



**HAL**  
open science

# Contributions à l'optimisation topologique de liaisons amortissantes pour des applications spatiales

Sylvain Burri

► **To cite this version:**

Sylvain Burri. Contributions à l'optimisation topologique de liaisons amortissantes pour des applications spatiales. Mécanique [physics.med-ph]. HESAM Université, 2020. Français. NNT : 2020HESAC039 . tel-03179845

**HAL Id: tel-03179845**

**<https://theses.hal.science/tel-03179845v1>**

Submitted on 24 Mar 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE DOCTORALE Sciences et Métiers de l'Ingénieur**  
**Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés**

# THÈSE

*présentée par :* **Sylvain BURRI**  
*soutenue le :* **17 décembre 2020**

*pour obtenir le grade de :* **Docteur d'HESAM Université**

*préparée au :* **Conservatoire national des arts et métiers**

*Discipline :* **Mécanique, génie mécanique, génie civil**

*Spécialité :* **Mécanique**

## **Contributions à l'optimisation topologique de liaisons amortissantes pour des applications spatiales**

**THÈSE dirigée par :**  
**M. LEGAY Antoine** Professeur des Universités, Cnam Paris

### **Jury**

<b>M. Philippe KARAMIAN</b>	MCF HDR, Université Caen Normandie	Rapporteur
<b>M. Philippe VIDAL</b>	PU, Université Paris Nanterre	Rapporteur
<b>Mme Marie DE ROCHAMBEAU</b>	Docteure-Ingénieure, ArianeGroup	Examineur
<b>M. Eric FLORENTIN</b>	PU, INSA Centre Val de Loire	Examineur
<b>M. Antoine LEGAY</b>	PU, Cnam Paris	Directeur de thèse



# Remerciements

Cette thèse de doctorat a été réalisée au sein du Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés du Conservatoire national des arts et métiers à Paris grâce à une bourse ministérielle, et en collaboration avec Arianegroup dans le cadre d'un contrat d'accompagnement. Ce travail n'aurait pas pu être réalisé sans la présence et l'aide de nombreuses personnes que je souhaite remercier chaleureusement ici.

Mes premiers remerciements s'adressent à mon directeur de thèse Antoine Legay. Cher Antoine, je te suis profondément reconnaissant de m'avoir accordé ta confiance et de m'avoir permis d'ouvrir les portes du monde de la recherche. Merci également pour les nombreux conseils prodigués ainsi que pour la patience dont tu as fait preuve pour m'accompagner et me former. Enfin, merci de m'avoir donné l'opportunité d'enseigner dans les formations du Cnam car cela fut extrêmement enrichissant. Je remercie sincèrement Philippe Karamian et Philippe Vidal d'avoir accepté de rapporter cette thèse. L'intérêt que vous avez manifesté pour le sujet et les nombreux échanges que nous avons eu resteront d'excellents souvenirs.

Merci aux autres membres du jury, Eric Florentin et Marie De Rochambeau pour m'avoir fait l'honneur d'évaluer ces travaux de thèse.

Un second grand merci à Marie De Rochambeau, ainsi qu'à Arianegroup, pour avoir accepté de collaborer avec moi durant ces années et en me proposant un cas d'étude qui a permis de valoriser la thèse. Nos nombreux échanges ont été formateurs.

De plus, tout ce travail n'aurait pas pu aboutir sans tous les collègues du Cnam. Je pense notamment à Jean-François qui s'est battu (au sens figuré bien entendu) pour que je puisse commencer cette thèse.

Je pense également à Fred et Philippe, les deux piliers du labo, toujours disponibles et volontaires pour aider, réparer, discuter, résoudre, prêter, rigoler, ...

## REMERCIEMENTS

---

Je salue également Alexandre, Boris, Claude, Éric, Jean-Baptiste, Laëtitia, Luc, Lucie, Mathieu, Olivier, Sarah, Xavier et al. pour toutes les discussions, votre soutien et vos précieux conseils, les moments de rigolades et les gâteaux.

Évidemment, j'ai une pensée particulière pour tous les copains (ex-)(néo-)thésards et stagiaires que j'ai eu l'occasion de côtoyer pendant ces quatre années : Arthur, Aro, Bastien, Chaima, Chloé, Christophe, Hadrien, Isadora, Jean-Baptiste(s), Julian, Julien, Martin, Nadège, Naïm, Pedro, Robin, Roger, Théo. L'excellente ambiance de notre BDD a fortement contribué à l'aboutissement de cette thèse. Bravo d'avoir supporté mes (trop) nombreuses "blagues de chat" qui, telle l'agressivité d'un minou-taure, vous auraient sûrement ouvert les droits à un compte pénibilité.

Une pensée particulière pour Roger qui a souvent su trouver les mots justes dans les moments difficiles et pour son immense soutien à l'approche de la soutenance. Pour les quelques centaines de pastéis de nata... et pour m'avoir conseillé de boire du jus d'orange la veille de la soutenance.

Enfin, je souhaite mentionner tous les collègues du Cnam hors labo rencontrés au détour d'un couloir, d'une conversation passionnante, d'un volant de badminton où d'une autre affinité commune. J'emporte avec moi de nombreux souvenirs et de belles amitiés.

Ma vie de thésard a grandement été facilitée grâce à vous tous et je vous en suis éternellement reconnaissant.

Pour finir, j'exprime ma gratitude la plus sincère à mes parents, mon frère, ma sœur et tous les membres de ma famille pour avoir cru en moi et pour m'avoir toujours soutenu dans mes choix. Je vous dois beaucoup et je suis heureux de partager cette réussite avec vous.

Un grand merci à mes amis de tous bords et de tous horizons, aux personnes qui m'ont accompagné ainsi qu'aux libres penseurs qui ont croisé mon chemin.

## REMERCIEMENTS

---

## REMERCIEMENTS

---

# Résumé

Grâce à leurs propriétés amortissantes, les matériaux élastomères sont fréquemment utilisés dans l'industrie aéronautique et spatiale afin d'atténuer les vibrations provenant de sources extérieures. Lorsque ce matériau est placé entre des sous-systèmes d'un assemblage mécanique, il permet de protéger l'intégrité d'équipements sensibles tels que des éléments électroniques ou optiques. Afin d'étudier ces phénomènes, cette thèse de doctorat se base sur un modèle éléments finis représentatif d'une application industrielle comprenant une charge utile qui doit être protégée des vibrations, un support de charge utile par lequel transite les vibrations provenant du lanceur, et des liaisons entre ces sous-systèmes. Le matériau amortissant est incorporé dans les liaisons qui doivent alors répondre à deux objectifs contradictoires : transmettre les charges statiques et amortir les vibrations. Dans un premier temps, le positionnement du matériau ainsi que ses caractéristiques mécaniques sont déterminés en utilisant une stratégie numérique d'optimisation paramétrique. Puis, dans le but d'améliorer la conception des liaisons, un algorithme d'optimisation topologique est implémenté. Cet algorithme est d'abord utilisé dans le cadre de la statique, puis quelques cas académiques sont résolus en dynamique.

Mots-clés : Matériau viscoélastique, Élastomère, Amortissement, Optimisation topologique, méthodes numériques, Modèle éléments finis.



## RESUME

---

# Abstract

Thanks to their damping properties, elastomer materials are commonly used in the aeronautics and aerospace industries in order to reduce vibrations coming from external sources. When this material is placed between sub-systems of a mechanical assembly, it is able to protect the integrity of sensitive equipment such as electrical or optical devices. To study this phenomenon, this PhD thesis is based upon a representative finite element model of an industrial application composed of a payload that we aim to protect, a dispenser through which vibrations coming from the launcher are transmitted, and links between these sub-systems. The damping material is added inside the links which then have to handle two contradictory aims : transmitting static loads and damping vibrations. First of all, the material's positioning as well as its mechanical properties are determined by using a parametric optimization numerical strategy. Then, in order to improve the links' design, a topology optimization algorithm is implemented. This algorithm is firstly used in a static environment, then some academic cases are solved in a dynamic environment.

Keywords : Viscoelastic material, Elastomer, Damping, Topology optimization, Numerical methods, Finite Element Model.

ABSTRACT

---

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Résumé</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>9</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>18</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>23</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>25</b>
1.1 Contexte industriel . . . . .	25
1.2 Objectif et organisation du document . . . . .	27
<b>2 Modélisation d'une application spatiale</b>	<b>29</b>
2.1 Présentation du système étudié . . . . .	29
2.1.1 Contexte . . . . .	29
2.1.2 Géométrie et description des sous-systèmes . . . . .	30
2.1.2.1 Support de charge utile . . . . .	30
2.1.2.2 Charge utile . . . . .	31
2.1.2.3 Liaisons . . . . .	32
2.1.3 Modélisation du matériau viscoélastique . . . . .	33

## TABLE DES MATIÈRES

---

2.2	Formulation éléments finis du problème de dynamique . . . . .	38
2.2.1	Équations locales . . . . .	38
2.2.2	Formulation variationnelle . . . . .	40
2.2.3	Discrétisation éléments finis . . . . .	41
2.2.4	Cas particulier de la statique . . . . .	42
2.3	Modélisation et discrétisation éléments finis du système . . . . .	42
2.3.1	Notations des différents ensembles de nœuds . . . . .	42
2.3.2	Modélisation du mouvement de corps rigide d'un ensemble de nœuds . . . . .	43
2.3.3	Matrices de raideur et de masse du support de charge utile . . . . .	44
2.3.4	Modélisation d'un satellite . . . . .	45
2.3.5	Matrices de raideur et masse de liaison . . . . .	46
2.3.6	Assemblage du système global . . . . .	47
2.4	Résultats et fonctions de réponses en fréquence . . . . .	48
2.4.1	Caractéristiques dynamiques du support de charge utile . . . . .	48
2.4.2	Analyse dynamique du système global avec liaisons rigides . . . . .	52
2.4.3	Analyse dynamique du système global avec liaisons souples . . . . .	53
2.4.3.1	Liaison 1 : cas purement élastique . . . . .	53
2.4.3.2	Liaison 2 : avec couche viscoélastique externe . . . . .	55
2.4.3.3	Liaison 3 : avec couche viscoélastique interne . . . . .	56
2.4.3.4	Bilan . . . . .	57
2.5	Optimisation paramétrique d'une liaison . . . . .	58
2.5.1	Définition des paramètres d'optimisation . . . . .	58
2.5.2	Bilan . . . . .	59
2.6	Conclusion . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Optimisation topologique dans le cadre de la statique linéaire</b>	<b>63</b>

TABLE DES MATIÈRES

---

3.1	Introduction . . . . .	63
3.2	Méthodes existantes pour l'optimisation topologique . . . . .	64
3.2.1	État de l'art de l'optimisation topologique . . . . .	64
3.2.2	Écriture du problème d'optimisation topologique . . . . .	66
3.2.3	Méthodes par homogénéisation . . . . .	68
3.2.4	Méthodes par pénalisation . . . . .	69
3.2.5	Méthodes par lignes de niveaux . . . . .	69
3.2.6	Autres méthodes existantes . . . . .	70
3.2.7	Bilan . . . . .	72
3.3	Méthode SIMP pour l'optimisation en statique . . . . .	73
3.3.1	Introduction . . . . .	73
3.3.2	Matrice de rigidité . . . . .	73
3.3.3	Loi de pénalité SIMP et SIMP-modifiée . . . . .	74
3.3.4	Sensibilité de complaisance . . . . .	77
3.3.5	Régularisation de la solution . . . . .	78
3.3.6	Écriture du problème d'optimisation sous forme d'un lagrangien . . . . .	82
3.4	Algorithme de résolution . . . . .	83
3.4.1	Schéma logique . . . . .	83
3.4.2	Optimiseur OC (Optimality Criteria) . . . . .	86
3.5	Résultats . . . . .	87
3.5.1	Cas de validation 2D et 3D . . . . .	87
3.5.1.1	Poutre MBB 2D . . . . .	87
3.5.1.2	Poutre Cantilever 3D . . . . .	89
3.5.1.3	Bilan . . . . .	92
3.5.2	Application à des plots amortissants 3D . . . . .	92

TABLE DES MATIÈRES

---

3.5.2.1	Définition de la géométrie, du maillage et des conditions au limites . . .	92
3.5.2.2	Définition du voisinage . . . . .	93
3.5.2.3	Lissage des densités aux nœuds . . . . .	94
3.5.2.4	Résultats . . . . .	95
3.5.2.5	Bilan et limites de l'étude . . . . .	98
3.6	Proposition d'amélioration . . . . .	98
3.6.1	Introduction à la méthode RAMP . . . . .	98
3.6.2	Comparaison entres les méthodes SIMP et RAMP . . . . .	100
3.6.2.1	Cas 1 : Poutre Cantilever 2D . . . . .	100
3.6.2.2	Cas 2 : Poutre MBB 2D . . . . .	101
3.6.3	Combinaisons de ces méthodes . . . . .	102
3.6.4	Résultats . . . . .	103
3.6.4.1	Cas 1 : Poutre Cantilever 2D . . . . .	104
3.6.4.2	Cas 2 : Poutre MBB 2D . . . . .	105
3.6.5	Bilan . . . . .	107
3.6.6	Application de la méthode Average au Plot 3D . . . . .	108
3.6.6.1	Cas 1 : Plot chargé en résultante suivant $\vec{x}$ . . . . .	108
3.6.6.2	Cas 2 : Plot chargé par un couple autour de $\vec{x}$ . . . . .	109
3.7	Conclusion et contributions . . . . .	110
<b>4</b>	<b>Optimisation topologique dans le cadre de la dynamique</b>	<b>111</b>
4.1	Introduction . . . . .	111
4.2	État de l'art de l'optimisation topologique en dynamique . . . . .	112
4.2.1	Critères dynamiques . . . . .	112
4.2.2	Prise en compte de l'amortissement . . . . .	113
4.2.3	Méthodes numériques choisies . . . . .	114

## TABLE DES MATIÈRES

---

4.3	Optimisation du problème dynamique sans amortissement . . . . .	114
4.3.1	Problème discrétisé . . . . .	114
4.3.2	Critère d'optimisation . . . . .	116
4.3.3	Atténuation des modes locaux parasites . . . . .	117
4.3.3.1	Identification du phénomène . . . . .	117
4.3.3.2	Implémentation d'une méthode d'atténuation . . . . .	118
4.3.3.3	Application à la poutre cantilever 2D . . . . .	120
4.3.4	Limites et modifications du solveur numérique . . . . .	122
4.3.4.1	Limites du solveur OC . . . . .	122
4.3.4.2	Implémentation de solveurs adaptés . . . . .	122
4.3.5	Application et résultats sur la poutre cantilever 2D . . . . .	125
4.3.5.1	Optimisation à la fréquence du premier mode . . . . .	125
4.3.5.2	Optimisation à la fréquence du deuxième mode . . . . .	127
4.3.5.3	$\gamma$ MOC : amélioration du temps de calcul pour la fréquence du deuxième mode . . . . .	130
4.3.6	Application et résultats sur le cube 3D . . . . .	131
4.3.6.1	Optimisation à la fréquence du troisième mode . . . . .	131
4.3.6.2	Bilan . . . . .	133
4.4	Optimisation du problème dynamique avec amortissement . . . . .	135
4.4.1	Problème discrétisé . . . . .	135
4.4.2	Critère d'optimisation . . . . .	135
4.4.3	Optimisation de la poutre cantilever 2D amortie . . . . .	135
4.5	Conclusion et contributions . . . . .	138
<b>5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>139</b>
5.1	Conclusion générale . . . . .	139



TABLE DES MATIÈRES

---

5.2	Perspectives . . . . .	141
5.2.1	Perspectives : améliorations du cas test représentatif . . . . .	141
5.2.2	Perspectives : poursuite du travail en cours . . . . .	141
5.2.3	Perspectives : extensions générales . . . . .	142
<b>Bibliographie</b>		<b>142</b>
<b>Liste des annexes</b>		<b>156</b>
<b>A Résultats pour le plot amortissant 3D en statique</b>		<b>157</b>
A.1	Chargement initial . . . . .	157
A.2	Résultats obtenus avec la méthode SIMP . . . . .	158
A.2.1	Cas d'une résultante dans la direction $\vec{z}$ . . . . .	158
A.2.2	Cas d'une résultante dans la direction $\vec{x}$ . . . . .	159
A.2.3	Cas d'un couple autour de l'axe $\vec{z}$ . . . . .	160
A.2.4	Cas d'un couple autour de l'axe $\vec{x}$ . . . . .	161
A.3	Résultats obtenus avec la méthode AVER . . . . .	162
A.3.1	Cas d'une résultante dans la direction $\vec{z}$ . . . . .	162
A.3.2	Cas d'une résultante dans la direction $\vec{x}$ . . . . .	163
A.3.3	Cas d'un couple autour de l'axe $\vec{z}$ . . . . .	164
A.3.4	Cas d'un couple autour de l'axe $\vec{x}$ . . . . .	164
A.4	Synthèse des performances . . . . .	165
A.4.1	Cas d'une résultante dans la direction $\vec{z}$ . . . . .	165
A.4.2	Cas d'une résultante dans la direction $\vec{x}$ . . . . .	166
A.4.3	Cas d'un couple autour de l'axe $\vec{z}$ . . . . .	167
A.4.4	Cas d'un couple autour de l'axe $\vec{x}$ . . . . .	167

# Liste des tableaux

2.1	Valeur des paramètres matériau de l'aluminium . . . . .	31
2.2	Valeurs des paramètres de Zener pour le Deltane 350 et l'ISD112 . . . . .	37
3.1	Comparaison des solutions d'une poutre cantilever 2D pour différentes valeurs de $p$ (SIMP) . . . . .	75
3.2	Synthèse des paramètres du calcul MBB 2D . . . . .	88
3.3	Synthèse des paramètres du calcul Cantilever 3D . . . . .	90
3.4	Comparaison des performances des deux calculs pour la sollicitation en cisaillement . . . . .	96
3.5	Comparaison des performances des deux calculs pour la sollicitation en flexion . . . . .	97
3.6	Comparaison des solutions d'une poutre cantilever 2D pour différentes valeurs de $q$ (RAMP) . . . . .	99
3.7	Comparaison des performances SIMP vs RAMP pour la poutre Cantilever 2D . . . . .	101
3.8	Comparaison des performances SIMP vs RAMP pour la poutre MBB 2D . . . . .	102
3.9	Performance des différentes lois pour la poutre Cantilever 2D . . . . .	104
3.10	Performance des différentes lois pour la poutre MBB 2D . . . . .	106
3.11	Comparaison des performances de SIMP et Average pour le plot soumis à une résultante suivant $\vec{x}$ . . . . .	109
3.12	Comparaison des performances de SIMP et Average pour le plot dans le cas d'un couple autour de $\vec{x}$ . . . . .	109
4.1	Paramètres matériaux . . . . .	117

LISTE DES TABLEAUX

---

4.2	Comparaison des trois premières fréquences propres . . . . .	118
4.3	Comparaison des trois premières valeurs propres . . . . .	121
4.4	Résultats pour différentes valeurs de $\gamma$ . . . . .	130
4.5	Valeurs des paramètres matériaux pour le Deltane 350 . . . . .	135
A.1	Performances des différentes solutions pour le cas d'une résultante dans la direction $\vec{z}$	165
A.2	Comparaison des écarts en % par rapport à la solution SIMP pour le cas d'une résultante dans la direction $\vec{z}$ . . . . .	166
A.3	Performances des différentes solutions pour le cas d'une résultante dans la direction $\vec{x}$	166
A.4	Comparaison des écarts en % par rapport à la solution SIMP pour le cas d'une résultante dans la direction $\vec{x}$ . . . . .	166
A.5	Performances des différentes solutions pour le cas d'un couple autour de l'axe $\vec{z}$ . . . . .	167
A.6	Comparaison des écarts en % par rapport à la solution SIMP pour le cas d'un couple autour de l'axe $\vec{z}$ . . . . .	167
A.7	Performances des différentes solutions pour le cas d'un couple autour de l'axe $\vec{x}$ . . . . .	167
A.8	Comparaison des écarts en % par rapport à la solution SIMP pour le cas d'un couple autour de l'axe $\vec{x}$ . . . . .	168

# Table des figures

1.1	Illustration des différentes méthodes d'optimisation d'une poutre cantilever. (a) Configuration initiale, (b), (c), (d) solutions finales . . . . .	27
2.1	Aperçu de la structure globale étudiée. Crédit photo : European Space Agency . . . . .	30
2.2	Géométrie du support - (Gauche : Vue en coupe, Droite : maillage) . . . . .	31
2.3	Vue isométrique du système global . . . . .	32
2.4	Géométrie des trois liaisons . . . . .	33
2.5	Modèles rhéologiques . . . . .	34
2.6	Influence des paramètres de Zener sur le module complexe $E^*(\omega)$ . . . . .	36
2.7	Influence des paramètres de Zener sur le facteur de perte $\eta(\omega)$ . . . . .	37
2.8	Comparaison du Deltane 350 et de l'ISD112 . . . . .	38
2.9	Problème de référence . . . . .	39
2.10	Schéma des différents ensembles de nœuds du système global discrétisé . . . . .	43
2.11	Déformées modales des modes 1, 2 et 3 . . . . .	49
2.12	Déformées modales des modes 11, 15 et 24 . . . . .	50
2.13	Déformées modales des modes 25 et 29 . . . . .	51
2.14	$f = 98,0$ Hz, $m = 2$ , $n = 1$ , superposition des modes jumeaux (décalage de $\frac{\pi}{4}$ ) en vue de dessus . . . . .	52
2.15	FRF de la norme du déplacement du centre de gravité des satellites pour les liaisons parfaitement rigides . . . . .	53

TABLE DES FIGURES

---

2.16 Liaisons rigides : Déformées modales des quatre premiers modes de la structure . . . . .	54
2.17 FRF de la norme adimensionnée du déplacement du centre d'inertie du satellite $\mathbf{S}_2$ dans les cas des liaisons rigides et purement élastiques . . . . .	55
2.18 FRF de la norme adimensionnée du déplacement du centre d'inertie du satellite $\mathbf{S}_2$ avec la liaison 1 (noire pointillé), la liaison 2 avec Deltane 350 (bleue discontinue) et la liaison 2 avec ISD112 (rouge continue) . . . . .	56
2.19 FRF de la norme adimensionnée du déplacement du centre d'inertie du satellite 2 avec la liaison 1 (noire pointillé), la liaison 3 avec le Deltane 350 (bleue discontinue) et la liaison 3 avec l'ISD112 (rouge continue) . . . . .	57
2.20 Surface de réponse de la norme adimensionnée du centre d'inertie du satellite 2 . . . . .	59
3.1 Influence de la pénalité $p$ sur le rapport raideur/masse . . . . .	75
3.2 Poutre Cantilever 2D, influence du facteur de pénalité $p$ . . . . .	76
3.3 Gauche : maillage en damier avant filtrage, droite : maillage régularisé après filtrage .	79
3.4 Gauche : maillage en damier avant filtrage, droite : maillage régularisé après filtrage .	80
3.5 Poutre Cantilever 2D - illustration des différents filtres . . . . .	81
3.6 Évolution du volume $V(\tilde{x})$ au cours de l'optimisation (en % par rapport à $V_0$ . . . . .	84
3.7 Algorithme d'optimisation topologique avec SIMP . . . . .	85
3.8 Configuration initiale de la poutre MBB 2D . . . . .	87
3.9 Comparaison des solutions optimales de la poutre MBB 2D, ((a) et (c) : filtrage des sensibilités, (b) et (d) : filtrage des densités) . . . . .	88
3.10 Répartition de matière dans la solution finale pour la poutre MBB 2D . . . . .	89
3.11 Configuration initiale de la poutre Cantilever 3D . . . . .	90
3.12 Solution optimales pour la poutre Cantilever 3D . . . . .	90
3.13 Solution finale de la poutre cantilever 3D avec un filtre sur les sensibilités . . . . .	91
3.14 Répartition de matière dans la solution finale pour la poutre Cantilever 3D . . . . .	92
3.15 Géométrie et maillage du domaine de conception du plot amortissant . . . . .	93

TABLE DES FIGURES

---

3.16	Voisinage d'un élément pour $\delta = 1$ . . . . .	94
3.17	Voisinage d'un élément pour $\delta = 2$ . . . . .	94
3.18	Solutions optimales lissées pour le cas d'une résultante suivant $\vec{x}$ , avec affichage des densités lissées $x_e > 0,5$ . . . . .	95
3.19	Solutions optimales lissées pour le cas d'un couple autour de $\vec{x}$ , avec affichage des densités lissées $x_e > 0,5$ . . . . .	97
3.20	Poutre Cantilever 2D calculée avec la loi RAMP . . . . .	99
3.21	Comparaison de l'influence des pénalités entre SIMP et RAMP . . . . .	100
3.22	Cas de la poutre Cantilever . . . . .	101
3.23	Cas de la poutre MBB . . . . .	102
3.24	Lois de pénalité Hybrid et Average . . . . .	103
3.25	Cantilever 2D : Évolution de la complaisance au cours des itérations . . . . .	104
3.26	Formes des solutions optimales obtenues avec les différentes lois pour la poutre Cantilever 2D . . . . .	105
3.27	MBB 2D : Évolution de la complaisance au cours des itérations . . . . .	106
3.28	Formes des solutions optimales obtenues avec les différentes méthodes pour la poutre MBB 2D . . . . .	107
3.29	Comparaison des solutions obtenues avec SIMP et Average pour le cas d'une résultante suivant $\vec{x}$ . . . . .	108
3.30	Comparaison des solutions obtenues avec SIMP et Average pour le plot soumis à un couple autour de $\vec{x}$ . . . . .	109
4.1	Poutre Cantilever 2D . . . . .	117
4.2	Évolution des valeurs des fréquences propres pendant l'optimisation . . . . .	118
4.3	Comparaison de l'allure des modes propres locaux pour la poutre Cantilever 2D . . . . .	119
4.4	Évolution des valeurs des fréquences propres avec instauration d'un seuil sur les effets d'inertie . . . . .	120

TABLE DES FIGURES

---

4.5	Comparaison de l'allure des modes propres locaux pour la poutre Cantilever 2D . . . . .	121
4.6	Optimisation avec le solveur OC pour une fréquence ciblée $f^* = 0,42$ Hz . . . . .	122
4.7	Optimisation avec le solveur MMA pour une fréquence ciblée $f^* = 0,42$ Hz . . . . .	125
4.8	Optimisation avec le solveur MOC pour une fréquence ciblée $f^* = 0,42$ Hz . . . . .	126
4.9	Évolution du paramètre de décalage $\mu$ au cours des itérations . . . . .	126
4.10	Solution optimale avec MMA pour $f^* = 2,55$ Hz . . . . .	128
4.11	Évolution de la fonction objectif au cours des itérations . . . . .	128
4.12	Solution optimale obtenue avec MOC pour $f^* = 2,72$ Hz . . . . .	129
4.13	Évolution de la fonction objectif . . . . .	130
4.14	Solution optimale obtenue avec $\gamma$ MOC . . . . .	131
4.15	Évolution du paramètre $\mu$ pour $\gamma = 1,0$ et $\gamma = 1,5$ . . . . .	132
4.16	Conditions aux limites et forme finale optimisée en statique pour le cube 3D . . . . .	132
4.17	Solutions optimales avec MMA pour $f^* = 5,8$ Hz . . . . .	133
4.18	Solutions optimales avec $\gamma$ MOC pour $f^* = 5,80$ Hz . . . . .	134
4.19	Solution optimale obtenue en statique avec MMA . . . . .	136
4.20	Solution optimale obtenue avec MMA pour $f^* = 0,11$ Hz . . . . .	137
4.21	Solution optimale obtenue avec MMA pour $f^* = 0,29$ Hz . . . . .	137
5.1	Vue en coupe de la géométrie de liaison viscoélastique envisageable . . . . .	141
A.1	Domaine de conception et conditions aux limites . . . . .	157
A.2	Solutions optimales lissées . . . . .	158
A.3	Solutions optimales "réelles" déformées . . . . .	159
A.4	Solutions optimales lissées . . . . .	159
A.5	Solutions optimales "réelles" déformées . . . . .	160
A.6	Solutions optimales lissées . . . . .	160
A.7	Vues en coupe des solutions . . . . .	160

TABLE DES FIGURES

---

A.8 Solutions optimales "réelles" déformées . . . . .	161
A.9 Solutions optimales lissées . . . . .	161
A.10 Solutions optimales "réelles" déformées . . . . .	162
A.11 Formes finales obtenues avec $\delta = 1$ . . . . .	162
A.12 Formes finales obtenues avec $\delta = 2$ . . . . .	163
A.13 Formes finales obtenues avec $\delta = 1$ . . . . .	163
A.14 Formes finales obtenues avec $\delta = 2$ . . . . .	163
A.15 Formes finales obtenues avec $\delta = 1$ . . . . .	164
A.16 Formes finales obtenues avec $\delta = 2$ . . . . .	164
A.17 Formes finales obtenues avec $\delta = 1$ . . . . .	164
A.18 Formes finales obtenues avec $\delta = 2$ . . . . .	165



## TABLE DES FIGURES

---

# Chapitre 1

## Introduction

### Contenu

---

1.1	Contexte industriel . . . . .	25
1.2	Objectif et organisation du document . . . . .	27

---

### 1.1 Contexte industriel

L'environnement dans lequel évolue la charge utile lorsque celle-ci est embarquée dans un lanceur spatial, génère de nombreuses sollicitations qui, si elles ne sont pas correctement étudiées, peuvent entraîner le dysfonctionnement ou la casse de la charge utile. Parmi ces sources de dangers, le chargement dynamique subi doit être considéré afin de préserver l'intégrité mécanique de la structure jusqu'à sa mise en orbite. Les différents types de chargement dynamique sont :

- Vibrations transmises par les moteurs et turbopompes (basse fréquence),
- Vibrations provenant du braquage des tuyères (basse fréquence),
- Efforts aérodynamiques et aérothermodynamiques s'appliquant sur la structure du lanceur (large bande),
- Chocs de séparation des étages, étages d'accélération à poudres et coiffe (haute fréquence),
- Oscillations de pression, effets pogo (haute fréquence).

Les sollicitations étudiées dans ce travail correspondent au champ des basses fréquences. Les hautes fréquences ne sont pas considérées. Pour amortir ces fréquences, des techniques d'isolement ou d'amortissement vibratoire doivent être mises en place. Pour réaliser cela, plusieurs stratégies passives ou actives peuvent être adoptées. Parmi les méthodes passives, l'utilisation de matériaux viscoélastiques

ayant des propriétés amortissantes, employées dans de nombreuses industries du transport et du bâtiment, constitue une option envisageable. Le principe consiste à intégrer au sein de la structure vibrante une couche de matériau viscoélastique qui, lorsqu'elle est soumise à des déformations de cisaillement, permet de dissiper l'énergie vibratoire sous forme de chaleur [126].

Cette thèse, en partenariat avec l'industriel ArianeGroup, a pour but d'améliorer l'amortissement d'une sous-structure appartenant à une structure globale en introduisant du matériau élastomère au niveau des liaisons assurant la transmission des efforts mécaniques entre la structure et la source d'excitation. L'application servant de support à ce travail est un ensemble embarqué dans le lanceur, composé d'un support de charge utile, d'une charge utile et des liaisons liant ces deux équipements. L'objectif de ce travail est de modifier les liaisons pré-existantes en incorporant l'élastomère à des endroits précis dans le but d'amortir les vibrations en basse fréquence provenant notamment des moteurs.

L'emplacement du matériau ainsi que sa forme peuvent être déterminés en utilisant une des méthodes d'optimisation existantes (figure 1.1) :

- optimisation paramétrique : méthode de dimensionnement consistant à chercher des paramètres géométriques ou matériaux optimaux. Souvent, les paramètres sont des épaisseurs, des largeurs, des rayons, etc.
- optimisation structurale : méthode consistant à définir l'aspect optimal du contour d'un domaine de départ.
- optimisation topologique : méthode permettant de définir l'aspect optimal du contour d'un domaine de départ, ainsi que d'ajouter des trous dans la structure afin de modifier sa topologie.

La figure 1.1a présente une poutre cantilever encastree au niveau de son bord gauche et soumise à un effort tranchant sur son bord droit.

L'optimisation paramétrique est dans un premier temps appliquée pour dimensionner une liaison amortissante. Puis dans un deuxième temps, l'optimisation topologique est mise en place et utilisée car celle-ci offre de meilleurs résultats pour un critère d'optimisation donné. En effet, la possibilité de créer des trous dans la structure offre une latitude supplémentaire par rapport aux autres méthodes [22, 129]. Ce principe est relativement bien maîtrisé lorsque la structure est sollicitée statiquement, mais peu étudié dans le cas de chargements dynamiques.

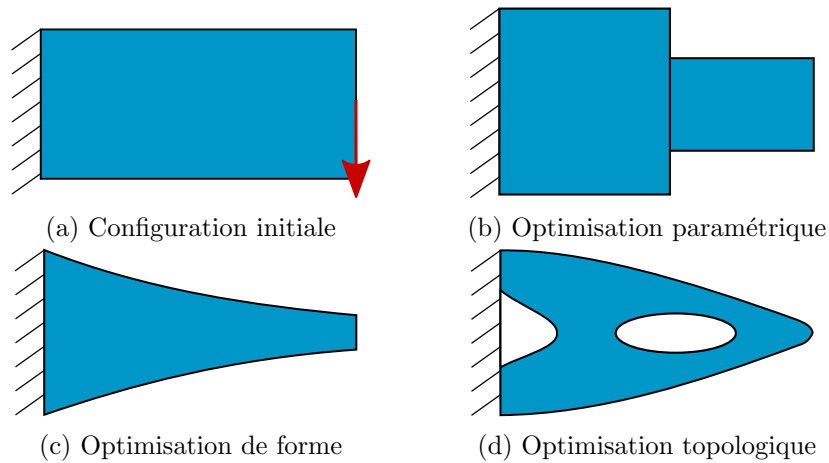


FIGURE 1.1 – Illustration des différentes méthodes d’optimisation d’une poutre cantilever. (a) Configuration initiale, (b), (c), (d) solutions finales

## 1.2 Objectif et organisation du document

L’objectif de ce document est de présenter les travaux menés dans le cadre de cette thèse, concernant l’optimisation topologique de structures vibrantes soumises à des sollicitations dynamiques en basses fréquences. Pour ce travail, un code éléments finis maison est entièrement développé en Python et Fortran. Le logiciel open-source GMSH est utilisé en pré- et post-traitement [63]. Ce manuscrit est découpé en trois parties.

Le premier chapitre présente un cas test représentatif d’une application industrielle servant de support à la thèse. Le détail de son implémentation ainsi que des études dynamiques et paramétriques sont réalisées. Le choix du modèle viscoélastique est également détaillé et justifié.

Le second chapitre se concentre sur un état de l’art de l’optimisation topologique dans le cadre de la statique linéaire. Des cas de validation ainsi que plusieurs applications 2D et 3D sont présentés. Enfin, quelques améliorations de l’algorithme d’optimisation sont proposées.

Le troisième chapitre présente l’optimisation topologique dans le cadre dynamique, d’un point de vue fréquentiel. Les principaux obstacles à la résolution de problèmes dynamiques sont présentés, ainsi des cas d’applications sur des cas tests académiques issus de la littérature.

## 1.2. OBJECTIF ET ORGANISATION DU DOCUMENT

---

## Chapitre 2

# Modélisation d'une application spatiale

### Contenu

---

2.1	Présentation du système étudié . . . . .	29
2.2	Formulation éléments finis du problème de dynamique . . . . .	38
2.3	Modélisation et discrétisation éléments finis du système . . . . .	42
2.4	Résultats et fonctions de réponses en fréquence . . . . .	48
2.5	Optimisation paramétrique d'une liaison . . . . .	58
2.6	Conclusion . . . . .	60

---

## 2.1 Présentation du système étudié

### 2.1.1 Contexte

La structure étudiée est composée d'un support de charge utile (ou dispenser en anglais), d'une charge utile (satellites) et de liaisons qui relient les deux sous-systèmes (figure 2.1). Une vue d'ensemble du système global étudié est présentée à la figure 2.3 et celui-ci est finalement composé du support de charge utile, quatre satellites et seize liaisons (quatre par satellites). Le support est excité par un déplacement harmonique imposé à sa base.

L'objectif de ce chapitre est de modéliser, tester puis améliorer la structure étudiée afin d'amortir les vibrations transmises aux satellites. La réponse dynamique d'un satellite est exprimée comme la norme du déplacement de son centre d'inertie  $\|\underline{U}_S\|$ , adimensionnée par la norme du déplacement imposé  $\|\underline{U}^d\|$ .

La stratégie déployée ici consiste à incorporer du matériau élastomère au niveau des liaisons dans le but de réaliser cet amortissement. Plusieurs géométries de liaisons sont proposées et les fonctions

## 2.1. PRÉSENTATION DU SYSTÈME ÉTUDIÉ

---



FIGURE 2.1 – Aperçu de la structure globale étudiée. Crédit photo : European Space Agency

de réponse en fréquence (FRF) associées à la dynamique de la structure globale tenant compte de ces liaisons sont présentées.

### 2.1.2 Géométrie et description des sous-systèmes

#### 2.1.2.1 Support de charge utile

Le support de charge utile est l'équipement sur lequel reposent les satellites. Il fait le lien entre le lanceur et la charge utile. Sa hauteur est d'environ 3 m, son diamètre de 1,5 m au niveau de la partie tubulaire et 2,5 m à la base. On considère dans ce travail une modélisation simplifiée du support réel utilisé par Ariane 5 pour lancer les satellites Galiléo<sup>1</sup>. Le support simplifié est constitué d'une partie conique, d'une partie cylindrique et de trois anneaux de renforcement placés à la base, au sommet ainsi qu'au niveau de la jointure entre la partie conique et la partie cylindrique (figure 2.2). Le matériau considéré est de l'aluminium dont les caractéristiques matériaux se trouvent dans le tableau 2.1.

Dans la mesure où il est fait l'hypothèse que le support est fin et élancé, le maillage utilisé pour le modéliser (figure 2.2) est composé d'éléments coques Discrete-Kirchoff Triangle (DKT [18, 50, 51]) à trois nœuds, ayant 6 degrés de liberté (ddls) par nœud (3 translations et 3 rotations). Ce

---

1. [https://www.esa.int/Space\\_in\\_Member\\_States/France/Lancement\\_imminent\\_des\\_satellites\\_Galileo\\_23\\_a\\_26](https://www.esa.int/Space_in_Member_States/France/Lancement_imminent_des_satellites_Galileo_23_a_26)

## 2.1. PRÉSENTATION DU SYSTÈME ÉTUDIÉ

---

Aluminium	
$E$ (GPa)	70
$\nu$ (-)	0,3
$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	2,8

TABLE 2.1 – Valeur des paramètres matériau de l’aluminium

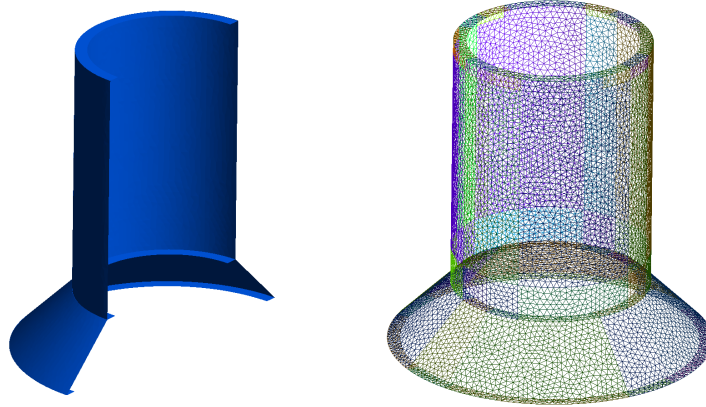


FIGURE 2.2 – Géométrie du support - (Gauche : Vue en coupe, Droite : maillage)

type d’éléments permet d’obtenir un bon compromis entre un faible nombre d’éléments nécessaire, entraînant un temps de calcul raisonnable, et une bonne précision des résultats. La condition de déplacement imposé  $\underline{U}^d$  est appliquée à la base du support (figure 2.3). La position des centres de gravité, des repères locaux des satellites (en blanc) et du repère global (en noir) est décrite. Lors des calculs effectués et présentés dans ce chapitre, la condition de déplacement imposé est toujours constituée d’un déplacement unitaire dans la direction  $\vec{Y}$  et d’un déplacement unitaire dans la direction  $\vec{Z}$ , qui sont deux des trois composantes du repère global (en noir).

### 2.1.2.2 Charge utile

La charge utile comporte quatre satellites répartis uniformément autour du support. Les caractéristiques géométriques des satellites ne sont pas connues précisément, par conséquent on fait l’hypothèse que leurs mouvements sont ceux des corps rigides. Pour cette étude, les satellites sont identiques et la masse de chacun, notée  $M_{\text{sat}}$ , est environ deux fois plus importante que celle du support. La matrice d’inertie exprimée au centre d’inertie  $G$  (confondu avec le centre de gravité) dans le repère  $\mathcal{R}_s$  du satellite est l’autre donnée connue et est notée  $\bar{\bar{I}}_{G/\mathcal{R}_s}$ . La figure 2.3 présente un aperçu de l’ensemble, et les repères locaux des satellites sont visibles en blanc.



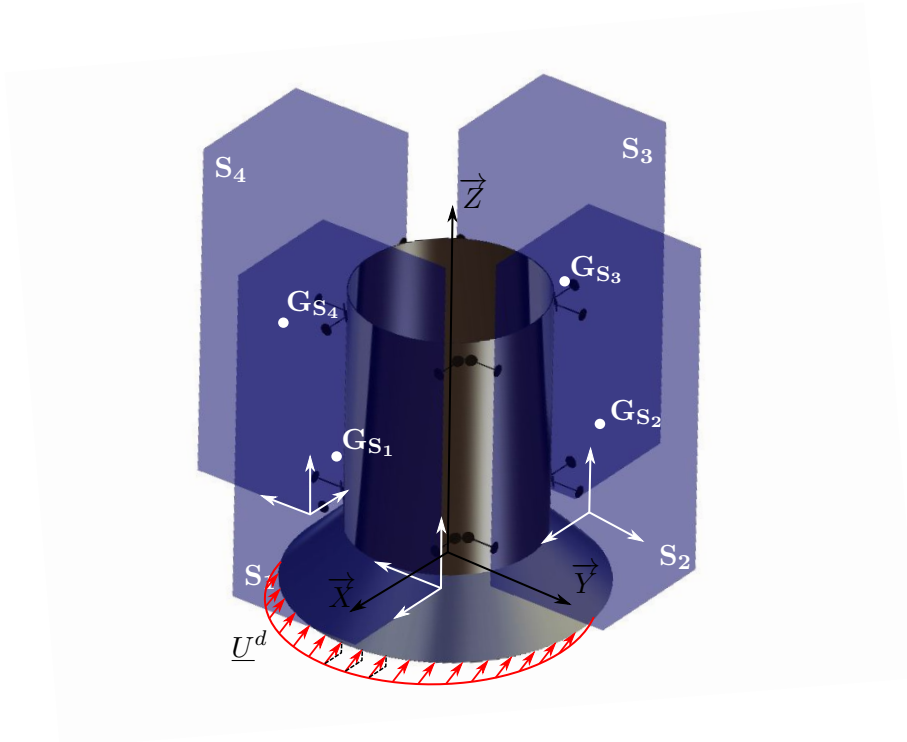


FIGURE 2.3 – Vue isométrique du système global

### 2.1.2.3 Liaisons

La liaison est l'élément-clé du système car elle transmet des vibrations entre les différents sous-systèmes, et c'est grâce à elle qu'est réalisé l'amortissement. Chaque satellite est relié au support de charge utile par 4 liaisons. Chacune d'elle est dimensionnée pour tenir dans un parallélépipède de  $235 \times 100 \times 100$  mm et est maillée en hexaèdre à 8 nœuds dans le code élément finis. Les liaisons sont représentées en noir sur la figure 2.3.

Trois géométries de liaisons sont proposées et testées afin de déterminer leur impact sur la réponse fréquentielle du satellite :

- Liaison 1 purement élastique (figure 2.4a) composée d'un axe métallique de diamètre  $\varnothing 46$  mm, pour une masse totale de liaison de 1,09 kg,
- Liaison 2 avec couche viscoélastique externe (figure 2.4b) composée d'un axe métallique de diamètre  $\varnothing 46$  mm ainsi que d'une couche d'élastomère d'épaisseur  $100 - 46 = 54$  mm, pour une masse totale de liaison de 1,90 kg,
- Liaison 3 avec couche viscoélastique interne (figure 2.4c) composée d'un axe métallique de

## 2.1. PRÉSENTATION DU SYSTÈME ÉTUDIÉ

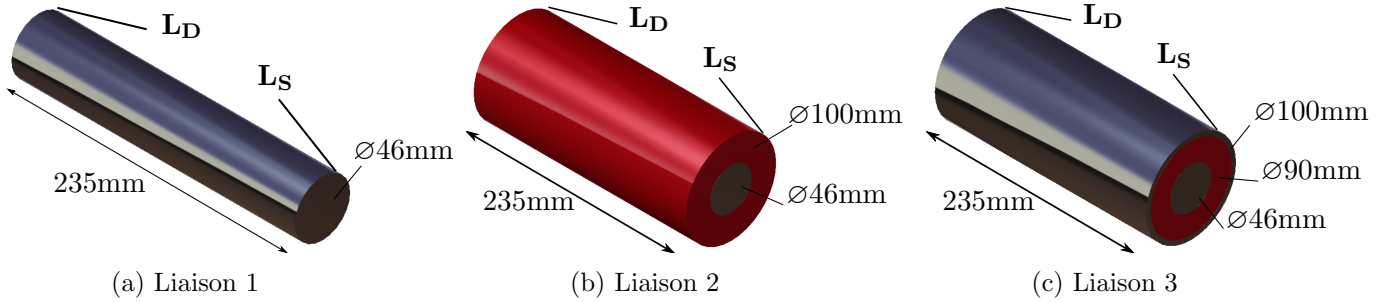


FIGURE 2.4 – Géométrie des trois liaisons

diamètre  $\varnothing 46$  mm, d'une couche d'élastomère d'épaisseur 44 mm ainsi que d'une couche externe métallique d'épaisseur 10 mm, contraignant spatialement la couche élastomère, pour une masse totale de 1,68 kg.

On remarque que l'ajout des couches se fait "en parallèle". L'idée de placer des couches d'élastomère "en série" afin de les faire travailler en cisaillement a été considérée au cours de l'étude. Néanmoins les résultats ne sont pas présentés car cela entraîne une diminution de la raideur globale de liaison, ce que l'on souhaite éviter. Cet agencement n'est donc pas retenu.

La partie métallique est considérée purement élastique, tandis que la partie élastomère est employée pour ses propriétés viscoélastiques. Ces dernières sont décrites dans la section suivante.

### 2.1.3 Modélisation du matériau viscoélastique

**Modélisation du comportement viscoélastique dans le domaine fréquentiel** La relation de comportement d'un matériau viscoélastique dépend de la fréquence d'excitation [15, 126]. Dans le domaine fréquentiel, la dissipation visqueuse introduit des termes complexes dans l'écriture de cette relation :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbb{C}^*(\omega)\boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (2.1)$$

où  $\omega$  représente la pulsation et les termes  $\bullet^*$  désignent les termes complexes.  $\boldsymbol{\sigma}$  est l'opérateur des contraintes et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est l'opérateur des déformations. Le tenseur viscoélastique  $\mathbb{C}^*(\omega)$  peut s'exprimer en fonction du module d'Young complexe et du coefficient de Poisson. Le coefficient de Poisson est supposé réel et constant dans ce travail. Le module d'Young complexe  $E^*(\omega)$  s'écrit :

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) \quad (2.2)$$

## 2.1. PRÉSENTATION DU SYSTÈME ÉTUDIÉ

---

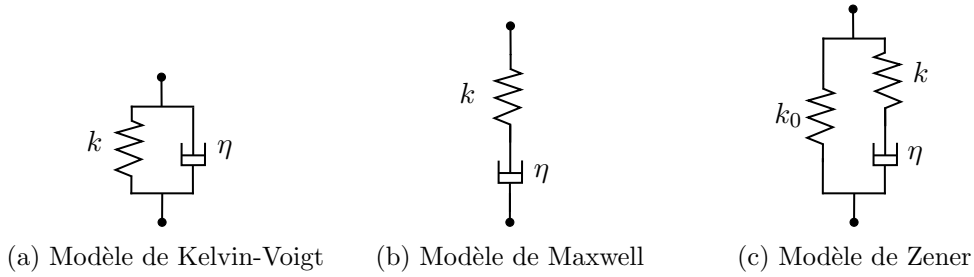


FIGURE 2.5 – Modèles rhéologiques

La partie réelle  $E'(\omega)$  est le module de stockage, qui représente la capacité du matériau à stocker et restituer l'énergie de déformation élastique. La partie imaginaire  $E''(\omega)$  est le module de perte et correspond à la capacité du matériau à dissiper l'énergie. De plus, on définit le facteur de perte  $\eta$  comme le rapport entre la partie imaginaire et la partie réelle du module de Young complexe :

$$\eta(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \quad (2.3)$$

Ce facteur correspond à la capacité d'amortissement du matériau et dépend lui aussi de la fréquence.

**Modélisation rhéologique** Il existe de nombreux modèles rhéologiques permettant de prendre en compte les comportements à la fois visqueux et élastiques de certains matériaux. Ces modèles sont généralement composés de ressorts pour modéliser le comportement élastique ( $\sigma = k\varepsilon$ ) et d'amortisseurs pour l'aspect visqueux ( $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$  où  $\dot{\varepsilon}$  est le taux de déformation), tous deux uniaxiaux. Parmi les modèles basiques, on peut citer le modèle de Kelvin-Voigt qui est constitué d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle, celui de Maxwell qui comprend un ressort et un amortisseur en série, ou celui de Zener qui est constitué d'un ressort en parallèle avec un élément de Maxwell, utilisé plus loin, dont l'expression est donnée par :

$$E^*(\omega) = \frac{E_0 + E_\infty i\omega\tau}{1 + i\omega\tau} \quad (2.4)$$

pour laquelle  $E_0$  représente le module à basse fréquence,  $E_\infty$  le module à haute fréquence et  $\tau$  le temps de relaxation. Une représentation de ces modèles est visible à la figure 2.5. Cependant ceux-ci sont limités car ils ne représentent pas toujours le comportement visqueux observé expérimentalement. Pour plus de détails sur ces modèles et sur leurs limites, le lecteur est invité à consulter [38, 108]. D'autres modèles plus complexes basés sur la combinaison de ressorts et d'amortisseurs existent, parmi lesquels

## 2.1. PRÉSENTATION DU SYSTÈME ÉTUDIÉ

---

les modèles de Maxwell généralisé [156], de GHM<sup>2</sup> [65, 106] et d'ADF<sup>3</sup> [95, 96].

