'action de Π_D^n induit une isogénie de $\mathfrak{X}$ et de $\tilde{\mathfrak{X}}$. Le schéma en groupes $\mathfrak{X}[\Pi_D^n] = \ker(\mathfrak{X} \xrightarrow{\Pi_D^n} \mathfrak{X})$ (resp. $\tilde{\mathfrak{X}}[\Pi_D^n]$) est fini plat, de rang $q^{n(d+1)}$ sur $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}}}$ (resp. $\widehat{\mathcal{M}}^0_{Dr}$).

On note $\Sigma^0 = \mathbb{H}^d_{\breve{K}}$ et $\mathcal{M}^0_{Dr} = (\widehat{\mathcal{M}}^0_{Dr})^{\mathrm{rig}} \cong \mathbb{H}^d_{\breve{K}} \times \mathbb{Z}$. Pour $n \geq 1$ on définit

$$\Sigma^n := (\mathfrak{X}[\Pi_D^n] \backslash \mathfrak{X}[\Pi_D^{n-1}])^{\mathrm{rig}}, \ \mathcal{M}^n_{Dr} := (\tilde{\mathfrak{X}}[\Pi_D^n] \backslash \tilde{\mathfrak{X}}[\Pi_D^{n-1}])^{\mathrm{rig}}.$$

Les morphismes d'oubli $\Sigma^n \to \Sigma^0$ et $\mathcal{M}^n_{Dr} \to \mathcal{M}^0_{Dr}$ définissent des revêtements finis étales de groupe de Galois [8] $\mathcal{O}_D^*/(1+\Pi_D^n\mathcal{O}_D)$. On a encore des isomorphismes non-canoniques $\mathcal{M}^n_{Dr} \cong \Sigma^n \times \mathbb{Z}$ et les revêtements respectent ces décompositions.

Le groupe G s'identifie au groupe des quasi-isogénies de $\mathfrak{X}$, il agit donc naturellement sur chaque niveau de la tour $(\mathcal{M}^n_{Dr})_{n\geq 0}$. De même, le groupe $\mathcal{O}_D^*$ permute les points de Π_D^n-torsion et $\mathcal{O}_D^*$ agit sur $\mathcal{M}^n_{Dr}$ à travers son quotient $\mathcal{O}_D^*/(1+\Pi_D^n\mathcal{O}_D) \simeq \mathrm{Gal}(\mathcal{M}^n_{Dr}/\mathcal{M}^0_{Dr})$. Ces deux actions commutent entre elle et les revêtements $\mathcal{M}^n_{Dr} \to \mathcal{M}^0_{Dr}$ sont G-équivariants. En revanche, le revêtement $\Sigma^n \to \Sigma^0$ est seulement $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$-équivariant [9].

6.4 Le premier revêtement

Nous nous intéressons désormais au cas $n = 1$. L'espace Σ^1 est un revêtement de Σ^0, de groupe de Galois $\mathbb{F}^*_{q^{d+1}}$. Ce groupe est cyclique et son cardinal

$$N = q^{d+1} - 1$$

est premier à p. C'est un revêtement modérément ramifié et ces deux propriétés joueront un rôle central dans l'étude que nous voulons mener. Le schéma $\mathfrak{X}[\Pi_D]$ est, en particulier, un schéma en $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels et la condition que $\mathfrak{X}$ soit spécial entraîne que $\mathfrak{X}[\Pi_D]$ est un schéma de Raynaud. En utilisant la classification des schémas de Raynaud, il a été montré, par Teitelbaum [Tei90, théorème 5] pour $d = 1$ et par Wang [Wan14a, lemme 2.3.7.] pour d quelconque :

Théorème 6.7. *Soit s le sommet standard de $\mathcal{BT}$ et*

$$u_1 = \prod_{H\in\mathcal{H}_1\setminus\{H_0\}} (\frac{l_H}{l_{H_0}})^{q-1},$$

avec $H_0 \in \mathcal{H}_1$ une direction à l'infini privilégiée et $l_H =: l_{a_H}$ une forme linéaire pour $a_H \in K^{d+1}$ unimodulaire tel que $H = \ker(l^{(1)}_{a_H})$. On a

$$\mathfrak{X}[\Pi_D]|_{\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}},s}} = \mathrm{Spf}(\hat{A}_s[T]/(T^{q^{d+1}} - \varpi u_1 T))$$

avec $\hat{A}_s = \mathscr{O}(\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}},s})$.

Nous allons rappeler les arguments dans la section suivante pour le confort du lecteur. En effet, le théorème précédent décrit le « niveau entier » du premier revêtement alors que le résultat de Wang décrit la fibre générique. Toutefois, ce résultat plus fort est utilisé dans la preuve même s'il n'est pas énoncé explicitement. Nous le préférons car il détermine tous les objets qui nous intéressent (fibre générique et fibre spéciale).

On peut encore définir une flèche de réduction de Σ^1 vers l'immeuble de Bruhat-Tits $\mathcal{BT}$ s'inscrivant dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^1 & & \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & \searrow{\scriptstyle \nu} & \\ \mathbb{H}^d_{\breve{K}} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{BT} \end{array}$$

Pour tout sous-complexe simplicial $T \subseteq \mathcal{BT}$, on note

$$\Sigma^1_T = \nu^{-1}(T),\ \Sigma^1_{L,T} = \Sigma^1_T \otimes_{\breve{K}} L.$$

8. De même, les morphismes intermédiaires $\Sigma^n \to \Sigma^{n-1}$ et $\mathcal{M}^n_{Dr} \to \mathcal{M}^{n-1}_{Dr}$ sont des revêtements finis étales de groupes de Galois $(1+\Pi_D^{n-1}\mathcal{O}_D)/(1+\Pi_D^n\mathcal{O}_D)$. Les tours obtenues définissent aussi des revêtements pro-étales de groupe de Galois $\mathcal{O}_D^*$

9. En fait, il l'est pour le groupe qui préserve $\Sigma^1 \cong \Sigma^1 \times \{0\}$ à savoir $v \circ \det^{-1}((d+1)\mathbb{Z}) \subset G$.

Le théorème 6.7 établit l'isomorphisme

$$\Sigma^1_s \cong \mathbb{H}^d_{\breve{K},s}((\varpi u_1)^{\frac{1}{N}}).$$

Nous allons aussi généraliser cette description au revêtement de type Kummer Σ^1 sur $\mathbb{H}^d_{\breve{K}}$ tout entier.

6.5 Schémas de Raynaud

Soit S un schéma formel sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$, nous nous intéressons aux schémas X/S en groupes muni d'une action de $\mathbb{F}_{q^{d+1}}$ avec $q = p^f$. Si on note $\mathcal{I}$ l'idéal d'augmentation de X, il admet une décomposition en parties isotypiques pour l'action du groupe commutatif $\mathbb{F}^*_{q^{d+1}}$,

$$\mathcal{I} = \bigoplus_{\chi \in (\mathbb{F}^*_{q^{d+1}})^\vee} \mathscr{L}_\chi.$$

Définition 6.8. On dit que X est un schéma en $\mathbb{F}_{q^{d+1}}$-espaces vectoriels de Raynaud si les parties isotypiques $\mathscr{L}_\chi$ sont localement libres de rang 1. Si chaque $\mathscr{L}_\chi$ est un $\mathscr{O}_X$-module libre, nous dirons que X est un schéma de Raynaud libre.

Notons l'existence de flèches pour χ, χ' des caractères :

$$c_{\chi,\chi'} : \mathscr{L}_{\chi\chi'} \to \mathscr{L}_\chi \otimes \mathscr{L}_{\chi'}$$

$$d_{\chi,\chi'} : \mathscr{L}_\chi \otimes \mathscr{L}_{\chi'} \to \mathscr{L}_{\chi\chi'}$$

provenant de la multiplication et de la comultiplication dans $\mathscr{O}_X$.

Définition 6.9. On dit que χ est fondamental si le prolongement de χ à $\mathbb{F}_{q^{d+1}}$ (envoyant 0 sur 0) est un morphisme de corps.

Si χ_0 est un caractère fondamental, on observe que la famille $(\chi_i)_{i\in\mathbb{Z}/f(d+1)\mathbb{Z}} = (\chi_0^{p^i})_{i\in\mathbb{Z}/f(d+1)\mathbb{Z}}$ parcourt l'ensemble des caractères fondamentaux. De plus, tout caractère χ admet une unique écriture

$$\chi = \prod_{i\in\mathbb{Z}/f(d+1)\mathbb{Z}} \chi_i^{\alpha_i}$$

avec $\alpha_i = 0, \dots, p-1$. Nous introduisons alors

$$c_i : \mathscr{L}_{\chi_{i+1}} \to \mathscr{L}_{\chi_i}^{\otimes p}$$

$$d_i : \mathscr{L}_{\chi_i}^{\otimes p} \to \mathscr{L}_{\chi_{i+1}}$$

La composée $d_i \circ c_i$ est donc dans $\mathrm{End}(\mathscr{L}_{\chi_{i+1}}) = \mathscr{O}(S)$.

Proposition 6.10 ([Ray74] proposition 1.3.1)**.** *Il existe une extension $R/\mathcal{O}_K$ et w une constante de R telles que pour tout schéma de Raynaud X/S,*

$$R \subset \mathscr{O}(S) \text{ et } \forall i, d_i \circ c_i = w \,\mathrm{Id}_{\mathscr{L}_{\chi_{i+1}}}.$$

Nous pouvons énoncer la classification de Raynaud.

Théorème 6.11 ([Ray74] théorème 1.4.1)**.** *Soit S un schéma sur R, l'application*

$$X/S \mapsto (\mathscr{L}_{\chi_i}, c_i, d_i)_i$$

induit une bijection des schémas de Raynaud sur S à isomorphisme près vers les familles de faisceaux inversibles $(\mathscr{L}_i)_i$ munis de morphismes $c_i : \mathscr{L}_{i+1} \to \mathscr{L}_i^{\otimes p}$ et $d_i : \mathscr{L}_i^{\otimes p} \to \mathscr{L}_{i+1}$ vérifiant $d_i \circ c_i = w \,\mathrm{Id}_{\mathscr{L}_{i+1}}$.

Remarque 6.12. En fait, la preuve du théorème précédent montre aussi que la multiplication dans l'idéal d'augmentation induit des isomorphismes

$$d : \bigotimes_i \mathscr{L}_{\chi_i}^{\otimes \alpha_i} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}_\chi$$

pour $\chi = \prod_{i \in \mathbb{Z}/f(d+1)\mathbb{Z}} \chi_i^{\alpha_i}$ avec $\alpha_i = 0, \dots, p-1$.

Corollaire 6.13. *Soit $S = \mathrm{Spf}(A)$ un schéma formel sur R et X/S un schéma de Raynaud libre, on peut trouver des sections $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}/(d+1)\mathbb{Z}}$ dans A telles que*

$$X = \mathrm{Spf}(A[y_0, \dots, y_{f(d+1)-1}]/(y_i^p - v_i y_{i+1})).$$

La famille $(v_i)_i$ est unique modulo la relation d'équivalence $(v_i)_i \sim (v_i')_i$ si et seulement si il existe $(u_i)_i$ dans A^* telle que $v_i' = v_i \frac{u_i^p}{u_{i+1}}$.

Démonstration. Fixons un caractère $\chi = \prod_i \chi_i^{\alpha_i}$ et choisissons $y_i \in \mathscr{O}(X)$ un générateur de $\mathscr{L}_{\chi_i}$ pour tout caractère fondamental χ_i. Dans ce cas, $\mathscr{L}_\chi$ est engendré par $\prod y_i^{\alpha_i}$ et le morphisme $d_i : \mathscr{L}_{\chi_i}^{\otimes p} \to \mathscr{L}_{\chi_{i+1}}$ induit une relation $y_i^p = v_i y_{i+1}$ avec $v_i \in A$. Comme $X = \mathrm{Spf}(A \bigoplus_\chi \mathscr{L}_\chi(X))$, on voit aisément que

$$X = \mathrm{Spf}(A[y_0, \dots, y_{f(d+1)-1}]/(y_i^p - v_i y_{i+1})).$$

Le choix d'un autre jeu de générateurs $(y_i')_i = (y_i u_i)_i$ avec $u_i \in A^*$ entraîne l'écriture

$$\mathscr{O}(X) = A[y_0', \dots, y_{f(d+1)-1}']/(y_i'^p - v_i \frac{u_i^p}{u_{i+1}} y_{i+1}').$$

Ainsi choisir une classe d'équivalence des $(v_i)_i$ détermine les morphismes d_i et aussi les morphismes c_i via la relation $d_i \circ c_i = w \,\mathrm{Id}_{\mathscr{L}_{\chi_{i+1}}}$. Ceci entraîne l'unicité des $(v_i)_i$ par classification des schémas de Raynaud. □

Expliquons maintenant le lien avec les $\mathcal{O}_D$-modules formels spéciaux. Dorénavant, X désignera un $\mathcal{O}_D$-module formel. Dans ce cas, $X[\Pi_D]$ est un schéma en $\mathbb{F}_{q^{d+1}}$-espaces vectoriels. On notera encore $\mathcal{I}$, $\mathscr{L}_{\chi_i}$ l'idéal d'augmentation et les parties isotypiques de $X[\Pi_D]$.

Définition 6.14. On écrira Λ le sous-ensemble des caractères fondamentaux qui sont $\mathbb{F}$-linéaires. Quitte à permuter les caractères fondamentaux, on peut supposer $\chi_0 \in \Lambda$. Dans ce cas, on a l'égalité

$$\Lambda = \{\chi_0^{q^i} : 0 \leq i \leq d\} = \{\chi_{fi} : 0 \leq i \leq d\}$$

Pour simplifier, on pourra écrire $\mathscr{L}_i = \mathscr{L}_{\chi_{fi}}$.

La proposition suivante[10] exhibe le lien entre les faisceaux $\mathscr{L}_{\chi_i}$ et la décomposition en parties isotypiques de $\mathrm{Lie}(X)$.

Proposition 6.15. *On a d'une part*

$$\omega_{X[\Pi_D]/S} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = \bigoplus_i \mathscr{L}_{\chi_i}/d_i(\mathscr{L}_{\chi_{i-1}}^{\otimes p})$$

et d'autre part

$$\omega_{X[\Pi_D]/S} = \omega_{X/S}/\Pi_D \omega_{X/S} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/(d+1)\mathbb{Z}} \mathrm{Lie}(X)^\vee_{d+1-i}/\Pi \,\mathrm{Lie}(X)^\vee_{d-i}.$$

10. Voir [Pan17, Corollary 3.4.] pour une preuve en dimension 1. La démonstration en dimension supérieure se généralise aisément.

On en déduit que si X est spécial, $X[\Pi_D]$ est un schéma de Raynaud [Wan14a] [11].

Corollaire 6.16. *Soit $S = \mathrm{Spf}(A)$ un schéma formel sur R et X/S un module formel spécial tel que le schéma de Raynaud $X[\Pi_D]$ soit libre, alors*

$$X[\Pi_D] = \mathrm{Spf}(A[y_0, \dots, y_d]/(y_i^q - v_i y_{i+1})).$$

La famille $(v_i)_i$ est unique modulo la relation d'équivalence $(v_i)_i \sim (v_i')_i$ si et seulement si il existe $(u_i)_i$ dans A^* telle que $v_i' = v_i \frac{u_i^q}{u_{i+1}}$.

Démonstration. Nous savons déjà 6.13 :

$$X[\Pi_D] = \mathrm{Spf}(A[\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{f(d+1)-1}]/(\tilde{y}_i^p - \tilde{v}_i \tilde{y}_{i+1})).$$

Si χ_i n'est pas un caractère fondamental $\mathbb{F}$-linéaire, alors la partie isotypique de $\omega_{X[\Pi_D]/S}$ associée à χ_i est triviale d'après 6.15. Toujours par 6.15, on en déduit $\mathscr{L}_{\chi_i} = d_{i-1}(\mathscr{L}_{\chi_{i-1}}^{\otimes p})$ ou dit autrement $\tilde{v}_{i-1} \in A^*$. On peut ainsi exprimer $\tilde{y}_i$ en fonction de $\tilde{y}_{i-1}$.

Ainsi, on peut écrire :

$$X[\Pi_D] = \mathrm{Spf}(A[y_0, \dots, y_d]/(y_i^q - v_i y_{i+1}))$$

avec $y_i = \tilde{y}_{fi}$, $v_i = \tilde{v}_{f(i+1)-1} \tilde{v}_{f(i+1)-2}^p \dots \tilde{v}_{fi+1}^{q/p^2} \tilde{v}_{fi}^{q/p}$.

Pour l'unicité des sections $(v_i)_i$, il suffit d'observer que chaque variable y_i est vu comme un générateur du fibré $\mathscr{L}_i$ et on peut appliquer l'argument de 6.13. □

6.6 Application à $\mathfrak{X}[\Pi_D]$

Intéressons-nous maintenant à $\mathfrak{X}$ le module formel spécial universel sur $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\check{K}}}$. On fixe s le sommet standard et σ l'arête standard de type $(1, d)$ et on note $\mathfrak{X}[\Pi_D]_s$ et $\mathfrak{X}[\Pi_D]_\sigma$ la restriction de $\mathfrak{X}[\Pi_D]$ au-dessus de s et de σ. Le résultat précédent appliqué au tube au-dessus de s et de σ nous donne

Corollaire 6.17. *Il existe une fonction $u^{(s)} \in \hat{A}_s^*$ unique modulo $(\hat{A}_s^*)^N$ et des fonctions inversibles $u_0^{(\sigma)}, u_1^{(\sigma)} \in \hat{A}_\sigma^*$ telles que*

$$\mathfrak{X}[\Pi_D]_s = \mathrm{Spf}(\hat{A}_s[y_0]/(y_0^{q^{d+1}} - \varpi u^{(s)} y_0))$$

$$\mathfrak{X}[\Pi_D]_\sigma = \mathrm{Spf}(\hat{A}_\sigma[y_0, y_d]/(y_0^{q^d} - u_0^{(\sigma)} x_d y_d, y_d^q - u_d^{(\sigma)} x_0 y_0))$$

avec $\hat{A}_s = \mathscr{O}(\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\check{K}}, s})$ et $\hat{A}_\sigma = \mathscr{O}(\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\check{K}}, \sigma})$.

