



**HAL**  
open science

# Transport du rayonnement cosmique dans le milieu interstellaire faiblement ionisé

Loann Brahim

► **To cite this version:**

Loann Brahim. Transport du rayonnement cosmique dans le milieu interstellaire faiblement ionisé. Astrophysique [astro-ph]. Université Montpellier, 2020. Français. NNT : 2020MONT048 . tel-03172281

**HAL Id: tel-03172281**

**<https://theses.hal.science/tel-03172281v1>**

Submitted on 17 Mar 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR  
DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER**

**En Astrophysique**

**École doctorale : Information, Structures, Systèmes**

**Unité de recherche Laboratoire Univers et Particules de Montpellier**

**Transport du rayonnement cosmique dans le milieu  
interstellaire faiblement ionisé**

**Présentée par Loann Brahim  
Le 3 Novembre 2020 à Montpellier**

**Sous la direction de Alexandre Marcowith**

**Devant le jury composé de**

<b>Dr. Fabien Casse, Professeur, APC, Université Paris Diderot</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Dr. Benoit Commerçon, Chargé de recherche, CRAL, Université de Lyon</b>	<b>Invité</b>
<b>Dr. Yohan Dubois, Chargé de recherche, IAP, Paris Sorbonne Université</b>	<b>Invité</b>
<b>Dr. Patrick Hennebelle, Directeur de recherche, CEA, Saclay</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Dr. Alexandre Marcowith, Directeur de recherche, LUPM, Université de Montpellier</b>	<b>Directeur de thèse</b>
<b>Dr. Eric Nuss, Professeur, LUPM, Université de Montpellier</b>	<b>Président</b>
<b>Dr. Illya Plotnikov, Chargé de recherche, IRAP, Toulouse</b>	<b>Examineur</b>



**UNIVERSITÉ  
DE MONTPELLIER**



*A mon grand père*



# Avant-Propos et Remerciements

Au-delà d'un travail de recherche sur une thématique complexe et encore peu maîtrisée de la discipline Astrophysique, cette thèse représente avant tout un effort d'introspection et une volonté de s'approcher un peu plus encore des fondements de la pensée humaine. Parce qu'une théorie n'existe que si elle est créée et parce qu'elle n'est valide dans un cadre, qui n'est défini que par les limites de l'imagination et, dans de rares cas, de l'expérience. Cette thèse, comme toutes les autres, est avant tout un effort de philosophie. Ce travail n'a en aucun cas pour but d'énoncer des principes considérés comme vrais, ni même de mentorer le lecteur à la recherche de la vérité, mais plutôt de présenter une série de raisonnements originaux pour comprendre, poser, modéliser, et résoudre avec humilité et retenue un problème d'Astrophysique.

Le lecteur consciencieux ne se souciera pas tant de la validité/véracité des modèles présentés, que des méthodes, des idées et autres schémas de pensée nouveaux, qui lui seront présentés et qui contribueront à élargir sa conscience, nécessaire à l'appréhension de notre Univers. Ainsi chaque chapitre, chaque section et chaque paragraphe de ce travail doit être lu en prenant soin de se demander quels sont les raisonnements qui ont amené à ces résultats, dans quelle mesure ces derniers sont valables, comment aurait-il été possible d'imaginer les choses autrement. Alors, et seulement alors, ce document remplira son rôle.

Loin d'être l'oeuvre d'une seule personne, ce travail est la contribution d'un grand nombre, sans qui rien de tout cela n'aurait été possible. Ainsi je tiens à remercier profondément l'ensemble des personnes qui ont participé à cette aventure.

Les membres de mon laboratoire d'accueil (LUPM) pour le cadre enrichissant scientifiquement et humainement. Pour la disponibilité sans faille des équipes technique et administrative lorsque le besoin s'est fait sentir. Pour la qualité des échanges scientifiques avec les membres de l'équipe Expériences et Modélisation en Astroparticules, équipe dont j'ai eu l'honneur de faire partie pendant trois ans. Enfin pour le soutien et les interactions que j'ai eues avec bon nombre d'entre vous, chercheurs, doctorants, enseignants, post-doctorants et stagiaires, vous vous reconnaitrez ... .

Mes collaborateurs, dans tous les domaines, pour la qualité des échanges et la quantité de choses que vous m'avez apprises, pour l'accomplissement de projets dont je partage, avec vous, une certaine fierté. Mais encore et surtout pour votre accessibilité et votre humanité.

Alexandre, mon directeur de thèse. Parce qu'au-delà d'un mentor d'un professionnalisme et d'une qualité irréprochables, tu es une personne d'une très grande valeur. Travailler à tes côtés a été pour moi un grand honneur, un plaisir, et une expérience extrêmement enrichissante.

Mes professeur.e.s, qui depuis ma plus tendre enfance, se sont succédés les uns après les autres, pour me fournir un enseignement de la meilleure des qualités. J'ai une pensée particulière pour certains d'entre eux : M. Carayol instituteur et Mme. Frontil institutrice à l'école primaire François Mitterrand (Montady), M. Brahmi professeur de physique-chimie au collège Sainte-Madeleine (Béziers) qui ont vu et su révéler mon amour de la connaissance et ma volonté de comprendre le monde qui nous entoure. Ce travail est aussi le leur.

Mon père, ma mère, mon frère. Vous m'avez insufflé la vie, un système de valeur, dans un environnement sécurisant mais stimulant. Je n'ai pas les mots pour vous témoigner ma reconnaissance... ma réussite est votre. Ce travail est le votre.

Mon entourage. Mes deuxièmes familles. Mes ami.e.s. Votre bienveillance, votre soutien, le plaisir de partager les moments de bonheur de la vie avec vous. Votre contribution est plus importante que vous ne le pensez.

Ma compagne. Parce que tu as été en première ligne dans cette aventure. Tu as connu et vécu, plus que quiconque, ces moments de souffrance, de stress, de joie et de victoires. Tu as su composer avec. Tu m'a soutenu admirablement.

Enfin vient le temps de laisser le lecteur s'adonner à la lecture de ce travail, d'en tirer ses propres conclusions, et de construire sa propre vision du monde. Bonne lecture.

Il n'y a presque rien qui n'ait été dit par l'un et dont le contraire n'ait été affirmé par quelque autre. Et il ne serait d'aucun profit de compter les voix, pour suivre l'opinion qui a le plus de répondants : car lorsqu'il s'agit d'une question difficile, il est plus vraisemblable qu'il en soit trouvé peu, et non beaucoup, pour découvrir la vérité à son sujet. Mais quand bien même ils seraient tous d'accord, leur enseignement ne serait pas encore suffisant : car jamais, par exemple, nous ne deviendrons mathématiciens, même en connaissant par coeur toutes les démonstrations des autres, si notre esprit n'est pas en même temps capable de résoudre n'importe quel problème ; et nous ne deviendrons jamais philosophes, si nous avons lu tous les raisonnements de Platon et d'Aristote, et que nous sommes incapables de porter un jugement assuré sur les sujets qu'on nous propose; dans ce cas, en effet, ce ne sont point des sciences que nous aurons apprises, semble-t-il, mais de l'histoire.

---

*Règles pour la direction de l'esprit, III*  
*René Descartes (1596-1650)*





# Table des matières

<b>Avant-Propos et Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>Liste des notations utilisées</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Eléments de théorie</b>	<b>21</b>
<b>2 Echappement et diffusion des RCs dans le MIS</b>	<b>89</b>
<b>3 Propagation des RCs dans le MIS turbulent</b>	<b>167</b>
<b>Conclusion</b>	<b>217</b>
<b>A Annexes</b>	<b>227</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>252</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>253</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>254</b>
<b>Publications</b>	<b>279</b>
<b>Table des matières</b>	<b>346</b>



# Liste des notations utilisées

## Acronymes

---

RC(s)	Rayonnement cosmique (Rayons cosmiques)
HD	HydroDynamique
MHD	MagnétoHydroDynamique
SN(s)	Supernova (Supernovae)
SNR(s)	Supernova Remnant - Reste(s) de Supernova
MIS	Milieu InterStellaire
CSM	Cirum-Source interstellar Medium - Milieu interstellaire Circum-Source
MC	Molecular Cloud - Nuage Moléculaire
HIM	Hot Ionized Medium - Milieu Chaud Ionisé
WIM	Warm Ionized Medium - Milieu Tiède Ionisé
HII	région HII
WNM	Warm Neutral Medium - Milieu Neutre Tiède
CNM	Cold Neutral Medium - Milieu Froid Neutre
DiM	Diffuse Molecular medium - milieu Moléculaire Diffus
DeM	Dense Molecular medium - milieu Moléculaire Dense
DeC	Dense Cores - Coeurs Denses
EM	Electromagnétique (champ)
K41	Kolmogorov (1941) [123]
KI-IK	Kraichnan [124] & Iroshnikov [112]
GS95	Goldreich & Sridhar (1995) [215] [87]
LV99	Lazarian & Vishniac (1999) [139]
TTD	Transit Time Damping - Amortissement par Temps de Transit
FG04	Farmer & Goldreich (2004) [68]
L16	Lazarian (2016) [137]
DSA	Diffusive Shock Acceleration - Accélération Diffusive par onde de Choc
CRC	Cosmic Ray Cloud model - modèle de Nuage de Rayons Cosmiques
NLLD	Non Linear Landau Damping - Amortissement de Landau Non Linéaire
IN	Ion-Neutre

QLT	Quasi-Linear Theory - Théorie Quasi-Linéaire (du transport des RCs)
CR SPECTRA	CRs Self Propagation Escaping and Confinement TRAnsport code
ST	Sedov Taylor
PDS	Pressure Driven Snowplow
MCS	Momentum Conserving Snowplow
MPI	Message Passing Interface
DEC	Dark Energy Center
AMR	Adaptative Mesh Refinement - Grille de Calcul Adaptative
TF	Turbulence Forcing module - module de Forçage Turbulent
CST	CRs Self-generated Turbulence module
ST	STreaming module

---

## Constantes et Notations

$c = 2.99792458 \times 10^{10}$ cm/s	Vitesse de la lumière dans le vide
$yr = 3.15576 \times 10^7$ s	Durée d'une année en secondes
$pc = 3.086 \times 10^{18}$ cm	Un parsec en centimètres
$m_p = 1.6726219 \times 10^{-24}$ g	Masse du proton en grammes
$m_e = 9.10938 \times 10^{-28}$ g	Masse de l'électron en grammes
$m_n = 1.674920 \times 10^{-24}$ g	Masse du neutron en grammes
$e = 4.80320425 \times 10^{-10}$ statcoul	Charge de l'électron en statcoulomb
$k_B = 1.3807 \times 10^{-16}$ erg/K	Constante de Boltzmann

---

# Introduction

## Contexte historique

Au XX<sup>ème</sup> siècle, Henri Becquerel notait une décharge progressive de leurs instruments de mesure qui n'avait rien à voir avec les expériences qu'ils réalisaient. Il en conclut à l'existence d'une radioactivité naturelle provenant du sol. Cependant, cette hypothèse ne tint pas longtemps puisque des mesures de cette radioactivité furent réalisées au dessus de la mer. Alors que l'eau est censée jouer le rôle d'un bouclier, des taux de radiation notables furent mesurés. En 1909, Théodor Wolf développa un électromètre permettant de mesurer le taux d'ionisation d'un gaz confiné à l'intérieur d'un contenant hermétiquement scellé. Il l'utilisa pour mesurer les taux de radiation en bas et au sommet de la tour Eiffel et observa que ce taux est plus fort au sol qu'en altitude. Il en conclut que l'atmosphère joue le rôle d'absorbant de cette mystérieuse radiation si celle-ci est produite au sol. Sa conclusion ne fut pas totalement acceptée de la communauté scientifique. En 1911 Domenico Pacini mesura les variations du taux d'ionisation au dessus et à 3 mètres sous la surface d'un lac, et de la mer et conclut de la décroissance de la radioactivité sous l'eau qu'une partie de l'ionisation mesurée devait provenir d'autres sources que la radioactivité naturelle de la Terre [168].

En 1912, Victor Hess embarqua trois versions améliorées de l'électromètre de Wolf accrochés à un ballon sonde et ce à une altitude de 5300 mètres. Il observa que le taux d'ionisation se met à augmenter à partir de 1 km d'altitude environ. Afin d'exclure le Soleil comme source de cette mystérieuse radiation, Victor Hess fit décoller son ballon pendant une éclipse partielle de Soleil et montra l'invariance de ces observations. Il en conclut que les résultats des observations peuvent s'expliquer par l'hypothèse qu'une radiation d'une grande puissance pénètre dans notre atmosphère depuis l'espace [102]. Ses résultats furent confirmés par Werner Kolhörster en 1914 qui observa également des taux d'ionisation croissants jusqu'à 9 km d'altitude.

En 1925, Robert Millikan fut le premier à attribuer le terme de "rayon cosmique" à cette mystérieuse radiation pénétrante. Il effectua des mesures d'ionisation liées au

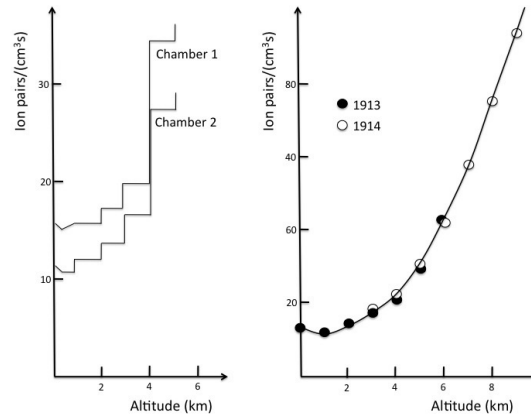


Figure 1: Augmentation du taux d'ionisation avec l'altitude tel que mesurés par Hess en 1912 (à gauche) [103] et par Kolhörster (à droite) [236]. Figure disponible sur Wikipedia produite par Alessandro De Angelis : <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HessKol.jpg>

rayonnement cosmique depuis les profondeurs de la mer jusqu'aux hautes altitudes et ce en différents points de la Terre et suggéra que le rayonnement cosmique est composé de rayons gamma. Compton proposa plutôt que ce rayonnement soit composé de particules chargées. Jacob Clay mis en évidence en 1927 le fait que le rayonnement cosmique est défléchi par le champ géomagnétique terrestre est qu'il est nécessairement composé de particules chargées. Ce résultat fut appuyé par les travaux de Bruno Rossi qui prédit en 1930 une différence d'intensité entre rayonnement cosmique qui arrive de l'est et de l'ouest et qui dépend de la charge des particules primaires [187]. Un certain nombre d'expériences montrent que l'intensité incidente est supérieure lorsque la radiation provient de l'ouest, ce qui prouve que la charge du rayonnement cosmique est essentiellement positive. Les travaux dans les deux décennies qui suivent montrent que le rayonnement cosmique primaire est essentiellement composé de protons (89 %), de particules alpha (10 %) et de noyaux plus lourds (1 %) tandis que la radiation secondaire est essentiellement composée d'électrons, de photons et de muons.

En 1939, Pierre Auger mit en évidence l'existence de grandes gerbes de rayons cosmiques dans l'atmosphère terrestre [9]. Il observe des coïncidences entre des compteurs de Geiger-Muller placés à des distances de plusieurs mètres les uns des autres et montre qu'elles sont le résultat d'une cascade électromagnétique d'électrons incident d'énergie supérieure à 10 TeV qui atteignent l'atmosphère. De futures expériences montrent que les gerbes de rayons cosmiques peuvent s'étendre sur plusieurs  $\text{km}^2$  au sol. Une gerbe de rayon cosmique est un processus dans lequel un rayon cosmique incident interagit avec le gaz atmosphérique et entraîne une réaction en chaîne d'interactions entre les particules ou photons secondaires produits avec des éléments du gaz atmosphérique. Il en résulte que la gerbe possède une forme conique dont l'ouverture est dépendante des propriétés

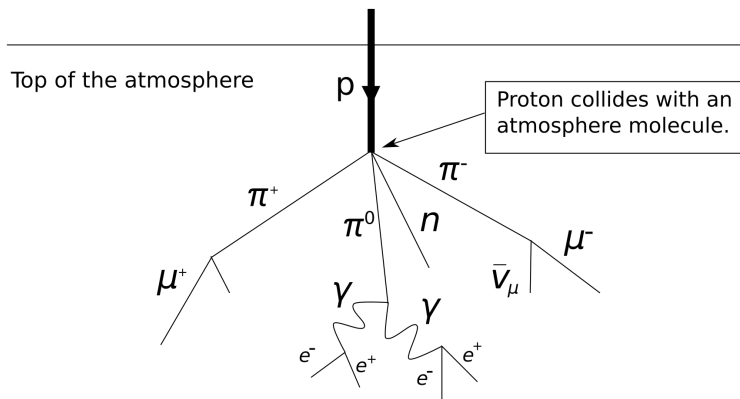


Figure 2: Représentation schématique d'une gerbe atmosphérique décrivant une cascade engendrée par l'interaction d'un proton de haute énergie avec l'atmosphère terrestre. Figure disponible sur Wikipedia à l'adresse : [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atmospheric\\_Collision.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atmospheric_Collision.svg). Auteur inconnu.

de l'ensemble des particules produites et qui génère un rayonnement de fluorescence (aussi appelé Cerenkov) conséquence du fait que les rayons cosmiques ont des vitesses supraluminiques dans l'atmosphère. De nombreux travaux discutent des cascades de particules secondaires et des caractéristiques géométriques et énergétiques de ces gerbes et permettent de donner naissances à de grandes expériences de mesure du rayonnement cosmique de haute énergie depuis la Terre.

Dans le même temps se pose la question des sources du rayonnement cosmique. Baade et Zwicky publient un papier en 1934 dans lequel ils suggèrent que le rayonnement cosmique est issu d'objets astrophysiques appelés Super-Novae [10]. Les supernovae (SNe) sont des objets transitoires extrêmement énergétiques ( $E_{SN} \sim 10^{51} \text{ erg}^1$ ) qui désignent l'explosion violente d'une étoile et donc l'ejection de gaz chaud sous pression dans le milieu interstellaire. Il existe un certain nombre de scénarios différents d'apparition d'une SN tandis que les observations montrent qu'il en explose environ 3 par siècle dans notre galaxie [227]. Au cours des décennies qui ont suivi la découverte de ce type d'objet astrophysique, les SNe (et par conséquent les SNRs, restes de SNe) se sont naturellement imposées comme les principales sources du rayonnement cosmique observé sur Terre. En 1949 Enrico Fermi [71] propose un modèle d'accélération magnétique des RCs par des nuages magnétisés tandis que Evry Schatzman (1963) [192], D.G. Wentzel (1964) [231], P.D. Hudson (1965) [110] puis Bell (1978) [15] contribuent progressivement au développement d'un mécanisme d'accélération des rayons cosmiques par les choc engendrés par les explosions de supernova. Cette théorie de l'accélération des rayons cosmique par le gaz choqué sert de base à une très grande majorité des études actuelles sur le transport du rayonnement cosmique.

<sup>1</sup> $E_{SN} \sim 10^{51} \text{ erg}$  correspond à l'énergie mécanique libérée par l'explosion de supernova.



## Etat de l'art

Aujourd'hui les études des propriétés du rayonnement cosmique se font au travers d'un spectre d'approches très différentes et font appel à de très nombreuses autres disciplines<sup>2</sup>. Le rayonnement cosmique joue un rôle dans de nombreux aspects de notre univers [91] : depuis le vivant à travers les effets d'altération de l'ADN des cellules et des mutations qu'il peut engendrer, aux aurores polaires et à son incidence sur notre atmosphère et toutes les technologies de télécommunication dont les signaux peuvent être perturbés, à la création d'éléments chimiques comme le lithium, le béryllium et le bore qui ne peuvent être produits que par processus de spallation, à l'interaction et à la génération de turbulence dans le milieu interstellaire, jusqu'aux modifications des propriétés thermodynamiques et chimiques des nuages moléculaires impactant ainsi le taux de formation d'étoile des galaxies. Le rayonnement cosmique est une composante fondamentale de notre univers et son étude est essentielle pour décrire les processus qui régissent sa dynamique. En astrophysique, discipline dédiée à l'étude des processus physiques qui régissent la dynamique de l'univers, le rayonnement cosmique joue le rôle d'acteur à travers son impact sur la dynamique de l'univers, et de témoin parce qu'il est la conséquence directe d'événements astrophysiques violents. Il est donc important d'une part d'être capable de le mesurer et de le caractériser pour mesurer et comprendre notre univers, mais il est également important d'être capable de l'inclure comme une composante indispensable des modèles théoriques en astrophysique. La discipline : "rayonnement cosmique" est le résultat d'une combinaison de travaux de recherche orientés dans la mesure et la caractérisation du rayonnement cosmique, ou dans le développement de modèles dans lequel le rayonnement cosmique est un acteur essentiel. Ce travail ne peut être fait sans une bonne connaissance du milieu dans lequel le rayonnement cosmique se propage et que l'on qualifie usuellement de milieu interstellaire (MIS).

## Le milieu interstellaire

Le milieu interstellaire est le lieu dans lequel se forment les étoiles. Il est en permanence chauffé et alimenté en énergie mécanique par ces dernières et est enrichi en éléments lourds à la mort des étoiles. Le MIS peut sembler vide au premier regard mais les astrophysiciens savent qu'il joue un rôle crucial dans la dynamique galactique ainsi que dans les processus de formation d'étoiles, la création d'éléments chimiques par spallation et dans l'accélération et le transport du rayonnement cosmique qui fait partie intégrante de cet environnement.

Le MIS est opaque dans un grand nombre de domaines spectraux, des ondes radio aux rayons gamma en passant par le domaine infrarouge. Ce milieu n'est pas homogène

---

<sup>2</sup>Théories mathématiques du transport, simulations numériques, astrophysique (en général), dynamique des fluides magnétisés, thermodynamique, physique statistique, électronique et traitement du signal ... la liste des disciplines est non-exhaustive.

et est composé de phases diffuses et de phases denses comme les nuages moléculaires qui sont principalement composés d'hydrogène moléculaire et sont gravitationnellement liés. Les étoiles naissantes, brillantes et mourrantes émettent énormément de rayonnement ionisant créant ainsi des bulles d'hydrogène ionisé que l'on qualifie de région HII. L'ensemble des phases du MIS communiquent entre elles en permanence créant ainsi une dynamique à l'origine des courants de matière et de la turbulence [221].

Les propriétés thermiques du gaz interstellaire sont déterminées par l'équilibre entre le chauffage et le refroidissement du gaz par différents phénomènes mettant parfois en jeu le rayonnement cosmique. Dans l'état stationnaire, l'équation d'état du gaz du MIS est déterminée par deux relations : la loi des gaz parfaits et l'équilibre entre gains et pertes radiatives (Graham 1972 [90]). Ce résultat se traduit par un équilibre de pression entre les différentes phases et composantes du MIS.

Mais il n'est pas possible de comprendre la dynamique du MIS sans une connaissance profonde de la micro-physique sous-jacente. Les phénomènes de chauffage, de refroidissement des milieux, d'injection de la turbulence aux différentes échelles, d'accélération des rayons cosmiques sont autant de processus qui jouent un rôle fondamental dans les processus macro-physiques qui contribuent à la dynamique du MIS.

Le MIS se compose principalement de gaz et de poussières. Il est composé (en termes de masse) d'environ 70% d'hydrogène, de 28% d'hélium et de 2% d'éléments métalliques. La majorité du volume du MIS est occupé par du gaz fortement ionisé mais ce dernier ne représente que 25% de la masse totale du gaz du MIS. En effet, la majorité de la masse provient des régions dominées par du gaz neutre ( $H$ ) ou moléculaire ( $H_2$ ). La majorité du gaz atomique et la quasi-totalité du gaz moléculaire sont concentrés sous la forme de nuages moléculaires denses occupant  $\sim 1 - 2\%$  du volume du MIS [72].

L'une des explications principales à l'opacité du MIS est la présence de grains notamment dans les phases denses [197]. Ils sont principalement composés de graphites et de silicates ( $C$ ,  $Mg$ ,  $Si$  et  $Fe$ ). La taille et la composition chimique des grains s'observe principalement à travers la forme spectrale de la courbe d'extinction des phases denses du MIS. En première approximation, les grains ne peuvent absorber que les photons dont la longueur d'onde est inférieure à leur taille physique. Les observations ont montré que la plupart de l'absorption se fait dans l'ultraviolet tandis que l'absorption est plus faible dans le visible et encore plus faible dans l'infrarouge. La conséquence immédiate est qu'il existe beaucoup plus de petits grains que de gros grains. Mathis et al. (1977) [151] ont pu, à partir de cet argument, déterminer une loi empirique de la distribution de taille de grains sphériques de silicates. Ils ont trouvé

$$N(a) da \propto a^{-3.5} da \quad (1)$$

où  $a_{\min} \approx 50$  nm et  $a_{\max} \approx 0.25$   $\mu$ m. La masse totale de poussière ( $\sim 1\%$   $M_{\text{ISM}}$ ) est principalement contenue par les gros grains tandis que la section efficace de collision est déterminée par les petits grains. Les grains suivent une distribution de charge comprise entre 0 et  $-1$  fois la charge absolue de l'électron ce qui signifie qu'ils se comportent comme des dipôles électriques et polarisent la lumière. Ils sont également très sensi-

bles à la turbulence magnétique et peuvent subir des phénomènes d'accélération par gyrorésonance. Les récentes observations dans l'infrarouge ont montré que deux pics d'émission lumineuse radiative à  $\sim 10 \mu\text{m}$  et  $\sim 100 \mu\text{m}$  sont dus à la distribution thermique des grains, respectivement  $\sim 20 - 30 \text{ K}$  pour les grains de grande taille (Draine & Lee 1984 [54]) et  $\sim 100 - 200 \text{ K}$  pour les grains de petite taille (Draine & Anderson 1985 [53]). La poussière est formée dans les atmosphères d'étoiles froides et est émise dans le MIS à travers les vents stellaires. Les grains sont ensuite détruits par des mécanismes d'effritement (en particulier par le rayonnement UV généré par les RCs pénétrant dans les milieux denses) et par interaction avec les chocs de supernovae (Draine 1989b [52], McKee 1989 [152], Seab 1988 [198]).

L'état chimique et thermique du gaz dans le MIS est déterminé en grande partie par les interactions entre la poussière et le gaz avec le champ de radiation interstellaire créant ainsi un équilibre thermique. Ce dernier joue un rôle extrêmement important dans les processus de photoionisation d'atomes et de photodissociation de molécules, et dans le chauffage global du gaz. Les sources principales de radiation dans le MIS sont (dans l'ordre décroissant de densité d'énergie) : La lumière bolométrique des étoiles ( $1.05 \times 10^{-12} \text{ erg cm}^{-3}$ ), l'émission radiative des poussières ( $5 \times 10^{13} \text{ erg cm}^{-3}$ ), le fond diffus cosmologique ( $4.19 \times 10^{-13} \text{ erg cm}^{-3}$ ), l'émission de rayons X des plasmas chauds du MIS ( $\sim 10^{-17} \text{ erg cm}^{-3}$ ), le rayonnement synchrotron principalement issu des chocs de supernova et des nébuleuses de vent de pulsar ( $2.7 \times 10^{-18} \text{ erg cm}^{-3}$ ) (Draine 2011 [55], Klessen & Glover 2014 [122]).

L'état chimique et thermique du MIS est communément décrit en termes de phases distinctes. Goldsmith et al. (1969) [88] proposent initialement de considérer que le gaz atomique est à l'équilibre thermique. Ils en déduisent deux solutions thermiques stables :  $T \sim 100 \text{ K}$  et  $T \sim 10^4 \text{ K}$  qui sont respectivement associés aux phases froide neutre (CNM) et tiède neutre (WNM) du MIS. McKee & Ostriker (1977) [153] étendent ce modèle en considérant également les bulles de gaz très chaud ( $\sim 10^6 \text{ K}$ ) créées par les explosions de supernovæ. Ce milieu totalement ionisé et dont le facteur de remplissage du volume est très important est qualifié de milieu chaud ionisé (HIM). La phase tiède ionisée (WIM) a été ajoutée pour considérer l'impact du rayonnement synchrotron galactique (Hoyle & Ellis 1963 [109]), la dispersion des signaux radio pulsant (Reynolds 1989 [181], Gaensler et al. 2008 [83]) et les raies d'émission faibles produites par certains métaux dans un milieu caractérisé par une température similaire à celle de la phase tiède neutre. Les phases moléculaires se distinguent de la phase neutre froide par la densité de matière totale. Les nuages moléculaires ont une forme très distincte relativement au milieu environnant tandis que la phase froide se situe autour des nuages moléculaires (Blitz et al. 2007 [18]). Ces derniers sont répartis dans toute la galaxie sur une couche de  $\sim 100 \text{ pc}$  d'épaisseur coïncidant avec le plan galactique. L'étude observationnelle des nuages moléculaires passe principalement par l'observation de la transition rotationnelle de la molécule  $CO$  ( $J = 1 - 0$ ) à  $2.6 \text{ mm}$ . On distingue différentes sous-catégories de nuages moléculaires. Les nuages moléculaires diffus (DiM) sont caractérisés par une extension spatiale de l'ordre de  $1 - 10 \text{ pc}$  et une très faible extinction. Les nuages moléculaires

denses (DeM) sont généralement faiblement étendus ( $\sim 0.1 - 0.3$  pc) et très opaques. Les coeurs denses (DeC) sont plus imposant que les nuages moléculaires denses ( $\sim 1 - 3$  pc) et beaucoup plus opaques.

L'origine physique de la turbulence dans le MIS est encore très mal définie. Cependant nous savons que les supernovæ jouent un rôle fondamental dans cette dynamique (Falceta-Gonçalves et al. 2014 [67]). D'autres modèles à grande échelle comme la turbulence générée par la rotation différentielle de la galaxie ou l'instabilité magnéto-rotationnelle ont été proposés (Fleck 1981 [74], Kim & Ostriker 2002 [120]). Mais la turbulence générée reflète également les propriétés locales du milieu (Leao et al. 2009 [140]) qui dépendent localement de la turbulence à petite échelle. Il faut donc également tenir compte des mécanismes d'injection de la turbulence locale. Les rayons cosmiques de faible énergie ( $\sim 100$  GeV) constituent un très bon candidat [101].

La turbulence à grande échelle est injectée par l'ensemble des mécanismes liés à la dynamique générale de la galaxie et à celle des étoiles. En premier lieu il convient de discuter de l'origine de la turbulence injectée par la rotation différentielle de la galaxie. Ce processus est très similaire à celui des disques d'accrétion proto-stellaires. Les éléments de fluide perdant du moment angulaire bougent radialement vers le centre galactique tandis que ceux qui gagnent du moment bougent vers le bord externe. Cependant la turbulence n'est pas engendrée par la viscosité du fluide mais plutôt par les collisions entre les structures qui composent les bras galactiques (Roberts 1969 [183]). L'instabilité magnéto-rotationnelle est directement liée au phénomène d'effondrement gravitationnel des nuages moléculaires et à la formation d'étoiles. Cette dernière est créée par l'évolution décroissante de la vitesse du fluide magnétisé en fonction de la distance au centre. Bien que ce modèle soit applicable à certaines galaxies (Sellwood & Balbus 1999 [200]), son application à la voie lactée reste une question ouverte.

Les supernovæ sont au cœur de la plupart des modèles de turbulence dans le MIS. En effet, elles éjectent une grande quantité d'énergie ( $\sim 10^{51}$  erg), il y en a plusieurs par siècle. De manière plus générale, les étoiles massives sont aussi une source de turbulence dans le MIS. Cela peut être à travers les vents stellaires ou encore par l'émission de rayonnement ionisant. Enfin, l'ensemble des objets émettant de la matière sous forme de jets dans le MIS constituent une source de turbulence à des échelles intermédiaires ( $\sim$  pc).

Bien que la turbulence aux petites échelles trouve une partie de son origine dans les cascades turbulentes aux grandes échelles, il est nécessaire de tenir compte des phénomènes externes de production de la turbulence aux petites échelles. En particulier, la turbulence aux grandes échelles a pour effet de permettre la diffusion des rayons cosmiques au GeV qui agissent rétroactivement sur la turbulence par différentes instabilités. En particulier l'instabilité dite de streaming qui se caractérise par une anisotropie de la fonction de distribution des rayons cosmiques et se relaxe en générant de la turbulence aux petites échelles qui peut interagir avec la turbulence à grande échelle (Yan & Lazarian 2011 [239]).

## Le rayonnement cosmique

On qualifie de rayonnement cosmique (RC) le flux de particules énergétiques, chargées pour la plupart, se déplaçant dans le MIS. Ceux-ci sont composés à  $\sim 89\%$  de protons,  $\sim 9\%$  de noyaux d'hélium et  $\sim 2\%$  d'autres particules : antiprotons, électrons, positrons, rayons gamma, neutrinos, neutrons et métaux. La densité d'énergie moyenne du rayonnement cosmique dans le MIS est d'environ  $1 \text{ eV/cm}^3$  tandis que le spectre d'énergie de ces particules s'étend d'environ  $3 \text{ MeV}^3$  à des énergies de l'ordre du PeV pour des RCs galactiques. Tandis que les particules de très haute énergie semblent principalement accélérées par les SNRs, la coupure à basse énergie (à  $\sim 100 \text{ MeV}$ ) est liée à la déflexion du rayonnement cosmique galactique par l'héliosphère.

La figure (3) présente le spectre d'énergie du fond diffus de rayonnement cosmique mesuré à l'intérieur de l'héliosphère. Dans la bande  $10 - 10^6 \text{ GeV}$  la densité de RCs évolue en  $dN/dE \propto E^{-4.7}$  et le rayonnement cosmique est d'origine galactique. Au delà du genou, dans la bande  $10^6 - 10^{11} \text{ GeV}$  le spectre de RCs évolue en  $dN/dE \propto E^{-5}$ . L'origine des RCs au delà du genou est encore mal connue, les recherches semblent indiquer qu'ils sont essentiellement d'origine extra galactique et pour la composante de plus basse énergie, le modèle standard situe les sources comme étant plutôt les SNRs [65] [165]. La distribution spectrale du rayonnement cosmique ne peut être considérée comme le résultat des propriétés moyennes du rayonnement cosmique galactique car l'essentiel des événements incidents sont issus du milieu interstellaire local.

Le fond diffus de rayons cosmique est caractérisé par une anisotropie à grande échelle de sa distribution dans l'espace d'amplitude  $10^{-3} - 10^{-4}$  par rapport au flux isotrope. Cette anisotropie est également effective à très haute énergie ( $E > 100 \text{ GeV}$ ) et se différencie de l'anisotropie liée à la déflexion géomagnétique terrestre car indépendante de la charge électrique des particules incidentes. La figure (4) représente l'évolution de l'intensité relative du rayonnement cosmique en fonction de l'ascension droite. Au premier ordre, on observe deux pôles une sur-intensité en  $RA = \sim 75$  degrés et une sous-intensité en  $RA = \sim 200$  degrés c'est à dire dans la direction opposée. La raison de cette anisotropie du rayonnement est encore floue mais plusieurs hypothèses sont avancées. La première hypothèse est tout simplement que la distribution des sources du rayonnement cosmique dans la galaxie est inégalement répartie, ou encore que les champs magnétiques galactiques jouent un rôle important. L'héliosphère peut également être responsable d'un tel effet. Le cas échéant, il est attendu une évolution temporelle de cet effet liée au cycle solaire. Compton et Getting (1935) [40] ont prédit une anisotropie dipolaire liée au mouvement de l'observateur par rapport au plasma que constitue le rayonnement cosmique et qui ne suit pas forcément les mouvements de rotation de la galaxie. A cause de son origine purement cinématique, cet effet est indépendant de l'énergie du

---

<sup>3</sup>Il est important de faire la distinction entre la coupure à basse énergie du spectre des RCs réelle (à  $3 \text{ MeV}$ ) et la coupure à  $\sim 100 \text{ MeV}$  qui est conséquence de la modulation solaire. La coupure à basse énergie, conséquence de la modulation solaire, ne permet pas de mesures directe du rayonnement cosmique de très basse énergie dans le MIS local. Néanmoins des études concernant l'impact de la modulation solaire sur le spectre du rayonnement cosmique ont pu être menées en utilisant en particulier les données de la sonde Voyager 1 qui semble être sortie du bouclier magnétique solaire [41].

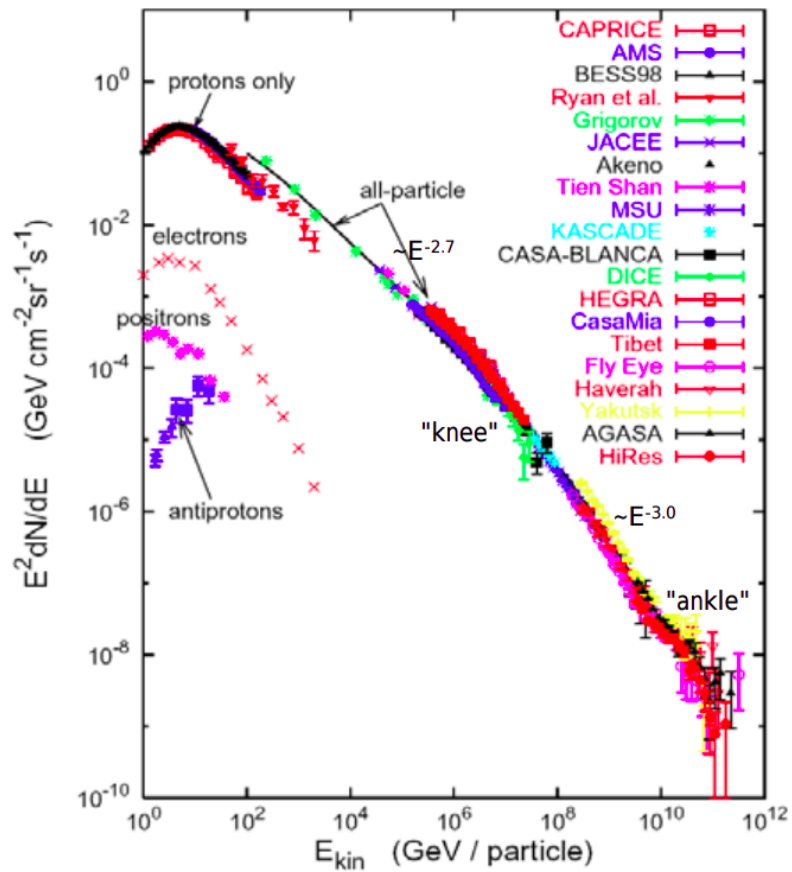


Figure 3: Flux en énergie du fond diffus de rayonnement cosmique dans le milieu inter-stellaire local reconstitué par l'ensemble des expériences citées en légende. Cette figure est tirée de Diehl (2009) [49].

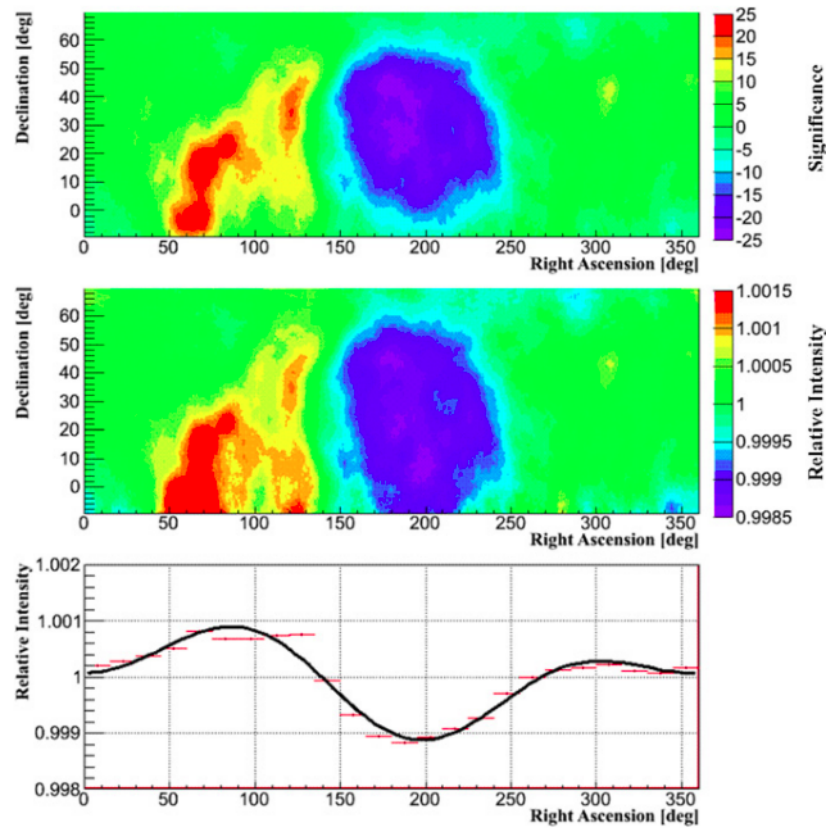


Figure 4: La figure du haut représente une carte de significativité de l'intensité relative du rayonnement cosmique dans le système de coordonnées équatoriales. La figure du milieu représente la carte d'intensité relative du rayonnement cosmique tandis que la figure du bas représente l'intensité relative du rayonnement cosmique en fonction de l'ascension droite intégrée le long de la déclinaison. Cette figure est tirée de [11].

rayonnement cosmique. De récents travaux discutent de modèles d'anisotropies locales du rayonnement cosmique [241] qui peuvent éventuellement liées à la présence de sources proches [190] [76].

### Mesure du rayonnement cosmique

Il existe deux méthodes principales de mesure du rayonnement cosmique. La détection directe des rayons cosmiques primaires qui se fait essentiellement depuis l'espace et la détection indirecte de particules secondaires c'est à dire des gerbes atmosphériques résultant de l'interaction d'une particule primaire incidente avec l'atmosphère.

Les expériences spatiales comme PAMELA (Payload for Antimatter Matter Exploitation and Light-nuclei Astrophysics) [174], AMS-02 (Alpha Magnetic Spectrometer) [4], ISS-CREAM (International Space Station Cosmic Rays Energetics and Mass) [201] ou

le Fermi LAT (Large Area Telescope) [3] détectent le rayonnement cosmique allant d'énergie de l'ordre du MeV à quelques centaines de GeV. La discretisation des particules incidentes ainsi que leur direction d'arrivée est déterminée à l'aide d'un détecteur à scintillation tandis que l'énergie de la particule est généralement mesurée à l'aide d'un calorimètre.

Les expériences basées au sol comme H.E.S.S (High Energy Stereoscopic System) [17], MAGIC (Major Atmospheric Gamma Imaging Cherenkov Telescopes) [42] ou encore l'observatoire Pierre Auger détectent le rayonnement cosmique allant d'énergies de quelques centaines de GeV à plusieurs centaines de TeV. La discretisation, l'énergie et la direction d'incidence des particules sont mesurées à partir de l'étude stéréoscopique du rayonnement Cherenkov issu des gerbes atmosphériques générées par l'interaction des particules primaires et de l'atmosphère.

### Transport du rayonnement cosmique

L'essentiel des RCs sont sensibles à l'interaction électromagnétique. Leur trajectoire au sein de la galaxie est donc fortement dépendante de la distribution du champ magnétique galactique. En effet, en première approximation les lignes de champ magnétique agissent comme un guide pour les particules. La force de Lorentz implique qu'une particule chargée soumise à un champ magnétique rectiligne uniforme suit un mouvement hélicoïdal caractérisé par une vitesse perpendiculaire à la ligne de champ notée  $v_{\perp}$  et une vitesse parallèle notée  $v_{\parallel}$ . Le point coïncidant avec la ligne de champ magnétique dans le référentiel à la vitesse  $v_{\text{ref}} = v_{\parallel}$  autour duquel orbite la particule chargée est qualifié de centre guide. Dans le même référentiel, le rayon de l'orbite est qualifié de rayon de gyration et est défini par  $r_g \approx \gamma\beta mc/ZeB$ ,  $Z \geq 1$  correspond à la valeur absolue de la charge de la particule normalisée par la charge de l'électron,  $\beta = v/c$  est le rapport entre la vitesse de la particule  $v$  et la célérité de la lumière dans le vide  $c$  et  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . La vitesse parallèle à la ligne de champ est définie par  $v_{\parallel} = v\mu$  où  $\mu = \cos(\alpha)$  et  $\alpha = (\mathbf{v}, \mathbf{B})$  est l'angle d'attaque de la particule chargée. Les paramètres de transport des RCs sont dépendants de la direction et l'intensité des lignes de champ magnétique du milieu interstellaire.

Le champ magnétique galactique est turbulent et par conséquent, le rayonnement cosmique suit une marche aléatoire qu'il convient de caractériser à partir de grandeurs statistiques. En particulier, aux échelles galactiques il est possible de considérer les particules supra-thermiques comme un fluide. Il est donc usuel de résoudre une équation de transport fluide pour le rayonnement cosmique dont les propriétés de diffusion, de perte et de gain sont essentiellement dépendantes des propriétés turbulentes mais aussi thermodynamiques et chimiques du milieu interstellaire.

La mesure des rapports secondaires sur primaires comme par exemple Bore/Carbone (figure 5) permet par l'intermédiaire d'un modèle simple de transport global du rayonnement cosmique dans la galaxie d'obtenir une estimation moyenne du coefficient de diffusion des RCs [51]. Ce coefficient de diffusion est donné par  $D_0 = 10^{28-29}(E/10 \text{ GeV})^{\delta} \text{ cm}^2/\text{s}$  où  $\delta \approx 0.4 - 0.6$ .

Néanmoins, les propriétés de transport du rayonnement cosmique ne peuvent être



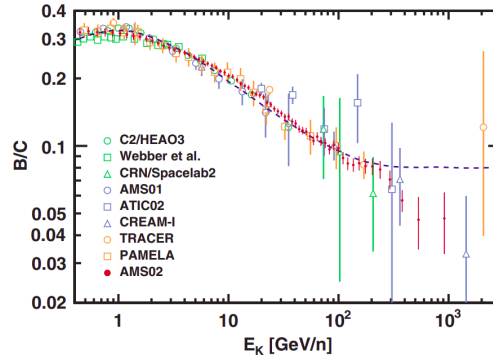


Figure 5: Rapport Bore/Carbone en fonction de l'énergie cinétique par nucléon  $E_K$ . Figure tirée de [5].

inférées qu'à partir d'une connaissance fine du milieu interstellaire. La turbulence dans le MIS est un sujet dont l'importance est croissante depuis que son impact sur l'astrophysique galactique et extragalactique a été montré. Il n'existe cependant pas de théorie de la turbulence. De nombreuses phénoménologies de la turbulence dans les plasmas ont été développées depuis les années '60 et accompagnent le développement de théories du transport en milieu turbulent [57] [2]. Les théories de la turbulence MHD compressible et incompressible ont été proposées récemment (Goldreich & Sridhar 1995 [215] [87], Lithwick & Goldreich 2001 [143], Cho & Lazarian 2002 [33], 2003 [34]) et accompagnent les modèles de transport des RCs qui tiennent compte des échanges d'énergies entre les particules et les perturbations MHD du plasma (Skilling 1975 a[206], b[207], c[208]).

### Sources du rayonnement cosmique

Le rayonnement cosmique peut être accéléré par une grande variété de sources : SNe, SNRs<sup>4</sup>, noyaux actifs de galaxie, quasars,  $\gamma$ -ray burst, vents d'étoiles massives ... la liste des accélérateurs est non-exhaustive. Néanmoins, bien qu'elles ne constituent par la seule source, les SNe sont considérées comme les principales progénitrices du rayonnement cosmique dans la galaxie [159]. La connexion entre les RCs et les SNe a été proposée par Baade & Zwicky (1934) [10] et se base sur un argument énergétique. La puissance nécessaire pour maintenir le flux de RCs au niveau observé en compensant les pertes liées à l'échappement des RCs de la galaxie est de l'ordre de  $\sim 10^{40}$  erg/s. La densité d'énergie des RCs galactique peut s'expliquer si l'on considère qu'une fraction située entre 3 et 30 % de l'énergie mécanique totale des SNe est transférée aux particules non-thermiques.

Dans les années '70, un mécanisme de transfert d'énergie des SNe aux RCs a été proposé. Ce mécanisme consiste en l'accélération stochastique des RCs au niveau du choc des SNRs. Cette idée a été confirmée par de nombreuses observations en radio, en X et

<sup>4</sup>Les supernovae (SNe) et les restes de supernovae (SNRs) sont deux types de sources de RCs galactiques différentes

en rayons gamma et ont permis de raffiner ce mécanisme d'accélération. Ce mécanisme est appelé accélération de Fermi du premier ordre, ou encore accélération par un choc diffusif (DSA : Diffusive Shock Acceleration) [149].

Il est possible de schématiser l'onde de choc d'un reste de supernova par une discontinuité des propriétés du gaz entre l'aval du choc, à l'intérieur du reste, et l'amont du choc, dans le milieu interstellaire [95]. En amont du choc le gaz est caractérisé par les paramètres de vitesse, densité et température  $(u_1, \rho_1, T_1)$  respectivement tandis qu'en aval du choc les paramètres du gaz sont  $(u_2, \rho_2, T_2)$  avec  $u_1 > u_2$ ,  $\rho_1 < \rho_2$  et  $T_1 < T_2$ . Le choc est généralement caractérisé par son rapport de compression  $r = u_1/u_2 = \rho_2/\rho_1$ . Les particules chargées se déplacent de manière stochastique dans le milieu et peuvent gagner ou perdre de l'énergie au passage de la discontinuité. On peut montrer que la valeur moyenne de gain d'énergie au passage de la discontinuité est donnée par

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \approx \frac{4}{3}(u_1 - u_2)$$

tandis que la probabilité qu'une particule qui a traversé la discontinuité y retourne est de

$$P_{\text{cross}} \approx 1 - 4u_2/v.$$

où  $v$  est la vitesse de la particule. Le mécanisme d'accélération de Fermi stipule que parmi les particules qui ont traversé le choc, un certain nombre y retournent un certain nombre de fois et gagnent de l'énergie à chaque traversée de la discontinuité. On peut alors montrer pour un ensemble de particules que la distribution spectrale du rayonnement cosmique ayant traversé  $K$  fois la discontinuité  $N_K$ , accéléré au niveau du choc est donné par

$$N(> E_K) = N_0 \left( \frac{E_K}{E_0} \right)^{-s}$$

où  $s = 3/(r - 1)$ .  $N_0$  correspond au nombre initial de particules,  $s$  est l'indice spectral de la distribution en énergie du rayonnement cosmique. On montre que dans le cas de choc forts avec un rapport de compression  $r = 4$  le spectre d'injection du rayonnement cosmique dépend de l'énergie en  $E^{-2}$ .

Ce mécanisme ne permet cependant pas de décrire précisément le processus d'accélération des RCs par les SNRs. En effet le problème tel que posé est stationnaire et n'impose aucune coupure à haute énergie de la distribution spectrale du rayonnement cosmique. Ce mécanisme ne discute pas des processus qui sont à l'origine de allers-retours dans le choc des RCs. Les RCs sont considérés comme des particules test, c'est à dire qu'elles n'influencent en rien les propriétés du choc. Les théories plus complètes de l'accélération du rayonnement cosmique par des SNRs incluent les interactions entre les particules et les champs magnétiques perturbés ce qui permet de fixer une énergie maximale  $E_M$  d'accélération du rayonnement cosmique, les champs magnétiques amplifiés réagissent

également à la présence du rayonnement cosmique accéléré et à l'évolution temporelle des propriétés du choc [172] [178].

L'accélération du rayonnement cosmique par les restes de supernova reste néanmoins une question ouverte, non-seulement parce que les modèles d'accélération des particules sont incomplets, mais également parce qu'il y a un débat sur la nature leptonique ou hadronique du rayonnement cosmique à l'origine de l'illumination gamma des environnements des SNRs.

### Effets du rayonnement cosmique

Le rayonnement cosmique joue un rôle important dans la dynamique de la galaxie. En effet il est responsable de la production par spallation des éléments chimiques comme le Bore, le Lithium et le Béryllium et contribue donc à l'enrichissement du milieu interstellaire en éléments chimiques [218], à travers ce même procédé le rayonnement cosmique détruit les poussières interstellaires et contribue à empêcher l'aggregation de matière pouvant entraîner la formation d'astres comme les astéroïdes et les planètes par exemple. Cependant, le phénomène de spallation n'est pas le seul procédé par lequel le rayonnement cosmique peut affecter la dynamique des grains dans le milieu interstellaire. Dans les phases denses, le rayonnement cosmique interagit avec la matière et génère un rayonnement UV qui peut affecter les grains les plus petits ( $< \mu\text{m}$ ) en modifiant leur distribution de charge électrique. Cet effet contribue également à inhiber la coagulation des grains [113].

Bien que sensible à la turbulence magnétique dans le MIS, le rayonnement cosmique peut également jouer un rôle important dans les propriétés de cette turbulence. En l'occurrence, de nombreux modèles de transport auto-régulé du rayonnement cosmique font intervenir un processus par lequel les instabilités de courant de RCs génèrent des perturbations magnétiques dans le gaz qui affectent leur propriétés de transport. La turbulence auto-générée est généralement injectée à de très petites échelles de l'ordre du rayon de Larmor des RCs ( $\sim 10^{-6}$  pc pour des particules de 1 GeV) mais le gaz interstellaire est également sensible aux variations de pression du rayonnement cosmique et peut y répondre dynamiquement. En particulier, la turbulence générée par l'instabilité de streaming permet la production de vents [86]. L'échelle de temps d'un tel processus est de l'ordre du Myr [38] et est très différente de l'échelle de temps de génération de la turbulence auto-générée qui s'opère entre quelques yr et kyr [22].

Enfin le rayonnement cosmique contribue de manière importante à l'ionisation des nuages moléculaires [170], lesquels sont le berceau de la formation des étoiles [179]. En générant du rayonnement UV et X, les RCs modifient les propriétés thermodynamiques des nuages et empêchent l'apparition de l'instabilité de Jeans et contribuent donc à la réduction du taux de formation d'étoiles à l'échelle galactique.

## Contexte de la thèse

Le travail réalisé dans cette thèse s'inscrit dans la problématique de l'injection par les SNRs et du transport du rayonnement cosmique dans le MIS. Il s'agit de comprendre comment le rayonnement cosmique est injecté par les SNRs dans le MIS en développant un modèle d'injection auto-régulée des particules qui apporte une solution à la problématique de la discontinuité des propriétés de transport des particules en aval et en amont du choc du reste qui est présente sur l'ensemble des mécanismes d'accélération des RCs basés sur le modèle DSA. D'autre part, il s'agit de comprendre quelles sont les propriétés de transport des RCs dans les environnements de SNRs, dans les nuages moléculaires, et comment ces propriétés diffèrent des paramètres de transport moyens dérivés des observations du fond diffus galactique. En dernier lieu il s'agit d'analyser de quelle manière le milieu interstellaire répond à la présence du rayonnement cosmique, qu'il soit injecté par des SNe ou simplement présent dans la turbulence interstellaire. Les différents travaux engagés sont réalisés à l'aide de deux codes numériques : le code CR SPECTRA (CR Self Propagation Escaping and Confinement Transport code) qui est un code de transport 1D semi-analytique du rayonnement cosmique qui permet de modéliser l'échappement auto-régulé d'un SNR et la propagation des particules dans un milieu interstellaire éventuellement multiphase mais stationnaire, et le code RAMSES qui est un code 3D dans lequel sont résolues les équations de la MHD ainsi qu'une équation de transport fluide des RCs dans un milieu turbulent.



# Chapitre 1

## Eléments de théorie

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Les plasmas Astrophysiques . . . . .</b>	<b>22</b>
1.1.1	Propriétés fondamentales des plasmas . . . . .	23
1.1.2	Eléments de dynamique des fluides et de théorie cinétique . . .	27
1.1.3	Ondes plasma en MHD idéale . . . . .	33
1.1.4	Ondes plasma en MHD bi-fluide dans les milieux partiellement ionisés . . . . .	38
1.1.5	Théorie cinétique des ondes plasma . . . . .	45
<b>1.2</b>	<b>Le milieu interstellaire turbulent . . . . .</b>	<b>55</b>
1.2.1	Eléments de théorie et modèles de turbulence . . . . .	56
1.2.2	Mesures de la turbulence interstellaire . . . . .	68
<b>1.3</b>	<b>Transport du rayonnement cosmique en turbulence faible . .</b>	<b>70</b>
1.3.1	Equation de Fokker-Planck en théorie quasi-linéaire . . . . .	71
1.3.2	Coefficients de diffusion quasi-linéaires . . . . .	76
1.3.3	Approximation de diffusion du rayonnement cosmique . . . . .	80
1.3.4	Turbulence générée par les rayons cosmiques . . . . .	86

---

Afin que le lecteur soit en mesure de comprendre l'ensemble des travaux réalisés dans la thèse, ce chapitre présente l'essentiel des aspects théoriques sous-jacents à l'étude du transport du rayonnement cosmique dans le milieu interstellaire. Une attention particulière est portée aux différentes démonstrations de manière à définir rigoureusement les limites de l'application des travaux. Les aspects théoriques sont parfois présentés de manière plus poussée que nécessaire de façon à présenter indirectement différentes poursuites possibles des travaux engagés dans la thèse.

Le chapitre se découpe en trois sections. La première section est dédiée à l'étude des plasmas astrophysiques, section dans laquelle je présente les propriétés fondamentales des plasmas et deux exemples de formalismes mathématiques permettant d'étudier leur dynamique : l'approche fluide et l'approche cinétique. La seconde section est dédiée à l'étude de la phénoménologie de la turbulence dans le milieu interstellaire : différents modèles de turbulence et leur validité sont présentés, une rapide présentation des méthodes de mesure de la turbulence et des observations est proposée. Enfin dans la dernière section, je présente une théorie du transport du rayonnement cosmique dans l'approximation de turbulence de faible intensité : l'équation de transport des rayons cosmiques est dérivée, l'interaction entre le rayonnement cosmique et la turbulence interstellaire est discutée.

## 1.1 Les plasmas Astrophysiques

Les plasmas jouent un rôle prépondérant en Astrophysique car ils composent l'ensemble de notre univers depuis le milieu intergalactique constitué de plasma très diffus (1 à 10 particules par mètre cube) et chauds ( $10^5 - 10^7$  K), jusqu'aux objets compacts caractérisés par des plasmas extrêmement denses comme les étoiles à neutrons en passant par des plasmas peu denses comme les plasmas qui constituent le milieu interstellaire et des plasmas plus denses comme les étoiles elles-mêmes. Dans le cadre de ce travail, par "plasmas Astrophysique" il est désigné "plasmas de faible densité constituant le milieu interstellaire" c'est à dire tout le gaz au sein des galaxies depuis les régions chaudes ionisées caractérisées par des températures élevées ( $T \approx 10^4 - 10^7$  K) et des densités variables ( $n_T \approx 10^{-3} - 1$  cm $^{-3}$ ) suivant les situations astrophysiques jusqu'aux coeurs denses des nuages moléculaires caractérisés par des densités élevées ( $n_T \approx 100 - 10^5$  cm $^{-3}$ ) et de faibles températures ( $T_i \approx 10 - 100$  K) en passant par des plasmas tièdes/froids et peu denses. Dans sa définition, un plasma est assimilé à un gaz constitué de particules neutres et de particules chargées. La présence de particules chargées dans le gaz est liée à l'existence d'un rayonnement ionisant qui excite les électrons des couches supérieures des noyaux desquels ils sont initialement liés, créant ainsi - en plus des espèces neutres - des espèces chargées positivement (bien souvent des noyaux atomiques) et des espèces chargées négativement (bien souvent des électrons). La dynamique du gaz est alors bien plus complexe car elle fait intervenir des interactions électromagnétiques aussi bien localement qu'à grande échelle nécessitant d'inclure les équations du champ EM dans les théories.

### 1.1.1 Propriétés fondamentales des plasmas

Dans cette sous-section, j'aborde quelques uns des aspects les plus fondamentaux de la description des plasmas dans l'approche de la mécanique classique. Les paramètres plasmas fondamentaux sont présentés.

#### 1.1.1.1 Longueur de Debye ( $\lambda_D$ ) :

La première caractéristique fondamentale d'un plasma est qu'il existe une longueur  $\lambda_D$  à partir de laquelle on peut considérer le plasma comme neutre électriquement. Considérons un ensemble d'espèces  $j$  de charge électrique  $q_j$  et de température propre  $T_j$  formant un plasma au sein duquel la distribution de chaque espèce suit la loi de Maxwell-Boltzmann c'est à dire, est à l'état d'équilibre thermodynamique. La densité numérique  $n_j$  de l'espèce  $j$  est définie par

$$n_j(\mathbf{x}) = n_j^0 e^{-\frac{q_j \Phi(\mathbf{x})}{k_B T_j}} \quad (1.1)$$

où  $n_j^0$  est la densité numérique moyenne de l'espèce  $j$  ( $\text{cm}^{-3}$ ),  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $\Phi(\mathbf{x})$  est un potentiel électrique de réponse - de toutes les espèces du plasma - à la force Coulombienne générée par l'ensemble des particules chargées. La densité de charge volumique du plasma est définie par

$$\rho_c(\mathbf{x}) = \sum_j q_j n_j(\mathbf{x}) = \sum_j q_j n_j^0 \exp\left\{-\frac{q_j \Phi(\mathbf{x})}{k_B T_j}\right\} \quad (1.2)$$

tandis que la force Coulombienne auto-exercée par le plasma obéit à l'équation de Poisson

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = -4\pi \rho_c(\mathbf{x}). \quad (1.3)$$

Dans le cas où la force exercée sur chacune des particules chargées du plasma est faible ( $\Phi(\mathbf{x}) \ll 1$ ), on peut effectuer un développement de Taylor au premier ordre de l'expression (1.1). L'équation (1.3) devient alors

$$\frac{\nabla^2 \Phi(\mathbf{x})}{4\pi} = \left( \sum_j \frac{n_j^0 q_j^2}{k_B T_j} \right) \Phi(\mathbf{x}) - \sum_j q_j n_j^0. \quad (1.4)$$

La neutralité du plasma implique que la somme des densités volumiques de charge s'annule  $\sum_j q_j n_j^0 = 0$ . L'équation (1.4) devient alors

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = \lambda_D^{-2} \Phi(\mathbf{x}) \quad (1.5)$$

où  $\lambda_D = \sqrt{\sum_j \frac{k_B T_j}{4\pi n_j^0 q_j^2}}$  est une longueur caractéristique de suppression du potentiel de Coulomb dans le plasma que l'on qualifie de longueur de Debye. Dans un plasma non-perturbé composé d'électrons et de protons, on parle de longueur d'écrantage électronique en deça de laquelle le champ électrique moyen  $\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}) \rangle$  est non-nul et devient nul pour toutes les échelles  $l \gg \lambda_D$ .



### 1.1.1.2 Fréquence de Langmuir ( $\omega_l$ ) [222] :

La seconde caractéristique fondamentale d'un plasma est qu'il existe une fréquence propre d'oscillation de ses constituants électroniquement chargée  $\omega_l$  en deça de laquelle le plasma devient opaque à toutes perturbations électromagnétiques périodiques. Cet effet est appelé oscillation de Langmuir et correspond à une oscillation du plasma en réponse à une perturbation électrique externe. Supposons un plasma composé de deux espèces chargées électriquement dont l'une est de faible masse  $m$  - de telle manière qu'elle puisse répondre notablement à une perturbation électrique - et l'autre de grande masse  $M$  - de telle manière qu'elle puisse être considérée comme statique dans le problème ( $m \ll M$ ). En revanche les charges électriques des deux espèces sont égales et opposées  $q_m = -q_M$ . A des fins de simplification, je considère le problème de manière unidimensionnelle (selon une direction arbitraire  $x$ ) sans perte d'information. Définissons la fluctuation de densité  $\delta n$  de l'espèce de masse  $m$

$$\delta n = n \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (1.6)$$

où  $\zeta$  est une variable dynamique quantifiant le déplacement moyen d'une particule de l'espèce  $m$ . Une particule soumise à un champ électrique directionnel  $\mathbf{E}$  répond à l'équation du mouvement

$$Eq_m = m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (1.7)$$

Le champ électrique étant porté par l'ensemble des autres charges mobiles du plasma, il est défini par la relation

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi q_m \delta n \quad (1.8)$$

qui elle-même découle de l'équation de Poisson (1.3). En intégrant l'équation (1.8) et en combinant le résultat avec l'équation (1.7) on obtient l'équation du déplacement moyen de l'espèce  $m$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \omega_l^2 \zeta = 0 \quad (1.9)$$

où  $\omega_l = \sqrt{\frac{4\pi q_m^2 n}{m}}$  est la fréquence de Langmuir du plasma composé des deux espèces de masse  $m$  et  $M$  et de charges égales et opposées  $q_m = -q_M$ . Par conséquent, quelque soit le plasma, les seules ondes électromagnétiques pouvant se propager à l'intérieur sont de fréquence  $\omega$  supérieure à la fréquence de pulsation de l'espèce ayant le plus haut rapport  $q/m$  du plasma. Cette notion est essentielle pour comprendre les propriétés des plasmas qui composent le milieu interstellaire que nous décrivons dans la section (1.2).

### 1.1.1.3 Libre parcours moyen ( $\lambda_{ij}$ ) :

La troisième caractéristique fondamentale du plasma est le taux de collisions  $\nu$  entre les particules qui constituent le plasma. En particulier, dans le cas du milieu interstellaire,

ce taux est extrêmement faible, me permettant ainsi de considérer le plasma comme non-collisionnel. La fréquence de collision d'une espèce  $i$  contre une espèce cible  $j$  dans un plasma est donnée par la relation

$$\nu_{ij} = v_i n_j \sigma_{ij} \quad (1.10)$$

où  $v_i$  est la vitesse de la particule  $i$ ,  $n_j$  est la densité de cibles d'espèce  $j$  et  $\sigma_{ij}$  est la section efficace de collision entre les espèces  $i$  et  $j$ . Dans l'approche Coulombienne classique, la collision entre deux particules de masses et charges électriques respectives  $m_i$ ,  $m_j$  et  $q_i$ ,  $q_j$  est définie à partir de l'équilibre entre l'énergie cinétique relative et l'énergie potentielle entre les deux particules. On a alors la relation

$$\frac{q_i q_j}{\bar{r}} = \bar{m} \frac{\bar{v}^2}{2} \quad (1.11)$$

où  $\bar{r} = |r_j - r_i|$  et  $\bar{v} = |v_j - v_i|$  sont la distance et la vitesse relative entre les deux particules et  $\bar{m} = m_i m_j / (m_i + m_j)$  est la masse réduite du système. Ainsi, en utilisant le fait que la section efficace est donnée par  $\sigma_{ij} = \pi \bar{r}^2$ , on obtient aisément le taux de transfert d'énergie de l'espèce  $i$  vers l'espèce  $j$

$$\nu_{ij} = 4\pi n_j v_i \frac{q_i^2 q_j^2}{\bar{m}^2 \bar{v}^4}. \quad (1.12)$$

Finalement, le libre parcours moyen entre deux collisions l'espèce  $i$  contre l'espèce  $j$  est donné par  $\lambda_{ij} = v_i / \nu_{ij}$ . Dans le cas où l'espèce  $i$  et/ou  $j$  est thermalisée, il est possible d'approximer la vitesse des éléments de chaque espèce  $v_i$  par leur vitesse thermique  $v_{th}$  définie par la relation

$$v_{th,i} = \sqrt{\frac{k_B T_i}{m_i}}. \quad (1.13)$$

La notion de fréquence de collisions entre les constituants d'un plasma est une notion extrêmement importante car dans le cas des plasmas du milieu interstellaire elle représente l'un des facteurs majeurs de la dynamique énergétique du transport des rayons cosmiques, des ondes magnétohydrodynamiques et des propriétés turbulentes du plasma comme nous le verrons tout au long de ce manuscrit.

#### 1.1.1.4 Taux d'ionisation ( $X$ ) :

La dernière caractéristique fondamentale d'un plasma est son taux d'ionisation. Un plasma est défini comme la constitution d'un nombre  $\alpha$  d'espèces neutres électriquement et  $\beta$  d'espèces chargées positivement ou négativement électriquement. Le taux d'ionisation est défini comme

$$X = \frac{n_c}{n_c + n_n} \quad (1.14)$$

où  $n_n = \sum_{a=0}^{\alpha} n_n^a$  correspond à l'abondance des espèces d'indice  $a$  électriquement neutres dans le plasma composé de  $\alpha$  espèces neutres ( $\text{cm}^{-3}$ ) et  $n_c = \sum_{b=0}^{\beta} n_c^b$  correspond à

l'abondance des espèces d'indice  $b$  chargées électriquement, qu'elles le soient positivement ou négativement dans un plasma composé de  $\beta$  espèces chargées. Notons que l'indice  $c$  est utilisé pour désigner l'ensemble des espèces chargées électriquement; les électrons seront désignés par l'indice  $e$  tandis que les ions seront désignés par un indice  $i$ . Dans le cas d'un plasma astrophysique peu dense, les espèces neutres font souvent référence aux atomes/molécules dans leur état d'énergie le plus stable tandis que les espèces chargées font référence aux atomes/molécules ionisées (dans un état électroniquement excité) et aux électrons libres eux-mêmes. En conséquence, la densité moyenne du plasma est définie par la somme des densités partielles des espèces qui le constituent  $n_T = n_c + n_n$ .

### 1.1.1.5 Exemples de plasmas astrophysique

Il existe une grande variété de plasmas astrophysique de températures et de densités différentes. Il est courant de discriminer la famille des plasmas en comparant la température des ions  $T_i$  à la température des électrons  $T_e$  :

- **Les plasmas froids** ( $T_i \ll T_e$ ) : Ces derniers constituent l'essentiel des plasmas du milieu interstellaire en termes de masse. Ils sont généralement faiblement ionisés ( $X < 10^{-1}$ ) et riches en molécules complexes qui contribuent hautement à la chimie moléculaire du milieu interstellaire. Ces plasmas peuvent être étudiés dans l'approximation classique.
- **Les plasmas chauds** ( $T_i \approx T_e$ ) : Les plasmas chauds constituent une minorité des plasmas du milieu interstellaire en termes de masse. Ils sont généralement fortement ionisés ( $X \approx 1$ ) et se trouvent soit dans des milieux très diffus et constamment alimentés en énergie soit dans des milieux extrêmement denses. La matière se trouve dans un état excité interdisant la formation de molécules voire de noyaux atomiques. Lorsque la masse des constituants du plasma devient négligeable devant leur énergie cinétique, le plasma est dit relativiste ( $pc \approx k_B T$ ). Lorsque la densité du plasma devient critique de telle manière que ses constituants finissent par se superposer au sens de la mécanique quantique, alors le plasma est dit quantique ( $\hbar\omega \approx k_B T$ ). Un plasma chaud peut à la fois être quantique et relativiste.

Notons ici que la notion de température est extrêmement relative. Il peut être plus judicieux de qualifier les plasmas froids et chauds de plasma bi-température et thermique respectivement. Le tableau (1.1) représente les paramètres fondamentaux de différents plasmas que l'on trouve dans le milieu interstellaire. Les gaz interstellaires et les nuages moléculaires sont essentiellement considérés comme des plasmas froids tandis que la couronne solaire, les noyaux actifs de galaxie et les rayons cosmiques sont considérés comme des plasmas chauds. Nous pouvons voir que pour chaque type de plasma, la fréquence de collision électron-électron  $\nu_{ee}$  est beaucoup plus faible que la pulsation de Langmuir (ou fréquence de collision électron-plasma,  $\omega_l$ ). Il y a donc une domination des interactions électromagnétiques sur les interactions par collision élastiques. Ceci implique que l'on peut considérer tous ces milieux comme non collisionnels. Dans le cas

du gaz interstellaire, les nuages moléculaires et les noyaux actifs de galaxie, on observe que la longueur de collision électron-électron ( $\lambda_{ee}$ ) est bien inférieure à la taille caractéristique des objets ( $L$ ). Cela signifie que dans ce spectre d'échelle, la distribution des vitesses suit une loi Maxwellienne et que la modélisation des plasmas par la théorie magnétohydrodynamique idéale est possible. En revanche, dans le cas de la couronne solaire et des rayons cosmiques, la longueur de collision  $\lambda_{ee}$  est supérieure à la taille caractéristique du plasma qui par conséquent ne peut être traité dans l'approximation de la magnétohydrodynamique idéale et requiert donc une approche cinétique.

Il est possible de caractériser un plasma par deux paramètres fondamentaux : sa température et sa densité, et par au moins quatre autres paramètres secondaires mais également importants : sa longueur de Debye ( $\lambda_D$ ) qui définit l'échelle minimale de neutralité électrique du plasma, sa fréquence de Langmuir (ou fréquence plasma  $\omega_l$ ) qui détermine la fréquence de coupure des ondes électromagnétiques de basse fréquence, le libre parcours moyen de collision entre deux électrons ( $\lambda_{ee}$ ) et le taux d'ionisation du plasma ( $X$ ). Cependant, les plasmas ne sont pas descriptibles de manière univoque. En effet, l'essentiel de la compréhension de la physique des plasmas réside dans la modélisation de la dynamique de la propagation d'une perturbation ou d'un spectre de perturbations électromagnétiques, magnétohydrodynamiques, particulières, ou les trois simultanément dans un plasma qui n'est pas nécessairement en état de repos, ni même homogène et isotrope. Il en découle un nombre important de théories et d'approches différentes de la dynamique des plasmas dont je vais discuter quelques aspects dans la suite de la section (1.1).

### 1.1.2 Eléments de dynamique des fluides et de théorie cinétique

Il existe deux familles principales d'approches de la physique des plasmas :

- L'approche fluide : Qui consiste en la description d'un gaz par l'intermédiaire de grandeurs macroscopiques (densité, vitesse moyenne, pression ...) en supposant qu'il est possible assimiler les particules qui le composent à un fluide. Ceci suggère en particulier que le libre parcours moyen des particules soit très petit devant l'échelle caractéristique de l'étude du système. Numériquement, cette méthode apporte un avantage certain car moins coûteuse en temps de calcul. En revanche la gamme d'échelles permettant d'étudier un système physique est limitée par la résolution de la grille de calcul dans le cas d'études numériques.
- L'approche cinétique : Qui consiste en la description d'un gaz par l'intermédiaire de grandeurs microscopiques (vitesse et position des particules). Cette approche permet de traiter la dynamique de chaque particule constituant le gaz indépendamment. Numériquement, cette méthode procure l'avantage d'être complètement indépendante de l'échelle d'étude (du moins au delà de la précision machine) permettant de sonder des phénomènes "microphysiques" non-accessibles par l'approche fluide, mais peut se révéler extrêmement coûteuse en terme de temps de calcul.

Plasma	Gaz Interstellaire	Nuage Moléculaire	Couronne Solaire	Noyau actif de galaxie	Rayons Cosmiques
$n_T$ (cm <sup>-3</sup> )	1	10 <sup>2</sup>	10 <sup>7</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>-15</sup>
$X$	10 <sup>-1</sup>	10 <sup>-2</sup>	1	1	1
$T_e$ (K)	10 <sup>4</sup>	10 <sup>2</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>7</sup>	10 <sup>12</sup>
$B$ (μG)	1	10	10 <sup>2</sup>	10 <sup>6</sup>	1
$L$ (cm)	10 <sup>18</sup>	10 <sup>17</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>15</sup>	10 <sup>18</sup>
$\omega_l$ (s <sup>-1</sup> )	2 × 10 <sup>4</sup>	5 × 10 <sup>4</sup>	5 × 10 <sup>7</sup>	2 × 10 <sup>9</sup>	2
$\Omega_e$ (s <sup>-1</sup> )	20	200	2 × 10 <sup>3</sup>	2 × 10 <sup>7</sup>	20
$\nu_{ee}$ (s <sup>-1</sup> )	2 × 10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-2</sup>	0.5	2 × 10 <sup>-26</sup>
$\lambda_D$ (cm)	2 × 10 <sup>3</sup>	69	6.9	0.7	2 × 10 <sup>11</sup>
$\lambda_{ee}$ (cm)	2 × 10 <sup>13</sup>	3 × 10 <sup>8</sup>	3 × 10 <sup>10</sup>	3 × 10 <sup>9</sup>	3 × 10 <sup>37</sup>

Table 1.1: Ce tableau tiré de [194] représente des valeurs caractéristiques de paramètres plasmas que l'on peut trouver en astrophysique.  $n_T$  correspond à la densité totale du plasma,  $X$  est le taux d'ionisation,  $T_e$  est la température cinétique des électrons du plasma,  $B$  représente la valeur moyenne du champ magnétique dans le plasma,  $L$  est la taille caractéristique des différents plasmas,  $\omega_l$  correspond à la fréquence de pulsation de Langmuir des électrons,  $\Omega_e = eB/m_e c$  correspond à la fréquence de gyrorésonance des électrons du plasma,  $\lambda_D$  correspond à la longueur de Debye du plasma et  $\lambda_{ee}$  représente le libre parcours moyen entre deux collisions d'électrons. Notons que les valeurs présentées ne sont pas exactes et sont données à titre indicatif uniquement.

Dans cette section, j'aborde les équations fondamentales de la dynamique des fluides non-magnétisés ainsi que les équations liées à une approche cinétique du problème. L'objectif de cette partie est de présenter les deux familles d'approches possibles de la dynamique d'un fluide sans pour autant en faire une description précise. C'est essentiellement sur cette partie que s'appuieront les descriptions des sections (1.1.3), (1.1.4) et (1.1.5) des plasmas astrophysique qui traiteront des fluides magnétisés intégrant par conséquent des termes supplémentaires dans les équations. L'essentiel de l'étude faite ci-dessous est adaptée de [118] et [194].

### 1.1.2.1 Description fluide d'un gaz

Considérons un gaz évoluant dans le temps de champ de densité  $\rho(\mathbf{x}, t)$  et de vitesse fluide  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  où  $\mathbf{x}$  représente la position dans l'espace d'un élément de fluide duquel nous mesurons les différentes grandeurs macroscopiques.

La première hypothèse à laquelle le gaz obéit est l'hypothèse de conservation de la masse totale du gaz dans un volume fini  $V(t)$  qui peut éventuellement évoluer dans le temps

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_L \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV(t) = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \right] dV(t) = 0 \quad (1.15)$$

où l'opérateur  $(d/dt)_L$  représente la dérivée temporelle Lagrangienne du paramètre  $\rho$  de l'élément de fluide. La partie de droite de l'équation représente la transformation vers l'approche Eulérienne de l'équation de conservation. La démonstration de cette égalité est donnée dans l'annexe (1). De l'équation (1.15) découle l'équation de conservation du fluide

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (1.16)$$

La seconde hypothèse à laquelle obéit le gaz est la conservation du moment qui découle directement de la relation fondamentale de la dynamique en mécanique classique

$$\left(\frac{d\mathbf{P}}{dt}\right)_L = \sum \mathbf{F} \quad (1.17)$$

où  $\sum \mathbf{F}$  correspond à la somme des forces appliquées sur le fluide et  $\mathbf{P}$  est le moment intégral du fluide qui est défini par la relation

$$\mathbf{P} = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV(t). \quad (1.18)$$

Dans le cas où la force appliquée sur le fluide est une force de contact (appliquée par le fluide sur lui-même ou par un corps externe), on définit un vecteur de stress  $\mathbf{t}$  qui représente la force appliquée sur une surface entourant un élément local du fluide

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} \quad (1.19)$$

où  $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$  représente une surface orientée par son vecteur normal  $\mathbf{n}$  défini dans le système de coordonnées Lagrangiennes. La relation (1.17) devient alors

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_L \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV(t) = \int_{S(t)} \mathbf{t} dS(t). \quad (1.20)$$

Je traite séparément chaque partie de l'égalité ci-dessus. La partie de gauche peut se réécrire

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)_L \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV(t) &= \int_{V(t)} \left(\frac{d}{dt}\right)_L [\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV(t)] \\ &= \int_V \rho(\mathbf{x}, t) \left(\frac{d}{dt}\right)_L \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que la masse totale se conserve, et nous avons considéré qu'à l'instant  $t$  du calcul de la dérivée le volume du gaz est fixé sans aucune perte de généralité. Le vecteur force  $\mathbf{t}$  de contact peut s'écrire comme

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} \quad (1.21)$$

$\bar{\mathbf{T}}$  étant une matrice représentant le tenseur de stress appliqué au fluide

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

où  $t_i(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \tau_{ij}(\mathbf{x}, t)n_j$  ( $i, j = (1, 2, 3)$ ) correspond à une force de contact appliquée dans la direction  $i$  sur la surface entourant le fluide de vecteur normal orienté dans la direction  $j$ . Les éléments diagonaux  $\tau_{ii}$  de la matrice (1.22) représentent les forces de pression tandis que les éléments non-diagonaux  $\tau_{ij}$ ,  $i \neq j$  représentent les forces de cisaillement ou de friction. L'équation (1.20) devient alors

$$\int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \left(\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt}\right)_L dV(t) = \int_{S(t)} \bar{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.23)$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, il est possible de reformuler l'égalité ci-dessus comme une intégrale sur le volume du fluide et d'en déduire la formulation différentielle de l'équation de la conservation du moment du fluide

$$\rho(\mathbf{x}, t) \left(\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt}\right)_L - \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} = 0. \quad (1.24)$$

Le système des équations (1.24) et (1.16) contient 4 équations et 5 inconnues. Les variables  $\rho(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  sont libres, en revanche la variable  $\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)$  est liée et doit nécessairement s'écrire comme une fonction des variables libres du système. L'approche fluide consiste à résoudre le système suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) &= 0 \\ \rho(\mathbf{x}, t) \left( \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} \right)_L - \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{f}}(\rho, \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (1.25)$$

où la dernière équation du système (1.25) est appelée relation de fermeture et résulte d'hypothèses sur la nature du fluide étudié.

### 1.1.2.2 Description cinétique d'un gaz

Considérons une distribution de particules non-chargées de masse  $m$  individuellement repérées par un indice  $j$  et caractérisées par leur position  $\mathbf{x}_j(t)$  et leur vitesse  $\mathbf{v}_j(t)$ . Dans le cas d'un fluide non-collisionnel en première approximation, je considère que les particules ne subissent aucune force et obéissent donc aux équations du mouvement suivantes

$$m_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = 0 \quad (1.26)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_j}{dt} = \mathbf{v}_j. \quad (1.27)$$

On définit la densité de probabilité de présence de la particule d'indice  $j$  à la position  $\mathbf{x}$  et à la vitesse  $\mathbf{v}$  par une fonction  $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ . Cette dernière est appelée densité d'espace des phases et se conserve dans l'espace des phases. Il en découle naturellement que

$$\frac{df_j(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{dt} = S_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (1.28)$$

où  $S_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  est une fonction source de la particule  $j$  qui est nulle si l'on considère un système conservatif. En développant la partie de gauche de l'équation ci-dessus, j'obtiens

$$\frac{\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = S_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (1.29)$$

l'équation de Vlasov avec une source d'un gaz non-magnétisé appliquée à la particule  $j$ . En postulant que la densité de probabilité de la particule  $j$  ne se distingue pas de celle des autres, nous pouvons sans perte de généralité supprimer l'indice de la particule à



laquelle nous appliquons cette équation. A partir de la fonction de distribution  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  nous pouvons obtenir la distribution de la densité du fluide  $\rho(\mathbf{x}, t)$  par la relation

$$\rho(\mathbf{x}, t) = m \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (1.30)$$

La vitesse moyenne du fluide  $\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{x}, t)$  est donnée par

$$\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (1.31)$$

En calculant le moment d'ordre zéro de l'équation de Vlasov (1.29) nous obtenons l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) = Q(\mathbf{x}, t) \quad (1.32)$$

où  $Q(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v S(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  est une fonction source. Le calcul du moment d'ordre un de l'équation de Vlasov conduit à la relation de conservation de l'impulsion du système

$$\rho(\mathbf{x}, t) \left( \frac{d}{dt} \right)_L \langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_i} = \mathbf{Q}_p(\mathbf{x}, t) \quad (1.33)$$

où  $\mathbf{Q}_p(\mathbf{x}, t) = m \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v (\mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{x}, t)) S(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  est une fonction source d'impulsion, et

$$\tau_{ik}(\mathbf{x}, t) = m \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) (v_i - \langle \mathbf{v} \rangle_i(\mathbf{x}, t)) (v_j - \langle \mathbf{v} \rangle_j(\mathbf{x}, t)) \quad (1.34)$$

est le tenseur de pression où  $i, j = (1, 2, 3)$  font référence à une direction des vecteurs de base du système de coordonnées considéré. De la même manière que précédemment, nous pouvons résumer le système d'équations obtenu à partir de l'approche cinétique du gaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) &= Q(\mathbf{x}, t) \\ \rho(\mathbf{x}, t) \left( \frac{d}{dt} \right)_L \langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{Q}_p(\mathbf{x}, t) \\ \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{f}}(\rho, \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (1.35)$$

où  $\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)$  est le tenseur de stress défini par la matrice (1.22). La dernière relation est une relation de fermeture qui, comme dans l'approche fluide, nécessite de faire des hypothèses supplémentaires sur la nature du fluide pour être définie.

Au travers des systèmes (1.25) et (1.35) nous montrons que les descriptions d'un gaz par l'approche du continuum et par la cinétique des particules qui le composent sont équivalentes en première approximation. Nous notons cependant que dans l'approche fluide, le tenseur de stress n'est pas apparu de manière "naturelle" et a nécessité de faire

une hypothèse sur les forces qui s'exercent sur le gaz alors que dans l'approche cinétique, ce dernier apparait comme une conséquence de l'étalement de la fonction de distribution des vitesses des particules. Dans chaque approche il est nécessaire de fermer le système d'équations en utilisant une relation résultant d'une hypothèse faite sur les propriétés du gaz étudié. La relation de fermeture peut également être un système d'équation faisant intervenir de nouvelles propriétés du gaz, mais tandis que dans l'approche fluide il est nécessaire de construire ces relations, dans l'approche cinétique elles sont naturellement définies comme les moments supérieurs de l'équation de Vlasov, jusqu'à ce qu'une relation de fermeture (une hypothèse simplificatrice) soit utilisée au lieu d'un moment d'ordre supérieur, pour fermer le système.

### 1.1.3 Ondes plasma en MHD idéale

#### 1.1.3.1 Equations de la MHD idéale

L'approche MHD est similaire à l'approche fluide au détail que des termes liés à la présence d'un champ magnétique apparaissent dans les équations. Un plasma peut être considéré comme un fluide si l'échelle d'étude  $l$  de ce dernier est grande devant le libre parcours moyen des électrons  $\lambda_{ee}$  (1.1) et des ions  $\lambda_{ii}$ . Le plasma obéit donc à l'équation de continuité de la masse (1.16). Le cas échéant, dans l'état au repos, les pressions électroniques et ioniques sont isotropes et le flux de chaleur est faible. Le plasma obéit alors à l'équation d'état d'un gaz adiabatique

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_L \frac{P(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{x}, t)^\gamma} = 0 \quad (1.36)$$

où  $\gamma$  correspond à l'index adiabatique du plasma. Le fluide étant magnétisé, deux forces entrent en ligne de compte : l'effet de la force de pression ( $-\nabla P(\mathbf{x}, t)$ ) qui est isotrope et correspond à la trace du tenseur de stress (1.22), et la force de Laplace générée par la présence de courants électriques dans le plasma ( $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ ). L'équation (1.24) se réécrit alors

$$\rho(\mathbf{x}, t) \left(\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt}\right)_L + \nabla P(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.37)$$

où  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i \in \{e^-, \text{ions}\}} q_i \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \mathbf{v} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  est le champ de courants du plasma. En considérant que le nombre de Reynolds magnétique du plasma est grand

$$R_m = \frac{LV}{\eta} \gg 1 \quad (1.38)$$

où  $\eta$  correspond à la diffusivité magnétique du gaz,  $L$  et  $V$  sont respectivement la longueur et la vitesse caractéristiques du fluide, la résistivité électrique du plasma peut être négligée ([43]) et par conséquent la loi d'Ohm du fluide donne

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{c} = 0 \quad (1.39)$$

dans le référentiel au repos du gaz. Afin de fermer le système, il est nécessaire d'implémenter les quatre équations de Maxwell qui régissent l'évolution des champs magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  et électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (1.40)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 4\pi \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (1.41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 4\pi q(\mathbf{x}, t) \quad (1.43)$$

où  $q(\mathbf{x}, t) = \sum_{i \in \{e^-, \text{ions}\}} q_i \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  est le champ de densité de charge électrique. La première équation du système (1.40) correspond à la loi de Maxwell-Faraday qui traduit l'effet de l'induction électromagnétique dans le gaz, la seconde équation (1.41) correspond à la loi de Maxwell-Ampère qui est déduite du théorème d'Ampère qui traduit la conservation des courants de charge dans un contour fermé, la troisième équation (1.42) correspond à la loi de Maxwell-Thomson et traduit le fait que le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est toujours nul, et la dernière équation correspond à la loi de Maxwell-Gauss (1.43) ou loi de Poisson et traduit l'existence de sources électriques dans le plasma.

En injectant la loi d'Ohm (1.39) dans l'équation d'induction, on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (1.44)$$

En considérant que le courant de déplacement  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  est faible devant les mouvements advectifs du fluide, c'est à dire que le plasma est non-relativiste, on obtient pour la loi de Maxwell-Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 4\pi \mathbf{J}(\mathbf{x}, t). \quad (1.45)$$

En substituant le résultat obtenu dans l'équation d'Euler du fluide magnétique (1.37) cette dernière se réécrit

$$\rho(\mathbf{x}, t) \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_L + \nabla P(\mathbf{x}, t) - \frac{(\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{4\pi} = 0. \quad (1.46)$$

Nous résumons ci-dessous le système d'équation permettant de décrire la dynamique d'un fluide idéalement magnétisé, parfaitement conducteur et obéissant aux lois de la mécanique classique

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \rho(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.47)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla P(\mathbf{x}, t) - \frac{(\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{4\pi} = 0 \quad (1.48)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (1.49)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{P(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{x}, t)^\gamma} \right) = 0 \quad (1.50)$$

en considérant que l'équation d'état d'un gaz adiabatique est invariante par changement de référentiel inertiel.

### 1.1.3.2 Relation de dispersion

Il est possible de résoudre le système d'équations (1.47-1.50) à l'aide d'une approche perturbative c'est à dire en décomposant chaque paramètre  $A$  sous la forme  $A = A^{(0)} + A^{(1)} + \mathcal{O}(A^{(2)})$  où  $A^{(0)}$  est constant dans l'espace des phases et  $A^{(1)} = A_0^{(1)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$  s'exprime dans l'espace des phases des perturbations ondulatoires  $(\omega, \mathbf{k})$ . Nous pouvons ainsi obtenir la relation de dispersion des ondes MHD dans l'approximation idéale  $\omega(\mathbf{k})$  et discuter des modes solutions.

En considérant un plasma au repos et soumis à aucun champ magnétique extérieur, il est possible de décomposer les paramètres  $\rho$ ,  $P$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{B}$  de la manière suivante

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{x}, t) \quad (1.51)$$

$$P(\mathbf{x}, t) = P_0 + \delta P(\mathbf{x}, t) \quad (1.52)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1.53)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}. \quad (1.54)$$

Le système (1.47-1.50) perturbé au premier ordre s'écrit

$$\frac{\partial \delta\rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.55)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \delta P(\mathbf{x}, t) + \frac{(\nabla \times \delta\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) \times \mathbf{B}_0}{4\pi} = 0 \quad (1.56)$$

$$-\frac{\partial \delta\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \times (\delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}_0) = 0 \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta P(\mathbf{x}, t)}{P_0} - \frac{\gamma \delta\rho(\mathbf{x}, t)}{\rho_0} \right) = 0 \quad (1.58)$$

où l'on a utilisé le fait que :  $\mathbf{J}_0 = \nabla \times \mathbf{B}_0 / 4\pi = 0$  mais  $\delta\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \neq 0$ . En utilisant l'écriture de Fourier des perturbations le système devient

$$-\omega\rho + \rho_0\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \quad (1.59)$$

$$-\omega\rho_0\delta\mathbf{v} + \mathbf{k}P - \frac{(\mathbf{k} \times \delta\mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0}{4\pi} = 0 \quad (1.60)$$

$$\omega\delta\mathbf{B} + \mathbf{k} \times (\delta\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) = 0 \quad (1.61)$$

$$-\omega \left( \frac{\delta P}{P_0} - \frac{\gamma\delta\rho}{\rho_0} \right) = 0. \quad (1.62)$$

On déduit des équations (1.59), (1.61) et (1.62) du système pour  $\omega \neq 0$

$$\begin{aligned} \delta\rho &= \rho_0 \frac{\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}}{\omega} \\ \delta P &= \gamma P_0 \frac{\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}}{\omega} \\ \delta\mathbf{B} &= \frac{(\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v})\mathbf{B}_0 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)\delta\mathbf{v}}{\omega}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

En substituant les écritures de  $\delta\rho$ ,  $\delta P$  et  $\delta\mathbf{B}$  dans la seconde équation du système (1.59) on obtient l'expression de l'équation de la dynamique du plasma linéarisée appliquée au champ de vitesse perturbé  $\delta\mathbf{v}$  du plasma

$$\begin{aligned} \left[ \omega^2 - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{4\pi\rho_0} \right] \delta\mathbf{v} - \left( \left[ \frac{\gamma P_0}{\rho_0} + \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0} \right] \mathbf{k} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)}{4\pi\rho_0} \mathbf{B}_0 \right) (\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}) \\ + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)(\delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_0)}{4\pi\rho_0} \mathbf{k} = 0. \end{aligned} \quad (1.64)$$

On peut considérer sans perte de généralité que le champ magnétique moyen  $\mathbf{B}_0$  est aligné suivant l'axe  $z$  et que le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  des perturbations de vitesse du fluide se trouve dans le plan  $x$ - $z$ . L'équation (1.64) devient

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - k^2 V_A^2 - k^2 V_S^2 \sin^2 \theta & 0 & -k^2 V_S^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \omega^2 - k^2 V_A^2 \cos^2 \theta & 0 \\ -k^2 V_S^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \omega^2 - k^2 V_S^2 \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta v_z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.65)$$

où

$$V_A = \sqrt{\frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}} \quad (1.66)$$

est la vitesse d'Alfvén du fluide et

$$V_S = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \quad (1.67)$$

est la vitesse sonique du fluide.

En calculant le déterminant du système (1.65), on obtient la relation de dispersion du plasma

$$(\omega^2 - k^2 V_A^2 \cos^2 \theta)[\omega^4 - \omega^2 k^2 (V_A^2 + V_S^2) + k^4 V_A^2 V_S^2 \cos^2 \theta] = 0. \quad (1.68)$$

### 1.1.3.3 Solutions perturbatives de la MHD idéale

La relation de dispersion (1.68) possède trois solutions correspondant aux trois modes de propagation d'une perturbation dans un plasma MHD idéal. La première solution est donnée par

$$\omega_A = k V_A \cos \theta \quad (1.69)$$

avec pour vecteur propre associé  $\delta \mathbf{v}_A = (0, \delta v_{Ay}, 0)$  ce qui a pour conséquence  $\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v} = 0$  et  $\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$ . Cela signifie que ce mode n'est défini, au premier ordre, qu'en l'absence de perturbations de densité et de pression cinétique du plasma. En revanche, la perturbation du champ magnétique est non-nulle et est donnée par  $\delta \mathbf{B} = k_z B_0 / \omega_A \delta \mathbf{v}$  et s'opère dans la direction perpendiculaire au champ magnétique moyen  $\mathbf{B}_0$ . Ce mode est appelé mode d'Alfvén de cisaillement et est dominant dans les plasmas où les fluctuations du champ magnétique  $\delta \mathbf{B}$  dominent les fluctuations de pression  $\delta P$  et de densité  $\delta \rho$  du gaz que l'on considère nulles au premier ordre perturbé. La figure (1.1.a) représente l'évolution de la phase du mode d'Alfvén en coordonnées polaires  $(\omega, \theta)$  dans le plan  $(x-y)$  pour un vecteur d'onde de norme 1 et de phase  $\theta$  où  $\cos \theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 / k B_0$ . Nous observons que les modes d'Alfvén se propagent essentiellement le long des lignes de champ ( $\theta \approx 0$ ), aucun mode d'Alfvén ne se propage dans les directions perpendiculaires aux lignes de champ ( $\theta \approx \pi/2$ ).

Les deux solutions restantes sont données par les relations

$$\omega_{\pm} = k V_{\pm} \quad (1.70)$$

où

$$V_{\pm} = \left( \frac{1}{2} \left[ V_A^2 + V_S^2 \pm \sqrt{(V_A^2 + V_S^2)^2 - 4V_A^2 V_S^2 \cos^2 \theta} \right] \right) \quad (1.71)$$

où  $V_+ > V_-$ . Ces deux solutions réfèrent aux modes magnéto-soniques définis par les vecteurs propres  $\delta \mathbf{V}_{\pm} = (V_{\pm x}, 0, V_{\pm z})$ . On en déduit que  $\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v} \neq 0$  et  $\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_0 \neq 0$  donc que les perturbations magnétiques  $\delta \mathbf{B}$  s'accompagnent de perturbations de la pression  $\delta P$  et de la densité  $\delta \rho$  du plasma. Les perturbations de vitesse du gaz sont donc compressibles car partiellement dirigées dans la direction du champ magnétique moyen et perpendiculaires aux perturbations purement Alfvéniques. La figure (1.1.b) représente l'évolution de la phase des modes magnéto-soniques rapide (rouge) et lent (bleu) en coordonnées polaires  $(\omega, \theta)$  dans le plan  $(x-z)$  pour un vecteur d'onde de norme 1 et d'angle  $\theta$  par rapport au champ magnétique moyen  $\mathbf{B}_0$ . Dans le cas où la

vitesse du son  $V_S$  est de l'ordre de la vitesse d'Alfvén  $V_A$  (lignes continues), les modes magnétosoniques rapides se propagent préférentiellement perpendiculairement au champ magnétique  $\omega_+(\mathbf{k}, \theta = \pi/2) = k\sqrt{V_A^2 + V_S^2} > kV_A$  tandis que les modes parallèles se propagent à la même pulsation que les modes d'Alfvén  $\omega_+(\mathbf{k}, \theta = 0) = kV_A$ . Les modes magnétosoniques lents se propagent le long des lignes de champ  $\omega_-(\mathbf{k}, \theta = 0) = kV_A$  et non perpendiculairement  $\omega_-(\mathbf{k}, \theta = \pi/2) = 0$ . Dans le cas où la vitesse du son est négligeable devant la vitesse d'Alfvén  $V_S \ll V_A$  (lignes discontinues), la pulsation des modes magnétosoniques rapide s'écrit

$$\omega_+ = kV_A \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{V_S}{V_A} \right)^2 \sin^2 \theta \right] \quad (1.72)$$

et est quasi-isotrope à mesure que la vitesse du son devient négligeable devant la vitesse d'Alfvén. En revanche, la pulsation des modes magnétosoniques lent devient de plus en plus négligeable à mesure que le rapport  $V_S/V_A$  diminue. Elle est donnée par

$$\omega_- = kV_S \left( \frac{V_S}{V_A} \right) \cos \theta. \quad (1.73)$$

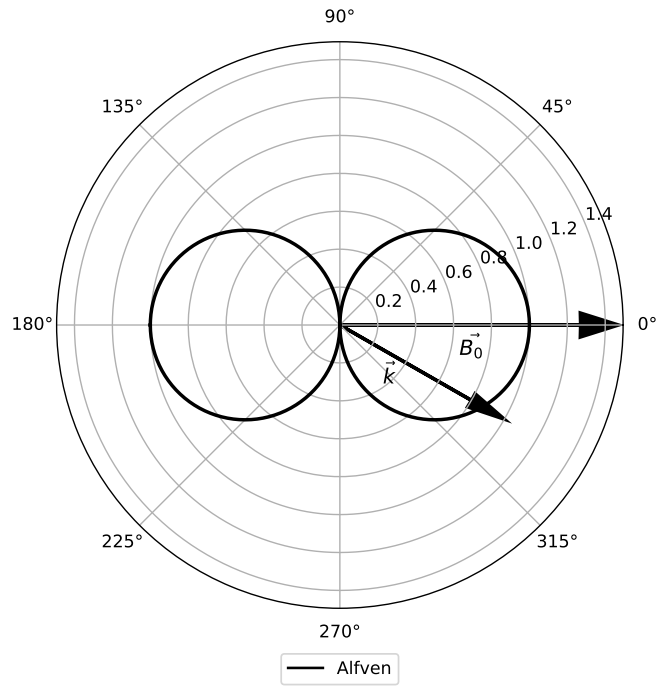
Ce cas de figure fait typiquement référence aux plasmas chauds ( $T_i \approx T_e$ ) et diffus dont les phases diffuses du milieu interstellaire font partie. Les modes dominants sont les modes d'Alfvén purement magnétiques qui se propagent préférentiellement le long des lignes de champ  $\mathbf{B}_0$  à la vitesse Alfvénique du milieu dans le plan  $x - z$  et les modes magnétosoniques rapides, dans ce cas-ci qualifiés de modes d'Alfvén de torsion qui se propagent de manière isotrope dans le plan  $x - y$  à la vitesse Alfvénique du fluide également.

#### 1.1.4 Ondes plasma en MHD bi-fluide dans les milieux partiellement ionisés

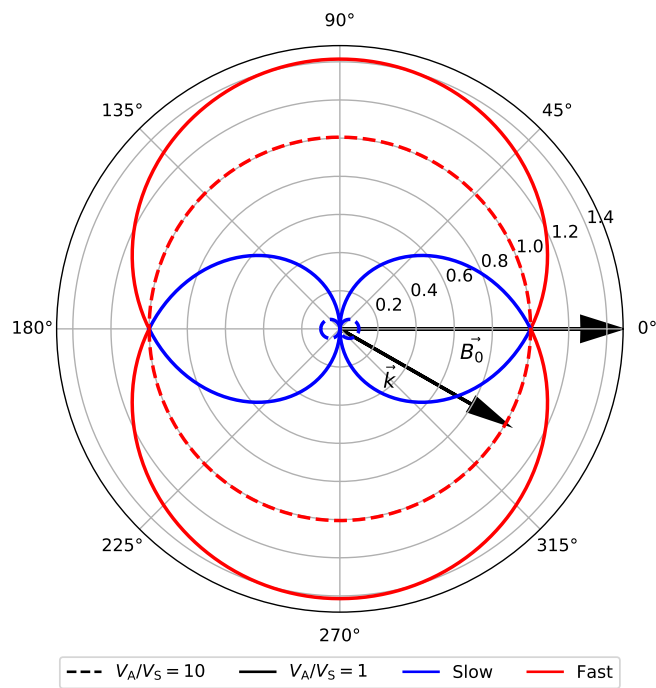
##### 1.1.4.1 Equations de la MHD bi-fluide

Une des limitations de l'approche MHD est qu'il existe des échelles à partir desquelles il n'est plus possible de considérer le plasma du milieu interstellaire comme étant composé d'un seul fluide totalement ionisé. L'approche MHD bi-fluide permet de palier à ce problème en suggérant que le milieu interstellaire est composé de deux fluides : l'un ionisé, l'autre neutre, tous deux échangeant en permanence de la quantité de mouvement. Tandis que le fluide neutre contient toutes les espèces neutres (désignées par un indice  $n$ ) du milieu interstellaire  $n_n = \sum_a n_n^a$ , le fluide ionisé contient à la fois les espèces chargées négativement comme les électrons, et les espèces chargées positivement  $n_i = \sum_a n_{i+}^a + \sum_a n_{i-}^a$ . La densité totale du plasma est la somme des densités des ions et des neutres :  $n_T = n_i + n_n$ .

Les équations de la MHD bi-fluide sont données par [125]



(a) Modes MHD d'Alfvén



(b) Modes MHD magnétosoniques lent et rapide

Figure 1.1: La figure (a) représente dans le système de coordonnées polaires  $(\omega, \theta)$  l'évolution de la pulsation  $\omega_A$  des modes d'Alfvén pour un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  de norme 1, de vitesse d'Alfvén  $V_A = 1$  et d'angle  $\theta$  avec le champ magnétique  $\mathbf{B}_0$ . La figure (b) représente l'évolution des pulsations des modes magnétosoniques rapides ( $\omega_+$  en rouge) et lent ( $\omega_-$  en bleu) pour un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  de norme 1, de vitesse d'Alfvén  $V_A = 1$  et d'angle  $\theta$  avec le champ magnétique  $\mathbf{B}_0$ . La ligne discontinue représente la situation où la vitesse du son est dix fois inférieure à la vitesse d'Alfvén tandis que la ligne continue représente la situation où la vitesse du son est égale à la vitesse d'Alfvén.



$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \rho_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0 \quad (1.74)$$

$$\rho_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \nabla P_i - \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{4\pi} = -\alpha_{in}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n) \quad (1.75)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P_i}{\rho_i^\gamma} \right) = 0 \quad (1.76)$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \rho_n \nabla \cdot \mathbf{v}_n = 0 \quad (1.77)$$

$$\rho_i \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \nabla P_n = -\alpha_{in}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_i) \quad (1.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P_n}{\rho_n^\gamma} \right) = 0 \quad (1.79)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) = 0 \quad (1.80)$$

où les indices  $i$  et  $n$  réfèrent aux fluides ionisés et neutres respectivement<sup>1</sup>.  $\alpha_{in}$  correspond au coefficient de friction ion-neutre et est défini dans le cas d'un plasma d'hydrogène par la relation [21]

$$\alpha_{in} = \frac{1}{2} \frac{\rho_i \rho_n}{m_n} \sqrt{\frac{16k_B T}{\pi m_i}} \sigma_{in} \quad (1.81)$$

où  $\sigma_{in}$  correspond à la section efficace de collision entre les neutres et les ions,  $T$  est la température dans l'approximation des plasmas chauds. Dans l'analyse qui suit, le paramètre reste libre et sera défini autrement par les observables du problème.

De la même manière que dans l'approche MHD idéale, nous effectuons une approche perturbative du problème et décomposons les variables de notre système en une composante moyenne ainsi qu'une composante perturbée

$$\rho_i = \rho_{i0} + \delta \rho_i \quad \rho_n = \rho_{n0} + \delta \rho_n \quad (1.82)$$

$$P_i = P_{i0} + \delta P_i \quad P_n = P_{n0} + \delta P_n \quad (1.83)$$

$$\mathbf{v}_i = \delta \mathbf{v}_i \quad \mathbf{v}_n = \delta \mathbf{v}_n \quad (1.84)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}. \quad (1.85)$$

En ne gardant que les termes perturbés à l'ordre 1 du système d'équations (1.74 - 1.80) et en utilisant la décomposition en mode de Fourier des termes ( $\propto e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ ) il vient

---

<sup>1</sup>Dans l'approche MHD bi-fluide les effets du fluide d'électrons, ayant une densité massique très inférieure au fluide d'ions, sont négligés. L'indice  $i$  ne réfère donc qu'à la densité d'éléments chimiques ionisés et non d'électrons.

$$-\omega\delta\rho_i + \rho_{i0}\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}_i = 0 \quad (1.86)$$

$$-\omega\rho_{i0}\delta\mathbf{v}_i + \mathbf{k}\delta P_i - \frac{(\mathbf{k} \times \delta\mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0}{4\pi} = i\alpha_{in}(\delta\mathbf{v}_i - \delta\mathbf{v}_n) \quad (1.87)$$

$$-\omega\left(\frac{\delta P_i}{P_{i0}} - \frac{\gamma\delta\rho_i}{\rho_{i0}}\right) = 0 \quad (1.88)$$

$$-\omega\delta\rho_n + \rho_{n0}\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}_n = 0 \quad (1.89)$$

$$-\omega\rho_{n0}\delta\mathbf{v}_n + \mathbf{k}\delta P_n = i\alpha_{in}(\delta\mathbf{v}_n - \delta\mathbf{v}_i) \quad (1.90)$$

$$-\omega\left(\frac{\delta P_n}{P_{n0}} - \frac{\gamma\delta\rho_n}{\rho_{n0}}\right) = 0 \quad (1.91)$$

$$\omega\delta\mathbf{B} + \mathbf{k} \times (\delta\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_0) = 0. \quad (1.92)$$

Afin de réduire le nombre de variables liées du problème, on définit  $\delta\rho_i$ ,  $\delta\rho_n$ ,  $\delta P_i$ ,  $\delta P_n$   $\delta\mathbf{B}$  en fonction de  $\delta\mathbf{v}_i$ ,  $\delta\mathbf{v}_n$ ,  $\mathbf{k}$  et  $\omega$

$$\delta\rho_i = \rho_{i0}\frac{\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}_i}{\omega} \quad \delta\rho_n = \rho_{n0}\frac{\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}_n}{\omega} \quad (1.93)$$

$$\delta P_i = \gamma P_{i0}\frac{\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}_i}{\omega} \quad \delta P_n = \gamma P_{n0}\frac{\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}_n}{\omega} \quad (1.94)$$

$$\delta\mathbf{B} = \frac{(\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}_i)\mathbf{B}_0 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)\delta\mathbf{v}_i}{\omega}. \quad (1.95)$$

De plus, nous définissons également les quantités suivantes

$$\nu_{in} = \frac{\alpha_{in}}{\rho_{i0}} \quad \nu_{ni} = \frac{\alpha_{in}}{\rho_{n0}} \quad (1.96)$$

$$V_{Si} = \sqrt{\frac{\gamma P_{i0}}{\rho_{i0}}} \quad V_{Sn} = \sqrt{\frac{\gamma P_{n0}}{\rho_{n0}}} \quad (1.97)$$

$$V_{Ai} = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_{i0}}}. \quad (1.98)$$

$\nu_{in}$  correspond au taux de transfert de quantité de mouvement des ions vers les neutres,  $\nu_{ni}$  correspond au taux de transfert de quantité de mouvement des neutres vers les ions. Les deux quantités sont reliées par la relation

$$\nu_{in} = \chi\nu_{ni} \quad (1.99)$$

où  $\chi = \rho_{n0}/\rho_{i0}$  est le rapport de la masse volumique des neutres sur celle des ions ( $\chi > 1$  dans les milieux principalement neutres).  $V_{Ai}$  correspond à la vitesse d'Alfvén dite "des ions", c'est à dire la vitesse d'Alfvén du fluide ionisé uniquement.  $V_{Si}$  ( $V_{Sn}$ ) correspond à la vitesse du son du fluide ionisé (neutre).

Sans perte de généralité, dans le repère cartésien de vecteurs de base  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , il est possible de considérer que le champ magnétique moyen est aligné dans la direction  $z$  ( $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ ) et que le vecteur d'onde des perturbations est défini dans le plan  $x - z$  tel que  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_z \mathbf{e}_z = k \sin \theta \mathbf{e}_x + k \cos \theta \mathbf{e}_z$  où  $\theta$  est l'angle entre le vecteur d'onde et la direction du champ magnétique  $\mathbf{B}_0$ .

En développant les équations (1.87 et 1.91) nous obtenons deux systèmes matriciels dont le premier décrit la dynamique des perturbations le long de l'axe  $y$

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 - i\nu_{in}\omega + k_z^2 V_{Ai}^2 & i\omega\nu_{in} \\ i\omega\nu_{ni} & -\omega^2 - i\omega\nu_{ni} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta v_{iy} \\ \delta v_{ny} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.100)$$

et le second décrit la dynamique des perturbations dans le plan  $x - z$

$$(\mathbf{M} - \omega^2 \mathbf{1}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (1.101)$$

où  $\mathbf{X} = [\delta v_{ix} \quad \delta v_{iz} \quad \delta v_{nx} \quad \delta v_{nz}]^T$  et

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -i\omega\nu_{in} + V_{Ai}^2 k^2 + V_{Si}^2 k_x^2 & V_{Si}^2 k_x k_z & i\omega\nu_{in} & 0 \\ V_{Si}^2 k_x k_z & -i\omega\nu_{in} + V_{Si}^2 k_z^2 & 0 & i\omega\nu_{in} \\ i\omega\nu_{ni} & 0 & -i\nu_{ni}\omega + k_x^2 V_{Sn}^2 & V_{Sn}^2 k_x k_z \\ 0 & i\omega\nu_{ni} & V_{Sn}^2 k_x k_z & -i\omega\nu_{ni} + V_{Sn}^2 k_z^2 \end{bmatrix}.$$

Les systèmes (1.100) et (1.101) décrivent respectivement la relation de dispersion des modes d'Alfvén dont l'amplitude des perturbations est établie le long de l'axe  $y$  c'est à dire perpendiculairement à l'alignement du champ magnétique et au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , et la relation de dispersion des modes magnétosoniques dont l'amplitude est établie dans le plan  $x - z$  de la même manière que dans l'approche MHD idéale. La relation de dispersion des modes d'Alfvén en MHD bi-fluide est donnée par

$$\omega^3 + i\omega^2 \nu_{ni}(1 + \chi) - \omega k_z^2 V_{Ai}^2 - i\nu_{ni} k_z^2 V_{Ai}^2 = 0 \quad (1.102)$$

tandis que la relation de dispersion des modes magnétosoniques est donnée par

$$\sum_{i=0}^7 C_i \omega^i = 0 \quad (1.103)$$

où les coefficients  $C_i$  s'obtiennent après calcul du déterminant de la matrice  $\mathbf{M} - \omega^2 \mathbf{1}$  et en arrangeant le résultat sous la forme d'un polynôme de degré 7 en  $\omega$ .

La dynamique des modes d'Alfvén et magnétosoniques dans l'approche MHD bi-fluide est très bien décrite par ([210]) et ([211]). Ainsi la suite de l'analyse s'appuie et se compare essentiellement aux travaux cités.

La relation de dispersion (1.102) nécessite de résoudre un polynôme de degré 3 pour chaque valeur de l'échelle  $k$ . Des solutions analytiques existent, la méthode de Cardano

(annexe A.2) permet de les obtenir facilement. La relation de dispersion (1.103) nécessite de résoudre un polynôme de degré 7 pour chaque valeur de l'échelle  $k$ . Il n'existe pas de solutions analytiques et discernables de polynômes de degrés supérieur à 5. La résolution numérique est donc obligatoire. Pour cela nous appliquons la méthode de Durand-Kerner d'ordre 7 connue pour converger rapidement vers le 7-uplet de solutions. L'un des problèmes inhérent à la résolution numérique de relations de dispersion présentant une dégénérescence de solutions est le suivi des solutions. Cette problématique ainsi que la méthode Kerner modifiée qui en découle sont discutées dans l'annexe (A.3). Avant toute résolution cependant, à des fins de simplifications numériques, nous effectuons le changement de variable suivant

$$\omega = -is$$

afin que les coefficients des polynômes soient à valeur réelle uniquement. Ainsi, en supposant que les solutions sont de la forme  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  où  $R$  désigne la partie oscillatoire des modes normaux et  $I$  la partie évanescence, en posant  $s = s_R + is_I$  il vient les relations  $\omega_R = s_I$  et  $\omega_I = -s_R$ .

#### 1.1.4.2 Solutions perturbatives de la MHD bi-fluide

Les modes d'Alfvén solutions de la relation de dispersion (1.102) sont présentés dans la figure (2.2) dans les phases HII (milieu composé d'hydrogène ionisé), WIM (Warm Ionized Medium), WNM (Warm Neutral Medium), CNM (Cold Neutral Medium), DiM (Diffuse Molecular medium), DeM (Dense Molecular medium) et DeC (Dense Core) du milieu interstellaire dont les propriétés sont présentées dans la table (2.1). La partie réelle des modes d'Alfvén est représentée par un trait plein bleu tandis que la partie imaginaire des modes d'Alfvén est représentée par un trait plein noir. Nous notons que les solutions obtenues sont bien différentes de celles obtenues dans l'approche MHD idéale. Pour une analyse détaillée des modes d'Alfvén dans l'approche MHD bi-fluide, le lecteur peut se référer à la section (2.2.1.2).

Les modes magnétosoniques, solutions de la relation de dispersion (1.103) sont représentés dans les figures (1.2) et (1.3) pour différents jeux de paramètres  $\beta_i = V_{Si}^2/V_{Ai}^2$ ,  $\theta$  et  $\chi$ , arbitrairement choisis parmi les solutions présentées par Soler et al. (2013) [211]. Pour chaque figure, les sous-figures de gauche représentent la partie réelle des modes solution  $\omega_R$  tandis que les sous-figures de droite représentent la partie imaginaire des modes solution  $\omega_I$ . Afin de faciliter leur lecture, les solutions sont normalisées par  $kV_{Si}$  et représentées suivant une abscisse  $\nu_b/kV_{Si}$  où  $\nu_b = (\rho_i\nu_{in} + \rho_n\nu_{ni})/(\rho_i + \rho_n)$  représente la fréquence de collision moyenne. Dans l'approche MHD bi-fluide, nous remarquons qu'il existe quatre solutions différentes soit deux de plus que dans l'approche MHD idéale. Tout d'abord nous avons les modes magnétosoniques rapides et lents, représentés par les traits pleins noirs et les tirets bleus respectivement. A ces modes s'ajoutent un mode purement sonique ne faisant aucunement intervenir le champ magnétique en tirets verts, et un mode que l'on qualifie d'entropie car sa pulsation réelle est nulle mais sa par-

tie imaginaire possède bien une valeur (en alternance de tirets-points noirs). Le mode d'entropie représente les perturbations de densité et donc la compression du plasma. Ce mode est également présent dans la relation de dispersion des ondes d'Alfvén mais n'a pas été représenté dans la figure (2.2) car il ne joue aucun rôle direct dans la dynamique du transport des modes d'Alfvén. Un panel de solutions beaucoup plus complet est proposé par Soler et al. (2013) [211]. Les solutions obtenues sont complexes et présentent même des bifurcations dans leur partie imaginaire dans les zones où le régime d'interactions ion-neutre semble évoluer. Similairement au cas des modes d'Alfvén, on peut décomposer l'analyse en deux régimes asymptotiques : le régime découplé ( $\nu_{in} \approx \nu_{ni} \rightarrow 0$ ), et le régime couplé ( $\nu_{in} \approx \nu_{ni} \rightarrow \infty$ ) :

→ **Régime découplé** ( $\nu_{in} \approx \nu_{ni} \rightarrow 0$ ) : Dans un tel cas, le système d'équations (1.101) révèle deux sous-systèmes indépendants

$$\begin{bmatrix} V_{Ai}^2 k^2 + V_{Si}^2 k_x^2 - \omega^2 & V_{Si}^2 k_x k_z \\ V_{Si}^2 k_x k_z & V_{Si}^2 k_z^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta v_{ix} \\ \delta v_{iz} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.104)$$

$$\begin{bmatrix} V_{Sn}^2 k_x^2 - \omega^2 & V_{Sn}^2 k_x k_z \\ V_{Sn}^2 k_x k_z & V_{Sn}^2 k_z^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta v_{nx} \\ \delta v_{nz} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.105)$$

agissant respectivement sur le fluide ionisé et sur le fluide neutre dans le plan ( $x - z$ ). Les relations de dispersion associées sont données par

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (V_{Ai}^2 + V_{Si}^2) + k^4 V_{Ai}^2 V_{Si}^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (1.106)$$

$$\omega^2 - k^2 V_{Sn}^2 = 0 \quad (1.107)$$

pour le fluide ionisé et le fluide neutre respectivement. En l'absence de collisions ion-neutre, les deux fluides n'interagissent pas entre eux et les solutions sont ramenées à celles de l'approche MHD idéale pour le fluide ionisé et à l'approche HD idéale pour le fluide neutre. Sur les figures (1.2) et (1.3), ces solutions correspondent globalement à la partie  $\nu_b/kV_{Si} \ll 1$ . Notons tout de même que la partie imaginaire des solutions n'est pas nulle car le régime étudié est purement asymptotique.

→ **Régime couplé** ( $\nu_{in} \approx \nu_{ni} \rightarrow \infty$ ) : Soler et al. (2013) [211] montre que le système d'équations (1.101) conduit à la relation de dispersion

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 \frac{V_{Ai}^2 + V_{Si}^2 + \chi V_{Sn}^2}{1 + \chi} + k^4 \frac{V_{Ai}^2 (V_{Si}^2 + \chi V_{Sn}^2)}{(1 + \chi)^2} \cos^2 \theta = 0 \quad (1.108)$$

dont les solutions sont données par

$$\omega^2 = k^2 \frac{V_{\text{Ai}}^2 + V_{\text{Si}}^2 + \chi V_{\text{Sn}}^2}{2(1 + \chi)} \pm k^2 \frac{V_{\text{Ai}}^2 + V_{\text{Si}}^2 + \chi V_{\text{Sn}}^2}{2(1 + \chi)} \sqrt{1 - \frac{4V_{\text{Ai}}^2(V_{\text{Si}}^2 + \chi V_{\text{Sn}}^2) \cos^2 \theta}{(V_{\text{Ai}}^2 + V_{\text{Si}}^2 + \chi V_{\text{Sn}}^2)^2}} \quad (1.109)$$

où le signe + désigne les modes rapides modifiés et le signe – désigne les modes lents modifiés. En effet, nous notons que ces modes sont modifiés relativement au cas de la MHD idéale par la présence du fluide neutre. Dans ce régime les fluides ionisé et neutre évoluent ensemble. Ceci se témoigne par la valeur du paramètre  $\chi = \rho_n/\rho_i$  qui conduit aux solutions de la MHD idéale lorsque sa valeur est nulle. Le régime couplé est lisible sur les figures (1.2) et (1.3) dans la zone où  $\nu_b/kV_{\text{Si}} \gg 1$ . Nous observons d’une part une réduction des vitesses de propagation des modes rapides et lents relative à la valeur du paramètre  $\chi$ , et une disparition du mode de son neutre. Soler et al. (2013) [211] a exploré un grand nombre de régimes de propagation différents, la lecture de son travail est conseillée au lecteur souhaitant plus de détails.

L’étude des modes d’Alfvén et magnétosoniques dans l’approche MHD bi-fluide revêt une importance capitale car elle permet de comprendre une grande partie de la dynamique des plasmas partiellement ionisés qui constituent une part non-négligeable du milieu interstellaire. Dans ce travail de thèse, les solutions de propagation des modes d’Alfvén dans l’approche MHD bi-fluide sont utilisées (voir section 2.2) pour comprendre comment le rayonnement cosmique interagit avec le plasma via les perturbations magnétiques qu’il génère. Comme nous le verrons dans la suite, les propriétés de la turbulence dans le milieu interstellaire sont hautement connexes aux propriétés de propagation des modes. Bien que non-utilisés dans la section (2.2), les modes magnétosoniques jouent également un rôle très important dans la dynamique du milieu interstellaire [238] et par continuité, dans le transport du rayonnement cosmique, qu’il serait intéressant de quantifier dans le cadre de la poursuite du travail engagé dans cette thèse. Enfin, bien que plus complète, l’approche MHD bi-fluide ne suffit pas à l’étude détaillée d’un plasma partiellement ionisé. En effet, dans le cadre de nuages moléculaires il sera intéressant de considérer en plus un ou plusieurs fluides de poussière dont la neutralité est discutable. Nous nous trouvons alors dans une approche MHD multi-fluide bien plus complexe à étudier. Dans ce dernier cas, l’approche perturbative peut devenir extrêmement périlleuse. Les physiciens préféreront directement résoudre le système d’équations (1.74 - 1.80) adapté au cas multifiuide numériquement. Cette dernière méthode a l’avantage de pouvoir traiter des systèmes bien plus complexes, en revanche, le suivi et la levée de la dégénérescence des solutions est également beaucoup plus complexe.

### 1.1.5 Théorie cinétique des ondes plasma

Dans cette section, nous résumons le processus analytique d’étude d’un plasma par l’approche de la description cinétique telle que présentée par ([194], chapitre 8). L’approche particulière est plus précise que l’approche fluide car elle permet de décrire la dynamique

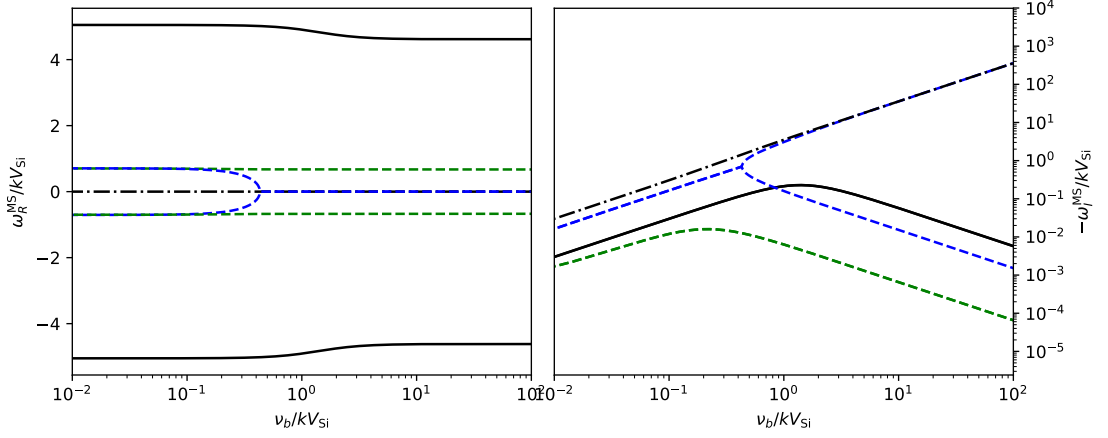
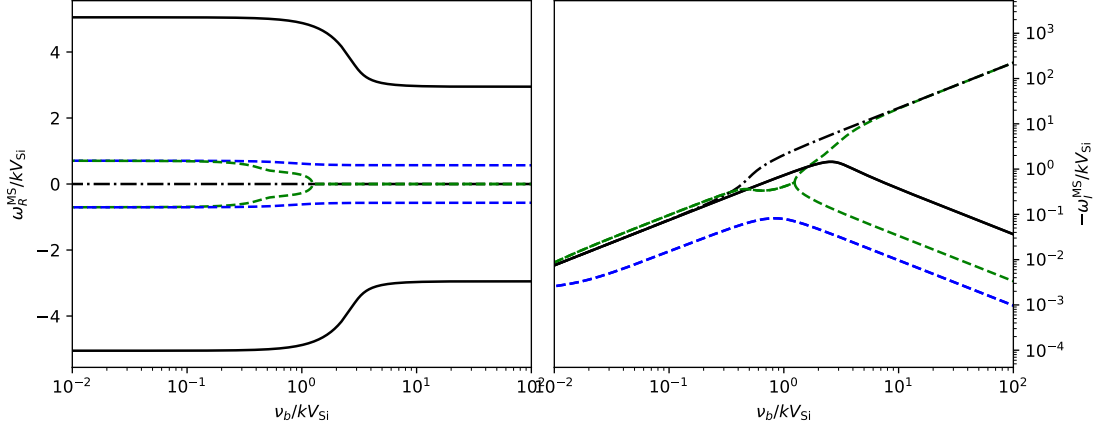
(a)  $\beta_i = 0.04$ ,  $\theta = \pi/4$ ,  $\chi = 0.2$ (b)  $\beta_i = 0.04$ ,  $\theta = \pi/4$ ,  $\chi = 2$ 

Figure 1.2: Figures représentant les solutions de la relation de dispersion des modes magnéto-soniques (1.103) pour différentes valeurs de  $\beta_i$  et  $\chi$ . Les sous-figures de gauche représentent la partie réelle des solutions tandis que les sous-figures de droite représentent la partie imaginaire des solutions. Les résultats obtenus sont présentés de la même manière, et sont à comparer à Soler et al. (2013) [211]. En traits pleins noirs sont représentés les modes magnéto-soniques rapides, en tirets verts sont représentés les modes soniques, en tirets bleus sont représentés les modes magnéto-soniques lents et en alternance de tiret-point noirs est représenté le mode d'entropie. Pour les paramètres utilisés, je trouve un très bon accord avec les solutions de Soler et al. (2013) [211].

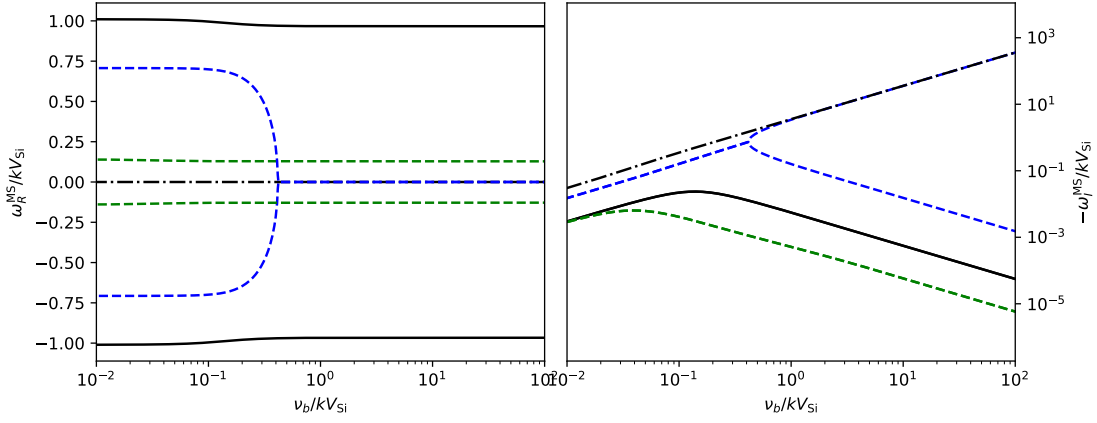
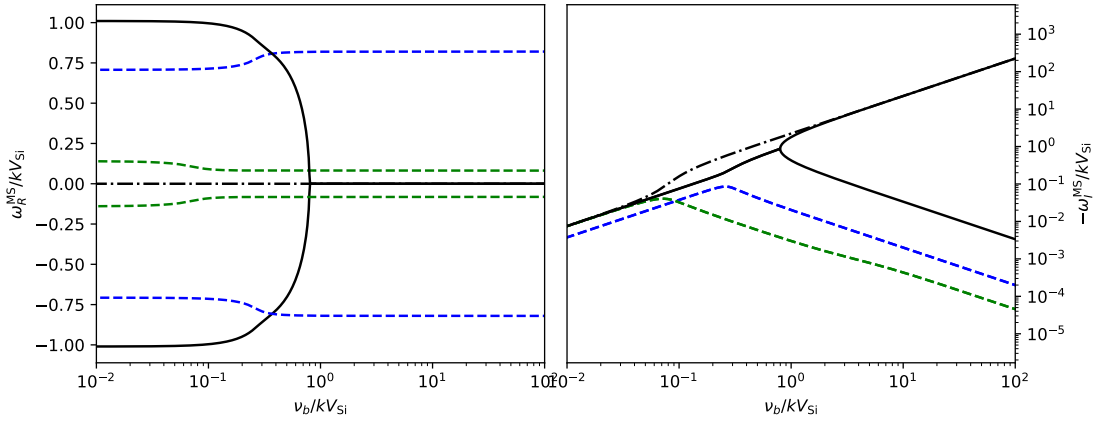
(a)  $\beta_i = 25, \theta = \pi/4, \chi = 0.2$ (b)  $\beta_i = 25, \theta = \pi/4, \chi = 2$ 

Figure 1.3: Figures représentant les solutions de la relation de dispersion (1.103) pour différentes valeurs de  $\beta_i$  et  $\chi$ . Les sous-figures de gauche représentent la partie réelle des solutions tandis que les sous-figures de droite représentent la partie imaginaire des solutions. Les résultats obtenus sont présentés de la même manière, et sont à comparer à Soler et al. (2013) [211]. En traits pleins noirs sont représentés les modes magnéto-soniques rapides, en tirets verts sont représentés les modes soniques, en tirets bleus sont représentés les modes magnéto-soniques lents et en alternance de tiret-point noirs est représenté le mode d'entropie. Pour les paramètres utilisés, je trouve un très bon accord avec les solutions de Soler et al. (2013) [211].



des gaz dont la longueur de collision ( $\lambda$ ) est grande par rapport à la taille physique du système où, de manière équivalente, de sonder des plasmas à des échelles inférieures à la longueur caractéristique de collision ( $\lambda$ ).

### Equations cinétiques des plasmas

Considérons un ensemble de particules plasma d'espèce  $a$  et décrit par une fonction de distribution  $f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  interagissant avec un champ EM décrit par les vecteurs  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ . L'espace des phases est conservé dans le temps, à un terme de source près. Il en résulte la relation

$$\frac{df_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{dt} = S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (1.110)$$

où  $S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  est une fonction source de particules de l'espèce  $a$ . En considérant les équations du mouvement de chacune des particules du plasma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= q_a \left[ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{c} \right], \end{aligned}$$

on en déduit l'équation de Vlasov du système

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{x}} + q_a \left[ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{c} \right] \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \quad (1.111)$$

Le champ EM obéit aux équations de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (1.112)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.113)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.114)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (1.115)$$

où

$$\mathbf{J} = \sum_a q_a \int_{-\infty}^{+\infty} d^3p \mathbf{v} f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (1.116)$$

$$\rho = \sum_a q_a \int_{-\infty}^{+\infty} d^3p f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (1.117)$$

sont le courant et la densité de charges des particules de l'espèce  $a$  respectivement.  $n_a$  et  $q_a$  correspondent à la densité numérique de particules et à la charge électrique

respectivement. L'équation de Vlasov ainsi obtenue décrit la dynamique des particules de l'espèce  $a$  plongées dans le champ  $(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{B}(\mathbf{x}, t))$  et ne subissant aucune autre force que la force de Lorentz. Par l'intermédiaire des densités de charge  $\rho$  et de courant  $\mathbf{J}$  de particules de l'espèce  $a$ , les champs  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  se trouvent affectés et répondent aux équations de Maxwell. Dans la suite, nous ne considérons pas la présence d'un terme source de particules.

### Tenseur de conductivité

La résolution couplée du système composé de l'équation de Vlasov et des équations de Maxwell peut-être analytiquement compliquée. C'est pourquoi il est plus courant d'étudier le comportement de petites perturbations du système en connaissant son état au repos. Pour cela, nous considérons les variables de notre système comme la somme d'une composante à l'équilibre et d'une composante perturbée de faible valeur. On pose

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= f_a^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \delta f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) + \delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t) + \delta \mathbf{B}(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Le système d'équations (1.111) - (1.115) devient

$$\frac{\partial \delta f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{x}} + q_a \left[ \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t)}{c} \right] \cdot \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{p}} = -q_a \left[ \delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{c} \right] \cdot \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial \mathbf{p}} \quad (1.118)$$

pour l'équation de Vlasov et

$$\nabla \times \delta \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \delta \mathbf{J} \quad (1.119)$$

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{B} = 0 \quad (1.120)$$

$$\nabla \times \delta \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.121)$$

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{E} = 4\pi \rho \quad (1.122)$$

pour les équations de Maxwell, où

$$\delta \mathbf{J} = \sum_a q_a \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 p \mathbf{v} \delta f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (1.123)$$

$$\delta \rho = \sum_a q_a \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 p \delta f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \quad (1.124)$$

Il est possible de trouver une solution au premier ordre perturbée de l'équation de Vlasov linéarisée (1.118) en intégrant la partie gauche considérée comme une dérivée

temporelle totale prise le long de la trajectoire des particules en mouvement dans le champ électromagnétique non perturbé décrit par

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= q_a \left[ \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t)}{c} \right] \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Il vient alors

$$\frac{d\delta f_a}{dt} = -q_a \left[ \delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{c} \right]_{\mathcal{C}} \cdot \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (1.125)$$

La solution exprimée le long de la caractéristique  $\mathcal{C}$  est donnée par

$$\delta f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \delta f_a(\mathbf{x}^0, \mathbf{p}^0, 0) - q_a \int_0^t dt' \left[ \delta \mathbf{E}(\mathbf{x}', t') + \frac{\mathbf{v}' \times \delta \mathbf{B}(\mathbf{x}', t')}{c} \right]_{\mathcal{C}} \cdot \frac{\partial f_a^{(0)}(\mathbf{x}', \mathbf{p}', t')}{\partial \mathbf{p}'}. \quad (1.126)$$

En utilisant le résultat (1.126) est possible de redéfinir l'expression du courant (1.123) sous la forme

$$\delta \mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \otimes \delta \mathbf{E} \quad (1.127)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est appelé tenseur de conductivité. La relation (1.127) relie les perturbations de la densité de courant et la composante électrique du champ EM. De plus, le système à résoudre se réduit aux équations (1.119), (1.121) et (1.127).

### Relation de dispersion

La solution (1.126) n'est généralement pas obtainable analytiquement car les fonction de perturbation du champ électromagnétique  $\delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  et  $\delta \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  ne sont généralement pas connues. Il est alors intéressant de traiter les perturbations du plasma (que l'on suppose infinies, stationnaires et homogènes à l'ordre zéro) dans l'approximation WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin [232]). On exprime les variables du système sous la forme d'intégrales de Fourier dans un premier temps

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 k \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (1.128)$$

$$\delta \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 k \mathbf{B}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (1.129)$$

$$\delta \mathbf{f}_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 k \mathbf{f}_a(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (1.130)$$

et sous la forme d'intégrales de Laplace dans un second temps

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^{+\infty} dt \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) \exp(i\omega t) \quad (1.131)$$

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^{+\infty} dt \mathbf{B}(\mathbf{k}, t) \exp(i\omega t) \quad (1.132)$$

$$\mathbf{f}_{a,1}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{p}) = \int_0^{+\infty} dt \mathbf{f}_a(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t) \exp(i\omega t) \quad (1.133)$$

où la partie imaginaire de  $\omega$  est suffisamment positive pour assurer la convergence de l'intégrale de Laplace. Les équations (1.119) et (1.121) deviennent

$$i\mathbf{ck} \times \mathbf{E}_1 = i\omega \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}(\mathbf{k}, 0) \quad (1.134)$$

$$i\mathbf{ck} \times \mathbf{B}_1 = 4\pi \mathbf{J}_1 - i\omega \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}(\mathbf{k}, 0) \quad (1.135)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \delta \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\ &= \sum_a q_a \int_{-\infty}^{+\infty} d^3p \mathbf{v} f_{a,1}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (1.136)$$

représente la transformation de Fourier-Laplace de la densité de perturbations de courant  $\delta \mathbf{J}$ . Les derniers termes de droite des équations (1.134) et (1.135) viennent de la présence de la dérivée temporelle dans les équations (1.119) et (1.121) qui, après intégration par parties, se retrouve dans la transformation de Laplace. Dans cette approximation, (1.127) se réécrit

$$J_{1,i}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_{1,j}(\mathbf{k}, \omega) \quad (1.137)$$

où  $\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  représente la transformation de Fourier-Laplace du tenseur de conductivité  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ .

En injectant (1.134) et (1.137) dans (1.135), on obtient une équation unique sur la variable  $\delta \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  donnée par

$$(-\omega^2 + k^2 c^2 - 4\pi i \omega \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{E}_1 - c^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{k} = i\mathbf{ck} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}, 0) - i\omega \mathbf{E}(\mathbf{k}, 0). \quad (1.138)$$

En introduisant le vecteur d'onde normalisé  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ , l'équation ci-dessus peut se réécrire

$$\Lambda_{nj}E_{1,j}(\mathbf{k}, \omega) = A_n(\mathbf{k}, \omega) \quad (1.139)$$

où l'opérateur de Maxwell  $\Lambda_{nj}$  est défini comme

$$\Lambda_{nj} = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} (\kappa_n \kappa_j - \delta_{nj}) + \psi_{nj} \quad (1.140)$$

où le tenseur dielectrique  $\psi_{nj}$  est défini comme

$$\psi_{nj} = \delta_{nj} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{nj}. \quad (1.141)$$

Le vecteur  $\mathbf{A}$  s'écrit

$$A_n(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{\omega} E_n(\mathbf{k}, 0) - \frac{ick}{\omega^2} \varepsilon_{nrs} \kappa_r B_s(\mathbf{k}, 0) \quad (1.142)$$

et contient les conditions initiales de la perturbation.  $\varepsilon_{nrs}$  correspond au tenseur de Levi-Civita. La résolution de l'équation (1.139) donne

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{\Lambda}^{-1} \cdot \mathbf{A} \quad (1.143)$$

où l'inverse de l'opérateur de Maxwell est donné par

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{\Lambda})} \begin{bmatrix} \Lambda_{22}\Lambda_{33} - \Lambda_{23}\Lambda_{32} & \Lambda_{31}\Lambda_{23} - \Lambda_{21}\Lambda_{33} & \Lambda_{21}\Lambda_{32} - \Lambda_{31}\Lambda_{22} \\ \Lambda_{32}\Lambda_{13} - \Lambda_{12}\Lambda_{33} & \Lambda_{11}\Lambda_{33} - \Lambda_{13}\Lambda_{31} & \Lambda_{12}\Lambda_{31} - \Lambda_{11}\Lambda_{32} \\ \Lambda_{12}\Lambda_{23} - \Lambda_{13}\Lambda_{22} & \Lambda_{21}\Lambda_{13} - \Lambda_{11}\Lambda_{23} & \Lambda_{11}\Lambda_{22} - \Lambda_{12}\Lambda_{21} \end{bmatrix}. \quad (1.144)$$

Le tenseur dielectrique satisfait les relations

$$\psi_{nj}(-\mathbf{k}, -\omega) = \psi_{nj}(\mathbf{k}, \omega)^* \quad (1.145)$$

où l'astérisque désigne le complexe conjugué. Cette relation découle directement des propriétés intrinsèques aux transformées de Fourier-Laplace. Dans le cas où l'on choisit un système plongé dans un champ magnétique dont la composante uniforme est dirigée suivant l'axe  $z$ , et dont le vecteur d'onde des perturbations  $\mathbf{k}$  se trouve dans le plan  $x - z$ , les relations de Onsager donnent

$$\psi_{xy} = -\psi_{yx}, \quad \psi_{xz}^* = \psi_{zx}, \quad \psi_{yz}^* = -\psi_{zy}. \quad (1.146)$$

En appliquant la transformation de Fourier-Laplace inverse de  $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega)$  à la relation (1.143), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_L d\omega \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_L d\omega \mathbf{\Lambda}^{-1} \cdot \mathbf{A} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (1.147)$$

où  $L$  désigne le contour de Landau qui assure que la fonction à intégrer est holomorphe et définie sur tout le plan complexe  $\mathcal{R}e(\omega) - \mathcal{I}m(\omega)$  tant qu'il ne passe pas par les pôles de la fonction ([132]). Cependant, pour préserver la convergence de l'intégrale de Laplace, il est nécessaire que le contour  $L$  passe au dessus des pôles de la fonction  $\mathbf{\Lambda}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ . Par ailleurs, ces derniers ne sont autres que les solutions de la relation

$$\det[\mathbf{\Lambda}(\mathbf{k}, \omega)] = 0 \quad (1.148)$$

qui définit la relation de dispersion du système. Les modes normaux du plasma sont les solutions à valeur complexe  $\omega(\mathbf{k})$  de (1.148).

### Le vecteur polarisation

A partir de la relation de dispersion (1.148), il est possible de déterminer l'état de polarisation des modes solution. On définit le vecteur polarisation  $\mathbf{e}$  par

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_1}{|\mathbf{E}_1|} \quad (1.149)$$

$$\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} = 1. \quad (1.150)$$

De la relation (1.144) on tire l'égalité

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}^T \Leftrightarrow \det(\mathbf{\Lambda})\delta_{ik} = \Lambda_{ij}\Lambda_{jk}^T \quad (1.151)$$

qui pour chaque mode ( $\det(\mathbf{\Lambda}) = 0$ ) se réduit à

$$\Lambda_{ij}\Lambda_{jk}^T = 0. \quad (1.152)$$

En comparant la relation ci-dessus avec la relation (1.139) où le terme  $A_n(\mathbf{k}, \omega)$  est annulé par la relation de dispersion (1.148) pour préserver l'amplitude de  $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega)$  défini par la relation (1.143), il est possible de choisir un vecteur polarisation tel que

$$e_j = C\Lambda_{jk}^T a_k \quad (1.153)$$

où  $a_k$  est un vecteur unitaire arbitraire et  $C$  est une constante issue de la relation de normalisation (1.150) du vecteur polarisation. Il vient alors

$$C = (\Lambda_{kl}^T a_k a_l \Lambda_{ss}^T)^{-1/2} \quad (1.154)$$

où  $\Lambda_{ss}^T = \Lambda_{11}^T + \Lambda_{22}^T + \Lambda_{33}^T$  est la trace de  $\Lambda_{ij}^T$ . On en déduit l'expression du vecteur polarisation des ondes plasma

$$e_i = \frac{\Lambda_{ij}^T a_j}{(\Lambda_{kl}^T a_k a_l \Lambda_{ss}^T)^{1/2}} \quad (1.155)$$

### Tenseur de conductivité $\sigma$

Le calcul de la relation de dispersion des modes plasma dans l'approche cinétique passe indéniablement par le calcul du tenseur de conductivité du plasma qui est obtenu à travers la résolution des relations (1.127) et (1.126). Ce calcul est bien souvent très complexe, cependant ([194], Chapitre 8.3.6) propose d'en dériver une expression suffisamment générale pour s'adapter à la plupart des situations astrophysiques.

Nous nous restreignons au cas d'un plasma sans champ électrique moyen ( $\mathbf{E}_0 = 0$ ) et avec un champ magnétique moyen uniformément distribué aligné le long de l'axe  $z$ ;  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ . Nous considérons également que le vecteur d'onde des perturbations est contenu dans le plan  $x - z$  c'est à dire

$$\mathbf{k} = k_{\parallel} \mathbf{e}_z + k_{\perp} \mathbf{e}_x. \quad (1.156)$$

On pose également

$$z = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_a} \quad (1.157)$$

$$\alpha = \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{\Omega_a} \quad (1.158)$$

où  $\Omega_a = \epsilon_a \Omega_{0a} / \gamma$  est la gyrofréquence relativiste des particules de l'espèce  $a$ ,  $\gamma$  est le facteur de Lorentz,  $\epsilon_a$  correspond au signe de la charge des particules de l'espèce  $a$  et

$$\Omega_{0a} = \frac{|q_a| B_0}{m_a c} \quad (1.159)$$

est la gyrofréquence des particules de l'espèce  $a$ . Le tenseur de conductivité est alors donné par

$$\sigma_{ij}(k_{\parallel}, k_{\perp}, \omega) = 2\pi i \sum_a q_a^2 n_a \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\parallel} \int_0^{+\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}}{\Omega_a} T_{ij} \quad (1.160)$$

où

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{I_{11}(\alpha, z)}{z^2} v_{\perp} \mathbf{U} f_a^{(0)} & \frac{i I_{12}(\alpha, z)}{z^2} v_{\perp} \mathbf{U} f_a^{(0)} & \frac{v_{\perp} I_{13}(\alpha, z)}{z} \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_{\parallel}} - \frac{v_{\perp} I_{11}(\alpha, z)}{z} \mathbf{V} f_a^{(0)} \\ -\frac{i I_{12}(\alpha, z)}{z} v_{\perp} \mathbf{U} f_a^{(0)} & I_{22}(\alpha, z) v_{\perp} \mathbf{U} f_a^{(0)} & -i v_{\perp} I_{23}(\alpha, z) \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_{\parallel}} + i v_{\perp} I_{12}(\alpha, z) \mathbf{V} f_a^{(0)} \\ \frac{I_{13}(\alpha, z)}{z} v_{\parallel} \mathbf{U} f_a^{(0)} & i I_{23}(\alpha, z) v_{\parallel} \mathbf{U} f_a^{(0)} & v_{\parallel} I_{33}(\alpha, z) \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_{\parallel}} - v_{\parallel} I_{13}(\alpha, z) \mathbf{V} f_a^{(0)}. \end{bmatrix} \quad (1.161)$$

Les opérateurs  $\mathbf{U} f_a^{(0)}$  et  $\mathbf{V} f_a^{(0)}$  sont définis par

$$\mathbf{U}f_a^{(0)} = \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_\perp} + \frac{k_\parallel}{\gamma m_a \omega} \left( p_\perp \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_\parallel} - p_\parallel \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_\perp} \right) \quad (1.162)$$

$$\mathbf{V}f_a^{(0)} = \frac{\Omega_a}{\omega p_\perp} \left( p_\perp \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_\parallel} - p_\parallel \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial p_\perp} \right). \quad (1.163)$$

Les fonctions  $I_{ij}(\alpha, z)$  sont définies par

$$\begin{aligned} I_{11}(\alpha, z) &= \alpha + \alpha^2 S(\alpha, z) \\ I_{13}(\alpha, z) &= 1 + \alpha S(\alpha, z) \\ I_{33}(\alpha, z) &= S(\alpha, z) \\ I_{23}(\alpha, z) &= \frac{1}{2} \frac{\partial S(\alpha, z)}{\partial z} \\ I_{12}(\alpha, z) &= \frac{\alpha}{2} \frac{\partial S(\alpha, z)}{\partial z} \\ I_{22}(\alpha, z) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(\alpha, z)}{\partial z^2} + \frac{1}{2z} \frac{\partial S(\alpha, z)}{\partial z} + \left( 1 - \frac{\alpha^2}{z^2} \right) S(\alpha, z) - \frac{\alpha}{z^2} \end{aligned}$$

où la fonction  $S$  est une série infinie de fonctions de Bessel  $J_n$  d'ordre  $n$

$$S(\alpha, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n^2(z)}{n - \alpha}. \quad (1.164)$$

Dans le cas où  $z \rightarrow 0$ , il peut être plus simple d'utiliser un comportement asymptotique de la fonction et ses dérivées

$$\begin{aligned} S(\alpha, z \ll 1) &\approx -\frac{1}{\alpha} + \frac{z^2}{2\alpha(1-\alpha^2)} \\ \frac{\partial S(\alpha, z \ll 1)}{\partial z} &\approx \frac{z}{\alpha(1-\alpha^2)} \\ \frac{\partial^2 S(\alpha, z \ll 1)}{\partial z^2} &\approx \frac{z}{\alpha(1-\alpha^2)}. \end{aligned}$$

## 1.2 Le milieu interstellaire turbulent

Le plasma interstellaire est magnétisé et turbulent. De fait, il joue un rôle extrêmement important dans les propriétés du transport du rayonnement cosmique. Il n'existe pas de théorie de la turbulence car les solutions de l'équation de Navier-Stokes - qui régit la dynamique d'un plasma Newtonien visqueux, dont nous effectuons la démonstration - sont chaotiques. Hormis le traitement de la turbulence via des codes de simulation numérique,



l'essentiel de la phénoménologie de la turbulence consiste en l'étude des différents moments de l'équation de Navier-Stokes, systèmes, qui sont accompagnés d'une relation de fermeture. Dans cette section sont présentées par ordre chronologique l'essentiel des phénoménologies - développées et acceptées par la communauté - permettant de donner une description statistique du comportement du plasma dans les différentes phases du milieu interstellaire.

L'annexe (A.6) présente quelques définitions importantes du formalisme mathématique sous-jacent à l'étude des systèmes dynamiques chaotiques ainsi que la terminologie qui sera utilisée dans la suite de l'étude. L'essentiel des résultats présentés sont tirés de ([77]).

## 1.2.1 Eléments de théorie et modèles de turbulence

### 1.2.1.1 L'équation de Navier-Stokes

L'équation de Navier-Stokes est la conséquence de la dissipation de l'énergie du mouvement d'un fluide au sein de lui-même et sa transformation en chaleur. Ce processus est thermodynamiquement irréversible et est la conséquence de la viscosité et de la conductivité thermique du fluide. Dans la suite, nous nous restreignons aux fluides Newtoniens.

Nous rappelons l'équation d'Euler d'un fluide compressible donnée par (1.25)

$$\rho(\mathbf{x}, t) \left( \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} \right)_L - \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.165)$$

où  $\bar{\mathbf{T}}$  représente le flux de moment du fluide. Ce dernier peut être décomposé en une composante de transfert idéale (réversible) et une composante visqueuse (non réversible). En notation d'Einstein, il se réécrit

$$\begin{aligned} T_{ik} &= P\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} \\ &= -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k \end{aligned} \quad (1.166)$$

où  $\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$  est appelé tenseur de stress et  $\sigma'_{ik}$  est le tenseur de stress visqueux. Le terme  $\rho v_i v_k$  correspond aux transferts de moment directement liés à l'inertie du fluide. La dérivation du tenseur de stress visqueux passe par trois hypothèses fondamentales sur le comportement du fluide ([131]) :

- Le processus de friction interne dans un fluide a lieu lorsque les particules du fluide ont des vitesses différentes les unes des autres. C'est à dire si l'on observe une divergence non-nulle du champ de vitesse du fluide.
- Si les gradients de vitesse entre les éléments de fluide sont petits, on peut supposer que les transferts de moment liés à la viscosité ne dépendent que des dérivées premières du champ de vitesse.

→ Le terme  $\sigma'_{ik}$  doit s'annuler si le champ de vitesse du fluide est constant, ou encore si l'ensemble du fluide est en rotation uniforme.

Le tenseur de rang 2 le plus général satisfaisant les conditions ci-dessus est donné par

$$\sigma'_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad (1.167)$$

où les coefficients  $\eta$  et  $\zeta$  sont appelés coefficients de viscosités et sont généralement fonction de la pression et de la température du fluide. Cependant, ils n'évoluent pas notablement et peuvent être considérés comme constants en première approximation. Finalement le flux de moment se réécrit

$$T_{ik} = \rho v_i v_k + P \delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \quad (1.168)$$

On en déduit l'équation de Navier-Stokes d'un fluide visqueux compressible

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) \left[ \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right] &= -\nabla P(\mathbf{x}, t) + \eta \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ &+ \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)). \end{aligned} \quad (1.169)$$

Dans le cas où le fluide est incompressible ( $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0$ ), (1.170) devient

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{x}, t) + \nu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1.170)$$

où  $\nu = \eta/\rho$  est appelé viscosité cinétique du fluide. Dans le cas où le fluide est magnétisé et incompressible, l'équation de Navier-Stokes se résume au système

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{x}, t) + W_0(\mathbf{x}, t) \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \\ &+ \nu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.171)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= (\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ &+ \eta \nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.172)$$

où  $W_0 = B_0^2/8\pi V$  est la densité d'énergie magnétique. Il est nécessaire de coupler l'équation de Navier-Stokes incompressible magnétisée à la loi de Faraday (1.172) dans laquelle nous avons introduit le paramètre de diffusivité magnétique  $\eta$ .

L'équation de Navier-Stokes, à travers son étude dimensionnelle, conduit à introduire des paramètres importants permettant de caractériser la turbulence

→ **Le nombre de Reynolds cinétique** Le nombre de Reynolds cinétique représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Il est défini à une échelle  $l$  par

$$\mathcal{R}_e(l) = \frac{v_{\text{rms}}(l)l}{\nu} \quad (1.173)$$

où  $v_{\text{rms}}(l)$  correspond à la racine carrée de la dispersion de vitesse quadratique moyenne du fluide mesurée à l'échelle  $l$ .

→ **Le nombre de Reynolds magnétique** Le nombre de Reynolds magnétique représente le rapport entre les forces d'inertie et la force de diffusivité magnétique. Il est défini à l'échelle  $l$  par

$$\mathcal{R}_e(l) = \frac{v_{\text{rms}}(l)l}{\eta}. \quad (1.174)$$

→ **Le nombre de Prandl** Le nombre de Prandl représente le rapport entre la viscosité cinétique du gaz et la viscosité magnétique  $\eta$

$$\mathcal{P}_m = \frac{\nu}{\eta}. \quad (1.175)$$

Suivant les propriétés du système, ce nombre permet de dire si la turbulence est d'origine cinétique ou magnétique.

→ **Le nombre de Mach Alfvénique** Le nombre de Mach Alfvénique mesure le rapport entre la dispersion de vitesse du gaz et la célérité caractéristique des ondes magnétiques dans le plasma turbulent. Il est défini à l'échelle  $l$  par

$$\mathcal{M}_A = \frac{v_{\text{rms}}(l)}{V_A(l)} \quad (1.176)$$

où  $V_A$  correspond à la vitesse d'Alfvén caractéristique.

### 1.2.1.2 Le modèle de Kolmogorov

Le modèle de Kolmogorov (K41 [123]) propose une vision moderne de la turbulence stationnaire hydrodynamique dans un fluide non-magnétisé incompressible. Pour cela il se base sur trois hypothèses importantes concernant les symétries du problème.

$\mathcal{H}_1$  *Dans la limite des nombres de Reynold infinis, toutes les symétries possibles de l'équation de Navier-Stokes, généralement brisées par les mécanismes produisant la turbulence, sont restaurées au sens statistique aux petites échelles et suffisamment loin des frontières.*

Soit  $\delta v(x, l) = v(x+l) - v(x)$  l'incrément de vitesse du fluide entre  $x$  et  $x+l$ , alors  $\mathcal{H}_1$  suggère que

$$\delta v(x + \rho, l) = \delta v(x, l) \quad \forall \rho \in \mathbb{R} \quad (1.177)$$

où  $l \ll L$ ,  $L$  correspondant à l'échelle d'injection de la turbulence et  $\rho \ll L$  correspond à un déplacement quelconque. Les fluctuations de vitesse du fluide, à une échelle d'étude fixée, sont isotropes.

$\mathcal{H}_2$  *En considérant  $\mathcal{H}_1$ , le fluide turbulent est auto-similaire aux petites échelles. Il possède un unique exposant  $h$ .*

Il existe un unique réel  $h \in \mathbb{R}$  tel que

$$\delta v(x, \lambda l) = \lambda^h \delta v(x, l) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad (1.178)$$

où  $x, l, \lambda l \ll L$ . La taille caractéristique des fluctuations de vitesse du fluide obéit à une loi d'échelle. En particulier, en posant  $v_{\text{rms}}(l)$  la vitesse caractéristique du fluide à l'échelle d'étude  $l$ , il vient

$$v_{\text{rms}}(l) \sim v_{\text{rms}}(L) \left( \frac{l}{L} \right)^h \quad (1.179)$$

où  $v_{\text{rms}}(L)$  correspond à la vitesse caractéristique du fluide à l'échelle d'injection de la turbulence.

