



**HAL**  
open science

# Apport des modèles réduits pour la caractérisation thermique de matériaux de construction : mesures in situ d'isolants et étude multi-échelle d'un bois sec

Ana Chavez Castillo

## ► To cite this version:

Ana Chavez Castillo. Apport des modèles réduits pour la caractérisation thermique de matériaux de construction : mesures in situ d'isolants et étude multi-échelle d'un bois sec. Matériaux composites et construction. Université Paris-Saclay, 2020. Français. NNT : 2020UPAST040 . tel-03184785

**HAL Id: tel-03184785**

**<https://theses.hal.science/tel-03184785v1>**

Submitted on 29 Mar 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Apport des modèles réduits pour la caractérisation thermique de matériaux de construction : mesures in situ d'isolants, et étude multi-échelle d'un bois sec

**Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay**

École doctorale n° 579, Sciences mécaniques et  
énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMAG)  
Spécialité de doctorat: Thermique et systèmes énergétiques  
Unité de recherche: Université Paris-Saclay, Univ Évry, LMEE, 91020,  
Évry, France.  
Réfèrent: : Université d'Évry Val d'Essonne

**Thèse présentée et soutenue à Brétigny-sur-Orge,  
le 17 décembre 2020, par**

**Ana Gabriela CHAVEZ CASTILLO**

## Composition du jury:

<b>Didier Saury</b> PR, ENSMA Poitiers, Institut PPrime	Président
<b>Jean Gabriel Bauzin</b> MCF HDR, Université Paris Nanterre, Laboratoire LEME	Rapporteur
<b>Patrick Salagnac</b> PR, Université de La Rochelle, Laboratoire LASIE	Rapporteur
<b>Kamilia Abhari</b> MCF, ENS Paris Saclay, LMT	Examinatrice
<b>Patrick Glouannec</b> PR, Université Bretagne Sud, Institut IRDL	Examineur
<b>Etienne Videcoq</b> MCF HDR, ENSMA Poitiers, Institut PPrime	Examineur
<b>Olivier Quéméner</b> PR, UEVE, LMEE	Directeur de thèse
<b>Yassine Rouizi</b> MCF, UEVE, LMEE	Co-encadrant de thèse
<b>Laurent Marmoret</b> MCF, Université de Picardie, Laboratoire LTI	Invité

## Remerciements

Il me sera très difficile de remercier toutes les personnes qui ont contribué d'une manière ou d'une autre car c'est grâce à elles que j'ai pu mener cette thèse à son terme.

Je voudrais tout d'abord remercier grandement mon directeur de thèse, M. Olivier QUÉMÉNER, Professeur à l'Université d'Evry Val d'Essonne, qui m'a encadré tout au long de cette thèse et qui m'a fait partager ses brillantes intuitions. Je suis ravie d'avoir travaillé en sa compagnie car outre son appui scientifique, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse. Au-delà du contexte scientifique, je tiens à le remercier pour tous les bons moments qu'on a partagé ensemble tout au long de ces années.

Je remercie M. Yassine ROUIZI, Maître de conférences et co-encadrant de cette thèse, pour ses conseils et l'orientation donnée toujours avec bienveillance. Qu'il soit aussi remercié pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigués.

À vous deux, pour l'investissement importante en temps, énergie et efforts, sans vous ça n'aurait pas été la même chose. C'est à vos côtés que j'ai compris ce que rigueur et précision voulaient dire.

J'adresse tous mes remerciements à M. Patrick SALAGNAC, Professeur à l'Université de La Rochelle, ainsi qu'à M. Jean Gabriel BAUZIN, Professeur à l'Université Bretagne Sud, de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de cette thèse.

J'exprime ma gratitude aux autres membres du jury qui ont accepté d'examiner ce travail, Mme. Kamilia ABHARI, Maître de Conférence, M. Patrick GLOUANEC, Professeur des Universités, M. Didier SAURY, Maître de Conférences HDR, d'avoir accepté de présider le jury et M. Etienne VIDECOQ, Maître de Conférence HDR.

Je tiens à remercier M. Anthony MAGUERESSE, Ingénieur d'études à l'Institut de Recherche Dupuy de Lôme, pour son soutien au cours des expériences, pour avoir pris le temps de m'expliquer le fonctionnement des multiples appareils, et pour tous les renseignements donnés toujours avec gentillesse.

Un grand merci à M. Frédéric JOLY, Maître de Conférence, pour toutes ces discussions de recherche que m'ont éclairées et apportées des solutions dans mon travail, ainsi que nos conversations dans le train plutôt philosophiques, je les chérirai toujours.

J'adresse de chaleureux remerciements à Alain et Brigitte NEVEU pour m'avoir fait découvrir le monde caché de la culture française. Je vous suis reconnaissante pour l'amour et les aventures partagées, pour

toutes les choses que vous m'avez fait découvrir au fil des ans, merci infiniment.