L'inconvénient majeur des modèles basés exclusivement sur des assemblages ressorts-amortisseurs est que leur exactitude dépend directement du nombre d'éléments le constituant. Une solution pour améliorer les modèles est d'introduire un élément dissipatif appelé spring-pot dont la loi de comportement est :

$$\sigma = \tau^\alpha E D^\alpha(\varepsilon) \quad (2.5)$$

dans laquelle  $D^\alpha$  est un opérateur différentiel temporel dont l'ordre fractionnaire est défini par la valeur de  $\alpha$ , avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ . On remarque que pour  $\alpha = 0$ , on retrouve la loi élastique  $\sigma = E\varepsilon$ , et que pour  $\alpha = 1$ , on retrouve la loi visqueuse  $\sigma = \tau E \dot{\varepsilon}$  avec  $\tau = \frac{\eta}{E}$  [59].

Une présentation détaillée de l'ensemble des modèles cités est consultable dans [126].

**Modèle de Zener à dérivée fractionnaire** Le modèle viscoélastique retenu dans cette thèse est le modèle de Zener à dérivée fractionnaire, qui associe l'équation (2.4) à la loi de comportement à dérivée fractionnaire de l'équation (2.5) pour donner l'expression du module complexe suivante [121] :

$$E^*(\omega) = \frac{E_0 + E_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \quad (2.6)$$

La corrélation entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques issus de ce modèle montrent que ces derniers permettent de décrire correctement le comportement viscoélastique de matériaux élastomères [126]. De plus, il est particulièrement adapté pour traiter les problèmes dans le domaine fréquentiel, alors que la dérivée fractionnaire rend la tâche plus difficile dans le domaine temporel. Enfin, il ne contient que quatre paramètres ce qui le rend simple d'utilisation.

Les modules de stockage et de perte s'écrivent [58] :

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= \frac{E_0 + (E_0 + E_\infty)(\omega\tau)^\alpha \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + E_\infty(\omega\tau)^{2\alpha}}{1 + 2(\omega\tau)^\alpha \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + (\omega\tau)^{2\alpha}} \\ E''(\omega) &= \frac{(E_\infty - E_0)(\omega\tau)^\alpha \sin(\frac{\alpha\pi}{2})}{1 + 2(\omega\tau)^\alpha \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + (\omega\tau)^{2\alpha}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

---

2. GHM : Golla-Hughes-McTavish

3. ADF : Anelastic Displacement Fields

## 2.1. PRÉSENTATION DU SYSTÈME ÉTUDIÉ

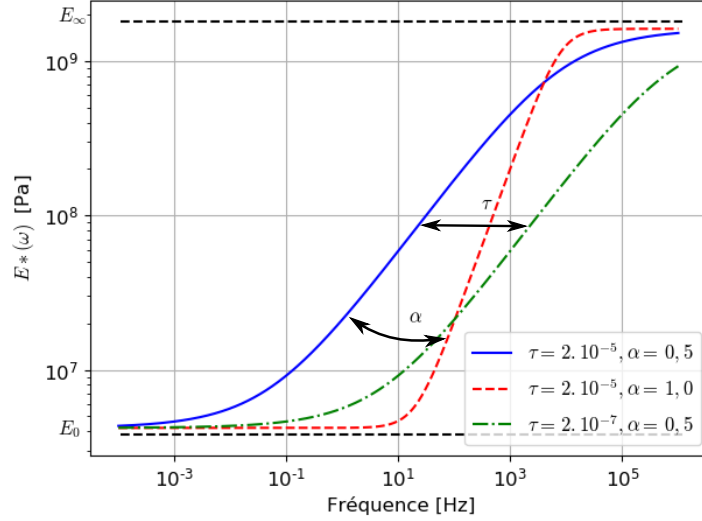


FIGURE 2.6 – Influence des paramètres de Zener sur le module complexe  $E^*(\omega)$

**Choix et influence des paramètres** Les expressions des quatre paramètres du modèle de Zener à dérivée fractionnaire sont définies dans [58, 151] et rappelées ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} E^*(\omega), \\ E_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} E^*(\omega), \\ \alpha = \frac{2}{\pi} \arcsin \left[ \eta_{\max}(E_\infty - E_0) \frac{2\sqrt{E_0 E_\infty} + (E_0 + E_\infty)\sqrt{1 + \eta_{\max}^2}}{\eta_{\max}^2(E_0 + E_\infty)^2 + (E_\infty - E_0)^2} \right], \\ \tau = \frac{1}{\omega_{\eta_{\max}}} \left( \frac{E_0}{E_\infty} \right)^{\frac{1}{2\alpha}}. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Le terme  $\omega_{\eta_{\max}}$  désigne la pulsation pour laquelle le facteur de perte est maximal et vaut  $\eta_{\max}$ . Leurs influences respectives sont illustrées aux figures 2.6 et 2.7. Les deux figures présentent en échelle log – log respectivement l'évolution du module complexe  $E^*(\omega)$  en fonction de la fréquence et l'évolution du facteur de perte  $\eta(\omega)$  en fonction de la fréquence. Sur la première figure, on peut voir que le module de stockage  $E_0$  représente l'asymptote basse, c'est-à-dire la raideur statique ( $\omega \rightarrow 0$ ). Le module de perte  $E_\infty$  correspond quant à lui à l'asymptote haute, c'est-à-dire à la raideur dynamique ( $\omega \rightarrow \infty$ ). Le paramètre  $\alpha$  contrôle la pente de la phase de transition : plus  $\alpha$  se rapproche de 1, plus la pente est raide. Le paramètre  $\tau$  a une influence sur la position fréquentielle de la phase de transition : la position augmente lorsque la valeur de  $\tau$  diminue. La correspondance avec la deuxième figure montre que  $\alpha$  modifie l'amortissement maximal  $\eta_{\max}$ . Plus il est élevé, plus  $\eta_{\max}$  est important et plus la largeur de la bande de fréquence sur laquelle un amortissement se produit est réduite. La

## 2.1. PRÉSENTATION DU SYSTÈME ÉTUDIÉ

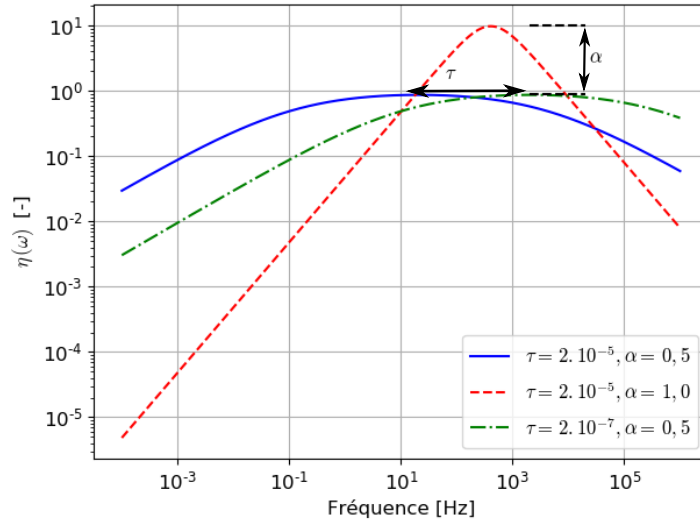


FIGURE 2.7 – Influence des paramètres de Zener sur le facteur de perte  $\eta(\omega)$

	Deltane 350	ISD112
$E_0$ (MPa)	4,20	0,242
$E_\infty$ (MPa)	$1,62 \cdot 10^3$	62,4
$\alpha$ (-)	0,59	0,587
$\tau$ ( $\mu$ s)	0,52	83,7
$\eta_{\max}$ (-)	1,13	1,09
$f_{\eta_{\max}}$ (Hz)	1968,3	16,8

TABLE 2.2 – Valeurs des paramètres de Zener pour le Deltane 350 et l'ISD112

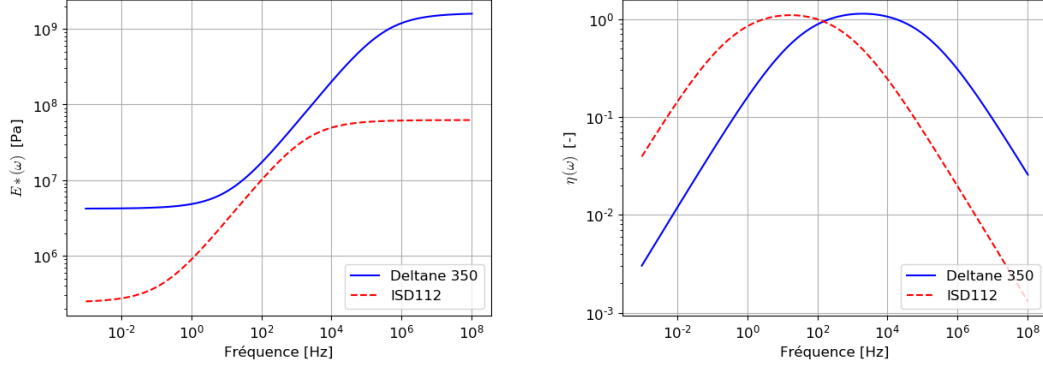
fréquence à laquelle l'amortissement est maximal est noté  $f_{\eta_{\max}}$ .

Dans la suite de la thèse, deux élastomères sont employés pour les différentes applications. Il s'agit du Deltane 350 et de l'ISD112. Le premier a été caractérisé à l'aide d'essais DMA<sup>4</sup> [126] et le deuxième provient de [151]. Les paramètres identifiés sont récapitulés dans le tableau 2.2 et les courbes résultantes des valeurs associées sont visibles aux figures 2.8a et 2.8b. Ces courbes permettent de constater deux choses :

- la raideur effective du Deltane 350 est toujours plus élevée que celle de l'ISD112,
- l'amortissement maximal est quasiment identique mais pas aux mêmes fréquences. L'ISD112 est adapté pour les fréquences inférieures à 100 Hz, tandis que le Deltane pour des fréquences supérieures à 100 Hz.

4. DMA : Dynamical Mechanical Analysis

## 2.2. FORMULATION ÉLÉMENTS FINIS DU PROBLÈME DE DYNAMIQUE



(a) Évolution du module complexe pour le Deltane 350 et l'ISD112 (b) Évolution du facteur de perte pour le Deltane 350 et l'ISD112

FIGURE 2.8 – Comparaison du Deltane 350 et de l'ISD112

## 2.2 Formulation éléments finis du problème de dynamique

### 2.2.1 Équations locales

Considérons un solide déformable  $\Omega$  dont on note la surface extérieure  $\partial\Omega$ . Ce solide subit un effort volumique harmonique d'amplitude  $\underline{f}$  ainsi qu'un effort surfacique harmonique connu  $\underline{F}^d$  sur le bord  $\partial_F\Omega$  avec  $\partial_F\Omega \subset \partial\Omega$ . Un déplacement harmonique connu d'amplitude  $\underline{u}^d$  est imposé sur le bord  $\partial_u\Omega$  avec  $\partial_u\Omega \subset \partial\Omega$ . Les bords  $\partial_F\Omega$  et  $\partial_u\Omega$  sont définis tels que :

$$\begin{cases} \partial_F\Omega \cup \partial_u\Omega = \partial\Omega \\ \partial_F\Omega \cap \partial_u\Omega = \emptyset \end{cases} \quad (2.9)$$

Résoudre un problème d'élasticité linéaire consiste à déterminer les champs de déplacements  $\underline{u}$  et de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  vérifiant les conditions aux limites, les équations d'équilibre et la relation de comportement. Le tenseur des contraintes s'écrit sous la forme générale :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ (sym) & \sigma_2 & \sigma_4 \\ (sym) & (sym) & \sigma_3 \end{pmatrix}_{\hat{b}} \quad \text{où : } \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{xx}, & \sigma_2 = \sigma_{yy}, & \sigma_3 = \sigma_{zz} \\ \sigma_4 = \sigma_{yz}, & \sigma_5 = \sigma_{xz}, & \sigma_6 = \sigma_{xy} \end{cases} \quad (2.10)$$

avec  $\hat{b} = (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  une base orthogonale, où  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont les contraintes normales dans les directions de la base  $\hat{b}$  et  $\sigma_4, \sigma_5$  et  $\sigma_6$  sont les contraintes de cisaillement dans les directions transverses.

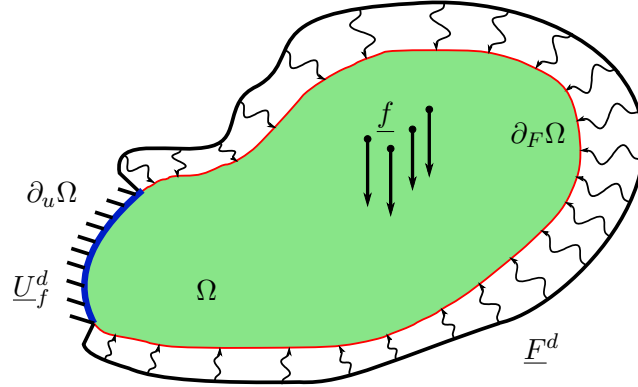


FIGURE 2.9 – Problème de référence

Le problème général d'élasticité sous forme fréquentielle s'écrit :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \underline{f} = -\rho\omega^2\underline{u} \quad \forall M \in \Omega \quad (2.11a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F}^d, \quad \forall M \in \partial_F \Omega \quad (2.11b)$$

$$\underline{u} = \underline{u}^d, \quad \forall M \in \partial_u \Omega \quad (2.11c)$$

où  $\rho$  représente la masse volumique du matériau et  $\omega$  la pulsation harmonique. La relation de comportement employée est celle de l'équation (2.1) qui prend en compte l'amortissement viscoélastique modélisé par le modèle de Zener à dérivée fractionnaire défini à l'équation (2.6). La relation de comportement est rappelée ici :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbb{C}^*(\omega)\boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (2.12)$$

$\mathbb{C}$  est un tenseur d'ordre 4 appelé tenseur d'élasticité et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est le tenseur linéarisé des déformations, représentant la partie symétrique du gradient du déplacement :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{grad}(\underline{u}) + \mathbf{grad}^T(\underline{u}) \right) \quad (2.13)$$

Le tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}$  s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{\varepsilon_6}{2} & \frac{\varepsilon_5}{2} \\ (sym) & \varepsilon_2 & \frac{\varepsilon_4}{2} \\ (sym) & (sym) & \varepsilon_3 \end{pmatrix}_{\hat{b}} \quad \text{où : } \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_{xx}, & \varepsilon_2 = \varepsilon_{yy}, & \varepsilon_3 = \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{yz}, & \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{xz}, & \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{xy} \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  sont les allongements unitaires dans les directions de la base  $\hat{b}$  et  $\varepsilon_4$ ,  $\varepsilon_5$  et  $\varepsilon_6$  sont les distorsions angulaires. La réécriture des termes de contraintes et de déformations des équations (2.10)



## 2.2. FORMULATION ÉLÉMENTS FINIS DU PROBLÈME DE DYNAMIQUE

et (2.14) sous forme de vecteurs colonnes à l'aide de la notation de Voigt donne :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

La relation de comportement utilisée dans ce travail est la loi de Hooke pour les matériaux isotropes dont l'expression en notations de Voigt est :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.

### 2.2.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle consiste à trouver le champ de déplacement  $\underline{u}$ , solution du problème, appartenant à l'ensemble des champs cinématiquement admissibles  $\mathcal{U}$  :

$$\mathcal{U} = \{ \underline{u} = \underline{u}^d \text{ sur } \partial_u \Omega \} \quad (2.17)$$

Elle fait intervenir un champ de vitesse virtuelle  $\underline{v}$  appartenant à l'ensemble des champs cinématiquement admissibles  $\mathcal{U}_0$  :

$$\mathcal{U}_0 = \{ \underline{v} = 0 \text{ sur } \partial_u \Omega \} \quad (2.18)$$

La formulation variationnelle du problème s'obtient en multipliant l'équation (2.11a) par  $\underline{v}$  puis d'intégrer le tout sur  $\Omega$  [75]. En intégrant par parties puis en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, la prise en compte des conditions sur les bords  $\partial_F \Omega$  et  $\partial_u \Omega$  donne la formulation suivante : Trouver le champ de déplacement cinématiquement admissible  $\underline{u}$  tel que  $\forall \underline{v} \in \mathcal{U}_0$  on ait

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{v})^T \mathbf{C}^*(\omega) \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \, d\Omega - \rho \omega^2 \int_{\Omega} \underline{v}^T \cdot \underline{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{v}^T \cdot \underline{f} \, d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} \underline{v}^T \cdot \underline{F}^d \, d\Omega \quad (2.19)$$

L'énergie de déformation du champ de déplacement  $\underline{u}$  est notée  $\mathcal{E}_d(\underline{u})$  dans la suite :

$$\mathcal{E}_d(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}^T(\underline{u}) \mathbf{C}(\omega) \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \, d\Omega \quad (2.20)$$

### 2.2.3 Discrétisation éléments finis

Dans l'écriture de l'équation (2.19) la solution en déplacement  $\underline{u}$  est la solution exacte en tout point  $M \in \Omega$  et appartient à un espace  $\mathcal{V}$  de dimension infinie. Cette solution n'est accessible que sur des cas très simples, on cherche donc à trouver une solution approchée  $\underline{u}^h$  en tout point  $P \in \Omega^h$ , appartenant à un espace  $\mathcal{V}^h$  de dimension finie, avec  $\Omega^h$  le domaine  $\Omega$  discrétisé par  $n_{\text{elem}}$  éléments de taille  $h$ , où  $h$  est défini par la distance entre les deux nœuds les plus éloignés d'un même élément. La solution approchée  $\underline{u}^h$  est une combinaison linéaire des fonctions de forme  $\varphi_i$  formant la base de  $\mathcal{V}^h$ , qui s'écrit comme un produit de la matrice  $\Phi$  des fonctions de formes et du vecteur des inconnues nodales en déplacement  $\underline{U}$  :

$$\underline{u}^h = \Phi \underline{U} \quad (2.21)$$

où la matrice  $\Phi$  vaut dans le cas 3D et pour un problème éléments finis à  $n$  nœuds :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \cdots & \varphi_n & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \cdots & 0 & \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & \cdots & 0 & 0 & \varphi_n \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

et  $\underline{U} = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \cdots \ u_n \ v_n \ w_n]^T$ . On note que les dimensions de  $\Phi$  et  $\underline{U}$  dans le cas 3D sont respectivement  $3 \times 3n$  et  $3n$ . Enfin, l'opérateur gradient discrétisé  $\mathcal{B} = \mathcal{D}\Phi^5$  permet d'exprimer l'opérateur des déformations discrétisés  $\varepsilon(\underline{u}^h)$  en fonction des termes de l'équation (2.21) :

$$\varepsilon(\underline{u}^h) = \mathcal{B}\underline{U} \quad (2.23)$$

Les relations (2.21) et (2.23) sont utilisées pour discrétiser la forme variationnelle et obtenir la solution  $\underline{u}^h \in \mathcal{U}^h$ . Cela entraîne que l'expression de l'équation (2.19) devient : Trouver  $\underline{U}$  cinématiquement admissible tel que  $\forall \underline{V} \in U_0^h$  on ait

$$\underline{V}^T \int_{\Omega} \mathcal{B}^T \mathbb{C}^*(\omega) \mathcal{B} \, d\Omega \underline{U} - \rho \omega^2 \underline{V}^T \int_{\Omega} \Phi^T \Phi \, d\Omega \underline{U} = \underline{V}^T \int_{\partial_F \Omega} \Phi^T \underline{F}^d \, dS + \underline{V}^T \int_{\Omega} \Phi^T \underline{f} \, d\Omega \quad (2.24)$$

dans laquelle on identifie les termes variationnels correspondants à la matrice de raideur  $\mathbf{K}$ , à la matrice de masse  $\mathbf{M}$  et au vecteur des forces nodales  $\underline{F}$  [168]. :

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathcal{B}^T \mathbb{C}^*(\omega) \mathcal{B} \, d\Omega \quad (2.25a)$$

---


$$5. \mathcal{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \rho \int_{\Omega} \Phi^T \Phi d\Omega \quad (2.25b)$$

et

$$\underline{F} = \int_{\partial_F \Omega} \Phi^T \underline{F}^d dS + \int_{\Omega} \Phi^T \underline{f} d\Omega \quad (2.26)$$

La matrice de raideur peut être décomposée en une partie purement élastique  $\mathbf{K}_E$  et une partie viscoélastique dépendante de la fréquence  $\mathbf{K}_V^*(\omega)$  :

$$\mathbf{K}^*(\omega) = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_V^*(\omega) \quad (2.27)$$

Finalement, le problème de dynamique en éléments finis avec prise en compte des caractéristiques viscoélastiques s'écrit sous forme matricielle :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{E\ell\ell} & \mathbf{K}_{E\ell f} \\ \mathbf{K}_{E\ell f}^T & \mathbf{K}_{E f f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{V\ell\ell}^*(\omega) & \mathbf{K}_{V\ell f}^*(\omega) \\ \mathbf{K}_{V\ell f}^{*T}(\omega) & \mathbf{K}_{V f f}^*(\omega) \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\ell\ell} & \mathbf{M}_{\ell f} \\ \mathbf{M}_{\ell f}^T & \mathbf{M}_{f f} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{U}_{\ell} \\ \underline{U}_{f}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_{\ell}^d \\ \underline{F}_{f} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

où  $\bullet_{\ell}$  fait référence aux termes relatifs aux inconnues en déplacement (déplacement libre) et  $\bullet_f$  fait référence aux termes relatifs aux conditions aux limites en déplacement (déplacement fixé). Les inconnues du problème sont les déplacements  $\underline{U}_{\ell}$  et les efforts de réaction  $\underline{F}_f$ .

### 2.2.4 Cas particulier de la statique

Le cas particulier de la statique ( $\omega = 0$ ) engendre la formulation éléments finis en statique :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\ell\ell} & \mathbf{K}_{\ell f} \\ \mathbf{K}_{\ell f}^T & \mathbf{K}_{f f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{\ell} \\ \underline{U}_{f}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_{\ell}^d \\ \underline{F}_{f} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

## 2.3 Modélisation et discrétisation éléments finis du système

### 2.3.1 Notations des différents ensembles de nœuds

Afin d'expliquer la démarche de modélisation utilisée, le problème est simplifié dans ce chapitre : on considère le système composé du support, d'une seule liaison et d'un seul satellite. Afin de coupler ces différents sous-systèmes entre eux, plusieurs hypothèses sont faites au niveau des interfaces et les notations employées dans la suite sont précisées sur la vue simplifiée à la figure 2.10.

Les nœuds du maillage du support sont classés en trois ensembles<sup>6</sup> :

—  $\mathbf{D}_B$  contient les nœuds de la surface inférieure dont le déplacement est imposé,

---

6. On utilise "D" pour désigner le support (Dispenser)

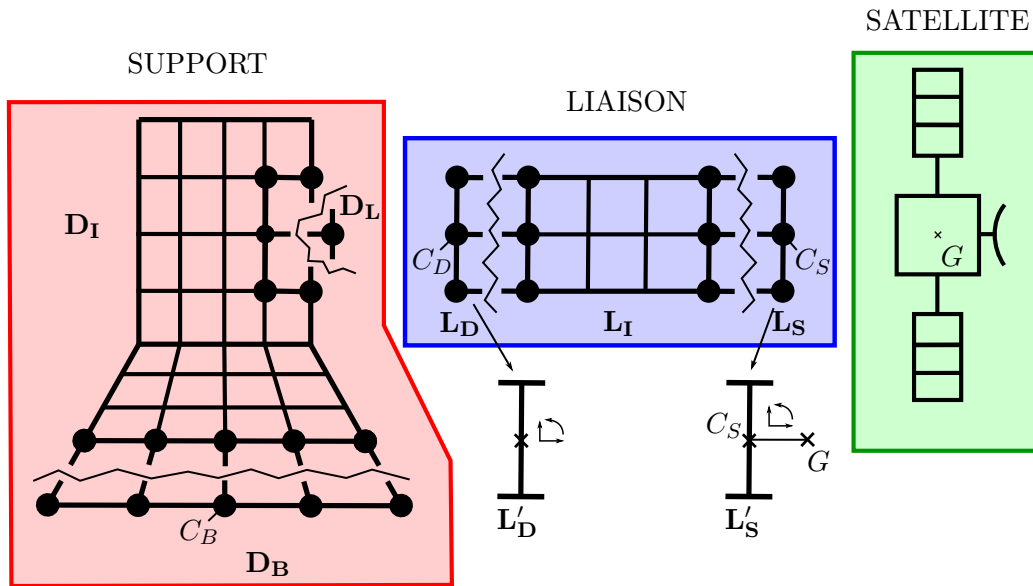


FIGURE 2.10 – Schéma des différents ensembles de nœuds du système global discrétisé

- $D_L$  correspond au nœud connecté à la liaison,
- $D_I$  correspond au reste des nœuds internes du support de charge utile.

La liaison est constituée de trois groupes de nœuds. Elle est connectée d'un côté au support et de l'autre au satellite :

- $L_D$  correspond aux nœuds de la surface en contact avec le support,
- $L_S$  correspond aux nœuds de la surface de la liaison reliée au satellite,
- $L_I$  correspond au reste des nœuds internes de la liaison.

Le satellite est représenté par un solide rigide de centre de masse  $G$  et on fait l'hypothèse que le centre de masse et le centre de gravité sont confondus.

### 2.3.2 Modélisation du mouvement de corps rigide d'un ensemble de nœuds

Lorsqu'on modélise une interface entre un matériau très rigide (typiquement du métal) et un autre matériau plus souple (typiquement un élastomère), ou bien lorsqu'on souhaite modéliser une liaison de type encastrement, il est possible de considérer que les degrés de liberté concernés bougent ensemble dans un mouvement global de corps rigide ayant six degrés de liberté (trois translations et trois rotations). En faisant l'hypothèse des petits déplacements, le champ de déplacement de ce corps

### 2.3. MODÉLISATION ET DISCRÉTISATION ÉLÉMENTS FINIS DU SYSTÈME

rigide s'écrit sous la forme :

$$\vec{u}_M = \vec{u}_C + \overrightarrow{MC} \wedge \vec{\Omega} \quad (2.30)$$

où  $\vec{u}_M$  est le déplacement du nœud  $M$ ,  $C$  est le point de référence de la face considérée,  $\vec{u}_C$  est le déplacement du point  $C$  (trois translations) et  $\vec{\Omega}$  correspond à la rotation de l'ensemble rigidifié (trois rotations). En introduisant la matrice de transformation  $\mathbf{T}_M$  et le vecteur des degrés de liberté du point  $C$  dans un système de coordonnées orthonormales  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , cette relation peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} u_M \\ v_M \\ w_M \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (z_M - z_C) & (y_C - y_M) \\ 0 & 1 & 0 & (z_C - z_M) & 0 & (x_M - x_C) \\ 0 & 0 & 1 & (y_M - y_C) & (x_C - x_M) & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_M} \begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

où  $(x_M, y_M, z_M)$  et  $(x_C, y_C, z_C)$  sont les coordonnées des points  $M$  et  $C$ ,  $(u_M, v_M, w_M)$  et  $(u_C, v_C, w_C)$  leurs déplacements, et  $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  sont les composantes du vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  [108]. Par conséquent, tous les degrés de liberté des nœuds rigidifiés sont éliminés du modèle éléments finis global et sont remplacés par les six degrés de liberté décrivant les mouvements de corps rigide. Les termes “•” contenant ces degrés de liberté (ddls) sont notés avec une barre “•̄” dans la suite du chapitre. On peut remarquer que ces relations ne sont valables que dans le cas des petits déplacements, ce qui est l'hypothèse faite dans cette thèse.

#### 2.3.3 Matrices de raideur et de masse du support de charge utile

Les nœuds de l'ensemble  $\mathbf{D}_B$  sont liés entre eux comme un corps rigide afin de pouvoir appliquer un déplacement imposé sur la surface inférieure. On note  $\overline{U}_{\mathbf{D}_B}$  le vecteur des degrés de liberté en déplacement qui contient les 6 ddls de corps rigide. On note que la surface a pour centre le point  $C_B$ .

L'interface avec la liaison se fait via un nœud DKT dont les 6 ddls sont stockés dans  $\underline{U}_{\mathbf{D}_L}$ . Les ddls restants sont notés  $\underline{U}_{\mathbf{D}_I}$ , qui est de taille  $n_{\mathbf{D}}$ .

Finalement, le vecteur des degrés de liberté totaux du support de charge utile est, en considérant

### 2.3. MODÉLISATION ET DISCRÉTISATION ÉLÉMENTS FINIS DU SYSTÈME

les nœuds  $M \in \mathbf{D}_B$  :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_{D_I} \\ U_{D_L} \\ U_{D_B} \end{bmatrix}}_{\underline{U}_D} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1}_{D_I D_I} & \mathbb{0}_{D_I D_L} & & & & & \\ \mathbb{0}_{D_L D_I} & \mathbb{1}_{D_L D_L} & & & & & \\ & & \mathbb{0}_{D_I D_B} & & & & \\ & & \mathbb{0}_{D_L D_B} & & & & \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & z_M - z_{C_B} & y_{C_B} - y_M \\ \mathbb{0}_{D_B D_I} & \mathbb{0}_{D_B D_L} & 0 & 1 & 0 & z_{C_B} - z_M & 0 & x_M - x_{C_B} \\ & & 0 & 0 & 1 & y_M - y_{C_B} & x_{C_B} - x_M & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{D\bar{D}}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{D_I} \\ U_{D_L} \\ U_{D_B} \end{bmatrix}}_{\underline{U}_D} \quad (2.32)$$

où  $\mathbb{1}_{\bullet\bullet}$  est la matrice identité et  $\mathbb{0}_{\blacksquare\blacksquare}$  est la matrice nulle.  $\bullet$ ,  $\blacksquare$  et  $\square$  définissent les dimensions de l'objet correspondant.

Les matrices globales de raideur et de masse modifiées du support dépendent de la matrice  $\mathbf{T}_{D\bar{D}}$  et des matrices globales de raideur et de masse du support  $\mathbf{K}_{DD}$  et  $\mathbf{M}_{DD}$  :

$$\bar{\mathbf{K}}_{DD} = \mathbf{T}_{D\bar{D}}^T \mathbf{K}_{DD} \mathbf{T}_{D\bar{D}} \quad (2.33a)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{DD} = \mathbf{T}_{D\bar{D}}^T \mathbf{M}_{DD} \mathbf{T}_{D\bar{D}} \quad (2.33b)$$

#### 2.3.4 Modélisation d'un satellite

**Mouvement de corps rigide du satellite** Le mouvement du satellite se réduit aux 6 degrés de corps rigide de son centre d'inertie  $\underline{U}_S$ . Afin de les connecter avec la liaison, le vecteur des déplacements de corps rigide exprimé au centre de gravité est transporté au point  $C_s$ , centre de la face de la liaison en contact avec le satellite :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_S^x(C_s) \\ U_S^y(C_s) \\ U_S^z(C_s) \\ \Omega_S^x \\ \Omega_S^y \\ \Omega_S^z \end{bmatrix}}_{\underline{U}_S(C_s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1}_{33} & 0 & z_{C_s} - z_G & y_G - y_{C_s} \\ z_G - z_{C_s} & 0 & x_{C_s} - x_G & \\ y_{C_s} - y_G & x_G - x_{C_s} & 0 & \\ \mathbb{0}_{33} & & & \mathbb{1}_{33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{C_s S}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_S^x(G) \\ U_S^y(G) \\ U_S^z(G) \\ \Omega_S^x \\ \Omega_S^y \\ \Omega_S^z \end{bmatrix}}_{\underline{U}_S} \quad (2.34)$$

**Caractéristiques dynamiques du satellite** La matrice d'inertie du satellite est transportée dans le repère global à l'aide d'une matrice de passage  $\mathbf{P}_{\mathcal{R}_S \rightarrow \mathcal{R}_g}$  :

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{G/\mathcal{R}_g} = \mathbf{P}_{\mathcal{R}_S \rightarrow \mathcal{R}_g}^T \bar{\bar{\mathbf{I}}}_{G/\mathcal{R}_S} \mathbf{P}_{\mathcal{R}_S \rightarrow \mathcal{R}_g} \quad (2.35)$$

## 2.3. MODÉLISATION ET DISCRÉTISATION ÉLÉMENTS FINIS DU SYSTÈME

Puis on construit la matrice de masse de corps rigide exprimée dans le repère global :

$$\mathbf{M}_{\text{sat}} = \left[ \begin{array}{ccc|c} M_{\text{sat}} & 0 & 0 & \mathbb{0}_{33} \\ 0 & M_{\text{sat}} & 0 & \\ 0 & 0 & M_{\text{sat}} & \\ \hline & \mathbb{0}_{33} & & \overline{\mathbf{I}}_{G_i/\mathcal{R}_g} \end{array} \right] \quad (2.36)$$

Cette matrice est ensuite utilisée dans la construction de la matrice de masse globale à l'équation (2.42b).

### 2.3.5 Matrices de raideur et masse de liaison

L'implémentation de la liaison est réalisée en deux étapes. Dans un premier temps, les interfaces  $\mathbf{L}_D$  (avec le support de charge utile) et  $\mathbf{L}_S$  (avec le satellite) sont rigidifiées. Puis, elles sont reliées au support et au satellite dont elles font la jointure.

**Rigidification des interfaces  $\mathbf{L}_D$  et  $\mathbf{L}_S$**  La méthodologie de rigidification des interfaces de la liaison avec le support de charge utile et le satellite est la même que dans §2.3.3, et on exprime les degrés de liberté en déplacement de la liaison  $\underline{U}_L$  en fonction des degrés de libertés rigidifiés  $\overline{U}_L$  :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_{L_I} \\ U_{L_D} \\ U_{L_S} \end{bmatrix}}_{\underline{U}_L} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1}_{L_I L_I} & \mathbb{0}_{L_I L_D} & \mathbb{0}_{L_I L_S} \\ \mathbb{0}_{L_D L_I} & \mathbb{0}_{L_D L_D} & \mathbb{0}_{L_D L_S} \\ \mathbb{0}_{L_S L_I} & \mathbb{0}_{L_S L_D} & \mathbb{0}_{L_S L_S} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{L\overline{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & z_M - z_{C_D} & y_{C_D} - y_M \\ 0 & 1 & 0 & z_{C_D} - z_M & 0 & x_M - x_{C_D} \\ 0 & 0 & 1 & y_M - y_{C_D} & x_{C_D} - x_M & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & z_P - z_{C_s} & y_{C_s} - y_P \\ 0 & 1 & 0 & z_{C_s} - z_P & 0 & x_P - x_{C_s} \\ 0 & 0 & 1 & y_P - y_{C_s} & x_{C_s} - x_P & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\overline{U}_L} \quad (2.37)$$

où  $M$  est un point de la surface  $\mathbf{L}_D$  et  $P$  est un point de  $\mathbf{L}_S$ .

**Couplages liaison-support et liaison-satellite** Le couplage au niveau de l'interface  $\mathbf{L}_D$  est réalisé directement en reliant les six degrés de liberté du nœud DKT appartenant au support aux six degrés de liberté du centre de la face rigidifiée  $\overline{\mathbf{L}}_D$  à l'aide de la relation suivante :

$$U_{D_L} = \overline{U}_{L_D} \quad (2.38)$$

### 2.3. MODÉLISATION ET DISCRÉTISATION ÉLÉMENTS FINIS DU SYSTÈME

Le couplage au niveau de l'interface  $\mathbf{L}_S$  consiste à relier le déplacement de corps rigide du satellite au centre de cette interface, avec la face rigidifiée  $\bar{\mathbf{L}}_S$  :

$$\underline{U}_{S_L} = \bar{\underline{U}}_{L_S} \quad (2.39)$$

Finalement, on peut exprimer les degrés de liberté en déplacement de la liaison rigidifiée, dans le système global :

$$\bar{\underline{U}}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{L_I L_I} & \mathbf{0}_{L_I D_L} & \mathbf{0}_{L_I S_L} \\ \mathbf{0}_{D_L L_I} & \mathbf{1}_{D_L D_L} & \mathbf{0}_{D_L S_L} \\ \mathbf{0}_{S_L L_I} & \mathbf{0}_{S_L D_L} & \mathbf{T}_{C_S S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{L_I} \\ \underline{U}_{D_L} \\ \underline{U}_{S_L} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Les matrices globales de raideur et de masse de la liaison rigidifiée s'obtiennent grâce aux relations suivantes :

$$\bar{\mathbf{K}}_{L_L}(\omega) = \mathbf{T}_{L\bar{L}}^T \mathbf{K}_{L_L}(\omega) \mathbf{T}_{L\bar{L}} \quad (2.41a)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{L_L} = \mathbf{T}_{L\bar{L}}^T \mathbf{M}_{L_L} \mathbf{T}_{L\bar{L}} \quad (2.41b)$$

où  $\mathbf{K}_{L_L}(\omega)$  et  $\mathbf{M}_{L_L}$  sont les matrices de raideur et masse de la liaison. On note que la matrice de raideur dépend de la fréquence dû à la présence de matériau viscoélastique.

#### 2.3.6 Assemblage du système global

Les matrices globales de raideur et de masse sont formées à partir des équations (2.33a), (2.33b), (2.36), (2.41a) et (2.41b) qui permettent d'assembler les trois sous-systèmes :

$$\bar{\mathbf{K}}_g(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{D_I D_I} & \bar{\mathbf{K}}_{D_I D_L} & \bar{\mathbf{K}}_{D_I D_B} & \mathbf{0}_{D_I L_I} & \mathbf{0}_{D_I L_S} \\ \bar{\mathbf{K}}_{D_L D_I} & \bar{\mathbf{K}}_{D_L D_L} + \bar{\mathbf{K}}_{L_D L_D}(\omega) & \mathbf{0}_{D_L D_B} & \mathbf{K}_{L_D L_I}(\omega) & \mathbf{0}_{D_L L_S} \\ \bar{\mathbf{K}}_{D_B D_I} & \mathbf{0}_{D_B D_L} & \bar{\mathbf{K}}_{D_B D_B} & \mathbf{0}_{D_B L_I} & \mathbf{0}_{D_B L_S} \\ \mathbf{0}_{L_I D_I} & \bar{\mathbf{K}}_{L_I L_D}(\omega) & \mathbf{0}_{L_I D_B} & \mathbf{K}_{L_I L_I}(\omega) & \bar{\mathbf{K}}_{L_I L_S}(\omega) \\ \mathbf{0}_{L_S L_I} & \mathbf{0}_{L_S D_L} & \mathbf{0}_{L_S D_B} & \bar{\mathbf{K}}_{L_S L_I}(\omega) & \bar{\mathbf{K}}_{L_S L_S} \end{bmatrix} \quad (2.42a)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{D_I D_I} & \bar{\mathbf{M}}_{D_I D_L} & \bar{\mathbf{M}}_{D_I D_B} & \mathbf{0}_{D_I L_I} & \mathbf{0}_{D_I L_S} \\ \bar{\mathbf{M}}_{D_L D_I} & \bar{\mathbf{M}}_{D_L D_L} + \bar{\mathbf{M}}_{L_D L_D} & \mathbf{0}_{D_L D_B} & \mathbf{M}_{L_D L_I} & \mathbf{0}_{D_L L_S} \\ \bar{\mathbf{M}}_{D_B D_I} & \mathbf{0}_{D_B D_L} & \bar{\mathbf{M}}_{D_B D_B} & \mathbf{0}_{D_B L_I} & \mathbf{0}_{D_B L_S} \\ \mathbf{0}_{L_I D_I} & \bar{\mathbf{M}}_{L_I L_D} & \mathbf{0}_{L_I D_B} & \mathbf{M}_{L_I L_I} & \bar{\mathbf{M}}_{L_I L_S} \\ \mathbf{0}_{L_S L_I} & \mathbf{0}_{L_S D_L} & \mathbf{0}_{L_S D_B} & \bar{\mathbf{M}}_{L_S L_I} & \bar{\mathbf{M}}_{L_S L_S} + \mathbf{M}_{\text{sat}} \end{bmatrix} \quad (2.42b)$$

Le système global à résoudre s'écrit donc :

$$\left[ \bar{\mathbf{K}}_g(\omega) - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_g \right] \begin{bmatrix} \underline{U}_{D_I} \\ \underline{U}_{D_L} \\ \underline{U}_{D_B} \\ \underline{U}_{L_I} \\ \underline{U}_{S_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{F}_{D_B} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$



où  $\overline{U}_{\text{DB}}$  est le déplacement imposé à la base du support et  $\overline{F}_{\text{DB}}$  correspond à l'effort de réaction du support.

### 2.4 Résultats et fonctions de réponses en fréquence

Le premier résultat présenté concerne l'analyse modale du support de charge utile. Ensuite, des résultats obtenus en modifiant les liaisons dans la structure globale sont détaillés. Les déformées modales présentées dans ces résultats (figures 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.16) respectent toutes le même code couleur : les zones bleues représentent les zones où le déplacement est le plus faible et les zones rouges les zones où le déplacement est le plus grand.

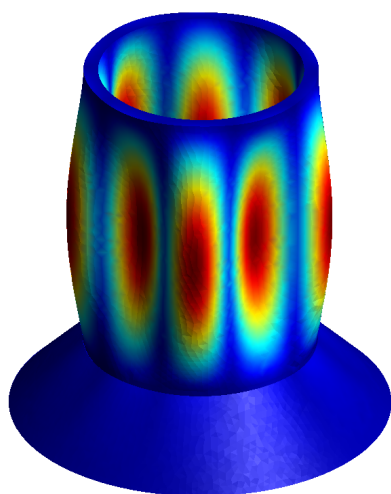
#### 2.4.1 Caractéristiques dynamiques du support de charge utile

La dynamique du support de charge utile est étudiée via une analyse modale en considérant la face inférieure encastree, afin de visualiser les premiers modes structuraux. D'une part, en raison de la forme axisymétrique du support, les modes obtenus sont des modes d'ovalisation que l'on peut décomposer en une harmonique circonférentielle notée  $m$  et une harmonique longitudinale notée  $n$ . D'autre part, la symétrie de révolution de la géométrie implique que tous les modes d'ovalisation sont doubles car le déplacement radial d'une déformée modale peut être caractérisé par une fonction de  $\theta$  du type :

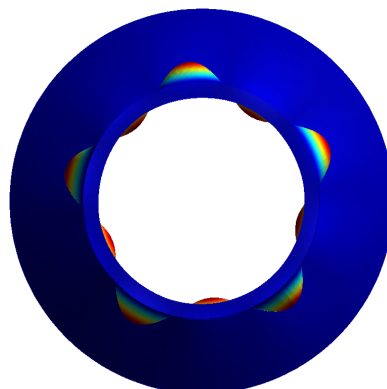
$$u_r(\theta) = \alpha_1 u_1(\theta) + \alpha_2 u_2(\theta) \quad (2.44)$$

où  $\theta$  est la position dans la direction circonférentielle,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des coefficients réels,  $u_1 = \cos(m\theta)$  et  $u_2 = \sin(m\theta) = \cos(m(\theta - \frac{\pi}{2m}))$ . Ainsi pour une même harmonique, chaque mode et son jumeau possèdent un décalage spatial de  $\frac{\pi}{2m}$ , comme l'illustre la figure 2.14 où on observe un décalage de  $\pi/4$  pour l'harmonique  $m = 2$ .

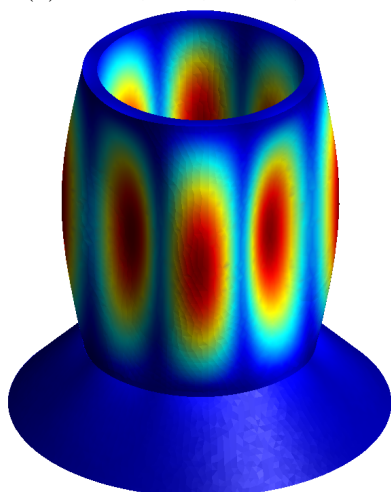
Les figures 2.11, 2.12 et 2.13 présentent une vue globale ainsi qu'une vue de dessus des déformées de certains modes d'ovalisation (modes 1, 2, 3, 11, 15, 24, 25 et 29), dont les fréquences propres varient de 87 à 328 Hz. Les premiers sont les harmoniques circonférentielles du cylindre. Puis, les harmoniques supérieures du cylindre dans le sens longitudinal apparaissent à partir de 202 Hz. Enfin, le premier mode de la partie conique apparait vers 317 Hz. Le nombre de lobes circonférentiels dépend de la présence des raidisseurs et de la position des nœuds des harmoniques, ce qui implique qu'ils ne suivent



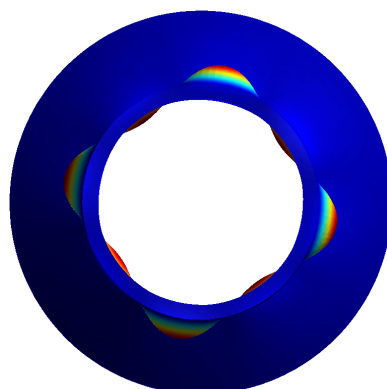
(a)  $f = 87,4 \text{ Hz}$ ,  $m = 5$ ,  $n = 1$



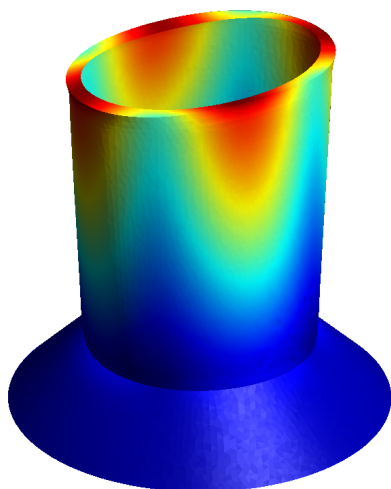
(b)  $f = 87,4 \text{ Hz}$ ,  $m = 5$ ,  $n = 1$



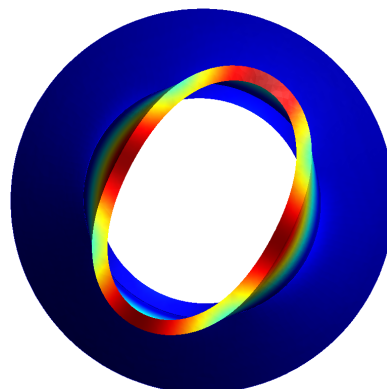
(c)  $f = 95,2 \text{ Hz}$ ,  $m = 4$ ,  $n = 1$



(d)  $f = 95,2 \text{ Hz}$ ,  $m = 4$ ,  $n = 1$

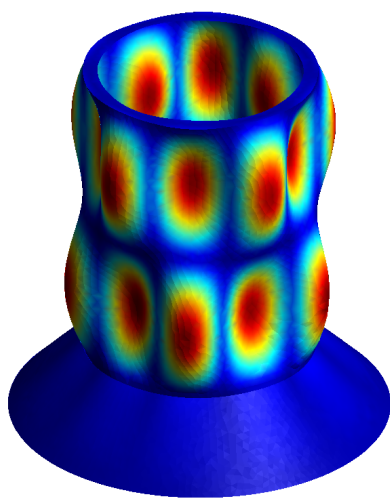


(e)  $f = 98,0 \text{ Hz}$ ,  $m = 2$ ,  $n = 1$

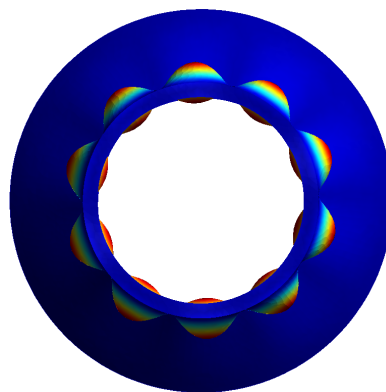


(f)  $f = 98,0 \text{ Hz}$ ,  $m = 2$ ,  $n = 1$

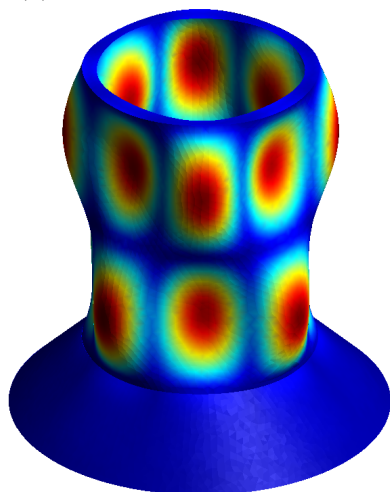
FIGURE 2.11 – Déformées modales des modes 1, 2 et 3



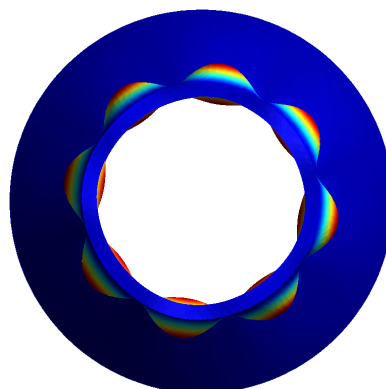
(a)  $f = 202,2 \text{ Hz}$ ,  $m = 5$ ,  $n = 2$



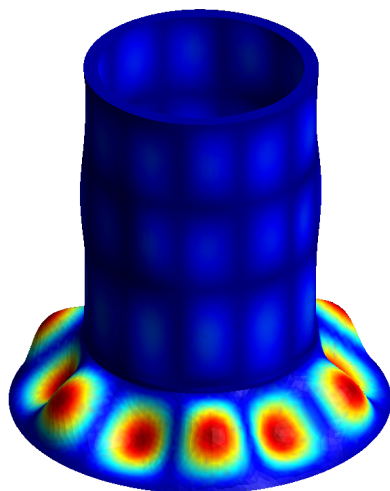
(b)  $f = 202,2 \text{ Hz}$ ,  $m = 5$ ,  $n = 2$



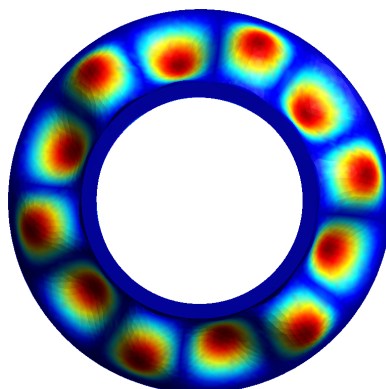
(c)  $f = 260,5 \text{ Hz}$ ,  $m = 4$ ,  $n = 2$



(d)  $f = 260,5 \text{ Hz}$ ,  $m = 4$ ,  $n = 2$

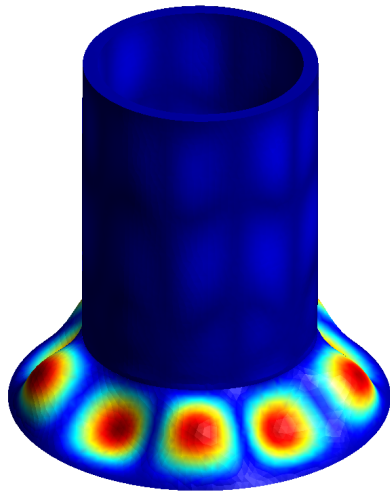


(e)  $f = 316,9 \text{ Hz}$ ,  $m = 6$ ,  $n = 1$

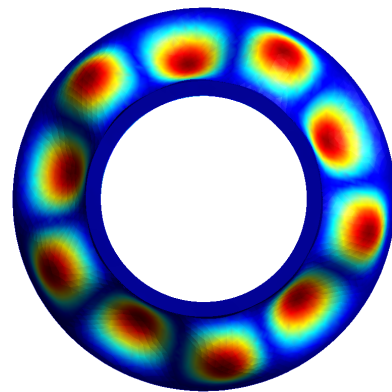


(f)  $f = 316,9 \text{ Hz}$ ,  $m = 6$ ,  $n = 1$

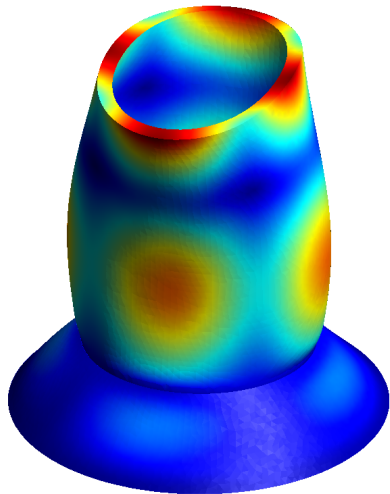
FIGURE 2.12 – Déformées modales des modes 11, 15 et 24



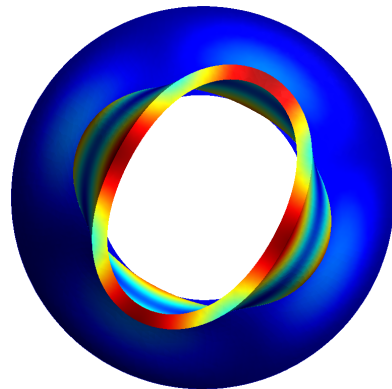
(a)  $f = 322,3 \text{ Hz}$ ,  $m = 5$ ,  $n = 1$



(b)  $f = 322,3 \text{ Hz}$ ,  $m = 5$ ,  $n = 1$



(c)  $f = 328,2 \text{ Hz}$ ,  $m = 2$ ,  $n = 2$



(d)  $f = 328,2 \text{ Hz}$ ,  $m = 2$ ,  $n = 2$

FIGURE 2.13 – Déformées modales des modes 25 et 29

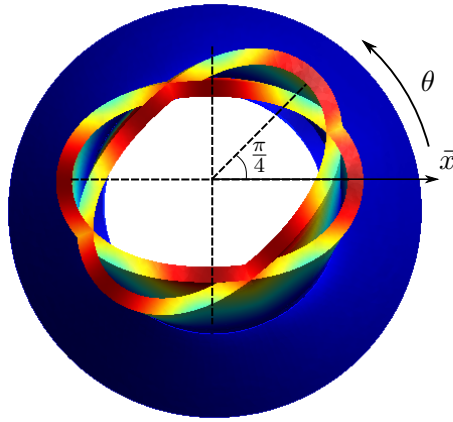


FIGURE 2.14 –  $f = 98,0$  Hz,  $m = 2$ ,  $n = 1$ , superposition des modes jumeaux (décalage de  $\frac{\pi}{4}$ ) en vue de dessus

pas une évolution croissante de  $m$ .