$\mathcal{H}_3$  *En considérant  $\mathcal{H}_1$ , le fluide turbulent possède un taux de dissipation de l'énergie par unité de masse et de temps  $\varepsilon$  fini et constant à toutes les échelles  $l \ll L$ .*

A partir d'une analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes (1.170), on peut en déduire l'expression de la moyenne quadratique des fluctuations de vitesse à l'échelle  $l$

$$\langle (\delta v(l))^2 \rangle = C \varepsilon^{2h} l^{2h} \quad (1.180)$$

où  $C$  est une constante (à priori universelle, néanmoins discutée par Landau [131]). [77] (Chapitre 6.3.1) montre que  $h = 1/3$  est la seule valeur possible.

En supposant que le spectre d'énergie des fluctuations spatiales du champ de vitesse obéit à une loi de puissance, on en déduit

$$E_{1D}(k) = C_{\text{Kol}} \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (1.181)$$

où  $C_{\text{Kol}} \approx 1.5$  (expérimentalement) est la constante de Kolmogorov. Une conséquence du taux de dissipation de l'énergie  $\varepsilon$  est qu'il existe une échelle  $l_d$  à partir de laquelle les forces visqueuses deviennent supérieures aux forces d'inertie de la turbulence ( $\mathcal{R}_e(l_d) \approx 1$ ). En utilisant  $\mathcal{H}_3$  et  $\mathcal{H}_2$  on en déduit l'échelle de dissipation de la turbulence

$$l_d = \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4} = L \mathcal{R}_e(L)^{-3/4}. \quad (1.182)$$

On qualifie cet effet de dissipation de l'énergie depuis l'échelle d'injection  $L$  vers l'échelle de dissipation  $l_d$  de cascade turbulente, où encore cascade de Richardson [182]. Expérimentalement, on montre que la cascade d'énergie s'opère par l'intermédiaire de structures tourbillonnaires autosimilaires. Dans le cas de la turbulence hydrodynamique de Kolmogorov, les vortex sont parfaitement isotropes.

### 1.2.1.3 Le modèle de Iroshnikov-Kraichnan

Kraichnan (1965) [124] et Iroshnikov (1963) [112] se sont penchés sur le problème de la turbulence magnétohydrodynamique incompressible et raffinent le modèle proposé par Kolmogorov de turbulence hydrodynamique.

On peut réécrire l'équation de Navier-Stokes (1.171) du fluide magnétique incompressible en décomposant le champ magnétique en une composante uniforme et une composante perturbée

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B} \quad (1.183)$$

et l'on introduit les variables de Elsässer

$$\mathbf{z}^\pm = \mathbf{v} \pm \mathbf{b} \quad (1.184)$$

où  $\mathbf{b} = \delta\mathbf{B}/\sqrt{4\pi\rho}$  et  $\mathbf{v}$  correspond à la vitesse du fluide. En supposant que la composante uniforme du champ magnétique est alignée suivant un axe  $x$ , nous obtenons

$$\frac{\partial \mathbf{z}^\pm}{\partial t} \mp V_A \frac{\partial \mathbf{z}^\pm}{\partial x} + (\mathbf{z}^\mp \cdot \nabla) \mathbf{z}^\pm = -\nabla(P + W_0) + \nu_+ \nabla^2 \mathbf{z}^\pm + \nu_- \nabla^2 \mathbf{z}^\mp \quad (1.185)$$

où  $\nu_\pm = (\nu \pm \eta)/2$  et  $V_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho}$ . Le système d'équations (1.185) est une réécriture du système d'équations (1.171 et 1.172) où les fonctions aléatoires  $\mathbf{z}^\pm$  sont une combinaison linéaire des perturbations de vitesse cinétique du fluide et des perturbations de vitesse Alfvénique du fluide. Le modèle de Kraichnan-Iroshnikov suggère de traiter séparément l'aspect cinétique de l'aspect magnétique de la turbulence. En particulier, il est possible de définir séparément un spectre d'énergie  $E(k)$  des perturbations d'origine cinétique et un spectre d'énergie  $F(k)$  des perturbations d'origine magnétique. On peut alors définir à partir de la relation (A.105)

$$\frac{1}{2}v_0^2 = \int_0^\infty E(k) dk \quad (1.186)$$

$$\frac{1}{2}b_0^2 = \int_0^\infty F(k) dk \quad (1.187)$$

où  $v_0^2 = \langle v^2 \rangle$  et  $b_0^2 = \langle b^2 \rangle$  correspondent aux moyennes d'ensemble des vitesses du fluide et d'Alfvén respectivement. Le modèle de Kraichnan-Iroshnikov est basé sur deux hypothèses essentielles

$\mathcal{H}_1$  *Il existe un intervalle d'échelle  $l = k^{-1}$  tel que : presque toutes les contributions à  $v_0$  et  $b_0$  sont issues des échelles supérieures; presque toute la dissipation en chaleur se fait aux échelles inférieures; les densités d'énergie cinétique et magnétique dans l'intervalle considéré sont faibles par rapport aux énergies  $v_0^2$  et  $b_0^2$ ; les cascades d'énergie à l'intérieur de l'intervalle d'échelle sont locales dans le sens où les transferts directs d'énergie entre deux échelles très différentes sont négligeables.*

$\mathcal{H}_2$  L'énergie turbulente est équirépartie entre l'aspect cinétique et magnétique dans l'intervalle d'échelle  $l$  de l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$ . La cascade turbulente résulte des pertes d'énergie liées aux collisions locales entre les perturbations voyageant dans des directions opposées.

$$E(k) = F(k) \quad (1.188)$$

Motivons l'hypothèse  $\mathcal{H}_2$ . Supposons deux paquets ondes magnétiques se propageant dans des directions opposées. La fonction de corrélation  $\langle \mathbf{z}^+ \cdot \mathbf{z}^- \rangle$  à une échelle donnée  $k$  est relaxée en un temps de l'ordre de

$$\tau_c \sim (b_0 k)^{-1}. \quad (1.189)$$

Durant l'intervalle de temps  $\tau_c$  dans lequel  $\langle \mathbf{z}^+ \cdot \mathbf{z}^- \rangle \neq 0$ , des interactions non-linéaires peuvent être produites. Cependant,  $\mathcal{H}_1$  suggère que ces distorsions sont négligeables. On peut alors considérer que les paquets d'ondes diffusent faiblement et sont presque décorrés. Par définition des variables d'Elsässer, l'hypothèse  $\mathcal{H}_2$  montre l'équipartition en première approximation.

Kraichnan-Iroshnikov montrent que le taux de transfert d'énergie par unité de masse et de temps est proportionnel au temps de décorrélation de deux paquets d'onde

$$\varepsilon \propto \tau_c = (b_0 k)^{-1}. \quad (1.190)$$

Par analyse dimensionnelle et en considérant les hypothèses  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  en découle que les spectres d'énergie cinétique et magnétique sont donnés par

$$E(k) = F(k) = C_{KI}(\varepsilon b_0)^{1/2} k^{-3/2} \quad (1.191)$$

où  $C_{KI} \approx \sqrt{2/7}$  est une constante. La cascade turbulente du modèle d'Iroshnikov-Kraichnan est isotrope bien que la présence d'un champ magnétique suggère une direction de transfert d'énergie privilégiée. Goldreich et Sridhar [215] montrent en particulier que la présence d'un champ magnétique uniforme implique nécessairement une turbulence anisotrope.

#### 1.2.1.4 Modèle de turbulence MHD incompressible

Dans cette section, nous résumons le modèle de Goldreich & Sridhar (1995, GS95) [215] en intégrant les travaux de reformulation du modèle de Lazarian & Vishniac (1999, LV99) [139]. Le présent modèle traite de la turbulence MHD incompressible en s'appuyant sur les approches de Kolmogorov et de Iroshnikov-Kraichnan. Dans ce modèle, les échelles perpendiculaires  $k_\perp$  et parallèle  $k_\parallel$  aux lignes de champ magnétique non-perturbées sont dissociées de telle manière que la turbulence cascade anisotropiquement. De plus, nous considérons que la turbulence est isotrope à l'échelle d'injection ie.  $L = L_\parallel = L_\perp$ .

Les composantes HD et magnétique de la turbulence obéissent à une condition de balance critique qui fait intervenir les taux de cascade perpendiculaire  $\tau_{c,\perp}$  et parallèles  $\tau_{c,\parallel}$  et qui est donnée par

$$\tau_{c,\perp} \approx \tau_{c,\parallel} \quad (1.192)$$

où  $\tau_{c,\perp} \approx (k_{\perp}v(l))^{-1}$  représente le taux de cascade hydrodynamique et  $\tau_{c,\parallel} \approx (k_{\parallel}V_A(l))^{-1}$  représente le taux de cascade magnétique.  $v(l)$  correspond à la racine carrée de la valeur quadratique de la fonction de dispersion de la vitesse HD et  $V_A(l)$  à la vitesse de phase des perturbations parallèles au champ magnétique. La relation (1.192) nous apprend que lorsque  $k_{\parallel} \gg k_{\perp}$ , la turbulence est essentiellement HD ( $v(l)/V_A(l) \gg 1$ ) et le taux d'isotropie des tourbillons augmente<sup>2</sup> tandis que lorsque  $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ , la turbulence est dominée par les perturbations magnétiques ( $v(l)/V_A(l) \ll 1$ ) et le taux d'anisotropie des tourbillons augmente<sup>3</sup>.

A partir de la définition du taux de perte relatif d'énergie à chaque interaction à l'échelle  $l$ ,  $\zeta_l = \Delta E/E$ , Goldreich & Sridhar introduisent le concept de turbulence faible et forte. En effet, on peut montrer que

$$\zeta_l \approx \frac{v(l)k_{\perp}}{V_A(l)k_{\parallel}} \quad (1.193)$$

représente le taux de non-linéarité de l'interaction entre deux paquets d'onde qui se croisent. En particulier,  $\zeta_l^{-2}$  représente le nombre de collisions nécessaires pour déformer un paquet d'onde. On parle de turbulence faible lorsque  $\zeta_l^{-2} \gg 1$  et de turbulence forte si une seule interaction suffit à déformer le paquet d'onde  $\zeta_l^{-2} \approx 1$

Dans le régime de turbulence sub-Alfvénique ( $\mathcal{M}_A(L) < 1$ ), entre l'échelle d'injection  $L$  et  $L\mathcal{M}_A(L)^2$ , le taux de cascade turbulent est faible ( $\zeta_l \ll 1$ ) et le taux de transfert d'énergie par unité de masse et de temps est donné par [138]

$$\varepsilon \approx \frac{v(L)^4}{V_A(L)L} \quad (1.194)$$

où  $v(l) = v(L)(l_{\perp}/L)^{1/2}$ . Il est important de noter l'absence de cascade parallèlement aux lignes de champ magnétique dans le régime de faible interaction,  $l_{\parallel} = L$ . Le spectre d'énergie est alors donné par [84] [85]

$$E(k) \propto k_{\perp}^{-2}. \quad (1.195)$$

L'échelle  $l_{\text{trans}} = L\mathcal{M}_A(L)^2$  marque la transition entre les régimes de turbulence faible et de forte turbulence et correspond exactement à la balance critique  $\zeta_{l_{\text{trans}}} = 1$ . Aux échelles inférieures, le taux de cascade forte est donné par

$$\varepsilon \approx \frac{v(l_{\text{trans}})^3}{l_{\text{trans}}} = \frac{v(l)^3}{l} \quad (1.196)$$

<sup>2</sup>Le régime de turbulence est qualifié de super-Alfvénique :  $\mathcal{M}_A(l) = v(l)/V_A(l) \gg 1$

<sup>3</sup>Le régime de turbulence est qualifié de sub-Alfvénique :  $\mathcal{M}_A(l) = v(l)/V_A(l) \ll 1$

et correspond à une cascade de type Kolmogorov dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ magnétique. La dispersion de vitesse caractéristique est donnée par

$$v(l) = v(L) \left( \frac{l_{\perp}}{L} \right)^{1/3} \mathcal{M}_A(L). \quad (1.197)$$

Le spectre d'énergie est donc le même que celui d'une turbulence de type Kolmogorov

$$E(k) \propto k_{\perp}^{-5/3}. \quad (1.198)$$

La relation entre l'échelle parallèle  $l_{\parallel}$  et perpendiculaire  $l_{\perp}$  est donnée par

$$l_{\parallel} \approx L \left( \frac{l_{\perp}}{L} \right)^{2/3} \mathcal{M}_A^{-4/3}(L). \quad (1.199)$$

Dans le régime super-Alfvénique ( $\mathcal{M}_A(L) > 1$ ), entre l'échelle d'injection  $L$  et  $l_{\text{trans}} = L\mathcal{M}_A(L)^{-3}$ , le taux de cascade turbulente est faible ( $\zeta_l \ll 1$ ). La turbulence obéit au modèle de Kolmogorov et cascade de manière isotrope  $k_{\parallel} = k_{\perp}$ . Le taux de transfert d'énergie est donné par

$$\varepsilon \approx \frac{v(L)^3}{L} = \frac{v(l)^3}{l} \quad (1.200)$$

où  $v(l) = v(L)(l/L)^{1/3}$ . Le spectre d'énergie est donné par

$$E(k) \propto k^{-5/3}. \quad (1.201)$$

En régime de turbulence forte ( $\zeta_l \approx 1$ ), la turbulence obéit à nouveau au modèle de GS95. L'ensemble de la phénoménologie est résumée dans le tableau (1.2).

### 1.2.1.5 Modèle de turbulence MHD compressible

Il n'existe pas de phénoménologie basée sur l'étude des équations de Navier-Stokes en turbulence MHD compressible. L'essentiel des travaux sont basés sur des simulations numériques 2D ou 3D. Notre description est basée sur les travaux de Cho & Lazarian (2002 [33], 2003 [34]). La discussion qui suit est illustrée par la figure (1.4) et le tableau (1.3).

Considérons un fluide MHD incompressible isotherme. Nous avons montré (voir section 1.1.3) qu'il existe 3 modes principaux de propagation des perturbations dans un plasma :

- Les modes d'Alfvén dont la perturbation du champ de vitesse  $\delta \mathbf{v}_A$  est orthogonale au plan  $(\mathbf{k} - \mathbf{B}_0)$  c'est à dire collinéaire au vecteur  $\zeta_A \propto \mathbf{k}_{\perp} \times \mathbf{k}_{\parallel}$  (relativement au champ magnétique moyen  $\mathbf{B}_0$ ).



	$\mathcal{M}_A(L) < 1$	$\mathcal{M}_A(L) > 1$
$\zeta_l \ll 1$	LV99	Kolmogorov
$v(l)$	$k_{\parallel} = L^{-1}$	$k_{\parallel} = k_{\perp}$
$E(k)$	$v(L) \left(\frac{l_{\perp}}{L}\right)^{1/2}$	$v(L) \left(\frac{l}{L}\right)^{1/3}$
$\tau_c^{-1}$	$\propto k_{\perp}^{-2}$	$\propto k^{-5/3}$
Transition	$\approx v(L) k_{\perp}^{-1/2} k L^{1/2}$	$\approx k_{\perp}^{2/3} L^{-1/3} v(L)$
	$l_{\text{trans}} = L \mathcal{M}_A(L)^2$	$l_{\text{trans}} = L \mathcal{M}_A^3$
$\zeta_l \approx 1$	GS95	GS95
$v(l)$	$k_{\parallel} \approx L^{-1/3} \mathcal{M}_A(L)^{4/3} k_{\perp}^{2/3}$	$k_{\parallel} \approx L^{-1/3} \mathcal{M}_A(L)^{4/3} k_{\perp}^{2/3}$
$E(k)$	$v(L) \left(\frac{l_{\perp}}{L}\right)^{1/3} \mathcal{M}_A(L)$	$v(L) \left(\frac{l_{\perp}}{L}\right)^{1/3} \mathcal{M}_A(L)$
$\tau_c^{-1}$	$\propto k^{-5/3}$	$\propto k^{-5/3}$
	$\approx k_{\perp}^{2/3} L^{-1/3} v(L) \mathcal{M}_A(L)^{1/3}$	$\approx k_{\perp}^{2/3} L^{-1/3} v(L)$

Table 1.2: Tableau récapitulatif de la phénoménologie de la turbulence MHD incompressible à partir des travaux de Goldreich & Sridhar (1995) [215], Lazarian & Vishniac (1999) [139] et Kolmogorov (1941) [123].

→ Les modes magnéto-soniques dont la perturbation du champ de vitesse  $\delta \mathbf{v}_{\text{MS}}$  se trouve dans le plan  $(\mathbf{k} - \mathbf{B}_0)$  et qui peut se décomposer dans une base orthogonale rapide-lente  $(\zeta_{\text{F}}, \zeta_{\text{S}})$  qui s'exprime en fonction des vecteurs de base  $(\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{k}_{\perp})$

$$\zeta_{\text{F}} \propto \frac{1 - \sqrt{D} + \beta/2}{1 + \sqrt{D} - \beta/2} \left[ \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \right]^2 \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp}$$

$$\zeta_{\text{S}} \propto \mathbf{k}_{\parallel} + \frac{1 - \sqrt{D} - \beta/2}{1 + \sqrt{D} + \beta/2} \left[ \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} \right]^2 \mathbf{k}_{\perp}$$

où  $D = (1 + \beta/2)^2 - 2\beta \cos^2 \theta$  et  $\beta = P_{\text{g}}/W_0$  est une valeur moyenne exprimant le rapport des forces de pression cinétique et magnétique du gaz.  $\theta$  correspond à l'angle entre le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et le champ magnétique moyen  $\mathbf{B}_0$ .

Les études numériques de la turbulence MHD compressibles consistent essentiellement à dériver les lois d'échelles régissant les perturbations du champ de vitesse  $\delta v(l)$  préalablement décomposé dans la base  $(\zeta_{\text{A}}, \zeta_{\text{F}}, \zeta_{\text{S}})$ . Dans le cas où  $\beta \gg 1$  et  $\mathcal{M}_{\text{S}}(L) = v(L)/V_{\text{S}} < 1$ , la turbulence obéit aux lois d'échelles déduites par le modèle GS95 et Kolmogorov d'un plasma magnétisé incompressible. Les modes magnéto-soniques lents sont couplés aux modes d'Alfvén et suivent donc le même comportement. Dans ce régime, on les qualifie de modes pseudo-Alfvénique. En revanche, les modes magnéto-soniques rapides suivent un comportement différent et obéissent aux lois du modèle IK.

	Slow	Fast
$\beta \ll 1$	GS95	IK
$E(k)$	$k_{\parallel} \propto k_{\perp}^{2/3}$ $\propto k^{-5/3}$	$k_{\parallel} \propto k_{\perp}$ $\propto k^{-3/2}$
$\tau_c^{-1}$	$\approx \tau_c^{-1}$ alfvénique	$\approx \left(\frac{k}{L}\right)^{1/2} \frac{v(L)^2}{V_F(L)}$
$\beta \gg 1$	Kolmogorov	IK
$E(k)$	$k_{\parallel} \propto k_{\perp}$ $\propto k^{-3/2}$	$k_{\parallel} \propto k_{\perp}$ $\propto k^{-3/2}$
$\tau_c^{-1}$	$\approx k^{2/3} L^{-1/3} v(L)$	$\approx k^{2/3} L^{-1/3} v(L)$

Table 1.3: Tableau récapitulatif de la phénoménologie de la turbulence MHD compressible sub-Alfvénique dans les cas ( $\beta \gg 1$ ,  $\mathcal{M}_S(L)/\mathcal{M}_A(L) < 1$ ) et ( $\beta \ll 1$ ,  $\mathcal{M}_S(L)/\mathcal{M}_A(L) > 1$ ) à partir des travaux de Goldreich & Sridhar (1995) [215], Kolmogorov (1941) [123], Iroshnikov [112] & Kraichnan [124] issue des études numériques de Cho & Lazarian (2002 [33], 2003 [34]) et de l'étude de Yan & Lazarian (2004) [240].

Dans le cas où  $\beta \gg 1$  et  $\mathcal{M}_S > 1$ , la turbulence est hydrodynamique compressible. Peu d'études se sont penchées sur le sujet, ce est discuté par Kim & Ryu (2005) [119].

Dans le cas où  $\beta \ll 1$ ,  $\mathcal{M}_A < 1$  et  $\mathcal{M}_S > \mathcal{M}_A$ , ce qui est généralement le cas dans le milieu interstellaire, les modes d'Alfvén et magnéto-soniques lents obéissent au modèle GS95 tandis que les modes magnéto-soniques rapides obéissent au modèle IK.

Dans le cas où  $\mathcal{M}_A > 1$  et  $\mathcal{M}_A/\mathcal{M}_S > 1$ , la turbulence fait intervenir des chocs générant ainsi des champs magnétiques suffisamment forts pour retrouver une valeur  $\mathcal{M}_A \approx 1$  [32].

### 1.2.1.6 Effet des collisions ions-neutres

Xu et al. (2016) [238] ont étudié l'effet de l'amortissement de la turbulence MHD incompressible et compressible dans les plasmas partiellement ionisés, en incluant l'effet de la viscosité des neutres  $\nu_n$ . Leur travail montre en particulier, qu'il existe une connexion entre l'échelle d'amortissement de la turbulence MHD  $k_{\text{dam}}$  et l'échelle de coupure des modes MHD  $k_{\text{dec,ni/in}}$  qui sont liées aux deux régimes d'interaction des fluides de neutres et d'ions dans l'approche MHD bi-fluide (voir section 1.1.4).

L'échelle de coupure de la turbulence est obtenue en égalisant le taux d'amortissement des modes MHD  $|\omega_I|$  qui résulte des solutions des relations de dispersion MHD bi-fluide dans l'approximation de faible amortissement (voir équations 2.3 - 2.11 pour les modes d'Alfvén et équation 57 de Soler et al. 2013 [211] pour les modes magnéto-soniques), avec le taux de cascade de la turbulence  $\tau_c^{-1}$  du mode considéré (voir table 1.2 pour les modes d'Alfvén et 1.3 pour les modes magnéto-soniques). Dans le cas des modes

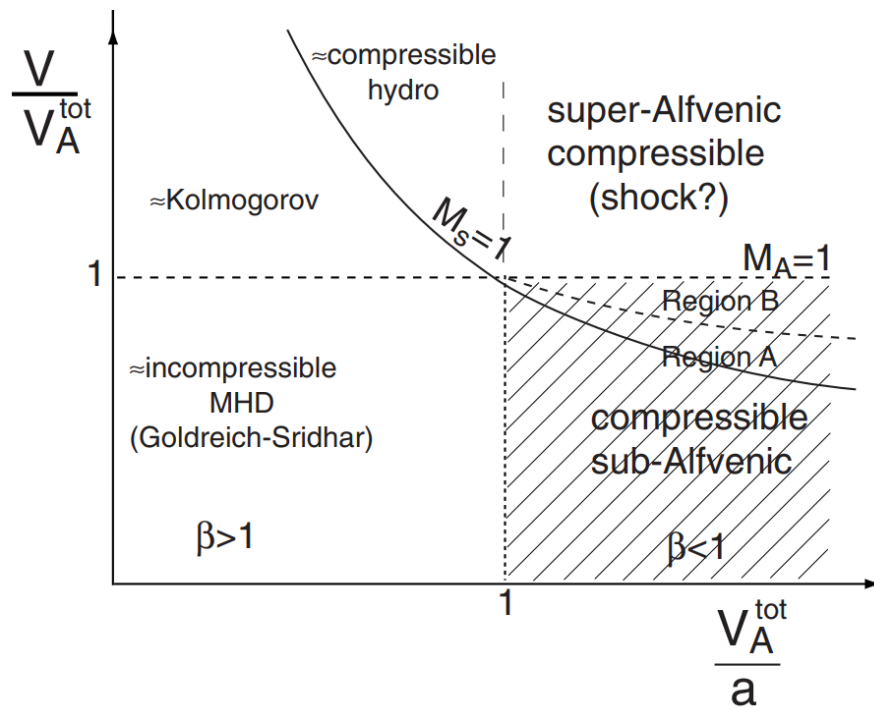


Figure 1.4: La figure tirée de [31] représente les différents régimes de turbulence en fonction des paramètres moyens du plasma à l'échelle d'injection :  $V/V_A^{\text{tot}} = \mathcal{M}_A(L)$ ,  $V_A^{\text{tot}}/a = \mathcal{M}_S(L)/\mathcal{M}_A(L)$ . La zone hachurée correspond à l'étude faite par Cho & Lazarian (2002) [33].

d'Alfvén, l'échelle de coupure de la turbulence est donnée par

$$k_{dam,\parallel} = \frac{-\left(\nu_n + \frac{V_{Ai}^2}{\nu_{in}}\right) + \sqrt{\left(\nu_n + \frac{V_{Ai}^2}{\nu_{in}}\right)^2 + \frac{8V_A\nu_n L\mathcal{M}_A^{-4}}{\xi_n}}}{2\nu_n L\mathcal{M}_A^{-4}} \quad (1.202)$$

$$k_{dam}^A = k_{dam,\parallel} \sqrt{1 + L\mathcal{M}_A^{-4} k_{dam,\parallel}} \quad (1.203)$$

en régime sub-Alfvénique et

$$k_{dam,\parallel} = \frac{-\left(\nu_n + \frac{V_{Ai}^2}{\nu_{in}}\right) + \sqrt{\left(\nu_n + \frac{V_{Ai}^2}{\nu_{in}}\right)^2 + \frac{8V_A\nu_n l_A}{\xi_n}}}{2\nu_n l_A} \quad (1.204)$$

$$k_{dam}^A = k_{dam,\parallel} \sqrt{1 + l_A k_{dam,\parallel}} \quad (1.205)$$

$$l_A = L\mathcal{M}_A^{-3} \quad (1.206)$$

en régime super-Alfvénique.  $V_A$  et  $V_{Ai}$  correspondent respectivement à la vitesse d'Alfvén totale et des ions,  $\nu_n$  correspond à la viscosité cinétique des neutres et  $\xi_n = \rho_n/(\rho_n + \rho_i)$  correspond à la fraction de masse des neutres dans le plasma. Dans le cas des modes rapides, pour toutes les valeurs de  $\beta$  l'échelle de coupure est donnée par

$$k_{dam}^F = l_A^{-1/3} \left( \frac{2\nu_{ni} V_A^2 (V_S^2 + V_A^2 - 2V_F^2)}{V_F [\xi_n V_A^2 (V_S^2 - V_F^2) + \xi_i V_S^2 V_F^2]} \right)^{2/3} \quad (1.207)$$

en régime super-Alfvénique et

$$k_{dam}^F = L^{-1/3} \left( \frac{2\nu_{ni} V_A^2 (V_S^2 + V_A^2 - 2V_F^2)}{V_F [\xi_n V_A^2 (V_S^2 - V_F^2) + \xi_i V_S^2 V_F^2]} \right)^{2/3} \quad (1.208)$$

en régime sub-Alfvénique où

$$V_F = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}(V_S^2 + V_A^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(V_S^2 + V_A^2)^2 - 4V_S^2 V_A^2 \cos^2 \theta}} & \omega_R^F \ll \nu_{ni} \\ \sqrt{\frac{1}{2}(V_{Si}^2 + V_{Ai}^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(V_{Si}^2 + V_{Ai}^2)^2 - 4V_{Si}^2 V_{Ai}^2 \cos^2 \theta}} & \omega_R^F \gg \nu_{in} \end{cases} \quad (1.209)$$

correspond à la vitesse des ondes magnéto-soniques rapides dans les régimes de fort et faible couplage respectivement et

$$V_S = \sqrt{V_{Si}^2 \xi_i + V_{Sn}^2 \xi_n} \quad (1.210)$$

correspond à la vitesse du son effective dans le régime de fort couplage. De par les propriétés de la cascade turbulente des modes lents, leur échelle de coupure dans les

plasmas faiblement ionisés dépend de l'échelle de coupure de la turbulence Alfvénique. On a alors, pour les modes lents, en régime super-Alfvénique et si  $1/k_{\text{dam}}^{\text{A}} < L\mathcal{M}_{\text{A}}^3$ , l'échelle de coupure

$$k_{\text{dam}}^{\text{S}} = \min \left[ \left( \frac{2\nu_{\text{ni}}}{V_{\text{S}}\xi_n} \right)^{3/4} L^{-1/4} \mathcal{M}_{\text{A}}^{3/4}, \left( \frac{2\nu_{\text{ni}}}{\xi_n} \right)^{3/2} L^{1/2} V_L^{-3/2} \right] \quad (1.211)$$

et

$$k_{\text{dam}}^{\text{S}} = \min \left[ \left( \frac{2\nu_{\text{ni}}}{V_{\text{S}}\xi_n} \right)^{3/4} L^{-1/4} \mathcal{M}_{\text{A}}, \left( \frac{2\nu_{\text{ni}}}{\xi_n} \right)^{3/2} L^{1/2} V_L^{-3/2} \mathcal{M}_{\text{A}}^{-1/2} \right] \quad (1.212)$$

en régime sub-Alfvénique et pour  $1/k_{\text{dam}}^{\text{A}} < L\mathcal{M}_{\text{A}}^2$ .

### 1.2.2 Mesures de la turbulence interstellaire

Il existe différentes méthodes pour mesurer l'intensité et la direction de la turbulence magnétique dans le milieu interstellaire [67] :

- **Rayonnement synchrotron des électrons** : De part leur rapport masse/charge électrique faible, les électrons sont extrêmement sensibles au champ magnétique et perdent une bonne partie de leur énergie sous forme de rayonnement synchrotron. Une distribution en énergie des électrons de la forme  $N(E) \propto E^{-\alpha}$  se déplaçant dans un champ magnétique  $\mathbf{B} = B_{\parallel}\mathbf{e}_{\parallel} + B_{\perp}\mathbf{e}_{\perp}$  où  $B_{\perp}$  est la composante perpendiculaire du champ magnétique par rapport à la ligne de visée, conduit à une émissivité synchrotron de la forme  $\epsilon \propto B_{\perp}^{(\alpha+1)/2}$ . L'indice spectral  $\alpha$  d'émission synchrotron de la galaxie vaut environ  $\alpha \sim 2.8$  [14]. L'intensité du champ magnétique peut alors être retrouvée en considérant que les rayons cosmiques et le champ magnétique sont en équipartition et en connaissant le rapport entre la pression des électrons et des protons dans le milieu interstellaire.
- **Rotation de Faraday** : Lorsque la lumière linéairement polarisée pénètre dans un milieu ionisé, la direction de polarisation de cette dernière est changée d'un angle  $\Delta\theta = \lambda^2\text{RM}$  par les électrons baignés dans le champ magnétique.  $\lambda$  correspond à la longueur d'onde de la lumière tandis que  $\text{RM} = 0.81 \int_0^D n_e B_{\parallel} ds$  correspond à la mesure de la rotation où l'intégrale correspond au chemin optique de la lumière,  $n_e$  est la densité d'électrons et  $B_{\parallel}$  correspond à la projection de la composante parallèle du champ magnétique dans le plan perpendiculaire à la ligne de visée. L'estimation de l'intensité du champ magnétique nécessite alors de connaître la densité de colonne des électrons  $\text{DM} = \int_0^D n_e ds$ . Il suffit alors de résoudre  $\text{RM}/\text{DM} \approx 0.81 \langle B_{\parallel} n_e \rangle / \langle n_e \rangle$  [177].
- **Polarisation de la poussière** : La poussière interstellaire est constituée de grains de tailles allant de la fraction de nanomètre à quelques dixièmes de microns. Ces

grains sont alignés avec le champ magnétique parfaitement ou imparfaitement et absorbent et diffusent la lumière stellaire non polarisée, de manière plus efficace quand la polarisation est parallèle à leur grand axe quand elle lui est perpendiculaire créant ainsi un excès de polarisation parallèle au champ magnétique [56] [136]. Ils réémettent de la lumière infrarouge polarisée perpendiculairement par rapport au champ magnétique. Dans les milieux partiellement ionisés, la dispersion de direction de polarisation permet, sur la base d'une mesure de la largeur des raies moléculaires caractérisant la turbulence locale, d'estimer l'amplitude du champ magnétique perpendiculaire à la ligne de visée [44] [35].

- **Rayonnement optique diffus de la poussière :** Miville-Deschênes et al. (2016) [156] ont réalisé une mesure du spectre de la turbulence non-magnétisée sur plus de quatre ordres de grandeur d'échelle à l'aide de méthodes d'imagerie optique détaillées qui peuvent être utilisées comme traceurs de cascades turbulentes dans le milieu interstellaire diffus et ce jusqu'à des champs de vue de l'ordre de l'arc seconde. Ils présentent une analyse du spectre de puissance de la densité de colonne de poussière d'un cirrus diffus à haute latitude galactique ( $l \approx 198^\circ$ ,  $b \approx 32^\circ$ ) et montrent que le champ turbulent peut être décrit avec une simple loi de puissance de 0.01 à 50 pc. Par ailleurs ils obtiennent un indice spectral de l'ordre de  $-3$  compatible avec les attentes d'un MIS thermiquement bi-stable et turbulent (voir leur figure 3).
- **Effet Zeeman :** Tout atome ou molécule plongée dans un champ magnétique externe voit ses niveaux d'énergie électroniques subdivisés d'une quantité  $\pm\mu_B B$  où  $\mu_B = e\hbar/2m_e$  dans le cas où le champ magnétique est peu intense. Ceci affecte donc l'énergie des photons émis par les transitions électroniques dont la polarisation est circulaire tandis que le milieu ambiant est considéré comme linéairement polarisé. L'étude des paramètres de Stokes V des composantes Zeeman découpées dépend de l'intensité de la composante parallèle du champ magnétique [44]. Crutcher & Kemball (2019) [45] ont utilisé l'effet Zeeman comme méthode de mesure directe de l'intensité du champ magnétique dans les zones de formation d'étoiles à partir de cinq espèces chimiques : HI, OH, CN, CH<sub>3</sub>OH et H<sub>2</sub>O dont les densités vont de  $\sim 10 \text{ cm}^{-3}$  à  $\sim 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  leur permettant ainsi de sonder toute les densités de nuage moléculaire. Ils suggèrent qu'à faible densité la pression gravitationnelle est indépendante de la densité du nuage. En revanche, lorsque la densité avoisine les  $n_T = 300 \text{ cm}^{-3}$ , le nuage moléculaire devient auto-gravitant et le champ magnétique en son sein augmente en  $B \propto n_T^{0.5}$ .

Des mesures de la dispersion de la polarisation de l'émission synchrotron de 3 régions de M51 révèlent d'importantes propriétés des champs magnétiques à grande échelle dans les galaxies spirales [107]. Le niveau de turbulence est de l'ordre de  $\delta B/B_0 \sim 1$ . Des mesures en polarisation stellaire (Jones 1989 [117]) et submillimétriques (Collaboration Planck 2018 [37]) donnent le même résultat. La longueur de corrélation du champ magnétique est de l'ordre de  $l_\perp \sim 58 \text{ pc}$  tandis que l'anisotropie vaut  $l_\parallel/l_\perp \sim 1.8$  ce qui suggère une

turbulence forte  $\zeta_l \approx 1$  dans le modèle GS95. Une étude complémentaire de M51 montre que le champ magnétique dans le halo galactique est de l'ordre de  $4 - 6\mu\text{G}$  et isotrope et  $10 - 15\mu\text{G}$  dans le plan galactique et parallèle aux bras spiraux [204]. Dans la voie lactée, le champ magnétique mesuré est de l'ordre de  $\sim 10\mu\text{G}$  dans le plan galactique et décroît très rapidement à des valeurs inférieures à  $5\mu\text{G}$  dès lors qu'on s'éloigne de 15 kpc par rapport au plan galactique [233]. Dans les zones de formation d'étoiles, le champ magnétique turbulent est de l'ordre de  $50 - 100\mu\text{G}$  mais il dépend également de la densité en  $n_{\text{H}}^{0.5-2/3}$ . Des travaux dans le milieu interstellaire diffus local révèlent que la turbulence est de type Kolmogorov aux échelles supérieures à  $10^{-6}$  pc [7] [155]. Des études supplémentaires notamment de la dispersion de vitesse du gaz suggèrent que l'échelle d'injection de la turbulence dans les phases diffuses est de l'ordre de 100 pc [30] et dont les sources sont possiblement les supernovae. Dans les phases WIM, le turbulence est essentiellement trans-sonique  $\mathcal{M}_S < 2$  et les valeurs typiques de la vitesse d'Alfvén sont du même ordre que la vitesse du son dans le gaz  $V_S \sim 10$  km/s [191]. Dans les phases diffuses faiblement ionisées CNM et WNM, la dispersion de vitesse du gaz est respectivement de l'ordre de  $\sim 2.8$  km/s et  $\sim 10$  km/s. Le champ magnétique est de l'ordre de  $5 - 6\mu\text{G}$  et la turbulence est légèrement super-Alfvénique dans le CNM  $\mathcal{M}_A \sim 3$  et légèrement sub-Alfvénique dans le WNM  $\mathcal{M}_A \leq 1$  [97]. Dans les phases moléculaires, les niveaux de turbulence sont plus élevés que dans les milieux diffus. Tandis qu'aux grandes échelles ( $> 1$  pc) les lignes de champs sont corrélées avec les bras spiraux, aux plus petites échelles, les lignes de champ sont essentiellement corrélées à la structure des nuages moléculaires. En 2016, la collaboration Planck apporte un éclairage entièrement nouveau : aux hautes latitudes, dans le MIS très diffus, les lignes de champ magnétiques ordonnées semblent parallèles aux filaments de gaz tandis que dans les nuages denses le champ magnétique a tendance à être orienté perpendiculairement aux filaments [175]. Des observations de polarisation de la poussière dans trois zones de formation d'étoiles montrent des niveaux de turbulence de l'ordre de  $\delta B/B_0 \sim 0.8$  [108] où  $B_0$  est de l'ordre du micro gauss et ce avec des longueurs de corrélation de quelques milliparsecs. La turbulence aux petites échelles tend à être sub-Alfvénique mais il n'est pas exclu d'avoir des secteurs super-Alfvéniques dans les coeurs denses [169].

### 1.3 Transport du rayonnement cosmique en turbulence faible

Il a été montré que le rayonnement cosmique joue un rôle très important dans la dynamique de la galaxie. En particulier, il existe un lien exigü entre la turbulence dans le milieu interstellaire et les propriétés de transport du rayonnement cosmique. Dans cette section nous présentons une manière de résoudre le transport du rayonnement cosmique dans un milieu à faibles niveaux de turbulence. La théorie quasi-linéaire du transport du rayonnement cosmique suggère que les particules chargées qui se déplacent le long des lignes de champ magnétique ordonné voient leur centre guide et leur angle d'attaque faiblement perturbés par de petites variations du champ magnétique. Il en résulte une modification macroscopique de la fonction de distribution du rayonnement cosmique qui se caractérise en particulier par un effet de diffusion résultant des collisions rayon cos-

mique - perturbations magnétiques successives. L'équation de transport qui est dérivée constitue la base de toute étude théorique faisant intervenir le rayonnement cosmique dans le milieu interstellaire. Il a également été montré que la turbulence interstellaire est aussi affectée par la présence du rayonnement cosmique. Dans cette section nous montrons comment les rayons cosmiques contribuent à la turbulence dans le plasma et les effets qui en découlent.

### 1.3.1 Equation de Fokker-Planck en théorie quasi-linéaire

Dans cette sous-section, nous dérivons l'expression de l'équation de Fokker-Planck du transport du rayonnement cosmique dans un plasma faiblement perturbé dans l'approximation quasi-linéaire du transport. Nous résumons l'approche de Schlickeiser (2002 [194] chapitre 12). Démarrons de l'expression de l'équation de Vlasov relativiste appliquée à une fonction de distribution  $f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  de rayons cosmiques d'espèce  $a$

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (1.213)$$

où  $S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  correspond à une source externe de rayonnement cosmique d'espèce  $a$ . Chaque particule obéit aux équations du mouvement suivantes

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = q_a \left[ \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_T(\mathbf{x}, t)}{c} \right] \quad (1.214)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_a} \quad (1.215)$$

où

$$\mathbf{B}_T = \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (1.216)$$

$$\mathbf{E}_T = \delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (1.217)$$

représentent respectivement le champ magnétique et le champ électrique totaux qui sont décomposés en une composante non-perturbée constante et une composante perturbée de faible amplitude. La conductivité électrique des plasmas du milieu interstellaire est suffisamment importante pour nous permettre de négliger la présence d'un champ électrique moyen. De plus nous considérons que le champ magnétique moyen est dirigé suivant un axe arbitraire  $z$  :  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ . Etant chargées électriquement, les rayons cosmiques interagissent avec le champ magnétique moyen  $\mathbf{B}_0$  par l'intermédiaire de la force de Lorentz :  $\partial \mathbf{v} / \partial t = (q_a / \gamma m_a c) \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$ , et effectuent un mouvement conservé de gyration autour de la ligne de champ magnétique  $\mathbf{B}_0$ . Pour des raisons de symétrie, il est donc plus intéressant d'étudier les mouvements du centre guide de chaque particule chargée, qui coïncide avec la ligne de champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  dans le cas d'un plasma non-perturbé, mais qui peut présenter des fluctuations dans le cas où les perturbations



du champ magnétique sont non-nulles. Tandis que les coordonnées d'un rayon cosmique sont données par

$$\mathbf{x} = (x, y, z), \quad (1.218)$$

les coordonnées du centre guide sont données par

$$\mathbf{R} = (X, Y, Z) \quad (1.219)$$

$$= \mathbf{x} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z}{\varepsilon_a \Omega_a} \quad (1.220)$$

où  $\varepsilon_a = q_a/|q_a|$  correspond au signe de la charge électrique et  $\Omega_a = \Omega_{0a}/\gamma$  où  $\Omega_{0a}$  est la gyrofréquence classique définie par (1.159). Il est également utile de décrire le moment  $\mathbf{p}$  des particules dans le système des coordonnées sphériques  $(p, \mu, \Phi)$  tel que

$$p_x = p \cos \Phi \sqrt{1 - \mu^2} \quad (1.221)$$

$$p_y = p \sin \Phi \sqrt{1 - \mu^2} \quad (1.222)$$

$$p_z = p\mu \quad (1.223)$$

où  $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$  correspond à la norme du moment des particules,  $\mu = \cos \theta$  où  $\cos \theta = \mathbf{p} \cdot \mathbf{B}_0 / pB_0$  est le cosinus de l'angle d'attaque  $\theta$  de la particule et  $\Phi$  correspond à la position angulaire de la particule dans le plan  $(p_x, p_y)$ . Le vecteur position du centre guide  $(X, Y, Z)$  se réécrit alors, en fonction du vecteur position-moment de la particule  $(x, y, z, p, \mu, \Phi)$

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{v\sqrt{1-\mu^2}}{\varepsilon_a \Omega_a} \sin \Phi \\ Y &= y - \frac{v\sqrt{1-\mu^2}}{\varepsilon_a \Omega_a} \cos \Phi \\ Z &= z. \end{aligned} \quad (1.224)$$

Dans le nouveau système de coordonnées, on peut montrer que l'équation de Vlasov (voir annexe A.4) devient

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + G_\mu \frac{\partial f_a}{\partial X_\mu} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial X_\mu} [hg_\mu f_a] = S_a \quad (1.225)$$

où  $h = \det(\partial \mathbf{Z} / \partial \mathbf{X}) = -p^2$ . Les termes en  $G_{x_\sigma}$  sont donnés par

$$G_p = 0 \quad (1.226)$$

$$G_\mu = 0 \quad (1.227)$$

$$G_\Phi = -\varepsilon\Omega \quad (1.228)$$

$$G_X = v\sqrt{1-\mu^2} \cos \Phi \quad (1.229)$$

$$G_Y = v\sqrt{1-\mu^2} \sin \Phi \quad (1.230)$$

$$G_Z = \mu v \quad (1.231)$$

$$(1.232)$$

et les termes  $g_{x_\sigma}$  sont donnés par

$$\begin{aligned} g_p &= \frac{\varepsilon\Omega pc}{vB_0} \left[ \mu\delta E_\parallel + \sqrt{\frac{1-\mu^2}{2}} (\delta E_L e^{-i\Phi} + \delta E_R e^{i\Phi}) \right] \\ g_\mu &= \frac{\varepsilon\Omega\sqrt{1-\mu^2}}{B_0} \left[ \frac{c}{v}\sqrt{1-\mu^2}\delta E_\parallel + \frac{i}{\sqrt{2}} \left[ e^{i\Phi} (\delta B_R + i\mu\frac{c}{v}\delta E_R) - e^{-i\Phi} (\delta B_L - i\mu\frac{c}{v}\delta E_L) \right] \right] \\ g_\Phi &= -\varepsilon\Omega\frac{\delta B_\parallel}{B_0} + \frac{\varepsilon\Omega}{\sqrt{2}(1-\mu^2)B_0} \left[ e^{i\Phi} \left( \mu\delta B_R + \frac{ic}{v}\delta E_R \right) + e^{-i\Phi} \left( \mu\delta B_L - \frac{ic}{v}\delta E_L \right) \right] \quad (1.233) \\ g_X &= -v\sqrt{1-\mu^2} \cos \Phi \frac{\delta B_\parallel}{B_0} + \frac{ic}{\sqrt{2}B_0} \left[ \delta E_R - \delta E_L - \frac{i\mu v}{c}(\delta B_L + \delta B_R) \right] \\ g_Y &= -v\sqrt{1-\mu^2} \sin \Phi \frac{\delta B_\parallel}{B_0} - \frac{c}{\sqrt{2}B_0} \left[ \delta E_L + \delta E_R + \frac{i\mu v}{c}(\delta B_L - \delta B_R) \right] \\ g_Z &= 0 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les relations

$$\begin{aligned} \delta B_{L,R} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta B_x \pm i\delta B_y) \\ \delta B_\parallel &= \delta B_z \\ \delta B_\perp &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta B_L e^{-i\Phi} + \delta B_R e^{i\Phi}) \\ \delta E_{L,R} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta E_x \pm i\delta E_y) \\ \delta E_\parallel &= \delta E_z \\ \delta E_\perp &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta E_L e^{-i\Phi} + \delta E_R e^{i\Phi}). \end{aligned}$$

Les coefficients  $g_{x_\sigma}$  correspondent aux termes de force généralisée qui tiennent compte des fluctuations aléatoires du champ électromagnétique perturbé. En particulier, si les termes  $g_{x_\sigma}$  sont nuls, nous retrouvons les solutions de l'équation de Vlasov dans le cas

d'un champ magnétique constant que l'on qualifie d'orbites non-perturbées. Les termes  $\delta B_{L,R}$  et  $\delta E_{L,R}$  représentent les composantes polarisées gauche et droite du champ EM. Nous observons que la fonction de distribution  $f_a$  se développe d'une manière irrégulière sous l'influence des coefficients  $g_{x_\sigma}$ . Il est possible de discuter de l'évolution de  $f_a$  à partir d'une étude des propriétés statistiques des termes  $g_{x_\sigma}$ .

Considérons un ensemble de fonctions de distribution  $f_a$  toutes égales à  $t = t_0$  et évoluant indépendamment les unes des autres en fonction des valeurs aléatoires des champs de force perturbés et différents d'une réalisation à l'autre, mais identiques en moyenne statistique. Nous définissons dans un premier temps la moyenne d'ensemble de la fonction  $f_a$  par

$$F_a = \langle f_a \rangle \quad (1.234)$$

ainsi que les perturbations de la fonction  $f_a$ ;

$$\delta f_a = \langle f_a \rangle - F_a. \quad (1.235)$$

La moyenne d'ensemble de l'équation (1.225) est donnée par

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} + G_\mu \frac{\partial F_a}{\partial X_\mu} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial X_\mu} (h \langle g_\mu \delta f_a \rangle) = 0, \quad (1.236)$$

tandis que l'équation des perturbations de la fonction de distribution est donnée par

$$\frac{\partial \delta f_a}{\partial t} + G_\mu \frac{\partial \delta f_a}{\partial X_\mu} + g_\mu \frac{\partial F_a}{\partial X_\mu} = -g_\mu \frac{\partial \delta f_a}{\partial X_\mu} + \left\langle g_\mu \frac{\partial \delta f_a}{\partial X_\mu} \right\rangle. \quad (1.237)$$

Il est possible de résoudre de manière perturbative l'équation (1.237). Pour cela on peut exprimer  $\delta f_a$  comme une expansion en série du paramètre  $g(t - t_0)$  qui représente l'amplitude des perturbations du champ de force.

$$\delta f_a = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta f_a^{(n)} [g(t - t_0)]^n. \quad (1.238)$$

En injectant cette forme dans l'équation (1.237) on obtient un système d'équations infini

$$\frac{\partial \delta f_a^{(0)}}{\partial t} + G_\mu \frac{\partial \delta f_a^{(0)}}{\partial X_\mu} = 0 \quad (1.239)$$

$$\frac{\partial \delta f_a^{(1)}}{\partial t} + G_\mu \frac{\partial \delta f_a^{(1)}}{\partial X_\mu} = -g_\mu \frac{\partial F_a}{\partial X_\mu} - g_\mu \frac{\partial \delta f_a^{(0)}}{\partial X_\mu} + \left\langle g_\mu \frac{\partial \delta f_a^{(0)}}{\partial X_\mu} \right\rangle \quad (1.240)$$

$$\dots \quad (1.241)$$

En intégrant le long de la caractéristique  $X_\sigma$  l'équation (1.240) sur l'intervalle  $[t_0, t]$ , en multipliant par  $g_\mu$  et en moyennant l'ensemble on obtient

$$\begin{aligned}
 \langle g_\mu \delta f_a \rangle &= - \int_{t_0}^t dt' \left\langle g_\mu(X_\sigma, t) g_\nu(X'_\sigma(t'), t') \right\rangle \frac{\partial X_\lambda}{\partial X'_\nu} \frac{\partial}{\partial X_\lambda} F_a(X'_\sigma(t'), t') \\
 &- \left\langle \frac{\partial \delta f_a}{\partial X_\lambda} \int_{t_0}^t dt' g_\mu(X_\sigma, t) g_\nu(X'_\sigma(t'), t') \frac{\partial X_\lambda}{\partial X'_\nu} \right\rangle \\
 &+ \left\langle g_\mu(X_\sigma, t) \delta f_a(X'_\sigma(t_0), t_0) \right\rangle + \mathcal{O}(g^3[t - t_0]^2)
 \end{aligned} \tag{1.242}$$

où les fonctions  $X'_\sigma(t')$  correspondent aux coordonnées des particules à l'instant  $t'$  en mouvement sous l'action des forces  $G_\mu$  dont le point d'application est situé à  $X_\lambda$  à l'instant  $t$ . L'équation (1.242) est valable tant que  $g(t - t_0)$  reste petit c'est à dire que la trajectoire perturbée est faiblement différente de la trajectoire non-perturbée. Intéressons nous au lien entre les fluctuations du champ électromagnétique et les perturbations de la trajectoire des particules chargées. Supposons que les champs  $\delta \mathbf{E}$  et  $\delta \mathbf{B}$  ont un temps de corrélation  $t_c$  et une longueur de corrélation  $l_c$ . Une hypothèse supplémentaire de la théorie quasi-linéaire est que la solution  $\delta f_a(X'_\sigma(t_0), t_0)$  est complètement décorrélée du champ EM présent au temps  $t \neq t_0$  et à la position  $X'_\sigma(t_0)$  ce qui implique au moins l'une des deux conditions suivantes :

- Le temps qui sépare l'application du champ EM à la réponse dynamique des particules est grand devant le temps de corrélation du champ EM :  $t - t_0 \gg t_c$ .
- Le déplacement spatial le long de l'orbite non-perturbée  $X'_\sigma(t')$  pendant l'intervalle de temps  $t - t_0$  est grand devant la longueur de corrélation du champ EM  $l_c$ .

On en déduit que, les forces  $g_\mu(X_\sigma, t)$  dépendant linéairement des champs  $\delta \mathbf{E}$  et  $\delta \mathbf{B}$  sont indépendantes des perturbations de la fonction de distribution  $\delta f_a(X'_\sigma(t_0), t_0)$ . Finalement, l'équation (1.242) devient

$$\begin{aligned}
 \langle g_\mu \delta f_a \rangle &= - \int_{t_0}^t dt' \left\langle g_\mu(X_\sigma, t) g_\nu(X'_\sigma(t'), t') \right\rangle \frac{\partial X_\lambda}{\partial X'_\nu} \frac{\partial}{\partial X_\lambda} F_a(X'_\sigma(t'), t') \\
 &+ \mathcal{O}(g^3[t - t_0]^2).
 \end{aligned} \tag{1.243}$$

En injectant l'équation (1.243) dans l'équation (1.236), on obtient l'équation de Fokker-Planck (Urch 1977 [226])

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} + G_\mu \frac{\partial F_a}{\partial X_\mu} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial X_\mu} \left( h D_{\mu\nu} \frac{\partial F_a}{\partial X_\nu} \right) + S_a \tag{1.244}$$

où

$$D_{x_\sigma, x_\nu} = \mathcal{R}e \int_0^{+\infty} d\xi \langle \bar{g}_{x_\sigma}(t) \bar{g}_{x_\nu}^*(t + \xi) \rangle \tag{1.245}$$

et  $\xi = t - t_0 > t_c$ .  $\bar{g}_{x_\sigma}$  signifie que le champ de force  $g_{x_\sigma}$  est évalué le long des orbites non-perturbées.

### 1.3.2 Coefficients de diffusion quasi-linéaires

Dans un premier temps, nous devons évaluer les champs de force  $g_{x_\sigma}(t)$  le long des orbites non-perturbées des particules. Elles sont données par

$$\bar{X} = x_0 \quad \bar{Y} = y_0 \quad \bar{Z} = z_0 - v\mu\xi \quad (1.246)$$

$$\bar{x} = x_0 - \frac{v\sqrt{1-\mu^2}}{\varepsilon\Omega} \sin \bar{\Phi} \quad (1.247)$$

$$\bar{y} = y_0 + \frac{v\sqrt{1-\mu^2}}{\varepsilon\Omega} \cos \bar{\Phi} \quad (1.248)$$

$$\bar{z} = z_0 - v\mu\xi \quad (1.249)$$

$$\bar{p} = p_0 \quad \bar{\mu} = \mu \quad \bar{\Phi} = \Phi_0 + \varepsilon\Omega\xi. \quad (1.250)$$

Nous utilisons une représentation de Fourier des fluctuations électriques et magnétiques en approximant l'orbite réelle  $\mathbf{x}(t)$  par l'orbite perturbée  $\bar{\mathbf{x}}(t)$

$$\delta\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\bar{\mathbf{x}}(t)} \quad (1.251)$$

$$\delta\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \mathbf{B}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\bar{\mathbf{x}}(t)}. \quad (1.252)$$

En posant  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$  à  $t = 0$ , on peut montrer que

$$\exp(i\mathbf{k}\cdot\bar{\mathbf{x}}(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(W) \exp[ik_{\parallel}v_{\parallel}t + in(\Psi - \Phi_0 + \varepsilon\Omega t)] \quad (1.253)$$

où  $\Omega = k_{\perp}v\sqrt{1-\mu^2}/\Omega$ . On en déduit l'expression dans l'espace de Fourier des fluctuations électromagnétiques

$$\delta B_{L,R,\parallel} \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k B_{L,R,\parallel}(\mathbf{k}, t) J_n(W) e^{in(\Phi-\Phi_0)+i(k_{\parallel}v_{\parallel}+n\varepsilon\Omega)t} \quad (1.254)$$

$$\delta E_{L,R,\parallel} \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k E_{L,R,\parallel}(\mathbf{k}, t) J_n(W) e^{in(\Phi-\Phi_0)+i(k_{\parallel}v_{\parallel}+n\varepsilon\Omega)t}. \quad (1.255)$$

En injectant les expressions (1.254, 1.255) dans les champs de force perturbés (1.233) on obtient l'expression des champs de force fluctuants évalués le long des orbites non-perturbées des particules (voir équations 12.2.4 Schlickeiser 2002 [194]). Nous introduisons également les tenseurs de corrélation des différentes composantes du champ EM

$$\langle B_\alpha(\mathbf{k}, t) B_\beta(\mathbf{k}', t + \xi) \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \xi) \quad (1.256)$$

$$\langle E_\alpha(\mathbf{k}, t) B_\beta(\mathbf{k}', t + \xi) \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') Q_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \xi) \quad (1.257)$$

$$\langle B_\alpha(\mathbf{k}, t) E_\beta(\mathbf{k}', t + \xi) \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') T_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \xi) \quad (1.258)$$

$$\langle E_\alpha(\mathbf{k}, t) E_\beta(\mathbf{k}', t + \xi) \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') R_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \xi). \quad (1.259)$$

A ce stade, l'expression des coefficients de diffusion est encore très générale. Elle peut être réduite en effectuant des hypothèses sur la nature de la turbulence plasma. Nous avons en particulier montré (sections 1.1.3, 1.1.4 et 1.1.5) qu'il est possible de dériver une relation de dispersion des modes du plasma qui décrit l'évolution temporelle et spatiale de toute perturbation (faible) du plasma. On l'exprime comme

$$\omega_j(\mathbf{k}) = \omega_{R,j}(\mathbf{k}) - i\Gamma_j(\mathbf{k}) \quad (1.260)$$

où  $\Gamma_j \Leftrightarrow -\omega_I$  et  $j = 1, \dots, N$  correspond aux différents modes possibles. On peut donc décrire la turbulence comme une somme des différents modes  $j$  solutions de la relation de dispersion du plasma

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}, t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{B}^j(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_j t) \quad (1.261)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{E}^j(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_j t) \quad (1.262)$$

où les modes stationnaires  $\mathbf{E}^j(\mathbf{k})$  et  $\mathbf{B}^j(\mathbf{k})$  sont liés par la loi d'induction de Maxwell

$$\mathbf{B}^j(\mathbf{k}) = \frac{c}{\omega_j(\mathbf{k})} \mathbf{k} \times \mathbf{E}^j(\mathbf{k}) \quad (1.263)$$

nous permettant ainsi de réécrire les tenseurs (1.256-1.259) comme

$$P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \xi) = \sum_{j=1}^N P_{\alpha\beta}^j(\mathbf{k}) \exp\left[i\omega_{R,\beta}^j(\mathbf{k})\xi - \Gamma_\beta^j(\mathbf{k})\xi\right] \quad (1.264)$$

$$Q_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \xi) = \sum_{j=1}^N Q_{\alpha\beta}^j(\mathbf{k}) \exp\left[i\omega_{R,\beta}^j(\mathbf{k})\xi - \Gamma_\beta^j(\mathbf{k})\xi\right] \quad (1.265)$$

$$T_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \xi) = \sum_{j=1}^N T_{\alpha\beta}^j(\mathbf{k}) \exp\left[i\omega_{R,\beta}^j(\mathbf{k})\xi - \Gamma_\beta^j(\mathbf{k})\xi\right] \quad (1.266)$$

$$R_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \xi) = \sum_{j=1}^N R_{\alpha\beta}^j(\mathbf{k}) \exp\left[i\omega_{R,\beta}^j(\mathbf{k})\xi - \Gamma_\beta^j(\mathbf{k})\xi\right] \quad (1.267)$$

où

$$P_{\alpha\beta}^j = \left\langle B_{\alpha}^j(\mathbf{k}) B_{\beta}^{j*}(\mathbf{k}') \right\rangle \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.268)$$

$$Q_{\alpha\beta}^j = \left\langle E_{\alpha}^j(\mathbf{k}) B_{\beta}^{j*}(\mathbf{k}') \right\rangle \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.269)$$

$$T_{\alpha\beta}^j = \left\langle B_{\alpha}^j(\mathbf{k}) E_{\beta}^{j*}(\mathbf{k}') \right\rangle \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.270)$$

$$R_{\alpha\beta}^j = \left\langle E_{\alpha}^j(\mathbf{k}) E_{\beta}^{j*}(\mathbf{k}') \right\rangle \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (1.271)$$

Cette réécriture suggère que les modes plasma affectent le transport du rayonnement cosmique via les coefficients de diffusion.

### 1.3.2.1 Expression générale

Ci-dessous sont présentés les coefficients de diffusion les plus importants. Les autres coefficients de diffusion sont présentés dans Schlickeiser (2002) [194].

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu} = & \frac{\Omega^2}{B_0^2} (1 - \mu^2) \sum_{j=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \mathcal{R}_j(\mathbf{k}, \omega_j) \times \left\{ \frac{c^2}{v^2} (1 - \mu^2) J_n^2(W) R_{\parallel\parallel}^j(\mathbf{k}) \right. \\ & + \frac{1}{2} J_{n+1}^2(W) \times \left( P_{RR}^j(\mathbf{k}) + \mu^2 \frac{c^2}{v^2} R_{RR}^j(\mathbf{k}) + i\mu \frac{c}{v} \left[ Q_{RR}^j(\mathbf{k} - T_{RR}^j(\mathbf{k})) \right] \right) \\ & + \frac{1}{2} J_{n-1}^2(W) \left( P_{LL}^j(\mathbf{k}) + \mu^2 \frac{c^2}{v^2} R_{LL}^j(\mathbf{k}) + i\mu \frac{c}{v} \left[ T_{LL}^j(\mathbf{k}) - Q_{LL}^j(\mathbf{k}) \right] \right) \quad (1.272) \\ & - \frac{1}{2} J_{n-1}(W) J_{n+1}(W) \left[ e^{2i\Psi} \times \left( P_{RL}^j(\mathbf{k}) - \mu^2 \frac{c^2}{v^2} R_{RL}^j(\mathbf{k}) + i\mu \frac{c}{v} \left[ T_{RL}^j(\mathbf{k}) + Q_{RL}^j(\mathbf{k}) \right] \right) \right. \\ & + \left. e^{-2i\Psi} \left( P_{LR}^j(\mathbf{k}) - \mu^2 \frac{c^2}{v^2} R_{LR}^j(\mathbf{k}) - i\mu \frac{c}{v} \left[ T_{LR}^j(\mathbf{k}) + Q_{LR}^j(\mathbf{k}) \right] \right) \right] + \frac{ic\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{2}v} J_n(W) \\ & \times \left[ J_{n+1}(W) \left( e^{i\Psi} T_{R\parallel}^j(\mathbf{k}) - e^{-i\Psi} Q_{\parallel R}^j(\mathbf{k}) + i\mu \frac{c}{v} \left[ R_{R\parallel}^j(\mathbf{k}) e^{i\Psi} + R_{\parallel R}^j(\mathbf{k}) e^{-i\Psi} \right] \right) \right. \\ & \left. + J_{n-1}(W) \left( e^{i\Psi} Q_{\parallel L}^j(\mathbf{k}) - e^{-i\Psi} T_{L\parallel}^j(\mathbf{k}) + i\mu \frac{c}{v} \left[ R_{\parallel L}^j(\mathbf{k}) e^{i\Psi} + R_{L\parallel}^j(\mathbf{k}) e^{-i\Psi} \right] \right) \right] \Bigg\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\mu p} &= D_{p\mu} = \frac{\Omega^2 \sqrt{1-\mu^2} p c}{v B_0^2} \mathcal{R}e \sum_{j=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 k \mathcal{R}_j(\mathbf{k}, \omega_j) \frac{v \mu k_{\parallel} - \omega_{R,j} + n\Omega}{\Gamma_j} \\
 &\times \left\{ -i \frac{c}{v} \mu \sqrt{1-\mu^2} J_n^2(W) R_{\parallel\parallel}^j(\mathbf{k}) + \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2} \left[ J_{n+1}^2(W) \left( T_{RR}^j(\mathbf{k}) + i \mu \frac{c}{v} R_{RR}^j(\mathbf{k}) \right) \right. \right. \\
 &- J_{n-1}^2(W) \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{|\Omega|} \right) \left( T_{LL}^j(\mathbf{k}) - i \mu \frac{c}{v} R_{LL}^j(\mathbf{k}) \right) \\
 &+ \left. \left. J_{n+1}(W) J_{n-1}(W) \left[ e^{2i\Psi} \left( T_{RL}^j(\mathbf{k}) + i \mu \frac{c}{v} R_{RL}^j(\mathbf{k}) \right) - e^{-2i\Psi} \left( T_{LR}^j(\mathbf{k}) - i \mu \frac{c}{v} R_{LR}^j(\mathbf{k}) \right) \right] \right] \right\} \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2}} J_{n-1}(W) J_n(W) \left[ \mu e^{-i\Psi} \left( -T_{L\parallel}^j(\mathbf{k}) + i \mu \frac{c}{v} R_{L\parallel}^j(\mathbf{k}) \right) - i(1-\mu^2) \frac{c}{v} e^{i\Psi} R_{\parallel L}^j(\mathbf{k}) \right] \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2}} J_{n+1}(W) J_n(W) \left[ \mu e^{i\Psi} \left( T_{R\parallel}^j(\mathbf{k}) + i \mu \frac{c}{v} R_{R\parallel}^j(\mathbf{k}) \right) - -i(1-\mu^2) \frac{c}{v} e^{-i\Psi} R_{\parallel R}^j(\mathbf{k}) \right] \left. \right\}, \tag{1.273}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{pp} &= \frac{\Omega^2 p^2 c^2}{B_0^2 v^2} \mathcal{R}e \sum_{j=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 k \mathcal{R}_j(\mathbf{k}, \omega_j) \left\{ \mu^2 J_n^2(W) R_{\parallel\parallel}^j(\mathbf{k}) + \frac{1-\mu^2}{2} \right. \\
 &\times \left[ J_{n+1}^2(W) R_{RR}^j(\mathbf{k}) + J_{n-1}^2(W) R_{LL}^j(\mathbf{k}) + J_{n-1}(W) J_{n+1}(W) \left[ R_{LR}^j(\mathbf{k}) e^{-2i\Psi} + R_{RL}^j(\mathbf{k}) e^{2i\Psi} \right] \right] \\
 &+ \frac{\mu \sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{2}} J_n(W) \left[ J_{n-1}(W) \left( e^{i\Psi} R_{\parallel L}^j(\mathbf{k}) + e^{-i\Psi} R_{L\parallel}^j(\mathbf{k}) \right) \right. \\
 &+ \left. \left. J_{n+1}(W) \left( e^{-i\Psi} R_{\parallel R}^j(\mathbf{k}) + e^{i\Psi} R_{R\parallel}^j(\mathbf{k}) \right) \right] \right\} \tag{1.274}
 \end{aligned}$$

où l'on a introduit la fonction de résonance de Breit-Wigner

$$\mathcal{R}_j(\mathbf{k}, \omega_j) = \frac{\Gamma_j(\mathbf{k})}{\Gamma_j^2(\mathbf{k}) + (v \mu k_{\parallel} - \omega_{R,j} + n\Omega)^2} \tag{1.275}$$

qui décrit l'amplitude d'interaction entre un rayon cosmique et un mode plasma. Dans le cas où les modes plasma sont faiblement amortis  $\Gamma_j \rightarrow 0$  la fonction de résonance devient

$$\mathcal{R}_j(\mathbf{k}, \omega_j) = \pi \delta(v \mu k_{\parallel} - \omega_{R,j} + n\Omega). \tag{1.276}$$

En l'absence d'amortissement, il y a échange d'énergie entre un rayon cosmique et une onde si et seulement si

$$v \mu k_{\parallel} - \omega_{R,j} + n\Omega = 0. \tag{1.277}$$



Cette relation est appelée résonance de Landau-Synchrotron. Si l'angle d'attaque  $\mu$  de la particule est nul, cette dernière échange de l'énergie avec l'ensemble des modes dont la pulsation  $\omega_{R,j}$  est proportionnelle à sa gyrofréquence  $\Omega$ . Si  $n = 0$  la particule échange de l'énergie avec des modes dont la partie oscillatoire est nulle, on qualifie ce phénomène d'amortissement par temps de transit (transit time damping : TTD en anglais). Lorsque l'angle d'attaque  $\mu$  de la particule n'est pas nul, un déphasage temporel lié à la vitesse de déplacement de la particule le long de la ligne de champ magnétique est introduit modifiant ainsi la condition de résonance. Dans ce cas, l'amortissement par temps de transit (TTD) est défini lorsque la particule se déplace à la même vitesse de phase que l'onde résonante; dans le référentiel en mouvement de la particule, l'onde ne possède pas de pulsation réelle.

Des expressions plus simples de  $D_{\mu\mu}$ ,  $D_{\mu p}$  et  $D_{pp}$  en fonction de différents modèles de turbulence sont proposées dans l'annexe (A.5). Xu et al. (2016) [238] ont étudié l'effet des collisions ion-neutre sur le coefficient de diffusion  $D_{\mu\mu}$  des RCs par les modes d'Alfvén, magnéto-soniques rapides et lents (voir leur annexe F). Les calculs font intervenir les échelles de découplage ion-neutre/neutre-ion  $k_{\text{dec,ni/in}}$  liées aux régimes d'interaction des fluides neutre et d'ions. Cet effet est discuté plus en détail dans la section (1.2.1.6).

### 1.3.3 Approximation de diffusion du rayonnement cosmique

L'équation de Fokker-Planck (1.244) possède 25 coefficients de diffusion différents. A l'exception des cas les plus simples, cette équation est insoluble numériquement comme analytiquement. Cependant, les propriétés de la turbulence impliquent que tous les coefficients de diffusion ne sont pas du même ordre de grandeur. Nous pouvons effectuer les deux hypothèses suivantes :

$\mathcal{H}_1$  La distribution des particules  $F_a(\mathbf{x}, p, \mu, \Phi, t)$  est faiblement fluctuante suivant les axes  $X$  et  $Y$ . C'est à dire que le rayon de Larmor caractéristique  $R_L$  est faible devant l'échelle de variation  $R$  de la distribution suivant  $X$  et  $Y$  :  $R_L \ll R$ . Ceci implique que la diffusion suivant les coordonnées d'espace  $X$  et  $Y$  est faible.

$\mathcal{H}_2$  La vitesse de phase  $V_{ph}$  caractéristique des ondes magnétohydrodynamiques de basse fréquence est très inférieure à la vitesse des rayons cosmiques  $v$  :  $V_{ph} \ll c$ . Ceci implique que les rayons cosmiques interagissent faiblement avec les ondes de basse fréquence impliquant que la diffusion suivant le moment des rayons cosmiques  $p$  est faible.

Les processus d'interaction les plus diffusifs sont alors la diffusion en gyrophase  $\Phi$  et en angle d'attaque  $\mu$ . Il est alors possible de décomposer la fonction de distribution des particules en une moyenne sur la gyrophase et l'angle d'attaque, et une partie anisotrope ([206], [115])

$$F_a(\mathbf{x}, p, \mu, \Phi, t) = M_a(\mathbf{x}, p, t) + G_a(\mathbf{x}, p, \mu, \Phi, t) \quad (1.278)$$

où

$$M_a(\mathbf{x}, p, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_{-1}^1 d\mu F_a(\mathbf{x}, p, \mu, \Phi, t) \quad (1.279)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_{-1}^1 d\mu G_a(\mathbf{x}, p, \mu, \Phi, t) = 0. \quad (1.280)$$

En utilisant le fait que  $D_{\mu x_i}, x_i \in \{\mathbf{x}, p, \mu, \Phi\} = 0$  si  $|\mu| = 1$  et que  $G_a(\Phi) = G_a(\Phi + 2\pi)$ , l'équation (1.244) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_a}{\partial t} &+ \frac{v}{4\pi} \frac{\partial}{\partial Z} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_{-1}^1 d\mu \mu G_a - S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ &= \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_{-1}^1 d\mu p^2 \left( D_{pp} \frac{\partial M_a}{\partial p} + D_{pX} \frac{\partial M_a}{\partial X} + D_{pY} \frac{\partial M_a}{\partial Y} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_{-1}^1 d\mu \left( D_{Xp} \frac{\partial M_a}{\partial p} + D_{XX} \frac{\partial M_a}{\partial X} + D_{XY} \frac{\partial M_a}{\partial Y} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_{-1}^1 d\mu \left( D_{Yp} \frac{\partial M_a}{\partial p} + D_{YX} \frac{\partial M_a}{\partial X} + D_{YY} \frac{\partial M_a}{\partial Y} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial x_{i \in \{p, X, Y\}}} \left[ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_{-1}^1 d\mu p^2 \left( D_{ij} \frac{\partial G_a}{\partial x_{j \in \{p, \mu, \Phi, X, Y\}}} \right) \right]. \quad (1.281) \end{aligned}$$

L'approximation de diffusion s'applique seulement si les densités de particules varient lentement dans le temps et dans l'espace ([96]),

$$\frac{\partial M_a}{\partial t} = \mathcal{O} \left( \frac{M_a}{T} \right) \quad \frac{\partial G_a}{\partial t} = \mathcal{O} \left( \frac{G_a}{T} \right) \quad (1.282)$$

$$\frac{\partial M_a}{\partial Z} = \mathcal{O} \left( \frac{M_a}{L} \right) \quad \frac{\partial G_a}{\partial Z} = \mathcal{O} \left( \frac{G_a}{L} \right) \quad (1.283)$$

où  $L \ll \lambda_{\parallel}$ ,  $\lambda_{\parallel} \approx v\tau$  correspond au libre parcours moyen parallèle des particules, et  $T \gg \tau$  où  $\tau$  correspond au temps de relaxation de l'angle d'attaque  $\mu$ . Dans ce cas, la distribution de particules  $F_a$  a le temps de retrouver un équilibre où elle est quasi-isotrope localement, ce qui implique  $G_a \ll M_a$ . En soustrayant l'équation moyennée de Fokker-Planck (1.281) à l'équation complète (1.244) et en ne conservant que les termes de premier ordre en les quantités  $(\tau/T)$ ,  $(\lambda_{\parallel}/L)$ ,  $(V_{ph}/v)$ ,  $(G_a/M_a)$  et  $(R_L/R)$ , c'est à dire en négligeant toutes les fluctuations magnétiques d'ordre supérieur à  $(\delta B/B_0)^2$ , nous obtenons une approximation de  $G_a$  au premier ordre en termes de distribution isotrope de  $M_a$ ,

$$\begin{aligned}
& \left[ \varepsilon\Omega + \frac{\partial}{\partial\mu} D_{\mu\Phi} \right] \frac{\partial G_a}{\partial\Phi} + \frac{\partial}{\partial\Phi} \left( D_{\Phi\Phi} \frac{\partial G_a}{\partial\Phi} \right) + \frac{\partial}{\partial\mu} \left( D_{\mu\mu} \frac{\partial G_a}{\partial\mu} \right) \\
\approx & v\mu \frac{\partial M_a}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial\mu} \left( D_{\mu p} \frac{\partial M_a}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial\mu} \left( D_{\mu X} \frac{\partial M_a}{\partial X} \right) \\
& - \frac{\partial}{\partial\mu} \left( D_{\mu Y} \frac{\partial M_a}{\partial Y} \right) - \frac{\partial D_{\Phi X}}{\partial\Phi} \frac{\partial M_a}{\partial X} - \frac{\partial D_{\Phi Y}}{\partial\Phi} \frac{\partial M_a}{\partial Y}.
\end{aligned} \tag{1.284}$$

L'anisotropie  $G_a$  étant périodique en gyrophase, on peut l'exprimer sous la forme d'une série de Fourier

$$G_a(\mathbf{x}, p, \mu, \Phi) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} G_a^{(s)}(\mathbf{x}, p, \mu) e^{is\Phi}. \tag{1.285}$$

Nous nous limitons à l'anisotropie du rayonnement cosmique au premier ordre. En injectant (1.285) dans (1.284) et en égalisant entre eux les termes de même ordre, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial\mu} \left[ D_{\mu\mu} \frac{\partial G_a^{(0)}}{\partial\mu} + D_{\mu p} \frac{\partial M_a}{\partial p} \right] = v\mu \frac{\partial M_a}{\partial z} \tag{1.286}$$

$$[i\varepsilon\Omega - D_{\Phi\Phi}] G_a^{(1)} + \frac{\partial}{\partial\mu} D_{\mu\mu} \frac{\partial G_a^{(1)}}{\partial\mu} = \Lambda \tag{1.287}$$

où

$$\Lambda = - \left[ \frac{\partial D_{\mu X}}{\partial\mu} + \frac{\partial D_{\Phi X}}{\partial\Phi} \right] \frac{\partial M_a}{\partial X} - \left[ \frac{\partial D_{\mu Y}}{\partial\mu} + \frac{\partial D_{\Phi Y}}{\partial\Phi} \right] \frac{\partial M_a}{\partial Y} \tag{1.288}$$

et le terme  $D_{\mu\Phi}$  a été négligé par rapport à  $\Omega$ . Comme  $G_a^{(1)*} = G_a^{(-1)}$ , une équation sur  $G_a^{(-1)}$  n'est pas nécessaire. En négligeant de surcroît le terme de diffusion en angle d'attaque ( $D_{\mu\mu}/\Omega \ll 1$ ) et en considérant que la gyrorotation est plus rapide que la diffusion en gyrophase ( $D_{\Phi\Phi}/\Omega \ll 1$ ), l'équation (1.287) devient

$$G_a^{(1)} \approx \frac{\Lambda}{i\varepsilon\Omega} \approx \mathcal{O} \left( \frac{\delta B^2}{B_0^2} M_a \right). \tag{1.289}$$

L'insertion du terme  $G_a^{(1)}$  dans l'équation (1.281) fait apparaître des termes d'ordre  $(\delta B/B_0)^4$ . Or cette dernière a été dérivée en négligeant les termes d'ordre supérieur à  $(\delta B/B_0)^2$ . On peut, dans notre approximation, considérer que

$$G_a \approx G_a^{(0)}. \tag{1.290}$$

### 1.3.3.1 Anisotropies

En intégrant l'équation (1.286) sur  $\mu$  et en considérant que

$$D_{\mu\mu} \frac{\partial G_a}{\partial \mu} + D_{\mu p} \frac{\partial M_a}{\partial p} \Big|_{\mu=\pm 1} = 0, \quad (1.291)$$

on obtient

$$\frac{\partial G_a}{\partial \mu} = -\frac{1-\mu^2}{2D_{\mu\mu}} v \frac{\partial M_a}{\partial Z} - \frac{D_{\mu p}}{D_{\mu\mu}} \frac{\partial M_a}{\partial p} \quad (1.292)$$

dont la solution est de la forme

$$\begin{aligned} G_a(\mu) &= \frac{v}{4} \frac{\partial M_a}{\partial Z} \left[ \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1-\mu^2)(1-\mu)}{D_{\mu\mu}(\mu)} - 2 \int_{-1}^{\mu} d\nu \frac{1-\nu^2}{D_{\mu\mu}(\nu)} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial M_a}{\partial p} \left[ \int_{-1}^1 d\mu (1-\mu) \frac{D_{\mu p}(\mu)}{D_{\mu\mu}(\mu)} - 2 \int_{-1}^{\mu} d\nu \frac{D_{\mu p}(\nu)}{D_{\mu\mu}(\nu)} \right] \end{aligned} \quad (1.293)$$

L'anisotropie est constituée de deux composantes. La première est liée à la diffusion en angle d'attaque et au gradient spatial de la distribution isotrope  $M_a$ . La seconde est liée au gradient de moment de  $M_a$  et est connectée à l'effet Compton-Getting ([39]).

Il est usuel de décomposer l'anisotropie  $G_a(\mu)$  en série de polynômes de Legendre orthonormaux  $P_l(\mu)$

$$G_a(\mu, Z, p) = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l(Z, p) P_l(\mu) \quad (1.294)$$

pour faire ressortir les harmoniques  $A_l(Z, p)$  de l'anisotropie.

### 1.3.3.2 Equation de diffusion-convection

L'équation de diffusion-convection est obtenue en inserant les définitions de  $G_a$  et  $\partial G_a / \partial \mu$  dans l'équation de Fokker-Planck moyennée (1.281),

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_a}{\partial t} - S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \kappa_{zz} \frac{\partial M_a}{\partial z} - \frac{1}{4p^2} \frac{\partial p^2 v A_1}{\partial p} \frac{\partial M_a}{\partial z} \\ &+ \frac{\partial}{\partial X} \left[ \kappa_{XX} \frac{\partial M_a}{\partial X} + \kappa_{XY} \frac{\partial M_a}{\partial Y} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \kappa_{YY} \frac{\partial M_a}{\partial Y} + \kappa_{YX} \frac{\partial M_a}{\partial X} \right] \\ &+ \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left( p^2 A_2 \frac{\partial M_a}{\partial p} \right) + \frac{v}{4} \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial M_a}{\partial p} \end{aligned} \quad (1.295)$$

où

$$\kappa_{zz} = v\lambda/3 = \frac{v^2}{8} \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1-\mu^2)^2}{D_{\mu\mu}(\mu)} \quad (1.296)$$

$$\kappa_{XX} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu D_{XX}(\mu) \quad (1.297)$$

$$\kappa_{XY} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu D_{XY}(\mu) \quad (1.298)$$

$$\kappa_{YY} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu D_{YY}(\mu) \quad (1.299)$$

$$\kappa_{YX} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu D_{YX}(\mu) \quad (1.300)$$

correspondent aux composantes du tenseur de diffusion spatial. En particulier  $\kappa_{zz}$  correspond au coefficient de diffusion des particules le long des lignes de champ non-perturbées. Et

$$A_1 = \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1-\mu^2)D_{\mu p}(\mu)}{D_{\mu\mu}(\mu)} \quad (1.301)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \left[ D_{pp}(\mu) - \frac{D_{\mu p}^2(\mu)}{D_{\mu\mu}(\mu)} \right] \quad (1.302)$$

correspondent respectivement aux pertes adiabatiques et au coefficient de diffusion en moment que l'on qualifie aussi de taux d'accélération stochastique de Fermi [224].

Dans le cas où le plasma de fond est en mouvement à la vitesse d'ensemble  $U \ll c$ , l'équation de diffusion-convection devient [121]

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_a}{\partial t} - S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \kappa_{zz} \frac{\partial M_a}{\partial z} - \left[ U + \frac{1}{4p^{*2}} \frac{\partial p^{*2} v^* A_1}{\partial p^*} \right] \frac{\partial M_a}{\partial z} \\ &+ \frac{\partial}{\partial X} \left[ \kappa_{XX} \frac{\partial M_a}{\partial X} + \kappa_{XY} \frac{\partial M_a}{\partial Y} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \kappa_{YY} \frac{\partial M_a}{\partial Y} + \kappa_{YX} \frac{\partial M_a}{\partial X} \right] \\ &+ \frac{1}{p^{*2}} \frac{\partial}{\partial p^*} \left( p^{*2} A_2 \frac{\partial M_a}{\partial p^*} \right) + \left[ \frac{p^*}{3} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{v^*}{4} \frac{\partial A_1}{\partial z} \right] \frac{\partial M_a}{\partial p^*} \end{aligned} \quad (1.303)$$

où  $p^*$  et  $\mu^*$  ont été mesurés dans le référentiel où le plasma est au repos et  $M_a = M_a(\mathbf{x}, p^*)$ .

Etudions cette équation dans différents régimes de propagation en suivant l'analyse de Skilling (1975a [206]). Rappelons également que l'ensemble des coefficients de diffusion résultent de l'interaction par collision des rayons cosmiques avec les fluctuations électromagnétiques du plasma. A des fins de simplification, nous ne conservons que les fluctuations Alfvéniques qui se déplacent le long des lignes de champ moyen  $\mathbf{B}_0$  et dont le vecteur d'onde est aligné avec le vecteur champ magnétique; on qualifie ces perturbations de modes slab. On néglige également le terme source  $S_a$ .

→ **L'accélération de Fermi domine** : L'équation (1.303) devient

$$\frac{\partial M_a}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p^2} \left( p^2 A_2 \frac{\partial M_a}{\partial p} \right). \quad (1.304)$$

Dans ce régime les rayons cosmiques diffusent bien plus rapidement en énergie qu'en espace. Cette équation dirige la quantité d'énergie perdue et/ou gagnée par les particules chargées en interaction avec des miroirs magnétiques aléatoires. Ce processus est qualifié d'accélération de Fermi du 2<sup>nd</sup> ordre [71].

→ **Les termes convectifs dominant** : L'équation (1.303) devient

$$\frac{\partial M_a}{\partial t} + U \frac{\partial M_a}{\partial z} = -\frac{1}{4p^2} \frac{\partial p^2 v A_1}{\partial p} \frac{\partial M_a}{\partial z} + \left[ \frac{p}{3} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{v}{4} \frac{\partial A_1}{\partial z} \right] \frac{\partial M_a}{\partial p} \quad (1.305)$$

Cette équation décrit la convection des rayons cosmiques à la vitesse  $U$ . Concrètement,  $U$  correspond à la vitesse des modes d'Alfvén et permet de décrire l'interaction des rayons cosmiques avec les perturbations dans le référentiel où ces dernières sont en moyenne au repos. Dans le cas où le plasma n'est pas homogène et se présente sous plusieurs phases stationnaires, la vitesse des modes d'Alfvén varie à l'interface entre deux phases. Cette variation peut entraîner un changement dans la distribution en énergie des particules chargées. En particulier si  $\partial U / \partial z > 0$ , les rayons cosmiques gagnent de l'énergie et vice-versa (si  $\partial U / \partial z < 0$ , les rayons cosmiques perdent de l'énergie). Enfin, les termes contenant  $A_1$  régulent la compression adiabatique des particules. Si la densité (moyenne ou turbulente) du champ magnétique diminue, les rayons cosmiques perdent de l'énergie, et vice-versa.

→ **La diffusion spatiale domine** : L'équation (1.303) devient

$$\frac{\partial M_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \kappa_{zz} \frac{\partial M_a}{\partial z} \quad (1.306)$$

Les rayons cosmiques interagissent avec les ondes via des collisions "faibles" [230], c'est à dire que les variations d'énergie de la distribution  $M_a$  sont négligeables. On calcule usuellement la vitesse de diffusion dans un milieu homogène

$$v_{diff} \approx \kappa_{zz} \frac{\partial M_a / \partial z}{M_a}. \quad (1.307)$$

Ce régime peut faire apparaître des gradients de pression de rayons cosmiques non-négligeables qui (Section 1.3.4) entraînent une production de perturbations magnétiques [207].

En QLT pour un modèle de turbulence slab Alfvénique, les coefficients de diffusion de RCs de rigidité adimensionnée  $R = R_L/l_{\text{slab}} = r_g B_0 c/l_{\text{slab}} \gg 1$  parallèle  $\kappa_{zz}$  et perpendiculaire  $\kappa_{\perp} = \kappa_{xx} = \kappa_{yy}$  sont donnés par [202]

$$\kappa_{zz} \approx \frac{9l_{\text{slab}}}{16\pi v C(\nu)} \left(\frac{B_0}{\delta B}\right)^2 R^2 \quad (1.308)$$

$$\kappa_{\perp} \approx \frac{\pi v}{2} C(\nu) l_{\text{slab}} \left(\frac{\delta B}{B_0}\right)^2 \quad (1.309)$$

où  $R_L = r_g B_0 c$  correspond à la rigidité des RCs,  $l_{\text{slab}} = l_{c,\text{slab}}/2\pi C(\nu)$  où  $l_{c,\text{slab}}$  est la longueur de corrélation de la turbulence,  $v$  est la vitesse des RCs,

$$C(\nu) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu - 1/2)}$$

et  $2\nu$  correspond à l'indice spectral de la loi d'échelle du modèle de turbulence considéré. Il convient de définir précisément l'indice spectral de la turbulence et l'échelle de cohérence spatiale de cette dernière. Dans le cas d'une rigidité adimensionnée  $R \ll 1$ , le coefficient de diffusion parallèle aux lignes de champ devient

$$\kappa_{zz} = \frac{l_{\text{slab}} v}{8\pi C(\nu)} \left(\frac{\delta B}{B_0}\right)^2 R^{2-2\nu} \left[ \frac{1}{1-\nu} - \frac{1}{2-\nu} \right]. \quad (1.310)$$

Le coefficient de diffusion perpendiculaire aux lignes de champ  $\kappa_{\perp}$  s'exprime de la même manière quelque soit la rigidité considérée.

### 1.3.4 Turbulence générée par les rayons cosmiques

#### 1.3.4.1 Génération de turbulence par l'instabilité de streaming de RCs

Les rayons cosmiques se propagent en réponse aux perturbations magnétohydrodynamiques du plasma. Ils influencent également ces dernières via des collisions dites "résonantes" c'est à dire obéissant à la condition, dans le cas d'interactions résonantes avec des modes d'Alfvén,

$$\omega_R - k_{\parallel} v_{\parallel} = n\Omega \quad (1.311)$$

ou "non-résonantes", c'est à dire non-contraintes par la relation ci-dessus. Dans tous les cas, un échange d'énergie a lieu. Une instabilité de streaming de RCs correspond à une anisotropie dans la distribution en moment des particules de telle manière que la pression parallèle aux lignes de champ magnétique moyen est supérieure à la pression perpendiculaire  $P_{\text{CR},\parallel} > P_{\text{CR},\perp}$ . Cette anisotropie se relaxe naturellement à travers une redistribution des angles d'attaque  $\mu$  des RCs qui se traduit par une réponse turbulente du plasma de fond au champ EM généré par les RCs [142]. En particulier, Skilling (1975b [207]) a montré que les modes turbulents peuvent cascader en réponse aux collisions ondes-rayons cosmiques, et en a déduit un système d'équations stationnaires exprimant

les taux de croissance ( $\Gamma_{g,A}$ ) des modes d'Alfvén se propageant en avant (+) et en arrière (-) par rapport au champ magnétique  $\mathbf{B}_0$

$$\frac{\Gamma_{g,A}^{\pm}}{\pi V_A(k)k} = 2k \frac{\partial I_{\mp}}{\partial k} \mp \frac{V_A(k)^2}{V_S(k)^2} \frac{4\Gamma_{g,S}}{\pi V_A(k)k} \frac{I_{\mp}(I_+ - I_-)}{\left(\frac{4\Gamma_{g,S}}{\pi V_A(k)k} - k^3 \frac{\partial}{\partial k} \frac{I_+ + I_-}{k^2}\right)^2} \quad (1.312)$$

où  $I = (\delta B/B_0)^2$  représente la densité d'énergie magnétique des modes d'Alfvén,  $\Gamma_{g,S}$  correspond au taux d'amortissement/croissance des modes de son dans le plasma. En ne considérant que des interactions résonantes, et dans le cadre de particules chargées ultra-relativistes, Skilling (1975c [208]) montre que le taux de croissance des modes d'Alfvén est donné par

$$\Gamma_{g,A}^{\pm} = \frac{4\pi}{3} \frac{p^4 V_A(k)}{W_0(I_+ + I_-)} \left[ \pm v \frac{\partial M_a}{\partial z} - \frac{\pi}{2} m_a \Omega_{0a} V_A(k) I_{\mp} \frac{\partial M_a}{\partial p} \right] \quad (1.313)$$

dont la démonstration est faite dans l'annexe (A.7). On observe que la turbulence est nécessairement générée par un gradient de pression spatial ou en moment des rayons cosmiques.

Ce terme a pour effet de modifier les propriétés de la turbulence Alfvénique et peut entraîner un confinement des rayons cosmiques en diminuant le coefficient de diffusion  $\kappa_{zz}$  autour de la zone de fort gradient. On qualifie ce genre de modèles de turbulence auto-générée, les récentes études tendent à montrer qu'ils sont nécessaires pour comprendre la dynamique turbulente de la galaxie et le spectre des RCs [106].

### 1.3.4.2 Amortissement turbulent : Modèle de Lazarian (2016)

En s'appuyant sur les travaux de Farmer & Goldreich (2004, FG04 [68]), Lazarian (2016, L16 [137]) propose un modèle d'amortissement de la turbulence Alfvénique résonante générée par l'instabilité de dérive de rayons cosmiques. Ce phénomène d'amortissement résulte des interactions décorréélées entre la turbulence générée par l'instabilité de streaming de RCs et la turbulence générée à grande échelle. Ce modèle nécessite de connaître les propriétés de la turbulence à grande échelle. Tandis que FG04 emploie le modèle original de GS95 de turbulence forte et considère que la turbulence est injectée isotropiquement avec une vitesse  $v(L)$  égale à la vitesse d'Alfvén  $V_A(L)$ , L16 étend le modèle aux autres régimes de turbulence interstellaire, sub-Alfvénique faible et super-Alfvénique.

Dans le cas où la turbulence est sub-Alfvénique ( $\mathcal{M}_A(L) < 1$ ) on a

$$\Gamma_{\text{sub},A,s} \approx \frac{V_A(k) \mathcal{M}_A^2}{k^{-1/2} L^{1/2}} \quad \frac{l_{\text{min}}^{4/3} \mathcal{M}_A^{4/3}}{L^{1/3}} < k^{-1} < L \mathcal{M}_A^4 \quad (1.314)$$

en régime de turbulence forte et



$$\Gamma_{\text{sub,A,w}} \approx \begin{cases} \frac{V_A \mathcal{M}_A^{8/3}}{k^{-2/3} L^{1/3}} & L \mathcal{M}_A^4 < k^{-1} < L \mathcal{M}_A \\ \mathcal{M}_A^2 \frac{V_A}{L} & L \mathcal{M}_A < k^{-1} < L \\ \mathcal{M}_A^2 \frac{V_A L}{k^{-2}} & k^{-1} > L \mathcal{M}_A, k^{-1} \gg L. \end{cases} \quad (1.315)$$

Dans le cas où la turbulence est super-Alfvénique ( $\mathcal{M}_A(L) > 1$ ) on a

$$\Gamma_{\text{super}} \approx \begin{cases} \frac{V_A \mathcal{M}_A^{3/2}}{L^{1/2} k^{-1/2}} & \frac{l_{\text{min}}^{4/3}}{L^{1/3}} \mathcal{M}_A < k^{-1} < L \mathcal{M}_A^{-3} \\ \frac{V_A \mathcal{M}_A}{L^{1/3} k^{-2/3}} & k^{-1} > L \mathcal{M}_A^{-3} \end{cases} \quad (1.316)$$

où  $l_{\text{min}} = k_{\text{dam}}^{-1}$  correspond à l'échelle de coupure de la turbulence qui est donnée par les équations (1.202) et (1.204) en régime sub-Alfvénique et super-Alfvénique respectivement [238].

# Echappement et diffusion non-linéaire des RCs dans le MIS

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Contexte</b> . . . . .	<b>91</b>
<b>2.2</b>	<b>Modèles théoriques</b> . . . . .	<b>95</b>
2.2.1	Modèle de milieu interstellaire . . . . .	95
2.2.2	Equations du système . . . . .	103
2.2.3	Modèle de turbulence de fond . . . . .	106
2.2.4	Echappement des rayons cosmiques . . . . .	108
2.2.5	Rayonnement synchrotron des électrons . . . . .	120
2.2.6	Temps de résidence et grammage . . . . .	120
<b>2.3</b>	<b>Code numérique de transport CR SPECTRA</b> . . . . .	<b>121</b>
2.3.1	Présentation générale . . . . .	121
2.3.2	Méthodes de résolution numérique par découpage . . . . .	123
2.3.3	Termes d'advection spatiale ( $L_{adv}^z$ ) . . . . .	124
2.3.4	Terme de diffusion spatiale ( $L_{diff}^z$ ) . . . . .	128
2.3.5	Termes d'advection en énergie ( $L_{adv}^E$ ) . . . . .	130
2.3.6	Terme de rayonnement synchrotron ( $L_{sync}$ ) . . . . .	135
2.3.7	Termes de source ( $L_{src}, L_{gd}$ ) . . . . .	137
2.3.8	Modèles d'injection de rayons cosmiques . . . . .	139
<b>2.4</b>	<b>Résultats et discussion</b> . . . . .	<b>140</b>
2.4.1	Résumé des résultats de Brahimi et al. (2020) . . . . .	140
2.4.2	Tests fiduciaux avec le code CR SPECTRA . . . . .	145
2.4.3	Discussion et ouverture . . . . .	160
<b>2.5</b>	<b>Applications</b> . . . . .	<b>165</b>
2.5.1	Emission $\gamma$ de MCs dans le CSM . . . . .	165

2.5.2	Recherche d'une source de RCs cachée . . . . .	165
2.5.3	SNe de type core collapse . . . . .	165
2.5.4	Amas d'étoiles massives . . . . .	166

---

## 2.1 Contexte

Les rayons cosmiques (RCs) se déplacent dans le milieu interstellaire (MIS) en suivant une marche aléatoire essentiellement déterminée par l'organisation turbulente des lignes de champ magnétique galactique avec un libre parcours moyen au delà du parsec pour des énergies supérieures au GeV. L'origine du rayonnement cosmique est toujours sujette au débat. Bien que les restes de supernovae (SNRs) soient acceptées comme les candidats favoris (Drury et al. 2001 [165]) d'autres sources ne sont pas à exclure, comme les super-bulles par exemple [25] [173]. Le processus d'accélération du rayonnement cosmique par le choc diffusif (DSA : Diffusive Shock Acceleration) d'un SNR est relativement compris jusqu'à l'instant où le rayonnement cosmique commence à se propager dans le milieu interstellaire environnant. Cependant, considérer que le processus DSA est responsable de l'injection de RCs dans le milieu intersellaire nécessite de comprendre l'ensemble des étapes du transport des particules suprathermiques depuis leur injection jusqu'à l'émission  $\gamma$  des nuages moléculaires dans l'environnement des SNRs. Ce processus constitue un excellent marqueur de la présence de RC. Pour ce qui concerne la composante hadronique celle-ci devient visible en  $\gamma$  du fait des collisions proton-proton entre les RCs et le plasma dense que constitue le nuage moléculaire [63], [6], [81]. Les nombreuses observations de restes de supernovae en flux  $\gamma$  représentent clairement une observable physique et nécessitent que le problème de la fuite du rayonnement cosmique des SNRs soit mieux compris. Une compréhension du processus d'émission du rayonnement cosmique par les SNRs permettrait également une avancée dans les débats sur l'origine du rayonnement  $\gamma$  des environnements de SNRs actifs comme par exemple le système RX J1713 [80] [111]. En connaissant les propriétés de diffusion des protons et des électrons dans les environnements des sources, il est possible de discuter de l'origine leptonique ou hadronique de l'illumination  $\gamma$ .

Historiquement, le transport du rayonnement cosmique est traité différemment à l'intérieur et à l'extérieur de l'accélérateur. A l'intérieur dans la source, les niveaux de turbulence sont importants ( $\delta B/B_0 \approx 1$  voire  $> 1$ ) et le libre parcours moyen des RCs est du même ordre de grandeur que leur rayon de gyration. A l'extérieur dans le milieu intersellaire, les niveaux de turbulence sont plus faibles<sup>1</sup> ( $\delta B/B_0 < 1$ ) et le libre parcours moyen des RCs est très supérieur à leur rayon de gyration. Tandis qu'à l'intérieur le transport des RCs est décrit par la dynamique de Bohm et est isotrope, à l'extérieur de la source le transport est anisotrope ie. aligné le long des lignes de champ magnétique ordonnées et les RCs diffusent avec un coefficient de diffusion compatible avec celui observationnellement inféré par la mesure des rapports concentration des éléments secondaires sur celle des primaires (par exemple par la mesure du rapport B/C). Il existe donc une discontinuité dans la description du transport du rayonnement cosmique au voisinage de l'accélérateur où les particules sont confinées et loin de l'accélérateur où elles diffusent plus. Une première réponse à ce problème a été apportée [180] [59], le processus d'accélération est traité indépendamment du processus d'échappement : les particules accélérées s'échappent in-

---

<sup>1</sup>Aux échelles résonantes avec les particules d'énergie  $\ll$  PeV

stantanément dès qu'elles atteignent une énergie prescrite. Cependant, le coefficient de diffusion à l'intérieur et à l'extérieur de l'accélérateur présente toujours une discontinuité. Malkov et al. (2013) [148] propose de formuler le problème de la fuite du rayonnement cosmique par une diffusion d'un nuage de rayon cosmique (CRC : Cosmic Ray Cloud) qui est libéré par l'accélérateur dans le milieu intersellaire et se propage en interagissant avec des perturbations d'Alfvén auto-générées. Les propriétés de libération du nuage de rayonnement cosmique dépendent essentiellement du modèle de SNR et des propriétés du milieu intersellaire tandis que les propriétés de transport dépendent à la fois du milieu intersellaire et à la fois de la turbulence auto-générée produite le rayonnement cosmique lui-même.

Dans le modèle CRC, le rayonnement cosmique se propage à travers un tube local de flux de champ magnétique (voir figure 2.1). Cette approche est uniquement valide pour les SNRs en expansion dans un milieu intersellaire avec un champ magnétique à grande échelle donc la direction n'évolue pas à l'échelle du SNR (plutôt typique des supernovae de type Ia). L'objectif étant de traiter le continuum de transport des RCs du régime de Bohm  $\kappa_{\text{CR}} \sim \kappa_b$  où  $\kappa_b = r_g v / 3$  est le coefficient de diffusion de Bohm, au régime de diffusion linéaire anisotrope  $\kappa_{\text{CR},\parallel} \sim (\delta B / B_0)^2 \kappa_b$  et  $\kappa_{\text{CR},\perp} \sim (\delta B / B_0)^4 \kappa_{\text{CR},\parallel}$ . Le CRC est développé en géométrie cylindrique. Le tube de flux est caractérisé par sa longueur  $l_c \approx 50 - 500$  pc correspondant à la longueur de cohérence des lignes de champ magnétique à grande échelle [13] et par le rayon correspond à la surface décrite par le choc sphérique du reste  $\pi R_{\text{SNR}}(t_{\text{esc}}(E))^2$  à l'instant  $t_{\text{esc}}$  où des rayons cosmiques d'énergie  $E$  sont libérés. En effectuant l'approximation que la pression du rayonnement cosmique est constante dans toute section du cylindre et en considérant que le coefficient de diffusion perpendiculaire est faible devant le coefficient de diffusion parallèle, le problème de diffusion peut être traité en une dimension.<sup>2</sup> Le milieu interstellaire circum-source (CSM)<sup>3</sup> est considéré comme un cylindre homogène suivant le rayon mais qui peut évoluer suivant l'axe. La dimension minimale d'un nuage moléculaire qu'il est possible de considérer est définie par le diamètre maximal que peut atteindre le rayon du choc du reste ( $R_{\text{SNR},\text{max}} \sim 20 - 100$  pc) qui est défini pour le rayonnement cosmique qui s'échappe le plus tardivement de l'accélérateur. Les RCs qui s'échappent du CRC produisent une instabilité de streaming (ou de dérive) du fait de leur distribution anisotrope caractérisée par la présence d'un gradient de pression entre la source et le milieu interstellaire. Ce gradient produit une force qui génère des perturbations dans

<sup>2</sup>En effet, on peut montrer que la vitesse d'expansion perpendiculaire du modèle CRC est très inférieure à la vitesse d'expansion parallèle c'est à dire que  $\tau_{\perp} \gg \tau_{\parallel}$  où  $\tau_{\perp} \sim a_{\perp} / U_{\perp}$  et  $\tau_{\parallel} \sim a_{\parallel}^2 / \kappa_{\text{eff}}$  sont respectivement les temps de confinement perpendiculaire et parallèle du CRC.  $a_{\perp} \sim R_{\text{sh}}$  et  $a_{\parallel} \sim \kappa_b / u_{\text{sh}}$  correspondent respectivement aux tailles perpendiculaire et parallèle du CRC tandis que  $U_{\perp} \sim \sqrt{P_{\text{CR}} / \rho}$  correspond à la vitesse d'expansion perpendiculaire du nuage et  $\kappa_{\text{eff}} \sim \sqrt{\kappa_{\text{ISM}} \kappa_{\text{NL}}}$  correspond à la diffusivité parallèle effective où  $\kappa_{\text{NL}}$  correspond à la suppression de la diffusivité effective par la turbulence auto-générée. Enfin  $R_{\text{sh}}$  et  $u_{\text{sh}}$  correspondent respectivement au rayon et à la vitesse de propagation du choc de la source. L'inégalité  $\tau_{\perp} \gg \tau_{\parallel}$  implique  $P_{\text{CR}} / \rho u_{\text{sh}}^2 \ll (u_{\text{sh}} R_{\text{sh}} / \kappa_b)^2 (\kappa_{\text{ISM}} \kappa_{\text{NL}} / \kappa_b^2)$ . On peut montrer à posteriori que cette inégalité est respectée.

<sup>3</sup>Le milieu interstellaire dans l'environnement proche de la source

le milieu qui contribuent en retour à confiner le rayonnement cosmique en diminuant la valeur du coefficient de diffusion. Dans ce modèle, les perturbations générées sont des ondes d'Alfvén qui se déplacent le long des lignes de champ magnétique à grande échelle. Ces ondes sont générées en résonance avec le rayon de gyration des RCs  $r_g k = 1$  et impliquent un lien direct entre la longueur des perturbations auto-générées et l'énergie des RCs. Ce modèle n'est valable que lorsque les niveaux de turbulence auto-générée sont faibles (nous travaillerons en approximation quasi-linéaire). Autrement, il est également possible de considérer la génération d'ondes MHD non-résonantes via l'instabilité de Bell<sup>4</sup> [16]. Ce modèle n'est cependant pas encore implémenté dans ce travail.

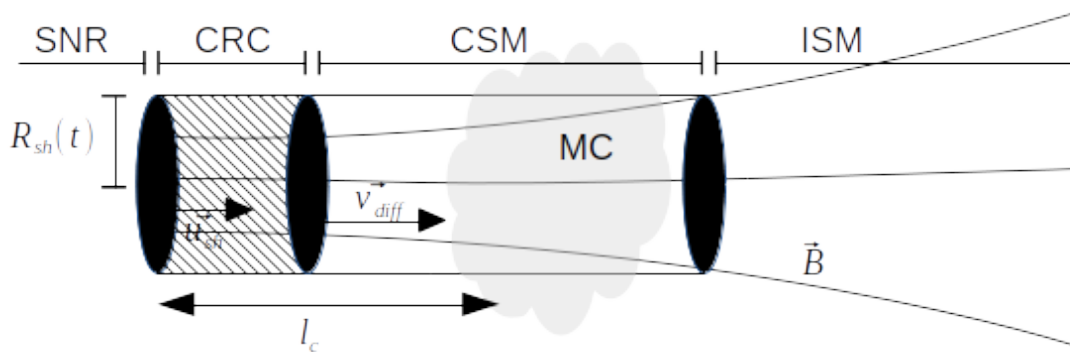


Figure 2.1: Ce schéma représente le modèle CRC proposé par Malkov et al. (2013) [148]. Il se décompose en 4 zones : le milieu intérieur du SNR délimité par une interface choquée SNR/CSM qui se propage à la vitesse  $u_{sh}(t)$  à gauche, la zone hachurée qui représente le nuage de RCs s'étendant à la vitesse  $v_{diff} \sim \kappa_{CR}/L$  où  $L$  correspond à la zone sur laquelle est défini le gradient de pression des RCs, le milieu circum-source (CSM) dans lequel peut également se trouver un nuage moléculaire (MC) et dans lequel les propriétés de transport des RCs sont affectées par les perturbations auto-générées et enfin le milieu interstellaire (ISM) dans lequel on considère que globalement le transport des RCs est linéaire. La longueur  $l_c$  représente l'échelle de cohérence spatiale des lignes de champ magnétique  $\vec{B}$ . Si cette échelle est très inférieure à taille du cylindre, le transport perpendiculaire devient non-négligeable.

Nava et al. (2016, 2019) [160] [161] propose d'étudier le problème via une approche numérique afin de corriger les solutions analytiques de Malkov et al. (2013) [148] qui deviennent irréalistes lorsque les gradients de pression de RCs sont importants. Le modèle numérique permet de prendre en compte facilement les différents processus d'amortissement des perturbations issues de l'instabilité de streaming. La turbulence auto-générée est amortie suivant des modèles plus précis : dans les phases faiblement ionisées les ondes sont amorties via collisions ion-neutre et par interactions non-linéaires avec la turbulence à grande échelle, dans les phases ionisées les ondes sont amorties

<sup>4</sup>Si l'amplitude du courant  $|\kappa_{CR}(t) \partial n_{CR}/\partial z|$  est suffisamment grande.

via le processus d’amortissement non-linéaire de Landau. Le coefficient de diffusion des RCs peut dans certains cas être réduit de 2 ordres de grandeur par rapport à sa valeur standard (issue des mesures directes) et affecter les distributions de RCs entre 10 GeV et 10 TeV d’une fraction de milliers d’années à plusieurs dizaines de milliers d’années respectivement. Dans mon papier Brahim et al. (2020) [22] j’applique cette approche numérique au cas des phases faiblement ionisées et moléculaires et montre que le confinement induit aux hautes énergies peut être encore plus important dans les phases les plus denses. J’étudie également le cas d’un milieu multiphase et montre que la présence d’une interface entre deux phases affecte de manière notable la distribution de rayonnement cosmique par rapport au cas d’un milieu homogène, et au cas d’une diffusion linéaire par rapport au coefficient de diffusion de fond. Cependant, l’étude de la propagation du rayonnement cosmique dans un MIS multiphase nécessite de tenir compte des pertes adiabatiques qui résultent essentiellement des variations de la vitesse d’Alfvén aux transitions entre phases. L’étude de la diffusion non-linéaire du rayonnement cosmique s’échappant d’un reste de supernova dans un MIS multiphase en tenant compte à la fois des aspects de propagation et des aspects énergétiques du rayonnement cosmique et de la turbulence auto-générée n’a jamais été menée jusqu’à présent. C’est dans ce cadre que s’inscrit le travail présenté dans ce chapitre.

Dans une première partie (section 2.2) je présente en détail les modèles théoriques utilisés pour définir la problématique de l’échappement et du transport non-linéaire des RCs dans le MIS : je présente une modélisation du milieu intersellaire qui inclue une étude bibliographique des différentes phases du MIS et une étude de la propagation des ondes d’Alfvén. Puis, je présente les équations du système qui décrivent la propagation des RCs (protons et électrons) ainsi que celles de la turbulence auto-générée (ondes d’Alfvén se déplaçant en avant et en arrière par rapport à la direction des lignes de champ magnétique moyen), je présente deux modèles de turbulence de fond, deux modèles d’échappement des RCs et un modèle de SNRs, je présente un modèle d’émission synchrotron des électrons et discute de deux observables que sont le temps de résidence et le gramage des RCs. Dans une seconde partie je présente l’ensemble des méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations du système avec tous les modèles théoriques. L’ensemble du travail numérique a donné lieu à un nouveau code de transport du rayonnement cosmique en 1D : CR SPECTRA (Cosmic Rays Self Propagation Escaping and Confinement TRANsport code) qui permet, au-delà de la problématique de chapitre, de réaliser un grand nombre d’études autour des sources et du transport du rayonnement cosmique dans le MIS. Dans une troisième partie je discute des résultats de ma publication Brahim et al. (2020) [22] et présente un ensemble de tests préliminaires réalisés avec le code CR SPECTRA qui répondent à une partie des limitations évoquées dans ma publication. En effet, en plus d’être modulable et de permettre d’inclure un grand nombre de modèles en fonction des besoins, le code CR SPECTRA résoud également le transport du rayonnement cosmique (protons et électrons) dans le domaine des énergies et permet de tenir compte de la présence des pertes adiabatiques des particules. Enfin la dernière partie discute d’applications

potentielles du code CR SPECTRA dans des thématiques connexes.

## 2.2 Modèles théoriques

Dans cette section, nous abordons les différents modèles théoriques qui sont implémentés dans le code de transport et qui permettent également d'analyser les résultats des différentes simulations. En section 2.2.1 j'aborde la modélisation du milieu interstellaire en présentant dans un premier temps les résultats d'une recherche bibliographique qui a conduit à définir un panel de phases du milieu interstellaire faiblement ionisées tel qu'on peut les trouver dans les environnements des accélérateurs de rayons cosmiques, et dans un second temps je discute des interactions entre la turbulence auto-générée, le plasma interstellaire et la turbulence introduite à grande échelle. En section 2.2.2, je présente les équations du système générales en premier lieu, puis adaptées au code de simulation du modèle de transport en 1D. En section 2.2.3, je présente les différents modèles de turbulence de fond que j'ai utilisé dans ce travail. En section 2.2.4, je présente différents modèles d'échappement des rayons cosmiques des SNRs en particulier. Je discute ensuite en section 2.2.5 le terme de perte synchrotron des électrons et enfin je termine en section 2.2.6 par évoquer le grammage des rayons cosmique qui constitue un bon indicateur du confinement de ces derniers et donc de la production d'ondes.

### 2.2.1 Modèle de milieu interstellaire

Les propriétés du milieu dans lequel se propagent les rayons cosmiques et les ondes d'Alfvén sont aussi essentielles que le modèle d'injection du rayonnement cosmique par les accélérateurs. C'est pourquoi il est nécessaire d'en faire une description théorique aussi précise que possible, ce que je m'attache à faire ci-dessous. Le milieu interstellaire est complexe et la manière dont il est structuré reste une question ouverte. Nous suivons l'essentiel des travaux théoriques et observationnels qui ont été réalisés sur le sujet (Field et al. 1969 [73], McKee & Ostriker 1977 [153], Reynolds 1989 [181], Gaensler et al. 2008 [83]) ainsi que dans le chapitre (1) et décomposons le milieu interstellaire en fonction de son taux d'ionisation et de sa température. Nous nous intéressons principalement aux phases faiblement ionisées, en supposant qu'une proportion non-négligeable des accélérateurs que nous étudions explosent dans des milieux incluant des phases neutres atomiques et moléculaires, lieux de naissance des étoiles. Cependant, il est courant d'observer des phases denses et chaudes autour des accélérateurs comme les supernovae ou encore les étoiles massives. Nous étudierons donc également deux phases ionisées : HII (régions HII) et WIM (Warm Ionized Medium), la phase HIM (Hot Ionized Medium) ayant déjà été traitée par Nava et al. (2019) [161].

#### 2.2.1.1 Composition du milieu interstellaire

Le modèle de milieu interstellaire que j'utilise est basé sur une approche MHD bi-fluide telle que décrite dans la section (1.1.4). Nous rappelons que dans cette approche, le plasma est composé de deux fluides : l'un ionisé représentant les espèces ionique, l'autre



neutre représentant les espèces neutres. Rappelons que dans l’approche MHD bi-fluide, le fluide électronique ne joue aucun rôle dans la dynamique du plasma. Nous considérons également que le milieu interstellaire est composé d’hydrogène et d’hélium avec pour rapport de densité  $n_H/n_{He} \approx 13.28$ . La masse des électrons étant faible devant la masse des protons, il est possible de définir une densité numérique totale uniquement basée sur les noyaux atomiques uniquement sans que cela n’affecte les propriétés du modèle de milieu interstellaire. La densité totale du plasma est donc donnée par  $n_T = n_H + n_{He}$ . On définit également les masses réduites des fluides ionisé et neutre par la relation  $\mu_{i,n} = m_{i,n}/m_H$  où  $m_H$  est la masse d’un atome d’hydrogène et  $m_{i,n}$  sont les masses pondérées des éléments chimiques composant les milieux ionisé et neutre respectivement.

Le milieu interstellaire se décompose en deux catégories : le milieu interstellaire chaud et totalement ionisé, et le milieu interstellaire froid et faiblement ionisé. Dans cette section nous nous intéresserons essentiellement aux phases tièdes, froides et faiblement ionisées du milieu interstellaire ainsi qu’à deux phases ionisées. L’essentiel des propriétés physiques et chimiques du milieu interstellaire faiblement ionisé ont été tirées des travaux de Snow & McCall (2006 [209]). Il est important de noter que dans notre modèle, le milieu interstellaire inclus un champ magnétique moyen qui n’évolue pas dans le temps. Nous considérons également que la turbulence générée aux grandes échelles est également injectée dans le modèle ( $L = l_c \approx 50 \text{ pc}^5$ ) et contribue à affecter la propagation des ondes magnétiques le long des lignes de champ et donc le transport du rayonnement cosmique.

Le milieu interstellaire est composé des phases suivantes :

- **Les phases neutres atomiques** : Les phases WNM (Warm Neutral Medium) et CNM (Cold Neutral Medium) correspondent aux solutions d’équilibre thermiques avec la phase WIM telles que dérivées par Field et al. (1969 [73]). Dans les deux phases, l’espèce neutre dominante est l’hydrogène sous forme atomique (HI) tandis que l’ion dominant est l’hydrogène ionisé (HII) dans le WNM et le carbone ionisé une fois dans de CNM (CII) [209]. Le WNM est relativement peu dense ( $n_T = 0.2 - 0.5 \text{ cm}^{-3}$ ) avec une température d’équilibre élevée ( $T = 6\,000 - 10\,000 \text{ K}$ ) tandis que le CNM est plus dense ( $n_T = 20 - 50 \text{ cm}^{-3}$ ) et froid ( $T = 30 - 100 \text{ K}$ ). Il est difficile de définir une taille caractéristique pour ces deux phases. Les observations de la raie d’absorption de l’hydrogène à 21 cm du milieu interstellaire permettent d’obtenir des relations empiriques entre la dispersion de vitesse du gaz  $\sigma$  et la taille typique  $R$  de la phase telle que la loi de Larson  $\sigma \propto R^k$  où  $k \approx 0.35$  (Larson 1979 [133], Roy et al. 2008 [188]). Ces analyses montrent que  $R$  est compris entre 0.01 pc et 100 pc. Il est également important de noter que ces

---

<sup>5</sup>La variable  $L$  désigne l’échelle d’injection de la turbulence générée aux grandes échelles tandis que  $l_c$  correspond à la longueur de cohérence des lignes de champ magnétique. L’égalité  $L = l_c$  n’est pas forcément vraie mais est considérée à des fins de simplification du problème : La turbulence est injectée depuis la plus grande échelle disponible à laquelle le modèle CRC est applicable.

structure ne sont pas isotropes mais plutôt allongées avec un rapport  $R_L/R_l \approx 100$  entre la longueur ( $R_L$ ) et la largeur ( $R_l$ ) de la région (Heiles & Troland 2003 [98]).

- **La phase moléculaire diffuse :** La phase DiM (Diffuse Medium) correspond à la transition entre les phases atomiques et les phases moléculaires qui constituent les structures denses, froides et auto-gravitantes du milieu interstellaire. Le milieu interstellaire atomique est baigné de radiations UV empêchant ainsi les molécules de se former tandis que dans les phases moléculaires, ces radiations ne pénètrent pas permettant ainsi la présence de molécules complexes. La phase DiM joue le rôle de bouclier moléculaire et permet de conserver l'équilibre chimique des phases plus denses. Elle constitue donc une transition entre un gaz externe composé d'hydrogène atomique (HI) et un gaz interne plus dense composé d'hydrogène sous la forme moléculaire ( $H_2$ ) [209]. Dans notre modèle de milieu interstellaire, nous considérons que la phase DiM est constituée de 50% d'hydrogène neutre (HI) et 50% d'hydrogène moléculaire ( $H_2$ ). Comme pour la phase CNM, la composante ionisée dominante est le Carbone ionisé (CII) issue de la photo-dissociation des molécules de CO. La densité du DiM est plus importante  $n_T = 100 - 500 \text{ cm}^{-3}$  tandis que sa taille caractéristique est encore plus mal définie que celles du CNM et du WNM. A partir d'observations CO, Solomon et al. (1987 [212]) suggère des tailles comprises entre 1 pc et 50 pc où la limite supérieure est basée sur l'observation de nuages moléculaires géants.
- **Les phases moléculaires denses :** Les phases DeM (Dense Molecular) et DeC (Dense Core) correspondent à deux phases très denses et très faiblement ionisées du milieu interstellaire. Elles constituent la partie interne des nuages moléculaires. Leur densité est de  $3 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$  et  $10^4 \text{ cm}^{-3}$  respectivement et leur température caractéristique est de 30 K et 20 K respectivement. L'espèce neutre dominante est l'hydrogène moléculaire ( $H_2$ ) et l'espèce ionisée dominante est l'ion  $HCO^+$  (Neufeld et al. 2005 [162]). Il est également difficile d'estimer la taille caractéristique des phases moléculaires,  $R \sim 1 \text{ pc}$  est la taille considérée dans cette étude.
- **Les phases ionisées :** Parmi les phases ionisées, on trouve les régions HII qui sont denses, très chaudes ( $n_T \sim 300 \text{ cm}^{-3}$ ,  $T \approx 10^4 \text{ K}$ ), totalement ionisées et donc dominées par les ions HII et HeII. La phase WIM (Warm Ionized Medium) résulte de la solution d'équilibre thermique obtenue par Field et al. (1969 [73]) et possède les mêmes caractéristiques que la phase WNM à la différence que le taux d'ionisation est proche de 1. Il existe d'autres phases faiblement ionisées tel que la phase HIM (Hot Ionized Medium) qui est caractérisée par des températures très élevées ( $T = 10^4 - 10^6 \text{ K}$ ) et de faibles densités ( $n_T < 1 \text{ cm}^{-3}$ ) et que l'on peut retrouver dans les milieux très dilués de la galaxie ou encore dans le milieu intergalactique. Les plasmas stellaires représentent également une catégorie de plasmas ionisés.

L'ensemble des propriétés des phases citées et utilisées dans ce travail sont résumées dans la table (2.1). Conformément à la géométrie du problème, nous considérons des

Phase	HII	WIM	WNM	CNM	DiM	DeM	DeC
$T$ [K]	$10^4$	8 000	8 000	50	50	30	20
$B$ [ $\mu$ G]	10	5	5	6	6	26	59
$X$ [ $10^{-4}$ ]	$10^4$	$9 \times 10^3$	$2 \times 10^2$	8	1	0.1	0.01
$n_T$ [ $\text{cm}^{-3}$ ]	100	0.35	0.35	30	300	3000	$10^4$
$\mu_i$	1.21	1.21	1	12	12	29	29
$\mu_n$	-	1.21	1.21	1.21	1.67	2.12	2.12

Table 2.1: Ce tableau représente les différentes phases (HII, WIM, WNM, CNM, DiM, DeM et DeC) utilisées dans ce travail.  $T$  représente la température cinétique du gaz,  $B$  le champ magnétique moyen,  $X = n_i/n_T$  est le taux d'ionisation,  $n_T = n_i + n_n$  est la densité numérique normalisée,  $\mu_i$  et  $\mu_n$  sont les masses des espèces ionisées et neutres normalisées par la masse du proton. L'ensemble des valeurs sont tirées de Jean et al. (2009 [114]), Snow & McCall (2006 [209]) et Neufeld et al. (2005 [162]).

phases qui ont la forme d'un tube de hauteur  $h \sim R_{\text{phase}}$  où  $R_{\text{phase}} = R_L$  est déterminé grossièrement ci-dessus et un rayon  $R_l/2 = R_{\text{SNR}}$  correspondant au rayon du choc de la supernova de laquelle s'échappent les rayons cosmiques. Il est évident que pour les phases les plus denses et les phases ayant une géométrie filamentaire, cette approximation n'est pas valable dès lors que le choc de supernovae dépasse quelques pc. De plus nous négligeons également l'effet de diffusion perpendiculaire des rayons cosmiques et/ou de dilution des lignes de champ magnétique moyen ce qui suggère que nous sous-estimons la valeur de  $R_l$ . Plus de détails concernant la géométrie du modèle sont donnés par Malkov et al. (2013 [148]) et Nava et al. (2016 [160]).

### 2.2.1.2 Propagation des ondes d'Alfvén

Les propriétés du milieu interstellaire affectent de manière notable de développement de la turbulence et la propagation des perturbations magnétiques générées par les rayons cosmiques dans le plasma. Nous rappelons l'hypothèse dans laquelle les particules chargées produisent des ondes magnétiques résonantes avec leur rayon de gyration  $r_g = E/eB$  où  $E$  représente l'énergie cinétique de la particule. Dans notre modèle, la turbulence générée par les rayons cosmiques est amortie par trois processus différents. L'amortissement par collision ions-neutres qui découle directement de l'approche MHD bi-fluide et qui résulte du transfert de quantité de mouvement depuis le fluide ionisé vers le fluide neutre dont le taux est donné par [114]

$$\nu_{in} = \begin{cases} 2n_n(8.4 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1})(T/10^4 \text{ k})^{0.4} & T > 50 \text{ K} \\ n_n(2.1 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}) & T \leq 50 \text{ K} \end{cases} \quad (2.1)$$

où l'on rappelle le lien entre le taux de transfert de quantité de mouvement des neutres vers les ions et celui des ions vers les neutres

$$\nu_{ni} = \nu_{in}/\chi \quad (2.2)$$

où  $\chi = \rho_n/\rho_i$  est le rapport entre la densité de masse des neutres et la densité de masse des ions. Il existe également des taux de transfert de quantité de mouvement au sein même des ions  $\nu_{ii}$  et des neutres  $\nu_{nn}$  mais il a été montré qu'ils sont négligeables devant les interactions ion-neutres/neutres-ions. L'équation (1.102) représente la relation de dispersion des ondes d'Alfvén dans l'approche MHD bi-fluide. Xu et al. (2016 [237]) propose une relation de dispersion qui tient également compte de la viscosité cinématique des neutres

$$\omega^3 + i(\tau_v^{-1} + (1 + \chi)\nu_{ni})\omega^2 - (\omega_k^2 + \chi\tau_v^{-1}\nu_{ni})\omega - i(\tau_v^{-1} + \nu_{ni})\omega_k^2 = 0 \quad (2.3)$$

où  $\omega_k^2 = k^2 \cos^2 \theta V_{Ai}^2$  correspond à la relation de dispersion des ondes d'Alfvén dans un milieu non-collisionnel et  $\tau_v^{-1} = k^2 \nu_n$  correspond au taux d'amortissement visqueux des ondes d'Alfvén où  $\nu_n = c_n^2/(\nu_{nn}n_n)$  représente la viscosité cinématique des neutres,  $c_n$  étant la vitesse du son dans le fluide neutre et  $\nu_{nn}$  est la fréquence de collision neutre-neutre. Il est possible de montrer que le taux de viscosité des neutres est négligeable et ce même dans les phases les plus denses. Les solutions exactes de la relation de dispersion des modes d'Alfvén sont représentées dans la figure (2.2) par les traits pleins bleu et noir pour la pulsation  $\omega_R^A$  et le taux d'amortissement  $-\Gamma_I^A$  respectivement. Nous observons l'existence d'une bande de propagation interdite représentée en gris dans la figure en dehors de laquelle on a la relation  $\omega_R^A \gg -\Gamma_I^A$ . A partir de cette approximation, Xu et al. (2016 [237]) propose des solutions analytiques simples de la relation (2.3) qui sont données par

$$(\omega_R^A)^2 = \frac{(\omega_k^2 + \chi\tau_v^{-1}\nu_{ni})^2 + (\tau_v^{-1} + (1 + \chi)\nu_{ni})(\tau_v^{-1} + \nu_{ni})\omega_k^2}{\chi\tau_v^{-1}\nu_{ni} + \omega_k^2 + (\tau_v^{-1} + (1 + \chi)\nu_{ni})^2} \quad (2.4)$$

$$\Gamma_I^A = -\frac{[\tau_v^{-1}(\tau_v^{-1} + (1 + \chi)\nu_{ni}) + \omega_k^2] \chi\nu_{ni}}{2[\omega_k^2 + \chi\tau_v^{-1}\nu_{ni} + (\tau_v^{-1} + (1 + \chi)\nu_{ni})^2]} \quad (2.5)$$

et sont représentées (avec  $\nu_n = 0$ ) par les tirets bleu et noir respectivement. Les limites de la bande de propagation interdites sont définies par l'échelle  $k$  à partir de laquelle le taux d'amortissement des ondes d'Alfvén devient supérieur à la pulsation réelle et que les perturbations deviennent évanescentes, c'est à dire lorsque la condition  $|\omega_R^A| = |\Gamma_I^A|$  est réalisée. La bande interdite est alors donnée par  $[k_c^+, k_c^-]$  où

$$k_c^+ = \frac{2\nu_{ni}}{V_A \xi_n \cos \theta} \quad (2.6)$$

$$k_c^- = \frac{\nu_{in}}{2V_{Ai} \cos \theta}. \quad (2.7)$$

Il est alors possible de simplifier une fois de plus les solutions (2.4) en étudiant le comportement des ondes d'Alfvén uniquement dans les régimes asymptotiques de faible et fort couplage des ions avec les neutres. En régime de fort couplage ( $\omega_R^A \ll \nu_{ni}$ ), les mouvements des ions et des neutres sont corrélés, on obtient alors

$$(\omega_R^A)^2 = V_A^2 k^2 \cos^2 \theta \quad (2.8)$$

$$\Gamma_I^A = -\frac{\xi_n V_A^2 k^2 \cos^2 \theta}{2\nu_{ni}}. \quad (2.9)$$

On observe que le taux d'amortissement diminue (en valeur absolue) à mesure que les ions et les neutres sont asymptotiquement fortement couplés. En régime de faible couplage ( $\omega_R^A \gg \nu_{in}$ ), les mouvements des ions et des neutres sont totalement décorrélés et le transfert d'énergie des ions vers les neutres est maximal. Les solutions sont données par

$$(\omega_R^A)^2 = V_{Ai}^2 k^2 \cos^2 \theta \quad (2.10)$$

$$\Gamma_I^A = -\frac{\nu_{in}}{2} \quad (2.11)$$

où l'on observe que le taux d'amortissement est maximum (en valeur absolue) et constant. Les solutions asymptotiques sont représentées par les petits carrés bleu et noir respectivement. Dans la phase HII nous observons que les ondes d'Alfvén ne sont pas amorties et se propagent librement en suivant les solutions de la relation de dispersion dans l'approche MHD idéale, conséquence de l'absence d'un fluide neutre. Dans la phase WIM, le taux d'amortissement des ondes est faible  $-\Gamma_I^A \sim 10^{-10} \text{ s}^{-1}$  (soit environ 300 ans (yrs)) dans le régime de faible couplage et devient totalement négligeable en régime de fort couplage, conséquence du fort taux d'ionisation également. Dans les phases atomiques neutres (WNM, CNM) nous commençons à observer une bande de propagation interdite, assez fine (en échelle logarithmique) et à haute énergie dans le WNM ( $\sim 7 - 10 \text{ TeV}$ ) et un peu plus élargie et à plus faible énergie dans la phase CNM ( $\sim 200 - 600 \text{ GeV}$ ). En régime de faible couplage, les taux d'amortissement des ondes sont de l'ordre de  $\sim 5 \times 10^{-9} \text{ s}^{-1}$  dans le WNM et  $\sim 2 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$  dans le CNM. Les milieux moléculaires et denses présentent des bandes interdites à plus faible énergie et plus élargies, ainsi qu'un niveau d'amortissement des ondes en régime faiblement couplé beaucoup plus important ( $\sim 10^{-7} - 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ), conséquence du taux de collisions ion-neutre  $\nu_{ni}$  qui est directement lié à la densité de l'espèce neutre dans le plasma.

Les ondes d'Alfvén générées par le rayonnement cosmique interagissent également avec la turbulence dite "grande échelle" et injectée dans le modèle par l'intermédiaire de deux phénomènes différents. Le premier phénomène est le coefficient de diffusion de fond des rayons cosmiques que nous discuterons dans la section suivante, le second consiste en un terme supplémentaire d'amortissement des ondes d'Alfvén par interaction avec la turbulence grande échelle. Les sources de cette dernière sont encore méconnues bien qu'il est admis que les principales sont les rémanents de supernova et la rotation différentielle de la galaxie (Mac Low & Klessen 2004 [145]). Ce processus consiste en l'interaction non-linéaire entre des paquets d'ondes deux à deux se propageant dans des directions opposées. Les ondes générées par le rayonnement cosmique interagissent avec les perturbations magnétiques de fond à travers un processus d'interaction à trois ondes (Ng

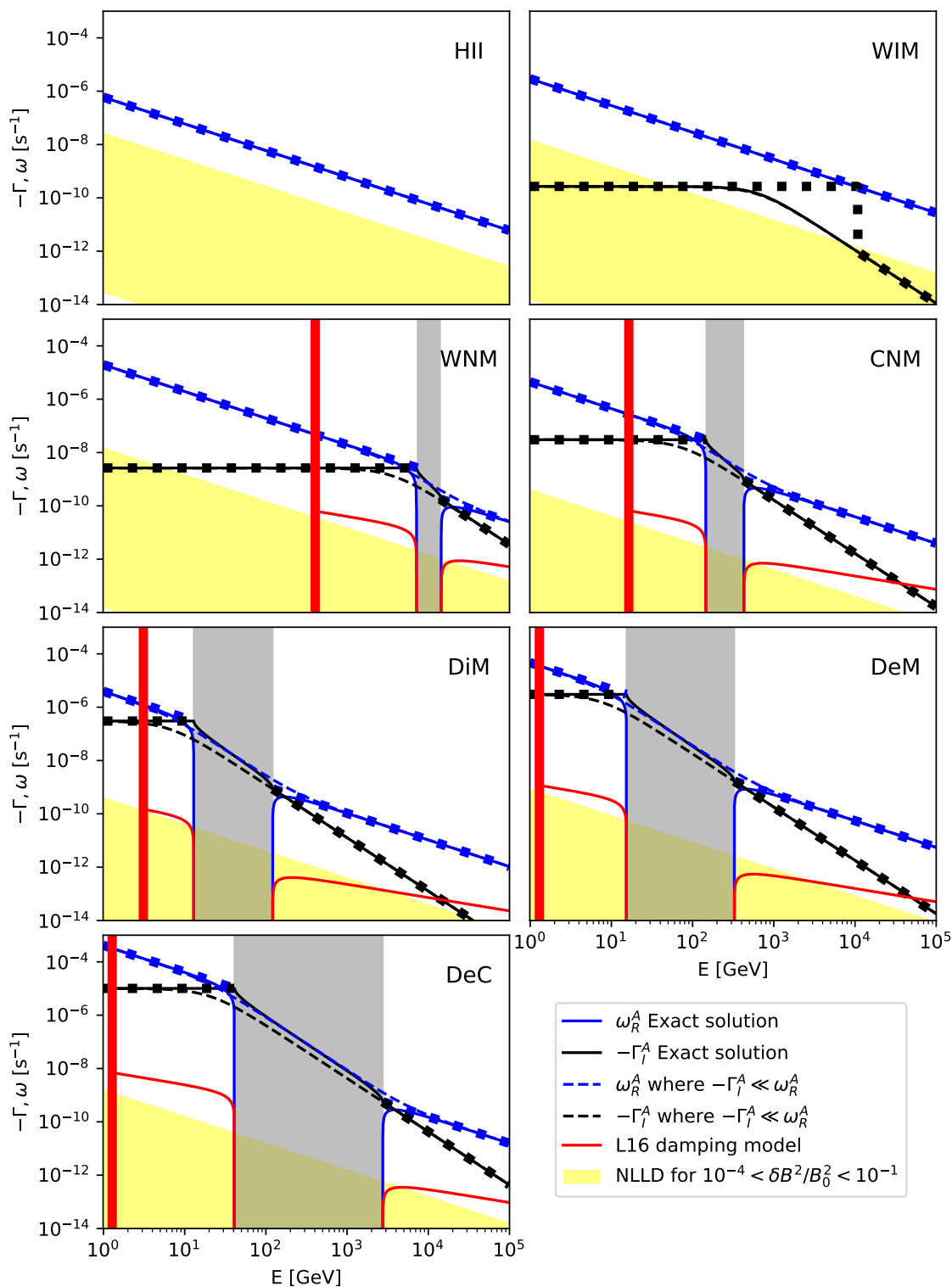


Figure 2.2: Figures représentant les différents processus d’amortissement et de propagation des ondes d’Alfvén générées par le rayonnement cosmique. Les modèles exact/faible amortissement/asymptotique d’amortissement par collisions ion-neutre est présenté par les traits pleins/tirets/carrés bleu et noir pour la pulsation des modes d’Alfvén et leur taux d’amortissement respectivement. Le trait plein rouge représente le taux d’amortissement des ondes d’Alfvén par interactions non-linéaires avec la turbulence à grande échelle suivant le modèle L16. Le trait vertical rouge représente l’échelle de dissipation de la turbulence à grande échelle. Enfin la bande jaune représente les valeurs potentielles de l’amortissement non-linéaire de Landau pour des niveaux de turbulence allant de  $I \sim 10^{-4}$  à  $10^{-1}$ .

& Bhattacharjee 1997 [163]). Ce mode de cascade turbulente a été étudié par Farmer & Goldreich (2004 [68], FG04) dans un premier temps et Lazarian (2016 [137], L16) ensuite. Les détails du modèle d’amortissement turbulent sont présentés dans la section (1.3.4.2). Parmi les paramètres libres du modèle L16, on trouve l’échelle d’injection  $L$  de la turbulence ainsi que sa dispersion de vitesse  $v(L)$  associée qui définissent la nature de la turbulence injectée et donc l’amortissement turbulent des ondes d’Alfvén. Nous utilisons les mêmes hypothèses que Nava et al. (2016 [160]) c’est à dire  $L = 50$  pc et  $v(L) = \max(V_A, V_S)$  où  $V_A = B_0/\sqrt{4\pi(\rho_i + \rho_n)}$  et  $V_S$  correspond à la vitesse du son dans le fluide total c’est à dire dans l’approximation où les neutres et les ions sont couplés. Dans les milieux faiblement denses, nous sommes en régime trans-Alfvénique  $\mathcal{M}_A \approx 1$ , dans les milieux plus denses, le régime super-Alfvénique domine vraisemblablement. Le taux d’amortissement  $-\Gamma_I^{\text{L16}}$  est représenté dans la figure (2.2) par les traits pleins rouges. Les lignes verticales épaisses rouges représentent l’échelle de dissipation de la turbulence à grande échelle selon le modèle L16 dans les milieux partiellement ionisés (voir formules 1.202 et 1.204 suivant le régime de turbulence grande échelle). Nous observons également l’absence d’amortissements turbulents dans les phases HII et WIM. En effet, la viscosité des neutres  $\nu_n$  est inexistante dans ces deux milieux ce qui conduit à des échelles de dissipation très grandes voire supérieures à l’échelle d’injection du point de vue mathématique<sup>6</sup>. Dans les phases neutres atomiques, l’amortissement turbulent commence à jouer un rôle entre 10 et 100 GeV mais ce rôle devient important que dans le régime de fort couplage à partir de 30 TeV dans le CNM et 300 TeV dans le WNM. Dans les phases moléculaires, bien que l’amortissement turbulent soit présent à partir des énergies de l’ordre du GeV, il devient dominant seulement à partir de 10 TeV dans le DiM, 100 TeV dans le DeM et 200 TeV dans le DeC. Autrement, le processus d’amortissement dominant sont les collisions ion-neutre.

L’amortissement non-linéaire de Landau (NLLD : Non Linear Landau Damping [130]) peut être du même ordre de grandeur voire supérieur à l’amortissement par collisions ion-neutre dans les milieux ionisés. Ce processus résulte du transfert de quantité de mouvement d’un ion qui glisse le long de l’enveloppe d’un battement d’onde formé par l’interaction de deux ondes d’Alfvén. Compte tenu de la longueur d’onde du battement, cet effet n’est présent que dans les milieux chauds pour lesquels les ions ont une vitesse  $v_i \sim k\phi/\omega$  où  $\phi$  correspond à la phase du battement. Dans le cas où les mouvements aléatoires des ions sont légèrement plus lents que la vitesse des enveloppes, le transfert de quantité de mouvement se fait des ondes vers les ions. Dans le cas contraire, le transfert se fait des ions vers les ondes. Dans notre cas, en considérant que le fluide ionisé du plasma est globalement à l’équilibre thermique, la distribution de vitesse des particules chargées sera globalement inférieure à la distribution de vitesse de battement des ondes.

<sup>6</sup>C’est précisément la différence que l’on observe entre les modèle d’amortissement turbulent L16 et FG04 (voir section 1.3.4.2). Tandis que le terme d’amortissement FG04 est défini à toutes les échelles, l’amortissement L16 est dépendant de l’échelle de coupure de la turbulence à grande échelle  $k_{\text{dam}}$  telle que définie dans la section (1.2.1.6) dans l’approche MHD bi-fluide. C’est la raison pour laquelle dans la figure (2.2) les phases WIM et HII ne comportent pas d’amortissement turbulent. L’énergie résonante à laquelle la turbulence est coupée est supérieure à 100 TeV.

Ceci conduit à un taux d'amortissement  $-\Gamma_I^{\text{NLLD}}$  qui dépend du niveau de turbulence  $I(k) = (\delta B/B_0)_k^2$  et qui s'écrit (Kulsrud 1978 [126])

$$\Gamma_I^{\text{NLLD}} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} v_i k \left( \frac{\delta B}{B_0} \right)_k^2 \quad (2.12)$$

où  $v_i = \sqrt{k_B T/m_i}$  est la vitesse thermique des ions du plasma. L'amortissement de Landau non-linéaire est représenté dans la figure (2.2) par les bandes jaunes pour des niveaux de turbulence allant de  $I = 10^{-4}$  à  $10^{-1}$  correspondant à la limite supérieure de la théorie quasi-linéaire. Dans les phases ionisées, ce processus d'amortissement domine tant que les ondes d'Alfvén peuvent se propager. Dans toutes les phases neutres, nous observons qu'il est complètement négligeable excepté dans le WNM aux énergies inférieures à 10 GeV dans les cas extrêmes de hauts niveaux de turbulence.

### 2.2.2 Equations du système

Dans cette section, je décris le système d'équations qui permet d'étudier la propagation du rayonnement cosmique dans le milieu interstellaire indépendamment de la manière dont il est injecté par les sources, et son interaction avec la turbulence Alfvénique. Nous considérons que le rayonnement cosmique est uniquement composé de protons, mais nous proposons également une équation de transport pour les électrons dont les applications potentielles sont multiples. Afin d'étayer l'hypothèse que le rayonnement cosmique joue un rôle non-négligeable dans les propriétés turbulentes de la galaxie et tous les processus qui en découlent, nous considérons également un couple d'équations de transport pour la turbulence auto-générée : une équation pour les ondes se propageant dans une direction et une pour celles se propageant dans la direction opposée. Ce système d'équations s'exprime dans un espace des phases  $(\mathbf{x}, E)$  des positions et des énergies où l'énergie correspond à l'énergie d'un proton dont le rayon de gyration  $r_g$  est égal à l'inverse du nombre d'onde  $k$  de la perturbation Alfvénique (interaction résonante).

En trois dimensions, le système d'équations s'écrit de la manière suivante <sup>7</sup>

---

<sup>7</sup>Tandis que l'équation sur le rayonnement cosmique se démontre à partir de l'équation de Vlasov et des approximations de la théorie quasi-linéaire (TQL) du transport du rayonnement cosmique (voir section 1.3 et les travaux de Skilling 1975abc), la démonstration de l'intensité du champ turbulent n'est pas triviale. En effet deux approches différentes sont usuellement utilisées pour cette description : l'approche de Liouville qui considère le champ turbulent comme une fonction de densité d'espace de phases et qui se matérialise par l'équation de Vlasov  $dI/dt = 0$ , et l'approche MHD qui considère le champ turbulent comme un fluide et qui répond à l'équation de conservation de la masse (Dogiel 1994 [50]). Ces deux approches diffèrent par l'apparition d'un terme  $-I_w \nabla \cdot \mathbf{V}_A$  à droite du signe d'égalité dans l'approche MHD. Il est néanmoins possible de montrer, à posteriori, que le rôle joué par ce terme est négligeable dans ce travail. Ceci n'exclue en rien la nécessité de mieux comprendre le formalisme sous-jacent au transport des perturbations dans le plasma.



$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{cr}}{\partial t} + \mathbf{V}_A \cdot \nabla P_{cr} &= \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \nabla P_{cr}) + \frac{E}{3} \{\mathbf{V}_A, P_{cr}\} - \frac{4}{3} \nabla \cdot \mathbf{V}_A P_{cr} + Q_{cr}(P_{cr}) \\
\frac{\partial I_w}{\partial t} + \mathbf{V}_A \cdot \nabla I_w &= -I_w \nabla \cdot \mathbf{V}_A + \Gamma_g^w I_w - \Gamma_d^w (I_w - I_w^0)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

où

$$\{\mathbf{V}_A, P_{cr}\} = \nabla \cdot \mathbf{V}_A \frac{\partial P_{cr}}{\partial E} - \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial E} \cdot \nabla P_{cr}. \tag{2.14}$$

La variable  $P_{cr} = P_{cr}(\mathbf{x}, E)$  désigne la pression du rayonnement cosmique ( $\text{erg cm}^{-3}$ ) où l'indice  $cr \in \{p, e\}$  désigne les protons ou les électrons. La variable  $I_d = I_d(\mathbf{x}, E)$  désigne le niveau de turbulence  $(\delta B(k = 1/r_g)/B_0)^2$  où l'indice  $w \in \{+, -\}$  désigne les ondes se propageant dans une direction et dans l'autre suivant les lignes de champ magnétique  $\mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t)$ . Les équations présentées ci-dessus sont évaluées localement le long des lignes de champ magnétique moyen  $\mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t)$  dont on considère qu'elles évoluent lentement devant la fréquence de gyration ( $|\Omega_{cr}|$ ) des rayons cosmiques et sur de grandes échelles devant le rayon de gyration ( $r_{g,cr}$ ). A titre indicatif, le rayon de gyration d'un rayon cosmique de 1 TeV baigné dans un champ magnétique de 1  $\mu\text{G}$  est d'environ  $r_g \approx 10^{-3}$  pc, son temps de gyration est d'environ  $|\Omega|^{-1} \sim 3.5$  yr. Les observations montrent que le système d'équations (2.13) est parfaitement valable pour tout le spectre du rayonnement cosmique galactique. Le terme à gauche de l'égalité de l'équation du transport du rayonnement cosmique décrit l'advection du rayonnement cosmique par les ondes, autrement formulé, dans le référentiel d'interaction des rayons cosmiques avec les ondes, le plasma est en mouvement global à la vitesse uniforme  $\mathbf{V}_A$ . Le premier terme à droite est le terme de diffusion qui fait, dans le cas le plus général, intervenir le tenseur de diffusion  $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$  donné par

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \begin{pmatrix} \kappa_{XX} & \kappa_{XY} & \kappa_{XZ} \\ \kappa_{YX} & \kappa_{YY} & \kappa_{YZ} \\ \kappa_{ZX} & \kappa_{ZY} & \kappa_{ZZ} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

où les coefficients  $\kappa_{ij} = \kappa_{ij}(I_w)$  correspondent aux différents termes de diffusion de l'équation de transport et dans ce modèle, sont dépendants du niveau de turbulence  $I_{\pm}$ . Le second et le troisième termes de droite contiennent les pertes adiabatiques d'énergie du rayonnement cosmique liées à la dépendance en espace de la vitesse d'Alfvén du milieu. Enfin le dernier terme  $Q_{cr}$  correspond à un terme de source et/ou de perte suivant le système considéré. Plus de détails sur l'équation de diffusion-convection du rayonnement cosmique ainsi que sa dérivation sont donnés dans la section (1.3). Dans l'équation de transport de la turbulence, nous retrouvons le terme advectif lié à la vitesse de déplacement des ondes dans le plasma interstellaire globalement statique. Le premier terme de droite correspond à un processus de pertes/gains adiabatiques d'énergie turbulente aux interfaces entre les phases du milieu interstellaire. Dans le second terme de droite,  $I_w^0$  correspond à la turbulence ambiante qui est initialement calculée suivant des

modèles théoriques que je détaille plus loin. Les termes  $\Gamma_g^w$  et  $\Gamma_d^w = \Gamma_A^w + \Gamma_{L16}^w + \Gamma_{\text{NLLD}}^w$  correspondent respectivement aux taux de croissance des ondes  $w$  générées par l'instabilité de dérive des rayons cosmique et au taux d'amortissement résultant des processus décrits dans la section précédente. Dans un espace tri-dimensionnel, le taux de croissance des modes résonant s'écrit

$$\Gamma_g^\pm = \mp \frac{1}{2W_0(I_+ + I_-)} \mathbf{V}_A \cdot \nabla P_{\text{cr}} \quad (2.16)$$

dont l'expression plus générale est donnée par la relation (1.313) où l'on a négligé le second terme en supposant que les niveaux de turbulence générés sont faibles. Les termes de croissance et d'amortissement ne jouent un rôle que lorsque le niveau de turbulence s'éloigne du niveau de fond.

En 1D, en considérant un fluide de proton  $p$ , d'électrons  $e$  et d'ondes se propageant en long du champ magnétique dans un sens et dans l'autre ( $\pm$ ), le système se réécrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_p}{\partial t} + V_A \frac{\partial P_p}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa_{zz} \frac{\partial P_p}{\partial z} \right) + \frac{E}{3} \{V_A, P_p\} - \frac{4}{3} \frac{\partial V_A}{\partial z} P_p + Q_{p,\text{inj}} \\ \frac{\partial P_e}{\partial t} + V_A \frac{\partial P_e}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa_{zz} \frac{\partial P_e}{\partial z} \right) + \frac{E}{3} \{V_A, P_e\} - \frac{4}{3} \frac{\partial V_A}{\partial z} P_e + Q_{e,\text{inj}} + Q_{e,\text{sync}}(P_e) \\ \frac{\partial I_+}{\partial t} + V_A \frac{\partial I_+}{\partial z} &= -I_+ \frac{\partial V_A}{\partial z} + \Gamma_g^+ I_+ - \Gamma_d^+(I_+ - I_+^0) \\ \frac{\partial I_-}{\partial t} + V_A \frac{\partial I_-}{\partial z} &= -I_- \frac{\partial V_A}{\partial z} + \Gamma_g^- I_- - \Gamma_d^-(I_- - I_-^0) \end{aligned} \quad (2.17)$$

où  $\kappa_{zz}$  correspond au coefficient de diffusion des rayons cosmiques le long des lignes de champ. Ce coefficient est commun aux protons et aux électrons en régime relativiste. La physique associée au coefficient de diffusion de fond est décrite dans la section (2.2.3). Le terme  $Q_{\text{cr},\text{inj}}$  correspond au terme d'injection du rayonnement cosmique par l'accélérateur. La physique sous-jacente est décrite dans la section (2.2.4). Le terme  $Q_{e,\text{sync}}$  correspond au terme de rayonnement synchrotron des électrons décrit dans la section (2.2.5), celui des protons est négligeable. On peut également préciser l'expression du taux de croissance des modes d'Alfvén anisotropes

$$\Gamma_g^\pm = \begin{cases} \pm \frac{f_{\text{sat}}(I_\pm)}{2W_0(I_+ + I_-)} V_A^\pm \frac{\partial P_p}{\partial z} & V_A^\pm \frac{\partial P_p}{\partial z} < 0 \\ 0 & V_A^\pm \frac{\partial P_p}{\partial z} > 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $V_A^\pm = V_A^\pm(z, E)$  a une signification "vectorielle" dans le sens où il vaut

$$V_A^\pm = \begin{cases} +V_A & \text{pour les modes } I_+ \\ -V_A & \text{pour les modes } I_- \end{cases} \quad (2.19)$$

Le signe précédent la valeur de  $V_A$  est défini par la direction d'advection des modes d'Alfvén. Par défaut, les modes sont advectés depuis la source vers le milieu interstellaire

lointain.  $f_{\text{sat}}(I_{\pm})$  correspond à une fonction de saturation du taux de croissance des modes d'Alfvén qui est de la forme

$$f_{\text{sat}}(I_{\pm}) \sim e^{-\tau_{\text{sat}} I_{\pm}} \quad (2.20)$$

de manière à ce que le taux de croissance évolue de manière linéaire lorsque le niveau de turbulence est faible et devienne logarithmique à l'approche du régime non-linéaire. Le coefficient  $\tau_{\text{sat}}$  est un paramètre libre du modèle que l'on peut mettre sous la forme

$$\tau_{\text{sat}} = -\ln(I_c^{\pm})/f_c \quad (2.21)$$

où  $I_c^{\pm} < 1$  correspond à un taux de saturation magnétique critique et  $f_c$  un facteur de suppression associé permettant de limiter le taux de croissance des ondes.

### 2.2.3 Modèle de turbulence de fond

Nous avons vu que, dans notre modèle unidimensionnel, la diffusion des rayons cosmiques est essentiellement conduite par le coefficient  $\kappa_{zz}$ . Nous suivons les travaux de (Nava et al. 2016 [160], Malkov et al. 2013 [148]) et le définissons de la manière suivante

$$\kappa_{zz}(z, E, t) = \frac{2\kappa_b(E)}{I_+(z, E, t) + I_-(z, E, t)} \quad (2.22)$$

où  $\kappa_b$  correspond au coefficient de diffusion de Bohm qui résulte de l'étude des mouvements stochastiques d'une particule chargée dans un champ magnétique fortement turbulent (Bohm 1949 [92], Spitzer 1960 [214], Bell 1978 [15]) qui est donné par

$$\kappa_b = \frac{1}{I_s} \frac{4c}{3\pi} \frac{E}{eB_0} \quad (2.23)$$

et qui décrit la diffusion des rayons cosmiques dans le milieu interstellaire au passage d'une onde de choc plane qui fait interface entre l'accélérateur, dont le niveau de turbulence magnétique est élevé ( $I_s \approx 1$ ) et le milieu interstellaire dominé par un champ magnétique moyen  $B_0$  uniforme localement. Dans notre modèle, nous considérons  $\kappa_b$  constant dans le temps ce qui est une approximation car le rapport de compression du choc diminue au cours du temps et le niveau de turbulence  $I_s$  diminue également. On note également que l'expression (2.22) montre que  $\kappa_{zz}$  est également conduite par la valeur des niveaux de turbulence dans le milieu interstellaire qui sont initialement, à priori, indépendants de la source donc constants. En conséquence, si  $I_s$  diminue, en l'absence de modèle de turbulence auto-générée, le coefficient de diffusion  $\kappa_{zz}$  augmente jusqu'à atteindre un régime de propagation balistique des rayons cosmiques. Avec le modèle de turbulence auto-générée, sa valeur sera grandement contrainte par des ondes générées par les gradients de pression de rayons cosmiques exercés sur le plasma ambiant. Initialement, le niveau de turbulence de fond  $I_{\pm}^0$  n'est pas connu, nous le déterminons à partir de la turbulence de fond de la manière suivante

$$I_{\pm}^0 = \frac{\kappa_b}{2\kappa_{zz}^0} \quad (2.24)$$

où  $\kappa_{zz}^0$  correspond au niveau de turbulence de fond à l'instant initial. Nous montrons dans les paragraphes suivant, les modèles plus ou moins raffinés existants et utilisés dans ce travail.

Nous supposons dans un premier temps que le milieu interstellaire est composé d'une succession de phases, et que ces phases sont stationnaires durant un laps de temps long devant le temps caractéristique de relaxation de l'instabilité de streaming du rayonnement cosmique. On montre à posteriori que ce temps doit être supérieur à  $\sim 1$  Myr pour une échelle d'environ 2 kpc ce qui est faible devant le temps dynamique de traversée<sup>8</sup> de la turbulence à grande échelle. Ceci s'explique en particulier par le fait que la vitesse de streaming des rayons cosmiques est très supérieure à la vitesse du son dans le plasma, quelque soit la phase.

**Inférence observationnelle** Dans ce modèle, le coefficient de diffusion du background est de la forme

$$\kappa_{zz}^0 = d_{00} \left( \frac{E}{10 \text{ GeV}} \right)^\delta \quad (2.25)$$

où les valeurs  $d_{00} \approx 10^{28} - 10^{29} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$  correspond à la valeur de normalisation du spectre de diffusion pour des protons de 10 GeV et  $\delta \approx 0.3 - 0.75$  correspond à l'indice spectral de la distribution du coefficient de diffusion tel qu'inférées observationnellement [27]. Cependant, ce modèle est obtenu à partir des observation moyennées des rapports B/C du milieu galactique local, et par conséquent, est indépendant des propriétés de la phase interstellaire considérée.

Les coefficients de diffusion sont représentés dans la figure (2.3) par les lignes de couleur noire et les hachures qui couvrent l'espace entre les couples de paramètres ( $d_{00} = 10^{28} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}, \delta = 0.5$ ) et ( $d_{00} = 10^{29} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}, \delta = 2/3$ ) pour des énergies allant de 100 MeV à 1 PeV.