Il serait impossible d'oublier Marie-Claire et Christèle, qui m'ont donnée un chaleureux accueil dès mon arrivée au département. Elles ont été mon soutien quand je n'avais pas ma famille avec moi. Vous m'avez fait sentir intégrée, écoutée et appréciée, pour ça je vous remercie du fond du cœur.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble du personnel de l'IUT de Bretigny et du LMEE, en particulier Jean-Michel, Olivia, Malika, Sophie, Sylvie, Guillaume, Vanessa, Hakim, Serge, Ayoob et Roger, merci pour votre accueil et vos mots d'encouragement tout au long de la thèse.

J'adresse encore mes remerciements à mes collègues thésards, Benjamin, Sébastien, Adarsh, et Sylvain, merci d'avoir partagé votre sagesse, pour m'avoir dépannée plusieurs fois avec le code, et pour les bons moments passés ensemble autour d'un bon café.

Je remercie aussi ma famille, qui malgré la distance m'a toujours soutenue et inspirée à donner le meilleur de moi-même. Je pense particulièrement à mon grand-père et ma mère, à ma sœur ainsi qu'à mes tantes et oncles qui m'ont toujours dit de ne rien lâcher. À mes amis, qu'on été là pour me changer les idées et partager nos vies de thésards autour d'un bon repas.

Mes derniers remerciements vont à la famille BOU CHAAYA, qui dans des moments d'incertitude très difficiles face à la crise sanitaire, m'ont donné un toit et toutes les conditions nécessaires pour pouvoir traverser cette période difficile en leur compagnie. Je vous serai toujours reconnaissante.

Pour finir, un grand merci à la personne qui a toujours cru en moi et en mes capacités, qui n'a jamais cessé de m'encourager. Merci pour ta patience infinie, surtout durant la dernière ligne droite, sans toi ça aurait été beaucoup plus difficile, Cynthia merci pour ton soutien.

Merci à tous ceux que j'ai pas pu de mentionner ici, je vous assure que vos présences durant ces trois années m'ont été d'une grande aide dans la réussite de ce travail.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>État de l'art</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>État de l'art des méthodes de caractérisation</b>	<b>5</b>
1.1	Méthodes limitées à la caractérisation d'un seul paramètre . . . . .	6
1.1.1	Calorimétrie . . . . .	6
1.1.2	Plaque chaude gardée . . . . .	7
1.2	Caractérisation simultanée : méthodes transitoires . . . . .	8
1.2.1	Méthode Flash . . . . .	8
1.2.2	Sondes à choc planes . . . . .	9
1.3	Caractérisation in situ : la sonde à choc thermique de type aiguille . . . . .	10
1.3.1	Constitution de la sonde . . . . .	10
1.3.2	Modèles analytiques . . . . .	10
1.3.3	Extension de la technique par méthode inverse . . . . .	12
1.3.4	Limite des lois analytiques et développement de modèles numériques . . . . .	12
1.4	Conclusion . . . . .	13
<b>2</b>	<b>État de l'art des problèmes inverses dans la thermique</b>	<b>15</b>
2.1	Définition d'un problème inverse . . . . .	15
2.2	Problème inverse en thermique . . . . .	16
2.3	Résolution du problème inverse . . . . .	17
2.4	Linéarité et non-linéarité du problème inverse . . . . .	17
2.5	Méthode d'optimisation . . . . .	19

2.5.1	Principe . . . . .	19
2.5.2	Problème inverse linéaire . . . . .	19
2.5.3	Problème inverse non-linéaire . . . . .	20
2.5.4	Méthodes à direction de descente . . . . .	21
2.5.5	Méthodes d'ordre 0 . . . . .	24
2.5.6	Analyse inverse . . . . .	26
2.6	Conclusion . . . . .	26
<b>3</b>	<b>État de l'art des méthodes de réduction</b>	<b>29</b>
3.1	Principe de la réduction modale . . . . .	30
3.1.1	Contexte de l'étude : l'équation de la chaleur . . . . .	30
3.1.2	La réduction modale : séparation des variables temps-espace . . . . .	31
3.2	Méthodes de réduction . . . . .	33
3.2.1	Proper Orthogonal Decomposition . . . . .	33
3.2.2	Méthode d'Identification Modale . . . . .	34
3.2.3	Proper Generalized Decomposition . . . . .	35
3.3	Amalgam Reduced Order Modal Model . . . . .	36
3.3.1	Le calcul de la base complète . . . . .	36
3.3.2	L'obtention de la base réduite . . . . .	47
3.3.3	La troncature . . . . .	48
3.3.4	La base d'Amalgame . . . . .	50
3.4	Conclusion . . . . .	52
<b>II</b>	<b>Caractérisation d'un matériau homogène</b>	<b>53</b>
<b>4</b>	<b>Caractérisation des isolants isotropes par modélisation complète d'une sonde à choc de type aiguille</b>	<b>55</b>
4.1	Objectif de l'étude . . . . .	55
4.2	Configuration étudiée . . . . .	56
4.3	Modèle numérique . . . . .	59