Démonstration. On appelle x_i les variables introduites dans 3.3. On prouve dans un premier temps l'annulation des groupes de Picard de $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\check{K}}, s}$ et $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\check{K}}, \sigma}$. Pour cela, on rappelle succinctement les arguments de Wang [Wan14a, Lemme (2.4.6)]. D'après [FvdP04, 3.7.4], il suffit de raisonner en fibre spéciale. Pour le sommet, la fibre spéciale est le spectre d'une $\overline{\mathbb{F}}$-algèbre factorielle de type fini. Pour l'arête σ, la fibre spéciale admet deux composantes irréductibles $V(x_0) = V_0$ et $V(x_d) = V_d$. On a une suite exacte scindée

$$0 \to A/(X_0 X_d) \to A/(X_0) \times A/(X_d) \to A/(X_0, X_d) \to 0$$

avec $A = \overline{\mathbb{F}}[X_0, \dots, X_d]$. Soit $\mathfrak{p}$ un point fermé de la fibre spéciale $\mathbb{H}^d_{\overline{\mathbb{F}}, \sigma}$ (resp. V_0, V_d, $V_{0,d} := V(X_d) \cap V(X_0)$), l'anneau local en ce point est un localisé de $A/(X_0 X_d)$ (resp. A/X_0, A/X_d,

11. Notons que [Van, 4.15] donne une condition suffisante pour que la réciproque soit vérifiée.

$A/(X_0, X_d)$). On a la même propriété pour les sections globales de $\mathbb{H}^d_{\mathbb{F},\sigma}$, V_i et $V_{0,d}$. On en déduit les suites exactes scindées

$$0 \to \mathscr{O}^*_{\mathbb{H}^d_{\mathbb{F},\sigma},\mathfrak{p}} \to \mathscr{O}^*_{V_0,\mathfrak{p}} \times \mathscr{O}^*_{V_d,\mathfrak{p}} \to \mathscr{O}^*_{V_{0,d},\mathfrak{p}} \to 0$$

$$0 \to \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{\mathbb{F},\sigma}) \to \mathscr{O}^*(V_0) \times \mathscr{O}^*(V_d) \to \mathscr{O}^*(V_{0,d}) \to 0$$

On en déduit la suite exacte de faisceaux :

$$0 \to \mathscr{O}^*_{\mathbb{H}^d_{\mathbb{F},\sigma}} \to \iota_* \mathscr{O}^*_{V_0} \times \iota_* \mathscr{O}^*_{V_d} \to \iota_* \mathscr{O}^*_{V_{0,d}} \to 0$$

où ι_* désigne les immersions fermées de $V(X_i)$ ou $V(X_0) \cap V(X_d)$ dans $\mathbb{H}^d_{\mathbb{F},\sigma}$.

La suite exacte longue associée induit l'exactitude de

$$\mathscr{O}^*(V_{0,d})/(\mathscr{O}^*(V_0) \times \mathscr{O}^*(V_d)) \to \mathrm{Pic}(\mathbb{H}^d_{\mathbb{F},\sigma}) \to \mathrm{Pic}(V_0) \times \mathrm{Pic}(V_d)$$

On a montré que le premier quotient est trivial et $\mathrm{Pic}(V_0) = \mathrm{Pic}(V_d) = 0$ car les deux fermés sont affines de sections globales factorielles. On en déduit l'annulation du groupe de Picard recherchée.

Ainsi les deux modules formels $\mathfrak{X}[\Pi_D]_s$ et $\mathfrak{X}[\Pi_D]_\sigma$ sont des schémas de Raynaud libres, on a d'après 6.13,

$$\mathfrak{X}[\Pi_D]_s = \mathrm{Spf}(\hat{A}_s[y_0, \dots, y_d]/(y_i^q - v_i^{(s)} y_{i+1}))$$
$$\mathfrak{X}[\Pi_D]_\sigma = \mathrm{Spf}(\hat{A}_\sigma[y_0, \dots, y_d]/(y_i^q - v_i^{(\sigma)} y_{i+1}))$$

Si on note (ψ, η, T, u, r) le quintuplet universel du modèle universel de Deligne, alors (T_i) s'identifie aux parties isotypiques de $\mathrm{Lie}(\mathfrak{X})$ (6.4 et 6.5). Sur le sommet s, $\Pi : T^\vee_{d-i} \to T^\vee_{d-i+1}$ est inversible pour $i \neq 0$ et on peut trouver des générateurs r_0, r_1 de $T^\vee_{d+1}, T^\vee_d$ respectivement, tels que $\Pi(r_1) = \varpi r_0$. On en déduit par 6.15 que

$$\mathscr{L}_{\chi_0}/d_{f(d+1)-1}(\mathscr{L}^{\otimes p}_{\chi_{f(d+1)-1}}) \cong T^\vee_{d+1}/\Pi(T^\vee_d) \cong \mathscr{O}/\varpi\mathscr{O}$$

Ainsi, $v_i^{(s)}$ est inversible si et seulement si $i \neq d$ et on $v_d^{(s)} = \varpi u_d$ avec $u_d \in \hat{A}_s^*$. En particulier, toutes les variables y_i peuvent s'exprimer en fonction de y_0 d'où l'écriture

$$\mathfrak{X}[\Pi_D]_s = \mathrm{Spf}(\hat{A}_s[y_0]/(y_0^{q^{d+1}} - \varpi u^{(s)} y_0))$$

avec $u^{(s)} = (v_0^{(s)})^{q^d} (v_1^{(s)})^{q^{d-1}} \cdots (v_{d-1}^{(s)})^q u_d$. L'unicité de u découle des conditions d'unicité sur les $v_i^{(s)}$ 6.13.

De même sur σ, $v_i^{(\sigma)}$ est inversible si et seulement si $i \neq d, d-1$ et on peut exprimer les variables y_i en fonction de y_0 et y_d. On a aussi des relations $v_{d-1}^{(\sigma)} = x_d u_{d-1}$ et $v_d^{(\sigma)} = x_0 u_d$ et $x_0 x_d = \varpi$. On en deduit l'écriture

$$\mathfrak{X}[\Pi_D]_\sigma = \mathrm{Spf}(\hat{A}_\sigma[y_0, y_d]/(y_0^{q^d} - u_0^{(\sigma)} x_d y_d, y_d^q - u_d^{(\sigma)} x_0 y_0))$$

avec $u_d^{(\sigma)} = u_d$ et $u_0^{(\sigma)} = (v_0^{(\sigma)})^{q^{d-1}} \cdots (v_{d-2}^{(\sigma)})^q u_{d-1}$.

□

Corollaire 6.18. *En reprenant les notations ci-dessus, on a la congruence :*

$$u^{(s)} \equiv (u_0^{(\sigma)})^q u_d^{(\sigma)} x_d^{q-1} \pmod{(\hat{A}_s^*)^N}$$

Démonstration. Il s'agit d'observer que $\mathfrak{X}[\Pi_D]_s = \mathrm{Spf}(\mathscr{O}(\mathfrak{X}[\Pi_D]_\sigma)[1/x_d])$. Ainsi, au dessus du sommet s, on peut exprimer la variable y_d en fonction de y_0 dans la description precedente de $\mathfrak{X}[\Pi_D]_\sigma$. On obtient alors l'equation

$$\mathfrak{X}[\Pi_D]_s = \mathrm{Spf}(\hat{A}_s[y_0]/(y_0^{q^{d+1}} - \varpi(u_0^{(\sigma)})^q u_d^{(\sigma)} x_d^{q-1} y_0))$$

et on conclut par unicité de $u^{(s)}$.

□

On peut maintenant terminer la preuve de 6.7 et déterminer un représentant de $u^{(s)}$. $\hat{A}_s^* = \mathcal{O}_{\check{K}}^*(1+\hat{A}_s^{++})\prod_H (\frac{l_H}{l_{H_0}})^{\mathbb{Z}}$ où H parcourt un système des représentants S_1 des hyperplans modulo ϖ. Ainsi $\hat{A}_s^*/(\hat{A}_s^*)^N = \prod_H (\frac{l_H}{l_{H_0}})^{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$. En fibre générique, le revêtement $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$-invariant $\Sigma_s^1 \to \mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\check{K}},s}$ s'écrit en fait $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\check{K}},s}((u^{(s)})^{1/N})$ donc $u^{(s)}$ est invariante sous l'action de $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$ dans $\hat{A}_s^*/(\hat{A}_s^*)^N$. Ainsi, $u^{(s)}$ peut être choisi de la forme $\prod_H l_H^{\alpha_H}$ avec $\sum_H \alpha_H \equiv 0 \pmod N$. On notera $\mathrm{ord}_H(u^{(s)}) := \alpha_H$. Comme l'action est transitive sur les hyperplans, $\alpha := \alpha_H$ ne dépend pas de H et $|S_1|\alpha \equiv 0 \pmod N$. Ainsi $(q-1)|\alpha$ car $|S_1| = |N|/(q-1)$.

On se place maintenant sur l'arête σ considérée précédemment. Si on note $[z_0, \ldots, z_d]$ les variables sur l'espace projectif ambiant, alors la coordonnée x_d au dessus de σ définie dans 3.3 correspond à $x_d = z_d/z_1$. On appelle $H = \ker(z_d)$, on a la relation

$$\mathrm{ord}_H(u^{(s)}) \equiv (q-1)\,\mathrm{ord}_H(x_d^{q-1}) + q\,\mathrm{ord}_H(u_0^{(\sigma)}) + \mathrm{ord}_H(u_d^{(\sigma)}) \pmod N$$

Comme x_d n'est pas inversible sur σ, et $u_0^{(\sigma)}, u_d^{(\sigma)}$ le sont, on a $\mathrm{ord}_H(u_0^{(\sigma)}) = \mathrm{ord}_H(u_d^{(\sigma)}) = 0$. Par definition $\mathrm{ord}_H(x_d) = 1$ et on en deduit que $\alpha = q-1$, ce qui conclut la preuve de 6.7.

6.7 Équations pour le premier revêtement de l'espace symétrique de Drinfeld

L'objectif de cette section est de donner une équation pour le premier revêtement Σ^1 de $\mathbb{H}^d_{K,\check{K}}$. Ce dernier a un groupe de Galois cyclique d'ordre $N = q^{d+1}-1$ qui est premier à p et on le voit comme un μ_N-torseur ou encore comme une classe du groupe $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,\check{K}}, \mu_N)$.

Mais les résultats de la section 5 permettent de décrire explicitement ces torseurs. On rappelle que l'on a deux recouvrements admissibles croissants par des ouverts admissibles $\mathbb{H}^d_{K,L} = \bigcup_{n>0} \mathring{U}_{n,L} = \bigcup_{n\geq 0} \overline{U}_{n,L}$. Chacun de ces ouverts est stable sous l'action de $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$.

Corollaire 6.19. *Soit l un entier premier à p (non nécessairement premier), L une extension complète de K :*

1. *Un μ_l-torseur de $\mathbb{H}^d_{K,L}$ à isomorphisme près est décrit par une suite de fractions rationnelles homogènes de degré zéro $(\lambda_n u_n)_n$ avec λ une constante de L et u_n de la forme $\prod_{H\in\mathcal{H}_n} l_H^{\alpha_H}$ avec α_H dans $\mathbb{Z}$ tel que $\lambda_{n+1}u_{n+1} \equiv \lambda_n u_n \pmod{\mathscr{O}^{**}(\overline{U}_{n-1,L})}$.*
2. *De plus, la famille $(u_n)_n$ est compatible pour les projections naturelles $\mathcal{H}_{n+1} \to \mathcal{H}_n$ ie. $\alpha_H \equiv \sum_{\substack{\tilde{H}\in\mathcal{H}_{n+1}\\ \tilde{H}\equiv H}} \alpha_{\tilde{H}} \pmod l$ pour tout $H \in \mathcal{H}_n$.*
3. *Pour tout n, la restriction sur $\overline{U}_{n-1,L}$ d'un μ_l-torseur $(\lambda_n u_n)_n$ de $\mathbb{H}^d_{K,L}$ est $\kappa(\lambda_n u_n)$.*
4. *Tout μ_l-torseur sur $\overline{U}_{n-1,L}$ s'étend de manière unique sur $\mathring{U}_{n,L}$ en un torseur provenant d'un torseur global sur $\mathbb{H}^d_{K,L}$.*
5. *Pour tout μ_l-torseur global $\mathbb{H}^d_{K,L}$, l'écriture en fractions rationnelles $\kappa(\lambda_n u_n)$ sur $\mathring{U}_{n,L}$ est unique (si on voit $\lambda_n \in L^*/(L^*)^l$ et $\alpha_H \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$).*

Démonstration. La flèche de Kummer induit un isomorphisme $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}[\mathcal{H}_n]^0 \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{U}_{n,L}, \mu_l)$ d'après 5.39 ce qui prouve les points 3. et 5. Comme tous les groupes précédents sont de type fini, on a l'isomorphisme $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,L}, \mu_l) \cong \varprojlim_n \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{U}_{n,L}, \mu_l)$ 5.39 et on en déduit les points 1. et 2. Pour 4., il suffit d'appliquer 5.40. □

Revenons au premier revêtement. D'après ce qui précède,

$$\Sigma^1 = \mathbb{H}^d_{K,\check{K}}((\lambda u)^{1/N})$$

avec $\lambda u = (\lambda u_n)$ [12] un élément de $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,\check{K}}, \mu_N)$ et nous allons déterminer les quantités $(\lambda u_n)_n$ et $\alpha_H \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ associées (voir 6.19). L'observation clé est de voir que le revêtement $\pi : \Sigma^1 \to \mathbb{H}^d_{K,\check{K}}$ est $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$-équivariant. Le résultat suivant montre qu'il n'y en a essentiellement qu'un seul.

Lemme 6.20. *Si on pose* [13] $u = (u_n)_n := (\prod_{H\in\mathcal{H}_n} l_H^{q^{n-1}})_n \in \mathbb{Z}/\tilde{N}\mathbb{Z}[\![\mathcal{H}]\!]^0$ *alors*

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,\check{K}}, \mu_N)^{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)} = \varpi^{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \times \langle \kappa(u^{(q-1)}) \rangle_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\text{-Mod}}$$

et un torseur de $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,\check{K}}, \mu_N)^{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)}$ *est déterminée par sa restriction à* $\mathbb{H}^d_{K,\check{K},s}$.

Démonstration. Soit $\varpi^k v = (\varpi^k v_n)_n = (\varpi^k \prod_{H\in\mathcal{H}_n} l_H^{\alpha_H})_n$ un torseur de $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,\check{K}}, \mu_N)^{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)}$. L'action de $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$ sur $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,\check{K}}, \mu_N)$ est induite par l'action naturelle sur chaque $\mathcal{H}_n$ qui est transitive. Comme l'écriture en fraction rationnelle du torseur est unique (point 5 de 6.19), on obtient $\alpha_H = \alpha_{H'} =: \alpha_n$ pour tout H, H' dans $\mathcal{H}_n$. Les fractions rationnelles v_n sont homogènes de degré 0 et doivent former une famille compatible, on a donc les relations $\alpha_n = \frac{|\mathcal{H}_{n+1}|}{|\mathcal{H}_n|}\alpha_{n+1}$ et $|\mathcal{H}_n|\alpha_n \equiv 0 \pmod N$.

Calculons la quantité $|\mathcal{H}_n|$. On a une identification

$$\mathcal{H}_n = \{\text{vecteur unimodulaire de } K^{d+1} \bmod \varpi^n\}/(\mathcal{O}_K/\varpi^n\mathcal{O}_K)^*.$$

Le premier est de cardinal $|(\mathcal{O}_K/\varpi^n\mathcal{O}_K)^{d+1}\backslash(\varpi\mathcal{O}_K/\varpi^n\mathcal{O}_K)^{d+1}| = q^{n(d+1)} - q^{(n-1)(d+1)} = Nq^{(n-1)(d+1)}$ et le second $(q-1)q^{n-1}$ d'où $|\mathcal{H}_n| = \tilde{N}q^{(n-1)d}$. On en déduit alors

$$\alpha_n = q^d\alpha_{n+1} \text{ et } \alpha_n \in (q-1)\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \mathrm{Ann}(|\mathcal{H}_n|) = \mathrm{Ann}(\tilde{N})$$

Ainsi, pour tout n, on a $\alpha_n = q^{n-1}(q-1)\tilde{\alpha}_1$ ie. $v = u^{(q-1)\tilde{\alpha}_1}$. L'élément $\tilde{\alpha}_1$ détermine le torseur $\varpi^k v$ et ne dépend que de v_1 qui caractérise la restriction de $\varpi^k v$ sur $\overline{U}_{0,\check{K}} = \mathbb{H}^d_{K,\check{K},s}$ ce qui termine preuve. □

Par 6.7, on sait de plus :

$$\Sigma^1|_{\overline{U}_{0,\check{K}}} = \Sigma^1_s = \mathbb{H}^d_{K,\check{K},s}((\varpi \prod_{H\in\mathcal{H}_1} (l_H)^{q-1})^{1/N}) = \mathbb{H}^d_{K,\check{K},s}((\lambda u_1^{(q-1)})^{1/N}) \tag{11}$$

ce qui entraîne

Théorème 6.21. *On reprend l'élément* $u = (u_n)_n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[\![\mathcal{H}]\!]^0$ *définie dans 6.20. On a*

$$\Sigma^1|_{\mathring{U}_{n,\check{K}}} = \mathring{U}_{n,\check{K}}((\varpi u_n^{(q-1)})^{1/N}),\ \Sigma^1|_{\overline{U}_{n,\check{K}}} = \overline{U}_{n,\check{K}}((\varpi u_{n+1}^{(q-1)})^{1/N}) \text{ et } \Sigma^1 = \mathbb{H}^d_{K,\check{K}}((\varpi u^{(q-1)})^{1/N}).$$

12. On a une identification $\check{K}^*/(\check{K}^*)^N = \varpi^{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$. Comme les formes linéaires $(l_H)_{H\in\mathcal{H}}$ choisies proviennent de vecteurs unimodulaires qui sont uniques à un élément de $\mathcal{O}^*_{\check{K}} \subset (\check{K}^*)^N$, on a une décomposition naturelle en produit $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,\check{K}}, \mu_N) = \varpi^{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[\![\mathcal{H}]\!]^0$. En particulier la constante λ est bien déterminée.

13. On a l'égalité $|\mathcal{H}_n|q^{n-1}(q-1) \in N\mathbb{Z}$ et on a bien $(u_n^{(q-1)})_n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[\![\mathcal{H}]\!]^0$. On peut aussi les écrire sous la forme $u_n^{(q-1)} = \prod_{H\in\mathcal{H}_n}(\frac{l_H}{l_{H_0}})^{q^{n-1}(q-1)}$ (cela ne dépend pas du choix de $H \in \mathcal{H}_n$).