### 2.4.2 Analyse dynamique du système global avec liaisons rigides

Dans cette section, le système complet (support + satellites + liaisons) est considéré. Les liaisons sont considérées comme étant parfaitement rigides. Pour cela, les nœuds représentant les deux extrémités d'une liaison sont confondus et le déplacement subi par le nœud se trouvant à l'interface liaison / satellite est projeté au centre d'inertie à l'aide de la relation (2.30). La FRF de la norme du déplacement du centre d'inertie de chaque satellite est représentée à la figure 2.15. La norme du déplacement est adimensionnée par la norme du déplacement imposée. On constate que les FRF des satellites  $\mathbf{S}_2$  et  $\mathbf{S}_4$  sont strictement identiques, contrairement à celles des satellites  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_3$  qui possèdent les mêmes fréquences propres mais un comportement différent dans les zones d'anti-résonances. Cela provient du fait que la partie transverse du déplacement imposé (figure 2.3) est dans le plan vertical passant par  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_3$ . Par conséquent, lorsque le satellite  $\mathbf{S}_1$  travaille dans une direction, le  $\mathbf{S}_3$  travaille dans le sens opposé. Les satellites  $\mathbf{S}_2$  et  $\mathbf{S}_4$  sont quant à eux sollicités de manière identique en raison de leur symétrie par rapport au plan vertical passant par  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_3$ .

Les déformées modales associées aux quatre premiers modes propres sont montrées à la figure 2.16 et on constate que les premières fréquences propres sont plus faibles que celles obtenues lors de l'analyse modale du support seul. De plus, on voit que les modes 1 et 2 sont plutôt des modes de satellites, tandis que les premiers modes d'ovalisation du support apparaissent après 40 Hz. Cet assouplissement

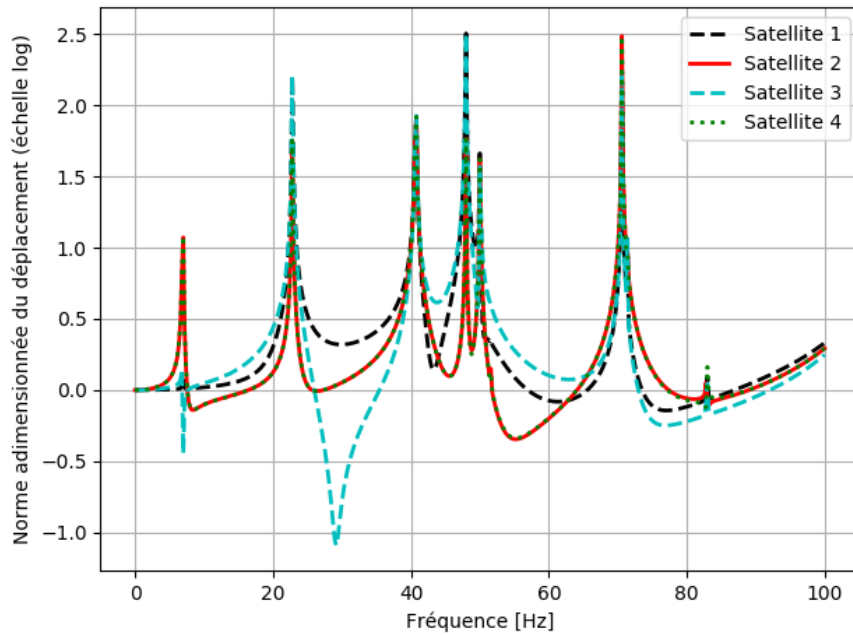


FIGURE 2.15 – FRF de la norme du déplacement du centre de gravité des satellites pour les liaisons parfaitement rigides

peut s’expliquer par l’effet de masse ajoutée dans le système, provenant des satellites.

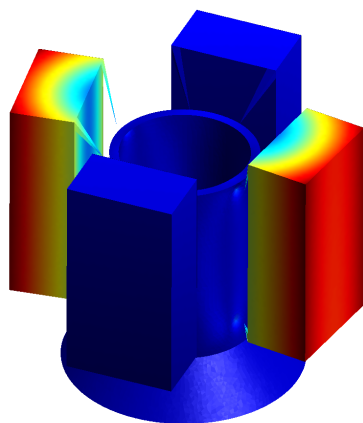
### 2.4.3 Analyse dynamique du système global avec liaisons souples

Afin de conserver un temps de calcul acceptable, les liaisons introduites à la section §2.1.2.3 ne sont appliquées qu’à un seul satellite (le satellite  $S_2$ , visible à la figure 2.3), ce qui signifie que seules quatre liaisons parmi les seize présentes au total sont étudiées pour la réalisation d’amortissement. Les douze autres liaisons sont toujours considérées parfaitement rigides. Les calculs effectués ici consistent à déterminer les FRF du centre d’inertie du satellite  $S_2$  en fonction des liaisons implémentées.

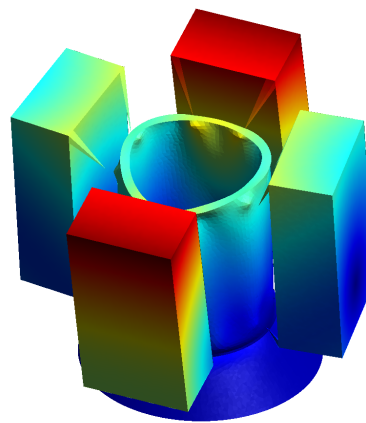
#### 2.4.3.1 Liaison 1 : cas purement élastique

Dans un premier temps, un calcul est réalisé en considérant que les liaisons ne contiennent que le cœur métallique purement élastique (figure 2.4a). La partie destinée à contenir le matériau amortissant est supposée vide.

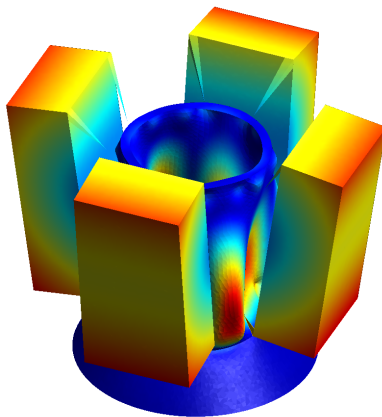
La figure 2.17 permet de comparer la FRF du satellite  $S_2$  dans ce cas (courbe continue rouge) avec la FRF de ce même satellite dans le cas où les liaisons sont parfaitement rigides (courbe en pointillés



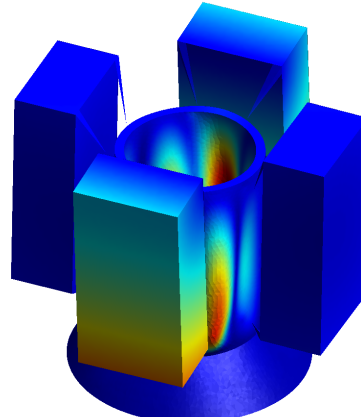
(a) Mode 1,  $f = 7,0$  Hz



(b) Mode 2,  $f = 22,8$  Hz



(c) Mode 3,  $f = 40,8$  Hz



(d) Mode 4,  $f = 48$  Hz

FIGURE 2.16 – Liaisons rigides : Déformées modales des quatre premiers modes de la structure

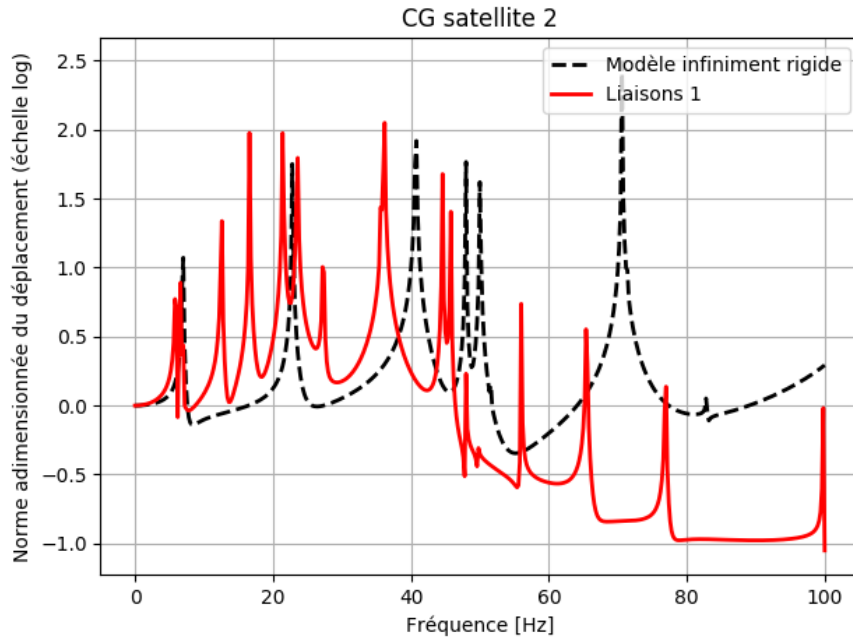


FIGURE 2.17 – FRF de la norme adimensionnée du déplacement du centre d’inertie du satellite  $S_2$  dans les cas des liaisons rigides et purement élastiques

noirs sur 2.17 et continue rouge sur 2.15). On observe que dans la configuration purement élastique, les premières fréquences propres sont un peu plus basses que dans la configuration parfaitement rigide. De plus, le nombre de modes sur la bande de fréquence étudiée est plus important lorsque les liaisons sont élastiques. Ces résultats sont cohérents avec l’assouplissement qu’apportent les liaisons à l’assemblage et montrent que celui-ci est important.

On voit également que le niveau global de la FRF au-delà de 50 Hz diminue dans le cas purement élastique. Cependant, cela ne peut pas être comparé avec la FRF dans le cas parfaitement rigide puisque l’assouplissement fait apparaître en dessous de 100 Hz des modes qui ne sont pas visibles avec les liaisons rigides.

#### 2.4.3.2 Liaison 2 : avec couche viscoélastique externe

La deuxième liaison comporte une couche d’élastomère entourant le cœur métallique. Les deux matériaux utilisés sont définis dans §2.1.3.

La figure 2.18 contient les FRF du centre de gravité du satellite  $S_2$  avec la liaison 2 (ligne en pointillés bleus pour le Deltane 350, ligne rouge continue pour l’ISD112) et pour la liaison purement



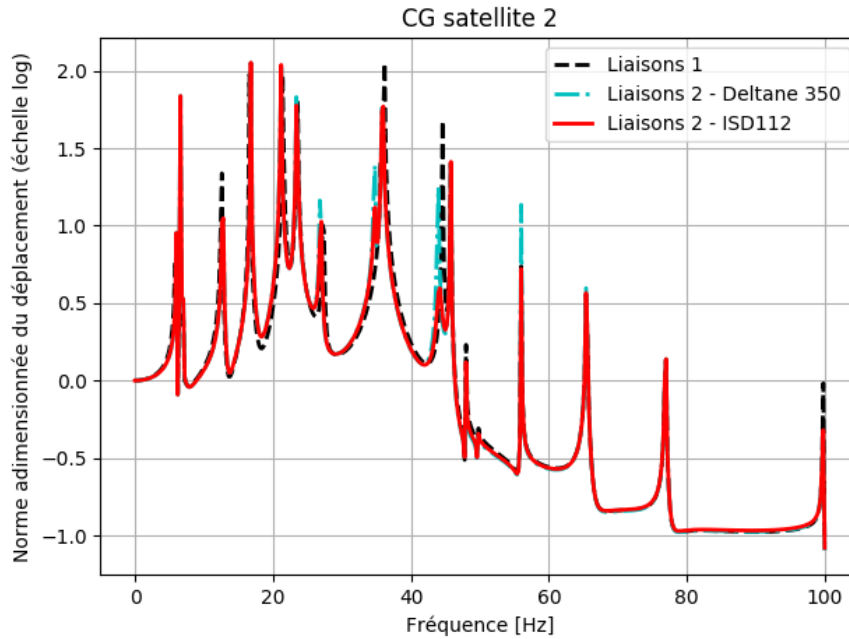


FIGURE 2.18 – FRF de la norme adimensionnée du déplacement du centre d’inertie du satellite  $S_2$  avec la liaison 1 (noire pointillé), la liaison 2 avec Deltane 350 (bleue discontinue) et la liaison 2 avec ISD112 (rouge continue)

élastique (ligne noire en pointillé). Pour ce dernier cas, la hauteur des pics est théoriquement infinie et ne peut donc pas être comparée avec le cas des liaisons dissipatives. La comparaison des FRF montre que l’allure générale est très similaire pour chaque cas. On constate également que certains pics sont légèrement décalés, ce qui peut s’expliquer par l’effet de masse ajoutée de la couche élastomère, ainsi que par la faible raideur ajoutée (puisque les couches sont placées en parallèles). Enfin, si on compare les FRF obtenues avec le Deltane 350 et l’ISD112, on constate que sur l’ensemble de la FRF, l’ISD112 génère un amortissement plus important au niveau des pics de fréquence.

### 2.4.3.3 Liaison 3 : avec couche viscoélastique interne

Dans le but d’améliorer les performances d’amortissement de la liaison 2, la couche d’élastomère est placée entre deux couches (le cœur existant et une couche externe ajoutée en aluminium) afin de la contraindre.

La figure 2.19 montre les FRF du centre de gravité du satellite  $S_2$  pour la liaison 3 (ligne rouge continue pour l’ISD112 et bleue discontinue pour le Deltane 350) et pour la liaison 1 (ligne noire

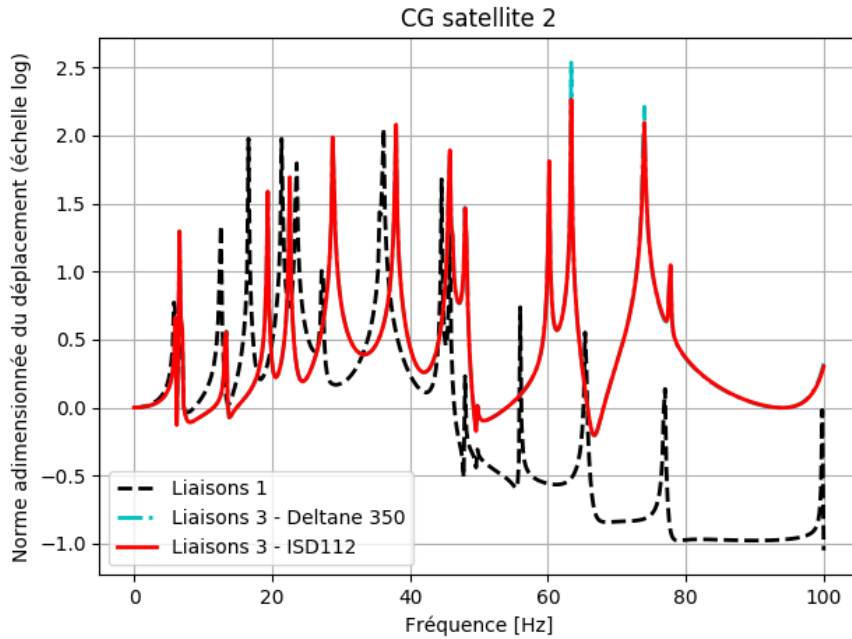


FIGURE 2.19 – FRF de la norme adimensionnée du déplacement du centre d’inertie du satellite 2 avec la liaison 1 (noire pointillé), la liaison 3 avec le Deltane 350 (bleue discontinue) et la liaison 3 avec l’ISD112 (rouge continue)

en pointillée). Pour ce dernier cas, la hauteur des pics de résonance est théoriquement infinie et ne peut donc pas être comparée avec l’autre cas. Cette fois-ci, l’effet de l’amortissement est important et on observe qu’en deçà de 30 Hz, le niveau de déplacement du point de référence dans les zones des anti-résonances est plus bas que dans le cas où les liaisons sont purement élastiques. On voit aussi que les pics sont décalés un peu plus haut en fréquence, ce qui peut s’expliquer par l’ajout de raideur dû au matériau utilisé dans la couche externe. L’autre conséquence de cet effet de raideur ajoutée est que la zone où le niveau de la FRF diminue (au-delà de 50 Hz pour la courbe noire) est repoussée au-delà de 100 Hz avec la liaison 3.

Enfin, contrairement à ce que l’on pourrait attendre, les différences provenant du changement de matériau sont faibles, puisque quelques pics seulement sont davantage amortis.

#### 2.4.3.4 Bilan

Les résultats présentés ci-dessus montrent qu’il est possible d’introduire de l’amortissement au niveau des liaisons dans le but de modifier la réponse fréquentielle du système global. Deux géométries

de liaison ont été testées et offrent des performances différentes selon l'objectif choisi : si la bande de fréquence ciblée est  $[0 - 50]$  Hz, la géométrie de la liaison 3 est préférable, si la bande de fréquence ciblée est  $[0 - 100]$  Hz, alors c'est l'autre géométrie qui semble le plus approprié. Dans tous les cas, le matériau élastomère à choisir est l'ISD112 puisque c'est lui qui donne les meilleurs résultats, comme on peut s'y attendre en comparant la fréquence d'amortissement maximale  $f_{\eta_{\max}}$  du tableau 2.2.

Cependant, les différentes FRF présentées montrent que le choix du matériau a un impact limité sur le contrôle des vibrations transmises au satellite puisque l'on observe assez peu de variations. En effet, la complexité de la structure entraîne que le contrôle du déplacement d'un satellite passe par l'intermédiaire de plusieurs sous-systèmes et qu'il n'est pas forcément estimable a priori.

## 2.5 Optimisation paramétrique d'une liaison

### 2.5.1 Définition des paramètres d'optimisation

Dans le but d'améliorer la qualité de la nouvelle liaison proposée, un plan d'expérience à deux variables est réalisé. La configuration de liaison choisie est la liaison 3, et les paramètres de balayage sont l'épaisseur de la couche extérieure en aluminium et le temps de relaxation  $\tau$  du matériau visco-élastique. Ce couple de paramètres permet de piloter à la fois la géométrie de la liaison et les propriétés de l'élastomère. La bande de fréquence étudiée est  $[0-100]$  Hz et le balayage s'effectue pour une épaisseur  $e$  variant de 1 à 10 mm avec un pas de 1 mm et pour un élastomère aux propriétés identiques à l'ISD112 mais dont  $\tau$  varie de  $8,37 \times 10^{-10}$  à  $8,37 \times 10^2$  s par pas d'une décade logarithmique, soit un total de 130 points de calculs. La grandeur observée est la moyenne sur une bande de fréquence du rapport entre la norme  $\underline{U}_{S_2}$  du déplacement du satellite 2 et la norme du déplacement imposé  $\overline{U}_{DB}$ , en échelle logarithmique :

$$X = \log \left( \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\|\underline{U}_{S_2}(\omega)\|}{\|\overline{U}_{DB}\|} d\omega \right) \quad (2.45)$$

La surface de réponse de la figure 2.20 est obtenue en résultat du plan d'expérience décrit. On constate qu'il existe un minimum global et que celui-ci se trouve pour le couple optimal ( $e^* = 6$  mm,  $\tau^* = 8,37 \times 10^2$  s) localisé par le point noir sur la surface de réponse. La liaison issue de ces valeurs possède une masse de 1,75 kg, ce qui augmente la masse de seulement 70 g par rapport à la liaison 3. Pour comparaison, le matériau ISD112 employé dans la liaison 3 à la section §2.4.3.3 est repéré par le triangle vert. Comparé à cette dernière solution, l'atténuation obtenue avec le plan d'expérience sur

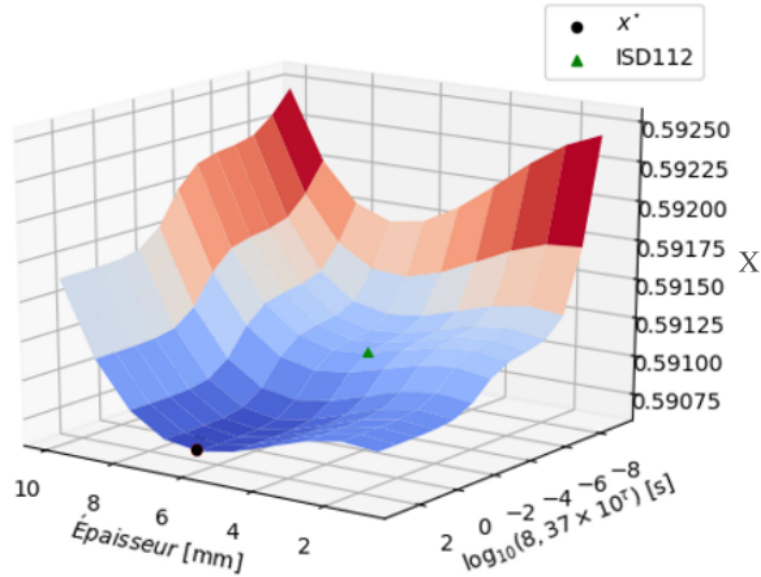


FIGURE 2.20 – Surface de réponse de la norme adimensionnée du centre d’inertie du satellite 2

la grandeur X est de 0,07%.

### 2.5.2 Bilan

L’optimisation paramétrique menée montre qu’il est possible d’obtenir un compromis optimal entre l’épaisseur des différentes couches et les propriétés du matériau viscoélastique, sur les plages considérées. Ce compromis définit un matériau fictif plus performant que le matériau existant étudié et entraîne une légère amélioration sur le critère de déplacement choisi. Néanmoins, cette amélioration dépend de plusieurs paramètres qui ont un impact direct sur sa valeur :

- **Taille du maillage** : la taille du maillage choisie pour représenter les liaisons doit satisfaire le compromis entre bonne représentativité de la liaison et un faible temps de calcul, d’autant que le calcul doit être effectué autant de fois qu’il y a de points dans le plan d’expérience (130 points, ici).
- **Pas de discrétisation fréquentielle** : la grandeur observée est une grandeur moyennée sur la bande de fréquence [0–100] Hz. Plus le pas de discrétisation fréquentielle associé est important, plus la moyenne est précise mais plus le temps de calcul est important. Le pas choisi dans ce calcul est de 0,5 Hz, soit 201 points.

- **Pas de discrétisation du balayage des variables d’optimisation** : le pas de discrétisation du balayage impacte directement la qualité de la surface de réponse ainsi que la valeur optimale obtenue puisque seul un pas fin permet de visualiser les minima locaux et les zones à proximité d’un minimum.

## 2.6 Conclusion

Ce chapitre a permis de modéliser et d’étudier un cas test représentatif d’une application industrielle originale élaboré conjointement avec l’industriel partenaire ArianeGroup. Ce cas est accès sur la problématique d’amortissement de vibrations d’équipements spatiaux, à l’aide de matériaux élastomères incorporés dans les liaisons du système.

Cette application a nécessité le développement d’un code maison en Python dans lequel le support, les satellites et les liaisons sont découplés et peuvent être modifiés facilement (géométrie, maillage, paramètres matériaux, etc.) sans aucun impact sur le fonctionnement du code. Les satellites sont représentés par des solides rigides et peuvent aisément être modifiés pour considérer d’autres charges utiles, au travers de leur masse et de la matrice d’inertie exprimée au centre d’inertie dans leur repère local. Le choix de ne modéliser que quatre liaisons sur les seize au total provient du souhait de conserver un temps de calcul raisonnable, puisque l’essentiel des ddls du système ( $\approx 80\%$  lorsque l’on ne modélise que quatre liaisons) se trouve au niveau des liaisons. Sur les solutions présentées dans ce chapitre, cela peut représenter une économie de plusieurs heures.

La valeur ajoutée à l’application de départ est l’ajout du matériau élastomère au sein des liaisons dans le but d’introduire un amortissement. Celui-ci a été réalisé et on montre que selon la disposition de l’élastomère dans la liaison, et s’il est contraint ou non, on peut observer un effet amortissant sur la dynamique globale du satellite ciblé, tout en conservant la tenue statique des liaisons. Deux élastomères ont été testés et on observe une légère influence de leurs paramètres respectifs sur la dynamique du satellite, allant dans le sens des caractéristiques matériaux qui se trouvent dans le tableau 2.2 : l’ISD112 ( $f_{\eta_{\max}} = 16,8$  Hz) donne de meilleurs résultats que le Deltane 350 ( $f_{\eta_{\max}} = 1968,3$  Hz) sur la bande de fréquence étudiée  $[0 - 100]$  Hz.

Le deuxième apport concerne le plan d’expérience réalisé au niveau de la liaison, afin de déterminer le meilleur compromis entre sa géométrie (épaisseur de la couche d’élastomère), et les propriétés

## 2.6. CONCLUSION

---

de l'élastomère (temps de relaxation). L'optimum obtenu définit un matériau fictif légèrement plus performant que le meilleur des deux matériaux élastomères utilisés dans ce chapitre, pour un ajout de masse acceptable.

Cependant, les études menées dans ce chapitre montrent que l'influence des solutions envisagées est assez limitée. De plus elle est difficilement quantifiable *a priori*. Dans la suite du manuscrit, on propose d'étudier la mise en place d'une méthodologie et d'un outil de calcul basé sur les méthodes d'optimisation topologique, dans le but d'aider et de guider la conception de liaisons amortissantes.

## 2.6. CONCLUSION

---

## Chapitre 3

# Optimisation topologique dans le cadre de la statique linéaire

### Contenu

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>63</b>
<b>3.2</b>	<b>Méthodes existantes pour l'optimisation topologique</b>	<b>64</b>
<b>3.3</b>	<b>Méthode SIMP pour l'optimisation en statique</b>	<b>73</b>
<b>3.4</b>	<b>Algorithme de résolution</b>	<b>83</b>
<b>3.5</b>	<b>Résultats</b>	<b>87</b>
<b>3.6</b>	<b>Proposition d'amélioration</b>	<b>98</b>
<b>3.7</b>	<b>Conclusion et contributions</b>	<b>110</b>

---

### 3.1 Introduction

Dans le contexte industriel, il est très important de bien maîtriser les propriétés mécaniques des structures afin de concevoir la structure répondant au mieux au cahier des charges. Il est aussi primordial d'assurer la tenue mécanique de l'équipement en vérifiant différentes grandeurs telles que la contrainte maximale afin de s'assurer du respect de la limite élastique ou la contrainte à la rupture. De plus, la masse est souvent un des paramètres principaux du cahier des charges lors de la conception d'une pièce. Dans le secteur du spatial, le prix d'un lancement est souvent rapporté à la masse utile lancée en orbite et ce coût est estimé dans une fourchette de "8300 à 18700 dollars par kilogramme [...] pour le lanceur Ariane 5"<sup>1</sup>. Il est alors nécessaire d'utiliser des techniques permettant d'optimiser un ou plusieurs de ces aspects. L'optimisation topologique est une méthode d'optimisation relative-

---

1. [https://www.lemonde.fr/les-decodeurs/article/2018/02/07/comment-spacex-s-est-fait-une-place-dans-l-aerospatial\\_5253404\\_4355770.html](https://www.lemonde.fr/les-decodeurs/article/2018/02/07/comment-spacex-s-est-fait-une-place-dans-l-aerospatial_5253404_4355770.html)



ment récente et prometteuse. Dans le domaine statique, elle permet d'agir à la fois sur la raideur et la masse du matériau d'un point de vue global en permettant de trouver une répartition de matière optimale dans un domaine de conception défini, maximisant la première tout en contrôlant la seconde [5, 19, 24, 144]. Les solutions engendrées par ce type de problème ne sont toutefois pas uniques. Il est précisé *une* répartition de matière optimale car les solutions engendrées par ce type de problème ne sont généralement pas uniques [4, 22, 24, 166]. De plus, elles nécessitent généralement l'emploi d'une méthode de régularisation afin de leur donner un sens physique [9, 136, 139].

Ce chapitre a pour but de présenter la méthode d'optimisation topologique par pénalisation SIMP<sup>2</sup>[14, 20, 97, 137] parmi l'ensemble des méthodes existantes, et d'évoquer les différentes difficultés inhérentes à l'emploi de celle-ci ainsi que les solutions choisies pour les surmonter. Il est également présenté une comparaison de certains résultats avec des exemples provenant de la littérature dans le but de valider le code maison, puis la méthode est employée sur un plot amortissant 3D afin de déterminer la topologie optimale sous plusieurs chargements statiques. Pour finir, une proposition d'amélioration consistant à définir une nouvelle loi de pénalisation est proposée dans le but d'améliorer les performances de calcul.

## 3.2 Méthodes existantes pour l'optimisation topologique

### 3.2.1 État de l'art de l'optimisation topologique

L'optimisation topologique est issue d'une autre méthodologie d'optimisation très employée dans le domaine de la mécanique : l'optimisation de forme<sup>3</sup>. Appliquée à des problématiques de mécanique des structures, cette dernière fait son apparition en 1960 [89]. Elle est ensuite appliquée à de nombreux problèmes qui concernent le dimensionnement optimal de poutres et colonnes [16, 57, 73, 78, 152], la géométrie optimale de plaques trouées [27, 31, 45] ou encore la forme optimale de disques [12, 25, 46] et coques [2, 27]. Pour une partie de ces études, la fonction coût consiste à minimiser la concentration de contraintes aux abords de singularités géométriques (types bordures ou coins) [73, 152]. D'autres travaux définissent la fonction coût comme une minimisation de la masse [78], une maximisation de la charge au flambage [57, 89], ou bien une maximisation de la première fréquence propre [16, 57]. Une synthèse des ces différents travaux est effectuée dans [69].

---

2. SIMP : Solid Isotropic Material with Penalization

3. aussi appelée optimisation géométrique

### 3.2. MÉTHODES EXISTANTES POUR L'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE

---

D'autres secteurs ont petit à petit utilisé et adapté l'optimisation de forme, comme dans l'aéronautique ou elle a beaucoup été employée pour faire de l'optimisation sur des ailes ou autres parties d'avions soumises à des charges aérodynamiques, en couplant des méthodes adjointes [80, 109, 125]. L'optimisation de forme a ensuite été appliquée dans d'autres domaines, comme l'électromagnétisme [112], la mécanique des fluides [113], les transferts thermiques [164] ou l'étude de membranes vivantes [111].

La différence entre un problème d'optimisation de forme et un problème d'optimisation topologique réside dans le fait que dans le premier cas, les variables de conception sont les paramètres qui définissent le contour  $\partial\Omega$ , entraînant que le domaine  $\Omega$  varie et le tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}^0$  de la structure est fixe. Dans le second cas, les variables de conception permettent de définir la répartition optimale de matière du tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}_{eff}$  au sein d'un domaine  $\Omega_0$  fixe [4, 19, 120]. Dans ce dernier cas, des trous peuvent alors apparaître et changer la topologie de la structure initiale.

L'optimisation topologique a été historiquement développée pour la mécanique des solides, elle est cependant de plus en plus utilisée dans d'autres domaines tels que la mécanique des fluides, la thermique ou encore la biomécanique.

Dans le domaine de la thermique, la plupart des travaux font appel à des méthodes de type éléments finis ou volumes finis couplé avec un solveur de type ESO<sup>4</sup> [122], SLP<sup>5</sup> [77], BESO<sup>6</sup> [60] ou MMA<sup>7</sup> [33, 62, 104] pour de l'optimisation de systèmes de refroidissement ou pour des échangeurs thermiques. Étant donné que les méthodes d'optimisation topologiques sont très gourmandes en temps de calcul, seules quelques rares études ont été menées concernant des flux 3D couplant les solveurs MMA [44] ou OC<sup>8</sup> [53]. À ce titre, il est démontré dans [154] l'efficacité de l'utilisation des GPUs pour la résolution de problèmes d'optimisation topologique à très grand nombre de degrés de liberté. La majorité de ces études ont été menées à l'aide de l'approche SIMP [62, 104, 154], tandis que quelques plus rares autres travaux utilisent la méthode d'homogénéisation [77] ou des dérivées de ces méthodes [33]. Une synthèse détaillée de ces études, des différentes hypothèses de calculs et algorithmes utilisés est présentée dans [43]. Pour la majorité des problèmes d'optimisation topologique dans le cadre de la conduction de flux thermique, la fonction objectif  $f_0$  employée est la température moyenne d'un volume  $V$ .

---

4. ESO : Evolutionary Structural Optimization

5. SLP : Sequential Linear Programming

6. BESO : Bidirectional Evolutionary Structural Optimization

7. MMA : Method of Moving Asymptotes

8. OC : Optimality Criteria

L'optimisation topologique est aussi utilisée en mécanique des fluides pour la résolution de fluides incompressibles modélisés par les équations de Navier-Stokes en régime permanent [26, 67] et transitoire [66], ou bien en considérant des fluides laminaires en régime permanent [48, 114, 117, 167] et transitoire [47], ainsi qu'en régime de transition laminaire/turbulent, là aussi en régime permanent [61] et transitoire [92]. Là encore pour des raisons de coût de calculs prohibitifs, la plupart des études citées sont menées en 2D. Celles menées en 3D sont très rares [117, 167]. MMA (et sa variante GCMMA<sup>9</sup>) est largement employée, que ce soit en formulation éléments finis [26, 61, 67, 114] ou en Lattice-Boltzmann [47, 66]. Enfin, certaines études couplent les phénomènes de transfert thermique avec la prise en compte d'écoulements de type laminaire [41, 104, 163] ou turbulent [91].

L'optimisation topologique est également employée en biomécanique, par exemple pour la conception de prothèses [11, 81, 103] en prenant en compte des modèles de matériaux non-isotropes. Pour faire cela, l'approche SIMP ou son équivalente pour les matériaux orthotropes SOMP sont utilisées [11]. La méthode ainsi que la fonction objectif généralement choisie (complaisance) sont présentées dans les sections suivantes.

#### 3.2.2 Écriture du problème d'optimisation topologique

L'optimisation topologique consiste à trouver la répartition spatiale optimale de matière dans un domaine initial  $\Omega_0$ . Cette répartition est caractérisée par la fonction de densité locale de matière  $x(M)$  définie par :

$$\begin{cases} 0 < x(M) \leq 1 & \forall M \in \Omega_0 \\ x(M) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.1)$$

La densité de matière  $x(M) = 0$  indique une absence de matière et la valeur  $x(M) = 1$  indique la présence de matière. Une valeur intermédiaire n'a pas de sens physique, mais cela permet néanmoins de relaxer l'espace admissible, qui ne présenterait pas de solution optimale s'il n'était défini que pour les valeurs 0 et 1 [6, 20, 120, 166]. En contrepartie, des pénalisations sont généralement appliquées sur ces valeurs intermédiaires afin de les faire tendre autant que possible vers les valeurs extrémales. On note cependant que la méthode par homogénéisation présentée dans la section suivante se base sur une définition des densités  $x \in \{0, 1\}$ , permettant de définir localement des matériaux poreux [19, 144]. La

---

9. GCMMA : Globally Convergent Method of Moving Asymptotes

### 3.2. MÉTHODES EXISTANTES POUR L'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE

---

fonction de densité locale est contrainte spatialement par :

$$\int_{\Omega_0} x(M) \, d\Omega \leq \alpha V_0 \quad (3.2)$$

où  $V_0 = |\Omega_0|$  est le volume du domaine de conception,  $\alpha$  est une fraction volumique arbitrairement choisie par l'utilisateur et correspondant au volume final souhaité  $0 < \alpha < 1$ , c'est-à-dire à la masse finale de la structure pour une masse volumique définie. On définit le tenseur d'élasticité effectif  $\mathbb{C}_{eff}$  à partir du tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}^0$  constant (c'est-à-dire pour un module d'Young unitaire) dans  $\Omega_0$  :

$$\mathbb{C}_{eff} = f(x(M)) E_0 \mathbb{C}^0 \quad (3.3)$$

où  $E_0$  est le module d'Young du matériau. La fonction  $f(x(M))$  définit la relation entre la densité de matière et la raideur du matériau. C'est une fonction de pénalité et celle-ci est étudiée en détail dans la suite du document. Enfin, le tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}^0$  comporte un module d'Young unitaire et vaut :

$$\mathbb{C}^0 = \frac{1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

La masse finale de la structure est :

$$M_\Omega = \int_{\Omega_0} \tilde{\rho}(M) \, d\Omega \quad (3.5)$$

où  $\tilde{\rho}$  est la masse volumique effective du matériau calculée à partir de la masse volumique du matériau  $\rho_0$  d'après la relation :

$$\tilde{\rho}(M) = \rho_0 x(M) \quad (3.6)$$

Les problèmes ainsi définis sont bien posés pour les fonctions coût consistant à minimiser l'énergie de déformation de la structure [120], qui peut s'interpréter comme une minimisation de la souplesse, ce qui est équivalent à maximiser la raideur. Le problème s'écrit comme une minimisation de la fonction

complaisance<sup>10</sup>  $c(x(M))$ . Il s'agit de trouver la densité de matière optimale notée  $x^*$  telle que :

$$\begin{aligned}
 x^* &= \underset{x}{\text{Argmin}} c(x(M)) \\
 \text{avec : } c(x(M)) &= \underline{U}(x(M))^T \underline{F} \\
 v(x(M)) &\leq 0 \\
 0 &\leq x(M) \leq 1 \\
 \mathbf{K}(x(M)) \underline{U}(x(M)) &= \underline{F}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

où  $v(x(M)) = \int_{\Omega_0} x(M) d\Omega - \alpha V_0$  est la contrainte sur le volume. Cependant, le type de solution engendré comporte généralement un grand nombre de petits trous, là où quelques gros trous permettraient de mieux interpréter la solution d'un point de vue physique. Des stratégies de régularisation de la solution telles que présentées dans [9, 139], dont certaines sont présentées dans la section §3.3.5, sont généralement utilisées pour remédier à cela. Il existe plusieurs familles de méthodes d'optimisation topologique. Celles-ci sont décrites dans les sections suivantes.

#### 3.2.3 Méthodes par homogénéisation

Les méthodes par homogénéisation [3, 4, 6, 19, 144] reposent sur le fait qu'une structure composée d'une multitude de petits trous donne de meilleures performances qu'une structure composée de quelques gros trous lorsqu'il s'agit d'obtenir une structure maximisant la rigidité sous un chargement défini. Ce phénomène est présenté par [5] sur un cas d'application en traçant l'évolution de la fonction coût au cours du processus d'optimisation et met en évidence que la valeur de complaisance finale est plus faible en cas de micro-trous, que lorsqu'un filtrage des densités ou une pénalisation est appliqué. L'idée retenue consiste alors à utiliser ces micro-trous comme des nouvelles variables de conception permettant de définir un matériau poreux équivalent. Ce matériau poreux est fictif et homogénéise la zone constituée de micro-trous. Le problème d'optimisation devient alors un problème consistant à trouver la meilleure structure en terme de matériau, de trous *et* de matériau poreux [4]. La solution obtenue peut alors être conservée telle quelle et interprétée sous la forme d'une structure de type Lattice [42, 157], ou bien elle peut être post-traitée à l'aide de méthodes de filtrage ou de pénalisation comme par exemple dans [9]. Les microstructures sont généralement des cellules constituées d'un trou et d'une membrane, dont les dimensions constituent les variables de conception. L'étude de ces microstructures est présentée dans de nombreuses références, dont [19, 21, 144].

---

10. aussi appelée compliance en anglais mais le terme est souvent utilisé en français

### 3.2.4 Méthodes par pénalisation

Les méthodes d'optimisation topologique par pénalisation se basent sur le fait d'incorporer *au sein* du processus d'optimisation une loi de pénalité  $f(x)$  convexe sur les densités afin que les valeurs intermédiaires ( $0 < x < 1$ ) soient défavorisées au profit d'une absence  $x = 0$ , ou d'une présence  $x = 1$  de matière. Cette pénalité est intrinsèque à l'algorithme itératif, ce qui n'est pas le cas lorsqu'une régularisation par pénalisation des densités est employée pour traiter à posteriori la solution optimale obtenue par homogénéisation. Par conséquent, les deux méthodes sont bien différentes.

La méthode par pénalisation la plus connue est la méthode SIMP [20, 24, 128, 166] qui est utilisée dans cette thèse, et donc décrite en détail dans la suite de ce chapitre. Cette méthode consiste à pénaliser les densités à l'aide d'un facteur de pénalisation  $p$  réel strictement positif qui définit la densité de matière  $x$  de la façon suivante :

$$f(x(M)) = x(M)^p \quad (3.8)$$

Une autre méthode par pénalisation consiste à utiliser la loi RAMP<sup>11</sup> [142] dont l'expression de  $f(x(M))$  est :

$$f(M) = \frac{x(M)}{1 + q(1 - x(M))} \quad (3.9)$$

où  $q$  est le facteur de pénalité (réel strictement positif) de cette loi.

Le fait de faire tendre les densités intermédiaires vers 0 et 1 n'exclut pas que la solution finale ait convergé vers une solution en damier (micro-perforée). En conséquence, les méthodes par pénalisation incluent elles aussi des techniques de régularisation de la solution, notamment en utilisant des filtres sur les densités ou les sensibilités des fonctions objectifs et contraintes. De même que pour la pénalisation, le filtre est intrinsèque au processus itératif. Une description de plusieurs filtres existants est faite dans [139] et certains de ces filtres sont présentés plus en détail dans la suite.

### 3.2.5 Méthodes par lignes de niveaux

Les méthodes par lignes de niveaux<sup>12</sup> ont été introduites par [116] et sont utilisées bien au-delà du cadre de l'optimisation topologique : fabrication additive [36, 107], biologie [68], résolution de

---

11. RAMP : Rational Approximation of Material Properties

12. Aussi appelées Méthodes par courbes de niveaux

problèmes inverses [118]. Une récente synthèse des différentes applications des méthodes de lignes de niveaux se trouve dans [64].

Appliquée à l'élasticité, celle-ci permet de contrôler l'évolution spatiale de la frontière  $\partial\Omega$  du domaine de conception  $\Omega_0$  au travers d'une fonction de propagation  $\Phi$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  ayant pour définition :

$$\begin{cases} \Phi(M) > 0 & \text{si } M \in \Omega_0 \\ \Phi(M) = 0 & \text{si } M \in \partial\Omega \\ \Phi(M) < 0 & \text{si } M \notin \Omega_0 \cup \partial\Omega \end{cases} \quad (3.10)$$

Combinée à l'optimisation topologique au sein de  $\Omega_0$ , les courbes de niveau permettent de transporter le bord du domaine avec une vitesse calculée précisément de manière à faire décroître la fonction objectif. Cette vitesse caractéristique, notée  $V = \underline{v} \cdot \underline{n}$ , où  $\underline{v} = [u, v, w]^T$  représente le vecteur vitesse et  $\underline{n}$  le vecteur normal à la paroi, est obtenue à l'aide de la méthode de variation de frontière reposant sur l'équation de Hamilton-Jacobi [8, 116] :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + V|\underline{\text{grad}}\Phi| = 0 \quad (3.11)$$

Cette méthode de contrôle de parois permet de manipuler plus efficacement des problèmes d'élasticité non-linéaires [8] ainsi que des problèmes tridimensionnels [7, 8]. Toutefois, elle possède un inconvénient qui est qu'il est impossible de créer de nouveaux trous pendant l'optimisation, sauf dans le cas où deux extrémités du domaine ( $\Phi = 0$ ) se rejoignent, créant alors un anneau. Le choix de la configuration initiale devient donc très important et en choisir une judicieuse implique d'avoir une première idée de la topologie finale, ou à défaut d'en sélectionner une arbitrairement en incorporant un maximum de trous. De nombreux travaux ayant pour objectif de résoudre ce problème ont été menés et plusieurs méthodes ont été proposées sur le sujet [10, 17, 55, 155].

#### 3.2.6 Autres méthodes existantes

De nombreuses autres approches existent pour la résolution de problèmes d'optimisation d'élasticité linéaire, parmi lesquelles la méthode ESO [158, 159] dont le but est d'éliminer au fur et à mesure des itérations les éléments inutiles (ceux dont la densité devient nulle) afin de converger vers une solution finale dont le maillage n'est alors constitué que des éléments dont la densité vaut 1. La grandeur typiquement optimisée dans ce genre de méthode est la contrainte de Von Mises (parfois l'énergie de

### 3.2. MÉTHODES EXISTANTES POUR L'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE

---

déformation également, sous certaines conditions [148]), et un critère de rejet évalue le rapport de la contrainte de Von Mises d'un élément  $e$  par rapport à la contrainte maximale dans la structure. Si ce rapport est inférieur au critère de rejet à l'itération  $k$ , l'élément  $e$  est éliminé du maillage.

Cependant, la suppression unilatérale d'éléments a tendance à poser des problèmes car elle ne garantit pas de converger vers un optimum, et lorsque l'un d'eux est atteint, la convergence est généralement très lente [131]. En effet, il se peut que l'évolution de la solution au cours des itérations entraîne qu'un élément (ou un groupe d'éléments) peu sollicité mécaniquement dans les premières itérations le devienne à la fin. Or la méthode ESO ne permet pas de prendre cela en compte.

Afin de résoudre ce problème, l'ajout d'éléments en cours de calcul a été rendu possible au travers de l'évolution de la méthode ESO en SERA<sup>13</sup> [130] et BESO [123, 124] dont le but devient alors d'initialiser la solution en émettant une supposition quant à la forme finale. Ensuite, l'algorithme ajoute ou supprime des éléments de proche en proche au cours des itérations jusqu'à la convergence. Une synthèse des différents travaux sur la méthode ESO et ses diverses améliorations se trouve dans [74].

Une autre approche différente de celles évoquées jusqu'à présent, consiste à utiliser des algorithmes génétiques pour la résolution de problèmes stochastiques. Les travaux de [71] sur les treillis de barres consistent à définir un premier ensemble de configurations finales potentielles prises au hasard et en nombre suffisant. Ces solutions servent de graine pour la génération de la solution optimale, calculée au moyen d'une fonction de fitness qui peut être assimilée à la fonction objectif du problème. Dans les travaux de [71], cette fonction est l'inverse de la déflexion de poutre. Les densités de chaque élément sont binaires, sans valeurs intermédiaires autorisées. Cette méthode est aussi adoptée par [79] pour résoudre des problèmes plans et l'étendre à un exemple autorisant les densités intermédiaires, et [134] incorpore une nouvelle représentation de la topologie à l'aide des courbes de Bézier permettant de réguler la formation de microstructures locales.

D'autres méthodes telles que la méthode par dérivées topologiques [141] ou par champs de phase [29] existent et ciblent généralement des applications particulières. C'est, par exemple, le cas pour la méthode par champs de phase qui a été développée pour l'étude de changement d'état de matière. Une étude présentant les différentes approches existantes se trouve dans [140].

---

13. SERA : Sequential Element Rejection and Admission



### 3.2.7 Bilan

Par rapport aux techniques d'optimisation de paramètres et de formes, la latitude supplémentaire consistant à pouvoir répartir la matière au sein d'un domaine de définition initial donne à l'optimisation topologique l'accès à un ensemble de solutions plus important.

Toutefois, le développement de cette méthode pose un certain nombre de problématiques qui ne sont pas encore toutes surmontées. On constate notamment que le cadre mathématique dans lequel le domaine admissible est défini ne permet pas toujours de converger vers un optimum, ce qui implique qu'il doit être relaxé. Cependant les techniques de relaxation engendrent généralement la présence de plusieurs optimaux. Il n'existe à ce jour pas de méthodes permettant d'atteindre systématiquement l'optimum global, ce qui fait que celui-ci ne peut être atteint que si l'initialisation est correctement réalisée. Le choix de la configuration de départ peut donc être déterminant. Certains algorithmes sont construits de manière à ce que l'optimum global puisse malgré tout être approché dans certains cas, comme avec l'algorithme BESO [124]. Cependant, l'optimum global peut parfois être hors d'atteinte comme dans le cas de la méthode des courbes de niveau [8] si le nombre de trous admis dans la topologie initiale est inférieur à celui dans la topologie optimale (plusieurs travaux dans le but de corriger ce problème ont été menés et certains d'entre eux sont cités dans le paragraphe §3.2.5).

Une autre difficulté rencontrée en réalisant de l'optimisation topologique concerne la taille du problème à résoudre. Les méthodes d'optimisation utilisant les éléments finis imposent une variable par élément (plusieurs dans le cas de la méthode d'homogénéisation). Le maillage doit donc être suffisamment fin pour assurer la convergence et le problème éléments finis doit être recalculé à chaque itération, ce qui peut être coûteux en temps de calcul. Ce problème est légèrement contrebalancé par le fait que la plupart des méthodes d'optimisation topologique (hors ESO et BESO) utilisent des méthodes à maillage fixe ne nécessitant pas de remaillage [8]. Finalement, le choix du maillage initial est impacté par un autre facteur qui est que la solution finale est dépendant du maillage de départ et que par conséquent, celui-ci doit être choisi avec prudence ([24, 97]).