4.3.1	Écriture du modèle . . . . .	59
4.3.2	Discussion sur la durée d'utilisation de la sonde . . . . .	60
4.3.3	Comparaison avec le modèle analytique . . . . .	62
4.3.4	Analyse spatiale . . . . .	63
4.4	Réduction modale . . . . .	65
4.4.1	La base complète . . . . .	65
4.4.2	Réduction de la base . . . . .	67
4.4.3	Équation d'état . . . . .	71
4.5	Procédure inverse . . . . .	74
4.5.1	Étude de sensibilité . . . . .	75
4.5.2	Résultats d'identification par la PSO . . . . .	77
4.5.3	Identification par méthode de descente . . . . .	84
4.5.4	Influence de la résistance de contact thermique . . . . .	86
4.6	Conclusion . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Caractérisation des isolants isotropes : application d'une sonde identifiée semi-homogène</b>	
	<b>3D</b>	<b>93</b>
5.1	Principe d'un modèle semi-homogène . . . . .	93
5.1.1	Objectifs . . . . .	93
5.1.2	Mise en équation . . . . .	95
5.1.3	Processus . . . . .	96
5.2	Modèle réduit MRS . . . . .	96
5.2.1	Base complète de Branche . . . . .	97
5.2.2	Base réduite . . . . .	98
5.2.3	Création du modèle réduit et validation . . . . .	100
5.3	Identification de la sonde . . . . .	102
5.3.1	Détail du processus d'identification . . . . .	102
5.3.2	Couplage avec la phase de réduction par Amalgame . . . . .	102
5.4	Identification des isolants . . . . .	107
5.4.1	Principe . . . . .	107

5.4.2	Premiers résultats . . . . .	107
5.4.3	Analyse . . . . .	108
5.4.4	Influence du bruit de mesure . . . . .	111
5.4.5	Capacité du modèle simplifié à prendre en compte une RTC . . . . .	113
5.5	Conclusion . . . . .	114
<b>6</b>	<b>Validation expérimentale par sonde à choc de type aiguille</b>	<b>117</b>
6.1	Méthodes Conventionnelles : Plaque chaude gardée + DSC . . . . .	118
6.1.1	Plaque chaude gardée . . . . .	118
6.1.2	Calorimètre Différentiel à Balayage DSC . . . . .	120
6.2	Mesure par Hot Disk <sup>®</sup> . . . . .	123
6.3	Mesure par fil chaud . . . . .	127
6.3.1	Réalisation de la sonde . . . . .	127
6.3.2	Déroulement des essais . . . . .	128
6.4	Comparaison des résultats . . . . .	133
6.5	Conclusion . . . . .	136
<b>III</b>	<b>Caractérisation d'un matériau hétérogène</b>	<b>137</b>
<b>7</b>	<b>Caractérisation d'un matériau fortement hétérogène</b>	<b>139</b>
7.1	Introduction . . . . .	139
7.2	Position du problème . . . . .	141
7.2.1	Le bois : une structure complexe . . . . .	141
7.2.2	Définition des problèmes thermiques . . . . .	143
7.3	Le modèle réduit . . . . .	147
7.3.1	Base générique : Dirichlet-Steklov . . . . .	147
7.3.2	Base réduite et équation d'état . . . . .	151
7.4	Problème inverse . . . . .	153
7.4.1	Obtention des mesures . . . . .	153
7.4.2	Résultats de l'identification . . . . .	154



<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	vii
7.5 Influence du VER . . . . .	155
7.6 Conclusion . . . . .	156
<b>8 Conclusion générale et perspectives</b>	<b>159</b>
<b>Annexes</b>	<b>163</b>
<b>Annexe A Particularité de la base de Branche</b>	<b>165</b>
A.1 Matériau homogène . . . . .	165
A.2 Matériaux à plusieurs domaines . . . . .	168
<b>Annexe B Lien entre la résistance de contact RTC et la lame d'air</b>	<b>171</b>