Remarque 6.22. Les constantes $\kappa(\lambda)$ et le torseur $\kappa(u^{(q-1)})$ engendrent $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,\breve{K}},\mu_N)^{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)}$ sont faiblement équivariant, la suite exacte écrite dans 2.1 devient :

$$0 \to \mathbb{F}^* \to \mathrm{Tors}^{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)}(\mathbb{H}^d_{K,\breve{K}}) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{H}^d_{K,\breve{K}},\mu_N)^{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)} \to 0$$

On retrouve aisément le résultat bien connu 2.2

Corollaire 6.23. *Les revêtements Σ^1 et $\Sigma^1_{|\overline{U}_{n,\breve{K}}}$ ont $q-1$ composantes connexes géométriques.*

6.8 Calcul des fonctions inversibles du revêtement modéré

Comme précédemment, on note $N = q^{d+1}-1 = (q-1)\tilde{N}$. En guise d'application de l'équation précédente, nous souhaitons calculer les sections inversibles de Σ^1_L. Ce résultat sera un prolongement de 4.1 qui calcule les sections inversibles en niveau 0. Nous n'en aurons pas besoin pour la suite.

Comme précédemment, on note $N = q^{d+1}-1 = (q-1)\tilde{N}$. Nous souhaitons calculer les sections inversibles de Σ^1_L. On suppose que $L \supset \breve{K}$ est galoisien et qu'il contient racine N-ième de ϖ. Les autres cas se déduiront en passant aux invariants sous le groupe de Galois. Donnons-nous une unité $u \in \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,\breve{K}})$ tel que $\Sigma^1 = \mathbb{H}^d_{K,\breve{K}}((\varpi u^{q-1})^{1/N})$ (cf 6.21). Ainsi, $\Sigma^1_L = \mathbb{H}^d_{K,L}((u^{q-1})^{1/N})$ par hypothèse sur L.

On fixe t dans $\mathscr{O}^*(\Sigma^1_L)$ une racine N-ième de u^{q-1} et on pose $t_0 = \frac{t^{\tilde{N}}}{u}$. Pour tout $a \in \mu_{q-1}(K)$, on introduit le polynôme interpolateur de Lagrange $\mathscr{L}_a(X)$ ie le polynôme unitaire de degré $q-2$ qui vaut 1 en a et 0 sur $\mu_{q-1}(K)\backslash\{a\}$. Les composantes de Σ^1_L sont alors en bijection avec la famille d'idempotents $\{\mathscr{L}_a(t_0)\}_{a\in\mu_{q-1}(K)}$.

Enfin, si $X \to Y$ est un revêtement de groupe de galois cyclique, nous introduisons la norme galoisienne $\mathrm{Nrm} : \mathscr{O}(X) \to \mathscr{O}(Y)$ avec $\mathrm{Nrm}(f) = \prod_g g\cdot f$ où g parcourt les automorphismes de X/Y.

Théorème 6.24. *Reprenons les notations précédentes, toute fonction inversible v de Σ^1_L admet une écriture*

$$v = \sum_{a\in\mu_{q-1}(K)} t^{j_a} v_a \mathscr{L}_a(t_0)$$

où $(v_a)_a$ sont des sections inversibles de $\mathbb{H}^d_{K,L}$ et $0 \le j_a \le \tilde{N}-1$.

De même, si $T \subset \mathcal{BT}$ est un sous-complexe simplicial connexe, toute fonction inversible v de $\Sigma^1_{L,T}$ admet une écriture

$$v = \sum_{a\in\mu_{q-1}(K)} t^{j_a} v_a (1+f_a)\mathscr{L}_a(t_0)$$

où f_a est topologiquement nilpotente sur $\Sigma^1_{L,T}$, $(v_a)_a$ sont des sections inversibles de $\mathbb{H}^d_{K,L}$ et $0 \le j_a \le \tilde{N}-1$.

Remarque 6.25. Dit autrement, sur chaque composante connexe du premier revêtement, les fonctions inversibles du premier revêtement sont engendrées par $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})$ et par t.

Comme on peut raisonner sur chaque composante connexe, nous nous concentrerons plutôt sur le revêtement $\tilde{\Sigma}^1_L = \mathbb{H}^d_{K,L}(u^{1/\tilde{N}})$. Par abus, nous écrirons encore t une racine $\tilde{N}$-ième de u.

Nous aurons besoin des deux résultats techniques suivants :

Lemme 6.26 (Principe du maximum)**.** *Soit $T \subset \mathcal{BT}$ un sous-complexe simplicial connexe, une fonction $f = \sum_{i=0}^{\tilde{N}-1} f_i t^i$ de $\tilde{\Sigma}^1_{L,T}$ est à puissance bornée (respectivement topologiquement nilpotente) si et seulement si, pour tout i, $u^i f_i^{\tilde{N}}$ l'est si et seulement si pour tout sommet s de T, $f|_{\tilde{\Sigma}^1_{L,s}}$ l'est.*

Pour tout H dans $\mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q)$, on fixe $l_H : z \mapsto \sum_i a_i z_i$ une forme linéaire telle que $H = \ker(l_H)$. On dit que $H = \infty$ si $l_H(z) = z_0$. Dans $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_d]$, on note encore $l_H = a_0 + a_1 X_1 + \cdots + a_d X_d$.

Lemme 6.27. *On considère le revêtement*

$$\mathbb{F}[X_1, \dots, X_d, \frac{1}{P}] \to \mathbb{F}[X_1, \dots, X_d, \frac{1}{P}, t]/(t^{\tilde{N}} - P)$$

où $P = \prod_{H \in \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \setminus \infty} l_H$. *Soit* v *dans* $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_d, \frac{1}{P}, t]/(t^{\tilde{N}} - P)$, *alors* $\mathrm{Nrm}(v) = 1$ *si et seulement si* v *est une racine* $\tilde{N}$*-ième de l'unité.*

Nous tirons des lemmes précédents les résultats suivants

Corollaire 6.28. *Soit* f *une fonction sur* $\tilde{\Sigma}^1_L$ *telle que* $\mathrm{Nrm}(f) = 1$ *alors* f *est une racine* $\tilde{N}$*-ième de l'unité.*

Corollaire 6.29. *Si* $T \subset \mathcal{BT}$ *est un sous-complexe simplicial connexe,* $f \in \mathscr{O}^*(\Sigma^1_{L,T})$ *telle que* $\mathrm{Nrm}(f) = 1$ *alors il existe* f_0 *dans* $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L,T})$ *et* g *dans* $\mathscr{O}^{++}(\Sigma^1_{L,T})$ *tels que*

$$f = f_0(1 + g).$$

Nous commençons par prouver ces conséquences en admettant les lemmes techniques.

Preuve de 6.28. On prend $f = \sum_{i=0}^{\tilde{N}-1} f_i t^i$ de norme galoisienne 1, on raisonne sommet par sommet grâce au lemme 6.26. Fixons s dans $\mathcal{BT}_0$, le tube $\tilde{\Sigma}^1_s$ admet un modèle entier lisse sur $\mathcal{O}_L$ de fibre spéciale $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}[X_1, \dots, X_d, \frac{1}{P}, t]/(t^{\tilde{N}} - P))$ [Wan14a, 2.3.8]. Comme la fibre spéciale est intègre, la norme spectrale est multiplicative et

$$\|\mathrm{Nrm}(f)\|_{\tilde{\Sigma}^1_{L,s}} = \|f\|^{\tilde{N}}_{\tilde{\Sigma}^1_{L,s}} = 1$$

On en déduit que f est à puissance bornée dans tout $\tilde{\Sigma}^1_L$ 6.26 et chaque $u^i f_i^{\tilde{N}}$ est constante toujours d'après 6.26 et [Ber95a, lemme 3]. Si cette constante est non nulle quand $i \neq 0$, alors f_i est inversible sur $\mathbb{H}^d_{K,L}$ et on a $u^i \in L^*(\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L}))^{\tilde{N}}$ ce qui contredit l'hypothèse de connexité géométrique de $\tilde{\Sigma}^1_L$. Donc $f_i = 0$ quand $i \neq 0$ et $f = f_0 \in L^*$ de norme galoisienne 1, c'est une racine $\tilde{N}$-ième de l'unité. □

Preuve de 6.29. Comme dans le raisonnement précédent, la restriction de f à chaque sommet est de norme spectrale 1. On voit qu'il existe une racine de l'unité λ_s et une fonction g_s dans $\mathscr{O}^{++}(\mathbb{H}^d_{K,L,s})$ telles que $f = \lambda_s(1 + g_s)$ au-dessus de chaque sommet s d'après 6.27. On écrit $f = \sum_i t^i f_i$, si bien que sur chaque sommet s, on a $f_0 - \lambda_s \in \mathscr{O}^{++}(\mathbb{H}^d_{K,L,s})$ et $t^i f_i \in \mathscr{O}^{++}(\tilde{\Sigma}^1_{L,s})$ si $i \neq 0$. On a par principe du maximum, $f - f_0 = \sum_{i \neq 0} t^i f_i \in \mathscr{O}^{++}(\tilde{\Sigma}^1_{L,T})$ et $f \in \mathscr{O}^+(\mathbb{H}^d_{K,L,T})$. La section inversible f^{-1} est aussi de norme galoisienne 1 donc $f^{-1} \in \mathscr{O}^+(\tilde{\Sigma}^1_{L,T})$. Il s'ensuit

$$f_0 = f - (f - f_0) = f(1 - f^{-1}(f - f_0)) \in f\mathscr{O}^{**}(\tilde{\Sigma}^1_{L,T}) \subset \mathscr{O}^+(\tilde{\Sigma}^1_{L,T})$$

On en déduit que f_0 est inversible et f_0^{-1} est dans $\mathscr{O}^+(\mathbb{H}^d_{K,L,T})$. Ce dernier point entraîne que

$$f = f_0(1 + f_0^{-1}(f - f_0)) \in f_0\mathscr{O}^{**}(\tilde{\Sigma}^1_{L,T})$$

et on a exhibé la décomposition voulue. □

Établissons maintenant les résultats techniques

Preuve du lemme 6.26. Prouvons la première équivalence. Un sens est évident., prouvons l'autre. Soit $f = \sum_i f_i t^i$ une section sur $\tilde{\Sigma}^1_{L,T}$ avec f_i une section de $\mathbb{H}^d_{K,L,T}$. Chaque translaté de f par le groupe de Galois du revêtement est à puissance bornée (respectivement topologiquement nilpotente) si et seulement si f l'est. Mais la projection $f \mapsto f_i t^i$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{\tilde{N}}]$ des translatés de f et on en déduit que f est à puissance bornée (respectivement topologiquement nilpotente) si et seulement si chaque $f_i t^i$ l'est si et seulement si chaque $f_i^{\tilde{N}} u^i = (f_i t^i)^{\tilde{N}}$ l'est. Cette dernière fonction est dans $\mathscr{O}(\mathbb{H}^d_{K,L,T})$.

Intéressons-nous maintenant à la seconde équivalence. D'après la discussion précédente, il suffit de montrer que, pour une fonction f de $\mathbb{H}^d_{K,L,T}$, le maximum de la norme spectrale est atteint sur un sommet. On peut alors raisonner sur $T = \sigma$ un simplexe. Donnons-nous un point x de $\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma}$ qui réalise ce maximum. Nous avons un recouvrement disjoint de $\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma} = \amalg_{\sigma' \subset \sigma} \mathbb{H}^d_{K,L,\mathring{\sigma}'}$. Il faut montrer que si $x \in \mathbb{H}^d_{K,L,\mathring{\sigma}'}$ alors σ' est un sommet. Supposons que σ' n'en est pas un, on rappelle que $\mathbb{H}^d_{K,L,\mathring{\sigma}'}$ admet une décomposition $A_k \times C_{\sigma'}$ avec A_k une couronne ouverte de dimension $k \geq 1$ et $C_{\sigma'}$ un affinoïde. Soit $x = (x_A, x_C) \in A_k \times C_{\sigma'}$, on s'intéresse à la fibre $A_k \times \{x_C\}$ qui est une couronne ouverte sur le corps $K(x_C)$. Mais sur une couronne ouverte, la borne supérieure de la norme spectrale n'est atteint en aucun point d'où

$$|f(x_A, x_C)| < |f|_{A_k \times \{x_C\}} \leq |f|_{\mathbb{H}^d_{K,L,\sigma}}$$

Donc le maximum ne peut être atteint sur $\mathbb{H}^d_{K,L,\mathring{\sigma}'}$, d'où le résultat. □

Preuve du lemme 6.27. Nous introduisons d'abord la notion d'ordre en un hyperplan. Prenons $H \in \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q) \backslash \{\infty\}$. Comme $\mathbb{F}[X_1, \ldots, X_d]$ est factoriel, tout polynôme Q s'écrit comme un produit $\prod_i P_i^{\alpha_{P_i}}$ et on pose $v_H(Q) = \alpha_{l_H}$. On pose de même $v_\infty(Q) = -\deg(Q)$ où deg désigne le degré total. Ces applications sont multiplicatives et vérifient l'inégalité ultramétrique. Elles se prolongent de manière unique en des applications multiplicatives sur $\mathbb{F}[X_1, \ldots X_d, \frac{1}{P}]$. Nous expliquons comment les prolonger à $\mathbb{F}[X_1, \ldots, X_d, \frac{1}{P}, t]/(t^{\tilde{N}} - P)$.

Prenons $f = \sum_i t^i f_i$, on pose dans un premier temps $v_H(t^i f_i) = \frac{i}{\tilde{N}} + v_H(f_i)$ et $v_\infty(t^i f_i) = \frac{i(1-\tilde{N})}{\tilde{N}} + v_\infty(f_i)$. On remarque que cette définition est cohérente avec l'identité $v_H(P) = 1 = \tilde{N} v_H(t)$ et $v_\infty(P) = 1 - \tilde{N} = \tilde{N} v_\infty(t)$. De manière générale, on pose $v_H(f) = \min(v_H(t^i f_i))$ et $v_\infty(f) = \min(v_\infty(t^i f_i))$.

Les valuations v_H et v_∞ vérifient encore l'inégalité ultramétrique et nous allons montrer qu'elles sont multiplicatives. Prenons $f = \sum f_i t^i$ et $g = \sum g_j t^j$, donnons-nous i_0, j_0 les uniques entiers pour lesquels $v_H(f) = v_H(f_{i_0} t^{i_0})$ et $v_H(g) = v_H(g_{j_0} t^{j_0})$. Par inégalité ultramétrique, il suffit de montrer en développant le produit fg que le minimum de $v_H(f_i t^i g_j t^j)$ est atteint uniquement pour le couple (i_0, j_0). Si par exemple $i \neq i_0$, on a $v_H(f_i t^i) > v_H(f_{i_0} t^{i_0})$ car les valuations sont toutes différentes. On en déduit que $v_H(f_i t^i g_j t^j) > v_H(f_{i_0} t^{i_0} g_{j_0} t^{j_0})$. On raisonne de même pour $j \neq j_0$. Pour la valuation v_∞, l'argument fonctionne encore en observant que $1 - \tilde{N}$ et $\tilde{N}$ sont premiers entre eux. On vérifie aisément que v_H et v_∞ sont invariants sous le groupe de Galois du revêtement et on observe les égalités $v_H(\mathrm{Nrm}(f)) = \tilde{N} v_H(f)$ et $v_\infty(\mathrm{Nrm}(f)) = \tilde{N} v_\infty(f)$.

Revenons à l'énoncé et prenons $u = \sum u_i t^i$ tel que $\mathrm{Nrm}(u) = 1$. D'après ce qui précède, $v_H(u) = 0 = v_\infty(u)$. On en déduit $v_H(u_0) = 0$ pour tout H et $v_H(u_i) \geq 0$ pour $i \neq 0$. Ainsi, les u_i sont des polynômes. De même, $v_\infty(u_0) = 0$ et $v_\infty(u_i) > 0$ pour tout $i \neq 0$. Ainsi, $u_i = 0$ pour $i \neq 0$ et u est une constante. D'où u est une racine $\tilde{N}$-ième de l'unité. □

Revenons à la preuve du théorème principal. Soit v une section inversible de $\tilde{\Sigma}^1_L$ et considérons $\frac{v^{\tilde{N}}}{\mathrm{Nrm}(v)}$. Elle est de norme galoisienne 1, c'est une racine $\tilde{N}$-ième de l'unité ζ d'après 6.28. Ainsi on obtient

$$v^{\tilde{N}} = \zeta \mathrm{Nrm}(v) \in \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L}).$$

D'après cette relation, les translatés de v par le groupe de Galois sont de la forme ωv avec ω une racine $\tilde{N}$-ième de l'unité. Ainsi, v est un vecteur propre pour tous les automorphismes du revêtement. Mais les parties isotypiques sont de la forme $t^i\mathscr{O}(\mathbb{H}^d_{K,L})$ pour $0 \leq i \leq \tilde{N}-1$ donc il existe w dans $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L})$ tel que $v = t^i w$.

Prenons maintenant w une section inversible $\tilde{\Sigma}^1_{L,T}$ et considérons encore la section inversible $\frac{v^{\tilde{N}}}{\mathrm{Nrm}(v)}$ de norme galoisienne 1. On l'écrit $f_0(1+g) = f_0(1+\tilde{g})^{\tilde{N}}$ comme dans 6.29. On a alors

$$(\frac{v}{1+\tilde{g}})^{\tilde{N}} = f_0 \mathrm{Nrm}(v) \in \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L,T}).$$

L'argument précédent sur les parties isotypiques prouve l'existence de i et de w dans $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,L,T})$ tel que

$$v = t^i w(1+\tilde{g}).$$

7 Cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig

7.1 Variétés de Deligne-Lusztig

Considérons les groupes algébriques $G = \mathrm{GL}_{d+1,\overline{\mathbb{F}}_q}$ et $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,\mathbb{F}_q}$, ainsi que le morphisme de Frobenius F défini par $(a_{i,j})_{i,j} \mapsto (a^q_{i,j})_{i,j}$. Soit B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, T le tore des matrices diagonales, U le sous-groupe de B des matrices unipotentes.