**Modes d'Alfvén résonants** Ce modèle est précisément décrit dans l'annexe (A.5) et correspond au calcul du coefficient de diffusion des modes d'Alfvén résonants en turbulence purement anisotrope. Le coefficient de diffusion est donné par

$$\kappa_{zz}^0 = \frac{v^2}{8} \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{(1 - \mu^2)^2}{D_{\mu\mu}(\mu)} \quad (2.26)$$

où

$$D_{\mu\mu} = \sum_{j=\pm 1} \frac{2\pi\Omega^2(1 - \mu^2)}{vB_0^2} \frac{(1 - j\varepsilon\mu)^2}{|\mu - j\varepsilon|} g_s^j(k_r^j). \quad (2.27)$$

---

<sup>8</sup>Le temps de "traversée" de la turbulence correspond grossièrement au temps  $t_{\text{cross}}$  mis par les perturbations du champ de vitesse du gaz pour se propager de part et d'autre d'une boîte de simulation théorique de taille caractéristique  $L$ . Ce concept est décrit plus en détail dans la section (3.2.3)

$k_r^j = \Omega/v(\mu - j\varepsilon)$  correspond au nombre d'onde résonant et  $\varepsilon = V_A/v$  correspond à la vitesse d'Alfvén dans le milieu interstellaire et  $v$  la vitesse caractéristique des rayons cosmiques. Enfin le terme  $g_s^j$  correspond au spectre de turbulence et est donné par <sup>9</sup>

$$g_s^j(k_{\parallel}) = 2(q-1)W_0 I_{\text{TOT}}^j k_{\parallel, \text{min}}^{q-1} k_{\parallel}^{-q} \quad k_{\parallel} > k_{\parallel, \text{min}} \quad (2.28)$$

où  $I_{\text{TOT}}^j \approx k_{\text{max}} \langle I(k) \rangle$  correspond à la puissance totale des perturbations magnétiques où  $k_{\text{max}} = l_{\text{min}}^{-1}$ , où  $l_{\text{min}}^{-1}$  correspond à l'échelle de dissipation de la turbulence telle que définie dans la section (1.3.4.2) et  $\langle I(k) \rangle$  correspond au niveau de turbulence moyenné entre les différentes échelles spatiales  $k$ . Ce modèle de diffusion a l'inconvénient de posséder de nombreux paramètres libres mais permet de différencier les amplitudes de diffusion dans les différentes phases, permettant ainsi de mettre en lumière les effets qui ont lieu aux interfaces entre différentes phases du milieu interstellaire.

Le modèle de diffusion dépendant de la phase du milieu interstellaire est représenté dans la figure (2.3) pour les différentes phases étudiées dans la section (2.2.1.1) en faisant varier l'indice spectral  $q$  du modèle de turbulence utilisé pour le calcul de  $\kappa_{zz}^0$ . Les résultats dans chaque phase sont représentés par un remplissage coloré entre  $q = 3/2$  en tirets correspondant à une turbulence de type Kraichnan et  $q = 5/3$  en traits pleins correspondant à une turbulence de type Kolmogorov. La puissance totale des perturbations magnétiques est choisie égale à  $10^{-4}$ . Avec ce modèle, on observe clairement les différences de valeur de diffusion du rayonnement cosmique entre les phases du milieu interstellaire. En particulier, on constate que le niveau de diffusion est corrélé à la densité du milieu par l'intermédiaire de la valeur de la vitesse d'Alfvén dans chaque phase. Ceci explique que les coefficients de diffusion soient beaucoup plus faibles dans les phases moléculaires que dans les phases neutres, de même concernant les écarts de diffusion dans le WIM et les régions HII.

Xu et al. (2016) [238] propose également un modèle de diffusion de fond du rayonnement cosmique qui tient également compte de la coupure de la turbulence MHD via collisions ion-neutre et viscosité des neutres.

## 2.2.4 Echappement des rayons cosmiques

L'hypothèse principale de l'échappement des rayons cosmiques issus des supernovae est qu'ils sont émis à travers un processus d'accélération par un choc diffusif (DSA : Diffusive Shock Acceleration). Traditionnellement, le transport du rayonnement cosmique est traité différemment à l'intérieur du choc (de l'accélérateur) et à l'extérieur du choc dans le milieu interstellaire homogène. En aval du choc, les niveaux de turbulence sont très importants  $I_{\pm} \sim 1$  et le gaz est comprimé. Les rayons cosmiques se retrouvent alors confinés car leur libre parcours moyen  $\lambda_{\text{cr}}$  est du même ordre que leur rayon de gyration  $r_{\text{cr},g}$ . Le régime de transport est isotrope et décrit par la dynamique de Bohm. En

<sup>9</sup>Le paramètre  $k_{\parallel, \text{min}}$  fait référence à l'échelle d'injection  $L_{\text{inj}}$  de la turbulence à grande échelle.

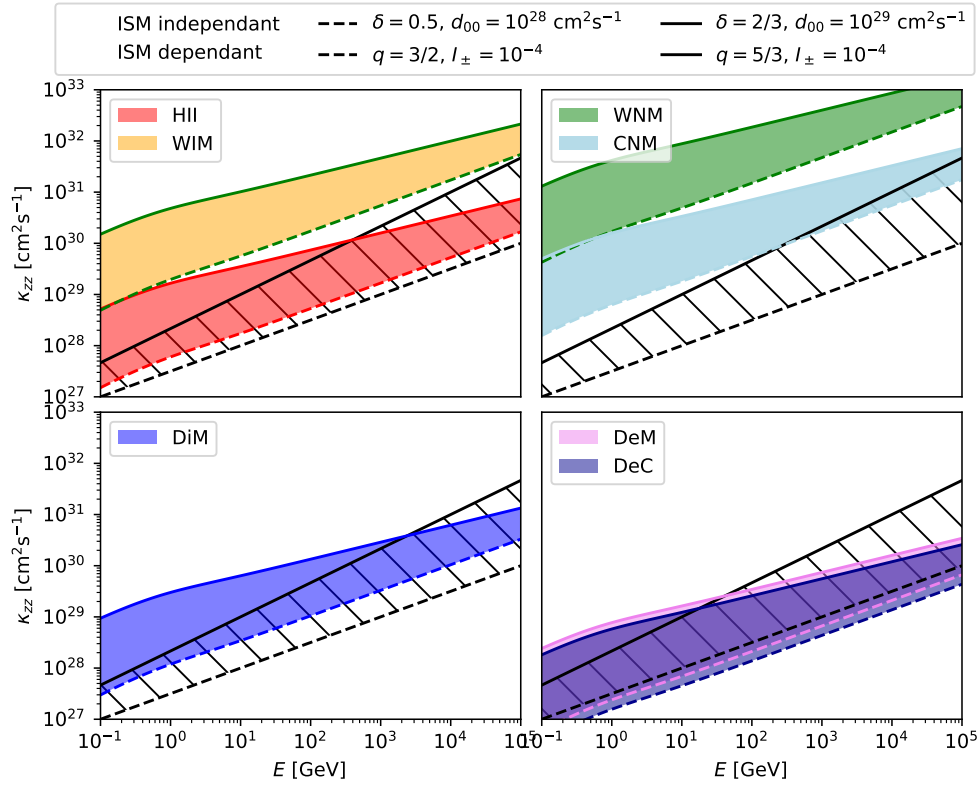


Figure 2.3: Cette figure représente les différents modèles de diffusion utilisés dans ce travail. En noir hachuré est représenté le modèle de diffusion inféré observationnellement qui est indépendant des propriétés du milieu interstellaire. Dans chaque sous-figure, les hachures couvrent l'espace des paramètres ( $d_{00} = 10^{28} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\delta = 0.5$ ), et ( $d_{00} = 10^{29} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\delta = 2/3$ ) en tirets et en trait plein respectivement. En couleur est représenté le modèle de diffusion basé sur la dynamique des modes d'Alfvén résonants appliqués à chaque phase : la région HII (en rouge), le WIM (en orange), le WNM (en vert), le CNM (en bleu clair), le DiM (en bleu), le DeM (en violet) et le DeC (en bleu foncé). Les zones colorées couvrent l'espace d'évolution du spectre de turbulence utilisé :  $q = 3/2 - 5/3$  en tirets et lignes continues respectivement.

amont du choc, les niveaux de turbulence magnétique sont beaucoup plus faibles  $I_{\pm} \sim 10^{-6} - 10^{-4}$ , la densité de gaz est plus faible, le régime de transport des rayons cosmiques est anisotrope et s'opère le long des lignes de champ magnétique moyen. Dans ce dernier cas, le libre parcours moyen est de l'ordre de  $10^4 - 10^6$  fois le rayon de gyration des particules. Comme nous l'avons évoqué au début de ce chapitre, ces deux descriptions introduisent une discontinuité dans le transport du rayonnement cosmique à laquelle il est nécessaire de palier. Dans cette section, je présente le modèle de reste de supernova de type Ia que j'ai utilisé, la fonction de distribution du rayonnement cosmique échappé du reste ainsi que différents modèles d'échappement pour les protons et les électrons basés sur deux approches différentes, et au final un traitement particulier de l'échappement lorsque le rémanent est en phase radiative.

### Modèle de rémanent de supernovae

L'échappement des rayons cosmiques est intimement lié au modèle d'évolution du reste de supernova car c'est au travers du confinement magnétique que les particules restent confinées dans le choc. Dans ce travail, je m'intéresse à l'évolution du choc d'un reste de supernova de type Ia qui évolue dans un milieu interstellaire homogène non-perturbé. L'ensemble des stades de l'évolution du reste sont décrits par les travaux de Cioffi et al. (1988) [36] et Truelove & McKee (1999) [223]. Le rayon du choc du reste évolue de la manière suivante

$$R_{\text{sh}}(t) \propto \begin{cases} t & t < t_{\text{Sed}} & \text{Expansion libre} \\ t^{2/5} & t_{\text{Sed}} < t < t_{\text{PDS}} & \text{Sedov Taylor (ST)} \\ t^{3/10} & t_{\text{PDS}} < t < t_{\text{MCS}} & \text{Pressure Driven Snowplow (PDS)} \\ t^{1/4} & t_{\text{MCS}} < t < t_{\text{merge}} & \text{Momentum Conserving Snowplow (MCS)} \end{cases} \quad (2.29)$$

où la constante de proportionnalité est définie par le rayon du reste à la transition ( $t = t_{\text{Sed}}$ ) entre la phase libre et la phase Sedov-Taylor, moment à partir duquel le milieu interstellaire commence à jouer un rôle dominant sur la dynamique du reste [223]

$$R_{\text{sh}}(t = t_{\text{Sed}}) = 5.0 \left( \frac{E_{\text{SNR},51}}{n_T} \right)^{1/5} \left[ 1 - \frac{0.05 M_{\text{ej},\odot}^{5/6}}{E_{\text{SNR},51}^{1/2} n_T^{1/3} t_{\text{kyr}}} \right]^{2/5} t_{\text{kyr}}^{2/5} [\text{pc}]. \quad (2.30)$$

Le rayon du choc dépend de l'énergie de l'énergie mécanique de la supernova  $E_{\text{SNR},51} \approx 1$  en unités de  $10^{51}$  erg, de la masse de l'ejecta  $M_{\text{ej},\odot}$  en unités de masse solaire, de la densité du milieu interstellaire  $n_T$  et du temps en kyr. Les temps de transition entre les différentes phases sont donnés par

$$t_{\text{Sed,kyr}} = 0.3 E_{\text{SNR},51}^{-1/2} M_{\text{ej},\odot}^{-1/3} n_T^{-1/3} \quad (2.31)$$

$$t_{\text{PDS,kyr}} = \frac{36.1 e^{-1} E_{\text{SNR},51}^{3/14}}{\xi_n^{5/14} n_T^{4/7}} \quad (2.32)$$

$$t_{\text{MCS,kyr}} = \min \left[ \frac{61 v_{\text{ej},8}^3}{\xi_n^{9/14} n_T^{3/7} E_{\text{SNR},51}^{3/14}}, \frac{476}{(\xi_n \Phi_c)^{9/14}} \right] t_{\text{PDS,kyr}} \quad (2.33)$$

$$t_{\text{merge,kyr}} = 153 \left( \frac{E_{\text{SNR},51}^{1/14} n_T^{1/7} \xi_n^{3/14}}{\beta C_{06}} \right)^{10/7} t_{\text{PDS,kyr}} \quad (2.34)$$

où  $v_{\text{ej},8} = 10 \sqrt{E_{\text{SNR},51}/M_{\text{ej},\odot}}$ ,  $\xi_n \sim 1$  dans ce cas précis correspond à la métallicité du milieu que l'on choisi solaire,  $\Phi_c = 1$  correspond à la conductivité thermique du plasma à l'instant actuel de l'observation du reste [213], dans ce cas précis  $\beta = 2$  et  $C_{06} = 1$ . Entre l'instant de l'explosion et  $t_{\text{Sed}}$  le choc s'étend librement dans le milieu interstellaire. Dans cette phase d'expansion libre les rayons cosmiques sont confinés dans le gaz sous pression. A partir de la phase Sedov-Taylor, le choc ralentit et commence à être sensible aux propriétés du milieu interstellaire. Les rayons cosmiques de plus haute énergie sont libérés pendant cette phase. A la fin de la phase d'expansion adiabatique, le rémanent entre en phase d'expansion radiative ( $t > t_{\text{PDS}}$ ). Le choc se propage suffisamment lentement et le gaz est fortement comprimé car qu'il commence à perdre de l'énergie à travers du rayonnement UV. Dans un premier temps, c'est la pression du gaz qui est grandement affectée (phase PDS) tandis qu'ensuite c'est l'inertie du choc tout entier qui finit par être affectée (phase MCS). Dans les phases radiatives sont accélérés les rayons cosmiques de plus faible énergie. Enfin à  $t = t_{\text{merge}}$  le choc disparaît complètement et finit par fusionner avec le milieu interstellaire. Les modèles d'évolution du rayon du choc  $R_{\text{sh}}(t)$  et de sa vitesse  $u_{\text{sh}}(t)$  sont présentés dans le cas où le reste s'étend dans les phases HII (en rouge), WNM (en vert), CNM (en bleu clair) et DiM (en bleu) dans la figure (2.4). Notons également que pour des raisons de stabilité numérique j'ai choisi d'interpoler les différents stades de l'évolution du reste par une fonction spline cubique permettant ainsi d'adoucir les courbes d'évolution. L'analyse du modèle est quelque peu affectée mais cela ne change pas son effet dans la dynamique globale de l'injection de rayonnement cosmique.

Nous observons que la vitesse d'expansion du reste de supernovae dépend uniquement de la densité de la phase. En particulier on voit que dans les phases tièdes neutres (WNM, WIM) le reste s'étend très rapidement et sa durée de vie est longue ( $\sim 3$  Myr) dans les phases les plus denses, la vitesse d'expansion est plus petite (d'un facteur 10 environ) et la durée de vie n'excède pas les 200 kyr pour le DiM. Ceci implique également que la transition entre la phase d'expansion adiabatique et les phases d'expansion radiative s'opère d'autant plus tôt que la densité du milieu est importante :  $t_{\text{PDS}} = 300$  yr dans le WNM/WIM contre 30 yr dans le DiM. Tandis que dans la phase d'expansion libre la



vitesse du choc varie peu, dans les phases radiatives elle décroît exponentiellement avec le temps, la phase d'expansion adiabatique est une phase de transition.

### Fonction de distribution du rayonnement cosmique

La pression du rayonnement cosmique à l'instant où il s'échappe du rémanent de supernovae est définie par

$$P_{\text{cr}}(z, E)^0 = \frac{4\pi}{3c^3} E^4 f(E) \quad (2.35)$$

où  $f(E)$  est la distribution en énergie du rayonnement cosmique qui est donnée par

$$f(E) = \frac{3c^3}{16\pi^2 R_{\text{sh}}^3(t_{\text{esc}}(E))} \frac{1}{E^2} \frac{dN}{dE} \quad (2.36)$$

où

$$\frac{dN}{dE} = \begin{cases} \frac{(2-\Gamma)W_{\text{cr}}}{E_{\text{max}}^{2-\Gamma} - E_{\text{min}}^{2-\Gamma}} E^{-\Gamma} & \Gamma \neq 2 \\ \frac{W_{\text{cr}}}{\ln(E_{\text{max}}) - \ln(E_{\text{min}})} E^{-\Gamma} & \Gamma = 2. \end{cases} \quad (2.37)$$

$W_{\text{cr}} = 0.1 \times 10^{51}$  erg correspond à l'énergie de l'explosion transmise au rayonnement cosmique,  $E_{\text{min}} \approx 0.1$  GeV et  $E_{\text{max}} = E_{\text{M}}$ , où  $E_{\text{M}}$  correspond à l'énergie d'accélération maximale que le choc peut transférer aux particules, correspondent aux limites du spectre d'énergie.

### Injection du rayonnement cosmique

Dans ce travail j'utilise essentiellement deux approches de l'injection du rayonnement cosmique, l'une basée sur le modèle d'évolution du nuage de rayons cosmiques (CRC : Cosmic Rays Cloud, Malkov et al. 2013 [148], Ptuskin et al. 2008 [176]) : modèle 1, l'autre basée sur un calcul analytique de l'énergie maximale des rayons cosmiques qui peuvent s'échapper au niveau du choc (Cardillo et al. 2015 [26]) : modèle 2.

**Modèle 1 :** Le modèle CRC, au delà des hypothèses qui lui permettent de traiter l'échappement de rayons cosmiques en 1D, a l'avantage d'être déconnecté de la problématique de l'accélération du rayonnement cosmique en utilisant astucieusement le système d'équations de transport des protons et des ondes d'Alfvén anisotropes auto-générées. Malkov et al. (2013) définit le temps de demi-vie du nuage de rayons cosmiques  $t_{1/2}$  comme le temps qu'il faut pour que la pression intégrée dans la distribution initiale de rayonnement cosmique soit divisée par deux. Ce temps est donné par la relation

$$\int_{-a}^{+a} P_p(z, E, t_{1/2}) dz = a P_p^0(E) \quad (2.38)$$

où  $P_p^0$  correspond à la valeur initiale de la pression des protons distribués uniformément dans un intervalle  $[-a, +a]$  où  $a = 2R_{\text{sh}}/3$  correspond au rayon du choc  $R_{\text{sh}}$  ramené

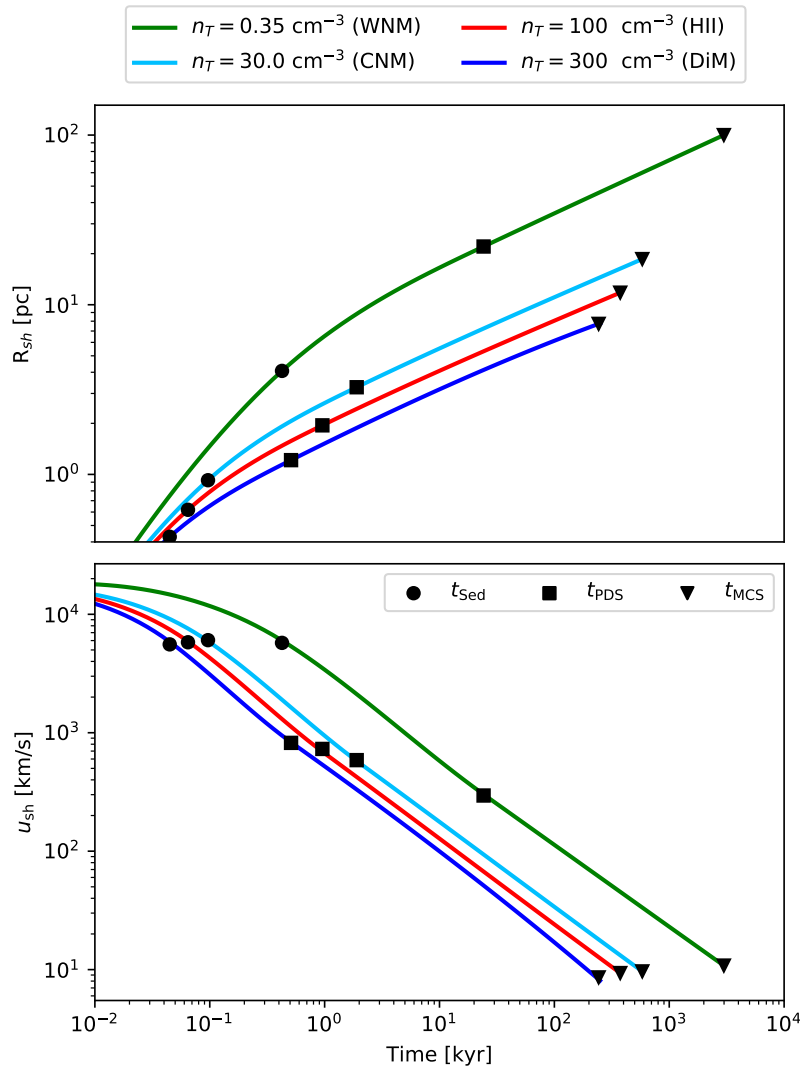


Figure 2.4: Cette figure représente les courbes d'évolution du rayon du choc d'un reste de supernova (en haut) de la vitesse du choc (en bas) dans un milieu homogène caractérisé par sa densité  $n_T$ . Le code couleur fait référence aux phases : rouge pour la phase HII, vert pour le WNM, bleu clair pour le CNM et bleu pour le DiM. Les points ronds font référence à  $t_{Sed}$  c'est à dire à la transition entre la phase d'expansion libre et la phase ST, les points carrés font référence à  $t_{PDS}$  c'est à la transition entre la phase ST et la phase PDS et enfin les triangles retournés font référence à  $\min(t_{merge}, t_{MCS})$ .

en 1D où  $R_{\text{sh}}$  est défini pour un problème tri-dimensionnel. Afin de déterminer le temps d'échappement d'une population d'énergie  $E$  de rayons cosmiques, il est nécessaire d'intersecter les solutions  $t_{1/2}(a)$  obtenues pour un grand nombre de valeurs de  $a$  avec les solutions  $t(R_{\text{sh}})$  correspondant aux solutions d'évolution du choc d'une supernovae de type Ia tel que décrites dans le paragraphe ci-dessus. Notons que ce modèle le système d'équations résolu est donné par (Nava et al. 2016 [160])

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} + V_A \frac{\partial P_p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa_{zz} \frac{\partial P_p}{\partial z} \right) \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial I_+}{\partial t} + V_A \frac{\partial I_+}{\partial z} = \Gamma_g^+ I_+ - \Gamma_d^+ (I_+ - I_+^0) \quad (2.40)$$

est indépendant de l'énergie, ne tient compte que des modes générés en avant, et ne s'applique que dans des milieux homogènes. Les solutions  $t_{1/2}(a) = t(R_{\text{sh}})$  d'échappement des rayons cosmiques avec le modèle 1 sont représentées dans la figure (2.5) pour les phases WNM, CNM et DiM. Nava et al. (2016, 2019) [161] présentent leurs solutions appliquées aux phases tièdes ionisées (WIM) et chaudes ionisées (HIM). Les solutions d'échappement sont obtenues pour les énergies 10 GeV, 100 GeV, 1 TeV et 10 TeV. Pour chaque population de rayons cosmiques, nous obtenons une solution d'échappement ( $t_{\text{esc}}, R_{\text{sh}}(t_{\text{esc}})$ ) qui est représentée à gauche par les intersections des courbes colorées avec la courbe en tirets noir représentant le modèle de choc de supernova. Tandis qu'à droite sont représentées les solutions  $t_{\text{esc}}(E)$  pour chaque phase. Ainsi, il est possible de définir les conditions initiales de la propagation des rayons cosmiques dans le milieu interstellaire. Plus de détails sur ce modèle sont donnés dans Brahimi et al. (2020) [22]. Nous observons que dans le WNM, le temps d'échappement évolue linéairement en  $t_{\text{esc}}^{\text{WNM}}(E) \propto E^{-0.5}$ . Dans les phases CNM et DiM, le temps d'échappement est constant autour de la zone de propagation interdite avant de décroître à nouveau mais en  $E^{-1}$ . Il n'existe pas de solutions d'échappement dans les bandes de propagation interdites car le rayonnement cosmique n'est pas confiné dans l'environnement proche du reste de supernovae. L'effet observé est lié au changement de régime de propagation des ondes d'Alfvén générées par l'instabilité de streaming des protons. En effet, au delà de la bande interdite, le taux d'amortissement des ondes décroît en  $E^{-2}$ , les rayons cosmiques à de telles énergies sont alors confinés plus longtemps dans la source. Proche des bandes interdites, le confinement est faible car la pulsation réelle des modes d'Alfvén est du même ordre de grandeur que le taux d'amortissement. Enfin, nous observons que plus le milieu est dense, plus les rayons cosmiques sont émis tôt dans la vie du reste de supernova : tandis que dans le WNM, les rayons cosmiques d'énergie 10 GeV s'échappent à  $\sim 30$  kyr, dans le DiM, ils s'échappent à 2 kyr. Enfin le spectre d'énergie des rayons cosmiques ne joue pas un rôle fondamental dans l'injection du rayonnement cosmique.

**Modèle 2 :** Le second modèle est basé sur un modèle communément utilisée pour décrire de manière auto-consistante l'échappement du rayonnement cosmique des restes de supernova qui consiste à dire que l'énergie maximale des rayons cosmiques qui s'échappent

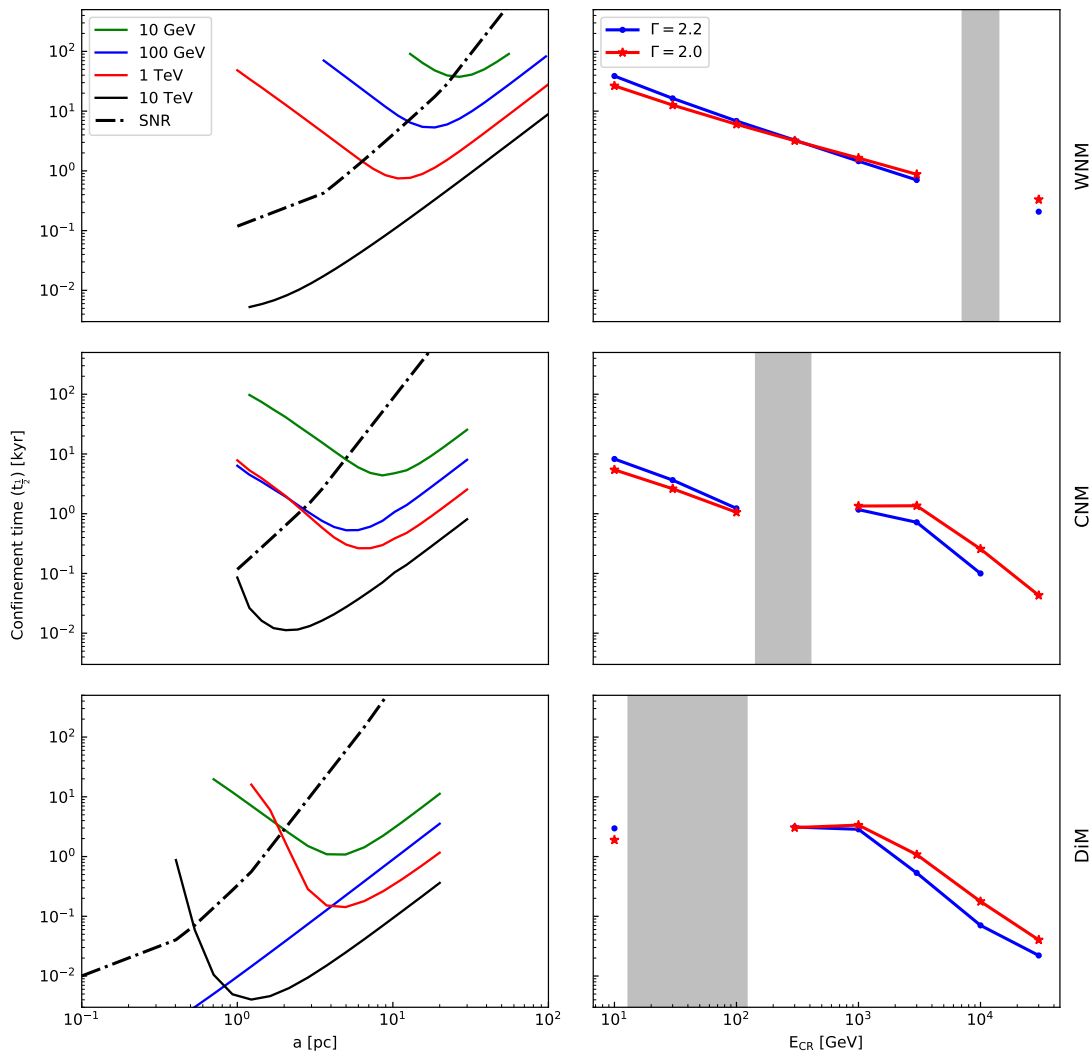


Figure 2.5: Cette figure tirée de [22] illustre le modèle d'échappement du rayonnement cosmique tel que proposé par Malkov et al. (2013 [148]) dans trois phases : le WNM en haut, le CNM au milieu, le DiM en bas. A gauche sont représentées les solutions  $t_{1/2}$  en fonction du rayon  $a$  initial pour chaque population de rayons cosmiques : en vert pour les RCs à 10 GeV, bleu pour les RCs à 100 GeV, rouge pour les RCs à 1 TeV et noir pour les RCs à 10 TeV. La courbe d'évolution du choc de supernova de type Ia est représentée par les traits pointillés noirs. A droite sont représentées les solutions  $t_{esc}(E)$  pour chaque phase en faisant apparaître la bande de propagation interdite des ondes d'Alfvén en gris et pour deux indice spectraux  $\Gamma$  différents concernant la distribution en énergie initiale du rayonnement cosmique.

augmente avec le temps pendant la phase d'expansion libre pour ensuite diminuer au cours du temps pendant la phase Sedov-Taylor suivant la relation (Gabici et al. 2019 [82])

$$E_{\max,0} = \begin{cases} E_M(t/t_{\text{Sed}}) & t \leq t_{\text{Sed}} \\ E_M(t/t_{\text{Sed}})^{-\delta} & t \geq t_{\text{Sed}} \end{cases} \quad (2.41)$$

où  $E_M$  représente l'énergie maximale que le reste de supernovae peut fournir aux rayons cosmiques et qui se trouve à  $t = t_{\text{Sed}}$  c'est à dire à la transition entre la phase d'expansion libre et Sedov-Taylor. Plus de détails sont donnés par Celli et al. (2019) [29]. En inversant la relation ci-dessus, il est possible de définir le temps d'échappement des rayons cosmiques ainsi que le rayon du reste à l'instant d'échappement

$$t_{\text{esc}}(E) = t_{\text{Sed}} \left( \frac{E}{E_M} \right)^{-1/\delta} \quad (2.42)$$

$$R_{\text{esc}}(E) = R_{\text{sh}}(t_{\text{esc}}(E)). \quad (2.43)$$

L'avantage de ce modèle d'échappement est qu'il est possible de traiter l'ensemble du spectre en énergie des protons et ainsi, traiter de manière plus réaliste la problématique du transport du rayonnement cosmique dans les environnements de restes de supernova. Il reste cependant à calculer l'énergie maximale  $E_M$ . Cardillo et al. (2015) [26] considère pour cela que les particules qui se sont échappées excitent des instabilités plasmas à l'origine de la génération de modes de dérive résonants et non-résonants permettant d'amplifier efficacement le champ magnétique proche du choc, entraînant un confinement des rayons cosmiques injectés. En particulier, l'injection d'un courant de particules super-Alfvéniques induit à une réaction du plasma visant à le compenser [16]. En considérant que le reste s'étend dans un milieu homogène, et qu'une fraction de l'énergie cinétique du choc est instantanément transférée au flux de particules qui s'échappe, il est possible de définir une équation sur la variable  $E_{\max,0}(t)$

$$E_{\max,0}(t) \ln \left( \frac{E_{\max,0}(t)}{E_{\min}} \right) = \frac{e\sqrt{4\pi\rho_T}}{10c} \xi_{\text{CR}} u_{\text{sh}}^2(t) R_{\text{sh}}(t) \quad (2.44)$$

où  $u_{\text{sh}}(t)$  représente l'évolution de la vitesse du choc en fonction du temps,  $\xi_{\text{CR}} \approx 0.1$  représente l'efficacité de l'accélération du rayonnement cosmique définie comme le rapport de la pression des RCs sur la pression cinétique du gaz  $P_{\text{CR}}/\rho u_{\text{sh}}^2$ ,  $\rho_T = m_i n_i + m_n n_n$  correspond à la densité massique totale du plasma dans lequel le choc se propage et  $E_{\min}$  correspond au minimum de l'énergie produite par l'accélération de rayons cosmiques pendant la phase Sedov-Taylor. Il est important de noter que l'équation (2.44) n'est valable que dans la phase Sedov-Taylor et non dans les phases radiatives. Cependant, la variable qui nous intéresse ici est  $E_M = \max(E_{\max,0}(t))$  où  $E_{\max,0}(t)$  est censé être correctement défini pendant toute la vie du reste de supernovae. Dans les phases radiatives, il est quasi-improbable de générer des particules d'énergie supérieures à celles produites pendant la phase Sedov-Taylor. Notre modèle d'injection n'est donc pas affecté par cette approximation. L'inconvénient de ce modèle d'échappement reste la valeur de  $\delta$  qui est

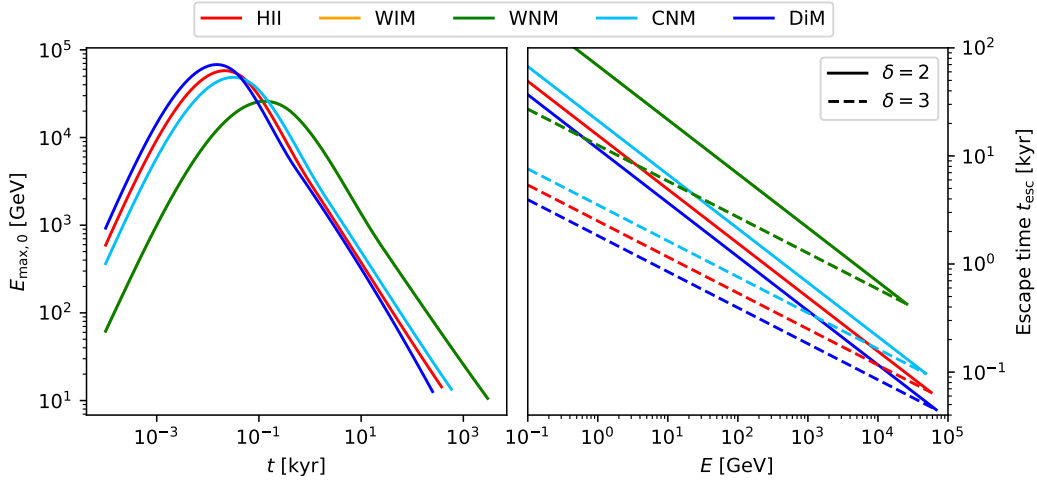


Figure 2.6: Cette figure illustre le modèle d'échappement 2 basé sur un calcul auto-consistant dans les phases HII (en rouge), WIM (en jaune), WNM (en vert), CNM (en bleu clair), DiM (en bleu). À gauche sont représentées les fonctions  $E_{\max,0}(t)$  tandis qu'à droite sont représentées les temps d'échappement dans les cas  $\delta = 2$  en trait plein et  $\delta = 3$  en tirets.

à priori un paramètre libre. Celli et al. (2019) [29] propose d'en dériver une valeur théorique et obtient  $\delta \approx 2$ . Les valeurs de  $E_{\max,0}(t)$  et les solutions d'échappement des rayons cosmiques suivant le modèle 2 sont présentées dans la figure (2.6) à gauche et à droite respectivement et ce pour toutes les phases dans lesquelles il est possible de considérer l'expansion d'un reste de supernova. Les temps d'échappement ont été calculés pour chaque phase pour des valeurs de  $\delta = 2$  en trait plein et 3 en tirets. Nous observons que l'énergie maximale d'injection de rayons cosmiques est plus importante dans les phases HII, CNM et DiM que dans les phases WNM et WIM. Ceci est uniquement dû à un effet de la densité du milieu qui est équivalent à l'analyse faite dans le modèle 1 : les rayons cosmiques s'échappent plus tôt dans les phases denses. Ce modèle se distingue du modèle 1 par trois points : dans un premier temps nous observons que le temps d'échappement est défini même pour les énergies correspondant à la bande de propagation interdite, au delà du GeV, le temps d'échappement évolue uniquement en  $-1/\delta$  et ne tient donc pas compte de la génération de modes d'Alfvén pouvant entraîner un confinement supplémentaire, ce modèle définit une valeur  $E_M$  au-delà de laquelle il n'y a pas d'injection de rayonnement cosmique. Il est donc optimisé pour réaliser des calculs de propagation avec un spectre complet de protons, en revanche, le temps d'injection est légèrement sur-estimé à haute énergie par rapport à celui du modèle 1.

La figure (2.7) compare les deux modèles d'échappement du rayonnement cosmique dans les phases WNM, CNM et DiM. Dans le WNM on observe que le paramètre  $\delta$  associé au modèle (1) est d'environ 3 à toutes les énergies. La différence avec le modèle (2) vient du choix de la normalisation. Dans les phases CNM et DiM le coefficient  $\delta$  associé au modèle (1) est variable dans le temps et diffère de manière importante avec

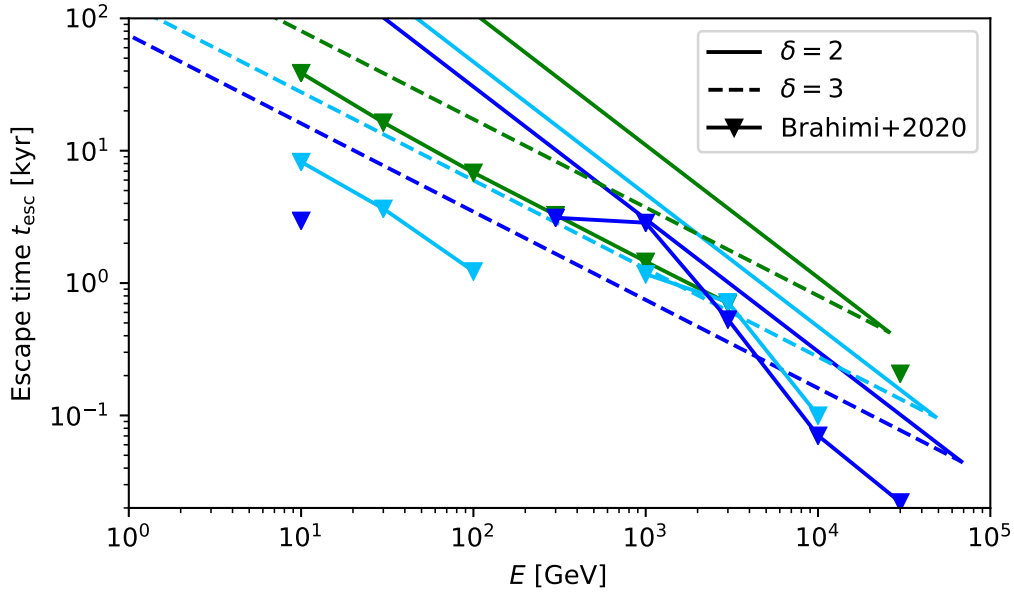


Figure 2.7: Cette figure compare les modèles d'échappement de protons 1 représenté par les lignes reliées par des triangles renversé et d'échappement 2 en traits pleins et en tirets pour les paramètres  $\delta = 2$  et  $3$  respectivement et ce dans les phases WNM (vert), CNM (bleu clair) et DiM (bleu) pour un spectre d'injection du rayonnement cosmique en  $E^{-2.2}$ . Notons que les triangles renversés non reliés correspondent aux zones où le modèle 1 n'a pas de solution d'échappement.

les résultats d'injection du modèle (2).

**Phases radiatives :** En phase radiative, il est nécessaire de s'assurer que la vitesse du choc est toujours supérieure à  $\sim 110 \text{ km s}^{-1}$  qui correspond à la vitesse limite en dessous de laquelle le milieu choqué ne génère plus de radiation UV et ne peut plus ioniser le milieu précurseur (Shull & McKee 1979 [205]). Dans ce cas, les collisions ion-neutre amortissent rapidement toute perturbation magnétique (Sutherland & Dopita 2017 [217]) et déconfinent tous les rayons cosmiques. Nous considérons donc deux variantes possibles de l'échappement du rayonnement cosmique en phase radiative qui viennent en complément des modèles d'échappement 1 et 2.

→ Le modèle rapide (F : Fast). Dans ce modèle les fluctuations du champ magnétique dans le précurseur sont rapidement amortie dès lors que le choc entre en phase radiative. En conséquence, à  $t^* = t_{\text{PDS}}$  toutes les particules d'énergie  $E > E^*$  qui ne se sont pas échappées, sont libérées. Dans ce modèle, la quantité de rayonnement cosmique libéré au début de la phase radiative est plus importante et contribue à générer plus de turbulence.

→ Le modèle lent (S : Slow). En considérant que le précurseur est suffisamment ionisé, une fois entré en phase radiative le fluide est comprimé et les particules qui ne se sont pas échappées à  $t_{\text{PDS}}$  restent confinées jusqu'à ce que la vitesse du choc devienne inférieure à  $110 \text{ km s}^{-1}$ , vitesse à laquelle ils sont libérés. Ce modèle a tendance à générer moins de turbulence.

**Modèle d'échappement des électrons :** Dans ce travail, le modèle d'échappement des électrons est basé sur le modèle 2 d'échappement des protons. Dans les faits, les électrons sont régis par la même microphysique à la différence près qu'ils sont susceptible de perdre une partie de l'énergie via le rayonnement synchrotron et/ou Compton Inverse (uniquement les pertes synchrotron sont implémentées pour l'heure). L'énergie maximale que le choc de la supernova peut fournir aux électrons est alors donné par (Ohira et al. 2012 [167])

$$E_M^e = \min(E_e^{\text{cool}}, E_M^p) \quad (2.45)$$

où  $E_M^p$  correspond au maximum d'énergie que la supernovae peut fournir aux protons et

$$E_e^{\text{cool}} = \frac{9m_e^4 c^7}{4e^2 B_d(t_{\text{Sed}})^2 t_{\text{Sed}}} \quad (2.46)$$

est l'énergie maximale perdue via le processus de rayonnement synchrotron des électrons,  $B_d(t) = rB_{\text{sat}}(t)$  correspond au champ magnétique en aval du choc, le facteur de compression du choc ici est  $r = 4$ . Ohira et al. (2012) [167] proposent trois modèles d'évolution de la saturation du champ magnétique  $B_{\text{sat}}(t)$  au niveau du choc. Dans la phase d'expansion libre du choc ( $t < t_{\text{Sed}}$ ), le champ de saturation est maximal et constant. Pendant la phase Sedov-Taylor, le champ magnétique à l'interface décroît lentement à mesure que le choc se dilue jusqu'à atteindre la valeur du champ magnétique du milieu interstellaire. Autrement définit

$$B_{\text{sat}}(t) = \begin{cases} B_{\text{free}} & t \leq t_{\text{Sed}} \\ B_{\text{free}}(t/t_{\text{Sed}})^{-\alpha_B} & t_{\text{Sed}} \leq t \leq t_B \\ B_0 & t_B \leq t \end{cases} \quad (2.47)$$

où

$$B_{\text{free}} = \frac{\eta_{g,\text{free}} \eta_{\text{acc}} c t_{\text{Sed}} E_{\text{knee}}}{3e R_{\text{sh}}(t_{\text{Sed}})^2} \quad (2.48)$$

où  $E_{\text{knee}} \approx 1 \text{ PeV}$ ,  $\eta_g(t)$  correspond au facteur de proportionnalité entre le libre parcours moyen des électrons et leur rayon de gyration  $\lambda_e(t) = \eta_g(t) r_{g,e}(t)$  de telle manière que dans la limite de la diffusion de Bohm, ce facteur vaut 1.  $\eta_{\text{acc}} \approx 10$  est un facteur numérique qui dépend du rapport de compression du choc et de la dépendance spatiale du coefficient de diffusion de fond (Drury 1983 [58]).  $t_B$  est donné par

$$t_B = t_{\text{Sed}} \left( \frac{B_{\text{free}}}{B_0} \right)^{1/\alpha_B} \quad (2.49)$$



et correspond à l'instant où le choc est complètement dilué et le champ magnétique au niveau du choc est égal à celui du milieu interstellaire. Trois variantes d'évolution de ce modèle sont proposées et sont dirigées par la valeur du coefficient  $\alpha_B$  entre  $t_{\text{sed}}$  et  $t_B$

$$\alpha_B = \begin{cases} \alpha - \frac{1}{5} & \eta_g(t) = \eta_{g,\text{free}} \\ \frac{9}{10} & B_{\text{sat}}^2 \propto u_{\text{sh}}^3 \\ \frac{3}{5} & B_{\text{sat}}^2 \propto u_{\text{sh}}^2. \end{cases} \quad (2.50)$$

où  $\alpha = 1/\delta$ . Dans le premier modèle, on considère que le gyrofacteur est constant dans le temps. Dans le second, le champ magnétique au niveau du choc dépend de la vitesse du choc au cube [16] tandis que dans le troisième modèle il dépend de la vitesse du choc au carré [229]. Les observations tendent à favoriser le dernier modèle [228].

### 2.2.5 Rayonnement synchrotron des électrons

En se propageant le long des lignes de champ magnétique moyen, les électrons émettent un rayonnement lié à leur mouvement de gyration autour des lignes de champ. Ceci entraîne une perte d'énergie que l'on qualifie de perte par rayonnement synchrotron. Le taux de perte synchrotron est donné par (Schlickeiser 2002 Chapitre 4 [194])

$$\frac{\dot{E}}{E} \approx \frac{c\sigma_T}{4\pi} (B_0 \sin \theta)^2 \frac{E}{m_e^2 c^4} \quad (2.51)$$

$\theta$  correspond à l'angle entre la ligne de visée de l'observateur et la direction du champ magnétique  $\mathbf{B}_0$ <sup>10</sup>, et  $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$  correspond à la section efficace de collision de Thomson. L'équation de transport des électrons où seul le terme de pertes synchrotron joue un rôle est alors donnée par ([19])

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial E} \left( \left[ \frac{\dot{E}}{E} \right] E P_e \right) \quad (2.52)$$

### 2.2.6 Temps de résidence et grammage

Le temps de résidence des rayons cosmiques dans l'environnement d'un accélérateur est un bon indicateur de l'effet de confinement produit par l'augmentation du niveau de turbulence au voisinage de la source. Il est cependant plus commode de parler du grammage qui représente la densité de colonne traversée par les rayons cosmiques durant leur voyage autour de la source. Cette quantité est à la fois dépendante des propriétés de transport du rayonnement cosmique et du gaz environnant. Le grammage est défini par

$$\Xi \approx 1.4 m_p n_T c \tau_{\text{res}} \quad (2.53)$$

où  $\tau_{\text{res}}$  est le temps de résidence. Aux échelles galactiques, ce temps est inféré suivant les rapports d'abondance des éléments secondaires sur celle des primaires. Les résultats

<sup>10</sup>Dans le code CR SPECTRA, le terme de perte synchrotron est par défaut moyenné sur l'angle  $\theta$ .

obtenus représentent la moyenne du confinement dans tout l’environnement galactique local c’est à dire également loin des sources ce qui fausse les conclusions sur le transport du rayonnement cosmique. D’Angelo et al. (2016) [47] ont étudié le grammage du rayonnement cosmique dans les environnements des restes de supernova et montrent que suivant le taux d’ionisation  $X$  du MCS le grammage des RCs de haute énergie peut être important. Il n’est donc pas complètement évident d’inférer les paramètres de propagation des RCs galactiques uniquement à partir des ratios B/C.

Dans notre problème unidimensionnel à symétrie cylindrique, le temps de résidence d’un rayon cosmique d’énergie  $E$  est défini comme le temps qu’il met à partir du moment  $t_{\text{esc}}(E)$  où il s’échappe de la source, pour traverser une zone à la position  $z^*$ . Le temps de résidence est défini en considérant que sa trajectoire est dominée par la diffusion (qui sera vérifiée à posteriori). Le temps de résidence est alors donné par (Nava et al. 2019 [161])

$$z_*^2 = \frac{\int_{R_{\text{sh}}(t_{\text{esc}}(E))}^{\infty} z^2 P_{\text{cr}}(z, E, \tau_{\text{res}} + t_{\text{esc}}(E)) dz}{\int_{R_{\text{sh}}(t_{\text{esc}}(E))}^{\infty} P_{\text{cr}}(z, E, \tau_{\text{res}} + t_{\text{esc}}(E)) dz} \quad (2.54)$$

Les résultats concernant le grammage des rayons cosmiques dans les environnements de supernovae seront discutés plus loin.

## 2.3 Code numérique de transport CR SPECTRA

Dans cette section je discute des méthodes numériques qui sont mises en oeuvre pour répondre à la problématique de l’injection et du transport du rayonnement cosmique dans les environnements proches des restes de supernovae. Je présente dans un premier temps le code CR SPECTRA (Cosmic Ray Self Propagation Escaping and Confinement TRANsport code)<sup>11</sup> que j’ai développé et qui est disponible sur Github, puis je présente les différentes méthodes numériques utilisées ainsi que des tests fiduciaux qui permettent de valider ces méthodes.

### 2.3.1 Présentation générale

#### 2.3.1.1 Intérêt scientifique

J’ai développé le code CR SPECTRA à la suite de ma publication (Brahimi et al. 2020 [22]) sur l’étude du transport du rayonnement cosmique dans les environnements faiblement ionisés des restes de supernovae. L’objectif initial étant de répondre aux problématiques que nous avons rencontré lors de ces travaux. Initialement, le code de transport utilisé ne sonde pas l’espace des phases en énergie résonante des rayons cosmiques et ne tient donc pas compte des pertes adiabatiques liées aux variations de la vitesse d’Alfvén dans l’espace physique ( $\nabla \cdot \mathbf{V}_A$ ) et l’espace des énergies ( $\partial \mathbf{V}_A / \partial E$ ),

<sup>11</sup>Le code CR SPECTRA est disponible sur Github à l’adresse suivante : [https://github.com/LoannData/CR\\_SPECTRA.git](https://github.com/LoannData/CR_SPECTRA.git)

ainsi que d'autres détails jouant un rôle fondamental dans l'étude du transport du rayonnement cosmique (voir section 2.2). Le code CR SPECTRA permet d'effectuer un grand nombre d'études scientifiques différentes autour de la problématique du transport, ci-dessous sont présentés quelques exemples :

- **Echappement et propagation du rayonnement cosmique dans les environnements de restes de supernova.** Cette étude permet de compléter les travaux entrepris par Malkov et al. (2013 [148]), Nava et al. (2016 [160], 2019 [161]) et Brahimy et al. (2020 [22]). Nous discutons en détails cette problématique dans ce chapitre.
- **Recherche et caractérisation d'une source cachée de rayonnement cosmique.** Dans ce genre d'étude, il s'agit de contraindre les paramètres d'un accélérateur de rayons cosmiques afin d'expliquer le flux reçu sur Terre ainsi que ses sous-structures (raidissement, pics, anisotropie ...). Voir section (2.5.2).
- **Transport des rayons cosmiques galactiques issus de super bulles.** Il est possible d'adapter, pour un moindre effort, le code de transport au problème de l'émission de rayons cosmiques des super bulles en modifiant le modèle d'injection et en ajoutant un terme advectif correspondant au vent global émis par l'ensemble des accélérateurs. Voir section (2.5.4).
- **Emission  $\gamma$  des nuages moléculaires au voisinage des restes de supernova.** En connaissant le flux de protons, ainsi que les propriétés du milieu, il est possible de déterminer le spectre d'émission  $\gamma$  issu de l'interaction des protons avec le milieu ambiant. Voir section (2.5.1).

La liste des études possibles ci-dessous est non-exhaustive.

### 2.3.1.2 Structure du code

Le code se décompose en deux parties indépendantes l'une de l'autre. La première partie consiste en la génération des "conditions initiales" c'est à dire toutes des quantités physiques qui jouent un rôle dans la simulation mais qui n'évoluent pas au cours du temps : les distributions initiales de la pression des protons et des électrons, le niveau de turbulence de fond, quantité d'énergie injectée dans le rayonnement cosmique, composition du milieu interstellaire. Ainsi que tous les paramètres fondamentaux : taille de la boîte de simulation, résolution en espace et en énergie, position de la source de rayonnement cosmique etc ... . Cette partie est codée dans le langage Python 3.7 qui a l'intérêt d'être très modulable et permet d'interagir avec l'utilisateur, facilitant ainsi la programmation de modèles mathématiques complexes. La seconde partie consiste en la résolution du système d'équations (2.17) à partir des conditions initiales générées par la première partie. Cette seconde partie est écrite en langage C++ offrant ainsi une rapidité d'exécution notable. Certains paramètres doivent être fixés dans un fichier annexe de la partie C++ comme les paramètres de l'injection du rayonnement cosmique,

les termes à utiliser ou non dans le système d'équations, les propriétés de fréquence de sortie des fichiers de solution.

Plus de détails techniques sont donnés dans la documentation qui accompagne le code.

### 2.3.2 Méthodes de résolution numérique par découpage

En analyse numérique, il est commun d'utiliser une méthode de découpage des solveurs pour résoudre un système complexe d'équations. Cette méthode consiste à appliquer les uns à la suite des autres les différents opérateurs agissant sur la fonction solution de l'équation. En particulier, le système (2.17) se réécrit

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \sum_i L_i^p(P_p) = \mathcal{L}^p P_p \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} = \sum_i L_i^e(P_e) = \mathcal{L}^e P_e \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial I_+}{\partial t} = \sum_i L_i^{I_+}(I_+) = \mathcal{L}^{I_+} I_+ \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial I_-}{\partial t} = \sum_i L_i^{I_-}(I_-) = \mathcal{L}^{I_-} I_- \quad (2.58)$$

où  $\sum_i L_i^x$ ,  $x \in \{p, e, I_+, I_-\}$  correspond à l'opérateur d'indice  $i$  agissant sur la fonction  $f_x$  solution du système (2.17). Les différents opérateurs sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^p &= L_{\text{adv}}(-V_A, z) + L_{\text{diff}}(\kappa_{zz}, z) \\ &+ L_{\text{adv}}(E/3 \partial V_A / \partial z, E) + L_{\text{adv}}(-E/3 \partial V_A / \partial E, z) \\ &+ L_{\text{src}}(-4/3 \partial V_A / \partial z) + L_{\text{src}}(Q_{p,\text{inj}}) \\ \mathcal{L}^e &= L_{\text{adv}}(-V_A, z) + L_{\text{diff}}(\kappa_{zz}, z) \\ &+ L_{\text{adv}}(E/3 \partial V_A / \partial z, E) + L_{\text{adv}}(-E/3 \partial V_A / \partial E, z) \\ &+ L_{\text{src}}(-4/3 \partial V_A / \partial z) + L_{\text{sync}}(E) + L_{\text{src}}(Q_{e,\text{inj}}) \\ \mathcal{L}^{I_+} &= L_{\text{adv}}(-V_A, z) + L_{\text{src}}(-I_+ \partial V_A / \partial z) + L_{\text{gd}}(\Gamma_g^+ I_+, \Gamma_d^+(I_+ - I_+^0)) \\ \mathcal{L}^{I_-} &= L_{\text{adv}}(-V_A, z) + L_{\text{src}}(-I_- \partial V_A / \partial z) + L_{\text{gd}}(\Gamma_g^- I_-, \Gamma_d^-(I_- - I_-^0)) \end{aligned}$$

où  $L_{\text{adv}}(V, s)$  correspond à un opérateur d'advection d'une quantité  $V$  suivant la direction  $s \in \{z, E\}$ ,  $L_{\text{diff}}(D, s)$  correspond à l'opérateur de diffusion de coefficient  $\kappa$  dans la direction  $s$ ,  $L_{\text{src}}(Q)$  correspond à l'opérateur source de la quantité  $Q$ ,  $L_{\text{gd}}(Q_g, -Q_d)$  correspond à l'opérateur source qui résout la génération de turbulence de quantité  $Q_g$  et son amortissement  $-Q_d$  dans le plasma et enfin,  $L_{\text{sync}}(E)$  correspond à l'opérateur à l'origine des effets de rayonnement synchrotron des électrons. Ci-dessous nous présentons en détail chaque opérateur utilisé par le solveur.

### 2.3.3 Termes d'advection spatiale ( $L_{\text{adv}}^z$ )

Le solveur numérique utilisé pour tous les termes d'advection spatiale est le même et résoud l'équation de base qui est de la forme

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -V \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2.59)$$

$$u(x, t = 0) = u_0(x) \quad (2.60)$$

où  $u(x, t)$  est la fonction solution qui peut être la distribution spatiale de pression des protons ou des électrons, ou encore les niveaux de turbulence.  $u_0(x)$  correspond à condition initiale de la solution  $u(x, t = 0)$ . Le schéma numérique utilisé est qualifié de "upwind-biased" et est donné par, après discretisation de l'équation ci-dessus,

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t [\max(V, 0)u_x^- + \min(V, 0)u_x^+] \quad (2.61)$$

où

$$u_x^- = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \quad u_x^+ = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}. \quad (2.62)$$

Où  $\Delta t$  et  $\Delta x$  correspondent respectivement aux pas de temps et d'espace de la simulation. Ce schéma est de premier ordre en temps et en espace et est stable si la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) suivante

$$CFL = \left| \frac{V \Delta t}{\Delta x} \right| < 1 \quad (2.63)$$

est satisfaite. Afin de montrer la consistance et la stabilité numérique du schéma utilisé [135], nous effectuons deux tests fiduciaux dans lesquels une fonction porte  $u(x, t)$  est advectée. Notons également que les conditions aux bords sont de type absorbantes, ie

$$u_0^{n+1} = u_0^n \quad (2.64)$$

$$u_{N_x}^{n+1} = u_{N_x}^n \quad (2.65)$$

où les indices  $i$  et  $n$  font référence à la position et au temps respectivement.

**Advection unilatérale** Dans ce premier test, la condition initiale est donnée par

$$u(x, t = 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & 100 \text{ pc} \leq z \leq 200 \text{ pc} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.66)$$

tandis que la vitesse d'advection est uniforme, est dirigée vers les  $z$  grands et vaut  $V = 1$  pc/yr. Les résultats sont présentés dans la figure (2.8) à trois temps différents : 0.5 kyr, 1.0 kyr et 1.5 kyr. La partie supérieure de la figure représente l'évolution de la solution initiale représentée par les tirets noirs sur la partie gauche de la figure au cours des trois

instants et ce pour trois résolutions différentes :  $N_X = 2^8$  en vert,  $2^{10}$  en bleu et  $2^{12}$  en rouge. La partie inférieure de la figure (2.8) représente l'évolution de l'erreur relative cumulée  $\text{err}_{\text{rel}}$  donnée par

$$\text{err}_{\text{rel}} = \frac{\int_{X_{\text{min}}}^{X_{\text{max}}} dx |u_{\text{sim}}(x) - u_{\text{ana}}(x)|}{\int_{X_{\text{min}}}^{X_{\text{max}}} dx u_{\text{ana}}(x)} \quad (2.67)$$

où l'indice sim fait référence à la solution numérique tandis que ana fait référence à la solution analytique. Pour chaque simulation, le pas de temps est donné par

$$\Delta t = 0.5 \left| \frac{\Delta x}{V} \right| \quad (2.68)$$

et vaut  $\sim 3.9$  yr pour  $N_X = 2^8$ ,  $\sim 0.97$  yr pour  $N_X = 2^{10}$  et  $\sim 0.24$  yr pour  $N_X = 2^{12}$ . Nous observons que bien que le schéma numérique est très diffusif, spécialement dans le cas où l'on utilise de faibles résolutions spatiales, ce dernier est stable par définition des conditions CFL. A mesure que la résolution spatiale augmente, l'erreur relative cumulée diminue et par conséquent le schéma est convergent, répondant ainsi au théorème de Lax. Notons également que dans le cadre de l'étude actuelle le processus de transport dominant est la diffusion (nous le montrerons) et que l'effet de l'advection est très faible limitant ainsi la diffusion numérique. Nous pouvons également ajouter que les distributions utilisées possèdent des bords adoucis limitant de surcoût les pertes par diffusion numérique.

**Advection bilatérale** Dans le second test, la condition initiale est donnée par

$$u(x, t = 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & 950 \text{ pc} \leq z \leq 1050 \text{ pc} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.69)$$

tandis que la vitesse d'advection  $V(x)$  est bi-latérale, c'est à dire définie par

$$V(x) = \begin{cases} 0.5 \text{ pc/yr} & z \geq 1000 \text{ pc} \\ -0.5 \text{ pc/yr} & z < 1000 \text{ pc}. \end{cases} \quad (2.70)$$

Les résultats sont présentés dans la figure (2.9) avec le même code syntaxique que pour le cas de l'advection uniforme. Ce dernier cas est plus proche de la réalité physique du problème modélisé. En effet, l'advection dans notre modèle est dirigée du centre (depuis l'accélérateur) vers l'extérieur (le milieu interstellaire lointain). La norme de la vitesse d'advection étant divisée par deux, le pas de temps respectant la condition de stabilité (2.68) est multiplié par deux. Dans ce cas-ci nous observons que le schéma numérique est beaucoup moins diffusif, l'erreur relative cumulée est divisée par 10 par rapport à la situation d'advection linéaire.

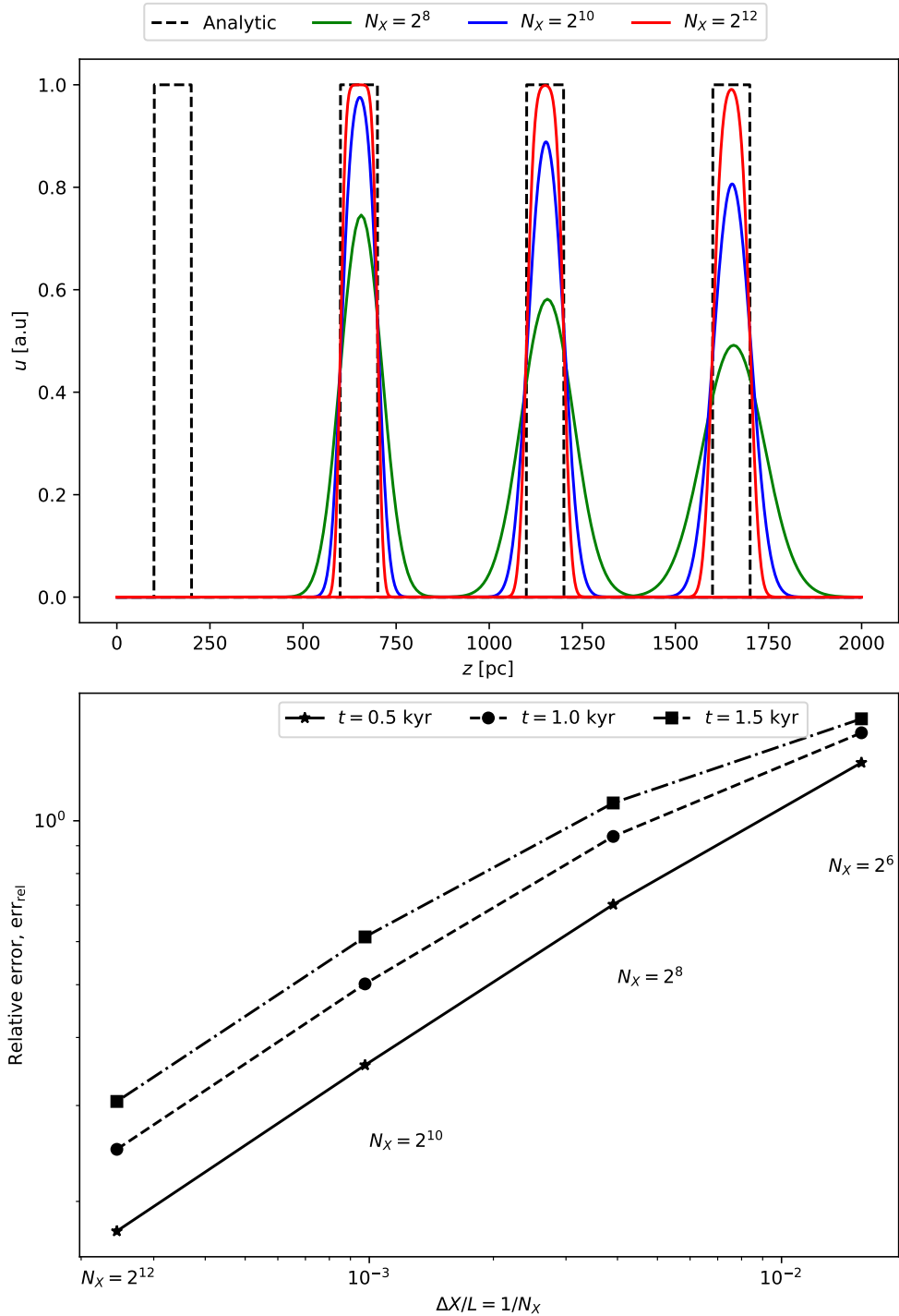


Figure 2.8: Cette figure décrit le schéma numérique d’advection uniforme d’une fonction porte suivant la méthode ”upwind biased”. La figure du haut représente les différentes solutions : analytique (en tirets noirs), et numérique pour  $N_x = 2^8, 2^{10}, 2^{12}$  les courbes colorées vert, bleu et rouge respectivement, aux trois instants  $t = 0.5, 1.0, 1.5$  kyr de gauche à droite respectivement. La figure du bas représente l’évolution de l’erreur relative cumulée (2.67) en fonction du pas de temps  $\Delta x$  et aux trois instants décrits ci-dessus représentés par des étoiles, disques et carrés respectivement.

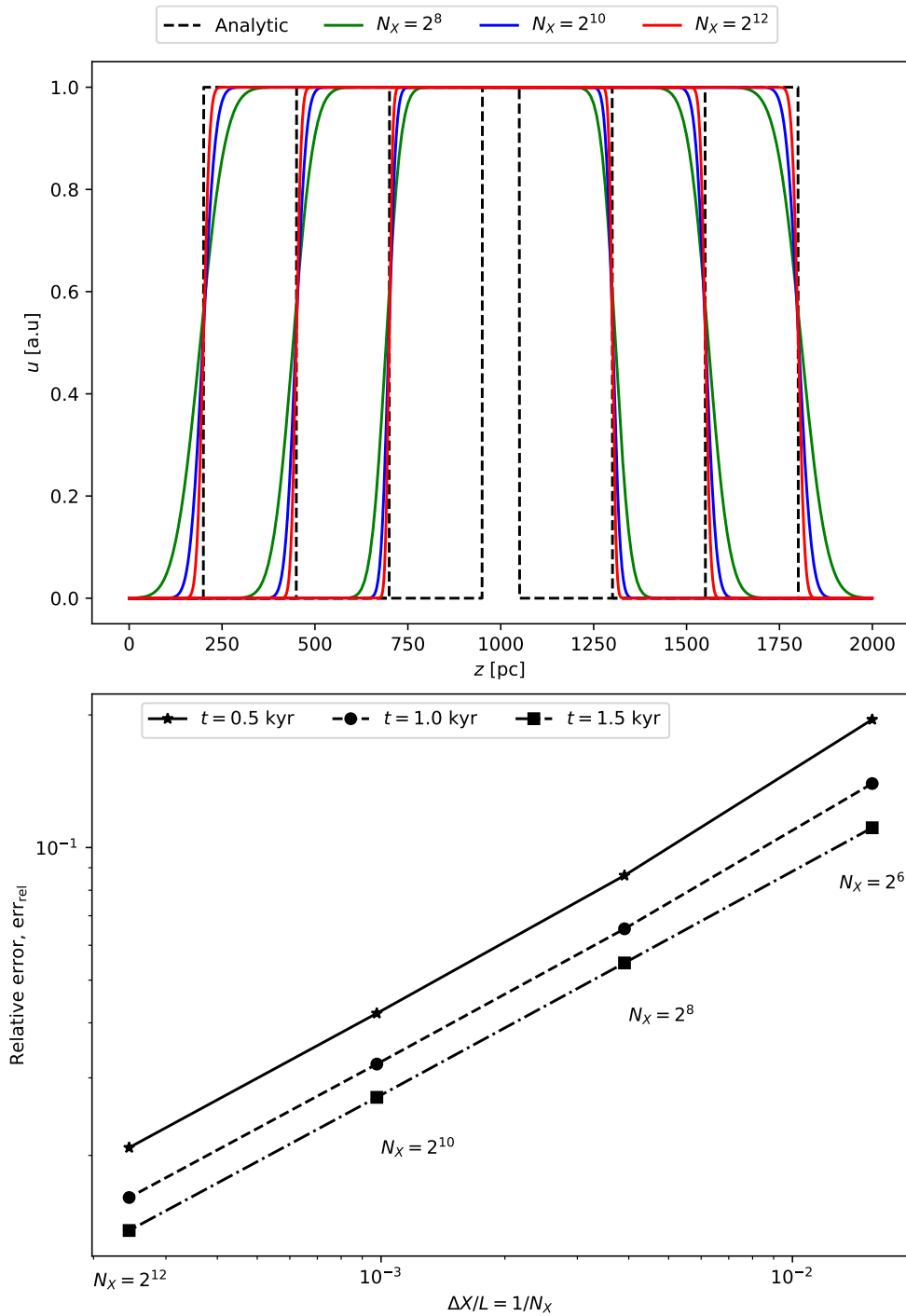


Figure 2.9: Cette figure décrit le schéma numérique d'advection bilatéral d'une fonction porte suivant la méthode "upwind biased". La figure du haut représente les différentes solutions : analytique (en tirets noirs), et numérique pour  $N_X = 2^8, 2^{10}, 2^{12}$  les courbes colorées vert, bleu et rouge respectivement, aux trois instants  $t = 0.5, 1.0, 1.5$  kyr de gauche à droite respectivement. La figure du bas représente l'évolution de l'erreur relative cumulée (2.67) en fonction du pas de temps  $\Delta x$  et aux trois instants décrits ci-dessus représentés par des étoiles, disques et carrés respectivement.



### 2.3.4 Terme de diffusion spatiale ( $L_{\text{diff}}^z$ )

L'équation de diffusion spatiale la plus générale est donnée par

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2.71)$$

$$u(x, t = 0) = u_0(x) \quad (2.72)$$

où  $\kappa(x, t)$  est le coefficient de diffusion en espace qui évolue éventuellement dans l'espace. Dans le cas où une telle équation serait résolue numériquement en utilisant un schéma de diffusion explicite, la condition sur le pas de temps serait alors donnée par

$$\Delta t_{\text{ex}} < \frac{(\Delta x)^2}{\max(D(x))}. \quad (2.73)$$

Cette condition est extrêmement contraignante car d'ordre 2 en espace et dépend de la valeur maximale du coefficient de diffusion des rayons cosmiques dans le milieu interstellaire. Or nous avons vu que plus l'énergie de ces derniers augmente, plus le coefficient de diffusion maximal augmente et contraint toute la simulation. C'est pourquoi nous faisons le choix de résoudre l'équation de diffusion à l'aide d'une méthode implicite, et par conséquent inconditionnellement stable quelque soit le choix du pas de temps et la résolution de la simulation. La méthode utilisée est appelée méthode theta ([8]) et est dirigée par un facteur  $\theta$  qui permet de choisir, soit de résoudre l'équation de diffusion en utilisant la méthode upwind biased ( $\theta = -1$ ), soit en utilisant méthode de Crank-Nicolson ( $\theta = 1/2$ ), soit de manière purement implicite ( $\theta = 1$ ). Notre calcul est basé sur la valeur  $\theta = 1$ , plus de détails concernant la méthode de résolution sont donnés en annexe (A.8). Dans les configurations faisant intervenir plusieurs termes des équations de transport du système, le pas de temps sera alors uniquement déterminé par les conditions de courant des méthodes explicites.

Dans ce cas précis, nous effectuons deux tests de diffusion, homogène et variable dans l'espace, dans une boîte de simulation définie entre les bornes  $X_{\text{min}} = 0$  pc et  $X_{\text{max}} = 2000$  pc et où le pas de temps est défini "à la main" et vaut  $\Delta t = 10$  yr. La solution initiale du problème est donnée par

$$u(x, t = 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & 950 \text{ pc} \leq z \leq 1050 \text{ pc} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.74)$$

et nous observons les solutions aux instants  $t = 10$  kyr, 30 kyr et 100 kyr.

**Diffusion homogène** Dans le premier cas, nous résolvons numériquement l'équation (2.71) en considérant un coefficient de diffusion constant et égal à  $\kappa(x) = \kappa_0 = 10^{29}$  cm<sup>2</sup>/s. Nous présentons les résultats dans la figure (2.10) pour les différentes résolutions :  $N_X = 2^8$  (en vert),  $2^{10}$  (en bleu) et  $2^{12}$  (en rouge) et comparons avec la solution analytique (en tirets noirs) qui est donnée par

$$u_a(x, t) = \frac{1}{2}u_0(x) \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x - 950 \text{ pc}}{2\sqrt{\kappa_0 t}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{1050 \text{ pc} - x}{2\sqrt{\kappa_0 t}} \right) \right]. \quad (2.75)$$

Nous observons que les solutions numériques sont très proches de la solution analytique et ce quelque soit la résolution dans la bande d'étude sélectionnée. En observant l'évolution des erreurs relatives en fonction du temps et de la taille relative des cellules, nous observons que le schéma numérique est convergent en  $\text{err}_{\text{rel}} \propto \Delta X^{-1}$  et par conséquent consistant en ce qui concerne le transport dans les milieux aux coefficient de diffusion homogène.

**Diffusion variable** Dans le second cas, nous résolvons numériquement l'équation (2.71) mais en considérant un coefficient de diffusion donné par la relation

$$D(x) = 10^{29} \left( 1 - (1 - R) \left[ \exp \left\{ -\frac{(x - 1100 \text{ pc})^2}{\sigma^2} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(x - 900 \text{ pc})^2}{\sigma^2} \right\} \right] \right) \quad (2.76)$$

où  $R = 10^{-3}$  et correspond au rapport de diminution du coefficient de diffusion et  $\sigma = 20$  pc correspond à la largeur à mi-hauteur des fonctions gaussiennes utilisées dans la forme de ce coefficient de diffusion. Cette fonction est représentée dans la sous-figure du bas de la figure (2.11) par le trait plein noir et est comparée au cas où le coefficient de diffusion est constant (tirets noirs). Nous notons dans ce cas une diminution de trois ordres de grandeur du coefficient de diffusion autour des points  $x = 900$  pc et  $1100$  pc. Les solutions sont représentées sur la première, seconde et troisième sous-figure en partant du haut pour 10, 30 et 100 kyr respectivement. En l'absence de solution analytique à un tel problème nous choisissons de comparer les solutions obtenue pour les résolutions  $N_X = 2^6$  (en bleu clair),  $2^8$  (en vert),  $2^{10}$  (en bleu) et  $2^{12}$  (en rouge) à une solution numérique associée à une résolution extrême  $2^{14}$  (en noir). Bien que les solutions numériques dans la configuration d'un coefficient de diffusion variable sont beaucoup moins précises que dans le cas homogène, on observe tout de même une convergence des solutions par le fait que l'erreur relative cumulée, en utilisant la solution de résolution  $2^{14}$  comme solution de référence, diminue à mesure que la résolution augmente. Ceci plaide en faveur d'un schéma numérique consistant. Afin d'observer les différences entre les solutions dans le cas homogène et le cas variable, nous avons aussi tracé la solution analytique obtenue dans le cas de la diffusion homogène à chaque instant en tirets noirs.

Nous observons clairement l'effet lié à réduction locale du coefficient de diffusion par le fait que la forme de heaviside de la solution initiale n'est pas brisée. Par ailleurs, dans une telle situation, il semble y avoir deux régimes de propagation différents :

- Aux instants proches de l'instant initial ( $t < 30$  kyr) le fluide n'a pas encore atteint les zones où le coefficient de diffusion est réduit et évolue exactement comme dans le cas d'un milieu homogènement diffusif.

→ Dès lors qu'une quantité non-négligeable de fluide atteint les zones où le coefficient de diffusion est réduit ( $t > 30$  kyr), sa vitesse de diffusion est réduite de trois ordres de grandeur et, en comparaison des échelles de temps de la simulation, il semble ne plus évoluer du tout alors même que le fluide au centre continue de diffuser rapidement.

C'est la raison pour laquelle nous observons entre 30 et 100 kyrs que la distribution du fluide semble figée et continue de s'aplatir au cours du temps. Notons également que plus la résolution est fine, plus la solution numérique obtenue semble s'approcher de la situation où le coefficient de diffusion est homogène. Ceci vient de l'erreur commise dans le calcul des gradients de valeur du coefficient de diffusion. Dans les configurations où les gradients de coefficient de diffusion sont importants, il est nécessaire d'adapter la résolution du problème en conséquence afin de maximiser l'effet de confinement du fluide.

### 2.3.5 Termes d'advection en énergie ( $L_{\text{adv}}^E$ )

La bande d'énergie sondée par le modèle est très grande (du GeV au PeV) et couvre un grand nombre d'ordres de grandeurs. Il n'est donc pas possible de définir une grille de calcul uniforme comme dans l'espace des positions  $z$ . La grille utilisée est logarithmique de base 10 permettant ainsi d'afficher un pas d'énergie constant à la travers la transformation  $\alpha(E) = \log_{10}(E)$ . Dans le système d'équations que nous souhaitons résoudre, l'équation d'advection en énergie est donnée par

$$\frac{\partial u(x, E, t)}{\partial t} = \frac{E}{3} \frac{\partial V_A(x, E)}{\partial x} \frac{\partial u(x, E, t)}{\partial E} \quad (2.77)$$

$$u(x, E, t = 0) = u_0(x, E) \quad (2.78)$$

où  $u_0(x, E)$  correspond à la fonction de distribution initiale de la variable  $u$ . Cette équation est résolue de manière explicite par la méthode "upwind biased" comme pour le cas de l'opérateur d'advection spatiale. Dans ce cas, la condition de courant implique

$$\Delta t < \left| \frac{3 \min(\Delta E)}{\max(E) \max(\partial V_A / \partial x)} \right|. \quad (2.79)$$

Nous observons que dans le cas où l'espace des phases des énergies est très grand, la condition CFL devient extrêmement contraignante rendant impossible toute simulation. En effet dans ce cas, le pas de temps en énergie sera très petit aux basses énergies et le maximum d'énergie sera très élevé. Un autre facteur contraignant le pas de temps est la largeur de transition de la vitesse d'Alfvén du milieu interstellaire entre deux phases, d'où la nécessité absolue de considérer des transitions douces de plusieurs pc de largeur. Afin de lever la contrainte liée à structure de la grille en énergie, il convient de réécrire le système (2.77) en termes de  $\alpha(E) = \log_{10}(E)$ . Nous obtenons

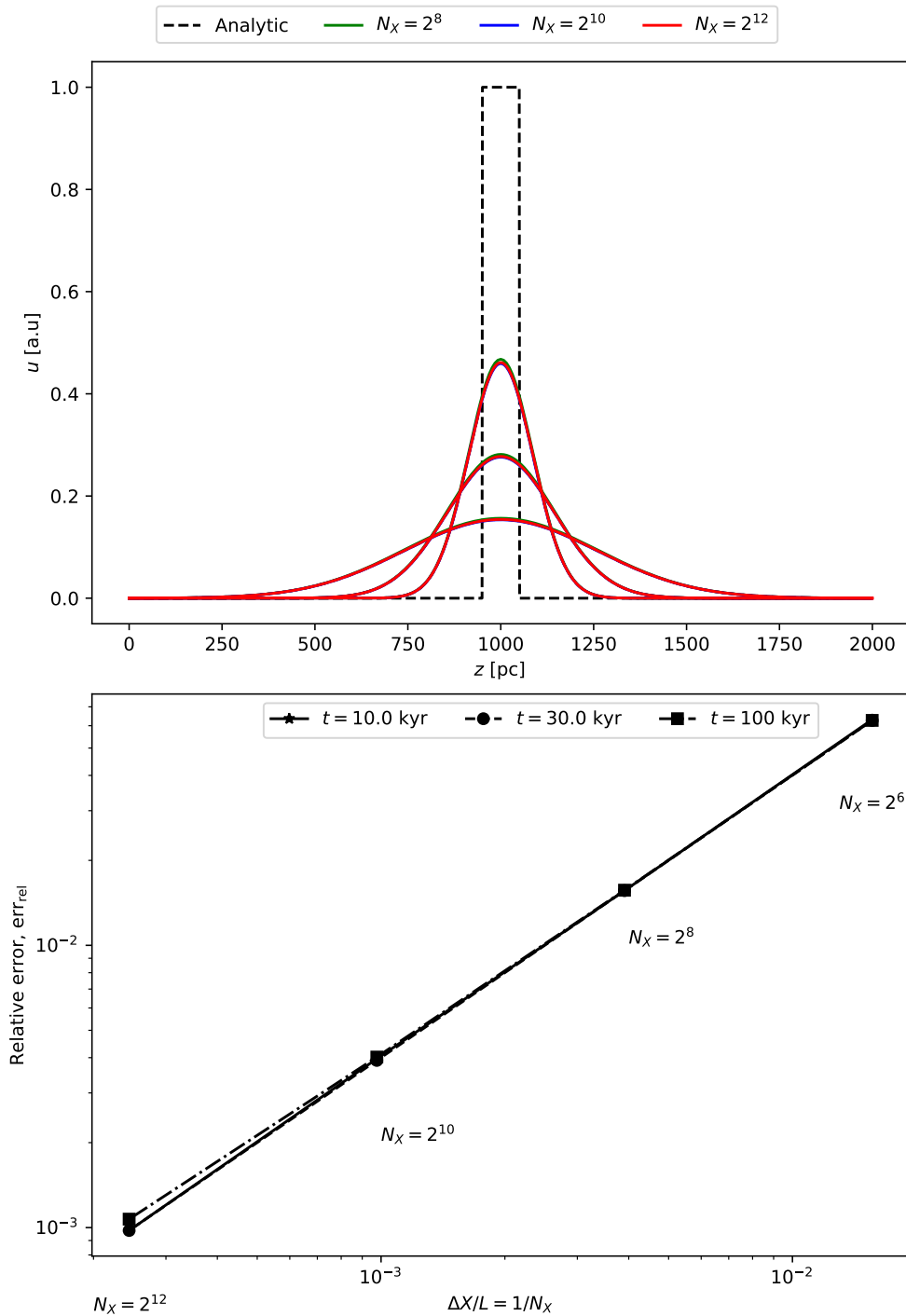


Figure 2.10: Cette figure représente l'évolution de la solution  $u(x, t)$  de l'équation de diffusion (2.71) dans le cas où le coefficient de diffusion est homogène et vaut  $\kappa_0 = 10^{29}$   $\text{cm}^2/\text{s}$  aux instants  $t = 10$  kyr, 30 kyr et 100 kyr. Différentes résolutions sont testées et représentées sur la partie haute de la figure :  $N_X = 2^8$ ,  $2^{10}$  et  $2^{12}$  en vert, bleu et rouge respectivement. Les résultats sont comparés à la solution analytique (2.75) en tirets noirs. La partie inférieure de la figure représente l'évolution de l'erreur relative cumulée en fonction de la taille relative des cellules au cours du temps.

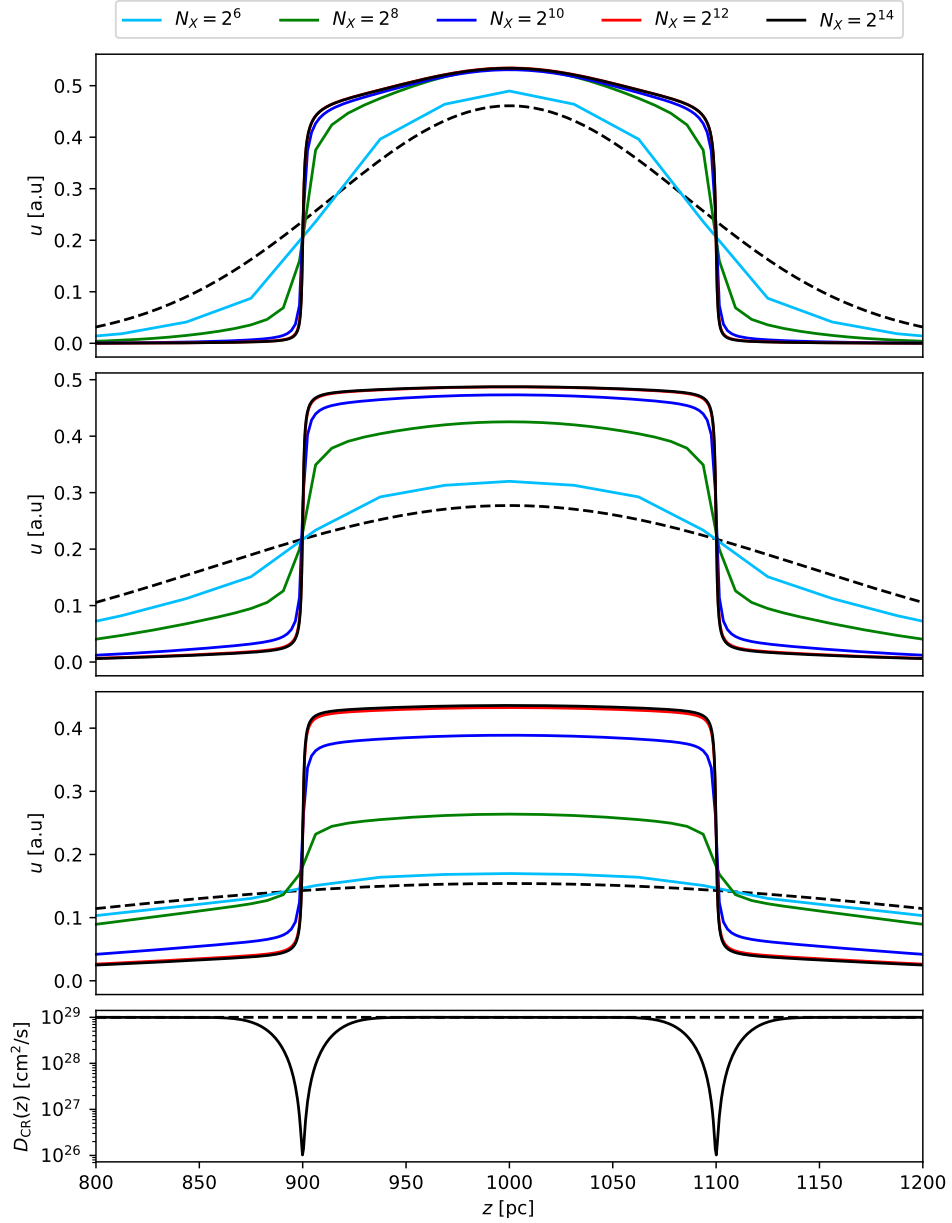


Figure 2.11: Cette figure représente l'évolution de la solution  $u(x,t)$  de l'équation de diffusion (2.71) dans le cas où le coefficient de diffusion est variable et donné par la relation (2.76) qui est représenté dans la partie inférieure de la figure par la ligne noire et est comparé au coefficient de diffusion constant représenté par la ligne discontinue noire. Dans les sous-figures du haut, du milieu et du bas sont représentées les solutions obtenues dans une telle configuration aux instants  $t = 10$  kyr,  $30$  kyr et  $100$  kyr respectivement. Sont représentées les solutions numériques aux résolutions :  $N_X = 2^6$ ,  $2^8$ ,  $2^{10}$ ,  $2^{12}$  et  $2^{14}$  en bleu clair, vert, bleu, rouge et noir respectivement. Ces solutions sont comparées à la solution analytique de diffusion homogène tracée en tirets noirs.

$$\frac{\partial u(x, \alpha, t)}{\partial t} = \frac{\partial V_A(x, \alpha)/\partial x}{3 \ln 10} \frac{\partial u(x, \alpha, t)}{\partial \alpha} \quad (2.80)$$

$$u(x, \alpha, t = 0) = u_0(x, \alpha). \quad (2.81)$$

Dans ce cas-ci, le pas en énergie est constant, la CFL est donnée par

$$\Delta t < \left| \frac{3 \ln(10) \Delta \alpha}{\max(\partial V_A / \partial x)} \right| \quad (2.82)$$

et ne dépend plus que des variations spatiales de la vitesse d'Alfvén donc des transitions entre les différentes phases. Notons tout de même que la valeur du pas en énergie, de part les propriétés de la fonction logarithme, dépend des valeurs du minimum et du maximum de l'espace des phases en énergie. Les conditions aux bords en énergie sont de type extrapolation

$$u_{i,0}^{n+1} = (u_{i,1}^{n+1})^2 / u_{i,2}^{n+1} \quad (2.83)$$

$$u_{i,N_E}^{n+1} = (u_{i,N_E-1}^{n+1})^2 / u_{i,N_E-2}^{n+1} \quad (2.84)$$

afin que l'énergie advectée depuis les populations de rayons cosmiques en bordure de grille soit éventuellement perdue suivant le signe de  $\partial V_A(x, \alpha)/\partial x$ .

Afin de confirmer la méthode de résolution mise en oeuvre, nous effectuons un test d'advection en énergie une fonction de distribution initiale donnée par

$$u_0(x, E) = \left( \frac{E}{10 \text{ GeV}} \right)^{-2.7} \quad (2.85)$$

où la vitesse  $V_A(x, E)$  est donnée par

$$V_A(x, E) = 5 \text{ pc/yr} \left( \frac{x - X_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}} \right). \quad (2.86)$$

Cette définition est totalement arbitraire. Les résultats sont présentés dans la figure (2.12) pour un espace des phases des énergies allant de 10 GeV à 10 TeV et des résolutions allant de  $N_E = 2^8 - 2^{12}$  cellules en énergie. Les résultats obtenus sont comparés à la solution analytique du problème qui est donnée par

$$u_a(x, \alpha, t) = u_0 \left( x, \alpha + \frac{\partial V_A(x, \alpha)/\partial x}{3 \ln 10} t \right). \quad (2.87)$$

Dans ce cas précis, le signe de la dérivée de la vitesse d'Alfvén est positif entraînant un gain d'énergie constant de la fonction  $u(x, E, t)$ . Nous observons sur la figure du haut que les solutions numériques sont en adéquation avec la solution analytique et ce quelque soit la résolution utilisée. La figure du bas qui présente l'évolution de la fonction d'erreur relative cumulée, telle que définie par la relation (2.67), en fonction de la taille d'une cellule d'énergie, montre bien de le schéma numérique converge linéairement. On en conclut que le schéma numérique est conforme au théorème de Lax [135].

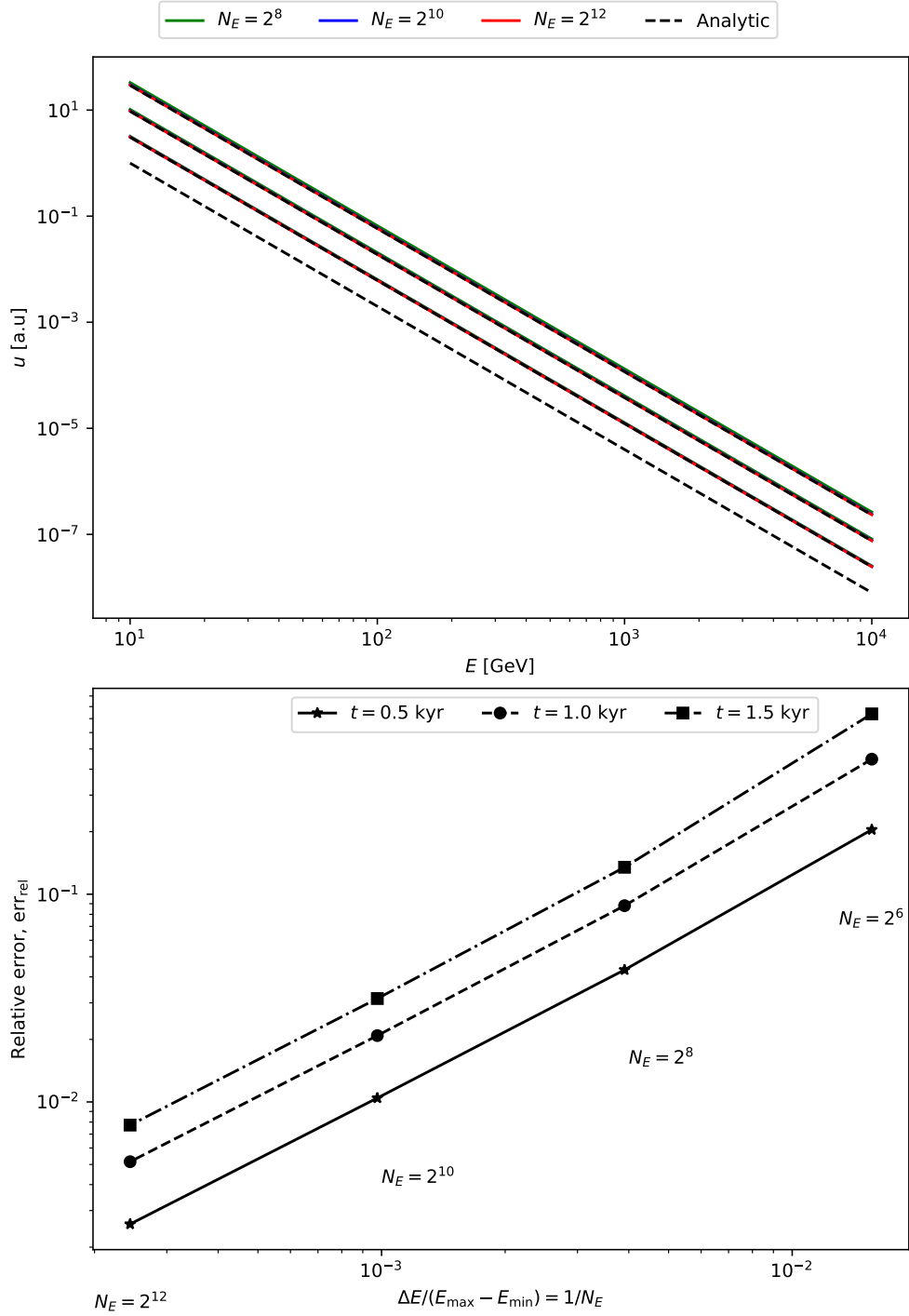


Figure 2.12: Cette figure décrit le schéma numérique d’advection en énergie d’une distribution spectrale en loi de puissance de la fonction  $u(x, E, t)$  (2.85) suivant la méthode ”upwind biased”. La figure du haut représente les solutions pour différentes résolutions en énergie  $N_E$  :  $2^8$  en vert,  $2^{10}$  en bleu,  $2^{12}$  en rouge, ainsi que la solution analytique en tirets noirs. Ces solutions sont comparées à trois instants différents : 0.5, 1.0 et 1.5 kyr. La solution analytique qui n’est pas en superposition avec les solutions numériques correspond à la distribution initiale. La figure du bas représente l’évolution de l’erreur relative cumulée en fonction de la taille relative d’une cellule d’énergie et ce pour les trois instants cités ci-dessus.

### 2.3.6 Terme de rayonnement synchrotron ( $L_{\text{sync}}$ )

Le terme de rayonnement synchrotron des électrons est de la forme

$$\frac{\partial u(E, t)}{\partial t} = -\tau_s \frac{\partial}{\partial E} (E^2 u(E, t)) + Q(E, t) \quad (2.88)$$

où

$$\tau_s = \frac{c\sigma_T B_0^2 \sin^2 \theta}{4\pi m_e^2 c^4} \quad (2.89)$$

et  $Q(E, t)$  est une éventuelle fonction d'injection. Dans les simulations incluant tous les termes de l'équation de transport, ce terme source est remplacé par le déplacement spatial d'électrons et n'est donc pas nécessaire. L'équation du rayonnement synchrotron (2.89) peut se réécrire, en utilisant la méthode de décomposition des solveurs, comme le système suivant

$$\frac{\partial u(E, t)}{\partial t} = -\tau_s E^2 \frac{\partial u(E, t)}{\partial E} \quad (2.90)$$

$$\frac{\partial u(E, t)}{\partial t} = -2\tau_s E u(E, t) \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial u(E, t)}{\partial t} = Q(E, t). \quad (2.92)$$

Tandis que les équations (2.91) et (2.92) ne sont pas contraintes par une condition CFL car considérées comme des termes sources, l'équation (2.90) est une équation d'advection en énergie dont la contrainte sur le pas de temps pour un solveur explicite d'ordre 1 est donnée par

$$\Delta t < \left| \frac{\min(\Delta E)}{\max(E^2)\tau_s} \right|. \quad (2.93)$$

Comme pour le cas de l'advection en énergie, la contrainte sur les extrema de l'espace des phases des énergie est extrêmement forte. En appliquant le changement de variable  $\alpha(E) = \log_{10}(E^2)$  l'équation (2.90) devient

$$\frac{\partial u(\alpha, t)}{\partial t} = -\frac{2\tau_s}{\ln 10} 10^{\alpha/2} \frac{\partial u(\alpha, t)}{\partial \alpha} \quad (2.94)$$

avec pour contrainte sur le courant

$$\Delta t < \left| \frac{\Delta \alpha \ln 10}{\tau_s \max(10^{\alpha/2})} \right|. \quad (2.95)$$

Bien que la contrainte sur le pas de temps soit allégée, elle est encore dépendante de l'énergie maximale de la distribution  $u(E, t)$ <sup>12</sup>. Enfin, comme pour le cas de l'advection

<sup>12</sup>Il est prévu à l'avenir que l'équation (2.94) soit résolue de manière implicite permettant ainsi de lever la contrainte sur le pas de temps.



en énergie, les conditions aux bords sont extrapolantes afin que les populations d'électrons sur les extrema d'énergie puissent perdre leur énergie.

Afin de vérifier de la pertinence d'un tel schéma numérique, nous choisissons de résoudre le système (2.90-2.92) en considérant une distribution initiale de la fonction  $u(E, t)$  donnée par

$$u_0(E) = Q_0 \left( \frac{E}{10 \text{ GeV}} \right)^{-p} \quad (2.96)$$

où  $Q_0 = 0.1$  correspond à une valeur de normalisation arbitraire de la distribution d'électrons et  $p \in \{0.5, 1.5, 2.5, 3.5\}$  correspond à l'indice spectral de la distribution en énergie des électrons. Nous laissons ensuite cette distribution de RCs évoluer dans un milieu homogène baigné par un champ magnétique de  $59 \mu\text{G}$  afin de favoriser les pertes synchrotron sans aucune source d'électrons supplémentaire ie.  $Q(E, t) = 0$ . Les résultats sont présentés dans la figure (2.13) à trois instants différents depuis l'instant initial : 0.5 kyr, 1.0 kyr et 1.5 kyr (de droite à gauche sur chaque figure), et ce pour différentes résolutions en énergie :  $N_E = 2^8, 2^{10}, 2^{12}$  respectivement en vert, bleu et rouge. De haut en bas sont testées différentes valeurs de l'indice spectral de la distribution initiale des électrons. Conformément au comportement attendu de la solution analytique de l'équation (2.88) qui est donnée par  $u(E, t) = Q_0(E/10\text{GeV})^{-p}(1 - \tau_s Et)^{p-2}$ , nous observons deux comportements différents suivant que la valeur de l'indice spectral  $p$  est inférieure ou supérieure à 2.

- Lorsque  $p > 2$ , on note que les pertes d'énergie des électrons se font d'abord par les hautes énergies et s'étendent aux plus basses énergies à mesure que le temps avance. Nous remarquons également que plus la résolution en énergie de la distribution des électrons est importante, plus la solution numérique se rapproche de la solution analytique. Dans le régime  $p > 2$  le solveur synchrotron mis en place dans le code CR SPECTRA semble consistant.
- Lorsque  $p < 2$ , on remarque une accumulation de rayons cosmiques aux énergies proche de la valeur  $E = 1/\tau_s t$  à laquelle la solution  $u(E, t)$  diverge. Au delà de cette énergie critique, la concentration d'électrons est nulle. Ce comportement est difficile à modéliser et à anticiper numériquement. La méthode permettant de contenir la divergence de la solution  $u(E, t)$  consiste à fixer une valeur de concentration  $u_c$  critique au delà de laquelle la vitesse d'advection de l'équation (2.90) change de signe et est multipliée par un facteur important (par exemple 100). Ce processus permet d'éviter la génération de concentrations irréalistes d'électrons. Bien que basée sur des observations purement numériques et non théoriques, cette méthode conduit à des solutions numériques relativement proches des solutions analytiques associées. On notera tout de même dans le cas  $p = 1.5$  et  $N_E = 2^8$  que les solutions numériques sont bruitées, signe que la condition CFL initialement imposée n'est plus respectée à cause du changement de valeur absolue de la vitesse

d'advection dans l'équation (2.90). Bien que fonctionnelle dans certaines situations, cette méthode ne peut être qualifiée de consistante pour  $p < 2$  et nécessite un développement plus précis.

### 2.3.7 Termes de source ( $L_{\text{src}}, L_{\text{gd}}$ )

De manière générale, les équations associées aux termes sources sont de la forme

$$\frac{\partial u(x, E, t)}{\partial t} = Q(x, E, t) \quad (2.97)$$

où  $Q(x, E, t)$  est éventuellement fonction de  $u(x, E, t)$ . La forme discrète approximée au premier ordre de cette équation est la suivante

$$u_{i,e}^{n+1} = u_{i,e}^n + Q_{i,e} \Delta t. \quad (2.98)$$

Cependant, dans les cas où le second terme est de la forme  $u(x, E, t)Q(x, E, t)$ , la forme discrète de l'équation (2.97) peut s'écrire

$$u_{i,e}^{n+1} = u_{i,e}^n \exp(Q_{i,e} \Delta t) \quad (2.99)$$

qui constitue une solution exacte. Lorsque c'est possible, les solutions des équations aux termes sources sont résolues de manière exacte afin de minimiser l'erreur numérique globale. Lorsque le second terme est de la forme  $Q(x, E, t)$  indépendant de  $u(x, E, t)$ , l'équation (2.98) représente la solution analytique du problème et le résultat est donc localement exact.

L'ensemble des termes sources résolus par l'opérateur  $L_{\text{src}}$  le sont de manière exacte en utilisant les principes cités ci-dessus. En revanche les termes sources résolus par l'opérateur  $L_{\text{gd}}$ , associés au rapport entre le taux d'injection de turbulence et le taux d'amortissement, sont résolus de manière pseudo implicite. En effet, l'équation associée à l'équilibre entre l'injection et l'amortissement de la turbulence est donnée par

$$\frac{\partial I_{\pm}}{\partial t} = \Gamma_g^{\pm} I_{\pm} - \Gamma_d^{\pm} (I_{\pm} - I_{\pm}^0). \quad (2.100)$$

Le taux de croissance des ondes peut s'approximer par

$$\Gamma_g^{\pm} = \begin{cases} \pm \frac{f_{\text{sat}}(I_{\pm})}{2W_0(I_+ + I_-)} V_A^{\pm} \frac{\partial P_p}{\partial z} & V_A^{\pm} \frac{\partial P_p}{\partial z} < 0 \\ 0 & V_A^{\pm} \frac{\partial P_p}{\partial z} > 0 \end{cases} \quad (2.101)$$

$$\approx \begin{cases} \pm \frac{f_{\text{sat}}(I_{\pm})}{2W_0 I_{\pm}} V_A^{\pm} \frac{\partial P_p}{\partial z} & V_A^{\pm} \frac{\partial P_p}{\partial z} < 0 \\ 0 & V_A^{\pm} \frac{\partial P_p}{\partial z} > 0 \end{cases} \quad (2.102)$$

en considérant que le milieu est soit fortement dominé par les modes en avant ( $I_+$ ) soit par les modes en arrière ( $I_-$ ), ce qui est le cas d'une part car les deux modes peuvent

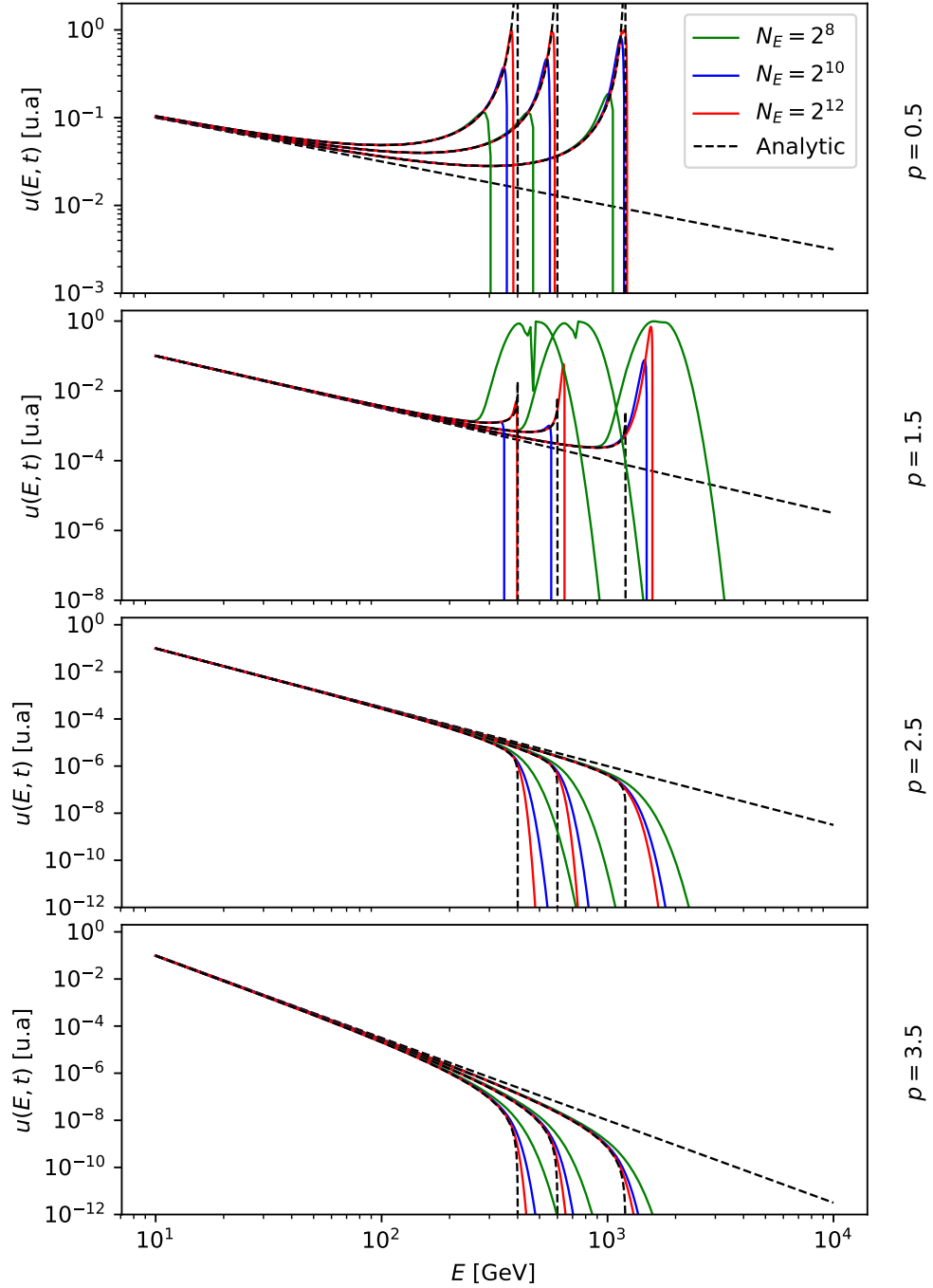


Figure 2.13: Cette figure décrit le schéma numérique mis en oeuvre pour le terme synchrotron de l'équation de transport des électrons et ce pour différents indices spectraux de la distribution initiale en énergie  $u(E, 0) \propto E^{-p}$  où respectivement  $p = 0.5, 1.5, 2.5, 3.5$  de haut en bas. Trois instants de mesure sont représentés sur chaque figure :  $t = 0.5, 1.0, 1.5$  kyr. Tandis que les solutions numériques aux différentes résolutions  $N_E = 2^8, 2^{10}, 2^{12}$  sont respectivement représentées par les lignes continues verte, bleue et rouge, la solution analytique de l'équation de transport (2.88) qui est donnée par  $u(E, t) = Q_0(E/10\text{GeV})^{-p}(1 - \tau_s Et)^{p-2}$  est représentée par les lignes noires discontinues.

mutuellement s'annuler et d'autre part car la présence de ces modes est intimement liée au gradient de pression  $\partial P_p / \partial z$  qui est soit positif soit négatif. Le produit  $C_g^\pm = \Gamma_g^\pm I_\pm$  est alors constant dans la mesure où le niveau de turbulence est faible ( $f_{\text{sat}} \rightarrow 1$ ) ce qui sera systématiquement le cas lorsqu'on choisit de faire saturer la turbulence à une valeur inférieure à  $I_c = 1$ . Nous rappelons tout de même que ce terme n'illustre pas directement un phénomène physique de saturation du champ turbulent et qu'il est nécessaire de considérer l'effet de l'instabilité de Bell lorsque les niveaux de turbulence sortent du régime quasi-linéaire auxquels cas les gradients de pression de RCs sont importants. Compte tenu des approximations faites ci-dessus, il est possible de discrétiser l'équation (2.100) d'une manière implicite

$$I_\pm^{n+1} = I_\pm^n + \Delta t [C_g^\pm - \Gamma_d^\pm (I_\pm^{n+1} - I_\pm^0)] \quad (2.103)$$

dont la pseudo-solution exacte<sup>13</sup> s'écrit

$$I_\pm^{n+1} = \frac{I_\pm^n + \Delta t [C_g^\pm + \Gamma_d^\pm I_\pm^0]}{1 + \Delta t \Gamma_g} \quad (2.104)$$

Cette méthode procure un avantage immense sur la méthode de calcul explicite qui induirait une contrainte supplémentaire sur le pas de temps qui s'écrit

$$\Delta t < \frac{1}{\max(\Gamma_d)} \quad (2.105)$$

et serait limité à 0.3 yr dans une phase DiM et même 0.003 yr dans une phase DeC.

### 2.3.8 Modèles d'injection de rayons cosmiques

Cette section discute de la manière dont les rayons cosmiques sont numériquement injectés dans la simulation en s'appuyant sur les modèles théoriques proposés dans la section (2.2.4). Comme nous l'avons vu, les rayons cosmiques sont injectés en suivant une loi d'injection du type

$$t_{\text{inj}}(E) = t_{\text{esc}}(E) \quad (2.106)$$

où  $t_{\text{esc}}(E)$  est défini pour les protons et les électrons. Le terme source d'injection est construit de la manière suivante

$$Q_{\text{inj}}^{\text{cr}}(x, E, t) = P_{\text{cr}}^0(E) F_{\text{inj}}(t) \theta(x - R_{\text{sh}}(t)) \quad (2.107)$$

où  $P_{\text{cr}}^0(E)$  correspond à la valeur totale de la pression injectée dans la simulation et est définie par la relation (2.35). La fonction  $\theta(x - R_{\text{sh}}(t))$  est donnée par

---

<sup>13</sup>Le terme de *pseudo-solution exacte* est utilisé pour signifier que le terme  $C_g^\pm = \Gamma_g^\pm I_\pm$  n'est pas forcément constant et peut dépendre des niveaux de turbulence  $I_\pm$  lorsque ces derniers deviennent importants. Le cas échéant, la solution est approximée.

$$\theta(x - R_{\text{sh}}(t)) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{R_{\text{sh}} - \bar{x}}{\sigma_r} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{R_{\text{sh}} + \bar{x}}{\sigma_r} \right) \right] \quad (2.108)$$

et définit la forme géométrique de l'injection du rayonnement cosmique en fonction du rayon du choc,  $\bar{x} = x - x_c$  où  $x_c$  correspond à la position du centre de l'accélérateur. Cette fonction décrit une forme proche de la fonction de Heaviside centrée en 0 et de largeur  $2R_{\text{sh}}$  à la différence près que les bords de la fonction sont adoucis par le paramètre  $\sigma_r = R_{\text{sh}}/r$  où  $r = 0.01$  correspond au rapport entre le rayon du choc et la taille de la zone de transition. Enfin,  $F_{\text{inj}}(t)$  est donnée par

$$F_{\text{inj}}(t) = C \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{t - t_{\text{inj}}(E)}{\sigma_{\text{inj}}(E)} \right)^2 \right\} \quad (2.109)$$

et permet d'injecter les rayons cosmiques à une énergie donnée de manière continue mais dont le maximum d'injection pour la population d'énergie  $E$  se trouve à  $t = t_{\text{inj}}(E)$ . La largeur à mi-hauteur de la fonction d'injection est donnée par

$$\sigma_{\text{inj}}(E) = t_{\text{inj}}(E)/r_{\text{inj}} \quad (2.110)$$

où  $r_{\text{inj}} = 100$  correspond au rapport de temps entre l'instant du maximum d'échappement de la population d'énergie  $E$  et la largeur à mi-hauteur de la fonction d'injection  $F_{\text{inj}}$  pour cette même population. La constante  $C$  joue un rôle extrêmement important car elle assure que la quantité totale de rayonnement cosmique de population d'énergie  $E$  injectée soit égale à  $P_{\text{cr}}^0(E)$ . Elle est calculée en intégrant  $F_{\text{inj}}(t)$  dans le temps de manière à ce que la somme vaille 1.

## 2.4 Résultats et discussion

### 2.4.1 Résumé des résultats de Brahim et al. (2020)

Cette sous-section relate succinctement le travail que j'ai réalisé et publié au début de l'année 2020 concernant la propagation du rayonnement cosmique dans les environnements de restes de supernova faiblement ionisés. La publication est disponible dans l'annexe (A.9).

#### 2.4.1.1 Contexte et méthodes

L'étude de la diffusion non-linéaire du rayonnement cosmique échappé des restes de supernova dans les milieux partiellement ionisés fait suite aux études de Malkov et al. (2013) [148] qui propose une solution analytique de l'échappement collectif auto-régulé des rayons cosmiques des accélérateurs (dont il illustre les principes dans sa figure 6). Cette solution analytique (voir sa figure 5) est en particulier basée sur l'hypothèse géométrique suivante : le rayonnement cosmique est émis par l'accélérateur le long des lignes de champ moyen, lesquelles sont cohérentes sur une échelle spatiale et un temps grand devant le temps de vie de l'accélérateur (ou d'accélération du rayonnement

cosmique, voir sa figure 1). Il introduit la notion de nuage de rayons cosmique dont la symétrie est cylindrique autour des lignes de champ moyen et propose un modèle phénoménologique de l'échappement des rayons cosmiques de la source. Son étude est reprise par Nava et al. (2016) [160] avec une approche numérique permettant de sonder plus précisément les différents régimes de propagation du rayonnement cosmique et ce dans les phases WIM et WNM (voir sa figure 5). Cette étude est poursuivie par Nava et al. (2019) [161] en appliquant le même modèle numérique au cas de l'échappement dans les phases ionisées. Dans ce cadre, nous avons appliqué le modèle numérique de transport ainsi développé au cas des phases faiblement ionisées du milieu interstellaire : WNM, CNM et DiM.

Ce travail consiste à étudier la manière dont le rayonnement cosmique est injecté dans le milieu interstellaire par les restes de supernova, comment il se propage dans les phases faiblement ionisées du milieu interstellaire, comment il modifie les propriétés turbulentes du plasma dans l'environnement des restes de supernova et enfin comment, à travers la génération de turbulence, le transport du rayonnement cosmique se voit altéré par rapport aux solutions de transport observationnellement inférées à partir des données globales du milieu interstellaire local. Dans ce travail, nous étudions également l'effet de la présence d'une transition de phase du milieu interstellaire sur la propagation du rayonnement cosmique.

Les rayons cosmiques sont injectés dans la simulation à l'aide du modèle d'évolution du nuage de rayons cosmique (CRC, voir paragraphe 2.2.4) et les solutions de propagation sont calculées en résolvant numériquement le système d'équations (2.39-2.39) de transport du fluide de rayons cosmiques et du fluide d'ondes d'Alfvén anisotropes auto-générées. Le milieu interstellaire et l'interaction des modes auto-générés avec le plasma jouent un rôle très important dans le transport du rayonnement cosmique, les phases WNM, CNM et DiM sont donc caractérisées et en particulier, les taux d'amortissement des modes d'Alfvén via collisions ion-neutre et par interactions non-linéaires avec la turbulence grande échelle sont calculés. Le taux de génération des perturbations magnétiques anisotropes est donné par la relation (2.18) où la fonction de saturation vaut  $f_{\text{sat}}(I_+) = 1$  et seules les ondes se propageant en avant sont considérées. L'équilibre taux de croissance, taux d'amortissement des ondes est la pièce maitresse de la dynamique des rayons cosmiques dans les environnements de restes de supernova et est étudié tout au long de ce travail. Dans les paragraphes suivants sont résumés les résultats de cette étude.

#### 2.4.1.2 Propagation des RCs dans les environnements de SNRs

Nous avons étudié l'échappement et la propagation des rayons cosmiques dans trois phases faiblement ionisées du milieu interstellaire : WNM, CNM et DiM.

Concernant l'échappement, les résultats tendent à montrer que les rayons cosmiques sont émis beaucoup plus tôt dans les phases CNM et DiM que dans la phase WNM :

$t_{\text{esc}}(E = 10 \text{ GeV}) \approx 40 \text{ kyrs}$  dans le WNM et 10 respectivement, 2 kyrs dans le CNM et le DiM (voir figure (2.5)). Cet effet est une conséquence directe du modèle d'expansion du choc du reste de supernovae dont la description est donnée dans le paragraphe (2.2.4). La vitesse d'expansion du choc évolue comme l'inverse de la densité du milieu ambiant, c'est à dire plus rapidement dans le WNM et plus lentement dans le DiM. La solution d'échappement des rayons cosmiques issue du modèle CRC implique donc un échappement plus tôt, à un rayon de choc plus faible dans le DiM ( $R_{\text{sh}}(E = 10 \text{ GeV}) \approx 2 \text{ pc}$ ) que dans le CNM ( $\approx 6 \text{ pc}$ ) et que dans le WNM ( $\approx 30 \text{ pc}$ ). Nous observons également qu'au delà des bandes de propagation interdites la courbe du temps d'injection est modifiée et possède une pente d'abord adoucie, plus importante ensuite. Le premier effet est la conséquence du changement de régime d'amortissement des ondes via collisions ion-neutres (voir figure 2.2). Aux hautes énergies, les ions et les neutres du plasma suivent des mouvements corrélés et le taux d'amortissement des ondes magnétiques évolue en  $\Gamma_{\text{IN}} \propto E^{-2}$ . Du fait de cette décroissance rapide, les rayons cosmiques sont confinés plus longtemps et s'échappent plus tard que dans le cas où le coefficient de diffusion est uniquement défini par les effets de turbulence à grande échelle. Le second effet lié à l'augmentation de la pente est dû à la présence de l'amortissement turbulent  $\Gamma_{\text{L16}}$  qui commence à jouer un rôle important et modifie en conséquence la quantité de modes produits et permet donc un échappement plus rapide.

Ce résultat s'illustre très bien à travers les solutions d'échappement des rayons cosmiques dans les différentes phases (WNM, CNM et DiM) et aux différentes énergies (10 GeV - 10 TeV) telles que présentées par les figures A.1 à A.9 de la publication. Tandis que dans le WNM le coefficient de diffusion de la population de rayons cosmiques à 10 GeV décroît au maximum de deux ordres de grandeur et se relaxe au bout de 100 kyrs, dans le DiM, le gradient de pression des rayons cosmiques à 10 TeV est si important que le coefficient de diffusion est diminué de 3 ordres de grandeur pour une durée supérieure à 100 kyrs, sortant même du régime de transport quasi-linéaire des rayons cosmiques ( $\delta B/B_0 \approx 0.8$ ). Par ailleurs, nous observons dans ce cas que les solutions de transport non-linéaire proposées par Malkov et al. (2013) [148] sont reproduites. Dans toutes les simulations, nous observons une différence non-négligeable entre les solutions numériques et les solutions analytiques témoin de la propagation en l'absence de génération de turbulence. Cependant, nous notons qu'aux temps longs, la solution numérique finit toujours par rejoindre la solution analytique. Cet effet est une conséquence de la relaxation du coefficient de diffusion auto-généré vers la valeur de diffusion du fond turbulent. Notons également que l'amplitude de la diminution du coefficient de diffusion auto-généré est directement dépendant de la valeur du gradient de pression des rayons cosmiques exercé sur le plasma.

Dans les phases partiellement ionisées, nous montrons que l'entrée dans la phase d'expansion radiative du choc se fait relativement tôt :  $\sim 20 \text{ kyrs}$  dans le WNM,  $\sim 2 \text{ kyrs}$  dans le CNM et  $\sim 0.4 \text{ kyr}$  dans le DiM, et le modèle CRC n'est plus valide car les conditions d'échappement du rayonnement cosmique changent. Nous avons donc étudié

deux modèles d'échappement supplémentaire adaptés au cas des phases radiatives décrits dans le paragraphe (2.2.4). Suivant le choix du modèle, le niveau de turbulence auto-générée est augmenté ou réduit.

Nous avons montré que les propriétés turbulente des milieux environnant de restes de supernova peuvent être modifiées. Cependant, nous n'avons tenu compte que de l'effet de la génération des ondes par l'instabilité de streaming résonante, ce qui minimise la diffusion perpendiculaire aux lignes de champ moyen. La propagation perpendiculaire joue dans le sens d'un moindre confinement car la pression des rayons cosmiques est diluée. Dans ce cadre nous avons étudié le cas d'une éventuelle diffusion perpendiculaire aux lignes de champ où le coefficient de diffusion est donné par  $\kappa_{\perp} = I^2 \kappa_{\parallel}$  avec pour objectif de diluer la valeur de la pression du rayonnement cosmique. Cette étude n'a révélé aucun effet de diffusion perpendiculaire car le coefficient de diffusion perpendiculaire est bien trop faible comparé au coefficient de diffusion parallèle.

### 2.4.1.3 Temps de résidence et grammage

Afin d'étudier plus en profondeur l'effet de confinement des rayons cosmiques, nous avons calculé le temps de résidence ainsi que le grammage des rayons cosmiques dans les environnements (WNM, CNM et DiM) de restes de supernova (voir section 2.2.6 et figure 3 dans la publication). Nous avons observé que le temps de résidence dépend fortement du régime d'amortissement des perturbations auto-générées. En effet, pour des énergies plus basses que la bande de propagation interdite, le temps de résidence suit une loi correspondant à la diffusion avec un coefficient de diffusion ambiant ( $\tau_{\text{res}} \propto E^{-0.5}$ ). Au delà de la bande interdite, la courbe est aplatie avant de croître autour de 10 TeV. Ce résultat est conséquence du même effet que celui qui dirige l'injection des rayons cosmiques dans les phases denses. Juste après la bande interdite, les ondes sont très faiblement amorties, et confinent donc mieux les rayons cosmiques. A très haute énergie, le temps de résidence se met à augmenter alors même que l'amortissement turbulent  $\Gamma_{L16}$  commence à jouer un rôle important ce qui peut sembler contradictoire. L'effet observé est la conséquence du fait que les solutions de pression sont intégrées dans le temps (par définition du temps de résidence) et que les solutions de pression à haute énergie semblent converger beaucoup plus lentement vers les solutions particule-test que les solutions à basse énergie. Il y a tout de même deux limitations à cela : nous avons vu que dans certains cas les solutions de diffusion dépassent les contraintes imposées par la théorie du transport quasi-linéaire, d'autre part, la figure présente un bruit numérique à haute énergie et nécessite d'être re-travaillée de manière plus précise. Enfin il est important de noter que le grammage est dépendant de la densité du milieu dans lequel le rayonnement cosmique se propage. La combinaison de l'effet de confinement des rayons cosmiques et un milieu dense peut tout à fait constituer une observable dans le spectre des émissions  $\gamma$  des nuages moléculaires afin de vérifier la validité du modèle.



#### 2.4.1.4 Cas de propagation dans un milieu multiphasé

Nous avons choisi dans cette étude d'aller plus loin et d'appliquer ce modèle au cas d'un milieu multiphase. L'objectif est multiple : dans premier temps nous souhaitons nous éloigner des simulations qui modélisent l'expansion d'un choc de supernova dans un milieu froid et dense car moins probable du fait du facteur de remplissage en volume de ces phases dans la galaxie. Pour être réaliste, nous devrions aussi considérer la présence d'une région HII autour de l'accélérateur. Dans cette étude, nous considérons que le reste s'étend dans une phase WNM et suggérons que les rayons cosmiques se propagent dans les phases CNM et DiM. Dans un second temps nous souhaitons vérifier si la présence d'une phase froide dans un milieu homogène peut affecter la solution de propagation à long terme du rayonnement cosmique. Enfin, il est intéressant de comprendre ce qu'il se passe pour le rayonnement cosmique aux interfaces entre les différentes phases du milieu interstellaire et surtout au niveau des nuages moléculaires.

Dans ce cadre, nous avons réalisé des simulations de propagation des rayons cosmiques de 10 GeV dans les successions de phases suivantes : WNM-CNM-WNM et WNM-CNM-DiM-CNM-WNM. Les rayons cosmiques de 10 GeV sont émis dans le WNM et traversent les différentes phases suggérées. Les solutions de propagation sont représentées dans la figure 4 de la publication et montrent clairement un effet à long terme sur la distribution de pression du rayonnement cosmique. En particulier, il semblerait qu'à la première interface WNM-CNM les rayons cosmiques soient "aspirés" dans la phase CNM de telle manière qu'une avance de propagation est induite aux temps longs. Cet effet, bien que faible, est observable à travers le temps de résidence (figure 5 de la publication). Les coefficients de diffusion des rayons cosmiques sont plus importants aux interfaces et sont conséquence du fait que la vitesse d'Alfvén dans le CNM est plus faible que celle dans le WNM. En effet, cette vitesse intervient dans l'expression du taux de croissance des ondes  $\Gamma_g \propto V_A$  et par conséquent, à gradient de pression égal entre le WNM et le CNM, moins d'ondes sont produites dans le CNM et le rayonnement cosmique diffuse plus vite dans le CNM que le WNM. En revanche, à l'interface CNM-DiM, les effets sont négligeables malgré les différences de vitesse d'Alfvén.

Bien qu'utile pour comprendre le transport aux interfaces, cette étude est cependant limitée à la population de rayons cosmiques de 10 GeV car le système d'équations utilisé est incomplet et devrait faire intervenir les termes de pertes adiabatiques liées à la variation de la vitesse d'Alfvén aux interfaces tels que décrite par le système complet d'équations (2.13). A 10 GeV cette variation reste faible d'une phase à l'autre, ce qui n'est plus le cas aux hautes énergies. Une étude dans l'espace des énergie est donc nécessaire et motive l'ensemble du travail réalisé dans ce chapitre.

#### 2.4.1.5 Limitations et conclusion

Dans cette étude nous avons montré que, d'après notre modèle d'injection et de transport, les rayons cosmiques peuvent impacter de manière notable les propriétés turbulentes du milieu interstellaire et ce en particulier dans les phases denses, et autrement en

présence d’interfaces. Le grammage est à la fois un excellent indicateur du niveau de confinement des rayons cosmiques mais peut aussi jouer le rôle de signature observationnelle du modèle présenté. Il est donc nécessaire de construire une expérience numérique qui pourrait reproduire le spectre d’émission  $\gamma$  de nuages moléculaires dans l’environnement d’un reste de supernova et de comparer les résultats avec les observations afin d’en tirer des conclusions sur le modèle. Ceci est pertinent dans le cadre du développement de l’expérience CTA (Cerenkov Telescope Array)<sup>14</sup>

Il est cependant évident que ce modèle d’échappement et de transport nécessite des améliorations. Etudier le problème dans l’espace des énergie en ajoutant des termes de pertes adiabatiques. Il est nécessaire de re-définir le taux de croissance des ondes afin qu’il soit adapté au cas où le niveau de turbulence auto-généré devient important (ce que j’ai fait). Il peut également être intéressant de définir un modèle d’échappement pour les SNe de type core collapse. Enfin, une extension du problème en deux dimensions semble nécessaire pour se défaire de l’approximation du tube de flux et noter les effets de transport perpendiculaire dans le cas où les niveaux de turbulence sont importants. Ce dernier effort pourrait permettre de réaliser des simulations bien plus réalistes, dont les conditions initiales pourraient être basées sur des observation du milieu intersellaire.

### 2.4.2 Tests fiduciaux avec le code CR SPECTRA

Dans cette section, je présente des tests d’échappement et de propagation des rayons cosmiques dans le milieu interstellaire réalisés avec le code CR SPECTRA. L’objectif de ces tests est d’une part de montrer que la combinaison des différents modèles présentés dans la section (2.2) et les méthodes numériques présentées dans la section (2.3) est cohérente et permet de faire une étude poussée de la problématique de l’échappement et de la propagation des rayons cosmiques dans le milieu interstellaire. La quantité de paramètres libres est très importante et laisse la possibilité d’effectuer de nombreuses études en plus de celle présentée dans cette section. Comme pour n’importe quel code numérique de simulation d’un phénomène physique, une approche standard du problème consiste à faire un grand nombre d’allers-retours entre les paramètres des modèles, les résultats des simulations, et les autres études de problématiques similaires ou connexes, ceci afin de contraindre les modèles implémentés dans le code. Aucun résultat d’expérience dans ce travail n’est comparé à d’autres études. Les paramètres ont été choisis arbitrairement, ou bien à l’aide de références bibliographiques ce qui justifie l’aspect fiducial de ce travail.

Cependant, ce travail s’inscrit dans la continuité de ma publication Brahim et al. (2020) [22] et cherche à répondre à certaines des problématiques soulevées dans le paragraphe (2.4.1.5). Dans un premier temps, j’étudie l’échappement et la propagation des rayons cosmiques dans un milieu interstellaire multiphasique. L’objectif est de comparer les propriétés de transport des rayons cosmiques dans un milieu inhomogène. Les configurations du milieu interstellaire sont exactement les mêmes que dans mon travail Brahim

<sup>14</sup>CTA (Cerenkov Telescope Array : <https://www.cta-observatory.org/>)

et al. (2020) [22] section 4.3 à la différence que cette fois-ci la dépendance en énergie du problème est prise en compte. L'effet de la dépendance en énergie dans un milieu multiphasique est ensuite étudié en comparant une simulation avec et sans les termes de dépendance en énergie. Enfin, parce que les propriétés de la turbulence à grande échelle varient en fonction des propriétés du milieu interstellaire, j'étudie l'échappement et la propagation du rayonnement cosmique dans un milieu intersellaire multiphasique avec un coefficient de diffusion de la turbulence de fond qui dépend de la phase interstellaire (voir paragraphe 2.2.3).

Pour cela j'utilise une boîte de simulation (unidimensionnelle) de taille  $L = 2000$  pc et de résolution spatiale  $N_X = 2^{11} = 2048$  et de résolution en énergie  $N_E = 2^7 = 128$ . La grille spatiale est cartésienne tandis que la grille en énergie est logarithmique de base 10. Le pas d'espace est donné par  $\Delta X \approx 0.97$  pc. Le spectre d'énergies sondées va de  $E_{\min} = 1$  GeV à  $E_{\max} = 50$  TeV. La source de rayonnement cosmique est placée au centre, à la position  $z_{\text{SNR}} = 1000$  pc. Quelque soit la configuration de la simulation, je considère l'ensemble des modes d'amortissement des ondes d'Alfvén auto-générées : amortissement par collisions ion-neutre  $\Gamma_{\text{IN}}$ , amortissement turbulent  $\Gamma_{\text{L16}}$  et amortissement non-linéaire de Landau  $\Gamma_{\text{NLLD}}$ . La pression du fond diffus de protons d'énergie 1 GeV est de  $1 \text{ eV/cm}^3$  tandis que la pression du fond diffus des électrons d'énergie 1 GeV est  $10^2$  fois inférieure. Les distributions d'énergie de protons et d'électrons suprathermiques dans le plasma avant injection des rayons cosmiques sont données par

$$P_{\text{p,e}}(E) = P_{\text{p,e}}(E = 1 \text{ GeV}) \left( \frac{E}{1 \text{ GeV}} \right)^{-2.7, -3.1}. \quad (2.111)$$

Trois configurations de milieu interstellaire sont présentées dans la table (2.3). La configuration **W** contient une phase WNM (désignée par un fond blanc) unique de 0 pc à 2000 pc, les limites absolues de la boîte de simulation. La configuration **WC** contient une succession de phases WNM et CNM (désignée par un fond jaune clair) : La source de rayonnement cosmique se trouve au centre d'une phase WNM de taille 100 pc. Cette phase est symétriquement entourée par deux phases CNM de largeur 80 pc tandis que le reste de la boîte de simulation est composée de WNM. La configuration **WCD** est la même que la configuration **WC** au détail près qu'au centre des phases CNM se trouve une phase DiM (désignée par un fond orangé) de largeur 20 pc. Chaque phase du milieu interstellaire possède ses propriétés physiques : la vitesse d'Alfvén dans le milieu, les taux d'amortissements des ondes auto-générées, température, densité ... Afin d'éviter les discontinuités dans le code CR SPECTRA, les transitions entre les différentes phases sont adoucies à l'aide de combinaisons de fonctions erf (error function : fonction erreur). Ainsi il est possible de définir l'épaisseur de la transition de phase : la transition de phase WNM-CNM/CNM-WNM mesure 10 pc tandis que la transition de phase CNM-DiM/DiM-CNM mesure 3 pc.

Les paramètres d'injection du rayonnement cosmique sont présentés dans la capture d'écran (2.15) et sont communs à toutes les configurations simulées dans ce travail.

Ces paramètres font intervenir le modèle d'expansion du choc de la supernova qui est représenté en haut à gauche de la figure (2.14) ainsi que les modèles d'injection des protons (en haut à droite sur la même figure) et des électrons (2.2.4). L'ensemble des paramètres présentés sont décrits dans le répertoire Github du code. Parmi les paramètres importants, le paramètre  $E_{sn}$  désigne l'énergie de la supernovae en unités de  $10^{51}$  erg,  $xhi\_cr$  désigne le fait que 10% de l'énergie de la supernovae est transmise au rayonnement cosmique et  $electron\_injection\_rate$  désigne le fait que seulement 1% de cette énergie est transmise aux électrons. Le paramètre  $gam = 2.2$  désigne l'indice spectral d'injection du rayonnement cosmique. Le paramètre  $delta = 4$  réfère au paramètre  $\delta$  du modèle d'injection des protons; 4 est une valeur qui permet d'avoir une loi d'injection  $t_{esc}(E)$  relativement proche de celle présentée dans ma publication. Dans cette simulation, les rayons cosmiques d'une énergie donnée  $E$  sont instantanément injectés dès lors que  $t = t_{esc}(E)$ , autrement dit, la fonction d'injection temporelle  $F_{inj}(t)$  est une distribution de Dirac centrée sur l'instant de l'échappement. Le modèle d'échappement utilisé lorsque le choc entre en phase radiative est le modèle rapide (F), à  $t = t_{PDS} \approx 24$  kyr (dans une phase WNM) l'ensemble des rayons cosmiques qui ne se sont pas échappés avant sont libérés.

Deux configurations supplémentaires sont présentées dans la figure (2.2). Dans le premier cas (**a** : all terms), tous les termes des équations de transport des protons, électrons et turbulence auto-générée sont utilisés. Dans le second cas (**n** : no energy terms), les termes qui font appel à une résolution du problème dans l'espace des énergies sont désactivés. Pour les protons et les électrons, les termes de pertes adiabatiques sont désactivés, le rayonnement synchrotron des électrons l'est également. Les équations de la turbulence auto-générée ne changent pas. On note les simulations dont le coefficient de diffusion de fond des rayons cosmiques est indépendant de la phase sur milieu interstellaire par **i** et celles dont le coefficient de diffusion est dépendant par **d**.

L'ensemble des simulations réalisées sont nommées par leur caractéristiques (désignée plus haut en gras) et sont désignées ci-après : **Win**, **Wia**, **Wda**, **WCin**, **WCia**, **WCda**, **WCDin**, **WCDia**, **WCDda**.

#### 2.4.2.1 Echappement dans le MIS multiphase

Dans ce paragraphe, j'étudie l'échappement et la propagation de protons dans un milieu multiphasique. Les résultats sont montrés dans les figures (2.16) et (2.17) pour la distribution spatiale de pression/coefficient de diffusion des protons et le flux energie - défini de la manière que Nava et al. (2019) [161] - de protons/distribution en énergie du coefficient de diffusion respectivement.

Dans la figure (2.16), les sous-figures de gauche représentent la distribution spatiale de la pression du rayonnement cosmique  $P_{CR}$  à une énergie donnée : de 1 GeV (en haut) à 20 TeV (en bas). Les sous-figures de droite représentent les coefficients de diffusion  $\kappa_{CR} = \kappa_b/(I_+ + I_-)$  associés. Les lignes continues, tirets et alternances de tiret-point représentent les setup **Wia**, **WCia**, **WCDia** respectivement. Les couleurs associées aux

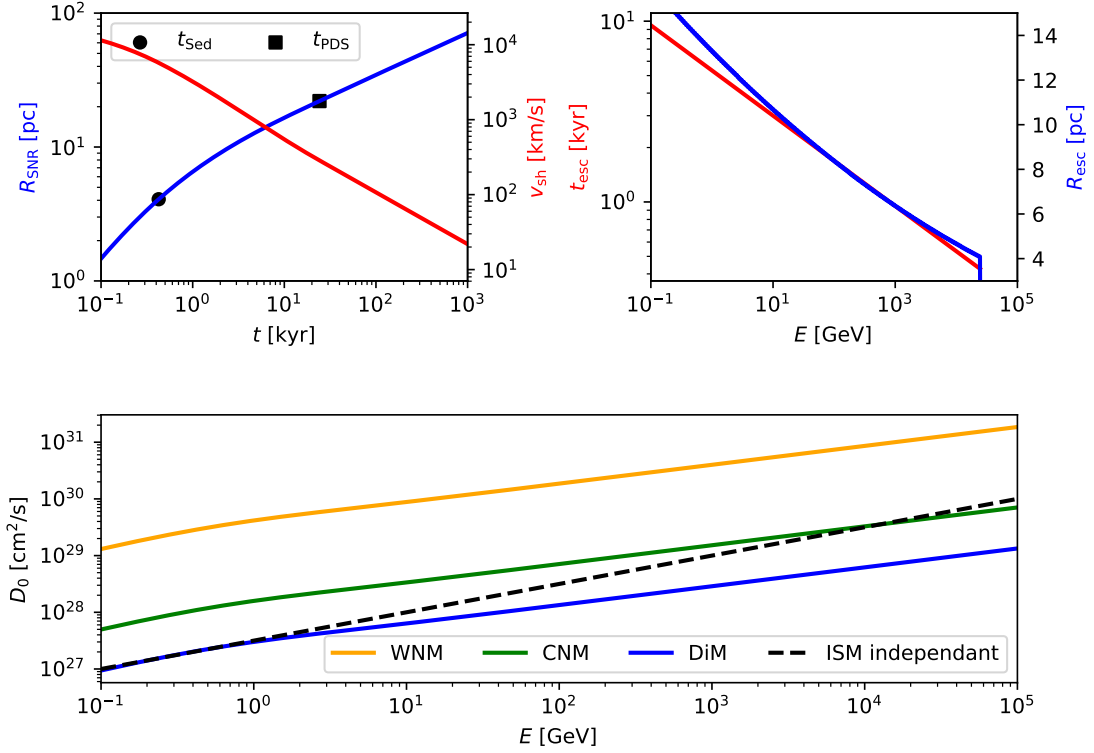


Figure 2.14: Cette figure récapitule l'ensemble des paramètres des modèles : du choc du reste de la supernova (en haut à gauche) d'énergie  $E_{\text{SN}} = 10^{51}$  erg, de l'injection du rayonnement cosmique dans le MIS (en haut à droite) avec une efficacité de 10% et de la diffusion dans le milieu interstellaire multiphase (en bas). Dans le modèle du choc, le rayon du choc qui s'expand dans la phase WNM  $R_{\text{SNR}}$  est modélisé par une ligne bleue continue, la vitesse associée est représentée par une ligne rouge. Le rond noir marque la transition entre étape d'expansion libre du choc et l'étape ST tandis que le carré noir marque la transition entre l'étape ST et l'étape d'expansion radiative. Dans le modèle d'injection, la ligne rouge représente l'évolution du temps d'injection  $t_{\text{esc}} \propto E^{-1/\delta}$  où  $\delta = 4$  des rayons cosmique en fonction de l'énergie. La ligne bleue représente le rayon du choc à l'instant d'échappement  $R_{\text{esc}}$  en fonction de l'énergie. Dans le modèle de diffusion, la courbe noire en tirets représente le coefficient de diffusion des RCS du fond dans le cas du modèle indépendant de la phase interstellaire **i** avec les paramètres  $\delta = 0.5$  et  $d_{00} = 10^{28} \text{ cm}^2/\text{s}$  tandis que les courbes colorées représentent les modèles de diffusion dépendant du temps **d** avec les paramètres :  $I_{\pm} = 10^{-2}$ ,  $q = 5/3$  dans les phases WNM (jaune), CNM (orange) et DiM (bleu).

```

//PHYSICAL MODELS
const double ttau_sat = - log(0.1)/0.1;

const double Esn = 1;
const double Mej = 1;
const double xi_n = 1;
const double phi_c = 1;
const double bbeta = 2;
const double C06 = 1.;
const double xhi_cr = 0.1;
const double xhi_0 = 2.026;
const double gam = 2.2;
const int injection_cutoff = 0;

const double inj_exp_alpha = 1;
const double Emin = 0.1*GeV;
const double delta = 4.;
const int injection_shape_time = 0;
const double t_start_injection = 1e-6*kyr;
const double t_end_injection = 2;
const double injection_function_width = 10. ;

const int injection_function_norm = 1000;
const double r_snr_thickness = 100;
const double electron_injection_rate = 1e-2;
const int tesc_model = 1;

const double eta_gfree = 1;
const double eta_acc = 10;
const double Eknee = 1e15*eV;
const double alpha = 2.6;

```

Figure 2.15: Capture d'écran de l'ensemble des paramètres des modèles d'injection du rayonnement cosmique utilisés et communs à tous les tests fiduciaux réalisés dans cette section. En ce qui concerne la définition détaillée de tous les paramètres, le lecteur peut se référer au répertoire Github du code CR SPECTRA qui fournit l'ensemble des informations nécessaires.

	all terms (a)			no energy terms (n)		
	$\mathcal{L}^p$	$\mathcal{L}^e$	$\mathcal{L}^{I_{\pm}}$	$\mathcal{L}^p$	$\mathcal{L}^e$	$\mathcal{L}^{I_{\pm}}$
$L_{\text{adv}}(-V_A, z)$	yes	yes	yes	yes	yes	yes
$L_{\text{adv}}(-E/3 \partial V_A/\partial E, z)$	yes	yes	-	no	no	-
$L_{\text{adv}}(E/3 \partial V_A/\partial z, E)$	yes	yes	-	no	no	-
$L_{\text{diff}}(\kappa_{zz}, z)$	yes	yes	-	yes	yes	-
$L_{\text{src}}(Q_{i,\text{inj}})$	yes	yes	-	yes	yes	-
$L_{\text{src}}(-4/3 \partial V_A/\partial z)$	yes	yes	-	no	no	-
$L_{\text{sync}}(E)$	-	yes	-	-	no	-
$L_{\text{src}}(-I_- \partial V_A/\partial z)$	-	-	yes	-	-	yes
$L_{\text{gd}}(\Gamma_g^- I_-, \Gamma_d^-(I_- - I_-^0))$	-	-	yes	-	-	yes

Table 2.2: Tableau récapitulant les solveurs utilisés dans les différentes équations en fonction de la configuration : tous les termes des équations de transport sont utilisés (a : all terms), seuls les termes n'impliquant aucune dynamique dans l'espace des énergie sont activés (n : no energy terms). Si un terme est activé alors il est désigné par : yes, si un terme est désactivé, alors il est désigné par : no, si un terme n'existe pas dans une équation de transport, aucune réponse n'est apportée : -.

distributions réfèrent à l'instant de l'observation tandis que la bande hachurée avec des points colorés représente la section recouverte par le choc du reste à l'instant  $t$  associé à la couleur des points. Les bandes verticales colorées en jaune et orange représentent la position des phases CNM et DiM respectivement pour les setups qui necessitent la présence de ces phases. Notons qu'aux basses énergies, les courbes des couleurs chaude et orange ne sont pas représentées car le rayonnement cosmique associé n'a pas encore été injecté à ce stade de la simulation. Notons également que toutes les courbes se trouvant à l'intérieur des régions hachurée en points de la même couleur que les courbes n'ont aucun sens physique; en effet ces régions se trouvent à l'intérieur du choc du reste dont la physique n'est pas discutée dans ce travail.

On observe dans un premier temps qu'après un certain temps  $t > 100$  kyr, la distribution spatiale de pression du rayonnement cosmique de haute énergie ( $> 100$  GeV) est insensible à la présence des phases CNM et/ou DiM alors que le rayonnement cosmique à basse énergie y est sensible. En regardant la distribution spatiale des coefficients de diffusion aux différentes énergies, on note que : indépendamment du setup le coefficient de diffusion aux temps longs décroît beaucoup plus aux basses énergies (de plus d'un ordre de grandeur pour les RCs de 1 GeV) qu'aux hautes énergies (aucune variation notable pour les RCs à 20 TeV). De plus, la différence de coefficients de diffusion entre les setups **Wia** et **WCia/WCDia** est plus importante à basse énergie qu'à haute énergie. Ceci s'explique par le fait que les taux de croissance des ondes sont beaucoup plus importants à basse énergie qu'à haute énergie et en particulier que la vitesse Alfvén bi-fluide est beaucoup plus importante à basse énergie qu'à haute énergie. En effet, à basse énergie les mouvements des ions et des neutres sont décorrélés et les perturbations magnétiques

Position [pc]	W	WC	WCD
0		WNM	WNM
↓			
870			
870			
↓			
900			
900			
↓			
920			
920			
↓			
950			
950			
↓	WNM + SNR	WNM + SNR	WNM + SNR
1050			
1050			
↓			
1080			
1080			
↓			
1100			
1100			
↓			
1130			
1130			
↓			
2000		WNM	WNM

Table 2.3: Ce tableau représente les trois configurations du milieu interstellaire utilisées pour les tests fiduciaux d'échappement et transport du rayonnement cosmique dans les environnements de restes de supernovae avec le code CR SPECTRA. Le premier setup **W** est constitué d'une seule phase WNM homogène. Le second setup **WC** est constitué d'une succession de phases WNM et CNM. Le troisième setup **WCD** est constitué des phases WNM, CNM et DiM comme décrites dans le tableau. Le code couleur utilisé pour les phases est le même que le code couleur représenté dans les figures présentant les résultats des tests fiduciaux. Au centre de chaque configuration, entre 950 et 1000 pc se trouve la source de rayons cosmiques (SNR) dont le centre se trouve précisément à la coordonnée 1000 pc.



sont uniquement portées par les ions dont la densité  $n_i$  est très inférieure à la densité totale  $n_T = n_n + n_i$  et ont pour célérité  $V_{Ai} = B_0^2 / \sqrt{4\pi m_i X n_T} = V_A / \sqrt{X}$  où  $X = 0.01$  dans le WNM et  $V_A$  est la vitesse d'Alfvén dans le cas où les perturbations sont portées par l'ensemble des particules du plasma. Le taux de croissance des ondes est multiplié par un facteur 10 entre les régimes de faible et fort couplage ion-neutre. Le gradient de pression des rayons cosmiques est ainsi affecté par la modification du coefficient de diffusion et affecte en retour le taux de croissance des ondes. Dans la figure (2.16), les rayons cosmiques de plus basse énergie (1 GeV) ont été libérés tardivement ( $t \sim 10$  kyr contre  $\sim 0.5$  kyrs pour les RCs à 10 TeV) mais avant le début de la phase radiative. Le gradient de pression observé est donc beaucoup plus important chez les RCs de basse énergie car ils n'ont pas encore eu le temps de diffuser. Aux basses énergies, la différence observée entre les setups **Wia** et **WCia/WCDia** vient également du fait que le taux de croissance des RCs est affecté aux transitions entre phases par une modification de la vitesse d'Alfvén. Cet effet s'illustre très bien dans la figure (2.16, sous figures du haut : RCs à 1 GeV) à  $t = 122$  kyr. On observe un changement de gradient de RCs à l'interface WNM-CNM qui se propage de part et d'autre de l'interface. Nous n'observons cependant pas de différences entre les setups **WCia** et **WCDia** car la différence relative de vitesse d'Alfvén est moins importante :  $V_A^{\text{WNM}}/V_A^{\text{CNM}} \sim 2.6$  contre  $V_A^{\text{CNM}}/V_A^{\text{DiM}} \sim 1.1$  pour énergies inférieures à 10 GeV. A haute énergie, les différences de vitesse d'Alfvén sont plus importantes :  $V_A^{\text{WNM}}/V_A^{\text{CNM}} \sim 10$  contre  $V_A^{\text{CNM}}/V_A^{\text{DiM}} \sim 3$  pour énergies supérieures à 10 TeV ce qui se traduit par des coefficients de diffusion plus sensibles aux interfaces entre phases. En résumé, dans un milieu où la turbulence de fond est homogène et isotrope, les RCs de faible énergie ( $E < 100$  GeV) sont sensibles aux interfaces entre les phases tandis que les RCs de plus haute énergie ne le sont pas. Cet effet est une conséquence des variations de la vitesse d'Alfvén du plasma entre les différentes phases. Les conclusions ne diffèrent que peu de celles proposées dans ma publication Brahim et al. (2020) [22] les détails concernant l'effet de la dépendance en énergie du problème sont discutés dans le paragraphe suivant.

Dans la figure (2.17), les sous-figures de gauche représentent le flux de rayonnement cosmique - à travers une surface égale à la section plane définie par le rayon choc  $R_{\text{esc}}$  à l'instant  $t = t_{\text{esc}}(E)$  où les rayons cosmiques d'énergie  $E$  sont libérés - donné par  $P_{\text{CR}}(E)\pi R_{\text{esc}}(E)^2$  à différentes positions  $\bar{z}$  du centre de la source : 25, 65, 90, 115, 155 pc de haut en bas de la figure. Dans le cas du setup **WCDia** ces positions sont choisies dans les phases WNM, CNM, DiM, CNM et WNM respectivement. Les sous-figures de droite représentent le rapport de diminution du coefficient de diffusion  $\kappa_{\text{CR}}$  par rapport au coefficient de diffusion de fond  $\kappa_0$ . Le code couleur et le style des lignes est le même que celui présenté dans la figure (2.16). Notons que les courbes présentées à  $t = 500$  kyr et  $\bar{z} = 25$  pc n'ont aucun sens physique car la zone étudiée se trouve à l'intérieur du reste. Quelque soit le setup et quelque soit la distance au centre de la source, on observe que le maximum de flux de rayons cosmiques injectés se décale depuis les hautes énergies vers les basses énergies en augmentant. Ceci vient du fait que les rayons cosmiques de plus haute énergie sont injectés en premier et ce avec un flux intégré moins important puisque

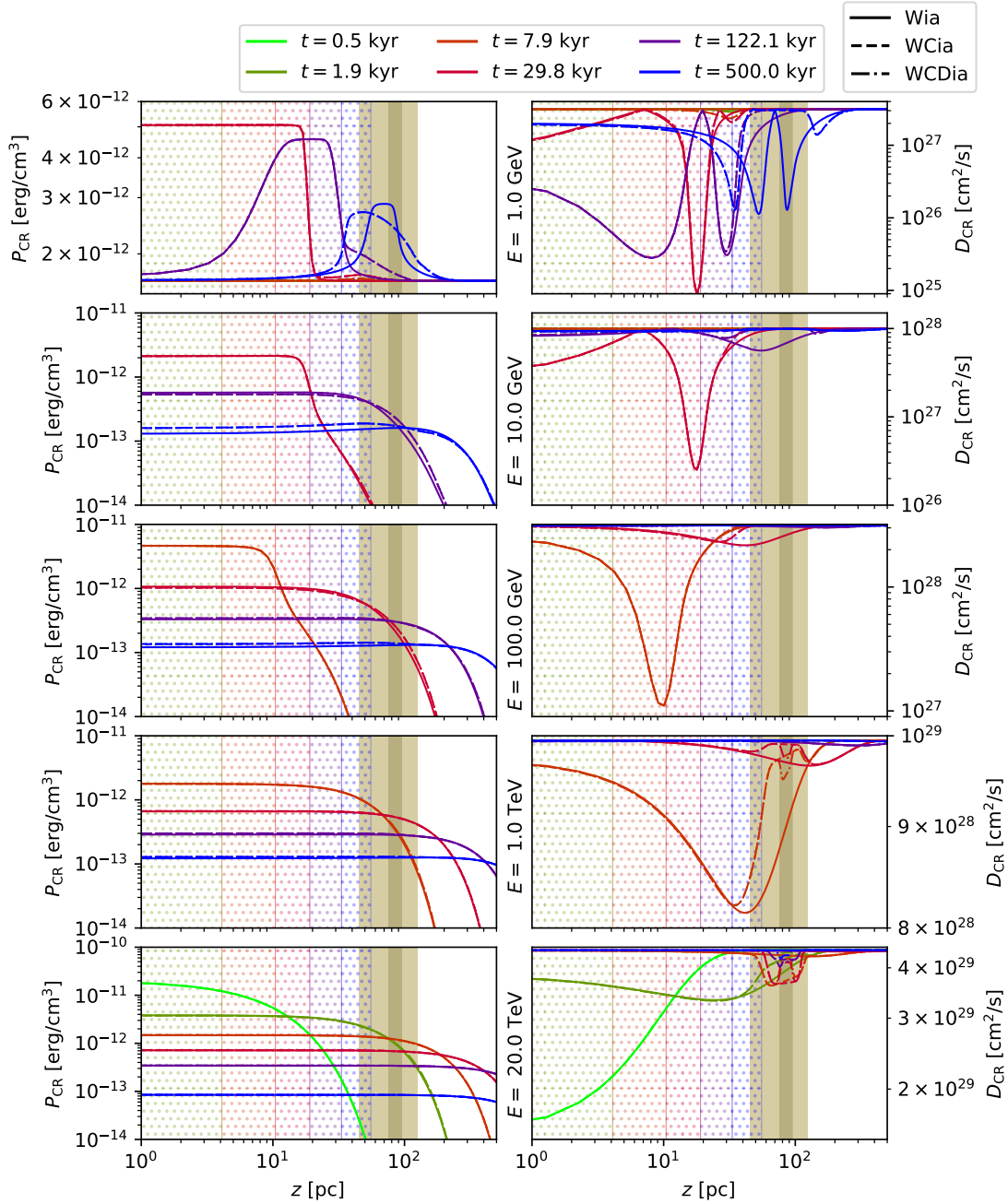


Figure 2.16: Tests fiduciaux de transport du rayonnement cosmique s'échappant d'un rémanent de supernova réalisé avec le code CR SPECTRA. Les sous-figures de gauche/droite représentent la distribution de pression/coefficient de diffusion du rayonnement cosmique aux différentes énergies : 1 GeV (en haut) à 20 TeV (en bas). Trois setups sont présentés : **Wia**, **WCia**, **WCDia**, par des lignes continues, des lignes en tirets et des lignes alternant point et tiret respectivement. Le dégradé de couleur réfère à l'instant  $t$  de la mesure. La bande colorée claire/foncée représente la position de la phase CNM/DiM pour les setups dans lesquels ces phases sont considérées. Les bandes en pointillés colorés représentent la position du choc du reste au cours du temps; la couleur des pointillés fait référence à l'instant de la mesure.

la section d'injection  $\pi R_{\text{esc}}^2$  est plus faible à haute énergie. Le flux de rayons cosmiques semble évoluer en  $P_{\text{CR}} \times \pi R_{\text{esc}}^2 \propto E^{-0.5}$  pour un spectre d'injection  $dN/dE \propto E^{-2.2}$  et par déduction un rayon du choc qui évolue en  $R_{\text{esc}} \propto E^{-0.85}$ . Le flux injecté est supérieur au flux observé de RCS du milieu intersellaire local qui évolue en  $E^{-2.7}$ . Les différences de flux induites par la présence des phases CNM et DiM sont invisibles aux temps courts ( $t < 100$  kyr) et commencent à être perceptibles au delà de des énergies de l'ordre de 10 GeV indépendamment de la distance à la source. Le flux de RCS des setups **WCia** et **WCDia** sont plus importants d'un facteur 2 que le flux de RCS dans le setup **Wia**. Ceci vient du fait que dans le setup **Wia** à  $t = 122$  kyr le rayonnement cosmique à 10 GeV est confiné, le coefficient de diffusion diminue d'un facteur 2 par rapport à la valeur du fond, alors que dans les setups **WCia** et **WCDia** il ne l'est pas. La vitesse d'Alfvén des milieux denses réduit le gradient de pression à l'interface et empêche la génération de perturbations magnétiques. Cet effet disparaît à  $t = 500$  kyr dans les zones éloignées de la source ( $\bar{z} > 90$  pc). Le coefficient de diffusion des RCS commence à décroître aux hautes énergies et proche de la source. Ce dernier se décale vers les basses énergies avec le temps et l'injection des RCS de plus basse énergie et diminue avec l'augmentation du taux de croissance  $\Gamma_g \propto V_A \frac{\partial P_{\text{CR}}}{\partial z}$  qui est à la fois dirigé par la vitesse d'Alfvén  $V_A \propto E^{-2}$  à haute énergie et par le gradient de pression des RCS  $\frac{\partial P_{\text{CR}}}{\partial z} \sim P_{\text{CR}} \propto E^{-2.2}$  à l'instant d'injection. Le taux de diminution du coefficient de diffusion est de moins en moins important à mesure que l'on s'éloigne du centre de la source ce qui signifie que la diffusion retrouve son régime linéaire loin de la source. A haute énergie ( $> 500$  GeV) et relativement tôt ( $t < 8$  kyr) on observe dans les phases CNM et DiM dans les setups **WCia** et **WCDia** que les coefficients de diffusion sont inférieurs à ceux du setup **Wia** à énergie et position équivalente. Cet effet est également dû au saut de valeur de la vitesse d'Alfvén aux interfaces phase diffuse/dense qui induit une cassure dans le gradient de pression des RCS d'énergie associée. Néanmoins nous avons vu que la distribution de pression des RCS associée est très peu affectée par cet effet<sup>15</sup>. De plus, la turbulence auto-générée aux hautes énergies peut être amenée à cascader vers les basses énergies et contribuer au confinement des RCS associés. Cet effet n'est pas encore implémenté dans le code CR SPECTRA. Aux basses énergies et aux temps longs ( $E < 10$  GeV et  $t > 100$  kyr) le coefficient de diffusion des RCS est amené à décroître de plus d'un ordre de grandeur proche de la source ( $\bar{z} < 100$  pc). On remarque que, contrairement au cas des RCS de haute énergie où les setups **Wia** et **WCia/WCDia** diffèrent dans les positions coïncidentes avec les phases denses, aux temps longs ( $t > 100$  kyr) les setups diffèrent dans les phases WNM proche de la source ( $\bar{z} = 25$  pc) et éloignée de la source ( $\bar{z} = 155$  pc). Proche de la source, le niveau de turbulence du setup **Wia** est plus faible que celui des setups **WCia/WCDia** alors que loin de la source, l'effet est inversé. Ceci résulte de l'effet de la transition WNM/CNM proche de la source. Ce résultat suggère que la présence de nuages moléculaires a tendance à ralentir la propagation du rayonnement cosmique à basse énergie ( $E < 10$  GeV), sans toutefois affecter la propagation du rayonnement cosmique à haute énergie.