# Table des figures

2.1	Schéma du problème direct . . . . .	16
2.2	Schéma du problème inverse . . . . .	16
2.3	Schéma du problème inverse avec la minimisation de la fonctionnelle . . . . .	17
2.4	Schéma de résolution du problème inverse non-linéaire. . . . .	21
3.1	Modes classiques pour une simple géométrie rectangulaire (source : École d'automne METTI 2019) . . . . .	39
3.2	Évolution du coefficient de localisation en fonction du numéro de mode de Branche (source : École d'automne METTI 2019) . . . . .	44
3.3	Comparaison entre la base de Branche $\{V_i^B\}$ et la base de Dirichlet-Steklov $\{V_i^D\} \oplus \{V_j^S\}$ (source : École d'automne METTI 2019) . . . . .	45
4.1	Système physique étudié . . . . .	56
4.2	Composition de la sonde . . . . .	57
4.3	Dimensions de la sonde et ses composants internes. . . . .	57
4.4	Évolution des températures selon la dimension de l'isolant . . . . .	61
4.5	Modèle analytique vs simulation virtuelle d'une sonde à choc type aiguille . . . . .	63
4.6	Profil de température à $t = 600$ [s] . . . . .	64
4.7	Domaine des cas de référence. . . . .	68
4.8	Erreur $\max(\sigma_{M_1max}, \sigma_{M_2max})$ aux points de mesure pour tous les cas de référence en fonction des modes de Branches amalgamés . . . . .	70
4.9	Résultats du modèle réduit $n = 100$ pour la $R4$ au point $M_1$ . . . . .	71

4.10	Schéma du principe de la procédure inverse . . . . .	74
4.11	Étude de sensibilité des références R1 et R4 . . . . .	75
4.12	Étude de sensibilité des échantillons E2 et E5 . . . . .	76
4.13	Sensibilité de corrélation de la Référence R1 et R4. . . . .	77
4.14	Évolution de la position des particules pour l'algorithme du PSO. . . . .	78
4.15	Identification de $k$ pour un $\sigma_B = 0,05^\circ C$ . . . . .	82
4.16	Identification de $c$ pour un $\sigma_B = 0,05^\circ C$ . . . . .	82
4.17	Représentation d'une résistance de contact . . . . .	88
4.18	Comparaison des sensibilités pour l'échantillon E2. . . . .	89
5.1	Différents types de sondes . . . . .	95
5.2	Erreur $\max(\sigma_{M_1max}, \sigma_{M_2max})$ aux points de mesure pour les isolants de référence. . . . .	99
5.3	Processus d'identification des propriétés $k_S$ et $c_S$ du modèle de sonde semi-homogène . . . . .	102
5.4	Schéma de couplage entre l'identification des propriétés de la sonde et l'Amalgame . . . . .	103
5.5	Résultats du modèle réduit après le deuxième Amalgame pour les échantillons au point $M_1$ . . . . .	105
5.6	Résultats du modèle réduit après le deuxième Amalgame pour les échantillons au point $M_2$ . . . . .	106
5.7	Processus d'identification des propriétés $k_I$ et $c_I$ du modèle de sonde semi-homogène . . . . .	107
5.8	Erreurs relatives et l'écart quadratique par itération de l'échantillon $E1$ . . . . .	109
5.9	Évolution de $\mathcal{J}$ selon le nombre d'itérations globales pour l'échantillon $E1$ . . . . .	110
5.10	Identification de $k_I$ pour un $\sigma_B = 0,1 [^\circ C]$ . . . . .	112
5.11	Identification de $c_I$ pour un $\sigma_B = 0,1 [^\circ C]$ . . . . .	112
6.1	Principe et photo du conductivimètre. . . . .	118
6.2	Résultats du conductivimètre pour le verre cellulaire ( $E2$ ) . . . . .	119
6.3	Évolution de la conductivité pour les trois matériaux . . . . .	120
6.4	Principe et photo du calorimètre différentiel à balayage DSC. . . . .	120
6.5	Évolution de la capacité en fonction de la température DSC . . . . .	121
6.6	Évolution des capacités massiques de la DSC . . . . .	122
6.7	La sonde thermique Hot Disk <sup>®</sup> . . . . .	124
6.8	Résultats du Hot Disk <sup>®</sup> . . . . .	125

6.9	Évolution des résultats du Hot Disk <sup>®</sup> en fonction de la pression exercée . . . . .	126
6.10	Construction de la sonde à fil chaud et montage de l'expérience . . . . .	128
6.11	Dimensions de la sonde sous microscope. . . . .	128
6.12	Erreurs de la méthode du fil chaud sur le point $M_1$ . . . . .	131
6.13	Erreurs de la méthode du fil chaud $M_2$ . . . . .	132
6.14	Comparaison de méthodes pour le verre cellulaire . . . . .	134
6.15	Comparaison de méthodes pour le polystyrène extrudé XPS . . . . .	135
6.16	Comparaison de méthodes pour le polyuréthane . . . . .	135
7.1	Plans de coupe du bois . . . . .	141
7.2	Plans de coupe du bois . . . . .	143
7.3	Scénarios de simulation pour l'échantillon du bois . . . . .	145
7.4	Représentation des modes de Dirichlet et modes de Steklov . . . . .	149
7.5	Erreur de $\overline{T}_{S_1}^{He}$ entre le modèle complet et modèle réduit . . . . .	152
7.6	Schéma d'identification des propriétés thermiques du bois . . . . .	153
7.7	Représentation de deux VER du bois . . . . .	155
A.1	Évolution de la constante de temps $\tau_i$ du matériau homogène et représentation de quelques vecteurs propres associés . . . . .	167
A.2	Configuration du matériau . . . . .	168
A.3	Évolution de la constante de temps $\tau_i$ du matériau composé . . . . .	169
B.1	Configurations du modèle de la résistance de contact . . . . .	172
B.2	Configurations du modèle de la résistance de contact . . . . .	173