On identifie le groupe de Weyl $W = N_G(T)/T$ à $\mathfrak{S}_{d+1}$ par le biais des matrices de permutation. Soit w la matrice de permutation associée au cycle $(0,1,\ldots,d) \in \mathfrak{S}_{d+1}$. On définit

$$Y(w) := \{gU \in G/U |\ g^{-1}F(g) \in UwU\}$$

et

$$X(w) := \{gB \in G/B |\ g^{-1}F(g) \in BwB\}$$

Il existe π rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y(w) & \xrightarrow{\iota} & G/U \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow \\ X(w) & \xrightarrow{\iota} & G/B \end{array}$$

Le groupe $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q) = G(\overline{\mathbb{F}}_q)^{F=1}$ agit sur $Y(w)$ et $X(w)$ par multiplication à gauche. Le groupe fini commutatif

$$T^{wF} := \{t \in T |\ wF(t)w^{-1} = t\}$$

agit librement (par multiplication à droite) sur $Y(w)$. La flèche π est un revêtement fini étale et induit un isomorphisme $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q)$-équivariant

$$Y(w)/T^{wF} \xrightarrow{\sim} X(w).$$

On peut rendre ces objets plus explicites comme suit [DL76, 2.2]. D'une part T^{wF} s'identifie à $\mathbb{F}^*_{q^{d+1}}$ via l'application $x \in \mathbb{F}^*_{q^{d+1}} \mapsto \mathrm{diag}(x, Fx, \ldots, F^d x)$. Considérons la variété

$$\Omega^d_{\mathbb{F}_q} := \mathbb{P}^d_{\mathbb{F}_q} \setminus \bigcup_H H,$$

où H parcourt l'ensemble des hyperplans $\mathbb{F}_q$-rationnels. Elle posède une action naturelle de $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q)$. Soit $e_0 = (1, 0, ..., 0)$ et $H_0 = \ker(l_{e_0})$. Si H est un hyperplan $\mathbb{F}_q$-rationnel, soit l_H une forme linéaire de noyau H (l_H est donc bien définie à un élément de $\mathbb{F}_q^*$ près). Posons enfin

$$u_1(z) := (-1)^d \prod_{a \in (\mathbb{F}_q)^{d+1} \setminus \{0\}} \frac{l_a(z)}{l_{e_0}(z)} \in \mathcal{O}^*(\Omega^d_{\mathbb{F}_q}).$$

On a une égalité dans $\mathcal{O}^*(\Omega^d_{\mathbb{F}_q})/\mathbb{F}_q^*$

$$u_1(z) = \prod_{H \in \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q)} (\frac{l_H(z)}{l_{H_0}(z)})^{q-1}.$$

Proposition 7.1. *La variété $X(w)$ avec action de $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q)$ s'identifie à $\Omega^d_{\mathbb{F}_q}$. Via cette identification, le $\mathbb{F}^*_{q^{d+1}}$-torseur $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q)$-équivariant $Y(w)$ de $X(w)$ s'identifie à*

$$\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q} := \Omega^d_{\mathbb{F}_q}(u_1^{1/N}).$$

Démonstration. On identifie G/B à la variété des drapeaux complets de $(\overline{\mathbb{F}}_q)^{d+1}$. On vérifie facilement qu'un drapeau $\{0\} \subsetneq D_0 \subsetneq \cdots \subsetneq D_d = (\overline{\mathbb{F}}_q)^{d+1}$ est dans $X(w)$ si et seulement si pour tout i on a

$$D_i = D_0 \oplus FD_0 \oplus \cdots \oplus F^i D_0.$$

On obtient un plongement $X(w) \to \mathbb{P}^{d+1}_{\mathbb{F}_q}, (D_i) \mapsto D_0$. La projection d'un point $x = (x_0, \ldots, x_d) \in (\overline{\mathbb{F}}_q)^{d+1} \setminus \{0\}$ est dans l'image de ce morphisme si et seulement si $(x, Fx, \ldots, F^d x)$ est une base de $(\overline{\mathbb{F}}_q)^{d+1}$, ce qui revient à dire que $\det((x_i^{q^j})_{0 \le i,j \le d})$ est non nul. Mais (à une constante dans $\mathbb{F}_q^*$-près pour la première égalité)

$$\det((x_i^{q^j})_{i,j}) = \prod_{H \in \mathbb{P}^d(\mathbb{F}_q)} l_H(x) \text{ et } \det((x_i^{q^j})_{i,j})^{q-1} = \prod_{a \in (\mathbb{F}_q)^{d+1} \setminus \{0\}} l_a(x)$$

On en déduit alors un isomorphisme

$$X(w) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^d_{\mathbb{F}} \setminus \bigcup_{H \in \mathbb{P}^d(\mathbb{F})} H = \Omega^d_{\mathbb{F}_q}.$$

La variété G/U classifie les paires $((D_i)_i, (e_i)_i)$ avec $(D_i)_i$ un drapeau et $e_i \in D_i/D_{i-1}$ un vecteur directeur pour tout i. Une paire $((D_i)_i, (e_i)_i)$ est dans $Y(w)$ si et seulement si $(D_i)_i \in X(w)$,

$$\forall i < d, F^i e_0 \equiv e_i \pmod{D_{i-1}} \text{ et } F^{d+1} e_0 \equiv e_0 \pmod{\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_d)}$$

Ainsi la flèche $((D_i)_i, (e_i)_i) \mapsto e_0$ induit un plongement $Y(w) \to \mathbb{A}^{d+1}_{\mathbb{F}_q} \setminus \{0\}$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y(w) & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{A}^{d+1}_{\mathbb{F}_q} \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(w) & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{P}^d_{\mathbb{F}_q} \end{array}$$

Un point $x = (x_0, \ldots, x_d) \in \mathbb{A}^{d+1}_{\mathbb{F}_q} \setminus \{0\}$ est dans l'image de ce morphisme si et seulement si $\det((x_i^{q^j})_{0 \le i,j \le d}) = (-1)^d \det(F \cdot (x_i^{q^j})_{0 \le i,j \le d})$. Cela revient à écrire

$$\iota : Y(w) \xrightarrow{\sim} \{x = (x_0, \ldots, x_d) \in \mathbb{A}^{d+1}_{\mathbb{F}_q} \setminus \{0\} : \prod_{a \in (\mathbb{F}_q)^{d+1} \setminus \{0\}} l_a(x) = (-1)^d\}$$

En homogénéisant, on obtient (en observant que $x_i \neq 0$ pour tout i sur l'espace ci-dessus)

$$Y(w) = \{(x_0, ..., x_d) \in \mathbb{A}^d_{\mathbb{F}_q} | \, [x_0 : \cdots : x_d] \in \Omega^d_{\mathbb{F}_q} \text{ et } x_0^{-N} = u([x_0 : \cdots : x_d])\}$$

En envoyant $(x_0, ..., x_d) \in Y(w)$ sur $(x_0^{-1}, [x_0 : \cdots : x_d])$ et $(t, z = [z_0 : \cdots : z_d]) \in \Omega^d_{\mathbb{F}_q}(u^{1/N})$ sur $(t^{-1}, \frac{z_1}{tz_0}, \cdots, \frac{z_d}{tz_0})$ (ce qui a un sens puisque $z_0 \neq 0$ pour tout i) on obtient un isomorphisme

$$Y(w) \simeq \Omega^d_{\mathbb{F}_q}(u_1^{1/N}).$$

On vérifie facilement que les actions des groupes sont compatibles. □

7.2 Cohomologie étale des variétés de Deligne-Lusztig

On note $\mathrm{DL}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ l'extension des scalaires de $\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q}$ à $\overline{\mathbb{F}}_q$. Soit $l \neq p$ un nombre premier. Nous allons rappeler la description de la partie cuspidale de la cohomologie l-adique à support compact de $\mathrm{DL}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}$.

Soit $\theta : \mathbb{F}^*_{q^{d+1}} \to \overline{\mathbb{Q}}_l^*$ un caractère. Si M est un $\overline{\mathbb{Q}}_l[\mathbb{F}^*_{q^{d+1}}]$-module on note

$$M[\theta] = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}^*_{q^{d+1}}}(\theta, M).$$

On dit que le caractère θ est *primitif* s'il ne se factorise pas par la norme $\mathbb{F}^*_{q^{d+1}} \to \mathbb{F}^*_{q^e}$ pour tout diviseur propre e de $d+1$.

Si π est une représentation de $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q)$, on dit que π est *cuspidale* si $\pi^{N(\mathbb{F}_q)} = 0$ pour tout radical unipotent N d'un parabolique propre de GL_{d+1}. La théorie de Deligne-Lusztig (ou celle de Green dans notre cas particulier) fournit :

Théorème 7.2. *Soit $\theta : \mathbb{F}^*_{q^{d+1}} \to \overline{\mathbb{Q}}_l^*$ un caractère.*

a) Si θ est primitif, alors $\mathrm{H}^i_{\text{ét},c}(\mathrm{DL}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\theta]$ est nul pour $i \neq d$ et

$$\overline{\pi}_{\theta,l} := \mathrm{H}^d_{\text{ét},c}(\mathrm{DL}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\theta]$$

est une $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q)$-représentation irréductible, cuspidale, de dimension $(q-1)(q^2-1)\ldots(q^d-1)$. Toutes les représentations cuspidales sont ainsi obtenues.

b) Si θ n'est pas primitif, aucune représentation cuspidale n'intervient dans $\oplus_i \mathrm{H}^i_{\text{ét},c}(\mathrm{DL}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\theta]$.

Démonstration. Voir [DL76, cor. 6.3], [DL76, th. 7.3], [DL76, prop. 7.4], [DL76, prop. 8.3], [DL76, cor. 9.9], [Yos10, Proposition 6.8.(ii) et remarques] pour ces résultats classiques. □

Ainsi, la partie cuspidale $\mathrm{H}^*_{\text{ét},c}(\mathrm{DL}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{cusp}}$ de $\oplus_i \mathrm{H}^i_{\text{ét},c}(\mathrm{DL}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est concentrée en degré d, où elle est donnée par $\oplus_\theta \overline{\pi}_{\theta,l} \otimes \theta$, la somme directe portant sur tous les caractères primitifs.

Remarque 7.3. (voir [DL76, 6.3]) Soit $N = q^{d+1} - 1$ et fixons de isomorphismes $\mathbb{F}^*_{q^{d+1}} \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\vee \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Soient θ_{j_1} et θ_{j_2} deux caractères primitifs vus comme des éléments de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ via j_1, j_2, les représentations $\overline{\pi}_{\theta_{j_1}}$ et $\overline{\pi}_{\theta_{j_2}}$ sont isomorphes si et seulement si il existe un entier n tel que $j_1 = q^n j_2$ dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

7.3 Cohomologie rigide des variétés de Deligne-Lusztig

Nous aurons besoin d'un analogue des résultats présentés dans le paragraphe précédent pour la cohomologie rigide. Cela a été fait par Grosse-Klönne dans [GK07]. Si $\theta : \mathbb{F}^*_{q^{d+1}} \to \overline{K}^*$ est un caractère, posons

$$\overline{\pi}_\theta = \mathrm{H}^*_{\text{rig},c}(\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q}/\overline{K})[\theta] := \bigoplus_i \mathrm{H}^i_{\text{rig},c}(\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q}/\overline{K})[\theta],$$

où

$$\mathrm{H}^i_{\text{rig},c}(\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q}/\overline{K}) := \mathrm{H}^i_{\text{rig},c}(\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q}) \otimes_{W(\mathbb{F}_q)[1/p]} \overline{K}$$

et où $M[\theta]$ désigne comme avant la composante θ-isotypique de M.

Théorème 7.4. *Fixons un premier $l \neq p$ et un isomorphisme $\overline{K} \cong \overline{\mathbb{Q}}_l$. Si θ est un caractère primitif, alors*

$$\overline{\pi}_\theta := \mathrm{H}^d_{\mathrm{rig},c}(\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q}/\overline{K})[\theta]$$

est isomorphe en tant que $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q)$-module à $\overline{\pi}_{\theta,l}$, en particulier c'est une représentation irréductible cuspidale.

Démonstration. Cela se fait en trois étapes, cf. [GK07, 4.5]. Dans un premier temps, on montre [GK07, 3.1] que les $\overline{K}[\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}^*_{q^{d+1}}]$-modules virtuels

$$\sum_i (-1)^i \mathrm{H}^i_{\text{ét},c}(\mathrm{DL}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \text{ et } \sum_i (-1)^i \mathrm{H}^i_{\mathrm{rig},c}(\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q}/\overline{K})$$

coïncident. Il s'agit d'une comparaison standard des formules des traces de Lefschetz en cohomologies étale l-adique et rigide. Dans un deuxième temps (et c'est bien la partie délicate du résultat) on montre que $\bigoplus_i \mathrm{H}^i_{\mathrm{rig},c}(\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q}/\overline{K})[\theta]$ est bien concentré en degré d, cf. [GK07, th. 2.3]. On peut alors conclure en utilisant le théorème 7.2. □

8 Cohomologie de de Rham et revêtements cycliques modérés

Dans ce chapitre L sera une extension non ramifiée de K, donc ϖ en est une uniformisante. Toutes les cohomologies de de Rham seront calculées sur le complexe surconvergeant ie. nous écrirons par abus $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X)$ pour tout espace analytique X au lieu de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X^\dagger)$.

8.1 Réduction semi-stable généralisée

Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel topologiquement de type fini sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$, de fibre générique $\mathcal{X}_\eta$ et de fibre spéciale $\mathcal{X}_s$. On a une flèche de spécialisation

$$\mathrm{Sp} : \mathcal{X}_\eta \to \mathcal{X}_s.$$

Pour tout sous-schéma $Z \subset \mathcal{X}_s$ on note $]Z[_{\mathcal{X}}$ le tube de Z dans $\mathcal{X}_\eta$, i.e. l'espace analytique

$$]Z[_{\mathcal{X}} = \mathrm{Sp}^{-1}(Z) \subset \mathcal{X}_\eta.$$

On dit que $\mathcal{X}$ est de réduction semi-stable généralisée s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{X} = \bigcup_{t \in T} U_t$ et un jeu de morphismes étales (pour certains $r \leq d$ et $\alpha_i \geq 1$)

$$\varphi_t : U_t \to \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L \langle x_1, \cdots, x_d \rangle / (x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r} - \varpi))$$

Dans ce cas, quitte à rétrécir les ouverts U_t et à prendre r minimal, on peut supposer que les composantes irréductibles de la fibre spéciale $\overline{U}_t$ de U_t sont les $V(\overline{x}_i^*)$ pour $i \leq r$ avec $\overline{x}_i^* = \overline{\varphi}_t(\overline{x}_i)$. Elles ont les multiplicités α_i. On dit que $\mathcal{X}$ est de réduction semi-stable si de plus tous les α_i valent 1. Dans ce cas, les fibres spéciales $\overline{U}_t$ sont réduites.

8.2 Enoncé du résultat principal

Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$, de réduction semi-stable généralisée, de fibre générique $\mathcal{X}_\eta$ et de fibre spéciale $\mathcal{X}_s$. On note $(Y_i)_{i \in I}$ l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{X}_s$. On suppose que le recouvrement $\mathcal{X}_s = \bigcup_{i \in I} Y_i$ est localement fini, i.e. pour toute partie finie J de

I, les composantes Y_j pour $j \in J$ n'intersectent qu'un nombre fini de composantes irréductibles de $\mathcal{X}_s$. Si J est un sous-ensemble de I, on note

$$Y_J = \bigcap_{j \in J} Y_j.$$

Le but de cette section est de prouver le théorème suivant :

Théorème 8.1. *Soient $\mathcal{X}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ comme ci-dessus, et soit $\pi : \mathcal{T} \to \mathcal{X}_\eta$ un revêtement étale de groupe de Galois $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec n premier à p. Pour toute partie finie J de I la flèche de restriction induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]Y_J[_{\mathcal{X}})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]Y_J \setminus \bigcup_{i \notin J} Y_i[_{\mathcal{X}})).$$

si $\mathcal{X}$ est de réduction semi-stable (non généralisée) ou $n = 1$ (i.e. $\mathcal{T} = \mathcal{X}_\eta$).

Remarque 8.2.

1. Si $\mathcal{X}$ est de réduction semi-stable (non généralisée) et $n = 1$ (i.e. $\mathcal{T} = \mathcal{X}_\eta$) le théorème ci-dessus a été démontré par Grosse-Klönne [GK02, Theorem 2.4.]. Il s'agit d'un point crucial dans sa preuve de la finitude de la cohomologie rigide. Le principal intérêt de notre généralisation est la présence du revêtement cyclique π de la fibre générique de $\mathcal{X}_\eta$.
2. Si de plus $\mathcal{X}$ est algébrisable et $|J| = 1$, le résultat [Zhe08, Lemme 5.6] est un analogue en cohomologie étale l-adique du théorème ci-dessus.

Comme dans la preuve originale, on procède en deux étapes. On applique dans un premier temps un certain nombre de réductions assez techniques (cf. 8.5 et 8.6) pour se ramener à l'étude des revêtements de couronnes. Ces étapes sont similaires à la démonstration de Grosse-Klönne, qui utilise des recouvrements bien choisis et la suite spectrale de Cech. Dans notre cas, on reprend les mêmes recouvrements de $\mathcal{X}_\eta$ puis on les tire en arrière par π pour étudier l'espace $\mathcal{T}$. Le seul point technique à adapter dans ces réductions est la vérification que l'espace final obtenu est bien décrit par un revêtement de couronnes (voir 8.16).

La deuxième étape de la preuve (et la plus technique) est le calcul de la cohomologie de de Rham d'un revêtement cyclique modéré d'une couronne. Cela se fait par des calculs directs, mais assez pénibles, sur le complexe de de Rham, et fournit une description très explicite de ces groupes de cohomologie. Pour énoncer le résultat nous avons besoin de quelques notations. Soient $s_1, ..., s_d, r_1, ..., r_d \in |\overline{K}^*|$ tels que $s_i \leq r_i$ pour tout i et considérons la couronne

$$X = \mathbb{A}^d_{rig,L}(\frac{x_i}{r_i}, \frac{s_i}{x_i})_{1\leq i\leq d} = \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{A}^d_{rig,L} |\, s_i \leq |x_i| \leq r_i\}.$$

Soit n un entier premier à p et considérons le revêtement de Kummer $\mathcal{T} = X((\lambda x^\beta)^{1/n})$ avec $\lambda \in L^*$ et $\beta \in \mathbb{Z}^d$. Cela est loisible, puisque nous allons voir que tout revêtement $\pi : \mathcal{T} \to X$ galoisien cyclique d'ordre n est de cette forme. On dispose donc sur $\mathcal{T}$ d'une racine n-ième t de λx^β. On définit enfin

$$\pi_0 = \mathrm{PGCD}(n, \beta_1, \cdots, \beta_d),\ \tilde{n} = \frac{n}{\pi_0},\ \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\pi_0},\ t_0 = \frac{t^{\tilde{n}}}{x^{\tilde{\beta}}}.$$

Enfin, si $I = \{i_1 < \cdots < i_q\}$ on pose

$$d\log(x_I) = d\log(x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d\log(x_{i_k}).$$

Théorème 8.3. *Avec les notations ci-dessus, on a des isomorphismes naturels*

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X) \simeq \bigoplus_{\substack{I\subset[\![1,d]\!]\\|I|=q}} L\cdot d\log(x_I)$$

et

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}) \simeq \bigoplus_{i=0}^{\pi_0-1} t_0^i \bigoplus_{\substack{I\subset[\![1,d]\!]\\|I|=q}} L\cdot d\log(x_I) \cong \bigoplus_{i=0}^{\pi_0-1} t_0^i \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X)$$

Remarque 8.4.