<sup>15</sup>Ceci est lié au fait que la vitesse de diffusion des RCS de haute énergie est importante et que le régime de transport linéaire est atteint très rapidement.

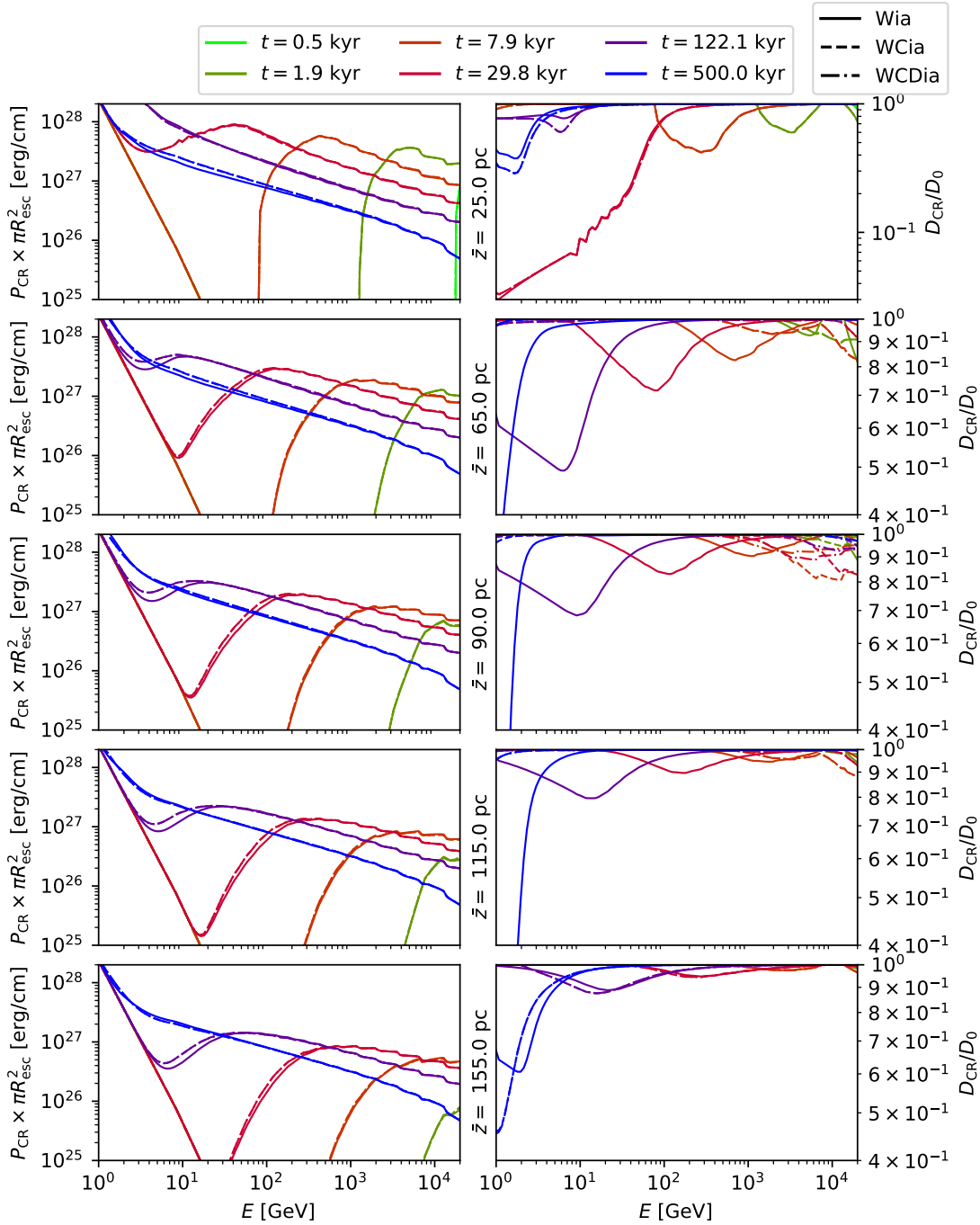


Figure 2.17: Tests fiduciaux de transport du rayonnement cosmique s'échappant d'un rémanent de supernova réalisé avec le code CR SPECTRA. Les sous-figures de gauche/droite représentent le flux de RCs/la distribution en énergie du coefficient de diffusion normalisée par la loi de diffusion du fond et ce mesurées dans chaque phase à partir du centre de la source :  $\bar{z} = z - z_{\text{SNR}} = 25, 65, 90, 115, 155$  c'est à dire dans les phases WNM, CNM, DiM, CNM, WNM pour le setup **WCDia** et dans les phases correspondantes pour les setups plus simples **WCia** et **Wia**. Le code couleur et le style des courbes est le même que celui présenté dans la figure (2.16).

### 2.4.2.2 Effet de la dépendance en énergie

Dans ce paragraphe je présente les résultats obtenus des simulations **WCDia** et **WCDin** d'échappement et de propagation du rayonnement cosmique dans un milieu composé des phases WNM, CNM et DiM en considérant tous les termes des équations de transport, et en enlevant les termes faisant intervenir des transferts d'énergie au sein des populations de rayons cosmiques respectivement. L'objectif est d'analyser les effets des termes dépendant de l'énergie sur le transport du rayonnement cosmique. Les résultats sont présentés dans les figures (2.18) et (2.19).

La figure (2.18) permet de comparer les distributions spatiales de pression (à gauche) et de coefficients de diffusion (à droite) à différentes énergies : 1 GeV (en haut) à 20 TeV (en bas) entre les setups **WCDia** et **WCDin** représentés en traits plein et en alternances tiret-point respectivement. On observe, proche de la source, que les distributions de pression des RCs à faible énergie ( $< 1$  TeV) sont fortement dépendantes de la présence des termes de pertes adiabatiques alors que ce n'est pratiquement pas le cas pour les RCs à haute énergie (20 TeV). A basse énergie (où  $\frac{\partial V_A}{\partial E} = 0$ ), le terme  $E \frac{\partial V_A}{\partial z} \frac{\partial P_{CR}}{\partial E} / 3$  joue un rôle important à l'interface WNM/CNM. En effet la divergence de la vitesse d'Alfvén est positive tandis que la dérivée en énergie de la pression des RCs est négative. L'énergie des rayons cosmiques est alors advectée vers les basses énergies. Les conditions de bord en énergie étant absorbantes, les rayons cosmiques de plus basse énergie perdent également de l'énergie. La dérivée en énergie de la pression des RCs suit une loi de puissance en fonction de l'énergie et suggère que les pertes adiabatiques à basse énergie sont moins importantes. A cet effet s'ajoute l'effet du terme  $-4 \frac{\partial V_A}{\partial z} P_{CR}$  qui dépend directement de la pression du rayonnement cosmique à une énergie donnée. A haute énergie ( $E > 3$  TeV), lorsque la vitesse d'Alfvén dans le WNM se met à décroître en  $E^{-2}$  et le terme  $-\frac{\partial V_A}{\partial E} \frac{\partial P_{CR}}{\partial z}$  se met à compenser intégralement les deux autres termes via le gradient de pression des RCs essentiellement. Les pertes adiabatiques jouent un rôle important et modifient la distribution des RCs jusqu'à plusieurs centaines de pc du centre de la source et ce pendant plusieurs centaines de milliers d'années. En conséquences, la quantité de turbulence générée est moins importante et le coefficient de diffusion des RCs est plus proche de la valeur du coefficient de fond.

La figure (2.19) représente le flux de rayonnement cosmique/le coefficient de diffusion normalisé par la valeur du fond à différentes positions  $\bar{z}$  du centre de la source : 25, 65, 90, 115, 155 pc de haut en bas de la figure et correspondant aux phases WNM, CNM, DiM, CNM, WNM respectivement. On observe clairement un effet de pertes adiabatiques importantes à basse énergie et de plus en plus faibles à mesure que l'énergie augmente. A basse énergie, le flux des RCs est modifié d'un facteur 5 aux temps longs ( $t > 100$  kyr) ce qui montre que ces termes jouent un rôle primordial dans le transport des RCs de faible énergie ( $E < 100$  GeV).

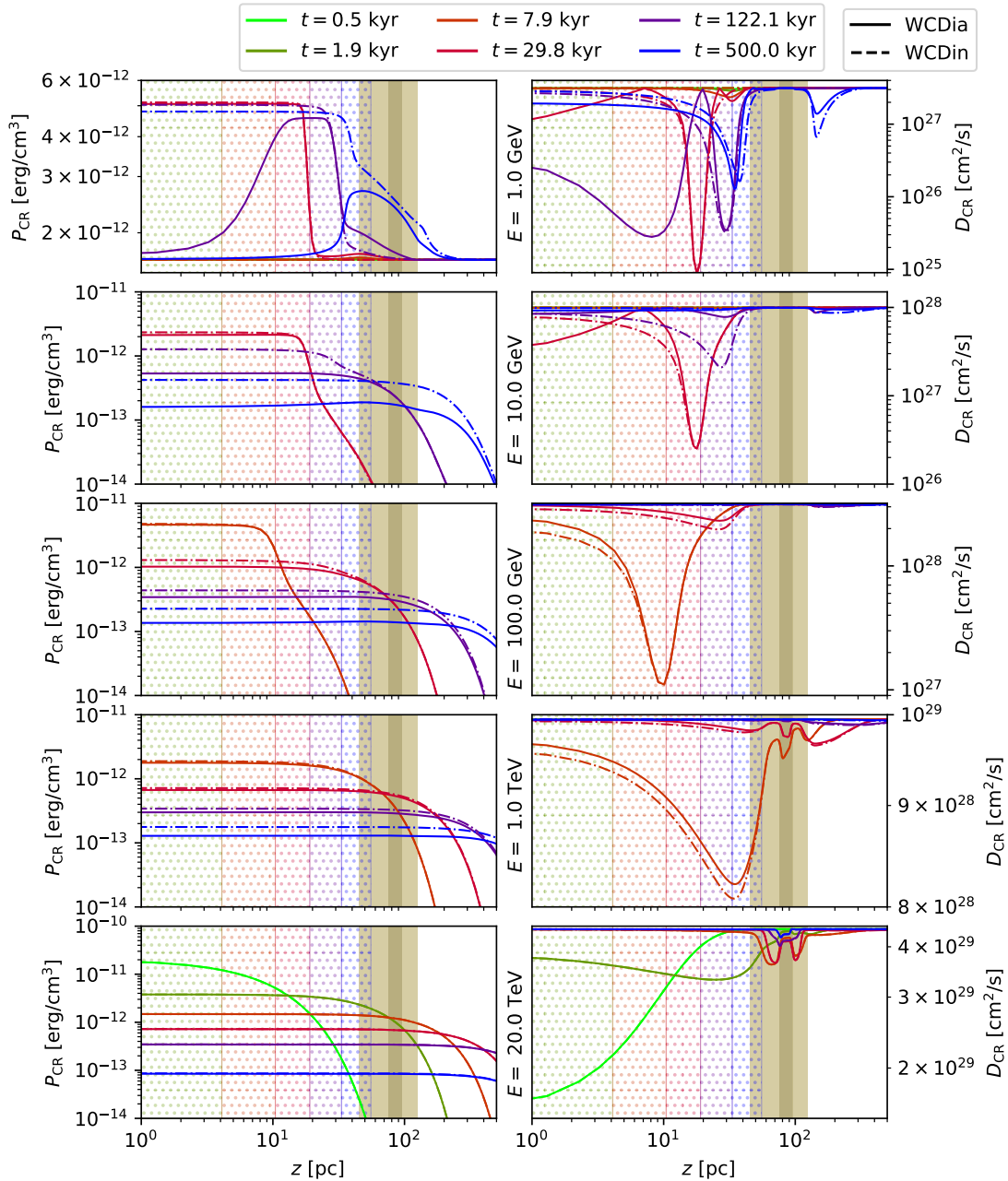


Figure 2.18: Tests fiduciaux de transport du rayonnement cosmique s'échappant d'un reste de supernova réalisé avec le code CR SPECTRA. Les sous-figures de gauche/droite représentent la distribution de pression/le coefficient de diffusion du rayonnement cosmique aux différentes énergies : 1 GeV (en haut) à 20 TeV (en bas). Deux setups sont présentés : **WCDia** et **WCDin** par des lignes continues et des tirets respectivement. Le dégradé de couleur réfère à l'instant  $t$  de la mesure. La bande colorée claire/foncée représente la position de la phase CNM/DiM pour les setups dans lesquels ces phases sont considérées. Les bandes en pointillés colorés représentent la position du choc du reste au cours du temps; la couleur des pointillés fait référence à l'instant de la mesure.

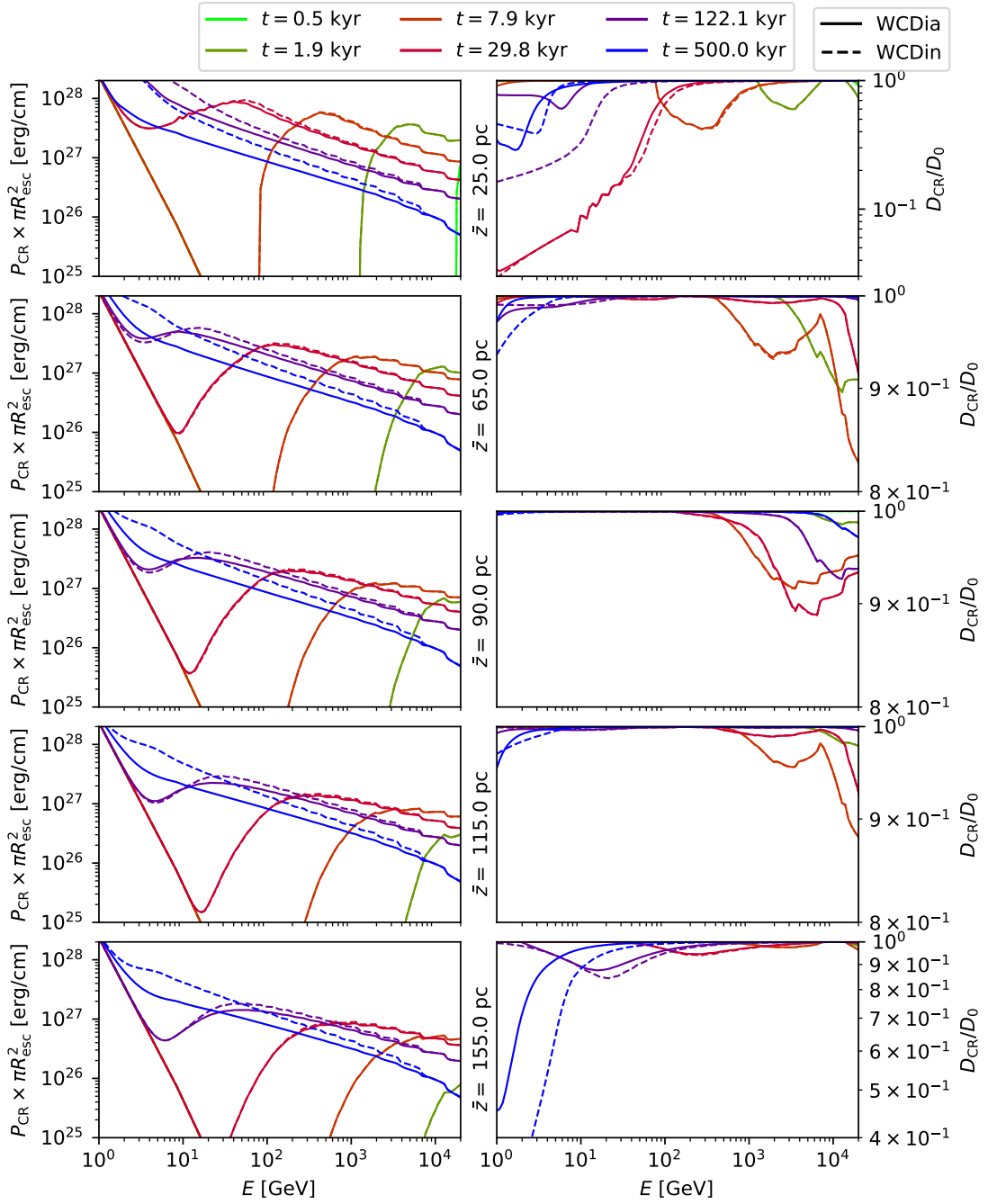


Figure 2.19: Tests fiduciaux de transport du rayonnement cosmique s'échappant d'un rémanent de supernova réalisé avec le code CR SPECTRA. Les sous-figures de gauche/droite représentent le flux de RCs/la distribution en énergie du coefficient de diffusion normalisé par la loi de diffusion du fond et ce mesurées dans chaque phase à partir du centre de la source :  $\bar{z} = z - z_{\text{SNR}} = 25, 65, 90, 115, 155$  c'est à dire dans les phases WNM, CNM, DiM, CNM, WNM pour les setup **WCDia** et **WCDin**. Le code couleur et le style des courbes est le même que celui présenté dans la figure (2.18).

### 2.4.2.3 Modèle de diffusion dépendant du MIS

L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'effet du modèle de coefficient de diffusion des RCs dépendant de la phase interstellaire sur les propriétés de transport des RCs et de génération de la turbulence. Dans la figure (2.20) sont montrés les résultats de la diffusion des RCs dans un milieu interstellaire au niveaux de turbulence de fond dépendant de la phase (setup **WCDda**). Dans la figure (2.21) sont montrés les flux en énergie de rayonnement cosmique et la distribution en énergie du coefficient de diffusion auto-généré associé à différentes distances de la source  $\bar{z} = 25, 65, 90, 115, 155$  pc et ce pour les setup **WCDda** (ligne continue), **WCda** (tirets) et **Wda** (alternances point-tiret). Dans la figure (2.14) sont représentés les deux modèles de diffusion de fond des RCs : le modèle inféré observationnellement en tiret noir avec les paramètres  $\delta = 0.5$  et  $d_{00} = 10^{28}$  cm<sup>2</sup>/s qui est utilisé dans toutes les simulations de type **i**, le modèle faisant intervenir un modèle de turbulence qui dépend des propriétés du MIS en traits pleins colorés (jaune pour le WNM, orange pour le CNM et bleu pour le DiM) et dont les paramètres sont  $\langle I_{\pm} \rangle = 10^{-2}$  et  $q = 5/3$ . On observe que dans le modèle dépendant du temps, le coefficient de diffusion dans le WNM est très supérieur d'un facteur 10 à 100 au coefficient de diffusion inféré observationnellement. Ceci a pour conséquence que le rayonnement cosmique peut générer une quantité de turbulence importante mais dans un laps de temps très court car le taux de croissance est indépendant du coefficient de diffusion de fond mais la diffusion du fond contribue à rapidement aplatir les gradients de pression. En revanche, dans les phases CNM et DiM les propriétés diffusives des RCs sont faiblement affectées.

La figure (2.20) montre cependant que les gradients de pression des RCs ne disparaissent pas. Ceci est dû la présence des interfaces entre phases dont le coefficient de diffusion peut varier de 1 à 2 ordres de grandeurs en quelques pc. Aux temps longs ( $t > 100$  kyr) et pour des énergies supérieures à 10 GeV, les gradients de pression dans la phase WNM contenant l'accélérateur ont totalement disparu étant donné la valeur du coefficient de diffusion dans cette phase, mais sont tous non-nuls dans la phase DiM. La différence entre les coefficients de diffusion dans le WNM et CNM/DiM crée une accumulation de RCs dans la phase CNM et, à la transition DiM/CNM le gradient de coefficient de diffusion de fond est inversé ce qui entraîne un défaut de pression en aval de la phase DiM. Les RCs de toutes les énergies (1 GeV à 30 TeV) y sont sensibles car les coefficients de diffusion du fond sont stationnaires contrairement à la turbulence auto-générée. Notons également que dans ce setup, la quantité de turbulence auto-générée est très faible, on en observe uniquement dans le WNM mais elle disparaît rapidement à cause du coefficient de diffusion élevé. Le rayonnement cosmique de basse énergie est également très sensible aux pertes adiabatiques ce qui justifie des distributions de pression observées à 1 GeV. La combinaison des phases CNM-DiM-CNM semble jouer le rôle d'un "barrage" de rayonnement cosmique entraînant une importante perte de flux en aval du nuage moléculaire.

La figure (2.21) montre bien cette effet "barrage". Nous observons en amont des



phases CNM-DiM-CNM à  $\bar{z} = 25$  pc du centre de la source que le flux de RCS du setup **WCDda** est supérieur aux flux des setups **WCda** et **Wda**. En aval des phases CNM-DiM-CNM à  $\bar{z} = 155$  pc du centre de la source, c'est l'inverse qui est observé à basse énergie et aux temps relativement courts ( $t < 100$  kyr). Etrangement, aux temps longs ( $t > 100$  kyr) le flux de RCS à haute énergie du setup **WCDda** reste supérieur aux flux des setups **WCda** et **Wda** malgré la présence de la phase DiM dont le coefficient de diffusion est le plus faible. Ceci peut s'expliquer par le fait que le phénomène de transport est "ralenti" par la présence du DiM. De manière générale, observe que les flux diminuent vers la valeur de fond très rapidement contrairement aux setups avec coefficient de diffusion indépendant de la phase. Cet effet est la conséquence du fort coefficient de diffusion de la phase WNM qui confère un temps caractéristique de diffusion beaucoup plus faible aux RCS. On observe également que les RCS génèrent de la turbulence uniquement dans les phases WNM et ce à des niveaux importants car le coefficient de diffusion du fond est suffisamment élevé.

### 2.4.3 Discussion et ouverture

Dans ce travail, j'ai montré que le rayonnement cosmique injecté dans le milieu intersellaire par les restes de supernova ne suit pas nécessairement le régime de diffusion linéaire dérivé à partir des observations du milieu intersellaire local. En effet, l'instabilité de streaming de RCS contribue à la génération de turbulence dans l'environnement proche des SNRs qui contribue à confiner les particules proche du choc et à réduire le flux observé loin de la source. Ce processus est différent pour le rayonnement cosmique à basse énergie  $E \leq 100$  GeV et le rayonnement cosmique à haute énergie  $E > 1$  TeV. A basse énergie, les particules sont confinées faiblement ie. le niveau de turbulence  $(\delta B/B_0)^2$  peut augmenter de deux ordres de grandeur et ce pendant des temps longs  $t > 100$  kyr ce qui suggère que les flux de rayons cosmiques de basse énergie sont extrêmement sensibles au modèle d'injection et constituent une bonne observable physique pour contraindre les modèles. A haute énergie, les particules sont fortement confinées ie. le niveau de turbulence peut augmenter de plus de 4 ordres de grandeur mais ce pendant des temps très courts  $t < 1$ kyr dans les phases peu denses (WNM)<sup>16</sup>. Dans les phases denses ce temps peut être important  $t > 100$  kyr (DiM). L'observation du flux de RCS à haute énergie permet néanmoins contraindre le modèle dans des cas très particuliers de supernova qui se trouvent à l'intérieur de milieux moléculaires relativement denses  $n_T > 300 \text{ cm}^{-3}$ . Autrement, le régime de diffusion observé correspond au régime inféré par les observations.

---

<sup>16</sup>Cette conclusion peut sembler contradictoire avec les résultats qui ont été présentés. Ici, la notion de "confinement" est fortement rattachée au niveaux de turbulence auto-générée par les RCS et donc aux gradients de pression des particules au moment de leur injection par la source. Rappelons que les RCS de haute énergie s'échappent plus tôt que les RCS de basse énergie et que la pression initiale injectée est bien supérieure pour des RCS de haute énergie que des RCS de basse énergie. En revanche, le confinement des RCS de haute énergie ne sera visible qu'au niveau de sources extrêmement jeunes  $t_{\text{SNR}} < 1$  kyr car leur vitesse de diffusion est élevée et l'instabilité de streaming rapidement relaxée. L'effet de confinement des RCS sera donc essentiellement observable à travers les RCS de basse énergie dont la vitesse de diffusion est moins importante permettant à l'instabilité de streaming d'agir sur plusieurs centaines de kyrs.

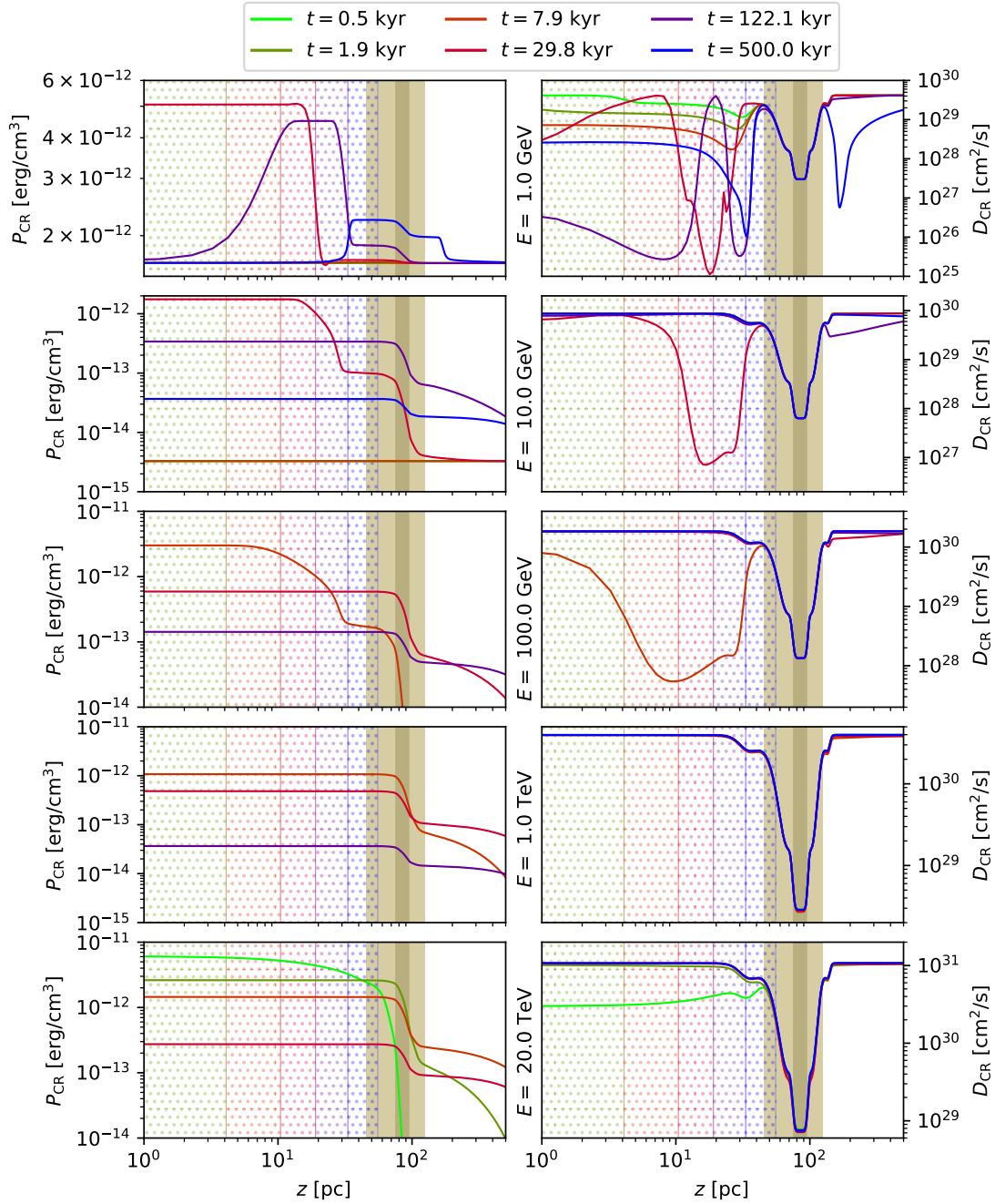


Figure 2.20: Tests fiduciaux de transport du rayonnement cosmique s'échappant d'un reste de supernova réalisé avec le code CR SPECTRA. Les sous-figures de gauche/droite représentent la distribution de pression/le coefficient de diffusion sur rayonnement cosmique aux différentes énergies : 1 GeV (en haut) à 20 TeV (en bas). Seul le setup **WCDda** est représenté par les lignes continues. Le dégradé de couleur réfère à l'instant  $t$  de la mesure. La bande colorée claire/foncée représente la position de la phase CN-M/DiM. Les bandes en pointillés colorés représentent la position du choc du reste au cours du temps; la couleur des pointillés fait référence à l'instant de la mesure.

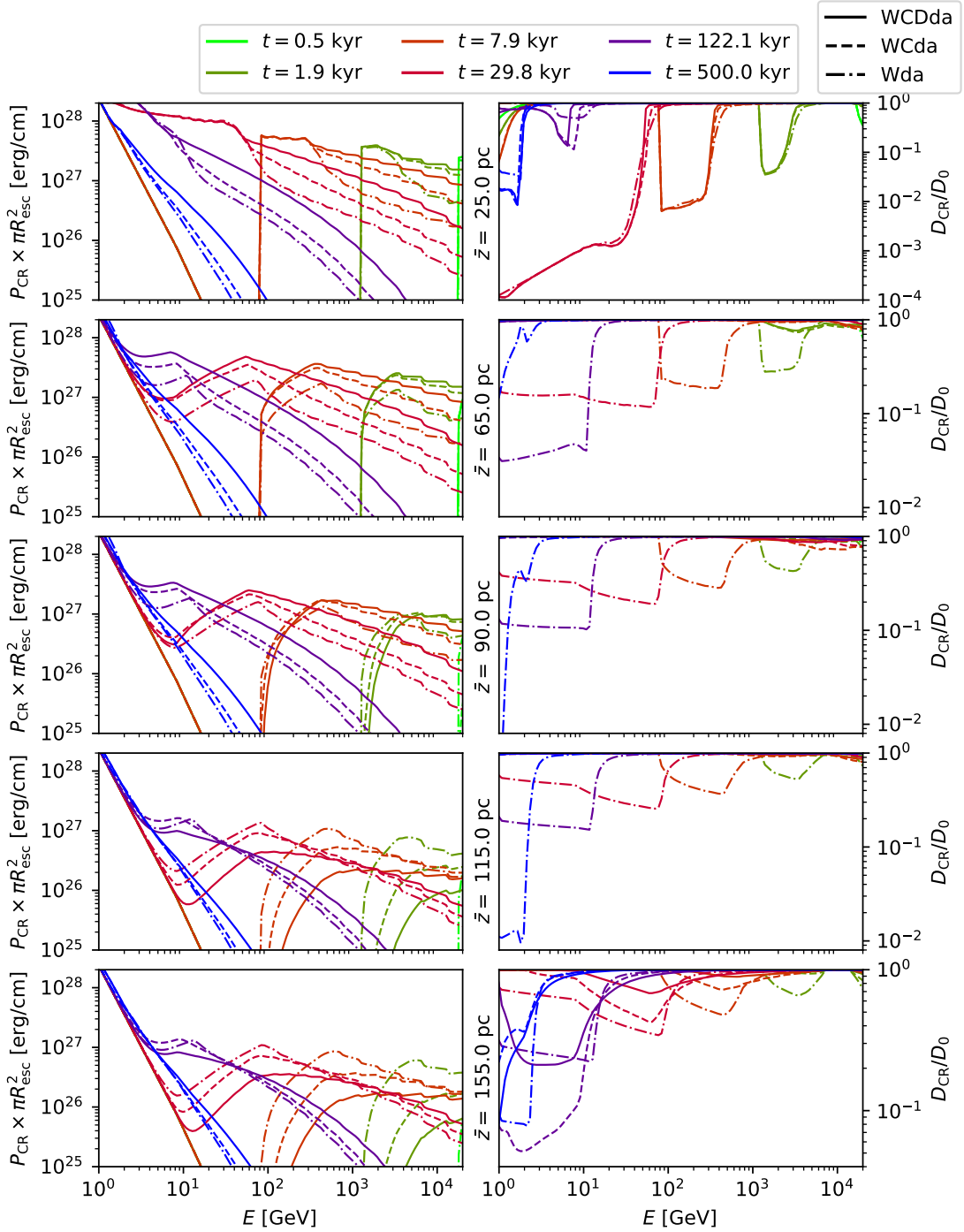


Figure 2.21: Tests fiduciaux de transport du rayonnement cosmique s'échappant d'un reste de supernova réalisé avec le code CR SPECTRA. Les sous-figures de gauche/droite représentent le flux de RCs/la distribution en énergie du coefficient de diffusion normalisé par la loi de diffusion du fond et ce mesurés dans chaque phase à partir du centre de la source pour le setup **WCDda** et aux positions coïncidentes pour les setups **Wda** et **WCda** :  $\bar{z} = z - z_{\text{SNR}} = 25, 65, 90, 115, 155$ . Les traits pleins font référence au setup **WCDda**, les tirets font référence au setup **WCda** et les alternances tiret-point font référence au setup **Wda**. Le code couleur est le même que celui présenté dans la figure (2.17).

J'ai contribué au développement d'un modèle de transport du rayonnement cosmique permettant de lier l'échappement des restes de supernova et la propagation dans le milieu interstellaire des rayons cosmiques, de manière quasi-continue. Ce modèle peut être utilisé pour simuler l'émission  $\gamma$  de nuages moléculaires dans les environnements proches des sources afin de poser une contrainte sur l'origine hadronique ou leptonique de l'illumination  $\gamma$ . Des observations de nuages moléculaires en  $\gamma$  permettraient de contraindre le modèle d'injection et de transport du rayonnement cosmique dans le MIS.

J'ai implémenté la possibilité de simuler l'échappement et la propagation du rayonnement cosmique dans un milieu intersellaire multiphasique. Pour cela j'ai ajouté les termes de pertes adiabatiques aux équations du système afin de tenir compte du fait que la vitesse d'Alfvén du milieu évolue et affecte les RCs aux interfaces entre phases. J'ai montré que le rayonnement cosmique de basse énergie  $E < 100$  GeV est sensible aux interfaces entre phases mais que ce n'est pas le cas pour les rayons cosmiques de haute énergie  $E > 1$  TeV si le coefficient de diffusion du fond ne varie pas aux transitions. Ceci vient de la dépendance du taux de croissance des ondes en la vitesse d'Alfvén qui est beaucoup plus élevé à basse énergie qu'à haute énergie. Dans le cas où le coefficient de diffusion du fond dépend de la phase du milieu intersellaire, j'ai montré que l'effet de confinement est beaucoup plus important mais qu'il n'est pas dû à la turbulence auto-générée mais simplement aux variations du coefficient de diffusion de fond. De manière générale, les nuages moléculaires semblent jouer un rôle de "barrage" de rayons cosmiques et doivent en conséquence être asymétriquement illuminés. Qui plus est, la longueur de pénétration des RCs dans les nuages semble dépendre de l'énergie et rend probablement le spectre d'illumination  $\gamma$  dépendant de la distance à la source de rayonnement cosmique au sein du nuage. Il est possible de simuler l'illumination  $\gamma$  d'un nuage moléculaire dans l'environnement proche d'un reste de supernova avec le code CR SPECTRA.

Cependant, il existe un certain nombre de problématiques qui n'ont pas été résolues ou étudiées dans ce travail. Malkov et al. (2013) [148] a proposé un modèle d'injection du rayonnement cosmique qui dépend fortement des non-linéarités de diffusion des RCs dans l'environnement de la source. Ce modèle présente une faiblesse; dans les bandes d'énergie où le rayonnement cosmique ne génère pas de turbulence car les ondes d'Alfvén ne peuvent pas se propager, le modèle ne présente aucune solution d'injection. Dans le cadre d'une injection d'un continuum d'énergie de RCs qui peuvent interagir énergétiquement avec le milieu, ce dernier n'est pas viable. C'est pourquoi j'ai préféré l'utilisation du modèle présenté par Celli et al. (2019) [29] qui consiste en une relation paramétrée dépendant de l'énergie maximale de le rayonnement cosmique peut atteindre lorsque le choc du reste est à la transition étape libre, étape Sedov-Taylor, et un paramètre libre  $\delta$  qui peut dépendre du temps et qu'il est nécessaire de contraindre. Le débat concernant la valeur de ce paramètre est toujours en cours, des simulations avec le code CR SPECTRA pourraient permettre de contraindre sa valeur.

L'équation du transport des rayons cosmiques a été définie dans l'approximation de transport quasi-linéaire (QLT) et nécessite que les niveaux de turbulence restent faibles  $(\delta B/B_0)^2 \ll 1$ . Il peut arriver, en particulier dans le cas de l'instabilité de streaming de RCs à haute énergie  $E > 1$  TeV que les niveaux de turbulence approchent voire sortent de l'approximation QLT. Afin de parer cet effet, j'ai implémenté un terme de saturation artificiel. Afin d'étudier de manière plus physique cette saturation nous devons nous baser sur des simulations de microphysique. Pour l'instabilité de streaming résonante Holcom & Spitkovsky [105] proposent un critère basé sur les effets de déflexion angulaire des rayons cosmiques, à savoir que la fréquence de diffusion angulaire  $\nu_s = v^2/3D$  où  $D$  est le coefficient de diffusion le long des lignes de champ, devient égale au taux de croissance des ondes. Ceci permet d'obtenir des valeurs de saturation relativement modestes  $\delta B/B \sim 10^2$ . Néanmoins, la présence d'un gradient de pression de RC induit aussi un courant  $-D\partial_z n_{\text{CR}}$  qui peut produire des modes non-résonants et donc contribuer à produire des niveaux de turbulence plus élevés [243]. Tous ces développements nécessitent encore d'être implémentés.

L'approximation de tube de flux trouve rapidement ses limites à des distances de l'ordre de 100 pc du centre de la source. En effet, au delà de la longueur et du temps de cohérence du champ magnétique, le rayonnement cosmique doit commencer à diffuser de manière quasi-isotrope dans le milieu interstellaire. A défaut de réécrire le code CR SPECTRA en 3D, il est possible d'implémenter un terme de transport perpendiculaire qui contribue à diluer les distributions de pression des rayons cosmiques. Il existe deux manières de modéliser un tel effet dans le modèle de tube de flux : la première méthode consiste à définir une position critique  $z_c = z_{\text{SNR}} \pm l_c$  qui représente la limite de la longueur de cohérence du champ magnétique loin de la source à partir de laquelle un terme source de pertes par diffusion perpendiculaire est appliqué aux distributions d'électrons et de protons avec un coefficient de diffusion perpendiculaire proche du coefficient de diffusion parallèle, la seconde méthode consiste à appliquer un terme de pertes par diffusion perpendiculaire aux distributions de pression dans toute la boîte de simulation avec un coefficient de diffusion artificiel de la forme  $\kappa_{\perp} \approx \eta\kappa_{\parallel}$  où  $\eta \ll 1$  contient les propriétés statistiques de la turbulence aux différentes échelles.

Enfin, d'autres améliorations du code CR SPECTRA peuvent conduire à un modèle plus réaliste. Il est d'une part possible de réécrire le code en 2 dimensions afin de tenir compte de manière explicite des processus de transport perpendiculaire. Dans ce cas, il sera nécessaire d'utiliser la bibliothèque de parallélisation MPI (Message Passing Interface) afin de répartir la charge de calcul sur plusieurs coeurs voire plusieurs noeuds dans le cadre d'une utilisation dans un centre de calcul. En 2D, afin de répartir la charge de calcul sur les processeurs, il est usuel de décomposer la grille de calcul de manière contigüe à l'aide d'un algorithme de Peano. Cependant, le problème étudié, dans le cas où la grille est cartésienne, s'inscrira essentiellement dans un rectangle et non un carré. Il est alors nécessaire de redéfinir l'algorithme de Peano afin d'obtenir une courbe qui possède les mêmes propriétés mais pour une surface rectangulaire quelconque. Enfin il

sera également nécessaire d'ajouter un modèle de turbulence des ondes magnétosoniques qui joue un rôle important dans le transport perpendiculaire du rayonnement cosmique.

## 2.5 Applications

### 2.5.1 Emission $\gamma$ de MCs dans le CSM

Le milieu circum-source (CSM) des SNRs est loin d'être homogène et peut parfois présenter des phases moléculaires. Les télescopes gamma AGILE<sup>17</sup>, Fermi<sup>18</sup> et H.E.S.S.<sup>19</sup> ont permis d'observer des SNRs d'âge moyen ( $t > 1$  kyr) en interaction avec des MCs. Il semble que l'illumination  $\gamma$  mesurée est issue de la désintégration de pions neutres produits par collisions inélastiques entre les RCs et les nucléons du milieu ambiant [166]. Néanmoins se pose la question de l'origine hadronique ou leptonique du flux  $\gamma$  mesuré. Le code CR SPECTRA est en mesure de modéliser l'échappement la propagation et l'illumination  $\gamma$  d'origine hadronique ou leptonique d'un nuage moléculaire dans l'environnement d'un SNR. Ce travail donnera lieu à une publication et pourrait même contribuer au CTA data challenge 2<sup>20</sup> en fournissant des modèles d'illumination  $\gamma$  de MCs dans le CSM.

### 2.5.2 Recherche d'une source de RCs cachée

L'analyse de l'origine des flux de RCs mesurés par différents observatoires constitue un enjeu majeur de la compréhension des processus astrophysiques de notre univers. Fornieri et al. (2020) [75] ont en particulier cherché à comprendre les origines de la composante leptonique du spectre local de RCs et ont montré qu'il peut être expliqué en considérant la présence de SNRs dans notre environnement proche : Vela Jr, Vela, Cygnus L, Simeis-147 et IC-443. Ils ont cependant observé un adoucissement à  $\sim 1$  TeV du spectre leptonique qui requiert la présence d'un SNR supplémentaire en phase radiative qui n'a à priori pas encore été identifié. La caractérisation analytique des propriétés de la source cachée a donné lieu à une lettre soumise en Aout 2020 : Fornieri et al. (2020, submitted) [76] et devrait être appuyée par un travail supplémentaire de caractérisation de la source cachée avec le code CR SPECTRA.

### 2.5.3 SNe de type core collapse

Les travaux présentés dans ce chapitre consistent en la modélisation de l'échappement des RCs de SNRs dont l'origine est une SN thermonucléaire (type Ia). Il est possible d'adapter le problème aux SNe de type II [63] [150]. Les propriétés d'expansion du choc du SNR et du CSM sont différentes et peuvent conduire à des conclusions différentes pour ce type d'objet.

<sup>17</sup>AGILE (Astro-rivelatore Gamma a Immagini LEggero) : <http://agile.rm.iasf.cnr.it/>

<sup>18</sup>Fermi Gamma-ray Space Telescope : <https://fermi.gsfc.nasa.gov/>

<sup>19</sup>H.E.S.S (High Energy Stereoscopic System) : <https://www.mpi-hd.mpg.de/hfm/HESS/>

<sup>20</sup>CTA (Cerenkov Telescope Array) : <https://www.cta-observatory.org/>

#### **2.5.4 Amas d'étoiles massives**

Les amas d'étoiles massives sont des objets très actifs à l'origine de l'émission de rayonnement cosmique et de vents galactiques. Bien que l'injection du rayonnement cosmique par un tel objet nécessite un peu de travail, il est possible avec le code CR SPECTRA de modéliser une telle source et d'inférer son impact sur la dynamique du milieu interstellaire.

# Propagation des RCs dans le MIS turbulent avec le code RAMSES

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Contexte</b>	<b>168</b>
3.1.1	Motivations de l'étude	168
3.1.2	Présentation du code MHD-RAMSES	169
<b>3.2</b>	<b>Modèles théoriques</b>	<b>170</b>
3.2.1	Diagramme d'ionisation du milieu interstellaire	170
3.2.2	Modèle de turbulence auto-générée par le rayonnement cosmique	171
3.2.3	Modèle de turbulence à "grande échelle"	175
3.2.4	Effet de streaming du rayonnement cosmique	177
3.2.5	Modèle d'injection du rayonnement cosmique	178
<b>3.3</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>180</b>
3.3.1	Equations MHD avec diffusion/derive des RCs	180
3.3.2	Equations de la MHD dans le code MHD-RAMSES	181
3.3.3	Equation de diffusion anisotrope du rayonnement cosmique	184
3.3.4	Implémentation de l'effet de streaming	186
3.3.5	Implémentation du processus de forçage turbulent	187
3.3.6	Implémentation du modèle de turbulence auto-générée	188
<b>3.4</b>	<b>Résultats</b>	<b>190</b>
3.4.1	Terminologie et paramétrisation	190
3.4.2	Etude du système RC-MIS sans sources	190
3.4.3	Injection d'une source de rayonnement cosmique	193
3.4.4	Etude du système RC-MIS avec plusieurs sources	202
<b>3.5</b>	<b>Discussion</b>	<b>209</b>

---



## 3.1 Contexte

### 3.1.1 Motivations de l'étude

Le rayonnement cosmique joue un rôle très important dans la dynamique du milieu interstellaire et ce à différentes échelles [91] : il génère des vents galactiques à grande échelle [93] [20] [235], génère des champs magnétiques à grande échelle à travers l'instabilité de Parker [94] [24], injecte de la turbulence magnétique aux échelles intermédiaires [185], ionise, diffuse et chauffe les nuages moléculaires et environnements protostellaires [170] [171] [184], produit des éléments chimiques par spallation [28] et a un impact non-négligeable sur la charge des poussières dans les zones denses [113]. S'il est admis que ce rayonnement cosmique est essentiellement injecté dans le MIS par processus d'accélération par les chocs diffusifs (DSA : Diffusive Shock Acceleration) des SNRs [15] [58] [149], la question de l'échappement et du transport des RCs dans les environnements proches des SNRs reste ouverte. Des modèles (semi-)analytiques d'échappement auto-régulé ont récemment été développés [148] [160] [161] [22] et permettent de décrire ce processus plus en détail. En particulier, le rayonnement cosmique génère de la turbulence aux petites échelles à travers la force exercée par l'instabilité de streaming sur le plasma [207] qui contribue à modifier les propriétés de transport des RCs. La turbulence dans le MIS est un mécanisme clé des modèles de formation d'étoile [99] [100] [70]. La turbulence dans le milieu interstellaire est caractérisée par ses propriétés statistiques comme par exemple : L'étude des effets liés aux différentes géométries de forçage (modes de compression vs. modes solénoïdaux) [69], l'impact des champs magnétiques [141], les propriétés thermodynamiques de la turbulence dans des modèles non-isothermes [164].

Dans ce cadre, Y. Dubois & B. Commerçon (2016) [60] ont implémenté une équation d'advection-diffusion des RCs dans le code MHD-RAMSES. Le coefficient de diffusion des RCs est anisotrope et est contrôlé par un paramètre d'anisotropie libre, les RCs diffusent préférentiellement le long des lignes de champ. Leur implémentation est décrite dans la section (3.3.3). Ils réalisent un test d'une explosion Sedov 3D dans un champ magnétique uniforme afin de mettre en évidence les effets de la diffusion anisotrope des RCs. Commerçon et al. (2019) [38] étudient la propagation du rayonnement cosmique dans un milieu interstellaire turbulent faiblement ionisé magnétisé et bi-stable. Ils montrent qu'il existe deux régimes de transport des RCs dans le MIS, un régime dans lequel le coefficient de diffusion des RCs est faible et les particules sont couplées à la turbulence, et un régime dans lequel le coefficient de diffusion des RCs est important et les particules se meuvent indépendamment de la turbulence dans le MIS. De plus, les gradients de pression des RCs contribuent à modifier de manière notable les propriétés du MIS. Dubois et al. (2019) [61] implémentent dans l'équation des RCs la vitesse de streaming des RCs et l'effet de chauffage du gaz qui y est associé. Ce modèle est décrit dans la section (3.2.4). Dans le chapitre (2) et dans ma publication Brahim et al. (2020) [22] j'ai contribué au développement d'un modèle semi-analytique d'échappement et de transport auto-régulé des RCs des restes de supernovae.

Dans certaines configurations astrophysiques, le rayonnement cosmique peut générer de la turbulence aux petites échelles  $\ll 1$  pc qui contribue de manière importante à la modification des propriétés de transport des RCs et donc à la manière dont ils affectent la turbulence dans le MIS. Ce chapitre cherche à répondre à la problématique du transport auto-régulé des RCs dans un MIS turbulent. La difficulté de ce travail est que l'échelle de production de la turbulence auto-générée est bien en deçà de la résolution de la plupart des codes astrophysiques. Ce modèle de turbulence est donc traité comme un modèle "sous-grille" et est décrit dans la section (3.2.2). De plus, ce travail propose un modèle d'injection dynamique de RCs dans le MIS turbulent et en teste les effets sur la turbulence.

Ce chapitre s'organise de la manière suivante. La section (3.2) discute de l'aspect théorique des différents modèles qui sont utilisés dans cette étude : un modèle permettant de calculer le taux d'ionisation du gaz (traité comme un fluide ionisé dans le code RAMSES) sans passer par une équation de transfert radiatif, le modèle de turbulence auto-générée, un modèle de turbulence "à grande échelle", l'effet de streaming du rayonnement cosmique et enfin un modèle d'injection du rayonnement cosmique par les restes de supernovae. La section (3.3) décrit l'ensemble des méthodes numériques utilisées et implémentées dans le code MHD-RAMSES : le système général d'équations utilisé, la résolution des équations MHD-idéale dans le code RAMSES, l'implémentation de l'équation de diffusion anisotrope du rayonnement cosmique, l'implémentation de l'effet de streaming des RCs, l'implémentation du processus de forçage turbulent et du modèle sous-grille de turbulence auto-générée. La section (3.4) décrit trois études actuellement préliminaires réalisées avec le code MHD-RAMSES : une étude d'un système RC-MIS sans sources, une étude de l'injection d'une source de RCs, une étude d'un système RC-MIS avec sources. Enfin, la section (3.5) discute des résultats obtenus et conclue. Un papier Brahimi et al. (2021) est en cours de préparation, les résultats présentés sont encore préliminaires : la résolution des simulations est de  $64^3$ . Les simulations ont été majoritairement réalisées grâce au centre de calcul DEC (Dark Energy Center) du laboratoire CPPM<sup>1</sup> (Marseille) et en partie à l'aide du centre de calcul OCCIGEN<sup>2</sup>.

### 3.1.2 Présentation du code MHD-RAMSES

Le code RAMSES a initialement été développé par Romain Teyssier en 2002 [220] écrit dans le langage Fortran 90 et qui utilise la librairie extensive MPI (Message Passing Interface) dans le but d'étudier les grandes structures cosmologiques et la formation des galaxies. Il est alors composé d'un module de résolution des problèmes à N corps, d'un solveur hydrodynamique sur la méthode de Godunov de second ordre et un solveur de l'équation de Poisson. Le code est également équipé d'une méthode de raffinement adaptatif de grille de calcul (AMR : Adaptive Mesh Refinement) avec une structure de données en arbre permettant ainsi un raffinement récursif de la grille cellule par

<sup>1</sup>Centre de Physique des Particules de Marseille : <https://cppm.in2p3.fr/web/fr/index.html>

<sup>2</sup>OCCIGEN : <https://www.cines.fr/calcul/materiels/occigen/>

cellule. En 2006, S. Fromang, P. Hennebelle et R. Teyssier [78] étendent le solveur hydrodynamique à la magnétohydrodynamique idéale. Le code RAMSES est alors adapté à toutes les situations astrophysiques où le champ magnétique joue un rôle non-négligeable. De fait, un grand nombre de modules adaptés à différentes situations astrophysiques sont développés, rendant le code RAMSES flexible et très utilisé. En 2016 Y. Dubois & B. Commerçon [60] ajoutent un patch dans lequel il est possible de résoudre les équations de la MHD couplées avec des équations de transport de fluides non-thermiques : de rayons cosmiques ou d'électrons par exemple. Ce dernier aspect est décrit en détails dans ce chapitre. La version du code RAMSES adaptée au travail réalisé dans ce chapitre est disponible via le lien suivant<sup>3</sup> tandis que le patch développé est obtainable par le chemin : `RAMSES_ANISO_CR/ramses_aniso/ramses/patch/cr/retro_diffusion_dynamic2`.

## 3.2 Modèles théoriques

### 3.2.1 Diagramme d'ionisation du milieu interstellaire

Cette section n'a pas vocation à ré-itérer ce qui a été discuté en section (2.2.1) qui présente en détail les différentes propriétés des phases interstellaires (voir table 2.1) et la manière dont sont transportées les perturbations magnétiques en son sein. Cependant, rappelons que le code MHD-RAMSES ne résout que les équations de la MHD à un fluide totalement ionisé ( $X = 1$ ) et que l'étude que nous présentons concerne la dynamique du transport du rayonnement cosmique dans le milieu interstellaire partiellement ionisé ( $X < 1$ ). Nous avons vu que l'approche MHD bi-fluide (voir section 1.1.4) est idéale pour traiter ce genre de systèmes et fait donc appel à un fluide neutre que ne peut pas considérer le code MHD-RAMSES. Pour cette raison, il est nécessaire de développer un outil permettant de définir un lien entre le taux d'ionisation d'un gaz et ses propriétés thermodynamiques indépendantes de toute approche MHD.

La méthode la plus évidente consiste à ajouter une équation de transfert radiatif aux équations existantes afin de faire le lien entre la densité  $n_T$  du gaz sa température  $T$  et son taux d'ionisation  $X$  [12] [62] [144]. Cependant la théorie du transfert radiatif dans le milieu interstellaire est extrêmement complexe et constitue un sujet d'étude à part entière. Dans ce travail, nous n'ajoutons pas d'équation de transfert radiatif pour définir une fonction  $X = X(n_T, T)$ .

La seconde méthode consiste à interpoler les données obtenues par un grand nombre d'observations du milieu interstellaire ou encore, obtenues par des simulations numériques de transfert radiatif dans des conditions similaires à celles de notre étude. Ce travail n'a pas encore été fait; pour le moment, la fonction  $X(n_T, T)$  est construite à partir des données bibliographiques présentées dans la table (2.1). Cependant, la quantité de données est très insuffisante pour déterminer le taux d'ionisation du gaz  $X$  en fonction de sa densité  $n_T$  et sa température  $T$ . C'est la raison pour laquelle j'ai construit un

<sup>3</sup>[https://github.com/LoannData/RAMSES\\_ANISO\\_CR.git](https://github.com/LoannData/RAMSES_ANISO_CR.git)

diagramme de Voronoï (voir annexe A.9) qui est un cas particulier de méthode kNN (k-Nearest Neighbor) permettant de créer une surface du taux d'ionisation du gaz  $X$  en fonction des variables  $T$  et  $n_T$ . Afin de se prémunir du développement d'instabilités numériques liées aux discontinuités de valeur du taux d'ionisation  $X(n_T, T)$  conséquence du dallage créé par le diagramme, on peut redéfinir la fonction d'ionisation comme

$$X(n_T, T) = \frac{\sum_{i=1}^N X_i / d_i(n_T, T)^n}{\sum_{i=1}^N 1 / d_i(n_T, T)^n} \quad (3.1)$$

où  $N = 7$  correspond au nombre de phases utilisées dans la construction du diagramme,  $X_i$  correspond au taux d'ionisation de la phase d'indice  $i$ ,  $d_i(n_T, T) = \sqrt{(T_i - T)^2 + (n_{T_i} - n_T)^2}$  correspond à la distance Euclidienne entre le couple de points  $(n_T, T)$  et le couple de caractéristiques  $(n_{T_i}, T_i)$  de la phase  $i$  et  $n = 20$  est un paramètre libre d'adoucissement de la transition du taux d'ionisation entre deux niveaux.

Le diagramme d'ionisation utilisé dans ce travail est présenté dans la figure (3.1). Nous observons qu'à basse température ( $T < 10^3$  K) et à haute densité ( $n_T > 10 \text{ cm}^{-3}$ ), dans les milieux moléculaires froids, le taux d'ionisation est essentiellement dépendant de la densité et oscille entre  $X \approx 10^{-3}$  (dans le CNM) et  $X \approx 10^{-6}$  dans les coeurs denses (DeC). Lorsque la densité devient inférieure à  $10 \text{ cm}^{-3}$ , le taux d'ionisation devient essentiellement dépendant de la température du milieu et oscille entre  $X \approx 10^{-3}$  (dans le CNM) et  $X \approx 1$  (dans les phases HIM). Dans le cas où la température est faible  $T < 10^4$  K le taux d'ionisation oscille entre  $10^{-3}$  (CNM) et  $10^{-2}$  (WNM). C'est essentiellement dans ce régime que les plasmas simulés se trouvent. Notons tout de même que le choix de considérer, dans le diagramme  $X(n_T, T)$ , une phase WNM au lieu d'une phase WIM est uniquement motivé par le choix de la situation astrophysique à explorer, ici les milieux partiellement ionisés. Par conséquent, le diagramme présenté ne peut en aucun cas être considéré comme applicable à l'ensemble des situations astrophysique dans le milieu interstellaire. A haute température ( $T > 10^3$  K) et à haute densité ( $n_T > 10 \text{ cm}^{-3}$ ) j'ai considéré la présence d'une phase HII totalement ionisée pour inclure les situations de gaz chaud et dense qui peuvent localement apparaître dans les simulations. Bien qu'approximatif, ce modèle de taux d'ionisation est suffisant car il intervient uniquement dans le calcul des taux d'amortissement des modes d'Alfvén auto-générés et on montre à posteriori qu'une grande majorité des milieux simulés se trouvent entre le CNM et le WNM (voir section 3.4.2).

### 3.2.2 Modèle de turbulence auto-générée par le rayonnement cosmique

Nous avons vu dans le chapitre (2) que le rayonnement cosmique peut substantiellement affecter les propriétés du milieu interstellaire et que ce dernier peut avoir un impact important sur les propriétés de transport des particules suprathermales. Dans ce travail, l'objectif est de modifier le coefficient de diffusion du rayonnement cosmique implémenté dans le code MHD-RAMSES et qui représente l'effet de la turbulence à "grande échelle" (voir paragraphe 3.2.3) afin de tenir compte de la turbulence auto-générée par le rayon-

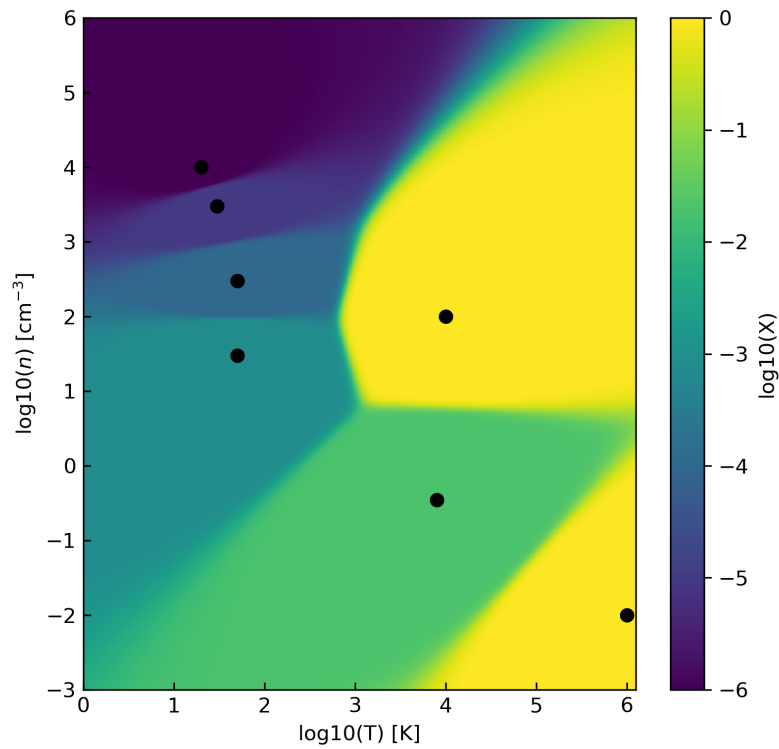


Figure 3.1: Diagramme de Voronoï du taux d'ionisation  $X$  du milieu interstellaire dans le plan  $(n_T, T)$  de densité numérique de gaz et de température. Les points noirs réfèrent aux données bibliographiques  $(n_T, T)$  présentées dans la table (2.1) tandis que la surface colorée présente la valeur du taux d'ionisation du gaz  $X$  en fonction de  $(n_T, T)$ .

nement cosmique. On peut définir le coefficient de diffusion des rayons cosmiques total comme

$$D_{\text{CR}} = [D_{\text{ISM}}^{-1} + D_{\text{self}}^{-1}]^{-1} \quad (3.2)$$

où  $D_{\text{ISM}}$  est un coefficient de diffusion anisotrope conséquence de la turbulence pré-existante ("à grande échelle") à l'échelle d'étude, et  $D_{\text{self}}$  est un coefficient de diffusion anisotrope défini par les perturbations magnétiques auto-générées et donné par

$$D_{\text{self},\parallel} = \frac{4\pi cr_g}{3I(k)} \quad (3.3)$$

$$D_{\text{self},\perp} = I(k)^2 D_{\text{self},\parallel} \quad (3.4)$$

suivant les résultats de la théorie quasi-linéaire du transport du rayonnement cosmique [194] (voir annexe A.5). La composante parallèle représente la diffusion le long des lignes de champ magnétique ordonnées tandis que la composante perpendiculaire représente la diffusion normale à la direction des lignes de champ magnétique.

Rappelons que le modèle de turbulence auto-générée résulte de l'équilibre entre la pression du rayonnement cosmique exercée sur le plasma de fond et la turbulence qu'il génère. Dans ce travail, on ne considère qu'une population de rayons cosmiques monochrome d'énergie 1 GeV. En conséquence, les équations maitresses du modèle dans un plasma partiellement ionisé ( $X \ll 1$ ) sont données par [160]

$$\frac{\partial P_{\text{CR}}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\text{st}} \cdot \nabla P_{\text{CR}} = \nabla \cdot D_{\text{CR}} \nabla P_{\text{CR}} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial I(k)}{\partial t} + \mathbf{v}_{\text{st}} \cdot \nabla I(k) = \frac{\mathbf{v}_{\text{st}} \cdot \nabla P_{\text{CR}}}{2W_0} - \Gamma_{\text{IN}} I(k) \quad (3.6)$$

où  $I(k) = (\delta B/B_0)_k^2$  représente l'intensité spectrale des ondes d'Alfvén en résonance avec l'échelle de gyration  $r_g = k^{-1}$  des rayons cosmiques à 1 GeV,  $\mathbf{v}_{\text{st}} = -\mathbf{V}_A \text{sgn}(\mathbf{B} \cdot \nabla P_{\text{CR}})$  est la vitesse de streaming (de courant) du rayonnement cosmique et  $W_0 = B_0^2/8\pi$  est la densité d'énergie magnétique. Dans ce modèle, on considère que la vitesse d'Alfvén évolue faiblement d'une phase à l'autre ( $\nabla \cdot \mathbf{V}_A \approx 0$ ) bien que le milieu considéré dans ce travail est turbulent et que  $\partial \mathbf{V}_A / \partial \mathbf{k} \approx 0$  où  $\mathbf{k}$  correspond à un vecteur d'onde. Les pertes adiabatiques des RCs sont donc négligées.

Dans ce travail, on suggère que la turbulence auto-générée est stationnaire, c'est à dire que l'échelle de temps caractéristique de variation de la turbulence auto-générée est grande comparée à l'échelle de temps de diffusion du rayonnement cosmique. Cette hypothèse est vérifiée a priori dans ma publication Brahim et al. (2020 [22]); la vitesse d'advection des ondes est négligeable comparée à la vitesse de diffusion du rayonnement cosmique. En conséquence, le système d'équations maitresses peut se réécrire

$$\frac{\partial P_{\text{CR}}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\text{st}} \cdot \nabla P_{\text{CR}} = \nabla \cdot D_{\text{CR}} \nabla P_{\text{CR}} \quad (3.7)$$

$$0 = \frac{\mathbf{v}_{\text{st}} \cdot \nabla P_{\text{CR}}}{2W_0} - \Gamma_{\text{IN}} I.. \quad (3.8)$$

L'approximation de stationnarité du modèle de turbulence auto-générée n'est néanmoins pas complètement évidente.

En réécrivant l'équation (3.8) comme

$$I(k) = \frac{\mathbf{v}_{\text{st}} \cdot \nabla P_{\text{CR}}}{2W_0 \Gamma_{\text{IN}}} \quad (3.9)$$

on voit que le modèle de turbulence auto-générée résulte de l'équilibre entre les gradients de pression des rayons cosmiques exercés sur le gaz et les propriétés cinétiques du gaz qui se manifestent à travers les termes  $\mathbf{v}_{\text{st}}$  et  $\Gamma_{\text{IN}}$ . Dans les phases partiellement ionisées, la figure (2.2) montre qu'aux échelles résonantes avec le rayon de Larmor des rayons cosmiques d'énergie 1 GeV, le régime de propagation des modes d'Alfvén est découplé, et par conséquent, le taux d'amortissement des ondes est défini par  $\Gamma_{\text{IN}} = -\nu_{\text{in}}/2$ . L'équation (2.1) montre que pour les plasmas de température supérieure à 50 K le taux de collision est dépendant de la densité de neutres et de la température comme  $\nu_{\text{in}} \propto n_n T^{0.4}$ . Dans le cas d'un plasma faiblement ionisé  $X \ll 1$ , on montre que le niveau de turbulence évolue en

$$I \propto \frac{|\nabla P_{\text{CR}}|}{B_0 \rho^{3/2} T^{0.4}} \Rightarrow D_{\text{self},\parallel} \propto \frac{\rho^{3/2} T^{0.4} E}{|\nabla P_{\text{CR}}|} \quad (3.10)$$

où  $\rho$  correspond à la densité massique du plasma. A énergie  $E$  fixée, on observe donc que le coefficient de diffusion auto-généré dépend du rapport  $\rho^{3/2} T^{0.4} / |\nabla P_{\text{CR}}|$  entre l'état thermodynamique du plasma et la présence de gradients de pression de rayons cosmiques.

Dans le cas où le plasma est totalement ionisé ( $X \approx 1$ ), nous avons vu que les ondes d'Alfvén ne sont plus amorties via collisions ion-neutre mais via amortissement de Landau non-linéaire  $\Gamma_{\text{NLLD}}$  (équation 2.12) et amortissement turbulent  $\Gamma_{\text{L16}}$  (paragraphe 1.3.4.2). La relation (3.9) appliquée à chacun des deux termes amortissements, injectée dans la définition (3.3) donne pour coefficient de diffusion Landau non-linéaire et coefficient de diffusion de l'amortissement turbulent

$$D_{\text{NLLD}} \approx 0.94 c r_g B_0 \left[ \left( \frac{\mathbf{v}_{\text{st}}}{v_i} \right) \cdot (r_g \nabla P_{\text{CR}}) \right]^{-1/2} \quad (3.11)$$

$$D_{\text{L16}} \approx \frac{1}{3} c B_0^2 \frac{r_g^{3/2}}{L^{1/2}} \left[ \left( \frac{v_{\text{rms}}(L)}{|\mathbf{v}_{\text{st}}|} \right)^{-3/2} \left( \frac{\mathbf{v}_{\text{st}}}{|\mathbf{v}_{\text{st}}|} \right) \cdot (r_g \nabla P_{\text{CR}}) \right]^{-1} \quad (3.12)$$

où  $v_i = \sqrt{k_B T / \langle m \rangle}$  correspond à la vitesse thermique des particules du plasma,  $\langle m \rangle \approx m_p$  étant la masse moyenne des particules,  $L = 50$  pc correspond à l'échelle d'injection de

la turbulence "grande échelle" dans le modèle de turbulence auto-générée et  $v_{\text{rms}}(L) \approx 10$  km/s correspond à la dispersion de vitesse du gaz à l'échelle d'injection de la turbulence. Cette vitesse est inférée à posteriori à partir du modèle de turbulence à "grande échelle" (paragraphe 3.2.3) et du module de forçage turbulent (paragraphe 3.3.5). Le coefficient de diffusion auto-généré dans ce régime est donné par

$$D_{\text{self},\parallel} = [D_{\text{NLLD}}^{-1} + D_{\text{L16}}^{-1}]^{-1}. \quad (3.13)$$

Dans ce travail, une des méthodes d'injection du rayonnement cosmique est l'injection de sur-pressions de rayons cosmiques et/ou non de gaz, afin de modéliser l'apparition d'un reste de supernova dans la simulation (voir paragraphe 3.2.5). Dans le reste, la température du gaz est très élevée ( $T > 10^6$  K), le coefficient de diffusion auto-généré doit être considéré en conséquence. Les rayons cosmiques de 1 GeV s'échappent lorsque le choc du reste est à la fin de la phase radiative, c'est à dire que les conditions thermodynamiques à l'intérieur du choc sont relativement proches des conditions dans le milieu interstellaire environnant. Il n'existe pas de modèle précis de transport du rayonnement cosmique dans les restes de supernovae; choisissons de définir le coefficient de diffusion des RCs auto-généré dans les restes de supernovae comme

$$D_{\text{self},\parallel} = 0.1D_{\text{ISM}}. \quad (3.14)$$

Cette valeur correspond raisonnablement à la situation où le reste est quasi dilué mais dont le niveau de turbulence est toujours plus important que dans le milieu interstellaire. Bien qu'approximative, cette hypothèse n'impacte pas ou peu la réalité physique étudiée dans ce chapitre.

### 3.2.3 Modèle de turbulence à "grande échelle"

La turbulence "à grande échelle" correspond à la turbulence dans le plasma qui n'a pas été générée par le rayonnement cosmique via le modèle de turbulence auto-générée, mais via des phénomènes qui ont lieu à des échelles spatiales supérieures aux échelles d'étude du problème ( $> 200$  pc). Dans ce travail, la turbulence à "grande échelle" se manifeste de deux manières différentes : en premier lieu à travers la définition du coefficient de diffusion des rayons cosmiques  $D_{\text{ISM}}$ , en second lieu à travers les paramètres du module de forçage turbulent de la boîte de simulation dont l'implémentation est décrite dans le paragraphe (3.3.5) et qui s'applique uniquement au champ de vitesse du gaz.

La turbulence dans le milieu interstellaire dense a été investiguée par un grand nombre d'auteurs comme Larson (1981) [134] et Heyer & Brunt (2004) [104] qui ont dérivé des relations empiriques liant les fluctuations de vitesse non-thermiques  $\sigma$  et la densité du milieu  $n_T$  à la taille  $L$  du nuage turbulent. A partir des observations ils ont montré que

$$\sigma = \sigma_1 \text{ pc } L_1^q \text{ pc} \quad (3.15)$$



où les paramètres  $q \approx 0.35-0.5$  et  $\sigma_{1 \text{ pc}} \approx 1-1.5 \text{ km/s}$  suggèrent une cascade turbulente de type Kolmogorov. On considère que la dispersion de vitesse est uniquement due à l'effet de la turbulence à grande échelle, c'est à dire  $\sigma \approx v_{\text{rms}}$ . Commerçon et al. (2019) [38] définit le temps caractéristique de turbulence  $t_{\text{turb}}$  comme le temps de traversée de la turbulence dans la boîte de simulation c'est à dire

$$t_{\text{turb}} = L/v_{\text{rms}} \quad (3.16)$$

et le temps de diffusion

$$t_{\text{diff}} = L^2/D_{\text{CR}} \quad (3.17)$$

où  $D_{\text{CR}}$  est le coefficient de diffusion des rayons cosmiques. On peut alors en déduire deux régimes de transport du rayonnement cosmique différents et séparés par la condition de balance critique  $t_{\text{turb}} = t_{\text{diff}}$  qui définit un coefficient de diffusion critique

$$D_{\text{crit}} = Lv_{\text{rms}} \quad (3.18)$$

$$= 6.2 \times 10^{25} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \left( \frac{L}{1 \text{ pc}} \right)^q \quad (3.19)$$

à une échelle de grandeur de l'ordre de 200 pc. Ce coefficient de diffusion doit être comparé au coefficient de diffusion total des rayons cosmiques  $D_{\text{CR}} = [D_{\text{ISM}}^{-1} + D_{\text{self}}^{-1}]^{-1}$  dont la valeur du coefficient de diffusion de fond est généralement paramétrisée comme

$$D_{\text{ISM}} \approx 10^{28-29} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \left( \frac{E}{1 \text{ GeV}} \right)^s \quad (3.20)$$

où  $s \approx 0.3 - 0.6$  [216]. Si

→  $D_{\text{CR}} < D_{\text{crit}}$  : Le temps de diffusion du rayonnement cosmique est plus long que le temps de turbulence ce qui implique que les rayons cosmiques sont sensibles aux fluctuations magnétiques du gaz et suivent la même dynamique. Dans ce cas, la pression du rayonnement cosmique est corrélée à la distribution de densité du gaz.

→  $D_{\text{CR}} > D_{\text{crit}}$  : Le temps de diffusion du rayonnement cosmique est plus court que le temps de turbulence impliquant que le rayonnement cosmique n'est pas sensible aux fluctuations magnétiques du gaz. La pression du rayonnement cosmique n'est pas corrélée à la distribution de densité du gaz.

Le coefficient de diffusion  $D_{\text{ISM}}$  des rayons cosmiques d'énergie 1 GeV est environ égal à  $10^{28} \text{ cm}^2/\text{s}$  et suggère que  $D_{\text{ISM}} > D_{\text{crit}}$  et donc que les rayons cosmiques ne sont pas affectés par la turbulence interstellaire à "grande échelle". Cependant, comme nous l'avons vu dans la section (3.2.2), la présence de forts gradients de pression de rayonnement cosmiques et/ou faibles produits  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  du plasma peuvent conduire à une réduction du coefficient de diffusion auto-généré de telle manière que le régime de transport du rayonnement cosmique devienne dépendant de la turbulence interstellaire à grande échelle.

Cet effet est l'un des aspects les plus importants investigués dans ce travail.

Le traitement de la diffusion anisotrope des rayons cosmiques est discutée en détail dans le paragraphe (3.3.3).

### 3.2.4 Effet de streaming du rayonnement cosmique

Le rayonnement cosmique se déplace à une vitesse caractéristique supérieure à la vitesse d'Alfvén, définie par  $V_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$  dans le cas d'une approche MHD bi-fluide. Ceci a pour effet de générer des ondes d'Alfvén (voir annexe A.7) qui en retour peuvent interagir avec les rayons cosmiques. Dans le cadre d'une turbulence Alfvénique composée de modes slabs, ceci n'est rien d'autre qu'une re-formulation du modèle CST (voir paragraphe 3.2.2) dans lequel on considère un effet supplémentaire qui est le fait que la vitesse de groupe des ondes d'Alfvén peut être modifiée par la présence de différents mécanismes d'amortissement : collisions ion-neutre, amortissement non-linéaire de Landau, amortissement turbulent. Kulsrud & Pearce (1969) [128] montre que le taux de croissance des modes d'Alfvén peut s'écrire

$$\Gamma_g \sim \Omega_0 \frac{n_{\text{CR}}(> \gamma)}{n_i} \left( \frac{v_{\text{st}}}{V_A} - 1 \right) \quad (3.21)$$

où  $n_{\text{CR}}(> \gamma)$  correspond à la densité numérique de rayonnement cosmique d'énergie suffisante pour être en résonance avec les modes d'Alfvén à un angle d'attaque  $\mu$  donné, ie.  $r_g > 1/k_{\parallel}$ ,  $n_i$  est la densité d'ion dans le plasma et  $v_{\text{st}}$  correspond à la vitesse de drift (de dérive) des protons, qui correspond à la modification de la vitesse de groupe des modes d'Alfvén ressentie par les rayons cosmiques. En inversant la relation (3.21), la vitesse de streaming donne

$$v_{\text{st}} \sim V_A \left[ 1 + \frac{n_i \Gamma_g}{\Omega_0 n_{\text{CR}}(> \gamma)} \right]. \quad (3.22)$$

En première approximation c'est à dire dans le cas où les collisions RC-ondes et ondes-RC sont négligées, la vitesse de streaming n'est rien d'autre que la vitesse de phase des ondes d'Alfvén du plasma. En revanche, si l'on considère les interactions entre les ondes et les rayons cosmiques, un second terme apparaît et dépend du taux de croissance des ondes d'Alfvén  $\Gamma_g$ . En considérant le modèle CST qui se définit par l'équilibre stationnaire entre le taux de croissance des ondes et le taux d'amortissement donné par la relation

$$\Gamma_g = \Gamma_{\text{IN}} + \Gamma_{\text{NLLD}} + \Gamma_{\text{L16}}, \quad (3.23)$$

la vitesse de streaming peut alors s'écrire [234]

$$v_{\text{st}} = f_{\text{st}}(k) V_A(k) \quad (3.24)$$

où  $V_A(k)$  correspond à la vitesse de phase des modes d'Alfvén à l'échelle résonante  $k = r_g^{-1}$  et

$$f_{\text{st}}(k) \sim 1 + \frac{n_i}{\Omega_0 n_{\text{CR}}(> \gamma)} (\Gamma_{\text{IN}} + \Gamma_{\text{NLLD}} + \Gamma_{\text{L16}}) \quad (3.25)$$

est appelé facteur de boost de la vitesse de streaming (Ruszkowski et al. 2017 [189]).

Dans un environnement tri-dimensionnel, la vitesse de streaming des rayons cosmiques s'écrit

$$\mathbf{v}_{\text{st}} = -f_{\text{st}} \mathbf{V}_A \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla P_{\text{CR}}}{|\mathbf{B} \cdot \nabla P_{\text{CR}}|} \quad (3.26)$$

et est maximale (en norme) lorsque le gradient de pression du rayonnement cosmique est (anti-)aligné avec le champ magnétique. En plus de la vitesse de streaming, le rayonnement cosmique contribue à chauffer le gaz par l'intermédiaire d'un terme source donné par

$$\mathcal{L}_{\text{st}} = -\frac{\mathbf{B} \cdot \nabla P_{\text{CR}}}{|\mathbf{B} \cdot \nabla P_{\text{CR}}|} \mathbf{V}_A \cdot \nabla P_{\text{CR}}. \quad (3.27)$$

Notons que la vitesse utilisée dans l'équation (3.27) est bien la vitesse d'Alfvén et non la vitesse de streaming car lorsque  $f_{\text{st}} > 1$  c'est à dire que le streaming est super-Alfvénique, le transfert d'énergie des rayons cosmiques vers les ondes se fait prioritairement via la portion du streaming qui est uniquement due à la présence des ondes MHD et non les différents taux d'amortissement dans le plasma. Dans ce travail le terme de boost vaut arbitrairement  $f_{\text{st}} = 1$ . Dans la configuration des simulations réalisées dans ce travail, le facteur de boost est de l'ordre de  $f_{\text{st}} \approx 1 + 10^{-6} \frac{n_i}{n_{\text{CR}}(> \gamma)} \approx 1.1$  à 11. Ce qui donne à ce choix une relative consistance.

L'implémentation des termes de streaming est discutée dans le paragraphe (3.3.4).

### 3.2.5 Modèle d'injection du rayonnement cosmique

Comme nous l'avons vu, les SNRs sont considérées comme les principaux accélérateurs du rayonnement cosmique dans la galaxie et ce pour des énergies allant du GeV au PeV. L'hypothèse principale est que les rayons cosmiques sont accélérés par des chocs diffusifs (Diffusive Shock Acceleration : DSA) qui se caractérisent au premier ordre par une transition brutale entre les propriétés du milieu amont et celles du milieu aval. En conséquence, les propriétés de transport du rayonnement cosmique sont différentes de part et d'autres du choc (Lagage & Cesarsky 1983 [129]). A l'intérieur de la source, en aval du choc, les niveaux de turbulence sont importants  $\delta B/B \approx 1$  et le gaz est comprimé ce qui implique que le libre parcours moyen des rayons cosmiques est du même ordre que leur rayon de Larmor. Le régime de transport est isotrope et décrit par la dynamique Bohmienne. A l'extérieur du choc, en amont, les niveaux de turbulence sont faibles  $\delta B/B \ll 1$ , la pression du gaz est plus faible et le libre parcours moyen des rayons cosmiques est plus grand que leur rayon de Larmor. Le transport est anisotrope. Ces

deux descriptions suggèrent une discontinuité non-physique entre les régimes de transport du rayonnement cosmique au sein de la source et à l'extérieur [219]. Afin de palier à ce problème, un grand nombre d'auteurs dont moi-même (voir chapitre 2) se sont concentrés sur le développement d'une phénoménologie permettant de lier l'échappement du rayonnement cosmique des restes de supernovae à leur propagation dans le milieu interstellaire proche. Il a été trouvé que l'instant auquel les rayons cosmiques s'échappent est fortement corrélé avec leur énergie et les propriétés du milieu interstellaire dans lequel le reste s'expand.

Dans ce travail nous n'injectons que des rayons cosmiques d'énergie 1 GeV à travers les SNRs car ils représentent la majeure partie du spectre d'énergie des rayons cosmiques mesuré dans le milieu interstellaire local. Dans le code, l'injection de rayons cosmiques est modélisée par un terme source sphérique de sur-pression homogène du fluide de rayonnement cosmique. Les variables importantes sont le temps d'échappement des rayons cosmiques de 1 GeV  $t_{\text{esc}}(E = 1 \text{ GeV})$ , le rayon du choc à l'instant d'échappement  $R_{\text{esc}}(E = 1 \text{ GeV})$  et la valeur de la surpression de rayonnement cosmique  $P_{\text{SNR},\text{CR}}(E = 1 \text{ GeV})$  correspondant à la quantité de rayonnement cosmique injectée dans le milieu interstellaire à l'instant  $t_{\text{esc}}$ . A partir de ma publication Brahimi et al. (2020) [22] on montre que le temps d'échappement des rayons cosmiques de 1 GeV est d'environ  $t_{\text{esc}}(E = 1 \text{ GeV}) \approx 20 - 100 \text{ kyr}$  et que le rayon du choc associé vaut  $R_{\text{esc}}(E = 1 \text{ GeV}) \approx 8 - 30 \text{ pc}$  pour un reste de supernovae dans une phase WNM ou CNM. En considérant que la supernova libère une énergie  $E_{\text{SN}} = 10^{51} \text{ erg}$  et que 10 % sont transmis au rayonnement cosmique de 1 GeV, alors la pression du rayonnement cosmique est donnée par

$$P_{\text{SNR},\text{CR}} \approx \frac{0.1 E_{\text{SN}}}{\frac{4}{3} \pi R_{\text{esc}}(E = 1 \text{ GeV})^3} \quad (3.28)$$

et vaut  $P_{\text{SNR},\text{CR}} \approx 1.5 \times 10^{-9} - 3 \times 10^{-11} \text{ dyne cm}^{-2}$  soit  $P_{\text{SNR},\text{CR}}/P_{\text{back},\text{CR}} \approx 20 - 1000$  où  $P_{\text{back},\text{CR}}$  désigne la pression de fond du rayonnement cosmique. La pression des RCs injectés est potentiellement sous-évaluée car les RCs peuvent aussi se concentrer sur une coquille.

Dans la plupart des cas, les rayons cosmiques d'énergie 1 GeV s'échappent lorsque le choc du rémanent est en phase radiative ce qui suggère que la différence de pression du gaz à l'intérieur et à l'extérieur du choc est faible. Cependant, il n'existe pas de consensus clair autour de l'évolution de la pression du gaz au cours du temps. C'est pourquoi dans ce travail nous avons également la possibilité de tenir compte de l'injection d'une surpression thermique avec la même géométrie que pour le fluide de rayons cosmique. La surpression thermique est alors définie par

$$P_{\text{SNR},\text{GAS}} = P_{\text{ratio}} P_{\text{SNR},\text{CR}} \quad (3.29)$$

où  $P_{\text{ratio}}$  représente le ratio de surpression thermique injecté et le rayonnement cosmique de 1 GeV injecté. Ce paramètre est laissé libre et peut évoluer entre 0 et 1.

Dans la simulation, les supernovae sont injectées de manière aléatoire c'est à dire non corrélées avec la densité du gaz. Ceci se justifie par le fait que les étoiles ont des durées de vie de l'ordre de  $\sim 10$  Myr et peuvent être advectées à la vitesse du gaz interstellaire dont on observe à posteriori qu'elle est de l'ordre de  $v_{\text{rms}} \approx 1 - 10$  km/s, impliquant que le lieu où l'étoile explose en supernovae peut se trouver à  $1 - 100$  pc du lieu de naissance, généralement une zone moléculaire dense [193]. D'autre part, on estime à posteriori que le temps de retournement de la turbulence dans la boîte de simulation est d'environ  $\sim 17$  Myr ce qui est généralement bien inférieur au temps de vie des étoiles et qui implique que l'environnement interstellaire à la mort de l'étoile est décorrélé de l'environnement interstellaire à la naissance de l'étoile qui correspond généralement à des nuages moléculaires et des coeurs denses. Le taux d'injection  $\tau_{\text{SN},\Delta t}$  de supernovae par pas de temps  $\Delta t$  est défini par rapport entre le taux d'explosion de supernova dans la galaxie  $\tau_{\text{SN}}$  et la taille de la boîte de la simulation  $L$ . Il est donné par

$$\tau_{\text{SN}/\Delta t} = \left( \frac{\tau_{\text{SN}}}{1 \text{ kyr}} \right) \left( \frac{L^3}{V_{\text{galaxy}}} \right) \left( \frac{\Delta t}{1 \text{ kyr}} \right) \text{ s}^{-1}. \quad (3.30)$$

### 3.3 Méthodes numériques

#### 3.3.1 Equations MHD avec diffusion/derive des RCs

Le système d'équation permettant de traiter la dynamique du transport du rayonnement cosmique dans un plasma turbulent est donné par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + P_{\text{tot}} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{4\pi} \right) = \rho \mathbf{f} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ (e + P_{\text{tot}}) \mathbf{u} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})}{4\pi} \right] = \\ - P_{\text{CR}} \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{CR},d} + \mathcal{L}_{\text{rad}} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{\text{CR}}}{\partial t} + \nabla \cdot (e_{\text{CR}} \mathbf{u} + (e_{\text{CR}} + P_{\text{CR}}) \mathbf{v}_{\text{st}}) = \\ - P_{\text{CR}} \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{CR},d} + \mathcal{L}_{\text{st}} + \mathcal{L}_{\text{rad,CR}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

où  $\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{CR},d} = \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{CR},d}|_{\parallel} + \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{CR},d}|_{\text{iso}}$ .  $\rho$  est la densité massique de gaz,  $\mathbf{u}$  est le champ de vitesse du gaz,  $\mathbf{v}_{\text{st}}$  est la vitesse de streaming,  $\mathbf{B}$  est le champ magnétique,  $e = 0.5\rho u^2 + e_{\text{th}} + e_{\text{CR}} + B^2/8\pi$  est la densité totale d'énergie où  $e_{\text{th}}$  est la densité d'énergie thermique du gaz et  $e_{\text{CR}}$  est la densité d'énergie du rayonnement cosmique.  $P_{\text{tot}} = P_{\text{th}} + P_{\text{CR}} + 0.5B^2/4\pi$  est la somme des pressions : thermique  $P_{\text{th}} = (\gamma_g - 1)e_{\text{th}}$ , de rayonnement cosmique  $P_{\text{CR}} = (\gamma_{\text{CR}} - 1)e_{\text{CR}}$  et magnétique respectivement, où  $\gamma_g$  et

$\gamma_{\text{CR}}$  sont les indices adiabatiques de chaque espèce. Notons ici que les termes d'énergie le sont par unité de volume ie.  $e_i = E_i/\Delta x^3$  où  $\Delta x$  est la taille de la cellule. Tous les termes de droite des équations sont des termes de source.

Le terme  $-P_{\text{CR}}\nabla \cdot \mathbf{u}$  est un terme de gain/perte adiabatique des rayons cosmiques qui dépend des variations de la vitesse du fluide dans l'espace. Le terme  $\mathcal{L}_{\text{rad}} = \mathcal{L}_{\text{rad,th}} + \mathcal{L}_{\text{rad,CR}\rightarrow\text{th}}$  correspond respectivement aux pertes radiatives totales du système composé des pertes du plasma thermique et des pertes d'énergie du rayonnement cosmique au profit du gaz, et pures<sup>4</sup>. Le terme de pertes radiative du rayonnement cosmique est donné par  $\mathcal{L}_{\text{rad,CR}\rightarrow\text{th}} = \mathcal{L}_{\text{rad,CR}} + \mathcal{H}_{\text{rad,CR}\rightarrow\text{th}}$  et décrit respectivement les pertes radiatives pures et les pertes radiatives conduisant à un chauffage du gaz<sup>5</sup>. Les termes  $\nabla \cdot [(e_{\text{CR}} + P_{\text{CR}})\mathbf{v}_{\text{st}}]$  et  $\mathcal{L}_{\text{st}}$  correspondent à une advection et un terme source respectivement qui décrivent la manière dont l'instabilité de streaming du rayonnement cosmique est modélisée dans le système. L'implémentation des termes de streaming est décrite dans le paragraphe (3.3.4). Les termes  $\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{CR},d}|_{\parallel} = \nabla \cdot [-D_{\text{CR},\parallel}\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}})]$  et  $\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{CR},d}|_{\text{iso}} = \nabla \cdot [-D_{\text{CR,iso}}\nabla e_{\text{CR}}]$  où  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$  correspondent à la diffusion parallèle aux lignes de champ et isotrope respectivement. Le coefficient de diffusion isotrope est indépendant de la présence de lignes de champ magnétique ordonnées et est défini par  $D_{\text{CR,iso}} = f_{\text{iso}}D_{\text{CR},\parallel}$  où  $f_{\text{iso}} \ll 1$ <sup>6</sup> tandis que le coefficient de diffusion anisotrope est défini comme  $D_{\text{CR},\parallel} = (1 - f_{\text{iso}})D_{\text{CR}}$  où  $D_{\text{CR}}$  est la variable insérée dans le modèle par l'utilisateur. L'implémentation des termes de diffusion anisotrope du rayonnement cosmique est discutée dans le paragraphe (3.3.3). Finalement, les termes  $\rho\mathbf{f}$  et  $\rho\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$  dans les équations en moment et en énergie décrivent l'effet de la force  $\mathbf{f}$  appliquée au plasma pour générer de la turbulence. Cette force est produite dans l'espace de Fourier et ses modes sont donnés par le processus stochastique de Ornstein-Uhlenbeck [69]. L'implémentation du terme de forçage turbulent est décrite dans le paragraphe (3.3.5).

### 3.3.2 Equations de la MHD dans le code MHD-RAMSES

Les équations de la MHD idéale (3.31 - 3.34) sont discrétisées suivant une grille de calcul cubique tri-dimensionnelle. En l'absence de terme source, le système d'équations de la MHD idéale peut se réécrire [78]

<sup>4</sup>Les pertes pures désignent les pertes d'énergie du rayonnement cosmique qui ne sont pas ré-injectées dans la partie thermique du système.

<sup>5</sup>Le terme de pertes radiatives des RCs  $\mathcal{L}_{\text{rad,CR}\rightarrow\text{th}}$  n'est pas utilisé dans les simulations présentées dans ce travail. D'une part l'intérêt est d'observer les échanges d'énergie entre les RCs et le fluide thermique ce qui se fait plus aisément en l'absence de pertes radiatives pour les RCs, d'autre part les simulations réalisées sont caractérisées par des conditions aux bords périodiques et par conséquent conservent toute l'énergie qui est injectée par le module de forçage turbulent ou par les SNRs. Il ne s'agit alors pas seulement d'avoir un terme de pertes radiatives des RCs mais également un terme de fuite des RCs qui permettrait de conserver l'énergie totale dans la boîte de simulation. Un tel terme n'a pas encore été implémenté.

<sup>6</sup>Dans les simulations, le paramètre  $f_{\text{iso}}$  vaut 0.01.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + P_{\text{tot}} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{4\pi} \right) = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ (e + P_{\text{tot}}) \mathbf{u} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})}{4\pi} \right] = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (3.39)$$

$$(3.40)$$

Dans le cas où l'on considère que la grille de calcul est régulière, le schéma numérique est décrit en trois dimensions suivant les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  et les variables sont discrétisées sur une grille 3D Cartésienne. Le centre de chaque cellule est localisé à la position  $(x_i, y_j, z_k)$ . Dans une cellule donnée, les faces normales à la direction  $x$  ont pour coordonnées  $x = x_{i\pm 1/2}$  et couvrent un élément de surface défini par  $y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}$  et  $z_{k-1/2} \leq z \leq z_{k+1/2}$ . De la même manière, il est possible de définir les coordonnées des autres faces normales aux directions  $y$  et  $z$ .

Pour chaque cellule, les variables du système sont calculées à partir d'une moyenne volumique. Les variables hydrodynamiques sont définies au centre de chaque cellule  $(x_i, y_j, z_k)$  et s'écrivent

$$v_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} v(x', y', z') dx' dy' dz' \quad (3.41)$$

où  $v \in \{\rho, e_{\text{th}}, \mathbf{u}\}$  est une variable hydrodynamique. Le champ magnétique est, en revanche, moyenné au centre des surfaces des cellules en fonction de la composante représentée

$$B_{x,i-1/2,j,k} = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} B_x(x_{i-1/2}, y', z') dy' dz' \quad (3.42)$$

$$B_{y,i,j-1/2,k} = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} B_y(x', y_{j-1/2}, z') dx' dz' \quad (3.43)$$

$$B_{z,i,j,k-1/2} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} B_z(x', y', z_{k-1/2}) dx' dy'. \quad (3.44)$$

La valeur du champ magnétique au centre d'une cellule de coordonnées  $(x_i, y_j, z_k)$  est alors interpolée des valeurs des champs magnétiques définis sur les surfaces de la cellule.  $\mathbf{B}_{i,j,k}$  est donc donné par

$$B_{x,i,j,k} = (B_{x,i-1/2,j,k} + B_{x,i+1/2,j,k})/2 \quad (3.45)$$

$$B_{y,i,j,k} = (B_{y,i,j-1/2,k} + B_{y,i,j+1/2,k})/2 \quad (3.46)$$

$$B_{z,i,j,k} = (B_{z,i,j,k-1/2} + B_{z,i,j,k+1/2})/2. \quad (3.47)$$

Il est possible de réécrire le système d'équations (3.36 - 3.39) sous la forme d'un système d'équations que l'on qualifie de système d'Euler et qui s'écrit, sous forme vectorielle,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0 \quad (3.48)$$

où  $\mathbf{U} = (\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, e_{\text{th}})^T$ , tandis que la fonction de flux  $\mathbf{F}$  est donnée par

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + P_{\text{tot}} - B_x^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ (e + P_{\text{tot}})u_x - B_x(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

des formes symétriques peuvent être dérivées pour les vecteurs  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  qui correspondent respectivement aux flux de Godunov dans les directions  $y$  et  $z$ . L'équation (3.48) est ensuite discrétisée et résolue par le solveur de HLLD (Harten-Lax-van Leer Discontinuities Riemann solver) dont la procédure détaillée est décrite par Miyoshi & Kusano (2005) [157]. La contrainte solénoïdale  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  est assurée à la précision machine en utilisant le schéma numérique CT (Constrained Transport) développé par Evans & Hawley (1988) [66] qui consiste à réécrire l'équation d'induction sous la forme intégrale et à appliquer le théorème de Stokes pour passer d'une intégrale de surface à une intégrale de chemin

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.50)$$

où  $\Phi_s$  correspond au flux magnétique traversant une surface  $\mathbf{S} = \int \int d\mathbf{S}$  à un instant  $t$  et  $\mathbf{E} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$  correspond au champ électromoteur induit le long du chemin  $d\mathbf{l}$ .

Le code MHD-RAMSES est équipé d'un module de raffinement adaptatif (AMR : Adaptive Mesh Refinement) de la grille de calcul qui permet d'avoir une résolution définie localement par rapport aux contraintes de courant locales des variables du système d'équations (3.36 - 3.39). La grille de calcul peut être décomposée en niveaux de raffinement, la condition de courant devient de plus en plus contraignante et donc le pas de temps de plus en plus faible à mesure que le niveau de raffinement augmente. Les pas de temps étant différents, il existe un battement entre les étapes de résolution des niveaux raffinés et celles des niveaux non-raffinés. Au début et à la fin de chaque pas de temps, les flux sont interpolés au niveau des interfaces entre des cellules de niveau de raffinement différent de manière à ce que les flux soient conservés. Teyssier (2002) [220] décrit plus en détail la procédure AMR.



### 3.3.3 Equation de diffusion anisotrope du rayonnement cosmique

Dans ce paragraphe qui résume les travaux de Dubois & Commerçon (2016) [60], nous traitons la partie diffusion anisotrope de l'équation de transport des rayons cosmique (3.35). Cette dernière se réécrit

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (3.51)$$

où  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{ani}} + \mathbf{F}^{\text{iso}} = -D_{\parallel} \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla e) - D_{\text{iso}} \nabla e$  correspond au flux anisotrope et isotrope respectivement, de rayonnement cosmique. L'étape de diffusion a lieu après l'étape MHD dans le code RAMSES. Tandis que la condition CFL de l'étape MHD est donnée par  $\Delta t_{\text{MHD}} < \Delta x / (u + c_s)$  dans une grille orthonormale ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ ) où  $u$  correspond à la norme du vecteur champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et  $c_s^2 = \gamma P_{\text{th}} / \rho$  est la vitesse du son dans le gaz, la condition de courant de l'étape de diffusion du rayonnement cosmique est donnée par  $\Delta t_{\text{diff}} < \Delta x^2 / (2D)$  et est beaucoup plus contraignante que l'étape MHD. L'équation (3.51) est donc résolue implicitement<sup>7</sup>. La discretisation de l'équation (3.51) donne

$$e_{i,j,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ F_{x,i+1/2,j,k}^{n+1} + F_{y,i,j+1/2,k}^{n+1} + F_{z,i,j,k+1/2}^{n+1} - F_{x,i-1/2,j,k}^{n+1} - F_{y,i,j-1/2,k}^{n+1} - F_{z,i,j,k-1/2}^{n+1} \right] = e_{i,j,k}^n \quad (3.52)$$

où les flux  $\mathbf{F}^{\text{ani}} = (F_x^{\text{ani}}, F_y^{\text{ani}}, F_z^{\text{ani}})$  aux interfaces des cellules sont évalués à partir des coins des cellules c'est à dire, pour n'importe quelle composante  $x$ ,  $y$ , ou  $z$

$$F_{i+\frac{1}{2},j,k}^{\text{ani}} = \frac{F_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{\text{ani}} + F_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{\text{ani}} + F_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{\text{ani}} + F_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{\text{ani}}}{4} \quad (3.53)$$

$$F_{i,j+\frac{1}{2},k}^{\text{ani}} = \frac{F_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{\text{ani}} + F_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{\text{ani}} + F_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{\text{ani}} + F_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{\text{ani}}}{4} \quad (3.54)$$

$$F_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\text{ani}} = \frac{F_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{\text{ani}} + F_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{\text{ani}} + F_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{\text{ani}} + F_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{\text{ani}}}{4}. \quad (3.55)$$

Le flux anisotrope dans le coin des cellules s'écrit

$$F_{x,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{\text{ani}} = -\bar{D}_{\parallel} \bar{b}_x (\mathbf{b} \cdot \nabla e)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (3.56)$$

$$F_{y,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{\text{ani}} = -\bar{D}_{\parallel} \bar{b}_y (\mathbf{b} \cdot \nabla e)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (3.57)$$

$$F_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{\text{ani}} = -\bar{D}_{\parallel} \bar{b}_z (\mathbf{b} \cdot \nabla e)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (3.58)$$

<sup>7</sup>Rappelons que dans le cas d'une intégration explicite, le terme de flux à l'instant  $t^n$  est évalué à partir des flux à l'instant  $t^{n-1}$ . Une analyse de stabilité de Von Neumann permet de montrer que le schéma numérique explicite choisi est conditionnellement stable si la condition de courant est respectée. Dans le cas d'une intégration implicite, le terme de flux à l'instant  $t^n$  est évalué à partir des flux à l'instant  $t^n$ . Le schéma numérique implicite est inconditionnellement stable.

où  $(\mathbf{b} \cdot \nabla e)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \bar{b}_x \partial e / \partial x + \bar{b}_y \partial e / \partial y + \bar{b}_z \partial e / \partial z$  et les quantités barrées correspondent à des moyennes arithmétiques des cellules connectées aux coins

$$\bar{b}_x = \frac{b_{x,i+\frac{1}{2},j,k}^n + b_{x,i+\frac{1}{2},j+1,k}^n + b_{x,i+\frac{1}{2},j,k+1}^n + b_{x,i+\frac{1}{2},j+1,k+1}^n}{4} \quad (3.59)$$

$$\bar{b}_y = \frac{b_{y,i,j+\frac{1}{2},k}^n + b_{y,i+1,j+\frac{1}{2},k}^n + b_{y,i,j+\frac{1}{2},k+1}^n + b_{y,i+1,j+\frac{1}{2},k+1}^n}{4} \quad (3.60)$$

$$\bar{b}_z = \frac{b_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^n + b_{z,i+1,j,k+\frac{1}{2}}^n + b_{z,i,j+1,k+\frac{1}{2}}^n + b_{z,i+1,j+1,k+\frac{1}{2}}^n}{4} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial} e}{\partial x} &= \frac{e_{i+1,j+1,k+1}^{n+1} + e_{i+1,j+1,k}^{n+1} + e_{i+1,j,k+1}^{n+1} + e_{i+1,j,k}^{n+1}}{4\Delta x} \\ &- \frac{e_{i,j+1,k+1}^{n+1} + e_{i,j+1,k}^{n+1} + e_{i,j,k+1}^{n+1} + e_{i,j,k}^{n+1}}{4\Delta x} \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial} e}{\partial y} &= \frac{e_{i+1,j+1,k+1}^{n+1} + e_{i+1,j+1,k}^{n+1} + e_{i,j+1,k+1}^{n+1} + e_{i,j+1,k}^{n+1}}{4\Delta x} \\ &- \frac{e_{i+1,j,k+1}^{n+1} + e_{i+1,j,k}^{n+1} + e_{i,j,k+1}^{n+1} + e_{i,j,k}^{n+1}}{4\Delta x} \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial} e}{\partial z} &= \frac{e_{i+1,j+1,k+1}^{n+1} + e_{i+1,j,k+1}^{n+1} + e_{i,j+1,k+1}^{n+1} + e_{i,j,k+1}^{n+1}}{4\Delta x} \\ &- \frac{e_{i+1,j+1,k}^{n+1} + e_{i+1,j,k}^{n+1} + e_{i,j+1,k}^{n+1} + e_{i,j,k}^{n+1}}{4\Delta x} \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\parallel} &= \frac{D_{\parallel,i,j,k}^n + D_{\parallel,i,j,k+1}^n + D_{\parallel,i,j+1,k+1}^n + D_{\parallel,i+1,j+1,k+1}^n}{8} \\ &+ \frac{D_{\parallel,i+1,j,k}^n + D_{\parallel,i,j+1,k}^n + D_{\parallel,i+1,j+1,k}^n + D_{\parallel,i+1,j,k+1}^n}{8}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

La partie isotrope des flux, pour n'importe quelle composante  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , est donnée par l'interpolation linéaire des flux aux interfaces droite et gauche des cellules

$$F_{i+\frac{1}{2},j,k}^{\text{iso}} = \frac{D_{\text{iso},i+1,j,k}^n + D_{\text{iso},i,j,k}^n}{2} \frac{e_{i+1,j,k}^{n+1} - e_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x} \quad (3.66)$$

$$F_{i,j+\frac{1}{2},k}^{\text{iso}} = \frac{D_{\text{iso},i,j+1,k}^n + D_{\text{iso},i,j,k}^n}{2} \frac{e_{i,j+1,k}^{n+1} - e_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x} \quad (3.67)$$

$$F_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\text{iso}} = \frac{D_{\text{iso},i,j,k+1}^n + D_{\text{iso},i,j,k}^n}{2} \frac{e_{i,j,k+1}^{n+1} - e_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x}. \quad (3.68)$$

L'équation (3.52) peut se résoudre implicitement en la variable  $e_{i,j,k}^{n+1}$  en se réécrivant sous la forme d'un système matriciel  $\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{C}$  où  $\mathbf{E}$  correspond à un vecteur des énergies  $e$  à l'instant  $n+1$ ,  $\mathbf{C}$  à un vecteur contenant les termes d'énergie et leur coefficients associés à l'instant  $n$  et  $\bar{\mathbf{A}}$  une matrice qui contient tous les coefficients devant les termes en énergie

à l'instant  $n + 1$ . La matrice  $\bar{\mathbf{A}}$  est définie positive et symétrique et est inversée grâce à un algorithme de calcul du gradient bi-conjugué comme décrit par Gonzalez et al. (2015) [89]. Dubois & Commerçon (2016) [60] décrit l'implémentation du processus de diffusion en AMR, discute en détails des limitations de la méthode numérique utilisée et présente différents tests.

### 3.3.4 Implémentation de l'effet de streaming

Dans ce paragraphe qui résume les travaux de Dubois et al. (2019) [61], nous traitons l'implémentation du terme de streaming des rayons cosmiques dont la présentation théorique est donnée dans le paragraphe (3.2.4). L'effet de streaming des rayons cosmiques se résume à deux termes dans l'équation (3.35) du système. Le terme de chauffage du gaz  $\mathcal{L}_{\text{st}} = -\mathbf{B} \cdot \nabla P_{\text{CR}} / |\mathbf{B} \cdot \nabla P_{\text{CR}}| \mathbf{V}_A \cdot \nabla P_{\text{CR}}$  qui est traité comme un terme source et la partie advective du streaming dont l'équation de base est donnée par

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot [\gamma_{\text{CR}} e \mathbf{v}_{\text{st}}] = 0 \quad (3.69)$$

où  $e$  correspond à l'énergie du rayonnement cosmique; l'indice CR a été enlevé par souci de simplification, tandis que la vitesse de streaming est donnée par  $\mathbf{v}_{\text{st}} = -f_{\text{st}} \mathbf{V}_A \text{sgn}(\mathbf{B} \cdot \nabla P_{\text{CR}})$ . La différence entre un terme d'advection classique et le terme de streaming vient essentiellement de la présence du terme  $\text{sgn}(\mathbf{B} \cdot \nabla P_{\text{CR}})$  qui a pour propriété de potentiellement créer des discontinuités de la valeur de la vitesse d'advection  $-\gamma_{\text{CR}} f_{\text{st}} \mathbf{V}_A$  aux interfaces entre les cellules. Sharma et al. (2009) [203] discute de l'implémentation numérique de ce terme via des méthodes explicites en temps. En particulier, la résolution explicite de ce terme via une méthode upwind suggère une condition de stabilité  $\Delta t \propto \Delta x^3$  extrêmement contraignante. Sharma et al. (2009) [203] suggère de régulariser la vitesse de streaming en remplaçant le terme  $\text{sgn}(\mathbf{B} \cdot \nabla P_{\text{CR}})$  par  $\tanh(h \mathbf{b} \cdot \nabla e / e)$  afin d'alléger la contrainte sur le pas de temps qui devient alors  $\Delta t < h \Delta x^2 / (2e)$  où  $h$  est une constante de l'ordre de la taille de quelques cellules. Cette méthode reste très contraignante. C'est pourquoi Dubois et al. (2019) [61] choisit d'implémenter le terme de streaming en utilisant une méthode implicite.

Il est possible de réécrire l'équation (3.69) comme

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot [-D_{\text{st}} \mathbf{b} (\mathbf{b} \cdot \nabla e)] = 0 \quad (3.70)$$

où  $D_{\text{st}} = \gamma_{\text{CR}} e |\mathbf{B}| / (|\mathbf{b} \cdot \nabla e| f_{\text{st}} \sqrt{4\pi\rho})$  a la dimension d'un coefficient de diffusion. L'effet de streaming est alors résolu comme un terme de diffusion avec la méthode numérique présentée dans le paragraphe (3.3.3). Le flux total s'écrit

$$\mathbf{F}^{\text{tot}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^{\text{st}} \quad (3.71)$$

où le coefficient de diffusion total des rayons cosmiques s'écrit  $D = D_{\text{CR}} + D_{\text{st}}$  et  $D_{\text{CR},\parallel} = (1 - f_{\text{iso}})D$  et  $D_{\text{CR,iso}} = f_{\text{iso}}D$ . En suivant les mêmes règles de discretisation que dans le cas de la diffusion, le coefficient de diffusion de streaming se discretise comme

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\text{st}} &= \frac{D_{\text{st},i,j,k}^n + D_{\text{st},i,j,k+1}^n + D_{\text{st},i,j+1,k+1}^n + D_{\text{st},i+1,j+1,k+1}^n}{8} \\ &+ \frac{D_{\text{st},i+1,j,k}^n + D_{\text{st},i,j+1,k}^n + D_{\text{st},i+1,j+1,k}^n + D_{\text{st},i+1,j,k+1}^n}{8} \end{aligned} \quad (3.72)$$

où

$$D_{\text{st},i,j,k}^n = \frac{\gamma_{\text{CR}} e_{\text{CR},i,j,k}^n \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}_{i,j,k}^n}{\sqrt{4\pi \rho_{i,j,k}^n (\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}})_{i,j,k}^n}}. \quad (3.73)$$

Bien que le solveur utilisé puisse résoudre la diffusion quelque soit la valeur du coefficient de diffusion, si le coefficient de diffusion possède des valeurs trop grandes, le nombre d'itérations peut exploser rallongeant ainsi de le temps de la simulation. Il peut arriver localement que la valeur du terme  $(\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}})_{i,j,k}^n$  soit proche de zéro faisant ainsi exploser le coefficient de diffusion. Pour cette raison, le coefficient de diffusion de streaming est défini pour saturer à la valeur  $10^{31} \text{ cm}^2/\text{s}$ .

### 3.3.5 Implémentation du processus de forçage turbulent

Dans ce paragraphe nous discutons de l'implémentation du module de forçage turbulent qui permet de modéliser la turbulence à "grande échelle" comme décrite dans le paragraphe (3.2.3) et qui se manifeste par les termes  $\rho \mathbf{f}$  et  $\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$  dans les équations du moment (3.32) et de l'énergie (3.33) respectivement. Le processus de forçage turbulent utilisé dans ce travail est décrit par les travaux de Schmidt (2009) [196] et Federrath et al. (2010) [69] et se base sur le processus de Ornstein-Uhlenbeck [225].

Le forçage turbulent est uniquement appliqué à la composante hydrodynamique du fluide et non à sa composante magnétique. Le terme de forçage  $\mathbf{f}$  est solution de l'équation différentielle

$$d\mathbf{f}(\mathbf{k}, t) = g_{\zeta} \left[ -\mathbf{f}(\mathbf{k}, t) \frac{dt}{T} + \frac{v_{\text{rms}}}{T} \left( \frac{2\sigma^2(\mathbf{k})}{T} \right)^{1/2} \mathcal{P}^{\zeta}(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{W}_t \right] \quad (3.74)$$

où le premier terme à droite du signe égal correspond à un terme de glissement qui modélise la décorrélation exponentielle du champ de force turbulent avec lui-même. Ce terme dépend de la variable  $T$  qui correspond à une échelle de temps d'autocorrélation du forçage turbulent et que l'on peut définir comme

$$T = K/v_{\text{rms}} \quad (3.75)$$

où  $v_{\text{rms}}$  correspond à la vitesse caractéristique du fluide et  $K = L/\alpha = 2\pi/k_0$  correspond à l'échelle caractéristique de forçage.  $L$  correspond à la taille de la boîte de simulation et  $\alpha$  est un paramètre permettant d'avoir une taille de foçage inférieure à la taille de la boîte. Dans le cas d'une simulation aux conditions de bord non périodiques, le paramètre  $\alpha$  doit être petit devant 1. Dans ce travail, les conditions aux bords sont périodiques et n'impliquent pas de contraintes sur le paramètre  $\alpha$  qui vaut ici 2.  $k_0$  correspond à la longueur d'onde caractéristique du forçage. Le second terme de droite correspond à un terme de diffusion qui est modélisé grâce à un processus de Wiener  $\mathbf{W}(t)$  qui permet de générer un vecteur de déviations gaussiennes aléatoires. Le terme  $\mathcal{P}^\zeta(\mathbf{k})$  correspond à un tenseur de projection dans l'espace de Fourier qui s'écrit

$$\mathcal{P}_{i,j}^\zeta(\mathbf{k}) = \zeta \mathcal{P}_{i,j}^\perp(\mathbf{k}) + (1 - \zeta) \mathcal{P}_{i,j}^\parallel(\mathbf{k}) \quad (3.76)$$

$$= \zeta \delta_{ij} + (1 - 2\zeta) \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (3.77)$$

et correspond à la somme entre deux opérateurs : un opérateur de forçage solénoïdal  $\mathcal{P}_{i,j}^\perp = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$  qui modélise les perturbations solénoïdales du fluide, c'est à dire telles que  $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ , et un opérateur de forçage par compression  $\mathcal{P}_{i,j}^\parallel = k_i k_j / k^2$  qui modélise uniquement les perturbations compressives du fluide, c'est à dire telles que  $\nabla \times \mathbf{f} = 0$ . Le paramètre  $\zeta \in [0, 1]$  permet de choisir le rapport entre la quantité de modes solénoïdaux et de compression. Il est possible de définir le rapport entre la force de compression et la force totale comme

$$\frac{F_\parallel}{T_{\text{tot}}} = \frac{(1 - \zeta)^2}{1 - 2\zeta + D\zeta^2} \quad (3.78)$$

où  $D \in \{1, 2, 3\}$  correspond à la dimension du problème. Dans ce travail, nous suivons le choix de Commerçon et al. (2019) [38] et définissons  $\zeta = 0.5$  c'est à dire  $F_\parallel / F_{\text{tot}} = 1/3$ . La fonction  $\sigma(\mathbf{k})$  correspond à une fonction parabolique d'élargissement des poids du forçage turbulent qui s'écrit

$$\sigma(\mathbf{k}) \propto k^2 (2k_0 - k)^2 \text{H}(k - 2k_0) \quad (3.79)$$

où  $\text{H}(k)$  est la fonction de Heaviside qui est non-nulle uniquement dans l'intervalle  $k \in ]0, 2k_0[$ . Enfin,  $g_\zeta$  correspond à un facteur de normalisation qui est donné par  $g_\zeta = 3/\sqrt{1 - 2\zeta + 3\zeta^2}$ .

Schmidt (2009) [196] et Federrath et al. (2010) [69] discutent des limitations de la méthode et ont réalisé des tests fiduciaux.

### 3.3.6 Implémentation du modèle de turbulence auto-générée

Ce paragraphe décrit l'implémentation du modèle de turbulence auto-générée décrite dans le paragraphe (3.2.2) dans le code MHD-RAMSES. Le processus d'implémentation

du modèle de turbulence auto-générée est exactement le même que celui de l'implémentation du terme de diffusion de streaming (paragraphe 3.3.4). Il s'agit de modifier le coefficient de diffusion du rayonnement cosmique grâce à la formule (3.2) et au coefficient de diffusion auto-généré donné par les formules (3.3) si le taux d'ionisation  $X$  du gaz est inférieur à 0.9, une somme en impédance de (3.11) et (3.12) si le taux d'ionisation du gaz est supérieur à 0.9 mais la température  $T$  inférieure à  $10^6$  K et (3.14) si la température du gaz est supérieure à  $10^6$  K. En suivant les règles de discrétisation établies dans le paragraphe (3.3.3), les coefficients de diffusion auto-générés se discretisent de la manière suivante

$$D_{\text{self}}^- = \frac{D_{\text{self},i,j,k}^n + D_{\text{self},i,j,k+1}^n + D_{\text{self},i,j+1,k+1}^n + D_{\text{self},i+1,j+1,k+1}^n}{8} + \frac{D_{\text{self},i+1,j,k}^n + D_{\text{self},i,j+1,k}^n + D_{\text{self},i+1,j+1,k}^n + D_{\text{self},i+1,j,k+1}^n}{8} \quad (3.80)$$

et dans une cellule indicée par  $i, j, k$ , en fonction du régime de turbulence, dépendent des paramètres  $(\mathbf{v}_{\text{st}} \cdot \nabla P_{\text{CR}})|_{i,j,k}^n$ ,  $\mathbf{B}|_{i,j,k}^n$ ,  $X|_{i,j,k}^n$ ,  $T|_{i,j,k}^n$ ,  $v_{\text{rms}}(L)$ . L'indexation des paramètres suit les mêmes règles que pour le module de diffusion. La température du gaz est obtenue à partir de l'équation d'état du gaz parfait tandis que le taux d'ionisation est calculé à partir de la construction du diagramme de Voronoï présentée dans le paragraphe (3.2.1) et qui dépend uniquement des paramètres de température et de densité du milieu en plus des données bibliographiques. Les coefficients de diffusion auto-générés anisotropes et isotropes sont respectivement donnés par  $D_{\text{self},\parallel}^- = D_{\text{self}}^-$  et  $D_{\text{self},\text{iso}}^- = \min(10^{-2}, \bar{I}^2) D_{\text{self}}^-$  où  $I = (\delta B/B_0)^2$  représente le niveau de turbulence; le coefficient de diffusion auto-généré perpendiculaire est plafonné à 0.01 de la valeur du coefficient de diffusion auto-généré parallèle afin que le régime de transport des rayons cosmiques reste dans l'approximation quasi-linéaire (QLT). De plus, le coefficient de diffusion perpendiculaire total n'est pas calculé à partir d'une somme en impédance entre le coefficient de diffusion perpendiculaire préexistant et le coefficient de diffusion perpendiculaire auto-généré mais à l'aide de la relation suivante

$$D_{\text{CR},\text{iso}} = \max(D_{\text{ISM},\text{iso}}, D_{\text{self},\text{iso}}) \quad (3.81)$$

afin de maximiser le processus qui génère le plus de diffusion isotrope et non de confiner les rayons cosmiques de long des lignes de champ. Par cette relation, nous nous assurons qu'en l'absence de turbulence auto-générée, le rayonnement cosmique diffuse perpendiculairement en suivant les règles établies dans le module de diffusion par la turbulence à "grande échelle".

Des tests simples du modèle de turbulence auto-générée sont présentés, ainsi que les limitations numériques du modèle, dans le paragraphe (3.4.3).

## 3.4 Résultats

### 3.4.1 Terminologie et paramétrisation

Dans ce travail, l'espace des configurations possibles est très important. Pour cette raison il est nécessaire de définir les setups de simulation par un ensemble d'acronymes représentatifs des différents aspects de l'espace des paramètres tel que présenté dans la section précédente :

- **TF** : Turbulence Forcing module (Module de forçage turbulent). Ce paramètre vaut *oui* si le module de forçage turbulent est activé. *Non* sinon.
- **CST** : CRs Self-generated turbulence module (Module de turbulence auto-générée par les RCS). Ce paramètre vaut *oui* si le module de turbulence auto-générée est activé, *non* sinon.
- **ST** : CR STreaming module (Module de streaming des RCS). Ce paramètre vaut *oui* si le modèle de streaming du rayonnement cosmique est activé, *non* sinon.
- **SNR** : CR injection through SNRs module (Module d'injection de RCS par les SNRs). Ce paramètre vaut *oui* si le modèle d'injection des RCS est activé, *non* autrement. Si activé, ce paramètre est caractérisé par deux paramètres supplémentaires.  $\zeta_{\text{CR}} = P_{\text{SNR,CR}}/P_{\text{CR}}$  qui représente la valeur de la surpression de rayonnement cosmique par rapport à la pression initiale de RCS dans le plasma initialement et  $P_{\text{ratio}} = P_{\text{SNR,gas}}/P_{\text{SNR,CR}}$  qui représente la valeur des pressions de gaz par rapport à la valeur de la surpression de RCS.

Tous les setups sont caractérisés par cette famille de paramètres et leurs valeurs. Exemple de simulation (TF : Oui, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$ ). Si l'un des paramètres n'est pas explicitement défini pour une simulation donnée, le lecteur peut considérer que sa valeur est *Non* pour les paramètres booléens et 0 pour les paramètres numériques. Pour l'ensemble des variables du système, les conditions aux bords sont périodiques.

### 3.4.2 Etude du système RC-MIS sans sources

Dans cette section je présente les résultats de systèmes rayonnement cosmique, milieu interstellaire en l'absence de sources de RCS et/ou de gaz. Les simulations sont paramétrisées de la manière suivante :

- TF : Oui, CST : Non, ST : Non, SNR : Non
- TF : Oui, CST : Oui, ST : Non, SNR : Non
- TF : Oui, CST : Oui, ST : Oui, SNR : Non.

Les setups présentés sont très similaires à ceux de Seifried et al. (2011) [199], Saury et al. (2014) [191] et Commerçon et al. (2019) [38]. La taille de la boîte est de  $L = 200$  pc tandis que la température initiale du gaz est de  $T_0 \approx 4460$  K, la densité  $n_0 = 2 \text{ cm}^{-3}$ , la pression thermique est de  $P_{\text{th}} \approx 1.23 \times 10^{-12} \text{ dyne cm}^{-2}$  et est égale à la pression initiale du rayonnement cosmique. La vitesse initiale du son est de  $c_s \approx 10 \text{ km/s}$  et le champ magnétique initial est de  $B_0 \approx 1 \mu\text{G}$  ce qui conduit à un beta plasma  $\beta = 8\pi P_{\text{th}}/B_0^2 \approx 30$ . La turbulence à grande échelle est injectée à l'échelle 100 pc et est étalée de manière parabolique comme décrit dans la section (3.3.5). Celle-ci se traduit par un forçage turbulent continu du champ de vitesse du gaz. Les résultats présentés nécessitent que la turbulence à l'intérieur de la boîte soit stationnaire et donc pleinement développée. On estime que deux temps de traversée  $t_{\text{turb}} = L/v_{\text{rms}} \approx 20 \text{ Myr}$  soit 40 Myr de la turbulence dans la boîte sont nécessaire pour atteindre l'état stationnaire.

La figure (3.2) présente les résultats des simulations faisant intervenir le module de forçage turbulent et le module de turbulence auto-générée par le rayonnement cosmique. De gauche à droite sont présentées des simulations dont le coefficient de diffusion des RCs du fond vaut respectivement :  $D_{\text{ISM}} = 10^{22}, 10^{24}, 10^{26}, 10^{28} \text{ cm}^2/\text{s}$  tandis que de haut en bas sont présentées respectivement les variables :  $n, P_{\text{CR}}, \rho^{3/2}T^{0.4}$  et  $D_{\text{self},\parallel}$ . Lorsque le coefficient de diffusion de fond  $D_{\text{ISM}}$  est inférieur à  $D_{\text{crit}} \approx 6.2 \times 10^{25} \text{ cm}^2/\text{s}$ , la densité de gaz est relativement homogène  $0.5 \leq n \leq 5.5 \text{ cm}^{-3}$  et est corrélée à la distribution de pression du rayonnement cosmique qui oscille entre  $P_{\text{CR}} \approx 5 \times 10^{-12} \text{ erg/cm}^3$  et  $10^{-10} \text{ erg/cm}^3$ . Le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  est quasiment homogène et le coefficient de diffusion auto-généré n'est jamais inférieur au coefficient de diffusion du fond. Dans ces régimes, le rayonnement cosmique et le champ magnétique sont couplés par le fait que le temps de diffusion du rayonnement cosmique est supérieur au temps turbulent caractérisé par le coefficient  $D_{\text{crit}}$ . Lorsque le coefficient de diffusion de fond  $D_{\text{ISM}}$  est proche de la valeur du coefficient de diffusion critique  $D_{\text{crit}}$ , la pression du rayonnement cosmique augmente et fait disparaître les gradients dans le gaz. Ceci se traduit par le fait que le terme  $\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{CR},d} = \nabla \cdot [-D_{\text{CR}} \nabla e_{\text{CR}}]$  devient négligeable. Cependant, la pression moyenne du rayonnement cosmique est plus importante dans ce régime; ceci peut venir du fait que les RCs ne sont que partiellement couplés au champ magnétique, ils emmagasinent une partie de l'énergie magnétique sans pour autant que cela affecte de manière notable leurs propriétés cinétiques. Ceci peut s'apparenter à une forme de résonance entre la diffusion des RCs  $D_{\text{ISM}}$  et la diffusion liée au forçage turbulent du gaz  $D_{\text{crit}}$ <sup>8</sup>. Lorsque le coefficient de diffusion de fond des RCs est supérieur au coefficient de diffusion critique, les distributions de gaz et de rayonnement cosmique changent radicalement. Nous observons d'une part que la pression du rayonnement cosmique est complètement homogène  $P_{\text{CR}} \approx 1.5 \times 10^{-11} \text{ erg/cm}^3$  et d'autre part indépendante des fluctuations magnétiques du gaz. Ceci illustre le fait que le rayonnement cosmique diffuse beaucoup plus rapidement que le coefficient de diffusion induit par le forçage turbulent

<sup>8</sup>Cet effet d'amplification de la pression des RCs dans la simulation à  $D_{\text{ISM}} = 10^{26} \text{ cm}^2/\text{s}$  figure (3.2) peut aussi être lié à la présence de conditions aux bord périodiques qui se combinent avec la condition critique  $t_{\text{diff}} \sim t_{\text{turb}}$ .



du gaz. Le coefficient de diffusion auto-généré des RCS  $D_{\text{self},\parallel}$  est localement inférieur au coefficient de diffusion du fond  $D_{\text{ISM}}$  de deux ordres de grandeur; localement, la turbulence est complètement dominée par les effets du rayonnement cosmique sur le gaz. Pourtant, le coefficient de diffusion auto-généré est peu corrélé à la distribution de pression des RCS<sup>9</sup>. Il s'avère que ce dernier est essentiellement conduit par la modification du produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  dont on observe une forte corrélation. En effet, dans ce régime et aux échelles de temps auxquelles on étudie la dynamique RCS-MIS ( $t \sim \text{Myr}$ ) les gradients de pression du rayonnement cosmique se relaxent rapidement (à la vitesse de diffusion proche de celle du fond) en diminuant localement le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  qui se traduit par une modification locale de la densité  $n$  du gaz. Lorsque la turbulence est dominée par le rayonnement cosmique, le gaz est poussé par les gradients de pression des RCS et peut localement générer des sur-densités ou sous-densités importantes.

La figure (3.3) représente les résultats des simulations faisant intervenir le module de forçage turbulent, le module de turbulence auto-générée (au milieu et en bas) et le module de streaming (seulement en bas) tandis que de gauche à droite sont présentées des simulations dont le coefficient de diffusion vaut respectivement :  $D_{\text{ISM}} = 10^{22}, 10^{24}, 10^{26}, 10^{28}$  cm<sup>2</sup>/s. Cette figure présente la distribution de densité  $n$ , de température  $T$  et de taux d'ionisation  $X$  du gaz en fonction du setup. L'objectif est de définir dans quelle phase interstellaire la boîte de simulation se trouve lorsque la turbulence forcée est en régime stationnaire  $t_{\text{sim}} > 40$  Myr. Dans les setups dont le coefficient de diffusion du MIS est inférieur ou égal au coefficient de diffusion critique  $D_{\text{ISM}} = 10^{22}, 10^{24}, 10^{26}$  cm<sup>2</sup>/s, le plasma se trouve quasi-entièrement dans la phase WNM. Seuls quelques rares cellules se trouvent en phase CNM c'est à dire à des températures inférieures à  $T \approx 10^3$  K. Ceci est valable que le module de turbulence auto-générée soit activé ou non car les RCS sont couplés au gaz. En revanche, lorsque le coefficient de diffusion du fond  $D_{\text{ISM}} = 10^{28}$  cm<sup>2</sup>/s est supérieur au coefficient induit par le forçage turbulent, le plasma se trouve dans 3 voire 4 phases différentes : La phase principale est de type WNM, l'essentiel des cellules se trouvent dans ce régime. Cependant, la dynamique de densité du gaz est de plus de deux ordres de grandeur et certaines cellules se trouvent dans des zones chaudes  $T \sim 10^4$  K et denses  $n > 10$  cm<sup>-3</sup> que l'on peut assimiler à un début de phase HII. Mais la plupart des cellules hors de la phase WNM se trouvent en phase CNM  $T \leq 1000$  K et  $n \geq 1$  cm<sup>-3</sup>. Certaines cellules se trouvent en phase DiM ( $n \geq 100$  cm<sup>-3</sup>). Globalement, lorsque la turbulence est localement dominée par le rayonnement cosmique, on observe l'apparition d'un équilibre WNM-CNM qui n'existe pas en l'absence de tels effets. Les résultats obtenus sont similaires à ceux de Commerçon et al. (2019) [38] (voir sa figure 3). Lorsque le module de diffusion auto-générée est activé, la dynamique en densité du gaz semble réduite. Ceci vient du fait que lorsque le rayonnement cosmique exerce une force sur le gaz, il génère également de la turbulence qui contrecarre les effets induits sur le gaz. Autrement dit, la pression du rayonnement cosmique contribue à réduire la compress-

---

<sup>9</sup>La pression des RCS joue un rôle dans la vitesse sonique généralisée telle que donnée par l'équation 20 de Commerçon et al. (2019) [38] et contribue à une réduction de la compressibilité du gaz et donc à l'amplitude des instabilités de streaming de RCS.

ibilité du gaz et donc la plage dynamique de densités  $n_T$  accessibles par le gaz. Lorsque le module de streaming est activé et que le rayonnement cosmique est couplé au gaz ( $D_{\text{ISM}} = 10^{22}, 10^{24}, 10^{26} \text{ cm}^2/\text{s}$ ), la dynamique de densité et de température du gaz est beaucoup plus importante. Ceci s'explique par les variations du terme de chauffage/refroidissement de streaming  $\mathcal{L}_{\text{st}} \propto \nabla P_{\text{CR}}$  qui est proportionnel au gradient de pression du rayonnement cosmique. En effet, dans ces régimes on observe des gradients de pression du rayonnement cosmique qui par l'intermédiaire du chauffage/refroidissement streaming peuvent affecter notablement le gaz. En régime découplé, comme les gradients de pression des RCs sont faibles, il n'y a pas d'échanges d'énergie entre le fluide de RCs et le gaz ce qui explique pourquoi l'histogramme n'évolue pas en présence des termes de streaming lorsque  $D_{\text{ISM}} = 10^{28} \text{ cm}^2/\text{s}$ .

### 3.4.3 Injection d'une source de rayonnement cosmique

Dans cette section je présente les résultats de simulations d'injection d'une source de rayonnement cosmique dans le milieu interstellaire. Le coefficient de diffusion du fond des RCs vaut  $D_{\text{ISM}} = 10^{28} \text{ cm}^2/\text{s}$  pour toutes les simulations réalisées dans la présente section. Les setups réalisés sont :

- TF : Non, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$  figure (3.4). Une suppression de RCs d'un facteur  $10^3$  par rapport à la pression de fond est injectée dans un milieu interstellaire homogène.
- TF : Non, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$  figure (3.5). Une suppression de RCs d'un facteur  $10^3$  par rapport à la pression de fond ainsi qu'une suppression thermique du même facteur sont injectées dans un milieu interstellaire homogène.
- TF : Oui, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$  figure (3.6). Une suppression de RCs d'un facteur  $10^3$  par rapport à la pression de fond est injectée dans un milieu interstellaire turbulent.
- TF : Oui, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$  figure (3.7). Une suppression de RCs d'un facteur  $10^3$  par rapport à la pression de fond ainsi qu'une suppression thermique du même facteur sont injectées dans un milieu interstellaire turbulent.

Les propriétés du milieu interstellaire sont les mêmes que celles présentées dans la section précédente. L'objectif de cette section est d'observer l'effet de l'injection d'un reste de supernova en phase radiative sur le coefficient de diffusion auto-généré des RCs et sur les propriétés du gaz. Chaque figure présente les variables : pression du rayonnement cosmique  $P_{\text{CR}}$ , gradient de pression des RCs  $|\nabla P_{\text{CR}}|$ , produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  et coefficient de diffusion auto-généré parallèle aux lignes de champ magnétique  $D_{\text{self},\parallel}$  à différents instants :  $t \approx 0.08, 0.15, 0.64, 7.96 \text{ Myr}$ .

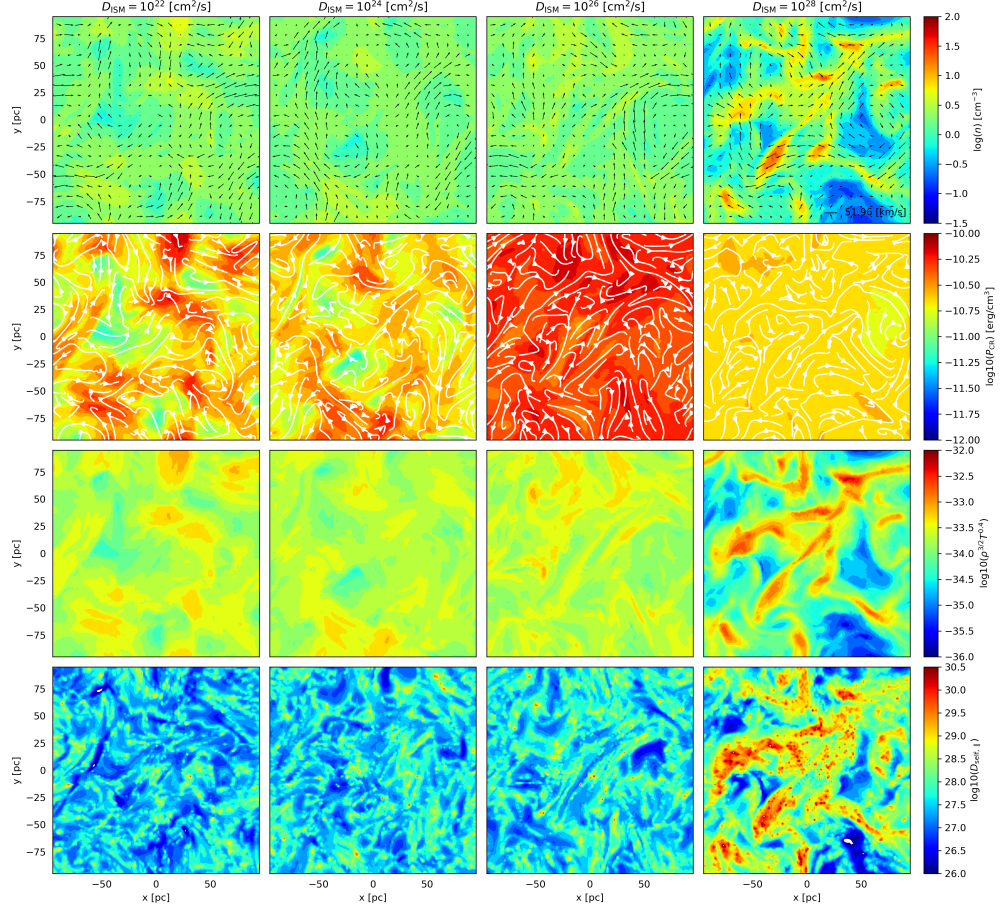


Figure 3.2: Cette figure représente le résultat de tests fiduciaux de systèmes RC-MIS sans injection de sources. De gauche à droite, le coefficient de diffusion du milieu interstellaire vaut  $D_{\text{ISM}} = 10^{22}, 10^{24}, 10^{26}, 10^{28} \text{ cm}^2/\text{s}$ . De haut en bas sont respectivement représentées les tranches dans le plan  $(x, y)$  et à l'abscisse  $z = 0$  des variables suivantes : la densité numérique du gaz  $n$ , la pression du rayonnement cosmique  $P_{\text{CR}}$ , le produit  $\rho^{3/2} T^{0.4}$  qui décrit l'effet du gaz sur le coefficient de diffusion auto-généré des RCs et le coefficient de diffusion auto-généré des RCs  $D_{\text{self},\parallel}$ . Dans les figures représentant la densité numérique de gaz, les vecteurs noirs représentent la composante dans le plan  $(x, y)$  du champ de vitesse du gaz. Dans les figures présentant la pression du rayonnement cosmique, les lignes de courant blanches représentent la composante dans le plan  $(x, y)$  des lignes du champ magnétique. Paramètres des simulations : TF : Oui, CST : Oui, ST : Non, SNR : Non.

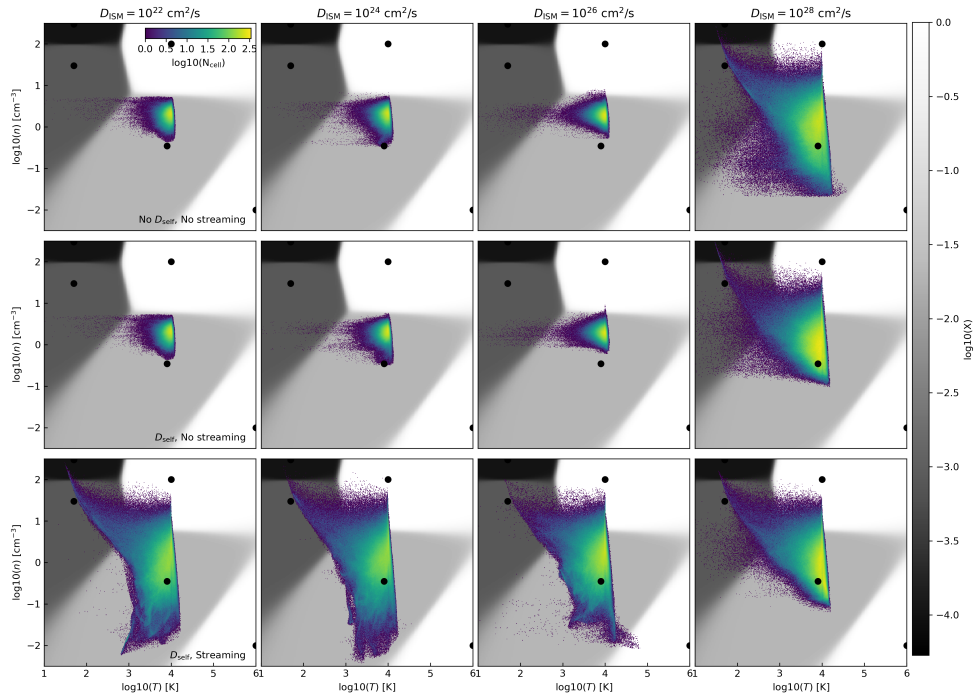


Figure 3.3: Cette figure présente différents histogrammes bi-dimensionnel de taux d'ionisation  $X$  du MIS en fonction de la densité  $n$  et de la température  $T$ . De gauche à droite sont représentées des simulations réalisées avec les coefficients de diffusion du MIS suivants respectivement :  $D_{\text{ISM}} = 10^{22}$ ,  $10^{24}$ ,  $10^{26}$ ,  $10^{28}$   $\text{cm}^2/\text{s}$ . De haut en bas sont respectivement représentées les simulations suivantes : Pas de modèle de diffusion auto-générée ni de streaming (TF : Oui, CST : Non, ST : Non, SNR : Non), modèle de diffusion auto-généré mais pas de streaming (TF : Oui, CST : Oui, ST : Non, SNR : Non), modèle de diffusion auto-généré et streaming (TF : Oui, CST : Oui, ST : Oui, SNR : Non). Dans chaque figure, le fond en teintes de gris fait référence au diagramme de Voronoï du taux d'ionisation du MIS comme présenté dans la figure (3.1), les points noirs font référence aux phases du MIS. Les histogrammes 2D colorés représentent le nombre de cellules ayant une combinaison  $(n, T)$  particulière, ce nombre est caractérisée par l'échelle de couleur présentée dans la figure en haut à gauche. Paramètres des simulations : TF : Oui, CST : Non, ST : Non, SNR : Non; TF : Oui, CST : Oui, ST : Non, SNR : Non; TF : Oui, CST : Oui, ST : Oui, SNR : Non.

Dans le cas où le rayonnement cosmique est injecté dans un milieu interstellaire homogène (TF : Non, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$ , figure 3.4), on observe que la pression et les gradients de pression de RCs se relaxent au bout d'environ 500 kyr. Le coefficient de diffusion auto-généré décroît de 3 ordres de grandeur proche de la source et se relaxe plus lentement que le gradient de pression des RCs. En parallèle le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  est totalement homogène peu après l'injection du rayonnement cosmique et décroît en même temps que les gradients de pression de RCs disparaissent. Cet effet montre bien que dans le régime où le rayonnement cosmique n'est pas couplé au gaz, ce dernier exerce une force importante qui génère une sous-densité de gaz à la position de la source et une coquille de surpression thermique autour de la source. Tandis que le déplacement du gaz se fait de manière isotrope lorsque les RCs n'ont pas totalement diffusé  $t \approx 160$  kyr, le déplacement devient purement perpendiculaire lorsque les RCs ont suffisamment diffusé  $t \approx 640$  kyr. Ce dernier résultat est physiquement discutable car conséquence des conditions de bord périodiques de la simulation. Le transport perpendiculaire du gaz est ici clairement sur-estimé. A  $t \approx 8$  Myr, la pression moyenne du fluide de RCs a augmenté et maintient le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  à une valeur plus faible qu'initialement.

Dans le cas où une surpression thermique est également injectée dans le milieu interstellaire (TF : Non, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$ , figure 3.5), le gradient de pression des RCs à  $t = 80$  kyr est beaucoup plus important  $\nabla P_{\text{CR}} \sim 10^{-24}$  erg/cm<sup>4</sup> contre  $10^{-27}$  erg/cm<sup>4</sup> dans le setup sans injection de gaz et le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  est également plus important proportionnellement à la quantité de gaz injecté. En conséquence le coefficient de diffusion auto-généré des RCs décroît de plus de 6 ordres de grandeur. Bien que le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  ait augmenté, l'effet de la surpression de gaz sur les RCs est très important et contribue à créer des gradients de pression 5 ordres de grandeur plus importants. Comme pour le cas sans surpression de gaz, le rayonnement cosmique diffuse, le gaz est d'abord poussé de manière isotrope à  $t = 160$  kyr puis de manière perpendiculaire aux lignes de champ. La valeur du produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  diminue à mesure que les gradients de pression des RCs disparaissent et contribue à maintenir un niveau de turbulence auto-générée notable ( $D_{\text{self},\parallel} \sim 10^{25}$  cm<sup>2</sup>/s) dans le plasma. Remarquons également pour les deux setups présentés que les lignes de champ s'élargissent au niveau de la source et témoignent de l'effet non-négligeable du transport perpendiculaire du rayonnement cosmique.

Dans le cas où le rayonnement cosmique est injecté dans un milieu interstellaire turbulent (TF : Oui, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$ , figure 3.6), la surpression de rayonnement cosmique se diffuse beaucoup plus rapidement à  $t \approx 80$  kyr. Ceci est dû à la diffusion induite par les mouvements turbulents du gaz. En conséquence, moins de 500 kyr après l'injection, le rayonnement cosmique est complètement dilué dans le plasma. A  $t \leq 160$  kyr les gradients de pression engendrés sont plus faibles que dans le cas d'une injection dans un milieu homogène mais les effets sur le coefficient de diffusion auto-généré restent les mêmes. Ceci se traduit par le fait que le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  est plus faible à l'intérieur du reste et forme une coque autour du reste. Cet effet est la combi-

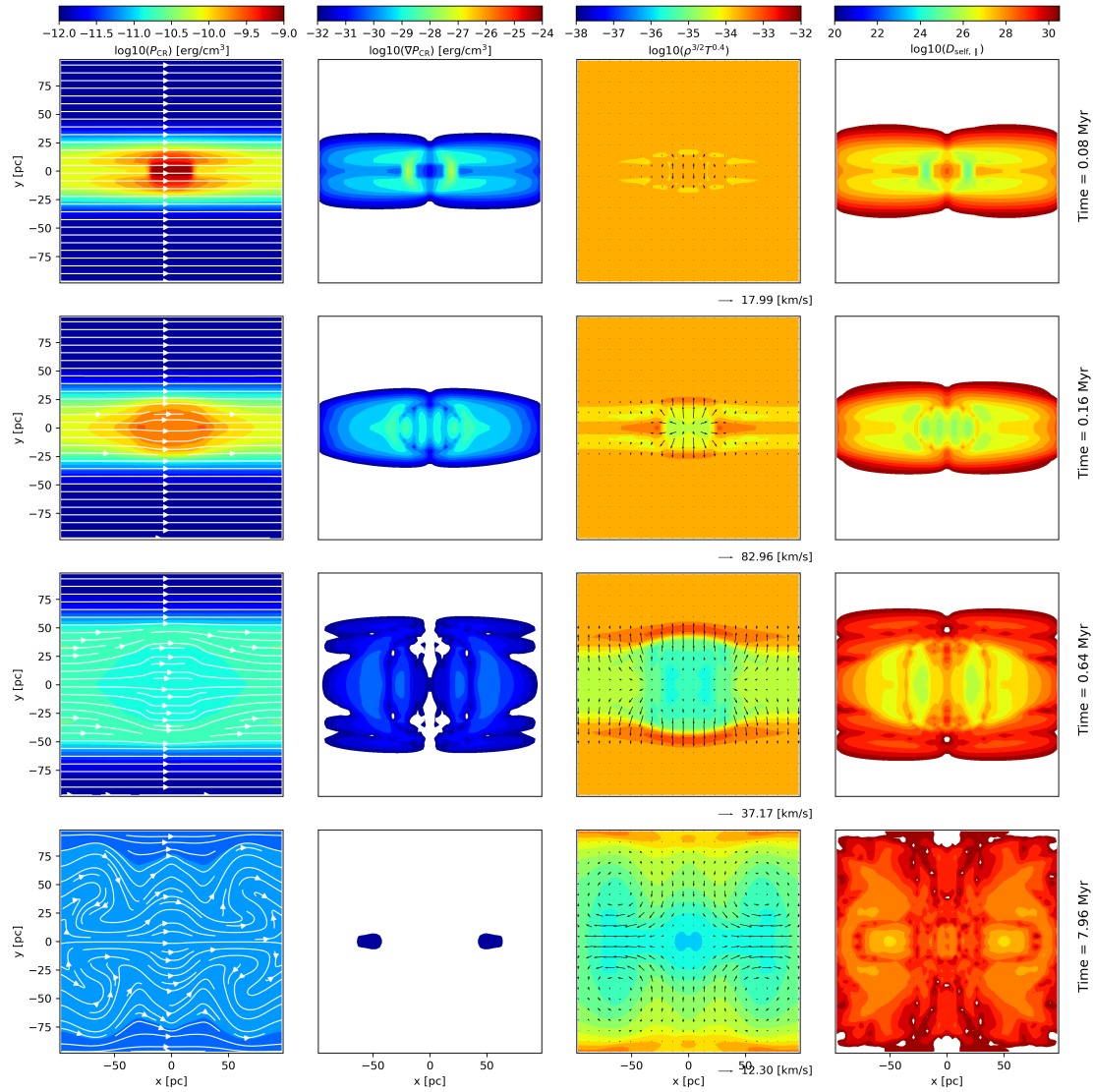


Figure 3.4: Cette figure présente les résultats d’une simulation d’injection d’une source de rayons cosmiques dans un milieu interstellaire homogène. De gauche à droite sont respectivement représentées des tranches  $(x, y)$  à l’abscisse  $z = 0$  des variables :  $P_{\text{CR}}$ ,  $|\nabla P_{\text{CR}}|$ ,  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  et  $D_{\text{self},||}$  aux instants (de haut en bas respectivement) :  $t = 0.08, 0.16, 0.64, 7.96$  Myr depuis l’instant d’injection. Les lignes de courant blanches représentent la composante dans le plan  $(x, y)$  des lignes de champ magnétique tandis que les vecteurs noirs représentent la composante dans le plan  $(x, y)$  du champ de vitesse du gaz dont la valeur normée est donnée par la longueur de la flèche noire sous chaque figure du produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$ . Les paramètres de la simulation sont : TF : Non, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$ .

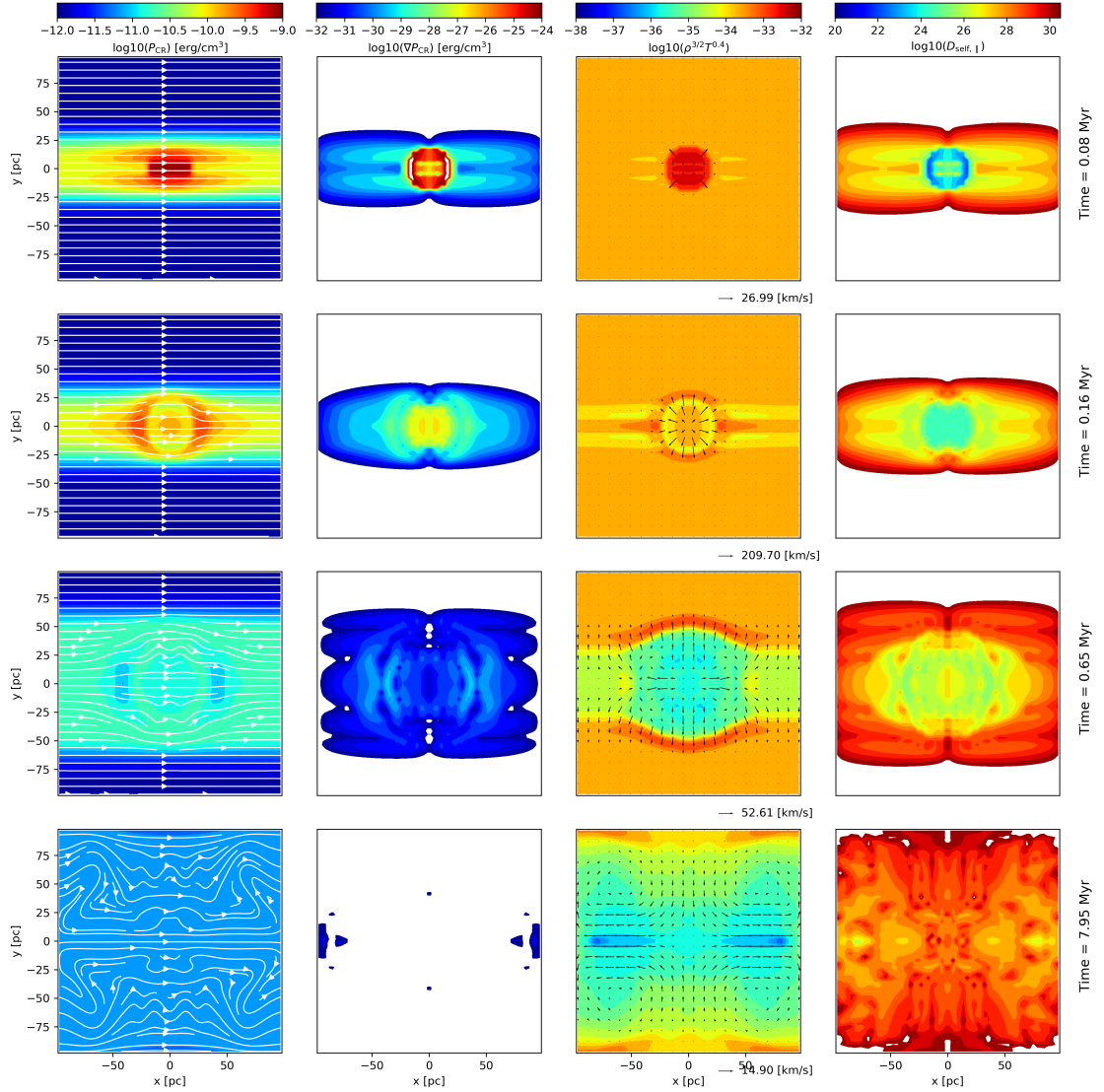


Figure 3.5: Cette figure présente les résultats d'une simulation d'injection d'une source de rayons cosmiques avec surpression de gaz dans un milieu interstellaire homogène, le coefficient de diffusion de fond des RCs vaut  $D_{\text{ISM}} = 10^{28} \text{ cm}^2/\text{s}$ . De gauche à droite sont respectivement représentées des tranches  $(x, y)$  à l'abscisse  $z = 0$  des variables :  $P_{\text{CR}}$ ,  $|\nabla P_{\text{CR}}|$ ,  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  et  $D_{\text{self},||}$  aux instants (de haut en bas respectivement) :  $t = 0.08, 0.16, 0.64, 7.96$  Myr depuis l'instant d'injection. Les lignes de courant blanches représentent la composante dans le plan  $(x, y)$  des lignes de champ magnétique tandis que les vecteurs noirs représentent la composante dans le plan  $(x, y)$  du champ de vitesse du gaz dont la valeur normée est donnée par la longueur de la flèche noire sous chaque figure du produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$ . Les paramètres de la simulation sont : TF : Non, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$ .

raison de l'action du rayonnement cosmique injecté par la source et du fluide de RCs turbulent dans le plasma de fond. En effet, comme nous l'avons vu dans la figure (3.2) dans le domaine de diffusion où le rayonnement cosmique n'est pas couplé au gaz, ce dernier contribue, via l'instabilité de streaming de RCs, à rendre inhomogène le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  et donc à maintenir un coefficient de diffusion faible bien que les gradients de pression des RCs aient disparu. Contrairement aux setups dans les milieux homogènes, les effets de l'injection de RCs dans le gaz sont dissipés au bout de quelques millions d'années par la turbulence induite par le module de forçage turbulent.

Dans le cas où une surpression thermique est également injectée dans le milieu interstellaire (TF : Oui, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$ , figure 3.7), les effets observés modifiés de la même manière que dans le cas d'un milieu homogène : les gradients de pression des RCs sont plus importants, le coefficient de diffusion décroît de manière plus importante, le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  reste faible plus longtemps. Notons également que dans les setups d'injection dans un milieu turbulent il est difficile de quantifier l'élargissement des lignes de champ au niveau de la source lié au transport perpendiculaire car l'échappement des rayons cosmiques des restes de supernovae est un processus rapide ( $< 1$  Myr) devant les temps caractéristique du forçage turbulent et de la dynamique globale de la boîte turbulente.

Les simulations présentées montrent les effets d'injection du rayonnement cosmique dans le milieu interstellaire mais présentent certaines limitations. Le modèle d'injection du rayonnement cosmique est incomplet car il ne tient pas compte de l'intégralité de la distribution spectrale du rayonnement cosmique bien que la pression des RCs injectée à 1 GeV soit la plus importante. En effet j'ai montré dans le chapitre (2) que le rayonnement cosmique à haute énergie peut générer des niveaux de turbulence importants qui peuvent cascader et affecter le transport des RCs de plus basse énergie. Le choix du rayon et la distribution spatiale de la surdensité de RCs sont très approximatifs : en effet le reste évolue différemment suivant la phase dans laquelle il se trouve et ceci a un impact dans les propriétés d'injection du rayonnement cosmique. La valeur de la surpression thermique nécessite une étude approfondie, en effet tandis que  $P_{\text{ratio}} = 0$  revient à dire que le choc est totalement dissipé lorsque les RCs de 1 GeV sont injectés,  $P_{\text{ratio}} = 1$  suggère que la pression thermique dans la source est  $10^3$  fois supérieure à la pression moyenne du gaz dans le fond ce qui constitue une hypothèse extrême. Dans les faits, ces choix sont motivés par la volonté d'extraire des comportements radicalement différents. La taille de la boîte de simulation est faible  $L = 200$  pc. J'ai montré dans le chapitre (2) que la surpression de RCs peut s'étendre sur plusieurs centaines de pc. Le choix de conditions de bord périodiques entraîne une interaction entre les RCs qui s'échappent à droite et à gauche de la source et in fine un transport perpendiculaire sur-évalué aux temps longs ( $t > 500$  kyr).