# Liste des tableaux

4.1	Paramètres physiques de la sonde type fil chaud . . . . .	58
4.2	Points de référence de la réduction par Amalgame . . . . .	68
4.3	Efficacité du modèle réduit à 100 modes pour les cas de référence . . . . .	70
4.4	Propriétés thermiques des isolants testés . . . . .	72
4.5	Erreurs de réduction du MR des échantillons . . . . .	73
4.6	Identification sans bruit de mesure des références . . . . .	79
4.7	Identification sans bruit de mesure des échantillons . . . . .	79
4.8	Étude statistique avec bruit de mesure . . . . .	81
4.9	Estimations de l'intervalle de confiance $\sigma_{max}$ pour différents bruits de mesure $\sigma_B$ . . . . .	84
4.10	Une seule identification pour différents bruits de mesure $\sigma_B$ . . . . .	84
4.11	Identification des échantillons sans bruit de mesure . . . . .	85
4.12	Identification des échantillons avec un bruit d'écart type $\sigma_B = 0,05$ [ $^{\circ}C$ ] . . . . .	85
4.13	Identification par gradient avec un bruit de mesure $\sigma_B = 0,10$ [ $^{\circ}C$ ] des échantillons . . . . .	86
4.14	Influence de la RTC sur la précision de l'identification sur l'échantillon $E2$ . . . . .	90
4.15	Identification avec une RTC sans bruit de mesure . . . . .	91
5.1	Propriétés thermiques des isolants connus . . . . .	98
5.2	Configurations de sondes semi-homogènes . . . . .	100
5.3	Efficacité du modèle réduit à 200 modes pour tous les scénarios . . . . .	101
5.4	Identification sans bruit de mesure de $E1$ et $E3$ . . . . .	108
5.5	Résultats pour un critère d'arrêt optimisé sur $\sigma_{glob}$ de l'échantillon $E1$ . . . . .	109

5.6	Résultats avec la durée de mesure optimisée pour l'échantillon $E1$ . . . . .	110
5.7	Identification des échantillons $E1$ et $E3$ avec un bruit de mesure d'écart type $\sigma_B = 0,1$ [ $^{\circ}C$ ]111	
5.8	Variances des estimations des échantillons $E1$ et $E3$ . . . . .	111
5.9	Paramètres de la sonde identifiée sans et avec RTC . . . . .	113
5.10	Identification des isolants avec une durée optimisée sans bruit de mesure . . . . .	113
6.1	Masse volumique mesurée à la température ambiante . . . . .	122
6.2	Propriétés thermiques estimées par les méthodes conventionnelles . . . . .	123
6.3	Isolants identifiés par MRR. . . . .	129
7.1	Scénarios des sollicitations thermiques . . . . .	144
7.2	Scénarios des sollicitations thermiques . . . . .	150
7.3	Erreurs de projection pour la base de Dirichlet-Steklov à 20% (18382 modes) . . . . .	150
7.4	Erreurs de projection pour la base de Dirichlet-Steklov à 5% (4597 modes) . . . . .	151
7.5	Résultats de l'identification. . . . .	154
7.6	Résultats du tenseur de conductivité et la capacité thermique pour les deux VER. . . . .	156



# Introduction

Cette thèse se déroule dans le cadre d'une bourse ministérielle, au sein du Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique d'Évry (LMEE), dans l'équipe thermique et énergétique. La résolution de problèmes thermiques à l'aide des modèles réduits est un des domaines d'expertise de cette équipe. Ce travail a eu pour but la mise en place d'une procédure de caractérisation thermique utilisant cette technique.

Face au changement climatique, à la dégradation de l'environnement et à l'épuisement des ressources, l'urgence de la sobriété énergétique et de l'adoption des pratiques plus écologiques est pressante dans tous les secteurs.

Aujourd'hui, le secteur du bâtiment est responsable de la consommation de 45% de l'énergie totale et de 50% des matières premières<sup>1</sup>. Face à ce constat, les pouvoirs publics font évoluer rapidement les réglementations thermiques, avec des contraintes environnementales de plus en plus fortes : dès l'été 2021 sera mise en place une fois encore une nouvelle norme, qui s'intitulera dorénavant la Réglementation Environnementale (RE2020). Elle visera à une consommation énergétique minimale, mais également à de nouvelles normes en termes de bilan carbone et d'analyse des cycles de vie de la construction. En parallèle, une politique de rénovation énergétique du parc existant se met en place peu à peu et va très vraisemblablement se développer de façon intensive.