1. On déduit facilement du théorème que si $X'\subset X$ sont deux couronnes et si $\mathcal{T}\to X$, $\mathcal{T}'\to X'$ sont deux revêtements compatibles (ie. $\mathcal{T}'=\mathcal{T}\times_X X'$) alors la flèche de restriction $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T})\to\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}')$ est un isomorphisme qui respecte la décomposition en parties isotypiques.
2. En fait, tous ces résultats sont vrais pour une classe plus générale d'espaces, que l'on appellera tores monômiaux. Nous aurons besoin de ce degré de généralité et nous renvoyons à 8.6, 8.8 et 8.10 pour les énoncés dans ce cadre.

8.3 Tores monômiaux et leurs revêtements cycliques modérés

Définition 8.5. On appellera tore monômial de dimension d un L-espace analytique X de la forme [14]

$$X=\{x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{A}^d_{rig,L} : s_i\le|x_i|\le r_i \text{ et } \rho\le|x^\alpha|\le\mu\}$$

pour $s_i\le r_i\in|\overline{K}^*|$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d$ et $\rho\le\mu\in[s^\alpha,r^\alpha]\cap|\overline{K}^*|$).

On appelle tore monômial semi-ouvert un espace défini par les mêmes inégalités qu'un tore monômial, mais potentiellement strictes. Nous souhaitons étendre un résultat de Berkovich [Ber96a, Lemma 3.3] au cas des tores monômiaux. Si Λ est un groupe abélien, on écrira simplement Λ pour le faisceau (étale) constant Λ sur un espace analytique.

Proposition 8.6. *Soit X un tore monômial de dimension d, S un espace K-analytique, n un entier premier à p et $\Lambda=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La projection canonique $\varphi : X_S:=X\times S\to S$ induit un isomorphisme*

$$R^q\varphi_*\Lambda\simeq\Lambda(-q)^{\binom{d}{q}}$$

Démonstration. Soit X un tore monômial et s,r,α,ρ,μ les données associées. Nous allons montrer le résultat par récurrence sur la dimension d. Si $d=1$, tous les tores monômiaux sont des couronnes qui ont été traitées dans [Ber96a, Lemma 3.3].

Soit $d>1$, en projetant sur les $d-1$ premières coordonnées, on obtient morphisme $\psi : X\to Y$ vers le tore monômial :

$$Y=\{x=(x_1,\cdots,x_{d-1})\in\mathbb{A}^{d-1}_{rig,L} : s_i\le|x_i|\le r_i \text{ et } \rho r_d^{-\alpha_d}\le|x^\alpha|\le\mu s_d^{-\alpha_d}\}$$

avec $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{d-1})$. Soient $u : Y_S\to S$ les projections naturelles, alors $u\circ\psi=\varphi$, donc

$$R\varphi_*\Lambda\simeq Ru_*R\psi_*\Lambda.$$

Par hypothèse de récurrence et la suite spectrale de Leray il suffit d'établir les isomorphismes

$$R^q\psi_*(\Lambda)=\begin{cases}\Lambda & \text{si } q=0\\ \Lambda(-1) & \text{si } q=1\\ 0 & \text{si } q>1\end{cases}$$

14. On a utilisé les notations multi-indice standard, par exemple $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_d}$.

Notons que $R^q\psi_*(\Lambda)$ est un faisceau surconvergent (puisque les faisceaux constants le sont et que cette propriété est stable par image directe), on donc peut tester les isomorphismes ci-dessus fibre à fibre. Les tiges du faisceau $R^q\psi_*(\Lambda)$ se calculent grâce au théorème de changement de base [dJvdP96, TH 3.7.3] et font intervenir la cohomologie du faisceau constant Λ sur les fibres de ψ. Ces fibres sont des couronnes de dimension 1 (sur le corps de définition du point considéré), et on a déjà vu le calcul de ces groupes de cohomologie, ce qui permet de conclure. □

Remarque 8.7. Si X_L est un tore monômial sur un corps complet $S = \mathrm{Sp}(L)$ et une couronne Y sur C qui le contient, alors, en reprenant le raisonnement par récurrence précédent sur Y_L, on montre la bijectivité du morphisme naturel de restriction $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(Y,\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_L,\Lambda)$. Par suite exacte de Kummer sur Y (voir [VdP82, th. 3.25] pour l'annulation du groupe de Picard),

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_L,\Lambda) \cong L^*/(L^*)^n \times \prod_{i\leq d}(x_i^{\mathbb{Z}}/x_i^{n\mathbb{Z}}).$$

En particulier, tout revêtement étale de groupe de Galois Λ de X_L est un revêtement de Kummer de la forme $X_L((\lambda x^\beta)^{1/n})$ pour β dans $\mathbb{Z}^d$ et λ dans L^*.

8.4 Cohomologie de de Rham d'un revêtement cyclique modéré d'un tore monomial

Le but de ce paragraphe est de calculer la cohomologie de de Rham d'un revêtement cyclique $\mathcal{T} = X((\lambda x^\beta)^{1/n})$ (avec $\beta \in \mathbb{Z}^d$ et $\lambda \in L^*$) d'un tore monômial

$$X = \{x = (x_1,\cdots,x_d) \in \mathbb{A}^d_{rig,L} : s_i \leq |x_i| \leq r_i \text{ et } \rho \leq |x^\alpha| \leq \mu\}.$$

Posons

$$\pi_0 = \mathrm{PGCD}(n,\beta_1,\cdots,\beta_d),\ \tilde{n} = \frac{n}{\pi_0},\ \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\pi_0},\ t_0 = \frac{t^{\tilde{n}}}{x^{\tilde{\beta}}}.$$

Théorème 8.8. *On dispose d'isomorphismes naturels*

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X) = \bigoplus_{\substack{I\subset[\![1,d]\!]\\|I|=q}} L\cdot d\log(x_I)$$

et

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}) \cong \bigoplus_{i=0}^{\pi_0-1} t_0^i \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X)$$

Remarque 8.9. Pour comprendre l'enoncé du théorème, il est intéressant d'étudier le cas analytique complexe. Si l'on prend un espace X de $\mathbb{C}^d$ défini par les mêmes inégalités qu'un tore monômial i.e.

$$X = \{x = (x_1,\cdots,x_d) \in \mathbb{C}^d : s_i \leq |x_i| \leq r_i \text{ et } \rho \leq |x^\alpha| \leq \mu\},$$

alors X a le type d'homotopie d'un tore. La cohomologie de de Rham est donc donnée par (Künneth) :

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X) = \bigoplus_{|I|=q} \mathbb{C}\cdot d\log(x_I)$$

D'après la correspondance de Galois entre les revêtements et les sous groupes de $\pi_1(X)$, un revêtement cyclique $\mathcal{T}$ de X a le type d'homotopie d'une union disjointe de tores. Cette union s'écrit :

$$\{(x,t) \in \mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^d \times \mathbb{C} | |t^n = x^\beta\}$$

Le nombre de composantes connexes est exactement le constante π_0 introduite dans l'énoncé du théorème. Comme $t_0^{\pi_0} = 1$, la famille $\{t_0^i\}_i$ engendre le même $\mathbb{C}$-espace vectoriel que l'ensemble des idempotents pour les différentes composantes connexes, et on obtient

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}) = \bigoplus_{0 \leq i \leq \pi_0 - 1} t_0^i \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X)$$

Avant de passer à la preuve, mentionnons quelques conséquences utiles :

Corollaire 8.10. *On reprend les notations précédentes et on se donne un autre tore monômial X' inclus dans X. Si $\mathcal{T}'$ est la restriction de $\mathcal{T}$ à X' i.e. $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \times_X X'$, alors la flèche de restriction $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}')$ est un isomorphisme qui respecte la décomposition en parties isotypiques.*

Démonstration. La base explicite du théorème 8.8 est conservée par la restriction $\Omega^q_{\mathcal{T}^\dagger/L} \to \Omega^q_{(\mathcal{T}')^\dagger/L}$d'où la bijectivité. Pour l'assertion sur les parties isotypiques, l'inclusion induit une application Λ-équivariante entre les q-formes et le résultat s'en déduit. Pour un argument plus explicite, on a la décomposition en espaces propres $\Omega^q_{\mathcal{T}^\dagger/L} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} t^i \Omega^q_{X^\dagger/L}$ et pour i fixé chaque $t_0^i \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X)$ est un espace propre de $\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T})$.

□

Corollaire 8.11. *Les conclusions de 8.8 et 8.10 sont encore vraies quand X est un tore monômial semi-ouvert.*

Démonstration. On écrit $X = \bigcup_i X_i$ comme une réunion croissante de tores monômiaux. On a alors $\mathcal{T} = \bigcup_i \mathcal{T} \times_X X_i = \bigcup_i \mathcal{T}_i$. Fixons $i_0 \in \mathbb{N}$, d'après ce qui précède, on a

$$\varprojlim_i \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_i)[\chi] = \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_{i_0})[\chi] \text{ et } \mathrm{R}^1 \varprojlim_i \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_i)[\chi] = 0$$

d'où $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T})[\chi] \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_{i_0})[\chi]$. □

Passons à la preuve du résultat. Nous commençons par traiter le cas des tores monomiaux i.e. $\pi = \mathrm{Id}$ et $\mathcal{T} = X$. Comme dans la définition, on se donne r, s, α, ρ, μ définissant X et on choisit des constantes $u = (u_i)_i$, $v = (v_i)_i$ et w_1, w_2 dans L telles que

$$|u_i| = r_i, \ |v_i| = s_i, \ |w_1| = \rho, \ |w_2| = \mu.$$

Si $x = (x_i)_i$ désigne la variable sur X, alors

$$X = \mathrm{Sp}(L\langle \frac{x}{u}, \frac{v}{x}, \frac{x^\alpha}{w_1}, \frac{w_2}{x^\alpha} \rangle).$$

En particulier, toute fonction f appartient à $\mathscr{O}(X^\dagger)$ admet un développement unique $f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} a_\nu x^\nu$. Nous aurons besoin du résultat technique suivant :

Lemme 8.12 (Intégration)**.** *Pour $i \leq d$ et $f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} a_\nu x^\nu \in \mathscr{O}(X^\dagger)$, il existe une section surconvergente de développement $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{\nu_i} a_\nu x^\nu \in \mathscr{O}(X^\dagger)$.*

Démonstration. Réécrivons f sous la forme

$$\sum_{(\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}} m_{\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2} (\frac{x}{u})^\beta (\frac{v}{x})^\gamma (\frac{x^\alpha}{w_1})^{\delta_1} (\frac{w_2}{x^\alpha})^{\delta_2}$$

tel que il existe $h > 1$ tel que $h^{e(\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2)}|m_{\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2}| \to 0$ avec $e(\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2) = \sum_{1\leq k\leq d}\beta_k + \sum_{1\leq k\leq d}\gamma_k + \delta_1 + \delta_2$. Nous voulons montrer que le développement suivant défini bien une section surconvergente :

$$\sum_{(\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2)\in\mathbb{N}^d\times\mathbb{N}^d\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{m_{\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2}}{\beta_i-\gamma_i+\alpha_i(\delta_1-\delta_2)}(\frac{x}{u})^{\beta}(\frac{v}{x})^{\gamma}(\frac{x^{\alpha}}{w_1})^{\delta_1}(\frac{w_2}{x^{\alpha}})^{\delta_2}$$

Pour tout $h_1 \in]1,h[$, on a $(\frac{h_1}{h})^{e(\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2)}|\frac{1}{\beta_i-\gamma_i+\alpha_i(\delta_1-\delta_2)}| \to 0$ et donc

$$h_1^{e(\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2)}|\frac{m_{\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2}}{\beta_i-\gamma_i+\alpha_i(\delta_1-\delta_2)}| = h^{e(\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2)}|m_{\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2}|\frac{(h_1/h)^{e(\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2)}}{|\beta_i-\gamma_i+\alpha_i(\delta_1-\delta_2)|} \to 0$$

et on obtient bien une section surconvergente sur X de développement $\sum_{\nu}\frac{1}{\nu_i}a_\nu x^\nu$. □

Une q-forme surconvergente admet un unique développement $\omega = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^d, I\subset[\![1,d]\!]} a_{\nu,I}x^\nu d\log(x_I)$. Nous dirons que ω contient un terme en x_i (resp. un terme en $d\log(x_i)$) s'il existe $a_{\nu,I}\neq 0$ avec $\nu_i \neq 0$ (resp. avec $i \in I$). On appelle $\Omega^q_{X^\dagger/L}[r]$ le sous-module des formes qui ne contiennent aucun terme en x_i ou $d\log(x_i)$ pour $i > r$. On observe l'inclusion $d(\Omega^q_{X^\dagger/L}[r]) \subset \Omega^{q+1}_{X^\dagger/L}[r]$.

On impose l'ordre lexicographique sur les couples (q,r) et on montre par récurrence sur (q,r) l'égalité suivante [15] :

$$(\Omega^q_{X^\dagger/L}[r])^{d=0} = d(\Omega^{q-1}_{X^\dagger/L}[r]) \oplus \bigoplus_{\substack{I\subset[\![1,r]\!]\\|I|=q}} Ld\log(x_I).$$

Il est aisé de voir que les modules apparaissant dans le terme de droite sont en somme directe et nous laissons la vérification de ce fait au lecteur. Nous allons seulement prouver que ces modules engendrent bien le sous-ensemble des q-formes fermées voulues.

Si $q = 0$, comme X est géométriquement connexe, on a $\mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}(X) = L = L\cdot d\log(x_\emptyset)$.

Soit $q \geq 1$, supposons le résultat vrai pour tout $(q',r') < (q,r)$. Si $\omega \in (\Omega^q_{X^\dagger/L}[r])^{d=0}$, elle se décompose de manière unique de la forme [16]

$$\omega = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_r^j\omega_j^{(0)} + \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_r^j\omega_j^{(1)}\wedge d\log(x_r)$$

avec $\omega_j^{(i)} \in \Omega^{q-i}_{X^\dagger/L}[r-1]$. Par fermeture de ω,

$$d\omega = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_r^j d\omega_j^{(0)} + \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_r^j((-1)^q j\omega_j^{(0)} + d\omega_j^{(1)})\wedge d\log(x_r) = 0 \tag{12}$$

d'où $d\omega_j^{(0)} = 0$ et $d\omega_j^{(1)} = (-1)^{q-1}j\omega_j^{(0)}$. En particulier, $d\omega_0^{(1)} = d\omega_0^{(0)} = 0$.

D'après 8.12, la somme suivante est une $(q-1)$-forme surconvergente de X,

$$\eta = \sum_{j\neq 0}(-1)^{q-1}\frac{1}{j}x_r^j\omega_j^{(1)}.$$

On vérifie par calcul direct, $\omega - d\eta = \omega_0^{(0)} + \omega_0^{(1)}\wedge d\log(x_r)$ (d'après (12)). On a montré que les formes $\omega_0^{(0)}$ et $\omega_0^{(1)}$ étaient fermés. On peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui permet de conclure.

15. On a posé $\Omega^{q-1}_{X^\dagger/L}[r] = 0$ si $q = 0$

16. si $r = 1$, on pose $\Omega^q_{X^\dagger/L}[r-1] = L$

On s'intéresse maintenant au cas général. Nous cherchons à calculer la cohomologie d'un revêtement sur X de la forme

$$\mathcal{T} = X((\lambda x^\beta)^{1/n}) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{A}^1_{rig,L} : t^n = \lambda x^\beta\}$$

Quitte à étendre L, on suppose qu'il contient les racines π_0-ièmes de l'unité et que λ vaut 1. On a alors une décomposition

$$\mathcal{T} = \coprod_{\zeta \in \mu_{\pi_0}(L)} X(\zeta x^{\tilde{\beta}}) := \coprod_{\zeta \in \mu_{\pi_0}(L)} \mathcal{T}_\zeta.$$

Appelons $\mathscr{L}_\zeta$ le polynôme interpolateur de Lagrange s'annulant sur $\mu_{\pi_0}(L) \setminus \{\zeta\}$ et valant 1 en ζ. Prenons $t \in \mathscr{O}^*(\mathcal{T})$ une racine n-ième de x^β et $t_0 = \frac{t^{\tilde{n}}}{x^{\tilde{\beta}}}$. Alors $\mathscr{L}_\zeta(t_0)$ est l'idempotent associé à $\mathcal{T}_\zeta$. Supposons que $\mathcal{T}_\zeta \to X$ induise un isomorphisme $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X) \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_\zeta)$, on obtient une suite d'isomorphismes

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}) = \bigoplus_\zeta \mathscr{L}_\zeta(t_0)\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_\zeta) \cong \sum_{j=0}^{\pi_0-1} t_0^j \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X)$$

car $\{t_0^j\}_j$ et $\{\mathscr{L}_\zeta(t_0)\}_\zeta$ engendrent le même L-espace vectoriel. Il suffit ainsi de raisonner sur chaque $\mathcal{T}_\zeta$ i.e. on peut supposer $\pi_0 = 1$.

Considérons maintenant le revêtement de groupe de Galois Λ^d suivant :

$$\tilde{\mathcal{T}} = X(x_1^{1/n})(x_2^{1/n}) \cdots (x_d^{1/n}) = \{(x, t_1, \ldots, t_d) : t_i^n = x_i\}.$$

Les flèches $((x_1, \ldots, x_d), t_1, \ldots, t_d) \mapsto (t_1, \ldots, t_d)$ et $(t_1, \ldots, t_d) \mapsto ((t_1^n, t_2^n, \ldots, t_d^n), t_1, \ldots, t_d)$ induisent une bijection

$$\tilde{\mathcal{T}} \cong \{(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{A}^d_{rig,L} : s_i^{1/n} \leq |t_i| \leq r_i^{1/n} \text{ et } \rho^{1/n} \leq |t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \ldots t_d^{\alpha_d}| \leq \mu^{1/n} \text{ et } \}$$

On en déduit la suite d'égalités :

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(\tilde{\mathcal{T}}) = \bigoplus_{|I|=i} Ld\log(t_I) = \bigoplus_{|I|=i} Ld\log(x_I) = \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(X)$$

On remarque aisément que $\tilde{\mathcal{T}}$ est un revêtement de $\mathcal{T}$ de groupe de Galois abélien $\mathrm{Fix}_{\Lambda^d}(\mathcal{T}) = \{(\gamma_i)_i \in \Lambda^d : \sum_i \gamma_i \beta_i = 0\}$. La flèche naturelle $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\tilde{\mathcal{T}})$ identifie $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T})$ à $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\tilde{\mathcal{T}})^{\mathrm{Fix}_{\Lambda^d}(\mathcal{T})}$ et est donc injective. On obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\tilde{\mathcal{T}}) & & \\ \uparrow & \nwarrow^{\sim} & \\ \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}) & \longleftarrow & \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X) \end{array}$$

On en déduit $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}) \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X)$.