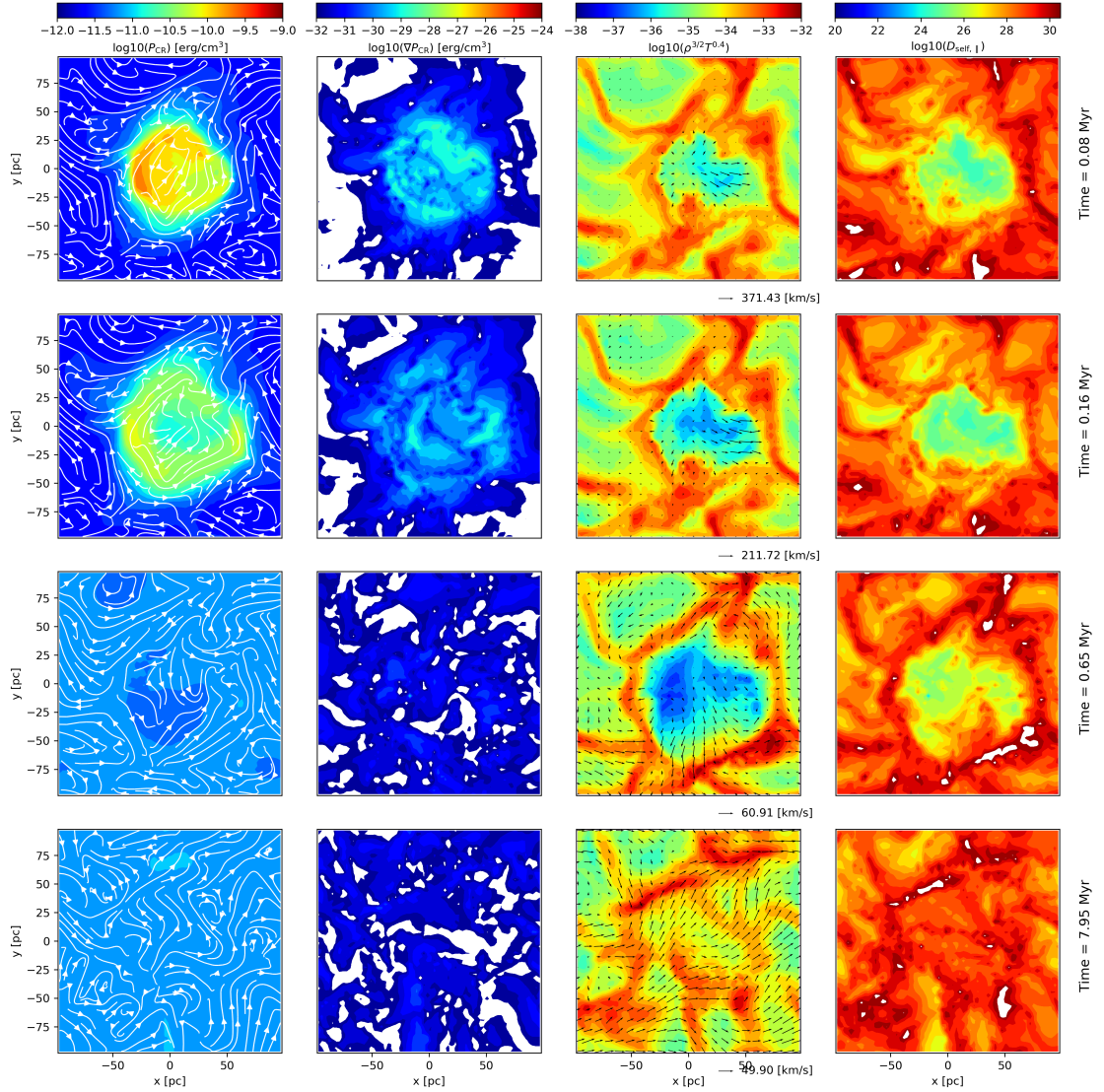


Figure 3.6: Cette figure présente les résultats d'une simulation d'injection d'une source de rayons cosmiques dans un milieu interstellaire turbulent, le coefficient de diffusion de fond des RCs vaut  $D_{\text{ISM}} = 10^{28} \text{ cm}^2/\text{s}$ . De gauche à droite sont respectivement représentées des tranches  $(x, y)$  à l'abscisse  $z = 0$  des variables :  $P_{\text{CR}}$ ,  $|\nabla P_{\text{CR}}|$ ,  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  et  $D_{\text{self},||}$  aux instants (de haut en bas respectivement) :  $t = 0.08, 0.16, 0.65, 7.95 \text{ Myr}$  depuis l'instant d'injection. Les lignes de courant blanches représentent la composante dans le plan  $(x, y)$  des lignes de champ magnétique tandis que les vecteurs noirs représentent la composante dans le plan  $(x, y)$  du champ de vitesse du gaz dont la valeur normée est donnée par la longueur de la flèche noire sous chaque figure du produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$ . Les paramètres de la simulation sont : TF : Oui, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$ .

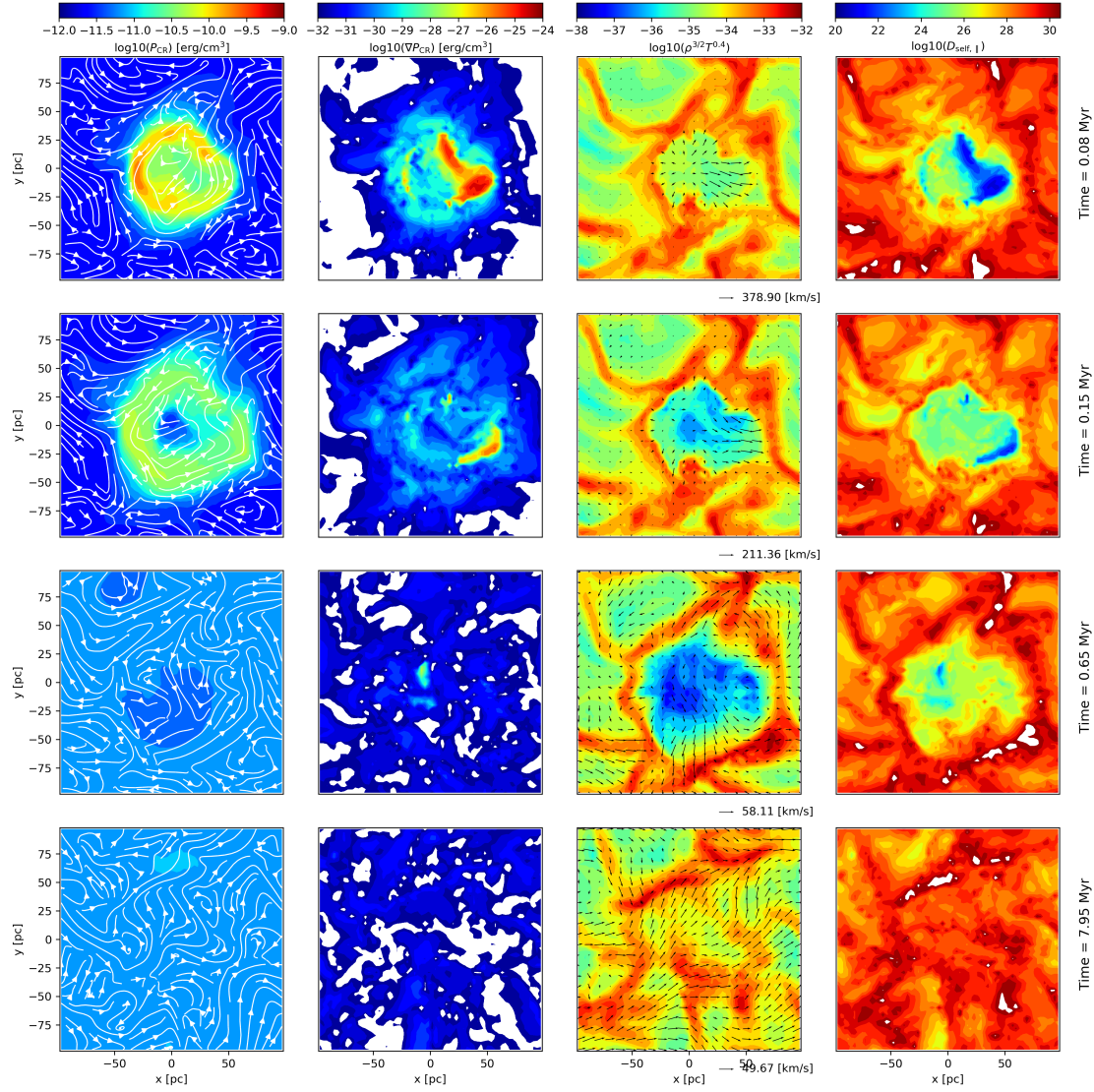


Figure 3.7: Cette figure présente les résultats d'une simulation d'injection d'une source de rayons cosmiques avec suppression de gaz dans un milieu interstellaire turbulent, le coefficient de diffusion de fond des RCs vaut  $D_{\text{ISM}} = 10^{28} \text{ cm}^2/\text{s}$ . De gauche à droite sont respectivement représentées des tranches  $(x, y)$  à l'abscisse  $z = 0$  des variables :  $P_{\text{CR}}$ ,  $|\nabla P_{\text{CR}}|$ ,  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  et  $D_{\text{self},\parallel}$  aux instants (de haut en bas respectivement) :  $t = 0.08, 0.15, 0.65, 7.95 \text{ Myr}$  depuis l'instant d'injection. Les lignes de courant blanches représentent la composante dans le plan  $(x, y)$  des lignes de champ magnétique tandis que les vecteurs noirs représentent la composante dans le plan  $(x, y)$  du champ de vitesse du gaz dont la valeur normée est donnée par la longueur de la flèche noire sous chaque figure du produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$ . Les paramètres de la simulation sont : TF : Oui, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$ .

### 3.4.4 Etude du système RC-MIS avec plusieurs sources

L'objectif de cette section est d'une part de quantifier les effets du modèle de turbulence auto-générée par le rayonnement cosmique sur les propriétés du MIS, d'autre part de voir dans quelle mesure il est possible de reproduire un milieu interstellaire turbulent uniquement à partir de l'injection dynamique de RCs et/ou de gaz dans le plasma. L'objectif est également de comparer les simulations faisant intervenir l'injection dynamique de rayonnement cosmique sans et avec une suppression de gaz afin d'observer les effets induits sur la turbulence dans la simulation. Pour cela, j'ai réalisé différentes simulations dont les setups sont décrits ci-dessous et les résultats sont présentés dans les figures (3.8, 3.9, 3.10 et 3.11) :

- TF : Oui, CST : Non, SNR : Non. Dans cette simulation, le plasma est uniquement perturbé par le module de forçage turbulent.
- TF : Oui, CST : Oui, SNR : Non. Dans cette simulation, le plasma est perturbé par le module de forçage turbulent et le module de turbulence auto-générée du rayonnement cosmique.
- TF : Non, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$ . Dans cette simulation, le milieu interstellaire est uniquement perturbé par l'injection dynamique de rayonnement cosmique à travers des SNs au taux d'explosion de la voie lactée. Le module de turbulence auto-générée est activé.
- TF : Oui, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$ . Dans cette simulation, le milieu interstellaire est à la fois perturbé par le module de forçage turbulent et à la fois par l'injection de rayonnement cosmique via l'explosion de SNs au taux galactique.
- TF : Non, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$ . Dans cette simulation le milieu interstellaire est uniquement perturbé par l'injection de rayons cosmiques et de gaz via l'explosion de SNs au taux galactique.
- TF : Oui, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$ . Dans cette simulation le milieu interstellaire est à la fois perturbé par le module de forçage turbulent et par l'injection de RCs et de gaz au taux d'explosion de SNs galactique.

L'ensemble des simulations sont caractérisées par un coefficient de diffusion des RCs de fond qui vaut  $D_{\text{ISM}} = 10^{28} \text{ cm}^2/\text{s}$ . Dans les simulations d'injection dynamique de RCs via les SNRs, l'injection des sources ne démarre qu'à partir de  $40 \text{ Myr} \sim 2t_{\text{turb}}$  correspondant approximativement à l'instant à partir duquel on considère que la turbulence issue du forçage turbulent est globalement développée et stationnaire dans la simulation. De plus, afin que la turbulence générée par les SNRs dans les simulations soient globalement développée, il faut attendre que suffisamment de sources aient été injectées dans la simulation. Le taux d'explosion de SNs dans la galaxie est de l'ordre de  $\tau_{\text{SN}} \approx 3 \times 10^4 \text{ Myr}^{-1}$  tandis que la fraction de volume galactique que représente la boîte de simulation

est de  $L^3/V_{\text{galaxy}} \approx 3.8 \times 10^{-5}$ . Il explose donc en moyenne 1.1 supernova par Myr dans les simulations avec injection dynamique de RCs. Ainsi les résultats présentés dans les figures (3.8, 3.9, 3.10 et 3.11) correspondent à une moyenne sur 10 Myrs à partir de  $t \approx 60 \text{ Myr} \sim 3t_{\text{turb}}$ . Au début de la mesure environ 20 SNRs ont été injectées et 10 de plus sont injectées pendant la mesure. En résumé, je considère quelque soit le setup que la turbulence dans la boîte de simulation est stationnaire au bout de  $3t_{\text{turb}} \sim 60 \text{ Myr}$  et je construis mes fonctions de distribution de probabilité (PDFs : Probability Distribution Functions, figures 3.8, 3.9, 3.10) en moyennant les observations sur  $t_{\text{turb}}/2 \sim 10 \text{ Myrs}$ .

La figure (3.8) présente les PDFs des variables :  $\rho^{3/2}T^{0.4}$ ,  $\nabla P_{\text{CR}}$  et  $D_{\text{self},\parallel}$ . Dans le cas du produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  (figure du haut) on remarque que la distribution suit une loi normale dans le cas du setup (TF : Oui, CST : Non, SNR : Non). Le setup (TF : Oui, CST : Oui, SNR : Non) est caractérisé par une distribution qui a une forme normale aux hautes valeurs mais dont la forme aux faibles valeurs est affinée, la largeur de la distribution est réduite de deux ordres de grandeurs par rapport au setup sans le module CST (TF : Oui, CST : Non, SNR : Non). Les autres setups faisant intervenir l'injection dynamique de RCs ont une forme modifiée et une plage dynamique du produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  qui est réduite. En ce qui concerne la variable  $\nabla P_{\text{CR}}$  (figure du milieu), on remarque que la distribution des gradients de pression des RCs est quasiment la même pour tous les setups hormis les setups qui font intervenir l'injection de fluide thermique (TF : Non, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$  et TF : Oui, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$ ) en tirets bleu et rouge. Ces derniers présentent en plus d'une distribution similaire à celle des autres setups, de forts gradients de pressions dont le pic se trouve à environ  $\nabla P_{\text{CR}} \sim 10^{-25} \text{ erg/cm}^4$ . Cette observation explique également la figure du bas qui présente les PDFs de la variable  $D_{\text{self},\parallel}$ . Tandis que la distribution du coefficient de diffusion des RCs est similaire pour tous les setups, les setups faisant intervenir l'injection dynamique de fluide thermique présentent des coefficients de diffusion bien plus faibles inférieurs à  $10^{22} \text{ cm}^2/\text{s}$ .

La figure (3.9) présente les PDFs des variables :  $T$ ,  $n$ ,  $|B|$  et  $P_{\text{CR}}$ . Dans le cas des setups sans injection dynamique de RCs ni de fluide thermique (TF : Oui, CST : Non, SNR : Non et TF : Oui, CST : Oui, SNR : Non, en noir et vert), la PDF de température présente un pic à  $\sim 10^4 \text{ K}$  et s'étale sur trois ordres de grandeur entre  $10 \text{ K}$  et  $10^4 \text{ K}$ . Dans le cas des setups avec injection dynamique de RCs uniquement (TF : Non, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$  et TF : Oui, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$  en traits rouge et bleu), cette plage dynamique est augmentée d'un ordre de grandeur entre  $1 \text{ K}$  et  $10^4 \text{ K}$ . Dans le cas des setups faisant en plus intervenir l'injection de fluide thermique (TF : Non, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$  et TF : Oui, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$  en tirets rouge et bleu), il apparaît localement des zones où la température excède  $10^6 \text{ K}$ . Les PDFs de densité du gaz  $n$  suivent de manière relativement proche les PDFs du produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$ . On observe deux types de comportements différents concernant les PDFs de la norme du champ magnétique. Les setups dont le module de forçage turbulent est

activé présentent des distributions dont le pic se trouve à  $B \sim 10 \mu\text{G}$  et une dynamique de 3 ordres de grandeur tandis que les setups qui ne font pas intervenir le module de forçage turbulent présentent un maximum à  $B \sim 1 \mu\text{G}$  et une plage dynamique d'environ 2 ordres de grandeur. Concernant les PDFs de la pression du rayonnement cosmique (figure du bas), les setups qui ne font pas intervenir d'injection de RCs ont une distribution relativement normale piquée à  $P_{\text{CR}} \sim 10^{-10.8} \text{ erg/cm}^3$  tandis que les setups faisant intervenir l'injection dynamique de RCs présentent une distribution à des pressions beaucoup plus importantes : dans le cas où le module TF n'est pas activé, les PDFs piquent à  $\sim 10^{-9.5} \text{ erg/cm}^3$  tandis que lorsque le module TF est activé les PDFs piquent à  $10^{-9.25} \text{ erg/cm}^3$ .

Enfin la figure (3.10) présente les PDFs des variables :  $v$  (le champ de vitesse du fluide),  $V_A$  et le nombre de Mach  $\mathcal{M}_A$  du gaz. En ce qui concerne le champ de vitesse  $v$  du fluide (figure du haut), on observe deux types de distributions dépendant de la présence ou non du module TF : lorsqu'il est activé, les distributions piquent globalement à  $v \sim 10^{1.5} \text{ km/s}$  tandis qu'en l'absence de forçage turbulent, les PDFs piquent à  $v \sim 3 \text{ km/s}$ . Un comportement similaire est observé sur les PDFs du champ de vitesse Alfvénique du fluide (figure du milieu). Les effets observés sur les figures du haut et du milieu se compensent à peu près de telle manière que le nombre de Mach Alfvénique du fluide est quasi indépendant du setup (figure du bas).

**Effet du modèle de turbulence auto-générée** Les résultats des simulations (TF : Oui, CST : Non, SNR : Non) et (TF : Oui, CST : Oui, SNR : Non) sont présentés dans les figures (3.8, 3.9 et 3.10) par les lignes continues vertes et noires respectivement. L'objectif est de comparer l'état du milieu interstellaire avec et sans le module de turbulence auto-générée du rayonnement cosmique.

Dans la figure (3.8) on observe que la fonction de densité de probabilité du produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  est plus large en l'absence qu'en présence du coefficient de diffusion auto-généré et ce seulement pour les faibles valeurs. Ceci est un effet que l'on a déjà analysé et qui vient du fait que les ondes auto-générées contribuent à réduire l'effet de la force exercée par les gradients de pression de RCs sur le plasma et donc la présence de sous-densités de gaz. Autrement dit, la turbulence auto-générée contribue à améliorer le couplage entre les RCs et le gaz ce qui contribue à réduire les effets des instabilités thermiques de RCs. C'est par ailleurs ce que montre la fonction de densité de probabilité du gradient de pression des RCs  $\nabla P_{\text{CR}}$ , lorsque le module CST est activé, les ondes produites contribuent à la réduction des gradients de pression. Ce résultat semble contradictoire avec les résultats obtenus dans le chapitre (2) qui suggère que les ondes auto-générées contribuent au maintien des gradients de pression des RCs<sup>10</sup>. Il ne faut pas oublier que dans le cas présent le plasma réagit aux effets des RCs et ceci est observé sur des temps très longs devant les échelles de temps sondées dans le chapitre (2).

<sup>10</sup>La contradiction observée s'explique par le fait que le gaz répond dynamiquement à la présence du rayonnement cosmique. Comme expliqué, la pression des RCs diminue la compressibilité du gaz et donc l'amplitude des instabilités thermiques de RCs.

Dans la figure (3.9) on observe que le modèle CST contribue à légèrement diminuer le nombre de cellules de haute température ( $T > 10^4$  K) et, comme pour le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  réduire la largeur de la fonction de densité de probabilité de la densité totale  $n$  du gaz. La distribution du champ magnétique et de la pression des RCs semble complètement indépendante de la présence du modèle CST.

Dans la figure (3.10) on observe que le champ de vitesse  $v$  du gaz n'est pas affecté par la présence du modèle CST, la vitesse d'Alfvén est très légèrement plus faible dans le cas où le modèle CST est activé. C'est une conséquence du changement de la dynamique de la densité du gaz. Le nombre de Mach Alfvénique n'est pas affecté par ce modèle.

Les effets principaux du modèle CST sur le milieu interstellaire, à des échelles de temps supérieure au Myr, consistent en une réduction de la dynamique de la densité du gaz conséquence des effets de pression des RCs dans la vitesse du gaz. Sans le modèle CST, lorsqu'il n'est pas couplé aux fluctuations magnétiques du gaz, le rayonnement cosmique exerce une force sur le gaz qui peut contribuer à créer des zones de sous-densité. En revanche, avec le modèle CST, une partie de la force exercée sur le gaz est directement transmise à la turbulence magnétique et ce à des échelles de l'ordre du rayon de gyration des RCs d'énergie 1 GeV c'est à dire de l'ordre de  $10^{-6}$  pc donc bien en deça de la taille des cellules de la simulation. Le modèle CST joue le rôle d'un modèle de cascade turbulente favorisée par le rayonnement cosmique et réduit le taux d'aggrégation de gaz.

**Injection dynamique de SNRs sans forçage turbulent externe** Les résultats des simulations (TF : Non, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{CR} = 10^3$ ,  $P_{ratio} = 0$ ) et (TF : Non, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{CR} = 10^3$ ,  $P_{ratio} = 1$ ) sont présentés dans les figures (3.8, 3.9 et 3.10) par les lignes continues et discontinues rouges respectivement. L'objectif est d'analyser les effets des explosions de supernovae sur les propriétés du gaz interstellaire. On peut particulier comparer les résultats aux simulations (TF : Oui, CST : Non, SNR : Non) et (TF : Oui, CST : Oui, SNR : Non).

Dans la figure (3.8) le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  semble indépendant de l'injection de gaz, en revanche on observe que la largeur de la distribution est réduite aux hautes valeurs par rapport aux simulations sans injection de SNRs. Ce résultat dépend de la quantité et de l'amplitude des gradients de pression de RCs et par conséquent de l'importance des modèles TF et SNR et leurs paramètres associés dans le plasma. Autrement dit, si la fréquence d'injection des SNRs est plus importante, la distribution du produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  sera modifiée en conséquence. On note cependant que la partie basse de la distribution du produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  coïncide avec les setups sans injection dynamique de RCs, ceci est le résultat de l'effet des ondes auto-générées sur les gradients de pression des RCs. Les gradients de pression de RCs suivent à peu près la même distribution que dans les setups sans sources, en revanche dans le cas où une surpression de gaz est également

injectée, on observe de très forts gradients de pression de RCs. Dans le cas où le gaz est injecté, le gradient de pression de RCs est sommé avec le gradient de pression thermique et engendre une réduction très importante du coefficient de diffusion auto-générée du rayonnement cosmique. On observe également que les PDFs de la densité ont une largeur moins importante que sans injection de fluide thermique car la pression thermique supplémentaire présente plus de mouvements supersoniques qui s'observent sur les PDFs du champ de vitesse du gaz  $v$  dans la figure (3.10).

Dans la figure (3.9) on observe que localement la température du MIS est beaucoup plus faible que dans les setups sans sources de RCs. Ceci vient du fait que les zones de sous-pression de gaz ne sont pas compensées par les mouvements turbulents du gaz que peut générer le module TF. Les hautes températures ( $T > 10^5$  K) s'expliquent par la surpression d'un facteur  $10^3$  de gaz dans le plasma. La distribution de densité du gaz montre que le milieu est faiblement perturbé car le nombre de cellules dont la densité est proche de la densité initiale est 3 fois plus important que dans les simulations sans injection et avec module TF. On observe que les zones de haute densité sont légèrement plus présentes ce qui s'explique une fois de plus par le fait que les SNRs génèrent des surdensités qui ne sont pas diffusées par les mouvements turbulents du plasma. Le champ magnétique en revanche est beaucoup plus faible, d'un facteur 10, que dans les simulations avec module TF. En effet, le module de forçage turbulent contribue à augmenter la pression magnétique moyenne dans le gaz et la vitesse moyenne du fluide. Enfin on observe que la pression du rayonnement cosmique est beaucoup plus importante, de 2 ordres de grandeur, dans les simulations avec source que sans. Ceci vient du fait que l'énergie du rayonnement cosmique n'est pas conservée dans les simulations avec source car les conditions de bord de la boîte sont périodiques. On observe en particulier que la pression du rayonnement cosmique est plus importante encore lorsque du gaz est également injecté. Ceci limite la validité des conclusions dans le cas d'une injection dynamique de SNRs.

Dans la figure (3.10) on observe d'une part que la distribution de vitesse du gaz est différente entre les setups avec et sans sources précisément parce que le module TF donne une impulsion au gaz que les SNRs ne donnent pas. La distribution de vitesse d'Alfvén du gaz est moins importante dans le cas avec source et est conséquence du fait que le champ magnétique est en moyenne égal au champ magnétique initial. Le nombre de Mach Alfvénique du gaz dans le cas avec sources est légèrement inférieur au cas sans sources car la vitesse  $v_{\text{rms}}$  est plus importante dans le cas sans sources  $v_{\text{rms}}(t > 60 \text{ Myr}) \approx 100 \text{ km/s}$  contre environ  $30 \text{ km/s}$  dans le cas avec sources. Cependant, lorsque du gaz est également injecté, la vitesse du gaz peut être localement plus importante et contribue à des nombres de Mach Alfvéniques plus importants que dans le cas sans source.

Les propriétés turbulentes du gaz s'il n'est excité que à travers l'injection de SNRs sont différentes des propriétés du gaz dans le cas d'un forçage turbulent qui représente

les effets de la turbulence à grande échelle. Ceci suggère que la turbulence à grande échelle dans le MIS n'est pas, ou seulement en partie, générée par les explosions de supernovae et que d'autres candidats sont nécessaires pour reproduire les propriétés statistiques du gaz avec le module de forçage turbulent (autogravité, rotation différentielle des disques galactique/proto-stellaires, interactions entre galaxies, accretion galactique anisotrope ...). Notons cependant deux défauts : d'une part les simulations avec injection dynamique de SNRs ne conservent pas l'énergie étant données les conditions de bord périodiques, d'autre part, le module de forçage turbulent ne conserve pas non-plus l'énergie du gaz car applique en permanence une force stochastique sur le champ de vitesse du gaz. Afin de conserver l'énergie et de comparer les différents setups, un terme de fuite de gaz et de rayons cosmique qui compense les différentes injections d'énergie est nécessaire. Ce terme n'est actuellement pas implémenté.

**Injection dynamique de SNRs dans un MIS turbulent** Les résultats des simulations (TF : Oui, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$ ) et (TF : Oui, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$ ) sont présentés dans les figures (3.8, 3.9 et 3.10) par les lignes continues et discontinues bleues respectivement. Dans le cas où le milieu interstellaire est perturbé par de la turbulence injectée aux grandes échelles, il s'agit d'observer les modifications du milieu interstellaire locales induites par la présence de SNRs. On peut en particulier comparer les résultats aux simulations (TF : Oui, CST : Non, SNR : Non) et (TF : Oui, CST : Oui, SNR : Non).

Dans la figure (3.8) le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  semble présenter la même distribution que pour les setups d'injection de SNRs dans un milieu homogène. L'injection de RCs contribue à réduire les écarts de densité du plasma. Les gradients de pression de RCs sont en moyenne plus importants car issus d'une combinaison des mouvements turbulents du module TF et de l'injection des RCs par les SNRs. Dans le cas où des surdensités de gaz sont également injectées, on observe quelques gradients de pression de RCs beaucoup plus importants, cependant le nombre de cellules associées est moins important que dans le setup où les SNRs sont injectées dans un milieu homogène. Ceci vient du fait que la turbulence à grande échelle permet de relaxer rapidement ces gradients. Le coefficient de diffusion des RCs est modifié en conséquence. Il est globalement plus faible et le nombre de zones de très faible coefficient de diffusion est plus faible que dans le setup où le MIS est homogène.

Dans la figure (3.9) on observe que la distribution de température du gaz est relativement similaire aux setups où l'injection de SNRs se fait dans un MIS homogène, en revanche, dans le setup où des surpressions de gaz sont également injectées on observe un nombre réduit de cellules à très hautes températures. Ceci est également une conséquence des mouvements du plasma liés au module TF. La pression du rayonnement cosmique semble globalement plus faible que dans les setups avec injection de SNRs dans un MIS homogène. Une raison peut être que dans le cas d'un plasma turbulent qui fait intervenir des variations du champ magnétique plus importantes, les pertes adiabatiques liées à la



présence du terme  $-P_{\text{CR}} \nabla \cdot \mathbf{u}$  dans l'équation de transport du fluide de RCS sont plus importantes.

Dans la figure (3.10) on observe que la distribution de vitesse du gaz  $v$  est globalement dominée par le module de forçage turbulent sauf pour les hautes vitesses  $v > 100$  km/s qui sont générées par l'injection de SNRs. La vitesse d'Alfvén et le nombre de Mach Alfvénique sont tous deux dominés par les mouvements de turbulence à grande échelle.

A travers l'injection de RCS dans le plasma, les SNRs contribuent à une réduction des inhomogénéités de densité de plasma et par conséquent de formation des structures. A travers la génération de gradients de pression supplémentaires, les SNRs contribuent également à une réduction globale du coefficient de diffusion auto-généré des RCS qui impliquent, par l'intermédiaire de la réaction du plasma à la force exercée par les RCS, à une augmentation des zones localement froides dans le MIS.

En résumé, les setups avec  $P_{\text{ratio}} = 1$  produisent plus de cellules à forte pression des RCS (voir les PDFs de  $P_{\text{CR}}$  figure 3.9) ce qui explique la différence des coefficients de diffusion  $D_{\text{self},\parallel}$  pour les setups avec injection dynamique mais sans forçage turbulent, avec et sans injection de fluide thermique. Les setups avec  $P_{\text{ratio}} = 1$  produisent également plus de compression (voir les PDFs des setups TF : Oui, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$  et TF : Non, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$  en tirets) et en conséquence des températures plus importantes.

**Corrélations entre  $D_{\text{self},\parallel}$  et les propriétés du MIS** La figure (3.11) représente les corrélations entre les paramètres (de gauche à droite) : gradients de pression du rayonnement cosmique  $\nabla P_{\text{CR}}$ , produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$ , densité totale du gaz  $n$ , température du gaz  $T$  et norme du champ magnétique du gaz  $B$  et le coefficient de diffusion anisotrope auto-généré  $D_{\text{self},\parallel}$  du rayonnement cosmique, et ce pour les différents setups (de haut en bas) : MIS turbulent sans injection de SNRs (TF : Oui, CST : Oui, SNR : Non), MIS homogène avec injection de RCS (TF : Non, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$ ), MIS turbulent avec injection de RCS (TF : Oui, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$ ), MIS homogène avec injection de RCS et de gaz (TF : Non, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$ ), MIS turbulent avec injection de RCS et de gaz (TF : Oui, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$ ).

Tandis que la température  $T$  et le champ magnétique  $B$  semblent totalement décorélés du coefficient de diffusion auto-généré  $D_{\text{self},\parallel}$ , le gradient de pression  $\nabla P_{\text{CR}}$ , le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  et la densité  $n$  semblent corrélés avec le coefficient de diffusion auto-généré. En effet, il est possible de définir une loi d'échelle phénoménologique du coefficient de diffusion en fonction des trois paramètres qui sont données par

$$D_{\text{self},\parallel} \propto |\nabla P_{\text{CR}}|^{-5/4} \quad (3.82)$$

$$D_{\text{self},\parallel} \propto (\rho^{3/2} T^{0.4})^{4/3} \quad (3.83)$$

$$D_{\text{self},\parallel} \propto n^{5/3}. \quad (3.84)$$

Ces lois sont induites par les propriétés du module de forçage turbulent TF. Une étude plus poussée des relations phénoménologiques entre le coefficient de diffusion auto-généré et les paramètres importants du plasma en fonction des propriétés du module de forçage semble nécessaire. Néanmoins la turbulence induite par le module TF reproduit en théorie la turbulence observée dans les milieux faiblement ionisés voir moléculaires. On peut conclure que ces lois sont applicables dans de tels milieux. En ce qui concerne les setups faisant intervenir l'injection dynamique de SNRs dans le MIS, tandis que la corrélation entre le coefficient de diffusion auto-généré et le gradient de pression de RCs est conservée, celles avec les paramètres  $\rho^{3/2} T^{0.4}$  et  $n$  semblent détruites, ou encore, le milieu interstellaire ne semble pas suffisamment perturbé pour faire apparaître une telle corrélation. Cette observation plaide en faveur de l'hypothèse que les SNRs seules ne suffisent pas à expliquer la turbulence dans le milieu interstellaire.

### 3.5 Discussion

Dans ce chapitre, j'ai montré que le rayonnement cosmique a un effet non négligeable sur la turbulence du milieu interstellaire confirmant les hypothèses de Commerçon et al. (2019) [38], que l'injection de RCs par les SNRs joue un rôle important à travers l'effet de rétro-action de la turbulence générée par les RCs sur leur propriétés de transport. Enfin l'effet du chauffage streaming joue également un rôle important dans les propriétés du MIS. Ci-dessous je discute des différents paramètres en jeu.

Deux effets importants ont été mis en évidence concernant le couplage des RCs au MIS. Le rayonnement cosmique n'est couplé au champ magnétique turbulent que si le temps de diffusion des RCs  $t_{\text{diff}} = L^2/D$  est grand devant le temps de traversée de la turbulence dans la boîte de simulation  $t_{\text{turb}} = L/v_{\text{rms}}$ . Il existe alors deux régimes de propagation du rayonnement cosmique caractérisés par la valeur du coefficient de diffusion du rayonnement cosmique  $D_{\text{CR}}$ . Si  $D_{\text{CR}} < 5 \times 10^{26} \text{ cm}^2/\text{s}$  alors le rayonnement cosmique est sensible aux fluctuations magnétiques et se retrouve corrélé à la densité du gaz. Si  $D_{\text{CR}} > 5 \times 10^{26} \text{ cm}^2/\text{s}$  le rayonnement cosmique est découplé du gaz et, par conséquent, réduit l'amplitude des instabilités de streaming de RCs dans le gaz. Le coefficient de diffusion total du rayonnement cosmique dépend à la fois de la turbulence injectée à grande échelle et à la fois de la turbulence auto-générée par le rayonnement cosmique. J'ai montré que dans le MIS, la quantité de turbulence auto-générée dépend également de la densité de gaz  $n$ . Ainsi on a la loi  $D_{\text{self},\parallel} \propto n^{5/3}$  qui suggère que les effets de la turbulence auto-générée sont plus importants dans les milieux à faible densité. Ce résultat ne fait que confirmer des résultats que j'ai présenté dans le chapitre précédent.

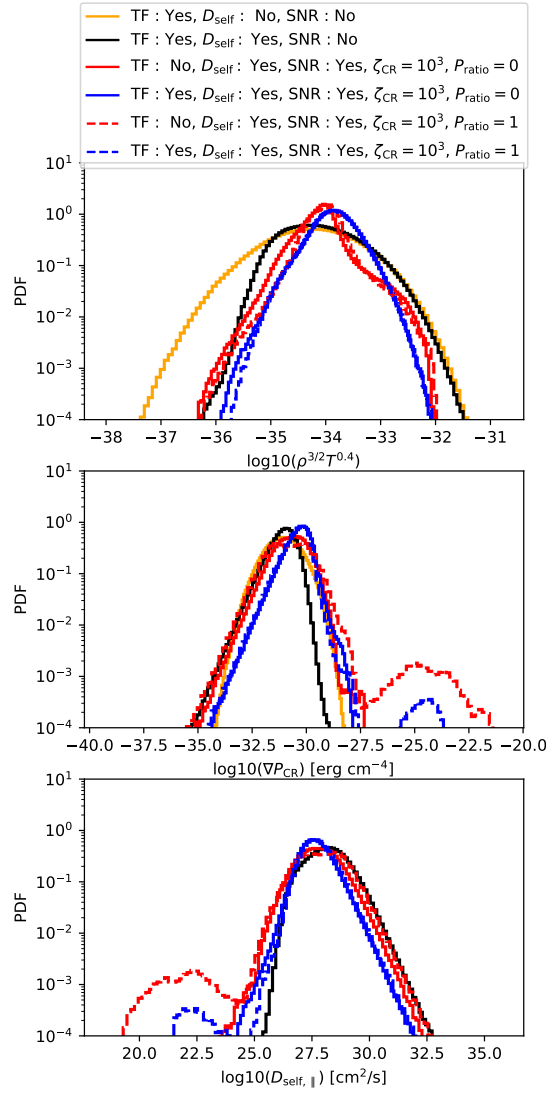


Figure 3.8: Cette figure représente les fonctions de distribution de probabilité des champs scalaires  $\rho^{3/2}T^{0.4}$ ,  $\nabla P_{CR}$  et  $D_{self,||}$  de haut en bas respectivement et ce pour différent setups : TF : Oui, CST : Non, SNR : Non (en traits continus verts); TF : Oui, CST : Oui, SNR : Non (en traits continus noirs); TF : Non, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{CR} = 10^3$ ,  $P_{ratio} = 0$  (en traits continus rouges); TF : Oui, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{CR} = 10^3$ ,  $P_{ratio} = 0$  (en traits continus bleus); les tirets rouges et bleus font référence aux mêmes setups que les traits pleins rouge et bleu à la différence que  $P_{ratio} = 1$ .

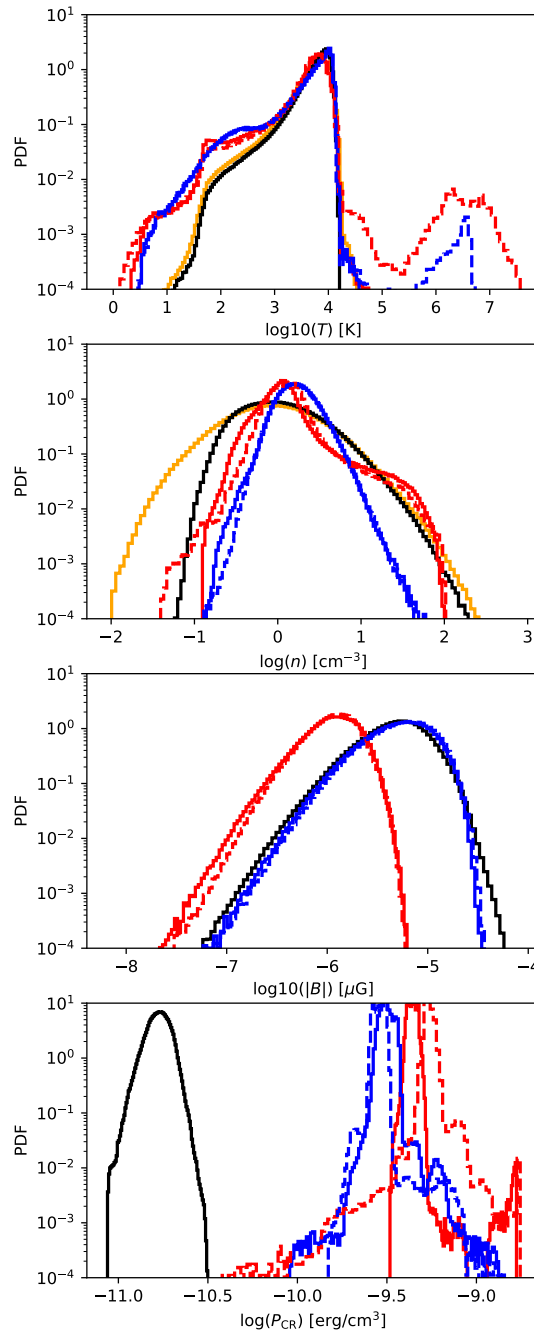


Figure 3.9: Cette figure représente les fonctions de distribution de probabilité des champs scalaires  $T$ ,  $n$ ,  $|\mathbf{B}|$  et  $P_{\text{CR}}$  de haut en bas respectivement et ce pour différent setups : TF : Oui, CST : Non, SNR : Non (en traits continus verts); TF : Oui, CST : Oui, SNR : Non (en traits continus noirs); TF : Non, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$  (en traits continus rouges); TF : Oui, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$  (en traits continus bleus); les tirets rouges et bleus font référence aux mêmes setups que les traits pleins rouge et bleu à la différence que  $P_{\text{ratio}} = 1$ . Note : La courbe verte représentant la PDF de la norme du champ magnétique pour le setup (TF : Oui, CST : Non, SNR : Non) est confondue avec la courbe noire représentant le même setup mais avec le module CST.

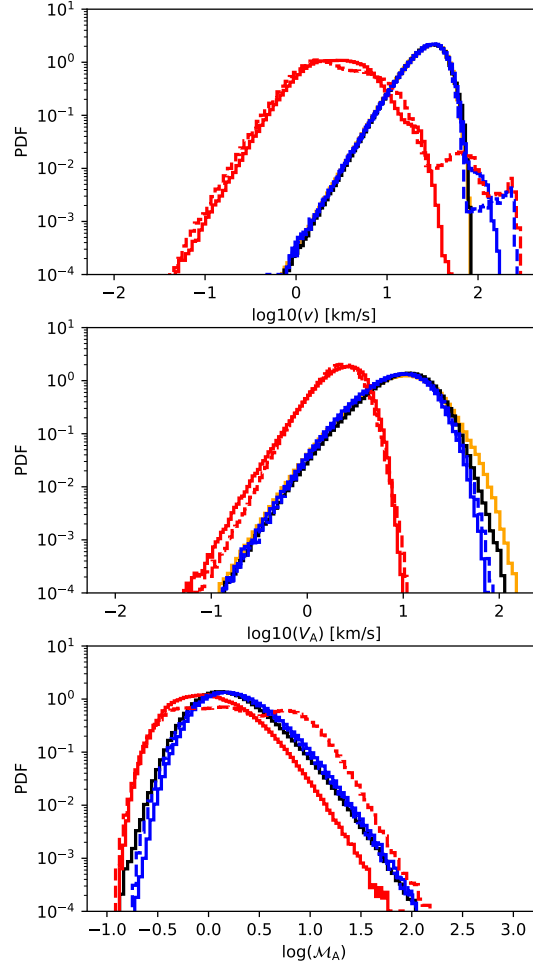


Figure 3.10: Cette figure représente les fonctions de distribution de probabilité des champs scalaires  $v$ ,  $V_A$  et  $\mathcal{M}_A = v_{\text{rms}}/V_A$  de haut en bas respectivement et ce pour différent setups : TF : Oui, CST : Non, SNR : Non (en traits continus verts); TF : Oui, CST : Oui, SNR : Non (en traits continus noirs); TF : Non, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$  (en traits continus rouges); TF : Oui, CST : Oui, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$  (en traits continus bleus); les tirets rouges et bleus font référence aux mêmes setups que les traits pleins rouge et bleu à la différence que  $P_{\text{ratio}} = 1$ .

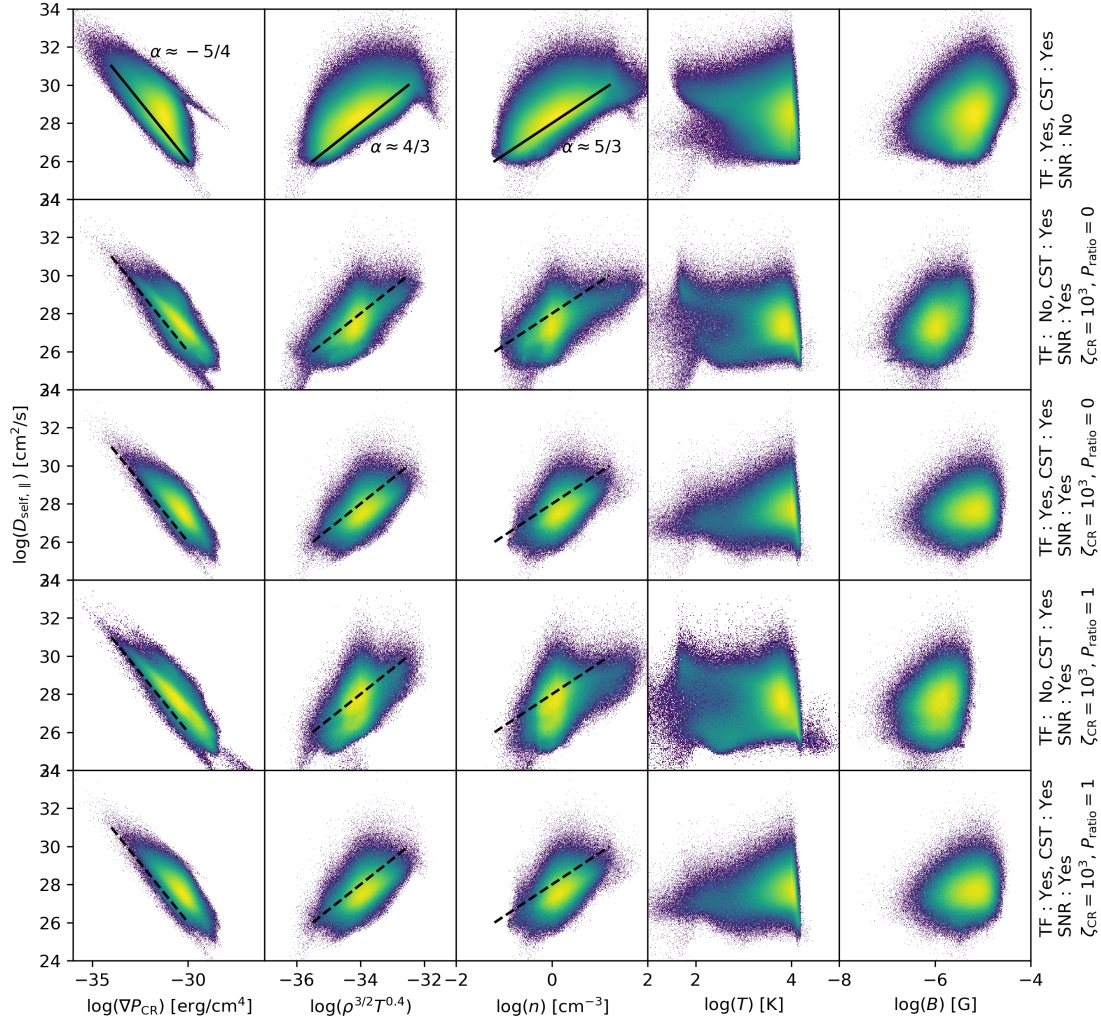


Figure 3.11: Cette figure montre les différents histogrammes 2D colorés qui décrivent les corrélations entre le coefficient de diffusion auto-généré des RCs  $D_{\text{self},\parallel}$  et les paramètres importants de la simulations (de gauche à droite) : le gradient de pression des RCs  $\nabla P_{\text{CR}}$ , le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$ , la densité totale de plasma  $n$ , la température du plasma  $T$  et le champ magnétique  $B$ . Différents setups sont présentés (de haut en bas) : un setup avec seulement le modèle de turbulence auto-générée (TF : Oui, CST : Oui, ST : Non, SNR = Non), un setup avec seulement le modèle d'injection du rayonnement cosmique (TF : Non, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$ ), un setup avec à la fois le modèle de turbulence auto-générée et le modèle d'injection du rayonnement cosmique (TF : Oui, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 0$ ), un setup avec seulement le modèle d'injection du rayonnement cosmique (TF : Non, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$ ), un setup avec à la fois le modèle de turbulence auto-générée et le modèle d'injection du rayonnement cosmique (TF : Oui, CST : Oui, ST : Non, SNR : Oui,  $\zeta_{\text{CR}} = 10^3$ ,  $P_{\text{ratio}} = 1$ ). Dans le premier setup sont dérivées des lois empiriques (lignes noires) :  $D_{\text{self},\parallel} \propto |\nabla P_{\text{CR}}|^\alpha$ ,  $D_{\text{self},\parallel} \propto (\rho^{3/2}T^{0.4})^\alpha$  et  $D_{\text{self},\parallel} \propto n^\alpha$  avec  $\alpha \approx -5/4$ ,  $4/3$ ,  $5/3$  respectivement. Ces lois sont reportées sur les autres setups pour comparaison à l'aide les lignes discontinues noires.

Ainsi, le rayonnement cosmique joue indirectement un rôle important dans le processus de formation d'étoiles puisque dans une certaine mesure il contribue à l'aggregation de gaz et donc la création de zones moléculaires froides et denses. Cependant cet effet n'est présent que tant que le coefficient de diffusion  $D_{\text{CR}}$  est supérieur à la valeur critique de  $5 \times 10^{26} \text{ cm}^2/\text{s}$ . Cette valeur critique est cependant différente de celle obtenue par Commerçon et al. (2019, C+19) [38]  $\sim 10^{24} - 10^{25} \text{ cm}^2/\text{s}$ . Ceci vient du fait que l'échelle d'injection de la turbulence est différente :  $L_{\text{inj}}^{\text{C+19}} \approx 20 \text{ pc}$ , contre 100 pc dans ce travail. Cela montre la nécessité de contraindre l'échelle d'injection de la turbulence à grande échelle dans le milieu interstellaire.

Les conclusions concernant l'effet de l'injection de RCs par les SNRs dans le MIS sont les suivantes. Les niveaux de turbulence auto-générée dans les environnements de SNRs sont importants de 3 à 6 ordres de grandeurs par rapport à la valeur du fond. Cette hypothèse est confirmée par ce travail ainsi que celui du chapitre précédent. En effet, la turbulence est générée par les effets de forts gradients de pression de RCs sur le gaz. Cet effet est encore plus important lorsque la suppression de RCs s'accompagne d'une suppression de gaz. Les SNRs ne permettent pas de reproduire la turbulence dans la boîte de simulation. Cependant, ils jouent un rôle important car contribuent à une réduction des inhomogénéités de densité du plasma<sup>11</sup> et par conséquent de la formation de nuages moléculaires. Cet effet est cependant une conséquence du modèle de turbulence auto-générée discuté plus loin. Bien qu'admis comme les principaux accélérateurs de RCs, rien ne nous permet de quantifier le rôle que jouent les SNRs en tant que sources de turbulence dans la galaxie. Néanmoins, ils jouent localement un rôle important à travers l'injection de RCs et de gaz sous pression dans le MIS. Le modèle d'injection de SNRs est cependant limité car seule une population monochromatique de RCs est considérée tandis que le rayon d'injection du reste est fixé et indépendant des propriétés du milieu interstellaire. Dans le chapitre (2) j'ai montré que le transport du rayonnement cosmique peut être affecté par la turbulence auto-générée jusqu'à 100 GeV dans une phase WNM. La considération d'une distribution polychromatique de RCs peut permettre de mettre en évidence un effet plus important des RCs sur le MIS.

Le modèle de turbulence auto-généré implique de nouveaux effets concernant le couplage RCs-MIS. Les gradients de RCs contribuent à un coefficient de diffusion des RCs plus faible suivant la loi phénoménologique  $D_{\text{self},\parallel} \propto |\nabla P_{\text{CR}}|^{-5/4}$ . En conséquence, le coefficient de diffusion total  $D_{\text{CR}} = [D_{\text{ISM}}^{-1} + D_{\text{self}}^{-1}]^{-1}$  est amené à décroître en présence de gradients de pression de RCs et à coupler les RCs au gaz alors qu'ils ne l'auraient jamais été sans le modèle CST. Ceci conduit à réduire les effets des RCs sur la dynamique turbulente du MIS. Contrairement au travail réalisé dans le chapitre précédent, le MIS répond aux gradients de pression des RCs et sa densité et sa température évoluent en conséquence. En particulier j'ai montré que le coefficient de diffusion auto-généré

<sup>11</sup>Les SNRs génèrent localement des instabilités thermiques de RCs de grande amplitude qui peuvent faire diminuer le coefficient de diffusion des RCs jusqu'à se retrouver dans le régime où les RCs sont couplés avec le gaz. Dans ce cas, les RCs n'affectent pas la dynamique en densité du gaz.

résulte du rapport entre le gradient de pression des RCs  $\nabla P_{\text{CR}}$  et le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$ . J'ai montré que les RCs impactent le gaz à long terme car même lorsque les gradients de pression des RCs sont relaxés, le coefficient de diffusion auto-généré continue d'être faible car le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  s'est affaibli. En particulier, ce produit est corrélé au coefficient de diffusion auto-généré par la relation  $D_{\text{self},\parallel} \propto (\rho^{3/2}T^{0.4})^{4/3}$ . Le modèle de turbulence auto-générée réduit les effets des RCs sur le gaz en limitant la formation des structures moléculaires. De plus, le gaz réagit à la force exercée par les RCs en réduisant localement sa densité et sa température et contribue ainsi à confiner les RCs même lorsque les gradients de pression sont faibles. Néanmoins, il existe des limitations à ce modèle. Le gradient de pression des RCs, notamment lorsque ces derniers sont injectés par les SNRs, est fortement dépendant de la résolution de la simulation. Afin de palier à ce problème, il est nécessaire de contraindre la distribution spatiale de la pression des RCs au moment de l'injection en fonction du temps et définir une résolution spatiale idéale pour résoudre ce genre de problèmes.

La résolution de la simulation est également une contrainte importante pour l'équation de diffusion des RCs, en effet le coefficient de diffusion dans une cellule est calculé par interpolation linéaire des coefficients de diffusion dans les cellules voisines et par conséquent tend à être maximisé dans les zones où les niveaux de turbulence auto-générée varient de manière brutale. Cet effet s'observe très bien dans la figure (2.11) : lorsque la résolution de la simulation est faible ( $N_X = 2^6$ ) la solution numérique (en bleu clair) se comporte comme si le coefficient de diffusion (présenté dans la sous-figure du bas) était constant (lignes discontinues). Cet effet contribue donc à une minimisation des gradients de pression des RCs dans le MIS et donc un moindre effet de ces derniers sur le plasma.

L'effet du streaming des RCs sur le gaz est très important. En effet, même lorsque le rayonnement cosmique est couplé au gaz et ne joue à priori aucun rôle sur la turbulence dans le MIS, le streaming via le terme de chauffage/refroidissement  $\mathcal{L}_{\text{st}}$  rend le gaz sensible aux RCs. Cependant cet effet n'est présent que lorsque les gradients de pression des RCs sont importants. En conclusion, l'effet de streaming joue un rôle important dans les zones où le coefficient de diffusion des RCs  $D_{\text{CR}}$  est faible c'est à dire dans les environnements proche des SNRs et dans les nuages moléculaires. En l'absence du terme de boost de streaming  $f_{\text{st}}$  l'advection des RCs est sous-estimée et ceci conduit à des processus d'interaction RCs-MIS qui s'étalent sur des durées plus longues (d'un facteur 10 maximum).





# Conclusion

## Echappement et diffusion des RCs dans le MIS

Ce premier travail (chapitre 2) a contribué au développement d'un modèle d'injection et de transport du rayonnement cosmique dans le milieu interstellaire proche des restes de supernova en 1D. Cette contribution est extrêmement importante car elle répond à la problématique de la discontinuité du coefficient de diffusion des RCs entre la zone amont ( $\kappa_{\text{CR}} \sim \kappa_{\text{ISM}}$ ) et la zone aval ( $\kappa_{\text{CR}} \sim \kappa_{\text{B}}$ ) du choc du reste de supernova en considérant que les instabilités de streaming de RCs exercent une force sur le plasma contribuant ainsi à la production de perturbations magnétiques en résonance avec le rayon de gyration des RCs ( $k^{-1} \sim r_g$ ). Les perturbations auto-générées contribuent ainsi à réguler l'échappement des RCs et offrent de nouvelles perspectives quant à l'étude des effets des RCs sur le MIS. En outre, ce travail s'est matérialisé en la production d'un nouveau code de transport du rayonnement cosmique : CR SPECTRA 1D, et a conduit à un certain nombre de résultats.

- Le rayonnement cosmique est émis beaucoup plus tôt lorsque le reste de supernova s'étend dans une phase dense. En effet, j'ai montré que l'instant d'échappement des RCs est fonction de la densité du MIS par l'intermédiaire du modèle d'expansion du reste ( $t_{\text{esc}} \propto t_{\text{Sed}} \propto n_T^{-1/3}$ ) et que par conséquent, à énergie  $E$  fixée, le gradient de pression des RCs issu d'une source dans un milieu dense est beaucoup plus important que s'il est issu d'une source dans un milieu diffus. Ceci impacte inéluctablement le taux de génération de modes magnétiques  $\Gamma_g \propto \mathbf{V}_A \cdot \nabla P_{\text{CR}}$  et donc le coefficient de diffusion des RCs  $\kappa_{\text{CR}}$  dans l'environnement proche de la source.
- Le transport des perturbations magnétiques auto-générées est dépendant des propriétés du milieu interstellaire. En particulier j'ai montré que les ondes d'Alfvén peuvent être amorties de trois manières différentes : par collisions ion-neutre, par interaction non-linéaire avec la turbulence à grande échelle, par amortissement de Landau non-linéaire. Le taux d'amortissement total des ondes révèle deux régimes : un régime d'amortissement important et constant à basse énergie  $E \lesssim 100 - 10^3$

GeV qui vient essentiellement du fait que les espèces ionisées et neutres du plasma ont des mouvements décorrélés, et un régime d’amortissement faible qui décroît en  $E^{-2}$  à haute énergie car aux échelles  $k$  résonantes, le mouvement des neutres est couplé à celui des ions. Les phases faiblement ionisées  $X < 10^{-2}$  présentent une zone de non-propagation des perturbations magnétiques autogénérées dont la largeur en énergie augmente à mesure que le taux d’ionisation diminue et dont l’effet sur le transport des RCs est très important car à ces énergies, le rayonnement cosmique diffuse de manière linéaire<sup>12</sup>. Tandis que dans les phases ionisées (HII, WIM) l’amortissement de Landau non-linéaire est non-négligeable, dans les phases faiblement ionisées (WNM, CNM, DiM, DeM, DeC) l’amortissement par collisions ion-neutre domine jusqu’aux énergies de l’ordre de quelques TeV à partir desquelles l’amortissement turbulent commence à dominer.

- L’amortissement des ondes auto-générées joue un rôle très important sur la régulation du transport des RCs. En effet, les temps d’amortissement de la turbulence sont de l’ordre de 1 à 10 yr en régime de faible couplage et contribuent à une ré-augmentation rapide du coefficient de diffusion  $\kappa_{CR}$  des RCs de basse énergie vers la valeur de transport linéaire. A haute énergie les ondes produites ne sont pas ou peu amorties et seul le processus de diffusion contribue à retrouver un régime de transport linéaire à travers l’annulation progressive des gradients de pression des RCs, ceci se fait rapidement compte tenu du coefficient de diffusion de fond qui est plus important aux hautes énergies qu’aux basses énergies. Dans les zones de propagation interdite, le régime de transport des RCs est purement linéaire.
- La présence de nuages moléculaires ou de phases froides (DiM, CNM) impacte les propriétés de transport des RCs dans les environnements proches des SNRs. D’une part, le coefficient de diffusion de la turbulence de fond est généralement plus faible dans les phases froides et denses que dans les phases chaudes et diffuses. Dans une telle situation, les résultats ont montré qu’un nuage composé d’une phase CNM et éventuellement DiM dans un environnement WNM, joue le rôle d’un ”barrage” pour le rayonnement cosmique. Les particules de se retrouvent confinées à l’interface WNM/CNM. Une étude de l’évolution du gradient de pression des RCs au sein du nuage via la mesure de l’illumination  $\gamma$  de ce dernier constituerait une signature observationnelle qui contribuerait à étayer le travail en cours.
- Aux transitions entre phases, la vitesse d’Alfvén est amenée à évoluer entraînant des pertes/gains d’énergie adiabatiques. Dans ce travail, j’ai considéré les échanges d’énergie entre populations de RCs d’énergies différentes. Les résultats montrent

---

<sup>12</sup>Dans les zones de non-propagation des perturbations magnétiques autogénérées, le rayonnement cosmique diffuse en suivant le coefficient de diffusion du fond. Néanmoins cette approche est discutable car même les perturbations d’Alfvén issues de la turbulence à grande échelle ne peuvent se propager. En conséquence, si l’on ne considère que la turbulence Alfvénique, le mouvement des RCs est ballistique. En pratique, les modes magnéto-soniques rapides et lents ne sont pas nécessairement coupés dans cette bande d’énergie et dominent les propriétés de diffusion des RCs. Ce point très important nécessite d’être étayé.

que l'effet des pertes adiabatiques est d'autant plus important que l'énergie des RCs est faible. Au delà de quelques TeV, les RCs y deviennent insensibles. Les effets de pertes d'énergie adiabatiques ont pour conséquence de réduire le taux de croissance des perturbations auto-générées aux transitions de phase.

Le travail réalisé s'inscrit dans la continuité des travaux de Malkov et al. (2013) [148] qui présente un modèle analytique d'échappement auto-régulé d'un nuage de RCs d'un accélérateur de type SNR afin d'expliquer la transition des propriétés de transport des RCs entre le milieu aval et amont du choc du reste. Les solutions de transport présentées sont purement non-linéaires; dans les simulations que j'ai réalisées dans Brahim et al. (2020) [22], lorsque le gradient de pression des RCs est suffisamment important, et essentiellement à haute énergie, je retrouve la forme des solutions non-linéaires de Malkov et al. (2013). Nava et al. (2016; 2019) [160] [161] a étudié le même modèle d'un point de vue purement numérique en tenant compte précisément de l'effet de l'amortissement des ondes auto-générées et modère la non-linéarité des solutions obtenues par Malkov et al. (2013). Nava et al. (2016; 2019) a appliqué ce modèle aux phases WNM, WIM et HIM. Dans Brahim et al. (2020) je retrouve bien les solutions obtenues dans le WNM. Dans le travail présenté dans le chapitre (2), le modèle tient maintenant compte des effets de gains/pertes adiabatiques, peut s'appliquer à des milieux multiphasiques, inclu l'injection et le transport des électrons et leurs pertes par rayonnement synchrotron. Les travaux réalisés permettent maintenant de se poser plus précisément la question de la manière dont le rayonnement cosmique est accéléré et dont il interagit avec les nuages moléculaires dans l'environnement des SNs.

Un grand nombre d'auteurs se sont déjà intéressés à ces aspects et ont apporté des réponses. Telezhinsky et al. (2012) [219] a regardé l'échappement dépendant du temps des RCs des SNRs et leur interactions avec les milieux denses en traitant indépendamment l'évolution du choc du reste à l'aide de simulations hydrodynamique et le transport de particules tests dans un modèle à symétrie sphérique. Il est montré que le pic d'énergie et d'intensité des particules échappées est fortement dépendant de l'efficacité de la diffusion au voisinage du reste. Lorsque le coefficient de diffusion  $\kappa_{CR}$  est de l'ordre du coefficient de Bohm à l'extérieur du choc, les particules sont efficacement confinées et seules les RCs de haute énergie sont capables de diffuser efficacement. Ce résultat est en accord avec les conclusions obtenues concernant le fait que le rayonnement cosmique de haute énergie est peu sensible aux effets de confinement liés à la turbulence auto-générée. Concernant l'interaction entre les RCs et les nuages moléculaires, il est montré que généralement pour des SNs de type Ia jeunes  $t < 2$  kyr l'émission  $\gamma$  du reste est plus importante que l'illumination  $\gamma$  issue de l'interaction RC-MC. Le cas contraire indique généralement que le choc du SNR est entré en collision avec le nuage moléculaire. Fukui et al. (2012) [79] a étudié le gaz en  $\gamma$  dans l'environnement du SNR RX J1713.7-3946 et a montré que le rayonnement  $\gamma$  est essentiellement issu de la composante hadronique du rayonnement cosmique. Il a été montré que l'objet RX J1713.7-3946 est globalement entouré d'une cavité de faible densité  $n_T < 1 \text{ cm}^{-3}$  créée par le vent stellaire de la supernova progénitrice elle-même délimitée par une coque de surdensité  $n_T \geq 100 - 1000 \text{ cm}^{-3}$

atomique voire moléculaire. Dans cette zone peuvent d’avoir lieu des collisions proton-proton à l’origine du rayonnement  $\gamma$  observé qui peuvent contribuer à contraindre les modèles développés dans le chapitre (2). En considérant que l’ensemble du rayonnement  $\gamma$  est d’origine hadronique, il est calculé que 0.1 % de l’énergie de l’explosion de la supernova est transmise aux protons. Malkov et al. (2005) [147] a étudié le rayonnement  $\gamma$  du même objet afin de comprendre le spectre  $\gamma$  des protons en interaction avec un nuage moléculaire. Il a été déduit que le spectre  $\gamma$  est coupé aux énergies supérieures au TeV et inférieures au GeV. A basse énergie les particules sont confinées au niveau du choc par les ondes d’Alfvén auto-générées.

Des travaux plus récents discutent de l’interaction entre les RCs issus des SNRs et les nuages moléculaires environnants. Cui et al. (2016) [46] a étudié les sources HESS J1729-345 et HESS J1731-347. Tandis que le nuage moléculaire a été reconstruit sur la base d’observations  $^{12}\text{CO}$ , l’accélération et le transport des RCs dans le milieu inhomogène est simulé à l’aide d’un code de transport Monte Carlo. L’injection du rayonnement cosmique dans l’environnement des sources est calculé sur la base du modèle proposé par Zirakashvili & Ptuskin (2008) [242]. Il est montré que le spectre  $\gamma$  de la source HESS J1729-347 pique à 1 TeV et que le rayonnement cosmique semble diffuser de manière linéaire  $\kappa_{\text{CR}} \propto 10^{28} E^{0.3-0.5} \text{ cm}^2/\text{s}$ . Roh et al. (2016) [186] ont étudié la diffusion des RCs issus d’un SNR dans un MIS multiphase. Ils ont réalisé des simulations de transport de particules test dans simulation MHD tri-dimensionnelle d’un milieu interstellaire comprimé par un onde de choc. Ils montrent que le régime de transport des RCs proche du choc est de type Bohm et est requis pour pouvoir accélérer des particules de plus de 30 TeV. Ken et al. (2019) [146] étudient les interactions RCs-MCs dans les environnements des SNRs W28 et W44 d’âge de l’ordre de 10 kyr. La taille des nuages moléculaires est de l’ordre de 12-15 pc et leur densité environ  $2 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$ . Ils montrent en ajustant les données observationnelles par un modèle de transport du rayonnement cosmique que pour chaque SNR : W28 et W44, l’énergie totale conférée aux RCs est de (en unités de  $10^{50}$  erg) 1.8 et 3.7, l’énergie maximale  $E_{\text{M}}$  vaut (en TeV) 40 et 263 et les indices spectraux en énergie des RCs valent 2.02 et 1.98 respectivement.

Les études réalisées dans Brahim et al. (2020) et dans le chapitre (2) avec le code CR SPECTRA apportent un grand nombre de réponses à la problématique de l’échappement et du transport du rayonnement cosmique dans les environnements de SNRs mais peuvent néanmoins être améliorées.

Le modèle d’injection du rayonnement cosmique retenu dans le code CR SPECTRA est dépendant de trois paramètres :  $t_{\text{Sed}}$  l’instant qui marque la transition entre la phase d’expansion libre et la phase Sedov du choc de supernova,  $E_{\text{M}} = \max(E_{\text{max}})$  qui correspond à l’énergie maximale que peut acquérir le rayonnement cosmique accéléré par le processus DSA et  $\delta$  un paramètre libre qui dirige l’évolution de l’instant d’injection des RCs en fonction de l’énergie  $t_{\text{esc}}(E)$ . Ce dernier paramètre est discuté par Celli et al. (2019) [29] qui suggère que sa valeur peut évoluer entre  $1/5$  et  $> 2$  en fonction de

l'évolution temporelle du niveau de turbulence au choc et le taux d'ionisation du MIS proche du choc. Une amélioration du modèle consisterait à utiliser une fonction  $\delta = \delta(t)$  soit prédéfinie en fonction du modèle d'évolution du choc du reste, soit directement dépendant de la valeur minimale du coefficient de diffusion des RCs qui témoigne du niveau de turbulence au choc. Ainsi, au lieu de suivre une loi de puissance l'injection des RCs de haute énergie se ferait plus tôt et serait extrêmement non-linéaire tandis que l'injection des RCs de basse énergie se ferait beaucoup plus tard et en régime linéaire. Les résultats peuvent sensiblement changer en fonction du modèle d'injection, il est donc nécessaire de contraindre ce dernier efficacement. Par ailleurs, la distribution temporelle de l'injection des RCs ( $F_{\text{inj}}(t)$ ) est également un paramètre qu'il est nécessaire de contraindre car son impact sur les gradients de pression des RCs est important. Dans le code CR SPECTRA deux formes sont disponibles : une distribution de Dirac à l'instant  $t = t_{\text{esc}}(E)$  et une gaussienne centrée sur  $t_{\text{esc}}(E)$  de largeur à mi-hauteur définie arbitrairement par l'utilisateur. Brose et al. (2020) [23] ont étudié l'accélération du rayonnement cosmique et son échappement des SNRs âgés ( $t_{\text{SNR}} > 100$  yr) et présentent un modèle d'évolution de la luminosité du reste de supernova via les processus inverse-Compton (IC) et collision proton-proton (PD : Pion Decay). En particulier ils obtiennent les lois d'échelle :  $L_{\text{IC}} \propto \rho_0^{2/5}$  et  $L_{\text{PD}} \propto \rho_0^{7/5}$  où  $\rho_0$  correspond à la densité de gaz au niveau du choc; ces lois sont valables lorsque le choc est en phase ST uniquement. Ainsi, il est possible de trouver une ou plusieurs combinaisons  $t_{\text{esc}}(E)$ ,  $F_{\text{inj}}(E, t)$  qui définissent une loi d'évolution de la luminosité  $\gamma$  observationnellement réaliste.

Le modèle de turbulence auto-généré invoqué dans le code CR SPECTRA n'est valable que dans l'approximation  $(\delta B/B_0)^2 \ll 1$  pour que le transport du rayonnement cosmique reste anisotrope et donc que le modèle QLT 1D reste valide. Un terme de saturation fixé par l'utilisateur est disponible dans le code CR SPECTRA. Sa signification physique nécessite d'être motivée et sa valeur contrainte. Néanmoins, de forts gradients de pression de RCs conduit inéluctablement à la génération de modes non-résonants pouvant aussi entraîner un transport perpendiculaire du rayonnement cosmique; Zirakashvili (2008) [243] a modélisé l'instabilité de Bell non-résonante du rayonnement cosmique qui peut être implémentée dans le code CR SPECTRA comme un terme de perte de la pression des RCs. De plus, la turbulence auto-générée dans le code CR SPECTRA n'est pas sujette à des termes de transfert d'énergie. Pourtant, la turbulence générée par le rayonnement cosmique à très haute énergie peut cascader et contribuer au confinement des RCs de plus basse énergie amplifiant encore les effets de transport non-linéaire sur les RCs de basse énergie  $E < 100$  GeV. Un terme de cascade turbulente peut être implémenté dans le code.

La turbulence de fond est également sujette au transport perpendiculaire. Le modèle CRC 1D n'est valable que dans l'approximation de tube de flux et trouve ses limites à des distances de l'ordre de 100 pc de la source. Ainsi, on peut rappeler que l'implémentation d'un terme de perte par diffusion perpendiculaire  $D_{\perp}$  supplémentaire sur la pression des RCs peut être nécessaire au delà de plusieurs centaines de pc de la source afin de

modéliser la décohérence des lignes de champ magnétique moyen. Le coefficient de diffusion perpendiculaire peut être défini comme  $D_{\perp} \approx \eta(E, z)D_{\parallel}$  où le paramètre  $\eta$  contient l'ensemble de la physique de la turbulence de fond aux échelles de gyration des RCs et qu'il est nécessaire de développer avec précision.

La vitesse de groupe  $v_{\text{st}}$  des perturbations Alfvéniques auto-générés est différente de la célérité des perturbations elles-mêmes  $V_A$ . Ainsi la vitesse d'advection qu'il est nécessaire de considérer dans le code CR SPECTRA est  $v_{\text{st}} = -f_{\text{st}}V_A$  où le boost  $f_{\text{st}} \sim 1 + n_i (\Gamma_{\text{IN}} + \Gamma_{\text{NLLD}} + \Gamma_{\text{L16}}) / \Omega_0 n_{\text{CR}} (> \gamma) \approx 1.1 - 10.1$  peut contribuer à une advection plus rapide du système. Cet effet peut induire une relaxation plus rapide des zones de fort gradient de RCs et donc un niveau de turbulence auto-généré plus faible. Par ailleurs, en interagissant avec les ondes auto-générées, le rayonnement cosmique transfère son énergie au gaz via un terme  $\mathcal{L}_{\text{st}} = -V_A \partial P_{\text{CR}} / \partial z$  qui est possible d'implémenter dans les équations.

Le code CR SPECTRA 1D montre rapidement ses limites lorsqu'interviennent des processus faisant appel à du transport perpendiculaire. En effet, la diffusion perpendiculaire ne peut être résolue de manière analytique et l'est donc via un taux de diffusion  $\tau_{D_{\perp}} \propto D_{\perp} / L_{\perp}^2$  où  $L_{\perp}^2$  nécessite d'être fixé manuellement. Il est donc nécessaire de passer le code CR SPECTRA en 2D afin que les termes de transport perpendiculaire fassent naturellement partie du processus de transport des RCs. Dans une telle situation, il est nécessaire de re-penser de manière beaucoup plus précise la géométrie du problème : la sphéricité de la source du rayonnement cosmique, le champ de vitesse d'Alfvén  $\mathbf{V}_A(x, z)$  qui n'est autre que la distribution des lignes de champ magnétique moyen, la forme des éventuels nuages moléculaires. En 2D, des limitations d'ordre numérique apparaissent. Il est alors nécessaire d'intégrer un module de calcul extensif comme la bibliothèque de calcul MPI par exemple. Bien que laborieux et coûteuse en temps, l'opération de passage du code CR SPECTRA de 1D (+énergie) à 2D (+énergie) permettrait d'obtenir de spectaculaires résultats concernant l'échappement auto-régulé des RCs des restes de supernova dans le MIS. La réalisation de tests basés sur des observations  $\gamma$  permettrait de contraindre un grand nombre de problématiques concernant l'injection et l'interaction des RCs avec le MIS.

## Propagation des RCs dans le MIS turbulent

Ce second travail (chapitre 3) réalisé avec le code MHD-RAMSES a contribué à l'étude des interactions entre le rayonnement cosmique et la turbulence dans le milieu interstellaire, et s'inscrit dans une problématique de qualification et quantification de l'importance du rôle du rayonnement cosmique sur la dynamique de la galaxie. La nouveauté apportée par cette étude est l'implémentation d'un modèle de diffusion sous-grille des RCs afin de tenir compte des perturbations auto-générées par les instabilités de streaming dans le milieu interstellaire. En effet, même si la longueur d'onde des perturbations générées est bien en deçà de la résolution minimale du code  $\sim 1$  pc, leur impact sur le trans-

port du rayonnement cosmique est non-négligeable. Le modèle CST permet une étude plus raffinée de la dynamique RCs-MIS. Cette étude a conduit à un certain nombre de résultats.

- Le rayonnement cosmique n'est couplé au gaz que si le temps de diffusion des particules  $t_{\text{diff}} = L^2/\kappa_{\text{CR}}$  est grand devant le temps de traversée de la turbulence dans la boîte de simulation  $t_{\text{cross}} = L/v_{\text{rms}}$ . Le cas échéant, le rayonnement cosmique évolue suivant les fluctuations du champ magnétique et n'exerce aucune force sur le gaz. Dans le cas contraire, le rayonnement cosmique est découplé du gaz et exerce une force sur le gaz. Dans le cas où le milieu est globalement faiblement ionisé, le rayonnement cosmique favorise la création de structures moléculaires en augmentant les contrastes de densité de gaz. Lorsque l'échelle d'injection de la turbulence de fond est de l'ordre de  $L_{\text{inj}} \sim 100$  pc, le coefficient de diffusion critique est de l'ordre de  $D_{\text{crit}} \approx 10^{25} - 10^{26}$  cm<sup>2</sup>/s. Ce résultat confirme l'étude menée par Commerçon et al. (2019) [38] sur la même problématique.
- Dans ce cadre, le modèle de turbulence auto-générée (CST) joue un rôle très important. Il contribue à limiter la formation des structures en réduisant les contrastes de densité de gaz générés par le rayonnement cosmique. En effet, tandis que l'instabilité de rayonnement cosmique se relaxe, le gradient de pression des RCs contribue à générer des ondes qui entraînent une réduction du coefficient de diffusion des RCs  $\kappa_{\text{CR}}$  et ce de telle manière que l'action du terme  $\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{CR,d}}$  sur le gaz est réduite dans les zones de fort gradient de pression des RCs. A grande échelle, la formation des structures est donc limitée par la diffusion auto-régulée du rayonnement cosmique. Le coefficient de diffusion auto-généré est par ailleurs donné par la relation  $D_{\text{self,||}} \propto |\nabla P_{\text{CR}}|^{-1.4}$ .
- Le gaz réagit à la force exercée par le rayonnement cosmique et contribue au maintien du confinement des RCs bien après la disparition de l'instabilité de streaming. Cet effet n'a pas été observé dans le chapitre (2) dans lequel j'ai considéré un milieu statique et dont les échelles de temps d'étude sont de l'ordre de  $1 - 10^3$  kyr. Dans les simulations réalisées avec le code RAMSES, il a été observé que le produit  $\rho^{3/2}T^{0.4}$  diminue en présence de forts gradients de RCs et que cette diminution est maintenue pendant plusieurs Myrs, ou du moins le temps que les autres processus dynamiques du MIS rétablissent l'équilibre du plasma. Il en découle une relation phénoménologique entre la densité du gaz et le coefficient de diffusion auto-généré du rayonnement cosmique :  $D_{\text{self,||}} \propto n^{5/3}$ . De manière générale, la pression des RCs et du fluide thermique contribuent à modifier les propriétés de compressibilité du gaz par l'intermédiaire de la vitesse du son et donc l'amplitude des instabilités de streaming de RCs.
- La vitesse de streaming des RCs joue un rôle très important sur la dynamique du gaz interstellaire. Par l'intermédiaire du terme de chauffage  $\mathcal{L}_{\text{st}}$  le gaz devient sensible aux effets du rayonnement cosmique même si le coefficient de diffusion  $\kappa_{\text{CR}}$  est inférieur au coefficient de diffusion critique  $D_{\text{crit}}$ . Cet effet qui contribue à



augmenter la dynamique en densité du gaz se compense avec le modèle de turbulence CST, qui a l'effet inverse, puisqu'il joue un rôle dans les zones où le gradient de pression des RCs est important.

- Les niveaux de turbulence auto-générée sont dominants dans les environnements de supernovae et contribuent de manière non-négligeable à la turbulence dans le milieu interstellaire, mais les supernovae ne peuvent pas être considérées comme l'origine unique de la turbulence dans le milieu interstellaire. En effet, les SNRs sont à l'origine des instabilités de streaming de RCs les plus importantes avec des gradients de pression de RCs pouvant être supérieurs à  $10^{-24}$  erg/cm<sup>4</sup>. Néanmoins, il n'est pas possible de reproduire les effets obtenus avec le modèle TF uniquement en injectant des SNRs dans la boîte de simulation. Parce que les SNRs jouent le rôle de sources de turbulence auto-générée, elles contribuent indirectement à empêcher la formation des structures.

Le travail réalisé dans le chapitre (3) s'inscrit dans la suite de l'étude réalisée par Commerçon et al. (2019) dont l'objectif est d'étudier les effets du rayonnement cosmique sur l'évolution d'un gaz turbulent bi-stable. En particulier, ces études ont pour but de contraindre les effets du rayonnement cosmique dans le processus de formation stellaire.

McKee & Ostriker (2007) [154] ont écrit une revue scientifique sur la théorie de la formation stellaire qui se base essentiellement sur la turbulence dans les nuages moléculaires, les instabilités magnétiques et l'auto-gravité qui contrecarrent les forces de pression du gaz dans les nuages moléculaires. Hennebelle & Falgarone (2012) [101] discutent également des modèles chimiques qui contribuent à la dynamique des nuages moléculaires et qui peuvent affecter le taux de formation d'étoiles. Dans le même temps, Federrath & Klessen (2012) [70] ont regardé l'impact de la turbulence MHD sur le taux de formation d'étoiles des nuages moléculaires. En comparant plusieurs modèles de formation d'étoiles avec des simulations numériques et des observations de nuages galactiques, ils ont montré que le taux de formation d'étoile dépend de quatre paramètres : le paramètre viriel  $\alpha_{\text{vir}} = 2E_{\text{kin}}/|E_{\text{grav}}|$  où  $E_{\text{kin}}$  et  $|E_{\text{grav}}|$  correspondent à l'énergie cinétique et le potentiel gravitationnel du système respectivement, le nombre de Mach sonique, le paramètre de forçage de la turbulence  $F_{\parallel}/F_{\text{tot}}$  (solénoïdal, compressif) et la pression magnétique dans le système. En particulier ils ont montré que le taux de formation d'étoiles évolue inversement à la pression magnétique dans le nuage.

Il est également important de tenir compte de l'effet du rayonnement cosmique sur la dynamique des nuages moléculaires. En effet, les rayons cosmiques de faible énergie  $E < 10$  GeV représentent une source fondamentale d'ionisation des nuages moléculaires en influençant leur évolution chimique, thermique et dynamique. Padovani et al. (2009) [170] ont exploré la possibilité qu'une composante de basse énergie des RCs puisse expliquer l'écart entre le taux d'ionisation mesuré dans les nuages interstellaires diffus et denses. Ils montrent que le taux d'ionisation des nuages moléculaires par le rayonnement cosmique est fortement dépendant de la chimie intrinsèque au nuage et qu'il est

nécessaire d'avoir d'importants flux de RCs pour que leur contribution à l'ionisation soit non-négligeable. Par ailleurs les électrons semblent jouer un rôle très important dans ce processus.

Dashyan & Dubois (2020) [48] ont regardé comment le rayonnement cosmique injecté par les supernovae impacte le taux de formation d'étoiles et la formation de vents stellaires à l'échelle galactique dans les galaxies naines à l'aide du code MHD RAMSES en tenant compte de la diffusion anisotrope et isotrope du rayonnement cosmique, des pertes radiatives des RCs et l'effet de streaming tel que décrit dans le chapitre (3). Ils montrent que l'injection de RCs dans le système contribue à la réduction du taux de formation d'étoiles d'un facteur 2 à 3 tandis que le processus de diffusion anisotrope des RCs est essentiel pour reproduire les observations.

L'ensemble de ces travaux montrent l'intérêt et la nécessité d'une intégration du transport des RCs et de leur couplage avec le gaz dans les modèles de formation d'étoiles.

Les travaux engagés montrent d'une part que le rayonnement cosmique joue un rôle important dans la dynamique du milieu interstellaire faiblement ionisé et d'autre part que la turbulence auto-générée par le rayonnement cosmique doit être considérée dans une telle étude. Néanmoins, l'étude réalisée présente certaines limites et des améliorations sont envisageables.

La résolution utilisée dans les simulations est insuffisante et nécessite que l'ensemble des procédures numériques implémentées soient optimisées de façon à avoir une meilleure efficacité de calcul. Néanmoins, quelque soit la résolution un certain nombre de limitations subsistent. Les variations de coefficient de diffusion des RCs sont sous-estimées car calculées par interpolation linéaire des coefficients de diffusion des cellules voisines de la cellule de calcul. Ceci conduit à sur-estimer le coefficient de diffusion auto-généré  $D_{\text{self}}$  dans les zones où le gradient de pression des RCs est important. Les gradients de pression des RCs sont également sous-estimés et ce de la même manière que pour le coefficient de diffusion. Cependant, même avec une amélioration de la résolution, la valeur des gradients de pression des RCs reste discutable notamment au niveau des restes de supernovae. Ceci montre la nécessité d'avoir un modèle de transition de la pression des RCs depuis la source vers le milieu interstellaire.

L'énergie dans les simulations n'est pas conservée. En effet tandis que le gaz dans les simulations dont le module TF est activé gagnent du moment par l'intermédiaire d'un forçage turbulent continu, la pression du rayonnement cosmique voire de gaz augmente dans les simulations dont le module SNR est activé c'est à dire avec injection dynamique de RCs voire de gaz. Ces effets peuvent être compensés par l'implémentation de termes de pertes purement artificiels afin de conserver l'énergie dans la boîte et que les simulations restent valables suffisamment longtemps. En ce qui concerne le champ de vitesse turbulent du gaz, un terme de frottement visqueux permettrait de conserver le moment

du gaz, en ce qui concerne l'injection de RCs voire de gaz, un terme de perte radiative de RCs voire de gaz dont le taux est égal au taux d'injection de RCs voir de gaz est suffisant.

Bien qu'implémenté dans le code, l'effet de streaming n'a pour le moment pas encore été pris en compte dans les études de l'effet des RCs sur la formation des structures et par conséquent, les conclusions obtenues sur l'impact des RCs sur le taux de formation d'étoiles sont prématurées. Une analyse plus fine incluant l'effet de streaming des RCs sera nécessaire.

Le calcul du taux d'ionisation par la méthode du diagramme de Voronoï peut être améliorée en interpolant les résultats de simulations numériques de transfert radiatif dans les nuages moléculaires ou à l'aide d'observations en grande quantité du milieu interstellaire faiblement ionisé. Néanmoins, les améliorations apportées seront minimes car il a été montré que de faibles variations du taux d'ionisation (moins d'un ordre de grandeur) ne jouent pas sur la dynamique du système.

L'étude réalisée pourrait être complétée par un setup dans lequel il s'agirait de faire exploser une supernovae proche d'un nuage moléculaire dense afin d'observer comment le rayonnement cosmique affecte la dynamique de ce dernier. Cette étude pourrait à la fois permettre de calculer le taux d'ionisation du nuage par le rayonnement cosmique ainsi que l'illumination  $\gamma$  à 1 GeV en fonction de la longueur de pénétration dans le nuage et observer comment ses propriétés thermodynamiques sont modifiées.

# Annexes

## Sommaire

---

A.1	Description Eulérienne et description Lagrangienne d'un élément de fluide . . . . .	228
A.2	Méthode de Cardano . . . . .	228
A.3	Méthode de Durand-Kerner à l'ordre $n$ . . . . .	229
A.4	Démonstration du passage (1.213) $\rightarrow$ (1.225). . . . .	230
A.5	Coefficients de diffusion $D_{\mu\mu}$ , $D_{\mu,p}$ et $D_{pp}$ . . . . .	234
A.6	Outils mathématiques de la turbulence . . . . .	238
A.7	Démonstration du taux de croissance des modes d'Alfvén résonants . . . . .	243
A.8	Résolution d'une équation de diffusion . . . . .	247
A.9	Diagramme de Voronoï . . . . .	249

---

## A.1 Description Eulérienne et description Lagrangienne d'un élément de fluide

Dans l'approche Eulérienne, une grandeur macroscopique d'un élément de fluide est décrite par rapport à un point fixe  $\mathbf{x}$  qui ne tient pas compte de l'évolution globale de la position du fluide. Dans l'approche Lagrangienne, la description de l'élément de fluide tient compte de ce mouvement global.

Supposons une grandeur permettant de décrire un élément de fluide noté  $p$ , notée  $f_L$  dans l'approche Lagrangienne et  $f_E$  dans l'approche Eulérienne. A tout instant, nous avons l'égalité des deux approches

$$f_L(\mathbf{x}_p, t) = f_E(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathbf{x}_p$  représente la position de l'élément de fluide qui reste inchangée à tout instant. Dans l'approche Eulérienne, à l'instant  $t + dt$ , l'élément de fluide s'est déplacé de  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ . On a alors l'égalité

$$f_L(\mathbf{x}_p, t + dt) = f_E(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t + dt). \quad (\text{A.2})$$

On obtient ainsi l'égalité

$$f_L(\mathbf{x}_p, t + dt) - f_L(\mathbf{x}_p, t) = f_E(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t + dt) - f_E(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.3})$$

Le développement de Taylor de chaque partie de l'égalité de l'équation (A.3) donne

$$\begin{aligned} \frac{df_L}{dt} dt + \frac{dt^2}{2} \frac{d^2 f_L}{dt^2} + \dots + o(dt^n) &= \frac{\partial f_E}{\partial t} dt + \frac{\partial f_E}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} + \\ d\mathbf{x} dt \frac{\partial^2 f_E}{\partial \mathbf{x} \partial t} + \frac{dt^2}{2} \frac{\partial^2 f_E}{\partial t^2} + \frac{d\mathbf{x}^2}{2} \frac{\partial^2 f_E}{\partial \mathbf{x}^2} + \dots + o(dt^n, d\mathbf{x}^n). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

En ne retenant que les termes du premier ordre du développement, il vient

$$\frac{df_L}{dt} = \frac{\partial f_E}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{\partial f_E}{\partial \mathbf{x}}. \quad (\text{A.5})$$

## A.2 Méthode de Cardano

La méthode de Cardano permet de trouver les solutions analytiques d'une équation cubique de la forme

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (\text{A.6})$$

En effectuant le changement de variable

$$x = y - \frac{b}{3a} \quad (\text{A.7})$$

il est possible de se ramener à une équation de la forme

$$ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \left(d + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}\right) = 0. \quad (\text{A.8})$$

L'équation  $y^3 + Ay = B$  se résoud alors aisément en écrivant

$$3st = A \quad (\text{A.9})$$

$$s^3 - t^3 = B \quad (\text{A.10})$$

et en cherchant  $y = s - t$ . Le polynôme (A.6) a finalement une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées données par

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a} \quad (\text{A.11})$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{2}}{2}(S-T) \quad (\text{A.12})$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{2}}{2}(S-T) \quad (\text{A.13})$$

$$(\text{A.14})$$

où  $S = \left[R + \sqrt{Q^3 + R^2}\right]^{1/3}$ ,  $T = \left[R - \sqrt{Q^3 + R^2}\right]^{1/3}$  et

$$Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}, \quad R = \frac{9abs - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}.$$

### A.3 Méthode de Durand-Kerner à l'ordre $n$

La méthode de Durand-Kerner permet de trouver de manière numérique les racines réelles et complexes de n'importe quel polynôme. Cette méthode est réputée pour sa vitesse de convergence. Dans cet appendice, nous montrons la méthode dans le cadre de la recherche d'un polynôme d'ordre  $n > 3$ . Soit le polynôme en  $x$ ,

$$P(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_1x + c_0 = 0 \quad (\text{A.15})$$

où  $c_i$ ,  $i \in \{0, n-1\}$  représente les coefficients des différents monômes. Nous définissons le  $n$ -uplet de solutions complexes initiales  $r_i$ ,  $i \in \{0, n-1\}$

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_n). \quad (\text{A.16})$$

Le polynôme peut se réécrire sous la forme

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (x - r_i). \quad (\text{A.17})$$

La solution initiale  $r$  n'étant pas exacte,  $P(x) \neq 0$  et on peut écrire pour chacune des solutions approximées du polynôme

$$r_i = x - \frac{P(x)}{\prod_{j \neq i} (x - r_j)}. \quad (\text{A.18})$$

Il s'agit alors d'itérer un grand nombre de fois chacune des solutions approximées à partir de sa valeur à l'itération précédente. Autrement dit, la solution  $r_i^k$ , où  $k$  se réfère à l'étape d'itération, est donnée par

$$r_i^k = r_i^{k-1} - \frac{P(r_i^{k-1})}{\prod_{j \neq i} (r_i^{k-1} - r_j^{k-1})}. \quad (\text{A.19})$$

Cette opération est à réaliser simultanément pour toutes les solutions  $r_i$ . Bien que le choix du nombre d'itération soit arbitraire, il est conseillé de ne stopper l'itération que lorsque l'erreur relative maximale donnée par  $\text{err} = \max(\delta_{\text{rel}})$  où

$$\delta_{\text{rel}} = \left( \left| \frac{r_0^k - r_0^{k-1}}{r_0^{k-1}} \right|, \left| \frac{r_1^k - r_1^{k-1}}{r_1^{k-1}} \right|, \dots, \left| \frac{r_{n-1}^k - r_{n-1}^{k-1}}{r_{n-1}^{k-1}} \right| \right) \quad (\text{A.20})$$

est inférieure à une erreur  $\text{err}_s$  définie par l'utilisateur. De plus, dans le cadre du calcul d'une relation de dispersion, les coefficients  $c_i$  sont des fonctions du nombre d'onde  $k$  et l'ordre des solutions de convergence de la méthode  $r_i$  est amené à changer à mesure que le nombre d'onde évolue. Ce phénomène numérique est très problématique lorsque l'on cherche à "suivre" les solutions de la relation de dispersion sur tout l'intervalle de nombres d'onde  $k$ . Une méthode simple consiste donc à utiliser les solutions obtenues lors du dernier nombre d'onde comme solutions de départ pour le calcul des racines du nombre d'onde suivant, en supposant que les deux nombres d'ondes sont très proches l'un de l'autre. Cette méthode permet d'éviter d'avoir des "sauts de solutions" dans la relation de dispersion mais ne garantit en aucun cas un suivi strict des solutions, surtout dans le cas d'une bifurcation.

#### A.4 Démonstration du passage (1.213) $\rightarrow$ (1.225).

On pose  $\mathbf{Z} = (x, y, z, p_x, p_y, p_z)$  les coordonnées d'une particule chargée et  $\mathbf{X} = (X, Y, Z, p, \mu, \Phi)$  où tel que définies dans la sous-section (1.3.1). L'équation de Vlasov (1.213) en notation d'Einstein peut se réécrire

$$\frac{df_a(Z_\mu, t)}{dt} = \frac{\partial f_a(Z_\mu, t)}{\partial t} + \frac{dZ_\mu}{dt} \frac{\partial f_a(Z_\mu, t)}{\partial Z_\mu} = S_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \quad (\text{A.21})$$

On peut exprimer l'équation ci-dessus dans le système de coordonnées  $X_\mu$ . On a

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\partial X_\mu}{\partial Z_\mu} \frac{dZ_\mu}{dt} \frac{\partial f_a}{\partial X_\mu} = S_a. \quad (\text{A.22})$$

En utilisant le fait que

$$\frac{dZ_\mu}{dt} \frac{\partial f_a}{\partial X_\mu} = \frac{\partial}{\partial X_\mu} \left[ \frac{dZ_\mu}{dt} f_a \right] - \frac{\partial}{\partial X_\mu} \left( \frac{dZ_\mu}{dt} \right) f_a, \quad (\text{A.23})$$

On en déduit l'équation

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\partial X_\mu}{\partial Z_\mu} \frac{\partial}{\partial X_\mu} \left[ \frac{dZ_\mu}{dt} f_a \right] - \frac{\partial X_\mu}{\partial Z_\mu} \frac{\partial}{\partial X_\mu} \left( \frac{dZ_\mu}{dt} \right) f_a = S_a \quad (\text{A.24})$$

qui se simplifie en

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\partial X_\mu}{\partial Z_\mu} \frac{\partial}{\partial X_\mu} \left[ \frac{\partial Z_\mu}{\partial X_\mu} \frac{dX_\mu}{dt} f_a \right] = S_a. \quad (\text{A.25})$$

En posant  $h = \partial Z_\mu / \partial X_\mu$  et  $dX_\mu / dt = G_\mu(X_\mu, t) + g_\mu(X_\mu, t)$  où  $G_\mu$  représente les composantes uniformes et  $g_\mu$  les composantes perturbées d'un paramètre  $\mu$ , on obtient

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial X_\mu} [h(G_\mu + g_\mu)f_a] = S_a. \quad (\text{A.26})$$

En utilisant le fait que la force  $G_\mu$  exercée dans la direction  $X_\mu$  est uniforme, l'équation (A.26) s'écrit finalement

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + G_\mu \frac{\partial f_a}{\partial X_\mu} + \frac{1}{h} [hg_\mu f_a] = S_a. \quad (\text{A.27})$$

Dans premier temps, nous nous occupons du calcul des termes en  $G_\mu \partial f_a / \partial X_\mu$ . En utilisant les relations (1.224),  $\frac{dX}{dt}$ ,  $\frac{dY}{dt}$  et  $\frac{dZ}{dt}$  sont évidents

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= v \cos \Phi \sqrt{1 - \mu^2} \\ \frac{dY}{dt} &= v \sin \Phi \sqrt{1 - \mu^2} \\ \frac{dZ}{dt} &= v\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Etudions maintenant les composante  $\frac{dp}{dt}$ ,  $\frac{d\mu}{dt}$  et  $\frac{d\Phi}{dt}$ . S'il n'est pas perturbé, le moment  $p$  reste constant, il vient immédiatement  $\frac{dp}{dt} = 0$ . De la même manière, en l'absence de diffusion par des perturbation, l'angle d'attaque reste constant donc  $\frac{d\mu}{dt} = 0$ . En revanche, l'angle de gyration  $\Phi$  varie au cours du temps suivant la fréquence de gyration de la particule  $\varepsilon\Omega$ . On a

$$\Phi(t') = \Phi(t) - \varepsilon\Omega(t' - t) \quad (\text{A.29})$$

qui nous permet d'en déduire que  $\frac{d\Phi}{dt} = -\varepsilon\Omega$ . Le terme  $G_\mu \partial f_a / \partial X_\mu$  se réécrit donc

$$G_\mu \frac{\partial f_a}{\partial X_\mu} = v \sqrt{1 - \mu^2} \cos \Phi \frac{\partial f_a}{\partial X} + v \sqrt{1 - \mu^2} \sin \Phi \frac{\partial f_a}{\partial Y} - \varepsilon\Omega \frac{\partial f_a}{\partial \Phi} + \mu v \frac{\partial f_a}{\partial Z}. \quad (\text{A.30})$$



Dans un second temps, nous nous occupons du calcul du terme en  $(1/h) \partial/\partial X_\mu [hg_\mu f_a]$ .  $h$  correspond au déterminant de la matrice Jacobienne de passage de l'espace  $\mathbf{Z}$  vers  $\mathbf{X}$ . On a la relation

$$h = \det \left[ \frac{\partial Z_\mu}{\partial X_\mu} \right] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial p_x}{\partial X} & \frac{\partial p_y}{\partial X} & \frac{\partial p_z}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial p_x}{\partial Y} & \frac{\partial p_y}{\partial Y} & \frac{\partial p_z}{\partial Y} \\ \frac{\partial x}{\partial Z} & \frac{\partial y}{\partial Z} & \frac{\partial z}{\partial Z} & \frac{\partial p_x}{\partial Z} & \frac{\partial p_y}{\partial Z} & \frac{\partial p_z}{\partial Z} \\ \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial p_x}{\partial p} & \frac{\partial p_y}{\partial p} & \frac{\partial p_z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} & \frac{\partial p_x}{\partial \mu} & \frac{\partial p_y}{\partial \mu} & \frac{\partial p_z}{\partial \mu} \\ \frac{\partial x}{\partial \Phi} & \frac{\partial y}{\partial \Phi} & \frac{\partial z}{\partial \Phi} & \frac{\partial p_x}{\partial \Phi} & \frac{\partial p_y}{\partial \Phi} & \frac{\partial p_z}{\partial \Phi} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

Les trois premiers éléments de la diagonale donnent 1 ainsi que tous les éléments non-diagonaux excepté le block de taille  $3 \times 3$  en bas à droite de la matrice. Le calcul du déterminant se ramène donc au calcul du déterminant suivant

$$h = \begin{vmatrix} \cos \Phi \sqrt{1 - \mu^2} & \sin \Phi \sqrt{1 - \mu^2} & \mu \\ -\frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} p \cos \Phi & -\frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} p \sin \Phi & p \\ -p \sin \Phi \sqrt{1 - \mu^2} & -p \cos \Phi \sqrt{1 - \mu^2} & 0 \end{vmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

Finalement on obtient  $h = -p^2$ . En injectant les résultats obtenus dans l'équation (A.27), on obtient

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + v \sqrt{1 - \mu^2} \cos \Phi \frac{\partial f_a}{\partial X} + v \sqrt{1 - \mu^2} \sin \Phi \frac{\partial f_a}{\partial Y} - \varepsilon \Omega \frac{\partial f_a}{\partial \Phi} + \mu v \frac{\partial f_a}{\partial Z} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial X_\mu} [p^2 g_\mu f_a] = S_a. \quad (\text{A.33})$$

Déterminons maintenant l'expression des coefficients perturbés  $g_\mu$ .

**Calcul de  $g_p$  :** Nous avons  $g_p = dp/dt$ . Le champ magnétique ne travaillant pas on a

$$\frac{dp}{dt} = q_a \delta \mathbf{E}, \quad (\text{A.34})$$

d'où

$$\frac{dp}{dt} = \frac{q_a \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{p}}{p} \quad (\text{A.35})$$

$$= \frac{\gamma m_a c \varepsilon \Omega}{p B_0} \delta E \cdot \mathbf{p}. \quad (\text{A.36})$$

En utilisant le fait que  $\delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{p} = p_\parallel \delta E_\parallel + p_\perp \delta E_\perp$ ,  $p_\parallel = p\mu$  et  $p_\perp = p\sqrt{1 - \mu^2}$ , ainsi que les définitions (1.234) on montre aisément que

$$g_p = \frac{\varepsilon \Omega p c}{v B_0} \left[ \mu \delta E_\parallel + \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{2}} (\delta E_L e^{-i\Phi} + \delta E_R e^{i\Phi}) \right] \quad (\text{A.37})$$

**Calcul de  $g_\mu$  :** En utilisant le fait que  $g_\mu = d\mu/dt$  et  $\mu = p_\parallel/p$  on montre que

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{p} \left( \frac{dp_\parallel}{dt} - \mu \frac{dp}{dt} \right). \quad (\text{A.38})$$

La variation du moment parallèle s'écrit

$$\frac{dp_\parallel}{dt} = q_a \delta E_\parallel + \frac{q_a}{c} (v_x \delta B_y - v_y \delta B_x). \quad (\text{A.39})$$

En utilisant le même raisonnement que précédemment, on montre que

$$\frac{dp_\parallel}{dt} = \frac{\varepsilon \Omega p c}{v B_0} \delta E_\parallel + \frac{\varepsilon \Omega p}{v B_0} \left( \frac{i}{\sqrt{2}} v \cos \Phi \sqrt{1 - \mu^2} (\delta B_R - \delta B_L) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Phi v \sqrt{1 - \mu^2} (\delta B_L + \delta B_R) \right). \quad (\text{A.40})$$

En injectant le résultat ci-dessus dans l'équation (A.38), on montre immédiatement que

$$g_\mu = \frac{\varepsilon \Omega \sqrt{1 - \mu^2}}{B_0} \left[ \frac{c}{v} \sqrt{1 - \mu^2} \delta E_\parallel + \frac{i}{\sqrt{2}} \left[ e^{i\Phi} (\delta B_R + i\mu \frac{c}{v} \delta E_R) - e^{-i\Phi} (\delta B_L - i\mu \frac{c}{v} \delta E_L) \right] \right]. \quad (\text{A.41})$$

**Calcul de  $g_\Phi$  :** En utilisant les relation (1.221), on montre que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{p^2(1 - \mu^2)} \left[ \frac{dp_y}{dt} p_x - \frac{dp_x}{dt} p_y \right] \quad (\text{A.42})$$

avec

$$\frac{dp_y}{dt} = q_a \left( \delta E_y + \frac{v_z}{c} \delta B_x - \frac{v_x}{c} \delta B_z \right) \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{dp_x}{dt} = q_a \left( \delta E_x + \frac{v_y}{c} \delta B_z - \frac{v_z}{c} \delta B_y \right). \quad (\text{A.44})$$

En injectant les définitions ci-dessus dans l'équation (A.42), on montre que

$$g_\Phi = -\varepsilon \Omega \frac{\delta B_\parallel}{B_0} + \frac{\varepsilon \Omega}{\sqrt{2(1 - \mu^2)} B_0} \left[ e^{i\Phi} \left( \mu \delta B_R + \frac{ic}{v} \delta E_R \right) + e^{-i\Phi} \left( \mu \delta B_L - \frac{ic}{v} \delta E_L \right) \right] \quad (\text{A.45})$$

**Calcul de  $g_X$  :** En utilisant le fait que

$$X = x + \frac{v \sqrt{1 - \mu^2}}{\varepsilon \Omega} \sin \Phi, \quad (\text{A.46})$$

on montre que

$$g_X = \frac{dX}{dt} = \frac{1}{\varepsilon\Omega} \left[ \frac{dv}{dt} \sqrt{1-\mu^2} \sin \Phi - \frac{v\mu \sin \Phi}{\sqrt{1-\mu^2}} \frac{d\mu}{dt} + v\sqrt{1-\mu^2} \cos \Phi \frac{d\Phi}{dt} \right]. \quad (\text{A.47})$$

En injectant les résultats obtenus pour  $g_p$ ,  $g_\mu$  et  $g_\Phi$  on montre que

$$g_X = -v\sqrt{1-\mu^2} \cos \Phi \frac{\delta B_\parallel}{B_0} + \frac{ic}{\sqrt{2}B_0} \left[ \delta E_R - \delta E_L - \frac{i\mu v}{c} (\delta B_L + \delta B_R) \right]. \quad (\text{A.48})$$

Un raisonnement similaire est utilisé pour le calcul de  $g_Y$ .

**Calcul de  $g_Z$  :** On montre trivialement que  $g_Z = dZ/dt = dz/dt = 0$ .

## A.5 Coefficients de diffusion $D_{\mu\mu}$ , $D_{\mu,p}$ et $D_{pp}$

Cette section résume le calcul des coefficients de diffusion  $D_{\mu\mu}$ ,  $D_{\mu p}$  et  $D_{pp}$  réalisé par (Schlickeiser 2002, chapitre 13 [194]) dans le cadre de modèles de turbulence Alfvénique linéairement polarisée anisotrope et isotrope et un modèle de turbulence pour les ondes magnéto-soniques rapides isotrope.

La relation de dispersion des modes d'Alfvén s'exprime par

$$\omega_{R,j}(k_\parallel) = jV_A(k_\parallel) \quad j = \pm 1 \quad (\text{A.49})$$

tandis que les perturbations sont données par

$$\delta \mathbf{E}_A^j = (E_X, 0, 0) \quad \delta \mathbf{B}_A^j = j \frac{c}{V_A(k_\parallel)} E_X(0, \eta, 0) \quad (\text{A.50})$$

par l'intermédiaire de la relation d'induction et  $\eta = \cos \theta$ . Sous ces hypothèses, les coefficients de diffusion  $D_{\mu\mu}$ ,  $D_{\mu p}$  et  $D_{pp}$  ne dépendent que du tenseur de turbulence

$$P_{lm}^j(\mathbf{k}) = \langle B_l^j(\mathbf{k}) B_m^{*j}(\mathbf{k}) \rangle \quad (\text{A.51})$$

dont l'expression dépend du modèle de turbulence utilisé :

→ **Turbulence anisotrope** : Les fluctuations magnétiques sont soit parallèles soit anti-parallèles aux lignes de champ  $\mathbf{B}_0$ . Le tenseur des fluctuations magnétiques est de la forme

$$P_{lm}^j(\mathbf{k}) = g_s^j(k_\parallel) (\delta(k_\perp)/k_\perp) \delta_{lm} \quad l, m = 1, 2 \quad (\text{A.52})$$

où la fonction  $g_s^j(k_\parallel)$  est lié au spectre d'énergie magnétique de la turbulence. Dans le cas où ce dernier a la forme d'une loi de puissance d'indice spectral  $q > 1$  et défini à partir d'un nombre d'onde  $k_{\parallel, \min}$ ,  $g_s^j(k_\parallel)$  s'écrit

$$g_s^j(k_\parallel) = g_{s0}^j k_\parallel^{-q} \quad \forall k_\parallel > k_{\parallel, \min} \quad (\text{A.53})$$

où  $g_{s0}^j = 2(q-1)W_0 I_s^j k_{\parallel,\min}^{q-1}$  et

$$I_s^j = \int_{k_{\parallel,\min}}^{\infty} dk_{\parallel} \left( \frac{\delta B_j(k_{\parallel})}{B_0} \right)^2. \quad (\text{A.54})$$

Les coefficients de diffusion s'écrivent

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu} &= \frac{\pi\Omega^2(1-\mu^2)}{B_0^2} \sum_{j=\pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\parallel} g_s^j(k_{\parallel}) \left[ 1 - \frac{\mu\omega_j}{k_{\parallel}v} \right]^2 [\mathcal{R}^+(k_{\parallel}, \omega_j) + \mathcal{R}^-(k_{\parallel}, \omega_j)] \\ D_{\mu p} &= \frac{\pi\Omega^2 p(1-\mu^2)}{vB_0^2} \sum_{j=\pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\parallel} g_s^j(k_{\parallel}) \frac{\omega_j}{k_{\parallel}} \left[ 1 - \frac{\mu\omega_j}{k_{\parallel}v} \right] [\mathcal{R}^+(k_{\parallel}, \omega_j) + \mathcal{R}^-(k_{\parallel}, \omega_j)] \\ D_{pp} &= \frac{\pi\Omega^2 p^2(1-\mu^2)}{v^2 B_0^2} \sum_{j=\pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\parallel} g_s^j(k_{\parallel}) \left( \frac{\omega_j}{k_{\parallel}} \right)^2 [\mathcal{R}^+(k_{\parallel}, \omega_j) + \mathcal{R}^-(k_{\parallel}, \omega_j)] \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

où

$$\mathcal{R}^{\pm}(k_{\parallel}, \omega_j) = \frac{\Gamma_j(k_{\parallel})}{\Gamma_j^2(k_{\parallel}) + (v\mu k_{\parallel} - \omega_{R,j} \pm \Omega)^2}. \quad (\text{A.56})$$

Dans le cas où le terme évanescant est négligeable ( $\Gamma_j \approx 0$ ) et la pulsation est indépendante de l'échelle ( $\omega_{R,j}(k_{\parallel}) = \text{constante} \Rightarrow V_A(k_{\parallel}) = \text{constante}$ ), les coefficients deviennent

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu} &= \sum_{j=\pm 1} D(j) \\ D_{\mu p} &= \sum_{j=\pm 1} \frac{j\varepsilon p}{1-j\varepsilon\mu} D(j) \\ D_{pp} &= \sum_{j=\pm 1} \frac{\varepsilon^2 p^2}{(1-j\varepsilon\mu)^2} D(j) \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

où  $\varepsilon = V_A/v$  et

$$D(j) = \frac{\pi\Omega^2(1-\mu^2)}{vB_0^2} \frac{(1-j\varepsilon\mu)^2}{|\mu-j\varepsilon|} [g_s^j(k_r^j) + g_s^j(-k_r^j)] \quad (\text{A.58})$$

où  $k_r^j = (\Omega/v)/(\mu-j\varepsilon)$  correspond au nombre d'onde résonant.

→ **Turbulence isotrope** : Les fluctuations sont isotropes. Le tenseur de fluctuations magnétiques est donné par

$$P_{lm}^j(\mathbf{k}) = \frac{g_i^j(k)}{8\pi k^2} \left[ \delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{k^2} \right] \quad (\text{A.59})$$

où, comme pour le cas anisotrope, la fonction  $g_i^j(k)$  est définie par

$$g_i^j(k) = g_{i0}^j k^{-q} \quad \forall k > k_{\min} \quad (\text{A.60})$$

et  $g_{i0}^j = 8\pi(q-1)I_i^j W_0 k_{\min}^{q-1}$  et

$$I_i^j = \int_{k_{\min}}^{\infty} dk \left( \frac{\delta B_i(k)}{B_0} \right)^2. \quad (\text{A.61})$$

Les coefficients de diffusion s'écrivent

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu} &= \frac{\Omega^2(1-\mu^2)}{4B_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=\pm 1} \int_{-1}^1 d\eta (1+\eta^2) \int_0^{\infty} dk g_i^j(k) \\ &\times \mathcal{R}(k, \omega_j) \left( \frac{nJ_n(W)}{W} \right)^2 \left[ 1 - \frac{\mu\omega_j}{\eta kv} \right]^2 \\ D_{\mu p} &= \frac{\Omega^2(1-\mu^2)}{4B_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=\pm 1} \int_{-1}^1 d\eta (1+\eta^2) \int_0^{\infty} dk g_i^j(k) \\ &\times \mathcal{R}(k, \omega_j) \left( \frac{nJ_n(W)}{W} \right)^2 \frac{p\omega_j}{v\eta k} \left[ 1 - \frac{\mu\omega_j}{\eta kv} \right] \\ D_{pp} &= \frac{\Omega^2(1-\mu^2)}{4B_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=\pm 1} \int_{-1}^1 d\eta (1+\eta^2) \int_0^{\infty} dk g_i^j(k) \\ &\times \mathcal{R}(k, \omega_j) \left( \frac{nJ_n(W)}{W} \right)^2 \left( \frac{p\omega_j}{v\eta k} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

où

$$\mathcal{R}(k, \omega_j) = \frac{\Gamma_j(k)}{\Gamma_j^2(k) + (vk\mu\eta - \omega_{R,j}(k) + n\Omega)^2} \quad (\text{A.63})$$

et  $W = kr_l \sqrt{(1-\mu^2)(1-\eta^2)}$ . Dans le cas où le terme évanescent est négligeable ( $\Gamma_j \approx 0$ ) et la pulsation réelle  $\omega_{R,j}$  est indépendante du nombre d'onde  $k$ , les

coefficients de diffusion se réécrivent

$$\begin{aligned}
D_{\mu\mu} &= \frac{\pi\Omega^2}{2vB_0^2} \sum_{j=\pm 1} |\mu - j\varepsilon| [1 - j\mu\varepsilon]^2 \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} dt t^{-3} \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} g_i^j \left( \frac{nt}{r_l |\mu - j\varepsilon|} \right) J_n^2 \left( \frac{n\sqrt{1 - \mu^2}}{|\mu - j\varepsilon|} \sqrt{t^2 - 1} \right) \\
D_{\mu p} &= \frac{\pi\Omega^2}{2vB_0^2} \sum_{j=\pm 1} |\mu - j\varepsilon| j\varepsilon p [1 - j\mu\varepsilon]^2 \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} dt t^{-3} \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} g_i^j \left( \frac{nt}{r_l |\mu - j\varepsilon|} \right) J_n^2 \left( \frac{n\sqrt{1 - \mu^2}}{|\mu - j\varepsilon|} \sqrt{t^2 - 1} \right) \\
D_{pp} &= \frac{\pi\Omega^2}{2vB_0^2} \sum_{j=\pm 1} |\mu - j\varepsilon| (j\varepsilon p)^2 \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} dt t^{-3} \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} g_i^j \left( \frac{nt}{r_l |\mu - j\varepsilon|} \right) J_n^2 \left( \frac{n\sqrt{1 - \mu^2}}{|\mu - j\varepsilon|} \sqrt{t^2 - 1} \right).
\end{aligned} \tag{A.64}$$

Dans l'approximation des plasma froids ( $T_e \rightarrow 0$ ), les modes magnéto-soniques se résument aux modes rapides [158] dont la relation de dispersion s'exprime par

$$\omega_{R,j}(k) = jV_A(k)k \quad j = \pm 1 \tag{A.65}$$

tandis que les perturbations sont données par

$$\delta \mathbf{E}_F^j = (0, E_Y, 0) \tag{A.66}$$

$$\delta \mathbf{B}_F^j = j \frac{c}{V_A(k)} E_Y (-\cos \theta, 0, \sin \theta). \tag{A.67}$$

On montre que les coefficients de diffusion  $D_{\mu\mu}$ ,  $D_{\mu p}$  et  $D_{pp}$  ne dépendent que des tenseurs  $P_{RR}^j$ ,  $P_{\parallel\parallel}^j$ ,  $P_{\parallel,R}^j$  et  $P_{R,\parallel}^j$  dont l'expression pour une turbulence isotrope est donnée par

$$P_{RR}^j = \frac{(1 + \cos^2 \theta) g_i^j(k)}{16\pi k^2} \tag{A.68}$$

$$P_{\parallel\parallel}^j = \frac{\sin^2 \theta g_i^j(k)}{8\pi k^2} \tag{A.69}$$

$$P_{\parallel R}^j = P_{R,\parallel}^j = -\frac{\sin \theta \cos \theta g_i^j(k)}{8\sqrt{2}\pi k^2}. \tag{A.70}$$

En ne considérant que les particules ultra-relativistes ( $v \gg V_A$ ), en adoptant un spectre de turbulence de type Kolmogorov et en négligeant l'amortissement des modes rapides on obtient

$$D_{\mu\mu} = \frac{\pi|\Omega|(q-1)(1-\mu^2)}{4} \left(\frac{\delta B}{B_0}\right)^2 (k_{min}r_l)^{q-1} [f_T(\mu) + f_G(\mu)] \quad (\text{A.71})$$

$$D_{\mu p} = 0 \quad (\text{A.72})$$

$$D_{pp} = p^2 \varepsilon^2 D_{\mu\mu} \quad (\text{A.73})$$

où

$$f_T(\mu) = \begin{cases} \frac{c_1(q)}{\varepsilon} \frac{1+x}{x^{(3+q)/2}} [(1+\varepsilon^2)x - 1 - \varepsilon^2 x^2]^{q/2} & 1 \leq x \leq \varepsilon^{-2}, q \leq 2 \\ c_4(q)(r_l k_{min})^{2-q} H[|\mu| - \varepsilon] \frac{(1-\mu^2)(1-(\varepsilon^4/\mu^4))}{|\mu|} & k_{min}r_l \ll 1, q > 2 \end{cases} \quad (\text{A.74})$$

et

$$f_G(\mu) = \begin{cases} \frac{3\xi(q+1)\varepsilon^q}{2\sqrt{1-\mu^2}} & \forall 0 \leq \mu \leq \sqrt{2}\varepsilon \\ \frac{3\xi(q+1)\varepsilon^q}{2\sqrt{1-\mu^2}} \left[1 + \frac{4(3+2q)}{3(1+q)}(\mu/\varepsilon)^q\right] & \forall \sqrt{2}\varepsilon < \mu \leq 2^{-1/2} \\ \frac{\xi(q)\mu^{q-1}}{2q} & \forall 2^{-1/2} < \mu \leq 1 \end{cases} \quad (\text{A.75})$$

où  $H$  correspond à la fonction d'hélicité des modes rapides et  $\xi(q)$  est la fonction Zeta de Riemann.  $f_T(\mu)$  et  $f_G(\mu)$  sont respectivement liées aux interactions résonantes à l'ordre  $n = 0$  que l'on qualifie souvent d'amortissement par temps de transit et qui consiste en l'échange d'énergie entre une particule chargée et une onde obéissant à la condition de résonance

$$\omega_R - k_{\parallel}v_{\parallel} = 0 \quad (\text{A.76})$$

et  $n \leq 1$  correspond aux échanges d'énergies entre les particules chargées et les ondes obéissant aux conditions de résonance

$$\omega_R - k_{\parallel}v_{\parallel} = n\Omega. \quad (\text{A.77})$$

Le comportement des fonctions  $f_T$  et  $f_G$  est investigué en détail par Schlickeiser & Miller (1998) [195].

## A.6 Outils mathématiques de la turbulence

La théorie des champs permet d'extraire de précieuses informations globales des signaux turbulents. Cette section présente l'essentiel du formalisme mathématique utilisé en théorie de la turbulence. L'essentiel des résultats présentés sont tirés de ([77])

→ **Variable aléatoire :** On définit une variable aléatoire scalaire ou vectorielle  $\mathbf{v}(w_0)$  dans un espace à  $n$  dimensions comme une quantité définie par sa condition initiale  $w_0$  et qui évolue aléatoirement dans le temps.

→ **Probabilité** : On appelle  $p(\mathbf{x})$  la fonction de densité de probabilité de présence de la variable aléatoire  $\mathbf{v}$ . La probabilité de trouver  $\mathbf{v}(w_0)$  entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  est donnée par  $p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ . La densité de probabilité est normalisée

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} p(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$$

→ **Valeur moyenne** : La valeur moyenne de la composante d'indice  $i$  de la variable aléatoire  $\mathbf{v}(w_0)$  est donnée par

$$\langle v_i \rangle = \int_{\mathbb{R}} x_i p(x_i) dx_i. \quad (\text{A.78})$$

La variable est dite "centrée" si  $\langle v_i \rangle = 0$ .  $\mathbf{v}$  est centrée si toutes ses composantes le sont.

→ **Moments** : Le moment d'ordre  $m$  de la composante  $i$  de la variable aléatoire  $\mathbf{v}(w_0)$  est donné par

$$\langle v_{i1} v_{i2} \dots v_{im} \rangle = \int_{\mathbb{R}} x_{i1} x_{i2} \dots x_{im} p(x_i) dx_i \quad (\text{A.79})$$

pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .

→ **Covariance** : On définit le tenseur de covariance entre deux composantes  $i$  et  $j$  de la variable aléatoire centrée  $\mathbf{v}(w_0)$  par

$$\Gamma_{ij} = \langle v_i v_j \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x_i x_j p(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad (\text{A.80})$$

→ **Fonction caractéristique** : On définit la fonction caractéristique de la variable aléatoire  $\mathbf{v}(w_0)$  comme la fonction de la variable réelle  $\mathbf{z}$

$$K(\mathbf{z}) = \langle e^{i\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{i\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}} p(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (\text{A.81})$$

On peut en déduire que

$$\langle v_{i1} v_{i2} \dots v_{im} \rangle = \left( \frac{1}{i} \right)^m \frac{\partial^m}{\partial z_{i1} \partial z_{i2} \dots \partial z_{im}} K(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=0}. \quad (\text{A.82})$$

→ **Normalité** : La composante  $i$  de la variable aléatoire  $\mathbf{v}(w_0)$  centrée est dite "gaussienne" si

$$K(z_i) = \langle e^{iz_i v_i} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \sigma_i^2 z_i^2} \quad (\text{A.83})$$

et  $\sigma_i^2 = \langle v_i^2 \rangle$ . On peut alors montrer les égalités suivantes

$$\begin{aligned} K(\mathbf{z}) &= \langle e^{i\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}} \rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2} \langle (\mathbf{z} \cdot \mathbf{v})^2 \rangle} \\ &= e^{-\frac{1}{2} z_j z_k \Gamma_{jk}}. \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$



Si la variable aléatoire  $\mathbf{v}(w_0)$  est centrée et gaussienne alors, si  $f$  est une fonction différentiable de  $n$  variables

$$\langle v_i f(v_1, v_2, \dots, v_n) \rangle = \Gamma_{ij} \left\langle \frac{\partial f}{\partial v_j} \right\rangle. \quad (\text{A.85})$$

Le tenseur de covariance d'un nombre impair de variables centrées gaussiennes est nul

$$\langle v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{2m+1}} \rangle = 0 \quad \forall m, i_1, i_2, i_{2m+1} \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.86})$$

Le tenseur de covariance d'un nombre pair de variables centrées gaussiennes vaut

$$\langle v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{2m}} \rangle = \sum \langle v_{i_{l_1}} v_{i_{l_2}} \rangle \langle v_{i_{l_3}} v_{i_{l_4}} \rangle \dots \langle v_{i_{l_{2m-1}}} v_{i_{l_{2m}}} \rangle \quad \forall m, i_1, i_2, i_{2m+1} \in \mathbb{N} \quad (\text{A.87})$$

où  $(l_1, l_2)(l_3, l_4) \dots (l_{2m-1}, l_{2m})$  sont des arrangements arbitraires de l'ensemble  $1, 2, \dots, 2m \in \mathbb{N}$  de 2-uplets et la somme s'applique à l'ensemble des arrangements possibles.

→ **Fonction aléatoire** : Une fonction aléatoire est une famille de variables aléatoires dépendant d'une ou plusieurs variables d'espace et de temps. Dans le cadre des solutions de l'équation de Navier-Stokes, un exemple est le champ de vitesse turbulent  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}, w_0)$ . A des fins de simplification syntaxique, nous ne préciseront nécessairement plus la variable condition initiale  $w_0$ .

Le moment d'ordre  $m$  de la composante  $i$  de la fonction aléatoire champ de vitesse  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  s'écrit

$$\langle v_{i_1}(t_1, \mathbf{x}_1) v_{i_2}(t_2, \mathbf{x}_2) \dots v_{i_m}(t_m, \mathbf{x}_m) \rangle. \quad (\text{A.88})$$

Lorsque la fonction aléatoire est centrée, on définit la fonction de corrélation entre les fonctions aléatoires  $v_i$  et  $v_j$  par

$$\Gamma_{ij}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = \left\langle v_i(t, \mathbf{x}) v_j(t', \mathbf{x}') \right\rangle. \quad (\text{A.89})$$

→ **Fonctionnelle caractéristique** : Soit  $v(t, w_0)$  une fonction aléatoire. Sa fonctionnelle caractéristique est définie par

$$K[z(\cdot)] = \left\langle e^{i \int_{\mathbb{R}} dt z(t) v(t, w_0)} \right\rangle. \quad (\text{A.90})$$

La fonction aléatoire  $v(t)$  est dite gaussienne si pour tous les chemins  $z(t)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} z(t) v(t, w_0) dt \quad (\text{A.91})$$

est une variable aléatoire gaussienne. La fonctionnelle caractéristique d'une fonction aléatoire centrée gaussienne est donnée par

$$K[z(\cdot)] = e^{-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} dt dt' z(t) z(t') \langle v(t) v(t') \rangle} \quad (\text{A.92})$$

→ **Symétries** : Soit  $G_t$  un groupe de transformations temporelles. Une fonction aléatoire  $v(t, w_0)$  est dite  $G_t$ -stationnaire si pour tout  $t$  et  $w_0$  on a

$$v(t+h, w_0) = v(t, G_t w_0) \quad \forall h \geq 0. \quad (\text{A.93})$$

Les applications : combinaison linéaire de fonctions  $G_t$ -stationnaires, transformations d'une fonction  $G_t$ -stationnaire par une fonction  $f$  déterministe à une variable, conservent la  $G_t$ -stationnarité. De plus, les moments d'une fonction aléatoire  $G_t$ -stationnaire sont, s'il existent, invariants par translation simultanée de tous leurs arguments

$$\langle v(t_1+h)v(t_2+h)\dots v(t_m+h) \rangle = \langle v(t_1)v(t_2)\dots v(t_m) \rangle \quad \forall t_1, t_2, \dots, h. \quad (\text{A.94})$$

Une fonction aléatoire  $v(t, w_0)$  possède des incréments  $G_t$ -stationnaires si  $\forall t, t'$  et  $w_0$

$$v(t'+h, w_0) - v(t+h, w_0) = v(t', G_h w_0) - v(t, G_h w_0) \quad \forall h \geq 0. \quad (\text{A.95})$$

La fonction aléatoire  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}, w_0)$  est dite homogène s'il existe un groupe de transformations d'espace  $G_\rho^{\text{space}}$  tel que

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x} + \boldsymbol{\rho}, w_0) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}, G_\rho^{\text{space}} w_0). \quad (\text{A.96})$$

Une conséquence de l'homogénéité est que tous les moments de la fonction aléatoire sont invariants par transformation d'espace simultanée de tous leurs arguments. On définit le tenseur de corrélation d'un champ de vitesse aléatoire stationnaire et homogène par

$$\langle v_i(t, \mathbf{x}) v_j(t', \mathbf{x}') \rangle = \Gamma_{ij}(t-t', \mathbf{x}-\mathbf{x}'). \quad (\text{A.97})$$

→ **Ergodicité** : Le théorème d'ergodicité de Birkhoff énonce que dans certaines conditions, les moyennes temporelles sont équivalentes aux moyennes d'ensemble. Pour une fonction aléatoire stationnaire  $v(t, w_0)$ , et pour presque tout  $w_0$  on a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v(t, w_0) dt = \langle v \rangle. \quad (\text{A.98})$$

Le théorème s'applique également au cas des fonctions aléatoires stationnaires exprimées dans l'espace

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^n} \int_0^L \dots \int_0^L dx_1 \dots dx_n \mathbf{v}(x_1, \dots, x_n, w_0) = \langle \mathbf{v} \rangle \quad (\text{A.99})$$

Ainsi qu'au cas de la mesure de l'état d'un système dans un grand nombre  $N$  de ses configurations statistiques possibles

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_i^N \mathbf{v}_i(t, \mathbf{x}, x_0) = \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (\text{A.100})$$

Soit  $v(t, w_0)$  une fonction aléatoire stationnaire et  $\Gamma(t-t')$  sa fonction de corrélation appartenant à l'espace  $L_1$  restreint à  $\mathbb{R}^+$  c'est à dire de valeur absolue sommable au sens de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^+$ . Alors le théorème de la moyenne carrée ergodique suggère que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \left( \frac{1}{T} \int_0^T v(t, w_0) dt \right)^2 \right\rangle = 0 \quad (\text{A.101})$$

→ **Spectre d'énergie** : L'une des méthodes les plus communes pour étudier une fonction aléatoire stationnaire est de calculer son spectre d'énergie. Considérons une fonction aléatoire stationnaire à toutes les fréquences  $f$  et centrée  $v(t, w_0)$ . On pose

$$\begin{aligned} v(t, w_0) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ift} \hat{v}(f, w_0) df \\ v_F^{\leq}(t, w_0) &= \int_{|f| \leq F} e^{ift} \hat{v}(f, w_0) df, \quad F \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

où  $v_F^{\leq}(t, w_0)$  correspond au filtre passe bas de  $v(t, w_0)$  qui permet de ne conserver que les fréquences  $f \leq F$ .  $v_F^{\leq}(t, w_0)$  conserve la stationnarité de la fonction aléatoire  $v(t, w_0)$ . On définit également le spectre d'énergie cumulé

$$\epsilon(F) = \frac{1}{2} \left\langle \left( v_F^{\leq}(t, w_0) \right)^2 \right\rangle \quad (\text{A.103})$$

que l'on considère stationnaire et indépendant du temps. Le spectre d'énergie de la fonction aléatoire stationnaire  $v(t, w_0)$  est alors donné par

$$E(f) = \frac{d\epsilon(f)}{df} \geq 0 \quad (\text{A.104})$$

où la positivité découle de la définition de  $\epsilon(f)$ . Lorsque  $F \rightarrow \infty$  alors  $v_F^{\leq}(t, w_0) = v(t, w_0)$  et on obtient la relation

$$\frac{1}{2} \langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} E(f) df. \quad (\text{A.105})$$

On peut alors montrer que

$$E(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ifs} \Gamma(s) ds \quad (\text{A.106})$$

qui suggère que la fonction de corrélation  $\Gamma(t-t') = \langle v(t)v(t') \rangle$  et le spectre d'énergie sont transformées de Fourier l'une de l'autre. Dans le cas où le spectre d'énergie est connu, il est possible d'en déduire l'expression de la moyenne quadratique des incréments de vitesse entre deux instants  $t$  et  $t'$ . On a

$$\left\langle \left( v(t') - v(t) \right)^2 \right\rangle = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( 1 - e^{if(t-t')} \right) E(f) df \quad (\text{A.107})$$

où  $E(f)$  est étendu aux fréquences négatives  $E(-f) = E(f)$ .

Les résultats présentés ci dessus sont également valables dans le domaine spatial. Dans ce dernier cas, le spectre d'énergie est donné par

$$\epsilon(K) = \frac{1}{2} \left\langle |\mathbf{v}_K^<(\mathbf{x})|^2 \right\rangle. \quad (\text{A.108})$$

On en déduit le spectre spatial d'énergie unidimensionnel

$$E(k) = \frac{d\epsilon(k)}{dk} \quad (\text{A.109})$$

qui peut se réécrire comme

$$E(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} k\rho\Gamma(\rho) \sin(k\rho) d\rho \quad (\text{A.110})$$

où  $\rho = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  et  $\Gamma(\rho) = \left\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}') \right\rangle$  sa fonction de corrélation.

Le passage d'un spectre unidimensionnel  $E_{1D}(k)$  vers un spectre tridimensionnel  $E_{3D}(\mathbf{k})$  est simple. La conservation de l'énergie conduit à la relation (en coordonnées sphériques)

$$\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk E_{1D}(k) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} E_{3D}(\mathbf{k}) \sin \theta k^2 dk d\theta d\phi \quad (\text{A.111})$$

qui peut se réécrire

$$E_{1D}(k) = 4\pi k^2 E_{3D}(k) \quad (\text{A.112})$$

si la fonction aléatoire  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, w_0)$  est également isotrope c'est à dire stable par application du groupe de rotations d'espace.

## A.7 Démonstration du taux de croissance des modes d'Alfvén résonants

Considérons un plasma constitué de gaz interstellaire d'espèce  $a$  et de rayons cosmiques d'espèce  $r$  dont la fonction de distribution totale est donnée par

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = n_a(\mathbf{x})M_a(\mathbf{p}, t) + n_r(\mathbf{x})M_r(\mathbf{p}, t) \quad (\text{A.113})$$

où  $M_a$  et  $M_r$  représentent respectivement les fonctions de distribution du plasma interstellaire de fond et des rayons cosmiques et  $n_a$ ,  $n_r$  leur densité numérique respectives. On décompose le tenseur dielectrique du système comme

$$\Psi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \Psi_{ij}^a(\mathbf{k}, \omega) + \Psi_{ij}^r(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{A.114})$$

où

$$\Psi_{ij}^a(\mathbf{k}, \omega) = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} S = (R+L)/2 \\ D = (R-L)/2 \end{matrix} \quad (\text{A.115})$$

représente le tenseur diélectrique d'un plasma froid au repos, et

$$R = 1 - \sum_a \frac{\omega_{l,a}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \Omega_a} \quad (\text{A.116})$$

$$L = 1 - \sum_a \frac{\omega_{l,a}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \Omega_a} \quad (\text{A.117})$$

$$P = 1 - \sum_a \frac{\omega_{l,a}^2}{\omega^2} \quad (\text{A.118})$$

$\omega_{l,a} = \sqrt{4\pi e_a^2 n_a / m_a}$  étant la fréquence de Langmuir du plasma et  $e_a = Z_a e$  est la charge électrique moyenne des constituants du plasma. Et

$$\Psi_{ij}^r(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}^r = \frac{2\pi}{\omega} \sum_r \frac{\omega_{l,a}^2 n_r}{n_a} \frac{m_a e_r^2}{e_a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\parallel} \int_0^{+\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_r^{-1} T_{ij}^r}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega_a} \quad (\text{A.119})$$

représente le tenseur diélectrique de la distribution de rayonnement cosmique ultra-relativiste, où

$$\mathbf{T}^r = \begin{bmatrix} \frac{n^2 J_n^2(z)}{z^2} v_{\perp} \mathbf{U} M_r & \frac{in J_n(z) J'_n(z)}{z} v_{\perp} \mathbf{U} M_r & \frac{n J_n^2(z)}{z} v_{\perp} \mathbf{W} M_r \\ -\frac{in J_n(z) J'_n(z)}{z} v_{\perp} \mathbf{U} M_r & (J'_n(z))^2 v_{\perp} \mathbf{U} M_r & -i J_n(z) J'_n(z) v_{\perp} \mathbf{W} M_r \\ \frac{n J_n^2(z)}{z} v_{\parallel} \mathbf{U} M_r & i J_n(z) J'_n(z) v_{\parallel} \mathbf{U} M_r & J_n^2(z) v_{\parallel} \mathbf{W} M_r \end{bmatrix} \quad (\text{A.120})$$

et

$$\mathbf{U} M_r = \frac{\partial M_r}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\gamma m_a \omega} \left( p_{\perp} \frac{\partial M_r}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial M_r}{\partial p_{\perp}} \right) \quad (\text{A.121})$$

$$\mathbf{W} M_r = \frac{\partial M_r}{\partial p_{\parallel}} - \frac{n\Omega_a}{\omega p_{\perp}} \left( p_{\perp} \frac{\partial M_r}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial M_r}{\partial p_{\perp}} \right) \quad (\text{A.122})$$

$$z = k_{\perp} v_{\perp} / \Omega_r \quad J'_n(z) = \partial J_n(z) / \partial z. \quad (\text{A.123})$$

Dans le cas où l'on ne considère que des perturbations parallèles au champ magnétique moyen, le tenseur diélectrique des rayons cosmiques devient

$$\begin{aligned}\Psi_{ij}^r(k_{\parallel}, k_{\perp} = 0, \omega) &= \begin{pmatrix} \Psi_{11}^r & i\Psi_{12}^r & 0 \\ -i\Psi_{12}^r & \Psi_{11}^r & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{33}^r \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\pi}{\omega} \sum_r \frac{\omega_{l,a}^2 n_r}{n_a} \frac{m_a e_r^2}{e_a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\parallel} \int_0^{+\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \begin{pmatrix} T_1^r & iT_2^r & 0 \\ -iT_2^r & T_1^r & 0 \\ 0 & 0 & T_3^r \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (\text{A.124})$$

où

$$T_1 = \frac{v_{\perp}(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})\mathbf{U}M_r}{2[(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})^2 - \Omega_r^2]} \quad (\text{A.125})$$

$$T_2 = \frac{v_{\perp}\Omega_r\mathbf{U}M_r}{2[(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})^2 - \Omega_r^2]} \quad (\text{A.126})$$

$$T_3 = \frac{v_{\parallel}}{\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}} \frac{\partial M_r}{\partial p_{\parallel}} \quad (\text{A.127})$$

tandis que le tenseur diélectrique du plasma interstellaire de fond est donné par

$$\Psi_{ij}^a(k_{\parallel}, k_{\perp} = 0, \omega) = \begin{pmatrix} \Psi_{11}^a & i\Psi_{12}^a & 0 \\ -i\Psi_{12}^a & \Psi_{11}^a & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{33}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (\text{A.128})$$

La relation de dispersion totale est donnée par

$$\Lambda = \det\Lambda_{ij} = [\Psi_{33}^a + \Psi_{33}^r] [(\Psi_{11}^a + \Psi_{11}^r - N^2)^2 - (\Psi_{12}^a + \Psi_{12}^r)^2] = 0 \quad (\text{A.129})$$

où  $N = k_{\parallel}c/\omega_R$  est l'indice de réfraction des ondes. Il existe trois solutions possibles :

$$\rightarrow \text{Un mode longitudinal } \Lambda_L = \Psi_{33}^a + \Psi_{33}^r = 0$$

$$\rightarrow \text{Deux modes transverses } \Lambda_T = (\Psi_{11}^a \pm \Psi_{12}^a) + (\Psi_{11}^r \pm \Psi_{12}^r) - N^2 = 0.$$

En utilisant l'approximation de faible amortissement (Schlickeiser 2002, Chapitre 10.3.7 [194]) on en déduit

$$\mathcal{R}e\Lambda(\mathbf{k}, \omega_R, \Gamma = 0) = 0 \quad (\text{A.130})$$

$$\Gamma = -\frac{\mathcal{I}m\Lambda(\mathbf{k}, \omega_R, 0)}{\partial\mathcal{R}e\Lambda(\mathbf{k}, \omega_R, 0)/\partial\omega_R}. \quad (\text{A.131})$$

Schlickeiser (2002 formule 11.2.43 [194]) calcule le taux d'amortissement des modes transverses dans le cas d'un plasma froid au repos. On peut montrer en s'appuyant également

sur les travaux de Kulsrud & Cezarsky (1970) [127] et Lerche (1967) [142], en considérant des fréquences d'ondes très inférieures à la gyrofréquence des rayons cosmiques, que le taux de croissance/amortissement des ondes d'Alfvén s'exprime comme

$$-\Gamma_{g,A}^{\pm} = \pm \frac{\pi m_r^2 \Omega_{r,0}^2 V_A(k)}{8 W_0} \left[ \int d^3p (1 - \mu^2) v \delta(kp|\mu| - m_r \Omega_{r,0}) \frac{\partial M_r}{\partial \mu} \right]_W \quad (\text{A.132})$$

où l'indice  $W$  signifie que l'intégrale est effectuée dans le référentiel propre des ondes dont la vitesse est donnée par

$$w_{\pm} = v_0 \pm V_A(k) \quad (\text{A.133})$$

où  $v_0$  correspond à la vitesse d'ensemble du fluide parallèle aux lignes de champ magnétique moyen. Skilling (1975a [206]) propose une expression des coefficients de diffusion  $D_{\mu\mu}$  et  $D_{\mu p}$

$$D_{\mu\mu} = \frac{(1 - \mu^2)(\nu_+ + \nu_-)}{2} \quad (\text{A.134})$$

$$D_{\mu p} = -\frac{\gamma m (1 - \mu^2)(\nu_+ w_+ + \nu_- w_-)}{2} \quad (\text{A.135})$$

où

$$\nu_{\pm} = \frac{\pi}{4} \Omega_r \frac{k \varepsilon_{\pm}(k)}{W_0} \quad (\text{A.136})$$

est le taux de collisions rayons cosmiques-ondes en avant (+) ou en arrière (-) (Jokipii 1971 [116]) et  $\varepsilon_{\pm}(k)$  correspond à l'énergie échangée lors d'une collision. En utilisant les expressions (A.134) des coefficients de diffusion, l'équation de l'anisotropie de premier ordre (1.292) se réécrit

$$v \frac{\partial M_r}{\partial z} \approx (\nu_+ + \nu_-) \frac{\partial f}{\partial \mu} + (\nu_+ w_+ + \nu_- w_-) m_r \gamma \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (\text{A.137})$$

En se plaçant dans le référentiel de l'observateur et en remplaçant l'expression de  $\partial f / \partial \mu$  dans (A.132) on obtient

$$-\Gamma_{g,A}^{\pm} = \frac{\pi m_r^2 \Omega_{0,r}^2 V_A(k)}{8 W_0} \int d^3p \frac{(1 - \mu^2) v}{\nu_+ + \nu_-} \delta(|\mu|kp - m_r \Omega_{0,r}) \left[ \mp v \frac{\partial M_r}{\partial z} + 2V_A(k) \nu_{\pm} \gamma m_r \frac{\partial M_r}{\partial p} \right] \quad (\text{A.138})$$

qui, en considérant  $f$  et  $\nu_{\pm}$  grossièrement indépendants de  $\mu$ , peut être intégrée à la résonance donnant ainsi

$$\Gamma_{g,A}^{\pm} = \frac{4\pi}{3} \frac{p^4 V_A(k)}{W_0 (I_+ + I_-)} \left[ \pm v \frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\pi}{2} m_r \Omega_{0,r} V_A(k) I_{\mp} \frac{\partial M_r}{\partial p} \right] \quad (\text{A.139})$$

où  $I_{\pm} \propto \nu_{\pm}$ .

## A.8 Résolution d'une équation de diffusion

Dans cette sous-section, nous montrons comment résoudre l'équation de diffusion (2.71) en mixant les méthodes explicites et implicites via un paramètre  $\theta$  pouvant prendre les valeurs 0 (schéma purement explicite), 1/2 (schéma de Crank-Nicholson) ou 1 (schéma purement implicite). L'équation est définie par

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (\text{A.140})$$

$$u(x, t = 0) = u_0(x). \quad (\text{A.141})$$

On discrétise l'équation ci-dessus de la manière suivante

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \theta f_i^{n+1} + (1 - \theta) f_i^n \quad (\text{A.142})$$

où

$$f_i^n = \left. \frac{\partial}{\partial x} D(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_i^n \quad (\text{A.143})$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(D_{i+1} + D_i)(u_{i+1}^n - u_i^n) - \frac{1}{2}(D_i + D_{i-1})(u_i^n - u_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2}. \quad (\text{A.144})$$

En posant

$$F_1 = \theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad F_2 = (1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (\text{A.145})$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2}(D_i + D_{i-1}) \quad \alpha_p = \frac{1}{2}(D_i + D_{i+1}) \quad (\text{A.146})$$

l'équation (A.142) devient

$$u_i^{n+1} = u_i^n + F_1 [\alpha_p(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) - \alpha_m(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})] \quad (\text{A.147})$$

$$+ F_2 [\alpha_p(u_{i+1}^n - u_i^n) - \alpha_m(u_i^n - u_{i-1}^n)]. \quad (\text{A.148})$$

En passant les termes désignant les instants  $n + 1$  à gauche et en posant

$$a_{i+1} = -F_1 \alpha_{p=i+\frac{1}{2}} \quad b_i = 1 + F_1 \alpha_{p=i+\frac{1}{2}} + F_1 \alpha_{m=i-\frac{1}{2}} \quad c_{i-1} = -F_1 \alpha_{m=i-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.149})$$

on obtient l'équation suivante

$$a_{i+1} u_{i+1}^{n+1} + b_i u_i^{n+1} + c_{i-1} u_{i-1}^{n+1} = S_i^n \quad (\text{A.150})$$



où

$$S_i^n = u_i^n + F_2 [\alpha_p(u_{i+1}^n - u_i^n) - \alpha_m(u_i^n - u_{i-1}^n)] \quad (\text{A.151})$$

correspond à la partie explicite de l'égalité. La partie de gauche de l'égalité ne peut-être trouvée qu'en résolvant simultanément toutes les équations de la grille en  $x$  soit  $N_X$  équations. Il en résulte le système matriciel suivant

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & & & & \\ a_2 & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & \ddots & & b_i & c_i & & & & \\ & & a_{i+1} & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & a_{N_X-2} & b_{N_X-2} & c_{N_X-3} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_i^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N_X-2}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^n \\ \vdots \\ S_i^n \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{N_X-2}^n \end{pmatrix} \quad (\text{A.152})$$

ou chaque ligne représente une cellule. Les solutions des cellules d'indice  $i = 0, N_X - 1$  sont déterminées séparément, en définissant les conditions au bords du problème. Pour résoudre le système, il faut diagonaliser la matrice. Dans ce cas précis, l'opération est très simple car la matrice est 3-diagonale, une simple méthode TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm) [64] permet de trouver la solution du système en un nombre d'opérations évoluant en  $\mathcal{O}(N_X)$  au lieu de  $\mathcal{O}(N_X^3)$  pour l'algorithme de diagonalisation de Gauss-Jordan. Cependant, ce système implique d'avoir des conditions au bord nulles. Dans le cas d'un système aux conditions de bord périodiques, l'égalité matricielle (A.152) peut se réécrire

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & & & & & a_0 & & \\ a_1 & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & \ddots & & b_i & c_i & & & & \\ & & a_{i+1} & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ c_{N_X-1} & & & & a_{N_X-1} & b_{N_X-1} & c_{N_X-2} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{n+1} \\ \vdots \\ u_i^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N_X-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0^n \\ \vdots \\ S_i^n \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{N_X-1}^n \end{pmatrix}. \quad (\text{A.153})$$

Où la matrice contient également les conditions de bord périodiques. Les éléments  $a_0$  et  $c_{N_X-1}$  ne sont pas nuls. Pour résoudre le système (A.153), on peut utiliser la formule de Sherman-Morrison [1]. La résolution du système matriciel résultant de l'équation de diffusion aux bords périodiques a été implémenté dans le code CR SPECTRA par Arthur Tourneix lors de son stage de Master 1.

## A.9 Diagramme de Voronoï

Un diagramme de Voronoï est un découpage d'un plan bi-dimensionnel en régions adjacentes à partir d'un ensemble discret de points appelés "germes". Soit un plan affine  $\mathbb{R}^2$  et  $S$  un ensemble fini de  $n$  points du plan que l'on qualifie de "germes". Une région de Voronoï associée à un élément  $p$  de  $S$  constitue l'ensemble des points qui sont plus proches de  $p$  que tout autre point de  $S$ .

$$\text{Vor}_S(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall q \in S \text{ dist}(x, p) \leq \text{dist}(x, q)\}$$

où  $\text{dist}(a, b)$  représente la distance entre les points  $a$  et  $b$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Il est possible de définir la distance entre deux points en utilisant différentes métriques.



# Liste des figures

1	Mesure du taux d'ionisation de l'air en fonction de l'altitude . . . . .	6
2	Schéma d'une gerbe atmosphérique . . . . .	7
3	Spectre d'énergie du fond diffus de rayonnement cosmique . . . . .	13
4	anisotropie à grande échelle du rayonnement cosmique . . . . .	14
5	Rapport B/C en fonction de l'énergie cinétique par nucléon . . . . .	16
1.1	Modes d'Alfvén et magnétosoniques lent et rapides en MHD idéale . . . . .	39
1.2	Modes magnétosoniques dans l'approche MHD Bi-fluide 1 . . . . .	46
1.3	Modes magnétosoniques dans l'approche MHD Bi-fluide 1 . . . . .	47
1.4	Turbulence MHD compressible . . . . .	66
2.1	Schéma représentant le modèle CRC proposé par Malkov et al. (2013) [148]	93
2.2	Amortissement des ondes d'Alfvén . . . . .	101
2.3	Modèles de diffusion de fond . . . . .	109
2.4	Modèles d'évolution de SNR Ia . . . . .	113
2.5	Modèle (1) d'échappement du rayonnement cosmique . . . . .	115
2.6	Modèle (2) d'échappement du rayonnement cosmique . . . . .	117
2.7	Comparaison entre les modèles d'échappement (1) et (2) des RCs . . . . .	118
2.8	Schéma d'advection uniforme . . . . .	126
2.9	Schéma d'advection bilatéral . . . . .	127
2.10	Schéma de diffusion homogène . . . . .	131
2.11	Schéma de diffusion variable . . . . .	132
2.12	Schéma d'advection en énergie . . . . .	134
2.13	Schéma rayonnement synchrotron . . . . .	138
2.14	Paramètres des modèles de SNR, d'injection de RCs et de diffusion utilisés dans les tests fiduciaux . . . . .	148
2.16	Test fiducial de transport du rayonnement cosmique avec CR SPECTRA 1A . . . . .	153
2.17	Test fiducial de transport du rayonnement cosmique avec CR SPECTRA 1B . . . . .	155

2.18	Test fiducial de transport du rayonnement cosmique avec CR SPECTRA	
	2A . . . . .	157
2.19	Test fiducial de transport du rayonnement cosmique avec CR SPECTRA	
	2B . . . . .	158
2.20	Test fiducial de transport du rayonnement cosmique avec CR SPECTRA	
	3A . . . . .	161
2.21	Test fiducial de transport du rayonnement cosmique avec CR SPECTRA	
	3B . . . . .	162
3.1	Diagramme du taux d'ionisation . . . . .	172
3.2	Tests fiduciaux de système RC-MIS sans sources avec RAMSES . . . . .	194
3.3	Histogrammes 2D du taux d'ionisation du MIS avec RAMSES . . . . .	195
3.4	Simulation d'injection d'une source de rayonnement cosmique dans un milieu homogène ( $P_{\text{ratio}} = 0$ ) . . . . .	197
3.5	Simulation d'injection d'une source de rayonnement cosmique dans un milieu homogène ( $P_{\text{ratio}} = 1$ ) . . . . .	198
3.6	Simulation d'injection d'une source de rayonnement cosmique dans un milieu turbulent ( $P_{\text{ratio}} = 0$ ) . . . . .	200
3.7	Simulation d'injection d'une source de rayonnement cosmique dans un milieu turbulent ( $P_{\text{ratio}} = 1$ ) . . . . .	201
3.8	Fonctions de distribution de probabilité des variables $\rho^{3/2}T^{0.4}$ , $\nabla P_{\text{CR}}$ et $D_{\text{self},\parallel}$ . . . . .	210
3.9	Fonctions de distribution de probabilité des variables $T$ , $n$ , $ \mathbf{B} $ et $P_{\text{CR}}$ . . . . .	211
3.10	Fonctions de distribution de probabilité des variables $v$ , $V_A$ et $\mathcal{M}_A$ . . . . .	212
3.11	Histogrammes 2D des corrélations entre le coefficient de diffusion auto-généré des RCs et les autres paramètres des simulations. . . . .	213

# Liste des tableaux

1.1	Paramètres des plasmas astrophysiques . . . . .	28
1.2	Turbulence MHD incompressible . . . . .	64
1.3	Turbulence MHD compressible: Modes lents et rapides . . . . .	65
2.1	Modèle de milieu interstellaire . . . . .	98
2.2	Solveurs utilisés dans les simulations fiducielles réalisées avec le code CR SPECTRA . . . . .	150
2.3	Configurations du MIS utilisées dans les simulations avec le code CR SPECTRA . . . . .	151



# Bibliographie

- [1] Abstracts of papers. *Ann. Math. Statist.*, 20(4):620–624, 12 1949.
- [2] 8 - weak turbulence theory of electrostatic wave–particle interactions. In RONALD C. DAVIDSON, editor, *Methods in Nonlinear Plasma Theory*, volume 37 of *Pure and Applied Physics*, pages 151 – 173. Elsevier, 1972.
- [3] A. A. Abdo, M. Ackermann, W. B. Atwood, L. Baldini, J. Ballet, G. Barbiellini, M. G. Baring, D. Bastieri, B. M. Baughman, K. Bechtol, R. Bellazzini, B. Berenji, R. D. Blandford, E. D. Bloom, G. Bogaert, E. Bonamente, A. W. Borgland , J. Bregeon, A. Brez, M. Brigida, P. Bruel, T. H. Burnett, G. A. Caliandro, R. A. Cameron, P. A. Caraveo, P. Carlson, J. M. Casand jian, C. Cecchi, E. Charles, A. Chekhtman, C. C. Cheung, J. Chiang, S. Ciprini, R. Claus, J. Cohen-Tanugi, L. R. Cominsky, J. Conrad, S. Cutini, D. S. Davis, C. D. Dermer, A. de Angelis, F. de Palma, S. W. Digel, M. Dormody, E. do Couto e Silva, P. S. Drell, R. Dubois, D. Dumora, Y. Edmonds, C. Farnier, W. B. Focke, Y. Fukazawa, S. Funk, P. Fusco, F. Gargano, D. Gasparri, N. Gehrels, S. Germani, B. Giebels, N. Giglietto, F. Giordano, T. Glanzman, G. Godfrey, I. A. Grenier, M. H. Grondin, J. E. Grove, L. Guillemot, S. Guiriec, A. K. Harding, R. C. Hartman, E. Hays, R. E. Hughes, G. Jóhannesson, A. S. Johnson, R. P. Johnson, T. J. Johnson, W. N. Johnson, T. Kamae, Y. Kanai, G. Kanbach, H. Katagiri, N. Kawai, M. Kerr, T. Kishishita, B. Kiziltan, J. Knödseder, M. L. Kocian, N. Komin, F. Kuehn, M. Kuss, L. Latronico, M. Lemoine-Goumard, F. Longo, V. Lonjou, F. Loparco, B. Lott, M. N. Lovellette, P. Lubrano, A. Makeev, M. Marelli, M. N. Mazziotta, J. E. McEnery, S. McGlynn, C. Meurer, P. F. Michelson, T. Mineo, W. Mitthumsiri, T. Mizuno, A. A. Moiseev, C. Monte, M. E. Monzani, A. Morselli, I. V. Moskalenko, S. Murgia, T. Nakamori, P. L. Nolan, E. Nuss, M. Ohno, T. Ohsugi, A. Okumura, N. Omodei, E. Orlando, J. F. Ormes, M. Ozaki, D. Paneque, J. H. Panetta, D. Parent, V. Pelassa, M. Pepe, M. Pesce-Rollins, G. Piano, L. Pieri, F. Piron, T. A. Porter, S. Rainò, R. Rando, P. S. Ray, M. Razzano, A. Reimer, O. Reimer, T. Reposeur, S. Ritz, L. S. Rochester, A. Y. Rodriguez, R. W. Romani, M. Roth, F. Ryde, H. F. W. Sadrozinski, D. Sanchez, A. Sander, P. M. Saz Parkin-



- son, T. L. Schalk, A. Sellerholm, C. Sgrò, E. J. Siskind, D. A. Smith, P. D. Smith, G. Spandre, P. Spinelli, J. L. Starck, M. S. Strickman, D. J. Suson, H. Tajima, H. Takahashi, T. Takahashi, T. Tanaka, J. B. Thayer, J. G. Thayer, D. J. Thompson, S. E. Thorsett, L. Tibaldo, D. F. Torres, G. Tosti, A. Tramacere, T. L. Usher, A. Van Etten, N. Vilchez, V. Vitale, P. Wang, K. Watters, B. L. Winer, K. S. Wood, H. Yasuda, T. Ylinen, and M. Ziegler. The Fermi Gamma-Ray Space Telescope Discovers the Pulsar in the Young Galactic Supernova Remnant CTA 1. *Science*, 322(5905):1218, November 2008.
- [4] M. Aguilar, G. Alberti, B. Alpat, A. Alvino, G. Ambrosi, K. Andeen, H. Anderhub, L. Arruda, P. Azzarello, A. Bachlechner, F. Barao, B. Baret, A. Barrau, L. Barrin, A. Bartoloni, L. Basara, A. Basili, L. Batalha, J. Bates, R. Battiston, J. Bazo, R. Becker, U. Becker, M. Behlmann, B. Beischer, J. Berdugo, P. Berges, B. Bertucci, G. Bigongiari, A. Biland, V. Bindi, S. Bizzaglia, G. Boella, W. de Boer, K. Bollweg, J. Bolmont, B. Borgia, S. Borsini, M. J. Boschini, G. Boudoul, M. Bourquin, P. Brun, M. Buénerd, J. Burger, W. Burger, F. Cadoux, X. D. Cai, M. Capell, D. Casadei, J. Casaus, V. Cascioli, G. Castellini, I. Cernuda, F. Cervelli, M. J. Chae, Y. H. Chang, A. I. Chen, C. R. Chen, H. Chen, G. M. Cheng, H. S. Chen, L. Cheng, N. Chernoplyiokov, A. Chikanian, E. Choumilov, V. Choutko, C. H. Chung, C. Clark, R. Clavero, G. Coignet, V. Commichau, C. Consolandi, A. Contin, C. Corti, M. T. Costado Dios, B. Coste, D. Crespo, Z. Cui, M. Dai, C. Delgado, S. Della Torre, B. Demirköz, P. Dennett, L. Derome, S. Di Falco, X. H. Diao, A. Diago, L. Djambazov, C. Díaz, P. von Doetinchem, W. J. Du, J. M. Dubois, R. Duperay, M. Duranti, D. D’Urso, A. Egorov, A. Eline, F. J. Epling, T. Eronen, J. van Es, H. Esser, A. Falvard, E. Fiandrini, A. Fiasson, E. Finch, P. Fisher, K. Flood, R. Foglio, M. Fohey, S. Fopp, N. Fouque, Y. Galaktionov, M. Gallilee, L. Gallin-Martel, G. Gallucci, B. García, J. García, R. García-López, L. García-Tabares, C. Gargiulo, H. Gast, I. Gebauer, S. Gentile, M. Gervasi, W. Gillard, F. Giovacchini, L. Girard, P. Goglov, J. Gong, C. Goy-Henningsen, D. Grandi, M. Graziani, A. Grechko, A. Gross, I. Guerri, C. de la Guía, K. H. Guo, M. Habiby, S. Haino, F. Hauler, Z. H. He, M. Heil, J. Heilig, R. Hermel, H. Hofer, Z. C. Huang, W. Hungerford, M. Incagli, M. Ionica, A. Jacholkowska, W. Y. Jang, H. Jinchi, M. Jongmanns, L. Journet, L. Jungermann, W. Karpinski, G. N. Kim, K. S. Kim, Th. Kirn, R. Kossakowski, A. Koulemzine, O. Kounina, A. Kounine, V. Koutsenko, M. S. Krafczyk, E. Laudi, G. Laurenti, C. Lauritzen, A. Lebedev, M. W. Lee, S. C. Lee, C. Leluc, H. León Vargas, V. Lepareur, J. Q. Li, Q. Li, T. X. Li, W. Li, Z. H. Li, P. Lipari, C. H. Lin, D. Liu, H. Liu, T. Lomtadze, Y. S. Lu, S. Lucidi, K. Lübelmeyer, J. Z. Luo, W. Lustermaun, S. Lv, J. Madsen, R. Majka, A. Malinin, C. Mañá, J. Marín, T. Martin, G. Martínez, F. Masciocchi, N. Masi, D. Maurin, A. McInturff, P. McIntyre, A. Menchaca-Rocha, Q. Meng, M. Menichelli, I. Mereu, M. Millinger, D. C. Mo, M. Molina, P. Mott, A. Mujunen, S. Natale, P. Nemeth, J. Q. Ni, N. Nikonov, F. Nozzoli, P. Nunes, A. Obermeier, S. Oh, A. Oliva, F. Palmonari, C. Palomares, M. Paniccia, A. Papi, W. H. Park, M. Pauluzzi, F. Pauss, A. Pauw, E. Pedreschi,

- S. Pensotti, R. Pereira, E. Perrin, G. Pessina, G. Pierschel, F. Pilo, A. Piluso, C. Pizzolotto, V. Plyaskin, J. Pochon, M. Pohl, V. Poireau, S. Porter, J. Pouxé, A. Putze, L. Quadrani, X. N. Qi, P. G. Rancoita, D. Rapin, Z. L. Ren, J. S. Ricol, E. Riihonen, I. Rodríguez, U. Roeser, S. Rosier-Lees, L. Rossi, A. Rozhkov, D. Rozza, A. Sabellek, R. Sagdeev, J. Sandweiss, B. Santos, P. Saouter, M. Sarchioni, S. Schael, D. Schinzel, M. Schmanau, G. Schwering, A. Schulz von Dratzig, G. Scolieri, E. S. Seo, B. S. Shan, J. Y. Shi, Y. M. Shi, T. Siedenburger, R. Siedling, D. Son, F. Spada, F. Spinella, M. Steuer, K. Stiff, W. Sun, W. H. Sun, X. H. Sun, M. Tacconi, C. P. Tang, X. W. Tang, Z. C. Tang, L. Tao, J. Tassan-Viol, Samuel C. C. Ting, S. M. Ting, C. Titus, N. Tomassetti, F. Toral, J. Torsti, J. R. Tsai, J. C. Tutt, J. Ulbricht, T. Urban, V. Vagelli, E. Valente, C. Vannini, E. Valtonen, M. Vargas Trevino, S. Vaurynovich, M. Vecchi, M. Vergain, B. Verlaet, C. Vescovi, J. P. Vialle, G. Viertel, G. Volpini, D. Wang, N. H. Wang, Q. L. Wang, R. S. Wang, X. Wang, Z. X. Wang, W. Wallraff, Z. L. Weng, M. Willenbrock, M. Wlochal, H. Wu, K. Y. Wu, Z. S. Wu, W. J. Xiao, S. Xie, R. Q. Xiong, G. M. Xin, N. S. Xu, W. Xu, Q. Yan, J. Yang, M. Yang, Q. H. Ye, H. Yi, Y. J. Yu, Z. Q. Yu, S. Zeissler, J. G. Zhang, Z. Zhang, M. M. Zhang, Z. M. Zheng, H. L. Zhuang, V. Zhukov, A. Zichichi, P. Zuccon, and C. Zurbach. First Result from the Alpha Magnetic Spectrometer on the International Space Station: Precision Measurement of the Positron Fraction in Primary Cosmic Rays of 0.5-350 GeV. *Physics Review Letters*, 110(14):141102, April 2013.
- [5] M. Aguilar, L. Ali Cavazonza, G. Ambrosi, L. Arruda, N. Attig, S. Aupetit, P. Azarello, A. Bachlechner, F. Barao, A. Barrau, L. Barrin, A. Bartoloni, L. Basara, S. Başeğmez-du Pree, M. Battarbee, R. Battiston, U. Becker, M. Behlmann, B. Beischer, J. Berdugo, B. Bertucci, K. F. Bindel, V. Bindi, G. Boella, W. de Boer, K. Bollweg, V. Bonnivard, B. Borgia, M. J. Boschini, M. Bourquin, E. F. Bueno, J. Burger, F. Cadoux, X. D. Cai, M. Capell, S. Caroff, J. Casaus, G. Castellini, F. Cervelli, M. J. Chae, Y. H. Chang, A. I. Chen, G. M. Chen, H. S. Chen, L. Cheng, H. Y. Chou, E. Choumilov, V. Choutko, C. H. Chung, C. Clark, R. Clavero, G. Coignet, C. Consolandi, A. Contin, C. Corti, W. Creus, M. Crispoltoni, Z. Cui, Y. M. Dai, C. Delgado, S. Della Torre, O. Demakov, M. B. Demirköz, L. Derome, S. Di Falco, F. Dimiccoli, C. Díaz, P. von Doetinchem, F. Dong, F. Donnini, M. Duranti, D. D'Urso, A. Egorov, A. Eline, T. Eronen, J. Feng, E. Fiandrini, E. Finch, P. Fisher, V. Formato, Y. Galaktionov, G. Gallucci, B. García, R. J. García-López, C. Gargiulo, H. Gast, I. Gebauer, M. Gervasi, A. Ghelfi, F. Giovacchini, P. Goglov, D. M. Gómez-Coral, J. Gong, C. Goy, V. Grabski, D. Grandi, M. Graziani, K. H. Guo, S. Haino, K. C. Han, Z. H. He, M. Heil, J. Hoffman, T. H. Hsieh, H. Huang, Z. C. Huang, C. Huh, M. Incagli, M. Ionica, W. Y. Jang, H. Jinchi, S. C. Kang, K. Kanishev, G. N. Kim, K. S. Kim, Th. Kirn, C. Konak, O. Kounina, A. Kounine, V. Koutsenko, M. S. Krafczyk, G. La Vacca, E. Laudi, G. Laurenti, I. Lazzizzera, A. Lebedev, H. T. Lee, S. C. Lee, C. Leluc, H. S. Li, J. Q. Li, J. Q. Li, Q. Li, T. X. Li, W. Li, Y. Li, Z. H. Li, Z. Y. Li, S. Lim, C. H. Lin, P. Lipari, T. Lippert, D. Liu, Hu Liu, V. D. Lordello, S. Q.