Toutes ces évolutions rapides dans le monde du bâtiment, ont eu récemment et vont avoir des répercussions importantes sur les solutions technologiques mises en place : la technique de l'isolation par l'extérieur, démarrée avec la RT2000, continue à se développer, de nouveaux matériaux de construction bio-sourcés commencent à voir le jour, autant pour la structure que pour l'isolation du bâtiment. L'isolant thermique se trouve au cœur d'un bon nombre de ces évolutions, et la connaissance de ses caractéristiques

---

1. Source : <https://www.ecologie-solidaire.gouv.fr/energie-dans-batiments>

est fondamentale. Bien évidemment, des techniques de mesures précises sont effectuées en laboratoire, mais actuellement rien n'existe en ce qui concerne la caractérisation de ces isolants sur site. Et pourtant, une telle possibilité serait pertinente à plus d'un titre : elle permettrait de quantifier un bâtiment existant et ainsi d'optimiser sa rénovation, de pouvoir suivre l'évolution au cours du temps du tassement d'un isolant sous comble, de vérifier l'efficacité d'un bardage pour l'isolation extérieure... En ce qui concerne les matériaux bio-sourcés, pour lesquels nous manquons de recul quant à leur durabilité (sensibilité à l'humidité, fluctuation de la microstructure, croissance fongique), une telle possibilité permettrait de quantifier effectivement leur efficacité en termes de durée de vie. Pour toutes ces raisons, un premier travail dans cette thèse a été de chercher une solution permettant d'atteindre l'objectif de caractérisation in situ. Pour cela, le développement d'une technique de résolution de problème inverse, qui s'appuie sur des modèles numériques précis et utilisables rapidement est mise en œuvre ici. Par ailleurs, en parallèle à cet objectif très pratique, la compréhension du comportement ainsi détecté de l'isolant, nécessite l'étude des différents phénomènes physiques qu'il subit, afin de pouvoir proposer des solutions aux problèmes rencontrés. Ceci est particulièrement vrai pour les matériaux bio-sourcés, compte tenu de leur microstructure complexe, et pour lesquels il est difficile d'identifier précisément les propriétés physico-thermiques des différents constituants à l'échelle microscopique. Là encore le développement d'une technique de résolution de problème inverse par modèle réduit, propose une solution pour cette caractérisation. Compte tenu de ce double objectif, ce mémoire est composé de la manière suivante : une première partie va concerner une étude bibliographique, dans le premier chapitre seront tout d'abord présentées les différentes techniques de caractérisation de matériaux existantes. Un second chapitre fournira un tour d'horizon des techniques de résolution de problèmes inverses. Pour terminer, une présentation précise des méthodes de réduction de modèles thermiques sera effectuée. Dans une seconde partie, on s'attachera à présenter l'étude de la caractérisation d'un matériau in situ à partir d'une sonde de type aiguille, et qui nécessite l'utilisation de modèles réduits. Les deux premiers chapitres proposeront deux solutions, qui seront chacune étudiée d'un point de vue numérique. Un dernier chapitre présentera les résultats d'essais expérimentaux menés. Enfin, une troisième partie abordera la problématique de la caractérisation de matériaux fortement hétérogènes tels que les matériaux bio-sourcés à l'échelle microscopique, sous la forme d'un unique chapitre.

Première partie

État de l'art



# Chapitre 1

## État de l'art des méthodes de caractérisation

La caractérisation thermique des matériaux est un très vaste problème qui dépasse le cadre de ce travail de thèse. On cherche en général à définir deux caractéristiques principales :

- la conductivité thermique  $k$  [ $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ], qui caractérise la faculté du matériau à laisser diffuser la chaleur en l'absence de toute évolution temporelle,
- la capacité thermique  $Cp$  [ $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ] qui détermine quelle quantité d'énergie peut être stockée dans le matériau considéré. Cette grandeur caractérise l'inertie du matériau, c'est à dire le temps que met le domaine à se refroidir ou se réchauffer. Notons que l'équation de la chaleur fait intervenir la capacité volumique que l'on note ici  $c$  [ $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$ ]. Pour passer de la grandeur massique  $Cp$  à la grandeur volumique  $c$ , la masse volumique  $\rho$  [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ] doit alors être connue.