Enfin, l'optimisation topologique commence à être relativement bien maîtrisée pour certaines fonctions objectif (complaisance, maximisation de fréquence propre) mais son extension à d'autres critères reste aujourd'hui très difficile à mettre en œuvre [120]. Dans le cas de l'utilisation de critères locaux, comme la minimisation de la contrainte équivalente de Von Mises maximum par exemple, le chan-

gement de topologie peut intrinsèquement être empêché lorsque deux trous se rapprochent et que la contrainte locale entre les deux augmente du fait de la diminution de l'épaisseur [90, 120]. Également, plusieurs difficultés sur des critères globaux sont rencontrés lors de la résolution de problèmes en dynamique, qui est abordée dans le chapitre suivant.

## 3.3 Méthode SIMP pour l'optimisation en statique

### 3.3.1 Introduction

La méthode SIMP est la méthode par pénalisation employée dans ce chapitre pour résoudre des problèmes d'optimisation dans le cadre de la mécanique statique linéaire. Elle permet de converger vers des solutions physiques grâce au facteur de pénalité qui fait tendre les densités vers les extrêmes. D'autre part, il est possible de la coupler facilement avec des techniques de régularisation de la solution tels que des filtres (voir §3.3.5) qui permettent d'obtenir une solution homogénéisée, et donc interprétable physiquement. De plus, elle est relativement simple à implémenter.

### 3.3.2 Matrice de rigidité

Le matériau employé au cours des itérations possède un tenseur d'élasticité effectif  $\mathbb{C}_{eff}$  donné à l'équation (3.3) qui est fonction de la densité de matière  $x$ . Cette densité de matière est discrétisée en utilisant une variable élémentaire  $x_e$ . La masse finale de la structure est alors :

$$M_{\Omega} = \rho_0 \sum_{e=1}^{n_{elem}} v_e x_e \quad (3.12)$$

où  $v_e$  est le volume de l'élément  $e$ .

La matrice de rigidité élémentaire s'écrit alors en combinant les équations (2.25a) et (3.3) :

$$\mathbf{k}_e(x_e) = f(x_e) E_0 \int_{\Omega_e} \mathcal{B}^T \mathbb{C}^0 \mathcal{B} d\Omega_e$$

En posant  $\mathbf{k}_e^0 = \int_{\Omega_e} \mathcal{B}^T \mathbb{C}^0 \mathcal{B} d\Omega_e$ , les matrices élémentaires des  $n$  éléments s'assemblent alors pour former la matrice de rigidité globale de la structure :

$$\mathbf{K}(\underline{x}) = \mathcal{A}_{e=1}^n \mathbf{k}_e(x_e) = \mathcal{A}_{e=1}^n \tilde{E}_e(x_e) \mathbf{k}_e^0 \quad (3.13)$$

où  $\mathcal{A}$  est le symbole désignant l'opération d'assemblage,  $\tilde{E}_e(x_e) = f(x_e) E_0$  est le module d'Young effectif de l'élément  $e$  et  $\mathbf{k}_e(x_e)$  est sa matrice élémentaire. Dans la mesure où le maillage est fixe dans

les cas considérés, les matrices élémentaires  $\mathbf{k}_e^0$  n'ont besoin d'être calculées qu'une seule fois en amont de l'optimisation. Le stockage des matrices au format creux "sparse" est avantageusement utilisé dans ce travail pour l'implémentation dans le code maison. Finalement, à chaque itération, on résout la première équation du système d'équations (2.29) en précisant les termes qui dépendent des variables de conception :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\ell\ell}(\underline{x}) & \mathbf{K}_{\ell f}(\underline{x}) \\ \mathbf{K}_{\ell f}^T(\underline{x}) & \mathbf{K}_{ff}(\underline{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_\ell(\underline{x}) \\ \underline{U}_f(\underline{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_\ell^d \\ \underline{F}_f(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

où  $\underline{x}$  représente l'ensemble des variables de conception  $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ .

#### 3.3.3 Loi de pénalité SIMP et SIMP-modifiée

On définit la loi de pénalité  $f(x)$  à l'échelle élémentaire de la méthode SIMP suivante :

$$f(x_e) = x_e^p \quad (3.15)$$

où les densités  $x_e$  sont des coefficients définis sur l'intervalle  $[0, 1]$ . On rappelle que le module d'Young effectif  $\tilde{E}$  et la masse volumique effective  $\tilde{\rho}$  valent dans un élément :

$$\tilde{E}(x_e) = f(x_e)E_0 \quad (3.16a)$$

$$\tilde{\rho}(x_e) = x_e\rho_0 \quad (3.16b)$$

La fonction de pénalité  $f(x_e)$  représente le rapport  $\frac{\tilde{E}}{E_0}$ , c'est-à-dire le module d'Young relatif, tandis que la densité de matière  $x_e$  représente le rapport  $\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}$ , c'est-à-dire la masse volumique relative. L'influence de la pénalité sur la fonction  $f(x_e)$  est présentée dans la figure 3.1. Ce coefficient de pénalité  $p$  permet de piloter l'objectif contradictoire d'une grande partie des problèmes d'optimisation de structure statique : maximiser la raideur tout en minimisant la masse. Lorsque  $p = 1$ , la pénalité n'a aucun effet. Quand  $p$  augmente, l'effet de la pénalité sur la raideur relative entraîne une variation de plus en plus importante de la pente pour les densités relatives élevées ( $x_e > 0,5$ ). Lorsque la densité relative est plus faible ( $x_e < 0,5$ ), la pente est de plus en plus faible ce qui induit une faible diminution de la raideur relative lorsque l'élément devient vide.

Généralement,  $p$  est choisi au minimum égal à 3 [23, 120, 137]. Afin d'illustrer l'influence de  $p$ , le cas d'une poutre cantilever 2D est présenté (figure 3.2a) et les solutions obtenues sont présentées sur les figures 3.2b, 3.2c et 3.2d pour différentes valeurs de  $p$ . En dessous de 3, la convergence peut

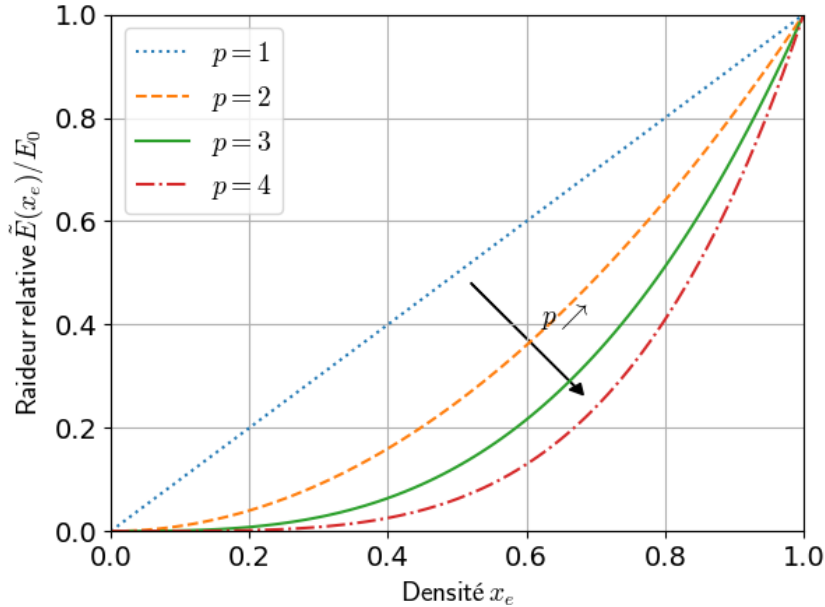


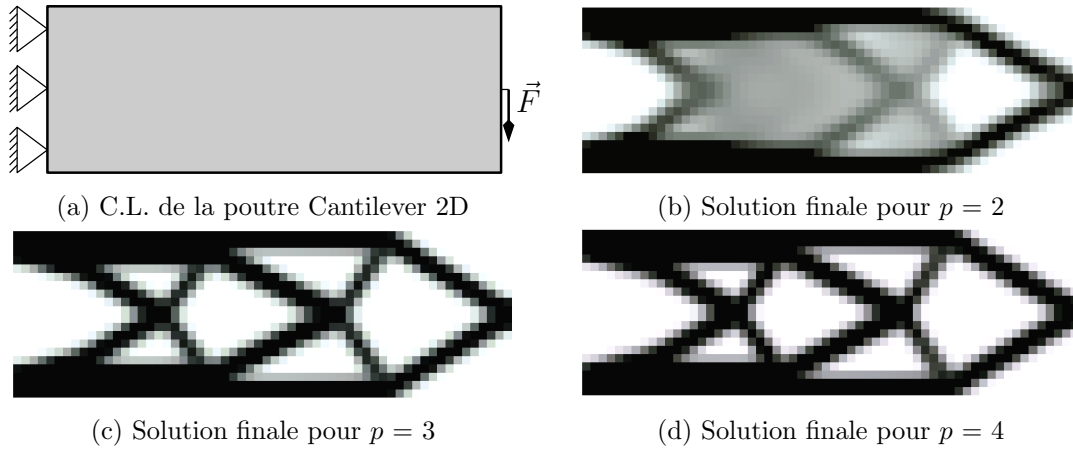
FIGURE 3.1 – Influence de la pénalité  $p$  sur le rapport raideur/masse

Valeur de $p$	SIMP		
	2	3	4
Complaisance finale	191,32	189,82	192,95
Nb. itérations	64	60	> 200
Interprétation de la solution	Non-physique	Physique	Non-convergée

TABLE 3.1 – Comparaison des solutions d’une poutre cantilever 2D pour différentes valeurs de  $p$  (SIMP)

s’avérer lente, ce qui aura pour effet d’augmenter le temps de calcul. De plus, la solution finale aura tendance à contenir de nombreuses zones de densités intermédiaires et donc à proposer des solutions non-physiques (figure 3.2b) [23, 120]. Au dessus de 3, le processus d’optimisation a tendance à fournir de bon résultats (figure 3.2c), mais une trop forte augmentation de la pénalité peut amener une vitesse de convergence trop importante et créer un phénomène d’oscillations des valeurs de densité lors du passage d’une itération  $k$  à l’itération  $k + 1$  (figure 3.2d). Dans ces conditions, il est alors impossible d’atteindre un minimum local et le calcul ne converge pas.

Les performances des différents calculs sont consignées dans le tableau 3.1. Les résultats montrent que les solutions obtenues pour une pénalité  $p = 2$  et  $p = 4$  sont moins performantes que pour la valeur optimale  $p = 3$ . En effet, pour  $p = 2$ , on observe un nombre d’itérations plus élevé ainsi qu’une valeur


 FIGURE 3.2 – Poutre Cantilever 2D, influence du facteur de pénalité  $p$ 

de fonction objectif finale plus grande. Concernant la configuration  $p = 4$ , le tableau 3.1 montre que le calcul n'a pas convergé, bien que la solution finale semble aboutie (figure 3.2d). Pour la suite de ce document, la valeur de la pénalité  $p$  est toujours choisie égale à 3 sauf lorsqu'une autre valeur est indiquée.

Dans la pratique, la loi (3.15) est modifiée de manière à éviter que les densités élémentaires ne deviennent trop proches de zéro, ce qui pourrait rendre la matrice de rigidité singulière. On utilise la loi de pénalité de SIMP-Modifié [14, 139], que l'on considère comme étant la loi SIMP par la suite :

$$f(x_e) = \frac{E_{\min}}{E_0} + x_e^p \left(1 - \frac{E_{\min}}{E_0}\right) \quad (3.17)$$

où  $E_{\min}$  est choisi suffisamment petit mais non-nul. Comme décrit par Sigmund [139], l'un des avantages de cette reformulation est que la raideur minimale de la structure devient alors indépendante du facteur de pénalité. Néanmoins la modification de cette loi a un impact négligeable sur les termes de rigidité des éléments dont la densité est non-nulle. Les figures et résultats présentés précédemment restent donc valables. L'expression de l'équation (3.17) combinée avec l'équation (3.13) donne l'expression de  $\mathbf{K}(\underline{x})$  suivante :

$$\mathbf{K}(\underline{x}) = \mathcal{A}_{e=1}^n [E_{\min} + x_e^p (E_0 - E_{\min})] \mathbf{k}_e^0 \quad (3.18)$$

Il a été déterminé que le seul moyen de garantir une interprétation physique des zones de pseudo-densités intermédiaires (sous la forme de matériaux composites poreux) implique que  $p$  doit respecter la condition suivante [23] :

$$p \geq p^*(\nu_0) = \max \left\{ \frac{2}{1 - \nu_0}, \frac{4}{1 + \nu_0} \right\} \quad \text{en 2D} \quad (3.19a)$$

$$p \geq p^*(\nu_0) = \max \left\{ 15 \frac{1 - \nu_0}{7 - 5\nu_0}, \frac{3}{2} \frac{1 - \nu_0}{1 - 2\nu_0} \right\} \quad \text{en 3D} \quad (3.19b)$$

avec  $\nu_0$  le coefficient de Poisson du matériau. Les termes limitants proviennent du module de compressibilité et du module de cisaillement [72]. Pour des applications en 3D, on constate que le modèle est bien adapté pour des matériaux de type métaux qui ont un coefficient de Poisson proche de 0,3, mais pas pour des matériaux tels que des élastomères ( $\nu_0 \approx 0,5$ ) pour lesquels l'équation (3.19b) fait tendre  $p$  vers l'infini. Dans la suite de ce travail, il est choisi d'utiliser un coefficient de Poisson  $\nu_0 = 0,45$  pour l'élastomère et une valeur de pénalité  $p = 3$  afin de permettre un compromis acceptable entre l'incompressibilité du matériau et une borne inférieure de  $p$  suffisamment faible ( $\nu_0 = 0,45$  entraîne que  $p \geq 3,65$  en 2D et  $p \geq 8,25$  en 3D).

### 3.3.4 Sensibilité de complaisance

Comme introduit dans l'équation (3.7), on écrit la fonction complaisance  $c(\underline{x})$  sous la forme :

$$c(\underline{x}) = \underline{U}(\underline{x})^T \underline{F} = \underline{U}^T(\underline{x}) \mathbf{K}(\underline{x}) \underline{U}(\underline{x}) \quad (3.20)$$

où  $\underline{x}$  contient les variables de conception qui sont, ici, les densités élémentaires de matière.

Une fois l'expression de la fonction objectif définie en fonction des variables de conception, il faut déterminer la sensibilité de cette fonction à ces variables :

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = \frac{\partial \underline{U}^T(\underline{x})}{\partial x_e} \mathbf{K}(\underline{x}) \underline{U}(\underline{x}) + \underline{U}^T(\underline{x}) \frac{\partial \mathbf{K}(\underline{x})}{\partial x_e} \underline{U}(\underline{x}) + \underline{U}^T(\underline{x}) \mathbf{K}(\underline{x}) \frac{\partial \underline{U}(\underline{x})}{\partial x_e},$$

qui peut être simplifié par symétrie de  $\mathbf{K}$  :

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = \underline{U}^T(\underline{x}) \frac{\partial \mathbf{K}(\underline{x})}{\partial x_e} \underline{U}(\underline{x}) + 2 \underline{U}^T(\underline{x}) \mathbf{K}(\underline{x}) \frac{\partial \underline{U}(\underline{x})}{\partial x_e}, \quad (3.21)$$

Le terme  $\frac{\partial \mathbf{K}(\underline{x})}{\partial x_e}$  se déduit en dérivant l'équation (3.18)

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\underline{x})}{\partial x_e} = p x_e^{p-1} (E_0 - E_{\min}) \mathbf{K}_e^0, \quad (3.22)$$

où  $\mathbf{K}_e^0 = \mathcal{A}_{e=1}^n \delta_{ie} \mathbf{k}_i^0$  représente la matrice de l'élément "étendue" à la taille du maillage global ( $\delta_{ie}$  est le symbole de Kronecker). Dans l'équation (3.22), seul l'élément  $e$  intervient dans l'expression de la dérivée de  $\mathbf{K}(\underline{x})$  par rapport à  $x_e$ . Pour obtenir le terme  $\frac{\partial \underline{U}(\underline{x})}{\partial x_e}$ , nous avons besoin de dériver en premier lieu l'équation (3.14) par rapport aux densités :

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\underline{x})}{\partial x_e} \underline{U}(\underline{x}) + \mathbf{K}(\underline{x}) \frac{\partial \underline{U}(\underline{x})}{\partial x_e} = 0,$$

soit :

$$\frac{\partial \underline{U}(\underline{x})}{\partial x_e} = -\mathbf{K}(\underline{x})^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}(\underline{x})}{\partial x_e} \underline{U}(\underline{x}). \quad (3.23)$$

En introduisant l'expression de l'équation (3.23) dans l'équation (3.21), nous obtenons l'expression de la dérivée de la complaisance suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = \underline{U}^T(\underline{x}) \frac{\partial \mathbf{K}(\underline{x})}{\partial x_e} \underline{U}(\underline{x}) - 2 \underline{U}^T(\underline{x}) \underbrace{\mathbf{K}(\underline{x}) \mathbf{K}(\underline{x})^{-1}}_1 \frac{\partial \mathbf{K}(\underline{x})}{\partial x_e} \underline{U}(\underline{x}),$$

dont l'expression simplifiée donne :

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = -\underline{U}^T(\underline{x}) \frac{\partial \mathbf{K}(\underline{x})}{\partial x_e} \underline{U}(\underline{x}), \quad (3.24)$$

qui, combinée avec l'équation (3.22) revient à :

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = -p x_e^{p-1} (E_0 - E_{\min}) \underline{U}^T(\underline{x}) \mathbf{K}_e^0 \underline{U}(\underline{x}). \quad (3.25)$$

Cette dernière expression est celle qui est implémentée numériquement.

#### 3.3.5 Régularisation de la solution

Si l'on considère l'expression de la fonction objectif de l'équation (3.20) ainsi que celle de sa dérivée (3.24), le type de solution finale que l'on a tendance à obtenir comporte des zones de "damier" [52, 83, 136], comme illustré dans la figure 3.5b. Afin de rendre la solution plus physique, il faut ajouter une méthode de régularisation de la solution. Plusieurs techniques existent parmi lesquelles l'utilisation de patches [21], de contrôle de périmètre [13, 70], de contrôle de gradient globaux [22], ou de filtrage [135]. Ces différentes méthodes sont comparées dans [136]. La dernière technique mentionnée est utilisée dans la suite de cette thèse, et il est possible de trouver dans [139] une synthèse des différents filtres existants. Bien que la plupart des méthodes de filtrage soient heuristiques, elles présentent l'avantage de proposer des solutions similaires aux autres méthodes plus rigoureuses d'un point de vue mathématique tout en étant peu coûteuses en temps CPU et relativement simple à implémenter. Elles consistent à modifier les valeurs d'une grandeur élémentaire (généralement les variables de conception ou la sensibilité de la fonction coût par rapport à ces variables) au travers d'un filtre spatial dont l'objectif est de pondérer la valeur de la grandeur dans un élément ciblé par la valeur de ses éléments voisins. Un schéma décrivant ce principe est présenté à la figure 3.3, où l'on voit un damier dont les

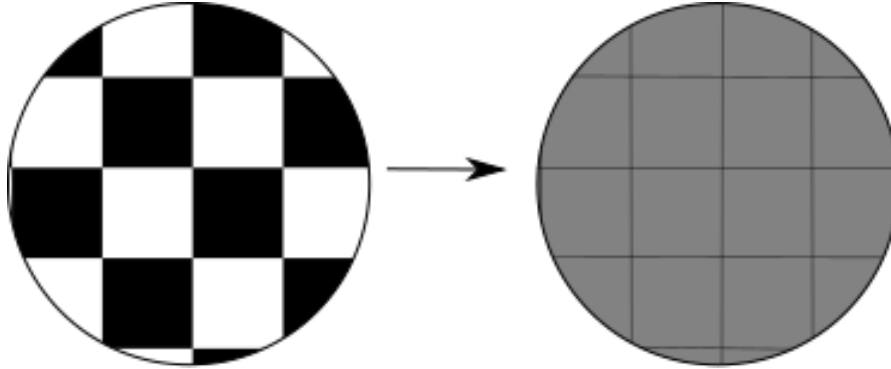


FIGURE 3.3 – Gauche : maillage en damier avant filtrage, droite : maillage régularisé après filtrage

éléments blancs représentent les éléments vides de matière (gauche) et les éléments noirs représentent les éléments contenant de la matière (droite).

Parmi les filtres existants, deux sont présentés dans cette section, le filtrage des densités [28, 32] et le filtrage des sensibilités de la fonction coût [135].

Le premier filtre consiste à modifier la valeur des densités élémentaires après chaque itération afin de toujours manipuler un ensemble  $\underline{x}$  homogénéisé. La nouvelle densité filtrée  $\tilde{x}_e$  est obtenue à partir des densités des éléments voisins d'après la loi suivante :

$$\tilde{x}_e = \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}_e} x_i v_i H_{ie}}{\sum_{i \in \mathcal{N}_e} v_i H_{ie}} \quad (3.26)$$

Dans cette équation,  $\mathcal{N}_e$  représente l'ensemble des éléments voisins de l'élément  $e$ ,  $x_i$  est la densité du voisin  $i$ ,  $v_i$  est le volume de l'élément  $i$  et  $H_{ie}$  est un opérateur représentant la distance entre l'élément de voisinage  $i$  et l'élément cible  $e$ .  $H_{ie}$  est défini par :

$$H_{ie} = \max(0, r_{\min} - \text{dist}(i, e)) \quad (3.27)$$

où  $r_{\min}$  est un paramètre choisi par l'utilisateur qui définit la taille du voisinage et  $\text{dist}(i, e)$  représente la distance entre le centre de l'élément  $i$  et le centre de l'élément  $e$ . Par conséquent, la taille de l'ensemble  $\mathcal{N}_e$  dépend du paramètre  $r_{\min}$  et le filtre devient obsolète lorsque  $r_{\min}$  est choisi très petit. On remarque que l'élément  $e$  est compris dans le voisinage et qu'il est le seul pour lequel son coefficient de pondération  $H_{ie} = H_{ee}$  vaut  $r_{\min}$ . Dans le cas d'un maillage pour lequel la taille des éléments n'est pas identique, un paramètre  $r_{e \min}$  est affecté à chaque élément  $e$ . Dans ce manuscrit, les applications concernées par cela comporte un  $r_{e \min}$  qui est caractérisé par la taille de maille  $h_e$  de l'élément en



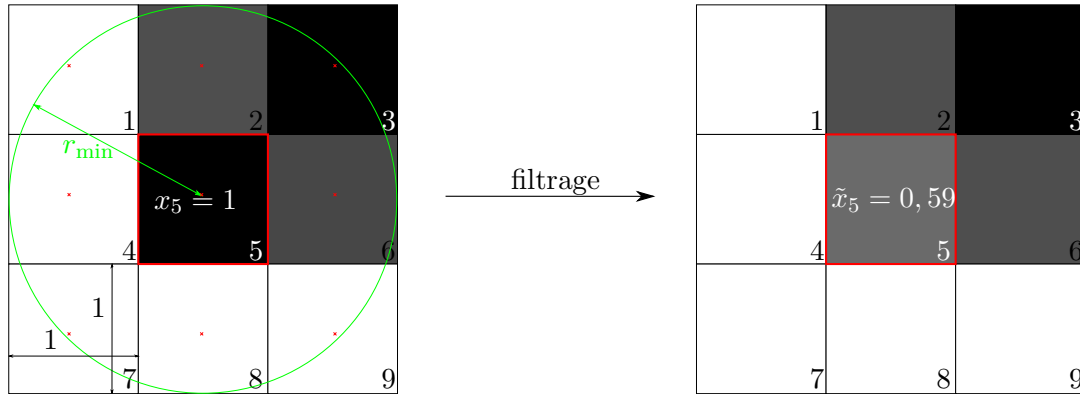


FIGURE 3.4 – Gauche : maillage en damier avant filtrage, droite : maillage régularisé après filtrage

question de la façon suivante :

$$r_{e \min} = \delta h_e \quad \text{avec } \delta \in \mathbb{R}_+^* \quad (3.28)$$

où il faut noter qu'ici, la convention sur la taille de maille  $h_e$  est de la définir comme étant la norme euclidienne de la différence entre les coordonnées des deux nœuds les plus éloignés de l'élément  $e$ . Le choix de  $\delta$  doit être fait méticuleusement car plus le voisinage  $\mathcal{N}$  d'un élément est grand, plus le temps de calcul est élevé. Ceci est illustré en détail dans la section §3.5.2.

Un exemple pour illustrer le fonctionnement du voisinage est montré à la figure 3.4 où l'on considère un maillage 2D de quadrangles réguliers. Ce maillage est une parcelle d'un maillage global ciblé sur l'élément 5 (encadré en rouge), et l'on peut également voir son voisinage constitué de la première couche d'éléments qui l'entoure. Du fait de la régularité du maillage, tous les volumes élémentaires  $v_i$  sont égaux. L'ensemble  $\mathcal{N}_e$  est composé de neuf éléments qui sont numérotés de 1 à 9. Sur le maillage avant filtrage, les éléments 1,4,7,8 et 9 ont une pseudo-densité  $x_1 = x_4 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$ , les éléments 2 et 6 ont une pseudo-densité  $x_2 = x_6 = 0,7$  et les éléments 3 et 5 ont une densité  $x_3 = x_5 = 1$ . On cherche à obtenir la pseudo-densité filtrée  $\tilde{x}_5$ , en choisissant un  $r_{\min} = 1,5$  dont le cercle d'influence correspondant est tracé en vert sur le schéma. Les éléments 1, 3, 7 et 9 ont moins d'influence sur  $\tilde{x}_5$  que les éléments 2, 4, 6 et 8 car les termes associés  $H_{ie}$  sont plus petits. En appliquant la formule de l'équation (3.26), on obtient la densité filtrée  $\tilde{x}_5 = 0,59$ , représentée sur la droite dans la figure 3.4. Une application similaire mais à l'échelle d'une structure globale est montrée à la figure 3.5. La modification apportée sur les variables de conception impacte la sensibilité de la complaisance et du

### 3.3. MÉTHODE SIMP POUR L'OPTIMISATION EN STATIQUE

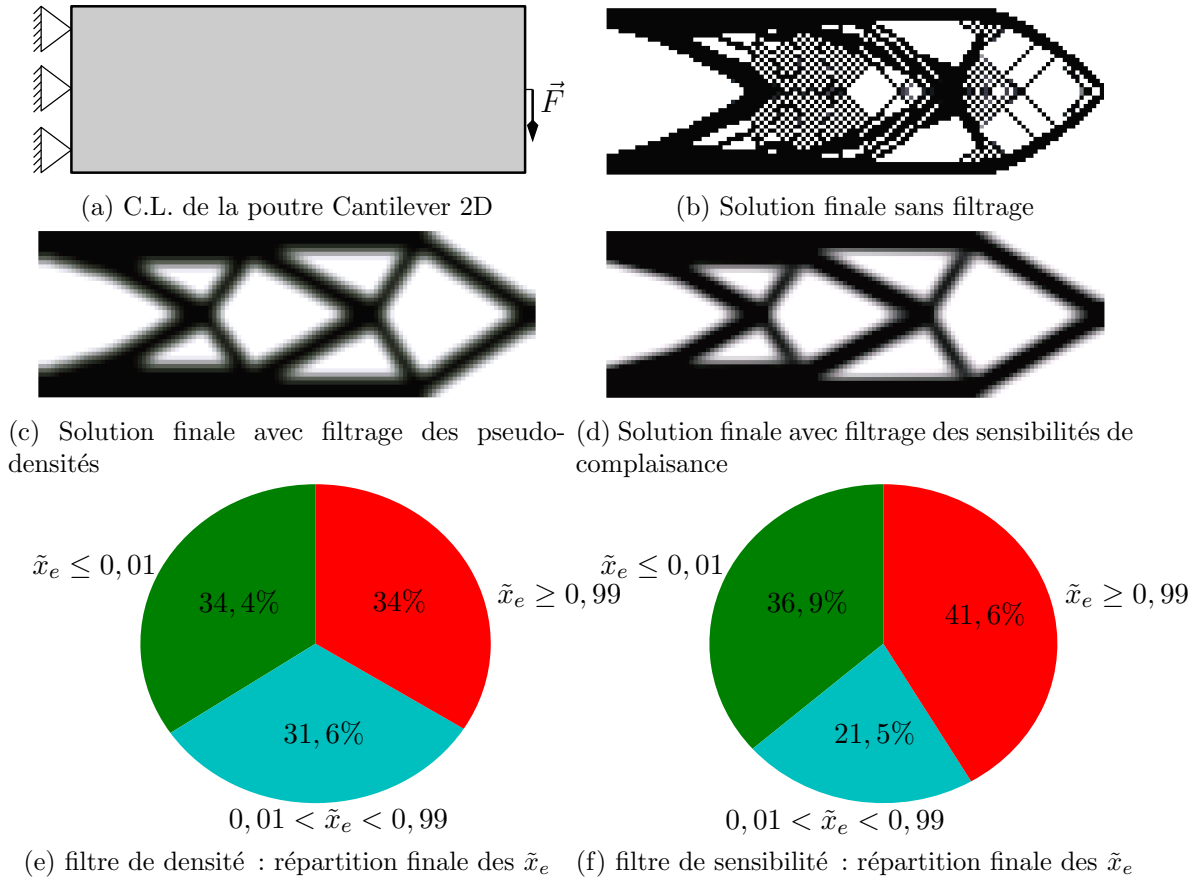


FIGURE 3.5 – Poutre Cantilever 2D - illustration des différents filtres

volume qui doivent être réécrites sous la forme d'un produit de fonction composée [135, 137] :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \sum_{e \in \mathcal{N}_j} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}_e} \frac{\partial \tilde{x}_e}{\partial x_j} = \sum_{e \in \mathcal{N}_j} \frac{1}{\sum_{i \in \mathcal{N}_e} H_{ie}} H_{je} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}_e} \quad (3.29)$$

dans laquelle  $\psi$  désigne soit la fonction complaisance  $c$ , soit la fonction contrainte  $v$ .

Le deuxième filtre consiste à réaliser une opération similaire que pour le premier filtre, mais au niveau des sensibilités de la complaisance seulement, au travers de l'expression suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = \frac{1}{\max(\gamma, x_e/v_e) \sum_{i \in \mathcal{N}_e} H_{ie}} \sum_{i \in \mathcal{N}_e} \frac{x_i}{v_i} \frac{\partial c}{\partial x_i} H_{ie} \quad (3.30)$$

où  $\gamma$  est choisi très petit mais non nul afin d'éviter la division par zéro [139].

La figure 3.5 présente les différentes solutions obtenues pour la poutre Cantilever en 2D selon le filtre choisi. Comme cela est décrit plus haut, on s'aperçoit que la solution finale obtenue sans filtrage (figure 3.5b) comporte plusieurs zones de damiers. Cette solution n'a pas vraiment de sens physique,

sauf si ces zones sont assimilées à des matériaux poreux (voir la méthode homogénéisation §3.2.3) ou à des matériaux lattice utilisés en fabrication additive. En revanche, les deux solutions obtenues respectivement avec le filtrage des densités (milieu gauche) et le filtrage des sensibilités (milieu droite) présentent deux structures en forme de treillis très similaires, et dont l'interprétation physique est plus justifiable. L'étude de la répartition de matière finale entre ces deux dernières solutions (figure 3.5e et 3.5f) montre néanmoins que la solution obtenue via le filtre sur les densités est moins aboutie, car elle contient plus de densités intermédiaires qu'avec l'autre filtre.

#### 3.3.6 Écriture du problème d'optimisation sous forme d'un lagrangien

Le problème de l'équation (3.7) consiste à trouver le jeu de paramètres  $\underline{x}^*$  minimisant la complaisance  $c(\underline{\tilde{x}})$  dans le cadre de la statique et pour une fraction volumique donné :

$$\begin{aligned} \underline{x}^* &= \underset{x}{\text{Argmin}} c(\underline{\tilde{x}}) \\ \text{avec : } \quad c(\underline{\tilde{x}}) &= \underline{U}^T(\underline{\tilde{x}})\underline{F} = \underline{U}^T(\underline{\tilde{x}})\mathbf{K}(\underline{\tilde{x}})\underline{U}(\underline{\tilde{x}}) \\ v(\underline{\tilde{x}}) &\leq 0 \\ 0 \leq \tilde{x}_e &\leq 1 \quad \text{où } e \in [1, n_{\text{elem}}] \\ \mathbf{K}(\underline{\tilde{x}})\underline{U}(\underline{\tilde{x}}) &= \underline{F} \end{aligned} \tag{3.31}$$

où :

$$v(\underline{\tilde{x}}) = V(\underline{\tilde{x}}) - \alpha V_0 \tag{3.32a}$$

$$\text{et } V(\underline{\tilde{x}}) = \underline{\tilde{x}}^T \underline{v} \tag{3.32b}$$

et  $\underline{v} = [v_1, v_2, \dots, v_{n_{\text{elem}}}]$ .

Ce problème d'optimisation est ré-écrit sous la forme d'un Lagrangien  $\mathcal{L}$  dépendant des densités  $\underline{\tilde{x}}$  et d'une variable duale  $\lambda$  appelée multiplicateur de Lagrange afin de pouvoir déterminer le ou les points stationnaires  $\underline{x}^*$  :

$$\mathcal{L}(\underline{\tilde{x}}, \lambda) = c(\underline{\tilde{x}}) + \lambda v(\underline{\tilde{x}}) \tag{3.33}$$

où le signe positif devant le multiplicateur de Lagrange provient du fait que la contrainte est de type convexe [88]. Puis on calcule et annule la sensibilité de  $\mathcal{L}(\underline{\tilde{x}}, \lambda)$  par rapport aux densités filtrées et au multiplicateur de Lagrange afin de déterminer le multiplicateur de Lagrange optimal  $\lambda^*$  et le jeu de

### 3.4. ALGORITHME DE RÉOLUTION

---

paramètres  $\underline{x}^*$  :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{\underline{x}}, \lambda)}{\partial x_e} \right|_{\underline{x}^*} = \left. \frac{\partial c(\tilde{\underline{x}})}{\partial x_e} \right|_{\underline{x}^*} + \lambda^* \left. \frac{\partial v(\tilde{\underline{x}})}{\partial x_e} \right|_{\underline{x}^*} = 0 \\ \left. \frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{\underline{x}}, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\underline{x}^*} = v(\tilde{\underline{x}})|_{\underline{x}^*} = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

$\frac{\partial v(\tilde{\underline{x}})}{\partial x_e}$  est la dérivée de la contrainte de volume, que l'on peut déduire en dérivant l'équation (3.32a) et qui vaut  $\frac{\partial v(\tilde{\underline{x}})}{\partial x_e} = v_e$  où  $v_e$  est le volume de l'élément  $e$ . En manipulant la première équation, on obtient la condition d'optimalité suivante :

$$\frac{\left. \frac{\partial c(\tilde{\underline{x}})}{\partial x_e} \right|_{\underline{x}^*}}{-\lambda^* \left. \frac{\partial v(\tilde{\underline{x}})}{\partial x_e} \right|_{\underline{x}^*}} = 1 \quad (3.35)$$

La deuxième équation de (3.34) donne l'égalité suivante :

$$\underline{x}^{*T} \underline{v} = \alpha V_0 \quad (3.36)$$

On retrouve dans cette équation la forme non relaxée de la contrainte d'inégalité de l'équation (3.2).

L'exemple de la figure 3.5 est repris pour illustrer l'effet de la contrainte. La figure 3.6 montre l'évolution du volume de la structure  $V(\tilde{\underline{x}})$  exprimé en pourcentage, comparé à la fraction volumique définie au départ :  $\alpha = 50\%$ . Les variations que l'on observe sont dues à l'ordre de la précision  $\epsilon_d$  choisie dans l'algorithme décrit dans la section §3.4.2. Elles sont au maximum de  $\pm 0,02\%$ . Le graphe montre que dans le cas de la poutre Cantilever 2D,  $V(\tilde{\underline{x}})$  satisfait la contrainte à chaque itération.

## 3.4 Algorithme de résolution

### 3.4.1 Schéma logique

L'algorithme de l'optimisation topologique de la méthode SIMP est présenté à la figure 3.7 :

- Initialisation : L'étape d'initialisation comprend la création du maillage, la spécification des conditions aux limites ainsi que des efforts extérieurs. Les maillages utilisés en optimisation topologique sont généralement structurés.
- Résolution de  $\mathbf{K}\underline{U} = \underline{F}$  : Une fois la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  obtenue, le problème éléments finis est résolu (équation (2.29)) afin de déterminer les inconnues en déplacement  $\underline{U}$ .  $\mathbf{K}$  et  $\underline{U}$  dépendent des variables de conception  $\underline{x}$  qui évoluent à chaque itération  $k$ . Par conséquent,  $\mathbf{K}$  et  $\underline{U}$  doivent être recalculés à chaque itération.

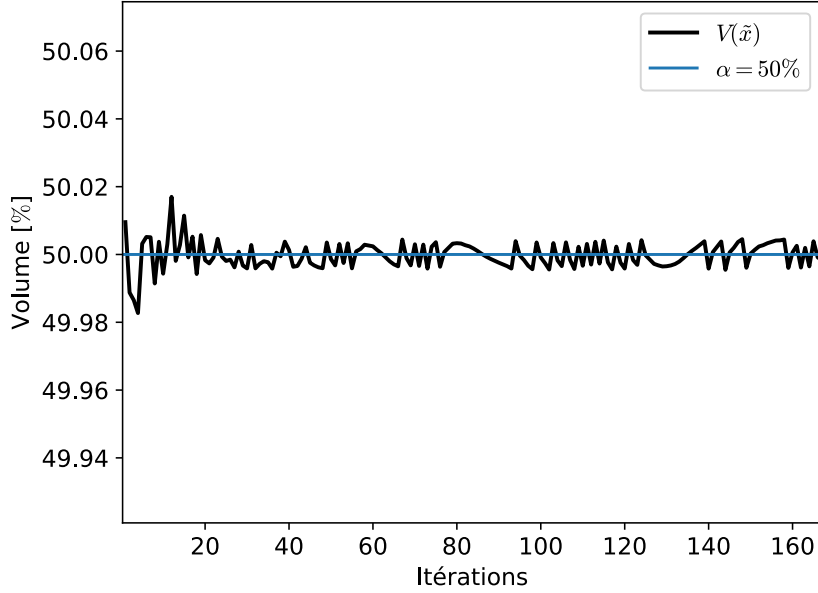


FIGURE 3.6 – Évolution du volume  $V(\tilde{x})$  au cours de l'optimisation (en % par rapport à  $V_0$ )

- Calcul de  $\Delta c^{(k)}$  et  $\Delta v^{(k)}$  : Les densités  $\underline{x}$  puis les densités filtrées  $\tilde{x}$  sont déterminées par application d'une des lois de pénalisation présentées. La fonction objectif est ensuite calculée, puis sa sensibilité par rapport aux variables de conception  $\Delta c^{(k)} = \frac{\partial c}{\partial \underline{x}}$  ainsi que la sensibilité de la fonction contrainte  $\Delta v^{(k)} = \frac{\partial v}{\partial \underline{x}}$ . Les opérations de filtrage (§3.3.5) sont réalisées à cette étape.
- $\lambda^{(l+1)} \leftarrow \lambda^{(l)}$  :  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange (équation (3.33)) dont la valeur est fixée de manière à satisfaire la condition d'optimalité dépendante de  $\Delta c^{(k)}$ ,  $\Delta v^{(k)}$  et  $\lambda^*$ . Il est mis à jour par dichotomie jusqu'à atteindre sa valeur optimale  $\lambda^*$ .
- $\underline{x}^{\text{new}} \leftarrow \underline{x}^{(k)}$  : Le terme  $\lambda^{(l+1)}$  obtenu permet de calculer le nouveau jeu des variables de conception  $\underline{x}^{\text{new}}$ . Plusieurs méthodologies de recherche de solution existent, et l'optimiseur employé ici est l'algorithme OC (voir §3.4.2) qui repose sur l'équation (3.35).
- $|\lambda^{(l+1)} - \lambda^{(l)}| \leq \epsilon_\lambda$  ? : Tant que  $|\lambda^{(l+1)} - \lambda^{(l)}| > \epsilon_\lambda$  (où  $\epsilon_\lambda$  est choisi suffisamment petit), cela veut dire que le jeu de paramètres  $\underline{x}^{\text{new}}$  n'est pas optimal et que la contrainte de volume n'est pas satisfaite.
- $\underline{x}^{(k+1)} \leftarrow \underline{x}^{\text{new}}$  : Lorsque le terme  $\lambda^*$  optimal est trouvé, cela implique que le  $\underline{x}^{\text{new}}$  calculé par l'intermédiaire de celui-ci est optimal. Celui-ci est conservé et sert de nouvel ensemble des variables de conception pour l'itération suivante.

### 3.4. ALGORITHME DE RÉOLUTION

---

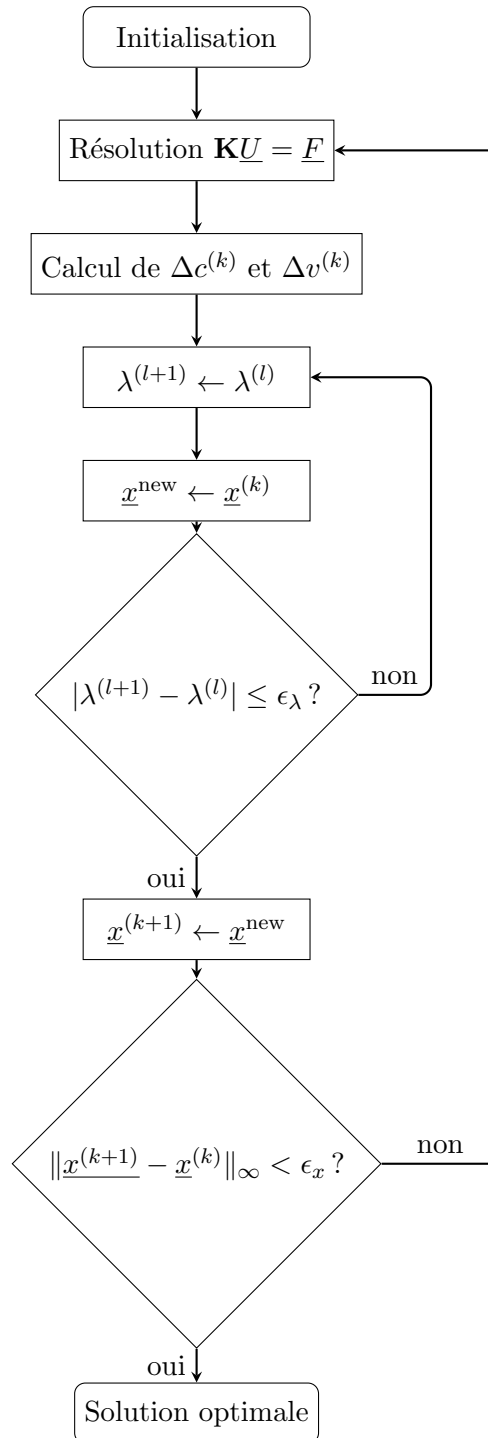


FIGURE 3.7 – Algorithme d'optimisation topologique avec SIMP

### 3.4. ALGORITHME DE RÉOLUTION

---

- $\|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}\|_\infty < \epsilon_x$  ? : Le nouveau jeu de paramètres  $\underline{x}^{(k+1)}$  est soumis à un test de convergence qui consiste à vérifier si  $\|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}\|_\infty < \epsilon_x$  avec  $\epsilon_x$  un réel suffisamment petit choisi arbitrairement. Bien que cette condition d'arrêt soit heuristique et ne prouve pas la convergence d'un point de vue mathématique, on observe néanmoins que son utilisation produit de bons résultats [137, 166]. Si la convergence n'est pas atteinte, la procédure ci-dessus est exécutée à nouveau jusqu'à convergence.
- Solution optimale : Lorsque la solution optimale  $\underline{x}^*$  est atteinte, les résultats sont post-traités comme par exemple à l'aide de méthodologies de reconstruction de géométrie [85, 93].

#### 3.4.2 Optimiseur OC (Optimality Criteria)

L'optimiseur OC [21, 22, 127, 129, 166] est fréquemment utilisé dans le cadre de l'optimisation topologique car il permet de converger vers une solution sans être trop coûteux en temps de calcul. De plus, son implémentation est relativement simple. Les méthodes OC et SIMP sont régulièrement associées pour la résolution de problèmes d'optimisation statique [14, 97, 137].

À chaque itération, le terme suivant est calculé :

$$B_e = \frac{\frac{\partial c(\bar{x})}{\partial x_e}}{-\lambda \frac{\partial v(\bar{x})}{\partial x_e}} \quad (3.37)$$

et on l'insère dans le schéma de mise à jour des  $x_e$  suivant :

$$x_e^{\text{new}} = \begin{cases} \max(x_{\text{low}}, x_e - m) & \text{si } x_e B_e^\eta \leq \max(x_{\text{low}}, x_e - m) \\ \min(x_{\text{up}}, x_e + m) & \text{si } x_e B_e^\eta \geq \min(x_{\text{up}}, x_e + m) \\ x_e B_e^\eta & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.38)$$

où  $x_{\text{low}}$  et  $x_{\text{up}}$  représentent les bornes minimales et maximales des pseudo-densités,  $m$  est un facteur limitant l'amplitude de variation lors du passage de  $x_e$  vers  $x_e^{\text{new}}$  si celui-ci est trop important (généralement,  $m$  est pris également à 0,2), et  $\eta = 0,5$  est un coefficient d'amortissement numérique [22]. Lorsque la solution optimale est atteinte, on a  $B_e = 1$ , c'est-à-dire que l'équation (3.35) est satisfaite.

La valeur de  $x_e^{\text{new}}$  dépend de la valeur de  $\lambda$  grâce au schéma de l'équation (3.38), ce qui veut dire qu'il est calculé à l'aide d'une boucle itérative sur  $\lambda$  jusqu'à atteindre  $\lambda^*$ . Cela assure également que la contrainte de volume est respectée.

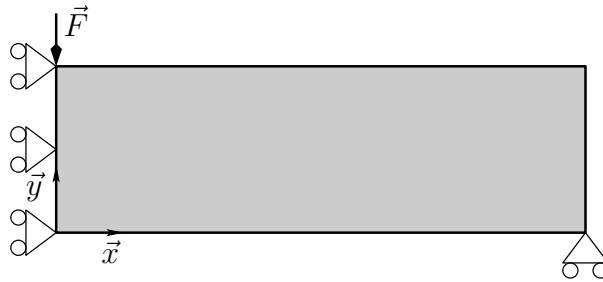


FIGURE 3.8 – Configuration initiale de la poutre MBB 2D

## 3.5 Résultats

L'implémentation de la méthode d'optimisation topologique SIMP est effectuée dans un code maison développé pour la thèse. Ce code est écrit en Python pour les calculs au niveau global et en Fortran pour les calculs au niveau élémentaire. Dans un premier temps sont présentés des cas de validation en 2D et en 3D provenant de la littérature, puis dans un second temps, des applications spécifiques à la problématique de la thèse sont décrites et commentées.

### 3.5.1 Cas de validation 2D et 3D

#### 3.5.1.1 Poutre MBB 2D

L'objectif de ce premier cas est de valider l'implémentation dans le code maison de l'optimisation topologique en 2D. L'exemple choisi est la poutre MBB<sup>14</sup> 2D qui est étudiée dans [14]. La configuration initiale est présentée à la figure 3.8 et est composée d'un domaine de conception  $\Omega$  représentant un demi-pont comportant une condition de symétrie dans la direction  $\vec{x}$  sur le bord gauche et un appui simple bloquant le déplacement dans la direction  $\vec{y}$  au niveau du coin bas droit. Un effort ponctuel unitaire est appliqué dans le coin haut gauche dans la direction  $-\vec{y}$ . Les éléments utilisés sont des quadrangles à 4 nœuds. Les différents paramètres du calcul sont présentés dans le tableau 3.2.

La figure 3.9 permet de comparer les résultats obtenus respectivement par [14] et avec le code maison en utilisant les filtres de sensibilité (gauche) et de densité (droite). On remarque que les solutions obtenues sont strictement identiques d'un point de vue qualitatif en comparant visuellement les solutions, ainsi que d'un point de vue quantitatif en comparant les fonctions objectifs. Ce cas valide la bonne implémentation du code en 2D.

---

14. MBB : Messerschmitt-Bolkow-Blohm



Paramètres	
Maillage	60×20 (Q4)
$\alpha$	50%
$r_{\min}$	2,4
$E_0$	1
$E_{\min}$	$1.10^{-9}$
$\nu$	0,3

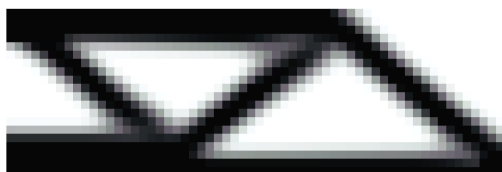
TABLE 3.2 – Synthèse des paramètres du calcul MBB 2D



(a) Solution obtenue par [14] -  $c^* = 216,81$



(b) Solution obtenue par [14] -  $c^* = 233,71$



(c) Solution via le code maison -  $c^* = 216,81$



(d) Solution via le code maison -  $c^* = 233,71$

FIGURE 3.9 – Comparaison des solutions optimales de la poutre MBB 2D, ((a) et (c) : filtrage des sensibilités, (b) et (d) : filtrage des densités)

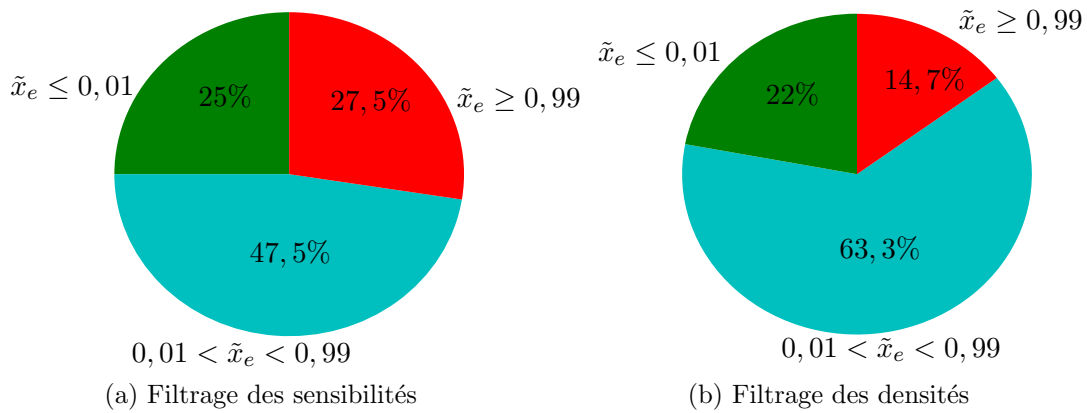


FIGURE 3.10 – Répartition de matière dans la solution finale pour la poutre MBB 2D

Cependant, l'utilisation des filtres a un impact sur la solution finale. Bien qu'elles soient identiques visuellement, on remarque que la complaisance finale obtenue  $c^*$  est environ 7% plus faible avec le filtrage des sensibilités qu'avec le filtrage des densités. D'autre part, le nombre d'itérations (144 avec le filtre de densité contre 106 pour le filtre de sensibilité) est plus faible lorsque le filtre de sensibilité est utilisé. Enfin, la figure 3.10 présente la répartition de matière dans la solution finale, et l'on voit que le nombre d'éléments dont la densité se trouve dans l'intervalle  $[0,01; 0,99]$  est 15,7% plus faible dans le cas du filtrage des sensibilités que dans l'autre cas, ce qui indique que la solution finale contient plus d'éléments qui ont convergé. Ces densités intermédiaires sont notamment visibles en comparant les figures 3.9c et 3.9d, où l'on peut voir que les "barres orientées à  $\pm 45^\circ$ " sont plus épaisses avec le filtrage des densités, parce que le gradient de densité entre 1 et 0 est plus faible. Ce résultat confirme le choix effectué dans [14] d'appliquer le filtrage des sensibilités sur ce cas test à la place du filtrage des densités utilisé au préalable dans [137].