8.5 Une première réduction

Revenons maintenant au contexte du théorème 8.1, en particulier on dispose du schéma formel $\mathcal{X}$ semi-stable généralisé, d'un revêtement cyclique $\pi : \mathcal{T} \to \mathcal{X}_\eta$ d'ordre premier à p et on note $(Y_i)_{i \in I}$ les composantes irréductibles de sa fibre spéciale. Rappelons que l'on note $Y_J = \cap_{j \in J} Y_j$ pour $J \subset I$. Notons que les deux résultats qui vont suivre seront valables dans les deux cas considérés dans 8.1. Nous spécialiserons au cas $\pi = \mathrm{Id}$ ou au cas $\mathcal{X}$ semi-stable (non généralisé) dans 8.7.

Lemme 8.13. *Pour démontrer le théorème 8.1 il suffit de prouver la bijectivité de*

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]Y_J[_{\mathcal{X}})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]Y_J \backslash Y_I[_{\mathcal{X}}))$$

quand $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(A)$ *est affine, connexe et possède un morphisme étale*

$$\varphi : \mathrm{Spf}(A) \to \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L \langle x_1, \cdots, x_d \rangle / (x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r} - \varpi))$$

Démonstration. On considère uniquement l'ensemble (fini) des composantes de I qui intersectent J, ce qui nous permet de supposer que I est fini. Pour $J \subset I$ et $M \subset J^c$ on note

$$\mathring{Y}_{J,M} = Y_J \backslash \bigcup_{l \in M} Y_l,$$

i.e. les points dans toutes les composantes irréductibles de J qui évitent celles de M. Si de plus m est un entier positif on note

$$\mathring{Y}^m_{J,M} = \bigcup_{\substack{N \subset M \\ |N| = m}} \mathring{Y}_{J,N},$$

i.e. les points dans toutes les composantes de J qui évitent au moins m composantes dans M.

On raisonne sur la chaîne d'inclusions

$$\mathring{Y}^0_{J,J^c} \supset \mathring{Y}^1_{J,J^c} \supset \cdots \supset \mathring{Y}^{|J^c|}_{J,J^c}$$

On remarque les égalités $Y_J = \mathring{Y}^0_{J,J^c}$ et $\mathring{Y}^{|J^c|}_{J,J^c} = \mathring{Y}_{J,J^c}$, il suffit donc de montrer (pour tout m) la bijectivité de la flèche naturelle

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]\mathring{Y}^m_{J,J^c}[_{\mathcal{X}})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]\mathring{Y}^{m+1}_{J,J^c}[_{\mathcal{X}}))$$

Notons que $\mathring{Y}^1_{J,J^c} = Y_J \backslash Y_I$. Nous allons construire un schéma formel auxiliaire $\tilde{\mathcal{X}}$ de réduction semi-stable généralisée pour déduire le cas m quelconque à partir du cas $m = 0$

Chaque $]\mathring{Y}^m_{J,J^c}|$ admet par définition un recouvrement admissible $(]\mathring{Y}_{J,N}[)_{N \subset J^c : |N| = m}$. Les intersections finies de ces ouverts vérifient [17]

$$\bigcap_{N \in Q} \mathring{Y}_{J,N} = \mathring{Y}_{J,M},$$

avec $M = \bigcup_{N \in Q} N$. On se ramène donc, grâce à la suite spectrale de Cech, à montrer l'isomorphisme

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]\mathring{Y}_{J,M} \cap \mathring{Y}^m_{J,J^c}[_{\mathcal{X}})) = \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]\mathring{Y}_{J,M}[_{\mathcal{X}})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]\mathring{Y}_{J,M} \cap \mathring{Y}^{m+1}_{J,J^c}[_{\mathcal{X}}))$$

pour tout M de cardinal au moins m.

On se place dans $\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$ de fibre spéciale $\tilde{\mathcal{X}}_s = \mathcal{X}_s \backslash \left(\bigcup_{i \in M} Y_i \right)$. Les composantes irréductibles de $\tilde{\mathcal{X}}_s$ sont indexées par $I \backslash M$. On reprend les notations $\tilde{Y}_J$, $\mathring{\tilde{Y}}_{J,N}$ et $\mathring{\tilde{Y}}^m_{J,N}$ pour $J \subset I \backslash M$ et $N \subset I \backslash (M \cup J)$. On observe

$$\mathring{Y}_{J,M} = \mathring{\tilde{Y}}^0_{J,I \backslash (J \cup M)} \text{ et } \mathring{Y}_{J,M} \cap \mathring{Y}^{m+1}_{J,J^c} = \mathring{\tilde{Y}}^1_{J,I \backslash (J \cup M)}$$

On s'est ramené à la condition suffisante du lemme par l'observation $\tilde{Y}_J \backslash \tilde{Y}_I = \mathring{\tilde{Y}}^1_{J,J^c}$.

17. On suppose que tout élément de Q est de cardinal m.

Il reste à expliquer pourquoi on peut supposer que $\mathcal{X}$ est affine. On se donne un recouvrement $\mathcal{X} = \bigcup_{s\in S} U_s$ et un jeu de morphismes étales

$$\varphi_s : U_s \to \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L \langle x_1, \cdots, x_d\rangle / (x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r} - \varpi))$$

On note $U_T = \bigcap_{t\in T} U_t$ pour $T \subset S$. On a un recouvrement admissible $\mathcal{T} = \bigcup_{s\in S} \pi^{-1}(U_{s,\eta})$ donc par une nouvelle application de la suite spectrale de Cech, il suffit de prouver la bijectivité de

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]Y_J[_{\mathcal{X}} \cap U_{T,\eta})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]Y_J \backslash Y_I[_{\mathcal{X}} \cap U_{T,\eta}))$$

pour tout $T \subset S$. On s'est donc ramené à $\mathcal{X} = U_T = \mathrm{Spf}(A)$ affine formel, $\mathcal{T} = \pi^{-1}(U_{T,\eta})$ affinoïde et $\varphi = \varphi_{s|U_T} : \mathcal{X} \to \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L \langle x_1, \cdots, x_d\rangle / (x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r} - \varpi))$ pour un certain $s \in T$. Quitte à réduire $\mathcal{X}$, on peut supposer qu'il est connexe. □

8.6 Une deuxième réduction

Nous supposons maintenant que nous sommes dans le contexte du lemme 8.13, en particulier $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est affine et connexe et possède un morphisme étale $\varphi : \mathrm{Spf}(A) \to \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L \langle x_1, \cdots, x_d\rangle / (x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r} - \varpi))$. Notons $x_i^* = \varphi^*(x_i) \in A$ et $\overline{x}_i$ son image en fibre spéciale. Quitte à réduire $\mathcal{X}$, on peut supposer $I = [\![1, r]\!]$, $J = [\![1, |J|]\!] \subset I$, $Y_i = V(\overline{x}_i)$. Notons aussi que $\mathcal{T}$ est affinoide, disons $\mathcal{T} = \mathrm{Sp}(B)$.

Lemme 8.14. *Pour montrer 8.13, il suffit de prouver que pour toute partition $[\![1, r]\!] = J_1 \cup J_2 \cup J_3$ et tous $\lambda, \beta \in]0, 1[\cap|\overline{K}^*|$, les restrictions de $\mathcal{T}$ à $\tilde{C}$ et à $\tilde{C}'$ ont la même cohomologie de de Rham, où*

$$\tilde{C} = \left\{ s \in \mathcal{X}_\eta : |x^*_{j_1}(s)| \leq \lambda, |x^*_{j_2}(s)| = \beta, |x^*_{j_3}(s)| \leq \beta, \, \forall j_k \in J_k \right\}$$

$$\tilde{C}' = \left\{ s \in \mathcal{X}_\eta : |x^*_{j_1}(s)| \leq \lambda, |x^*_{j_2}(s)| = \beta, |x^*_{j_3}(s)| = \beta, \, \forall j_k \in J_k \right\}$$

Démonstration. Rappelons que :

$$]Y_J[_{\mathcal{X}} = \{ s \in \mathcal{X}_\eta | \, \forall j \in J \, , |x_j^*(s)| < 1 \}$$

$$]Y_J \backslash Y_I[_{\mathcal{X}} = \{ s \in]Y_J[_{\mathcal{X}} | \, \exists i \in J^c, |x_i^*(s)| = 1 \}$$

Nous allons filtrer ces espaces par des espaces plus simples. Pour $\lambda \in]0, 1[\cap|\overline{K}^*|$ posons [18]

$$\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}) = \{ s \in \mathcal{X}_\eta | \, \forall j \in J, |x_j^*(s)| \leq \lambda \}.$$

On définit $]Y_J \backslash Y_I[_{\mathcal{X}}(\frac{J}{\lambda})$ d'une manière semblable et on remarque que $\pi^{-1}(]Y_J[_{\mathcal{X}}) = \bigcup_{\lambda<1} \pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}))$ est un recouvrement admissible, et de même pour $\pi^{-1}(]Y_J \backslash Y_I[_{\mathcal{X}})$. Il suffit donc de montrer la bijectivité de

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]Y_J \backslash Y_I[_{\mathcal{X}}(\frac{J}{\lambda})))$$

pour tout λ comme ci-dessus.

Ensuite, introduisons pour $\beta \in]0, 1[\cap|\overline{K}^*|$ l'espace

$$\bigcup_{i\in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{\{i\}}) = \{ s \in \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}) | \, \exists i \in J^c, \ |x_i^*(s)| \geq \beta \}$$

18. Pour tout $M \subset I$ nous confondrons M et $\{x_i^* : j \in M\}$.

En remarquant que

$$\pi^{-1}(]Y_J\backslash Y_I[_{\mathcal{X}}(\frac{J}{\lambda})) \subset \pi^{-1}(\bigcup_{i\in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{\beta}{\{i\}})) \subset \pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda})),$$

il suffit d'établir les deux isomorphismes suivants

$$\varinjlim_{\beta<1} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(\bigcup_{i\in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{\beta}{\{i\}}))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]Y_J\backslash Y_I[_{\mathcal{X}}(\frac{J}{\lambda}))) \tag{13}$$

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(\bigcup_{i\in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{\beta}{\{i\}}))) \tag{14}$$

Nous allons établir (13) et montrer que (14) découle de la condition imposée dans l'énoncé.

On a un recouvrement admissible $(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{\beta}{\{i\}})))_{i\in J^c}$ de $\pi^{-1}(\bigcup_{i\in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{\beta}{\{i\}}))$ et les intersections sont de la forme $\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{\beta}{M}))$ pour $M \subset J^c$. Ainsi, pour établir (13) il suffit de prouver l'isomorphisme suivant

$$\varinjlim_{\beta<1} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{\beta}{M}))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(]Y_J\backslash Y_I[_{\mathcal{X}}(\frac{J}{\lambda}))).$$

Cela découle de l'égalité similaire au niveau des formes différentielles car on a l'identité $\pi^{-1}(]Y_J\backslash Y_I[_{\mathcal{X}}(\frac{J}{\lambda}))^\dagger = \bigcap_{\beta<1} \pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{\beta}{M}))^\dagger$ et la famille $(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{\beta}{M})))_\beta$ forme un système cofinal de voisinage stricte de $\pi^{-1}(]Y_J\backslash Y_I[_{\mathcal{X}}(\frac{J}{\lambda}))$.

Passons à (14). On a un recouvrement admissible à deux termes

$$\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda})) = \pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{J^c}{\beta})) \cup \pi^{-1}(\bigcup_{i\in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{\beta}{\{i\}})).$$

En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris qui en découle, il suffit d'établir [19]

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{J^c}{\beta}))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{J^c}{\beta}) \cap \bigcup_{i\in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{\beta}{\{i\}})))$$

On réécrit

$$\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{J^c}{\beta}) \cap \bigcup_{i\in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{\beta}{\{i\}})) = \pi^{-1}(\bigcup_{i\in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{\beta}{\{i\}},\frac{J^c}{\beta}))).$$

Pour établir l'isomorphisme ci-dessus, comparons les deux espaces considérés avec $\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},(\frac{J^c}{\beta})^{\pm 1}))$ ie. prouvons la bijectivité des deux flèches

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{J^c}{\beta}))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},(\frac{J^c}{\beta})^{\pm 1})))$$

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(\bigcup_{i\in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},\frac{\beta}{\{i\}},\frac{J^c}{\beta}))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda},(\frac{J^c}{\beta})^{\pm 1})))$$

19. Soit un recouvrement admissible $X = U \cup V$, supposons la flèche $\mathrm{H}^i(U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(U\cup V)$ bijective pour tout i. Par Mayer-Vietoris, on a une suite exacte $0 \to \mathrm{H}^i(X) \to \mathrm{H}^i(U) \oplus \mathrm{H}^i(V) \to \mathrm{H}^i(U \cup V) \to 0$. Dit autrement, une classe sur l'union X est équivalente à une classe sur chaque ouvert U, V qui coïncident sur l'intersection. Pour toute classe dans V, sa restriction à $U \cup V$ se relève de manière unique à U. En particulier, la classe de départ sur V se relève de manière unique en une classe sur X. Cela établit l'isomorphisme voulue $\mathrm{H}^i(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(V)$.

Pour la première, cela revient à comparer les deux couronnes de l'énoncé du lemme 8.14 pour la partition $I = J \cup \emptyset \cup J^c$. D'après la suite spectrale de Cech pour le recouvrement $(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{\{i\}}, \frac{J^c}{\beta}))_{i\in J^c}$, on se ramène pour la deuxième à

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{I\backslash(J\cup M)}{\beta}, (\frac{M}{\beta})^{\pm 1}))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, (\frac{J^c}{\beta})^{\pm 1})))$$

pour tout $M \subset J^c$. Là encore, cela revient à établir la condition suffisante du lemme pour la partition $I = J \cup M \cup (I\backslash(J \cup M))$

□

8.7 Fin de la preuve du théorème 8.1

Fixons une partition $[\![1, r]\!] = J_1 \cup J_2 \cup J_3$ et reprenons les notations introduites dans le lemme 8.14. Dans toute la suite, nous appellerons par abus $\mathcal{T}$ le revêtement sur $\tilde{C}$ et $\mathcal{T}'$ celui sur $\tilde{C}'$. Nous devons comparer les cohomologies de de Rham de $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{T}'$. Pour cela, on considère les inclusions $\tilde{C}' \to \tilde{C} \to]Y_I[_{\mathcal{X}} = \{s \in \mathcal{X}_\eta, \forall i \in I, |x_i^*(s)| < 1\}$. Nous allons commencer par une description plus simple de $]Y_I[_{\mathcal{X}}$, fournie par :

Lemme 8.15. *Il existe une $\mathcal{O}_L$-algèbre ϖ-adiquement complète et formellement lisse $\hat{B}$ et un isomorphisme*

$$]Y_I[_{\mathcal{X}} \cong \mathrm{Sp}(\hat{B} \otimes_{\mathcal{O}_L} L) \times \{Z = (Z_0, \cdots, Z_d) \in \mathring{\mathbb{B}}^r_L : Z^\alpha = \varpi\}$$

envoyant Z_i sur x_i^*.

Démonstration. Le morphisme étale $\mathcal{O}_L\langle X_0, ..., X_d\rangle/(X_0^{\alpha_0}...X_r^{\alpha_r} - \varpi) \to A$ induit, en complétant $(X_1, ..., X_r)$-adiquement, un morphisme étale

$$R := \mathcal{O}_L\,[\![X_1, ..., X_r]\!]\,\langle X_{r+1}, ..., X_d\rangle/(X_1^{\alpha_1}...X_r^{\alpha_r} - \varpi) \to \hat{A}$$

D'après [Ber96b, (0.2.7)PROPOSITION], $]Y_I[_{\mathcal{X}} = \mathrm{Spf}(\hat{A})^{rig}$. Considérons le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccccc} \hat{A} & \longrightarrow & \hat{A}/\varpi & \longrightarrow & \overline{B} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ R & \longrightarrow & R/\varpi & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{F}_q[X_{r+1}, ..., X_d] \end{array}$$

dans lequel θ est la projection modulo $J = (X_0, ..., X_r)$ et

$$\overline{B} := \hat{A}/\varpi \otimes_{R/\varpi} \mathbb{F}_q[X_{r+1}, ..., X_d] = \hat{A}/(\varpi\hat{A} + J).$$

Observons que l'inclusion canonique $\iota : \mathbb{F}_q[X_{r+1}, ..., X_d] \hookrightarrow R/\varpi$ est une section de θ. Comme $R \to \hat{A}$ est étale, la section ι se relève en une section $s : \overline{B} \to \hat{A}/\varpi$. En effet, $\overline{B}$ est lisse sur $\mathbb{F}$ (puisque $R/\varpi \to \hat{A}/\varpi$ est étale, et donc $\overline{B}$ est étale sur $\mathbb{F}[X_{r+1}, ..., X_d]$), et le morphisme naturel $\overline{B} \xrightarrow{\sim} \hat{A}/(\varpi\hat{A} + J)$ se relève en un morphisme $\overline{B} \to \hat{A}/\varpi$ car $\hat{A}/\varpi$ est complet pour la topologie J-adique. Pour vérifier que l'on obtient bien la section recherchée, il suffit de montrer que ce morphisme est compatible à ι en le réduisant modulo J ce qui est vrai par construction.

Par le théorème d'Elkik [Elk73, THÉORÈME fin section II p568] on peut relever $\overline{B}$ en une $\mathcal{O}_K$-algèbre lisse B. Ainsi, en reprenant les arguments de la construction de s, on voit que $B \to \hat{A}/\varpi$ se relève en un morphisme $B \to \hat{A}$ puis en $\hat{B} \to \hat{A}$, où $\hat{B}$ est la complétion ϖ-adique de B. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{A} & \longleftarrow & \hat{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{A}/\varpi & \longleftarrow & \overline{B} \end{array}$$

fournit un morphisme $\beta : \hat{B}\left[\!\left[Z_0, ..., Z_r\right]\!\right]/(Z_1^{\alpha_1}...Z_r^{\alpha_r} - \varpi) \to \hat{A}$ envoyant Z_i sur x_i^*. Par Nakayama topologique, β est un isomorphisme car il l'est modulo $(Z_1, ..., Z_r, \varpi)$ par construction. On conclut en passant à la fibre génerique.