Il est par ailleurs pratique d'utiliser des groupements de ces deux grandeurs, qui apparaissent de manière naturelle dans les équations qui décrivent les phénomènes de transferts de la chaleur, à savoir :

- la diffusivité thermique  $a = \frac{k}{c}$  [ $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ], qui détermine la capacité du matériau à transmettre un signal d'un point à un autre de ce matériau. Elle caractérise l'aptitude du corps considéré à diffuser la chaleur au cours du temps,
- l'effusivité thermique  $b = \sqrt{kc}$  [ $\text{J}\cdot\text{m}^2\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{s}^{-1/2}$ ], qui définit la facilité du matériau à échanger de

l'énergie thermique avec son environnement, et rend compte à la fois de la variation de température par stockage de chaleur et la variation de température par conduction.

Ainsi, la caractérisation thermique complète d'un solide nécessite la connaissance de deux des quatre grandeurs précédemment définies. Le choix dépend de la configuration expérimentale utilisée et du modèle physique correspondant, dans lequel ces grandeurs apparaissent plus au moins naturellement.

Dans ce travail, la problématique est la suivante : comment effectuer sur site la caractérisation thermique complète (conductivité et capacité) d'un matériau de bâtiment, notamment les isolants ? Ce type de problématique intervient dans le cadre d'une rénovation, de DPE<sup>1</sup> ou de suivi au cours du temps de matériaux isolants. Dans une première partie, un tour d'horizon des différentes techniques est effectué, pour lequel et compte tenu du secteur spécifique du bâtiment, nous ne nous occuperons pas des techniques de caractérisation thermique pour les corps fins (les films ou revêtements), les matériaux à haute température, ou encore les matières très conductrices, tels que les métaux. Selon les potentialités des différentes techniques vis à vis du problème posé, un focus est alors effectué sur le procédé le plus adapté.

## 1.1 Méthodes limitées à la caractérisation d'un seul paramètre

### 1.1.1 Calorimétrie

Initialement la caractérisation de la capacité calorifique s'est effectuée - et l'est encore - de façon complètement indépendante de la conductivité thermique. En effet, le procédé le plus classique est la calorimétrie qui consiste à mesurer une variation de température lorsque l'éprouvette reçoit une quantité de chaleur connue :

$$Q = m Cp (T_f - T_i) \quad (1.1)$$

où  $T_f$  et  $T_i$  sont les températures respectivement finale et initiale,  $m$  est la masse, et  $Cp$  est la capacité calorifique recherchée.

Les appareils actuellement les plus développés utilisent la calorimétrie différentielle à balayage DSC, dans laquelle deux éprouvettes sont chauffées de manière contrôlée et parfaitement identique. L'une des

---

1. Diagnostic de Performance Énergétique, qui évalue la consommation d'énergie d'un bâtiment et son impact sur l'émission du gaz à effet de serre

éprouvettes contient le matériau testé, l'autre est une référence, et la différence de flux nécessaires à ces chauffages donne alors accès à la capacité calorifique. Cette technique toujours très utilisée ne présente pas d'évolution récente et les dernières publications en 2020 correspondent à la présentation de campagnes expérimentales pour des matériaux divers [1, 2, 3].

### 1.1.2 Plaque chaude gardée

En ce qui concerne la conductivité thermique, la méthode la plus simple du point de vue du modèle théorique utilisé est une technique où l'on peut s'affranchir de la connaissance de la capacité, donc pour laquelle on se place en régime stationnaire. Ce sont les méthodes fluxmétriques ou de type plaques chaudes gardées, dans lesquelles on impose une densité de flux  $\vec{\varphi}$  unidirectionnelle, constante dans le temps et uniforme en espace. Cette configuration permet alors l'obtention immédiate de la conductivité :

$$\varphi = k \frac{T_1 - T_2}{e} \quad (1.2)$$

où  $T_1$  et  $T_2$  sont les températures d'un côté et de l'autre de la plaque chaude, et  $e$  correspond à l'épaisseur du milieu étudié.

Toute la difficulté se reporte alors sur le banc expérimental, qui doit permettre d'assurer l'unidirectionnalité et donc éviter toute perte thermique latérale et d'autre part le maintien en régime stationnaire. Divers modèles ont été proposés, plus ou moins complexes expérimentalement [4], et les dernières publications sur ce sujet font état d'adaptations du procédé expérimental, selon la nature du matériau considéré, notamment les isolants [5, 6]. Jannot *et al.* [7] ont créé un dispositif à trois couches basé sur la méthode de la plaque chaude gardée, couplée à une méthode inverse visant à améliorer la précision des valeurs estimées pour les matériaux à très faible conductivité ( $k < 0,15$  [W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>]). Une extension de la méthode d'identification est proposée par Sanjaya *et al.* [8] dans le cas de matériaux poreux.