### 3.5.1.2 Poutre Cantilever 3D

Le deuxième cas de validation concerne une poutre Cantilever définie en 3D et provenant de [97]. La configuration initiale est présentée dans la figure 3.11 et est constituée d'une poutre de faible épaisseur encastree à l'une de ses extrémités et soumise à un effort sur l'arête du bas de l'extrémité opposée. Les autres bords sont libres en déplacement. Les données de ce calcul sont décrites dans le tableau 3.3.

La figure 3.12 met en confrontation la solution obtenue dans la littérature et la solution obtenue avec le code maison, toutes deux obtenues avec un filtre sur les densités. La solution obtenue avec le code maison présente un affichage des densités  $x_e > 0,5$ , et une valeur de complaisance finale

### 3.5. RÉSULTATS

---

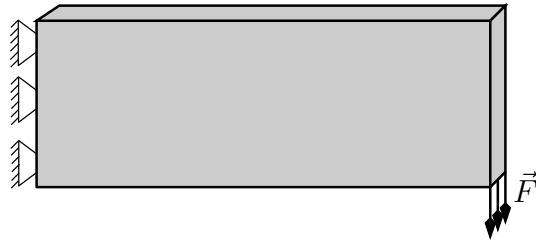


FIGURE 3.11 – Configuration initiale de la poutre Cantilever 3D

Paramètres	
Maillage	60×20×4 (H8)
$\alpha$	30%
$r_{\min}$	1,5
$E_0$	1
$E_{\min}$	1.10 <sup>-9</sup>
$\nu$	0,3

TABLE 3.3 – Synthèse des paramètres du calcul Cantilever 3D

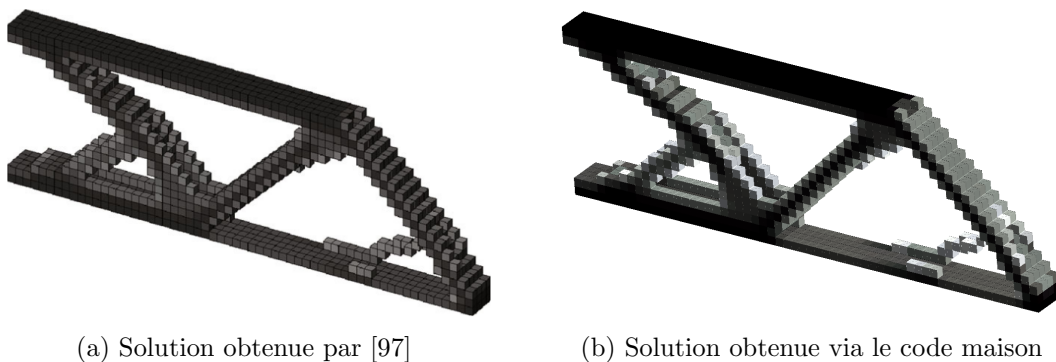


FIGURE 3.12 – Solution optimales pour la poutre Cantilever 3D

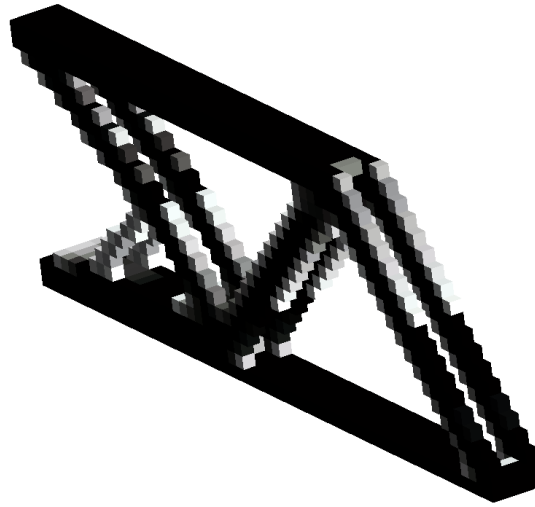


FIGURE 3.13 – Solution finale de la poutre cantilever 3D avec un filtre sur les sensibilités

$c^* = 2417,54$  après 155 itérations. Les deux solutions (figure 3.12a pour [97] et figure 3.12b pour le code maison) sont difficiles à comparer, dû à l'absence d'informations sur la solution provenant de [97] : l'auteur ne précise ni la valeur de  $c^*$  ni le seuil choisi sur la valeur de  $\tilde{x}_e$  pour afficher ou non un élément. On remarque cependant que les formes sont quasiment identiques, avec notamment la même dissymétrie visible dans la partie basse droite de la structure. Les petites différences observées peuvent s'expliquer par plusieurs facteurs, comme une légère différence dans les conditions initiales ou le choix dans l'affichage de la forme finale post-traitée.

Bien que l'auteur n'ait pas présenté de résultats sur cette application avec le filtre de sensibilité, il est intéressant de le faire ici (figure 3.13) car celui-ci présente un aspect final ainsi que des performances supérieures à la solution résultant de l'utilisation du filtrage des densités. On voit que le cœur de la poutre est évidé, là où la solution précédente conserve de la matière. De plus, le calcul converge en 54 itérations, soit un temps CPU divisé par presque 3 (en considérant que les filtres ont le même coût CPU, ce qui est sensiblement le cas). La fonction objectif de la valeur obtenue avec le filtrage des sensibilités est de  $c^* = 2063,57$ , soit environ 17% de moins. Enfin, la comparaison de la répartition des densités de la figure 3.14 montre que le nombre d'éléments dont la densité vaut 0 ou 1 est 18,3% plus élevé.

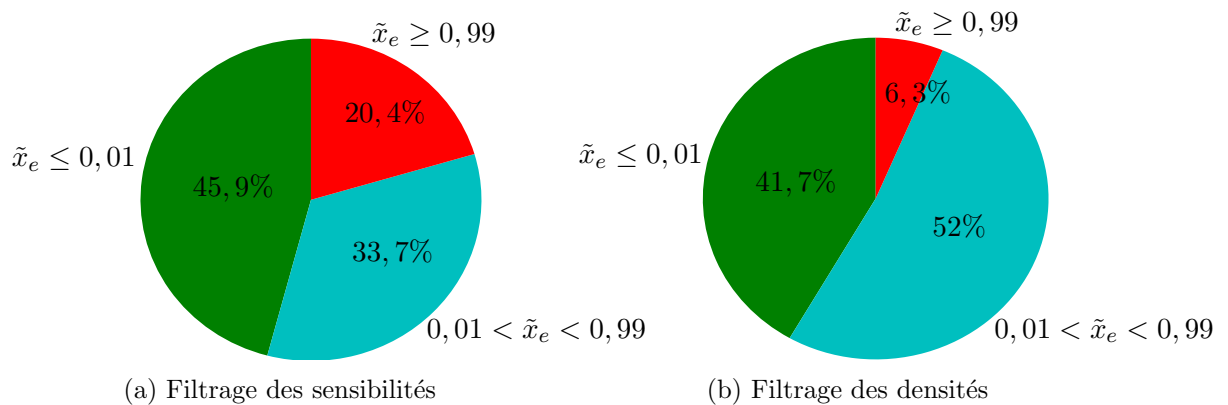


FIGURE 3.14 – Répartition de matière dans la solution finale pour la poutre Cantilever 3D

### 3.5.1.3 Bilan

L'étude de ces deux cas de validation montre que le code implémenté entraîne des résultats en adéquation avec ceux présents dans la littérature, ce qui permet de le valider.

## 3.5.2 Application à des plots amortissants 3D

Cette section présente des résultats pour une structure en forme de plot amortissant cylindrique en 3D, que l'on suppose disposé entre deux sous-systèmes d'un ensemble mécanique afin d'en assurer la liaison.

### 3.5.2.1 Définition de la géométrie, du maillage et des conditions au limites

La géométrie et le maillage utilisé sont définis à la figure 3.15. La géométrie est constituée d'un cœur cylindrique reprenant les dimensions des plots amortissants (non-optimisés) utilisés dans [108] et d'une couche extérieure supplémentaire dont le but est d'élargir le domaine de conception afin d'autoriser l'ajout de matière en cours d'optimisation si cela est nécessaire. Afin d'avoir un maillage structuré, des éléments hexaédriques à 8 nœuds sont utilisés (33 516 éléments et 35 860 nœuds).

Le module d'Young est égal à la raideur statique du Deltane 350,  $E = 0,327$  MPa et le coefficient de Poisson vaut  $\nu = 0,45$ . Cette raideur est considérée très faible (d'un facteur inférieur à  $10^{-3}$ ) devant la raideur des structures dont elle fait la jointure. On peut donc faire l'hypothèse que les surfaces supérieures et inférieures en contact avec les deux structures assemblées ont des mouvements de corps rigides (§2.3.2).

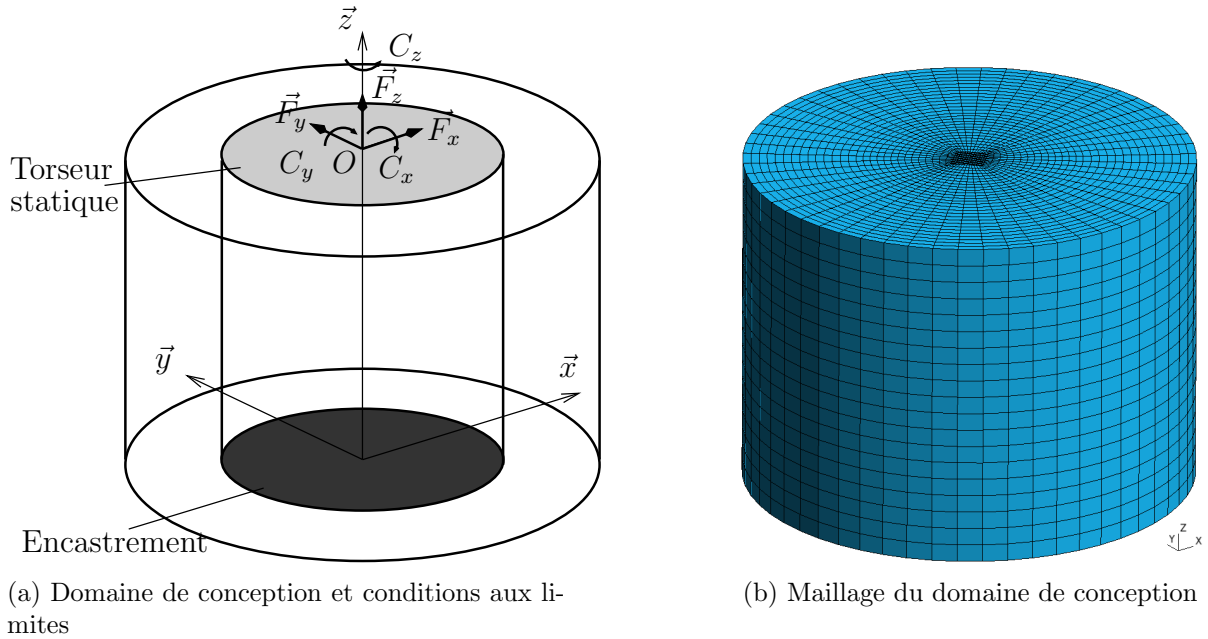


FIGURE 3.15 – Géométrie et maillage du domaine de conception du plot amortissant

D'un point de vue des conditions aux limites, la surface du bas est encastree (zone sombre sur figure 3.15a), celle du haut est soumise à un chargement sous la forme d'un torseur statique composé d'une résultante et d'un moment  $\mathcal{T} = \{F_x \vec{x} + F_y \vec{y} + F_z \vec{z} \mid C_x \vec{x} + C_y \vec{y} + C_z \vec{z}\}_O$ . Dans la suite, deux cas correspondants aux sollicitations de résultante transverse selon l'axe  $\vec{x}$  ( $F_x \neq 0, F_y = F_z = C_x = C_y = C_z = 0$ ) et de couple autour de  $\vec{x}$  ( $C_x \neq 0, F_x = F_y = F_z = C_y = C_z = 0$ ) sont présentés pour des valeurs  $\delta = 1$  et  $\delta = 2$  (équation (3.28)). Ces résultats ainsi que ceux des autres sollicitations sont présentés dans l'annexe A.2. Enfin, les autres bords extérieurs sont libres en déplacement.

### 3.5.2.2 Définition du voisinage

Les éléments n'ayant pas tous la même taille, cela implique que la taille du voisinage pour le filtre doit être adaptée à l'aide de l'équation (3.28). Deux valeurs pour le paramètre  $\delta$  sont choisies arbitrairement :  $\delta = 1$  et  $\delta = 2$ . Elles sont suffisamment grandes pour compter plusieurs éléments dans le voisinage afin d'éviter la présence de damiers, et suffisamment petites pour ne pas prendre en compte trop d'éléments ce qui pénaliserait le temps de calcul. Le voisinage engendré par les valeurs de  $\delta$  pour un élément particulier est visible à la figure 3.16 pour  $\delta = 1$  et à la figure 3.17 pour  $\delta = 2$ . La variation de couleur dans les éléments sur les vues en coupe des figures 3.16c et 3.17c est proportionnelle à

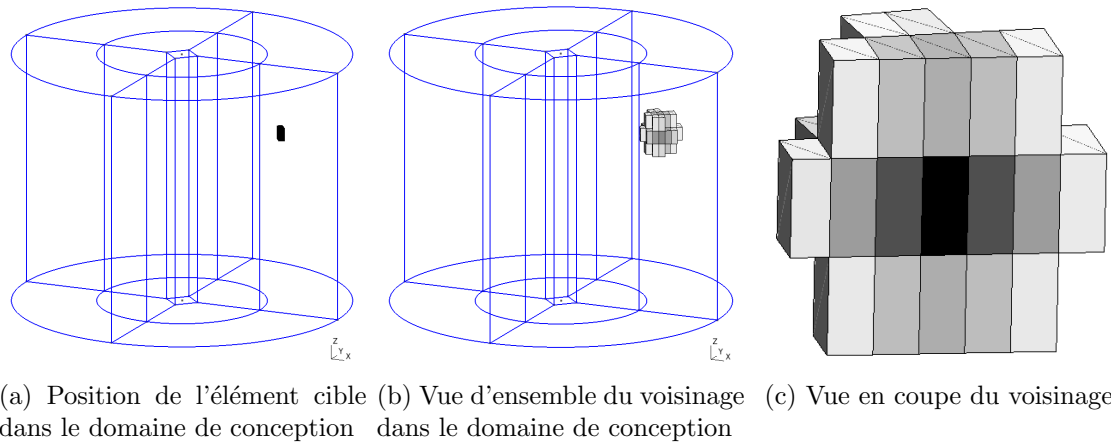


FIGURE 3.16 – Voisinage d'un élément pour  $\delta = 1$

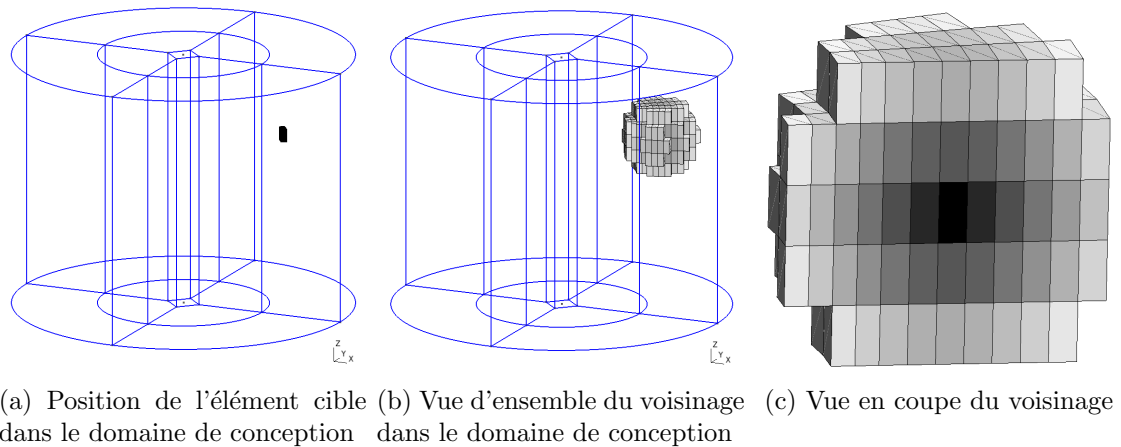


FIGURE 3.17 – Voisinage d'un élément pour  $\delta = 2$

l'influence de l'élément voisin sur l'élément cible, via le terme  $H_{ie}$  de l'équation (3.27). Dans la mesure où les éléments n'ont pas la même taille, la répartition des voisins n'est pas tout à fait centrée sur l'élément cible (en noir). Cela est notamment visible à la figure 3.17c où l'on dénombre une épaisseur de six éléments à gauche de la cible c'est-à-dire vers l'intérieur du cylindre, et seulement cinq à droite, vers l'extérieur.

### 3.5.2.3 Lissage des densités aux nœuds

Une projection aux nœuds des densités élémentaires est réalisée pour post-traiter la solution finale obtenue :

$$\hat{x}_i = \frac{\sum_{e \in \mathcal{N}_i} x_e v_e}{\sum_{e \in \mathcal{N}_i} v_e} \quad (3.39)$$

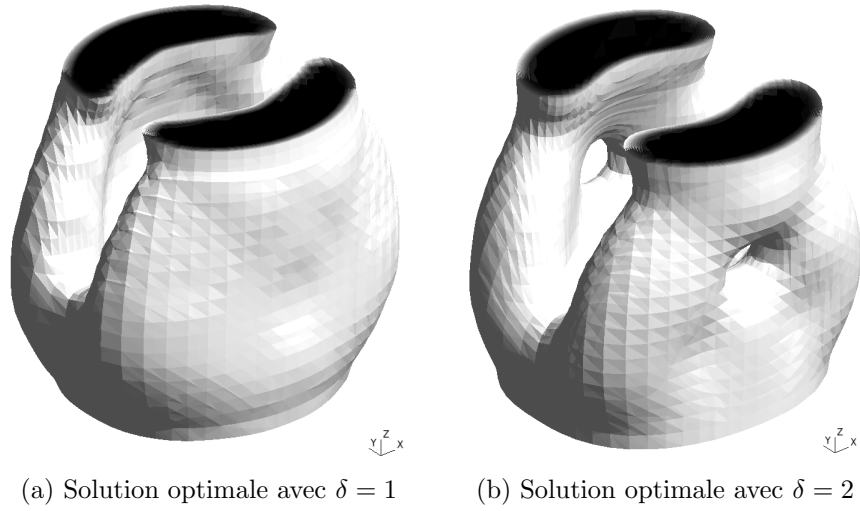


FIGURE 3.18 – Solutions optimales lissées pour le cas d’une résultante suivant  $\vec{x}$ , avec affichage des densités lissées  $x_e > 0,5$

avec  $\hat{x}_i$  la densité projetée au nœud et  $\mathcal{N}_i$  l’ensemble des éléments connectés au nœud  $i$ . La méthode utilisée est similaire à la méthode de lissage des contraintes. Appliquée à la solution optimale, elle permet de lisser la surface extérieure afin de rendre la forme globale moins discontinue. Cela permet d’améliorer le rendu visuel des formes optimales et peut aussi être considéré comme une première étape vers la reconstruction du maillage pour la réalisation de calculs à posteriori. Enfin, pour toutes les figures de la section suivante, les densités  $x_e < 0,5$  sont arbitrairement tronquées.

### 3.5.2.4 Résultats

Les cas de chargement en résultante dans la direction  $\vec{x}$  et en couple autour de  $\vec{x}$  avec  $\delta = 1$  et  $\delta = 2$  sont présentés dans cette section. Le but est de voir l’évolution de la solution finale en fonction du chargement, mais aussi de voir l’influence du paramètre  $\delta$  pour une même sollicitation.

**Cas de la résultante dans la direction  $\vec{x}$**  Un chargement en résultante selon  $\vec{x}$  dans la direction transverse à l’axe du plot ( $F_x \neq 0, F_y = F_z = C_x = C_y = C_z = 0$ ) est appliqué sur toute sa surface supérieure (figure 3.15a). Les formes optimales lissées sont présentées à la figure 3.18.

La figure 3.18 présente l’aspect général en vue isométrique de la solution après lissage des densités. On remarque que la forme générale est similaire et contient une zone évidée au niveau du cœur du plot. La principale différence entre les deux est que pour le cas  $\delta = 2$ , la solution présente un trou



### 3.5. RÉSULTATS

---

Performances		
Valeur de $\delta$	1	2
Nb. itérations	92	101
Complaisance finale	0,8644	1,050

TABLE 3.4 – Comparaison des performances des deux calculs pour la sollicitation en cisaillement

dans la direction  $\vec{y}$  orthogonale à la direction du chargement, à mi-hauteur. L'influence du voisinage avec  $\delta = 2$  est plus importante que pour  $\delta = 1$  ce qui peut expliquer que le trou est présent dans un cas mais pas dans l'autre.

Pour conclure, la forme obtenue est cohérente vis à vis des conditions aux limites définies. Les solutions obtenues dans les deux configurations sont relativement semblables d'un point de vue géométrique, mais leurs topologies sont différentes puisque le cas avec  $\delta = 2$  contient plus de trous. Ces trous se trouvent au niveau de la fibre neutre, ce qui peut expliquer l'absence de matière dans le deuxième cas.

Du point de vue des performances des deux calculs, les nombres d'itérations ainsi que les valeurs finales de la fonction objectif sont présentées dans le tableau 3.4. On constate que le cas  $\delta = 1$  converge environ 10% plus rapidement que l'autre cas et que sa complaisance finale est environ 21% plus faible.

**Cas d'un couple autour de  $\vec{x}$**  Un couple est appliqué autour de l'axe transverse  $\vec{x}$  ( $C_x \neq 0, F_x = F_y = F_z = C_y = C_z = 0$ ), correspondant au couple  $C_x$  sur la figure 3.15a. Les formes optimales lissées sont présentées à la figure 3.19.

La figure 3.19 présente une vue isométrique des solutions obtenues pour les deux types de voisinages sélectionnés. Les deux solutions sont différentes, notamment à cause du fait que la solution pour  $\delta = 2$  est divisée en deux parties qui ne sont pas reliées. Néanmoins elles ont en commun le fait que la partie centrale du plot ne contient pas de matière. Cette zone correspond à la partie autour de la fibre neutre qui est moins contrainte que les parties qui se situent au niveau des parois externes en  $\pm \vec{y}$ . D'ailleurs, on peut voir que la matière se trouve principalement dans ces zones.

Les performances du calcul sont synthétisées dans le tableau 3.5. La solution avec le plus petit  $\delta$  est quasiment deux fois plus lente en terme de convergence, mais présente une complaisance finale environ 7,5% plus faible.

### 3.5. RÉSULTATS

---

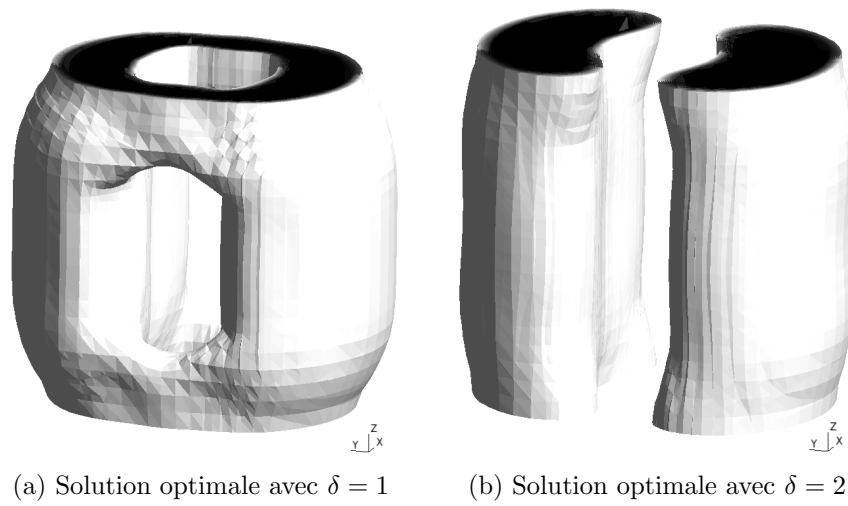


FIGURE 3.19 – Solutions optimales lissées pour le cas d’un couple autour de  $\vec{x}$ , avec affichage des densités lissées  $x_e > 0,5$

Performances		
Valeur de $\delta$	1	2
Nb. itérations	40	21
Complaisance finale	$1,488 \times 10^{-3}$	$1,599 \times 10^{-3}$

TABLE 3.5 – Comparaison des performances des deux calculs pour la sollicitation en flexion

#### 3.5.2.5 Bilan et limites de l'étude

Les cas présentés dans cette section ont montré qu'il est possible d'obtenir des solutions optimisées topologiquement qui sont cohérentes avec l'analyse mécanique que l'on peut faire à priori d'après la configuration de départ. Les calculs convergent assez rapidement vers un minimum. Cependant, on voit que le choix des paramètres d'optimisation ( $\delta, p, \alpha$ , etc.) a une influence sur la solution finale car plusieurs minimum locaux peuvent exister, comme on le voit sur les cas tests du plot amortissant et comme l'évoquent [6, 22, 120, 143]. L'étude est concluante quant aux performances de la méthode d'optimisation topologique implémentée en statique dans le code maison.

## 3.6 Proposition d'amélioration

Dans cette section, des propositions d'amélioration de la méthode SIMP sont présentées afin d'augmenter les performances du calcul, notamment en terme de temps de calcul, tout en maintenant un bon niveau de précision de la solution optimale. De plus, l'implémentation est simple. Dans un premier temps, une autre méthode d'optimisation topologique par pénalisation (RAMP) est introduite, présentée en détails puis comparée à SIMP. Dans un second temps, deux méthodologies de couplage des méthodes SIMP et RAMP sont exposées et discutées. Une étude comparative est menée au travers de quelques applications numériques afin de conclure quant à leurs performances respectives.

### 3.6.1 Introduction à la méthode RAMP

Au sein de la famille des méthodes d'optimisation topologique, la méthode RAMP fait partie de la classe des méthodes par pénalisation, au même titre que SIMP. Cette méthode a été introduite par Stolpe et Svanberg [142] après qu'il ait été mis en évidence que SIMP peut ne pas respecter les conditions de Hashin-Shtrikman [72] lorsque la pénalité est trop faible, là où RAMP garantit de les respecter, même en cas de pénalité faible ou unitaire [143]. Cependant, l'emploi de la méthode dans cette section repose sur le fait qu'elle possède des propriétés intéressantes lorsque les densités intermédiaires sont élevées, comme expliqué après.

La loi de pénalisation de RAMP est :

$$f(x_e) = \frac{x_e}{1 + q(1 - x_e)} \quad (3.40)$$

### 3.6. PROPOSITION D'AMÉLIORATION

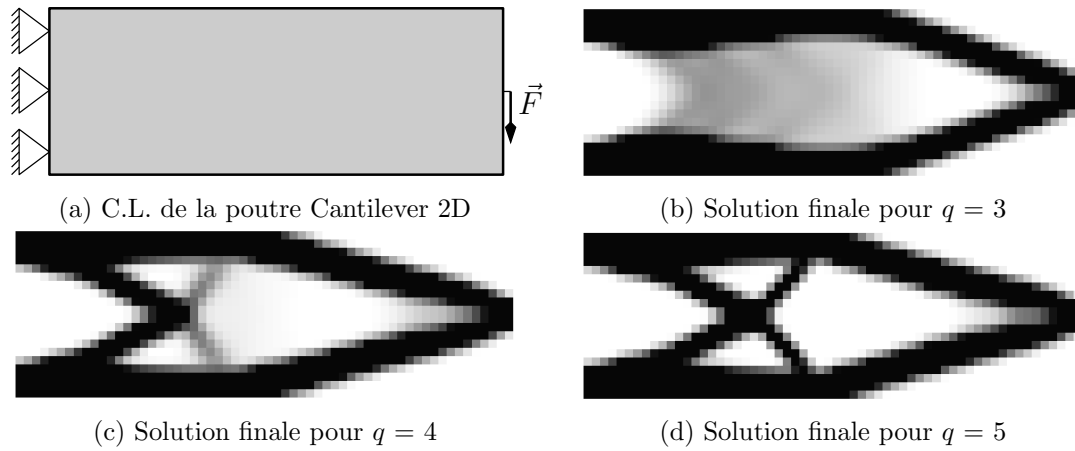


FIGURE 3.20 – Poutre Cantilever 2D calculée avec la loi RAMP

Valeur de $q$	RAMP		
	3	4	5
Complaisance finale	198,79	201,69	198,28
Nb. itérations	119	128	135
Solution	Non-physique	Physique	Physique

TABLE 3.6 – Comparaison des solutions d'une poutre cantilever 2D pour différentes valeurs de  $q$  (RAMP)

où  $q$  est le facteur de pénalité. L'exemple de la figure 3.20 montre l'influence de la valeur de  $q$  sur la solution finale. Parmi les valeurs courantes, les figures 3.20b, 3.20c et 3.20d montrent que choisir  $q$  égal à 4 ou 5 est le plus susceptible de converger vers une solution physique, se rapprochant donc de la valeur  $p = 3$  pour la méthode SIMP [142, 160]. La solution pour  $q = 3$  n'est pas physique, contrairement à celles obtenues pour  $q = 4$  et  $q = 5$ , elle peut donc être éliminée. Le tableau 3.6 permet de voir que la valeur finale de la fonction objectif vaut 201,69 dans le cas  $q = 4$ , contre 198,28 pour  $q = 5$ . En revanche, le cas  $q = 4$  converge en 128 itérations contre 135 pour  $q = 5$ , ce qui induit un temps de calcul plus faible. Les deux solutions présentent donc des avantages et des inconvénients permettant de faire un choix selon l'objectif recherché (gain de temps ou qualité de la solution). Enfin, comme pour SIMP, un choix de  $q$  trop faible entraîne une convergence lente et une solution non-physique, tandis qu'un choix de  $q$  trop élevé entraîne une vitesse de convergence élevée qui peut empêcher le calcul de converger vers un minimum local et entraîner des oscillations sur les valeurs de densités élémentaires.

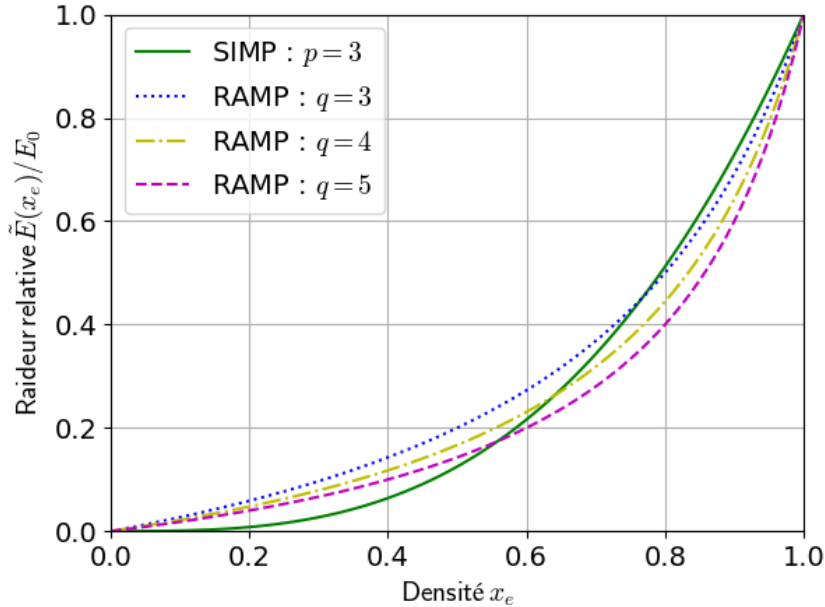


FIGURE 3.21 – Comparaison de l'influence des pénalités entre SIMP et RAMP

### 3.6.2 Comparaison entre les méthodes SIMP et RAMP

Une comparaison des solutions finales obtenues avec SIMP et RAMP est réalisée dans ce paragraphe. La différence entre les deux lois est visible à la figure 3.21, pour des valeurs de pénalités données. Trois valeurs de pénalité  $q$  sont présentées ( $q = 3$  en pointillés bleus,  $q = 4$  en tirets-points alternés jaune et  $q = 5$  en traits discontinus violets) et la courbe de SIMP obtenue avec  $p = 3$  (ligne continue verte) est tracée afin de les comparer. Dans le cas des densités intermédiaires élevées, la méthode RAMP est plus efficace que la méthode SIMP car elle possède une pente plus forte. Dans le cas des densités faibles mais non-nulles, la méthode SIMP donne de meilleurs résultats car la pente est plus faible.

Afin de comparer les performances des deux méthodes, nous considérons deux cas d'étude distincts : la poutre Cantilever 2D présentée précédemment (figures 3.2, 3.20) et la poutre MBB 2D (figure 3.8).

#### 3.6.2.1 Cas 1 : Poutre Cantilever 2D

Nous considérons la configuration présentée en figure 3.20a. Les résultats sont déjà présentés sur la figure 3.20. Ils sont consignés dans le tableau 3.7 et permettent de mettre en valeur que la méthode

### 3.6. PROPOSITION D'AMÉLIORATION

---

	SIMP	RAMP
Valeur de pénalité	$p = 3$	$q = 5$
Complaisance finale	189,84	198,28
Nb. itérations	60	135

TABLE 3.7 – Comparaison des performances SIMP vs RAMP pour la poutre Cantilever 2D

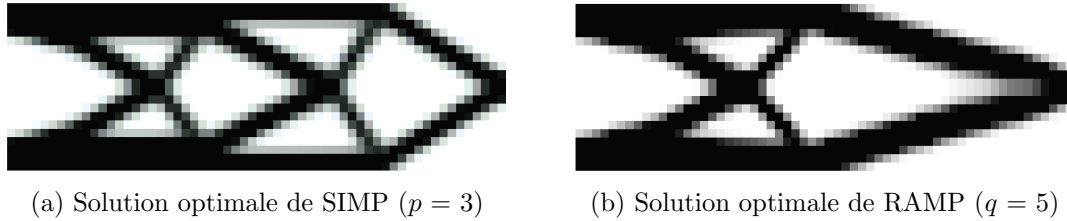


FIGURE 3.22 – Cas de la poutre Cantilever

SIMP est bien plus performante, que ce soit au niveau de la convergence du calcul (60 itérations contre 135) ou de la valeur finale de la fonction objectif (189,84 contre 198,28). On observe que les formes finales sont différentes (figure 3.22), ce qui signifie que les deux méthodes ont convergé vers un minimum local différent. La comparaison des valeurs finales de la fonction objectif permet de déduire que le minimum local trouvé grâce à la méthode SIMP propose une solution répondant mieux à l'objectif fixé.

La solution de la figure 3.22a correspondant à la méthode SIMP avec une pénalité  $p = 3$  est celle qui satisfait le mieux le critère d'optimisation. De plus, son temps de calcul est relativement faible et la forme finale est physique.

#### 3.6.2.2 Cas 2 : Poutre MBB 2D

Le cas de la poutre MBB 2D est identique au cas de la poutre Cantilever 2D pour ce qui est de la fonction objectif, du maillage et des paramètres matériau. Seules les conditions aux limites sont modifiées et sont présentées sur la figure 3.23a.

Les performances des calculs sont présentées dans le tableau 3.8 et les formes finales sont visibles sur les figures 3.23b et 3.23c.

Pour cette application, on remarque que les solutions finales sont similaires ce qui indique qu'elles convergent vers le même minimum local. Au niveau des performances, cette fois-ci RAMP est plus rapide que SIMP d'un point de vue du temps de calcul, puisque le nombre d'itérations est réduit de

### 3.6. PROPOSITION D'AMÉLIORATION

	SIMP	RAMP
Valeur de pénalité	$p = 3$	$q = 5$
Complaisance finale	203,35	204,23
Nb. itérations	94	74

TABLE 3.8 – Comparaison des performances SIMP vs RAMP pour la poutre MBB 2D

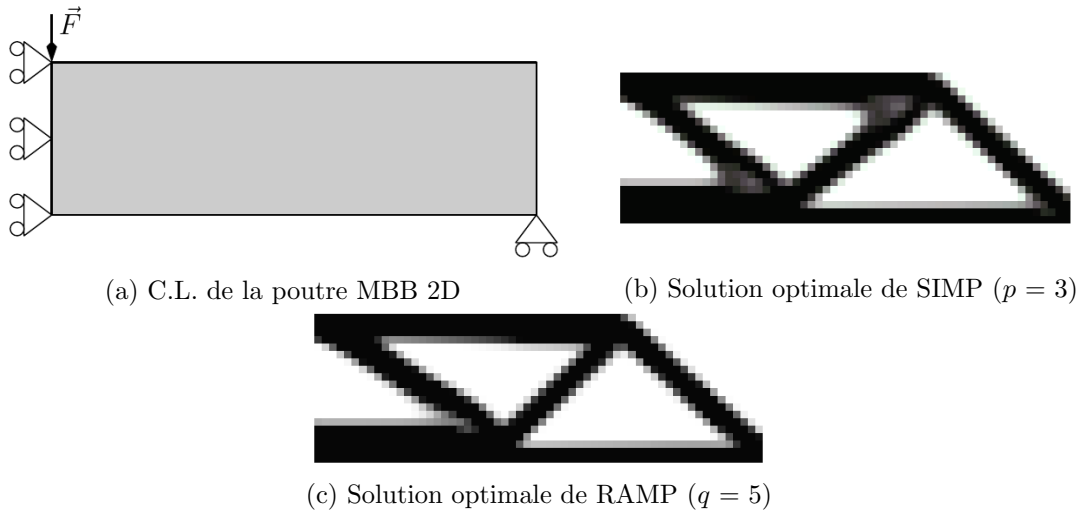


FIGURE 3.23 – Cas de la poutre MBB

21%. La complaisance, quant à elle, est sensiblement identique puis que l'écart est inférieur à 0,5% en faveur de SIMP.

#### 3.6.3 Combinaisons de ces méthodes

Les résultats précédents montrent que les méthodes SIMP et RAMP ont des avantages respectifs qui rendent efficace leur utilisation dans des cas distincts (gestion des hautes densités pour RAMP et des faibles densités pour SIMP). L'objectif de cette section est de combiner les avantages de ces deux méthodes afin de proposer deux nouvelles solutions performantes pour un large champ d'application.

Deux options possibles sont envisagées et présentées afin de combiner ces deux méthodes, dont une expression générale peut alors être écrite de la manière suivante :

$$f_i(x_e) = \Phi_s(x_e)f_s(x_e) + \Phi_r(x_e)f_r(x_e) \quad (3.41)$$

où  $f_i$  représente la nouvelle loi de pénalisation étudiée,  $\Phi_s$  et  $\Phi_r$  forment une partition de l'unité et sont respectivement les poids des lois SIMP et RAMP,  $f_s = \frac{E_{\min}}{E_0} + x_e^p(1 - \frac{E_{\min}}{E_0})$  est la loi de pénalisation

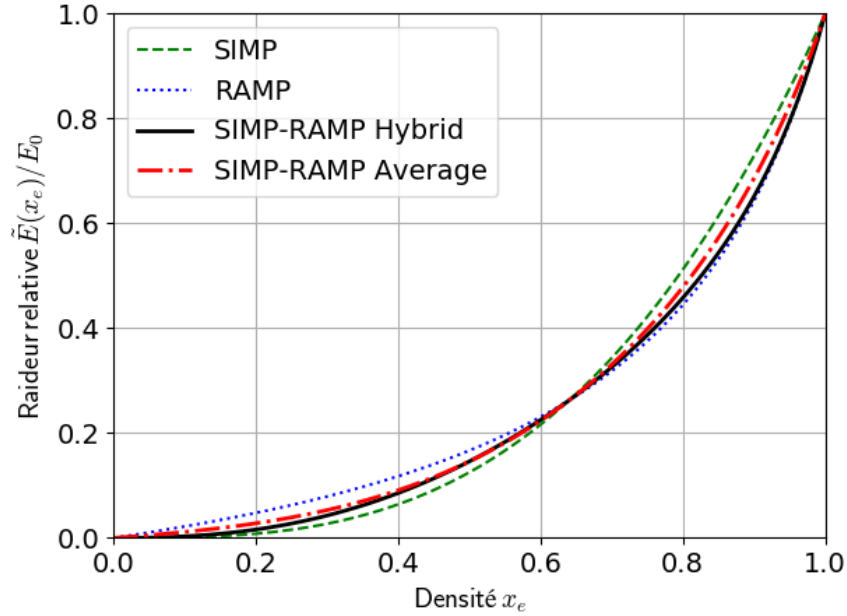


FIGURE 3.24 – Lois de pénalité Hybrid et Average

de SIMP (équation (3.17)) et  $f_r = \frac{x_e}{1+q(1-x_e)}$  est celle de RAMP (équation (3.40)).

La première option, appelée SIMP-RAMP Hybrid consiste à créer une fonction hybride  $f_{\text{HYBR}}$  dont le but est de favoriser la méthode SIMP lorsque la densité élémentaire est faible, puis de favoriser la méthode RAMP lorsque la densité est élevée. Les fonctions poids choisies ici sont des polynômes de degré 1 :

$$\begin{cases} \Phi_s = 1 - x_e \\ \Phi_r = x_e \end{cases} \quad (3.42)$$

La deuxième option, appelée SIMP-RAMP Average consiste à créer une fonction  $f_{\text{AVER}}$  moyennant les deux lois SIMP et RAMP sur tout le domaine de définition des densités. Cela revient à définir les valeurs des fonctions  $\Phi_s$  et  $\Phi_r$  :

$$\begin{cases} \Phi_s = \frac{1}{2} \\ \Phi_r = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.43)$$

L'impact de ces deux nouvelles lois sur les densités  $x_e$  est illustré dans la figure 3.24.

### 3.6.4 Résultats

Les deux cas d'étude présentés en §3.6.2 sont repris dans cette section afin d'étendre la comparaison des résultats aux deux propositions faites dans la section précédente, et d'évaluer leurs performances.



### 3.6. PROPOSITION D'AMÉLIORATION

	SIMP	RAMP	Hybrid	Average
$\Phi_s$	1	0	$1-x_e$	$1/2$
$\Phi_r$	0	1	$x_e$	$1/2$
Valeur de pénalité	$p = 3$	$q = 5$	$p = 3 \ \& \ q = 5$	$p = 3 \ \& \ q = 5$
Complaisance finale	189,84	198,28	194,12	189,63
Nb. itérations	60	135	115	44

TABLE 3.9 – Performance des différentes lois pour la poutre Cantilever 2D

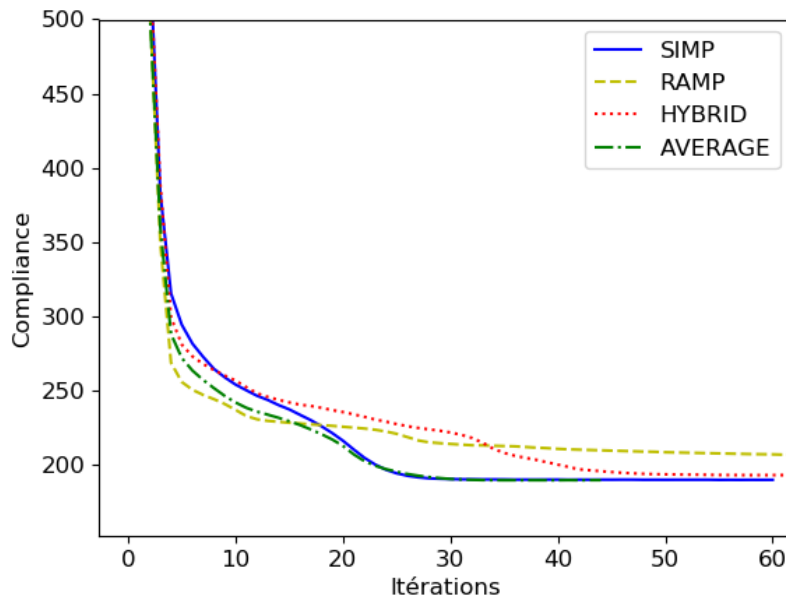


FIGURE 3.25 – Cantilever 2D : Évolution de la complaisance au cours des itérations

#### 3.6.4.1 Cas 1 : Poutre Cantilever 2D

Le tableau 3.9 compare les résultats précédents pour SIMP et RAMP avec ceux des deux nouvelles méthodes proposées. Le graphe de la figure 3.25 présente l'évolution de la complaisance jusqu'à la 60<sup>ème</sup> itération.

La figure 3.25 montre l'évolution de la complaisance pendant l'optimisation pour chacune des lois de pénalisation. On voit que la courbe de SIMP (bleue continue) est celle qui converge le plus lentement des quatre lois sur les premières itérations, puis la plus rapide sur les dernières itérations.

La loi RAMP (ligne jaune discontinue) est la plus rapide sur les premières itérations, puis la plus lente ensuite. Son nombre final d'itérations pour atteindre la convergence est de 135 contre 60 pour

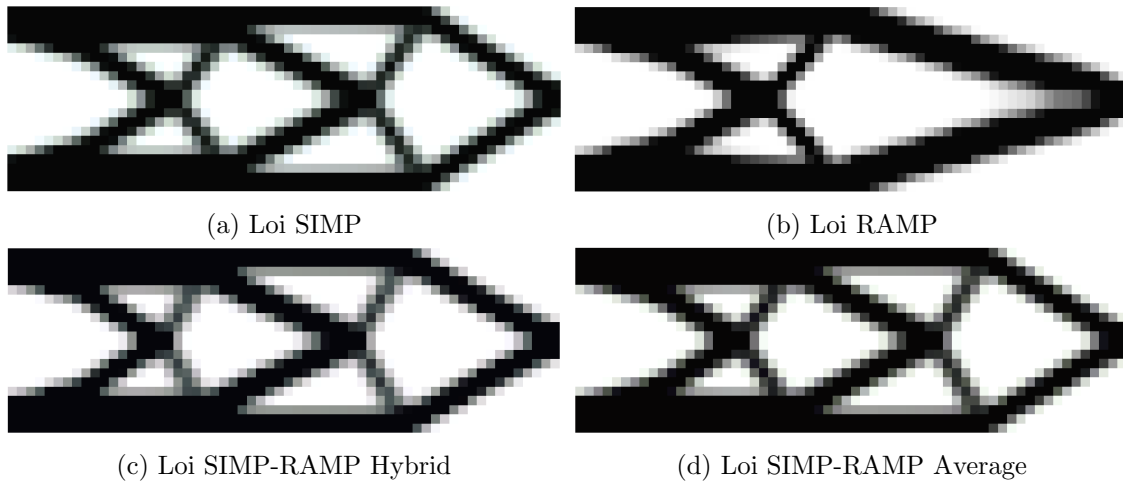


FIGURE 3.26 – Formes des solutions optimales obtenues avec les différentes lois pour la poutre Cantilever 2D

SIMP.

La loi Hybrid (ligne rouge en pointillés) cumule les défauts des deux méthodes puisque sa convergence est assez lente sur les deux phases. Sa performance en terme de fonction objectif est 2,1% meilleure que RAMP et 2,3% moins bonne qu'avec SIMP. Du point de vue du nombre d'itérations, elle se situe entre SIMP et RAMP. D'autre part, la forme finale (figure 3.26c) se rapproche de celle de SIMP.

La méthode Average (ligne verte pointillés discontinue) cumule les atouts de SIMP et RAMP puisqu'elle possède une convergence assez rapide tout au long de l'optimisation. De plus, la valeur de sa complaisance finale est la meilleure de toutes les méthodes. Du point de vue du nombre d'itérations, on note une diminution de 26,7% par rapport à SIMP. Enfin, la figure 3.26d montre que la forme finale est similaire à celle obtenue avec SIMP.

#### 3.6.4.2 Cas 2 : Poutre MBB 2D

Le tableau 3.10 rappelle les résultats précédents pour SIMP et RAMP, et les compare avec les deux méthodes proposées. Le graphe de la figure 3.27 présente l'évolution de la complaisance jusqu'à la 80<sup>ème</sup> itération. Les observations sur les vitesses de convergence de chacune des méthodes, mentionnées dans l'exemple précédent sont aussi valables sur ce cas, bien que cette fois-ci, RAMP converge plus vite que SIMP.

### 3.6. PROPOSITION D'AMÉLIORATION

---

	SIMP	RAMP	Hybrid	Average
$\Phi_s$	1	0	$1-x_e$	$1/2$
$\Phi_r$	0	1	$x_e$	$1/2$
Valeur de pénalité	$p = 3$	$q = 5$	$p = 3 \ \& \ q = 5$	$p = 3 \ \& \ q = 5$
Complaisance finale	203,35	204,23	205,00	203,89
Nb. itérations	94	74	91	48

TABLE 3.10 – Performance des différentes lois pour la poutre MBB 2D

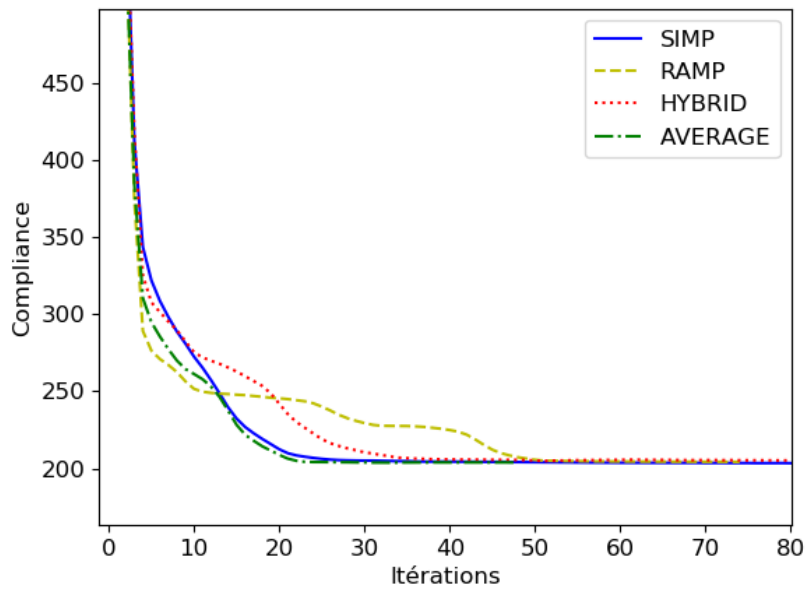


FIGURE 3.27 – MBB 2D : Évolution de la complaisance au cours des itérations

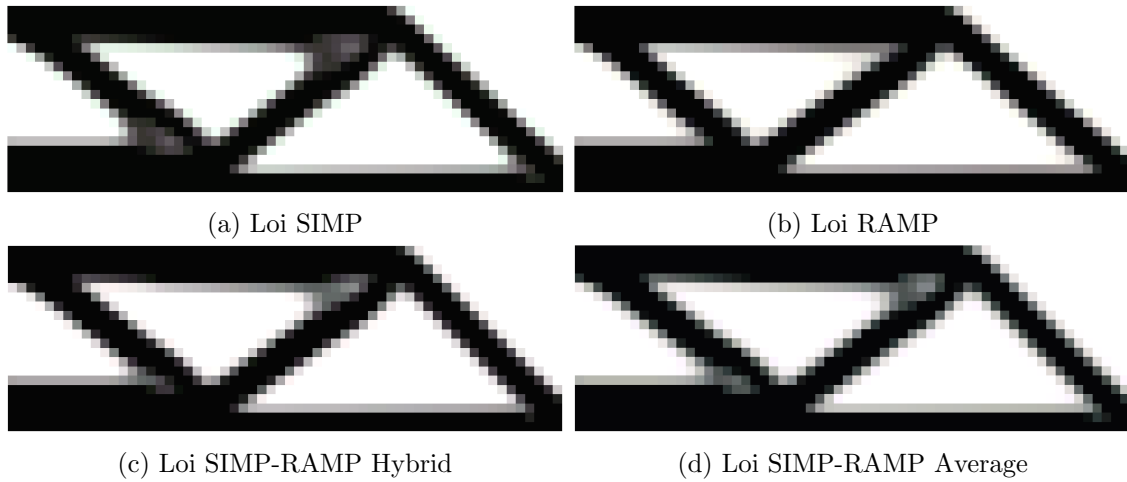


FIGURE 3.28 – Formes des solutions optimales obtenues avec les différentes méthodes pour la poutre MBB 2D

Au niveau des performances, la loi Hybrid donne la moins bonne solution des quatre méthodes que ce soit par rapport à la valeur finale de la fonction objectif (respectivement 0,4% et 0,8% plus élevée que RAMP et SIMP) ou par rapport au nombre d'itérations (respectivement 23% et -3,1% par rapport à RAMP et SIMP).