□

Notons $S = \mathrm{Sp}(\hat{B} \otimes_{\mathcal{O}_L} L)$ et $X = \{Z = (Z_0, \cdots Z_d) \in \mathring{\mathbb{B}}_L^r : Z^\alpha = \varpi\}$. Le lemme ci-dessus fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{C}' & \longrightarrow & \tilde{C} & \longrightarrow &]Y_I[_{\mathcal{X}} \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ S \times C' & \longrightarrow & S \times C & \longrightarrow & S \times X \end{array}$$

où C et C' sont les espaces par

$$C = \{s \in X \,|\, |Z_{j_1}(s)| \leq \lambda, |Z_{j_2}(s)| = \beta, |Z_{j_3}(s)| \leq \beta \,\forall j_k \in J_k\}$$

$$C' = \{s \in X \,|\, |Z_{j_1}(s)| \leq \lambda, |Z_{j_2}(s)| = \beta, |Z_{j_3}(s)| = \beta \,\forall j_k \in J_k\}\,.$$

On se place maintenant dans le cas où $\mathcal{X}$ est semi-stable. Alors, en exprimant Z_1 en fonction des variables $Z_2, \cdots, Z_d$, nous pourrons voir les espaces C, C' comme des tores monomiaux géométriquement connexes. Comme on peut raisonner sur chaque composante de S, on suppose de même S connexe. Enfin, quitte à étendre les scalaires, on suppose le corps de base L complet algébriquement clos.

Lemme 8.16. *Les torseurs $[\mathcal{T}]$ et $[\mathcal{T}']$ admettent des décompositions en sommes $[\mathcal{T}_1 \times C] + [S \times \mathcal{T}_2]$ et $[\mathcal{T}_1' \times C'] + [S \times \mathcal{T}_2']$ où $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1'$ est un Λ-torseur sur S, $\mathcal{T}_2$ un Λ-torseur sur C et $\mathcal{T}_2'$ un Λ-torseur sur C'.*

Démonstration. On raisonne sur C, l'argument sera le même pour C'. Introduisons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S \times C & \xrightarrow{pr_2} & C \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & \searrow^{\varphi} & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ S & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Sp}\, L. \end{array}$$

On se donne $c_0 \in C$ un point géométrique et on note $\iota : c_0 \times S \to C \times S$. D'après la suite spectrale de Leray, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{R}^1\varphi_*\Lambda_S^{\pi_0(C)} \xrightarrow{\mathrm{R}^1 pr_1^*} \mathrm{R}^1\varphi_*\Lambda_{S\times C} \to \varphi_*\,\mathrm{R}^1 pr_{1,*}\Lambda_{S\times C} \to \mathrm{R}^2\varphi_*\Lambda_S \xrightarrow{\mathrm{R}^2 pr_1^*} \mathrm{R}^2\varphi_*\Lambda_{S\times C}$$

Les morphismes induits $\mathrm{R}^1\iota^*$ et $\mathrm{R}^2\iota^*$ fournissent des inverses à droite de $\mathrm{R}^1 pr_1^*$ et $\mathrm{R}^2 pr_1^*$, d'où une suite exacte de faisceaux scindée :

$$0 \to (\mathrm{R}^1\varphi_*\Lambda_S)^{\pi_0(C)} \xrightarrow{\mathrm{R}^1 pr_1^*} \mathrm{R}^1\varphi_*\Lambda_{S\times C} \to \varphi_*\,\mathrm{R}^1 pr_{1,*}\Lambda_{S\times C} \to 0$$

et une identification $\varphi_*\,\mathrm{R}^1 pr_{1,*}\Lambda_{S\times C} \cong \ker(\mathrm{R}^1\iota^*)$.

Les flèches naturelles compatibles $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(C, \Lambda) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(U \times C, \Lambda)$ induisent un morphisme entre le préfaisceau constant $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(C, \Lambda)|_S$ et le préfaisceau $U \mapsto \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(U \times C, \Lambda)$. En passant au faisceau

associé, on obtient un morphisme naturel $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(C,\Lambda)|_S \to \mathrm{R}^1 pr_{1,*}\Lambda_{S\times C}$. Le faisceau $pr_{1,*}\Lambda_{S\times C}$ est surconvergent en tant qu'image directe d'un faisceau constant, on a d'après [dJvdP96, Th. 3.7.3], $(\mathrm{R}^1 pr_{1,*}\Lambda_{S\times C})_s \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(C,\Lambda)$ pour tout point $s \in S$ et δ est un isomorphisme.

Comme S et C sont connexes on a, en prenant les sections globales, une suite exacte scindée

$$0 \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(S,\Lambda) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(S\times C,\Lambda) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(C,\Lambda) \to 0$$

avec $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(C,\Lambda) \xrightarrow{\sim} \ker(\iota^*)$. Mais on a un morphisme injectif $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(C,\Lambda) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(S\times C,\Lambda)$ induit par pr_2^*. Il reste à prouver que $\ker(\iota^*) = \mathrm{im}(pr_2^*)$. Le morphisme pr_2^* envoie un revêtement $\mathcal{T}$ sur $S\times\mathcal{T}$ et ι^* envoie $\mathcal{T}'$ sur $S\times C$ vers sa restriction à $S\times c_0 \cong S$. Il est aisé de voir que $\iota^*\circ pr_2^* = 0$ i.e. $\mathrm{im}(pr_2^*) \subset \ker(\iota^*)$. Mais ces deux groupes ont tous deux pour ordre $|\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(C,\Lambda)| = n^d$, ils sont donc confondus. On a donc la décomposition

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(S\times C,\Lambda) = \mathrm{im}(pr_1^*) \oplus \mathrm{im}(pr_2^*).$$

L'énoncé est une traduction en termes de torseurs de cette égalité

□

L'espace $\mathcal{T}_1 \times_L \mathcal{T}_2$ est un revêtement de $\mathcal{T}$ de groupe de Galois $H = \{(g,g^{-1}) : g \in \Lambda\}$ et un revêtement de $S\times C$ de groupe de Galois Λ^2. On obtient l'égalité par Künneth :

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}) = \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_1\times_L\mathcal{T}_2)^H &= \Big(\bigoplus_{\chi_1,\chi_2\in\Lambda^\vee} \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2)[\chi_1,\chi_2]\Big)^H \\ &= \bigoplus_{q_1+q_2=q}\bigoplus_{\chi\in\Lambda^\vee} \mathrm{H}^{q_1}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_1)[\chi]\otimes\mathrm{H}^{q_2}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_2)[\chi]\end{aligned}$$

De même pour $\mathcal{T}_1\times_L\mathcal{T}_2'$ par rapport à $\mathcal{T}'$ et $S\times C'$, on a

$$\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}') = \bigoplus_{q_1+q_2=q}\bigoplus_{\chi\in\Lambda^\vee} \mathrm{H}^{q_1}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_1')[\chi]\otimes\mathrm{H}^{q_2}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_2')[\chi]$$

On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}) & = & \bigoplus_{q_1+q_2=q}\bigoplus_{\chi\in\Lambda^\vee} \mathrm{H}^{q_1}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_1)[\chi]\otimes\mathrm{H}^{q_2}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_2)[\chi] \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \oplus(\mathrm{Id}\otimes\iota^*)} \\ \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}') & = & \bigoplus_{q_1+q_2=q}\bigoplus_{\chi\in\Lambda^\vee} \mathrm{H}^{q_1}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_1)[\chi]\otimes\mathrm{H}^{q_2}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_2')[\chi]\end{array}$$

Mais d'après 8.10, la flèche ι^* est un isomorphisme et les deux flèches verticales sont des bijections. On peut alors appliquer 8.14 pour prouver le théorème 8.1.

Supposons maintenant $\mathcal{X}$ semi-stable généralisé et $\pi = \mathrm{Id}$. On considère le tore monomial

$$Y = \{\tilde{Z} = (T, Z_1, \cdots, Z_d) : T\prod_{i=0}^{d} Z_i^{\alpha_i} = \varpi \text{ et } |T| \le \lambda^{1/\alpha_0}, |Z_{j_1}(s)| \le \lambda, |Z_{j_2}(s)| = \beta, |Z_{j_3}(s)| \le \beta\ \forall j_k \in J_k\}$$

et on peut écrire $C = Y(T^{1/\alpha_0})$. En raisonnant de même sur C', on observe l'isomorphisme $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(C) \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(C')$ d'après 8.10 et on en déduit $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(S\times C) \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(S\times C')$ par Künneth.

9 Cohomologie de De Rham du premier revêtement de la tour de Drinfeld

Le but de ce chapitre est de calculer la "partie cuspidale" de la cohomologie de de Rham de Σ^1. Cela utilise tous les résultats obtenus jusqu'à présent. Dans tout ce chapitre nous noterons

$$N = q^{d+1} - 1,\ \breve{K}_N = \breve{K}(\varpi^{\frac{1}{N}}).$$

Théorème 9.1. *Soit $\theta : \mathbb{F}_{q^{d+1}}^* \to \breve{K}_N^*$ un caractère primitif. Il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{H}^r_{\mathrm{dR},c}(\Sigma^1_{\breve{K}_N})[\theta] \simeq \bigoplus_{s\in\mathcal{BT}_0} \mathrm{H}^r_{\mathrm{rig},c}(\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q}/\breve{K}_N)[\theta]$$

et $\mathrm{H}^r_{\mathrm{dR},c}(\Sigma^1_{\breve{K}_N})[\theta] = 0$ pour $r \neq d$.

Pour démontrer le théorème, on étudie la suite spectrale de Cech associée au recouvrement par les tubes (dans Σ^1) au-dessus des composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}}}$ i.e. au recouvrement par la famille d'ouverts $(\Sigma^1_{\mathrm{Ost}(s)})_{s\in\mathcal{BT}_0}$:

$$E_1^{-r,s} = \bigoplus_{\sigma\in\mathcal{BT}_r} \mathrm{H}^s_{\mathrm{dR},c}(\Sigma^1_{\mathrm{Ost}(\sigma)}) \Rightarrow \mathrm{H}^{s-r}_{\mathrm{dR},c}(\Sigma^1)$$

Par dualité de Poincaré 2.4, on se ramène à étudier $\mathrm{H}^r_{\mathrm{dR}}(\Sigma^1_{\mathrm{Ost}(\sigma)})$. Nous montrerons (cf. paragraphe 9.1) que pour $s \in \mathcal{BT}_0$ on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{H}^r_{\mathrm{dR},c}(\Sigma^1_{\breve{K}_N,\mathrm{Ost}(s)})[\theta] = \begin{cases} \mathrm{H}^d_{\mathrm{rig},c}(\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q}/\breve{K}_N)[\theta] & \text{si } r = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et (cf. paragraphe 9.2) que $\mathrm{H}^r_{\mathrm{dR},c}(\Sigma^1_{\mathrm{Ost}(\sigma)})[\theta] = 0$ pour $\dim(\sigma) \geq 1$. Ces deux résultats, dont la preuve utilise de manière cruciale le théorème 8.1, montrent la dégénérescence de la suite spectrale et permettent de conclure la preuve du théorème 9.1.

9.1 Le tube au-dessus d'une composante irréductible

Le but de ce paragraphe est de calculer la cohomologie de De Rham du tube au-dessus d'une composante irréductible i.e. $\mathrm{H}^r_{\mathrm{dR}}(\Sigma^1_{\mathrm{Ost}(s)})$, plus précisément de démontrer le résultat suivant :

Proposition 9.2. *Si $s \in \mathcal{BT}_0$ est un sommet, il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{H}^r_{\mathrm{dR},c}(\Sigma^1_{\breve{K}_N,\mathrm{Ost}(s)})[\theta] = \begin{cases} \mathrm{H}^d_{\mathrm{rig},c}(\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q}/\breve{K}_N)[\theta] & \textit{si } r = d \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}.$$

D'après le théorème 8.1 et la discussion dans le paragraphe précédent on a un isomorphisme naturel (induit par la restriction)

$$\mathrm{H}^r_{\mathrm{dR}}(\Sigma^1_{\mathrm{Ost}(s)}) \simeq \mathrm{H}^r_{\mathrm{dR}}(\Sigma^1_s).$$

Pour étudier $\mathrm{H}^r_{\mathrm{dR}}(\Sigma^1_s)$, nous devons rendre explicite le lien entre Σ^1_s et la variété de Deligne-Lusztig $\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q}$. Ce lien est établi dans [Wan14a, 2.3.8], mais nous allons donner l'argument pour le confort du lecteur.

Lemme 9.3. *La restriction $\Sigma^1_{\breve{K}_N,s}$ du premier revêtement au-dessus d'un sommet admet un modèle entier $\widehat{\Sigma}^{1,lisse}_s$ dont la fibre spéciale $\overline{\Sigma}^1_s$ est la variété de Deligne-Lusztig $\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q}$.*

Démonstration. On peut supposer que s est le sommet standard. On pose

$$u_1 = \prod_{H\in\mathcal{H}_1\setminus\{H_0\}} (\frac{l_H}{l_{H_0}})^{q-1} \in \mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}},s}),$$

avec H_0 une direction à l'infini privilégiée. D'après 6.7 on a

$$\mathfrak{X}[\Pi_D]\setminus\{0\}|_{\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}},s}} = \mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}},s}((\varpi u_1)^{\frac{1}{N}})$$

En particulier, $\Sigma^1_{\breve{K}_N,s} = \mathbb{H}^d_{\breve{K}_N,s}(u_1^{\frac{1}{N}})$. On prend la normalisation de $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}},s}$ dans $\Sigma^1_{\breve{K}_N,s}$ pour obtenir un modèle entier $\widehat{\Sigma}^{1,lisse}_s = \mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}_N},s}(u_1^{\frac{1}{N}})$ de fibre spéciale

$$\overline{\Sigma}_{1,s} = \mathbb{H}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q,s}(u_1^{\frac{1}{N}}).$$

On rappelle que u_1 est une unité de $\mathbb{H}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q,s} \cong \mathbb{P}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q} \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{H}_1} H$ et $\overline{\Sigma}_{1,s}$ est donc $\mathrm{DL}^d_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ (cf 7.1)

□

Grâce au le lemme ci-dessus et à 2.5 on obtient des isomorphismes

$$\mathrm{H}^r_{\mathrm{dR}}(\Sigma^1_{\breve{K}_N,s}) \cong \mathrm{H}^r_{\mathrm{rig}}(\overline{\Sigma}_{1,s}/\breve{K}_N) \cong \mathrm{H}^r_{\mathrm{rig}}(\mathrm{DL}^d_{\mathbb{F}_q}/\breve{K}_N),$$

ce qui finit la preuve de la proposition 9.2.

9.2 Le tube au-dessus d'une intersection de composantes irréductibles

Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

Proposition 9.4. *Si σ est un simplexe de dimension non nulle, alors $\mathrm{H}^j_{\mathrm{dR},c}(\Sigma^1_{\mathrm{Ost}(\sigma)})[\theta] = 0$ pour tout j et tout caractère primitif θ.*

En utilisant l'action de G, on peut supposer que σ est un simplexe standard (en particulier, on a $\sigma = \{[M_i]\}_i$ avec $M_0 = \mathcal{O}_K^{d+1}$), de dimension $k \geq 1$ et de type $(e_0, ..., e_k)$. D'après le théorème 8.1 (en se rappelant que $\mathbb{H}^d_{\mathcal{O}_{\breve{K}}}$ est un modèle semi-stable de $\mathbb{H}^d_{\breve{K}}$) on dispose d'un isomorphisme naturel

$$\mathrm{H}^j_{\mathrm{dR}}(\Sigma^1_{\mathrm{Ost}(\sigma)})[\theta] \cong \mathrm{H}^j_{\mathrm{dR}}(\Sigma^1_{\mathrm{Ost}(\sigma)}\setminus(\bigcup_{s\notin\sigma}\Sigma^1_{\mathrm{Ost}(s)}))[\theta] \cong \mathrm{H}^j_{\mathrm{dR}}(\Sigma^1_{\mathring{\sigma}})[\theta].$$

Comme dans 6.21, on fixe des formes linéaires $l_H =: l_{a_H}$ de noyau $H \in \mathcal{H}_1$ et on a, toujours d'après le théorème 6.21

$$\Sigma^1_{\mathrm{Ost}(s)} = \mathbb{H}^d_{K,\breve{K},\mathrm{Ost}(s)}((\varpi u_1)^{\frac{1}{N}}),$$

avec $u_1 = \prod_{H\in\mathcal{H}_1\setminus\{H_0\}}(\frac{l_H}{l_{H_0}})^{q-1}$. Nous souhaitons restreindre le torseur $\delta(\varpi u_1)$ à $\mathbb{H}^d_{\breve{K},\mathring{\sigma}}$ car $\Sigma^1_{\mathring{\sigma}} \subset \Sigma^1_{\mathrm{Ost}(s)}$. On rappelle [DS01, 6.4] que cet espace admet une décomposition

$$\mathbb{H}^d_{\breve{K},\mathring{\sigma}} \cong A_k \times \prod_{i=0}^{k} C_{e_i-1} \cong A_k \times C_\sigma,$$

où A_k et C_{e_i-1}, C_σ sont les espaces introduits dans le paragraphe 3.3. Nous allons exhiber une décomposition similaire pour les torseurs. Introduisons avant quelques notations. On note $z = [z_0, \cdots, z_d]$ la variable sur l'espace projectif $\mathbb{P}^d_K$ et, pour tout $H \in \mathcal{H}_1$, $i(H)$ sera l'unique entier tel que $a_H \in M_{i(H)}\setminus M_{i(H)+1}$ (on rappelle que $a_H \in M_0\setminus\varpi M_0$).