- Lu, Y. S. Lu, K. Luebelsmeyer, F. Luo, J. Z. Luo, S. S. Lv, F. Machate, R. Majka, C. Mañá, J. Marín, T. Martin, G. Martínez, N. Masi, D. Maurin, A. Menchaca-Rocha, Q. Meng, V. M. Mikuni, D. C. Mo, L. Morescalchi, P. Mott, T. Nelson, J. Q. Ni, N. Nikonov, F. Nozzoli, A. Oliva, M. Orcinha, F. Palmonari, C. Palomares, M. Paniccia, M. Pauluzzi, S. Pensotti, R. Pereira, N. Picot-Clemente, F. Pilo, C. Pizzolotto, V. Plyaskin, M. Pohl, V. Poireau, A. Putze, L. Quadrani, X. M. Qi, X. Qin, Z. Y. Qu, T. Rähä, P. G. Rancoita, D. Rapin, J. S. Ricol, S. Rosier-Lees, A. Rozhkov, D. Rozza, R. Sagdeev, J. Sandweiss, P. Saouter, S. Schael, S. M. Schmidt, A. Schulz von Dratzig, G. Schwering, E. S. Seo, B. S. Shan, J. Y. Shi, T. Siedenburg, D. Son, J. W. Song, W. H. Sun, M. Tacconi, X. W. Tang, Z. C. Tang, L. Tao, D. Tescaro, Samuel C. C. Ting, S. M. Ting, N. Tomassetti, J. Torsti, C. Türkoğlu, T. Urban, V. Vagelli, E. Valente, C. Vannini, E. Valtonen, M. Vázquez Acosta, M. Vecchi, M. Velasco, J. P. Vialle, V. Vitale, S. Vitillo, L. Q. Wang, N. H. Wang, Q. L. Wang, X. Wang, X. Q. Wang, Z. X. Wang, C. C. Wei, Z. L. Weng, K. Whitman, J. Wienkenhöver, H. Wu, X. Wu, X. Xia, R. Q. Xiong, W. Xu, Q. Yan, J. Yang, M. Yang, Y. Yang, H. Yi, Y. J. Yu, Z. Q. Yu, S. Zeissler, C. Zhang, J. Zhang, J. H. Zhang, S. D. Zhang, S. W. Zhang, Z. Zhang, Z. M. Zheng, Z. Q. Zhu, H. L. Zhuang, V. Zhukov, A. Zichichi, N. Zimmermann, and P. Zuccon. Precision measurement of the boron to carbon flux ratio in cosmic rays from 1.9 gv to 2.6 tv with the alpha magnetic spectrometer on the international space station. *Phys. Rev. Lett.*, 117:231102, Nov 2016.
- [6] Aharonian, F., Akhperjanian, A. G., Bazer-Bachi, A. R., Behera, B., Beilicke, M., Benbow, W., Berge, D., Bernlöhr, K., Boisson, C., Bolz, O., Borrel, V., Braun, I., Brion, E., Brown, A. M., Bühler, R., Bulik, T., Büsching, I., Boutelier, T., Carrigan, S., Chadwick, P. M., Chounet, L.-M., Clapson, A. C., Coignet, G., Cornils, R., Costamante, L., Degrange, B., Dickinson, H. J., Djannati-Ataï, A., Domainko, W., Drury, L. O'C., Dubus, G., Dyks, J., Egberts, K., Emmanoulopoulos, D., Espigat, P., Farnier, C., Feinstein, F., Fiasson, A., Förster, A., Fontaine, G., Fukui, Y., Funk, Seb., Funk, S., Füßling, M., Gallant, Y. A., Giebels, B., Glicenstein, J. F., Glück, B., Goret, P., Hadjichristidis, C., Hauser, D., Hauser, M., Heinzlmann, G., Henri, G., Hermann, G., Hinton, J. A., Hoffmann, A., Hofmann, W., Holleran, M., Hoppe, S., Horns, D., Jacholkowska, A., de Jager, O. C., Kendziorra, E., Kerschhaggl, M., Khélifi, B., Komin, Nu., Kosack, K., Lamanna, G., Latham, I. J., Le Gallou, R., Lemièrre, A., Lemoine-Goumard, M., Lenain, J.-P., Lohse, T., Martin, J. M., Martineau-Huynh, O., Marcowith, A., Masterson, C., Maurin, G., McComb, T. J. L., Moderski, R., Moriguchi, Y., Moulin, E., de Naurois, M., Nedbal, D., Nolan, S. J., Olive, J.-P., Orford, K. J., Osborne, J. L., Ostrowski, M., Panter, M., Pedalletti, G., Pelletier, G., Petrucci, P.-O., Pita, S., Pühlhofer, G., Punch, M., Ranchon, S., Raubenheimer, B. C., Raue, M., Rayner, S. M., Reimer, O., Renaud, M., Ripken, J., Rob, L., Rolland, L., Rosier-Lees, S., Rowell, G., Rudak, B., Ruppel, J., Sahakian, V., Santangelo, A., Saugé, L., Schlenker, S., Schlickeiser, R., Schröder, R., Schwanke, U., Schwarzburg, S., Schwemmer, S., Shalchi, A., Sol, H., Spangler, D., Stawarz, L., Steenkamp, R., Stegmann, C., Superina, G., Takeuchi,

- T., Tam, P. H., Tavernet, J.-P., Terrier, R., van Eldik, C., Vasileiadis, G., Venter, C., Vialle, J. P., Vincent, P., Vivier, M., Völk, H. J., Volpe, F., Wagner, S. J., and Ward, M. Discovery of very high energy gamma-ray emission coincident with molecular clouds in the w 28 (g6.4-0.1) field\*. *A&A*, 481(2):401–410, 2008.
- [7] J. W. Armstrong, B. J. Rickett, and S. R. Spangler. Electron Density Power Spectrum in the Local Interstellar Medium. *Astrophysical journal*, 443:209, April 1995.
- [8] Mohammad Aslefallah, Davood Rostamy, and Khadijeh Hosseinkhani. Solving time-fractional differential diffusion equation by theta-method. *Int. J. of Adv. in Aply. Math. and Mech*, 2:1–8, 09 2014.
- [9] P. Auger, P. Ehrenfest, R. Maze, J. Daudin, and R. A. Fréon. Extensive Cosmic-Ray Showers. *Reviews of Modern Physics*, 11(3-4):288–291, July 1939.
- [10] W. Baade and F. Zwicky. Cosmic Rays from Super-novae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 20(5):259–263, May 1934.
- [11] B. Bartoli, P. Bernardini, X. J. Bi, Z. Cao, S. Catalanotti, S. Z. Chen, T. L. Chen, S. W. Cui, B. Z. Dai, A. D’Amone, Danzengluobu, I. De Mitri, B. D’Ettorre Piazzoli, T. Di Girolamo, G. Di Sciascio, C. F. Feng, Zhaoyang Feng, Zhenyong Feng, W. Gao, Q. B. Gou, Y. Q. Guo, H. H. He, Haibing Hu, Hongbo Hu, M. Iacovacci, R. Iuppa, H. Y. Jia, Labaciren, H. J. Li, C. Liu, J. Liu, M. Y. Liu, H. Lu, L. L. Ma, X. H. Ma, G. Mancarella, S. M. Mari, G. Marsella, S. Mastroianni, P. Montini, C. C. Ning, L. Perrone, P. Pistilli, P. Salvini, R. Santonico, P. R. Shen, X. D. Sheng, F. Shi, A. Surdo, Y. H. Tan, P. Vallania, S. Vernetto, C. Vigorito, H. Wang, C. Y. Wu, H. R. Wu, L. Xue, Q. Y. Yang, X. C. Yang, Z. G. Yao, A. F. Yuan, M. Zha, H. M. Zhang, L. Zhang, X. Y. Zhang, Y. Zhang, J. Zhao, Zhaxiciren, Zhaxisangzhu, X. X. Zhou, F. R. Zhu, Q. Q. Zhu, and ARGO-YBJ Collaboration. ARGO-YBJ Observation of the Large-scale Cosmic Ray Anisotropy During the Solar Minimum between Cycles 23 and 24. *Astrophysical journal*, 809(1):90, August 2015.
- [12] Matthew R. Bate and Eric R. Keto. Combining radiative transfer and diffuse interstellar medium physics to model star formation. *Monthly Notices of the RAS*, 449(3):2643–2667, May 2015.
- [13] Marcus C. Beck, Alexander M. Beck, Rainer Beck, Klaus Dolag, Andrew W. Strong, and Peter Nielaba. New constraints on modelling the random magnetic field of the MW. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(5):056, May 2016.
- [14] Rainer Beck and Richard Wielebinski. *Magnetic Fields in Galaxies*, volume 5, page 641. 2013.

- [15] A. R. Bell. The acceleration of cosmic rays in shock fronts - II. *Monthly Notices of the RAS*, 182:443–455, February 1978.
- [16] A. R. Bell. Turbulent amplification of magnetic field and diffusive shock acceleration of cosmic rays. *Monthly Notices of the RAS*, 353(2):550–558, September 2004.
- [17] W. Benbow. The H.E.S.S. standard analysis technique. In *7th Workshop on Towards a Network of Atmospheric Cherenkov Detectors 2005*, pages 163–171, 4 2005.
- [18] L. Blitz, Y. Fukui, A. Kawamura, A. Leroy, N. Mizuno, and E. Rosolowsky. Giant Molecular Clouds in Local Group Galaxies. In Bo Reipurth, David Jewitt, and Klaus Keil, editors, *Protostars and Planets V*, page 81, January 2007.
- [19] George R. Blumenthal and Robert J. Gould. Bremsstrahlung, Synchrotron Radiation, and Compton Scattering of High-Energy Electrons Traversing Dilute Gases. *Reviews of Modern Physics*, 42(2):237–271, January 1970.
- [20] C. M. Booth, Oscar Agertz, Andrey V. Kravtsov, and Nickolay Y. Gnedin. Simulations of Disk Galaxies with Cosmic Ray Driven Galactic Winds. *Astrophysical Journal, Letters*, 777(1):L16, November 2013.
- [21] S. I. Braginskii. Transport Processes in a Plasma. *Reviews of Plasma Physics*, 1:205, Jan 1965.
- [22] L. Brahim, A. Marcowith, and V. S. Ptuskin. Nonlinear diffusion of cosmic rays escaping from supernova remnants: Cold partially neutral atomic and molecular phases. *Astronomy and Astrophysics*, 633:A72, January 2020.
- [23] R. Brose, M. Pohl, I. Sushch, O. Petruk, and T. Kuzyo. Cosmic-ray acceleration and escape from post-adiabatic supernova remnants. *Astronomy and Astrophysics*, 634:A59, February 2020.
- [24] Iryna Butsky, Jonathan Zrake, Ji-hoon Kim, Hung-I. Yang, and Tom Abel. Ab Initio Simulations of a Supernova-driven Galactic Dynamo in an Isolated Disk Galaxy. *Astrophysical journal*, 843(2):113, July 2017.
- [25] Andrei M. Bykov. Particle Acceleration and Nonthermal Phenomena in Superbubbles. *Space Science Reviews*, 99:317–326, October 2001.
- [26] Martina Cardillo, Elena Amato, and Pasquale Blasi. On the cosmic ray spectrum from type II Supernovae. *arXiv e-prints*, page arXiv:1507.06086, July 2015.
- [27] Antonella Castellina and Fiorenza Donato. Diffusion coefficient and acceleration spectrum from direct measurements of charged cosmic ray nuclei. *Astroparticle Physics*, 24(1-2):146–159, September 2005.

- [28] C. Ceccarelli, C. Dominik, A. López-Sepulcre, M. Kama, M. Padovani, E. Caux, and P. Caselli. Herschel Finds Evidence for Stellar Wind Particles in a Protostellar Envelope: Is This What Happened to the Young Sun? *Astrophysical Journal Letters*, 790(1):L1, July 2014.
- [29] S. Celli, G. Morlino, S. Gabici, and F. A. Aharonian. Exploring particle escape in supernova remnants through gamma rays. *Monthly Notices of the RAS*, 490(3):4317–4333, December 2019.
- [30] A. Chepurnov and A. Lazarian. Extending the Big Power Law in the Sky with Turbulence Spectra from Wisconsin H $\alpha$  Mapper Data. *Astrophysical journal*, 710(1):853–858, February 2010.
- [31] J. Cho, A. Lazarian, and E. T. Vishniac. *MHD Turbulence: Scaling Laws and Astrophysical Implications*, volume 614, pages 56–98. 2003.
- [32] J. Cho and E. T. Vishniac. The Effects of External Magnetic Fields on MHD Turbulence. In *American Astronomical Society Meeting Abstracts #196*, volume 196 of *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, page 26.02, May 2000.
- [33] Jungyeon Cho and A. Lazarian. Compressible Sub-Alfvénic MHD Turbulence in Low- $\beta$  Plasmas. *Physics Review Letters*, 88(24):245001, Jun 2002.
- [34] Jungyeon Cho and A. Lazarian. Compressible magnetohydrodynamic turbulence: mode coupling, scaling relations, anisotropy, viscosity-damped regime and astrophysical implications. *Monthly Notices of the RAS*, 345(12):325–339, Oct 2003.
- [35] David T. Chuss, B-G Andersson, John Bally, Jessie L. Dotson, C. Darren Dowell, Jordan A. Guerra, Doyal A. Harper, Martin Houde, Terry Jay Jones, A. Lazarian, and et al. Hawc+/sofia multiwavelength polarimetric observations of omc-1. *The Astrophysical Journal*, 872(2):187, Feb 2019.
- [36] Denis F. Cioffi, Christopher F. McKee, and Edmund Bertschinger. Dynamics of Radiative Supernova Remnants. *Astrophysical journal*, 334:252, November 1988.
- [37] Planck Collaboration, N. Aghanim, Y. Akrami, M. I. R. Alves, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak, K. Benabed, J. P. Bernard, M. Bersanelli, P. Bielewicz, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, F. R. Bouchet, F. Boulanger, A. Bracco, M. Bucher, C. Burigana, E. Calabrese, J. F. Cardoso, J. Carron, R. R. Chary, H. C. Chiang, L. P. L. Colombo, C. Combet, B. P. Crill, F. Cuttaia, P. de Bernardis, G. de Zotti, J. Delabrouille, J. M. Delouis, E. Di Valentino, C. Dickinson, J. M. Diego, O. Doré, M. Douspis, A. Ducout, X. Dupac, G. Efstathiou, F. Elsner, T. A. Enßlin, H. K. Eriksen, E. Falgarone, Y. Fantaye, R. Fernandez-Cobos, K. Ferrière, F. Finelli, F. Forastieri, M. Frailis, A. A. Fraisse, E. Franceschi, A. Frolov, S. Galeotta, S. Galli, K. Ganga, R. T. Génova-Santos, M. Gerbino, T. Ghosh, J. González-Nuevo, K. M. Górski, S. Gratton, G. Green, A. Gruppuso, J. E. Gudmundsson,

- V. Guillet, W. Handley, F. K. Hansen, G. Helou, D. Herranz, E. Hivon, Z. Huang, A. H. Jaffe, W. C. Jones, E. Keihänen, R. Keskitalo, K. Kiiveri, J. Kim, N. Krachmalnicoff, M. Kunz, H. Kurki-Suonio, G. Lagache, J. M. Lamarre, A. Lasenby, M. Lattanzi, C. R. Lawrence, M. Le Jeune, F. Levrier, M. Liguori, P. B. Lilje, V. Lindholm, M. López-Caniego, P. M. Lubin, Y. Z. Ma, J. F. Macías-Pérez, G. Maggio, D. Maino, N. Mandolesi, A. Mangilli, A. Marcos-Caballero, M. Maris, P. G. Martin, E. Martínez-González, S. Matarrese, N. Mauri, J. D. McEwen, A. Melchiorri, A. Mennella, M. Migliaccio, M. A. Miville-Deschênes, D. Molinari, A. Moneti, L. Montier, G. Morgante, A. Moss, P. Natoli, L. Pagano, D. Paoletti, G. Patanchon, F. Perrotta, V. Pettorino, F. Piacentini, L. Polastri, G. Polenta, J. L. Puget, J. P. Rachen, M. Reinecke, M. Remazeilles, A. Renzi, I. Ristorcelli, G. Rocha, C. Rosset, G. Roudier, J. A. Rubiño-Martín, B. Ruiz-Granados, L. Salvati, M. Sandri, M. Savelainen, D. Scott, C. Sirignano, R. Sunyaev, A. S. Suur-Uski, J. A. Tauber, D. Tavagnacco, M. Tenti, L. Toffolatti, M. Tomasi, T. Trombetti, J. Valiviita, F. Vansyngel, B. Van Tent, P. Vielva, F. Villa, N. Vittorio, B. D. Wandelt, I. K. Wehus, A. Zacchei, and A. Zonca. Planck 2018 results. xii. galactic astrophysics using polarized dust emission, 2018.
- [38] Benoît Commerçon, Alexandre Marcowith, and Yohan Dubois. Cosmic-ray propagation in the bi-stable interstellar medium. I. Conditions for cosmic-ray trapping. *Astronomy and Astrophysics*, 622:A143, February 2019.
- [39] Arthur H. Compton and Ivan A. Getting. An Apparent Effect of Galactic Rotation on the Intensity of Cosmic Rays. *Physical Review*, 47(11):817–821, June 1935.
- [40] Arthur H. Compton and Ivan A. Getting. An apparent effect of galactic rotation on the intensity of cosmic rays. *Phys. Rev.*, 47:817–821, Jun 1935.
- [41] C. Corti, V. Bindi, C. Consolandi, and K. Whitman. SOLAR MODULATION OF THE LOCAL INTERSTELLAR SPECTRUM WITH VOYAGER 1, AMS-02, PAMELA, AND BESS. *The Astrophysical Journal*, 829(1):8, sep 2016.
- [42] Juan Cortina. Status and First Results of the Magic Telescope. *Astrophysics and Space Science*, 297(1-4):245–255, June 2005.
- [43] T. G. Cowling. *Magnetohydrodynamics*. 1976.
- [44] R. M. Crutcher. Observations of Magnetic Fields in Molecular Clouds. In B. Uyaniker, W. Reich, and R. Wielebinski, editors, *The Magnetized Interstellar Medium*, pages 123–132, February 2004.
- [45] Richard M. Crutcher and Athol J. Kemball. Review of zeeman effect observations of regions of star formation. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 6:66, 2019.
- [46] Y. Cui, G. Pühlhofer, and A. Santangelo. A young supernova remnant illuminating nearby molecular clouds with cosmic rays. *Astronomy and Astrophysics*, 591:A68, June 2016.

- [47] Marta D'Angelo, Pasquale Blasi, and Elena Amato. Grammage of cosmic rays around Galactic supernova remnants. *Physical Review D*, 94(8):083003, October 2016.
- [48] Gohar Dashyan and Yohan Dubois. Cosmic ray feedback from supernovae in dwarf galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 638:A123, June 2020.
- [49] R. L. Diehl. Particle acceleration in cosmic sites. Astrophysics issues in our understanding of cosmic rays. *European Physical Journal D*, 55(2):509–518, November 2009.
- [50] V. A. Dogiel, A. V. Gurevich, and K. P. Zybin. Kinetic theory of propagation and runaway galactic cosmic rays. 2: Self-consistent model. *Astronomy and Astrophysics*, 281(3):937–944, January 1994.
- [51] F Donato and A Castellina. Propagation properties from measurements of galactic cosmic rays. *Journal of Physics: Conference Series*, 39:426–428, may 2006.
- [52] B. T. Draine. Destruction Processes for Interstellar Dust. In A. Bonetti, J. M. Greenberg, and S. Aiello, editors, *Evolution of Interstellar Dust and Related Topics*, page 103, January 1989.
- [53] B. T. Draine and N. Anderson. Temperature fluctuations and infrared emission from interstellar grains. *Astrophysical journal*, 292:494–499, May 1985.
- [54] B. T. Draine and H. M. Lee. Optical Properties of Interstellar Graphite and Silicate Grains. *Astrophysical journal*, 285:89, October 1984.
- [55] Bruce Draine. Using WISE to Measure the Diffuse Galactic Light. NASA ADAP Proposal, January 2011.
- [56] Bruce T. Draine. *Physics of the Interstellar and Intergalactic Medium*. 2011.
- [57] WE Drummond and D Pines. Nuclear fusion suppl. *Part*, 3:1023, 1962.
- [58] L. Drury. On Particle Acceleration in Supernova Remnants. *Space Science Reviews*, 36(1):57–60, September 1983.
- [59] L. O'c. Drury. Escaping the accelerator: how, when and in what numbers do cosmic rays get out of supernova remnants? *Monthly Notices of the RAS*, 415(2):1807–1814, August 2011.
- [60] Yohan Dubois and Benoît Commerçon. An implicit scheme for solving the anisotropic diffusion of heat and cosmic rays in the RAMSES code. *Astronomy and Astrophysics*, 585:A138, January 2016.
- [61] Yohan Dubois, Benoît Commerçon, Alexandre Marcowith, and Loann Brahim. Shock-accelerated cosmic rays and streaming instability in the adaptive mesh refinement code Ramses. *Astronomy and Astrophysics*, 631:A121, November 2019.



- [62] F. Duval, D. Schaerer, G. Östlin, and P. Laursen. Lyman  $\alpha$  line and continuum radiative transfer in a clumpy interstellar medium. *Astronomy and Astrophysics*, 562:A52, February 2014.
- [63] Donald C. Ellison and Andrei M. Bykov. GAMMA-RAY EMISSION OF ACCELERATED PARTICLES ESCAPING a SUPERNOVA REMNANT IN a MOLECULAR CLOUD. *The Astrophysical Journal*, 731(2):87, mar 2011.
- [64] Moawwad Elmikkawy. A generalized symbolic thomas algorithm. *Applied Mathematics*, 03, 01 2012.
- [65] A. Erlykin, T. Wibig, and A. W. Wolfendale. Young supernova remnants and the knee in the cosmic ray spectrum. *Astrophysics and Space Sciences Transactions*, 7(2):179–182, May 2011.
- [66] Charles R. Evans and John F. Hawley. Simulation of Magnetohydrodynamic Flows: A Constrained Transport Model. *Astrophysical journal*, 332:659, September 1988.
- [67] D. Falceta-Gonçalves, G. Kowal, E. Falgarone, and A. C. L. Chian. Turbulence in the interstellar medium. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 21(3):587–604, May 2014.
- [68] Alison J. Farmer and Peter Goldreich. Wave Damping by Magnetohydrodynamic Turbulence and Its Effect on Cosmic-Ray Propagation in the Interstellar Medium. *Astrophysical journal*, 604(2):671–674, April 2004.
- [69] C. Federrath, J. Roman-Duval, R. S. Klessen, W. Schmidt, and M. M. Mac Low. Comparing the statistics of interstellar turbulence in simulations and observations. Solenoidal versus compressive turbulence forcing. *Astronomy and Astrophysics*, 512:A81, March 2010.
- [70] Christoph Federrath and Ralf S. Klessen. The Star Formation Rate of Turbulent Magnetized Clouds: Comparing Theory, Simulations, and Observations. *Astrophysical journal*, 761(2):156, December 2012.
- [71] Enrico Fermi. On the Origin of the Cosmic Radiation. *Physical Review*, 75(8):1169–1174, April 1949.
- [72] Katia M. Ferrière. The interstellar environment of our galaxy. *Reviews of Modern Physics*, 73(4):1031–1066, October 2001.
- [73] G. B. Field, D. W. Goldsmith, and H. J. Habing. A Theoretical Model for the Interstellar Medium. In *Bulletin of the AAS*, volume 1, page 240, June 1969.
- [74] Jr. Fleck, R. C. On the generation and maintenance of turbulence in the interstellar medium. *Astrophysical Journal, Letters*, 246:L151–L154, June 1981.

- [75] O. Fornieri, D. Gaggero, and D. Grasso. Features in cosmic-ray lepton data unveil the properties of nearby cosmic accelerators. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(2):009, February 2020.
- [76] Ottavio Fornieri, Daniele Gaggero, Daniel Guberman, Loann Brahim, and Alexandre Marcowith. Changes in cosmic-ray transport properties connect the high-energy features in the electron and proton data, 2020.
- [77] Uriel Frisch. *Turbulence*. 1996.
- [78] S. Fromang, P. Hennebelle, and R. Teyssier. A high order Godunov scheme with constrained transport and adaptive mesh refinement for astrophysical magnetohydrodynamics. *Astronomy and Astrophysics*, 457(2):371–384, October 2006.
- [79] Y. Fukui, H. Sano, J. Sato, K. Torii, H. Horachi, T. Hayakawa, N. M. McClure-Griffiths, G. Rowell, T. Inoue, S. Inutsuka, A. Kawamura, H. Yamamoto, T. Okuda, N. Mizuno, T. Onishi, A. Mizuno, and H. Ogawa. A Detailed Study of the Molecular and Atomic Gas toward the  $\gamma$ -Ray Supernova Remnant RX J1713.7-3946: Spatial TeV  $\gamma$ -Ray and Interstellar Medium Gas Correspondence. *Astrophysical Journal*, 746(1):82, February 2012.
- [80] Stefan Funk. The status of gamma-ray astronomy. *arXiv e-prints*, page arXiv:1204.4529, April 2012.
- [81] S. Gabici, F. A. Aharonian, and S. Casanova. Broad-band non-thermal emission from molecular clouds illuminated by cosmic rays from nearby supernova remnants. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 396(3):1629–1639, 06 2009.
- [82] Stefano Gabici, Carmelo Evoli, Daniele Gaggero, Paolo Lipari, Philipp Mertsch, Elena Orlando, Andrew Strong, and Andrea Vittino. The origin of Galactic cosmic rays: Challenges to the standard paradigm. *International Journal of Modern Physics D*, 28(15):1930022–339, January 2019.
- [83] B. M. Gaensler, G. J. Madsen, S. Chatterjee, and S. A. Mao. The Vertical Structure of Warm Ionised Gas in the Milky Way. *Publications of the Astron. Soc. of Australia*, 25(4):184–200, November 2008.
- [84] S. Galtier, S. V. Nazarenko, A. C. Newell, and A. Pouquet. A weak turbulence theory for incompressible magnetohydrodynamics. *Journal of Plasma Physics*, 63(5):447–488, June 2000.
- [85] S. Galtier, S. V. Nazarenko, A. C. Newell, and A. Pouquet. Anisotropic Turbulence of Shear-Alfvén Waves. *Astrophysical Journal, Letters*, 564(1):L49–L52, January 2002.
- [86] Philipp Girichidis, Thorsten Naab, Stefanie Walch, Michał Hanasz, Mordecai-Mark Mac Low, Jeremiah P. Ostriker, Andrea Gatto, Thomas Peters, Richard Wünsch,

- Simon C. O. Glover, Ralf S. Klessen, Paul C. Clark, and Christian Baczynski. Launching Cosmic-Ray-driven Outflows from the Magnetized Interstellar Medium. *Astrophysical Journal, Letters*, 816(2):L19, January 2016.
- [87] P. Goldreich and S. Sridhar. Toward a Theory of Interstellar Turbulence. II. Strong Alfvénic Turbulence. *Astrophysical journal*, 438:763, January 1995.
- [88] D. W. Goldsmith, H. J. Habing, and G. B. Field. Thermal Properties of Interstellar Gas Heated by Cosmic Rays. *Astrophysical journal*, 158:173, October 1969.
- [89] M. González, N. Vaytet, B. Commerçon, and J. Masson. Multigroup radiation hydrodynamics with flux-limited diffusion and adaptive mesh refinement. *Astronomy and Astrophysics*, 578:A12, June 2015.
- [90] R. Graham and W. D. Langer. Pressure Equilibrium of Finite-Size Clouds in the Interstellar Medium. *Astrophysical journal*, 179:469–482, January 1973.
- [91] Isabelle A. Grenier, John H. Black, and Andrew W. Strong. The Nine Lives of Cosmic Rays in Galaxies. *Annual Review of Astron and Astrophys*, 53:199–246, August 2015.
- [92] Andrew Guthrie, 1915 Guthrie, Andrew, and 1914 Wakerling, R. K. (Raymond Kornelius). *The Characteristics of electrical discharges in magnetic fields*. New York : McGraw-Hill, 1st ed edition, 1949. Includes bibliographical references and index.
- [93] M. Hanasz, H. Lesch, T. Naab, A. Gawryszczak, K. Kowalik, and D. Wóltański. Cosmic Rays Can Drive Strong Outflows from Gas-rich High-redshift Disk Galaxies. *Astrophysical Journal, Letters*, 777(2):L38, November 2013.
- [94] Michał Hanasz, Dominik Wóltański, and Kacper Kowalik. Global Galactic Dynamo Driven by Cosmic Rays and Exploding Magnetized Stars. *Astrophysical Journal, Letters*, 706(1):L155–L159, November 2009.
- [95] T. W. Hartquist and G. E. Morfill. Evidence for the stochastic acceleration of cosmic rays in supernova remnants. *Astrophysical journal*, 266:271–275, March 1983.
- [96] K. Hasselmann and G. Wibberenz. A Note on the Parallel Diffusion Coefficient. *Astrophysical journal*, 162:1049, December 1970.
- [97] C. Heiles and R. Crutcher. *Magnetic Fields in Diffuse HI and Molecular Clouds*, volume 664, page 137. 2005.
- [98] Carl Heiles and T. H. Troland. The Millennium Arecibo 21 Centimeter Absorption-Line Survey. I. Techniques and Gaussian Fits. *Astrophysical Journal, Supplements*, 145(2):329–354, April 2003.

- [99] Patrick Hennebelle and Gilles Chabrier. Analytical Theory for the Initial Mass Function: CO Clumps and Prestellar Cores. *Astrophysical journal*, 684(1):395–410, September 2008.
- [100] Patrick Hennebelle and Gilles Chabrier. Analytical Star Formation Rate from Gravoturbulent Fragmentation. *Astrophysical Journal, Letters*, 743(2):L29, December 2011.
- [101] Patrick Hennebelle and Edith Falgarone. Turbulent molecular clouds. *Astronomy and Astrophysics Reviews*, 20:55, November 2012.
- [102] Victor Hess. On the observations of the penetrating radiation during seven balloon flights, 2018.
- [103] Victor F. Hess. Über Beobachtungen der durchdringenden Strahlung bei sieben Freiballonfahrten. *Phys. Z.*, 13:1084–1091, 1912.
- [104] Mark H. Heyer and Christopher M. Brunt. The Universality of Turbulence in Galactic Molecular Clouds. *Astrophysical Journal, Letters*, 615(1):L45–L48, November 2004.
- [105] Cole Holcomb and Anatoly Spitkovsky. On the Growth and Saturation of the Gyroresonant Streaming Instabilities. *Astrophysical journal*, 882(1):3, September 2019.
- [106] Philip F. Hopkins, Jonathan Squire, T. K. Chan, Eliot Quataert, Suoqing Ji, Dusan Keres, and Claude-Andre Faucher-Giguere. Testing Physical Models for Cosmic Ray Transport Coefficients on Galactic Scales: Self-Confinement and Extrinsic Turbulence at GeV Energies. *arXiv e-prints*, page arXiv:2002.06211, February 2020.
- [107] Martin Houde, Andrew Fletcher, Rainer Beck, Roger H. Hildebrand, John E. Vaillancourt, and Jeroen M. Stil. Characterizing Magnetized Turbulence in M51. *Astrophysical journal*, 766(1):49, March 2013.
- [108] Martin Houde, Charles L. H. Hull, Richard L. Plambeck, John E. Vaillancourt, and Roger H. Hildebrand. Dispersion of Magnetic Fields in Molecular Clouds. IV. Analysis of Interferometry Data. *Astrophysical journal*, 820(1):38, March 2016.
- [109] F. Hoyle and G. R. A. Ellis. On the Existence of an Ionized Layer about the Galactic Plane. *Australian Journal of Physics*, 16:1, March 1963.
- [110] P. D. Hudson. Reflection of charged particles by plasma shocks. *Monthly Notices of the RAS*, 131:23, January 1965.
- [111] Tsuyoshi Inoue, Ryo Yamazaki, Shu ichiro Inutsuka, and Yasuo Fukui. TOWARD UNDERSTANDING THE COSMIC-RAY ACCELERATION AT YOUNG SUPERNOVA REMNANTS INTERACTING WITH INTERSTELLAR CLOUDS:

- POSSIBLE APPLICATIONS TO RX j1713.7–3946. *The Astrophysical Journal*, 744(1):71, dec 2011.
- [112] P. S. Iroshnikov. Turbulence of a Conducting Fluid in a Strong Magnetic Field. *Astronomicheskii Zhurnal*, 40:742, Jan 1963.
- [113] A. V. Ivlev, M. Padovani, D. Galli, and P. Caselli. Interstellar Dust Charging in Dense Molecular Clouds: Cosmic Ray Effects. *Astrophysical journal*, 812(2):135, October 2015.
- [114] P. Jean, W. Gillard, A. Marcowith, and K. Ferrière. Positron transport in the interstellar medium. *Astronomy and Astrophysics*, 508(3):1099–1116, December 2009.
- [115] J. R. Jokipii. Cosmic-Ray Propagation. I. Charged Particles in a Random Magnetic Field. *Astrophysical journal*, 146:480, November 1966.
- [116] J. R. Jokipii. Propagation of cosmic rays in the solar wind. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 9:27–87, January 1971.
- [117] Terry Jay Jones. Infrared Polarimetry and the Interstellar Magnetic Field. *Astrophysical journal*, 346:728, November 1989.
- [118] Spurk Joseph and Aksel Nuri. *Fluid Mechanics*. 2008.
- [119] Jongsoo Kim and Dongsu Ryu. Density Power Spectrum of Compressible Hydrodynamic Turbulent Flows. *Astrophysical Journal, Letters*, 630(1):L45–L48, Sep 2005.
- [120] Woong-Tae Kim, Eve C. Ostriker, and James M. Stone. Three-dimensional Simulations of Parker, Magneto-Jeans, and Swing Instabilities in Shearing Galactic Gas Disks. *Astrophysical journal*, 581(2):1080–1100, December 2002.
- [121] John G. Kirk, Reinhard Schlickeiser, and Peter Schneider. Cosmic-Ray Transport in Accelerating Flows. *Astrophysical journal*, 328:269, May 1988.
- [122] Ralf S. Klessen and Simon C. O. Glover. Physical processes in the interstellar medium, 2014.
- [123] A. Kolmogorov. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds' Numbers. *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, 30:301–305, Jan 1941.
- [124] Robert H. Kraichnan. Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence. *The Physics of Fluids*, 8(7):1385–1387, 1965.
- [125] Vinod Krishan. *Physics of Partially Ionized Plasmas*. Cambridge Atmospheric and Space Science Series. Cambridge University Press, 2016.

- [126] R. M. Kulsrud. Propagation of cosmic rays through a plasma. In A. Reiz and T. Andersen, editors, *Astronomical Papers Dedicated to Bengt Stromgren*, pages 317–326, January 1978.
- [127] R. M. Kulsrud and C. J. Cesarsky. The Effectiveness of Instabilities for the Confinement of High Energy Cosmic Rays in the Galactic Disk. *Astrophysics Letters*, 8:189, March 1971.
- [128] Russell Kulsrud and William P. Pearce. The Effect of Wave-Particle Interactions on the Propagation of Cosmic Rays. *Astrophysical journal*, 156:445, May 1969.
- [129] P. O. Lagage and C. J. Cesarsky. The maximum energy of cosmic rays accelerated by supernova shocks. *Astronomy and Astrophysics*, 125:249–257, September 1983.
- [130] L. D. Landau. On the vibrations of the electronic plasma. *J. Phys.(USSR)*, 10:25–34, 1946. [Zh. Eksp. Teor. Fiz.16,574(1946)].
- [131] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. 1987.
- [132] Lev Davidovich Landau. On the vibrations of the electronic plasma. *Yad. Fiz.*, 10:25, 1946.
- [133] R. B. Larson. Stellar kinematics and interstellar turbulence. *Monthly Notices of the RAS*, 186:479–490, February 1979.
- [134] R. B. Larson. Turbulence and star formation in molecular clouds. *Monthly Notices of the RAS*, 194:809–826, March 1981.
- [135] P. D. Lax and R. D. Richtmyer. Survey of the stability of linear finite difference equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 9(2):267–293, 1956.
- [136] A. Lazarian. Tracing magnetic fields with aligned grains. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 106:225–256, July 2007.
- [137] A. Lazarian. Damping of Alfvén Waves by Turbulence and Its Consequences: From Cosmic-ray Streaming to Launching Winds. *Astrophysical journal*, 833(2):131, December 2016.
- [138] A. Lazarian and A. Beresnyak. MHD Turbulence: Properties of Alfvén, Slow and Fast Modes. *arXiv e-prints*, pages astro-ph/0505577, May 2005.
- [139] A. Lazarian and Ethan T. Vishniac. Reconnection in a Weakly Stochastic Field. *Astrophysical journal*, 517(2):700–718, Jun 1999.
- [140] M. R. M. Leão, E. M. de Gouveia Dal Pino, D. Falceta-Gonçalves, C. Melioli, and F. G. Geraissate. Local star formation triggered by SN shocks in magnetized diffuse neutral clouds. In Klaus G. Strassmeier, Alexander G. Kosovichev, and John E. Beckman, editors, *Cosmic Magnetic Fields: From Planets, to Stars and Galaxies*, volume 259 of *IAU Symposium*, pages 105–106, April 2009.

- [141] M. Nicole Lemaster and James M. Stone. Density Probability Distribution Functions in Supersonic Hydrodynamic and MHD Turbulence. *Astrophysical Journal, Letters*, 682(2):L97, August 2008.
- [142] I. Lerche. Unstable Magnetosonic Waves in a Relativistic Plasma. *Astrophysical journal*, 147:689, February 1967.
- [143] Yoram Lithwick and Peter Goldreich. Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence in Interstellar Plasmas. *Astrophysical journal*, 562(1):279–296, November 2001.
- [144] C. H. Lyu. A Study of Physical Conditions, Radiative Transfer and Shocks in the Interstellar Medium. In *American Astronomical Society Meeting Abstracts #180*, volume 180 of *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, page 53.01, May 1992.
- [145] Mordecai-Mark Mac Low and Ralf S. Klessen. Control of star formation by supersonic turbulence. *Reviews of Modern Physics*, 76(1):125–194, January 2004.
- [146] Ken Makino, Yutaka Fujita, Kumiko K. Nobukawa, Hironori Matsumoto, and Yutaka Ohira. Interaction between molecular clouds and MeV-TeV cosmic-ray protons escaped from supernova remnants. *Publications of the ASJ*, 71(4):78, August 2019.
- [147] M. A. Malkov, P. H. Diamond, and R. Z. Sagdeev. On the Gamma-Ray Spectra Radiated by Protons Accelerated in Supernova Remnant Shocks near Molecular Clouds: The case of Supernova Remnant RX J1713.7-3946. *Astrophysical Journal, Letters*, 624(1):L37–L40, May 2005.
- [148] M. A. Malkov, P. H. Diamond, R. Z. Sagdeev, F. A. Aharonian, and I. V. Moskalenko. Analytic Solution for Self-regulated Collective Escape of Cosmic Rays from Their Acceleration Sites. *Astrophysical journal*, 768(1):73, May 2013.
- [149] A. Marcowith, A. Bret, A. Bykov, M. E. Dieckman, L. O’C Drury, B. Lembège, M. Lemoine, G. Morlino, G. Murphy, G. Pelletier, I. Plotnikov, B. Reville, M. Riquelme, L. Sironi, and A. Stockem Novo. The microphysics of collisionless shock waves. *Reports on Progress in Physics*, 79(4):046901, April 2016.
- [150] Alexandre Marcowith, Vikram V. Dwarkadas, Matthieu Renaud, Vincent Tatischeff, and Gwenael Giacinti. Core-collapse supernovae as cosmic ray sources. *Monthly Notices of the RAS*, 479(4):4470–4485, October 2018.
- [151] J. S. Mathis, W. Rumpl, and K. H. Nordsieck. The size distribution of interstellar grains. *Astrophysical journal*, 217:425–433, October 1977.
- [152] C. McKee. Dust Destruction in the Interstellar Medium. In Louis J. Allamandola and A. G. G. M. Tielens, editors, *Interstellar Dust*, volume 135 of *IAU Symposium*, page 431, January 1989.

- [153] C. F. McKee and J. P. Ostriker. A theory of the interstellar medium: three components regulated by supernova explosions in an inhomogeneous substrate. *Astrophysical journal*, 218:148–169, November 1977.
- [154] Christopher F. McKee and Eve C. Ostriker. Theory of Star Formation. *Annual Review of Astron and Astrophys*, 45(1):565–687, September 2007.
- [155] Anthony H. Minter and Steven R. Spangler. Observation of Turbulent Fluctuations in the Interstellar Plasma Density and Magnetic Field on Spatial Scales of 0.01 to 100 Parsecs. *Astrophysical journal*, 458:194, February 1996.
- [156] M.-A. Miville-Deschênes, P.-A. Duc, F. Marleau, J.-C. Cuillandre, P. Didelon, S. Gwyn, and E. Karabal. Probing interstellar turbulence in cirrus with deep optical imaging: no sign of energy dissipation at 0.01 pc scale. *Astronomy & Astrophysics*, 593:A4, Aug 2016.
- [157] Takahiro Miyoshi and Kanya Kusano. A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 208(1):315–344, September 2005.
- [158] H. K. Moffatt. Introduction to plasma physics. by w. b. thompson. pergamon press, 1962. 256pp. 23. 10s. *Journal of Fluid Mechanics*, 16(3):475–476, 1963.
- [159] Giovanni Morlino. High-energy cosmic rays from supernovae. *Handbook of Supernovae*, page 1711–1736, 2017.
- [160] L. Nava, S. Gabici, A. Marcowith, G. Morlino, and V. S. Ptuskin. Non-linear diffusion of cosmic rays escaping from supernova remnants - I. The effect of neutrals. *Monthly Notices of the RAS*, 461(4):3552–3562, October 2016.
- [161] L. Nava, S. Recchia, S. Gabici, A. Marcowith, L. Brahim, and V. Ptuskin. Non-linear diffusion of cosmic rays escaping from supernova remnants - II. Hot ionized media. *Monthly Notices of the RAS*, 484(2):2684–2691, April 2019.
- [162] David A. Neufeld, Mark G. Wolfire, and Peter Schilke. The Chemistry of Fluorine-bearing Molecules in Diffuse and Dense Interstellar Gas Clouds. *Astrophysical journal*, 628(1):260–274, July 2005.
- [163] C. S. Ng and A. Bhattacharjee. Interaction of Shear-Alfvén Wave Packets: Implication for Weak Magnetohydrodynamic Turbulence in Astrophysical Plasmas. *Astrophysical journal*, 465:845, July 1996.
- [164] C. A. Nolan, C. Federrath, and R. S. Sutherland. The density variance-Mach number relation in isothermal and non-isothermal adiabatic turbulence. *Monthly Notices of the RAS*, 451(2):1380–1389, August 2015.



- [165] L O’C Drury, D C Ellison, F A Aharonian, E Berezhko, A Bykov, A Decourchelle, R Diehl, G Meynet, E Parizot, J Raymond, S Reynolds, and S Spangler. Tests of Galactic Cosmic Ray Source Models. *arXiv e-prints*, pages astro-ph/0106046, June 2001.
- [166] Yutaka Ohira, Kohta Murase, and Ryo Yamazaki. Gamma-rays from molecular clouds illuminated by cosmic rays escaping from interacting supernova remnants. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, page no–no, Oct 2010.
- [167] Yutaka Ohira, Ryo Yamazaki, Norita Kawanaka, and Kunihito Ioka. Escape of cosmic-ray electrons from supernova remnants. *Monthly Notices of the RAS*, 427(1):91–102, November 2012.
- [168] D. Pacini. La radiazione penetrante alla superficie ed in seno alle acque. *Il Nuovo Cimento*, 3(1):93–100, December 1912.
- [169] Paolo Padoan and Åke Nordlund. A Super-Alfvénic Model of Dark Clouds. *Astrophysical journal*, 526(1):279–294, November 1999.
- [170] M. Padovani, D. Galli, and A. E. Glassgold. Cosmic-ray ionization of molecular clouds. *Astronomy and Astrophysics*, 501(2):619–631, July 2009.
- [171] Marco Padovani, Alexei V. Ivlev, Daniele Galli, and Paola Caselli. Cosmic-ray ionisation in circumstellar discs. *Astronomy and Astrophysics*, 614:A111, June 2018.
- [172] M. Pais, C. Pfrommer, K. Ehlert, and R. Pakmor. The effect of cosmic ray acceleration on supernova blast wave dynamics. *Monthly Notices of the RAS*, 478(4):5278–5295, August 2018.
- [173] E. Parizot, A. Marcowith, E. van der Swaluw, A. M. Bykov, and V. Tatischeff. Superbubbles and energetic particles in the Galaxy. I. Collective effects of particle acceleration. *Astronomy and Astrophysics*, 424:747–760, September 2004.
- [174] P. Picozza, A.M. Galper, G. Castellini, O. Adriani, F. Altamura, M. Ambriola, G.C. Barbarino, A. Basili, G.A. Bazilevskaja, R. Bencardino, M. Boezio, E.A. Bogomolov, L. Bonechi, M. Bongi, L. Bongiorno, V. Bonvicini, F. Cafagna, D. Campana, P. Carlson, M. Casolino, C. De Marzo, M.P. De Pascale, G. De Rosa, D. Fedele, P. Hofverberg, S.V. Koldashov, S.Yu. Krutkov, A.N. Kvashnin, J. Lund, J. Lundquist, O. Maksumov, V. Malvezzi, L. Marcelli, W. Menn, V.V. Mikhailov, M. Minori, S. Misin, E. Mocchiutti, A. Morselli, N.N. Nikonov, S. Orsi, G. Osteria, P. Papini, M. Pearce, M. Ricci, S.B. Ricciarini, M.F. Runtso, S. Russo, M. Simon, R. Sparvoli, P. Spillantini, Yu.I. Stozhkov, E. Taddei, A. Vacchi, E. Vannuccini, S.A. Voronov, Y.T. Yurkin, G. Zampa, N. Zampa, and V.G. Zverev. Pamela – a payload for antimatter matter exploration and light-nuclei astrophysics. *Astroparticle Physics*, 27(4):296 – 315, 2007.

- [175] Planck Collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., Alves, M. I. R., Arnaud, M., Arzoumanian, D., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Banday, A. J., Barreiro, R. B., Bartolo, N., Battaner, E., Benabed, K., Benoît, A., Benoit-Lévy, A., Bernard, J.-P., Bersanelli, M., Bielewicz, P., Bock, J. J., Bonavera, L., Bond, J. R., Borrill, J., Bouchet, F. R., Boulanger, F., Bracco, A., Burigana, C., Calabrese, E., Cardoso, J.-F., Catalano, A., Chiang, H. C., Christensen, P. R., Colombo, L. P. L., Combet, C., Couchot, F., Crill, B. P., Curto, A., Cuttaia, F., Danese, L., Davies, R. D., Davis, R. J., de Bernardis, P., de Rosa, A., de Zotti, G., Delabrouille, J., Dickinson, C., Diego, J. M., Dole, H., Donzelli, S., Doré, O., Douspis, M., Ducout, A., Dupac, X., Efstathiou, G., Elsner, F., Enßlin, T. A., Eriksen, H. K., Falceta-Gonçalves, D., Falgarone, E., Ferrière, K., Finelli, F., Forni, O., Frailis, M., Fraisse, A. A., Franceschi, E., Frejsel, A., Galeotta, S., Galli, S., Ganga, K., Ghosh, T., Giard, M., Gjerløw, E., González-Nuevo, J., Górski, K. M., Gregorio, A., Gruppuso, A., Gudmundsson, J. E., Guillet, V., Harrison, D. L., Helou, G., Hennebelle, P., Henrot-Versillé, S., Hernández-Monteagudo, C., Herranz, D., Hildebrandt, S. R., Hivon, E., Holmes, W. A., Hornstrup, A., Huppenberger, K. M., Hurier, G., Jaffe, A. H., Jaffe, T. R., Jones, W. C., Juvela, M., Keihänen, E., Keskitalo, R., Kisner, T. S., Knoche, J., Kunz, M., Kurki-Suonio, H., Lagache, G., Lamarre, J.-M., Lasenby, A., Lattanzi, M., Lawrence, C. R., Leonardi, R., Levrier, F., Liguori, M., Lilje, P. B., Linden-Vørnle, M., López-Cañiego, M., Lubin, P. M., Macías-Pérez, J. F., Maino, D., Mandolesi, N., Mangilli, A., Maris, M., Martin, P. G., Martínez-González, E., Masi, S., Matarrese, S., Melchiorri, A., Mendes, L., Mennella, A., Migliaccio, M., Miville-Deschênes, M.-A., Moneti, A., Montier, L., Morgante, G., Mortlock, D., Munshi, D., Murphy, J. A., Naselsky, P., Nati, F., Netterfield, C. B., Noviello, F., Novikov, D., Novikov, I., Oppermann, N., Oxborrow, C. A., Pagano, L., Pajot, F., Paladini, R., Paoletti, D., Pasian, F., Perotto, L., Pettorino, V., Piacentini, F., Piat, M., Pierpaoli, E., Pietrobon, D., Plaszczyński, S., Pointecouteau, E., Polenta, G., Ponthieu, N., Pratt, G. W., Prunet, S., Puget, J.-L., Rachen, J. P., Reinecke, M., Remazeilles, M., Renault, C., Renzi, A., Ristorcelli, I., Rocha, G., Rossetti, M., Roudier, G., Rubiño-Martín, J. A., Rusholme, B., Sandri, M., Santos, D., Savelainen, M., Savini, G., Scott, D., Soler, J. D., Stolyarov, V., Sudiwala, R., Sutton, D., Suur-Uski, A.-S., Sygnet, J.-F., Tauber, J. A., Terenzi, L., Toffolatti, L., Tomasi, M., Tristram, M., Tucci, M., Umama, G., Valenziano, L., Valiviita, J., Van Tent, B., Vielva, P., Villa, F., Wade, L. A., Wandelt, B. D., Wehus, I. K., Ysard, N., Yvon, D., and Zonca, A. Planck intermediate results - xxxv. probing the role of the magnetic field in the formation of structure in molecular clouds. *A&A*, 586:A138, 2016.
- [176] V. S. Ptuskin, V. N. Zirakashvili, and A. A. Plesser. Non-linear diffusion of cosmic rays. *Advances in Space Research*, 42(3):486–490, August 2008.
- [177] R. J. Rand and A. G. Lyne. New Rotation Measures of Distant Pulsars in the Inner Galaxy and Magnetic Field Reversals. *Monthly Notices of the RAS*, 268:497,

May 1994.

- [178] S. Recchia and S. Gabici. Non-linear acceleration at supernova remnant shocks and the hardening in the cosmic ray spectrum. *Monthly Notices of the RAS*, 474(1):L42–L46, February 2018.
- [179] R. Retes-Romero, Y. D. Mayya, A. Luna, and L. Carrasco. Infrared Dark Clouds and High-mass Star Formation Activity in Galactic Molecular Clouds. *Astrophysical journal*, 897(1):53, July 2020.
- [180] B. Reville, J. G. Kirk, and P. Duffy. Steady-State Solutions in Nonlinear Diffusive Shock Acceleration. *Astrophysical journal*, 694(2):951–958, April 2009.
- [181] Christopher Reynolds. Editorial: Legislation and the new public health: Introduction. *Community Health Studies*, 13(4):397–402, 1989.
- [182] Lewis F. Richardson. The Speckled Wave Front of Light. *Nature*, 109(2743):683, May 1922.
- [183] W. W. Roberts. Large-Scale Shock Formation in Spiral Galaxies and its Implications on Star Formation. *Astrophysical journal*, 158:123, October 1969.
- [184] D. Rodgers-Lee, A. M. Taylor, T. P. Ray, and T. P. Downes. The ionizing effect of low-energy cosmic rays from a class II object on its protoplanetary disc. *Monthly Notices of the RAS*, 472(1):26–38, November 2017.
- [185] Igor Rogachevskii, Nathan Kleorin, Axel Brandenburg, and David Eichler. Cosmic-Ray Current-driven Turbulence and Mean-field Dynamo Effect. *Astrophysical journal*, 753(1):6, July 2012.
- [186] Soonyoung Roh, Shu-ichiro Inutsuka, and Tsuyoshi Inoue. Diffusion of cosmic rays in a multiphase interstellar medium swept-up by a supernova remnant blast wave. *Astroparticle Physics*, 73:1–7, January 2016.
- [187] Bruno Rossi. On the Magnetic Deflection of Cosmic Rays. *Physical Review*, 36(3):606–606, August 1930.
- [188] Nirupam Roy, Leshma Peedikakkandy, and Jayaram N. Chengalur. Turbulence measurements from HI absorption spectra. *Monthly Notices of the RAS*, 387(1):L18–L22, June 2008.
- [189] Mateusz Ruszkowski, H.-Y. Karen Yang, and Ellen Zweibel. GLOBAL SIMULATIONS OF GALACTIC WINDS INCLUDING COSMIC-RAY STREAMING. *The Astrophysical Journal*, 834(2):208, jan 2017.
- [190] Salvati, M. The local galactic magnetic field in the direction of geminga. *A&A*, 513:A28, 2010.

- [191] E. Saury, M. A. Miville-Deschênes, P. Hennebelle, E. Audit, and W. Schmidt. The structure of the thermally bistable and turbulent atomic gas in the local interstellar medium. *Astronomy and Astrophysics*, 567:A16, July 2014.
- [192] E. Schatzman. On the acceleration of particles in shock fronts. *Annales d’Astrophysique*, 26:234, February 1963.
- [193] E. Schilbach and S. Röser. On the origin of field O-type stars. *Astronomy and Astrophysics*, 489(1):105–114, October 2008.
- [194] Reinhard Schlickeiser. *Cosmic Ray Astrophysics*. 2002.
- [195] Reinhard Schlickeiser and James A. Miller. Quasi-linear Theory of Cosmic-Ray Transport and Acceleration: The Role of Oblique Magnetohydrodynamic Waves and Transit-Time Damping. *Astrophysical journal*, 492(1):352–378, January 1998.
- [196] W. Schmidt, C. Federrath, M. Hupp, S. Kern, and J. C. Niemeyer. Numerical simulations of compressively driven interstellar turbulence. I. Isothermal gas. *Astronomy and Astrophysics*, 494(1):127–145, January 2009.
- [197] Scicluna, P. and Siebenmorgen, R. Extinction and dust properties in a clumpy medium. *A&A*, 584:A108, 2015.
- [198] C. G. Seab. Grain destruction and growth. In Mark E. Bailey and David A. Williams, editors, *Dust in the Universe*, pages 303–326, January 1988.
- [199] D. Seifried, W. Schmidt, and J. C. Niemeyer. Forced turbulence in thermally bistable gas: a parameter study. *Astronomy and Astrophysics*, 526:A14, February 2011.
- [200] J. A. Sellwood and Steven A. Balbus. Differential Rotation and Turbulence in Extended H I Disks. *Astrophysical journal*, 511(2):660–665, February 1999.
- [201] E. S. Seo, H. S. Ahn, J. J. Beatty, S. Coutu, M. J. Choi, M. A. DuVernois, O. Ganel, T. G. Kang, K. C. Kim, M. H. Lee, L. Lutz, P. S. Marrocchesi, S. Minnick, K. W. Min, S. Nutter, H. Park, I. H. Park, E. Schindhelm, R. Sina, S. Swordy, J. Wu, and J. Yang. Cosmic-ray energetics and mass (CREAM) balloon project. *Advances in Space Research*, 33(10):1777–1785, January 2004.
- [202] Andreas Shalchi. *Nonlinear Cosmic Ray Diffusion Theories*, volume 362. 2009.
- [203] Prateek Sharma, Phillip Colella, and Daniel F. Martin. Numerical Implementation of Streaming Down the Gradient: Application to Fluid Modeling of Cosmic Rays and Saturated Conduction. *arXiv e-prints*, page arXiv:0909.5426, September 2009.
- [204] C. Shneider, M. Haverkorn, A. Fletcher, and A. Shukurov. Constraining regular and turbulent magnetic field strengths in M 51 via Faraday depolarization. *Astronomy and Astrophysics*, 568:A83, August 2014.

- [205] J. M. Shull and C. F. McKee. Theoretical models of interstellar shocks. I. *Astrophysical journal*, 227:131–149, January 1979.
- [206] J. Skilling. Cosmic ray streaming - I. Effect of Alfvén waves on particles. *Monthly Notices of the RAS*, 172:557–566, September 1975.
- [207] J. Skilling. Cosmic ray streaming - II. Effect of particles on Alfvén waves. *Monthly Notices of the RAS*, 173:245–254, November 1975.
- [208] J. Skilling. Cosmic ray streaming - III. Self-consistent solutions. *Monthly Notices of the RAS*, 173:255–269, November 1975.
- [209] Theodore P. Snow and Benjamin J. McCall. Diffuse Atomic and Molecular Clouds. *Annual Review of Astron and Astrophys*, 44(1):367–414, September 2006.
- [210] R. Soler, M. Carbonell, J. L. Ballester, and J. Terradas. Alfvén Waves in a Partially Ionized Two-fluid Plasma. *Astrophysical journal*, 767(2):171, Apr 2013.
- [211] Roberto Soler, Marc Carbonell, and Jose Luis Ballester. Magnetoacoustic Waves in a Partially Ionized Two-fluid Plasma. *Astrophysical Journal, Supplements*, 209(1):16, Nov 2013.
- [212] P. M. Solomon, A. R. Rivolo, J. Barrett, and A. Yahil. Mass, Luminosity, and Line Width Relations of Galactic Molecular Clouds. *Astrophysical journal*, 319:730, August 1987.
- [213] L. Spitzer. *Physics of Fully Ionized Gases*. 1962.
- [214] Lyman Spitzer. Problems in Magneto-Fluid Dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 32(4):696–700, October 1960.
- [215] S. Sridhar and P. Goldreich. Toward a Theory of Interstellar Turbulence. I. Weak Alfvénic Turbulence. *Astrophysical journal*, 432:612, Sep 1994.
- [216] Andrew W. Strong, Igor V. Moskalenko, and Vladimir S. Ptuskin. Cosmic-Ray Propagation and Interactions in the Galaxy. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 57(1):285–327, November 2007.
- [217] Ralph S. Sutherland and Michael A. Dopita. Effects of Preionization in Radiative Shocks. I. Self-consistent Models. *Astrophysical Journal, Supplements*, 229(2):34, April 2017.
- [218] Vincent Tatischeff and Stefano Gabici. Particle Acceleration by Supernova Shocks and Spallogenic Nucleosynthesis of Light Elements. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 68(1):377–404, October 2018.
- [219] I. Telezhinsky, V. V. Dwarkadas, and M. Pohl. Time-dependent escape of cosmic rays from supernova remnants, and their interaction with dense media. *Astronomy and Astrophysics*, 541:A153, May 2012.

- [220] R. Teyssier. Cosmological hydrodynamics with adaptive mesh refinement. A new high resolution code called RAMSES. *Astronomy and Astrophysics*, 385:337–364, April 2002.
- [221] A. G. G. M. Tielens. *The Physics and Chemistry of the Interstellar Medium*. Cambridge University Press, 2005.
- [222] Lewi Tonks and Irving Langmuir. Oscillations in ionized gases. *Phys. Rev.*, 33:195–210, Feb 1929.
- [223] J. Kelly Truelove and Christopher F. McKee. Evolution of Nonradiative Supernova Remnants. *Astrophysical Journal, Supplements*, 120(2):299–326, February 1999.
- [224] V. N. Tsytovich. The Isotropization of Cosmic Rays. *Soviet Astronomy*, 10:419, December 1966.
- [225] G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein. On the theory of the brownian motion. *Phys. Rev.*, 36:823–841, Sep 1930.
- [226] I. H. Urch. Charged Particle Transport in Turbulent Magnetic Fields: The Perpendicular Diffusion Coefficient. *Astrophysics and Space Science*, 46(2):389–406, February 1977.
- [227] Sidney van den Bergh and Gustav A. Tammann. Galactic and extragalactic supernova rates. *Annual Review of Astron and Astrophys*, 29:363–407, January 1991.
- [228] Jacco Vink. The Kinematics of Kepler’s Supernova Remnant as Revealed by Chandra. *Astrophysical journal*, 689(1):231–241, December 2008.
- [229] H. J. Völk, E. G. Berezhko, and L. T. Ksenofontov. Erratum: Magnetic field amplification in Tycho and other shell-type supernova remnants. *Astronomy and Astrophysics*, 444(3):893–893, December 2005.
- [230] D. G. Wentzel. Cosmic-ray propagation in the Galaxy: collective effects. *Annual Review of Astron and Astrophys*, 12:71–96, January 1974.
- [231] Donat G. Wentzel. Motion across Magnetic Discontinuities and Fermi Acceleration of Charged Particles. *Astrophysical journal*, 140:1013, October 1964.
- [232] Gregor Wentzel. Eine verallgemeinerung der quantenbedingungen für die zwecke der wellenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 38(6):518–529, Jun 1926.
- [233] Richard Wielebinski. *Magnetic Fields in the Milky Way, Derived from Radio Continuum Observations and Faraday Rotation Studies*, volume 664, page 89. 2005.
- [234] Joshua Wiener, S. Peng Oh, and Fulai Guo. Cosmic ray streaming in clusters of galaxies. *Monthly Notices of the RAS*, 434(3):2209–2228, September 2013.

- [235] Joshua Wiener, Christoph Pfrommer, and S. Peng Oh. Cosmic ray-driven galactic winds: streaming or diffusion? *Monthly Notices of the RAS*, 467(1):906–921, May 2017.
- [236] John G. Wilson. *Cosmic rays / [by] J. G. Wilson*. [Distributed by] Chapman and Hall London ; Wykeham Publications ; Andover, 1976.
- [237] Siyao Xu, A. Lazarian, and Huirong Yan. The Line Width Difference of Neutrals and Ions Induced by MHD Turbulence. *Astrophysical journal*, 810(1):44, September 2015.
- [238] Siyao Xu, Huirong Yan, and A. Lazarian. Damping of Magnetohydrodynamic Turbulence in Partially Ionized Plasma: Implications for Cosmic Ray Propagation. *Astrophysical journal*, 826(2):166, August 2016.
- [239] Huirong Yan and A. Lazarian. Cosmic Ray Transport Through Gyroresonance Instability in Compressible Turbulence. *Astrophysical journal*, 731(1):35, April 2011.
- [240] Huirong Yan, A. Lazarian, and B. T. Draine. Dust Dynamics in Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence. *Astrophysical journal*, 616(2):895–911, Dec 2004.
- [241] Ming Zhang, Pingbing Zuo, and Nikolai Pogorelov. HELIOSPHERIC INFLUENCE ON THE ANISOTROPY OF TeV COSMIC RAYS. *The Astrophysical Journal*, 790(1):5, jun 2014.
- [242] V. N. Zirakashvili and V. S. Ptuskin. Diffusive Shock Acceleration with Magnetic Amplification by Nonresonant Streaming Instability in Supernova Remnants. *Astrophysical journal*, 678(2):939–949, May 2008.
- [243] V. N. Zirakashvili, V. S. Ptuskin, and H. J. Völk. Modeling bell’s nonresonant cosmic-ray instability. *The Astrophysical Journal*, 678(1):255–261, May 2008.

# Publications

## Articles publiés dans des revues à comité de lecture

1. *Non-linear diffusion of cosmic rays escaping from supernova remnants - II. Hot ionized media*  
Nava L., Recchia S., Gabici S., Marcowith A., **Brahimi L.**, 2019, MNRAS, 484, 2, arXiv:1903.03193
2. *Shock-accelerated cosmic rays and streaming instability in the adaptive mesh refinement code Ramses*  
Dubois Y., Commerçon B., Marcowith A., **Brahimi L.**, 2019, A&A, 631, arXiv:1907.04300
3. *Nonlinear diffusion of cosmic rays escaping from supernova remnants: Cold partially neutral atomic and molecular phases*  
**Brahimi L.**, Marcowith A., Ptuskin V., 2020, A&A, 633, arXiv:1909.04530

## Articles soumis ou en préparation

1. *Cosmic-ray propagation in the bi-stable interstellar medium : II. Sub-grid Cosmic Rays diffusion coefficient and resonant Alfvén waves drift velocity terms*  
**Brahimi L.**, Commerçon B., Dubois Y., Marcowith A., *en préparation*
2. *Changes in cosmic-ray transport properties connect the high-energy features in the electron and proton data*  
Fornieri O., Gaggero D., Guberman D., **Brahimi L.**, Marcowith A., *soumis à ApJL*



# Nonlinear diffusion of cosmic rays escaping from supernova remnants: Cold partially neutral atomic and molecular phases

L. Brahimī<sup>1</sup>, A. Marcowith<sup>1</sup>, and V. S. Ptuskin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Univers et Particules de Montpellier (LUPM) Université Montpellier, CNRS/IN2P3, CC72, place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5, France

e-mail: [Loann.Brahimi@umontpellier.fr](mailto:Loann.Brahimi@umontpellier.fr)

<sup>2</sup> Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radiowave Propagation, 108840 Troitsk, Moscow, Russia

Received 24 June 2019 / Accepted 6 September 2019

## ABSTRACT

**Aims.** We aim to elucidate cosmic ray (CR) propagation in the weakly ionized environments of supernova remnants (SNRs) basing our analysis on the cosmic ray cloud (CRC) model.

**Methods.** We solved two transport equations simultaneously: one for the CR pressure and one for the Alfvén wave energy density where CRs are initially confined in the SNR shock. Cosmic rays trigger a streaming instability and produce slab-type resonant Alfvén modes. The self-generated turbulence is damped by ion-neutral collisions and by noncorrelated interaction with Alfvén modes generated at large scales.

**Results.** We show that CRs leaking in cold dense phases such as those found in cold neutral medium (CNM) and diffuse molecular medium (DiM) can still be confined over distances of a few tens of parsecs from the CRC center for a few thousand years. At 10 TeV, CR diffusion can be suppressed by two or three orders of magnitude. This effect results from a reduced ion-neutral collision damping in the decoupled regime. We calculate the grammage of CRs in these environments. We find that in both single and multi-phase setups at 10 GeV, CNM and DiM media can produce grammage in the range 10–20 g cm<sup>-2</sup> in the CNM and DiM phases. At 10 TeV, because of nonlinear propagation the grammage increases to values in the range 0.5–20 g cm<sup>-2</sup> in these two phases. We also present preliminary calculations in inhomogeneous interstellar medium combining two or three different phases where we obtain the same trends.

**Key words.** instabilities – turbulence – cosmic rays

## 1. Introduction

Cosmic rays (CRs) are a major component of the interstellar medium (ISM), along with the gas and magnetic field (Ferrière 2001), and have a non-negligible impact on the global dynamics of our galaxy (Grenier et al. 2015). Through their streaming they can drive galactic winds (Recchia et al. 2017; Girichidis et al. 2016). They contribute to the enrichment of the ISM in light elements by spallation and are also a strong source of ionization especially in the dense and cold ISM (Padovani et al. 2009). Furthermore, they may contribute to the turbulent dynamics of our galaxy through the generation of magnetic perturbations (Commerçon et al. 2019).

The origin of CRs is still under debate (Drury et al. 2001). Strong shocks in supernova remnants (SNRs) seem to be able to accelerate CRs via diffusive shock acceleration (DSA) up to a few hundred TeV (Lagage & Cesarsky 1983) or even to PeV at early times (when shock speeds  $v_{sh}$  are as high as 0.1 times the speed of light, e.g. Schure & Bell 2013). Once released into the ISM, CRs have a random walk induced by scattering off turbulent magnetic perturbations generated by large-scale plasma motions and/or by the waves that they self-generate while drifting at speeds greater than the local Alfvén speed (Wentzel 1968; Kulsrud & Pearce 1969; Skilling 1975; Yan & Lazarian 2004; Farmer & Goldreich 2004). However, currently there is no fully consistent theory capable of simultaneously explaining both CR acceleration at SNR shocks and their escape into the ISM (see Telezhinsky et al. 2012 for a discussion). Besides ionization studies, probes of ISM and CR interactions

are essentially based on gamma-ray observations, such as for example the recent H.E.S.S. Tcherenkov telescope observations from the forward shock of the SNR RX J 1713.7-3946 (H.E.S.S. Collaboration et al. 2018) or W 28 (Aharonian et al. 2008) which provide new constraints on the CR escape process.

The ISM is a very complex medium and the way it is structured is still an open question. It is accepted that the ISM can be modeled in terms of distinct phases in rough pressure equilibrium. Depending on the degree of ionization, we find first the ionized phases: the hot ionized medium (HIM) and the warm ionized medium (WIM), and then the partially ionized phases: the warm neutral medium (WNM), the cold neutral medium (CNM), the diffuse molecular medium (DiM), and molecular clouds (MCs); see e.g. (Field et al. 1969; McKee & Ostriker 1977; Reynolds 1989; Gaensler et al. 2008). Partially ionized phases cover a minor fraction of the galactic disk volume but contain the majority of the mass. Most of the ISM matter is concentrated in MCs, the birthplace of stars. In partially ionized medium, low-energy CRs constitute an important source of ionization (Phan et al. 2018)<sup>1</sup>, especially close to an accelerator where one can expect enhanced CR density for some amount of time (Vaupré et al. 2014; Nava et al. 2016). Cosmic rays can also exert a force on the gas through the production of magnetohydrodynamic (MHD) waves. The turbulent dynamics of WNM and CNM as well as MCs may be affected in

<sup>1</sup> Energetic particles with a kinetic energy in the range between MeV and 100 MeV for protons and 100 eV and keV for electrons (Padovani et al. 2009).

**Table 1.** Fiducial physical quantities for the WNM, CNM, and DiM phases adopted in this work.

Phase	WNM	CNM	DiM
$T$ [K]	$6 \times 10^3 - 1 \times 10^4$ ( $8 \times 10^3$ )	30–100 (50)	30–100 (50)
$B_0$ [ $\mu$ G]	5	6	6
$n_T$ [ $\text{cm}^{-3}$ ]	0.2–0.5 (0.35)	20–50 (30)	100–500 (300)
$X$	0.007–0.05 (0.02)	$4 \times 10^{-4} - 10^{-3}$ ( $8 \times 10^{-4}$ )	$10^{-4}$
$n_i$ [ $\text{cm}^{-3}$ ]	$7 \times 10^{-3}$	$2.4 \times 10^{-2}$	$3 \times 10^{-2}$
Neutral	93% HI + 7% He	93% HI + 7% He	93% (0.5HI + 0.5H <sub>2</sub> ) + 7% He
$\mu_n$ [ $m_p$ ]	1.21	1.21	1.67
Ion	H <sup>+</sup>	C <sup>+</sup>	C <sup>+</sup>
$\mu_i$ [ $m_p$ ]	1	12	12
$R$ [pc]	1–100	1–100	1–50

**Notes.**  $T$  is the gas temperature,  $B_0$  is the mean magnetic field strength,  $n_T = n_n + n_i$  is the total gas density,  $X$  is the gas ionization fraction,  $\mu_i$  ( $\mu_n$ ) is the mean ion (neutral) mass; see N16, Jean et al. (2009), Snow & McCall (2006) and Neufeld et al. (2005). Values between brackets are the mean values adopted for numerical application. See the text for the justification of the selected values of the phase size  $R$ .

the presence of an intense CR flux (Everett & Zweibel 2011; Commerçon et al. 2019).

In this paper, we particularly focus on the way CRs escape from SNR shocks into the ISM, the way they interact with the partially ionized ISM phases, and how their transport properties are modified in these media. Our model relies on the CR cloud model (CRC; see Sect. 2.2 for further details) proposed by Malkov et al. (2013), Ptuskin et al. (2008) and in Nava et al. (2016), referred to hereafter as N16. This study completes a parallel investigation of CR escape in the ionized ISM by Nava et al. (2019), referred to hereafter as N19. Cosmic rays at different energies escape from the remnant at different times depending on the properties of the ambient ISM. In this study we discuss three different escape models when radiative losses become important during SNR expansion. Depending on the local CR over pressure, CRs trigger a resonant streaming instability and produce magnetic fluctuations (Skilling 1971, 1975)<sup>2</sup>. We assume in this study that the amplitude of the self-generated waves is weak and treat the problem according to the quasi-linear theory of CR transport (Schlickeiser 2002). In partially ionized phases, the waves triggered by CRs are damped by ion-neutral collisions and by nonlinear interactions with the large-scale turbulence (see N16 and Farmer & Goldreich 2004). This work provides some answers to different open questions: For how long/far does a SNR produce CR over-density in the neutral/molecular ISM? What is the space-time-dependent rate of self-generated waves around a SNR accelerator? How can we evaluate the impact of CR self-confinement over the grammage (see also D’Angelo et al. 2016)? Over what distance should one account for the effect of stronger local CR gradients?

In Sect. 2 we present our model: we describe the properties of neutral ISM phases adopted in this study, we discuss the different wave-damping processes, we discuss the way CRs escape, and we generalize the work proposed by Malkov et al. (2013) and N16. In particular we propose variants of the escape model based on the work of Sutherland & Dopita (2017). In Sect. 3 we present our results for each escape model for one partic-

ular medium at different energies. In Sect. 4 we calculate the grammage of CRs produced during their propagation close to their sources also considering a setup including multiple phases. Finally, we conclude in Sect. 5.

## 2. The model

### 2.1. Partially ionized interstellar medium phases

#### 2.1.1. Phase properties

We first describe the main physical properties of weakly ionized ISM phases. We start from the assumption that the weakly ionized ISM is composed of hydrogen and helium with a density ratio  $n_{\text{H}}/n_{\text{He}} \approx 13.28$ . The total plasma density is given by  $n_T = n_{\text{H}} + n_{\text{He}}$ . For each phase, we consider a thermal plasma using a two-fluid MHD model: each fluid (neutral and ionized) is composed of a dominant species described by its mean mass ( $\mu_i = m_i/m_{\text{H}}$  and  $\mu_n = m_n/m_{\text{H}}$ ) and its density ( $n_n$  and  $n_i$ ). We define the ionization fraction  $X = n_i/(n_i + n_n)$  of the plasma. We consider the plasma to be filled with a magnetic field composed of a regular and a turbulent component. The turbulent component results from an injection of free energy at large scales  $L \approx 50$ –100 pc (see N16). The essential chemical and physical properties of cold ISM have been taken from the work of Snow & McCall (2006) and are summarized in Table 1. These values are subject to some uncertainties that are also included in the table.

*Neutral atomic phases.* The WNM and CNM are thermally stable solutions of the thermal instability together with the WIM (Field et al. 1969). Both phases are composed of atomic gas. The WNM and CNM are detected by HI emission and absorption line surveys. For both WNM and CNM, we assume that the dominant neutral species is atomic hydrogen (HI) while the dominant ion is ionized hydrogen (HII) in the WNM and ionized carbon (CII) in CNM, respectively (Snow & McCall 2006). The WNM is a relatively low density medium ( $n_T = 0.2$ – $0.5 \text{ cm}^{-3}$ ) with a high equilibrium kinetic temperature (6 000–10 000 K) whereas CNM is denser ( $n_T = 20$ – $50 \text{ cm}^{-3}$ ) and colder ( $T = 30$ –100 K). The typical size of the phases are difficult to derive: 21 cm line surveys give empirical relations between the gas velocity dispersion  $\sigma$  and the typical size  $R$  of the region, suggestive of a turbulent cascade

<sup>2</sup> We restrict our investigation to the case of the generation of resonant slab Alfvén waves, and defer to a future study the case of the generation of other types of kinetic or convective instabilities; see however Inoue (2019).

with a scaling  $\sigma \propto R^k$ , with  $k \sim 0.35$  (Larson 1979; Roy et al. 2008). These analyses reconstruct  $\sigma$  from column density and line spin temperature measurements and have  $R$  ranging between  $10^{-2}$  and 100 pc. Another aspect is that these media are not isotropic in shape but rather show elongated structures (Heiles & Troland 2003). The aspect ratio between parallel and perpendicular length scales can be up to two orders of magnitude. We then decide to keep a maximum length scale for these two phases of  $\sim 100$  pc which is close to the typical size of large-scale turbulent motion injection. We fix the phase size interval to  $R \sim 1\text{--}100$  pc, smaller scales being of little interest in the framework of this study which involves CRC with sizes larger than 1 pc.

*Diffuse molecular medium.* A fundamental difference between cold atomic and cold molecular phases is the level of penetrating UV radiation (Snow & McCall 2006). As UV radiation decomposes molecules, molecular clouds need to be surrounded by a shielding medium in order to conserve their chemical equilibrium. This shield ensures a transition from an external part composed of atomic gas (HI dominated) to a molecular interior ( $\text{H}_2$  dominated) and has a total minimal visual extinction magnitude of 0.2. For this medium, we assume a neutral fluid composed of a mixture of 50% neutral hydrogen (HI) and 50% molecular hydrogen ( $\text{H}_2$ ). As enough interstellar radiation is present to photo-dissociate CO molecules, the dominant ionized species is CII as in the CNM phase. The DiM is also characterized by higher density ( $n_T = 100\text{--}500 \text{ cm}^{-3}$ ); see Snow & McCall (2006). Its characteristic size is not well constrained; we consider typical sizes derived by Solomon et al. (1987) from CO surveys between 1 pc to 50 pc, the upper limit corresponding to giant molecular clouds.

We note that the properties of the phases and the dimension of our model constrain the number of cases we can study in our work. We use a model of CR propagation restricted to the propagation of CRs along a background magnetic field, hence a 1D model. This is the *flux tube approximation* (see Sect. 2.2), which imposes that the respective sizes of the phase and the CRC be  $R_{\text{phase}} > R_{\text{CRC}}(t_{\text{esc}})$ , where  $t_{\text{esc}}$  is the time at which CRs at a particular energy escape from the CRC. We verify that this condition applies a fortiori to each phase in our study. Another aspect is that the partially ionized ISM is likely a relatively inhomogeneous medium, and we should not expect the SNR to propagate into a single phase over several tens of parsecs. To account for this inhomogeneity we need to investigate CR propagation in multi-phase ISM, which can require multi-dimensional simulations. This aspect is discussed in Sect. 5 and merits future dedicated study. However, in Sect. 4 we consider an example of multi-phase ISM in the context of the calculation of the CR grammage.

### 2.1.2. Magnetohydrodynamic wave damping in partially ionized media

*Ion-neutral damping.* Alfvén waves are supported by the motion of ions. In a two-fluid model energy transfer rate operates between neutrals and ions which produces a damping of the Alfvén waves. In the WNM phase, the ion-neutral collision rate  $\nu_{\text{in}}$  expresses the energy transfer rate from ions to neutrals and is given in Eq. (19) of N16 by

$$\nu_{\text{in}} = n_n \sigma v_{\text{th}} = 2n_n (8.4 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}) \left( \frac{T}{10^4 \text{ K}} \right)^{0.4}, \quad (1)$$

where  $\sigma v_{\text{th}}$  is the fractional rate of change of the proton velocity  $v_{\text{th}}$  averaged over the velocity distribution,  $n_n$  ( $n_i$ ) is the neutral

(ion) volume density in  $\text{cm}^{-3}$ , and  $T$  is the plasma temperature in K.

In the case of a colder phase ( $T \leq 50$  K), such as in CNM or DiM, the ion-neutral collision rate is expressed by (Jean et al. 2009)

$$\nu_{\text{in}} = n_n (2.1 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}). \quad (2)$$

The neutral-ion collision rate  $\nu_{\text{ni}}$  expresses the energy transfer from neutrals to ions; it is linked with  $\nu_{\text{in}}$  by the relation (Xu et al. 2015)

$$\nu_{\text{in}} = \chi \nu_{\text{ni}}, \quad (3)$$

where  $\chi = (m_n/m_i)(X^{-1} - 1) = \rho_n/\rho_i$  is the ratio between the mass density of neutrals and ions. Ion-ion  $\nu_{\text{ii}}$  and neutral-neutral  $\nu_{\text{nn}}$  collision rates express the internal energy exchanges within each fluid. In a weakly ionized plasma,  $\nu_{\text{ii}}$  is negligible because of the low ion relative density. In the case of very low ionization rates,  $\nu_{\text{nn}}$  may contribute to the damping of Alfvén waves (Xu et al. 2015). It is however found to be negligible in the cases under study here.

As shown by Eq. (3), the quantity of energy transferred between ions and neutrals depends on the ion/neutral plasma mass density. If  $X \ll 1$ , then  $\nu_{\text{in}} \gg \nu_{\text{ni}}$  controls the energy transfer between ions and neutrals. The Alfvén wave dispersion relation is calculated in a two-fluid approach by Soler et al. (2013) and has been solved using different approximations by Xu et al. (2016) and Lazarian et al. (2004). The imaginary part of the solution of the dispersion relation corresponds to the Alfvén wave damping rate; it is presented in Fig. 1 for each phase by a bold black line as a function of the energy of CRs. As in this work we only consider CR in resonance with waves, there is a one to one relationship between the particle Larmor radius  $r_L = \gamma mc/qB_0$  (or energy, in the relativistic domain) and the wave number  $k$ , such that  $kr_L \sim 1$ . Here we introduce the CR charge  $q$ , mass  $m$ , and Lorentz factor  $\gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$  where  $v/c$  is the ratio of the speed of the particle to the speed of light. The background magnetic field has a strength  $B_0$ . We observe two asymptotic behaviors. At low CR energy ( $E \ll eB_0 V_{\text{Ai}}/\nu_{\text{in}}$ ), ions and neutrals are weakly coupled and the energy transfer from ions to neutrals is maximal because their motions are uncorrelated. The asymptotic Alfvén wave damping rate is then given by

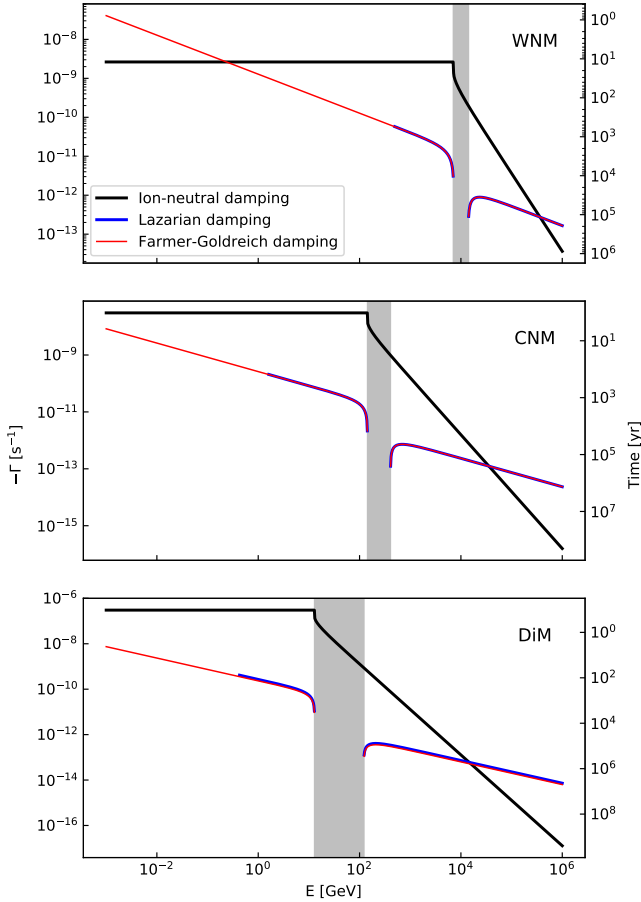
$$\Gamma_{\text{in}} = -\frac{\nu_{\text{in}}}{2}, \quad (4)$$

and the Alfvén speed is the one produced by the ionic component defined by  $V_{\text{Ai}} = B_0/\sqrt{4\pi\rho_i}$ . At high CR energy ( $E \gg eB_0 V_{\text{A}\chi}/\nu_{\text{in}}$ ), the motions of ions and neutrals become correlated and the energy transfer from ions to neutrals drops (McIvor 1977). The Alfvén waves damping rate is therefore given by

$$\Gamma_{\text{in}} = -\frac{\xi_n V_{\text{A}}^2 e^2 B_0^2}{2\chi^{-1}\nu_{\text{in}}} E^{-2}, \quad (5)$$

where  $\xi_n = \rho_n/(\rho_n + \rho_i)$  is the neutral fraction in the gas, and the Alfvén speed is given by  $V_{\text{A}} = B_0/\sqrt{\rho_n + \rho_i}$ . Finally, in the energy range  $[eB_0 V_{\text{Ai}}/\nu_{\text{in}}, eB_0 V_{\text{A}\chi}/\nu_{\text{in}}]$  Alfvén waves do not propagate.

In Fig. 1 we see that the damping of Alfvén waves is stronger in the diffuse molecular phases (DiM) than in atomic phases (WNM, CNM). The cutoff band in the WNM is located around 10 TeV while in the other mediums it is located around 100 GeV. We can also observe that the forbidden propagation band gets wider as the ionization rate decreases.



**Fig. 1.** Ion-neutral damping rate ( $\Gamma_d^{\text{in}}$ , black curves), Farmer and Goldreich damping rate ( $\Gamma_d^{\text{FG}}$ , red curves), and Lazarian damping rate ( $\Gamma_d^{\text{L}}$ , blue curves) as a function of resonant CR energy. The shaded region refers to the range of energy where the real pulsation of Alfvén waves is not defined, which is why the turbulent damping, which depends on the Alfvén, is not defined in this scale range.

*Turbulent damping.* Alfvén waves generated by CRs can also interact with large-scale injected Alfvénic turbulence. Although the sources of this turbulence are poorly known, among the main contributors we can cite supernovae explosions or galactic differential rotation (Mac Low & Klessen 2004). Interactions between wave packets propagating in opposite directions lead to a distortion of the wave packets. A CR-generated wave of wavelength  $\lambda \sim r_L$  is “damped” when the size of the distortion produced by the interacting wave packet is  $\delta \sim \lambda$  (see Sect. 4.2 in L16). In this process, waves generated by CRs interact with background perturbations through a three-wave process (Ng & Bhattacharjee 1997) which leads to the production of larger  $k$  modes. This process is called turbulent damping (see Farmer & Goldreich 2004; FG04, Lazarian 2016; L16) and we use this term hereafter. It should be stressed that this process does not correspond to a real damping but produces a transfer of perturbations from the resonant scale to smaller scales.

In N16 we use the turbulent damping term proposed by FG04. The authors of L16 propose an extension of the FG04 model to other turbulent regimes, including magnetosonic turbulence. Their results are based on a particular approach to the phenomenon of MHD turbulence (see Lazarian & Vishniac 1999). By adopting this model we acknowledge its limitation. More involved discussions of wave interaction in either super- or sub-Alfvénic turbulence can be found in Matthaeus et al. (1994),

Zank et al. (1996, 2012), Adhikari et al. (2015), albeit mostly in the context of solar wind turbulence. Adapted to ISM, these models may produce a different turbulent damping rate which could modify the generality of our conclusions especially at high CR energies where ions and neutrals are in the coupled regime of collisions. However, the turbulent damping rate has to increase to at least one order of magnitude to be competitive at 10 TeV (see Fig. 1 below).

We now reproduce the main results obtained by L16. In the sub-Alfvénic regime (with  $M_A = V_L/V_A < 1$ ) the turbulence at large scales is weak mostly 2D; it cascades perpendicularly to the mean magnetic field direction. The velocity perturbations scale as  $v_k = V_L(kL)^{-1/2}$ . Below the scale  $\ell = LM_A^2$  the turbulence becomes strong and is described  $v_k = V_L(kL)^{-1/3}M_A^{4/3}$ . In the above expression,  $M_A = V_L/V_A$  is the Alfvénic Mach number,  $V_L$  is the rms turbulence speed at the injection scale  $L$ , and  $k \equiv k_\perp$  is the perpendicular wave number.

In a sub-Alfvénic, strong turbulence regime, ( $M_A < 1$  and  $k^{-1} < LM_A^4$ ) the damping term is given by

$$\Gamma_{L,\text{sub,A,s}} \approx \frac{V_A M_A^2}{k^{-1/2} L^{1/2}} \text{ for } \frac{l_{\text{min}}^{4/3} M_A^{4/3}}{L^{1/3}} < k^{-1} < LM_A^4, \quad (6)$$

where  $M_A = V_L/V_A$  is the Alfvénic Mach number,  $V_L$  is the rms turbulence speed at the injection scale  $L$ , and  $k$  corresponds to the turbulent scale. Here,  $l_{\text{min}}$  corresponds to the turbulence cutting scale and is given by the Eq. (13) below.

In a sub-Alfvénic, weak turbulence regime ( $M_A < 1$  and  $k^{-1} > LM_A^4$ ) the damping term is given by

$$\Gamma_{L,\text{sub,A,w}} \approx \frac{V_A M_A^{8/3}}{k^{-2/3} L^{1/3}}, \quad (7)$$

for  $LM_A^4 < k^{-1} < LM_A$ . Alternatively, if  $k^{-1} > LM_A$ , then it is given by

$$\Gamma_{L,\text{sub,A,w}} \approx M_A^2 \frac{V_A}{L} \text{ for } k^{-1} < L, \quad (8)$$

and

$$\Gamma_{L,\text{sub,A,w}} \approx M_A^2 \frac{V_A L}{k^{-2}} \text{ for } k^{-1} \gg L. \quad (9)$$

In the super-Alfvénic turbulence regime ( $M_A > 1$ ), the turbulence at scales larger than  $\ell = L/M_A^3$  is isotropic and hydrodynamic and is described by a Kolmogorov model. Below this scale, strong turbulence applies and the cascade leads to anisotropic velocity perturbations, again following  $v_k = V_L(kL)^{-1/3}M_A^{4/3}$ . The damping rate is given by

$$\Gamma_{L,\text{super}} \approx \frac{V_A M_A^{3/2}}{L^{1/2} k^{-1/2}} \quad (10)$$

if  $\frac{l_{\text{min}}^{4/3} M_A^{4/3}}{L^{1/3}} < k^{-1} < LM_A^{-3}$ , and

$$\Gamma_{L,\text{super}} \approx \frac{V_A M_A}{L^{1/3} k^{-2/3}} \quad (11)$$

if  $k^{-1} > LM_A^{-3}$ .

Although not trivial, the choice of the injection scale  $L$  and the associated turbulent velocity  $V_L$  is essential to characterize the nature of the turbulence and the behavior of the turbulent damping. Following the same assumptions as N16, we chose  $L = 50$  pc and  $V_L = \max(V_A, c_s)$  where  $V_A$  corresponds to the Alfvén speed in the coupled regime and  $c_s$  is the sound speed.

For each medium, this assumption leads to  $M_A \approx 1$  because  $V_A$  exceeds  $c_s$ . The MHD turbulence is in the trans-Alfvénic turbulent regime. However, in the DiM, values extracted from Table 1 lead to  $M_A \sim 5$ . Increasing by a factor five however does not change the impact of turbulent damping as we limit our investigation to CRs with energies below 30 TeV. Even at these energies, ion-neutral collisions dominate the damping of slab waves. Acknowledging the uncertainties over the turbulence injection scale and the magnetic field strength and densities in these media, we decided to keep a trans-Alfvénic turbulence injection model in all of the phases under study. The choice for the injection scale  $L$  is rather arbitrary as very little is known about its value in the ISM. It is also very likely that  $L$  varies depending on the position in the disk and between the disk and the galactic halo. Typical scales of 1-100 pc are reported in Haverkorn et al. (2008). Furthermore, several sources of turbulent motion injection may compete at a given location, as may be the case in the local ISM (Burlaga et al. 2015). Turbulence can be injected by supernovae, massive star winds, galactic shear motions, HII region expansion, or by CR themselves; see e.g. Giacinti & Kirk (2017).

Figure 1 shows the two turbulent damping models. The red solid line represents the FG04 model and the bold blue line the L16 model. In a trans-Alfvénic regime, the turbulent damping rate is given by

$$\Gamma_{\text{trans,L04}} \approx \frac{V_A}{k^{-1/2}L^{1/2}} \text{ for } \frac{l_{\text{min}}^{4/3}}{L^{1/3}} < k^{-1} < L. \quad (12)$$

The difference between the FG04 model and the L16 model appears at

$$l_{\text{min}}^{-1} = (2\nu_{\text{ni}})^{3/2}L^{1/2}V_A^{-3/2} \sqrt{1 + \frac{V_A}{2\nu_{\text{ni}}L}}, \quad (13)$$

corresponding to the low-energy cutting scale of the turbulence. Unlike in the FG04 model, the turbulent cascade in the L16 model is cut at energies below  $\sim 500$  GeV, 1.6 GeV, and 0.4 GeV in the WNM, CNM, and DiM phases, respectively. However, in practice, this difference is not relevant in our study because at low energy, the Alfvén wave damping rate is always dominated by ion-neutral collisions, and the turbulent damping only becomes dominant at high energies ( $\sim 100$  TeV).

## 2.2. Escape of cosmic rays from supernova remnants

The process of CR leakage from SNRs is connected to the acceleration process in the source interior. As CRs leak out, they extract some energy flux which increases the compressibility of the shocked fluid (Berezhko & Ellison 1999). High-energy particles streaming ahead of the shock front produce magnetic fluctuations which ensure the confinement of lower energies at the shock (Bell et al. 2013). Until now however, no model has been built that describes in a self-consistent way the acceleration mechanism at the SNR strong shocks and the process of CR escape from the accelerator (see the discussion in Telezhinsky et al. 2012), so the transition between the following two locations.

The source interior where the magnetic perturbations are generated by streaming instabilities and the level of turbulence is high ( $\delta B \sim B_0$ ). Cosmic rays have a Bohm diffusion and their mean free path is small ( $\lambda \sim r_L$ ), meaning that they likely diffuse isotropically ( $D_{\parallel} \sim D_{\perp}$ ). The CR pressure is in excess compared to the magnetic pressure.

The surrounding ISM where magnetic perturbations are injected at large scale ( $\delta B \ll B_0$ ). The mean free path of CRs is high ( $\lambda \gg r_L$ ) and they diffuse along the mean magnetic field ( $D_{\parallel} \gg D_{\perp}$ ). Their pressure is in equipartition with the magnetic pressure.

Current CR leakage models do not explain this transition and induce an unavoidable jump in the mean free path of the CRs (Zirakashvili & Ptuskin 2012; Reville et al. 2009; Berezhko 1996). Ptuskin et al. (2008) and Malkov et al. (2013) propose a model to account for the escape of CRs from SNRs which is disconnected from the acceleration process. This model assumes that escaping CRs progressively leak out from the source which can be seen as a CR cloud, hence the name cosmic ray cloud (CRC) model. The model further considers that while escaping into the ISM, CRs propagate along the background magnetic field and that the cloud expansion is sufficiently slow to approximate the CR transport by a 1D process (see Ptuskin et al. 2008; Malkov et al. 2013). Cosmic rays, whilst propagating along the background magnetic field, trigger slab-type Alfvén waves through the resonant streaming instability. The generation of self-generated turbulence produces a reduction of the CR diffusion coefficient. Finally, the model is developed in the quasi-linear approximation, so it is valid only in the case of well-developed, weak turbulence, an assumption that requires verification a posteriori. The 1D approximation for the CR transport is valid for distances to the CRC that are shorter than the background magnetic turbulence coherence length.

In this paper, we use the kinetic code developed and presented in N16 and N19. We adapt the simulations to the case of partially ionized phases. We again use the setup proposed by Malkov et al. (2013) and N16. We describe the transport of CRs and waves along magnetic field lines by solving two coupled equations given by

$$\frac{\partial P_{\text{CR}}}{\partial t} + V_A \frac{\partial P_{\text{CR}}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial P_{\text{CR}}}{\partial z} \right), \quad (14)$$

for the CR pressure  $P_{\text{CR}}$ , and

$$\frac{\partial I}{\partial t} + V_A \frac{\partial I}{\partial z} = 2 \left( \Gamma_{\text{growth}} - \Gamma_{\text{d}} \right) I + Q, \quad (15)$$

for the waves energy density  $I$ . Equation (14) governs the evolution of the CR pressure  $P_{\text{CR}}$  in time and space. The space propagation is controlled by two processes: an advection with the scattering centers at a speed  $V_A$  and a random walk along the background field with a diffusion coefficient  $D$ . We note that in our case both  $V_A$  and  $D$  are energy dependent. The Alfvén speed depends on the energy regime (see Sect. 2.1.2): if ions and neutrals are coupled, the Alfvén speed is calculated using the total density, while in the decoupled regime only the ion density should be retained. The Alfvén speed can also be space-dependent in case the ISM is inhomogeneous. In that case, the above equations have to be modified (Skilling 1975; Zank et al. 2012). It should be stressed that the above equations are restricted to the quasi-linear theory. Any modelling of the back-reaction of the self-generated turbulence over the background turbulence is therefore beyond the scope of this simple model and requires the use of an MHD code properly coupled to CR kinetics. We return to this point in Sects. 4 and 5. The diffusion coefficient is  $D(E) = D_{\text{B}}(E)/I(E)$  where  $D_{\text{B}}(E)$  is the Bohm diffusion coefficient (see Bell 1978a,b) and  $I(E)$  is the energy density of the resonant Alfvén waves. The background diffusion coefficient is defined by  $D_0 = D_{\text{ISM}}(E/10 \text{ GeV})^{0.5}$  and has been fixed to  $D_{\text{ISM}} = 10^{28} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  which is of the order of the value

inferred from direct measurements of the ratios of CR primary to secondary. Cosmic ray transport is linked to the turbulence by Eq. (15). In the latter, the growth of Alfvén waves is governed by the relaxation of the streaming instability which corresponds to the first RHS term. Skilling (1975) gives the expression for the growth rate:

$$2\Gamma_{\text{growth}}I = -\frac{V_A}{W_0} \frac{\partial P_{\text{CR}}}{\partial z}, \quad (16)$$

where  $W_0 = B_0^2/8\pi$  corresponds to the magnetic energy of the medium. The second RHS term in Eq. (15) describes the damping of the waves due to ion-neutral collisions and turbulent damping  $\Gamma_d = \Gamma_{\text{IN}} + \Gamma_{\text{turb,L16}}$ . We also add the nonlinear Landau effect to handle cases where  $I(E)$  becomes sufficiently close to one (see N16 and N19). Finally, the last term allows to consider all external sources of turbulence, and we set  $Q = 2\Gamma_d I_0$  where  $I_0$  is the background turbulence level. Hereafter, the latter is assumed to be identical whatever the ISM phase. A detailed investigation of the large-scale-injected turbulence in partially ionized media is a difficult task and is postponed to a future study (see the discussion in Xu et al. 2016).

The physical CR pressure is defined by

$$P_{\text{CR}} = \frac{4\pi}{3c^3} E^4 f(E), \quad (17)$$

where  $f(E)$  is the CR energy space phase function defined by

$$f(E) = \frac{3c^3}{16\pi^2 R_s^3} \frac{1}{E^2} \frac{dN}{dE}, \quad (18)$$

where  $R_s$  is the shock radius and the CR energy spectrum  $dN/dE$  is given by

$$\frac{dN}{dE} = \frac{(2-\Gamma)W_{\text{CR}}}{E_{\text{max}}^{2-\Gamma} - E_{\text{min}}^{2-\Gamma}} E^{-\Gamma}, \quad (19)$$

if  $\Gamma \neq 2$  and

$$\frac{dN}{dE} = \frac{W_{\text{CR}}}{\ln(E_{\text{max}}) - \ln(E_{\text{min}})} E^{-\Gamma}, \quad (20)$$

if  $\Gamma = 2$ . Here,  $W_{\text{CR}} = 10^{50}$  erg is the amount of energy of the SN explosion imparted into the CR pressure, and  $E_{\text{min}} = 2 \times 10^{-4}$  GeV and  $E_{\text{max}} = 2 \times 10^4$  GeV are the energy limits of the CR spectrum.

Cosmic rays are initially confined in a region of size  $a = 2R_s/3$  (see footnote 1 of N16 for an explanation) and an initial pressure  $P_{\text{CR}}^0$ . Outside, the initial CR pressure is negligible. At the beginning of the simulation, the energy of turbulent waves is equal to its background value  $I_0$ . Following Malkov et al. (2013), we introduce the partial pressure  $\Pi$  given by

$$\Pi = \frac{V_A}{D_B} \Phi_{\text{CR}}, \quad (21)$$

where  $\Phi_{\text{CR}} = \int_0^\infty dz P_{\text{CR}} = a P_{\text{CR}}^0$  corresponds to the CR flux across a tube section. The physical meaning of  $\Pi$  is discussed in detail in N16. We can identify two regimes of CR propagation depending on the value of  $\Pi$ :

If  $\Pi > \max(1, \tau_{\text{diff}}/\tau_{\text{damp}})$  where  $\tau_{\text{diff}} \approx a^2/D$  corresponds to the CR diffusion time-scale and  $\tau_{\text{damp}} \approx [2\Gamma_d]^{-1}$  is the damping time scale of waves. Cosmic ray transport is nonlinear and the streaming instability is efficient enough to produce slab waves.

If  $\Pi < \max(1, \tau_{\text{diff}}/\tau_{\text{damp}})$ . Cosmic ray transport is linear, the CR flux is too low to produce waves and the diffusion proceeds with  $D = D_{\text{ISM}}$ .

If in that latter case in addition we neglect advection, the system of Eqs. (14) and (15) becomes

$$\frac{\partial P_{\text{CR}}}{\partial t} = D_{\text{ISM}} \frac{\partial^2 P_{\text{CR}}}{\partial z^2}, \quad (22)$$

where  $D_{\text{ISM}} = D_B/I_{\text{ISM}}$  and

$$\frac{\partial I}{\partial t} = 0, \quad (23)$$

which means that  $I = I_{\text{ISM}}$ . This situation is systematically achieved after a sufficiently long time as the flux of CRs across the tube section decreases and the condition  $\Pi < \max(1, \tau_{\text{diff}}/\tau_{\text{damp}})$  is realized. In this case, the analytic solution is given by

$$P_{\text{CR}}(z, t) = \frac{1}{2} P_{\text{CR}}^0 \left[ \text{erf}\left(\frac{a-z}{2\sqrt{D_{\text{ISM}}t}}\right) + \text{erf}\left(\frac{a+z}{2\sqrt{D_{\text{ISM}}t}}\right) \right]. \quad (24)$$

In the above framework, Malkov et al. (2013) defined the CRC half-life time  $t_{\frac{1}{2}}$  as the time it takes for the CR integrated pressure in the initial sphere to be divided by two. The CRC half time is defined by the relation

$$\int_{-a}^{+a} P_{\text{CR}}(z, t_{\frac{1}{2}}) dz = 2a \frac{P_{\text{CR}}^0}{2}, \quad (25)$$

where  $P_{\text{CR}}^0$  is the initial CR pressure in the cloud. To each CR energy corresponds a particular half-life time. In order to determine at which moment and at which SNR radius a given population of CR escapes, N16 proposes to intersect the half-life time evolution function resulting from the Eq. (25)  $t_{\frac{1}{2}}(a)$  with the solution  $t(R_{\text{SNR}})$  describing the time evolution of the radius of an SNR. The approach adopted here is more relevant for type Ia SNe which evolve in an unperturbed ISM contrary to the case of core-collapse SNe where the wind of the stellar progenitor shapes the ambient medium. However, if the stellar wind magnetic field has a relatively homogeneous structure over scales that are larger than  $R_{\text{SNR}}$  one may still treat the escape problem as 1D but now using the path length along magnetic field lines.

The evolution of SNRs has been described by Cioffi et al. (1988), Truelove & McKee (1999) and can be decomposed into four expansion stages :

Free expansion,

$$t < t_{\text{free}} \Rightarrow t \propto R_{\text{SNR}};$$

Sedov-Taylor (ST),

$$t_{\text{free}} < t < t_{\text{PDS}} \Rightarrow t \propto R_{\text{SNR}}^{5/2};$$

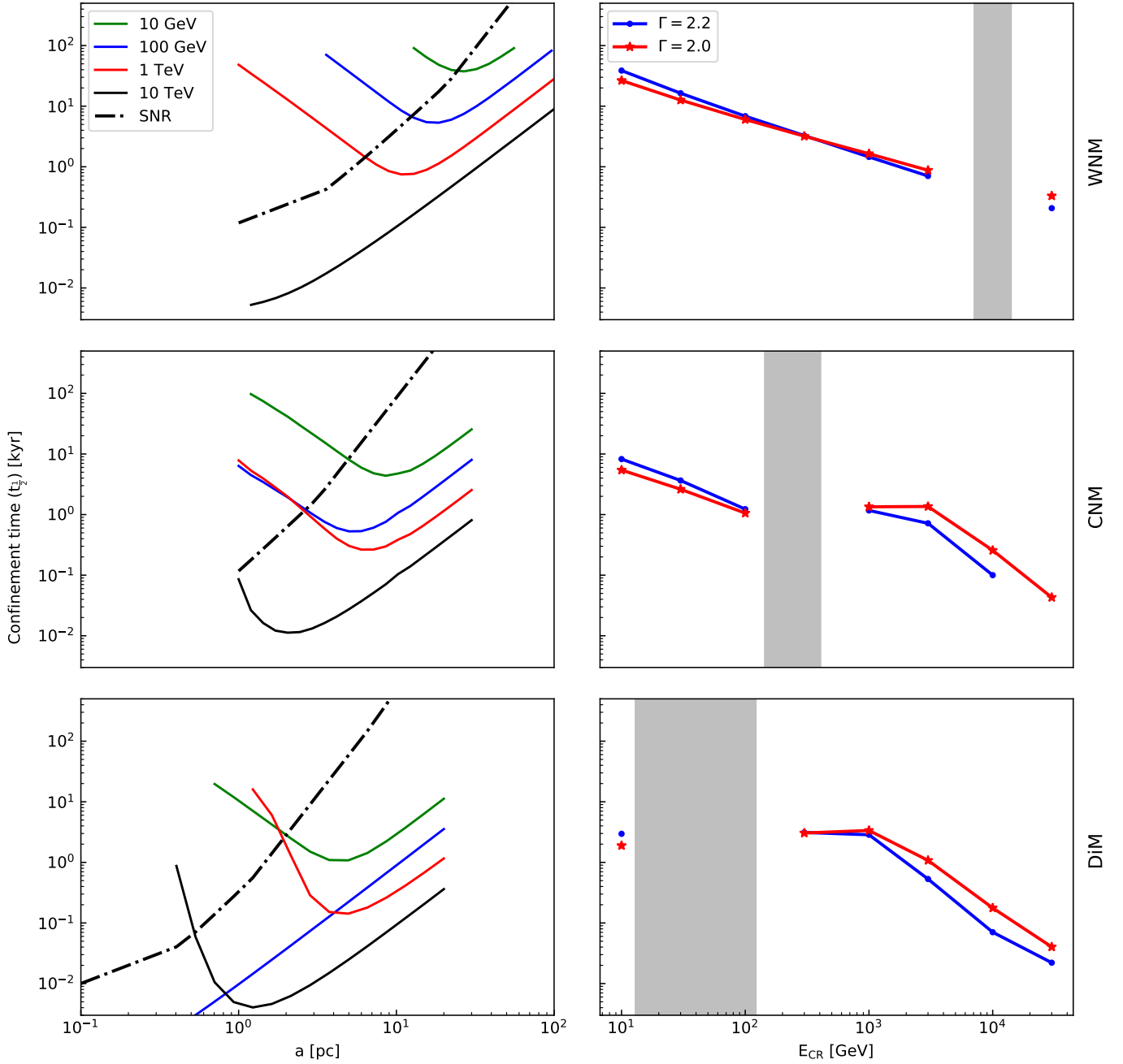
pressure-driven snowplow (PDS),

$$t_{\text{PDS}} < t < t_{\text{MCS}} \Rightarrow t \propto R_{\text{SNR}}^{10/3};$$

momentum-conserving snowplow (MCS),

$$t_{\text{MCS}} < t < t_{\text{merge}} \Rightarrow t \propto R_{\text{SNR}}^4.$$

The constant of proportionality is defined by the radius of the SNR at the transition between the free and ST stages (see N16),



**Fig. 2.** Properties of the expansion of the CRC in the ISM. *Left:* evolution of the half-life time of the CRC as a function of its initial radius  $a$  in parsec units. Green, blue, red, and black solid lines refer to particle energies at 10,  $10^2$ ,  $10^3$ , and  $10^4$  GeV. The black dashed line refers to the time evolution of the radius of the SNR front shock in the considered phase: WNM for the top figure, CNM for the middle one, and DiM for the bottom one. These plots have been obtained for  $\Gamma = 2.2$ . *Right:* evolution of the half-life time of the CRC derived from the left plots as a function of CR energy. The blue solid line refers to a CR energy spectral index of 2.2 while the red dashed line refers to a spectral index of 2.0. The gray zone corresponds to the no-wave propagation zone; it does not lead to any  $(a, t_{1/2})$  solution.

at this stage the ambient medium starts to dominate the SNR dynamics.

$$R_{\text{SNR}} = 5.0 \left( \frac{E_{\text{SNR},51}}{n_T} \right)^{\frac{1}{5}} \left[ 1 - \frac{0.05 M_{\text{ej},\odot}^{\frac{5}{6}}}{E_{\text{SNR},51}^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{3}} t_{\text{kyr}}^{\frac{2}{3}}} \right]^{\frac{2}{5}} t_{\text{kyr}}^{\frac{2}{5}} [\text{pc}]. \quad (26)$$

The SNR radius depends on the SN mechanical energy  $E_{\text{SN}}$  in units of  $10^{51}$  ergs, the ejecta mass  $M_{\text{ej},\odot}$  in units of solar mass, the ambient density  $n_T$  in units of  $\text{cm}^{-3}$ , and the time in kiloyears. In order to understand the properties of the CR escaping process, we determined for each phase (WNM, CNM and DiM) and for

each population of CRs (10 GeV, 100 GeV, 1 TeV, 10 TeV) the time at which half of the initial CR pressure has escaped from the CRC and to what radius the shock extends. Our results are presented in Fig. 2.

*Warm neutral medium.* In the WNM phase, we recover the results obtained in N16 (see Fig. 2 upper row). We observe that low-energy CRs escape late, at 10 GeV  $R_{\text{esc}} \approx 25$  pc and  $t_{\frac{1}{2}} \approx 42$  kyr, at the start of the radiative stage. As energy increases, the radius and escape time decrease linearly. We note that the escaping process is nonlinear ( $\Pi \approx 7 \times 10^3$ ,  $2 \times 10^3$ ,  $0.5 \times 10^3 \gg 1$ ) at 10, 100, and 1000 GeV respectively meaning that the self-generated

turbulence can –a priori– confine particles near the source. However, even if the growth rate is high it has to be compared with the damping rate, which can itself also be high. This comparison is the object of Sect. 3. We do not find any escaping solution for 10 TeV CRs. Figure 1 shows that Alfvén waves do not propagate, hence particles cannot trigger any waves and their propagation is mostly controlled by perturbations at scales larger or equal to their Larmor radius (Yan & Lazarian 2004).

*Cold neutral medium.* In the CNM phase, the description of the CRC expansion is more complex (see middle row of Fig. 2). Cosmic rays escape earlier, but the radiative stage of the SNR occurs also earlier. Cosmic rays at 10 GeV escape the latest ( $\sim 9$  kyr) at a shock radius of  $\sim 5$  pc. The solutions have  $\Pi \approx 31 \times 10^3$ ,  $4 \times 10^3$ , 25,  $4 \gg 1$  or  $>1$  at 10, 100,  $10^3$  and  $10^4$  GeV, respectively. At energies of 100 GeV and 1 TeV, CRs escape at a similar time ( $\sim 1.2$  kyr) and radius ( $\sim 2.7$  pc). This is due to the fact that the damping rate of 1 TeV waves occurs in the coupled ion-neutral collision regime and hence drops by a factor 100 with respect to the damping of low CR energy. At 10 TeV, CRs are released at a small radius ( $< 2$  pc), hence their pressure gradient is still high.

*Diffuse molecular medium.* In the DiM phase, the self-generated turbulence has larger amplitudes than in the CNM and the WNM (see Fig. 2, lower row). This is essentially due to the small escaping CR radius which is a consequence of SNR dynamics in a medium with a high density. Generally, CRs in the DiM escape earlier than in the CNM and they all escape during the radiative phase, which also occurs earlier. At 1 TeV, CRs seem to escape slightly before 10 GeV CRs. Similarly to the case of CNM, this is due to the difference between the damping rates in the coupled and decoupled regimes. Figure 1 also shows that the turbulence in resonance with 100 GeV CRs is immediately damped explaining their linear diffusion. The half-life time of the CRC at 10 TeV is very small ( $\sim 0.07$  kyr) and its radius is also quite small ( $< 1$  pc). This produces substantial turbulence; values of  $\Pi$  are about  $97 \times 10^3$ , 16, and 9 at 10,  $10^3$ , and  $10^4$  GeV, respectively.

It is also possible to study the CRC expansion properties by observing the cloud half-life time evolution as a function of the CR energy (see left parts of Fig. 2). In the WNM, the half-life time decreases linearly with the energy of CRs. Low-energy CRs are efficiently confined while high-energy CRs propagate quasi linearly. In the colder phases (CNM, DiM), we observe a gap around the energies corresponding to the nonpropagating turbulence range followed by a plateau due to the substantial level of self-generated turbulence connected with the drop of the damping rate. At very high energies, the half-life time decreases again because CRs are injected with an energy spectrum with power-law of negative index, this means that the highest energies account for less pressure. We also performed simulations with a harder CR spectrum with  $\Gamma = 2.0$  but keeping the same power imported into CRs, the half-life time decreases at low energy because of the decreasing value of the pressure but this effect is not strong (see the right-hand panels of Fig. 2). At high energy the effect is inverted because of the generation of larger numbers of Alfvén waves due to the higher level of CR pressure.

In Table 2 we summarize four different turbulence regimes operating in the phases under study. The production of self-generated turbulence can be seen to depend on the wave growth rate and the wave-damping rate imposed by the density and the ionization rate of the external medium. Let us briefly describe them.

**Table 2.** Different self-generated turbulence regimes as functions of the CR streaming instability growth rate and the Alfvén waves damping rate by the medium.

	$\frac{a^2 I_0 \Gamma_d}{D_B} \ll 1$	$\frac{a^2 I_0 \Gamma_d}{D_B} \gg 1$
$\frac{a^2 I_0 \Gamma_g}{D_B} \gg 1$	$\frac{dI}{dt} \approx 2\Gamma_g I$ Regime 1	$\frac{dI}{dt} \approx 2(\Gamma_g - \Gamma_d) I$ Regime 2
$\frac{a^2 I_0 \Gamma_g}{D_B} \ll 1$	$\frac{dI}{dt} \approx 0$ Regime 3	$\frac{dI}{dt} \approx -2\Gamma_d I$ Regime 4

**Notes.** The expressions  $a^2 I_0 \Gamma_d / D_B$  ( $a^2 I_0 \Gamma_g / D_B$ ) represent the normalized damping (growth) rate.

Regime 1 is that of strong nonlinear propagation. It represents the case where the wave growth rate is strong which is the case when the escaping radius is small, and the damping rate is reduced as in the coupled regime. This is the regime investigated by Malkov et al. (2013). The self-generated turbulence rate is growing almost exponentially with time leading to a strong CRs confinement. This regime is represented by a continuous decrease of the CR diffusion coefficient between  $t_{1/2}$  and  $4t_{1/2}$  which is the typical limit time investigated in this study (see also N16 and N19).

Regimes 2 and 3 are transitory. Regime 2 corresponds to the case where the wave growth rate is high and the damping rate is strong, but still the difference between the two rates is small. Regime 3 corresponds to the case where the streaming instability is weak but produces waves weakly damped by interaction with the plasma. These regimes are represented by a decline followed by a growth of the CR diffusion coefficient between  $t_{1/2}$  and  $4t_{1/2}$ .

Regime 4 is the regime dominated by the damping process. It represents the case where the waves growth rate is small which is the case when the CRC radius is large, and the damping rate is strong. This regime is represented by a continuous growth of the CR diffusion coefficient between  $t_{1/2}$  and  $4t_{1/2}$ .

### 2.3. Alternative escape models

In the model presented above and in N16 it is necessary to check that the shock speed is always larger than  $110 \text{ km s}^{-1}$  which corresponds to the limit speed below which the shocked medium does not generate UV radiation and cannot ionize the precursor medium (Shull & McKee 1979). In that case, ion-neutral collisions quickly damp any magnetic fluctuations (Sutherland & Dopita 2017). We have checked in our simulations that the speed of the shock at the escape time of the lowest CR energies is always greater than this limit.

Another aspect associated with the ionization radiation produced by the shock wave is the possibility to have extended ionization fronts in the upstream medium (Zirakashvili & Ptuskin 2018). This effect is possibly expected for fast adiabatic shocks (Allen et al. 2008). Extended ionization precursors if they exist should rather be expected in the WNM, whereas in denser media their extension should be reduced by a factor  $1/n_H$  where  $n_H$  is the hydrogen density. Balmer dominated shocks however show limited extension of a few percent of the SNR size of the heated gas precursors (Lee et al. 2007).

However, the way CRs escape strongly depends on the evolution of the magnetic perturbations in the shock precursor, especially once the SNR has entered the radiative phase. We now



**Table 3.** Values of the half-life time and their associated escaping radii for the three models in this study at low energy.

Phase	WNM	CNM	DiM	
$E_{\text{CR}}$ [GeV]	10	10	$10-10^3$	
$a_{\text{esc}}$ (pc)	24.7	4.95	2.00–2.12	Model $\mathcal{P}$
$t_{\text{esc}}$ (kyr)	42.1	8.22	2.99 – 3.46	
$a_{\text{esc}}$ (pc)	20.8	3.14	1.22	Model $\mathcal{F}$
$t_{\text{esc}}$ (kyr)	24.2	1.90	0.510	
$a_{\text{esc}}$ (pc)	28.0	5.42	2.33	Model $\mathcal{S}$
$t_{\text{esc}}$ (kyr)	60.7	11.0	4.66	

**Notes.** We only retained CR energies where we have differences between the different models.

consider two extreme cases of CR release in the ISM which reflect our ignorance of the process. Hereafter, we refer to model  $\mathcal{P}$  (for primary), the escape model presented in N16 and N19 and above. Model  $\mathcal{P}$  is the model default hereafter unless otherwise specified.

In order to differentiate the escaping solutions obtained with the alternative models from the ones obtained with the main model, we refer to the SNR escaping radius variable as  $a_{\text{esc}}$  and the CR escaping time as  $t_{\text{esc}}$ . These are analogous to the variables  $a$  and  $t_{\frac{1}{2}}$  but are obtained from different physical assumptions, as described below (they are identical in model  $\mathcal{P}$ ).

**Model  $\mathcal{F}$  (fast).** Magnetic field fluctuations are rapidly damped in the precursor once the shock enters the radiative phase implying that all accelerated particles are released at  $a(E) = R_{\text{PDS}}$  if  $E < E^*$ . Here,  $E^*$  is the maximal energy of particles escaping at the start of the radiative phase in model  $\mathcal{P}$ , and depends on the properties of the external medium. As a consequence, we observe in Table 3 that the radii and escaping times of CRs drop with respect to the values obtained in model  $\mathcal{P}$ . As escaping radii are smaller, the wave growth rate increases leading to stronger nonlinear propagation effects with respect to model  $\mathcal{P}$ .

**Model  $\mathcal{S}$  (slow).** We suppose that the shock precursor is sufficiently ionized. Once in the radiative phase, the fluid is compressed and all particles that have not yet escaped at  $t_{\text{PDS}}$  stay confined until the shock velocity drops below  $110 \text{ km s}^{-1}$ . In this case we observe in Table 3 that the radii and the escaping times of CRs are large and the propagation is less nonlinear with respect to the model  $\mathcal{P}$ .

### 3. Cosmic ray-propagation results

We performed simulations of CR propagation in homogeneous realizations of WNM, CNM, and DiM phases at different CR energies: 10 GeV, 100 GeV, 1 TeV, and 10 TeV. We investigated the time-dependent transition between the CRC and the CR background. We note that in order to avoid any nonphysical pressure gradients at small escape times ( $< t_{\frac{1}{2}}$ ) we smooth the initial pressure step by a hyperbolic tangent that is 1% of the escape radius. We adopt absorbing boundaries at  $z = 0$  and  $z = z_{\text{max}} = 500 \text{ pc}$ .

The results are presented in the appendix in Figs A.1-1, A.2-2, A.3-3 for the WNM, A.4-1, A.5-2, A.6-3 for the CNM, and A.7-1, A.8-2, A.9-3 for the DiM and for the three different escape models (model  $\mathcal{P}$ : 1, model  $\mathcal{F}$ : 2 and model  $\mathcal{S}$ : 3). The color-code refers to the different ISM phases: yellow for WNM, green for CNM, and orange for DiM. The figures are separated in three parts. The upper part represents the spatial distribution of the CR pressure.

The black dotted line represents the initial CRC pressure, and the blue, green, and red lines represent the simulation state at  $t_{\frac{1}{2}}/4$ ,  $t_{\frac{1}{2}}$ , and  $4t_{\frac{1}{2}}$ , respectively, as in N16. We added when necessary two more solutions in brown and pink at  $50t_{\frac{1}{2}}$  and  $10^3t_{\frac{1}{2}}$ , respectively, at high energies in the CNM and DiM phases to account for the slow dilution of the CRC when the damping rate drops. Dotted lines represent test-particle (TP) solutions while full lines represent numerical solutions. The middle part represents the spatial evolution of the CR pressure gradient along the mean magnetic field at the three above times. The bottom part represents the spatial evolution of the diffusion coefficient with time compared to  $D_{\text{ISM}}$  drawn with a black dotted line.

In the following sections, for each setup, CR leakage properties are described and associated qualitatively to a simplified propagation model as described in Table 2. The level of nonlinearity depends on the competition between the growth rate and damping rate. At  $t_{1/2}$  we use ‘‘turbulence generation length’’ to refer to the width over which the turbulence growth rate exceeds the damping rate. This width is expected to decrease with time.

#### 3.1. Warm neutral phase

Figure 2 shows our solutions in the WNM phase for model  $\mathcal{P}$ . In this phase the CR escape begins at the start ST phase and ends at the start of the radiative phase. A general trend shows that the highest energies escape first, a result already obtained by N16. Figure A.1 shows the evolution of the CR pressure, the CR pressure gradient, and the diffusion coefficient evolution in space at three different times,  $t_{1/2}/4$ ,  $t_{1/2}$ , and  $4t_{1/2}$ .

At 10 GeV, CRs escape late ( $t_{\frac{1}{2}} \approx 42 \text{ kyr}$ , see Fig. 2) when the shock radius is about 25 pc, at the beginning of the radiative phase. With the exception of early times, numerical solutions are close to TP solutions (see Fig. A.1). The maximum pressure gradient ( $10^{-32} \text{ erg/cm}^4$ ) is reached at  $t_{\frac{1}{2}}/4$  but is not strong enough to induce self-generated turbulence at rates much in excess of the background turbulence. This solution closely resembles regime 4, described above. The width of self-generated zone turbulence is about  $\sim 50 \text{ pc}$ .

At 100 GeV, CRs escape at  $\sim 7 \text{ kyr}$  when the shock radius is about 13 pc in the ST phase. This implies that the CR pressure gradient is higher, especially at earlier times (1.8 kyr) where it reaches  $\sim 10^{-30} \text{ erg/cm}^4$ . At these early times, CRs generate a noticeable amount of turbulence but as the SNR shock expands, the CR gradient drops and our solutions converge to the TP case. Between  $t_{\frac{1}{2}}$  and  $4t_{\frac{1}{2}}$  we observe that diffusion coefficients are close to the interstellar one. The width of generated turbulence is about  $\sim 40 \text{ pc}$ . Because the level of self-generated turbulence is at first high, it is best described by regime 2.

At 1 TeV, CRs escape at  $\sim 1.5 \text{ kyr}$  when the shock radius is about 6.4 pc still during the ST phase. At early times, CRs have a high pressure gradient but the generated turbulence is low because the most important part of them escape later than  $t_{\frac{1}{2}}$ . At this time, the value of the CR pressure gradient is about  $\sim 5 \times 10^{-31} \text{ erg cm}^{-4}$  leading to a diffusion coefficient lower than  $10^{28} \text{ cm}^2/\text{s}$ . However, this turbulence is quickly damped because ions and neutrals are in the weakly coupled regime. The width of generated turbulence is  $\sim 40 \text{ pc}$ . It is again best described by regime 2.

In model  $\mathcal{F}$ , most CRs escape before the beginning of the radiative phase. Only 10 GeV CRs escape at the beginning of this phase at  $t_{\text{esc}} \approx 24 \text{ kyr}$  with  $a_{\text{esc}} \approx 21 \text{ pc}$  similarly to model  $\mathcal{P}$ . As a consequence, the self-generated turbulence is stronger as showed in Fig. A.2. At  $t_{\text{esc}}/4$ , the diffusion coefficient is about

$\sim 5 \times 10^{26} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  and increases gradually to  $2 \times 10^{27} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  at  $t_{\text{esc}}$  to recover its interstellar value at  $4t_{\text{esc}}$ . The generated turbulence width is similar to model  $\mathcal{P}$  but the ratio  $\Gamma_g/\Gamma_d$  is larger. This case is best described by regime 2.

In the model  $\mathcal{S}$ , most CRs escape before the beginning of the radiative phase except CRs at 10 GeV which escape later during the transition  $t_{\text{PDS}} - t_{\text{MCS}}$  in the radiative phase, that is, at  $t_{\text{esc}} \approx 60.7 \text{ kyr}$  when the shock radius is about 28 pc. Our results are shown in Fig. A.3. In this case, the growth rate is weak and our solutions fall into regime 4. Numerical solutions follow those of the TP case.

In summary, we find results similar to those obtained in N16. We show that at 10 TeV, CRs propagate following the TP case. We find, as expected, no strong differences among the three escape models with the exception of the propagation of 10 GeV CRs where nonlinear effects are stronger in model  $\mathcal{F}$  and weaker in model  $\mathcal{S}$ .

### 3.2. Cold neutral phase

Figure 2 shows that in model  $\mathcal{P}$ , in the CNM, CRs from 10 GeV to 10 TeV escape between the end of the ST and the beginning of the radiative phase. The solutions  $(a, t_{1/2})$  do not follow a linear trend as in the case of the WNM. Indeed, around 1 TeV, CRs are more strongly confined as can be seen in Fig. A.4. Compared to the WNM case, CRs escape earlier in the CNM because of the SNR shock dynamics (see Eq. (26)) as well as the CRC expansion properties whose essential parameters are the initial pressure and the value of the nonlinear diffusion coefficient. Test-particle solutions are identical for all phases (see Eq. (24)).

At 10 GeV, CRs escape at  $t_{1/2} \approx 8 \text{ kyr}$  when the cloud size is small ( $a = 5 \text{ pc}$ ). The SNR shock is in the radiative phase. Figure A.4 shows that the solutions are relatively close to the TP ones. At  $t_{1/2}/4$ , the CR pressure gradient is high and reaches  $\sim 10^{-28} \text{ erg cm}^{-4}$  but then decreases rapidly to  $10^{-30} \text{ erg cm}^{-4}$  at  $t_{1/2}$  and the self-generated turbulence level drops accordingly. At  $4t_{1/2}$ , the self-generated Alfvén waves are completely damped and the linear propagation regime is recovered. This case is described by the regime 2.

At 100 GeV, CRs escape early ( $t_{1/2} \approx 1.2 \text{ kyr}$ ) during the ST phase when the cloud size is about 2.7 pc. As shown in Fig. A.4, the CR pressure gradient is  $\sim 10^{-28} \text{ erg cm}^{-4}$  and then slightly decreases until  $t_{1/2}$  to finally drop below  $10^{-30} \text{ erg cm}^{-4}$  at  $4t_{1/2}$ . Diffusion is substantially suppressed ( $D \sim 10^{26} - 10^{27} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ) until  $t_{1/2}$ . After this time, the solution converges to the TP case. This case is described by regime 2.

At 1 TeV, CRs escape at the same time as 100 GeV CRs ( $\sim 1.15 \text{ kyr}$ ). The generated turbulence rate is the same as for 100 GeV CRs and the diffusion is highly suppressed ( $D \sim 3 \times 10^{26} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ). The distance over which turbulence is generated however is different between the two energies ( $\sim 40 \text{ pc}$  at 1 TeV versus  $\sim 20 \text{ pc}$  at 100 GeV). The associated turbulence regime is regime 1 at earlier times. Here the solutions are well approximated by the solutions of Malkov et al. (2013). At  $4t_{1/2}$ , waves are damped and the linear propagation regime is recovered.

At 10 TeV, CRs escape during the ST phase ( $t_{1/2} = 0.1 \text{ kyr}$ ) when the cloud size is about 1 pc. At  $t_{1/2}/4$ , the CR pressure gradient is high, about  $10^{-27} \text{ erg cm}^{-4}$ , and the diffusion coefficient is  $\sim 10^{27} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . The pressure gradient then decreases gradually during the simulation while the diffusion coefficient decreases gradually from  $\sim 10^{27} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  to  $10^{26} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  at  $50t_{1/2}$ . This effect is a consequence of the weak damping rate of waves at 10 TeV (see Fig. 1). At this energy, the damping time of waves

is about 100 kyr. Suppressing the damping term in the equation is a good approximation to describe the propagation which is described by regime 1 and the solutions derived in Malkov et al. (2013). Furthermore, the distance at which significant turbulence is generated is large, about  $\sim 100 \text{ pc}$ . We find a ratio of  $\delta B/B_0 \sim 0.8$ . In order to prevent the level of self-generated turbulence from overtaking the quasi-linear regime we include the effect of nonlinear Landau damping and the effect of perpendicular diffusion by modulating the solution along the background magnetic field with a perpendicular dilution. At each time step, we calculate a new pressure given by

$$P_{\text{CR}}^{\text{new}}(z, y = 0, t) = \frac{1}{2} P_{\text{CR}}^{\text{old}} \times (\text{erf}(-\Delta y^2/4D_{\perp}\Delta t) + \text{erf}(\Delta y^2/4D_{\perp}\Delta t)), \quad (27)$$

where  $D_{\perp} = l^2 D_{\parallel}$  and the spatial step perpendicular to the mean magnetic field direction is  $\Delta y = \Delta z = \sqrt{2CD_{\parallel}\Delta t}$ , where  $C = 0.2$  is the CFL constant. In practice, the impact of the perpendicular diffusion is found to be limited. At late times, the CR distribution slowly converges to the TP solution. These solutions are however at the limit of validity of the quasi-linear theory. This point is discussed in Sect. 3.4.

Figure A.5 shows the solutions of model  $\mathcal{F}$ . Cosmic rays escape before the start of the radiative phase except at 10 GeV where the escape proceeds at the start of the radiative phase with  $t_{\text{esc}} \approx 1.9 \text{ kyr}$  when the shock radius is about  $\sim 3 \text{ pc}$ . In that case, numerical solutions are highly nonlinear over a large distance of  $\sim 20 \text{ pc}$ . Pressure gradients are high with  $((\partial P_{\text{CR}}/\partial z)_{\text{max}} \approx 10^{27} \text{ erg cm}^{-4})$ , and  $D_{\text{min}} \approx 5 \times 10^{24} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  testifying to a strong turbulence rate. In this model, the propagation regime is regime 2 but the growth rate exceeds the damping rate until  $4t_{\text{esc}}$ .

Figure A.6 shows the solution of model  $\mathcal{S}$ . Cosmic rays escape before the start of the radiative phase except at 10 GeV where CRs escape between the PDS and the MCS phase at  $t_{\text{esc}} \approx 11 \text{ kyr}$  when the cloud size is about 5.4 pc. Only the solution at  $t_{\text{esc}}/4$  shows nonlinear behavior and reduced diffusion coefficients ( $\sim 10^{26} \text{ cm}^2 \text{ s}$ ) over a spatial range of 20 pc. At later times the turbulence is gradually relaxed and we tend to the propagation in regime 2 where  $\Gamma_d$  becomes higher than  $\Gamma_g$ . As expected however the solutions are less nonlinear with respect to model  $\mathcal{P}$ .

In summary, model  $\mathcal{P}$  solutions at high energy (10 TeV) are in the nonlinear regime over a long time even if the growth rate decreases with time because the damping in the coupled regime has dropped. Comparing model  $\mathcal{P}$  with the two other models we find that the results are the same for 100 GeV, 1 TeV, and 10 TeV CRs for the three escape models. However, at 10 GeV, CRs are strongly confined in model  $\mathcal{F}$ . At this energy, diffusion is strongly suppressed by a factor exceeding 1000 with respect to standard values.

### 3.3. Diffuse molecular phase

Figure A.7 shows our results for model  $\mathcal{P}$  in the DiM phase. We find that here, CRs escape slightly earlier, and from a smaller cloud than in the CNM phase. This has important consequences on the level of self-generated turbulence and on the CRC expansion properties. The confinement time of CRs as a function of their energy does not evolve in a monotonic way. In particular we observe that at 1 TeV and 10 TeV CRs are well confined.

At 10 GeV, CRs escape at  $t_{1/2} = 3 \text{ kyr}$  during the radiative phase when the cloud size is about 2 pc. The solutions at  $t_{1/2}$  and  $4t_{1/2}$  deviate from the TP ones. Diffusion is suppressed ( $D_{\text{min}} \approx 5 \times 10^{25} - 2 \times 10^{26} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ ) but the self-generated turbulence drops at  $4t_{1/2}$  and this case falls into regime 2 with  $\Gamma_d > \Gamma_g$ . The width over which turbulence is produced is about 17 pc.

At 1 TeV, CRs escape relatively late ( $t_{1/2} \approx 2.4$  kyr) during the radiative phase when the cloud size is about  $\sim 1.9$  pc. High CR pressure gradients suggest that self-generated turbulence levels are high ( $\partial P_{\text{CR}}/\partial z_{\text{max}} \approx 10^{-28}$  erg cm $^{-4}$  at  $t_{1/2}/4$  and  $t_{1/2}$ ) which is confirmed by the values of the diffusion coefficients ( $D_{\text{min}} \approx 2 \times 10^{26}$  cm $^2$  s $^{-1}$  for  $t_{1/2}/4$  and  $t_{1/2}$ ). The turbulence level decreases very slowly at  $4t_{1/2}$ :  $(\partial P_{\text{CR}}/\partial z)_{\text{max}} \approx 10^{-29}$  erg cm $^{-4}$  and  $D_{\text{min}} \approx 10^{27}$  cm $^2$  s $^{-1}$ . This case is associated to regime 2 where  $\Gamma_g > \Gamma_d$ .

At 10 TeV, CRs escape very early ( $t_{1/2} = 0.07$  kyr) during the ST stage when the cloud size is about 0.75 pc. The growth rates are high with  $(\partial P_{\text{CR}}/\partial z)_{\text{max}} \approx 10^{-27}$  erg cm $^{-4}$  and  $D_{\text{min}} \approx 3 \times 10^{26} - 10^{26}$  cm $^2$  s $^{-1}$ . Turbulence production increases with time as in the case of 10 TeV CRs in the CNM and rapidly reaches a high turbulence regime with  $\delta B/B \sim 0.8$ . Nonlinear Landau damping and dilution by perpendicular diffusion are both included. This case corresponds to regime 1 where  $\Gamma_g \gg \Gamma_d$ . We note that the solution at  $t = 10^3 t_{1/2}$  shows a slight increase at  $z \sim 400$  pc, this corresponds to a boundary effect which has no impact on the solution.

Figure A.8 shows the solutions for model  $\mathcal{F}$ . Cosmic rays at 100 GeV and 10 TeV escape during the ST phase while those at 10 GeV and 1 TeV escape at the beginning of the radiative stage at  $t_{\text{esc}} \approx 0.5$  kyr when the cloud size is about  $\sim 1.2$  pc. Turbulence levels are higher than in the model  $\mathcal{P}$ :  $(\partial P_{\text{CR}}/\partial z)_{\text{max}} \approx 10^{-26}$  erg cm $^{-4}$  and  $D_{\text{min}} \sim 10^{25}$  cm $^2$  s $^{-1}$  in the case of 10 GeV CRs. We observe that turbulence levels remain constant over a width of about 50 pc. These solutions correspond to propagation in regime 2 where  $\Gamma_g > \Gamma_d$ . Solutions at 1 TeV are strongly nonlinear. The maximum value of the CR pressure gradient is about  $\sim 10^{-27}$  erg cm $^{-4}$  and remains constant throughout the simulation while the turbulence rate increases with time (at  $t_{\text{esc}}/4$ ,  $D_{\text{min}} \approx 2 \times 10^{25}$  cm $^2$  s $^{-1}$  while at  $4t_{\text{esc}}$  this value becomes lower than  $10^{25}$  cm $^2$  s $^{-1}$ ) over a width of about 40 pc. The CRC then relaxes towards the TP solution at later times. The waves growth rate is highly dominant and is in line with the propagation regime 1.

Figure A.9 shows the solutions for model  $\mathcal{S}$ . At 100 GeV and 10 TeV, CRs escape during the ST phase while those at 10 GeV and 1 TeV escape during the radiative phase at  $t_{\text{esc}} = t_{\text{PDS}} = 4.7$  kyr when the cloud size is about 2.3 pc. At 10 GeV, turbulence levels are relatively weak compared to model  $\mathcal{P}$ . Only CRs escaping before  $t_{\text{esc}}/4$  produce noticeable turbulence ( $D_{\text{min}} \sim 10^{26}$  cm $^2$  s $^{-1}$ ). The damping rate dominates at later times implying that the propagation regime is regime 4. At 1 TeV, CRs produce turbulence until relatively late times but finally relax to the TP solution.

In summary, we find the same trend as for the CNM at high energy: we believe the diffusion to be in the nonlinear regime because the damping rate drops. Comparisons between the models show that the results are the same for 100 GeV and 10 TeV CRs because they escape before the beginning of the SNR radiative stage and the shock velocity is higher than 150 km s $^{-1}$ . However, the propagation properties of the 10 GeV and 1 TeV CRs depend on the escape model. In model  $\mathcal{F}$  the turbulence level is higher and increases with time compared to the solutions of model  $\mathcal{P}$ . Model  $\mathcal{S}$  shows less nonlinear solutions, as expected.

### 3.4. Propagation at high energies

Here we comment over our solutions at 10 TeV in the CNM and DiM phases. At this energy diffusion is found to be highly nonlinear because of the drop of the damping term and because

escape occurs with small CRC sizes. Relaxation towards the TP indeed occurs, although it does take a longer time with respect to smaller energies. However, our solutions are at the limit of validity of the quasi-linear theory and should be considered with some care. These cases require that the 2D diffusion be properly taken into account. This effect should contribute to diluting the local CR gradient and to decreasing the level of self-generated turbulence. In the meantime we also note that CRs at this energy have a large diffusing flux, meaning that they can trigger a large current that can further amplify magnetic perturbations through the triggering of the nonresonant streaming instability (Inoue 2019), producing further confinement. These two aspects however require a much more demanding numerical effort. Finally, our injection model is crude and more specific modeling is required find the phase of the SNR evolution at which CRs at high energy escape. All these aspects will be investigated in a forthcoming study.

## 4. Discussion: Residence time and grammage calculations

The grammage of CRs is defined by the density column of matter crossed by CRs along their pathway in the ISM. This quantity is highly dependent on the particle transport properties. The grammage is defined by  $X \approx 1.4 m_p n_{\text{T}} \tau_{\text{res}}$  where  $\tau_{\text{res}}$  is defined as the CR residence time. At galactic scales, this time is observationally inferred from secondary to primary ratios as is the case for boron (B) to carbon (C). However, this measurement is an average over the whole CR journey in the Galaxy and it includes the transit in the galactic disc and in the halo. In order to more appropriately calculate the CR pathway, it is important to evaluate the contribution of the propagation close to the CR sources where it is anticipated that the CR self-generated turbulence may control CR transport (D'Angelo et al. 2016).

We consider two ISM configurations. First, we calculate the residence time in the case of homogeneous phases as a function of the particle energy in Sect. 4.1, and subsequently we consider cases with multiphase ISM configurations in Sect. 4.3.

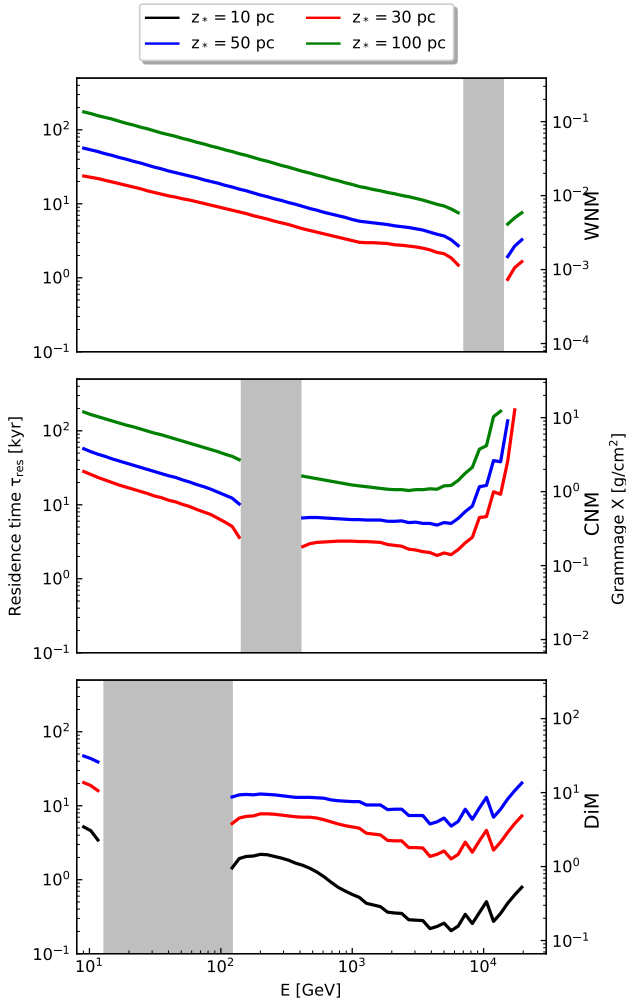
### 4.1. Single-phase studies

In our semi-cylindric 1D problem configuration the residence time is defined as the characteristic time for a CR to escape from the CRC to a fixed distance  $z_*$ . We derive  $\tau_{\text{res}}$  using a method based on the fact that the CR trajectory outside the CRC is dominated by diffusion (an assessment which we have verified). The residence time is calculated from an average of the square of the diffusion distance (see N19):

$$z_*^2 = \frac{\int_0^\infty z^2 P_{\text{CR}}(E, z, \tau_{\text{res}}) dz}{\int_0^\infty P_{\text{CR}}(E, z, \tau_{\text{res}}) dz}. \quad (28)$$

Once  $z_*$  is fixed, we deduce  $\tau_{\text{res}}$  by balancing the two terms of Eq. (28).

We calculate the CR residence time ( $\tau_{\text{res}}$ ) and the associated grammage ( $X$ ) in a given ISM configuration. The results are presented in Fig. 3 for the WNM (top), CNM (middle), and DiM (bottom). Solutions derived are represented by a continuous line. The positions  $z_*$  from the cloud center are indicated by different colors: black (10 pc), red (30 pc), blue (50 pc), and green (100 pc). All calculations are realized in the framework of model  $\mathcal{P}$  (see Fig. 2).



**Fig. 3.** Grammage (right vertical axis) and residence time (left vertical axis) of CRs as a function of their energy in three different phases of the ISM : WNM (*top*), CNM (*middle*), and DiM (*bottom*). Solid lines show the results obtained at different distances  $z_*$  from the center of the source: green (100 pc), blue (50 pc), red (30 pc), and black (10 pc). The shaded region marks the no-wave propagation zone. Oscillations at high energy in the CNM and DiM are due to the limited energy resolution used to reconstruct the different curves.

#### 4.1.1. Warm neutral medium

In the WNM at  $z_* = 100$  pc ( $z_* = 50$  pc and  $z_* = 30$  pc respectively), the grammage evolves as  $E^{-0.5}$  and is about  $X = 0.1$  g cm $^{-2}$  ( $X = 4 \times 10^{-2}$  g cm $^{-2}$  and  $X = 2 \times 10^{-2}$  g cm $^{-2}$ , respectively) at 10 GeV and decreases linearly to reach  $X = 10^{-2}$  g cm $^{-2}$  ( $X = 2 \times 10^{-3}$  g cm $^{-2}$  and  $X = 1 \times 10^{-3}$  g cm $^{-2}$  respectively) at 3 TeV.

In the WNM, we find in Sect. 3 (see also Fig. A.1) that nonlinear effects are weak at almost all energies because ion-neutral interactions proceed in the decoupled regime. This reflects the solutions obtained by the two methods as both show a trend with a grammage which can be parametrized as  $X \simeq X_{\text{WNM}}(E/10 \text{ GeV})^{-0.5}$ , with  $X_{\text{WNM}} \simeq 0.1$  g cm $^{-2}$ . This grammage evolution is characteristic of the transport in the background turbulence.

#### 4.1.2. Cold neutral medium

In the CNM at  $z_* = 100$  pc ( $z_* = 50$  pc and  $z_* = 30$  pc, respectively), the grammage evolves as  $E^{-0.5}$  and is about  $X =$

10 g cm $^{-2}$  ( $X = 3$  g cm $^{-2}$  and  $X = 1.5$  g cm $^{-2}$  respectively) at 10 GeV. The grammage in this model is not defined around 300 GeV due to the Alfvén waves nonpropagation band (see Fig. 1). We then see a slight softening of the slope around 3 TeV and a hardening up to 10 TeV where the grammage reaches  $X = 4$  g cm $^{-2}$  ( $X = 2$  g cm $^{-2}$  and  $X = 1$  g cm $^{-2}$ , respectively).

At low energy ( $E < 300$  GeV), the grammage approximately follows  $X \propto E^{-0.5}$  which is characteristic of the propagation in background turbulence. The discussion in Sect. 3 and the results in Fig. A.4 show a trend very similar in the CNM and WNM at these energies. We do not have any solution around 300 GeV associated to the forbidden propagation zone. In that energy regime, the transport is completely controlled by the background turbulence. Above 300 GeV we can explain the change of behavior by the fact that diffusion is suppressed ( $D \sim 5 \times 10^{26}$  cm $^2$  s $^{-1}$ ) until we reach the half-life time of the CRC. At high energies, the diffusion is even more suppressed over larger scales and longer times which results in an increase of the grammage. We emphasize however that the turbulence levels obtained in this configuration are at the limit the quasi-linear CR transport theory, and more realistic calculations (including 2D effects, improved escape model, and the triggering of other types of instabilities) should lead to a more accurate estimation.

#### 4.1.3. Diffuse molecular

In the DiM at  $z_* = 50$  pc ( $z_* = 30$  pc and  $z_* = 10$  pc, respectively), the grammage value is about  $X = 40$  g cm $^{-2}$  ( $X = 20$  g cm $^{-2}$  and  $X = 4$  g cm $^{-2}$ , respectively) at 10 GeV. We do not have any values of the CR grammage between 20 and 100 GeV because of the absence of escaping solutions due to the nonpropagation of Alfvén waves. Beyond 3 GeV, we observe a softening up to 10 TeV for  $z_* = 30$  pc and  $z_* = 50$  pc. Close to the source ( $z_* = 10$  pc) we observe that the grammage decreases more strongly up to 3 TeV and then hardens between 3 and 10 TeV, where it finally reaches  $X = 5$  g cm $^{-2}$  ( $X = 1.5$  g cm $^{-2}$  and  $X = 0.2$  g cm $^{-2}$ , respectively).

In the DiM, we observe that the grammage evolution with the CR energy is modified compared to the low-energy CNM values and those in the WNM. Softer slopes are induced by stronger CR confinement at high energy (see Appendix A.7). The confinement effect is also visible in the CR pressure distribution.

#### 4.1.4. Single-phase study

In the WNM, the grammage does not exceed 0.1 g cm $^{-2}$  at 10 GeV and scales as  $E^{-0.5}$ . Still at 10 GeV, in the CNM and DiM the grammage is higher, namely  $\sim 10$  g cm $^{-2}$  for the CNM and  $\sim 20$  g cm $^{-2}$  for the DiM. These values are large, but it should be borne in mind that the CNM and DiM cover only a small fraction of the galactic disk volume, hence these media likely only contribute to a small fraction of the total grammage of the CR detected on Earth. Nonetheless, these results also show that the CR grammage may vary considerably depending on the location in the ISM. This could have implications for the production of light elements in the cold ISM located close to a CR source. The unexpected result we find is obtained at high energy where the grammage increases with the energy in the CNM and DiM. High values are found at 10 TeV of the order of 2 g cm $^{-2}$  and 5 g cm $^{-2}$  at 50 pc from the source in the CNM and DiM, respectively. Here again, due to the small volume-filling factor of these phases, we do not expect to have a strong contribution to the CR grammage at these energies. Furthermore, these values are likely overesti-

mates since the results at these energies and in these phases are at the limit of the validity of quasi-linear theory. Finally, the results are obtained for a homogeneous ISM. More realistic multi-phase calculations are presented below for low CR energies and in a forthcoming work for all CR energies.

#### 4.2. Hadronic collision losses

While propagating in dense media, CRs are subject to proton-proton (pp) collisions and energy losses. The typical loss time by pp interaction is

$$t_{\text{loss,pp}} = \left( K_{\text{pp}} \sigma_{\text{pp}} n_{\text{H}} c \right)^{-1}, \quad (29)$$

where  $K_{\text{pp}} \simeq 0.2$  and  $\sigma_{\text{pp}} \sim 30$  mbarn is the pp collision cross section at the interaction threshold and is only increasing with the logarithm of the particle kinetic energy (Kafexhiu et al. 2014). We have checked that even in the DiM at high energy we always find  $t_{\text{res}}/t_{\text{loss,pp}} \ll 1$ . Cosmic rays then propagate in dense phases without suffering strong losses, which can then be a fortiori neglected in Eq. (14).

#### 4.3. Multiple-phase studies

We extend our study to more realistic ISM environments by calculating the CR grammage in an inhomogeneous ISM. We restrict our analysis to CR energies at 10 GeV for three reasons: (1) it is in that energy domain that the grammage has been primarily derived from secondary to primary direct measurements, (2) in this energy domain the self-generated turbulence possibly controls the CR propagation in the ISM (Blasi et al. 2012), and therefore this is a good regime to test the impact of such turbulence over CR propagation in different media, and (3) in the decoupled ion-neutral regime the Alfvén speed is to be taken with respect to the ion density; it does not vary significantly from one phase to another. This means that CRs do not suffer from strong adiabatic losses while propagating from one medium to another, and therefore Eqs. (14) and (15) are still a good approximation to describe CR and wave-coupled evolution. At high energies, ion-neutral collisions occur in the coupled regime, and the Alfvén speed is to be taken with respect to the total gas density. The Alfvén speed varies considerably and then the kinetic equations for particles and waves have to be generalized. This requires a more complete modeling, which is postponed to a future work.