Concernant Average, les performances de la solution sont similaires aux autres du point de vue de la complaisance (0,5% plus élevée que SIMP et 0,5% plus faible que RAMP). Du point de vue du temps de calcul, on obtient une amélioration de 35,1% par rapport à RAMP et 48,9% de moins que SIMP.

Pour cet exemple, on voit à la figure 3.28 que les différentes formes finales ont la même topologie et que la forme est semblable.

#### 3.6.5 Bilan

Cette investigation sur les performances des différentes méthodes ainsi que sur différentes façons de les coupler afin de bénéficier de leurs points forts respectifs, a permis de mettre en valeur une méthode efficace, SIMP-RAMP Average. Elle permet à la fois de réduire le temps de calcul en favorisant une meilleure convergence de la recherche de l'optimum, et une conservation des bonnes performances au regard de la fonction objectif, voire une amélioration dans certains cas.

De plus, la méthode SIMP-RAMP Average s'avère facile à implémenter car les fonctions  $\Phi_s$  et

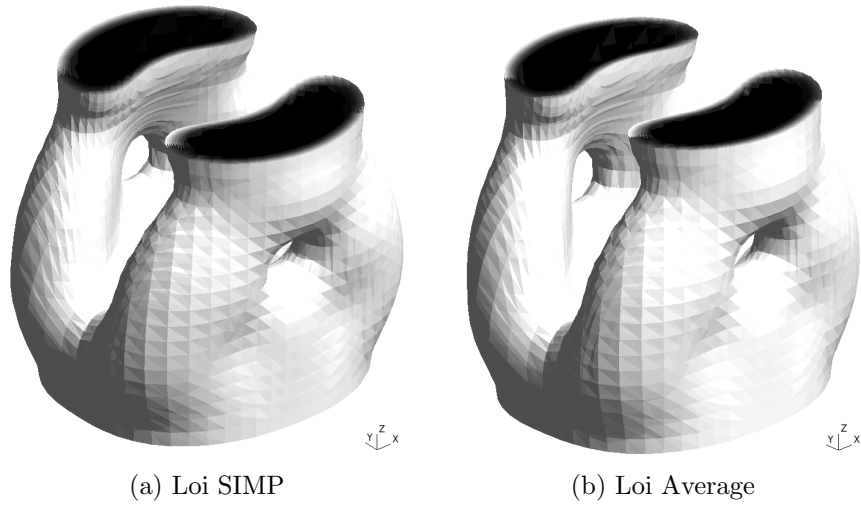


FIGURE 3.29 – Comparaison des solutions obtenues avec SIMP et Average pour le cas d'une résultante suivant  $\vec{x}$

$\Phi_r$  ne dépendent pas des valeurs de densités  $x_e$  à l'itération  $k$  (de même pour SIMP et RAMP), contrairement à la méthode SIMP-RAMP Hybrid.

### 3.6.6 Application de la méthode Average au Plot 3D

La méthode Average fournit de bons résultats sur les cas 2D présentés précédemment. Nous étendons ici son utilisation à la géométrie 3D du plot amortissant et présentons une comparaison des résultats avec les deux cas traités dans la partie §3.5.2. Les autres cas sont présentés dans l'annexe A.3.

#### 3.6.6.1 Cas 1 : Plot chargé en résultante suivant $\vec{x}$

Le cas du plot 3D sollicité par une résultante suivant  $\vec{x}$  ( $F_x \neq 0, F_y = F_z = C_x = C_y = C_z = 0$ , §3.5.2.4) est repris avec Average et comparé avec la méthode SIMP pour le cas  $\delta = 2$ . La figure 3.29 montre les deux solutions finales et on voit qu'elles sont très semblables visuellement. Le tableau 3.11 met en perspective les performances des deux calculs.

Les résultats numériques confirment que les solutions sont très proches puisque la complaisance finale est quasiment identique. L'écart est de 0,34% et est en faveur de la méthode SIMP. On constate cependant une convergence bien plus rapide pour la méthode Average, avec une diminution d'environ 23% du temps de calcul. Ce résultat va dans le sens des observations menées dans la partie précédente

### 3.6. PROPOSITION D'AMÉLIORATION

	SIMP	Average
Valeur de pénalité	$p = 3$	$p = 3 \ \& \ q = 5$
Complaisance finale	1,050	1,054
Nb. itérations	101	78

TABLE 3.11 – Comparaison des performances de SIMP et Average pour le plot soumis à une résultante suivant  $\vec{x}$

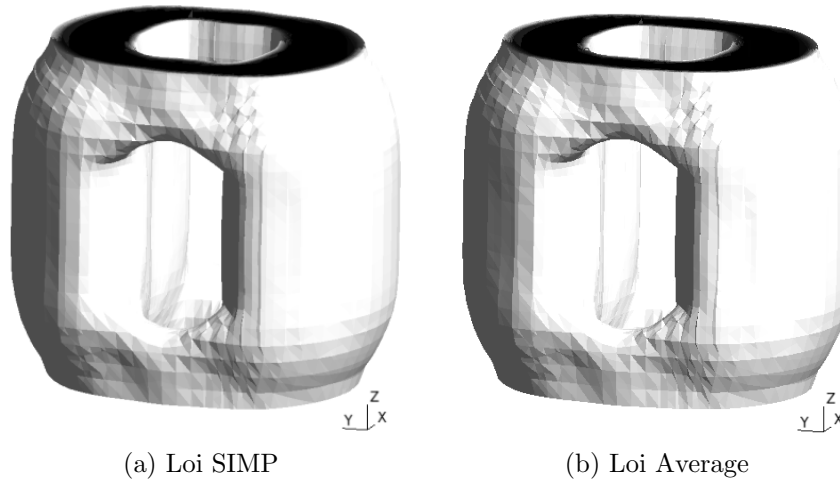


FIGURE 3.30 – Comparaison des solutions obtenues avec SIMP et Average pour le plot soumis à un couple autour de  $\vec{x}$

sur l'amélioration de la vitesse de convergence.

#### 3.6.6.2 Cas 2 : Plot chargé par un couple autour de $\vec{x}$

Le cas du plot 3D sollicité par un couple autour de  $\vec{x}$  ( $C_x \neq 0, F_x = F_y = F_z = C_y = C_z = 0$ , §3.5.2.4) est repris avec Average et comparé avec la méthode SIMP, pour le cas  $\delta = 1$ . La figure 3.30 montre les deux solutions finales et on voit qu'elles sont visuellement très similaires. Le tableau 3.12 met en perspective les performances des deux calculs qui donnent des résultats très similaires.

	SIMP	Average
valeur de pénalité	$p = 3$	$p = 3 \ \& \ q = 3$
Complaisance finale	$1,488.10^{-3}$	$1,487.10^{-3}$
Nb. itérations	40	39

TABLE 3.12 – Comparaison des performances de SIMP et Average pour le plot dans le cas d'un couple autour de  $\vec{x}$

## 3.7 Conclusion et contributions

Dans ce chapitre, la méthode d'optimisation topologique SIMP en statique est présentée. Des difficultés apparaissent et rendent l'emploi de la méthode SIMP délicat, comme la non-convexité des espaces de solutions, la propension à converger vers des topologies en damiers, la dépendance au maillage et aux conditions initiales ou encore le choix arbitraire qui doit être fait concernant un certain nombre de paramètres numériques heuristiques des méthodes par pénalisation.

Le code implémenté est validé pour des cas issus de la littérature. Il permet de résoudre des problèmes d'optimisation topologique avec la méthode SIMP pour des cas en 2D et en 3D et pour divers chargements statiques dans la mesure où le maillage est structuré.

La première contribution de ce chapitre est la méthodologie implémentée pour définir le voisinage d'un élément dans un maillage non-régulier, en se basant sur la taille de maille de l'élément considéré §3.3.5. Cette approche est validée sur l'application du plot en 3D. La deuxième contribution est l'implémentation de la méthode Average (§3.6) qui apporte un gain significatif sur la rapidité de convergence pour un coût CPU par itération similaire aux autres méthodes comparées. Enfin, la troisième contribution est l'utilisation de la rigidification des faces supérieures et inférieures du plot en élastomère dans le cadre de l'optimisation topologique.

## Chapitre 4

# Optimisation topologique dans le cadre de la dynamique

### Contenu

---

4.1	Introduction . . . . .	111
4.2	État de l'art de l'optimisation topologique en dynamique . . . . .	112
4.3	Optimisation du problème dynamique sans amortissement . . . . .	114
4.4	Optimisation du problème dynamique avec amortissement . . . . .	135
4.5	Conclusion et contributions . . . . .	138

---

### 4.1 Introduction

L'industrie du spatial, celles du transport et du génie civil, doit prendre en compte les efforts dynamiques s'appliquant de manière transitoires ou cycliques. Ceux-ci peuvent endommager la structure lorsque sa réponse dynamique n'est pas assez amortie. L'amortissement naturel provenant de la structure étant faible pour les structures métalliques, il est possible d'utiliser des stratégies permettant d'augmenter cet amortissement. L'une des stratégies consiste à introduire des matériaux dissipatifs au niveau des liaisons entre la structure et les autres structures auxquelles elle est liée.

Cette stratégie est employée dans ce chapitre et la quantité de matériau élastomère est optimisée topologiquement afin d'assurer la meilleure répartition possible face à l'objectif donné, à une fréquence donnée. Le critère d'optimisation choisi est l'extension du critère utilisé en statique dans le chapitre précédent : la complaisance.

Le but de ce chapitre est de présenter le cadre dynamique (sans amortissement puis avec amortis-



sement) de l'optimisation topologique et les difficultés qu'il soulève. Deux algorithmes de résolution sont présentés afin de surmonter quelques unes de ces difficultés. L'expression de la complaisance dynamique est aussi présentée et quelques applications sur des cas simples sont réalisés. Pour finir, une discussion sur les limites de la méthode ainsi que sur les pistes d'amélioration est faite.

### 4.2 État de l'art de l'optimisation topologique en dynamique

Bien que les travaux sur l'optimisation topologique en statique soient courants, leur extension aux problèmes dynamiques n'est pas directe et on constate que les travaux dans ce domaine sont moins nombreux. Un facteur expliquant cela est que certaines hypothèses utilisées dans le cadre de l'optimisation topologique statique (voir §3.2) sont préjudiciables lorsque des problèmes en dynamique sont traités.

En effet, afin d'éviter que la matrice de raideur devienne singulière, l'absence de matériau ( $x_e = 0$ ) est simulée par une raideur infinitésimale  $E_{\min}$  conférant au matériau une raideur faible mais non-nulle [14, 139]. Cela entraîne que les zones que l'on considère vides dans le cadre de la statique génèrent des modes propres locaux ayant une fréquence très faible, perturbant ainsi la dynamique globale de la structure lors de l'optimisation. Ce phénomène est détaillé dans la section §4.3.3. Plusieurs solutions pour le surmonter existent [54, 115, 119, 149] et l'une d'entre elles est présentée.

De plus, la prise en compte des effets d'inertie entraîne qu'il n'est plus possible de garantir que la fonction objectif et sa dérivée conservent respectivement le même signe tout au long de l'optimisation. Dans ces conditions il n'est pas toujours possible d'atteindre un optimum. Ce cas est illustré dans la section §4.3.4.1 et l'implémentation de deux nouveaux algorithmes est proposée afin de remédier à cela.

Enfin, les effets d'inertie peuvent devenir prépondérant sur la raideur du matériau, conduisant à un problème qui n'est plus nécessairement convexe, et donc plusieurs minimums locaux peuvent apparaître [139].

#### 4.2.1 Critères dynamiques

Plusieurs critères existent pour résoudre des problématiques de dynamique. Le plus employé est la maximisation de la première fréquence propre. Ce critère se rapproche de la minimisation de la

complaisance statique puisque maximiser la première fréquence propre revient à obtenir la structure la plus rigide en basse fréquence. Cette fonction objectif est d'un grand intérêt pour le renforcement de structures pré-existantes [49, 101] ainsi que pour contrôler la dynamique basse fréquence d'équipements électroniques [119], de plaques [54] ou de supports structuraux [102, 161]. Il est aussi possible d'optimiser l'écart entre deux fréquences propres afin de coupler ou découpler des modes. Ce procédé est notamment employé par [138] dans le but de contrôler la propagation d'ondes dans des matériaux périodiques, d'optimiser la répartition de matière d'un couple de matériaux sur une plaque [54] ou pour du renforcement de structure [101].

Le second critère couramment utilisé est le critère de la complaisance dynamique :

$$c = |\underline{U}^T \underline{F}| \quad (4.1)$$

Cette expression permet de prendre en compte l'expression complexe de l'amortissement et est identique à la complaisance statique (équation (3.20)) lorsque  $\omega = 0$ . Elle est employée par [49, 100] pour des problématiques de renforcement structural, [100, 115, 153, 162] pour des stratégies de répartition optimale de matière sur des géométries 2D et 3D. D'autres critères sont parfois considérés comme la maximisation de la partie imaginaire de  $\underline{U}^T \underline{F}$  [147] pour réduire le niveau des résonances par introduction de déphasage.

Enfin, un autre critère consiste à minimiser l'amplitude du déplacement  $|\underline{U}^T \underline{U}|$  (ou le carré de cette amplitude) [82, 84, 86, 132, 165] lorsqu'il s'agit de structure ou l'amplitude des ondes de pressions acoustiques [133] dans le cas d'un couplage structure-acoustique.

### 4.2.2 Prise en compte de l'amortissement

La plupart des travaux cités dans cette section ne prennent pas en compte l'amortissement, ou bien le font sous la forme d'un amortissement structural proportionnel de type Rayleigh :

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M} \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{C}$  désigne la matrice des termes d'amortissement,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients positifs sans dimensions. En effet, cet amortissement a pour avantage d'être très simple à implémenter, puisque que  $\mathbf{K}$  (matrice de raideur) et  $\mathbf{M}$  (matrice de masse) sont déjà définies. De plus,  $\mathbf{C}$  est orthogonale par rapport aux vecteurs propres du système, ce qui permet d'utiliser une projection modale. Les paramètres  $\alpha$

et  $\beta$  sont généralement fixés par l'utilisateur et permettent de piloter respectivement l'amortissement en haute fréquence et l'amortissement en basse fréquence [30]. En revanche, l'amortissement défini ne peut l'être que de manière globale sur l'ensemble de la structure. Ce type d'amortissement est employé par [82, 84, 86, 98, 100, 132, 138, 149, 162].

Quelques études récentes prennent en compte un amortissement matériau dépendant de la fréquence [37, 99, 147, 165]. Les critères généralement employés sont la maximisation de la partie imaginaire de  $\underline{U}^T \underline{F}$  ou du facteur de perte  $\eta_k = \frac{\lambda_k^{imag}}{\lambda_k^{real}}$  avec  $\lambda_k$  qui correspond à la fréquence propre complexe  $k$  choisie.

#### 4.2.3 Méthodes numériques choisies

Les principales méthodes numériques utilisées pour l'optimisation topologique dans le cadre de la statique sont reprises en dynamique. Les publications les plus anciennes font généralement appel à la méthode d'homogénéisation [37, 49, 100, 101, 102, 110, 150], tandis que les publications plus récentes utilisent les méthodes par pénalisation comme SIMP [54, 115, 119, 147, 149, 162, 165] ou RAMP [82]. Enfin, on peut noter quelques utilisations de la méthode des courbes de niveau [132, 133], de BESO [99] ainsi que d'autres méthodes [98, 161].

Concernant les solveurs numériques, MMA<sup>1</sup> (décrit dans §4.3.4.2) est le plus fréquemment utilisé [54, 82, 86, 119, 138, 147, 149, 162]. OC est rarement employé [49] puisqu'il n'est pas bien adapté à la résolution de problèmes de complaisance dynamique, comme cela est décrit dans la section §4.3.4.1. De plus, le solveur MOC<sup>2</sup> proposé par [100, 101, 102] est une adaptation aux problèmes dynamique du solveur OC, et est présenté à la section §4.3.4.2.

## 4.3 Optimisation du problème dynamique sans amortissement

### 4.3.1 Problème discrétisé

Le cadre de la dynamique sans amortissement est abordé dans cette partie. La formulation du problème de l'équation (2.28) se simplifie :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\ell\ell} & \mathbf{K}_{\ell f} \\ \mathbf{K}_{\ell f}^T & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\ell\ell} & \mathbf{M}_{\ell f} \\ \mathbf{M}_{\ell f}^T & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{U}_\ell \\ \underline{U}_f^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_\ell^d \\ \underline{F}_f \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

---

1. MMA : Method of Moving Asymptotes  
2. MOC : Modified Optimality Criteria

### 4.3. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE SANS AMORTISSEMENT

avec  $\mathbf{K}_{\bullet\bullet} = \mathbf{K}_E \bullet\bullet$ . Les densités  $\underline{x}$  sont introduites et on rappelle les expressions de la loi de pénalisation  $\tilde{E}_e(x_e)$  sur le module d'Young (équation (4.4a)) et de la matrice de raideur globale associée  $\mathbf{K}(\underline{x})$  en fonction de la matrice de raideur élémentaire  $\mathbf{k}_e^0(x_e)$  calculée pour un module d'Young unitaire. Les termes dépendants de  $\underline{x}$  relatifs à la masse sont définis par les expressions des lois de pénalisation sur la masse volumique  $\tilde{\rho}_e(x_e)$  (équation (4.5a)) et de la matrice de masse globale  $\mathbf{M}(\underline{x})$  (équation (4.5b)) en fonction de la matrice de masse élémentaire  $\mathbf{m}_e^0(x_e)$  calculée pour une masse volumique unitaire :

$$\tilde{E}_e(x_e) = f_E(x_e)E_0 \quad (4.4a)$$

$$\mathbf{K}(\underline{x}) = \mathcal{A}_{e=1}^n \tilde{E}_e(x_e) \mathbf{k}_e^0 \quad (4.4b)$$

$$\tilde{\rho}_e(x_e) = f_\rho(x_e)\rho_0 \quad (4.5a)$$

$$\mathbf{M}(\underline{x}) = \mathcal{A}_{e=1}^n \tilde{\rho}_e(x_e) \mathbf{m}_e^0 \quad (4.5b)$$

où les lois de pénalité sur le module d'Young (équation 4.6a) et sur la masse volumique (équation 4.6b) sont :

$$f_E(x_e) = \frac{E_{\min}}{E_0} + x_e^p \left(1 - \frac{E_{\min}}{E_0}\right) \quad (4.6a)$$

$$f_\rho(x_e) = \frac{\rho_{\min}}{\rho_0} + x_e^m \left(1 - \frac{\rho_{\min}}{\rho_0}\right) \quad (4.6b)$$

Les lois de pénalisation possèdent des facteurs de pénalité différents afin que la convergence soit pilotée par le terme le plus pénalisé. En effet, dans le cas où  $p \neq m$ , la raideur et la masse provoquent un effet quantitatif différent sur l'ajout ou l'enlèvement de matière.

On remplace les termes de raideur et de masse de l'équation (4.3) par les termes des équations (4.4b) et (4.5b), ce qui donne :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\ell\ell}(\underline{x}) & \mathbf{K}_{\ell f}(\underline{x}) \\ \mathbf{K}_{\ell f}^T(\underline{x}) & \mathbf{K}_{ff}(\underline{x}) \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\ell\ell}(\underline{x}) & \mathbf{M}_{\ell f}(\underline{x}) \\ \mathbf{M}_{\ell f}^T(\underline{x}) & \mathbf{M}_{ff}(\underline{x}) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{U}_\ell(\underline{x}) \\ \underline{U}_f^d(\underline{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_\ell^d \\ \underline{F}_f(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

En considérant que le déplacement imposé est nul, ce qui est le cas dans ce chapitre, la première équation de ce système s'écrit :

$$\left( \mathbf{K}_{\ell\ell}(\underline{x}) - \omega^2 \mathbf{M}_{\ell\ell}(\underline{x}) \right) \underline{U}_\ell(\underline{x}) = \underline{F}_\ell^d \quad (4.8)$$

Dans la suite, on pose :  $\mathbf{K}(\underline{x}) = \mathbf{K}_{\ell\ell}(\underline{x})$ ,  $\mathbf{M}(\underline{x}) = \mathbf{M}_{\ell\ell}(\underline{x})$ ,  $\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}_\ell(\underline{x})$  et  $\underline{F} = \underline{F}_\ell^d$ , ce qui permet de réécrire l'équation (4.8) de façon simplifiée ( $\underline{U}_f^d = 0$ ) :

$$\left( \mathbf{K}(\underline{x}) - \omega^2 \mathbf{M}(\underline{x}) \right) \underline{U}(\underline{x}) = \underline{F} \quad (4.9)$$

### 4.3.2 Critère d'optimisation

La fonction objectif considérée est la complaisance dynamique :

$$c(\underline{x}) = \left| \underline{U}^T(\underline{x}) \underline{F} \right| \quad (4.10)$$

En utilisant l'équation (4.9), la fonction objectif s'écrit en fonction de  $\mathbf{K}(\underline{x})$  et  $\mathbf{M}(\underline{x})$  :

$$c(\underline{x}) = \left| \underline{U}(\underline{x})^T \left( \mathbf{K}(\underline{x}) - \omega^2 \mathbf{M}(\underline{x}) \right) \underline{U}(\underline{x}) \right| \quad (4.11)$$

qui s'écrit en introduisant les matrices élémentaires :

$$c(\underline{x}) = \left| \sum_{e=1}^n \underline{u}_e^T(x_e) \left( \mathbf{k}_e(x_e) - \omega^2 \mathbf{m}_e(x_e) \right) \underline{u}_e(x_e) \right| \quad (4.12)$$

où  $\underline{u}_e$  regroupe les déplacements des nœuds de l'élément  $e$ . En utilisant les équations (4.4a), (4.4b), (4.5a) et (4.5b), la complaisance dynamique s'écrit :

$$c(\underline{x}) = \left| \sum_{e=1}^n \underline{u}_e^T(x_e) \left[ (E_{\min} + x_e^p (E_0 - E_{\min})) \mathbf{k}_e^0 - \omega^2 (\rho_{\min} + x_e^m (\rho_0 - \rho_{\min})) \mathbf{m}_e^0 \right] \underline{u}_e(x_e) \right| \quad (4.13)$$

L'expression de la dérivée de la complaisance en fonction des variables de conception s'obtient en dérivant l'équation (4.10) :

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = \text{sgn} \left( \underline{U}^T(\underline{x}) \underline{F} \right) \frac{\partial \underline{U}^T}{\partial x_e} \underline{F} \quad (4.14)$$

où le terme  $\frac{\partial \underline{U}}{\partial x_e}$  s'obtient en dérivant l'équation (4.9) par rapport à  $x_e$  :

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial x_e} = - \left( \mathbf{K}(\underline{x}) - \omega^2 \mathbf{M}(\underline{x}) \right)^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_e} \right) \underline{U}(\underline{x}) \quad (4.15)$$

La combinaison des équations (4.14), (4.15) et (4.9) donne l'expression de la dérivée de la complaisance par rapport aux variables de conception s'écrit :

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = -\text{sgn} \left( \underline{U}^T(\underline{x}) \underline{F} \right) \underline{U}^T(\underline{x}) \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_e} \right) \underline{U}(\underline{x}) \quad (4.16)$$

En remplaçant par les dérivées des lois de pénalisation (4.4a) et (4.5a), il vient [100, 115] :

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = -\text{sgn} \left( \underline{U}^T(\underline{x}) \underline{F} \right) \left( \left[ p x_e^{p-1} (E_0 - E_{\min}) \underline{U}^T(\underline{x}) \mathbf{K}_e^0 \underline{U}(\underline{x}) \right] - \omega^2 \left[ m x_e^{m-1} (\rho_0 - \rho_{\min}) \underline{U}^T(\underline{x}) \mathbf{M}_e^0 \underline{U}(\underline{x}) \right] \right) \quad (4.17)$$

où  $\mathbf{K}_e^0 = \mathcal{A}_{e=1}^n \delta_{ie} \mathbf{k}_i^0$  et  $\mathbf{M}_e^0 = \mathcal{A}_{e=1}^n \delta_{ie} \mathbf{m}_i^0$ . Cette relation nécessite de calculer les termes  $\underline{U}^T(\underline{x}) \mathbf{K}_e^0 \underline{U}(\underline{x})$  et  $\underline{U}^T(\underline{x}) \mathbf{M}_e^0 \underline{U}(\underline{x})$  à chaque itération. Dans la suite de ce travail, le facteur de pénalité  $m$  de la loi de pénalité sur la masse volumique est choisi égal à 1.

Paramètres	Valeurs
$E_0$	1
$E_{\min}$	$1.10^{-9}$
$\nu$	0,3
$\rho_0$	$1.10^{-6}$
$\rho_{\min}$	$1.10^{-15}$

TABLE 4.1 – Paramètres matériaux

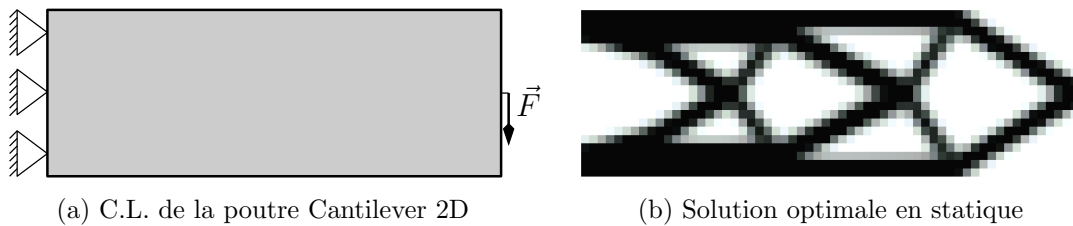


FIGURE 4.1 – Poutre Cantilever 2D

### 4.3.3 Atténuation des modes locaux parasites

#### 4.3.3.1 Identification du phénomène

Afin d'éviter que les matrices soient singulières, les lois de pénalisation (4.6a) et (4.6b) font apparaître un matériau de raideur infinitésimale  $E_{\min}$  et de masse volumique infinitésimale  $\rho_{\min}$  dans les zones où  $x_e$  tend vers zéro. Cela entraîne que des modes locaux apparaissent dans ces zones et perturbent la dynamique globale.

Pour illustrer ces modes locaux, le cas de la poutre cantilever 2D en statique du chapitre précédent est repris pour les paramètres du matériau fictif présentés dans le tableau 4.1 et les valeurs de  $\rho_0$  et  $\rho_{\min}$  ont été choisies afin que les premiers modes soient autour de 1 Hz.

L'évolution des trois premières fréquences propres au cours de l'optimisation est étudiée. La configuration initiale ainsi que la solution sont rappelées à la figure 4.1. Les allures des modes propres initiaux sont obtenus pour un domaine de conception dont les densités élémentaires  $x_e$  sont toutes égales à la fraction volumique de départ :  $\alpha = 50\%$ , représenté en gris aux figures 4.3 et 4.5.

La figure 4.2 présente l'évolution des valeurs des trois premières fréquences propres au cours de l'optimisation. On constate qu'elles tendent rapidement vers 0. Les figures 4.3b, 4.3d et 4.3f présentent les déformées des modes associés à ces fréquences propres pour la solution finale obtenue après optimisation et on voit que ce sont des modes locaux parasites se situant dans des zones où, d'après la

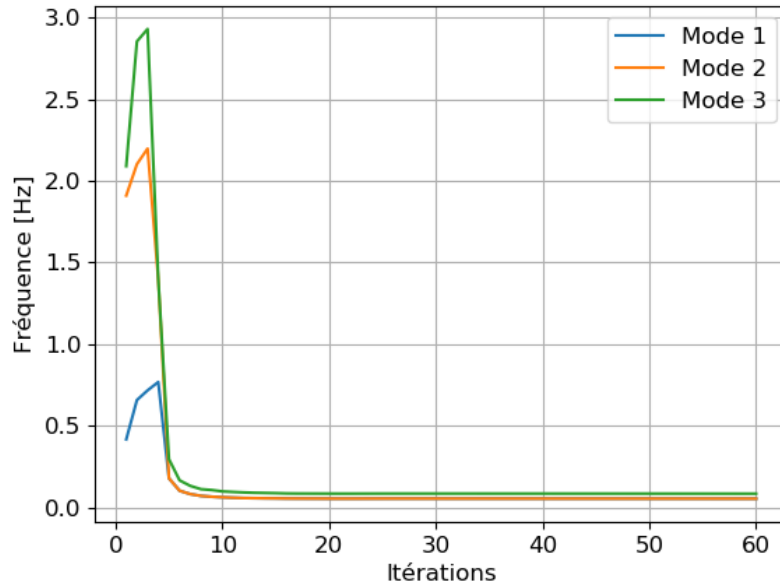


FIGURE 4.2 – Évolution des valeurs des fréquences propres pendant l’optimisation

	Configuration initiale	Configuration finale
Mode 1 [Hz]	0,42	0,053
Mode 2 [Hz]	1,91	0,053
Mode 3 [Hz]	2,09	0,084

TABLE 4.2 – Comparaison des trois premières fréquences propres

figure 4.1b, le matériau est absent. Le tableau 4.2 met en comparaison les valeurs des trois premières fréquences propres dans la configuration initiale et dans la configuration finale. On voit que les valeurs de ces fréquences propres diminuent fortement et tendent vers 0 ce qui rend inexploitable la dynamique de la structure.

#### 4.3.3.2 Implémentation d’une méthode d’atténuation

Il existe plusieurs méthodes permettant de diminuer l’apparition des modes locaux parasites et pouvant exploiter la dynamique de la solution finale. La plupart des travaux cherchent à exclure les nœuds qui ne sont entourés que d’éléments dont la pseudo-densité est nulle. La méthode retenue ici provient de [149] et consiste à modifier la valeur de la loi de pénalité sur les masses volumiques  $\tilde{\rho}_e$

### 4.3. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE SANS AMORTISSEMENT

---

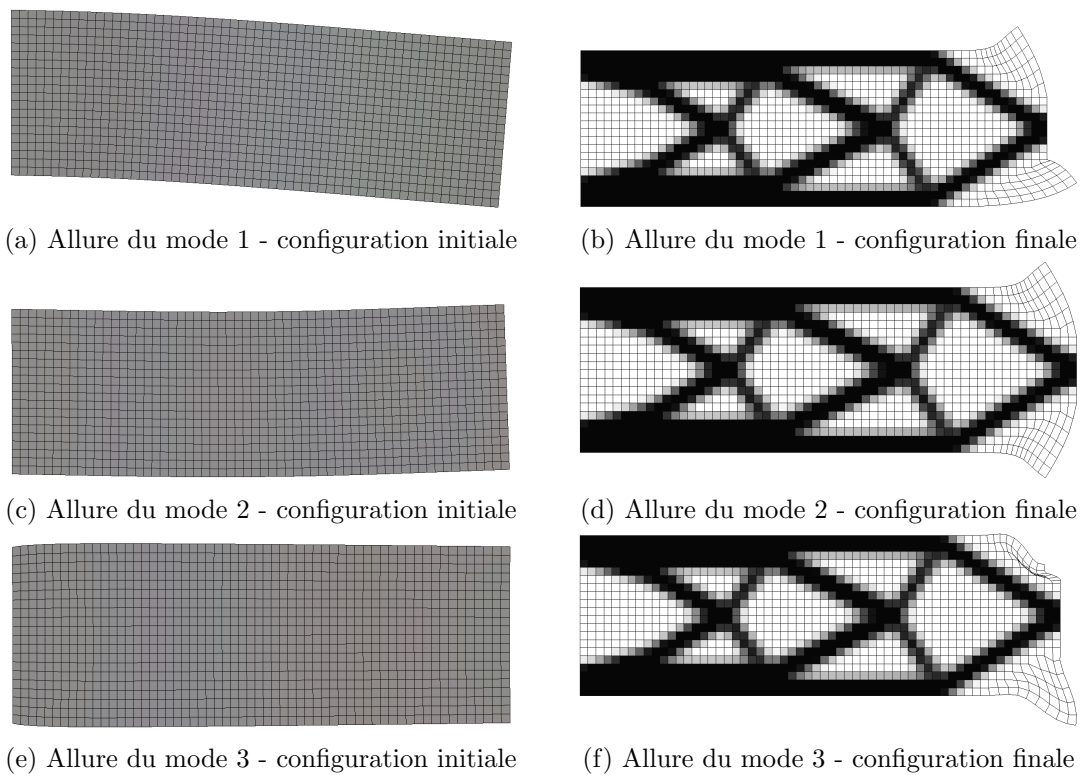


FIGURE 4.3 – Comparaison de l'allure des modes propres locaux pour la poutre Cantilever 2D



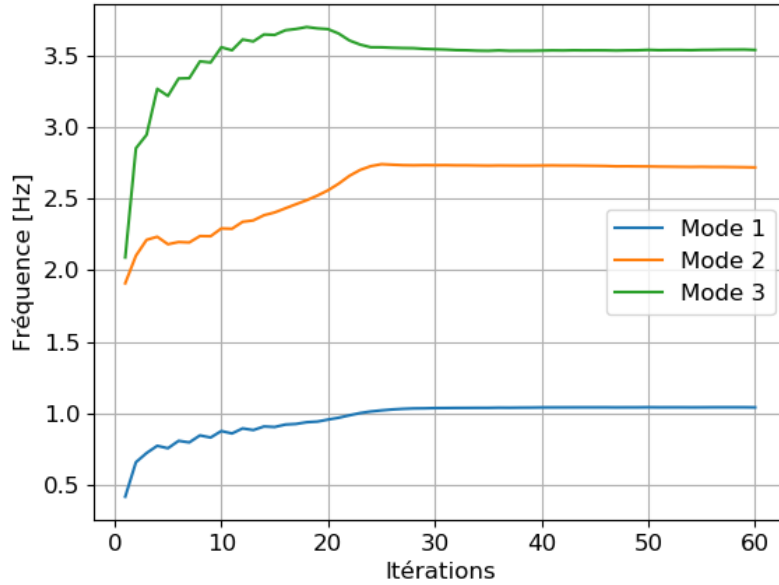


FIGURE 4.4 – Évolution des valeurs des fréquences propres avec instauration d’un seuil sur les effets d’inertie

lorsque la valeur de la densité d’un élément est inférieure à un seuil  $x_{\text{seuil}}$  défini :

$$f_{\rho}(x_e) = \begin{cases} \frac{\rho_{\min}}{\rho_0} + x_e(1 - \frac{\rho_{\min}}{\rho_0}) & \text{si } x_e > x_{\text{seuil}} \\ 0 & \text{si } x_e \leq x_{\text{seuil}} \end{cases} \quad (4.18)$$

Ainsi, les effets d’inertie ne sont plus pris en compte dans les zones “sans matière” mais les éléments restent toujours actifs et contribuent à la rigidité. Cela permet de supprimer les modes locaux tout en évitant les problèmes de singularité de matrices. Le seuil choisi ici est  $x_{\text{thr}} = 0,15$ .

#### 4.3.3.3 Application à la poutre cantilever 2D

Le cas de la poutre Cantilever (figure 4.1) avec la prise en compte de l’équation (4.18) change l’évolution de la dynamique des trois premières fréquences propres, comme le montre la figure 4.4. On voit cette fois-ci que les fréquences propres augmentent au cours des itérations et que les déformées modales associées ne sont plus des modes locaux, comme cela est attendu. Les valeurs des fréquences propres finales sont renseignées dans le tableau 4.3 et les formes des modes associés se trouvent à la figure 4.5.

### 4.3. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE SANS AMORTISSEMENT

	Configuration initiale	Configuration finale
Mode 1 [Hz]	0,42	1,04
Mode 2 [Hz]	1,91	2,72
Mode 3 [Hz]	2,09	3,54

TABLE 4.3 – Comparaison des trois premières valeurs propres

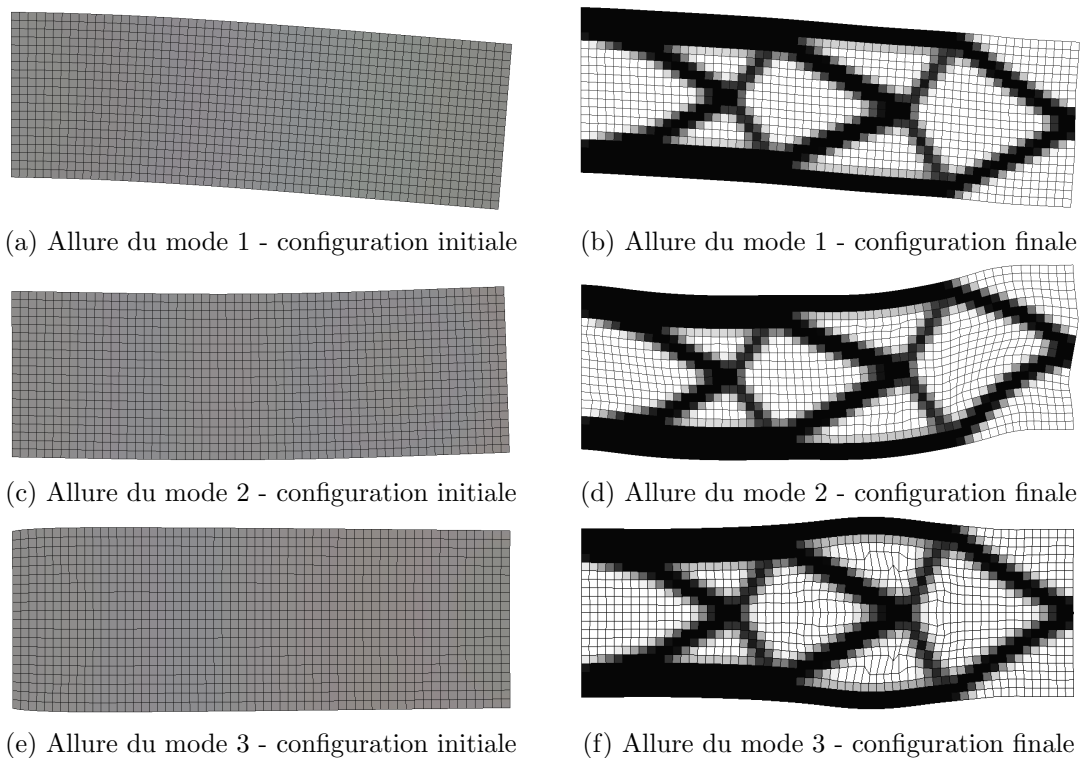


FIGURE 4.5 – Comparaison de l'allure des modes propres locaux pour la poutre Cantilever 2D

### 4.3. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE SANS AMORTISSEMENT

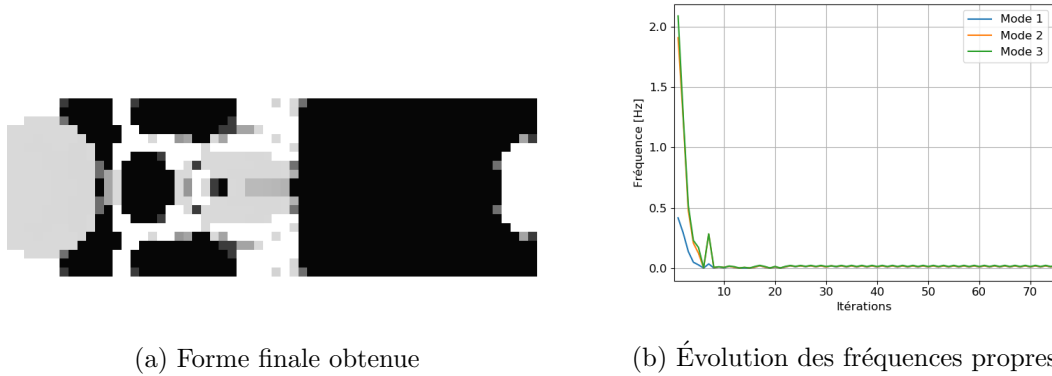


FIGURE 4.6 – Optimisation avec le solveur OC pour une fréquence ciblée  $f^* = 0,42$  Hz

#### 4.3.4 Limites et modifications du solveur numérique

##### 4.3.4.1 Limites du solveur OC

Les effets d'inertie entraînent que le problème peut devenir mal posé. En effet, la matrice  $\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$  n'étant pas définie positive, cela engendre que la dérivée de la complaisance dynamique à l'équation (4.16) peut changer de signe. Lorsque cette dérivée est positive, la condition d'optimalité

$$\frac{\frac{\partial c(\tilde{x})}{\partial x_e} \Big|_{\tilde{x}^*}}{-\lambda^* \frac{\partial v(\tilde{x})}{\partial x_e} \Big|_{\tilde{x}^*}} = 1$$

obtenue à l'équation (3.37) n'a pas forcément de couple solution  $(\lambda^*, \tilde{x}^*)$  puisque  $\lambda$  et  $\frac{\partial v(\tilde{x})}{\partial x_e}$  sont toujours strictement positifs. Le calcul peut alors ne plus converger vers un optimum.

Pour illustrer cela, une optimisation de la complaisance dynamique de la poutre cantilever 2D est effectuée à la fréquence  $f^* = 0,42$  Hz. Cette fréquence correspond à la fréquence du premier mode propre de la configuration initiale dans le tableau 4.2. La forme finale est visible à la figure 4.6a et l'évolution des fréquences propres jusqu'à la 70<sup>ème</sup> itération (au-delà, il n'y a plus d'évolution) se voit à la figure 4.6b. On peut voir que la forme ne possède aucun sens physique et que les fréquences propres tendent vers 0. La calcul n'a pas convergé et s'est arrêté à la 200<sup>ème</sup> itération.

##### 4.3.4.2 Implémentation de solveurs adaptés

L'exemple présenté dans la section ci-dessus montre que le solveur OC n'est pas adapté pour la résolution de problème d'optimisation en dynamique. Des solveurs plus adaptés sont présentés dans cette section :

### 4.3. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE SANS AMORTISSEMENT

- Method of Moving Asymptotes (MMA),
- Modified Optimality Criteria (MOC).

**MMA** Le solveur MMA [145, 146] a été développé spécifiquement pour la résolution de problèmes d'optimisation de structure. Son principe est de substituer la fonction objectif et les fonctions contraintes (ici la fonction objectif  $c(\underline{x})$  et la fonction contrainte  $v(\underline{x})$ ) par des fonctions d'approximations strictement convexes, calculées et résolues à chaque itération. En considérant une fonction d'approximation  $\tilde{f}(\underline{x})$  où  $\underline{x}$  désigne les  $n$  variables du problèmes, celle-ci est donnée par :

$$\tilde{f}^{(k)}(\underline{x}) = r^{(k)} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{p_i^{(k)}}{U_i^{(k)} - x_i} + \frac{q_i^{(k)}}{x_i - L_i^{(k)}} \right) \quad (4.19)$$

où  $r^{(k)}$  est le résidu et s'obtient en calculant la différence entre la fonction réelle et sa fonction d'approximation, et les termes  $p_i^{(k)}$  et  $q_i^{(k)}$  sont définis par :

$$\begin{cases} p_i^{(k)} = \left( U_i^{(k)} - x_i^{(k)} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\underline{x}^{(k)}} & \text{et } q_i^{(k)} = 0 & \text{si } \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\underline{x}^{(k)}} > 0 \\ p_i^{(k)} = 0 & \text{et } q_i^{(k)} = \left( x_i^{(k)} - L_i^{(k)} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\underline{x}^{(k)}} & \text{si } \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\underline{x}^{(k)}} < 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Les variables  $U_i^{(k)}$  et  $L_i^{(k)}$  sont les asymptotes mobiles dont la valeur varie en fonction des valeurs des itérations précédentes de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_i^{(k)} - x_i^{(k)} = \gamma_i^{(k)} \left( U_i^{(k-1)} - x_i^{(k-1)} \right) \\ L_i^{(k)} - x_i^{(k)} = \gamma_i^{(k)} \left( L_i^{(k-1)} - x_i^{(k-1)} \right) \end{cases} \quad (4.21)$$

où le facteur  $\gamma_i^{(k)}$  pilote la vitesse de convergence et vaut :

$$\gamma_i^{(k)} = \begin{cases} 0, 7 & \text{si } \left( x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right) \left( x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)} \right) < 0 \\ 1, 2 & \text{si } \left( x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right) \left( x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)} \right) > 0 \\ 1 & \text{si } \left( x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right) \left( x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)} \right) = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Les différentes valeurs que  $\gamma_i^{(k)}$  peut prendre impliquent que :

- les asymptotes hautes et basses se rapprochent du point optimal si les deux itérations précédentes évoluent dans la direction opposée ( $\gamma_i^{(k)} = 0, 7$ ),
- les asymptotes s'écartent si les deux itérations précédentes évoluent dans la même direction ( $\gamma_i^{(k)} = 1, 2$ ),

### 4.3. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE SANS AMORTISSEMENT

---

— la position des asymptotes reste la même si un point stationnaire a été trouvé.

Le processus itératif continue jusqu'à ce que les conditions de KKT<sup>3</sup>[87, 94] soient vérifiées, ce qui signifie que le calcul a convergé vers un optimum.

**MOC** Le solveur MOC [100, 102] est une adaptation de l'algorithme OC dont le but est de compenser les termes positifs de dérivée de complaisance par l'ajout d'un paramètre de décalage  $\mu$ . On rappelle le Lagrangien de l'équation (3.33) du chapitre précédent :

$$\mathcal{L}(\tilde{x}, \lambda) = c(\tilde{x}) + \lambda v(\tilde{x}) \quad (4.23)$$

Le paramètre  $\mu$  est inséré dans l'expression du Lagrangien qui s'écrit alors :

$$\mathcal{L}(\tilde{x}, \lambda, \mu) = c(\tilde{x}) + \lambda v(\tilde{x}) + \mu v(\tilde{x}) - \mu v(\tilde{x}) \quad (4.24)$$

Le multiplicateur de Lagrange décalé  $\lambda' = \lambda + \mu$  apparaît en manipulant les termes de l'équation :

$$\mathcal{L}(\tilde{x}, \lambda, \mu) = c(\tilde{x}) - \mu v(\tilde{x}) + \lambda' v(\tilde{x}) \quad (4.25)$$

La dérivée du Lagrangien par rapport aux variables de conception est calculée afin de définir la condition d'optimalité :

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{x}, \lambda, \mu)}{\partial x_e} \right|_{(\underline{x}^*, \lambda^*, \mu^*)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left. \frac{\partial c}{\partial x_e} \right|_{(\underline{x}^*, \lambda^*, \mu^*)} - \mu \left. \frac{\partial v}{\partial x_e} \right|_{(\underline{x}^*, \lambda^*, \mu^*)} + \lambda' \left. \frac{\partial v}{\partial x_e} \right|_{(\underline{x}^*, \lambda^*, \mu^*)} = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

En manipulant les différents termes, on trouve la nouvelle condition d'optimalité suivante :

$$\frac{1}{\lambda'} \left( \mu - \frac{\partial c}{\partial x_e} \right) \bigg|_{(\underline{x}^*, \lambda^*, \mu^*)} = 1 \quad (4.27)$$

$\mu$  doit être défini afin que la condition d'optimalité soit vérifiable à chaque itération  $k$  au sens où le signe du terme de gauche doit être strictement positif, ce qui est le cas pour la valeur suivante :

$$\mu^{(k)} = \max_{1 \leq e \leq n} \left( \frac{\partial c}{\partial x_e} \bigg|_{\underline{x} = \underline{x}^{(k)}} \right) \quad (4.28)$$

---

3. KKT : Karush-Kuhn-Tucker

### 4.3. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE SANS AMORTISSEMENT

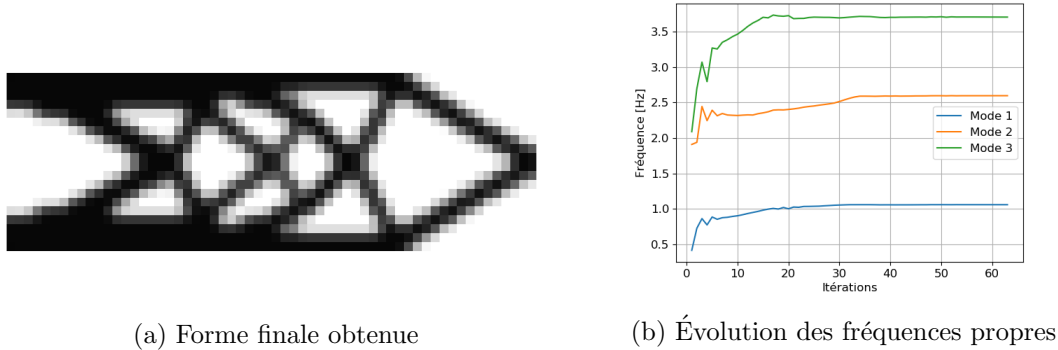


FIGURE 4.7 – Optimisation avec le solveur MMA pour une fréquence ciblée  $f^* = 0,42$  Hz

#### 4.3.5 Application et résultats sur la poutre cantilever 2D

##### 4.3.5.1 Optimisation à la fréquence du premier mode

Les deux solveurs numériques sont utilisés pour minimiser la complaisance dynamique à la fréquence du premier mode propre (figure 4.3a) provenant de la configuration initiale de la poutre cantilever 2D (figure 4.1a).