Lemme 9.5. *Soient $(\alpha_H)_{H\in\mathcal{H}_1}$ des entiers de somme nulle et soit $Q=\prod_{H\in\mathcal{H}_1} l_H^{\alpha_H}$. Notons*

$$Q_{A_k}=\prod_{H\in\mathcal{H}_1} z_{d_{i(H)}}^{\alpha_H}\in\mathscr{O}^*(A_k),$$

Il existe des sections $Q_{C_{e_i-1}}\in\mathscr{O}^*(C_{e_i-1})$, chacune étant un produit homogène de degré 0 de formes $(l_H)_{H\in\mathcal{H}_1}$ tel que

$$Q=Q_{A_k}Q_{C_{e_0-1}}\dots Q_{C_{e_k-1}}=Q_{A_k}Q_{C_\sigma}\pmod{1+\mathscr{O}^{++}(\mathbb{H}^d_{\check{K},\mathring{\sigma}})}$$

avec $Q_{C_\sigma}=Q_{C_{e_0-1}}\dots Q_{C_{e_k-1}}\in\mathscr{O}^*(C_\sigma)$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour les fractions $\frac{l_a}{z_0}$ pour $a=(a_0,\dots,a_d)$ un vecteur unimodulaire de $\mathcal{O}_K^{d+1}$. Soit i l'entier tel que $a\in M_i\backslash M_{i+1}$ et décomposons $a=a_1+\varpi a_2+a_3$ avec a_1 dans N_i unimodulaire, a_2 dans $N_0\oplus\dots\oplus N_{i-1}$ et a_3 dans $N_{i+1}\oplus\dots\oplus N_k$ 3.1. On a

$$\frac{l_a}{z_0}=\frac{z_{d_i}}{z_0}\frac{l_{a_1}+\varpi l_{a_2}+l_{a_3}}{z_{d_i}}=\frac{z_{d_i}}{z_0}\frac{l_{a_1}}{z_{d_i}}(1+\varpi\frac{l_{a_2}}{l_{a_1}}+\frac{l_{a_3}}{l_{a_1}}).$$

Le terme $\frac{z_{d_i}}{z_0}$ est dans $\mathscr{O}^*(A_k)$, la fraction $\frac{l_{a_1}}{z_{d_i}}$ dans $\mathscr{O}^*(C_{e_i-1})$ et $\varpi\frac{l_{a_2}}{l_{a_1}}+\frac{l_{a_3}}{l_{a_1}}$ dans $\mathscr{O}^{++}(\mathbb{H}^d_{K,\check{K},\mathring{\sigma}})$. De plus, la fraction $Q_{A_k}=\frac{z_{d_i}}{z_0}$ a la forme voulue ce qui conclut la preuve de l'énoncé.

□

D'après ce qui précéde (et en utilisant le fait que N est premier à p, donc toute fonction f telle que $|f-1|<1$ est une puissance N-ième), on peut décomposer $u_1=u_{A_k}u_{C_\sigma}$ (mod $\mathscr{O}^*(\mathbb{H}^d_{K,\check{K},\mathring{\sigma}})^N$). Introduisons les μ_N-revêtements

$$\mathcal{T}_{A_k}=A_k(u_{A_k}^{1/N})\text{ et }\mathcal{T}_{C_\sigma}=C_\sigma((\varpi u_{C_\sigma})^{1/N}).$$

Soit H l'antidiagonale de $(\mathbb{F}^*_{q^{d+1}})^2$. On a

$$\Sigma^1_{\mathring{\sigma}}=(A_k\times C_\sigma)((\varpi u_{A_k}u_{C_\sigma})^{1/N})=(\mathcal{T}_{A_k}\times_{\check{K}}\mathcal{T}_{C_\sigma})/H.$$

Lemme 9.6. *L'espace $\mathcal{T}_{A_k}$ a q^m-1 composantes connexes géométriques avec $m=\mathrm{PGCD}(d+1,e_0,\cdots,e_k)$.*

Démonstration. Notons que A_k est un tore monômial semi-ouvert. En effet,

$$A_k=\{y=(y_1,\cdots,y_k)\in\mathbb{B}^k_{\check{K}}|\,1>|y_1|>\dots>|y_k|>|\varpi|\}$$

et on réalise le changement de variable $x_1=y_1$, $x_2=\frac{y_2}{y_1},\cdots,x_k=\frac{y_k}{y_{k-1}}$ pour obtenir

$$A_k=\{x=(x_1,\cdots,x_k)\in\mathring{\mathbb{B}}^k_{\check{K}}|\,1>|x_1\cdots x_k|>|\varpi|\}.$$

De plus, on a

$$u_{A_k}=\prod_{i=1}^k(\frac{z_{d_i}}{z_0})^{\beta_i}\text{ où }\beta_i=|(M_i/\varpi M_0)\backslash(M_{i+1}/\varpi M_0)|=q^{d+1-d_{i+1}}(q^{e_i}-1).$$

Le nombre de composantes connexes géométriques de $\mathcal{T}_{A_k}$ est 2.2

$$|\pi_0(\mathcal{T}_{A_k}\otimes C)|=\mathrm{PGCD}(N,\beta_0,\cdots,\beta_k)=q^m-1.$$

□

Considérons la décomposition en parties isotypiques :

$$\mathrm{H}^j_{\mathrm{dR}}(\Sigma^1_{\mathring{\sigma}})[\chi] = \bigoplus_{j_1+j_2=j} \mathrm{H}^{j_1}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_{A_k})[\chi] \widehat{\otimes} \mathrm{H}^{j_2}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_{C_\sigma})[\chi]$$

On identifie $\mathbb{F}^*_{q^{d+1}} \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et on voit θ comme un élément de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Le nombre de composantes connexes géométriques de $\mathcal{T}_{A_k}$ est de la forme $q^m - 1$ et par primitivité de θ, $N/(q^m-1)$ ne divise pas θ dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. On a alors $\mathrm{H}^j_{\mathrm{dR}}(\mathcal{T}_{A_k})[\theta] = 0$ 8.11. D'où,

$$\mathrm{H}^j_{\mathrm{dR}}(\Sigma^1_{\mathring{\sigma}})[\theta] = 0.$$

Ce qui conclut la preuve de la proposition 9.4.

9.3 Réalisation de la correspondance de Langlands locale

Dans cette partie, nous allons décrire la cohomologie des espaces $\mathcal{M}^1_{Dr}$ et montrer qu'elle réalise la correspondance de Jacquet-Langlands. On étendra les scalaires à C pour tous les espaces considérés en fibre générique.

On pourra simplifier le produit $G \times D^*$ en GD. On a une "valuation" sur GD :

$$v_{GD} : (g, b) \in GD \mapsto v_K(\det(g)\,\mathrm{Nr}(b)) \in \mathbb{Z}.$$

On introduit alors $[GD]_{d+1} = v_{GD}^{-1}((d+1)\mathbb{Z})$ et $[G]_{d+1} = G \cap [GD]_{d+1}$, $[D]_{d+1} = D^* \cap [GD]_{d+1}$. Ainsi, on a des inclusions naturelles de $\mathcal{O}_D^*$, G dans $[GD]_0$ et les deux sous-groupes ne commutent pas entre eux.

Passons aux représentations qui vont nous intéresser. Nous définissons d'abord des représentations sur $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\varpi^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{O}_D^*\varpi^{\mathbb{Z}}$ que nous étendrons à GD par induction. Fixons θ un caractère primitif de $\mathbb{F}^*_{q^{d+1}}$ et des isomorphismes $\mathcal{O}_D^*/1 + \Pi_D\mathcal{O}_D \cong \mathbb{F}^*_{q^{d+1}}$. On pose :

— θ sera vu comme une $[D]_{d+1}$-représentation via $\mathcal{O}_D^*\varpi^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{O}_D^* \to \mathbb{F}^*_{q^{d+1}}$,

— $\overline{\pi}_\theta$ sera la représentation associée à θ sur $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q)$ via la correspondance de Deligne-Lusztig. On la voit comme une $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\varpi^{\mathbb{Z}}$-représentation via $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\varpi^{\mathbb{Z}} \to \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q)$.

Par induction, on obtient :

— une représentation $\pi(\theta)$ de G, où $\pi(\theta) = \text{c-ind}^G_{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\varpi^{\mathbb{Z}}} \overline{\pi}_\theta$. Il pourra être utile de considérer $\tilde{\pi}(\theta) = \text{c-ind}^{[G]_{d+1}}_{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\varpi^{\mathbb{Z}}} \overline{\pi}_\theta$ et d'écrire $\pi(\theta) = \text{c-ind}^G_{[G]_{d+1}} \tilde{\pi}(\theta)$.

— une D^*-représentation $\rho(\theta) = \text{c-ind}^{D^*}_{[D]_{d+1}} \theta$,

Nous avons défini une action de $GD = G \times D^*$ sur $\mathcal{M}^1_{Dr}$ qui s'identifie non canoniquement à $\Sigma^1 \times \mathbb{Z}$. Si on confond Σ^1 avec $\Sigma^1 \times \{0\}$, on obtient une action sur Σ^1 de $[GD]_{d+1}$.

Pour énoncer la correspondance de Langlands, nous aurons besoin de la cohomologie de $\mathcal{M}^1_{Dr}$. On a la relation :

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR},c}(\mathcal{M}^1_{Dr}/\varpi^{\mathbb{Z}}) = \text{c-ind}^{GD}_{[GD]_{d+1}} \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR},c}(\Sigma^1).$$

Nous allons montrer :

Théorème 9.7. *Soit θ un caractère primitif, on a un isomorphisme G-équivariant :*

$$\mathrm{Hom}_{D^*}(\rho(\theta), \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR},c}((\mathcal{M}^1_{Dr}/\varpi^{\mathbb{Z}})/C)) \cong \begin{cases} \pi(\theta)^{d+1} & \text{si } i = d, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Si $i \neq d$, nous avons déjà prouvé l'annulation de la cohomologie. Posons dorénavant $i = d$. Dans un premier temps, observons

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{D^*}(\rho(\theta), \mathrm{H}^d_{\mathrm{dR},c}((\mathcal{M}^1_{Dr}/\varpi^{\mathbb{Z}})/C)) &= \mathrm{Hom}_{D^*}(\text{c-ind}^D_{[D]_{d+1}}\theta, \text{c-ind}^{GD}_{[GD]_{d+1}}\mathrm{H}^d_{\mathrm{dR},c}(\Sigma^1_C)) \\
&= \mathrm{Hom}_{[D]_{d+1}}(\theta, \text{c-ind}^G_{[G]_{d+1}}\mathrm{H}^d_{\mathrm{dR},c}(\Sigma^1_C)) \\
&= \text{c-ind}^G_{[G]_{d+1}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}^*_{q^{d+1}}}(\theta, \mathrm{H}^d_{\mathrm{dR},c}(\Sigma^1_C)) \\
&= \text{c-ind}^G_{[G]_{d+1}}\mathrm{H}^d_{\mathrm{dR},c}(\Sigma^1_C))[\theta] \\
&= \text{c-ind}^G_{[G]_{d+1}}\pi(\theta)|_{[G]_{d+1}} \qquad (9.1) \\
&= \text{c-ind}^G_{[G]_{d+1}}\mathrm{res}_{[G]_{d+1}}(\text{c-ind}^G_{[G]_{d+1}}\tilde{\pi}(\theta)) \\
&= \text{c-ind}^G_{[G]_{d+1}}(\bigoplus_{x\in G/[G]_{d+1}} c_x(\tilde{\pi}(\theta))) \\
&= \bigoplus_{x\in G/[G]_{d+1}} \text{c-ind}^G_{[G]_{d+1}} c_x(\tilde{\pi}(\theta)) \\
&= \pi(\theta)^{|G/[G]_{d+1}|} = \pi(\theta)^{d+1}.
\end{aligned}$$

On rappelle que $\tilde{\pi}(\theta) = \text{c-ind}^{[G]_{d+1}}_{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\varpi^{\mathbb{Z}}}\overline{\pi}_\theta$. On a noté $c_x(\tilde{\pi}(\theta))$ la représentation $g \mapsto \tilde{\pi}(\theta)(x^{-1}gx)$. Pour l'avant-dernière égalité, on a utilisé la formule de Mackey $\text{c-ind}^G_{[G]_{d+1}} c_x(\tilde{\pi}(\theta)) = \pi(\theta)$. □

Références

[AdS02] Gil Alon and Ehud de Shalit.
On the cohomology of Drinfeld's p-adic symmetric domain.
Israel J. Math., 129 :1–20, 2002.

[BC91] J.-F. Boutot and H. Carayol.
Uniformisation p-adique des courbes de Shimura : les théorèmes de Čerednik et de Drinfel'.
Astérisque, (196-197) :7, 45–158 (1992), 1991.
Courbes modulaires et courbes de Shimura (Orsay, 1987/1988).

[Ber93] Vladimir G. Berkovich.
Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces.
Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (78) :5–161 (1994), 1993.

[Ber95a] Vladimir G. Berkovich.
The automorphism group of the Drinfel'd half-plane.
C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 321(9) :1127–1132, 1995.

[Ber95b] Vladimir G. Berkovich.
On the comparison theorem for étale cohomology of non-Archimedean analytic spaces.
Israel J. Math., 92(1-3) :45–59, 1995.

[Ber96a] Vladimir G. Berkovich.
Vanishing cycles for formal schemes. II.
Invent. Math., 125(2) :367–390, 1996.

[Ber96b] Pierre Berthelot.
Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres, première partie.
Prépublication IRMAR, 96-03, 1996.

[Ber97] Pierre Berthelot.
Dualité de Poincaré et formule de Künneth en cohomologie rigide.
C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 325(5) :493–498, 1997.

[Ber99] Vladimir G. Berkovich.
Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible.
Invent. Math., 137(1) :1–84, 1999.

[Boy99] P. Boyer.
Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale.
Invent. Math., 138(3) :573–629, 1999.

[Car90] H. Carayol.
Nonabelian Lubin-Tate theory.
In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988)*, volume 11 of *Perspect. Math.*, pages 15–39. Academic Press, Boston, MA, 1990.

[CDN] Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu, and Wiesł awa Nizioł.
Integral p-adic étale cohomology of drinfeld symmetric spaces.
https ://arxiv.org/abs/1905.11495.

[CDN20] Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu, and Wiesł awa Nizioł.
Cohomologie p-adique de la tour de Drinfeld: le cas de la dimension 1.
J. Amer. Math. Soc., 33(2) :311–362, 2020.

[Dat07] J.-F. Dat.
Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques.
Invent. Math., 169(1) :75–152, 2007.

[Dat12] Jean-François Dat.
A lemma on nearby cycles and its application to the tame Lubin-Tate space.
Math. Res. Lett., 19(1) :165–173, 2012.

[dJvdP96] Johan de Jong and Marius van der Put.
Étale cohomology of rigid analytic spaces.
Doc. Math., 1 :No. 01, 1–56, 1996.

[DL76] P. Deligne and G. Lusztig.
Representations of reductive groups over finite fields.
Ann. of Math. (2), 103(1) :103–161, 1976.

[DLB17] Gabriel Dospinescu and Arthur-César Le Bras.
Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands p-adique.
Ann. of Math. (2), 186(2) :321–411, 2017.

[Dri74] V. G. Drinfel'd.
Elliptic modules.
Mat. Sb. (N.S.), 94(136) :594–627, 656, 1974.

[Dri76] V. G. Drinfel'd.
Coverings of p-adic symmetric domains.
Funkcional. Anal. i Priložen., 10(2) :29–40, 1976.

[Dri77] V. G. Drinfel'd.
Elliptic modules. II.
Mat. Sb. (N.S.), 102(144)(2) :182–194, 325, 1977.

[DS01] Ehud De Shalit.
Residues on buildings and de Rham cohomology of p-adic symmetric domains.
Duke Math. J., 106(1) :123–191, 2001.

[Elk73] Renée Elkik.
Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien.
Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 6 :553–603 (1974), 1973.

[FvdP04] Jean Fresnel and Marius van der Put.
Rigid analytic geometry and its applications, volume 218 of *Progress in Mathematics*.
Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[Gen96] Alain Genestier.
Espaces symétriques de Drinfeld.
Astérisque, (234) :ii+124, 1996.

[GI63] O. Goldman and N. Iwahori.
The space of $\mathfrak{p}$-adic norms.
Acta Math., 109 :137–177, 1963.

[GK00] Elmar Grosse-Klönne.
Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf.
J. Reine Angew. Math., 519 :73–95, 2000.

[GK02] Elmar Grosse-Klönne.
Finiteness of de Rham cohomology in rigid analysis.
Duke Math. J., 113(1) :57–91, 2002.

[GK04] Elmar Grosse-Klönne.
De Rham cohomology of rigid spaces.
Math. Z., 247(2) :223–240, 2004.

[GK07] Elmar Grosse-Klönne.
On the crystalline cohomology of Deligne-Lusztig varieties.
Finite Fields Appl., 13(4) :896–921, 2007.

[Gro95] Alexander Grothendieck.
Le groupe de Brauer. II. Théorie cohomologique [MR0244270 (39 #5586b)].
In *Séminaire Bourbaki, Vol. 9*, pages Exp. No. 297, 287–307. Soc. Math. France, Paris, 1995.

[Har77] Robin Hartshorne.
Algebraic geometry.
Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Har97] Michael Harris.
Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel' d upper half spaces ; elaboration of Carayol's program.
Invent. Math., 129(1) :75–119, 1997.

[HT01] Michael Harris and Richard Taylor.
The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies.*
Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[IS01] Adrian Iovita and Michael Spiess.
Logarithmic differential forms on p-adic symmetric spaces.
Duke Math. J., 110(2) :253–278, 2001.

[Kie67] Reinhardt Kiehl.
Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie.
Invent. Math., 2 :256–273, 1967.

[LT65] Jonathan Lubin and John Tate.
Formal complex multiplication in local fields.
Ann. of Math. (2), 81 :380–387, 1965.

[LT66] Jonathan Lubin and John Tate.
Formal moduli for one-parameter formal Lie groups.
Bull. Soc. Math. France, 94 :49–59, 1966.

[Pan17] Lue Pan.
First covering of the Drinfel'd upper half-plane and Banach representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.
Algebra Number Theory, 11(2) :405–503, 2017.

[Ray74] Michel Raynaud.
Schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$.
Bull. Soc. Math. France, 102 :241–280, 1974.

[Sai93] Takeshi Saito.
ϵ-factor of a tamely ramified sheaf on a variety.
Invent. Math., 113(2) :389–417, 1993.

[SS91] P. Schneider and U. Stuhler.
The cohomology of p-adic symmetric spaces.
Invent. Math., 105(1) :47–122, 1991.

[Tei90] Jeremy Teitelbaum.
Geometry of an étale covering of the p-adic upper half plane.
Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 40(1) :68–78, 1990.

[Van] Arnaud Vanhaecke.
Le cristal de dieudonné des schémas en $\mathbb{F}$-vectoriels.
https ://arxiv.org/abs/1903.09968.

[VdP82] M. Van der Put.
Cohomology on affinoid spaces.
Compositio Math., 45(2) :165–198, 1982.

[Wan14a] Haoran Wang.
L'espace symétrique de Drinfeld et correspondance de Langlands locale I.
Math. Z., 278(3-4) :829–857, 2014.

[Wan14b] Haoran Wang.
Sur la cohomologie de la compactification des variétés de Deligne-Lusztig.
Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 64(5) :2087–2126, 2014.

[Yos10] Teruyoshi Yoshida.
On non-abelian Lubin-Tate theory via vanishing cycles.
In *Algebraic and arithmetic structures of moduli spaces (Sapporo 2007)*, volume 58 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 361–402. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

[Zhe08] Weizhe Zheng.
Sur la cohomologie des faisceaux l-adiques entiers sur les corps locaux.
Bull. Soc. Math. France, 136(3) :465–503, 2008.