For the multiple-phase case, we propose two setups from the least-dense to the densest phase:

Setup 1: The CRC evolves first in a WNM phase up to a distance of 50 pc where it reaches a CNM phase up to 130 pc. Beyond this distance, the WNM is retrieved up to 200 pc which is the limit of our simulation box.

Setup 2: This setup is structured in the same way as Setup 1 except that we set a DiM cloud in the middle of the CNM phase, between 80 and 100 pc.

In order to avoid strong pressure and diffusion coefficient discontinuities between phases, all space-dependent variables appearing in Eqs. (14)–(15) are smoothed with a hyperbolic tangent function of a width equal to 3 pc. This transition can be changed and we verified that it does not affect the overall results of the grammage calculation. Our results are presented in Figs. 4 and 5 for the space-time evolution of the CR pressure and diffusion coefficient and for the grammage, respectively. In both figures, for each setup, WNM, CNM, and DiM phases are represented by green, orange, and red colors, respectively. In Fig. 4, the plot in the top left hand corner shows the evolution of the CR

pressure at times corresponding to those chosen for the simulation of the expansion of the CRC in the WNM at 10 GeV. The plot in the bottom left corner shows the evolution of the diffusion coefficient. Cosmic ray pressures and diffusion coefficients are normalized to the solution obtained in the WNM case. In the top right corner, CR pressures for Setup 1 (solid line) are compared to those of Setup 2 (dashed line). In the bottom right, the diffusion coefficients for the three setups (WNM: dotted line, WNM-CNM: solid line, WNM-CNM-DiM: dashed line) are compared to those of the TP solution. In Fig. 5 the CR residence time is represented in the left plot while the CR grammage is shown in the right one.

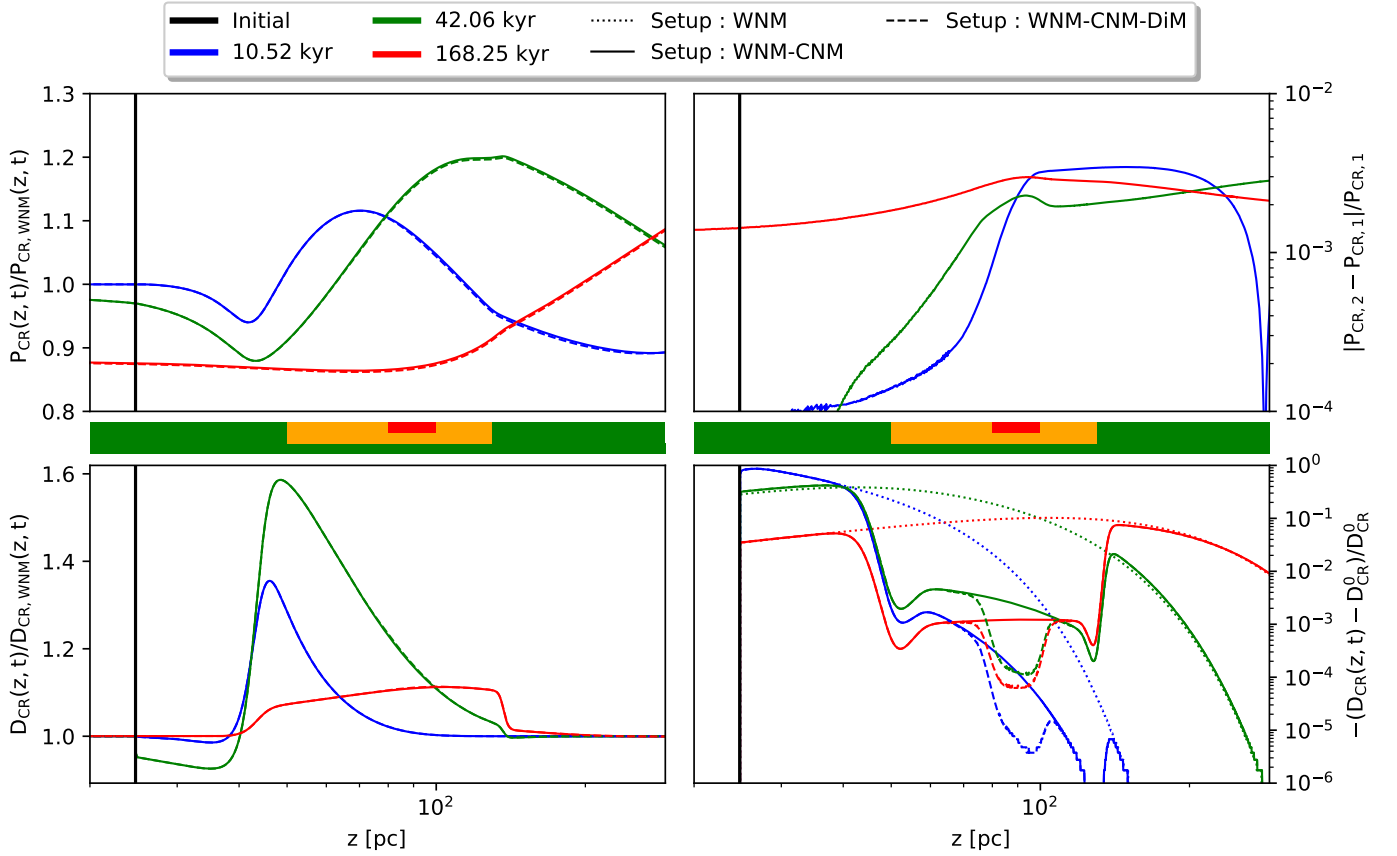
In order to simplify our analysis we use  $\alpha_i = P_{\text{CR},i}(z, t) / P_{\text{CR,WNM}}(z, t)$  and  $\beta_i = D_{\text{CR},i}(z, t) / D_{\text{CR,WNM}}(z, t)$  where  $i = 1, 2$ : the ratio between CR pressure and diffusion coefficients of the setup  $i$  with the CR pressure and diffusion coefficients in the case of a propagation in an homogeneous WNM (see Fig. A.1).

##### 4.3.1. Setup 1: WNM-CNM

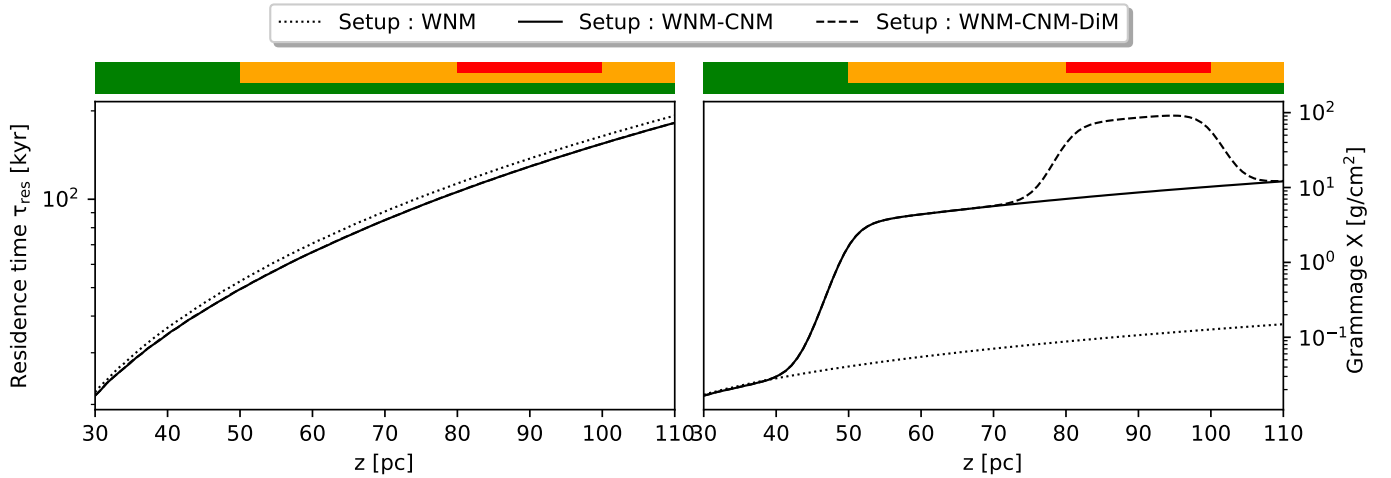
For this setup, Fig. 4 shows that the CR pressure distribution is modified by  $\sim 10\%$  compared to the case of propagation in a homogeneous WNM. At 10.52 kyr, the curve (blue solid line) follows the same behavior as in the homogeneous WNM case up to a distance of  $\sim 30$  pc. Beyond 30 pc the ratio  $\alpha_1$  decreases and increases suddenly at the level of the transition WNM-CNM (50 pc). Here,  $\alpha_1$  reaches  $\sim 1.15$  around 70 pc before decreasing again and tends to  $\sim 0.9$  after the transition CNM-WNM. At 42.06 kyr, we observe that  $\alpha_1$  has a slightly lower value than 1 at the spatial origin of the simulation. The dip close to the WNM–CNM transition is then accentuated ( $\alpha_1 \sim 0.9$ ) and  $\alpha_1$  increases again reaching its maximum ( $\sim 1.2$ ) around 110–120 pc and finally decreases. At 168.25 kyr,  $\alpha_1$  is lower than 0.9 and is almost flat except at the CNM–WNM transition where it begins to increase.

The diffusion coefficient evolution is also affected by the structure of the ISM. At 10.52 kyr, the ratio  $\beta_1$  is constant (and equals 1) up to the WNM–CNM transition (50 pc) and starts to increase to reach  $\sim 1.3$  before gradually decreasing to retrieve the value of 1 at the CNM–WNM transition. At 42.06 kyr, the ratio  $\beta_1$  is lower than 1 ( $\sim 0.9$ ) and starts to increase up to the WNM–CNM transition to reach  $\sim 1.6$  and decreases progressively to reach 1 near the CNM–WNM transition. At 168.25 kyr,  $\beta_1$  is again close to 1 and starts to increase slowly from the WNM–CNM transition to reach 1.1 close to the CNM–WNM transition where it decreases abruptly to the value of 1 beyond.

The different behaviors between the case of a propagation in a homogeneous WNM and Setup 1 essentially come from the Alfvén waves damping timescales (see Fig. 1). In the WNM, the damping time is about 10 yr while in the CNM it is about 1 yr. In the master Eqs. (14) and (15), the right-hand term,  $2(\Gamma_{\text{growth}} - \Gamma_{\text{d}})I$ , decreases from the WNM to the CNM. As  $\Pi$  is a conserved quantity regardless of the phase, the figure can be explained easily: the ratio of the pressures starts at 1 in the WNM, then as the damping is more severe in the CNM, less waves are produced at the WNM–CNM transition. The CR pressure in the CNM goes first below and above the WNM solution because CRs diffuse faster in the CNM. Finally, the CNM solution catches the WNM ones beyond, but the ratio reaches 0.9 instead of 1 because of the conservation of  $\Pi$ . The peak in CR pressure in the CNM is slowly advected out with time as the solution relaxes to the TP case. The bottom right part of Fig. 4 shows that the difference between the self-generated and



**Fig. 4.** Evolution of the CR pressure (*top figures*) and their associated diffusion coefficient (*bottom panels*) in space at different times of the simulation based on the CRC half-life time for 10 GeV CRs in the WNM: 10.52 kyr (blue), 42.06 kyr (green), and 168.25 kyr (red). The simulation setups are represented by the different line styles: solid line for the WNM-CNM, dashed line for the WNM-CNM-DiM, and dotted line for the homogeneous WNM. The vertical black lines represent the initial size of the CRC. The phase decomposition for each setup is represented between the figures by the colored lines: green for WNM, orange for CNM, and red for DiM. *Top-left figure*: relative evolution of the CR pressure for WNM-CNM and WNM-CNM-DiM setups compared to the CR pressure evolution in the case of propagation in a homogeneous WNM phase. *Top-right panel*: relative CR pressure evolution for the WNM-CNM-DiM ( $P_{CR,2}$ ) and the WNM-CNM ( $P_{CR,1}$ ) setups, respectively. *Bottom-left panel*: relative evolution of the CR diffusion coefficients compared to the evolution of the CR diffusion coefficient in the case of propagation in a homogeneous WNM phase. *Bottom-right panel*: normalized relative evolution of the CR diffusion coefficient around the CNM and CNM-DiM phases. We recall that  $D_{CR}^0 = 10^{28} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ .



**Fig. 5.** Evolution of the CR grammage (*right part*) and residence time (*left part*) in Setup 1: WNM-CNM and Setup 2: WNM-CNM-DiM represented by a solid curve and a dashed curve, respectively. These setups are compared with the case of the expansion of a CRC in a homogeneous WNM represented by the dotted lines. Each setup phase configuration is represented by a color code: WNM (green), CNM (orange), and DiM (red).

background diffusion coefficients is not large, unlike in homogeneous cases. This small difference at 10 GeV is due to the strong damping effect of ion-neutral collisions.

The CR residence time and grammage are presented by solid lines in Fig. 5 on the left and on the right, respectively. We observe that the residence time increases linearly from 22 kyr at 30 pc to 200 kyr at 110 pc. The evolution curve of Setup 1 is slightly lower than that obtained in the case of a CR propagation in a homogeneous WNM. The associated grammage is relatively weak close to the source ( $X \sim 0.02 \text{ g cm}^{-2}$  at 30 pc) and increases linearly by following the residence time trend up to the WNM–CNM transition where it increases by a factor of  $100 \sim n_{T,\text{CNM}}/n_{T,\text{WNM}}$  to reach the order of  $10 \text{ g cm}^{-2}$  at 110 pc from the source.

#### 4.3.2. Setup 2: WNM–CNM–DiM

As presented by the left plots of Fig. 4, the observed trends in Setup 2 are almost equivalent to those observed in Setup 1. The modifications associated to the presence of the DiM, although small, are visible in the right-hand plots. The CR transport properties are essentially modified by the presence of the CNM. The effect of the DiM is negligible ( $\sim 0.2\%$  of relative CR pressure variation). The only impact can be seen in Fig. 5 where the grammage increases due to the density contrast with respect to Setup 1.

It is important to note again that we did not take into account adiabatic losses associated to the spatial dependence of the Alfvén velocity. This aspect is left out for a future, more detailed work which may reveal a noticeable effect of the presence of the DiM phase on the CR propagation properties in the ISM.

## 5. Discussion and conclusion

In this study, we extend the work initiated in Nava et al. (2016) aimed at investigating the propagation of CRs in the ambient ISM surrounding SNRs. Here, we focus on cold, partially ionized atomic and molecular phases. To this aim, using the CRC model we simultaneously solve two 1D transport equations in 1D: an equation over the CR pressure  $P_{\text{CR}}$  (see Eq. (14)) and an equation over the Alfvén slab waves energy density  $I(k)$  (see Eq. (15)). We restrict our analysis to a resonant interaction where the particle Larmor radius and the wave number verify  $r_l = k^{-1}$  in the quasi-linear approximation of CR transport; hence the lack of strong feed-back over the background turbulence. We determined the characteristic confinement time of CRs depending on their energy and the ISM phases: WNM, CNM, DiM. We discuss three different escape models once the SNR enters in the radiative phase, either considering a continuous escape (model  $\mathcal{P}$ ), an escape at the end of the free expansion phase (model  $\mathcal{F}$ ), or an escape in the late radiative phase once the SNR forward shocks reach a speed of  $\sim 150 \text{ km s}^{-1}$  (model  $\mathcal{S}$ ). We performed CRC evolution simulations for monoenergetic CR populations from 10 GeV to 10 TeV in both ISM phases in order to probe the evolution of the CR pressure distribution  $P_{\text{CR}}(E, z, t)$ ; the CR pressure gradient distribution  $\partial P_{\text{CR}}(E, z, t)/\partial z$ , which is analogous to the force exerted by CR fluid on the plasma; and the CR diffusion coefficient  $D(E, z, t)$ , which is intimately linked to the rate of excited Alfvén modes. Using the numerical solutions obtained we derived the grammage around a single cloud either in a homogeneous ISM or an ISM composed of multiple phases.

### 5.1. Results

Our results show that the Alfvén turbulence generated by the streaming of CRs can have an important effect on CR accelera-

tion and propagation over distances of between a few tens and one hundred parsecs.

The CR escape solutions are presented in Fig. 2 for the three phases under study. We find a similar trend for the WNM as already discussed by N16 for the warm ionized phase. We show that in the CNM, at 1 TeV and 3 TeV, CRs escape at the same time as 100 GeV at  $\sim 1 \text{ kyr}$  while at 300 GeV CRs escape earlier at  $\sim 0.4 \text{ kyr}$  at the same time as 10 and 30 TeV. In the DiM, the radiative phase begins at  $\sim 0.3 \text{ kyr}$  and at 10 GeV, 300 GeV, and 1 TeV, CRs escape during the radiative stage at  $\sim 2 \text{ kyr}$ , while 30 TeV CRs escape at  $\sim 0.05 \text{ kyr}$ . The larger escape times at high energy are explained by the drop of the ion-neutral collisions in the coupled interaction regime.

We find that a non-negligible quantity of Alfvén modes are generated in the CNM ( $D \sim 5 \times 10^{27} \text{ cm}^2/\text{s}$  at 10 TeV) and in the DiM ( $D \approx \times 10^{26}$  at 10 TeV) after the CRC half-life time. These modes contribute to an enhanced CR confinement with respect to the transport by background turbulence. The model  $\mathcal{F}$  systematically shows stronger turbulence generation and longer confinement times with respect to the two others models.

In the WNM we show that the grammage behavior follows the observationally measured behavior and can be parametrized as  $X = X_{\text{WNM}}(z, 10 \text{ GeV} < E_0 < 10 \text{ TeV})(E/E_0)^{-0.5}$ . The findings concerning propagation regimes in the CNM and the DiM imply that the CR grammage around SNRs can be enhanced at very high energy in these phases. In the CNM, the grammage has two regimes: the first one being between 10 GeV and 3 TeV with  $X = X_{\text{CNM}}(z, 10 \text{ GeV} < E_0 < 3 \text{ TeV})(E/E_0)^{-0.5}$ . Above 3 TeV, the grammage increases. In the DiM, the grammage decreases more slowly than in the WNM from 300 GeV to 10 TeV.

We perform a study at 10 GeV with multiphase setups: WNM–CNM and WNM–CNM–DiM. We find that the CR grammage ( $\tau_{\text{res}}$ ) is controlled by the densest phase and can reach  $\sim 10 \text{ g cm}^{-2}$  in the WNM–CNM case and up to  $\sim 10^2 \text{ g cm}^{-2}$  in the WNM–CNM–DiM case. The CR pressure evolution is however controlled by the CNM phase.

As stated above, our solutions at high energy are at the limit of validity of the quasi-linear theory. A more complete modeling including a 2D description is necessary for more accurate estimations of the grammage. We can also argue that if the grammage is expected to be smaller as extrapolated from [B/C] measurements, it reflects an average of the ensemble of CR pathways in the ISM. Partially ionized phases like the CNM and the DiM (and denser phases) do not cover a large fraction of the galactic volume, meaning that in total they do not significantly contribute to the average grammage.

### 5.2. Discussion and perspectives

We show that CRs accelerated at SNR shocks can have an important impact on the plasma turbulence properties around SNRs. Slightly unexpectedly, self-excited Alfvén modes can provide some confinement of CRs around the sources in the dense cold ISM environments beyond 1 TeV due to a drop of the ion-neutral collision damping in the coupled regime. At lower energies, ion-neutral collisions are in the decoupled regime and strongly damp self-generated waves. However, a substantial number of waves can still be generated, especially if CRs are released at the end of the free expansion phase as in model  $\mathcal{F}$ . In that case, diffusion can be suppressed by two to three orders of magnitude over distances of a few tens of parsecs over a rime period of a few thousand years. These waves are driven by strong CR gradients which in turn can have some impact on ISM dynamics (Commerçon et al. 2019).

However, several assumptions made in our model limit its implications. First, we only consider the resonant streaming instability and slab Alfvén modes. We do not investigate other types of instabilities like the nonresonant streaming instability uncovered by Bell (2004). Our model is only 1D and is therefore restricted to scales smaller than the coherence length of the background turbulence. One-dimensional geometry may also be problematic to investigate the inhomogeneous ISM, as is likely the case for atomic and molecular phases. The magnetic field lines can be mixed with turbulent motions in the super-Alfvénic regime which may occur for instance in the DiM phase, or possibly also for denser phases. A cylindrical 2D approach would be valuable to account for the geometry of the molecular clouds as well as the compression of the magnetic field lines (Chandran 2000). Two-dimensional calculations can also account for perpendicular CR diffusion. Another limit of our model is that it is restricted to medium where the speed of the scattering center remains approximately uniform. All these aspects, namely the geometry and adiabatic losses, will be accounted for in a future improved modeling.

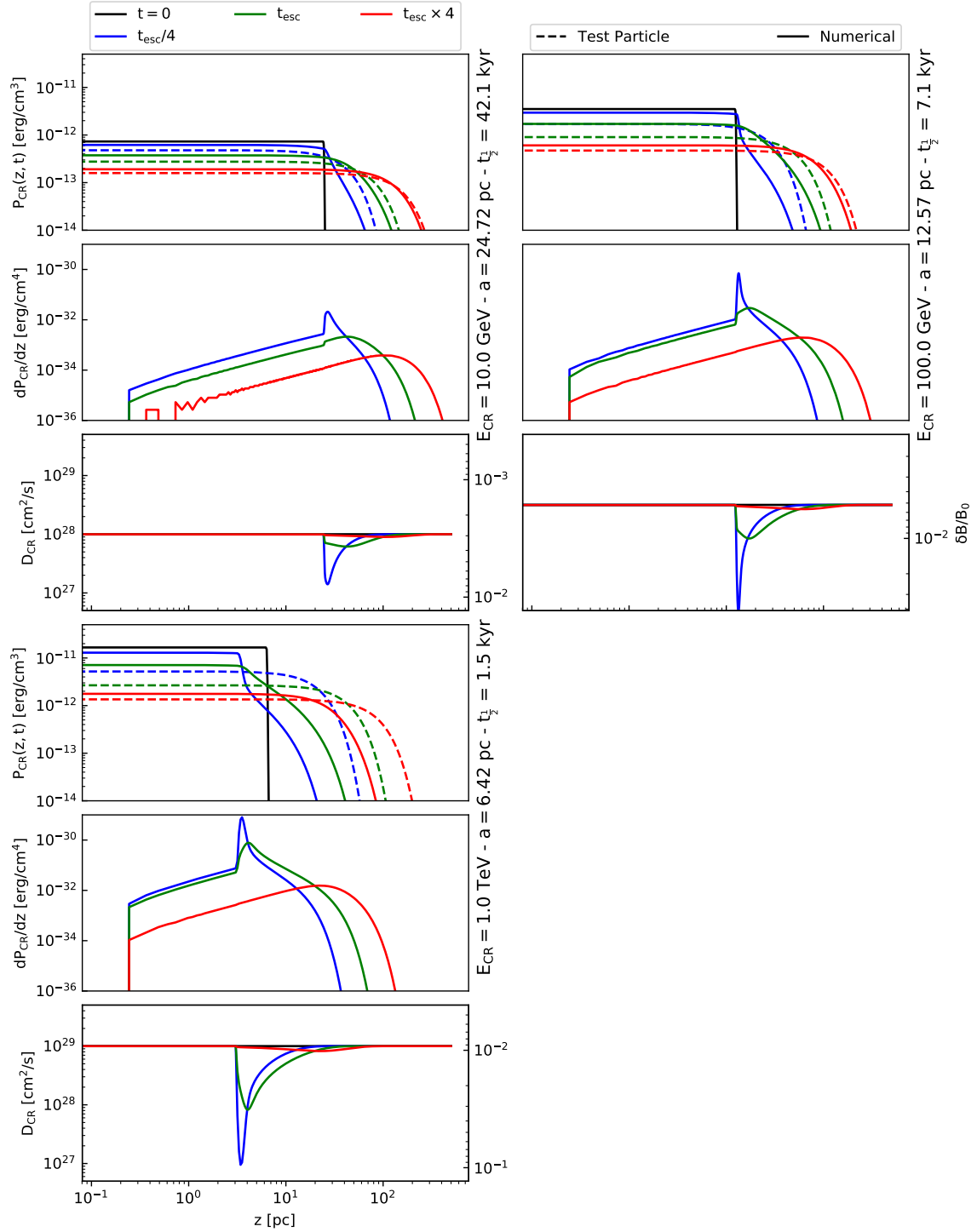
Acknowledging these limitations, we argue that this simple model indicates that CR leakage from SNRs can induce a suppression of the diffusion with respect to what we could expect from the transport in the background turbulence. This effect should be taken into account in various aspects of the modeling of the ISM around CR sources.

*Acknowledgements.* The authors thank S.Gabici, L. Nava, S. Recchia for fruitful discussions and for their comments on the manuscript.

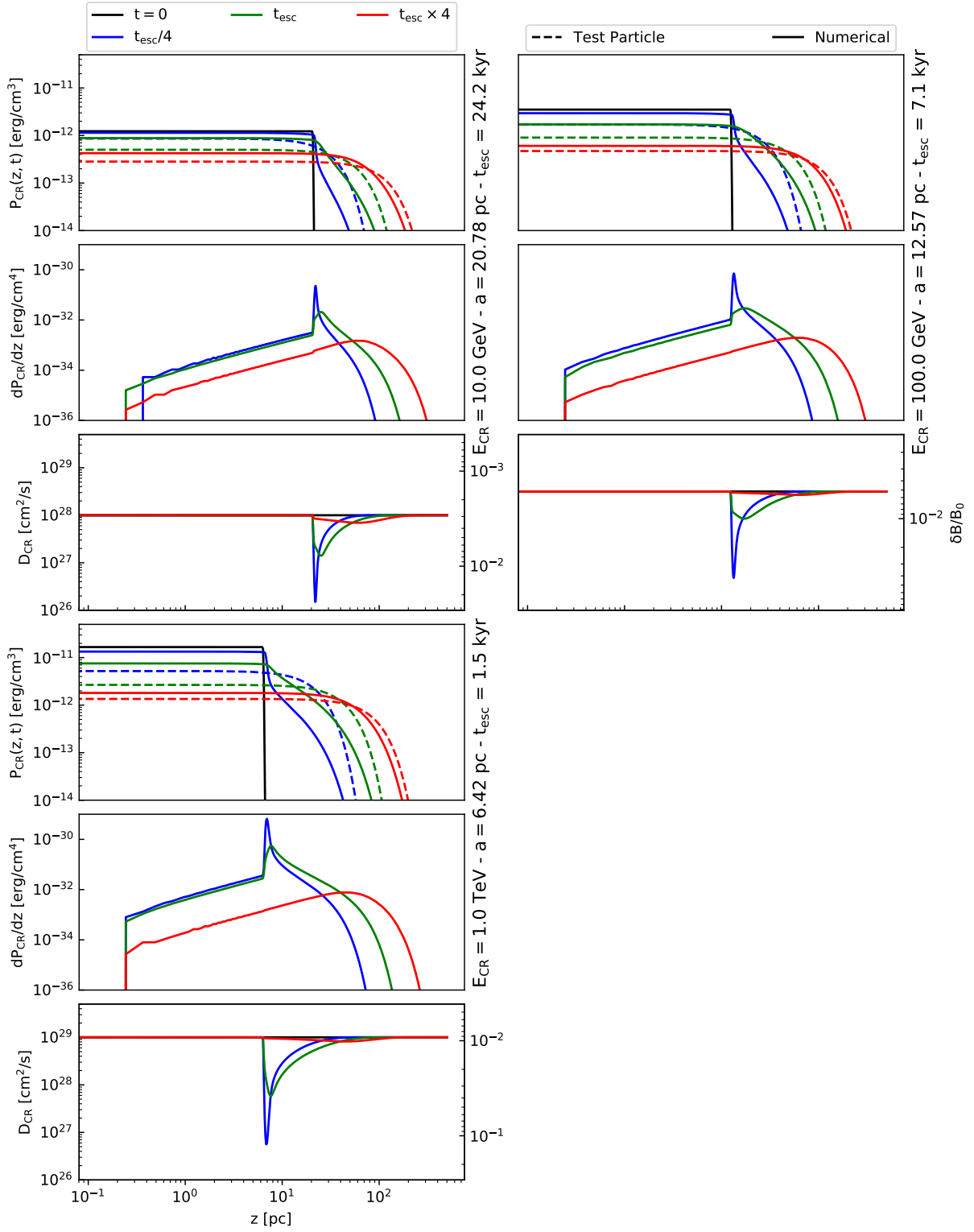
## References

- Adhikari, L., Zank, G. P., Bruno, R., et al. 2015, *ApJ*, **805**, 63
- Aharonian, F., Akhperjanian, A. G., Bazer-Bachi, A. R., et al. 2008, *A&A*, **481**, 401
- Allen, M. G., Groves, B. A., Dopita, M. A., Sutherland, R. S., & Kewley, L. J. 2008, *ApJS*, **178**, 20
- Bell, A. R. 1978a, *MNRAS*, **182**, 147
- Bell, A. R. 1978b, *MNRAS*, **182**, 443
- Bell, A. R. 2004, *MNRAS*, **353**, 550
- Bell, A. R., Schure, K. M., Reville, B., & Giacinti, G. 2013, *MNRAS*, **431**, 415
- Berezhko, E. G. 1996, *Astropart. Phys.*, **5**, 367
- Berezhko, E. G., & Ellison, D. C. 1999, *ApJ*, **526**, 385
- Blasi, P., Amato, E., & Serpico, P. D. 2012, *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 061101
- Burlaga, L. F., Florinski, V., & Ness, N. F. 2015, *ApJ*, **804**, L31
- Chandran, B. D. G. 2000, *ApJ*, **529**, 513
- Cioffi, D. F., McKee, C. F., & Bertschinger, E. 1988, *ApJ*, **334**, 252
- Commerçon, B., Marcowith, A., & Dubois, Y. 2019, *A&A*, **622**, A143
- D'Angelo, M., Blasi, P., & Amato, E. 2016, *Phys. Rev. D*, **94**, 083003
- Drury, L. O., Ellison, D. E., Aharonian, F. A., et al. 2001, *Space Sci. Rev.*, **99**, 329
- Everett, J. E., & Zweibel, E. G. 2011, *ApJ*, **739**, 30
- Farmer, A. J., & Goldreich, P. 2004, *ApJ*, **604**, 671
- Ferrière, K. M. 2001, *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 1031
- Field, G. B., Goldsmith, D. W., & Habing, H. J. 1969, *BAAS*, **1**, 240
- Gaensler, B. M., Madsen, G. J., Chatterjee, S., & Mao, S. A. 2008, *PASA*, **25**, 184
- Giacinti, G., & Kirk, J. G. 2017, *ApJ*, **835**, 258
- Girichidis, P., Naab, T., Walch, S., et al. 2016, *ApJ*, **816**, L19
- Grénier, I. A., Black, J. H., & Strong, A. W. 2015, *ARA&A*, **53**, 199
- H.E.S.S. Collaboration (Abdalla, H., et al.) 2018, *A&A*, **612**, A6
- Haverkorn, M., Brown, J. C., Gaensler, B. M., & McClure-Griffiths, N. M. 2008, *ApJ*, **680**, 362
- Heiles, C., & Troland, T. H. 2003, *ApJ*, **586**, 1067
- Inoue, T. 2019, *ApJ*, **872**, 46
- Jean, P., Gillard, W., Marcowith, A., & Ferrière, K. 2009, *A&A*, **508**, 1099
- Kafexhiu, E., Aharonian, F., Taylor, A. M., & Vila, G. S. 2014, *Phys. Rev. D*, **90**, 123014
- Kulsrud, R., & Pearce, W. P. 1969, *ApJ*, **156**, 445
- Lagage, P. O., & Cesarsky, C. J. 1983, *A&A*, **125**, 249
- Larson, R. B. 1979, *MNRAS*, **186**, 479
- Lazarian, A. 2016, *ApJ*, **833**, 131
- Lazarian, A., & Vishniac, E. T. 1999, *ApJ*, **517**, 700
- Lazarian, A., Vishniac, E. T., & Cho, J. 2004, *ApJ*, **603**, 180
- Lee, J.-J., Koo, B.-C., Raymond, J., et al. 2007, *ApJ*, **659**, L133
- Mac Low, M.-M., & Klessen, R. S. 2004, *Rev. Mod. Phys.*, **76**, 125
- Malkov, M. A., Diamond, P. H., Sagdeev, R. Z., Aharonian, F. A., & Moskalenko, I. V. 2013, *ApJ*, **768**, 73
- Matthaeus, W. H., Oughton, S., Pontius, Jr., D. H., & Zhou, Y. 1994, *J. Geophys. Res.*, **99**, 19267
- McIvor, I. 1977, *MNRAS*, **178**, 85
- McKee, C. F., & Ostriker, J. P. 1977, *ApJ*, **218**, 148
- Nava, L., Gabici, S., Marcowith, A., Morlino, G., & Ptuskin, V. S. 2016, *MNRAS*, **461**, 3552
- Nava, L., Recchia, S., Gabici, S., et al. 2019, *MNRAS*, **484**, 2684
- Neufeld, D. A., Wolfire, M. G., & Schilke, P. 2005, *ApJ*, **628**, 260
- Ng, C. S., & Bhattacharjee, A. 1997, *Phys. Plasmas*, **4**, 605
- Padovani, M., Galli, D., & Glassgold, A. E. 2009, *A&A*, **501**, 619
- Phan, V. H. M., Morlino, G., & Gabici, S. 2018, *MNRAS*, **480**, 5167
- Ptuskin, V. S., Zirakashvili, V. N., & Plessner, A. A. 2008, *Adv. Space Res.*, **42**, 486
- Recchia, S., Blasi, P., & Morlino, G. 2017, *MNRAS*, **470**, 865
- Reville, B., Kirk, J. G., & Duffy, P. 2009, *ApJ*, **694**, 951
- Reynolds, R. J. 1989, *ApJ*, **345**, 811
- Roy, N., Peedikakkandy, L., & Chengalur, J. N. 2008, *MNRAS*, **387**, L18
- Schlickeiser, R. 2002, *Cosmic Ray Astrophysics*
- Schure, K. M., & Bell, A. R. 2013, *MNRAS*, **435**, 1174
- Shull, J. M., & McKee, C. F. 1979, *ApJ*, **227**, 131
- Skilling, J. 1971, *ApJ*, **170**, 265
- Skilling, J. 1975, *MNRAS*, **172**, 557
- Snow, T. P., & McCall, B. J. 2006, *ARA&A*, **44**, 367
- Soler, R., Carbonell, M., & Ballester, J. L. 2013, *ApJS*, **209**, 16
- Solomon, P. M., Rivolo, A. R., Barrett, J., & Yahil, A. 1987, *ApJ*, **319**, 730
- Sutherland, R. S., & Dopita, M. A. 2017, *ApJS*, **229**, 34
- Telezinsky, I., Dwarkadas, V. V., & Pohl, M. 2012, *A&A*, **541**, A153
- Truelove, J. K., & McKee, C. F. 1999, *ApJS*, **120**, 299
- Vaupré, S., Hily-Blant, P., Ceccarelli, C., et al. 2014, *A&A*, **568**, A50
- Wentzel, D. G. 1968, *ApJ*, **152**, 987
- Xu, S., Lazarian, A., & Yan, H. 2015, *ApJ*, **810**, 44
- Xu, S., Yan, H., & Lazarian, A. 2016, *ApJ*, **826**, 166
- Yan, H., & Lazarian, A. 2004, *ApJ*, **614**, 757
- Zank, G. P., Dosch, A., Hunana, P., et al. 2012, *ApJ*, **745**, 35
- Zank, G. P., Matthaeus, W. H., & Smith, C. W. 1996, *J. Geophys. Res.*, **101**, 17093
- Zirakashvili, V. N., & Ptuskin, V. S. 2012, *Astropart. Phys.*, **39**, 12
- Zirakashvili, V. N., & Ptuskin, V. S. 2018, *Astron. Lett.*, **44**, 799

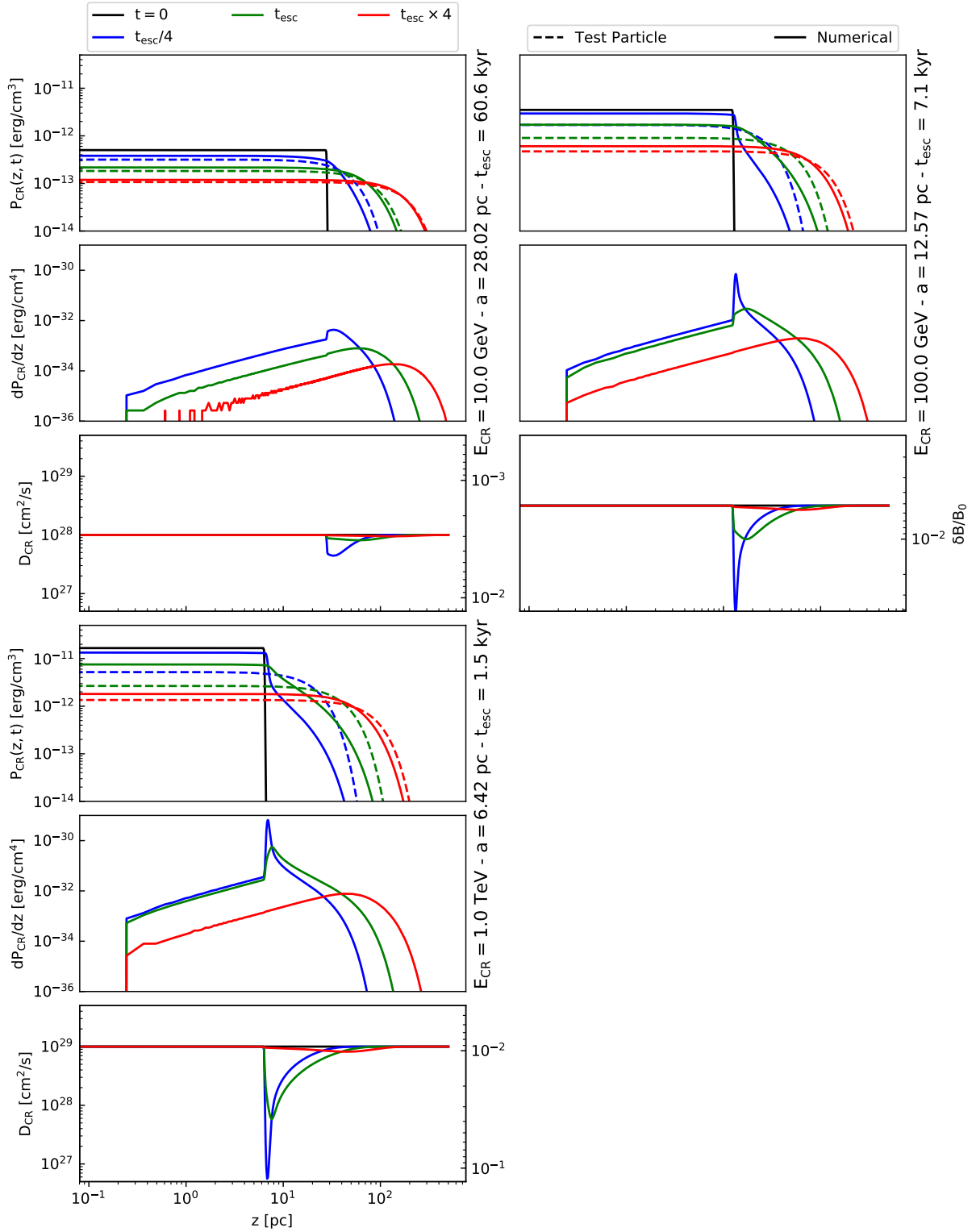


**Appendix A: Cosmic ray propagation in the different ISM phases for the three models**
**A.1. Results for the WNM**


**Fig. A.1.** Time evolution of a CRC of initial radius  $a$  in the WNM phase for model  $\mathcal{P}$ . The results at 10 GeV, 100 GeV, 1 TeV, and 10 TeV are shown from the left to the right and the top to the bottom. Each panel presents three plots and shows CR pressure evolution as a function of space for three times (*top*), the CR pressure gradient evolution (*middle*), and diffusion coefficients (*bottom*). Blue, green, and red refer to  $t_{1/2}/4$ ,  $t_{1/2}$ , and  $4t_{1/2}$ , respectively. The initial CR pressure distribution is represented by a thin black dashed line. The same typography is used for the background diffusion coefficient. Numerical solutions are represented with solid lines while test-particle solutions are presented by dashed lines.

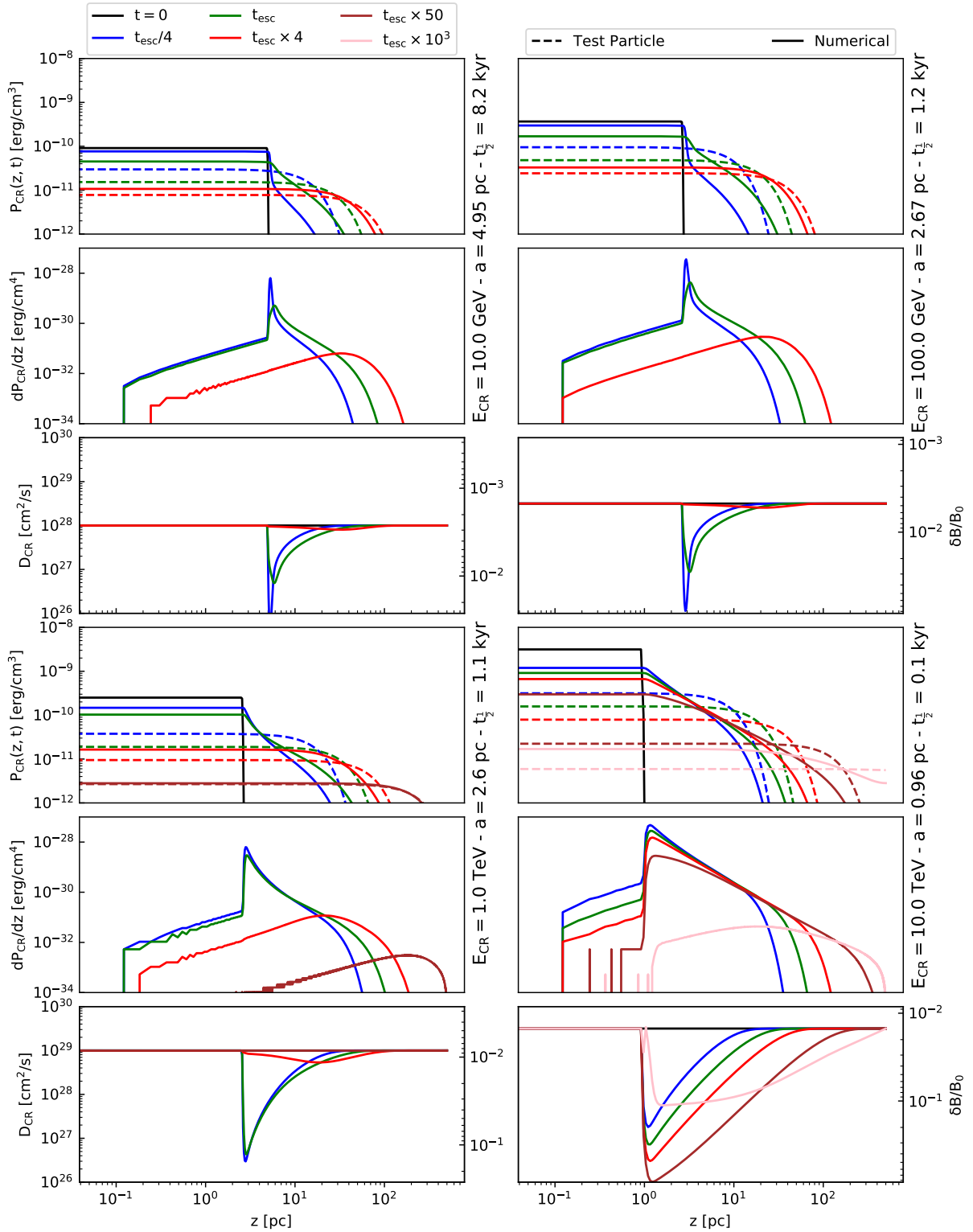


**Fig. A.2.** Time evolution of a CRC of initial radius  $a$  in the WNM phase for model  $\mathcal{F}$ . Light gray plots show solutions differing from model  $\mathcal{P}$ . See Fig. A.1 for more details.

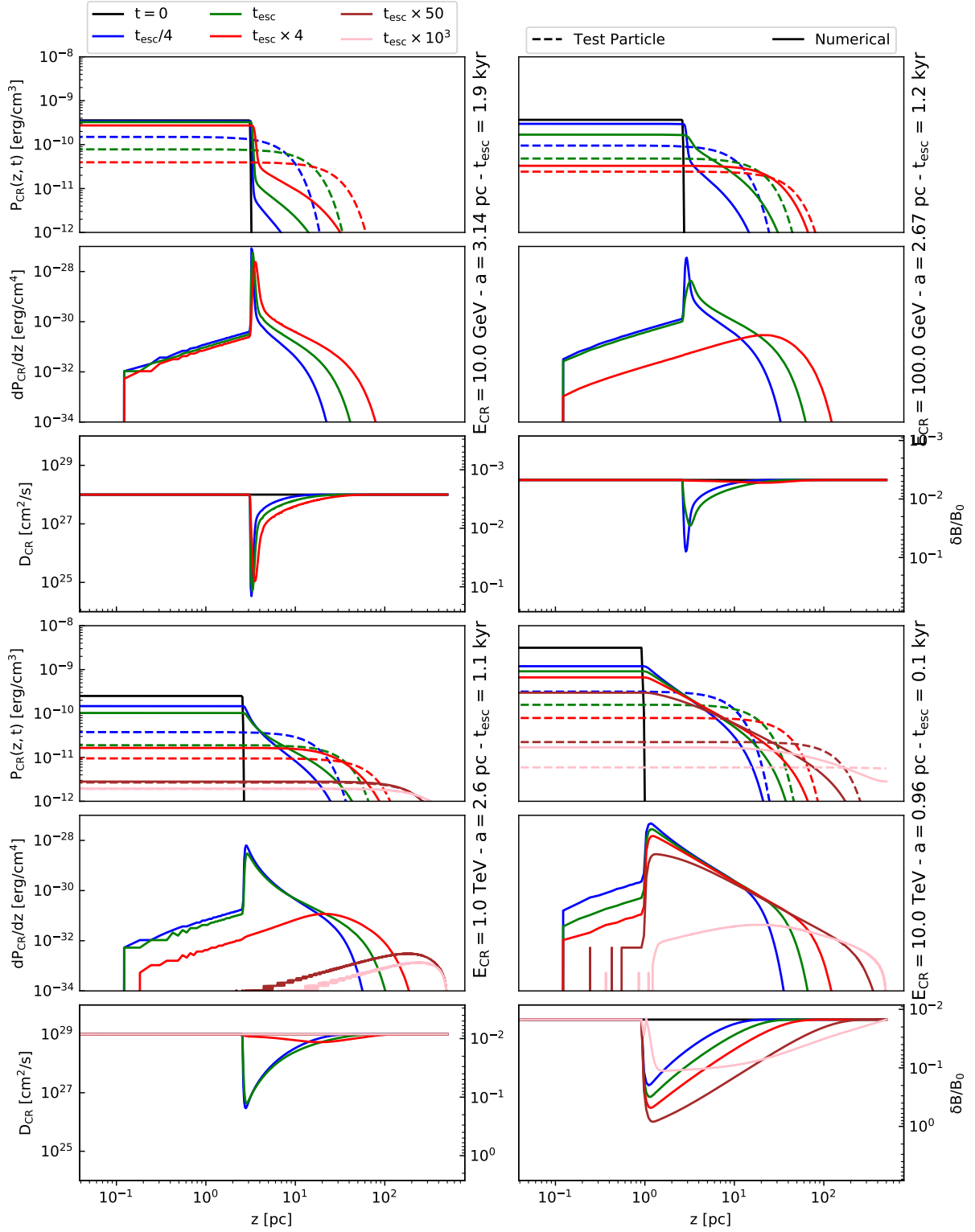


**Fig. A.3.** Time evolution of a CR cloud of initial radius  $a$  in the WNM phase of the interstellar medium for the model  $S$ . Light gray plots show solutions differing from model  $P$ . See Fig. A.1 for more details.

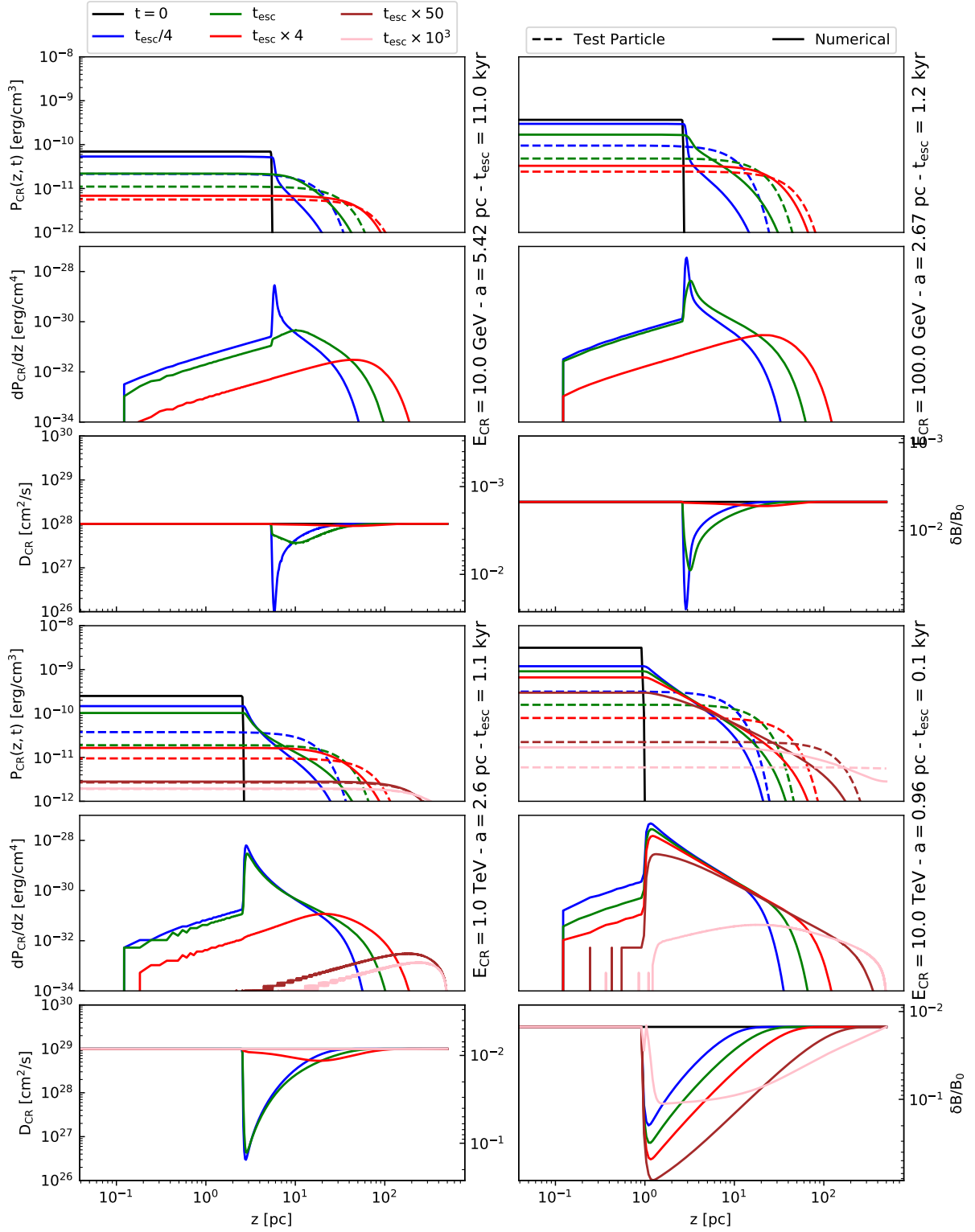
## A.2. Results for the CNM



**Fig. A.4.** Time evolution of a CR cloud of initial radius  $a$  in the CNM phase of the interstellar medium for model  $\mathcal{P}$ . See Fig. A.1 for more details. In this medium we add two curves in brown and pink corresponding to solutions at  $50$  and  $10^3 t_{1/2}$ .

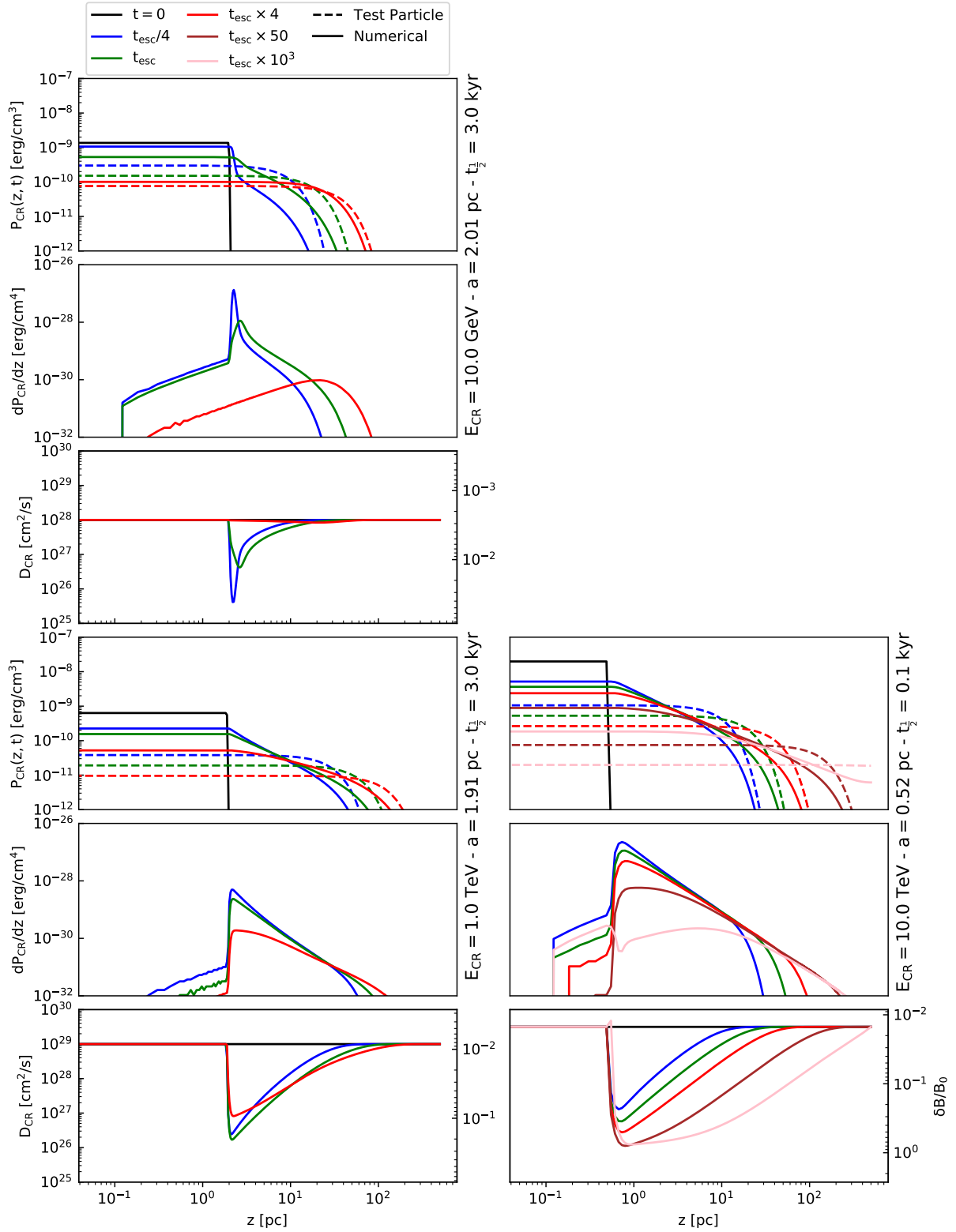


**Fig. A.5.** Time evolution of a CR cloud of initial radius  $a$  in the CNM phase of the interstellar medium for model  $\mathcal{F}$ . Light gray plots refer to behaviors differing from model  $\mathcal{P}$ . See Fig. A.1 for more details.

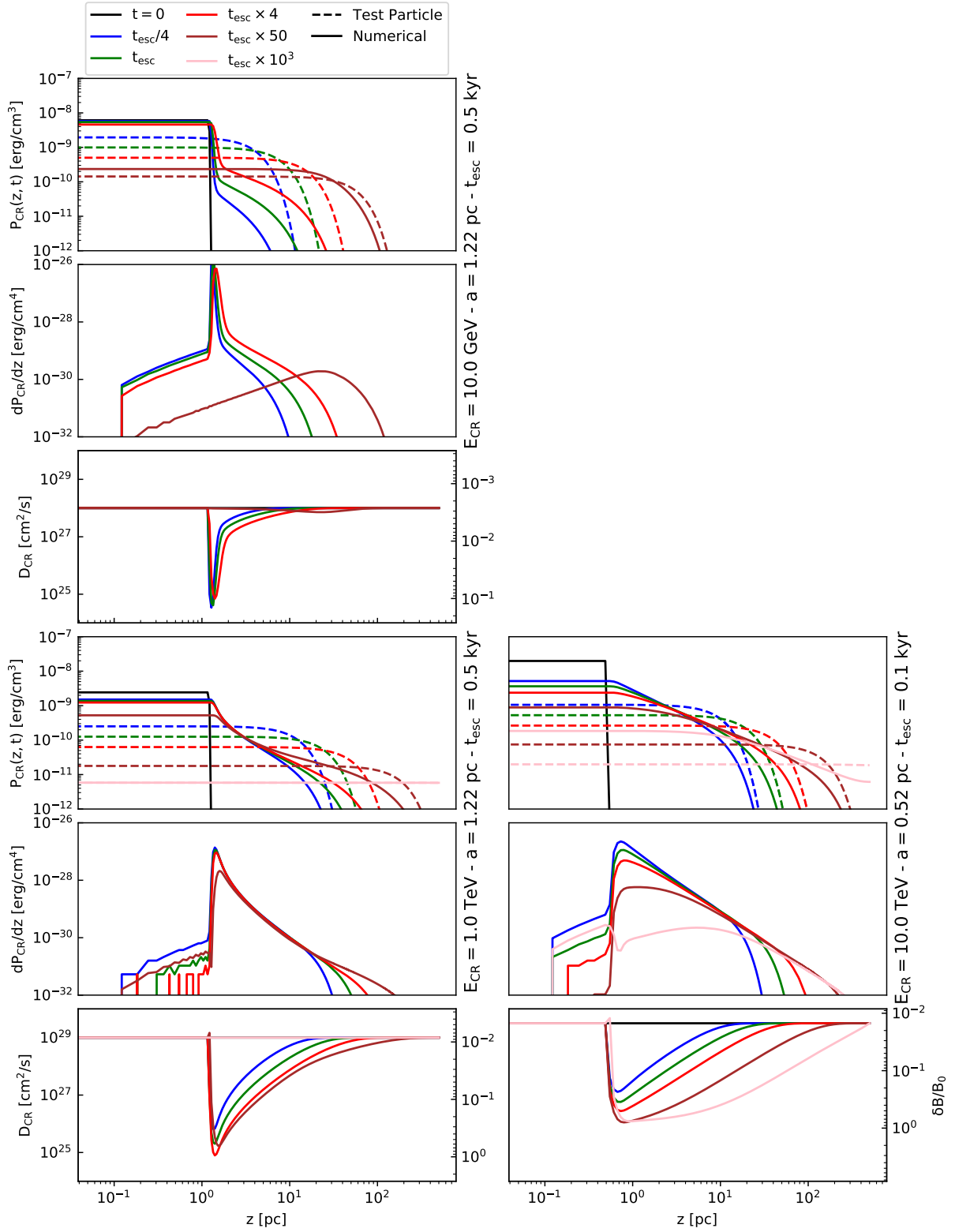


**Fig. A.6.** Time evolution of a CR cloud of initial radius  $a$  in the CNM phase of the interstellar medium for model  $S$ . Light gray plots refer to behaviors differing from model  $\mathcal{P}$ . See Fig. A.1 for more details.

## A.3. Results for the DiM medium

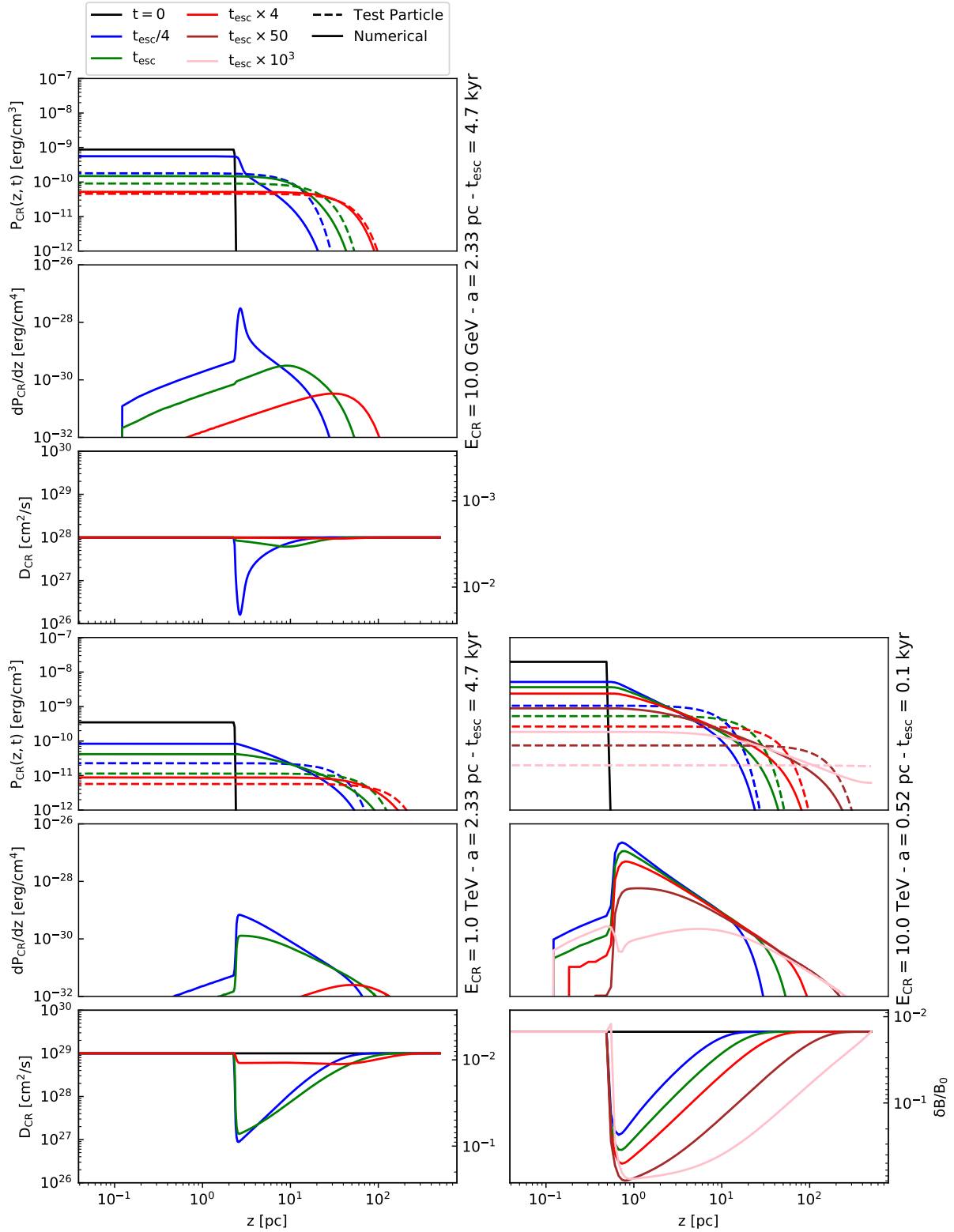


**Fig. A.7.** Time evolution of a CR cloud of initial radius  $a$  in the DiM phase of the interstellar medium for model  $\mathcal{P}$ . See Fig. A.1 for more details. In this medium we add two curves in brown and pink corresponding to solutions at  $50$  and  $10^3 t_{1/2}$ .



**Fig. A.8.** Time evolution of a CR cloud of initial radius  $a$  in the DiM phase of the interstellar medium for model  $\mathcal{F}$ . Light gray plots refer to behaviors differing from model  $\mathcal{P}$ . See Fig. A.1 for more details.





**Fig. A.9.** Time evolution of a CR cloud of initial radius  $a$  in the DiM phase of the interstellar medium for model  $S$ . Light gray plots refer to behaviors differing from model  $\mathcal{P}$ . See Fig. A.1 for more details.

# Non-linear diffusion of cosmic rays escaping from supernova remnants – II. Hot ionized media

L. Nava<sup>1</sup>,<sup>2,3</sup>★ S. Recchia,<sup>4</sup> S. Gabici,<sup>4</sup> A. Marcowith,<sup>5</sup> L. Brahimí<sup>5</sup> and V. Ptuskin<sup>6</sup>

<sup>1</sup>INAF – Osservatorio Astronomico di Brera, Via Bianchi 46, I-23807 Merate, Italy

<sup>2</sup>INAF – Osservatorio Astronomico di Trieste, Via Tiepolo 11, I-34131 Trieste, Italy

<sup>3</sup>INFN – Sezione di Trieste, via Valerio 2, I-34127 Trieste, Italy

<sup>4</sup>APC, AstroParticule et Cosmologie, Université Paris Diderot, CNRS/IN2P3, CEA/Irfu, Observatoire de Paris, Sorbonne Paris Cité, 10, rue Alice Domon et Léonie Duquet, F-75205 Paris Cedex 13, France

<sup>5</sup>Laboratoire Univers et particules de Montpellier, Université Montpellier/CNRS, F-34095 Montpellier, France

<sup>6</sup>Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radiowave Propagation, 108840 Troitsk, Moscow, Russia

Accepted 2019 January 11. Received 2018 November 20; in original form 2018 August 3

## ABSTRACT

We study the problem of the escape and transport of cosmic rays (CRs) from a source embedded in a fully ionized, hot phase of the interstellar medium (HIM). In particular, we model the CR escape and their propagation in the source vicinity taking into account excitation of Alfvénic turbulence by CR streaming and mechanisms damping the self-excited turbulence itself. Our estimates of escape radii and times result in large values (100 pc,  $2 \times 10^5$  yr) for particle energies  $\lesssim 20$  GeV and smaller values for particles with increasing energies (35 pc and 14 kyr at 1 TeV). These escape times and radii, when used as initial conditions for the CR propagation outside the source, result in relevant suppression of the diffusion coefficient (by a factor 5–10) on time-scales comparable with their (energy dependent) escape time-scale. The damping mechanisms are fast enough that even on shorter time-scales, the Alfvénic turbulence is efficiently damped, and the ratio between random and ordered component of the magnetic field is  $\delta B/B_0 \ll 1$ , justifying the use of quasi-linear theory. In spite of the suppressed diffusion coefficient, and then the increased residence time in the vicinity ( $\leq 200$  pc) of their source, the grammage accumulated by CRs after their escape is found to be negligible (at all energies) as compared to the one accumulated while diffusing in the whole Galaxy, due to the low density of the HIM.

**Key words:** cosmic rays – ISM: general.

## 1 INTRODUCTION

Galactic cosmic rays (CRs) are believed to be accelerated at supernova remnants (SNRs) via diffusive shock acceleration [see e.g. Drury (2017) and Helder et al. (2012), for recent reviews]. In order to test this hypothesis and to reach a full comprehension of the origin of CRs, three crucial aspects of the problem have to be combined: (i) the acceleration of particles, (ii) their escape from the accelerator site, and (iii) their propagation in the interstellar medium (ISM), which regulates their escape from the Galaxy. This paper deals with point (ii) in the above list, and describes the escape of CRs from SNRs, and the propagation of such runaway particles in the immediate vicinity of the accelerator site (before they mix with the ubiquitous interstellar CR sea). We focus here (paper II) on to the *fully ionized* phase of the ISM, while the case

of a partially ionized ISM can be found in a companion paper (Nava et al. 2016) (hereafter [paper I](#)), itself complemented by an upcoming paper treating warm/cold partially ISM phases (Brahimi et al, paper III, in preparation).

The escape of CRs and their confinement in the vicinity of their sources is a non-linear process. This is because CRs excite the magnetic turbulence that in turn scatters and confines them (Wentzel 1974). Both analytical (Skilling 1970; Ptuskin, Zirakashvili & Plesser 2008; Malkov et al. 2013) and numerical (see [paper I](#), D’Angelo, Blasi & Amato 2016) approaches to the problem can be found in the literature. Here we closely follow the numerical approach described in [paper I](#).

The importance of these studies is connected to (at least) two issues. First, the confinement time of CRs in the vicinity of their sources determines the probability to detect gamma rays resulting from hadronic interactions between the runaway CRs and the ambient ISM. The gamma-ray emission is particularly intense if a massive molecular cloud happens to be located in the vicinity of

\* E-mail: [lara.nava@inaf.it](mailto:lara.nava@inaf.it)

the CR source. The measurements of the gamma-ray intensity and spectrum of clouds located next to SNRs constitute an invaluable tool to test our ideas about CR origin and transport (e.g. Aharonian & Atoyan 1996; Gabici, Aharonian & Casanova 2009; Nava & Gabici 2013). Second, if the self-confinement of CRs in the vicinity of their accelerator sites is effective enough, a significant fraction of the grammage can be accumulated by CRs during their stay in a relatively small region surrounding SNRs (e.g. D'Angelo et al. 2016). This fact would radically change the standard picture of CR propagation in the Galaxy, where the grammage is accumulated during the entire time spent by CRs throughout the Galactic disc.

We anticipate here the three main conclusions of this work. First of all, the problem of the confinement of CRs around SNRs must be solved together with the problem of escape of CRs from the accelerator site (because the solution of the latter problem determines the initial set-up to be used to solve the former). Second, the confinement time of CRs in a  $\sim 100$ – $200$  pc hot fully ionized region surrounding the parent SNR is found to be negligible with respect to the total confinement time of CRs in the Galactic disc. Third, the effectiveness of damping mechanisms is significant enough to keep the level of magnetic fluctuations at a level  $\delta B/B_0 \ll 1$ , where  $B_0$  and  $\delta B$  are the ordered and random component of the magnetic field, respectively.

The paper is structured as follows: in Section 2, we describe the physics and the set-up of the problem and in Section 3 we estimate the escape time of CRs from SNRs. The results from these sections are then used to describe the time evolution of a cloud of runaway CRs and to compute the spectra of CR particles and Alfvénic turbulence in the vicinity of the parent SNR (Section 4 and 5, respectively). Finally, in Section 6 we compute the grammage accumulated by CRs in the vicinity of their sources and we conclude in Section 7.

## 2 THE METHOD

### Geometry of the system

We consider the case of CRs that escape from the source and are injected in a region embedded in a magnetic field characterized by a large-scale ordered component of strength  $B_0$  and a random (Alfvénic) component of strength  $\delta B$ . The latter is described in terms of fluctuations of amplitude  $\delta B$  such that

$$\frac{\delta B^2}{8\pi} = \frac{B_0^2}{8\pi} \int I(k) d \ln k, \quad (1)$$

with  $I(k) \equiv \delta B(k)/B_0 \ll 1$ . In this limit, a flux tube approximation can be adopted to describe the geometry of the system up to distances comparable to the large-scale field coherence length  $L_c$  [for a discussion, see Ptuskin et al. (2008)]. We limit our analysis to these length-scale and adopt a one-dimensional description of CR transport along  $B_0$ .

### Particle diffusion

The particle diffusion coefficient is determined by the level of streaming instability driven by the particles themselves and by the relevance of damping mechanisms that reduce the amplitude of the turbulence. According to the resonance condition for the interaction between particles and waves, slab modes with wavelength  $k$  interact with particles with Larmor radius  $r_L \sim 1/k$ , with  $r_L = \frac{\gamma m v c}{Ze B_0}$  for a particle of mass  $m$ , velocity  $v$ , charge  $Ze$  gyrating in a magnetic field of strength  $B_0$ . Since particles with energies  $> 1$  GeV are considered

in this work, we approximate the particle velocity with the speed of light ( $v \sim c$ ). In the context of quasi-linear theory (justified as long as  $I(k) \ll 1$ ) the diffusion coefficient is related to  $I(k)$  by the equation:

$$D(E) = \frac{4 c r_L(E)}{3\pi I(k)} = \frac{D_B(E)}{I(k)}, \quad (2)$$

where  $D_B(E) = 4cr_L/3\pi$  is the Bohm diffusion coefficient.

### Equations for CR transport and waves evolution

The equation describing CR transport is

$$\frac{\partial P_{\text{CR}}}{\partial t} + V_A \frac{\partial P_{\text{CR}}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{D_B}{I} \frac{\partial P_{\text{CR}}}{\partial z} \right), \quad (3)$$

where  $V_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho}$  is the Alfvén velocity in an ambient medium of mass density  $\rho$ , and  $P_{\text{CR}}$  is the CR partial pressure normalized to the energy density of the ordered component of the magnetic field:

$$P_{\text{CR}} = \frac{4\pi}{3} v p^4 f(p) \frac{1}{B_0^2/8\pi}. \quad (4)$$

The coordinate  $z$  is taken along the direction of the ordered magnetic field  $B_0$ , and  $z = 0$  refers to the centre of the CR source.

This equation must be coupled to the equation that describes the evolution of the Alfvénic turbulence (Skilling 1975; Bell 1978; McKenzie & Voelk 1982; Malkov et al. 2013; Nava et al. 2016):

$$\frac{\partial I}{\partial t} + V_A \frac{\partial I}{\partial z} = 2(\Gamma_{\text{CR}} - \Gamma_d)I + Q. \quad (5)$$

The term  $\Gamma_{\text{CR}}$  describes the rate at which waves grow because of CR streaming instability:

$$2\Gamma_{\text{CR}}I = -V_A \frac{\partial P_{\text{CR}}}{\partial z}. \quad (6)$$

The term  $\Gamma_d$  describes the rate at which mechanisms for wave damping operate. We consider two (linear and non-linear) damping mechanisms relevant for the considered phase of the ISM (hot and fully ionized). Their nature and explicit expressions will be presented in Section 2.1.

The last term in equation (5) accounts for an injection of turbulence from an external source (i.e. other than CR streaming) and is set equal to  $Q = 2\Gamma_d I_0$ . This choice assures that when the streaming instability is not relevant, the background turbulence settles to a constant level  $I = I_0 = D_B/D_0$ , where  $D_0$  is taken to be equal to the average Galactic diffusion coefficient.

In both equations, the time derivative is computed along the characteristic of excited waves:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_A \frac{\partial}{\partial z}. \quad (7)$$

The advective terms  $V_A \partial P_{\text{CR}}/\partial z$  and  $V_A \partial I/\partial z$  have been neglected in the calculations since, as we checked a posteriori, they introduce minor modifications to the solution, according to the initial conditions of the ambient medium detailed below.

The equations are solved numerically, using a finite difference explicit method. As boundary conditions we impose that the spatial distribution of CRs is symmetric with respect to  $z = 0$ , while at  $z = \infty$  we set  $P_{\text{CR}} = 0$  and  $I = I_0$ . In fact, the one-dimensional treatment proposed here is valid only as far as propagation distances smaller than the field coherence length  $L_c$  are considered. When the displacement of particles away from their source significantly exceeds  $L_c$ , the transport mechanism switches from one-dimensional

to three-dimensional diffusion. As a consequence, the CR density drops quickly after the transition to three-dimensional diffusion, a behaviour similar to that expected in the case of a free-escape boundary for CRs located at a distance of  $\sim L_c$ . The coherence length of the field is constrained observationally and is of the order of  $L_c \approx 100$  pc, though its exact value is quite uncertain. For this reason, in the following we keep the boundary conditions at  $z = \infty$ , and we check a posteriori that this assumption is not significantly affecting the results.

### Initial conditions and properties of the ISM

The initial conditions for the CR pressure is set as follows:

$$P_{\text{CR}} = P_{\text{CR}}^0 \quad z < R_{\text{esc}}(E) \quad (8)$$

$$= 0 \quad z > R_{\text{esc}}(E), \quad (9)$$

where  $R_{\text{esc}}(E)$  represents the spatial scale of the region filled by CRs at the time of their escape from the source.  $P_{\text{CR}}^0$  is also a function of energy, and is estimated by imposing that the total energy released in CRs is  $W_{\text{CR}} \sim 10^{50}$  erg and assuming a given shape for the total CR spectrum (the adopted parameters are summarized below).

As initial condition for the wave turbulence, we impose  $I = I_0$  everywhere. In fact, as suggested by Malkov et al. (2013), a larger value of  $I \gg I_0$  could be chosen as initial condition for  $z < R_{\text{esc}}$  (to mimic Bohm diffusion inside the accelerator). However, we found that the exact initial value of  $I$  inside the source has negligible effect on the solution.

All calculations presented in this work have been performed using the following values for the model parameters:

(i) a hot, fully ionized medium (HIM) with:

- (a) total number density  $n = 0.01 \text{ cm}^{-3}$
- (b) temperature  $T = 10^6 \text{ K}$
- (c) magnetic field strength  $B_0 = 2 \mu\text{G}$

(ii) escaping CRs with:

- (a) total energy  $W_{\text{CR}} = 10^{50}$  erg
- (b) power-law spectrum from 1 GeV to 5 PeV
- (c) spectral index  $g = -2.2$  ( $dN/dE \propto E^g$ )

(iii) an ambient CR diffusion coefficient equal to  $D_0 = 10^{28} \left(\frac{E}{10 \text{ GeV}}\right)^{0.5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

With these values, the Alfvén speed is  $V_A \sim 40 \text{ km s}^{-1}$ .

## 2.1 DAMPING OF ALFVÉN WAVES

We introduce here the expressions of the two main Alfvén wave damping mechanisms in the HIM: the damping due to the interaction with background turbulence and the non-linear Landau damping.

### 2.1.1 Damping by turbulence injected at large scales

CR self-generated Alfvén waves can be damped by the interaction with background turbulence, supposedly injected at large scales by different sources of free energy (e.g. Mac Low & Klessen 2004). Farmer & Goldreich (2004) account for the anisotropy of the turbulent cascade and derive the following damping rate for waves in resonance with particle of Larmor radius  $r_L$

$$\Gamma_{\text{d}}^{\text{FG}} = \left( \frac{\epsilon}{r_L V_A} \right)^{1/2}, \quad (10)$$

where  $\epsilon = V_T^3/L_{\text{inj}}$  represents the energy cascade rate per unit mass.  $L_{\text{inj}}$  is the turbulence injection scale, fixed at 100 pc for the HIM phase (Yan & Lazarian 2004).  $V_T$  is the rms turbulent velocity at the injection scale. We consider the turbulence at the injection scale to be trans-Alfvénic and hence select  $V_T = V_A$ . This is likely the case if the main source of turbulence is due to dying supernova remnants with a forward shock becoming trans-sonic and trans-Alfvénic. After substituting the expression for  $\epsilon$  into equation (10) we get

$$\Gamma_{\text{d}}^{\text{FG}} = \frac{V_A}{(r_L L_{\text{inj}})^{1/2}}. \quad (11)$$

### 2.1.2 Non-linear Landau damping

Non-linear Landau (NLL) damping is produced by the interaction of background thermal ions with the beat of two interfering Alfvén waves. As it is the case for a single wave in the case of linear Landau damping, ions with speeds slightly slower (faster) than the speed of this beat take (give) energy from the waves. As for a thermal distribution more ions have lower speeds than the beat, the net effect is a damping. We use the expression provided by Weiner, Zweibel & Oh (2013) (see references therein)

$$\Gamma_{\text{d}}^{\text{NLL}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} v_i k I(k), \quad (12)$$

where  $v_i$  is the background ion thermal speed. For a background medium with a temperature  $T$  it becomes

$$\Gamma_{\text{d}}^{\text{NLL}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi k_{\text{Bolt}} T}{2 m_p}} \frac{1}{r_L} I(k), \quad (13)$$

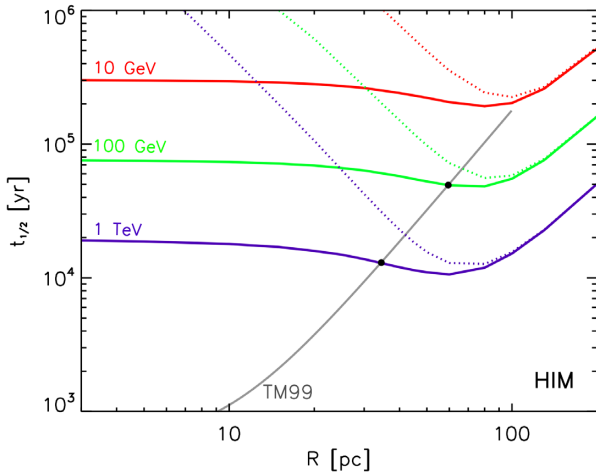
where  $k_{\text{Bolt}}$  is the Boltzmann constant and  $m_p$  is the proton mass.

## 3 ESCAPE TIME

Following paper I, we define the half-time  $t_{1/2}$  of a CR cloud (see also Malkov et al. 2013) and use it to estimate the escape time of CRs of different energies from an SNR. The half-time is defined as the time after which half of the CRs initially confined within a region of size  $R$  have left the region. The half-time is then a function of the initial radius  $R$  and of the particle energy  $E$ . The procedure adopted to estimate  $t_{1/2}$  is the following: for each energy  $E$  we assume that CRs are initially distributed homogeneously inside a region of radius  $R$ . We solve equations (3) and (5) considering this configuration as initial condition and find the time after which half of the particles are still trapped inside the initial region size  $R$ , while the other half has escaped. We repeat the procedure for different values of the initial radius  $R$ . The results are shown in Fig. 1 (solid curves), where  $t_{1/2}$  as a function of the initial radius  $R$  is shown for particle energies of 10 GeV (red line), 100 GeV (green line), and 1 TeV (purple line).

To understand the individual role of the two different damping mechanisms, we also show the results in case only  $\Gamma_{\text{d}}^{\text{FG}}$  is included (dotted curves). At small radii, the large CR gradient entails a large amplification of Alfvén waves and as a consequence  $\Gamma_{\text{d}}^{\text{NLL}}$  (that is proportional to  $I$ ) dominates over  $\Gamma_{\text{d}}^{\text{FG}}$ . At intermediate radii, the two damping rates are comparable. The larger radii correspond to a reduced efficiency in the amplification of Alfvén waves and the test particle regime is recovered (i.e.  $t_{1/2} \approx R^2/D_0$ ).

The half-time of the CR cloud gives a rough estimate of the escape time of CRs from a region of initial size  $R$ . The size of an SNR ( $R_{\text{SNR}}$ ) and its evolution with time can be estimated, for an SNR expanding in a homogeneous medium with density  $n$  as



**Figure 1.** Half-time of the CR cloud (see the text, Section 3) as a function of its initial radius  $R$ . The red, green, and purple lines refer to particle energies of 10, 100, and 1000 GeV, respectively. The grey solid line represents the relationship between SNR radius and age according to Truelove & McKee (1999).

(Truelove & McKee 1999; Ptuskin & Zirakashvili 2005):

$$R_{\text{SNR}} = 5.0 \left( \frac{E_{\text{SNR},51}}{n} \right)^{1/5} \left[ 1 - \frac{0.09 M_{\text{ej},\odot}^{5/6}}{E_{\text{SNR},51}^{1/2} n^{1/3} t_{\text{kyr}}} \right]^{2/5} t_{\text{kyr}}^{2/5} \text{ pc}, \quad (14)$$

where  $E_{\text{SNR},51}$  is the supernova explosion energy in units of  $10^{51}$  erg,  $n$  the total density of the ambient ISM in  $\text{cm}^{-3}$ ,  $M_{\text{ej},\odot}$  the mass of the supernova ejecta in solar masses, and  $t = 10^3 t_{\text{kyr}}$  yr is the SNR age.

The equation above is valid for times longer than  $\approx 0.4 E_{\text{SNR},51}^{-1/2} M_{\text{ej},\odot}^{5/6} n^{-1/3}$  kyr, while for earlier times an appropriate expression for the free expansion phase of the SNR evolution must be used (Chevalier 1982). Also, the validity of equation (14) is limited to times shorter than  $\approx 2 \times 10^5 E_{\text{SNR},51}^{3/14} / n^{4/7}$  yr, which marks the formation of a thin and dense radiative shell (Cioffi, McKee & Bertschinger 1988).

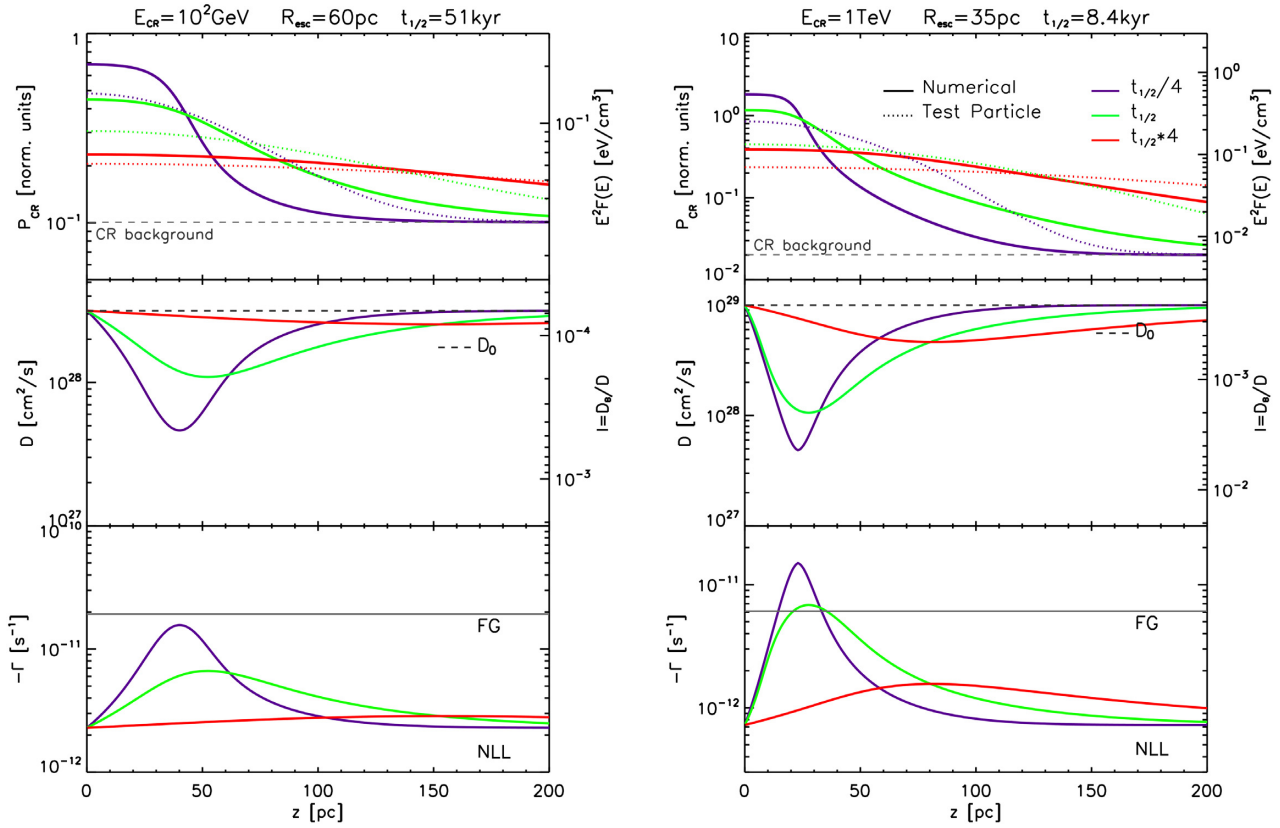
Equation (14) is plotted (within the limits of its validity) in Fig. 1 as a grey line labelled TM99 for  $E_{\text{SNR},51} = M_{\text{ej},\odot} = 1$  and  $n = 0.01 \text{ cm}^{-3}$ . For each energy  $E$ , we define the CR escape time  $t_{\text{esc}}(E)$  and radius  $R_{\text{esc}}(E)$  from the intersection between the  $t_{1/2}$  curves and the TM99 curve. Within this framework, we can reproduce the qualitative result that higher energy particles escape SNRs earlier than lower energy ones (see e.g. Gabici 2011, and references therein). More precisely, 1 TeV particles are found to escape when  $R_{\text{SNR}} \approx 35$  pc, 100 GeV particles escape at  $R_{\text{SNR}} \approx 60$  pc (corresponding approximately to SNR ages of  $1.4 \times 10^4$  and  $5 \times 10^4$  yr, respectively). For low-energy particles ( $E \lesssim 20$  GeV), the definition of the escape time is more problematic. Here we assume that they are released at once, when the Mach number is of the order of a few (i.e. at  $\approx 2 \times 10^5$  yr, when  $R_{\text{SNR}} \approx 100$  pc), which also roughly corresponds to the onset of the radiative phase. Meanwhile, due to the high ambient sound speed in the HIM, the SNR becomes trans-sonic at the end of the Sedov phase (Parizot et al. 2004). Moreover, in the radiative phase the mechanism for particle escape is not well understood and other scenarios are possible. For instance, CRs may be released progressively, like high-energy particles. In all these cases the estimate of the escape time of GeV particles does not change dramatically.

We can compare these findings with the results from Nava et al. (2016), where we considered the partially ionized phases of the ISM. For a supernova exploding in the warm ionized medium (of total density  $n = 0.35 \text{ cm}^{-3}$  and a ionization fraction equal to 0.9), we found that CRs of energy 1 TeV, 100 GeV, and 10 GeV leave the SNR when its radius is  $\approx 11$ , 16, and 30 pc, respectively. This corresponds to SNR ages of  $\approx 4.7$ , 12, and 51 kyr. For the warm neutral medium (total density  $n = 0.35 \text{ cm}^{-3}$  and ionization fraction equal to 0.02) and for the same particle energies the inferred escape radii are  $\approx 8$ , 15, and 28 pc, corresponding to SNR ages of  $\approx 2.1$ , 9.5, and 44 kyr, respectively. The escape times (radii) are shorter (smaller) when the partially ionized phases of the ISM are considered. This is due, on one hand, to the larger gas densities which hinders the expansion of the SNR and, on the other, to the effectiveness of ion-neutral damping of Alfvén waves which balances the effects of streaming instability and allows CRs to escape more easily (Zweibel & Shull 1982).

As a final remark, we note that the estimates of the cloud half-times  $t_{1/2}$  as a function of the initial radius (solid curves in Fig. 1) are affected by a different choice of  $D_0$  only at large radii, where the diffusion is well approximated by a test particle regime and  $t_{1/2} \propto R^2/D_0$ . At smaller radii, where the diffusion is dominated by the self-excited turbulence,  $t_{1/2}$  is not affected by the value chosen for  $D_0$ . Since the escape times and radii (black filled circles in Fig. 1) fall in the regime marking the transition between the self-excited turbulence-dominated regime and the background-turbulence-dominated regime, they are only moderately affected by the choice of  $D_0$ . As an example, a  $D_0$  ten times larger results in an escape time 20 per cent shorter as compared to the results obtained with the average Galactic value, and then in smaller escape radius (8–10 per cent smaller).

#### 4 TIME EVOLUTION OF A CLOUD OF COSMIC RAYS RELEASED BY A SUPERNOVA REMNANT

For each energy, equations (3) and (5) can now be solved adopting for  $R_{\text{esc}}$  the escape radius derived in the previous section. The solutions for three different times for two different energies ( $E_{\text{CR}} = 100$  GeV and  $E_{\text{CR}} = 1$  TeV) are shown in Fig. 2. The particle energy, escape time, and escape radius are reported in the title of each figure. The upper panel shows the CR pressure as a function of the distance from the SNR centre. The y-axis on the left refers to normalized (to the magnetic field energy density) units, and the y-axis on the right is the particle energy density in physical units. The panel in the middle shows the CR diffusion coefficient  $D$ , also in terms of ratio  $I = D_B/D$  (right y-axis). The bottom panel shows the rate of the damping mechanisms. In all panels, the three different curves refer to the solution of equations (3) and (5) at three different times (estimated from the escape time). The purple curves refer to early times, corresponding to  $t_{1/2}/4$ , when most of the particles are still in the initial region. The green and red solid lines show the solution at times equal to  $t_{1/2}$ , and  $4 \times t_{1/2}$ , respectively. The dotted curves refer to the test-particle solution of the problem: these have been obtained considering the same initial conditions and geometry as for the numerical case, but the solution is evolved considering a constant diffusion coefficient, fixed to its average Galactic value  $D_0$ . Finally, the dashed horizontal grey lines in the upper and middle panels represent the level of the CR background in the Galaxy and the average diffusion coefficient  $D_0$ , respectively. The Galactic CR background has been estimated from Aguilar et al. (2015). Note that the solution is shown up to distances (from the centre of the



**Figure 2.** Evolution in time of the spatial distribution of a CR cloud with initial radius  $R_{\text{esc}}$  in the HIM phase.  $z$  is the distance from the centre of the SNR. CR energies of 100 GeV (left) and 1 TeV are considered (right). For each energy, the top panel shows the CR partial pressure  $P_{\text{CR}}$  (see definition in equation 4), also in terms of CR energy density (see right-hand axis). The middle panel shows the diffusion coefficient  $D$  (left-hand axis) and  $l = D_B/D$  on the right-hand axis. The bottom panel shows the rate of the damping mechanisms (see Section 2.1). In each panel the solid curves show the solution to equations (3) and (5) at three different times, as labelled in the upper left panel. The dotted lines show the test-particle solution.

remnant) of 200 pc. Solutions at these large distances must be taken with care, because we are not considering perpendicular transport and then they are valid only for coherence lengths  $L_c \lesssim 200$  pc.

The results can be summarized as follows:

(i) at early times  $t \lesssim t_{1/2}$ , the distribution derived considering the role of streaming instability clearly differs from the test-particle solution. The self-confinement produces an increased CR pressure at small distances and a depletion of particles at larger distances, as compared to the test-particle solution. The solution approaches the test-particle solution at times significantly longer than the cloud half-time (red curves). This implies that  $t_{1/2}$  represents an order of magnitude estimate of the time interval during which waves can grow significantly above the background level (middle panels) in a region surrounding the initial CR cloud. This is an energy-dependent effect, since  $t_{1/2}$  is a decreasing function of particle energy. Thus, for CR energies of the order of 1 TeV or above, relevant for ground-based  $\gamma$ -ray observations, the growth of waves operates for about ten thousands years;

(ii) large excesses of CRs above the galactic background can be maintained for times much longer than  $t_{1/2}$ . This is a well-known result from the test-particle theory (e.g. Aharonian & Atoyan 1996; Gabici et al. 2009) which can be easily verified after comparing the values of the CR partial pressure (see scale on the right y-axis in Fig. 2) with the total energy density of CRs in the galactic disc, which is indicated by a dashed black line in the top panel of Fig. 2;

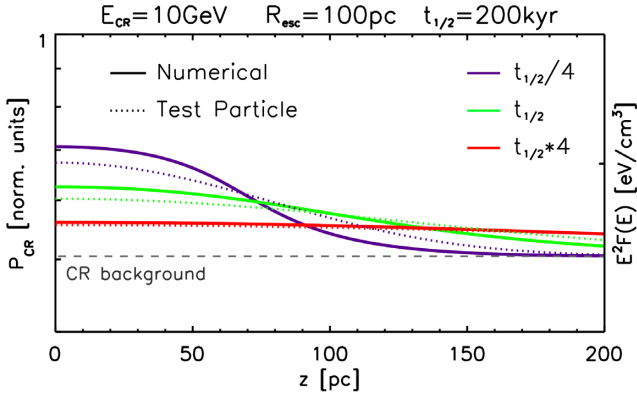
(iii) the strong gradient of CRs close to the cloud edges and the consequent growth of Alfvén waves result in a sizeable suppression

of the diffusion coefficient with respect to its Galactic value  $D_0$ . The suppression remains significant in a region of several tens of parsecs surrounding the SNR. The ratio  $D_B/D$  reaches at most a value  $< 10^{-2}$  (see right-hand y-axis in the middle panels), justifying the initial assumption of quasi-linear theory;

(iv) since CRs with higher energies are assumed to escape at earlier times, when the SNR radius is smaller, their diffusion coefficient at the time of their escape is suppressed by a larger factor, as compared to low-energy particles. This makes the non-linear Landau (NLL) damping particularly relevant for high-energy particles, and less relevant for lower energies (as evident also from the comparison between solid and dotted curves in Fig. 1), but still comparable to  $\Gamma_d^{\text{FG}}$  at times comparable with the particle escape time;

(v) the results presented in Fig. 2 have been derived assuming a CR spectral index  $g = -2.2$ . The spectral shape of escaping particles is expected to have some impact on the results. As an example, we discuss the case of a steeper value:  $g = -2.4$ . We find of course that the impact on the results is stronger at large energies and becomes progressively smaller for lower energies. For  $E_{\text{CR}} = 1$  TeV, the escape time is now  $t_{\text{esc}} = 8.4$  kyr ( $R_{\text{esc}} = 29$  pc). With these initial conditions, the spatial distribution of the CR cloud at 1 TeV and its evolution in time is very similar to the one depicted in Fig. 2 (right-hand panel), but the reference time-scale  $t_{1/2}$  is smaller.

For completeness, we also show the evolution of the CR cloud at 10 GeV (Fig. 3). Given the large radius at which these particle



**Figure 3.** Evolution in time of the spatial distribution of a cloud of CRs with energy  $E_{\text{CR}} = 10 \text{ GeV}$  and initial radius  $R_{\text{esc}} = 100 \text{ pc}$  in the HIM phase.  $z$  is the distance from the centre of the SNR. The solid curves show the CR partial pressure  $P_{\text{CR}}$  (see definition in equation 4) at different times, also in terms of CR energy density (see right-hand axis). The dotted lines show the test-particle solution.

are released in our modelling, they only moderately excite self-generated turbulence, and the spatial distribution and its evolution in time (solid lines) are very similar to those obtained in the test-particle scenario (dotted curves). The diffusion coefficient (not shown) is suppressed only at times smaller than the  $t_{1/2}$  time-scale (a factor of 3 at  $\sim 50 \text{ kyr}$ ), and NLL damping plays only a minor role ( $-\Gamma_{\text{d}}^{\text{NLL}} = 7 \times 10^{-12} - 2 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$ ) as compared to the FG damping ( $-\Gamma_{\text{d}}^{\text{FG}} = 6 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$ ).

## 5 PARTICLE AND TURBULENCE SPECTRA

The spectral shape of CRs released by the source and the amount of Alfvénic turbulence produced by CR streaming will strongly depend on the location (i.e. distance from the source) and time. Fig. 4 shows the spectra (upper panels) and the deviation of the diffusion coefficient from its background value (bottom panels) at two different distances (estimated from the centre of the remnant):  $z = 60 \text{ pc}$  (left-hand panels) and  $z = 100 \text{ pc}$  (right-hand panels). In each panel, different curves refer to different times since the SN explosion, from  $t = 10^4$  to  $t = 1.5 \times 10^5 \text{ yr}$  (see the legend in the bottom right-hand panel). For a given distance, only solutions at times smaller than the time at which the remnant reaches that distance are shown.

To remove the effect of the simple geometry that we are considering, we have multiplied the spectra by  $\pi R_{\text{esc}}^2$ , where the escape radius  $R_{\text{esc}}(E)$  is a function of the CR energy. All spectra are characterized by a steep rise at low energies, a peak, and then by a decline very close to a power law at particle energies above the peak.

A first result that can be inferred from the inspection of spectra is, as expected, that CRs of lower energy reach a given distance at later times as compared to those of higher energy that diffuse faster and are released at earlier times. Concerning the spectral index, in the top-right panel, the two dotted lines show, for comparison, a power law with index equal to the spectral index of the injected spectrum ( $g = -2.2$ ) and a power law with a steeper index  $-2.4$ . Above the peak, all the computed spectra are steeper than the spectrum of released CRs. Again, this is a consequence of the faster diffusion of high-energy particles.

The bottom panels in Fig. 4 show, for the same fixed distances  $z = 60 \text{ pc}$  (left) and  $z = 100 \text{ pc}$  (right), the ratio  $D(E, t, z)/D_0$  as

a function of energy. The different curves show the evolution in time. As it can be deduced from the left-hand panel, at a fixed time the derived diffusion coefficient  $D$  is equal to  $D_0$  at low energies, because low-energy CRs have not been released yet or have not reached yet the location where  $D$  is estimated. At higher energies, the value of  $D$  starts to deviate from  $D_0$ . At later times, the energy above which a deviation is evident decreases.

A somewhat more complex behaviour is governing the shape of the curves at  $z = 100 \text{ pc}$  (right-hand bottom panel). Let us focus, as an example, on the curve at  $t = 10^5 \text{ yr}$ : the turbulence produced by particles below  $\sim 30 \text{ GeV}$  has not yet reached a distance of  $100 \text{ pc}$ , explaining why  $D(E < 30 \text{ GeV}, 10^5 \text{ yr}, z = 100 \text{ pc}) = D_0(E < 30 \text{ GeV})$ . At higher energies,  $D$  starts to deviate from  $D_0$ . At even larger energies, the turbulence produced by high-energy particles has already diffused to larger distances and is being damped by mechanisms that decrease its value so that  $D$  tends to its background value. A peculiar behaviour is observed at even higher energies ( $E \gtrsim 4 \text{ TeV}$ ): the level of turbulence increases again, producing another decrease in the  $D(E)/D_0$  curve. This behaviour is a direct consequence of how the escape radius depends on the particle energy. The function  $R_{\text{esc}}(E)$  is indeed a decreasing function of  $E$ , well described by a broken power-law behaviour. The break appears around  $4 \text{ TeV}$  and at higher energies the escape radius is a stronger function of the CR energy. This means that at energies larger than  $4 \text{ TeV}$  the escape radius is small enough to trigger streaming instabilities at a larger rate (remind that the density of escaping CRs is proportional to a dilution factor of  $1/\pi R_{\text{esc}}$ ) that reflects in a larger amount of Alfvénic turbulence. This energy-dependent efficiency of the particle self-generated turbulence (with high-energy particles confining themselves more efficiently) results in a larger density of the high-energy particles. This explains the hardening of the particle spectra, visible in the upper right-hand panel at TeV energies.

## 6 RESIDENCE TIME AND GRAMMAGE

The amount of time that CRs spend close to their source is a crucial quantity to understand whether the grammage accumulated by particles while diffusing in the source vicinity is a relevant or negligible fraction of the total grammage accumulated while diffusing in the whole Galaxy.

Given the low density of the ISM phase considered in this work, we expect this contribution to be negligible in such systems. Due to the relevant suppression of the diffusion coefficient around the source, which will result in a longer residence time, it is however still interesting to perform an estimate of such a contribution.

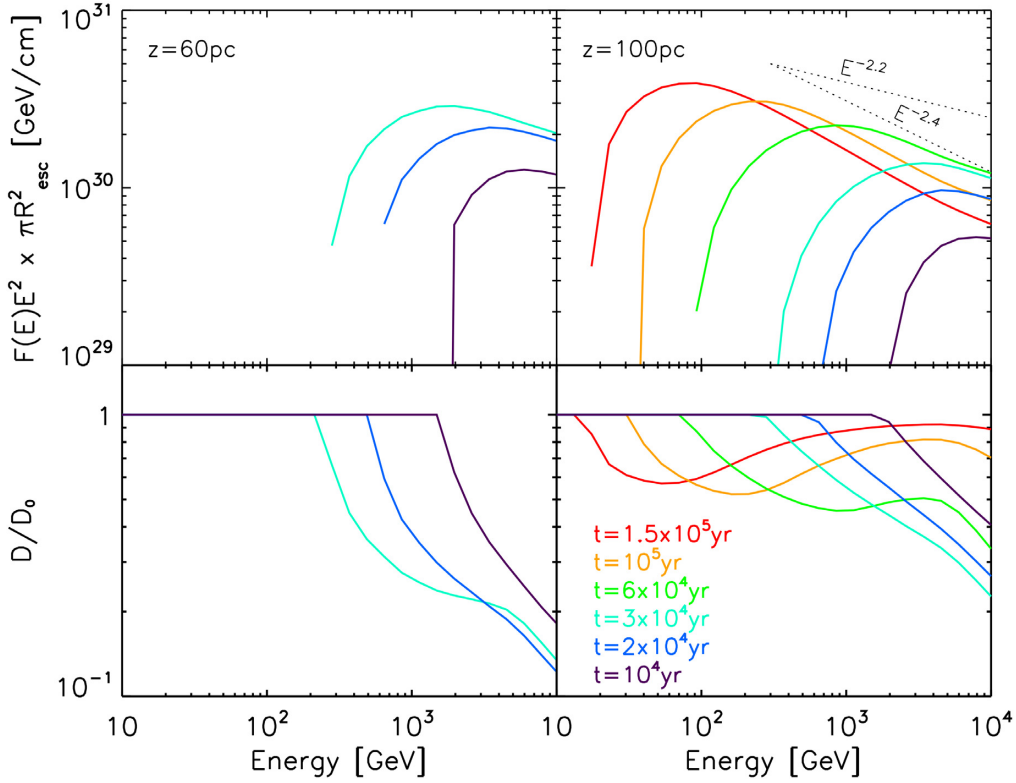
A formal derivation of the grammage should rely on the solution of the transport equation (equation 3) for CR nuclei, with an additional term describing nuclear fragmentation (see e.g. Berezhinskii et al. 1990 and Ptuskin & Soutoul 1990).

We propose here a simpler, order of magnitude estimate of the grammage. We first compute at every time  $t$  the average diffusion length:

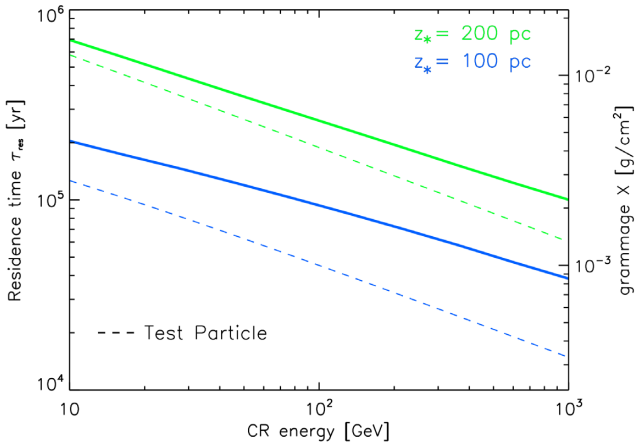
$$\langle z^2(t) \rangle = \frac{\int_0^\infty z^2 P_{\text{cr}}(t, z, E) dz}{\int_0^\infty P_{\text{cr}}(t, z, E) dz}. \quad (15)$$

This definition is justified because advection is found to be negligible. Then we define the residence time  $\tau_{\text{res}}(E, z_*)$ , within a region of size  $z_*$ , as the time such that

$$\langle z^2(\tau_{\text{res}}) \rangle = z_*^2. \quad (16)$$



**Figure 4.** Top panels: spectra. Bottom panels: ratio between the diffusion coefficient and its average Galactic value. The different colours refer to different times since explosion (see the panel on the bottom-right). Left-hand (right-hand) panels refer to a distance of 60 pc (100 pc) from the SNR centre. The dotted lines in the upper right-hand panel show power laws with indices  $-2.2$  and  $-2.4$  (for the CR injection spectrum, a value  $g = -2.2$  has been assumed).



**Figure 5.** Solid curves: residence time  $\tau_{\text{res}}$  within a region  $z_* = 100$  pc (blue) and  $z_* = 200$  pc (green) as a function of particle energy. Dashed curves: same quantity, derived in the test-particle approximation.

Note that the time computed using equation (16) in fact also includes the time spent inside the source, and can be then considered as an upper limit to the residence time. Its value for  $z_* = 100$  pc and  $z_* = 200$  pc and for CR energies between 10 GeV and 1 TeV is shown in Fig. 5 with solid lines. The dashed lines show the results for the test-particle case. The solutions for the test-particle case have been derived assuming the very same initial conditions (i.e. escape radius and time) adopted for the (numerical) solution including streaming instability.

As expected, the largest residence times are obtained for low-energy particles. The grammage, estimated from  $X \approx 1.4 m_p n c \tau_{\text{res}}$ , (where we have considered a medium composed of 10 per cent of Helium) is reported on the y-axis on the right, in the same plot, and is more than two orders of magnitude smaller than the value of the grammage inferred from observations (not surprisingly, given the very low density of the HIM).

An estimate of the amount of grammage accumulated near the CR accelerators when CR self-confinement is taken into account has been recently presented in D’Angelo et al. (2016). For an HIM with density  $n = 0.01 \text{ cm}^{-3}$ , and for a distance of  $z_* = 100$  pc their estimate is larger than what is reported in this work by a factor of  $\sim 6-7$ . Likely, this is mostly caused by a difference in the assumed value of CR acceleration efficiency (10 per cent in this work and 20 per cent in D’Angelo et al. 2016), and on the fact that D’Angelo et al. (2016) assumed that all CRs are released at the same time when the SNR radius is equal to 20 pc. This induces an enhancement of the streaming instability at low energies when compared to our results, where the release time and SNR radius for CRs of a given energy are computed as described in Section 3, and are in general larger than 20 pc. In both cases, however, the conclusion is similar: the low density of the considered medium prevents a sizeable contribution from regions close to the CR source.

On the other hand, D’Angelo et al. (2016) claim that a significant fraction of the grammage can be accumulated by CRs in the vicinity of their sources, if a denser and partially ionized ISM is considered. This differs from our earlier results presented in paper I, mainly due to very different assumption made about the damping mechanism of Alfvén waves. Such an important issue will be briefly discussed in the next section, and described in detail



in a forthcoming publication, as in this paper we limit ourselves to consider the hot and fully ionized phase of the ISM.

## 7 DISCUSSION AND CONCLUSIONS

In this paper, we discussed the problem of the escape of CRs from SNRs. The presence of runaway particles induces an amplification of the magnetic (Alfvénic) turbulence in the region surrounding the SNR. The amplification mechanism is CR streaming instability. Given that CRs are confined in the vicinity of SNRs by the turbulence they themselves generate, the problem is highly non-linear. Here, we limited ourselves to the case of an SNR exploding in the hot, fully ionized phase of the ISM, while the case of the partially ionized ISM was considered in [paper I](#).

An important conclusion from the work reported in this paper which was also found in [paper I](#) is the fact that the problem of CR escape from SNRs and that of the CR-induced amplification of the magnetic field in the SNR neighbourhood are intimately interconnected and have to be solved together. This is because the determination of the escape time of CRs defines the radius of the SNR at the time of escape ( $R_{\text{esc}}(E)$ ), which in turn regulates the effectiveness of the amplification of the magnetic turbulence induced by runaway CRs (through a dilution factor scaling as  $\propto 1/R_{\text{esc}}(E)^2$  in the growth rate). Remarkably, for all the cases considered, we found out that CRs escaping from an SNR at a time  $t_{\text{esc}}(E)$  after the supernova explosion can significantly amplify the turbulent magnetic field in a surrounding region of size of the order of  $\lesssim 100$  pc for a time which is also roughly of the order of  $t_{\text{esc}}(E)$ . Since the escape time  $t_{\text{esc}}(E)$  is always much smaller than the confinement time of CRs within the Galactic disc  $\tau_{\text{res}}^d$  (millions of years for CRs in the GeV energy domain), we can conclude that CRs spend typically a very short fraction of  $\tau_{\text{res}}^d$  in the vicinity of SNRs. It follows that also the grammage accumulated close to the SNR is very small.

In principle, the grammage accumulated by CRs in the vicinity of their sources could be much larger if a denser phase of the ISM is considered. The warm phase of the ISM would satisfy this requirement, being characterized by a typical density in the range  $0.1\text{--}1\text{ cm}^{-3}$ . However, as discussed in Ptuskin et al. (2008) and in [paper I](#), the presence of neutrals would introduce an additional and very effective damping mechanism, namely, ion-neutral friction, which would prevent the magnetic turbulence to grow to the level needed to confine CRs long enough. D’Angelo et al. (2016) pointed out that the effect of ion-neutral friction could be overcome in a medium made of almost entirely ionized hydrogen with a 10 per cent component of almost entirely neutral He, because the charge exchange cross-section for  $\text{H}^+\text{--He}$  collisions is dramatically reduced with respect to  $\text{H}^+\text{--H}$  collisions (which are generally adopted to compute the ion-neutral damping coefficient). Even though the composition of such a medium would closely resemble that of the warm ionized phase of the ISM (Ferrière 1998), the argument presented in D’Angelo et al. (2016) might not be completely correct, because ion-neutral friction is not due exclusively to charge-exchange, but also to elastic ion-neutral collisions, which can also contribute to momentum exchange between ions and neutrals (see e.g. Pinto & Galli 2008). A more detailed study in this direction will be presented elsewhere.

The results derived in this paper apply to the case of SNRs expanding in a diluted, hot, and completely ionized ISM. This

could be the case, for example, of an SNR located at large Galactic latitudes or inside a superbubble. However, the value of the magnetic field coherence length adopted here ( $L_c \approx 100$  pc) could overestimate its typical value in superbubbles. For instance, the field in superbubbles may be turbulent (see Bykov et al. 2001). The most important effect of a significantly shorter field coherence length would be to induce an early transition from the one-dimensional to three-dimensional diffusion of CRs.

## ACKNOWLEDGEMENTS

LN acknowledges funding from the European Union’s Horizon 2020 Research and Innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement n. 664931. SR acknowledges support from the region Île-de-France under the DIM-ACAV programme. SG acknowledges support from Agence Nationale de la Recherche (grant ANR- 17-CE31-0014) and from the Observatory of Paris (Action Fédératrice CTA).

## REFERENCES

- Aguilar M. et al., 2015, *Phys. Rev. Lett.*, 114, 1103  
 Aharonian F. A., Atoyan A. M., 1996, *A&A*, 309, 917  
 Bell A. R., 1978, *MNRAS*, 182, 147  
 Berezhinskii V. S., Bulanov S. V., Dogiel V. A., Ptuskin V. S., 1990, edited by Ginzburg, *Astrophysics of Cosmic Rays*  
 Bykov A. M., Toptygin I. N., 2001, *Astron. Lett.*, 27, 625  
 Chevalier R. A., 1982, *ApJ*, 258, 790  
 Cioffi D. F., McKee C. F., Bertschinger E., 1988, *ApJ*, 334, 252  
 D’Angelo M., Blasi P., Amato E., 2016, *Phys. Rev.*, 94, 83003  
 Drury L. O. ’C., Strong A. W., 2017, *A&A*, 597, A117  
 Farmer A. J., Goldreich P., 2004, *ApJ*, 604, 671  
 Ferrière K., 1998, *ApJ*, 497, 759  
 Gabici S., 2011, *Mem. Soc. Astron. Ital.*, 82, 760  
 Gabici S., Aharonian F. A., Casanova S., 2009, *MNRAS*, 396, 1629  
 Helder E. A., Vink J., Bykov A. M., Ohira Y., Raymond J. C., Terrier R., 2012, *Space Sci. Rev.*, 173, 369  
 Mac Low M.-M., Klessen R. S., 2004, *Rev. Mod. Phys.*, 76, 125  
 Malkov M. A., Diamond P. H., Sagdeev R. Z., Aharonian F. A., Moskalenko I. V., 2013, *ApJ*, 768, 73  
 McKenzie J. F., Voelk H. J., 1982, *A&A*, 116, 191  
 Nava L., Gabici S., 2013, *MNRAS*, 429, 1643  
 Nava L., Gabici S., Marcowith A., Morlino G., Ptuskin V. S., 2016, *MNRAS*, 461, 3552  
 Parizot E., Marcowith A., van der Swaluw E., Bykov A. M., Tatischeff V., 2004, *A&A*, 424, 747  
 Pinto C., Galli D., 2008, *A&A*, 484, 17  
 Ptuskin V. S., Soutoul A., 1990, *A&A*, 237, 445  
 Ptuskin V. S., Zirakashvili V. N., 2005, *A&A*, 429, 755  
 Ptuskin V. S., Zirakashvili V. N., Plesser A. A., 2008, *Adv. Space Res.*, 42, 486  
 Skilling J., 1970, *MNRAS*, 147, 1  
 Skilling J., 1975, *MNRAS*, 173, 255  
 Truelove J. K., McKee C. F., 1999, *ApJS*, 120, 299  
 Weiner J., Zweibel E. G., Oh S. P., 2013, *ApJ*, 767, 87  
 Wentzel D. G., 1974, *ARA&A*, 12, 71  
 Yan H., Lazarian A., 2004, *ApJ*, 614, 757  
 Zweibel E. G., Shull J. M., 1982, *ApJ*, 259, 859

This paper has been typeset from a  $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$  file prepared by the author.

# Shock-accelerated cosmic rays and streaming instability in the adaptive mesh refinement code Ramses

Yohan Dubois<sup>1</sup>, Benoît Commerçon<sup>2</sup>, Alexandre Marcowith<sup>3</sup>, and Loann Brahim<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Institut d'Astrophysique de Paris, UMR 7095, CNRS, UPMC University of Paris VI, 98 bis boulevard Arago, 75014 Paris, France  
e-mail: [dubois@iap.fr](mailto:dubois@iap.fr)

<sup>2</sup> Centre de Recherche Astrophysique de Lyon UMR5574, ENS de Lyon, Université Lyon 1, CNRS, Université de Lyon, 69007 Lyon, France

<sup>3</sup> Laboratoire Univers et Particules de Montpellier (LUPM), Université Montpellier, CNRS/IN2P3, CC72, place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5, France

Received 9 July 2019 / Accepted 19 September 2019

## ABSTRACT

Cosmic rays (CRs) are thought to play a dynamically important role in several key aspects of galaxy evolution, including the structure of the interstellar medium, the formation of galactic winds, and the non-thermal pressure support of halos. We introduce a numerical model solving for the CR streaming instability and acceleration of CRs at shocks with a fluid approach in the adaptive mesh refinement code RAMSES. CR streaming is solved with a diffusion approach and its anisotropic nature is naturally captured. We introduce a shock finder for the RAMSES code that automatically detects shock discontinuities in the flow. Shocks are the loci for CR injection, and their efficiency of CR acceleration is made dependent on the upstream magnetic obliquity according to the diffuse shock acceleration mechanism. We show that the shock finder accurately captures shock locations and estimates the shock Mach number for several problems. The obliquity-dependent injection of CRs in the Sedov solution leads to situations where the supernova bubble exhibits large polar caps (homogeneous background magnetic field), or a patchy structure of the CR distribution (inhomogeneous background magnetic field). Finally, we combine both accelerated CRs with streaming in a simple turbulent interstellar medium box, and show that the presence of CRs significantly modifies the structure of the gas.

**Key words.** magnetohydrodynamics – methods: numerical – cosmic rays – shock waves – ISM: supernova remnants – ISM: structure

## 1. Introduction

Cosmic rays (CR) are understood to play an important role in astrophysical plasmas due to their capacity to ionise the interstellar matter (Padovani et al. 2009) and their non-negligible pressure support to gas dynamics according to evolutionary processes that differ substantially from the thermal component since they diffuse efficiently and have different dissipation timescales. CRs are likely produced at shocks through the process of diffuse shock acceleration (DSA; see Bell 1978; Drury 1983; Blandford & Eichler 1987; Jones & Ellison 1991; Berezhko & Ellison 1999 and Marcowith et al. 2016 for a recent review). Recent advances in the numerical modelling of DSA through hybrid particle-in-cell codes (Caprioli & Spitkovsky 2014) have provided accurate predictions about the amount of CRs injected at shocks as a function of various properties of the shock including the Mach number, the obliquity of the magnetic field, or the pre-existing amount of CRs (Caprioli et al. 2018). There is a large body of evidence for CRs accelerated in the shocked-shell material of supernova (SN) explosions (e.g. Koyama et al. 1995; Decourchelle et al. 2000; Aharonian et al. 2004; Warren et al. 2005; Helder et al. 2009; Ackermann et al. 2013) and it has been shown that they have a significant impact on the shell structure and dynamics (Chevalier 1983; Dorfi 1990; Zank et al. 1993; Wagner et al. 2009; Ferrand et al. 2010; Castro et al. 2011; Pfrommer et al. 2017; Pais et al. 2018; Diesing & Caprioli 2018). Supernova remnants (SNRs) are expected to be the main source of CRs permeating the entire interstellar medium (ISM)

of galaxies (Aguilar et al. 2015), though the consistency of the accelerated CR spectrum in a SNR with that of entire galaxies is still intensely debated (see Blasi 2013 for a review).

Cosmic rays likely have an important dynamical impact over the ISM on all galactic scales. On small scales, while released by a SNR, CRs possess enough pressure to overcome the background magnetic and gas pressures and trigger different types of plasma instabilities which result in the production of waves and turbulence (Ptuskin et al. 2008; Malkov et al. 2013). This self-generated turbulence can confine CRs over distances and amounts of time that depend on the conditions prevailing in the ISM, especially the ionisation degree (Nava et al. 2016, 2019). The generation of waves contribute to locally heating the warm ionised medium (Wiener et al. 2013b). On larger galactic scales, comparable to the disc height, CR gradients can modify the dynamics of Jeans unstable regions in the atomic phase (Commerçon et al. 2019), and they can propel cold galactic-wide outflows (Jubelgas et al. 2008; Wadepuhl & Springel 2011; Uhlig et al. 2012; Hanasz et al. 2013; Salem & Bryan 2014; Salem et al. 2014; Girichidis et al. 2016, 2018; Simpson et al. 2016; Recchia et al. 2017; Fujita & Mac Low 2018; Mao & Ostriker 2018) with a preferential impact in low-mass galaxies (Booth et al. 2013; Jacob et al. 2018, Dashyan & Dubois 2019). However, the capability of winds to carry mass and momentum depends on the detailed CR physics such as streaming (Ruszkowski et al. 2017b; Wiener et al. 2017; Holguin et al. 2019; Butsky & Quinn 2018), or taking into account the unresolved multi-phase nature of the gas and its impact on CR

transport (Farber et al. 2018). CRs also boost the dynamo amplification of the magnetic field in disc galaxies (Hanasz et al. 2004, 2009a,b; Pakmor et al. 2016).

On very large cosmological scales CRs are released in shocks (Miniati et al. 2000, 2001; Ryu et al. 2003; Skillman et al. 2008; Pfrommer et al. 2007, 2008, 2017; Vazza et al. 2009, 2012) with external cosmological infall of gas producing the strongest shocks, while pre-processed internal shocks in halos drive the bulk of the shock distribution in the more moderate strength regime.

Similarly, strong shocks are produced in jets from active galactic nuclei; they release large amounts of CRs as observed in radio emission (Fanaroff & Riley 1974; Pierre Auger Collaboration 2007; Croston et al. 2009) and help to release the feedback back to the hot gas from galaxy clusters (Croston et al. 2008; Guo & Oh 2008; Sijacki et al. 2008; Guo & Mathews 2011; Fujita & Ohira 2011; Jacob & Pfrommer 2017; Ruszkowski et al. 2017a; Ehlert et al. 2018). However, again, their impact might significantly differ depending on which CR dynamical processes are modelled and which ignored.

In a previous work (Dubois & Commerçon 2016), we introduced a numerical model for anisotropic CR diffusion. Here, we extend it by including a model of the CR streaming instability and CR injection at shocks through DSA in the adaptive mesh refinement code RAMSES (Teyssier 2002). In another work (Brahimi et al. in prep.) we introduce new diffusive transport for CRs accounting for the generation of turbulence produced by the streaming. This ensemble of work aims to provide a consistent description of CR dynamical effect on the interstellar or intergalactic media. In the same view, a recent model has been proposed by Thomas & Pfrommer (2019).

In Sect. 2, we introduce the full set of CR magneto-hydrodynamics including the streaming and acceleration terms, whose numerical modelling and tests are respectively tackled in Sects. 3 and 4. We finally test CR acceleration and streaming combined in turbulent ISM experiments in Sect. 5.

## 2. Magneto-hydrodynamics with cosmic rays

By taking the energy moment of the Fokker–Planck CR transport equation (Drury & Voelk 1981), the following set of differential equations to be solved for cosmic-ray magneto-hydrodynamics (CRMHD) of a fluid mixture made of thermal particles and CRs can be obtained:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + P_{\text{tot}} - \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{4\pi} \right) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left( (e + P_{\text{tot}}) \mathbf{u} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})}{4\pi} \right) \\ = -P_{\text{CR}} \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{CR,d}} + \mathcal{L}_{\text{rad}}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{\text{CR}}}{\partial t} + \nabla \cdot (e_{\text{CR}} \mathbf{u} + (e_{\text{CR}} + P_{\text{CR}}) \mathbf{u}_{\text{st}}) \\ = -P_{\text{CR}} \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{CR,d}} + \mathcal{L}_{\text{st}} + \mathcal{H}_{\text{acc}} + \mathcal{L}_{\text{rad,CR}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Here  $\rho$  is the gas mass density,  $\mathbf{u}$  is the gas velocity,  $\mathbf{u}_{\text{st}}$  is the streaming velocity,  $\mathbf{B}$  is the magnetic field,  $e = 0.5\rho u^2 + e_{\text{th}} + e_{\text{CR}} + B^2/8\pi$  is the total energy density,  $e_{\text{th}}$  is the thermal energy density, and  $e_{\text{CR}}$  is the CR energy density;  $P_{\text{tot}} = P_{\text{th}} + P_{\text{CR}} +$

$P_{\text{mag}}$  is the sum of thermal  $P_{\text{th}} = (\gamma - 1)e_{\text{th}}$ , CR  $P_{\text{CR}} = (\gamma_{\text{CR}} - 1)e_{\text{CR}}$ , and magnetic  $P_{\text{mag}} = 0.5B^2/(4\pi)$  pressures, where  $\gamma$  and  $\gamma_{\text{CR}}$  are the adiabatic indexes of the thermal and CR components, respectively. We note that all energy components  $e_i$  are energies per unit volume  $e_i = E_i/\Delta x^3$ , where  $\Delta x$  is the cell size. The terms on the right-hand side of the equations are treated as source terms with  $P_{\text{CR}} \nabla \cdot \mathbf{u}$  the CR pressure work term,  $\mathbf{F}_{\text{CR,d}} = -D_0 \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}})$  the anisotropic diffusion flux term,  $D_0$  the diffusion coefficient (usually taken as a constant value for simplicity, but it can also be a function of local MHD quantities),  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/\|\mathbf{B}\|$  the magnetic unity vector, and a total radiative loss term  $\mathcal{L}_{\text{rad}} = \mathcal{L}_{\text{rad,th}} + \mathcal{L}_{\text{rad,CR} \rightarrow \text{th}}$  composed of the thermal  $\mathcal{L}_{\text{rad,th}}$  and CR  $\mathcal{L}_{\text{rad,CR} \rightarrow \text{th}}$  radiative loss terms, where the CR loss term ( $\mathcal{L}_{\text{rad,CR} \rightarrow \text{th}} = \mathcal{L}_{\text{rad,CR}} + \mathcal{H}_{\text{rad,CR} \rightarrow \text{th}}$ ) is the non-conserving sum of radiative losses from cosmic rays  $\mathcal{L}_{\text{rad,CR}}$  turning as a heating rate  $\mathcal{H}_{\text{rad,CR} \rightarrow \text{th}}$  for the thermal component. Finally, and this is the core of this paper, we detail how the streaming instability terms  $\nabla \cdot ((e_{\text{CR}} + P_{\text{CR}}) \mathbf{u}_{\text{st}})$  (advection-diffusion term) and  $\mathcal{L}_{\text{st}}$  (heating term), and the CR acceleration at shocks  $\mathcal{H}_{\text{acc}}$  are modelled.

We use the RAMSES code detailed in Teyssier (2002) to solve these equations with adaptive mesh refinement (AMR). The full set of equations is solved with the standard MHD solver of RAMSES described in Fromang et al. (2006), where the right-hand side terms of Eq. (3) are treated separately as source terms. The induction equation (Eq. (4)) is solved using constrained transport (Teyssier et al. 2006), which by construction guarantees at all times that  $\nabla \cdot \mathbf{B} \simeq 0$  at machine precision. Godunov fluxes are solved with the approximate Harten–Lax–van Leer discontinuities (HLLD) Riemann solver (Miyoshi & Kusano 2005) and the minmod total variation diminishing slope limiter are modified to account for the extra energy components and total pressure made of the thermal and CR component. Accordingly, the effective sound speed used for the Courant–Friedrichs–Lewy time-step condition accounts for the extra pressure components (i.e. total pressure of the fluid). The implementation of the anisotropic CR diffusion in RAMSES, which our new implementation of CR streaming relies on, is described in Dubois & Commerçon (2016).

It should be noted that Eq. (5) can be expanded to as many CR energy bins as required to sample a full spectrum of CRs in energy-momentum space with source terms communicating the energy fluxes between the various energy bins (see Miniati 2001; Girichidis et al. 2014; Winner et al. 2019, for such efforts in those directions). We ignore this extra level of complexity to represent the entire spectrum of CR energy by a single bin of energy. For sake of completeness, we introduced the anisotropic diffusion term as well as the CR radiative loss terms (trivially modelled as a simple density and CR energy-dependent term; see e.g. Enßlin et al. 2007; Guo & Oh 2008) in the equations; we do not make use of them in the various tests of this paper, i.e.  $D_0 = 0$  and  $\mathcal{L}_{\text{rad,CR}} = 0$ .

## 3. Cosmic-ray streaming

### 3.1. Numerical implementation

Cosmic rays propagating faster than the Alfvén velocity  $\mathbf{u}_A = \mathbf{B}/\sqrt{4\pi\rho}$  excite Alfvén waves, which in turn drive the scattering of the CR pitch angle with magnetic field lines. This coupling leads to a reduced CR bulk velocity at the Alfvén velocity and confines the CR streaming transport along the field lines and their own gradient of pressure (Wentzel 1968; Kulsrud & Pearce 1969; Skilling 1975). Several damping mechanisms, such as ion-neutral damping, non-linear Landau damping,

or turbulence damping (Kulsrud & Pearce 1969; Yan & Lazarian 2002; Farmer & Goldreich 2004; Lazarian & Beresnyak 2006; Wiener et al. 2013a), can lead to a significant suppression of these self-excited Alfvén waves and can increase the effective value at which CRs are allowed to stream down their own gradient at super-Alfvénic velocities  $\mathbf{u}_{\text{st}} = -f_{\text{SA}}\mathbf{u}_A \text{sign}(\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}})$ , where  $f_{\text{SA}} \geq 1$  is the super-Alfvénic boost factor of the streaming velocity.

In addition, while CRs scatter onto the Alfvén waves, they experience a drag force, whose work is transferred to the thermal pool at the following rate:

$$\mathcal{L}_{\text{st}} = -\text{sign}(\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}})\mathbf{u}_A \cdot \nabla P_{\text{CR}}. \quad (6)$$

We note that this heating term has  $f_{\text{SA}} = 1$  since only the Alfvén waves mediate the energy exchange between CRs and the thermal component (see e.g. Ruszkowski et al. 2017b). This term, which is by construction always a heating (resp. loss) term for the thermal (resp. CR) component, is obtained by simply differentiating the values of the CR energy density with neighbouring cells.

For simplicity, in the rest of this work, whose aim is to test the implementation of CR streaming, we systematically assume  $f_{\text{SA}} = 1$ . The advection or diffusion term of streaming  $\nabla \cdot ((e_{\text{CR}} + P_{\text{CR}})\mathbf{u}_{\text{st}})$  can be solved via two distinct approaches. One is to update the CR energy density using an explicit upwind method; however, since the streaming velocity can become discontinuous at extrema of  $e_{\text{CR}}$ , it modifies the condition of stability of the solution to  $\Delta t \propto \Delta x^3$  (Sharma et al. 2009). Sharma et al. (2009) proposed regularising the streaming velocity by replacing  $\text{sign}(\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}})$  by  $\tanh(h\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}}/e_{\text{CR}})$  in order to obtain a less constraining time-step condition of  $\Delta t = h\Delta x^2/(2e_{\text{CR}}u_A)$ , and where  $h$  should be the size of a few cells. Nonetheless, this time-step condition is still too constraining due to the quadratic dependency on cell size, and it is necessary to rely on a different strategy to make such a numerical implementation practicable in all possible situations. Sharma et al. (2009) suggested using an implicit solver for the regularised upwind method. Here we decided to take a different route that relies on the modelling of the anisotropic diffusion with an implicit solver, as done in Dubois & Commerçon (2016).

We can rewrite the streaming velocity as

$$\mathbf{u}_{\text{st}} = -\frac{\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}}}{|\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}}|}\mathbf{u}_A, \quad (7)$$

which, when recast into  $\nabla \cdot ((e_{\text{CR}} + P_{\text{CR}})\mathbf{u}_{\text{st}})$ , can be rewritten as a diffusion term (see also Uhlig et al. 2012, where the same diffusion approach for the isotropic version of CR streaming is used):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{CR},s} &= \nabla \cdot (-D_{\text{st}}\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}})) \\ &= \nabla \cdot \left( -\frac{(e_{\text{CR}} + P_{\text{CR}})|\mathbf{B}|}{|\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}}|\sqrt{4\pi\rho}}\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}}) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Therefore, this advection-diffusion part of the streaming instability can be treated as an addition to the standard  $F_{\text{CR},d}$  CR diffusion term ( $F_{\text{CR},ds} = F_{\text{CR},d} + F_{\text{CR},s}$ ), for clarity hereafter written as follows:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{CR},ds} = \nabla \cdot (-D\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}})), \quad (9)$$

where  $D = D_0 + D_{\text{st}}$ . The  $F_{\text{CR},ds}$  diffusion flux can be arbitrarily decomposed into an anisotropic and isotropic part

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{CR},ds} = \nabla \cdot (-D_{\parallel}\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}}) - D_{\text{iso}}\nabla e_{\text{CR}}), \quad (10)$$

where  $D_{\parallel} = (1 - f_{\text{iso}})D$ ,  $D_{\text{iso}} = f_{\text{iso}}D$ , and  $f_{\text{iso}} \leq 1$ . We briefly recall the framework of the implicit solver developed in Dubois & Commerçon (2016). For the 2D case, the time update of the CR energy by the anisotropic part (the isotropic part is trivially obtained) of the diffusion flux is

$$e_{i,j}^{n+1} + \Delta t \frac{F_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} + F_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - F_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} - F_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x} = e_{i,j}^n, \quad (11)$$

where the cell-centred fluxes are computed with cell-cornered values using the symmetric scheme from Günter et al. (2005):

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2},j}^{\text{ani}} &= \frac{F_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{\text{ani}} + F_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{\text{ani}}}{2}, \\ F_{i,j+\frac{1}{2}}^{\text{ani}} &= \frac{F_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{\text{ani}} + F_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{\text{ani}}}{2}. \end{aligned}$$

The anisotropic cell corner flux is

$$F_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{\text{ani}} = -\bar{D}\bar{b}_x \left( \bar{b}_x \frac{\bar{\partial}e}{\partial x} + \bar{b}_y \frac{\bar{\partial}e}{\partial y} \right), \quad (12)$$

where barred quantities are arithmetic averages over the cells connected to the corner, i.e.

$$\begin{aligned} \bar{b}_x &= \frac{b_{x,i+\frac{1}{2},j}^n + b_{x,i+\frac{1}{2},j+1}^n}{2}, \\ \bar{b}_y &= \frac{b_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n + b_{y,i+1,j+\frac{1}{2}}^n}{2}, \\ \frac{\bar{\partial}e}{\partial x} &= \frac{e_{i+1,j+1}^{n+1} + e_{i+1,j}^{n+1} - e_{i,j+1}^{n+1} - e_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x}, \\ \frac{\bar{\partial}e}{\partial y} &= \frac{e_{i+1,j+1}^{n+1} + e_{i,j+1}^{n+1} - e_{i+1,j}^{n+1} - e_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x}, \\ \bar{D} &= \frac{D_{i,j}^n + D_{i+1,j}^n + D_{i,j+1}^n + D_{i+1,j+1}^n}{4}. \end{aligned}$$

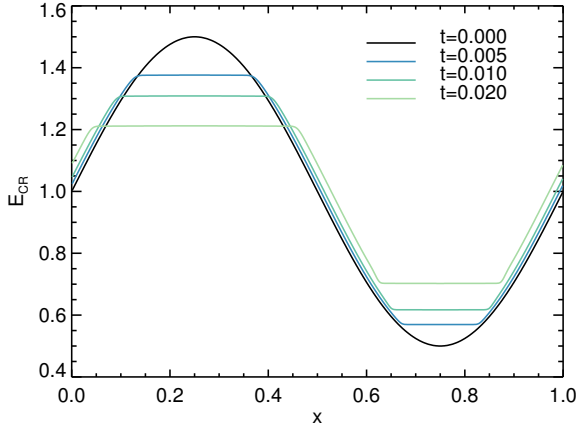
We note that all hydrodynamical variables in RAMSES are cell-centred except for the magnetic field which is face-centred. The streaming diffusion coefficient is computed as

$$D_{i,j}^n = \frac{(e_{i,j}^n + P_{i,j}^n)}{\sqrt{4\pi\rho_{i,j}^n}} \frac{|\tilde{B}_{i,j}^n|}{|\widetilde{\mathbf{b}} \cdot \nabla e_{i,j}^n|}, \quad (13)$$

where upper tilde quantities stand for cell-centred quantities reconstructed from a combination of cell-centred and face-centred quantities:

$$\begin{aligned} |\tilde{B}_{i,j}^n| &= \frac{1}{2} \sqrt{\left( B_{x,i-\frac{1}{2},j}^n + B_{x,i+\frac{1}{2},j}^n \right)^2 + \left( B_{y,i,j-\frac{1}{2}}^n + B_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n \right)^2}, \\ |\widetilde{\mathbf{b}} \cdot \nabla e_{i,j}^n| &= \frac{1}{4\Delta x |\tilde{B}_{i,j}^n|} \left| \left( B_{x,i-\frac{1}{2},j}^n + B_{x,i+\frac{1}{2},j}^n \right) \left( e_{x,i+1,j}^n - e_{x,i-1,j}^n \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( B_{y,i,j-\frac{1}{2}}^n + B_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n \right) \left( e_{y,i,j+1}^n - e_{y,i,j-1}^n \right) \right|. \end{aligned} \quad (14)$$

It should be noted that, in principle, the solver can deal with any arbitrary large values of the diffusion coefficient; however, the number of iterative steps of the implicit solver to converge towards the solution can be large for a large diffusion coefficient, typically at extrema of  $|\mathbf{b} \cdot \nabla e_{\text{CR}}|$  where this value can become



**Fig. 1.** Evolution of a 1D sinusoid of CR energy density with streaming advection only as a function of position with 512 cells and imposing a constant Alfvén velocity of 1. The solution is made of two plateaus as the maxima are capped over time, due to the infinite streaming diffusion coefficient, while the two regions between the two plateaus move at a velocity of  $\pm\gamma_{\text{CR}} = \pm 1.4$ .

close to zero. In practice, we cap the value of the streaming diffusion coefficient to  $10^{28} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  in all practical astrophysical applications to reduce the spectral condition number of the matrix involved in the implicit solver in order to save computational iterations. From the 2D case, the method is trivially expanded into three dimensions.

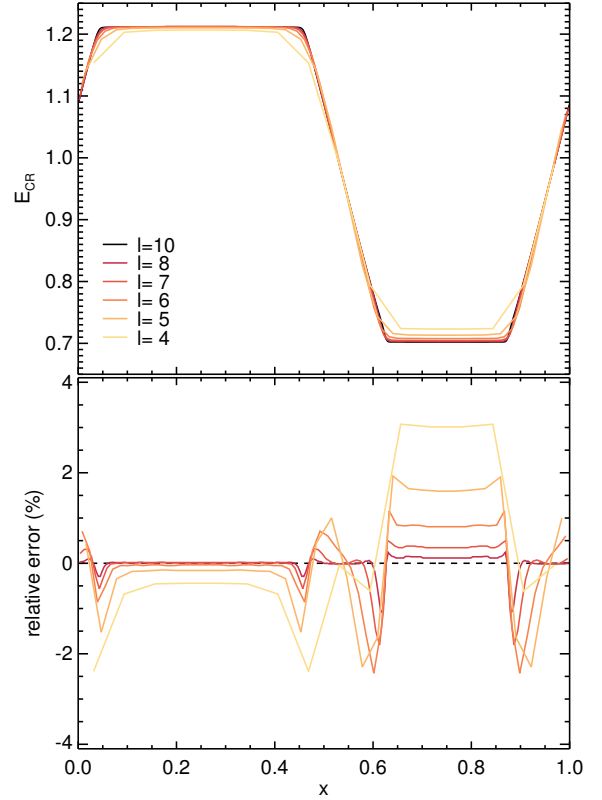
### 3.2. Tests of CR streaming

#### 3.2.1. One-dimensional sinusoid

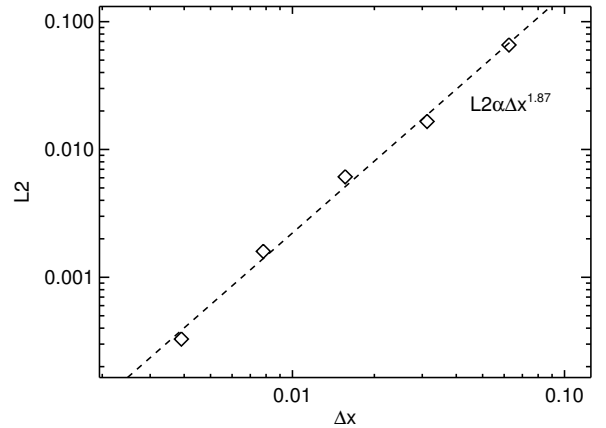
In order to test the implementation of the CR advection-diffusion streaming term, a 1D sinusoid experiment is set up where the rest of the physics is deactivated, and with  $\gamma_{\text{CR}} = 1.4$  similar to the test proposed by Sharma et al. (2009). Unfortunately, there is no known analytical solution to that experiment, but we can test the numerical convergence of the implementation to test its self-consistency. The initial condition for CR energy density is  $e_{\text{CR}} = 1 + 0.5 \sin(2\pi x)$ , and we assume that the Alfvén velocity equals 1 oriented along the  $x$ -axis. In this 1D test we set the maximum streaming diffusion coefficient to be no larger than 100. As shown in Fig. 1 for this 1D test problem using 512 cells (level 9), the evolved solution is a sinusoid where the extrema are cropped and where the regions of maximum slope are advected at  $\gamma_{\text{CR}} u_{\text{st}}$  (i.e.  $-1.4$  if  $\partial e_{\text{CR}}/\partial x > 0$  and  $+1.4$  if  $\partial e_{\text{CR}}/\partial x < 0$ ). A more evolved time shows a higher cropped fraction of the high and low part of the sinusoid. We perform a consistency test by varying the resolution of the simulation from 16 cells to 1024 cells, where the highest resolution simulation is used as a reference for comparison. Figure 2 shows the solution at time  $t = 0.02$  for 16, 32, 64, 128, 256, and 1024 cells, and their relative variation to the reference run. The solution shows very good numerical convergence towards the high-resolution reference solution, which never exceeds a few percentage points relative variation even when using only 16 cells to resolve the wavelength of the sinusoid. Finally, the L2 norm (again using the 1024-cell run as a reference) is computed and has a convergence with a scaling of  $\Delta x^{1.87 \pm 0.08}$ , as shown in Fig. 3.

#### 3.2.2. Two-dimensional sinusoid in a looped magnetic field

In this test case we try to mimic the 1D sinusoid problem embedded in a non-uniform magnetic configuration. We initialise a

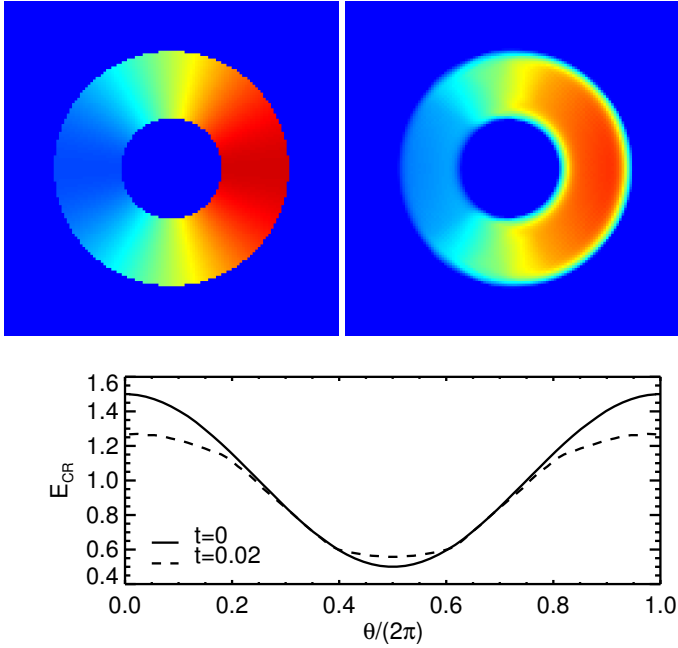


**Fig. 2.** Solution at  $t = 0.02$  of the sinusoid experiment with different resolution from uniform level 4 to 8 (from light red to dark red) and level 10 (in black). The relative errors are compared to the reference numerical solution of level 10. Even for very low resolution the relative error is never larger than a few percentage points.



**Fig. 3.** Convergence of the L2 norm for the sinusoid experiment using the solution at  $t = 0.02$ . The norm is compared to the reference numerical solution of level 10. The L2 norm scales with  $\Delta x^{1.87 \pm 0.08}$  as indicated by the dashed line.

2D looped magnetic field centred on the middle of the box, hence in the circular coordinate system the magnetic field is purely tangential. We also initialise the CR energy density in the same way as the previous 1D test case with a  $\theta$  angle dependency  $e_{\text{CR}} = 1 + 0.5 \sin(\theta)$  for a radius  $0.15 < r < 0.35$  and  $e_{\text{CR}} = 10^{-5}$  for  $r \leq 0.15$  and  $r \geq 0.35$ . In this 2D test we set the maximum streaming diffusion coefficient to be no larger than 1 and an isotropic component of  $f_{\text{iso}} = 10^{-2}$ ; we discuss the effect of changing these values on the solution in Appendix A. We



**Fig. 4.** Cosmic-ray energy density maps at  $t=0$  (top left) and  $t=0.02$  (top right) for an initial angle-dependent sinusoid within a purely circular magnetic field with an Alfvén velocity of 1 and a resolution of  $128^2$  cells. The energy is evolved with the streaming advection-diffusion term only. The bottom panel shows the radially averaged energy in the radius interval  $r = [0.15, 0.35]$  as a function of the polar angle  $\theta$ .

choose an Alfvén velocity of 1, and again we deactivate the rest of the hydrodynamics. Figure 4 shows the result at times  $t=0$  and  $t=0.02$ . The solution shows a similar angle-dependent pattern for the evolved solution at  $t=0.02$  to that of the 1D case at the same time (i.e. the value of energy density is close to uniform around regions of initial extrema). We note that the capping of extrema is slightly late in this 2D configuration with respect to the 1D test: compared with Fig. 1, where the maximum and minimum are respectively 1.2 and 0.7 at time  $t=0.02$ , here in 2D we obtain 1.28 and 0.6, respectively. We also tested the 2D streaming for a ten times wider range of initial CR energy density. The result, not shown here, is qualitatively similar to that of our reference test.

## 4. Shock-accelerated CRs

### 4.1. Shock finder algorithm

Our shock finder algorithm relies on several criteria. A shock cell is identified as such when all of the following conditions are met: (i)  $\nabla T \cdot \nabla S > 0$  (Ryu et al. 2003, where  $S = T/n^{2/3}$  is the pseudo-entropy) and  $\nabla T \cdot \nabla \rho > 0$  (which filters out tangential discontinuities, Schaal & Springel 2015); (ii)  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  is negative (compression region); (iii)  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  is a local minimum along the normal to  $\mathbf{n}_s = -\nabla T / |\nabla T|$  (where the local value of  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  is compared to the cloud-in-cell interpolated value of  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  at one  $\Delta x$  local cell distance in the upstream and downstream of the local cell); and (iv) the Mach number is larger  $\mathcal{M} > \mathcal{M}_{\min}$ , with  $\mathcal{M}_{\min} \simeq 1.5$ . Keeping in mind these conditions, the Mach number of eligible cells is computed according to the criteria using upstream (pre-shock) and downstream (post-shock) fluid variables. Using the Rankine-Hugoniot shock jump relations, the Mach number can be computed from density, temperature, or pressure values. For instance, the Mach number for a single thermal component

can be obtained from the ratio  $\mathcal{R}_p = P_2/P_1$  of the downstream to upstream pressures (here and in the following we keep the 1 and 2 subscripts for the upstream and downstream quantities), leading to

$$\mathcal{M}^2 = \frac{1}{2\gamma} [(\gamma - 1) + (\gamma + 1)\mathcal{R}_p]. \quad (15)$$

We note that it is also possible to employ the jump relations for density or velocity; however, they quickly saturate at high Mach numbers, while pressure jumps offer better leverage for probing the values of the Mach number.

Since our aim is to apply this shock finder to a thermal-CR mixture, the following relation (Pfrommer et al. 2017) should be used instead:

$$\mathcal{M}^2 = \frac{1}{\gamma_e C - [(\gamma_1 + 1) + (\gamma_1 - 1)\mathcal{R}_p](\gamma_2 - 1)} \mathcal{R}_p C. \quad (16)$$

Here  $C = [(\gamma_2 + 1)\mathcal{R}_p + (\gamma_2 - 1)](\gamma_1 - 1)$ ,  $\gamma_i = P_i/\epsilon_i + 1$  for  $i = \{1, 2\}$  (respectively upstream and downstream) and  $\gamma_e = (\gamma P_{\text{th},2} + \gamma_{\text{CR}} P_{\text{CR},2})/P_2$  for the downstream region. In the limit where the weighted adiabatic indexes are equal  $\gamma_e = \gamma_1 = \gamma_2$  this formula for the Mach number is equal to the classical formulation of Eq. (15).

The normal to the shock is provided by the gradient of temperature  $\mathbf{n}_s$ . A first guess of the upstream and downstream values of pressure are obtained by cloud-in-cell interpolating the values of the  $2^D$  cell pressure (where  $D$  is the dimensionality of the system to simulate), one cell and two cells away from the shocked cell candidates along  $\mathbf{n}_s$  and  $-\mathbf{n}_s$  for the upstream and downstream quantities, respectively. The upstream and downstream pressures are respectively the minimum and maximum of pressures obtained from the one cell and two cell distances away from the shocked cell. This first guess of the Mach number is kept for cells with moderate Mach numbers  $\mathcal{M} < 5$ , while cells with higher Mach numbers require probing regions further than two cells away from the shocked cell to properly evaluate their Mach numbers. As we see in the tests, the stronger the shock, the larger the number of cells to sample the discontinuity, and we thus need to probe more distant cells to accurately capture the true upstream and downstream values of the shock. This first guess is limited to two cells to fully exploit the code structure of RAMSES that tracks at each time the  $3^D - 1$  neighbouring octs of each cell (an oct contains  $2^D$  cells), including virtual octs that belong to another domain (hence, going further away requires communication between CPU domains and can be prohibitive, which is why we limit this search to the strongest shocked cells).

The second guess of the Mach number, and other related quantities (see next section), is obtained by moving forward along the normal to the shock by steps of  $\Delta x$  up to four cells distance, thus probing both  $3\Delta x$  and  $4\Delta x$  in the upstream and the downstream regions. For the new value of upstream and downstream pressures (and other related quantities) to be accepted for the calculation of the new Mach number, we check that the slope of the thermal energy is getting shallower (the profile must flatten as we are moving outwards) by computing the new gradient of thermal energy and comparing to its value from the previous distance step, and that the total pressure and the density both have a new extremum (either an upstream minimum or a downstream maximum). Our experiments with Mach numbers as strong as 1000 has led us to use up to four cells distance to probe the estimated Mach number of strong shocks, hence we always use this maximum value in the following, but our implementation can work with arbitrarily larger distances.

## 4.2. Cosmic-ray acceleration at shocks

At shocks the kinetic energy flux of the upstream flow  $\phi_{K,1} = 0.5\rho_1 u_1^3$  (where the velocities are measured in the moving shock frame) is dissipated by the shock interface into a thermal energy flux  $\phi_{th,2} = e_{th,diss} u_2$ , CR energy  $\phi_{CR,2} = e_{CR,diss} u_2$  and the remaining into kinetic and magnetic energy. For classical strong shocks without CR acceleration, the ratio of post-shock thermal (dissipated) energy to the pre-shock kinetic energy  $e_{th,diss}/(0.5\rho_1 u_1^3)$  can be obtained from the Rankine–Hugoniot jump relations, and tends towards 0.56 for  $\gamma = 5/3$ . Once shocked cells are identified, the amount of accelerated CRs is obtained with the CR flux following

$$\phi_{CR} = \eta(\mathcal{M}, X_{CR}, \theta_B) e_{diss} u_2, \quad (17)$$

where  $e_{diss} = e_{th,diss} + e_{CR,diss}$  is the dissipated internal energy of the gas,  $u_2$  is the downstream velocity in the frame of the moving shock, and  $\eta(\mathcal{M}, X_{CR}, \theta_B)$  is the acceleration efficiency of CRs at shocks, which is a function of the Mach number, the upstream CR-to-thermal ratio  $X_{CR} = P_{CR,1}/P_{th,1}$ , and the magnetic obliquity to the normal of the shock  $\theta_B$ . Instead of measuring the downstream velocity in the shock frame (which requires knowing both the upstream and downstream velocities in the lab frame, as well as the jump density ratio  $\mathcal{R}_\rho$ ), we replace  $u_2$  by  $\mathcal{M} c_{s,1}/\mathcal{R}_\rho$ , where  $c_{s,1}$  is the upstream sound speed. The dissipated energy can be directly measured from the upstream and downstream thermal and CR energy densities

$$e_{diss} = e_{th,2} + e_{CR,2} - e_{th,1} \mathcal{R}_\rho^\gamma - e_{CR,1} \mathcal{R}_\rho^{\gamma_{CR}}, \quad (18)$$

where  $e_{th,2}$  and  $e_{th,1}$  are respectively the downstream and upstream thermal energy densities,  $e_{CR,2}$  and  $e_{CR,1}$  the downstream and upstream CR energy densities, and  $\mathcal{R}_\rho$  the jump density ratio. The jump density ratio is obtained from the direct evaluation of the upstream and downstream densities

$$\mathcal{R}_\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (19)$$

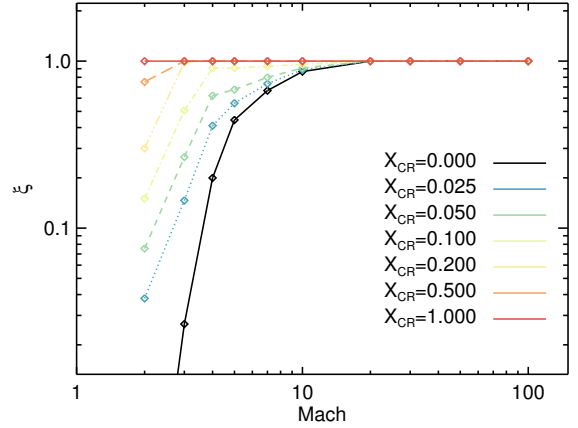
The  $\mathcal{R}_\rho^\gamma$  and  $\mathcal{R}_\rho^{\gamma_{CR}}$  terms account for the fact that the upstream thermal and CR energies are also adiabatically compressed at the shock. Finally, the new CR energy is updated using  $\Delta e_{CR} = \phi_{CR} \Delta t / \Delta x$ .

According to detailed simulations of accelerated CRs at shocks (Caprioli & Spitkovsky 2014), their acceleration efficiency depends on both the Mach number of the shock and the upstream magnetic field orientation with respect to the normal to the shock  $\theta_B = \arccos(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{n}_s)$ . The dependency of the efficiency of CR acceleration with this so-called ‘‘magnetic obliquity’’ can be factorised out,  $\eta(\mathcal{M}, X_{CR}, \theta_B) = \eta_0 \xi(\mathcal{M}, X_{CR}) \zeta(\theta_B)$ , and approximated by the following functional form (Pais et al. 2018):

$$\zeta(\theta_B) = \frac{1}{2} \left[ \tanh\left(\frac{\theta_{crit} - \theta_B}{\delta_\theta}\right) + 1 \right], \quad (20)$$

where  $\theta_{crit} = \pi/4$  and  $\delta_\theta = \pi/18$ . Therefore, we probe the angle  $\theta_B$  by evaluating the orientation of the magnetic vector in the upstream region using the cell that defines the value of the upstream pressure as defined in the previous section.