**Résolution avec MMA** Les résultats obtenus pour la poutre cantilever 2D se trouvent à la figure 4.7. On voit sur la figure 4.7a que la forme diffère de la forme statique de la figure 4.1b puisque qu'une forme en treillis apparaît au cœur de la structure. La figure 4.7b montre l'évolution des fréquences propres et on observe que celles-ci sont repoussées au delà de 0,42 Hz.

La valeur finale de la complaisance est de 236,47 et le calcul converge en 63 itérations.

**Résolution avec MOC** Les résultats obtenus se trouvent à la figure 4.8. On constate sur la figure 4.8a que la forme obtenue a convergé et qu'elle est similaire à celle du cas statique. De plus la figure 4.8b montre que les trois premières fréquences propres sont repoussées au delà de 0,42 Hz. L'évolution du paramètre de décalage  $\mu$  est présenté à la figure 4.9. On peut voir que sa valeur est très importante lors des premières itérations ce qui signifie que certains termes de dérivée de complaisance sont largement positifs. Puis sa valeur diminue pour se rapprocher de 0 ce qui se traduit par le fait que le calcul converge.

Contrairement à OC ou MMA pour qui le critère d'arrêt est fixé à 1%, l'utilisation de l'algorithme

### 4.3. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE SANS AMORTISSEMENT

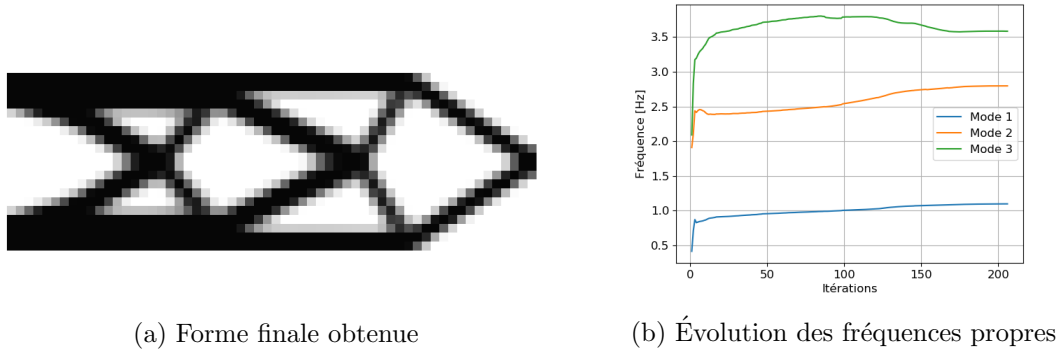


FIGURE 4.8 – Optimisation avec le solveur MOC pour une fréquence ciblée  $f^* = 0,42$  Hz

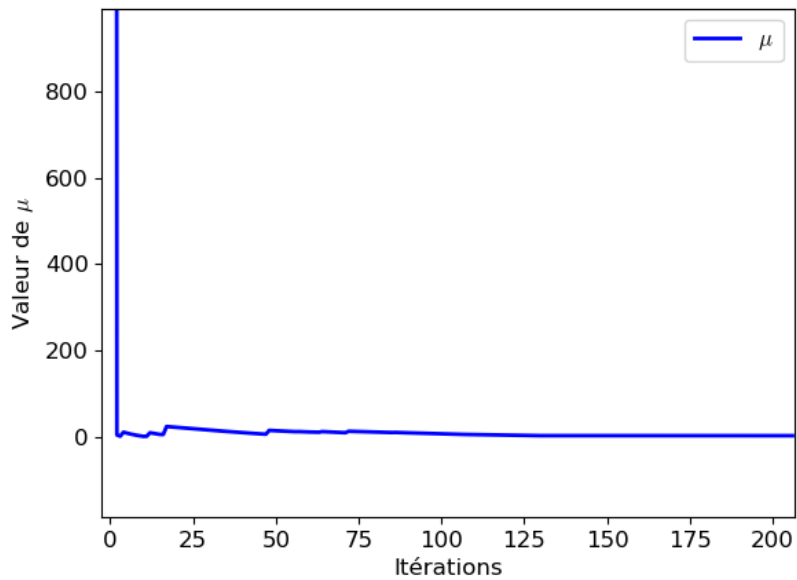


FIGURE 4.9 – Évolution du paramètre de décalage  $\mu$  au cours des itérations

### 4.3. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE SANS AMORTISSEMENT

---

MOC montre que le critère d'arrêt doit être abaissé à 0,5% car dans le cas contraire, le calcul est stoppé trop rapidement et la forme finale obtenue n'est pas physique. En utilisant cette valeur de critère, la valeur finale de complaisance est de 216,89 soit environ 8% de moins qu'avec MMA et le nombre d'itérations est de 206.

#### 4.3.5.2 Optimisation à la fréquence du deuxième mode

Les résultats précédents montrent que lorsque l'optimisation est réalisée en statique (figure 4.4) ou à la fréquence du premier mode (figures 4.7 et 4.8), la valeur des trois premières fréquences propres augmente entre la forme initiale et la forme finale. Ce phénomène est fréquemment observé [49, 82, 100, 147]. Dans cette section, nous fixons comme objectif de minimiser la complaisance dynamique à la fréquence propre du deuxième mode de la poutre cantilever optimisée pour une fréquence de 0 Hz. L'idée est d'étudier l'évolution des fréquences propres, notamment la première, afin de voir si celle-ci décroît, comme on peut le supposer puisque la fréquence à laquelle la structure est optimisée est supérieure. Afin de visualiser cela, une comparaison des FRFs avec le cas optimisé en statique est réalisée.

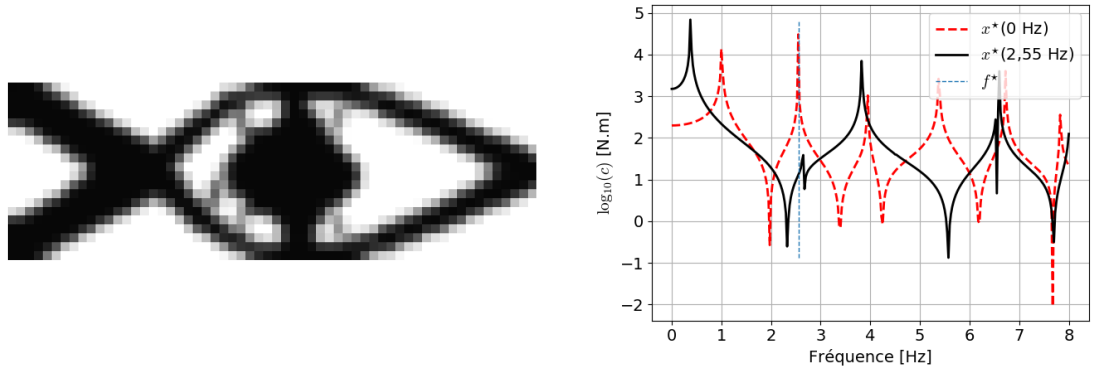
L'optimisation est réalisée avec les deux solveurs numériques présentés. Le calcul réalisé en statique avec MMA et présenté à la figure 4.7, donne  $f^* = 2,55$  Hz comme valeur de la fréquence propre du deuxième mode. Cette valeur est légèrement différente de la valeur  $f^* = 2,72$  Hz (figure 4.5d) obtenue avec MOC. Pour chaque solveur, l'optimisation à la fréquence du deuxième mode est réalisée à la valeur obtenue avec celui-ci. Enfin, la résolution de ce type de calcul montre que les résultats obtenus sont généralement meilleurs lorsque la valeur de pénalité  $p$  est un peu plus faible. La valeur choisie ici est  $p = 2,5$ .

**Résolution avec MMA** La solution obtenue est présentée à la figure 4.10. On constate que la forme obtenue à la figure de gauche contient un amas de matière au centre. Cet amas est relié au reste de la structure par des fins connecteurs et pourrait ressembler à un oscillateur à masse accordée. La fraction volumique de la structure finale est de 50,0%.

La FRF en complaisance de la solution optimale montre que le premier mode a été repoussé vers les basses fréquences tandis que les autres modes sont tous plus haut en fréquences que la fréquence ciblée. Cependant, l'évolution de la complaisance ne permet pas de converger de façon monotone vers

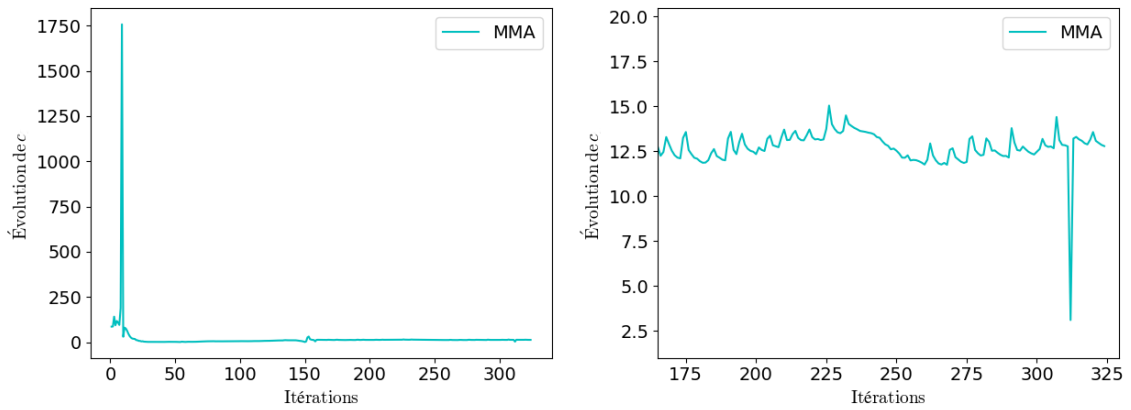


### 4.3. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE SANS AMORTISSEMENT



(a) Forme optimale obtenue (b) FRF en complaisance de la solution optimale

FIGURE 4.10 – Solution optimale avec MMA pour  $f^* = 2,55 \text{ Hz}$



(a) Évolution de la fonction objectif (b) Oscillations de la fonction objectif

FIGURE 4.11 – Évolution de la fonction objectif au cours des itérations

### 4.3. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE SANS AMORTISSEMENT

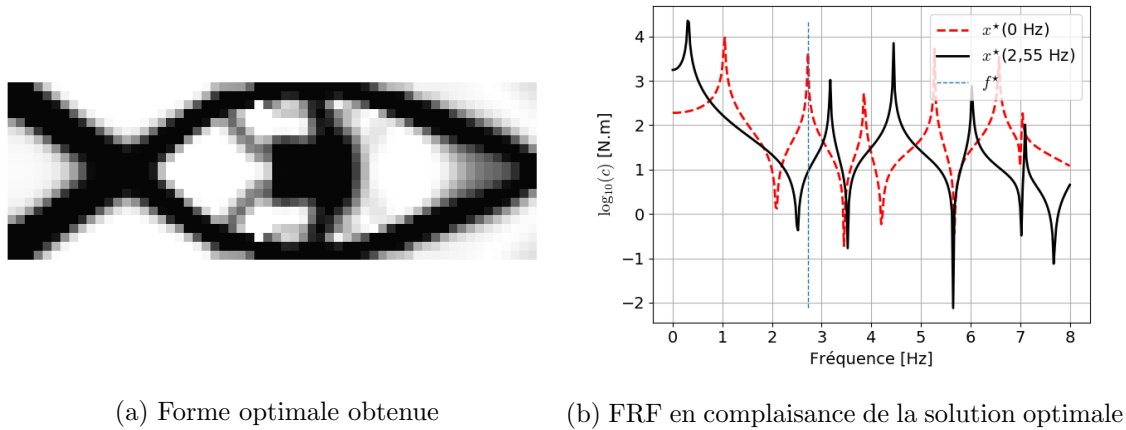


FIGURE 4.12 – Solution optimale obtenue avec MOC pour  $f^* = 2,72$  Hz

un minimum, comme le montre l'évolution de la norme de la complaisance à la figure 4.11b. Le critère d'arrêt est choisi pour une valeur de 2%. La valeur finale de la fonction objectif est 12,78 et est atteinte en 324 itérations.

**Résolution avec MOC** La forme de la solution obtenue avec MOC se trouve à la figure 4.12 et le critère d'arrêt a été choisi à 0,2%. Tout comme pour la solution provenant de MMA, on constate un amas de matière au centre de la géométrie. Cette forme est aussi liée au reste de la structure par des fins connecteurs. Enfin, on observe quelques zones de densités intermédiaires sur la partie droite de la forme. Le volume final de la structure est de 50,0%.

La figure de droite montre la FRF de la solution optimale statique (pointillés rouges) et la solution optimale pour la fréquence  $f^* = 2,72$  Hz (trait continu noir). Dans ce cas, on constate que le premier mode est décalé vers les basses fréquences et que les autres modes sont repoussés vers les fréquences plus hautes.

La convergence est atteinte en 127 itérations et la valeur de la norme de la complaisance finale est de 8,77. De plus, son évolution au cours des itérations (figure 4.13) montre qu'elle subit un pic en début d'optimisation correspondant au fait que le mode 2 se trouve à la fréquence d'optimisation. Ensuite, le mode est décalé et l'évolution se stabilise jusqu'à la convergence.

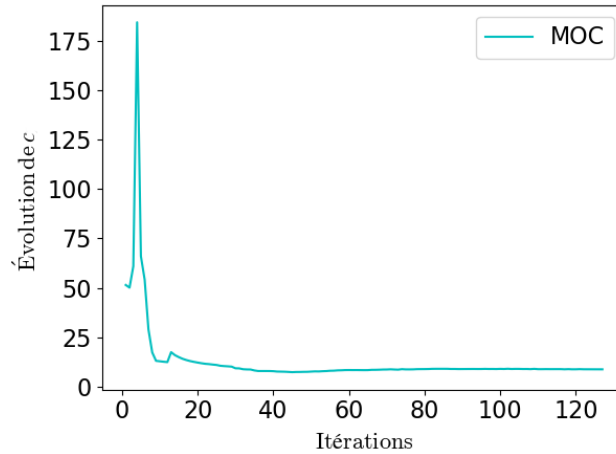


FIGURE 4.13 – Évolution de la fonction objectif

$\gamma$ MOC	$\gamma = 1$	$\gamma = 1, 1$	$\gamma = 1, 5$	$\gamma = 2$	$\gamma = 3$
Complaisance	8,77	6,39	8,36	8,95	10,39
Nb. itérations	127	159	38	49	44

TABLE 4.4 – Résultats pour différentes valeurs de  $\gamma$

#### 4.3.5.3 $\gamma$ MOC : amélioration du temps de calcul pour la fréquence du deuxième mode

Dans le but de réduire le temps de calcul, la méthode MOC est modifiée. Le paramètre  $\gamma$  est introduit et redéfinit le paramètre  $\mu$  de la façon suivante à chaque itération  $k$  :

$$\mu^{(k)} = \gamma \max_{1 \leq e \leq n} \left( \begin{array}{c} \frac{\partial c}{\partial x_e} \\ \frac{\partial v}{\partial x_e} \end{array} \bigg|_{x=x^{(k)}} \right) \quad (4.29)$$

avec  $\gamma \geq 1$  afin que la condition d'optimalité soit toujours atteignable, ce qui ne serait pas le cas si  $\gamma < 1$ . Comme l'algorithme de résolution est le même que MOC, on peut supposer que les formes des solutions provenant des deux solveurs sont proches. Un calcul est effectué pour plusieurs valeurs de paramètres  $\gamma$  et les résultats sont consignés dans le tableau 4.4. La solution obtenue avec MOC ( $\gamma = 1$ ) est comparée aux valeurs  $\gamma = 1, 1$ ,  $\gamma = 1, 5$ ,  $\gamma = 2$  et  $\gamma = 3$ . La solution la plus satisfaisante est  $\gamma = 1, 5$  (en bleu) puis que le nombre d'itérations est réduit de 70% (38 contre 127). D'autre part, on note une légère amélioration de la complaisance finale (8,36 contre 8,77, soit une baisse de 4,7%). La forme finale provenant de ce cas de calcul se trouve à la figure 4.14 et on constate qu'elle est très similaire à la solution obtenue avec MOC (figure 4.12). La comparaison des FRF de la figure 4.14b entre les cas obtenus avec  $\gamma = 1$  et  $\gamma = 1, 5$  confirme cette amélioration et montre que la dynamique

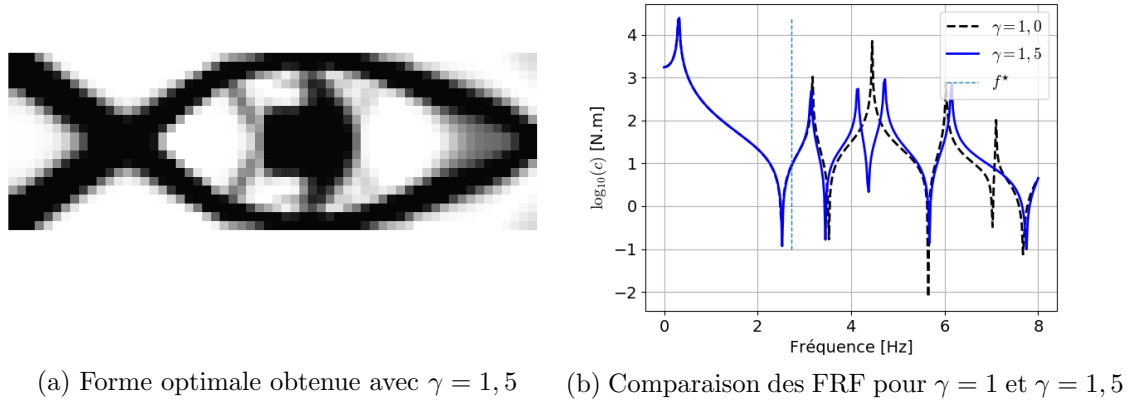


FIGURE 4.14 – Solution optimale obtenue avec  $\gamma$ MOC

de la structure est presque identique sur la bande de fréquence  $[0 - 3]$  Hz, c'est-à-dire autour de la fréquence ciblée. Les différences proviennent principalement des zones de densité intermédiaires qui modifient la dynamique de la poutre, mais qui n'ont pas de sens physique.

Enfin, on peut comparer l'évolution du paramètre  $\mu$  pour voir l'influence de  $\gamma$  sur celui-ci. La figure 4.15 trace cette évolution au cours des itérations et on voit que les deux solutions montrent une évolution soudaine de  $\mu$  au début du processus d'itération. Puis, dans le cas  $\gamma = 1,0$ , ce phénomène est suivi par de nombreuses oscillations, tandis que pour  $\gamma = 1,5$ , la valeur de  $\mu$  augmente rapidement jusqu'à ce que le calcul ait convergé.

### 4.3.6 Application et résultats sur le cube 3D

#### 4.3.6.1 Optimisation à la fréquence du troisième mode

Le cube présenté à la figure 4.16 est étudié. Le déplacement dans la direction verticale est bloqué au niveau des 4 coins de la surface inférieure et un effort ponctuel est appliqué au centre de la face supérieure. La forme finale calculée en statique ressemble à une structure de type "tabouret" contenant 4 pieds se situant dans les coins. Sur cette application, les densités de la forme finale qui sont inférieures à 0,3 ont été tronquées. Les deux premiers modes propres de vibration sont des modes jumeaux provenant de la symétrie de la structure et ne sont pas visibles sur la FRF car l'effort appliqué est transverse au déplacement des déformées modales. On cherche ici à optimiser la complaisance dynamique à la fréquence de son troisième mode (calculé pour la configuration statique) qui se situe

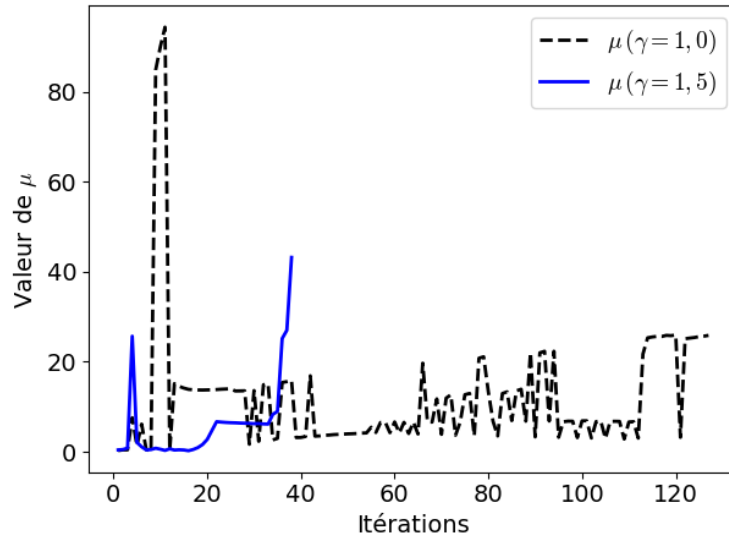
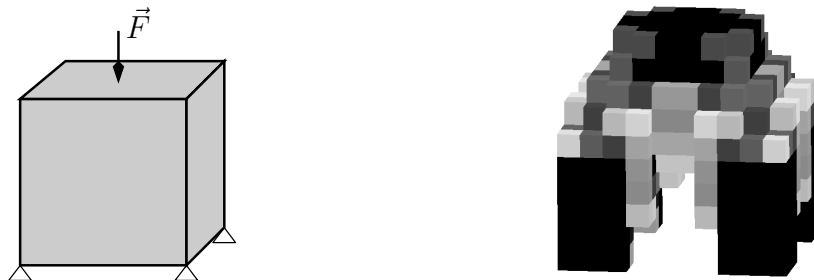


FIGURE 4.15 – Évolution du paramètre  $\mu$  pour  $\gamma = 1, 0$  et  $\gamma = 1, 5$



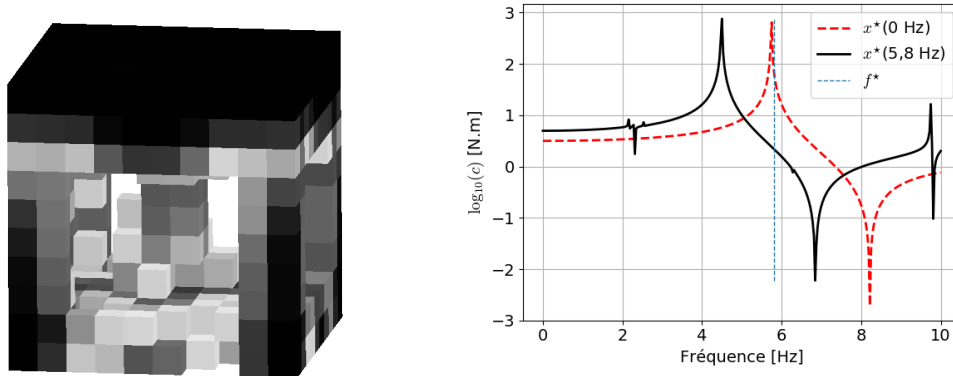
(a) Géométrie et conditions aux limites du cube 3D (b) Forme de la solution finale optimisée en statique

FIGURE 4.16 – Conditions aux limites et forme finale optimisée en statique pour le cube 3D

à 5,8 Hz.

**Résolution avec MMA** Les résultats obtenus avec MMA sont présentés à la figure 4.17. On constate que cette fois-ci, la solution est constituée de 4 piliers se situant dans les coins et d'un pilier central. On constate néanmoins que la structure n'est pas tout à fait symétrique. Concernant la FRF de la figure 4.17b, on observe que le pic ciblé a été décalé en basse fréquence. De plus, on observe quelques perturbations un peu au dessus de 2 Hz qui peuvent provenir de la dissymétrie. Le calcul a convergé en 256 itérations et la valeur de la complaisance finale est 2,22.

### 4.3. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE SANS AMORTISSEMENT



(a) Forme finale obtenue pour  $\gamma = 1,5$  (b) FRF en complaisance des solutions optimales

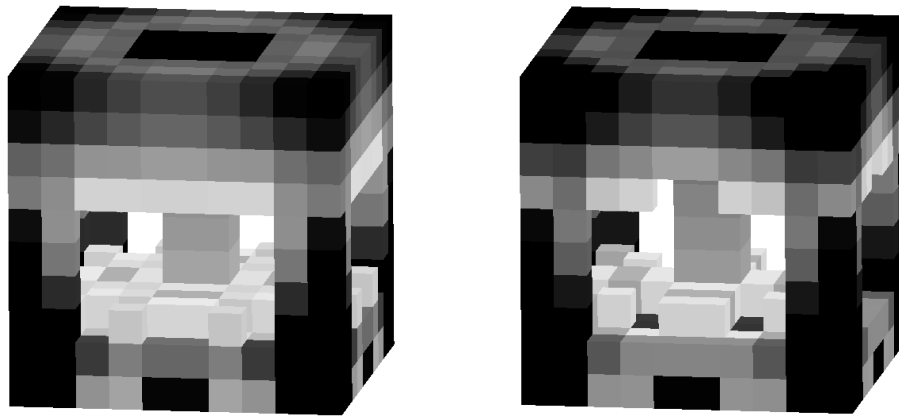
FIGURE 4.17 – Solutions optimales avec MMA pour  $f^* = 5,8$  Hz

**Résolution avec  $\gamma$ MOC** Les résultats obtenus avec  $\gamma$ MOC (incluant  $\gamma = 1,0$ ) sont présentés à la figure 4.18. Cette fois-ci, les FRFs des solutions  $\gamma = 1,0$  et  $\gamma = 1,5$  sont superposées et on constate un très léger écart entre les deux. En regardant la forme des solutions, on constate qu'elles sont similaires entre elles et avec la forme obtenue avec MMA. Néanmoins, dans les deux cas la forme est symétrique ce qui a plus de sens physique que pour la forme provenant de MMA. Avec  $\gamma = 1,5$ , le temps de calcul a été réduit de plus de 76% comparé au cas  $\gamma = 1,0$  (14 contre 59) et la complaisance a diminué de 5,8% (3,11 contre 3,30).

#### 4.3.6.2 Bilan

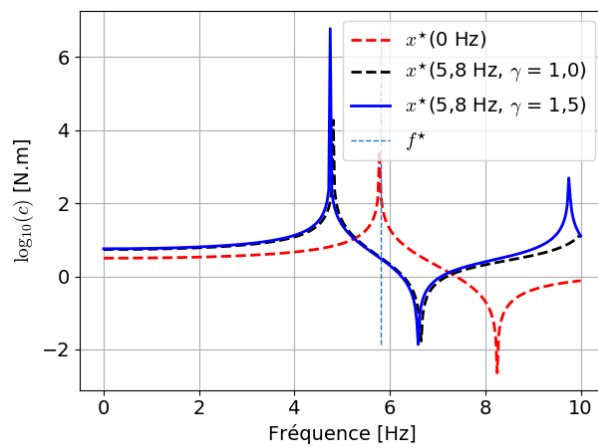
Les résultats présentés ici montrent qu'il est possible de converger vers un optimum en cherchant à minimiser la complaisance dynamique à une fréquence donnée. Pour réaliser cela, deux nouveaux solveurs (MMA et MOC) ont été implémentés et ont permis de surmonter les difficultés rencontrées par le solveur OC en dynamique. De plus, une modification du solveur MOC en  $\gamma$ MOC a montré sur deux cas d'applications qu'il est possible d'améliorer le temps de calcul par rapport aux solutions de références. Cependant, les différentes applications présentées montrent que la FRF associée à la complaisance globale n'est généralement pas tout à fait alignée avec une anti-résonance. Cela peut s'expliquer par le fait que le critère d'arrêt est empirique et ne permet pas toujours d'atteindre le minimum exact. D'autre part, les valeurs de complaisance obtenues et le nombre d'itérations nécessaire pour converger ne permet pas systématiquement de dire qu'un solveur est plus efficace qu'un autre.

### 4.3. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE SANS AMORTISSEMENT



(a) Forme finale obtenue pour  $\gamma = 1,0$

(b) Forme finale obtenue pour  $\gamma = 1,5$



(c) FRF en complaisance des solutions optimales

FIGURE 4.18 – Solutions optimales avec  $\gamma$ MOC pour  $f^* = 5,80$  Hz

	Deltane 350
$E_0$ (MPa)	4,20
$E_\infty$ (MPa)	$1,62 \cdot 10^3$
$\alpha$ (-)	0,59
$\tau$ ( $\mu$ s)	0,52
$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	1,46

TABLE 4.5 – Valeurs des paramètres matériaux pour le Deltane 350

## 4.4 Optimisation du problème dynamique avec amortissement

### 4.4.1 Problème discrétisé

Le cadre de la dynamique avec amortissement est considéré dans cette partie et l'équation de la dynamique de l'équation (2.28), rappelée ici est considérée :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{E\ell\ell} & \mathbf{K}_{E\ell f} \\ \mathbf{K}_{E\ell f}^T & \mathbf{K}_{E f f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{V\ell\ell}^*(\omega) & \mathbf{K}_{V\ell f}^*(\omega) \\ \mathbf{K}_{V\ell f}^{*T}(\omega) & \mathbf{K}_{V f f}^*(\omega) \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\ell\ell} & \mathbf{M}_{\ell f} \\ \mathbf{M}_{\ell f}^T & \mathbf{M}_{f f} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{U}_\ell \\ \underline{U}_f^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_\ell^d \\ \underline{F}_f \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

### 4.4.2 Critère d'optimisation

L'introduction de l'amortissement rendant le problème global complexe, la complaisance dynamique de l'équation (4.13) s'écrit en fonction de ses parties réelles et imaginaires :

$$c(\underline{x}) = \sqrt{\operatorname{Re}(\underline{U}^T(\underline{x})\underline{F})^2 + \operatorname{Im}(\underline{U}^T(\underline{x})\underline{F})^2} \quad (4.31)$$

La dérivée de la complaisance devient alors :

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = \frac{\operatorname{Re}(\underline{U}^T(\underline{x})\underline{F}) \frac{\partial \operatorname{Re}(\underline{U}^T(\underline{x})\underline{F})}{\partial x_e} + \operatorname{Im}(\underline{U}^T(\underline{x})\underline{F}) \frac{\partial \operatorname{Im}(\underline{U}^T(\underline{x})\underline{F})}{\partial x_e}}{\sqrt{\operatorname{Re}(\underline{U}^T(\underline{x})\underline{F})^2 + \operatorname{Im}(\underline{U}^T(\underline{x})\underline{F})^2}} \quad (4.32)$$

### 4.4.3 Optimisation de la poutre cantilever 2D amortie

Le cas de la poutre cantilever 2D est repris dans cette section. Le matériau constituant le domaine de conception est le Deltane 350, dont les caractéristiques évoquées au premier chapitre sont rappelées dans le tableau 4.5. L'effort appliqué est un effort harmonique choisi avec une amplitude arbitraire de 100 N afin que les valeurs des sensibilités de complaisance soient suffisantes pour faire converger l'algorithme.



#### 4.4. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE AVEC AMORTISSEMENT

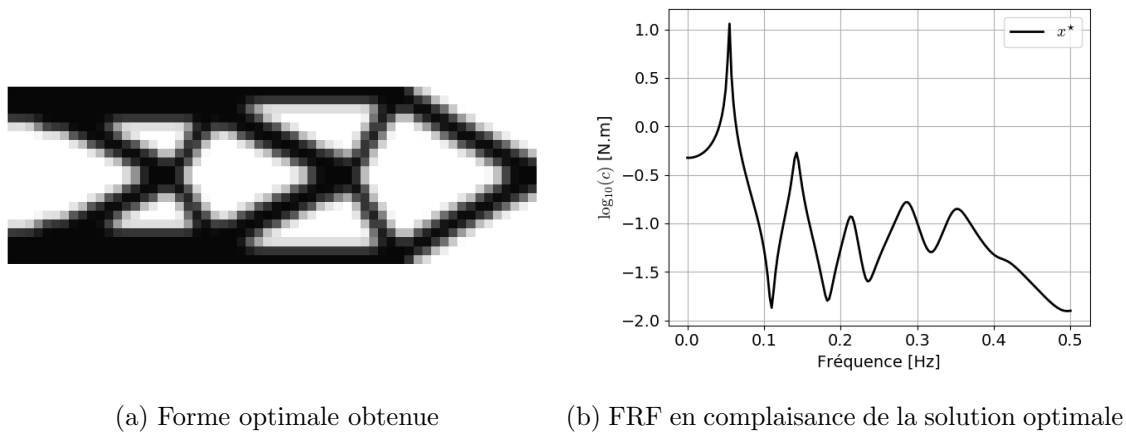


FIGURE 4.19 – Solution optimale obtenue en statique avec MMA

L'optimisation en statique en prenant en compte les valeurs des paramètres matériaux du tableau 4.5 donne la même forme de solution optimale (figure 4.19a) que pour les autres cas statiques de la poutre cantilever 2D traités dans ce document. On voit sur la figure 4.19b que les cinq premières fréquences de résonance de la structure initiale se trouvent dans la bande de fréquence  $[0,05 - 0,35]$  Hz. L'optimisation est réalisée pour les fréquences  $f^* = 0,11$  Hz et  $f^* = 0,29$  Hz, qui correspondent respectivement à l'anti-résonance entre la première et la deuxième fréquence de résonance, et à la fréquence de résonance du quatrième fréquence. Enfin, les solutions sont obtenues avec le solveur MMA. Les résultats du solveur MOC ne sont pas présentés car l'algorithme génère rapidement des oscillations empêchant la solution de converger.

**Optimisation à la fréquence  $f^* = 0,11$  Hz** La solution obtenue est présentée à la figure 4.20. L'image de gauche montre la forme de la solution optimale. La structure est divisée en deux parties : une partie treillis à gauche et une partie arrondie concentrant l'essentiel de la matière sur la partie droite. La fraction volumique de la solution finale est de 50,0%.

La figure de droite (figure 4.20b) montre la FRF de la solution optimale. On voit que les fréquences de résonances se situent de part et d'autre de la fréquence d'optimisation (0,11 Hz) et qu'une zone d'anti-résonance se trouve au niveau de cette fréquence

La convergence est atteinte en 47 itérations, et la valeur finale de la complaisance est de 0,048 N.m, pour un critère d'arrêt choisi à 2%.

#### 4.4. OPTIMISATION DU PROBLÈME DYNAMIQUE AVEC AMORTISSEMENT

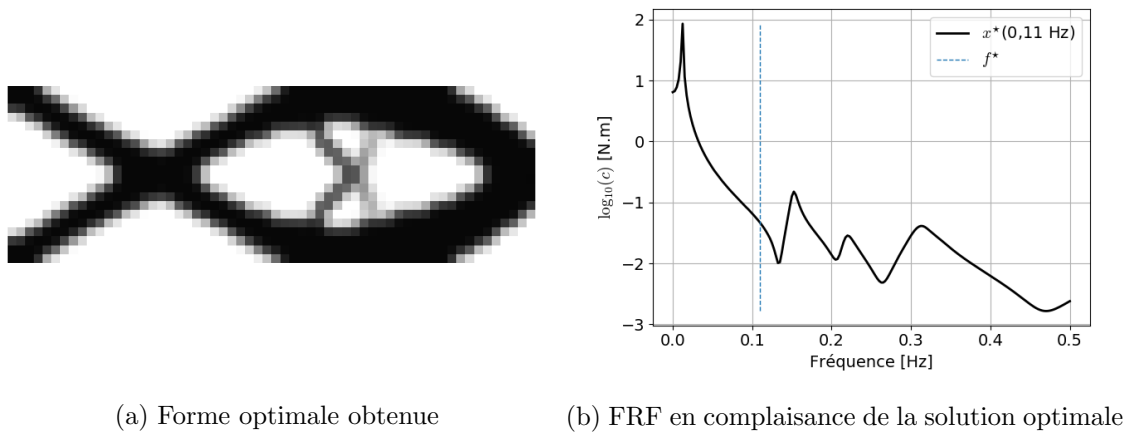


FIGURE 4.20 – Solution optimale obtenue avec MMA pour  $f^* = 0,11$  Hz

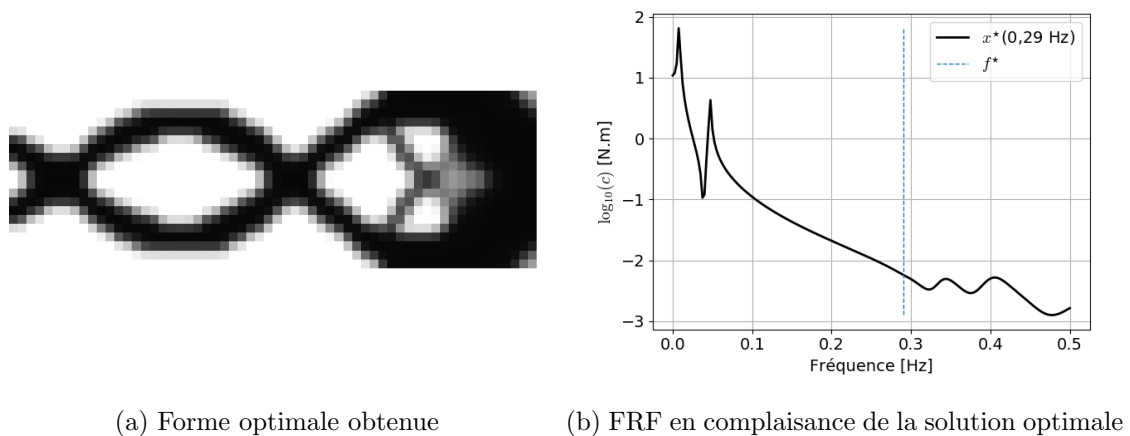


FIGURE 4.21 – Solution optimale obtenue avec MMA pour  $f^* = 0,29$  Hz

**Optimisation à la fréquence  $f^* = 0,29$  Hz** La solution obtenue est présentée à la figure 4.21. On constate que la partie droite de la structure ressemble à celle du cas  $f^* = 0,11$  Hz, mais la partie gauche est différente. La fraction volumique de la solution finale est de 49,9%.

En regardant la FRF, on voit que contrairement au cas précédent, le deuxième mode se trouve cette fois-ci en basse fréquence. De plus, comme pour le cas précédent, la complaisance dynamique au niveau de la fréquence d'optimisation se trouve loin des fréquences de résonances, et proche d'une anti-résonance.

La convergence a été atteinte en 103 itérations, et la valeur finale de la complaisance est de 0,0058 N.m, pour un critère d'arrêt de 6%.

### 4.5 Conclusion et contributions

Dans ce chapitre, l'algorithme d'optimisation topologique est étendu aux problématiques de dynamique avec et sans amortissement. Plusieurs difficultés sont rencontrées et traitées lors du passage de la formulation statique à la formulation dynamique. Nous avons notamment contourné l'hypothèse faite sur les densités nulles qui entraîne l'apparition de modes locaux, en tronquant les effets d'inertie des zones à faible densité. D'autre part, la prise en compte des effets d'inertie entraînant que la condition d'optimalité issue de la formulation statique n'est plus respectée est surmontée en implémentant deux nouveaux solveurs, MMA et MOC.

Le code implémenté fonctionne pour la résolution de problèmes d'optimisation topologique en 2D à une fréquence donnée. Ce code comporte un critère dynamique pour les cas de dynamique sans amortissement et un critère dynamique complexe pour les cas de dynamique avec amortissement. Néanmoins, on constate que lorsque la fréquence ciblée est trop élevée ( $\approx$  supérieure aux trois premiers modes), l'algorithme ne converge plus. D'autre part, il a peu été appliqué à des cas en 3 dimensions, faute de temps.

Une première contribution issue de ce chapitre est l'expression complexe d'un nouveau critère dynamique adapté pour les cas d'amortissement provenant d'élastomères. Ce critère permet de tenir compte aisément de la modélisation de Zener du comportement viscoélastique. La deuxième contribution est l'évolution du solveur MOC avec l'ajout du paramètre  $\gamma$  qui permet d'améliorer significativement la convergence et le temps de calcul.

# Chapitre 5

## Conclusions et perspectives

### Contenu

---

5.1 Conclusion générale . . . . .	139
5.2 Perspectives . . . . .	141

---

### 5.1 Conclusion générale

Au cours de cette thèse, nous nous sommes fixés comme objectif d'étudier l'optimisation topologique et de s'en servir pour réaliser de l'amortissement de vibrations à l'aide de matériaux élastomères. Pour cela, un cas test représentatif d'une application industrielle complexe a été conçu et testé numériquement afin d'étudier le contrôle de l'amortissement de vibrations transmises depuis une sous-structure à une autre, au travers de liaisons dont la géométrie et les propriétés viscoélastiques sont dimensionnées. Ensuite, un état de l'art des différentes méthodes d'optimisation a été fait et une méthode d'optimisation topologique par pénalisation a été choisie puis développée. De plus, une modélisation du comportement viscoélastique du matériau amortissant a été réalisée. L'ensemble de ces éléments a été implémenté dans un code maison. Cependant, toutes les problématiques que soulève la réalisation de problèmes d'optimisation topologique en dynamique n'ont pu être résolues.

La **première contribution** de cette thèse concerne le premier chapitre et est plutôt d'un intérêt industriel, puisqu'il s'agit de l'ajout de matériau amortissant dans un système global pré-existant, dans le but d'amortir les vibrations transmises à la charge utile par son support. Le modèle viscoélastique a été incorporé et plusieurs liaisons ont été testées numériquement afin de visualiser leur impact sur la dynamique globale de la structure [35]. Une optimisation paramétrique a été réalisée afin de déterminer

des caractéristiques géométriques et matériaux optimales d'une liaison viscoélastique comportant de l'élastomère.

La **deuxième contribution** de cette thèse concerne l'optimisation topologique en statique (chapitre 2) et regroupe différents travaux menés dans le cadre de l'extension de l'optimisation topologique à des géométries circulaires. Dans un premier temps, un algorithme de rigidification d'interfaces a été implémenté et est pris en compte dans le calcul lors de l'optimisation. Nous avons montré que cette hypothèse peut s'avérer utile dès que deux matériaux ayant une grande différence de raideur ont une interface commune, ou bien en présence d'un solide infiniment rigide. Dans un deuxième temps, une méthodologie de définition du voisinage dans un maillage non-régulier a été implémentée. Celle-ci se base sur la taille de maille de chaque élément afin de contrôler l'influence des voisins sur un élément cible. Les résultats obtenus sur les plots 3D vont dans ce sens et montrent que selon les valeurs choisies, la solution finale diffère [34]. Dans un troisième temps, une nouvelle loi de pénalisation des densités élémentaires a été proposée. Cette loi s'appuie sur deux lois existantes, SIMP et RAMP, et couple leurs avantages respectifs (SIMP sur les densités élevées et RAMP sur les densités faibles) afin d'offrir de meilleures performances concernant la convergence et le temps de calcul nécessaires pour parvenir à la solution optimale. Les cas d'application ont tendance à montrer que cette observation s'avère exacte en 2D, mais pas toujours en 3D.

La **troisième contribution** concerne l'optimisation topologique en dynamique traitée dans le chapitre 3. La principale amélioration est l'écriture d'un critère pour la compliance dynamique, prenant en compte l'amortissement viscoélastique. Ce critère se base sur l'expression complexe de la compliance et s'exprime simplement en fonction des parties réelles et imaginaires. Une autre amélioration apportée concerne l'un des solveurs numériques employés pour la résolution de problèmes dynamiques, qui a été modifié afin d'améliorer nettement la convergence et le temps de calcul. Cette modification n'impacte pas la qualité de solution finale, dont la différence par rapport à la solution obtenue avec le solveur non-modifié est négligeable.

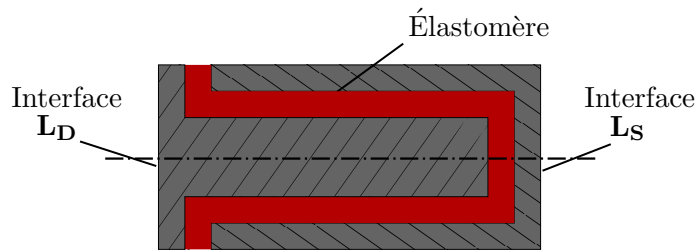


FIGURE 5.1 – Vue en coupe de la géométrie de liaison viscoélastique envisageable

## 5.2 Perspectives

### 5.2.1 Perspectives : améliorations du cas test représentatif

L'application traitée dans le chapitre 2 peut être améliorée de plusieurs façons :

- D'autres géométries de liaisons peuvent être testées numériquement afin de déterminer la géométrie générant le plus d'amortissement. Celle-ci doit tenir compte des dimensions imposées et de la tenue statique. Une solution envisageable serait de placer le matériau élastomère afin que celui-ci puisse travailler à la fois en traction-compression dans certaines zones et en cisaillement dans d'autres, telle que le montre la vue en coupe de la figure 5.1.
- L'ensemble des seize liaisons du système peuvent être modélisées avec un comportement visco-élastique. Néanmoins cela implique que le temps de calcul peut augmenter de manière importante.

### 5.2.2 Perspectives : poursuite du travail en cours

Plusieurs pistes d'amélioration peuvent être envisagées directement à la suite de ce travail :

- Comme il a été évoqué en §3.3.3, un compromis a été fait entre le choix de la valeur de la pénalité de la loi SIMP et le coefficient de Poisson du matériau élastomère, afin que la solution soit toujours physique. La loi SIMP est bien adaptée pour les matériaux à coefficient de Poisson  $\approx 0,3$ , mais inadaptée pour ceux dont le coefficient de Poisson tend vers 0,5. Une perspective serait de définir une nouvelle loi de pénalité qui puisse prendre en compte les coefficients de Poisson proches de 0,5.
- Le problème d'optimisation topologique en dynamique peut être étendu à une bande de fréquence. Cela est théoriquement faisable en discrétisant la bande de fréquence et en moyennant la solution optimale sur tous les points.

- Les liaisons élastomères considérées dans le cas représentatif peuvent être optimisées topologiquement en dynamique au travers de deux étapes :
  - Optimiser la liaison seule, puis l'incorporer dans le système du cas test représentatif,
  - Optimiser la liaison élastomère dans son environnement, c'est-à-dire entre le support et le satellite.

### 5.2.3 Perspectives : extensions générales

Deux grandes perspectives peuvent être envisageables dans la poursuite de ce travail :

- Les géométries obtenues après optimisation topologique ne sont pas directement exploitables pour des calculs de post-traitement. Un axe de travail consiste à faire de la reconstruction de géométrie à partir des formes finales optimisées. Le principe peut être basé sur le lissage des densités aux nœuds présenté à la section §3.5.2.3 : les éléments peuvent être découpés en fonction de là où la courbe de niveau l'intersecte.
- Un deuxième axe de travail consiste à étudier expérimentalement la dynamique de structures optimisées topologiquement au préalable, afin de faire une corrélation calculs-essais et affiner les paramètres numériques choisis pour l'optimisation.

# Bibliographie

- [1] W. Aichtziger, Topology optimization of discrete structures, *In book : Topology optimization in structural mechanics*, G.I.N. Rozvany (1997) : 57–100
- [2] T. Akerstrom et al., Shape optimization of sheet metal structures against crash, *Fourth International Conference on Vehicle Structural Mechanics* (1981)
- [3] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, *Society for Industrial and Applied Mathematics* (1992) **23** :1482–1518
- [4] G. Allaire et al., Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures *European journal of Mechanics* (1993) **12** :839–878
- [5] G. Allaire et al., Shape optimization by the homogenization method, *Numerische Mathematik* (1997) **76** :27–68
- [6] G. Allaire, Shape optimization by the homogenization method, *Applied Mathematical Sciences book vol. 146 - Springer* (2002)
- [7] G. Allaire et al., A level-set method for shape optimization, *Comptes Rendus Mathematique* (2002) **2334** :1125–1130
- [8] G. Allaire et al., Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics* (2004) **194** :363–393
- [9] G. Allaire et al., Structural optimization with FreeFem++ *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2006) **32** :173–181
- [10] G. Allaire et al., Coupling the level set method and the topological gradient in structural optimization, *In book : Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials* (2006) p.3–12



- [11] J.R. Álamo et al., Adapting the SIMP Model for Topology Optimization of Biomechanical Structures, *Proceedings of PACAM XII* (2012)
- [12] T. Altuzarra et al., Interactive optimum design system, *International Symposium on Optimum Structural Design* (1981)
- [13] L. Ambrosio et al., An optimal design problem with perimeter penalization, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* (1993) **1** :55–69
- [14] E. Andreassen et al., Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code, *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2011) **43** :1–16
- [15] R.L. Bagley et al., Fractional calculus - A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures, *American Institute of Aeronautics and Astronautics* (1983) **21** :741–748
- [16] E.R. Barnes, The shape of the strongest column and some related extremal eigenvalue problems, *Quarterly of Applied Mathematics* (1977) **35** :393–409
- [17] J.L. Barrera et al., Hole Seeding in Level Set Topology Optimization via Density Fields, *Structural Multidisciplinary Optimization* (2020) **61** :1319–1343
- [18] J.L. Batoz et al., A discrete shear triangular nine dof elements for the analysis of thick to very thin plates *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (1989) **28** :533–560
- [19] M.P. Bendsøe et al., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (1988) **71** :197–224
- [20] M.P. Bendsøe, Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization* (1989) **1** :193–202
- [21] M.P. Bendsøe et al., Topology and generalized layout optimization of elastic structures, *In book : Topology Design of Structures, M.P Bendsøe et C.A. Mota Soares* (1993) 159–205
- [22] M.P. Bendsøe, Optimization of structural topology, shape, and material, *Springer* (1995)
- [23] M.P. Bendsøe, O. Sigmund, Material interpolation schemes in topology optimization, *Archive of Applied Mechanics* (1999) **69** :635–654
- [24] M.P. Bendsøe, O. Sigmund, Topology optimization - theory, methods and applications, *Springer Berlin Heidelberg* (2004)
- [25] S.S. Bhavikatti et al., Optimum shape design of rotating disks, *Computer and structures* (1980) **11** :397–401

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [26] T. Borrvall et al., Topology optimization of fluids in Stokes flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluid* (2003) **41** :77–107
- [27] M.E. Botkin, Shape optimization of plate and shell structures, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* (1982) **20** :268–273
- [28] B. Bourdin, Filters in topology optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2001) **50** :2143–2158
- [29] Design-dependent loads in topology optimization, *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* (2003) **9** :19–48
- [30] E. Boyere, Modélisation de l’amortissement en dynamique linéaire, *Documentation Code\_Aster* (2011)
- [31] V. Braibant et al., An approximation concepts approach to shape optimal design, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (1985) **53** :119–148
- [32] T.E. Bruns et al., Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2001) **190** :3443–3459
- [33] T.E. Bruns et al., Topology optimization of convection-dominated steady-state heat transfer problems, *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2007) **50** :2859–2873
- [34] S. Burri, A. Legay, J.-F. Deü, Topology optimization of elastomer damping devices for structural vibration reduction, *Proceedings of the 6th European Conference on Computational Mechanics (Solids, Structures and Coupled Problems), ECCM 6 and the 7th European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECFD 7, Glasgow, UK, June 11-15* (2018)
- [35] S. Burri, A. Legay, J.-F. Deü, Topology optimization of elastomer damping devices for space application, *Proceedings of the 13th EUROGEN Congress, Guimarães, Portugal, September 12-14* (2019)
- [36] R.R. Caflisch et al., Island dynamics and the level set method for epitaxial growth, *Applied Mathematics Letters* (1999) **12** :13–22
- [37] W. Chen et al., Microstructural topology optimization of viscoelastic materials for maximum modal loss factor of macrostructures, *Structural Multidisciplinary Optimization* (2016) **53** :1–14
- [38] R.M. Christensen, Theory of viscoelasticity, *Dover publications* (1982)

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [39] S. Cho et al., Isogeometric shape design optimization : exact geometry and enhanced sensitivity, *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2009) **38** :53–70
- [40] M. Cicotti, Elasticité - Viscoélasticité Plasticité - Rupture *Support de cours à l'ESPCI Paris*
- [41] P. Cauffin et al., Level set topology optimization of cooling and heating devices using a simplified convection model, *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2016) **53** :985–1003
- [42] D. Da et al., Topology optimization of periodic lattice structures taking into account strain gradient, *Computers and Structures* (2018) **210** :28–40
- [43] T. Dbouk, A review about the engineering design of optimal heat transfer systems using topology optimization, *Applied Thermal Engineering* (2017) **112** :841–854
- [44] E.M. Dede et al. Topology optimization, additive layer manufacturing, and experimental testing of an air-cooled heat sink *Journal of mechanical design* (2015) **137** :1–9
- [45] K. Dems et al., Multiparameter structural shape optimization by the finite element method, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* (1978) **13** :247–263
- [46] K. Dems et al., Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis-II. Structural shape variation, *International Journal of Solids and Structures* (1984) **20** :527–552
- [47] Y. Deng et al., Topology optimization of unsteady incompressible Navier-Stokes flows, *Journal of Computational Physics* (2011) **230** :6688-6708
- [48] Y. Deng et al., Topology optimization of steady Navier-Stokes flow with body force, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2013) **255** :306–321
- [49] A.R. Diaz et al., Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (1992) **35** :1487–1502
- [50] G. Dhatt, An efficient triangular shell element, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* (1970) **8** :2100–2102
- [51] G. Dhatt et al., A new triangular discrete kirchoff plate/shell element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (1986) **23** :453–470
- [52] A. Diaz et al., checkerboard patterns in layout optimization *Structural Optimization* (1995) **10** :40–45

- [53] A. Donoso, Numerical simulations in 3D heat conduction : minimizing the quadratic mean temperature gradient by an optimality criteria method, *Society for Industrial and Applied Mathematics* (2006) **28** :929–941
- [54] J. DU et al., Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps, *Structural Multidisciplinary Optimization* (2007) **34** :91–110
- [55] P.D. Dunning et al., A new hole insertion method for level set based structural topology optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2013) **93** :118–134
- [56] A. Evgrafov, Topology optimization of slightly compressible fluids *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* (2006) **86** :46–62
- [57] M. Farshad, Optimum shape of continuous columns, *International Journal of Mechanical Sciences* (1974) **16** :597–602
- [58] A.C. Galucio et al., Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators, *Computational Mechanics* (2004) **33** :282–291
- [59] A.C. Galucio et al., An adaptation of the gear scheme for fractional derivatives, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2006) **195** :6073–6085
- [60] T. Gao et al., Topology optimization of heat conduction problem involving design-dependent heat load effect, *Finite Element Analysis and Design* (2008) **44** :805–813
- [61] A. Gersborg-Hansen et al., Topology optimization of channel flow problems, *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2005) **30** :181–192
- [62] A. Gersborg-Hansen et al., Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method, *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2006) **31** :251–259
- [63] C. Geuzaine et al., Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2009) **79** :1309–1331
- [64] F. Gibou et al., A review of level-set methods and some recent applications, *Journal of Computational Physics* (2018) **353** :82–109
- [65] D.F. Golla et al., Dynamics of viscoelastic structures - A time-domain finite formulation, *Journal of Applied Mechanics* (1985) **52** :897–906

- [66] M.M. Gregersen et al., Topology and shape optimization of induced-charge electro-osmotic micropumps, *New Journal of Physics* (2009) **11** :075019
- [67] J. Guest et al., Topology optimization of creeping fluid flows using a Darcy-Stokes finite element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2006) **66** :461–484
- [68] A. Guittet et al., A Voronoi interface approach to cell aggregate electropermeabilization, *Journal of Computational Physics* (2017) **332** :143–159
- [69] R.T. Haftka et al., Structural Shape Optimization - A survey, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (1986) **57** :91–106
- [70] R.B. Haber et al., A new approach to variable-topology shape design using a constraint on the perimeter, *Structural Optimization* (1996) **11** :1–12
- [71] P. Hajela et al., Genetic algorithms in structural topology optimization, *In book : Topology Design of Structures, M.P Bendsøe et C.A. Mota Soares* (1993) 117–133
- [72] Z. Hashin et al., A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solides* (1963) **11** :127–140
- [73] E.J. Haug et al, Contact stress minimization by contour design, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* (1978) **12** :917–930
- [74] X. Huang et al., A further review of ESO type methods for topology optimization, *Structural Multidisciplinary Optimization* (2010) **41** :671–683
- [75] T.J.R. Hughes, The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, *Dover Publications* (1987)
- [76] T.J.R. Hughes et al., Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2005) **194** :4135–4195
- [77] A. Iga et al., Topology optimization for thermal conductors considering design-dependent effects, including heat conduction and convection, *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2009) **52** :2721–2732
- [78] M.H. Imam, Three-dimensional shape optimization, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* (1982) **18** :661–673

- [79] M.J. Jakiela et al., Continuum structural topology design with genetic algorithms, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2000) **186** :339–356
- [80] A. Jameson, Aerodynamic shape optimisation using the adjoint method, *Lectures at the Von Karman Institute* (2003)
- [81] I.G. Jang et al, Computational study of Wolff’s law with trabecular architecture in the human proximal femur using topology optimization, *Journal of Biomechanics* (2008) **41** :2353–2361
- [82] J.S. Jensen, Topology optimization of dynamics problems with Padé approximants *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2007) **72** :1605–1630
- [83] C.S. Jog et al., Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (1996) **130** :203–226
- [84] C.S. Jog, Topology design of structures subjected to periodic loading, *Journal of Sound and Vibration* (2002) **253** :687–709
- [85] H. B. Jung et al., A new parameterisation method for NURBS surface interpolation, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* (2000) **16** :784–790
- [86] Z. Kang et al., On topology optimization of damping layer in shell structures under harmonic excitations, *Structural Multidisciplinary Optimization* (2012) **46** :51–67
- [87] W. Karush, Minima of functions of several variables with inequalities as side constraints, *M. Sc. Dissertation.* (1939)
- [88] W. Karush, Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Conditions *In : Giorgi G., Kjeldsen T. (eds) Traces and Emergence of Nonlinear Programming* (2014)
- [89] J.B. Keller, The Shape of the Strongest Column, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* (1960) **5** :275–285
- [90] U. Kirsch, On singular topologies in optimum structural design, *Structural Optimization* (1990) **2** :133–142
- [91] E.A. Kontoleon et al., Adjoint-based constrained optimization for viscous flows, including heat transfer, *Engineering Optimization* (2013) **45** :941–961
- [92] S. Kreissl et al., Topology optimization for unsteady flow, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2011) **87** :1229–1253

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [93] J.-P. Kruth et al., Reverse engineering modelling of free-form surfaces from point clouds subject to boundary conditions, *Journal of Materials Processing Technology* (1998) **76** :120–127
- [94] H. W. Kuhn et al., Non linear programming, *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium* (1951)
- [95] G.A. Lesieutre et al., Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement fields, *Journal of Vibration and Acoustics* (1995) **117** :424–430
- [96] G.A. Lesieutre et al., Finite element modeling of one-dimensional viscoelastic structures using anelastic displacement fields, *Journal of Guidance, Control and Dynamics* (1996) **19** :520–527
- [97] K. Liu et al., An efficient 3D topology optimization code written in Matlab, *Structural Multidisciplinary Optimization* (2014) **50** :1175–1196
- [98] H. Liu et al., A comparative study of dynamic analysis methods for structural topology optimization under harmonic force excitations, *Structural Multidisciplinary Optimization* (2015) **51** :1321–1333
- [99] Q. Liu et al., Topology optimization of viscoelastic materials on damping and frequency of macrostructures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2018) **337** :305–323
- [100] Z.-D. Ma et al., Structural topology and shape optimization for a frequency response problem, *Computational Mechanics* (1993) **13** :157–174
- [101] Z.-D. Ma et al., Structural design for obtaining desired eigenfrequencies by using the topology and shape optimization method, *Computing Systems in Engineering* (1994) **5** :77–89
- [102] Z.-D. Ma et al., Topological design for vibrating structures *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (1995) **121** :259–280
- [103] G. Machado et al., Some results in topology optimization applied to biomechanics, *Computer and Structures* (2004) **82** :1389–1397
- [104] G. Marck, Optimisation topologique des transferts de chaleur et de masse : application aux échangeurs de chaleur, *Thèse de Doctorat de l'École nationale supérieure des Mines de Paris* (2012)
- [105] P. Marty, Cours de transfert thermique - conduction et rayonnement, (2012)
- [106] D.J. McTavish et al., Modeling of linear viscoelastic space structures, *Journal of Vibration and Acoustics* (1993) **115** :103–110

- [107] P. Mistani et al., The island dynamics model on parallel quadtree grids *Journal of Computational Physics* (2018) **361** :150–166
- [108] B. Morin et al., Modélisation de liaisons flexibles amortissantes en élastomères pour la prédiction du comportement dynamique de systèmes complexes, *Thèse de Doctorat du Conservatoire National Des Arts et Métiers* (2016)
- [109] M. Nemeč et al., Multipoint and Multi-Objective Aerodynamic Shape Optimization, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* (2004) **42** :1059–1065
- [110] M.M. Neves et al., Generalized topology design of structures with a buckling load criterion, *Structural Optimization* (1995) **10** :71–78
- [111] D. M. Nguyen et al., Isogeometric shape optimization of vibrating membranes, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2011) **200** :1343–1353
- [112] D. M. Nguyen et al., Isogeometric shape optimization for electromagnetic scattering problems, *Progress in Electromagnetics Research B* (2012) **45** :117–146
- [113] P. Nørtoft et al., Isogeometric shape optimization in fluid mechanics, *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2013) **48** :909–925
- [114] L. Olesen et al., A high-level programming-language implementation of topology optimization applied to steady-state Navier-Stokes flow, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2006) **65** :975–1001
- [115] N. Olhoff et al., Topological design of continuum structures subjected to forced vibration, *6 th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization* (2005)
- [116] S. Osher et al., Fronts Propagating with Curvature- Dependent Speed : Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations, *Journal of Computational Physics* (1988) **79** :12–49
- [117] C. Othmer, A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluid* (2008) **58** :861–877
- [118] G. Ouaknin et al., Self-consistent field theory simulations of polymers on arbitrary domains, *Journal of Computational Physics* (2016) **327** :168–155
- [119] N.L. Pedersen, Maximization of eigenvalues using topology optimization, *Structural Multidisciplinary Optimization* (2000) **20** :2–11



- [120] M. Peigney et al., Optimisation de formes en sciences de l'ingénieur, Méthodes et applications, *Livre IFSTTAR* (2018)
- [121] T. Pritz, Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials *Journal of Sound and Vibration* (1996) **195** :103–115
- [122] L. Qing et al., Shape and topology design for heat conduction by Evolutionary Structural Optimization, *International Journal of Heat and Mass Transfer* (1999) **42** :3361–3371
- [123] O.M Querin et al., Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm, *Engineering Computations* (1998) **15** :1031–1048
- [124] O.M Querin et al., Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2000) **189** :559–573
- [125] J.J Reuther et al., Constrained multipoint Aerodynamic Shape Optimization Using an Adjoint Formulation and Parallel Computers, Part 1, *Journal of Aircraft* (1999) **36**
- [126] L. Rouleau et al., Modélisation vibro-acoustique de structures sandwich munies de matériaux visco-élastiques, *Thèse de Doctorat* (2013)
- [127] G.I.N. Rozvany, Structural optimization via Optimality Criteria, *Kluwer academic publishers* (1989)
- [128] G.I.N. Rozvany et al., Generalized shape optimization without homogenization, *Structural Optimization* (1992) **4** :250–252
- [129] G.I.N. Rozvany, Aims, scope, basic concepts and methods of topology optimization, *In book : Topology optimization in structural mechanics, G.I.N. Rozvany* (1997)
- [130] G.I.N. Rozvany et al., Combining ESO with rigorous optimality criteria, *International Journal of Vehicle Design* (2002)
- [131] G.I.N. Rozvany, A critical review of established methods of structural topology optimization, *Structural Multidisciplinary Optimization* (2009) **37** :217–237
- [132] L. Shu et al., Level set based structural topology optimization for minimizing frequency response, *Journal of Sound and Vibration* (2011) **330** :5820–5834
- [133] L. Shu et al., Level set based topology optimization of vibrating structures for coupled acoustic–structural dynamics, *Computers and Structures* (2014) **132** :34–42

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [134] B. Sid et al., Topology optimization using an adaptive genetic algorithm and a new geometric representation, *Computer Aided Optimum Design in Engineering* (2005) **80** :127–135
- [135] O. Sigmund, Design of Material Structures using Topology Optimization, PhD Thesis (1994)
- [136] O. Sigmund et al., Numerical instabilities in topology optimization : A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, *Structural Optimization* (1998) **16** :68–75
- [137] O. Sigmund, A 99 line topology optimization code written in MATLAB, *Structural Multidisciplinary Optimization* (2001) **21** :120–127
- [138] O. Sigmund et al., Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization *Philosophical Transactions of the Royal Society A* (2003) **361** :1001–1019
- [139] O. Sigmund, Morphology-based black and white filters for topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2007) **33** :401–424
- [140] O. Sigmund et al., Topology optimization approaches - A comparative review, *Structural Multidisciplinary Optimization* (2013) **48** :1031–1055
- [141] On Topological Derivative in Shape Optimization *Research report INRIA* (1997)
- [142] M. Stolpe et al., An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2001) **22** :116–124
- [143] M. Stolpe et al., On the trajectories of penalization methods for topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2001) **21** :128–139
- [144] K. Suzuki et al., A homogenization method for shape and topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (1991) **92** :291–318
- [145] K. Svanberg, The method of moving asymptotes - A new method for structural optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (1987) **24** :359–373
- [146] K. Svanberg, MMA and GCMMA - twomethods for nonlinear optimization, <https://people.kth.se/~krille/mmagmma.pdf>
- [147] A. Takezawa et al., Topology optimization of damping material for reducing resonance response based on complex dynamic compliance, *Journal of Sound and Vibration* (2016) **365** :230–243
- [148] P. Tanskanen, The evolutionary structural optimization method : theoretical aspect, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2002) **191** :5485–5498

- [149] D. Tchierniak, Topology optimization of resonating structures using SIMP method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2002) **54** :1605–1622
- [150] L.H. Tenek et al., Eigenfrequency maximization of plates by optimization of topology using homogenization and mathematical programming, *The Japan society of Mechanical Engineers* (1994) **37** :667–677
- [151] M.A. Trindade, Reduced-Order Finite Element Models of Viscoelastically damped beams through internal variables projection, *Journal of Vibration and Acoustic* (2006) **128** :501–508
- [152] Y. Umetani et al., Shape optimization of beams subject to displacement restrictions on the basis of the growing-reforming procedure, *Bulletin of JSME* (1978) **21** :1113–1119
- [153] P. Venini, Dynamic compliance optimization : Time vs frequency domain strategies, *Computers and Structures* (2016) **177** :12–22
- [154] E. Wardbro et al., Megapixel topology optimization on a graphics processing unit, *Society for Industrial and Applied Mathematics* (2009) **51** :707–721
- [155] S.Y. wang et al., On Hole Nucleation in Topology Optimization Using the Level Set Methods *CMES* (2007) **21** :219–237
- [156] E. Weichert, Ueber elastische Nachwirkung, *PhD Thesis* (1889)
- [157] J. Wu et al., Design and Optimization of Conforming Lattice Structures, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* (2019)
- [158] Y.M. Xie et al., A simple evolutionnary procedure for structural optimization, *Computers and Structures* (1993) **49** :885–896
- [159] Y.M. Xie et al., Evolutionnary structural optimization, *Springer-Verlag* (1997)
- [160] J.J. YI et al., A topology optimization method based on element independent nodal density, *Central South University Press* (2014) **21** :558–566
- [161] G.H. Yoon, Maximizing the fundamental eigenfrequency of geometrically nonlinear structures by topology optimization based on element connectivity parameterization, *Computers and Structures* (2010) **88** :120–133
- [162] G.H. Yoon, Structural topology optimization for frequency response problem using model reduction schemes, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2010) **199** :1744–1763

- [163] G.H. Yoon, Topological layout design of electro-fluid-thermal-compliant actuator, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2012) **209** :28–44
- [164] M. Yoon et al., Isogeometric shape design optimization of heat conduction problems, *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2013) **62** :272–285
- [165] K.-S. Yun et al., Topology optimization of viscoelastic damping layers for attenuating transient response of shell structures, *Finite Element in Analysis and Design* (2018) **141** :154–165
- [166] M. Zhou et al., The COC algorithm, Part II : Topological, geometrical and generalized shape optimization *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (1991) **89** :309–336
- [167] S. Zhou et al., A variational level set method for the topology optimization of steady-state Navier-Stokes flow, *Journal of Computational Physics* (2008) **65** :10178–10195
- [168] O. Zienkiewicz et al., *The Finite Element Method - Volume 1 : the basis 5th ed. Butterworth Heinemann* (2000)

## BIBLIOGRAPHIE

---

## Annexe A

# Résultats pour le plot amortissant 3D en statique

### A.1 Chargement initial

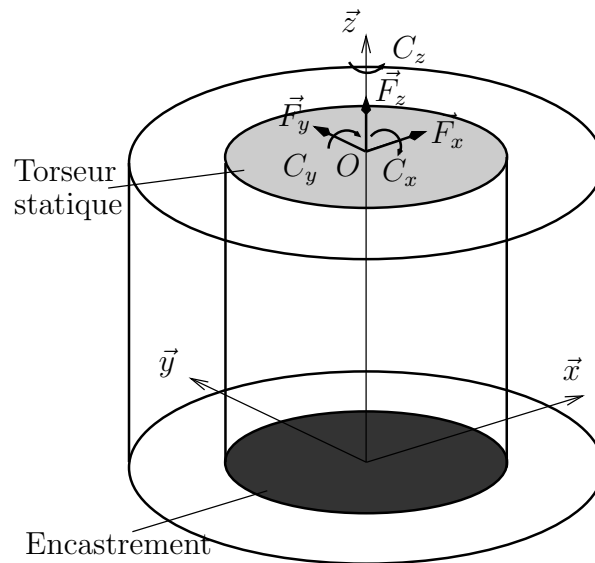


FIGURE A.1 – Domaine de conception et conditions aux limites

Pour rappel, le plot est rigidifié au niveau de ses faces inférieures et supérieures. Les conditions aux limites en effort correspondent donc aux sollicitations simples :

- effort normal selon l'axe longitudinal ( $\vec{z}$ ),
- effort tranchant dans les directions transverses ( $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ ),
- moment de torsion autour de l'axe longitudinal,

— moment de flexion autour des directions transverses.

Dans la mesure où le plot est cylindrique, les résultats obtenus pour les cas d'une résultante dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont identiques. Le raisonnement est également valable pour les couples autour des axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . Au total huit cas sont présentés, correspondant aux quatre sollicitations simples calculées pour les deux valeurs de  $\delta$ . Les quatre cas de chargement sont visibles à la figure A.1.

## A.2 Résultats obtenus avec la méthode SIMP

### A.2.1 Cas d'une résultante dans la direction $\vec{z}$

Les formes optimales obtenues dans les cas  $\delta = 1$  et  $\delta = 2$  se trouvent à la figure A.2. Les déformées amplifiées d'un facteur de  $1 \times 10^7$  sont à la figure A.3. Les performances des résultats en terme de nombre d'itérations et de valeur finale de compliance sont répertoriées dans les tableaux de la section §A.4.

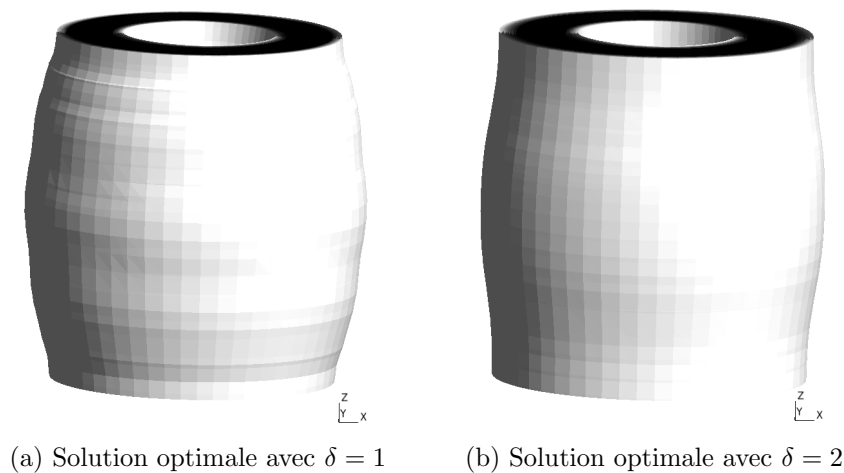


FIGURE A.2 – Solutions optimales lissées

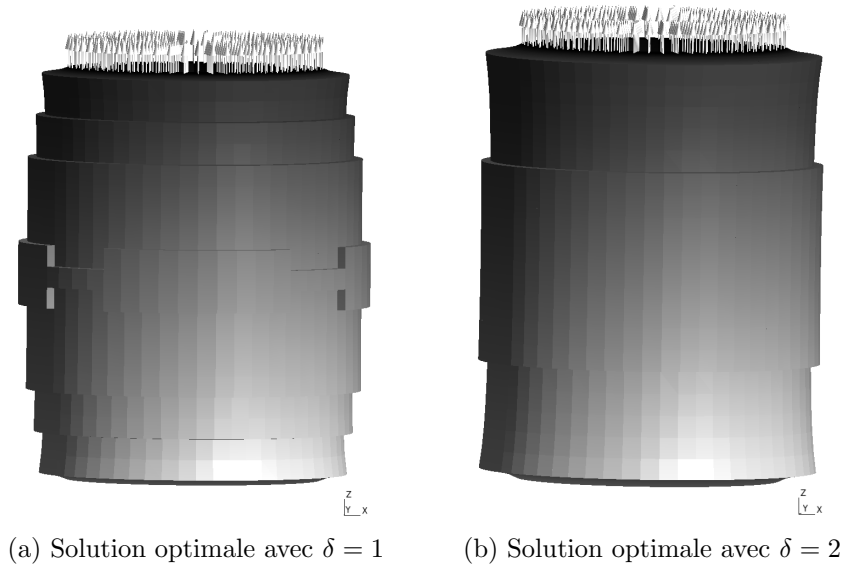


FIGURE A.3 – Solutions optimales "réelles" déformées

### A.2.2 Cas d'une résultante dans la direction $\vec{x}$

Les formes optimales obtenues dans les cas  $\delta = 1$  et  $\delta = 2$  se trouvent à la figure A.4. Les déformées amplifiées d'un facteur de  $1 \times 10^6$  sont à la figure A.5. Les performances des résultats en terme de nombre d'itérations et de valeur finale de compliance sont répertoriées dans les tableaux de la section §A.4.

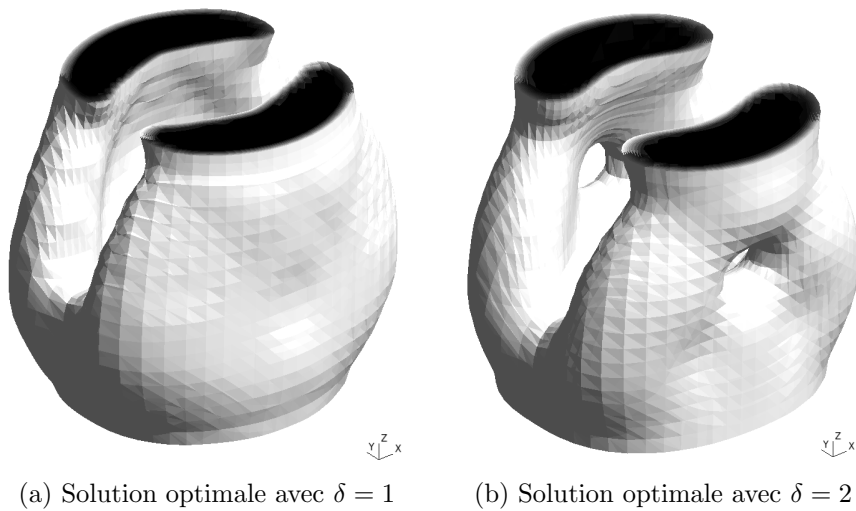


FIGURE A.4 – Solutions optimales lissées



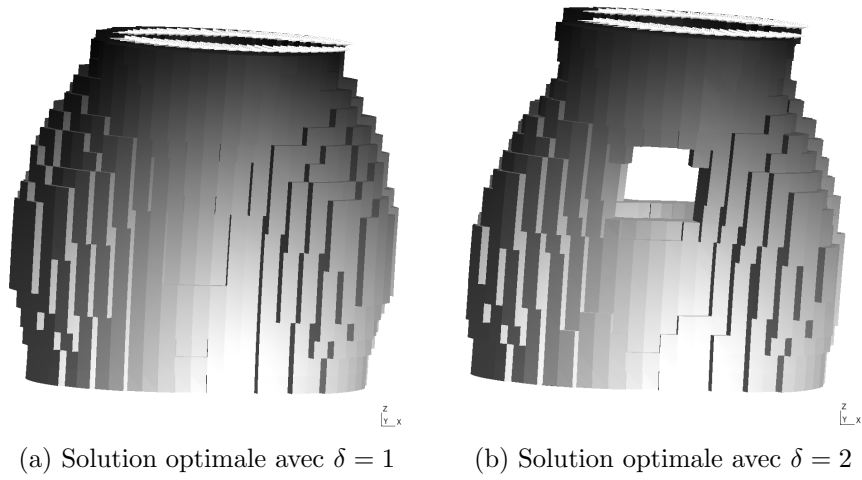


FIGURE A.5 – Solutions optimales "réelles" déformées

### A.2.3 Cas d'un couple autour de l'axe $\vec{z}$

Les formes optimales obtenues dans les cas  $\delta = 1$  et  $\delta = 2$  se trouvent à la figure A.6. Les vues en coupe des formes optimales pour ces deux cas sont présentées à la figure A.7. Les déformées amplifiées d'un facteur de  $1 \times 10^8$  sont à la figure A.8. Les performances des résultats en terme de nombre d'itérations et de valeur finale de compli-  
 ance sont répertoriées dans les tableaux de la section §A.4.

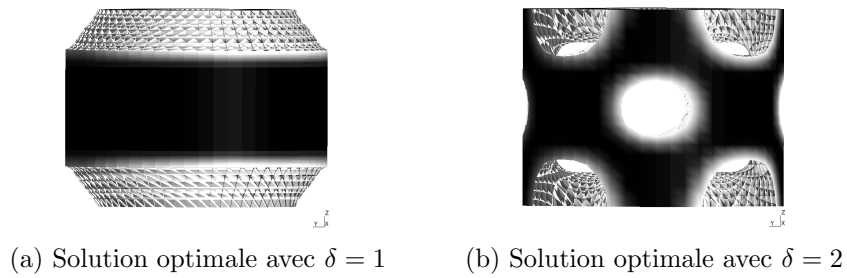


FIGURE A.6 – Solutions optimales lissées

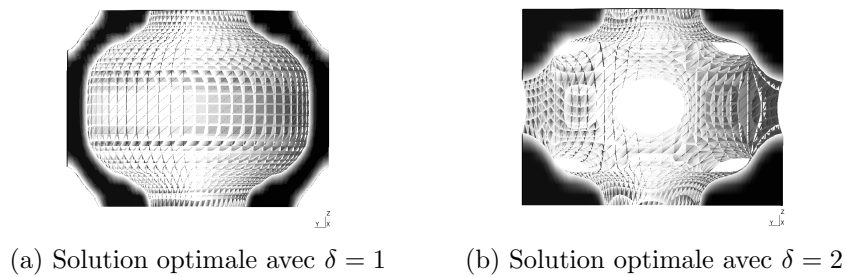


FIGURE A.7 – Vues en coupe des solutions

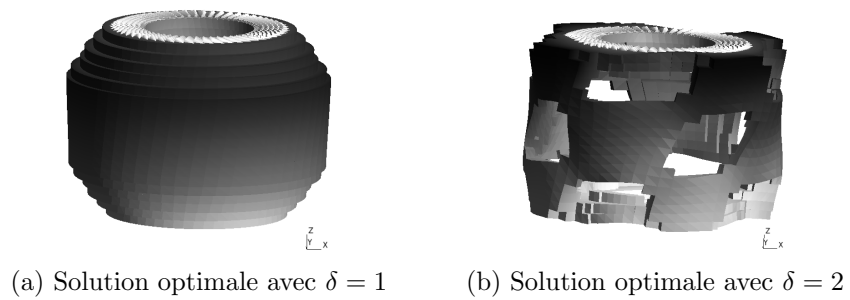


FIGURE A.8 – Solutions optimales "réelles" déformées

#### A.2.4 Cas d'un couple autour de l'axe $\vec{x}$

Les formes optimales obtenues dans les cas  $\delta = 1$  et  $\delta = 2$  se trouvent à la figure A.9. Les déformées amplifiées d'un facteur de  $5 \times 10^7$  sont à la figure A.10. Les performances des résultats en terme de nombre d'itérations et de valeur finale de compliance sont répertoriées dans les tableaux de la section §A.4.

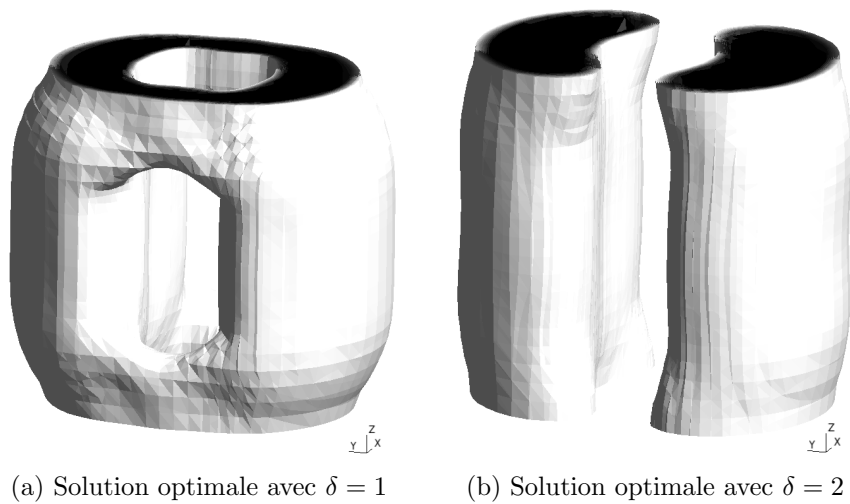


FIGURE A.9 – Solutions optimales lissées

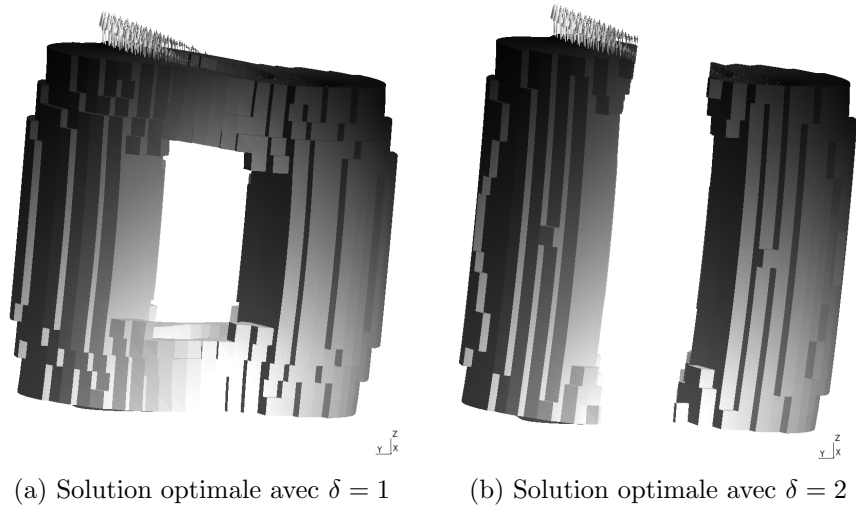
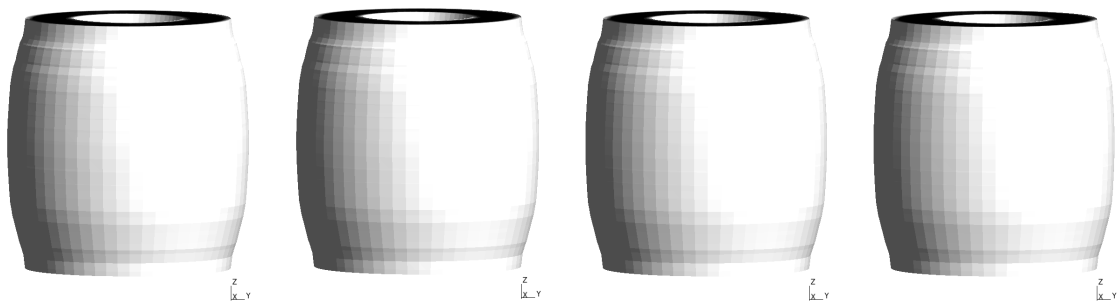


FIGURE A.10 – Solutions optimales "réelles" déformées

### A.3 Résultats obtenus avec la méthode AVER

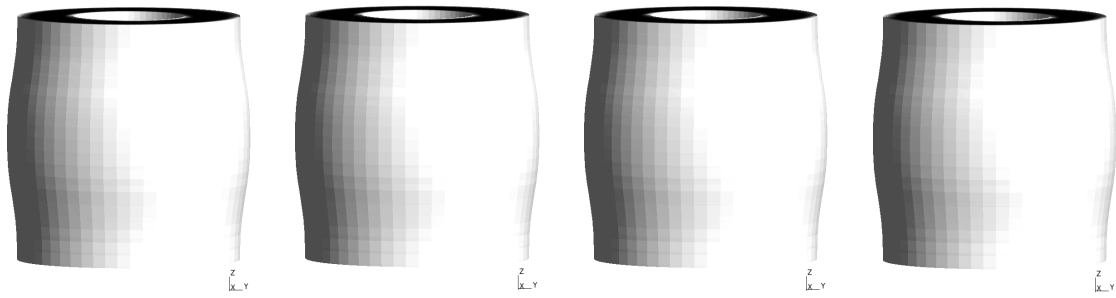
#### A.3.1 Cas d'une résultante dans la direction $\vec{z}$



(a) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 3$     (b) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 4$     (c) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 5$     (d) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 6$

FIGURE A.11 – Formes finales obtenues avec  $\delta = 1$

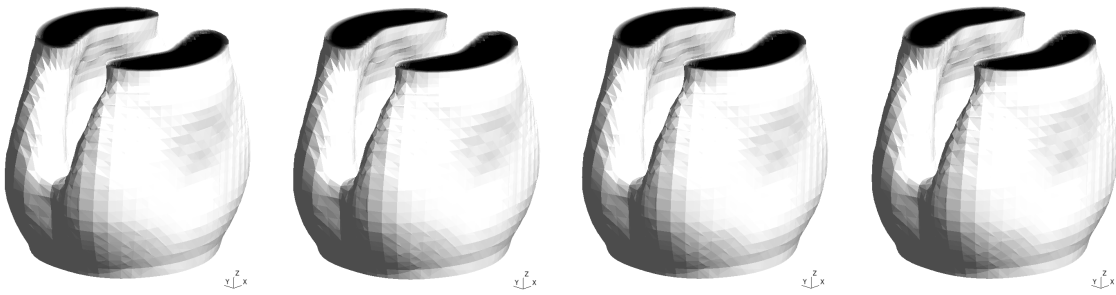
### A.3. RÉSULTATS OBTENUS AVEC LA MÉTHODE AVER



(a) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 3$  (b) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 4$  (c) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 5$  (d) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 6$

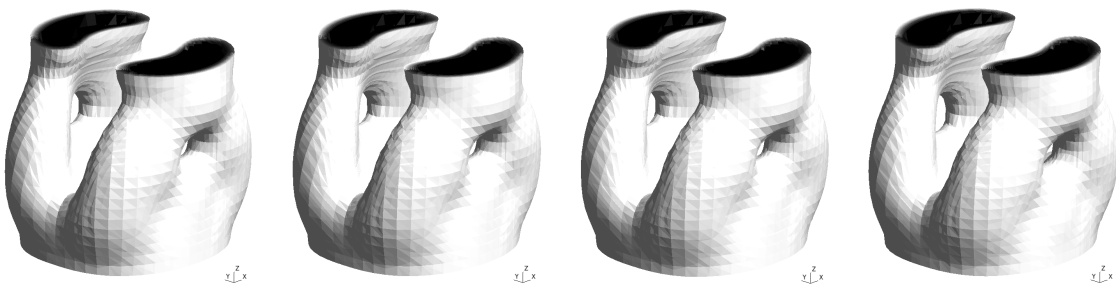
FIGURE A.12 – Formes finales obtenues avec  $\delta = 2$

#### A.3.2 Cas d'une résultante dans la direction $\vec{x}$



(a) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 3$  (b) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 4$  (c) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 5$  (d) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 6$

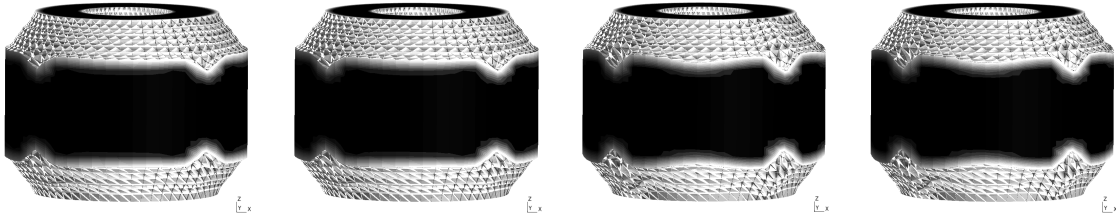
FIGURE A.13 – Formes finales obtenues avec  $\delta = 1$



(a) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 3$  (b) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 4$  (c) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 5$  (d) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 6$

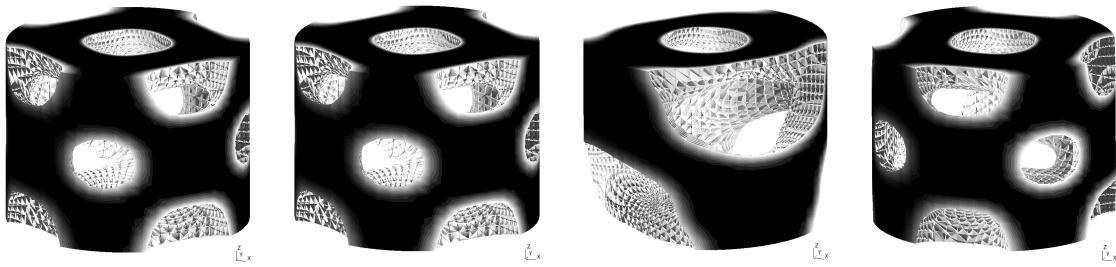
FIGURE A.14 – Formes finales obtenues avec  $\delta = 2$

A.3.3 Cas d'un couple autour de l'axe  $\vec{z}$



(a) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 3$  (b) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 4$  (c) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 5$  (d) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 6$

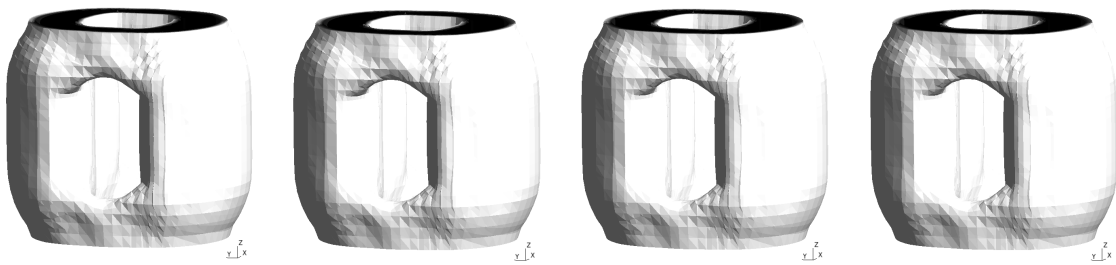
FIGURE A.15 – Formes finales obtenues avec  $\delta = 1$



(a) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 3$  (b) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 4$  (c) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 5$  (d) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 6$

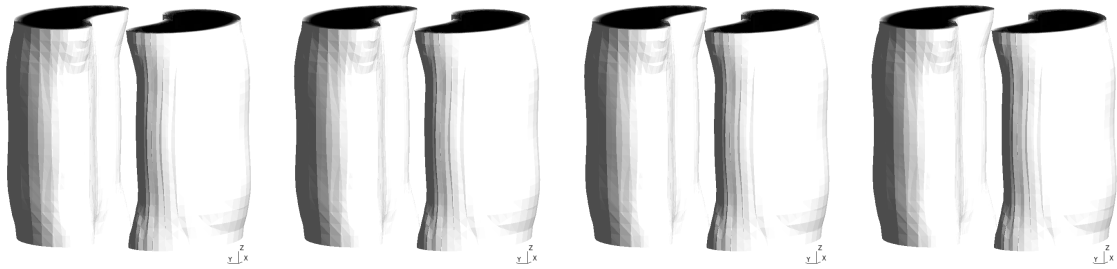
FIGURE A.16 – Formes finales obtenues avec  $\delta = 2$

A.3.4 Cas d'un couple autour de l'axe  $\vec{x}$



(a) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 3$  (b) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 4$  (c) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 5$  (d) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 6$

FIGURE A.17 – Formes finales obtenues avec  $\delta = 1$



(a) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 3$  (b) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 4$  (c) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 5$  (d) Solution optimale avec pour  $p = 3, q = 6$

FIGURE A.18 – Formes finales obtenues avec  $\delta = 2$

## A.4 Synthèse des performances

Les tableaux A.1,A.3,A.5 et A.7 présentent les résultats en terme de nombre d'itérations et de valeur de compliance finale. Le cas de référence choisi est le cas SIMP avec  $p = 3$ . Étant donné que la méthode RAMP est moins documentée que SIMP, et qu'AVER est nouvelle, les calculs avec cette dernière méthode ont été réalisés pour des valeurs de pénalité  $q$  variant de 3 à 6.  $p$  est toujours égal à 3. Les tableaux A.2,A.4,A.6 et A.8 présentent les écarts exprimés en pourcentage sur les performances des solutions obtenues avec la méthode AVER par rapport au cas de référence.

### A.4.1 Cas d'une résultante dans la direction $\vec{z}$

$\delta \rightarrow$	1		2	
Résultante $\vec{z}$	itérations	compliance	itérations	compliance
SIMP $p = 3$	41	0,0751	30	0,0917
AVER $p = 3, q = 3$	25	0,0747	30	0,0917
AVER $p = 3, q = 4$	25	0,0747	31	0,0917
AVER $p = 3, q = 5$	25	0,0747	31	0,0918
AVER $p = 3, q = 6$	26	0,0747	32	0,0919

TABLE A.1 – Performances des différentes solutions pour le cas d'une résultante dans la direction  $\vec{z}$

#### A.4. SYNTHÈSE DES PERFORMANCES

$\delta \rightarrow$	1		2	
Résultante $\vec{z}$	itérations	compliance	itérations	compliance
<b>SIMP <math>p = 3</math></b>	<b>41</b>	<b>0,0751</b>	<b>30</b>	<b>0,0917</b>
AVER $p = 3, q = 3$	-39,0%	-0,51%	0,0%	-0,04%
AVER $p = 3, q = 4$	-39,0%	-0,55%	3,3%	0,08%
AVER $p = 3, q = 5$	-39,0%	-0,59%	3,3%	0,03%
AVER $p = 3, q = 6$	-36,6%	-0,62%	6,7%	0,16%

TABLE A.2 – Comparaison des écarts en % par rapport à la solution SIMP pour le cas d'une résultante dans la direction  $\vec{z}$

#### A.4.2 Cas d'une résultante dans la direction $\vec{x}$

$\delta \rightarrow$	1		2	
Résultante $\vec{x}$	itérations	compliance	itérations	compliance
<b>SIMP <math>p = 3</math></b>	<b>92</b>	<b>0,8644</b>	<b>101</b>	<b>1,0500</b>
AVER $p = 3, q = 3$	82	0,8657	106	1,0516
AVER $p = 3, q = 4$	90	0,8658	113	1,0529
AVER $p = 3, q = 5$	101	0,8660	78	1,0536
AVER $p = 3, q = 6$	89	0,8652	96	1,0639

TABLE A.3 – Performances des différentes solutions pour le cas d'une résultante dans la direction  $\vec{x}$

$\delta \rightarrow$	1		2	
Résultante $\vec{x}$	itérations	compliance	itérations	compliance
<b>SIMP <math>p = 3</math></b>	<b>92</b>	<b>0,8644</b>	<b>101</b>	<b>1,0500</b>
AVER $p = 3, q = 3$	-10,9%	0,16%	5,0%	0,15%
AVER $p = 3, q = 4$	-2,2%	0,17%	11,9%	0,28%
AVER $p = 3, q = 5$	9,8%	0,19%	-22,8%	0,34%
AVER $p = 3, q = 6$	-3,3%	0,10%	-5,0%	1,32%

TABLE A.4 – Comparaison des écarts en % par rapport à la solution SIMP pour le cas d'une résultante dans la direction  $\vec{x}$

#### A.4. SYNTHÈSE DES PERFORMANCES

---

##### A.4.3 Cas d'un couple autour de l'axe $\vec{z}$

$\delta \rightarrow$	1		2	
Couple $\vec{z}$	itérations	compliance	itérations	compliance
SIMP $p = 3$	49	$1,772 \times 10^{-3}$	29	$2,278 \times 10^{-3}$
AVER $p = 3, q = 3$	63	$1,775 \times 10^{-3}$	39	$2,288 \times 10^{-3}$
AVER $p = 3, q = 4$	63	$1,775 \times 10^{-3}$	42	$2,293 \times 10^{-3}$
AVER $p = 3, q = 5$	57	$1,790 \times 10^{-3}$	71	$2,531 \times 10^{-3}$
AVER $p = 3, q = 6$	62	$1,789 \times 10^{-3}$	43	$2,299 \times 10^{-3}$

TABLE A.5 – Performances des différentes solutions pour le cas d'un couple autour de l'axe  $\vec{z}$

$\delta \rightarrow$	1		2	
Couple $\vec{z}$	itérations	compliance	itérations	compliance
SIMP $p = 3$	49	$1,772 \times 10^{-3}$	29	$2,278 \times 10^{-3}$
AVER $p = 3, q = 3$	28,6%	0,21%	34,5%	0,47%
AVER $p = 3, q = 4$	28,6%	0,16%	44,8%	0,66%
AVER $p = 3, q = 5$	16,3%	1,04%	144,8%	11,10%
AVER $p = 3, q = 6$	26,5%	0,99%	48,3%	0,96%

TABLE A.6 – Comparaison des écarts en % par rapport à la solution SIMP pour le cas d'un couple autour de l'axe  $\vec{z}$

##### A.4.4 Cas d'un couple autour de l'axe $\vec{x}$

$\delta \rightarrow$	1		2	
Couple $\vec{x}$	itérations	compliance	itérations	compliance
SIMP $p = 3$	40	$1,488 \times 10^{-3}$	21	$1,599 \times 10^{-3}$
AVER $p = 3, q = 3$	39	$1,487 \times 10^{-3}$	21	$1,599 \times 10^{-3}$
AVER $p = 3, q = 4$	41	$1,487 \times 10^{-3}$	21	$1,599 \times 10^{-3}$
AVER $p = 3, q = 5$	44	$1,487 \times 10^{-3}$	21	$1,599 \times 10^{-3}$
AVER $p = 3, q = 6$	46	$1,487 \times 10^{-3}$	21	$1,599 \times 10^{-3}$

TABLE A.7 – Performances des différentes solutions pour le cas d'un couple autour de l'axe  $\vec{x}$



$\delta \rightarrow$	1		2	
Couple $\vec{x}$	itérations	compliance	itérations	compliance
SIMP $p = 3$	40	$1,488 \times 10^{-3}$	21	$1,599 \times 10^{-3}$
AVER $p = 3, q = 3$	-2,5%	-0,03%	0,0%	0,00%
AVER $p = 3, q = 4$	2,5%	-0,03%	0,0%	0,01%
AVER $p = 3, q = 5$	10,0%	-0,04%	0,0%	0,00%
AVER $p = 3, q = 6$	15,0%	-0,07%	0,0%	0,01%

TABLE A.8 – Comparaison des écarts en % par rapport à la solution SIMP pour le cas d'un couple autour de l'axe  $\vec{x}$



**Résumé :** Grâce à leurs propriétés amortissantes, les matériaux élastomères sont fréquemment utilisés dans l'industrie aéronautique et spatiale afin d'atténuer les vibrations provenant de sources extérieures. Lorsque ce matériau est placé entre des sous-systèmes d'un assemblage mécanique, il permet de protéger l'intégrité d'équipements sensibles tels que des éléments électroniques ou optiques. Afin d'étudier ces phénomènes, cette thèse de doctorat se base sur un modèle éléments finis représentatif d'une application industrielle comprenant une charge utile qui doit être protégée des vibrations, un support de charge utile par lequel transite les vibrations provenant du lanceur, et des liaisons entre ces sous-systèmes. Le matériau amortissant est incorporé dans les liaisons qui doivent alors répondre à deux objectifs contradictoires : transmettre les charges statiques et amortir les vibrations. Dans un premier temps, le positionnement du matériau ainsi que ses caractéristiques mécaniques sont déterminés en utilisant une stratégie numérique d'optimisation paramétrique. Puis, dans le but d'améliorer la conception des liaisons, un algorithme d'optimisation topologique est implémenté. Cet algorithme est d'abord utilisé dans le cadre de la statique, puis quelques cas académiques sont résolus en dynamique.

**Mots clés :** Matériau viscoélastique, Élastomère, Amortissement, Optimisation topologique, Modélisation éléments finis, Méthodes numériques

**Abstract :** Thanks to their damping properties, elastomer materials are commonly used in the aeronautics and aerospace industries in order to reduce vibrations coming from external sources. When this material is placed between sub-systems of a mechanical assembly, it is able to protect the integrity of sensitive equipment such as electrical or optical devices. To study this phenomenon, this PhD thesis is based upon a representative finite element model of an industrial application composed of a payload that we aim to protect, a dispenser through which vibrations coming from the launcher are transmitted, and links between these sub-systems. The damping material is added inside the links which then have to handle two contradictory aims : transmitting static loads and damping vibrations. First of all, the material's positioning as well as its mechanical properties are determined by using a parametric optimization numerical strategy. Then, in order to improve the links' design, a topology optimization algorithm is implemented. This algorithm is firstly used in a static environment, then some academic cases are solved in a dynamic environment.

**Keywords :** Viscoelastic material, Elastomer, Damping, Topology optimization, Numerical methods, Finite Element Model