The dependency of the acceleration  $\xi(\mathcal{M}, X_{CR})$  is obtained from the results of Kang & Ryu (2013), and is an increasing function of both  $\mathcal{M}$  and  $X_{CR}$ . They provide values of the acceleration efficiency for two values of  $X_{CR}$ , namely 0 and 0.05, and ten values of the Mach number (from 1.5 to 100). Since, to the best of our knowledge, no work has explored the cases



**Fig. 5.** Acceleration efficiency  $\xi(\mathcal{M}, X_{CR})$  as a function of the Mach number  $\mathcal{M}$  for different values of the upstream CR-to-thermal pressure ratio  $X_{CR}$ . The values are obtained from the  $X_{CR} = 0$  and 0.025 values of Kang & Ryu (2013) and renormalised to a maximum value of 1.

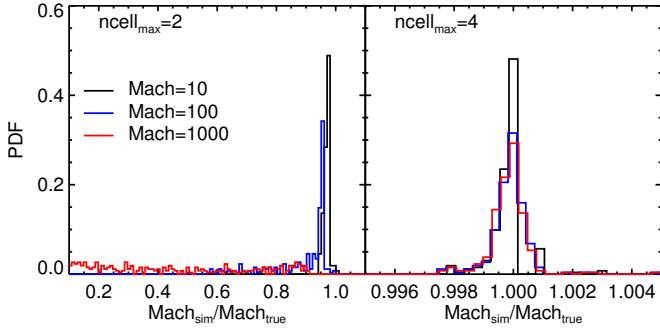
with  $X_{CR} > 0.05$ , in order to explore the full range of admissible values of  $X_{CR}$  we simply interpolate and extrapolate the values of  $\xi(\mathcal{M}, X_{CR})$  from  $X_{CR} = 0$  and 0.05, sampling values of  $X_{CR} = 0.025, 0.1, 0.2, 0.5$ , and 1. In addition, we fix those sampling values so that  $\xi$  is a monotonic increasing function of  $\mathcal{M}$  and  $X_{CR}$ . We note that their obtained values of the acceleration efficiency saturates at  $\eta_0 = 0.225$ , a factor of  $\sim 2$  larger than the maximum values obtained by Caprioli & Spitkovsky (2014) for parallel shocks ( $\theta_B = 0$ ). We thus renormalise  $\xi(\mathcal{M}, X_{CR})$  by 0.225 so that the maximum allowed efficiency is explicitly controlled by  $\eta_0$ . The values of  $\xi$  are shown in Fig. 5 and are available as tabulated values in Appendix B. We note that obliquity-dependent CR acceleration simulations conducted by Caprioli et al. (2018) with a pre-existing population of CRs in the upstream region suggest that the transition of the obliquity-dependent part of the efficiency  $\zeta(\theta_B)$  from the efficient to the inefficient regime is displaced from  $\theta_{crit} = \pi/4$  to  $\theta_{crit} = \pi/3$ . We neglect this effect at the moment.

Finally, we decided to inject the CR energy accelerated at shocks a few cells away from the shock cell. We were guided by the fact that numerical shocks are not pure discontinuities and are in fact numerically broadened; therefore, any CR pressure deposited in the numerically broadened shock layer experiences a work  $P_{CR} \nabla \cdot \mathbf{u}$  of pressure forces. For this reason, the CR energy is deposited in the cell of minimum  $|\nabla \cdot \mathbf{u}|$  in the post-shock direction up to four cells away from the shock cell. We emphasize that this choice is crucial to obtaining the correct amount of CR energy density in the post-shock region, and our experiments have taught us that the direct injection in the shock systematically overestimates the resulting CR energy density in the post-shock region by a large factor even in the simplest 1D test case (e.g. by a factor of  $\sim 2$  for the Sod test).

## 4.3. One-dimensional Sod shock tube

### 4.3.1. Convergence of the shock Mach number

In this first test for the convergence of the evaluated shock Mach number, we used the standard Sod shock tube initial conditions for a Mach of 10; in other words, we started with initial left and right states separated by a virtual interface at  $x = 5$  in a box of size of 10 with thermal pressure  $P_{th,L} = 63.499$  and  $P_{th,R} = 0.1$ , density  $\rho_L = 1$  and  $\rho_R = 0.125$ , velocity  $u_L = u_R = 0$ . This test was



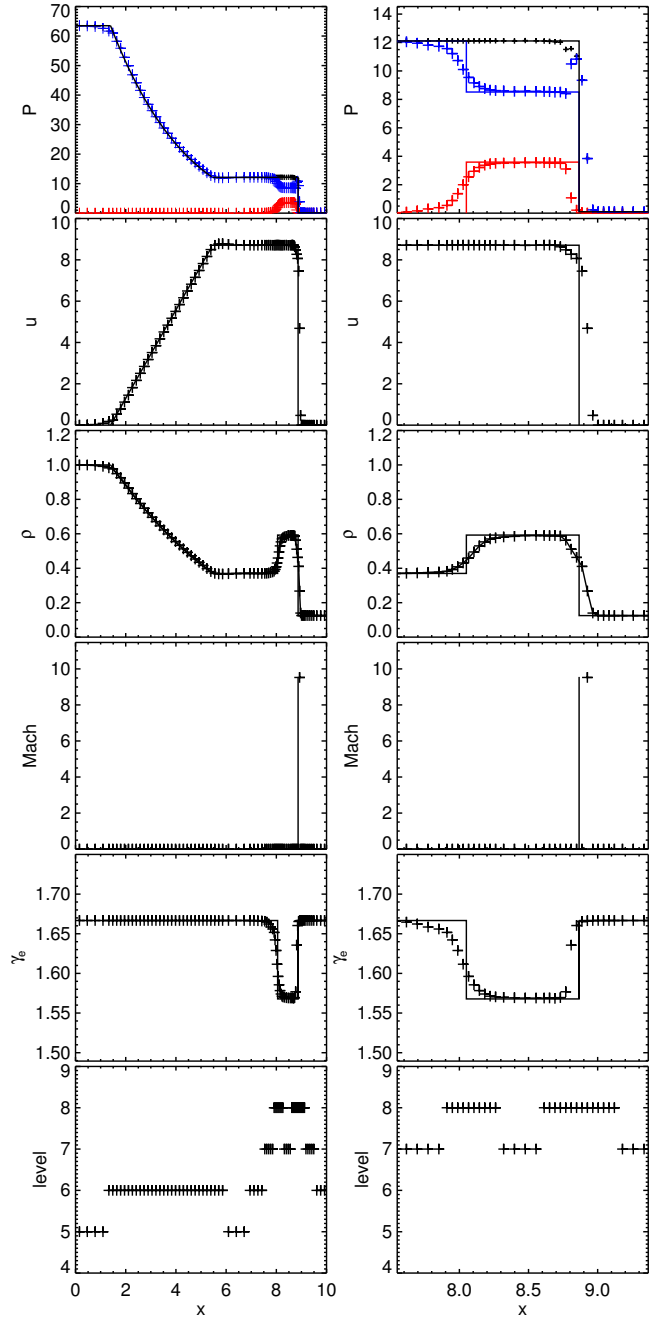
**Fig. 6.** Statistics of the numerical Sod shock Mach number relative to its expected value for different shock Mach numbers, 10 (black), 100 (blue), and 1000 (red), using either a maximum of  $ncell_{max} = 2$  cells (left panel) or  $ncell_{max} = 4$  cells (right panel) to probe hydrodynamical values in the post-shock and pre-shock regions. These shock tube tests do not model CRs. Pre-shock and post-shock regions need to be probed up to four cells away from the shock cell location for the strongest Mach numbers to be captured accurately.

run without any initial or accelerated CR component (i.e. free of CR pressure), and we adopted an adiabatic index of the gas of  $5/3$ . In addition we also explored more aggressive shock tube initial conditions to probe Mach of 100 ( $P_{th,L} = 6349.9$ ), and Mach of 1000 ( $P_{th,L} = 634990$ ). We employed a base grid of level 5 with up to three additional levels of refinements triggered in regions where the relative cell-to-cell variation of either the density, velocity, or pressure is larger than 10%.

Figure 6 shows the quality of the Mach number evaluation with the statistics of its value relative to the exact analytical value for various shock tube tests, changing the strength of the shock by two orders of magnitude. We tested two maximum values of the extent of the pre-shock and post-shock quantities, either probing up to  $ncell_{max} = 2$  cells or  $ncell_{max} = 4$  away from the shock cell. We note that we removed the estimates of the Mach number for the first 15 time steps of the simulations (over the 263 available time steps, reaching final times  $t = 0.35$ ,  $t = 0.035$ , and  $t = 0.0035$  for Mach numbers of 10, 100, and 1000, respectively), where the shock, contact, and rarefaction waves are not yet sufficiently separated to correctly capture the Mach number of the shock. It shows that  $ncell_{max} = 2$  cells can be sufficient to obtain Mach numbers accurate to a level of a few percentage points up to Mach numbers of the order of  $\sim 100$ , even though it is systematically undervalued; however, Mach numbers of 1000 are almost never correctly captured. On the contrary, going up to  $ncell_{max} = 4$  cells distance to measure hydrodynamical quantities involved in the reconstruction of the Mach number allows a precision of better than 0.1% in this simple 1D shock tube test. This behaviour is the natural outcome of the larger numerical broadening of shock discontinuities for stronger shocks (see Appendix C): strong shocks require more cells to resolve the entire shock layer. We note that increasing the level of refinement does not cure the problem; the shocks are narrower in physical extent, but the number of cells required to describe the shock jump remains the same.

#### 4.3.2. Cosmic-ray acceleration with constant efficiency

In this test we set up the previous 1D Sod shock tube test with Mach number  $M = 10$ , and allowed for CR acceleration with a constant efficiency of  $\eta = 0.5$  (the exact Mach number accounting for CRs added at the shock is  $M = 9.56$  for this particular efficiency). We used an adiabatic index for the thermal

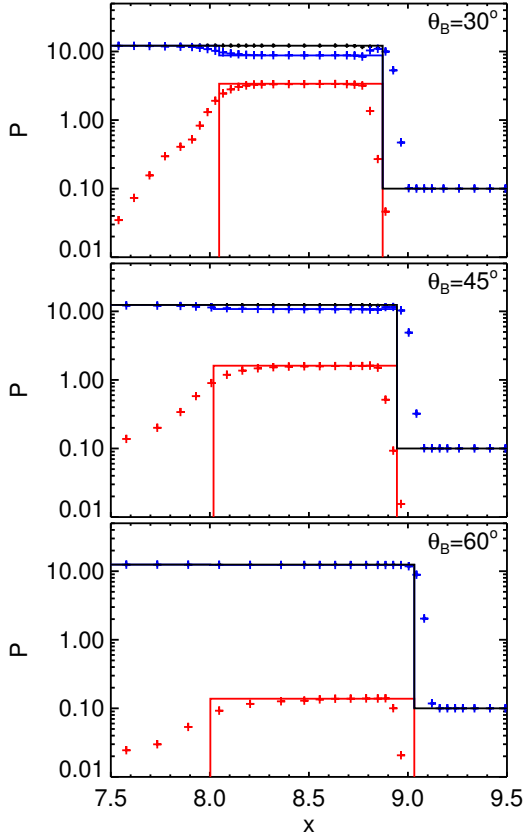


**Fig. 7.** Sod shock tube experiment with CR acceleration efficiency of  $\eta = 0.5$ , zero initial CR pressure and  $\gamma_{CR} = 4/3$  at  $t = 0.35$ . *Left panels:* solution over the full box. *Right panels:* zoomed-in region over the shock and contact discontinuities for better clarity of the CR shock-accelerated region. *From top to bottom:* pressures (black: total, blue: thermal, red: CR), the density, the velocity, the Mach number, the effective adiabatic index, and the level of refinement. The symbols stand for the numerical solution, while the solid lines are for the analytical solution. The exact Sod solution with accelerated CRs is reproduced well by our numerical implementation.

and CR components of respectively  $\gamma = 5/3$  and  $\gamma_{CR} = 4/3$ . All the Sod experiments were run without streaming and without radiative thermal or CR losses. The analytical solution with accelerated CRs was provided by Pfrommer et al. 2017 (see their Appendix B).

Figure 7 shows the result of the numerical calculation where the analytical solution is nicely reproduced with the correct Mach number of  $M \approx 9.56$  positioned at the shock front in





**Fig. 8.** Sod shock tube experiment with zero initial CR pressure and  $\gamma_{\text{CR}} = 4/3$  with obliquity-dependent CR acceleration efficiency ( $\theta_B$  is the so-called obliquity: angle of the pre-shock  $\mathbf{B}$  field with the normal to the shock)  $\eta_0 = 0.5\zeta(\theta_B)$  for  $\theta_B = 30, 45, 60^\circ$  from top to bottom. The panels show the pressures (black: total, blue: thermal, red: CR) at  $t = 0.35$  over a zoomed-in region over the shock and contact discontinuities for better clarity of the CR shock-accelerated region. The symbols stand for the numerical solution, while the solid lines are for the analytical solution. As expected, the amount of CRs produced at the shock decreases with obliquity, and reproduces well the exact solution.

one of the cell sampling the numerically broadened discontinuity. Right after the shock discontinuity, in the post-shock region, the thermal pressure shows a few cells that overshoot the expected value. This effect is due to our choice of depositing the accelerated CR energy density a few cells beyond the exact shock location (a strategy we employ to avoid the  $PdV$  compression). Apart from this expected effect, pressures, velocity, density, and the effective adiabatic index of the gas are accurately reproduced.

#### 4.3.3. Cosmic-ray acceleration with magnetic obliquity dependency

In this Sod test, we let the acceleration efficiency  $\eta(\theta_B)$  vary with the pre-shock magnetic obliquity angle  $\theta_B$  and imposed  $\eta = 0.5\zeta(\theta_B)$  (the previous Sod test was run with  $\theta_B = 0^\circ$ , i.e. the efficiency was  $\eta = \eta_0 = 0.5$ ). We ran three experiments with  $\theta_B = 30, 45$ , and  $60^\circ$  (i.e.  $\zeta \approx 0.95, 0.5$ , and  $0.05$  respectively), starting with an initial magnetic field with components  $(B_x, B_y, B_z) = (10^{-10}, 0, 5.77 \times 10^{-11}), (10^{-10}, 0, 10^{-10}), (5.77 \times 10^{-11}, 0, 10^{-10})$ , respectively. Magnetic field magnitudes were chosen to be arbitrarily small so that the magnetic field had no dynamical impact on the gas (i.e.  $B^2 \ll P$ ). The results are

shown in Fig. 8, where we see that the expected values of the CR pressure in the shock are reproduced well for any of the adopted magnetic obliquity. We note that the exact location of the shock jump is modified, due to the modified shock velocity, which is governed by the effective adiabatic index in the shock that depends on the amount of accelerated CRs.

#### 4.4. Three-dimensional Sedov explosion

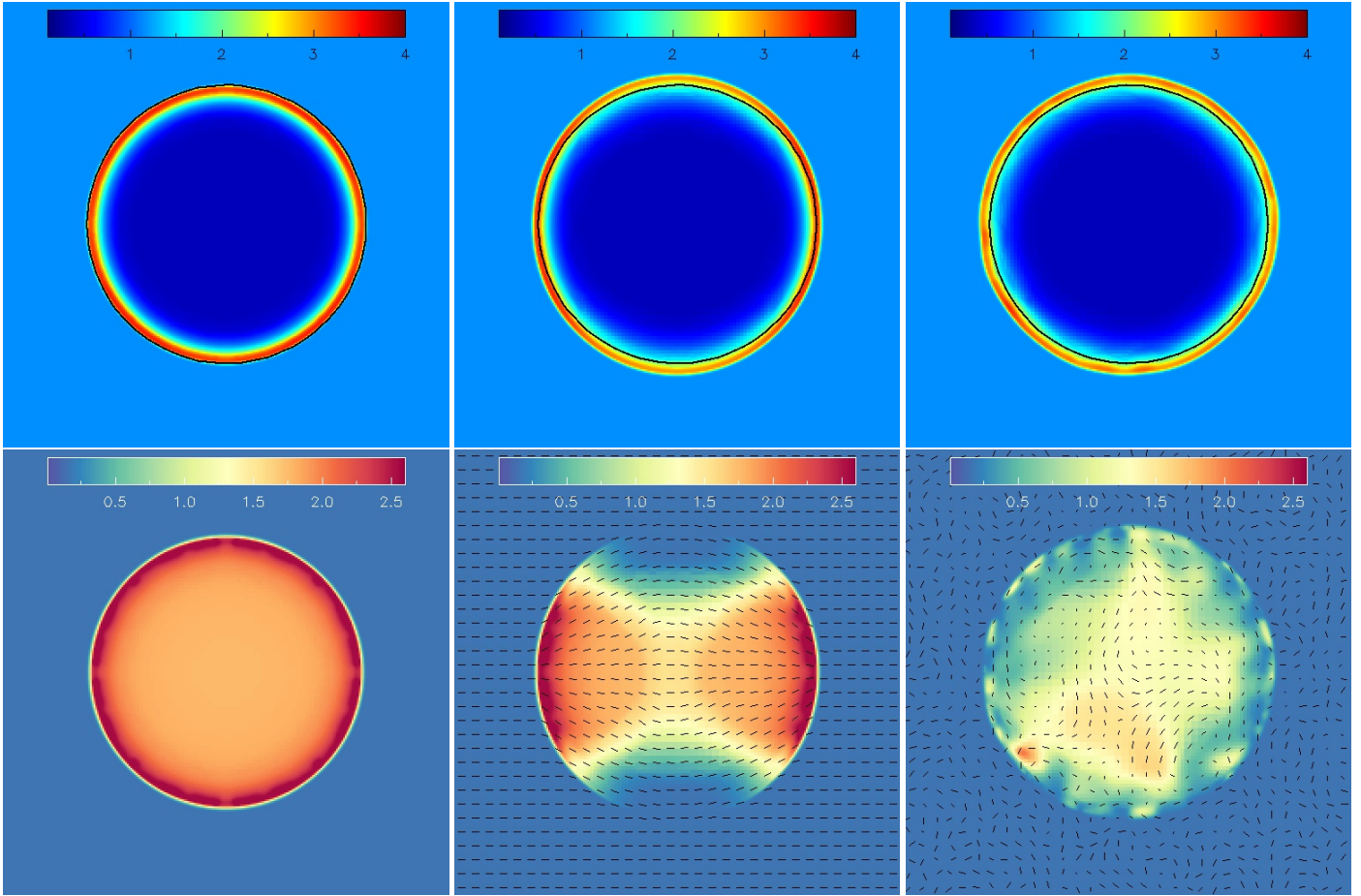
We set up a 3D Sedov explosion with the following unitless values: a background at rest with gas density of  $\rho = 1$ ,  $P_{\text{th}} = 10^{-4}$ , and a point-like explosion of energy  $E_{\text{th}} = 1$  spread over the eight central cells in a box of size unity<sup>1</sup>. There are no CRs initially, and only those accelerated into the shock with a constant acceleration efficiency of  $\eta = 0.5$  will necessarily contribute to the CR distribution. The adiabatic index of the thermal component is  $\gamma = 5/3$ , and  $\gamma_{\text{CR}} = 4/3$  for CRs. In a box of size unity, we start with a base grid of level 6 and allow for 2 extra levels of refinement wherever the cell-to-cell density and pressure variations are larger than 20 and 50%, respectively. The criterion for density is used only where the gas density is higher than that of the background in order to avoid excessive refinement into the hot interior, and instead we focus on the shocked swept-up shell material. For this particular test it is customary to employ a more diffusive solver than HLLD (or Harten–Lax–van Leer–Contact for a pure hydro run) to avoid the formation of the carbuncle phenomenon in shocked cells around the  $x$ -,  $y$ -, or  $z$ -axis of the box, hence, we use, here, the Lax–Friedrich approximate Riemann solver. All Sedov experiments are run without streaming and without radiative thermal or CR losses.

Figure 9 (left panels) shows the density and CR pressure in a thin slice through the centre of the explosion at time  $t = 0.05$ . The swept-up material accumulates in a thin shocked layer of gas where CRs are accelerated and they propagate backward through a reverse shock in the bubble interior. We can see finger-like features in the shocked material, which are produced by the discretised nature of the grid; amongst the post-shock cells receiving the accelerated CR energy, some of them can indeed receive energy from several shock cells, while some others receive it only once. We note that Pfrommer et al. (2017) also noticed this effect in their unstructured mesh code, the difference is that their features are randomly located in angle, while here, due to the structured Cartesian nature of our grid, these features follow some  $\pi/2$  periodic pattern.

As expected, due to the high adopted value of acceleration efficiency  $\eta = 0.5$ , there is a very significant amount of CRs produced into the dissipation layer of the shock as seen in the spherically averaged radial profiles from Fig. 10. The pressure in the shock layer is a mixture of CRs and thermal particles, while the CR pressure completely dominates the total pressure in the diffuse bubble interior.

It leads to a sharp transition of the effective adiabatic index of the gas from purely thermal outside of the explosion  $\gamma_e = \gamma$  to purely CR-like in the diffuse bubble  $\gamma_e = \gamma_{\text{CR}}$ . What matters for the shock dynamics is the effective adiabatic index in the swept-up shock layer that can be inferred from the exact Sedov shock dynamics given a value of  $\gamma_e$ . For analytical guidance, with enthalpy arguments Chevalier (1983) provides the solution for the effective adiabatic index as a function of the fraction of CR pressure  $w = P_{\text{CR}}/P_{\text{tot}}$  in the shocked shell (not to be confused

<sup>1</sup> These adopted unitless values can correspond to e.g. a SN explosion of  $1.1 \times 10^{51}$  erg in a background medium of density  $n = 1 \text{ H cm}^{-3}$ , sound speed  $c_s = 0.6 \text{ km s}^{-1}$ , and a box length of 45 pc.



**Fig. 9.** Sedov explosion with accelerated CRs with  $\eta = 0.5$  (left panels), and obliquity-dependent acceleration efficiency  $\eta = 0.5\zeta(\theta_B)$  with either a uniform magnetic field (middle panels) or a random magnetic field (right panels). Top and bottom panels: respectively slices of density and CR pressure at time  $t = 0.05$ , with the solid circle line indicating the position of the Sedov shock front for the exact solution with  $\gamma_e = 7/5$ , which are reproduced in all panels to guide the eye throughout (the random magnetic field configuration is better fitted with  $\gamma_e = 1.55$ ), and with magnetic unit vectors overplotted as black segments (the length scale of the random magnetic field corresponds to the size of two large arrows). In the simulation without obliquity dependent acceleration, CR production is close to uniform in the shell except for small numerical grid artefacts. With obliquity dependency, CRs accumulate in polar caps for a uniform magnetic field, and in small patches for the random magnetic field corresponding to the length scale of the field. The position and shape of the shell are also affected by the presence and the configuration of the magnetic field with respect to the obliquity-independent case.

with the acceleration efficiency)

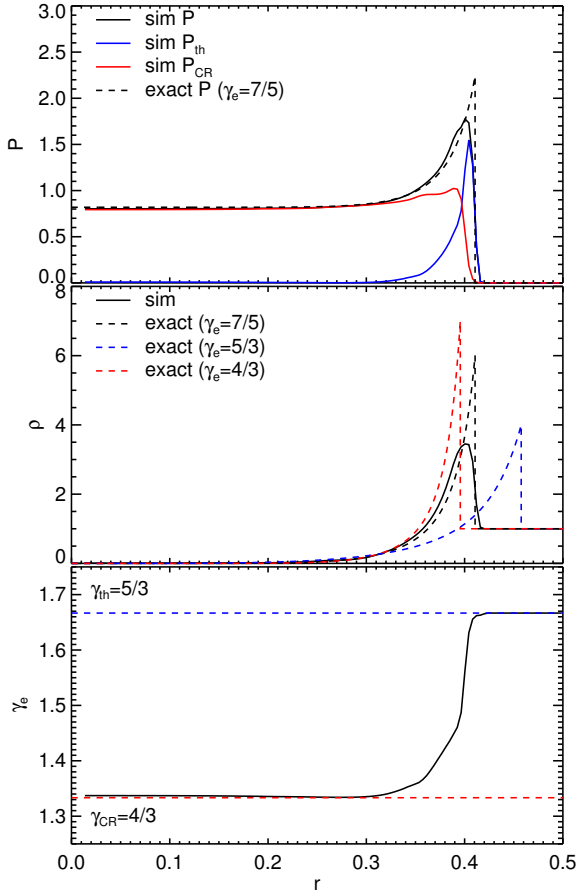
$$\gamma_e = \frac{5 + 3w}{3(1 + w)} \quad (21)$$

for  $\gamma_{\text{CR}} = 4/3$ . In agreement with Pfrommer et al. (2017), we find that for the same set-up, an effective adiabatic index in the shock of  $\gamma_e = 7/5$  for the exact solution leads to a good recovery of the numerical solution in both total pressure and density, though the maximum values are less pronounced at the shock because of the limited resolution. Increasing the resolution naturally captures the shock profile more faithfully.

We ran two extra simulations with the acceleration efficiency depending on magnetic obliquity  $\eta = 0.5\zeta(\theta_B)$  and changing from an initial initially uniform magnetic field with  $(B_x, B_y, B_z) = (10^{-10}, 0, 0)$  or a random magnetic field configuration (see Appendix D for details) with a typical coherence length of  $\lambda_B = 1/16$  and a similar magnitude of  $10^{-10}$ . For the uniform magnetic field configuration, CRs are accelerated around polar caps along the  $x$ -axis of the box with maximum efficiency, and go to zero along the  $y$ -axis (or  $z$ -axis) as a result of magnetic obliquity (see middle panels of Fig. 9). It results in an

ellipsoid shape of the explosion: the position of the shell where CR acceleration is close to zero ( $y$ - and  $z$ -axes) is further away than where CRs are produced ( $x$ -axis) as a result of the higher (resp. lower) effective adiabatic index of the gas mixture in the shell. We note that the exact shape of the ellipsoid is a function of the obliquity-independent part of the acceleration efficiency: the larger  $\xi$  is, the more stretched the explosion is (see Pais et al. 2018, for a thorough analysis of this effect). As expected, the density is also higher along the  $x$ -direction than along the  $y$ -direction ( $z$ -direction) as a result of the dependency of the density jump to the adiabatic index of the gas (for strong shocks,  $\mathcal{R}_\rho = 4$  for  $\gamma_e = 5/3$  and  $\mathcal{R}_\rho = 6$  for  $\gamma_e = 7/5$ ).

Finally, the random magnetic field set-up shows a shell mass distribution close to spherical with significant fluctuations with angle (right panels of Fig. 9). It reflects the underlying patchy acceleration and distribution of CR pressure in the swept-up shock layer. On average, the acceleration efficiency is reduced by a factor  $\langle \zeta \rangle = \int_0^{\pi/2} \zeta(\theta_B) \sin \theta_B d\theta_B \simeq 0.302$  for a purely random upstream magnetic field orientation (see Fig. 11) compared to the simulation without obliquity dependency, and thus to an effective acceleration parameter of  $\eta_e \simeq 0.15$ . Therefore, there is

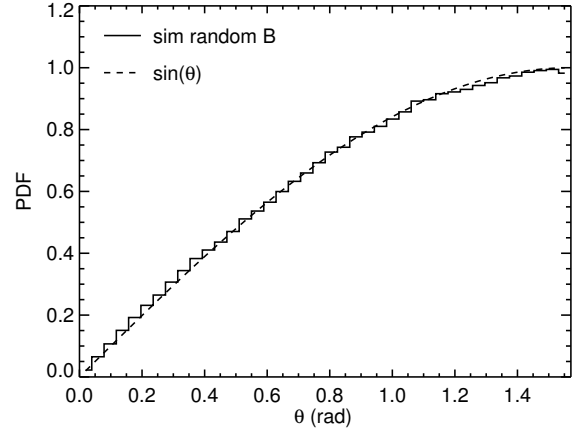


**Fig. 10.** Spherically averaged radial profiles for the 3D Sedov explosion with CR acceleration with constant acceleration efficiency of  $\eta = 0.5$  of the pressure (blue: thermal pressure, red: CR pressure), density, and effective adiabatic index of the thermal–CR mixture *from top to bottom* at time  $t = 0.1$ . Solid lines stand for the result of the numerical simulation, while the dashed lines of the pressure and density plots are the exact solution of the self-similar profile for an effective adiabatic index of  $7/5$  in black (the exact density profile for  $\gamma = 5/3$  is also shown as a dashed blue line). The blue and red dashed lines in  $\gamma_e$  stand for the adiabatic index used for the thermal and CR component, respectively. The thermal–CR mixture produces an explosion similar to a Sedov solution with effective adiabatic index of  $\gamma_e = 7/5$ , which delays the position of the shock due to the lower pressure work exerted by the shocked shell.

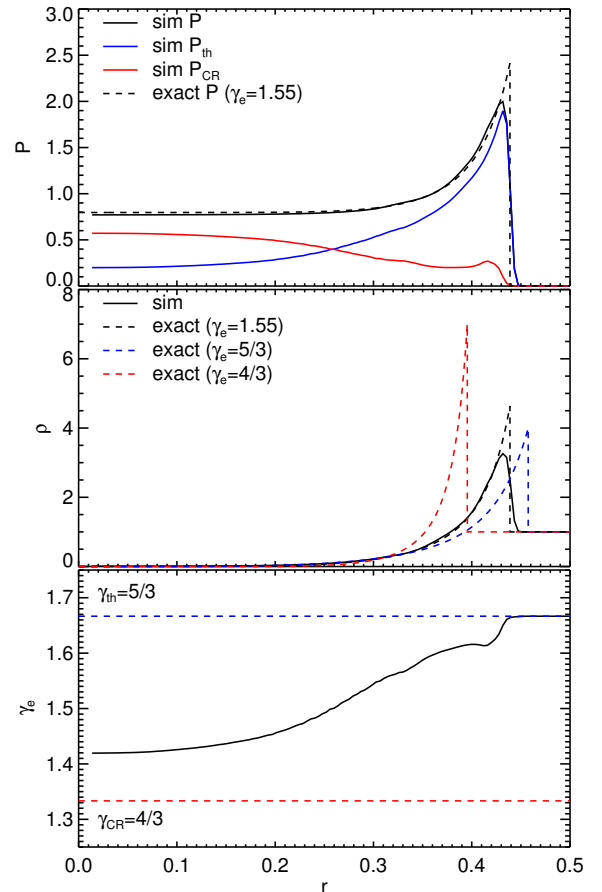
a smaller amount of CRs produced in the shock, and as expected from [Chevalier \(1983\)](#) (see also [Castro et al. 2011](#); [Bell 2015](#)), the exact solution is now better reproduced for a lower effective adiabatic index of  $\gamma_e = 1.55$  (see Fig. 12) and leads to a shock front in advance compared to the obliquity-independent simulation.

## 5. Turbulent box of the ISM

We ran turbulent ISM boxes in the same spirit of [Commerçon et al. \(2019\)](#) except that here we started with negligible CR pressure ( $10^{-10}$  that of the thermal pressure) and let it build through the turbulence-generated shocks. The simulations have a uniform  $128^3$  Cartesian resolution in a box of 50 pc, leading to a spatial resolution of 0.4 pc. The initial gas density and temperature are  $2 \text{ cm}^{-3}$  and 4460 K, respectively, with a mean molecular weight of  $\mu = 1.4$  assumed throughout. We started with an initial thermal pressure of  $P_{\text{th},0} = 1.2 \times 10^{-12} \text{ erg cm}^{-3}$ . The initial magnetic field was uniform and was set up in the  $x$ -direction of the box with a magnitude of  $0.1 \mu\text{G}$ , leading to a plasma beta



**Fig. 11.** Stacked PDF of the magnetic obliquity in the Sedov experiment between  $t = 0.05 - 0.1$  for the random magnetic field configuration (solid histogram), compared to the random distribution (black dashed line). The distribution of magnetic obliquity is compatible with a purely random field as expected, thus leading to a reduced efficiency of  $\langle \zeta \rangle = 0.302$ .



**Fig. 12.** Similar to Fig. 10, but for the random magnetic field configuration and with obliquity dependency of the CR acceleration efficiency  $\eta = 0.5\zeta(\theta_B)$ . Here the Sedov profile is better fitted with an effective adiabatic index of  $\gamma_e = 1.55$ .

parameter of  $\beta = P_{\text{th},0}/P_{\text{mag},0} \approx 3 \times 10^3$ . We did not allow for self-gravity of the gas or for any refinement. Cooling proceeded on the thermal component following [Audit & Hennebelle \(2005\)](#), while we neglected the role of Coulomb and hadronic losses of CR protons ([Enblin et al. 2007](#); [Guo & Oh 2008](#)).

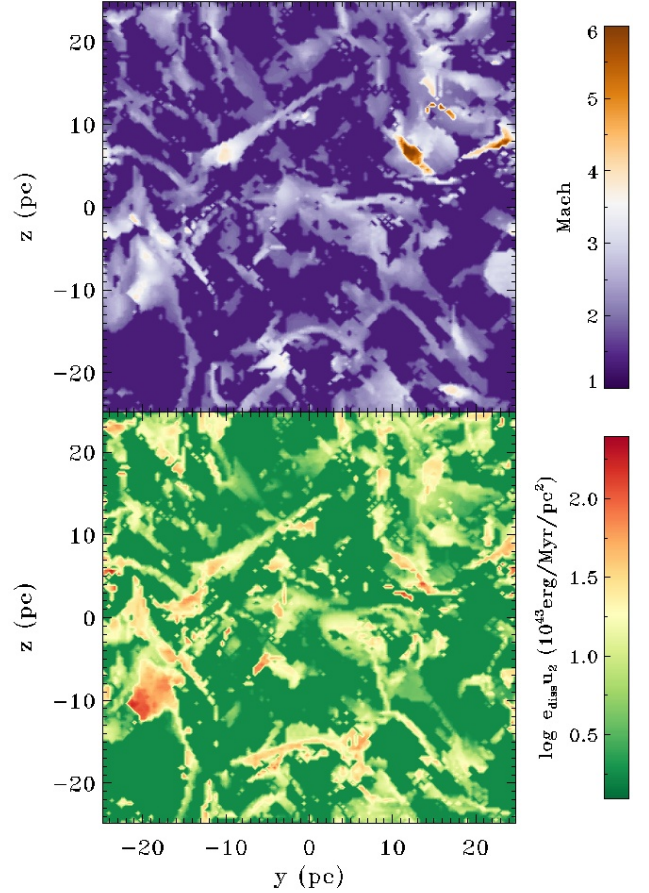
The turbulence is forced at all times with an injection scale of  $k_{\text{turb}} = 2$  (i.e. corresponding to half the size of the box) and with a parabolic shape in the Fourier space  $\tilde{f}(k) \propto 1 - (k - k_{\text{turb}})^2$  with  $k$  sampled in the range  $k = [1, 3]$ . The turbulence is applied intermittently with an auto-correlation time of 0.5 Myr and with a compression-to-solenoidal ratio of 1 (see Commerçon et al. 2019, for more details).

### 5.1. $\mathcal{M}$ - and $X_{\text{CR}}$ -independent acceleration efficiency

We start with a batch of simulations where the acceleration efficiency does not depend on  $\mathcal{M}$  and  $X_{\text{CR}}$  (i.e.  $\xi = 1$ ). We set up three different simulations: (i) without CR acceleration (i.e.  $\eta_0 = 0$ , NoShock); (ii) with CR acceleration and  $\eta = \eta_0 = 0.1$  (i.e. where CR acceleration does not depend on magnetic, NoThetaB); (iii) with CR acceleration and  $\eta_0 = 0.1$  (i.e. where CR acceleration depends on magnetic obliquity, ThetaB); and with  $\eta_0 = 0.1$  and CR streaming (Streaming). We note that we use rather large values of CR acceleration efficiencies given the moderate Mach numbers of only 2–4 (e.g. Kang & Jones 2005; Kang & Ryu 2013) obtained in that experiment. This somewhat reflects the more typical SN-generated CR acceleration efficiencies corresponding to much larger values of the shock Mach number than we can capture here with this simplified set-up. For the sake of a testable set-up for our new implemented algorithm, these values allow us to reach an appreciable amount of CR energy density in the simulated volume over a few turbulent crossing times  $t_{\text{cross}} = 6.7 \text{ Myr}$ , where it is the box length divided by the rms velocity  $u_{\text{rms}} = 7.3 \text{ km s}^{-1}$  (here measured at  $t = 20 \text{ Myr}$  for the Streaming run).

Shocks are driven in sheets with moderate Mach numbers of  $\mathcal{M} \approx 3\text{--}4$ , as can be seen in Fig. 13 for the Streaming run (other simulations show similar features) at time  $t = 10 \text{ Myr}$ , which dissipates the energy of shocks with a typical range of flux values of  $e_{\text{diss}} u_2 \approx 10^{44}\text{--}10^{45} \text{ erg Myr}^{-1} \text{ pc}^{-2}$ . Figure 14 shows maps of the CR pressure at two different times  $t = 10$  and  $20 \text{ Myr}$  for the simulation NoThetaB, ThetaB, and Streaming. At  $t = 10 \text{ Myr}$  the CR pressure has already built up to appreciable levels thanks to turbulence-generated shocks in the box, with clustered regions of pressure at levels similar to or above the initial thermal pressure ( $P_{\text{th},0} \approx 10^{-12} \text{ erg cm}^{-3}$ ). The NoThetaB simulation has, as expected, the highest values of CR pressure since CR acceleration efficiency is always equal to  $\eta = 0.1$ , while in the two other runs it can only reach this value for a perfectly aligned pre-shock magnetic field with the normal to the shock. At this early stage of the simulation, the effect of streaming is still very moderate on the CR pressure distribution. It reduces the range of the lowest and highest values of pressure mimicking the effect of a diffusion process; nonetheless, the geometrical features are easily recognizable between the ThetaB and Streaming runs (and NoThetaB as well).

Figure 15 (top panel) shows the thermal and CR energies in the simulated volumes as a function of time. The total thermal energy in the box is quickly reduced in 3 Myr by nearly a factor of 3 with very negligible differences by the end of the simulation between the four simulations. The total CR energy builds up almost linearly with time as a result of nearly constant dissipated energy and acceleration efficiency over time, once passed the first 5 Myr. This CR pressure provides a support to the total pressure close to the thermal pressure, if not above (NoThetaB case at  $t = 20 \text{ Myr}$ ). The magnetic energy quickly increases early on and saturates at a plasma beta  $\beta \approx 10$  similar for the four different simulations. We note that this level of magnetic field is crucial for the CR streaming to have an appreciable effect on the

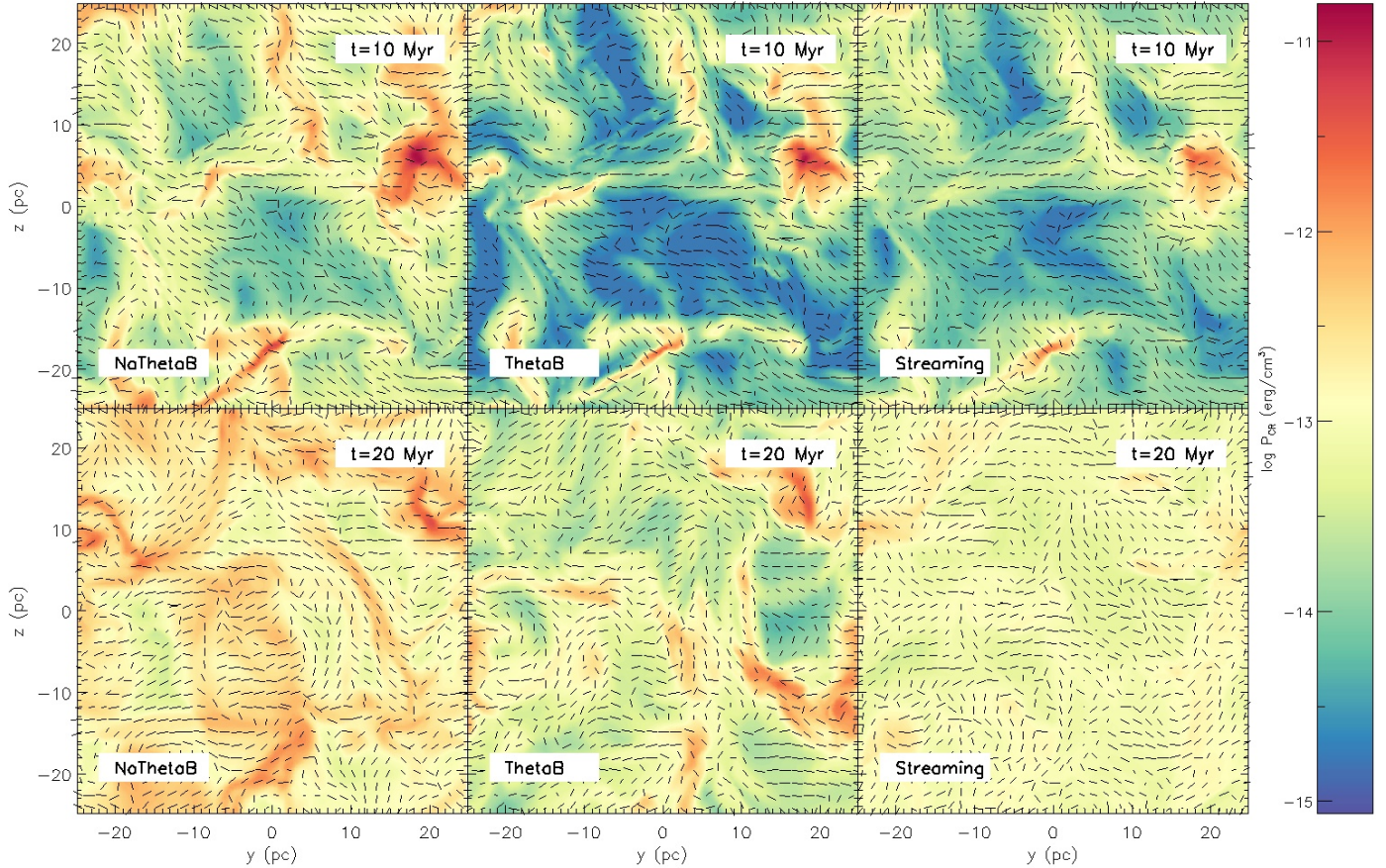


**Fig. 13.** Projection of the Mach number  $\mathcal{M}$  (top) and dissipated energy flux  $e_{\text{diss}} u_2$  (bottom) for the Streaming turbulent box, with  $\eta_0 = 0.1$  and  $\xi(\mathcal{M}, X_{\text{CR}}) = 1$ , at time  $t = 10 \text{ Myr}$  over a box thickness of half the size of the box centred on the middle of the box. Shocks are driven in sheets with a bulk of the Mach number of moderate values  $\mathcal{M} \approx 3\text{--}4$ .

CR pressure distribution as the streaming velocity scales with the Alfvén velocity.

As we discussed in Sect. 4.4, the average obliquity-dependent part of the CR acceleration efficiency must be  $\langle \zeta \rangle \approx 0.302$  for a purely random field, which seems supported by the apparent randomness of magnetic vectors (white arrows in Fig. 14), but we show that this is not the case. Figure 15 (bottom panel) shows the dissipated energy per unit time in the form of thermal or CR energy. Dissipated thermal energies are very similar for the three simulations, although there is a slight deviation at late times for the Streaming run. However, the dissipated CR energy shows a larger than a factor 3 difference between the non- $\theta_B$  and the  $\theta_B$  dependencies, closer to a factor 6–8 difference between the NoThetaB and ThetaB runs. This is indirect evidence that pre-shock magnetic fields are not randomly oriented, but show preferentially within-shock-plane orientations. To clarify further, we measure the probability density function (PDF) of the obliquity for the ThetaB and Streaming runs at time  $t = 20 \text{ Myr}$  in Fig. 16, which shows that the PDF is skewed towards larger angles: upstream magnetic fields are more likely to be perpendicular to the normal of shocks than for a random field, in agreement with the estimated reduced efficiency of CR acceleration.

We also note that at time  $t = 10 \text{ Myr}$ , the CR energy density is a factor 2 lower with streaming, while the CR dissipated energy before  $t \leq 10 \text{ Myr}$  is similar to that of the simulation without



**Fig. 14.** Cosmic-ray pressure maps of the turbulent box simulation, with  $\eta_0 = 0.1$  and  $\xi(\mathcal{M}, X_{\text{CR}}) = 1$ , in a thin plane within the  $x$ -plane of the middle of the box at time  $t = 10$  Myr (*top panels*) and  $t = 20$  Myr (*bottom panels*) for the simulation without CR streaming and without (*left panels*) or with (*right panels*) obliquity dependency for CR acceleration, and with obliquity and CR streaming (*right panels*). The black segments depict the orientation of the unitary magnetic vectors. The simulation without obliquity builds the CR pressure faster. The presence of the streaming instability allows for a more uniform distribution of CRs in the simulated volume.

streaming. Therefore, this difference in CR energy density is directly due to streaming (as opposed to streaming reducing shock strengths) putting CRs away from compressed regions (shocks or not) where the adiabatic compression can further enhance the overall CR pressure.

At time  $t = 20$  Myr, the distributions of CR pressure (Fig. 14) in the three simulations differ very significantly. While the NoThetaB and ThetaB runs look like a renormalised versions of one another, albeit with different specific locations of voids and plume-like features, the Streaming run has lost most of its CR structure with a closer to uniform distribution of CR pressure in the box.

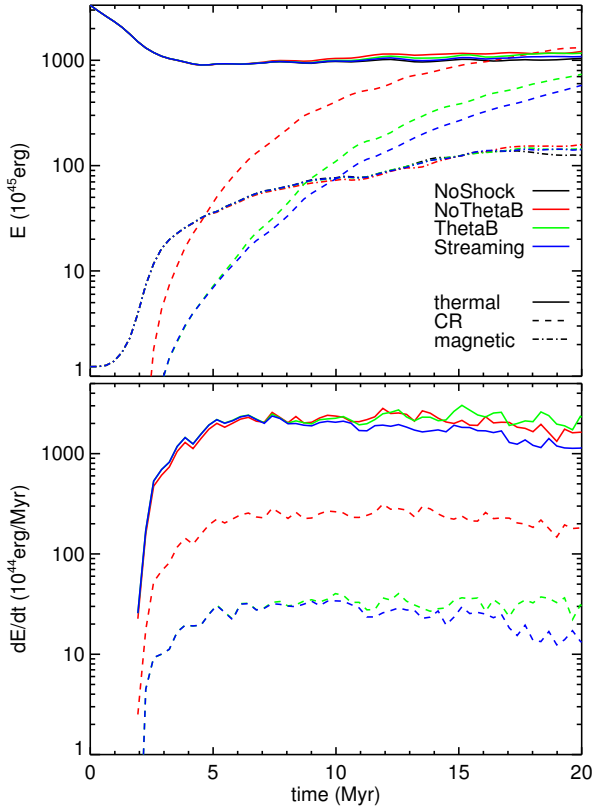
These distinct CR pressure evolutions and distributions lead to very important differences in the way the matter is compressed into overdense regions of the flow. Figure 17 shows the time evolution of the mass fraction of dense gas, which is arbitrarily chosen at five times the initial gas density (i.e. for  $n > 10 \text{ cm}^{-3}$ , but the results are qualitatively independent of this choice). Since only the thermal pressure is affected by radiative losses, which are larger at high gas densities, it is the CR pressure that accumulates in regions of high gas densities that can provide the support against compression. Therefore, it shows that the simulations with the largest total CR energy are the simulations with the lowest amount of dense gas. However, the streaming introduces a subtle but significant difference to this overall picture. Since streaming smooths the CR pressure in the ISM, the high gas density is much less clustered for a given total energy in the

box. At  $t = 20$  Myr in the Streaming run, the total CR energy is indeed equal to that at  $t = 18$  Myr in the ThetaB run; nonetheless, the mass fraction of dense gas is respectively 40% higher in the Streaming run. Recast into an “effective” diffusion framework, we can deduce that streaming behaves like anisotropic diffusion with an effective diffusion coefficient to be determined through comparison with the corresponding simulations, which we defer to a future work.

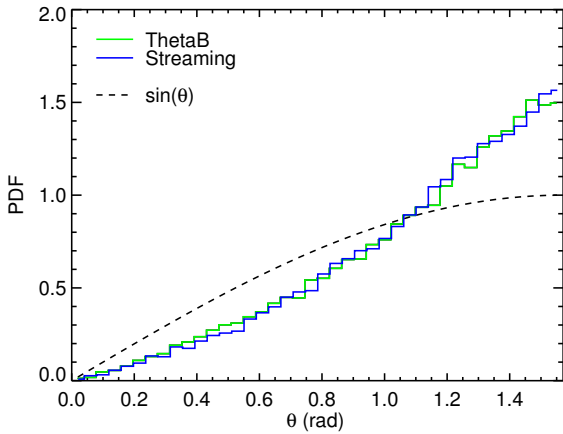
## 5.2. $\mathcal{M}$ - and $X_{\text{CR}}$ -dependent acceleration efficiency

We show here the results of the turbulent box experiments, where this time the efficiency dependency  $\xi(\mathcal{M}, X_{\text{CR}})$  is not assumed to be equal to 1, but varies according to the scaled values of Kang & Ryu (2013). We ran two numerical experiments, free of CR streaming, with and without the magnetic obliquity dependency  $\zeta(\theta_B)$ , called ThetaB\_KR13 and NoThetaB\_KR13, respectively. We recall that we started with an initial CR pressure of almost zero so that  $X_{\text{CR}} = 10^{-10}$  everywhere in the box at time  $t = 0$ , and that a normalisation (maximum) acceleration efficiency  $\eta_0 = 0.1$  was used throughout.

Figure 18 shows the evolution of the CR flux-weighted mean value of  $\mathcal{M}$  (top panel) and  $X_{\text{CR}}$  (middle panel), and the evolution of the energy flux-weighted mean acceleration efficiencies (bottom panel)  $\eta = \eta_0 \xi(\mathcal{M}, X_{\text{CR}}) \zeta(\theta_B)$ ,  $\xi(\mathcal{M}, X_{\text{CR}})$ , and  $\zeta(\theta_B)$  as a function of time. The bulk of the CR energy is produced in shocks of  $\mathcal{M} \simeq 3\text{--}4$  with a slight decrease over time. As

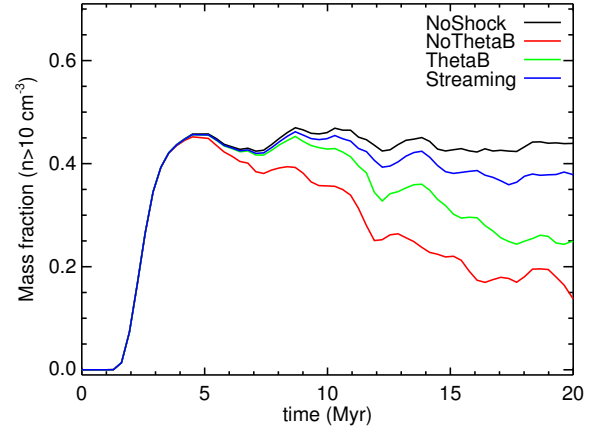


**Fig. 15.** *Top panel:* time evolution of total thermal (solid lines), CR energy (dashed lines), and magnetic energy (dot-dashed lines) in the simulated turbulent ISM boxes for the simulations without shock-acceleration (black), without CR streaming, and without (red) or with (green) obliquity dependency for CR acceleration, and with obliquity and CR streaming (blue) with  $\eta_0 = 0.1$  and  $\xi(\mathcal{M}, X_{\text{CR}}) = 1$ . *Bottom panel:* evolution of the dissipated thermal (solid) and CR (dashed) energy rates at shocks for the same simulations.



**Fig. 16.** Probability density function of the magnetic obliquity in the ISM boxes, and with  $\eta_0 = 0.1$  and  $\xi(\mathcal{M}, X_{\text{CR}}) = 1$ , at time  $t = 20$  Myr with CR streaming (blue) or without (green), compared to the random distribution in black dashed. Those simulations are more likely to have magnetic field perpendicular to the normal of shocks than for a random distribution, therefore, lowering the CR acceleration efficiency compared to the averaged random distribution, i.e.  $\langle \zeta \rangle = 0.302$ .

CRs are produced, the upstream CR-to-thermal pressure ratio rises to values close to  $X_{\text{CR}} \approx 0.1-0.2$  at time  $t = 20$  Myr. The corresponding CR acceleration efficiencies also evolve with time since  $\xi$  varies significantly for this range of moderate

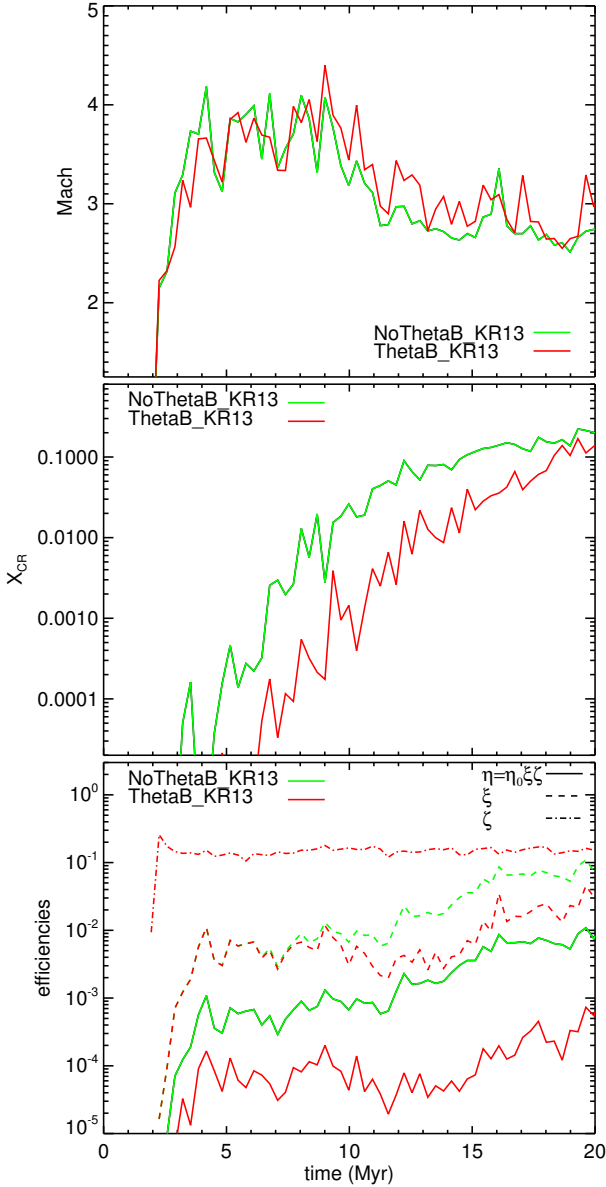


**Fig. 17.** Time evolution of the mass fraction of dense gas in the simulated turbulent ISM boxes for the simulations without shock-acceleration (black), without CR streaming, and without (red) or with (green) obliquity dependency for CR acceleration, and with obliquity and CR streaming (blue), and with  $\eta_0 = 0.1$  and  $\xi(\mathcal{M}, X_{\text{CR}}) = 1$ .

Mach number as a function of  $X_{\text{CR}}$  reaching  $\xi \approx 0.03$  and  $0.1$  at  $t = 20$  Myr for the ThetaB\_KR13 and NoThetaB\_KR13 runs respectively. In particular, there is an increase between 10 and 20 Myr of the acceleration efficiency by one order of magnitude in both simulations. The difference between the two simulations is that the obliquity dependent run has a lower overall acceleration efficiency  $\eta$  since nearly random magnetic fields (see Fig. 16) reduce the  $\zeta$  component to  $\approx 0.2$ . We note that the choice of starting with  $X_{\text{CR}} = 0$  for educative purposes makes these simulations extremely unrepresentative of the ISM of normal galaxies (though it might apply for proto-galaxies), and delay the build-up of the CR pressure. Nonetheless, we show that our implementation of the  $\mathcal{M}$ ,  $X_{\text{CR}}$  (and  $\theta_{\text{B}}$ ) dependency of  $\eta$  leads to interesting results in the build-up of the CR pressure through shocks, and might be useful for a broad range of applications.

## 6. Conclusion

We have introduced a new modelling of anisotropic CR streaming and dynamical CR shock-acceleration for the AMR code RAMSES (Teyssier 2002). Streaming is solved with a diffusion approach where the diffusion step is performed with a time implicit scheme (Dubois & Commerçon 2016), and can handle complex multi-dimensional problems with non-trivial magnetic field geometries. CR acceleration at shocks through the DSA mechanism is obtained by accurately detecting shocks, and measuring their Mach number and magnetic obliquity. We have shown that our numerically CR accelerated solutions faithfully reproduces exact 1D Sod shock tube solutions. CR-modified 3D Sedov solutions with accelerated CRs have been tested with various background magnetic field configurations (hence, obliquities). They show very good agreement with previous numerical experiments (Pfrommer et al. 2017) with CRs reducing the effective adiabatic index and slowing down the motion of the shell. Obliquity dependency of the acceleration leads to a significant modification of the CR distribution in the shell of the Sedov explosion with either a polar or patchy distribution when the coherence length of the background magnetic field is respectively larger or smaller than the bubble size. This also has consequences on the final shape of the bubble, with a significant elongation of the bubble when the magnetic field has a large field coherence with respect to the bubble size (Pais et al. 2018).



**Fig. 18.** *Top to bottom:* cosmic-ray flux-weighted mean Mach number  $\mathcal{M}$ , CR flux-weighted mean CR-to-thermal pressure ratio  $X_{\text{CR}}$ , and dissipated energy flux-weighted efficiencies  $\eta = \eta_0 \xi(\mathcal{M}, X_{\text{CR}}) \zeta(\theta_B)$ ,  $\xi(\mathcal{M}, X_{\text{CR}})$ , and  $\zeta(\theta_B)$  as a function of time for the simulation with (red) and without (green) obliquity dependency. We recall that  $\eta_0 = 0.1$  is used in those simulations and that  $\xi$  is a function of  $\mathcal{M}$  and  $X_{\text{CR}}$  as extrapolated from the values of Kang & Ryu (2013).

Finally, the effect of CR streaming and CR acceleration has been tested in a turbulent box mimicking the motions within the ISM on scales of tens of pc (Commerçon et al. 2019). CRs are produced at shock surfaces and are spread throughout the entire volume by convection and streaming. CRs have important consequences on the reservoir of cold gas available as they provide a long-term pressure support against compressed material, and streaming substantially modifies the small-scale distribution of CRs, and in turn the clustering of gas. The obliquity of the field produces a strong suppression of the effective acceleration efficiency, a factor of  $\sim 2$  beyond the pure random case as a result of the preferential alignment of magnetic fields with shock surfaces.

These new CR physics modules embedded in the RAMSES code make it useful for the study of the impact of CRs in a wide variety of situations, such as the acceleration of CRs by cosmic

shocks, galactic-wide outflows driven by CRs (Dashyan & Dubois 2019), the release of CRs in galaxy clusters by active galactic nuclei, studies of supernova remnants, and the release of CRs in the supernova-driven turbulence of the ISM, which we defer to future work.

*Acknowledgements.* We thank G. Dashyan, M. Lemoine, C. Pfrommer, R. Teyssier, and A. Wagner for enlightening discussions. We warmly thank S. Rouberol for smoothly running the Horizon cluster on which several simulations were run. This work was supported by the ANR grant LYRICS (ANR-16-CE31-0011) and the CNRS programs “Programme National de Cosmologie et Galaxies” (PNCG) and “Physique et Chimie du Milieu Interstellaire” (PCMI).

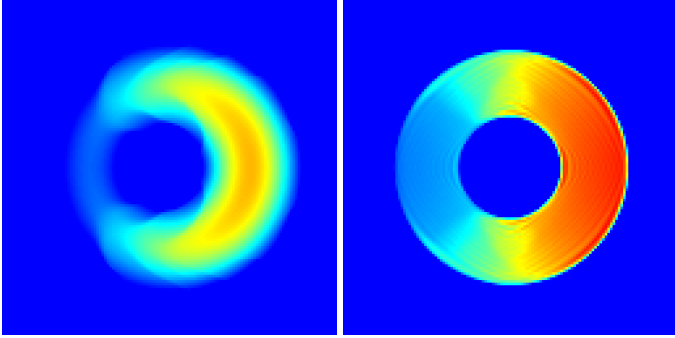
## References

- Ackermann, M., Ajello, M., Allafort, A., et al. 2013, *Science*, 339, 807  
Aguilar, M., Aisa, D., Alpat, B., et al. 2015, *Phys. Rev. Lett.*, 114, 171103  
Aharonian, F. A., Akhperjanian, A. G., Aye, K. M., et al. 2004, *Nature*, 432, 75  
Audit, E., & Hennebelle, P. 2005, *A&A*, 433, 1  
Bell, A. R. 1978, *MNRAS*, 182, 147  
Bell, A. R. 2015, *MNRAS*, 447, 2224  
Berezhko, E. G., & Ellison, D. C. 1999, *ApJ*, 526, 385  
Blandford, R., & Eichler, D. 1987, *Phys. Rep.*, 154, 1  
Blasi, P. 2013, *A&ARv*, 21, 70  
Booth, C. M., Agertz, O., Kravtsov, A. V., & Gnedin, N. Y. 2013, *ApJ*, 777, L16  
Butsky, I. S., & Quinn, T. R. 2018, *ApJ*, 868, 108  
Caprioli, D., & Spitkovsky, A. 2014, *ApJ*, 783, 91  
Caprioli, D., Zhang, H., & Spitkovsky, A. 2018, *J. Plasma Phys.*, 84, 715840301  
Castro, D., Slane, P., Patnaude, D. J., & Ellison, D. C. 2011, *ApJ*, 734, 85  
Chevalier, R. A. 1983, *ApJ*, 272, 765  
Commerçon, B., Marcowith, A., & Dubois, Y. 2019, *A&A*, 622, A143  
Croston, J. H., Hardcastle, M. J., Birkinshaw, M., Worrall, D. M., & Laing, R. A. 2008, *MNRAS*, 386, 1709  
Croston, J. H., Kraft, R. P., Hardcastle, M. J., et al. 2009, *MNRAS*, 395, 1999  
Dashyan, G., & Dubois, Y. 2019, *A&A*, submitted  
Decourchelle, A., Ellison, D. C., & Ballet, J. 2000, *ApJ*, 543, L57  
Diesing, R., & Caprioli, D. 2018, *Phys. Rev. Lett.*, 121, 091101  
Dorfi, E. A. 1990, *A&A*, 234, 419  
Drury, L. O. 1983, *Rep. Prog. Phys.*, 46, 973  
Drury, L. O., & Voelk, J. H. 1981, *ApJ*, 248, 344  
Dubois, Y., & Commerçon B. 2016, *A&A*, 585, A138  
Ehlert, K., Weinberger, R., Pfrommer, C., Pakmor, R., & Springel, V. 2018, *MNRAS*, 481, 2878  
Enßlin, T. A., Pfrommer, C., Springel, V., & Jubelgas, M. 2007, *A&A*, 473, 41  
Fanaroff, B. L., & Riley, J. M. 1974, *MNRAS*, 167, 31P  
Farber, R., Ruszkowski, M., Yang, H.-Y. K., & Zweibel, E. G. 2018, *ApJ*, 856, 112  
Farmer, A. J., & Goldreich, P. 2004, *ApJ*, 604, 671  
Ferrand, G., Decourchelle, A., Ballet, J., Teyssier, R., & Fraschetti, F. 2010, *A&A*, 509, L10  
Fromang, S., Hennebelle, P., & Teyssier, R. 2006, *A&A*, 457, 371  
Fujita, A., & Mac Low, M.-M. 2018, *MNRAS*, 477, 531  
Fujita, Y., & Ohira, Y. 2011, *ApJ*, 738, 182  
Girichidis, P., Naab, T., Walch, S., & Hanasz, M. 2014, ArXiv e-prints, unpublished [arXiv:1406.4861]  
Girichidis, P., Naab, T., Walch, S., et al. 2016, *ApJ*, 816, L19  
Girichidis, P., Naab, T., Hanasz, M., & Walch, S. 2018, *MNRAS*, 479, 3042  
Günter, S., Yu, Q., Krüger, J., & Lackner, K. 2005, *J. Comput. Phys.*, 209, 354  
Guo, F., & Mathews, W. G. 2011, *ApJ*, 728, 121  
Guo, F., & Oh, S. P. 2008, *MNRAS*, 384, 251  
Hanasz, M., Kowal, G., Otmianowska-Mazur, K., & Lesch, H. 2004, *ApJ*, 605, L33  
Hanasz, M., Otmianowska-Mazur, K., Kowal, G., & Lesch, H. 2009a, *A&A*, 498, 335  
Hanasz, M., Wóltański, D., & Kowalik, K. 2009b, *ApJ*, 706, L155  
Hanasz, M., Lesch, H., Naab, T., et al. 2013, *ApJ*, 777, L38  
Helder, E. A., Vink, J., Bassa, C. G., et al. 2009, *Science*, 325, 719  
Holguin, F., Ruszkowski, M., Lazarian, A., Farber, R., & Yang, H.-Y. K. 2019, *MNRAS*, 490, 1271  
Jacob, S., & Pfrommer, C. 2017, *MNRAS*, 467, 1478  
Jacob, S., Pakmor, R., Simpson, C. M., Springel, V., & Pfrommer, C. 2018, *MNRAS*, 475, 570  
Jones, F. C., & Ellison, D. C. 1991, *Space Sci. Rev.*, 58, 259  
Jubelgas, M., Springel, V., Enßlin, T., & Pfrommer, C. 2008, *A&A*, 481, 33  
Kang, H., & Jones, T. W. 2005, *ApJ*, 620, 44

- Kang, H., & Ryu, D. 2013, *ApJ*, 764, 95
- Koyama, K., Petre, R., Gotthelf, E. V., et al. 1995, *Nature*, 378, 255
- Kulsrud, R., & Pearce, W. P. 1969, *ApJ*, 156, 445
- Lazarian, A., & Berezhnaya, A. 2006, *MNRAS*, 373, 1195
- Malkov, M. A., Diamond, P. H., Sagdeev, R. Z., Aharonian, F. A., & Moskalenko, I. V. 2013, *ApJ*, 768, 73
- Mao, S. A., & Ostriker, E. C. 2018, *ApJ*, 854, 89
- Marcowith, A., Bret, A., Bykov, A., et al. 2016, *Rep. Prog. Phys.*, 79, 046901
- Miniati, F. 2001, *Comput. Phys. Commun.*, 141, 17
- Miniati, F., Ryu, D., Kang, H., et al. 2000, *ApJ*, 542, 608
- Miniati, F., Ryu, D., Kang, H., & Jones, T. W. 2001, *ApJ*, 559, 59
- Miyoshi, T., & Kusano, K. 2005, *J. Comput. Phys.*, 208, 315
- Nava, L., Gabici, S., Marcowith, A., Morlino, G., & Ptuskin, V. S. 2016, *MNRAS*, 461, 3552
- Nava, L., Recchia, S., Gabici, S., et al. 2019, *MNRAS*, 484, 2684
- Padovani, M., Galli, D., & Glassgold, A. E. 2009, *A&A*, 501, 619
- Pais, M., Pfrommer, C., Ehlert, K., & Pakmor, R. 2018, *MNRAS*, 478, 5278
- Pakmor, R., Pfrommer, C., Simpson, C. M., & Springel, V. 2016, *ApJ*, 824, L30
- Pfrommer, C., Enßlin, T. A., Springel, V., Jubelgas, M., & Dolag, K. 2007, *MNRAS*, 378, 385
- Pfrommer, C., Enßlin, T. A., & Springel, V. 2008, *MNRAS*, 385, 1211
- Pfrommer, C., Pakmor, R., Schaal, K., Simpson, C. M., & Springel, V. 2017, *MNRAS*, 465, 4500
- Pierre Auger Collaboration (Abraham, J., et al.) 2007, *Science*, 318, 938
- Ptuskin, V. S., Zirakashvili, V. N., & Plesser, A. A. 2008, *Adv. Space Res.*, 42, 486
- Recchia, S., Blasi, P., & Morlino, G. 2017, *MNRAS*, 470, 865
- Ruszkowski, M., Yang, H. Y. K., & Reynolds, C. S. 2017a, *ApJ*, 844, 13
- Ruszkowski, M., Yang, H.-Y. K., & Zweibel, E. 2017b, *ApJ*, 834, 208
- Ryu, D., Kang, H., Hallman, E., & Jones, T. W. 2003, *ApJ*, 593, 599
- Salem, M., & Bryan, G. L. 2014, *MNRAS*, 437, 3312
- Salem, M., Bryan, G. L., & Hummels, C. 2014, *ApJ*, 797, L18
- Schaal, K., & Springel, V. 2015, *MNRAS*, 446, 3992
- Sharma, P., Colella, P., & Martin, D. F. 2009, ArXiv e-prints [arXiv:0909.5426]
- Sijacki, D., Pfrommer, C., Springel, V., & Enßlin, T. A. 2008, *MNRAS*, 387, 1403
- Simpson, C. M., Pakmor, R., Marinacci, F., et al. 2016, *ApJ*, 827, L29
- Skilling, J. 1975, *MNRAS*, 172, 557
- Skillman, S. W., O'Shea, B. W., Hallman, E. J., Burns, J. O., & Norman, M. L. 2008, *ApJ*, 689, 1063
- Teyssier, R. 2002, *A&A*, 385, 337
- Teyssier, R., Fromang, S., & Dormy, E. 2006, *J. Comput. Phys.*, 218, 44
- Thomas, T., & Pfrommer, C. 2019, *MNRAS*, 485, 2977
- Uhlig, M., Pfrommer, C., Sharma, M., et al. 2012, *MNRAS*, 423, 2374
- Vazza, F., Brunetti, G., & Gheller, C. 2009, *MNRAS*, 395, 1333
- Vazza, F., Brügggen, M., Gheller, C., & Brunetti, G. 2012, *MNRAS*, 421, 3375
- Wadepuhl, M., & Springel, V. 2011, *MNRAS*, 410, 1975
- Wagner, A. Y., Lee, J. J., Raymond, J. C., Hartquist, T. W., & Falle, S. A. E. G. 2009, *ApJ*, 690, 1412
- Warren, J. S., Hughes, J. P., Badenes, C., et al. 2005, *ApJ*, 634, 376
- Wentzel, D. G. 1968, *ApJ*, 152, 987
- Wiener, J., Oh, S. P., & Guo, F. 2013a, *MNRAS*, 434, 2209
- Wiener, J., Zweibel, E. G., & Oh, S. P. 2013b, *ApJ*, 767, 87
- Wiener, J., Pfrommer, C., & Oh, S. P. 2017, *MNRAS*, 467, 906
- Winner, G., Pfrommer, C., Girichidis, P., & Pakmor, R. 2019, *MNRAS*, 488, 2235
- Yan, H., & Lazarian, A. 2002, *Phys. Rev. Lett.*, 89, 281102
- Zank, G. P., Webb, G. M., & Donohue, D. J. 1993, *ApJ*, 406, 67



## Appendix A: Effect of perpendicular diffusion on streaming



**Fig. A.1.** Energy density maps at  $t=0.02$  for the same set-up as for the 2D sinusoid loop described in Sect. 3.2.2 with  $f_{\text{iso}} = 10^{-1}$  (left) or  $f_{\text{iso}} = 10^{-3}$  (right).

Here we vary the value of the isotropic component of the streaming diffusion term from  $f_{\text{iso}} = 10^{-3}$  to  $f_{\text{iso}} = 10^{-1}$  (to be compared with the value of  $f_{\text{iso}} = 10^{-2}$  used by default in Sect. 3.2.2) with respect to pure anisotropy. Figure A.1 shows that increasing the value of  $f_{\text{iso}}$  to  $10^{-1}$  leads to more diffusion outside of the loop, which decreases the values of the maximum, while  $f_{\text{iso}} = 10^{-3}$  produces numerically driven finger-like features but allows a more contained CR distribution in the loop.

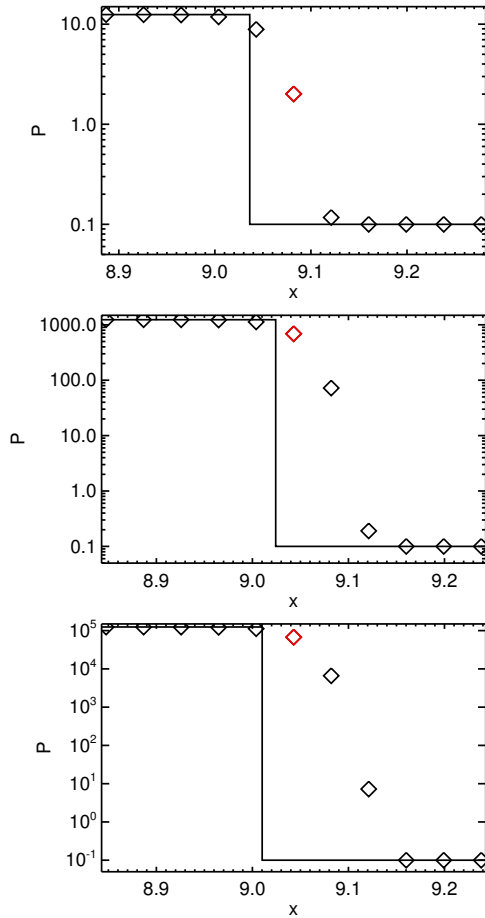
## Appendix B: Tabulated values of $\xi(\mathcal{M}, X_{\text{CR}})$

Table B.1 shows the tabulated values of Kang & Ryu (2013) renormalised to 1 (see Sect. 4.2 for details).

**Table B.1.** Acceleration efficiencies interpolated values of  $\xi(\mathcal{M}, X_{\text{CR}})$  from Kang & Ryu (2013).

	$X_{\text{CR}} = 0$	$X_{\text{CR}} = 0.025$	$X_{\text{CR}} = 0.05$	$X_{\text{CR}} = 0.1$	$X_{\text{CR}} = 0.2$	$X_{\text{CR}} = 0.5$	$X_{\text{CR}} = 1$
$\mathcal{M} = 2$	$4.44 \times 10^{-4}$	$3.80 \times 10^{-2}$	$7.55 \times 10^{-2}$	$1.51 \times 10^{-1}$	$3.01 \times 10^{-1}$	$7.51 \times 10^{-1}$	1.00
$\mathcal{M} = 3$	$2.66 \times 10^{-2}$	$1.47 \times 10^{-1}$	$2.66 \times 10^{-1}$	$5.06 \times 10^{-1}$	$9.86 \times 10^{-1}$	1.00	1.00
$\mathcal{M} = 4$	$2.00 \times 10^{-1}$	$4.11 \times 10^{-1}$	$6.22 \times 10^{-1}$	$9.08 \times 10^{-1}$	1.00	1.00	1.00
$\mathcal{M} = 5$	$4.44 \times 10^{-1}$	$5.60 \times 10^{-1}$	$6.76 \times 10^{-1}$	$9.08 \times 10^{-1}$	1.00	1.00	1.00
$\mathcal{M} = 7$	$6.66 \times 10^{-1}$	$7.33 \times 10^{-1}$	$8.00 \times 10^{-1}$	$9.33 \times 10^{-1}$	1.00	1.00	1.00
$\mathcal{M} = 10$	$8.66 \times 10^{-1}$	$8.89 \times 10^{-1}$	$9.10 \times 10^{-1}$	$9.55 \times 10^{-1}$	1.00	1.00	1.00
$\mathcal{M} = 20$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\mathcal{M} = 30$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\mathcal{M} = 50$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\mathcal{M} = 100$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

### Appendix C: Shock numerical broadening



**Fig. C.1.** Pressure profiles at time  $t \approx 3.5/M$  around the shock discontinuity for the Mach  $M=10$  (top), 100 (middle), and 1000 (bottom) experiments. The result of the numerical solution is shown as diamonds; the red symbol highlights the position of the shock cell given by a shock finder algorithm. The solid line is the exact numerical solution. We see that the numerical shock tends to broaden with increasing Mach number, and given the largest error made on the post- and pre-shock regions, the error on the evaluated Mach number becomes larger for a small kernel ( $n_{\text{cell,max}} = 2$ ).

We show in Fig. C.1 a zoomed-in view of the shock discontinuity for the Sod shock tube experiments described in Sect. 4.3.1 (i.e. without CRs) and for the three different Mach numbers  $M=10$ , 100, and 1000. Instead of a pure discontinuity (the exact solution is shown as a solid line) the numerical shock is broadened by numerical diffusion with typically 4–5 cells; the number of cells in the discontinuity to match the exact pre- and post-shock pressures increases with the value of the Mach number, and given the quadratic increase in pressure jump with Mach number, any error is strongly amplified. In the strongest shock example shown in the bottom panel, using only two cells away from the shock would lead to underestimating the Mach number by a factor of 10 (Mach number scales with  $R_p^{1/2}$  and the upstream value two cells away from the shock is  $\approx 100$  times that of the true value).

### Appendix D: Random magnetic fields

In order to set a random magnetic field fulfilling the  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  constraint, we first set up a random potential vector on the nodes of a Cartesian grid of arbitrary resolution  $n_{\text{pot}}^3$  cells (there are actually  $(n_{\text{pot}} + 1)^3$  values of potential vectors drawn at nodes of the  $n_{\text{pot}}^3$  sampling cells), with the right-, top-, and back-most boundaries being replicates of the left-, bottom-, and front-most boundaries to ensure the correct periodicity of the (staggered) magnetic field. In the cases simulated in this paper the AMR cell size is smaller than or equal to  $1/n_{\text{pot}}$ , which means that the vector potential is the trilinear interpolation of the surrounding node vector potentials projected along the AMR cell edge. Once these reconstructed vector potentials are obtained along AMR cell edges, the staggered magnetic field (one B-field perpendicular to each face of AMR cells) is obtained by taking the rotational of the potential vector of the face-surrounding edges. This procedure guarantees that the magnetic field is random,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , and the consistency of the coarse-to-fine values of the B-field. We note that we took the initial random potential vector as a white noise vector, but this can be modified to account for any given spectrum of the vector potential (or magnetic field), and to obtain any desired shape of the magnetic power spectrum, as the power spectrum of  $\mathbf{B}$  scales as  $k$  (i.e. the wave number) times the power spectrum of  $\mathbf{A}$ .

# A diffusive origin for the cosmic-ray spectral hardening reveals signatures of a nearby source in the leptons and protons data

Ottavio Fornieri,<sup>1,2,3</sup> Daniele Gaggero,<sup>3</sup> Daniel Guberman,<sup>2</sup> Loann Brahimy,<sup>4</sup> Pedro De La Torre Luque,<sup>5,6</sup> and Alexandre Marcowith<sup>4</sup>

<sup>1</sup>*Department of Physical Sciences, Earth and Environment,  
University of Siena, Strada Laterina 8, 53100 Siena, Italy*

<sup>2</sup>*INFN Sezione di Pisa, Polo Fibonacci, Largo B. Pontecorvo 3, 56127 Pisa, Italy*

<sup>3</sup>*Instituto de Física Teórica UAM-CSIC, Campus de Cantoblanco, E-28049 Madrid, Spain*

<sup>4</sup>*Laboratoire Universe et Particules de Montpellier (LUPM) Un. Montpellier,  
CNRS IN2P3, CC72, place E. Bataillon, 34095, Montpellier Cedex 5, France*

<sup>5</sup>*Department of Physics “M. Merlin”, University of Bari, Via Amendola 173, 70126 Bari, Italy*

<sup>6</sup>*INFN Sezione di Bari, Via Orabona 4, 70126 Bari, Italy*

In this paper we simultaneously interpret the spectral feature at  $\sim 10$  TeV in the cosmic-ray proton spectrum recently reported by the DAMPE Collaboration together with the spectral break at  $\sim 1$  TeV measured by H.E.S.S. in the lepton spectrum as signatures of one nearby hidden cosmic-ray accelerator. We show that this interpretation is consistent with the anisotropy data as long as the rigidity scaling of the diffusion coefficient features a hardening at  $\sim 200$  GV, as suggested by the light nuclear data measured with high accuracy by the AMS-02 Collaboration. The spectral feature is applied consistently to the large-scale diffuse cosmic-ray sea as well as to the particles injected by the source.

[...]

## I. INTRODUCTION

[...] **To be modified** The past years have witnessed a remarkable increase in the accuracy of both hadronic and leptonic cosmic-ray (CR) data. This advance allowed to pinpoint spectral features in many different species at different energies, which offer a unique opportunity to shed light on the long-standing questions regarding the origin and transport of the non-thermal population of high-energy cosmic particles in our Galaxy [1]. In particular, the AMS-02 Collaboration measured the fluxes of light nuclei and showed that the spectral index of several species progressively hardens at high rigidities ( $\sim 250$  GeV), [2, 3]. However, the observed hardening in secondary hadronic species is twice as large as the one observed in primaries [4], suggesting a diffusive origin for this feature, as discussed for instance in Vladimirov *et al.* [5], Génolini *et al.* [6]. More recently, the DAMPE Collaboration has confirmed this feature in the high-energy CR proton spectra and reported a softening at 13.6 TeV, with the spectral index changing from 2.60 to 2.85 [7]. This spectral *bump* — independently measured by the ATIC and NUCLEON experiments — might be originated from a nearby Supernova Remnant (SNR). However, in order to reconcile this possibility with the current anisotropy data, an anomalously slow diffusion in the region between the remnant and the Earth has been invoked in a recent analysis [8]. In absence of such a high-confinement region — and with a single-power-law diffusion coefficient — the predicted anisotropy would overshoot the observed data by more than one order of magnitude. Another attempt to simultaneously reproduce the nuclei spectra and the dipole anisotropy recently considered a two-zone (disk/halo) diffusion, though ap-

plied to the background particles only and with no connection with the leptonic spectrum [9, 10].

With this regard, in the lepton domain, the H.E.S.S. [11, 12], CALET [13] and DAMPE [14] collaborations have consistently measured a spectral break at  $\sim 1$  TeV, possibly pointing towards a nearby old remnant, as shown originally in Recchia *et al.* [15] and later elaborated in a wider context in Fornieri *et al.* [16]. Moreover, attempts to assign the high-energy ( $E \geq 1$  TeV) observed leptons to known nearby sources — such as Vela and Cygnus Loop — using radio data have recently revealed their subdominant contributions (see for example Manconi *et al.* [17]).

In this paper, we propose a comprehensive scenario that correctly reproduces all these spectral features. Our model features two key points of novelty. (i) First of all, we argue that a nearby, possibly hidden, old Supernova Remnant is responsible for both the hadronic *bump* measured by DAMPE/NUCLEON/ATIC and the leptonic break reported by H.E.S.S. (ii) Moreover, we consider, for the first time in the background+source context, a transport scenario featuring a rigidity scaling that progressively hardens — deviating from the single power-law — as suggested by AMS-02 light nuclei data. We show that this is the crucial ingredient that allows to satisfy the anisotropy constraints.

The paper is structured as follows. In Section II we describe the adopted transport model, with particular attention to the phenomenological treatment that allows to implement a variable slope of the diffusion coefficient for the nearby-source solution as well. In Section III we characterize the contributions from a hidden nearby source, connecting for the first time the leptonic and hadronic features and showing that those interpretations are consistent with the CR dipole anisotropy. Finally, in Section

IV and V we discuss the results and derive some conclusions.

## II. OUR TRANSPORT SETUP

In this section, we describe the propagation setup that will be used throughout the paper, which is based on the model settings presented in Fornieri *et al.* [16].

We consider a large-scale diffuse background of hadronic and leptonic cosmic particles, plus a contribution from a nearby accelerator. While the latter component is computed in a semi-analytical way, the former (*i.e.* a smooth contribution) is characterized by solving the general diffusion-loss transport equation with the DRAGON<sup>1</sup> [18, 19] numerical code. DRAGON takes into account all the physical processes from low-energy up to high-energy effects. In this work, we consider a 2D configuration, with cylindrical symmetry and an azimuthal-only Galactic magnetic field geometry. The physical ingredients implemented in our run, for what concerns the environment setup — the gas distribution, interstellar radiation field and intensity of the regular and turbulent magnetic fields — as well as the CR physics parameters — the CR source distribution and the non-adiabatic energy losses suffered by both hadrons and leptons — are the same described in Fornieri *et al.* [16].

However, a key difference with respect to the aforementioned work resides in the assumption on the diffusion coefficient. As mentioned in the introduction, the more pronounced effect detected in the purely secondary species seems to point towards a feature in the transport. Specifically, the CR distribution function at the disk level, that is found by solving the transport equation, can be written as  $f_0(E) \sim N(E)/D(E)$ , where  $N(E)$  is the particle injection-spectrum and  $D(E) \sim E^\delta$  the diffusion coefficient. For primary species,  $N(E) \sim E^{-\Gamma_{\text{inj}}}$ , from which we get  $f_0^{\text{pri}} \sim E^{-\Gamma_{\text{inj}}-\delta}$ , while for secondaries, the injection spectrum is the propagated spectrum of the primaries, resulting in  $f_0^{\text{sec}} \sim E^{-\Gamma_{\text{inj}}-\delta}/D(E) = E^{-\Gamma_{\text{inj}}-2\delta}$ . This implies that any change in the slope of the diffusion coefficient will produce a change in the secondaries' spectrum that is twice as large as that in the primaries. This is what is observed by AMS-02 [4] for the CR hardening at  $\sim 200$  GeV.

As a consequence, assuming this hardening to be of diffusive origin, it appears quite natural that equal changes in the transport properties should affect the propagation of particles from nearby sources as well.

To consider this, we study the phenomenological setup considered in Tomassetti [20], where the slope of the diffusion coefficient — typically parametrized as  $D(E) = D_0 \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\delta(E)}$ , with  $D_0$  normalization at reference energy

$E_0$  and  $\delta$  here changing with  $E$  — smoothly hardens as energy (or, equivalently, rigidity) increases, assuming the following expression:

$$\frac{dD(\rho)}{d\rho} \equiv \gamma(\rho) \approx \gamma_{\text{high}} + \frac{\Delta}{1 + \frac{\xi}{1-\xi} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\Delta}, \quad (2.1)$$

where  $\rho$  is the particle rigidity,  $\rho_0$  is the reference rigidity and  $(\gamma_{\text{high}}, \Delta, \xi)$  are free parameters of the model.

Within their THMb model (*Two-Halo Model b*), the parameters take the values  $\gamma_{\text{high}} = 1/6$ ,  $\Delta = 0.55$ ,  $\xi = 0.1$ , with a normalized diffusion coefficient  $D_0 = 1.21 \cdot 10^{28} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  at reference rigidity 2 GV. With these parameters, the diffusion coefficient present a smooth transition, specifically as shown in Figure 1.

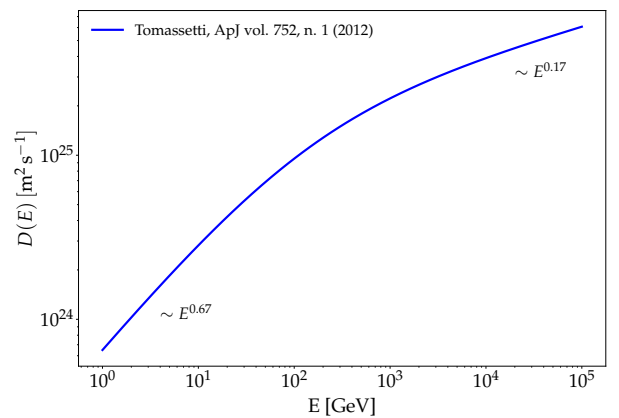


FIG. 1. The diffusion coefficient resulting from the parametrization  $D(E) = D_0 \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\delta(E)}$  described as the THMb model in Tomassetti [20].

The key point shown in Tomassetti [20] is that such a setup is formally equivalent to a two-zone transport model featuring a change in the properties of the interstellar medium (ISM) between an inner-halo ( $|z| < \xi L$ ) region and an extended-halo ( $\xi L < |z| < L$ ) region, where  $L \sim 4 \text{ kpc}$  and  $\xi \sim \mathcal{O}(0.1)$ . Possible physical explanations for this change in the diffusive properties of the two zones have been proposed. (i) One assigns it to a transition between a diffusion regime, generated by self-generated turbulence, to another one for which an external cascade is responsible [21]. (ii) Alternatively, as suggested in a relatively recent series of papers [22–24], this change is interpreted within a framework where different damping mechanisms, occurring in the two regions, produce a different behaviour in the turbulent waves, which are the scattering centers that cause CR diffusion. This, in turn, leads to a diffusion coefficient that may not be a single power-law  $\square$ .

In Tomassetti [20], the transport equation is analytically solved under simplifying conditions, and the diffusion parameters in Equation 1 are adjusted to the B/C data available at that time. Later, the same author found

<sup>1</sup> <https://github.com/cosmicrays/DRAGON>

a better agreement to the updated observations by incorporating a factor  $\beta^\eta$  (where  $\beta = v/c$  and  $\eta \sim -0.4$ ) into the definition of the diffusion coefficient, in Feng *et al.* [25]. This change in the low energy trend of  $D(E)$  has been interpreted in terms of dissipation of magneto-hydrodynamic waves in the interstellar plasma [26] or, alternatively, considering non-resonant interactions between the cosmic rays and the same turbulent waves [27]. As it is clear, adding this factor has a negligible effect at particle energies for which  $\beta \rightarrow 1$ , therefore it can be safely ignored in the computation of the spectra from our isolated nearby source.

Here, as mentioned above, we solve the equation for the large-scale background with the DRAGON numerical solver, that takes into account all the processes approximated in the analytical solution. As shown in Figure 2, we find that the B/C flux-ratio observed by AMS-02 [3] and PAMELA [28] can be nicely reproduced using  $\eta = -0.56$  and leaving the rest of the diffusion parameters as proposed in Tomassetti [20]. We highlight that this framework suitably reproduces the high-energy range of the B/C observations as well as the hardening found in the primary CR-species, for which the model was originally built.

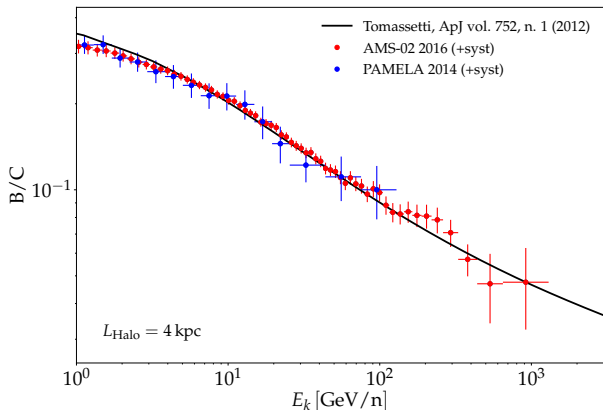


FIG. 2. B/C ratio computed for the described model with the DRAGON numerical solver, against AMS-02 (red) and PAMELA (blue) data points. References are in the text.

In this paper, the transport setup described in Equation (2.1) — and shown in Figure 1 — is adopted consistently in both the large-scale propagation and in the propagation of particles from the nearby remnant. As it will be shown below, this ingredient plays a key role in reconciling the high-energy break in the all-lepton spectrum ( $E_{e^\pm} \sim 1$  TeV) with the *bump* recently reported by DAMPE in the proton spectrum at  $E_p \sim 10$  TeV. Besides, it is crucial to correctly reproduce the cosmic-ray dipole anisotropy data.

### III. A CONSISTENT PICTURE OF ELECTRON, PROTON AND ANISOTROPY DATA

It has been mentioned in the introduction that particles coming from observed nearby sources cannot account for most of the measured high-energy leptons. However, it is natural to wonder whether it is plausible to invoke only one additional hidden source or rather a plurality of them. An answer, with a detailed estimation, is given in Appendix B. In fact, based on the rate of Supernova events in the Galaxy [29] — the same implemented in DRAGON — and on the massive losses that leptons undergo during the journey towards the Earth, we find that we expect  $N_{\text{SNR}} \sim 2$  Supernova explosions in the vicinity of the Solar system. The catalogues already list more than five [30], which however have been found not to contribute to the propagated leptons [16, 17]. Hence, we conclude that considering only one hidden source is a physically well-motivated choice.

Therefore, within the transport setup presented above, we discuss here a scenario based on the contribution from an old, hidden Supernova Remnant as a time-dependent source of cosmic electrons and protons.

The accelerator we are considering is characterized by distance  $d = 350$  pc and age  $t_{\text{age}} = 2 \cdot 10^5$  yr. We assume that particles remain confined inside the SN shock as long as their energy is lower than the maximum allowed value — we refer to this value as *escape energy*. This implies an energy-dependent release time that is regulated by the different stages of the SNR evolution and is different for protons and electrons. In this work, we assume that the CR escape energy is dominated by the limited current that particles can generate to trigger non-resonant streaming instability during the *free expansion* and *Sedov* phases; while it is limited by geometrical losses during the later radiative phases. The time scale of each phase of the SNR evolution, as well as the details to compute the escape energy at each time instant, are discussed in Appendix A.

After the escape, particles are injected into the ISM according to a time-dependent luminosity function  $L(t)$  and transported from the source to the Earth via the following diffusion-loss equation, written in polar coordinates [31]:

$$\frac{\partial f(E, t, r)}{\partial t} = \frac{D(E)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial E} (b(E)f) + Q(E, t, r), \quad (3.1)$$

where  $Q(E, t, r) = S(E)L(t)\delta(r)$  is the source term — with the luminosity function of the form  $L(t) = L_0 / \left(1 + \frac{t}{\tau_d}\right)^{\alpha_d}$ , where  $\tau_d = 10^5$  yr and  $\alpha_d = 2$  —,  $D(E) = D_0 \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\delta(E)}$  — as described in the previous section — and  $b(E) \equiv \frac{dE}{dt}$  is the rate of energy-loss, that depends on the specific particles we are considering.

The previous equation neglects low-energy effects such

as advection and reacceleration, since, in the energy regime we are interested (above  $\sim 1$  GeV), the transport process is nearly completely diffusive.

### A. All-lepton spectrum

In the case of leptonic cosmic rays above  $\sim 1$  GeV, the energy-loss term accounts for Inverse Compton (IC) scattering and synchrotron losses. The IC cross-section above  $\sim 50$  GeV gets modified by relativistic effects, as shown in Hooper *et al.* [32], and the loss rate can be written as follows:

$$b(E) = -\frac{4}{3} c\sigma_T [f_{\text{KN}}^i U_i + U_B] \left( \frac{E}{m_e c^2} \right)^2 \quad (3.2)$$

where  $\sigma_T \simeq 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$  is the Thomson cross-section,  $(U_i, U_B)$  are respectively the energy density of the Interstellar Radiation Field (ISRF) components and of the background magnetic field, and  $f_{\text{KN}}^i$  is the approximated correction factor:

$$f_{\text{KN}}^i(E) \simeq \frac{\frac{45}{64\pi^2} \cdot (m_e c^2 / k_B T_i)^2}{\frac{45}{64\pi^2} \cdot (m_e c^2 / k_B T_i)^2 + (E^2 / m_e^2 c^4)}, \quad (3.3)$$

where  $T_i$  are the black-body spectrum temperatures corresponding to the  $U_i$ . For each contribution, we adopted the reference value reported in Evoli *et al.* [33].

The Green function of Equation (3.1) reads:

$$f(r, t, E) = \frac{Q(E_t) b(E_t)}{\pi^{3/2} b(E) r_{\text{diff}}^3} \cdot e^{-\frac{r^2}{r_{\text{diff}}^2}}, \quad (3.4)$$

where  $E_t$  refers to the energy at a time  $(t - t_{\text{rel}})$  ago and  $r_{\text{diff}}^2(E_t, E) \equiv +4 \int_{E_t}^E \frac{D(E')}{b(E')} dE'$  is the square of the diffusive distance travelled by a particle losing its energy from  $E_t$  to  $E$ . This solution is still general, in that it does not contain any information about the injection term.

The dependence of the diffusion slope on energy has to be included in the integral giving the diffusive distance  $\sqrt{r_{\text{diff}}^2}$ , as follows:

$$\begin{aligned} r_{\text{diff}}^2(E_t, E) &= 4 \int_{E_t}^E \frac{D_0 \left( \frac{E'}{E_0} \right)^{\delta(E')}}{b(E')} dE' \\ &= 4D_0 E_0 \int_{\omega_t = E_t/E_0}^{E/E_0} \frac{\omega^{\delta(E_0\omega)}}{b(E_0\omega)} d\omega, \end{aligned} \quad (3.5)$$

where the last step is justified by the simple change of variable  $\omega = \frac{E'}{E_0}$ . In lack of an analytic function  $\delta(\omega)$ , the integral can be solved numerically.

As a last step, to obtain the propagated spectra at Earth, we have to integrate Equation (3.4) over time, from the instant of the release from the source to the current time, featuring a model for the time evolution of the luminosity. This is discussed in details in Atoyan

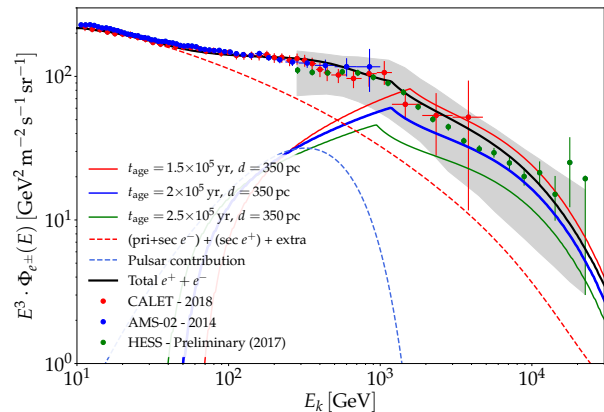


FIG. 3. The all-lepton spectrum as the sum of a smooth background of primary  $e^-$  + secondary  $e^\pm$  + extra  $e^\pm$  (red dashed line), a fit of the positron flux (blue dashed line) and the single-source contribution calculated in this work for the corresponding age  $t_{\text{age}} = 2 \cdot 10^5 \text{ yr}$  (blue solid line). Other ages (red and green solid lines) are added for comparison.

*et al.* [31], and summarized in Fornieri *et al.* [16] (their Appendix A).

In Figure 3 we show the  $e^+ + e^-$  propagated spectrum resulting from the convolution of several components, plotted against data from AMS-02 [34], CALET [13] and H.E.S.S. [12]. Data from other experiments have not been added to avoid superposition, being consistent with the present ones. The smooth background (red dashed line) is the sum of: (i) primary  $e^-$ , injected with DRAGON with a power-law spectrum  $\Gamma_{\text{inj}}^{\text{pri}} e^- = 2.7$  and a cutoff  $E_{\text{cut}}^{\text{pri}} e^- = 20 \text{ TeV}$  that is estimated equating the acceleration and loss timescales [35]; (ii) secondary  $e^\pm$ , fixed by the DRAGON-propagated primary species; (iii) a smooth *extra-component* of primary  $e^+ + e^-$  pairs, that represents the convolution of a large ( $\mathcal{O}(10^4)$ ) number of old ( $t_{\text{age}} > 10^6 \text{ yr}$ ) pulsars (see Fornieri *et al.* [16]).

The blue dashed curve represents a fit of the positron flux, regardless of its physical origin (here we invoke pulsars).

The three solid curves correspond to the contribution from the hidden remnant discussed in this work. They are computed by solving Equation (3.1) for different ages, with the calculations described above in this section. The electron population is injected with a single power-law (slope  $\Gamma_{\text{inj}}^{e^-} = 2.4$ ). The difference with respect to the proton injection slope (see next section) may be justified by synchrotron losses that electrons undergo before being released [36]. The total energy budget associated to the leptonic population is  $\simeq 10^{49} \text{ erg}$ .

Finally, the black curve is the sum of all the contributions, where we have chosen the source of age  $t_{\text{age}} = 2 \cdot 10^5 \text{ yr}$  as reference (blue solid).

The plot shows how the energy-dependent release cuts off the low-energy particles ( $E \lesssim 100 \text{ GeV}$ ) that — being the last ones to reach the shock escape energy —

did not have the time to be released and then propagate to the Earth. This effect is amplified by the KN correction. Indeed, a corrected cross-section increases the propagated flux of a factor  $\sim 1.5 - 2$ , with respect to the non-relativistic treatment, above energies  $E \sim 200$  GeV [33]. Therefore, in order to reproduce the  $\sim 1$  TeV peak, a lower injected flux is needed.

As far as the luminosity function is concerned, we vary  $\alpha_d \in [1, 3]$  and report negligible variations in the spectrum. On the other hand, while varying  $\tau_d$  in the range  $[10^4, 2 \cdot 10^5]$  yr does not qualitatively change the results, smaller values cannot reproduce the data points above the  $\sim$  TeV break. Indeed, since  $\tau_d$  acts as a timescale for the luminosity function, a quickly decaying luminosity would approach the limit of a burst-like injection ( $L(t) \rightarrow L_0 \delta(t - t_{\text{rel}}) dt$ ), and accordingly the  $\sim$  TeV peak energy allowed by the source age would be followed by an abrupt cutoff in the spectrum. This leads us to conclude that a declining luminosity from the source is necessary to match the observations.

## B. Proton spectrum

The proton data are characterized by a hardening at  $\sim 200$  GeV and a softening at energies as high as  $\sim 13$  TeV. Here, we connect this feature to the same hidden remnant considered in the previous section.

For these particles, in Equation (3.1) we can neglect the loss processes considered for leptons, as they would start to play a role at much higher energies (above  $\sim 100$  TeV). Besides, spallation and nuclear decay only affect the propagation of low energy particles (below  $\sim 1$  GeV).

Therefore, from the same Green function used for the leptons, Equation (3.4), we can reduce to the hadronic distribution function. Indeed, considering the losses as negligible,  $b(E_t) \approx b(E)$ . Besides, the diffusive distance  $\sqrt{r_{\text{diff}}^2}$  is not dominated by the loss timescale and becomes  $r_{\text{diff}}^2(E) = 4D(E)(t - t_{\text{rel}})$ .

In conclusion, the Green function for protons can be written as follows:

$$\begin{aligned} f(r, t, E) &= \frac{Q(E_t)}{\pi^{3/2} r_{\text{diff}}^3} \cdot e^{-\frac{r^2}{r_{\text{diff}}^2}} \\ &= \frac{Q(E_t)}{[4\pi D(E)(t - t_{\text{rel}})]^{3/2}} \cdot e^{-\frac{r^2}{4D(E)(t - t_{\text{rel}})}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

In the above expression we can directly implement the effect of a variable diffusion slope as  $D(E) = D_0 \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\delta(E)}$ .

Finally, as done for the leptons, we get the propagated spectra integrating the Green function (3.6) over time, from the release time to the current instant.

In Figure 4, we show our result, corresponding to a power-law injection spectrum of  $\Gamma_{\text{inj}}^p = 2.1$ , and a data-driven exponential high-energy cutoff implemented at energy  $E_{\text{cut}} = 23$  TeV. The normalization is consistent with

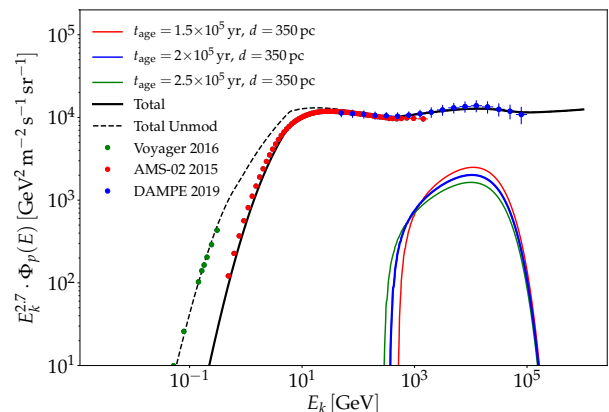


FIG. 4. The protons spectrum, resulting from the sum of **DRAGON** modulated spectrum (black solid) and the solution of the single-source transport equation computed in this work for the age  $t_{\text{age}} = 2 \cdot 10^5$  yr (blue solid line). Other ages (red and green solid lines), as well as the unmodulated spectrum (black dashed line) are added for comparison.

a total hadronic energy budget  $\simeq 3 \cdot 10^{50}$  erg. The model is plotted against data points from AMS-02 [37], Voyager [38] and DAMPE [7].

The smooth background is calculated with **DRAGON** as described in Section II. The solar modulation is taken into account using the *force-field* approximation [39], with an effective potential  $\langle \phi_{\text{mod}} \rangle = 0.54$  [40, 41]. The three solid lines are solutions of Equation (3.1) in the limit of negligible losses ( $b(E_t) \approx b(E) \rightarrow 0$ ), shown for three different ages.

The sum of all the contributions is shown for the source of age  $t_{\text{age}} = 2 \cdot 10^5$  yr. The total modulated (unmodulated) flux associated to this case is shown as a black solid (dashed) line. The Voyager data are also shown in the plot and appear consistent with the unmodulated total spectrum.

As for the case of the all-lepton spectrum, the effect of the energy-dependent release cuts off the low-energy ( $E \lesssim 100$  GeV) part of the spectrum.

## C. CR dipole anisotropy

The cosmic-ray dipole anisotropy (DA) provides a crucial complementary probe that allows to constrain the model proposed in this paper. The high degree of isotropy (up to 1 part in  $\sim 10^3$ ) detected by a variety of experiments in a wide energy range is especially constraining as far as the contribution from a local source is concerned. In particular, the interpretation of a single source as the origin of the spectral feature in the proton spectrum between 1 TeV and 10 TeV is heavily challenged in the context of a simple diffusion setup characterized by a single power-law. This consideration led the authors of several recent papers to consider more

complex diffusion scenarios featuring an extended high-confinement zone surrounding the source of interest (see for instance Fang *et al.* [8]).

In this section, we consider instead the transport scenario suggested by the hardening in the light nuclei, as described in Section II, and compute the dipole anisotropy associated with the hidden remnant, with the formalism described below.

The CR dipole anisotropy is the first order of the expansion in spherical harmonics of the CR intensity as a function of the arrival direction,  $I(\theta, \phi)$  [42]. In the case of an isolated nearby source, the dipole term is dominant and can be written as follows [43]:

$$I(\alpha) = \bar{I} + \delta_i \bar{I} \cos \alpha, \quad \delta_i = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (3.7)$$

where  $\alpha$  is the angle of the observation line, denoted as  $\hat{n}$ , with respect to the source direction, labelled  $\hat{r}$ .

In the diffusive-regime approximation, we obtain:

$$\delta_i = \frac{3D(E)}{c} \left| \frac{\nabla f_i}{f_i} \right|, \quad (3.8)$$

where  $f_i \equiv f_i(r, t, E)$  is the distribution function of the cosmic rays transported from the single source.

The total dipole anisotropy, assuming the presence of a set of sources, can be written as:

$$\Delta_{\text{tot}} = \frac{\sum_i f_i \delta_i \hat{r} \cdot \hat{n}}{\sum_i f_i}. \quad (3.9)$$

If we directly observe in the direction of the anisotropy source,  $\hat{r} \cdot \hat{n} = 1$ , and the total anisotropy can be decomposed as the part coming from the dominant source plus an average term coming from the background:

$$\Delta_{\text{tot}} \simeq \frac{f_i \delta_i}{\sum_i f_i} + \left\langle \frac{\sum_i f_i \delta_i}{\sum_i f_i} \right\rangle. \quad (3.10)$$

To support the interpretation of the total anisotropy as two separate terms, we notice that, at the energy where the anisotropy amplitude presents an evident break ( $E \sim 100$  GeV), we also observe phase flip from R.A.  $\simeq 4h$  to the direction of the Galactic Center (GC) (see Ahlers and Mertsch [42], their Figure 7). In other words, the DA data above this energy can be associated to the large-scale diffuse background and are assumed to follow a simple power-law [42]. It is worth mentioning that the anisotropy associated to the diffuse cosmic rays, in principle, should directly come from the propagated distribution function computed with DRAGON. However, we propagated the particles with a homogeneous diffusion coefficient, neglecting the vertical component of the Galactic magnetic field in the GC region. In terms of the associated  $\gamma$ -rays, this simplification leads to what is referred to as the *gradient problem*, *i.e.* the well known discrepancy (for  $E_\gamma \geq 100$  MeV) between the theoretical CR-flux profile obtained by assuming SNRs to be the sources

of Galactic CRs and that inferred from EGRET  $\gamma$ -ray diffuse observations [44]. Physically, ignoring the vertical escape of CRs around the GC causes a longer residence time (*i.e.* less-efficient diffusion) — with respect to the exact  $D(E)$  parametrization — of the particles around the Galactic Center, resulting in a larger production of photons. Analogously, we would expect the same overproduction of CRs in the GC region to overestimate the real dipole anisotropy.

Motivated by these considerations, in Figure 5 we show that the hypothesis of one nearby old remnant originating the CR populations responsible for both the leptonic and the hadronic features is compatible with the current anisotropy data.

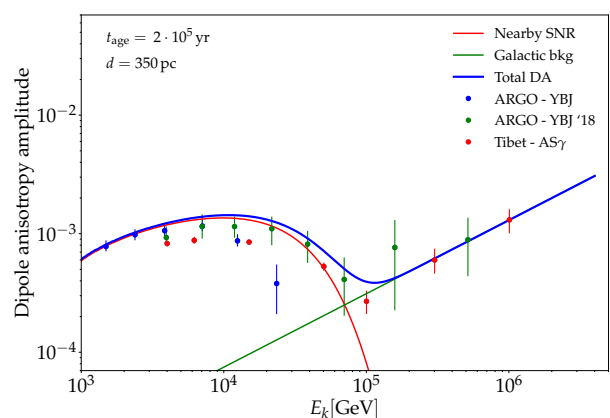


FIG. 5. Cosmic-ray dipole anisotropy amplitude calculated as the sum of a background anisotropy (green solid line) and the single source contribution (red solid line) for the source of age  $t_{\text{age}} = 2 \cdot 10^5$  yr. Anisotropy data are consistent with each other, therefore here we plot a subset of them, to avoid confusion. The plotted points are from ARGO [45, 46] and Tibet-AS $\gamma$  [47].

To reproduce the diffuse contribution, we use the fit parameters recently suggested in Fang *et al.* [8], according to which the background anisotropy can be written as  $\Delta_{\text{bkg}} = c_1 \left( \frac{E}{1 \text{ PeV}} \right)^{c_2}$ , where  $(c_1, c_2) = (1.32 \cdot 10^{-3}, 0.62)$ . The result is the green solid line in the figure.

On the other hand, the single-source contribution is found under the assumption of diffusive behaviour for the released particles. This component corresponds to the red solid line in the figure, for the source of age  $t_{\text{age}} = 2 \cdot 10^5$  yr, considered in the previous sections.

We want to remark again that a key role to reproduce the observations is here played by the slope of the diffusion coefficient, that, according to Equation (2.1), becomes harder in the high-energy region ( $\delta \lesssim 0.2$  at  $E > 10$  TeV).



#### IV. DISCUSSION

As a first discussion point, we want to comment on the nature of the source here invoked. Given its old age, it is reasonable to assume that the remnant is currently in the final stage of its evolution, deep into the radiative phase. Hence, we expect it to be quite extended and the detection of its faint multi-wavelength signature to be very challenging, especially from a distance as large as  $\sim 350$  pc. In particular, if  $\sim 100$  GeV protons are still confined in the SNR at its age, then one should expect a  $\gamma$ -ray emission, resulting from pion decay, cutting off around  $\sim 10$  GeV. Electrons at these energies emit synchrotron radiation up to a frequency of  $\sim 300$  GHz and the source may be of interest for future *Square-Kilometer Array* (SKA) observations. Moreover, electrons contribute to IC  $\gamma$ -ray emission up to  $\sim 100$  MeV,  $\sim 1$  GeV and  $\sim 10$  GeV for IR, optical, UV soft photons background.

From a wider prospective, regarding a SNR origin for the  $e^+ + e^-$  spectrum, it is worth noticing that, due to the incompleteness of the catalogues, especially for old remnants, a proof of concept would be represented by a Monte Carlo simulation of all the possible configurations of source distributions in our Galaxy. A step in this direction is presented in Evoli *et al.* [48], suggesting that the SNR explanation is disfavored at more than  $2\sigma$ , with respect to the average configuration. This result is model dependent, in particular is based on a source distribution that is set to follow the Galactic spiral arms. However, the Solar system is found in the so-called *Orion Spur*, a minor arm-structure in the Milky Way connecting two major arms. This is not included in that work, whereas we believe it to be of major importance, in particular for the leptonic observables above 1 TeV. The amount of the uncertainty can be estimated in their Figure 6, where the lepton horizons — as caused by their energy-loss rate — for particles of  $E = 100$  GeV, 1 TeV, 10 TeV, are sketched. In particular, the 10 TeV horizon includes two arcs of two major arms at equal distance from the Solar system. Therefore, we estimate that ignoring the *Orion Spur* that connects them results in neglecting roughly  $\sim 1/3$  of the leptons of this energy. Similarly, we estimate that  $\sim 20/25\%$  of the particles are missing from the 1 TeV range of the  $e^+ + e^-$  spectrum. This lack can abundantly account for the  $2\sigma$  dispersion of the Monte Carlo average curve. It is therefore the reason why, on average, the high-energy ( $E \sim 1$  TeV) range of the all-lepton spectrum cannot be captured by their calculations.

In this context, we want to comment on the number of nearby SNRs that we may expect to contribute to the high-energy part of the leptonic and hadronic spectra. We remark that a limited number of young sources exist in the vicinity of the Sun, and they may also provide a sizable contribution to the observed fluxes. In particular, we emphasize the possible role of the young type II Supernova Remnant in the southern constellation Vela. The young age of this accelerator ( $\simeq 1.1 \cdot 10^4$  yr) restricts

its potential signature in the lepton spectrum at energies as large as  $\sim 10^4$  GeV, thus not limiting our proposed scenario. However, its presence could constrain the parameters involved in the luminosity function and in the energy-dependent release time. Indeed, a rough calculation of its emission based on our reference transport setup has revealed a predicted flux that is strongly dependent on the parameters of the model, and that can span between a negligible contribution — as small as more than 2 orders of magnitude below the level of the data points — and a dominant one. However, a detailed modeling of this object constrained by multi-wavelength data is beyond the scope of the present work.

Moreover, we are confident that more accurate data in this domain —  $E \sim 1 - 50$  TeV, subject of interest for the *Cherenkov Telescope Array* (CTA) — expected in the near future will help to disentangle the question, possibly revealing the presence of a spectral feature.

A final important point that is worth to discuss regards the implications of using the same rigidity-dependent diffusion coefficient for both the diffuse CR component and the isolated nearby source. In particular, this means that hardening at  $\sim 200$  GeV is actually due to a superposition of two effects: (i) the diffusive origin coming from physical differences in the halo and in the disk; (ii) the nearby-source contribution. In this sense, an important role is played by the softening in the DAMPE spectrum, that is interpreted as an intrinsic cutoff of the hidden remnant. In fact, even though a more pronounced hardening with no additional sources could be considered to account for the mismatch between AMS-02 and DAMPE data, this would be still not sufficient to reproduce the complex structure observed by DAMPE — the *softening* at  $E \sim 10$  TeV. In particular, no theoretical models predict so far a cutoff in the proton propagated spectra below the *knee* ( $E_{\text{knee}} \sim 5$  PeV). As a consequence, the scenario here proposed predicts that the CR spectrum above  $E \sim 100$  TeV would have a slope similar to that observed after the  $\sim 200$  GeV hardening. With this aim, higher energy data points in the future will certainly help to disentangle this puzzle.

#### V. CONCLUSIONS

In this paper we proposed the idea that the spectral feature at  $\sim 10$  TeV in the cosmic-ray proton spectrum recently reported by the DAMPE Collaboration together with the spectral break at  $\sim 1$  TeV measured by H.E.S.S. in the lepton spectrum have a common origin and can be associated to a nearby, fading Supernova Remnant. We believe this simultaneous interpretation to be of paramount importance, since SNRs are accelerators for both electrons and protons.

We injected the particles with a realistic — and physically motivated — energy-dependent release time that considers the different stages of the SNR evolution and the surrounding medium, and with a luminosity function

that declines over time. Then, we computed their propagation from such object in a spherically symmetric setup, and found that all the available observables can be simultaneously reproduced. The key ingredient in the calculation is a transport setup based on a diffusion coefficient characterized by a smooth transition to a progressively harder rigidity-scaling at higher energies, as suggested by the light nuclei spectra measured by the AMS-02 Collaboration. This feature allowed to reproduce the cosmic-ray anisotropy data without any further assumption. Moreover, the combined leptonic and hadronic data led us to characterize the properties of the particles accelerated by such object in good agreement with theoretical expectations.

### ACKNOWLEDGEMENTS

We are grateful to C. Evoli, S. Gabici, D. Grasso, P.S. Marrocchesi for many inspiring discussions and for useful comments on the manuscript.

O.F. was supported by the University of Siena with a joint doctoral degree with the Autonomous University of Madrid.

D.G. has received financial support through the Postdoctoral Junior Leader Fellowship Programme from la Caixa Banking Foundation (grant n. LCF/BQ/LI18/11630014). D.G. was also supported by the Spanish Agencia Estatal de Investigación through the grants PGC2018-095161-B-I00, IFT Centro de Excelencia Severo Ochoa SEV-2016-0597, and Red Consolider MultiDark FPA2017-90566-REDC.

## A. ENERGY-DEPENDENT RELEASE TIME FROM SUPERNOVA REMNANT SHOCKS

In this appendix we review the dominant mechanisms that confine particles inside the Supernova shocks. Once those processes are overcome, particles can be released from the source. As leptons suffer from severe energy losses and are  $m_p/m_e \sim 10^3$  times less efficient than hadrons in generating streaming instabilities, the release processes for hadrons and leptons will be discussed separately.

### 1. Release time for hadrons

Hadrons can escape from SNRs because of two main reasons: (i) due to geometrical losses, when their mean free path gets larger than a fraction of the shock radius [49]; (ii) due to the limited current they are able to trigger *upstream*<sup>2</sup> of the shock [50]. In the latter case, the CR current is necessary to trigger the non-resonant streaming instability and to produce magnetic field amplification at the shock precursor [51]. As the non-resonant instability growth rate scales as  $\sim u_{\text{sh}}^3$ , with  $u_{\text{sh}}$  velocity of the shock — for a  $\propto E^{-2}$  particle distribution that we assume hereafter — it likely controls the maximum CR energy at the early stages of the evolution of the SNR shock, *i.e.* during free expansion and, possibly, Sedov-Taylor phases.

Maximum energies imposed by geometrical losses are set because the CR diffusive path in the precursor reaches a fraction  $\xi < 1$  of the shock radius  $R_{\text{sh}}$ , namely

$$\ell = \frac{D(E)}{u_{\text{sh}}(t)} = \xi R_{\text{sh}}(t), \quad (\text{A.1})$$

where the diffusion coefficient is here parametrized in terms of its Bohm value  $D(E) = \eta_{\text{acc}} r_L c / 3$ , where  $\eta_{\text{acc}}$  is a numerical factor  $\eta_{\text{acc}} \geq 1$ . We consider relativistic particles of charge  $Ze$ , with a Larmor radius  $r_L = E / ZeB(t)$  (hereafter we only consider protons, so  $Z = 1$ ). Therefore the maximum energy fixed by geometrical losses is

$$E_{\text{max,Geo}} = \frac{3\xi e}{\eta_{\text{acc}} c} R_{\text{sh}}(t) u_{\text{sh}}(t) B(t). \quad (\text{A.2})$$

Hereafter we fix  $\xi = 0.3$  and  $\eta_{\text{acc}} = 1$ .

Limited-current loss process dominates in case of strong magnetic field amplification, hence during the SNR evolution stages where the shock strength is high. The maximum CR energy in that case depends on the type of ambient medium: either circum-stellar gas (CSM)

— as for a core-collapse Supernova — or interstellar gas (ISM) — as for a type Ia Supernova — [50]:

$$\phi E_{\text{esc,Cur,CSM}} = \frac{e\sqrt{\pi}}{\gamma\tau c} \chi u_{\text{sh}}(t)^2 R_{\text{sh}}(t) \sqrt{\rho(t)}, \quad (\text{A.3})$$

$$\phi E_{\text{esc,Cur,ISM}} = \frac{e\sqrt{\pi}}{2\gamma\tau c} \chi u_{\text{sh}}(t)^2 R_{\text{sh}}(t) \sqrt{\rho}, \quad (\text{A.4})$$

where  $\gamma\tau$  is the number of e-folding growth time necessary to amplify the magnetic field (we take  $\gamma\tau = 5$  hereafter),  $\chi = U_{\text{CR}} / \rho u_{\text{sh}}^2$ , is the fraction of the shock kinetic energy imparted into CRs (we take  $\chi = 0.1$  hereafter),  $\rho$  is the ambient gas mass density and  $\phi = \ln(E_{p,\text{max}} / m_p c^2)$ .

We consider a shock radius scaling with time as  $\sim t^b$ , where  $b$  depends on the evolution stage:  $b = 1$ ,  $b = 2/5$ ,  $b = 3/10$ ,  $b = 1/4$  in the *free expansion* (Free), *Sedov-Taylor* (Sed), *pressure-driven snowplough* (PDS) and *momentum-conservation phases* (MCS), respectively. We use the scaling laws derived in Truelove and McKee [52], Cioffi *et al.* [53] to evaluate the shock radius and speed at the transition between two phases. The magnetic field strength is assumed to vary as a certain power of the shock speed, namely  $B(t) \propto u_{\text{sh}}^a$ , where  $a$  may depend on the SNR evolution stage. Once the time dependence of  $E_{p,\text{max}}$  is explicit, we can inverse it to find the release time  $t(E_{p,\text{max}})$ .

With this procedure, the timescales for the different stages of the SNR evolution, from the Sedov phase until the dissipation of the remnant (*merging stage*), can be calculated as follows:

$$\begin{aligned} t_{\text{Sed,kyr}} &= 0.3 E_{\text{SNR},51}^{-1/2} M_{\text{ej},\odot}^{-1} n_{T,1}^{-1/2} \\ t_{\text{PDS,kyr}} &= \frac{36.1 e^{-1} E_{\text{SNR},51}^{3/14}}{\xi_n^{5/14} n_{T,1}^{4/7}} \\ t_{\text{MCS,kyr}} &= \min \left[ \frac{61 v_{\text{ej},8}^3}{\xi_n^{9/14} n_{T,1}^{3/7} E_{\text{SNR},51}^{3/14}}, \frac{476}{(\xi_n \Phi_c)^{9/14}} \right] t_{\text{PDS,kyr}} \\ t_{\text{merge,kyr}} &= 153 \left( \frac{E_{\text{SNR},51}^{1/14} n_{T,1}^{1/7} \xi_n^{3/14}}{\beta C_{06}} \right)^{10/7} t_{\text{MCS,kyr}}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

where  $E_{\text{SNR},51}$  is the total energy of the SN explosion in units of  $10^{51}$  erg,  $M_{\text{ej},\odot}$  is the mass of the ejected material in units of 1 Solar masses,  $n_{T,1}$  is the ambient medium density in units of  $1 \text{ cm}^{-3}$ ,  $\xi_n$  is the ambient medium metallicity,  $v_{\text{ej},8}$  is the speed of the ejected material in units of  $10^8$  cm/s,  $\Phi_c = 1$  is the thermal plasma conductivity,  $\beta = 2$  and  $C_{06} = 1$ . In this work, we fix the energy budget to  $E_{\text{tot,SNR}} = 10^{51}$  erg, the ejecta mass  $M_{\text{ej}} = 1 M_{\odot}$ , the ejecta velocity to  $v_{\text{ej}} = 10^9$  cm/s and the ambient density to  $n_T = 10 \text{ cm}^{-3}$ . These timescales are expressed in kiloyears.

In this work we consider that the maximum CR energy is current-limited in the free expansion and Sedov phases, while it is limited by geometrical losses during the later radiative phases. Strong magnetic field amplification only occurs during the first two adiabatic phases.

<sup>2</sup> The region *upstream* — as opposed to the *downstream* — of the shock is the region where the shock front has already passed.

The magnetic field is assumed to scale as  $u_{\text{sh}}^{3/2}$  in the adiabatic phases and as  $u_{\text{sh}}$  in the radiative phases (see discussion in Völk *et al.* [54]). We further assume that the maximum magnetic field strength and the maximum CR energy are reached at the start of the Sedov phase. They are fixed to  $100 \mu\text{G}$  and  $1 \text{ PeV}$  respectively.

To summarize, we used Equation (A.3) to calculate the proton escape energy as a function of time as follows:

$$\bullet \ln \left( \frac{E_{\text{esc,Cur}}(t)}{m_p c^2} \right) E_{\text{esc,Cur}}(t) = \ln(E_M(t_{\text{Sed}})) \left( \frac{t}{t_{\text{Sed}}} \right)^{-6/5}$$

such that  $E_M \equiv E_{p,\text{max}}(t_{\text{Sed}}) = 1 \text{ PeV}$

$$\bullet E_{\text{esc,Geo},1}(t) = E_M(t_{\text{PDS}}) \left( \frac{t}{t_{\text{PDS}}} \right)^{-11/10}$$

$$= E_{\text{esc,Cur}}(t_{\text{PDS}}) \left( \frac{t}{t_{\text{PDS}}} \right)^{-11/10}$$

$$\bullet E_{\text{esc,Geo},2}(t) = E_M(t_{\text{MCS}}) \left( \frac{t}{t_{\text{MCS}}} \right)^{-5/4}$$

$$= E_{\text{esc,Geo},1}(t_{\text{MCS}}) \left( \frac{t}{t_{\text{MCS}}} \right)^{-5/4}.$$

## 2. Release time for leptons

Besides the processes already discussed for hadrons, leptons are also sensitive to radiative losses. The maximum energy fixed by radiative losses is  $E_{e,\text{max,loss}}$ . These losses can prevent them to escape the SNR until the condition  $E_{e,\text{max,loss}} \leq E_{p,\text{max}}$  is fulfilled [55]. The energy  $E_{e,\text{max}}$  is set by the condition  $t_{\text{acc}} = t_{\text{loss}}$  where  $t_{\text{acc}}$  and  $t_{\text{loss}}$  are the acceleration and loss timescales respectively. We assume here a simple form of the acceleration timescale,  $t_{\text{acc}} = \eta_{\text{acc}} f(r) D_{\text{Bohm}} / u_{\text{sh}}^2$ , where  $f(r)$  is a function of the shock compression ratio. For a parallel shock  $f(r) \sim 3r(r+1)/(r-1)$ , while, if magnetic field amplification occurs upstream of the shock, the function assumes the form  $f(r) \sim 6.6r/(r-1)$  [56]. A compression ratio  $r = 4$  is adopted hereafter. The time dependence of radiative losses is imposed by the time variation of the magnetic field strength  $B(t)$  in the synchrotron process. Synchrotron loss-timescale for an electron of energy  $E$  is  $t_{\text{loss,syn}} = 6\pi m_e^2 c^4 / \sigma_T c B(t)^2 E$ , where  $m_e$  is the electron mass and  $\sigma_T$  is the Thomson cross section.

In conclusion, assuming that geometrical losses are responsible for electron escape at each stage of the SN evolution from the Sedov phase on, to calculate the electron escape energy as a function of time we proceed with the following steps:

$$\bullet E_{\text{esc,Geo},0}(t) = E_M(t_{\text{Sed}}) \left( \frac{t}{t_{\text{Sed}}} \right)^{-11/10}$$

such that  $E_M \equiv E_{e,\text{max}}(t_{\text{Sed}}) = 100 \text{ TeV}$

$$\bullet E_{\text{esc,Geo},1}(t) = E_M(t_{\text{PDS}}) \left( \frac{t}{t_{\text{PDS}}} \right)^{-11/10}$$

$$= E_{\text{esc,Geo},0}(t_{\text{PDS}}) \left( \frac{t}{t_{\text{PDS}}} \right)^{-11/10}$$

$$\bullet E_{\text{esc,Geo},2}(t) = E_M(t_{\text{MCS}}) \left( \frac{t}{t_{\text{MCS}}} \right)^{-5/4}$$

$$= E_{\text{esc,Geo},1}(t_{\text{MCS}}) \left( \frac{t}{t_{\text{MCS}}} \right)^{-5/4}.$$

## B. ON THE EXPECTED NUMBER OF NEARBY HIDDEN REMNANTS

In this appendix, we discuss the motivations to consider only one additional source to look for in the vicinity of the Earth. We consider the rate — per unit volume, at the solar circle, as a function of the Galactic latitude  $z$  — of both type Ia and type II Supernova events that are implemented in DRAGON [29]:

$$\mathcal{R}_{\text{I}}(z) = (7.3 \text{ kpc}^{-3} \text{ Myr}^{-1}) \cdot e^{-\frac{|z|}{325 \text{ pc}}}$$

$$\mathcal{R}_{\text{II}}(z) = (50 \text{ kpc}^{-3} \text{ Myr}^{-1}) \cdot \left\{ 0.79 e^{-\left(\frac{|z|}{212 \text{ pc}}\right)^2} + 0.21 e^{-\left(\frac{|z|}{636 \text{ pc}}\right)^2} \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Since we are testing the hypothesis of a Supernova as source of high-energy leptons ( $E_{e\pm} > 1 \text{ TeV}$ ), we integrate those rates in a cylinder of half-height  $h_{\text{cyl}} = 1 \text{ kpc}$ , as this is roughly the distance that those leptons can travel, due to their massive energy-loss. Thus we need to compute:

$$n_{\text{SNR}}[\text{kpc}^{-2} \cdot \text{Myr}^{-1}] = \int_{-1 \text{ kpc}}^{+1 \text{ kpc}} dz (\mathcal{R}_{\text{I}}(z) + \mathcal{R}_{\text{II}}(z)). \quad (\text{B.2})$$

The result of the integral has to be multiplied by the base area of the cylinder  $A = \pi r_{\text{cyl}}^2$ , where  $r_{\text{cyl}} = 1 \text{ kpc}$  for the same losses reasons, and by the lifetime of a typical Supernova Remnant,  $\tau_{\text{age}} \sim 5 \cdot 10^5 \text{ yr}$ . Therefore, within one SNR lifetime and  $1 \text{ kpc}$  from the Earth, we expect  $N_{\text{SNR}} \simeq 2.2$  Supernova Remnants potentially contributing to the observed lepton flux.

Since we already observe five of them Fornieri *et al.* [16], we expect the lowest possible number of additional hidden sources to dominate the observed all-lepton spectrum on Earth. This assumption is corroborated by the observation of a directional bump in the dipole

anisotropy amplitude (see Ahlers and Mertsch [42] and references therein), as discussed in Section III C.

As a comment on the estimation of the event rate, it might be argued that the Solar system is embedded in what is referred to as the Local Bubble, a low-density ( $n_{\text{HI}} \lesssim 0.1 \text{ cm}^{-3}$ ) region of the Galaxy of radius  $r_{\text{LB}} > 300 \text{ pc}$  that likely originated by the explosion of

several SNe [57]. This could imply a different rate of Supernova events inside it. However, since the age of the Bubble is estimated to be  $\sim \mathcal{O}(10^7)$ , which is much larger than the average lifetime of a SN, this can only affect the calculation in the sense of lowering the number of expected events.

- 
- [1] S. Gabici, C. Evoli, D. Gaggero, P. Lipari, P. Mertsch, E. Orlando, A. Strong, and A. Vittino, The origin of Galactic cosmic rays: challenges to the standard paradigm, *Int. J. Mod. Phys. D* **28**, 1930022 (2019), [arXiv:1903.11584 \[astro-ph.HE\]](#).
- [2] M. Aguilar *et al.* (AMS Collaboration), Precision Measurement of the Proton Flux in Primary Cosmic Rays from Rigidity 1 GV to 1.8 TV with the Alpha Magnetic Spectrometer on the International Space Station, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 171103 (2015).
- [3] M. Aguilar *et al.* (AMS Collaboration), Precision Measurement of the Boron to Carbon Flux Ratio in Cosmic Rays from 1.9 GV to 2.6 TV with the Alpha Magnetic Spectrometer on the International Space Station, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 231102 (2016).
- [4] M. Aguilar *et al.* (AMS), Observation of New Properties of Secondary Cosmic Rays Lithium, Beryllium, and Boron by the Alpha Magnetic Spectrometer on the International Space Station, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 021101 (2018).
- [5] A. E. Vladimirov, G. Jóhannesson, I. V. Moskalenko, and T. A. Porter, Testing the Origin of High-energy Cosmic Rays, *ApJ* **752**, 68 (2012), [arXiv:1108.1023 \[astro-ph.HE\]](#).
- [6] Y. Génolini, P. D. Serpico, M. Boudaud, S. Caroff, V. Poulin, L. Derome, J. Laval, D. Maurin, V. Poireau, S. Rosier, P. Salati, and M. Vecchi, Indications for a High-Rigidity Break in the Cosmic-Ray Diffusion Coefficient, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 241101 (2017).
- [7] Q. An *et al.* (DAMPE), Measurement of the cosmic-ray proton spectrum from 40 GeV to 100 TeV with the DAMPE satellite, *Sci. Adv.* **5**, eaax3793 (2019), [arXiv:1909.12860 \[astro-ph.HE\]](#).
- [8] K. Fang, X.-J. Bi, and Yin, DAMPE proton spectrum indicates a slow-diffusion zone in the nearby ISM, (2020), [arXiv:2003.13635 \[astro-ph.HE\]](#).
- [9] W. Liu, Y.-Q. Guo, and Q. Yuan, Indication of nearby source signatures of cosmic rays from energy spectra and anisotropies, *JCAP* **10**, 010, [arXiv:1812.09673 \[astro-ph.HE\]](#).
- [10] Q. Yuan, B.-Q. Qiao, Y.-Q. Guo, Y.-Z. Fan, and X.-J. Bi, Nearby source interpretation of differences among light and medium composition spectra in cosmic rays, *Front. Phys. (Beijing)* **16**, 24501 (2021), [arXiv:2007.01768 \[astro-ph.HE\]](#).
- [11] F. Aharonian, A. G. Akhperjanian, G. Anton, U. Barres de Almeida, A. R. Bazer-Bachi, Y. Becherini, B. Behera, K. Bernlöhr, A. Bochow, and C. Boisson, Probing the ATIC peak in the cosmic-ray electron spectrum with H.E.S.S., *A&A* **508**, 561 (2009), [arXiv:0905.0105 \[astro-ph.HE\]](#).
- [12] D. Kerszberg, The cosmic-ray electron spectrum measured with H.E.S.S., International Cosmic Ray Conference, [CRI215] (2017) (2017).
- [13] O. Adriani *et al.*, Extended Measurement of the Cosmic-Ray Electron and Positron Spectrum from 11 GeV to 4.8 TeV with the Calorimetric Electron Telescope on the International Space Station, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 261102 (2018), [arXiv:1806.09728 \[astro-ph.HE\]](#).
- [14] G. Ambrosi *et al.* (DAMPE), Direct detection of a break in the teraelectronvolt cosmic-ray spectrum of electrons and positrons, *Nature* **552**, 63 (2017), [arXiv:1711.10981 \[astro-ph.HE\]](#).
- [15] S. Recchia, S. Gabici, F. A. Aharonian, and J. Vink, Local fading accelerator and the origin of TeV cosmic ray electrons, *Phys. Rev.* **D99**, 103022 (2019), [arXiv:1811.07551 \[astro-ph.HE\]](#).
- [16] O. Fornieri, D. Gaggero, and D. Grasso, Features in cosmic-ray lepton data unveil the properties of nearby cosmic accelerators, *JCAP* **02**, 009, [arXiv:1907.03696 \[astro-ph.HE\]](#).
- [17] S. Manconi, M. Di Mauro, and F. Donato, Multimessenger constraints to the local emission of cosmic-ray electrons, *JCAP* **04**, 024, [arXiv:1803.01009 \[astro-ph.HE\]](#).
- [18] C. Evoli, D. Gaggero, D. Grasso, and L. Maccione, Cosmic-Ray Nuclei, Antiprotons and Gamma-rays in the Galaxy: a New Diffusion Model, *JCAP* **0810**, 018, [arXiv:0807.4730 \[astro-ph\]](#).
- [19] C. Evoli, D. Gaggero, A. Vittino, G. Di Bernardo, M. Di Mauro, A. Ligorini, P. Ullio, and D. Grasso, Cosmic-ray propagation with DRAGON2: I. numerical solver and astrophysical ingredients, *JCAP* **2**, 015 (2017), [arXiv:1607.07886 \[astro-ph.HE\]](#).
- [20] N. Tomassetti, Origin of the Cosmic-Ray Spectral Hardening, *Astrophys. J. Lett.* **752**, L13 (2012), [arXiv:1204.4492 \[astro-ph.HE\]](#).
- [21] P. Blasi, E. Amato, and P. D. Serpico, Spectral breaks as a signature of cosmic ray induced turbulence in the Galaxy, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 061101 (2012), [arXiv:1207.3706 \[astro-ph.HE\]](#).
- [22] H.-r. Yan and A. Lazarian, Scattering of cosmic rays by magnetohydrodynamic interstellar turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 281102 (2002), [arXiv:astro-ph/0205285 \[astro-ph\]](#).
- [23] H. Yan and A. Lazarian, Cosmic ray scattering and streaming in compressible magnetohydrodynamic turbulence, *Astrophys. J.* **614**, 757 (2004), [arXiv:astro-ph/0408172 \[astro-ph\]](#).
- [24] H. Yan and A. Lazarian, Cosmic Ray Propagation: Nonlinear Diffusion Parallel and Perpendicular to Mean Magnetic Field, *Astrophys. J.* **673**, 942 (2008), [arXiv:0710.2617 \[astro-ph\]](#).
- [25] J. Feng, N. Tomassetti, and A. Oliva, Bayesian analysis of

- spatial-dependent cosmic-ray propagation: astrophysical background of antiprotons and positrons, *Phys. Rev. D* **94**, 123007 (2016), [arXiv:1610.06182 \[astro-ph.HE\]](#).
- [26] V. Ptuskin, I. V. Moskalenko, F. Jones, A. Strong, and V. Zirakashvili, Dissipation of magnetohydrodynamic waves on energetic particles: impact on interstellar turbulence and cosmic ray transport, *Astrophys. J.* **642**, 902 (2006), [arXiv:astro-ph/0510335](#).
- [27] P. Reichherzer, J. Becker Tjus, E. Zweibel, L. Merten, and M. Pueschel, Turbulence-Level Dependence of Cosmic-Ray Parallel Diffusion, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **498**, 5051 (2020), [arXiv:1910.07528 \[astro-ph.HE\]](#).
- [28] O. Adriani *et al.*, Measurement of boron and carbon fluxes in cosmic rays with the PAMELA experiment, *Astrophys. J.* **791**, 93 (2014), [arXiv:1407.1657 \[astro-ph.HE\]](#).
- [29] K. M. Ferriere, The interstellar environment of our galaxy, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 1031 (2001), [arXiv:astro-ph/0106359 \[astro-ph\]](#).
- [30] G. Ferrand and S. Safi-Harb, A Census of High-Energy Observations of Galactic Supernova Remnants, *Adv. Space Res.* **49**, 1313 (2012), [arXiv:1202.0245 \[astro-ph.HE\]](#).
- [31] A. M. Atoyan, F. A. Aharonian, and H. J. Völk, Electrons and positrons in the galactic cosmic rays, *Phys. Rev. D* **52**, 3265 (1995).
- [32] D. Hooper, I. Cholis, T. Linden, and K. Fang, HAWC observations strongly favor pulsar interpretations of the cosmic-ray positron excess, *Phys. Rev. D* **96**, 103013 (2017), [arXiv:1702.08436 \[astro-ph.HE\]](#).
- [33] C. Evoli, P. Blasi, E. Amato, and R. Aloisio, The signature of energy losses on the cosmic ray electron spectrum, [arXiv e-prints](#), [arXiv:2007.01302 \(2020\)](#), [arXiv:2007.01302 \[astro-ph.HE\]](#).
- [34] M. Aguilar *et al.* (AMS), Precision Measurement of the all-lepton Flux in Primary Cosmic Rays from 0.5 GeV to 1 TeV with the Alpha Magnetic Spectrometer on the International Space Station, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 221102 (2014).
- [35] J. Vink, Supernova remnants: the X-ray perspective, *Astron. Astrophys. Rev.* **20**, 1 (2012), [arXiv:1112.0576 \[astro-ph.HE\]](#).
- [36] R. Diesing and D. Caprioli, Spectrum of Electrons Accelerated in Supernova Remnants, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 071101 (2019), [arXiv:1905.07414 \[astro-ph.HE\]](#).
- [37] M. Aguilar *et al.* (AMS), Precision Measurement of the Proton Flux in Primary Cosmic Rays from Rigidity 1 GV to 1.8 TV with the Alpha Magnetic Spectrometer on the International Space Station, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 171103 (2015).
- [38] A. C. Cummings, E. C. Stone, B. C. Heikkila, N. Lal, W. R. Webber, G. Jóhannesson, I. V. Moskalenko, E. Orlando, and T. A. Porter, Galactic cosmic rays in the local interstellar medium: Voyager-1 observations and model results, *The Astrophysical Journal* **831**, 18 (2016).
- [39] L. J. Gleeson and W. I. Axford, Solar Modulation of Galactic Cosmic Rays, *ApJ* **154**, 1011 (1968).
- [40] I. G. Usoskin, K. Alanko-Huotari, G. A. Kovaltsov, and K. Mursula, Heliospheric modulation of cosmic rays: Monthly reconstruction for 1951-2004, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)* **110**, A12108 (2005).
- [41] I. G. Usoskin, G. A. Bazilevskaya, and G. A. Kovaltsov, Solar modulation parameter for cosmic rays since 1936 reconstructed from ground-based neutron monitors and ionization chambers, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)* **116**, A02104 (2011).
- [42] M. Ahlers and P. Mertsch, Origin of Small-Scale Anisotropies in Galactic Cosmic Rays, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **94**, 184 (2017), [arXiv:1612.01873 \[astro-ph.HE\]](#).
- [43] V. L. Ginzburg and S. I. Syrovatskii, *The Origin of Cosmic Rays, New York: Macmillan, 1964* (Pergamon Press, 1964).
- [44] S. D. Hunter, D. L. Bertsch, J. R. Catelli, T. M. Dame, S. W. Digel, B. L. Dingus, J. A. Esposito, C. E. Fichtel, R. C. Hartman, G. Kanbach, D. A. Kniffen, Y. C. Lin, H. A. Mayer-Hasselwander, P. F. Michelson, C. von Montigny, R. Mukherjee, P. L. Nolan, E. Schneid, P. Sreekumar, P. Thaddeus, and D. J. Thompson, EGRET Observations of the Diffuse Gamma-Ray Emission from the Galactic Plane, *ApJ* **481**, 205 (1997).
- [45] B. Bartoli *et al.* (ARGO-YBJ), Argo-ybj Observation of the Large-scale Cosmic ray Anisotropy During the Solar Minimum Between Cycles 23 and 24, *Astrophys. J.* **809**, 90 (2015).
- [46] B. Bartoli *et al.* (ARGO-YBJ), Galactic Cosmic-Ray Anisotropy in the Northern Hemisphere from the ARGO-YBJ Experiment during 2008–2012, *Astrophys. J.* **861**, 93 (2018), [arXiv:1805.08980 \[astro-ph.HE\]](#).
- [47] M. Amenomori (Tibet AS-gamma), Northern sky Galactic Cosmic Ray anisotropy between 10-1000 TeV with the Tibet Air Shower Array, *Astrophys. J.* **836**, 153 (2017), [arXiv:1701.07144 \[astro-ph.HE\]](#).
- [48] C. Evoli, E. Amato, P. Blasi, and R. Aloisio, Galactic factories of cosmic-ray electrons and positrons, [arXiv e-prints](#), [arXiv:2010.11955 \(2020\)](#), [arXiv:2010.11955 \[astro-ph.HE\]](#).
- [49] E. G. Berezhko, V. K. Yelshin, and L. T. Ksenofontov, Numerical investigation of cosmic ray acceleration in supernova remnants, *Astroparticle Physics* **2**, 215 (1994).
- [50] K. M. Schure and A. R. Bell, Cosmic ray acceleration in young supernova remnants, *MNRAS* **435**, 1174 (2013), [arXiv:1307.6575 \[astro-ph.HE\]](#).
- [51] A. R. Bell, Turbulent amplification of magnetic field and diffusive shock acceleration of cosmic rays, *MNRAS* **353**, 550 (2004).
- [52] J. K. Truelove and C. F. McKee, Evolution of Nonradiative Supernova Remnants, *ApJS* **120**, 299 (1999).
- [53] D. F. Cioffi, C. F. McKee, and E. Bertschinger, Dynamics of Radiative Supernova Remnants, *ApJ* **334**, 252 (1988).
- [54] H. J. Völk, E. G. Berezhko, and L. T. Ksenofontov, Magnetic field amplification in Tycho and other shell-type supernova remnants, *A&A* **433**, 229 (2005), [arXiv:astro-ph/0409453 \[astro-ph\]](#).
- [55] Y. Ohira, R. Yamazaki, N. Kawanaka, and K. Ioka, Escape of cosmic-ray electrons from supernova remnants, *MNRAS* **427**, 91 (2012), [arXiv:1106.1810 \[astro-ph.HE\]](#).
- [56] E. Parizot, A. Marcowith, J. Ballet, and Y. A. Gallant, Observational constraints on energetic particle diffusion in young supernovae remnants: amplified magnetic field and maximum energy, *A&A* **453**, 387 (2006), [arXiv:astro-ph/0603723 \[astro-ph\]](#).
- [57] V. Pelgrims, K. Ferrière, F. Boulanger, R. Lallemand, and L. Montier, Modeling the magnetized Local Bubble from dust data, *A&A* **636**, A17 (2020), [arXiv:1911.09691 \[astro-ph.GA\]](#).



# Table des matières

<b>Avant-Propos et Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>Liste des notations utilisées</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Éléments de théorie</b>	<b>21</b>
1.1 Les plasmas Astrophysiques . . . . .	22
1.1.1 Propriétés fondamentales des plasmas . . . . .	23
1.1.1.1 Longueur de Debye ( $\lambda_D$ ) : . . . . .	23
1.1.1.2 Fréquence de Langmuir ( $\omega_l$ ) [222] : . . . . .	24
1.1.1.3 Libre parcours moyen ( $\lambda_{ij}$ ) : . . . . .	24
1.1.1.4 Taux d'ionisation ( $X$ ) : . . . . .	25
1.1.1.5 Exemples de plasmas astrophysique . . . . .	26
1.1.2 Éléments de dynamique des fluides et de théorie cinétique . . . . .	27
1.1.2.1 Description fluide d'un gaz . . . . .	29
1.1.2.2 Description cinétique d'un gaz . . . . .	31
1.1.3 Ondes plasma en MHD idéale . . . . .	33
1.1.3.1 Equations de la MHD idéale . . . . .	33
1.1.3.2 Relation de dispersion . . . . .	35
1.1.3.3 Solutions perturbatives de la MHD idéale . . . . .	37
1.1.4 Ondes plasma en MHD bi-fluide dans les milieux partiellement ionisés . . . . .	38
1.1.4.1 Equations de la MHD bi-fluide . . . . .	38
1.1.4.2 Solutions perturbatives de la MHD bi-fluide . . . . .	43
1.1.5 Théorie cinétique des ondes plasma . . . . .	45
1.2 Le milieu interstellaire turbulent . . . . .	55
1.2.1 Éléments de théorie et modèles de turbulence . . . . .	56



1.2.1.1	L'équation de Navier-Stokes . . . . .	56
1.2.1.2	Le modèle de Kolmogorov . . . . .	58
1.2.1.3	Le modèle de Iroshnikov-Kraichnan . . . . .	60
1.2.1.4	Modèle de turbulence MHD incompressible . . . . .	61
1.2.1.5	Modèle de turbulence MHD compressible . . . . .	63
1.2.1.6	Effet des collisions ions-neutres . . . . .	65
1.2.2	Mesures de la turbulence interstellaire . . . . .	68
1.3	Transport du rayonnement cosmique en turbulence faible . . . . .	70
1.3.1	Equation de Fokker-Planck en théorie quasi-linéaire . . . . .	71
1.3.2	Coefficients de diffusion quasi-linéaires . . . . .	76
1.3.2.1	Expression générale . . . . .	78
1.3.3	Approximation de diffusion du rayonnement cosmique . . . . .	80
1.3.3.1	Anisotropies . . . . .	83
1.3.3.2	Equation de diffusion-convection . . . . .	83
1.3.4	Turbulence générée par les rayons cosmiques . . . . .	86
1.3.4.1	Génération de turbulence par l'instabilité de streaming de RCs . . . . .	86
1.3.4.2	Amortissement turbulent : Modèle de Lazarian (2016) . . . . .	87
<b>2</b>	<b>Echappement et diffusion des RCs dans le MIS</b>	<b>89</b>
2.1	Contexte . . . . .	91
2.2	Modèles théoriques . . . . .	95
2.2.1	Modèle de milieu interstellaire . . . . .	95
2.2.1.1	Composition du milieu interstellaire . . . . .	95
2.2.1.2	Propagation des ondes d'Alfvén . . . . .	98
2.2.2	Equations du système . . . . .	103
2.2.3	Modèle de turbulence de fond . . . . .	106
2.2.4	Echappement des rayons cosmiques . . . . .	108
2.2.5	Rayonnement synchrotron des électrons . . . . .	120
2.2.6	Temps de résidence et grammage . . . . .	120
2.3	Code numérique de transport CR SPECTRA . . . . .	121
2.3.1	Présentation générale . . . . .	121
2.3.1.1	Intérêt scientifique . . . . .	121
2.3.1.2	Structure du code . . . . .	122
2.3.2	Méthodes de résolution numérique par découpage . . . . .	123
2.3.3	Termes d'advection spatiale ( $L_{adv}^z$ ) . . . . .	124
2.3.4	Terme de diffusion spatiale ( $L_{diff}^z$ ) . . . . .	128
2.3.5	Termes d'advection en énergie ( $L_{adv}^E$ ) . . . . .	130
2.3.6	Terme de rayonnement synchrotron ( $L_{sync}$ ) . . . . .	135
2.3.7	Termes de source ( $L_{src}, L_{gd}$ ) . . . . .	137
2.3.8	Modèles d'injection de rayons cosmiques . . . . .	139
2.4	Résultats et discussion . . . . .	140
2.4.1	Résumé des résultats de Brahim et al. (2020) . . . . .	140

2.4.1.1	Contexte et méthodes . . . . .	140
2.4.1.2	Propagation des RCs dans les environnements de SNRs . . . . .	141
2.4.1.3	Temps de résidence et grammage . . . . .	143
2.4.1.4	Cas de propagation dans un milieu multiphasé . . . . .	144
2.4.1.5	Limitations et conclusion . . . . .	144
2.4.2	Tests fiduciaux avec le code CR SPECTRA . . . . .	145
2.4.2.1	Echappement dans le MIS multiphase . . . . .	147
2.4.2.2	Effet de la dépendance en énergie . . . . .	156
2.4.2.3	Modèle de diffusion dépendant du MIS . . . . .	159
2.4.3	Discussion et ouverture . . . . .	160
2.5	Applications . . . . .	165
2.5.1	Emission $\gamma$ de MCs dans le CSM . . . . .	165
2.5.2	Recherche d'une source de RCs cachée . . . . .	165
2.5.3	SNe de type core collapse . . . . .	165
2.5.4	Amas d'étoiles massives . . . . .	166
<b>3</b>	<b>Propagation des RCs dans le MIS turbulent</b>	<b>167</b>
3.1	Contexte . . . . .	168
3.1.1	Motivations de l'étude . . . . .	168
3.1.2	Présentation du code MHD-RAMSES . . . . .	169
3.2	Modèles théoriques . . . . .	170
3.2.1	Diagramme d'ionisation du milieu interstellaire . . . . .	170
3.2.2	Modèle de turbulence auto-générée par le rayonnement cosmique . . . . .	171
3.2.3	Modèle de turbulence à "grande échelle" . . . . .	175
3.2.4	Effet de streaming du rayonnement cosmique . . . . .	177
3.2.5	Modèle d'injection du rayonnement cosmique . . . . .	178
3.3	Méthodes numériques . . . . .	180
3.3.1	Equations MHD avec diffusion/derive des RCs . . . . .	180
3.3.2	Equations de la MHD dans le code MHD-RAMSES . . . . .	181
3.3.3	Equation de diffusion anisotrope du rayonnement cosmique . . . . .	184
3.3.4	Implémentation de l'effet de streaming . . . . .	186
3.3.5	Implémentation du processus de forçage turbulent . . . . .	187
3.3.6	Implémentation du modèle de turbulence auto-générée . . . . .	188
3.4	Résultats . . . . .	190
3.4.1	Terminologie et paramétrisation . . . . .	190
3.4.2	Etude du système RC-MIS sans sources . . . . .	190
3.4.3	Injection d'une source de rayonnement cosmique . . . . .	193
3.4.4	Etude du système RC-MIS avec plusieurs sources . . . . .	202
3.5	Discussion . . . . .	209
	<b>Conclusion</b>	<b>217</b>

<b>A Annexes</b>	<b>227</b>
A.1 Description Eulérienne et description Lagrangienne d'un élément de fluide	228
A.2 Méthode de Cardano . . . . .	228
A.3 Méthode de Durand-Kerner à l'ordre $n$ . . . . .	229
A.4 Démonstration du passage (1.213) $\rightarrow$ (1.225). . . . .	230
A.5 Coefficients de diffusion $D_{\mu\mu}$ , $D_{\mu,p}$ et $D_{pp}$ . . . . .	234
A.6 Outils mathématiques de la turbulence . . . . .	238
A.7 Démonstration du taux de croissance des modes d'Alfvén résonants . . . .	243
A.8 Résolution d'une équation de diffusion . . . . .	247
A.9 Diagramme de Voronoï . . . . .	249
<b>Liste des figures</b>	<b>252</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>253</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>254</b>
<b>Publications</b>	<b>279</b>
<b>Table des matières</b>	<b>346</b>

# Cosmic ray transport in the weakly ionized interstellar medium

Loann Brahim

Thesis supervisor : Alexandre Marcowith

---

## Abstract

Cosmic rays play a fundamental role in the dynamics of the galaxy. The way it is injected into the interstellar medium and the processes it can impact over is an active research branch of Astrophysics. Although supernova remnants are thought to be the main cosmic ray accelerators there is no actual model for their injection that can efficiently explain their spectral distribution as observed on Earth and that can be validated by observations at high energy. Moreover, the effects of cosmic rays on the turbulent dynamic of the weakly ionized interstellar medium and in particular the galactic star formation rate stay unknown.

In this thesis I have developed an injection and transport model for cosmic rays in the energy range 1 GeV to 100 TeV. The particles escape from Ia type supernovae remnants and propagate in the weakly ionized interstellar medium. This process is studied using a new 1D transport code called : CR SPEC-TRA. Having escaped from the remnant, cosmic rays drive magnetic turbulence at scales corresponding to their gyration radius which contribute to confine the particles close to the accelerator. Molecular clouds in the environment of the source represent preferential targets to probe the cosmic ray content using gamma-ray telescopes.

In a second work, I have modeled the interactions of cosmic rays with a weakly ionized, thermally bi-stable interstellar medium using the 3D MHD code RAMSES. Cosmic rays transport properties are intimately linked with those of magnetic turbulence. In particular, I showed that under certain conditions, cosmic rays can prevent dense structures formations and can potentially contribute to reduce the star formation rate in the galaxy.

**Keywords : Cosmic Ray - Turbulence - Interstellar medium - Supernova - MHD - Transport theory - Numerical simulation**

---

# Transport du rayonnement cosmique dans le milieu interstellaire faiblement ionisé

Loann Brahim

Directeur de thèse : Alexandre Marcowith

Thèse soutenance prévue le 03 Novembre 2020 à Montpellier

Discipline : **Astrophysique**

---

## Résumé

Le rayonnement cosmique joue un rôle fondamental dans la dynamique de la galaxie. Les processus par lesquels ce rayonnement est injecté dans le milieu interstellaire et la manière dont il impacte son environnement représentent une branche active de la recherche en astrophysique. Bien que les restes de supernova sont considérés comme les principaux accélérateurs du rayonnement cosmique, il n'existe pas de modèle d'injection qui permette efficacement d'expliquer la distribution spectrale du rayonnement cosmique telle qu'observée depuis la surface de la Terre, ni qui ne puisse être confirmé par les observations du ciel à haute énergie. De plus, les effets du rayonnement cosmique sur la dynamique turbulente du milieu interstellaire faiblement ionisé et en particulier leur impact sur le taux de formation d'étoile de la galaxie sont encore méconnus.

Dans cette thèse, j'ai développé un modèle d'injection et de transport du rayonnement cosmique d'énergie 1 GeV à 100 TeV s'échappant des restes de supernovae de type Ia et se propageant dans le milieu interstellaire faiblement ionisé à travers un nouveau code 1D de transport du rayonnement cosmique : CR SPECTRA. En s'échappant du reste, le rayonnement cosmique génère de la turbulence magnétique aux échelles du rayon de giration des particules qui contribuent à confiner le rayonnement cosmique proche du choc du reste. Les nuages moléculaires dans l'environnement du reste représentent une signature observationnelle de cet effet de confinement.

Un second travail a permis de modéliser l'interaction du rayonnement cosmique avec une phase thermiquement bi-stable faiblement ionisée du milieu interstellaire grâce au code 3D MHD RAMSES. Les propriétés de transport du rayonnement cosmique sont intimement liées aux propriétés de la turbulence magnétique dans le milieu. En particulier j'ai montré que sous certaines conditions, le rayonnement cosmique empêche la formation de structures denses et contribue potentiellement à la réduction du taux de formations d'étoiles dans la galaxie.

**Mots-clés : Rayon Cosmique - Turbulence - Milieu interstellaire - Supernova - MHD - Théorie du transport - Simulation numérique**

---