Les autres techniques existantes sont basées sur des régimes transitoires, pour lesquels soit il est possible d'exprimer la conductivité indépendamment de la capacité, soit cette dernière est déterminée en amont (par une méthode calorimétrique). Ces méthodes ont évolué au cours du temps pour permettre une identification simultanée des deux paramètres  $k$  et  $c$  ou des groupements de ces deux grandeurs telles que la diffusivité  $a$  et l'effusivité  $b$ . Elles font l'objet du paragraphe suivant.

## 1.2 Caractérisation simultanée : méthodes transitoires

### 1.2.1 Méthode Flash

Cette méthode est très utilisée en laboratoire. Le principe est le suivant : on impose sur une face de l'éprouvette une impulsion thermique brève, et on mesure la réponse en température sur une des faces (en général l'arrière). Initié par Parker [9] puis étendue à différentes configurations par la méthode des quadripoles, cette technique permet en général l'obtention de la diffusivité thermique [10, 11, 12, 13, 14]. Jeon *et al.* [15] ont développé une solution analytique par une méthode expérimentale complexe pour les matériaux anisotropes. L'utilisation de la méthode inverse a par la suite permis de remonter aux deux paramètres, en général la conductivité et la diffusivité [16, 17, 18].

Récemment, l'utilisation de modèles numériques, en remplacement des lois analytiques utilisées jusqu'alors, a permis d'étendre cette technique à des matériaux qui présentent des structures complexes : Reulet *et al.* [19] proposent en 2011 une étude qui permet la caractérisation complète ( $\bar{\mathbf{k}}$  et  $c$ ) d'un matériau orthotrope. Les essais expérimentaux traités montrent la nécessité de déterminer préalablement le profil du faisceau laser utilisé. En 2014 Brouns *et al.* [20] utilisent un modèle numérique afin d'identifier le champ de conductivité isotrope sur une géométrie bidimensionnelle. Cette étude purement numérique s'inscrit dans la problématique de recherche de défaut interne de structure du matériau.

De par son principe, ce type de méthode est en théorie utilisable *in situ*. Néanmoins, dans la pratique, différents problèmes se posent : d'une part, les différentes sollicitations thermiques doivent être connues précisément, c'est à dire d'une part l'échange thermique de la façade avec son environnement immédiat, en général caractérisé par un coefficient d'échange, mais également le profil de la source laser qui crée l'échauffement. Par ailleurs, compte tenu du matériel à disposer pour créer l'échauffement et effectuer les mesures, cette technique est peu adaptée à un déplacement fréquent, et à un suivi régulier des caractéristiques sur de longues périodes. Enfin, même si des techniques récentes permettent de remonter aux propriétés de matériaux multicouches (travaux de El Rassy *et al.* [21]), la caractérisation d'un isolant pris en sandwich entre le matériau porteur et le revêtement protecteur semble difficile.



### 1.2.2 Sondes à choc planes

Les sondes à choc thermiques planes utilisent un tout autre principe : ces sondes permettent à la fois la dissipation de puissance et la mesure de température. Insérées entre deux éprouvettes du matériau que l'on souhaite caractériser, elles permettent lors des premiers instants l'utilisation de modèles de type semi-infini qui amènent à des relations analytiques où la température dépend directement de la conductivité et de la diffusivité du matériau.

La sonde la plus connue, car ayant été déclinée industriellement - et beaucoup utilisée -, est la sonde circulaire connue sous le nom de Hot Disk<sup>®</sup>. Une procédure inverse permet à la fois d'identifier la conductivité et la diffusivité thermique [22]. Cette technique a été étendue à la détermination de la conductivité de matériaux orthotropes : Lagüela *et al.* [23] ont fourni un développement de la méthode du Hot Disk<sup>®</sup> pour obtenir la diffusivité et la conductivité thermique dans le cas du bois.

Zhang *et al.* [24] ont étudié en 2017 la précision théorique de cette technique, pour des matériaux qui présentent une conductivité orthotrope limitée à deux composantes.

Par ailleurs, l'utilisation de la modélisation numérique a là encore permis d'étendre l'analyse des transferts de chaleur pour ce type de configuration : Mihiretie *et al.* [25] ont développé un modèle 3D du capteur du Hot Disk<sup>®</sup> par la méthode des éléments finis, et l'ont comparé à une mesure expérimentale.

Ce même principe de sonde plane a également été utilisé pour d'autres géométries, telle que le ruban chaud pris en sandwich entre deux éprouvettes du même matériau [26]. Dans le cadre des matériaux non isotropes, Raji *et al.* [27] ont étudié une paroi faite de planches de bois massif laminées empilées, et ont déterminé l'effusivité thermique selon deux directions définies par rapport au sens de la fibre (tangentielle et normale).

L'intérêt majeur de ce type de solution est sa simplicité expérimentale. Un défaut est la fragilité des sondes, qui en pratique sont limitées à une utilisation en laboratoire sur des éprouvettes du matériau à tester. Elles ne répondent pas aux contraintes posées ici, à savoir une mesure *in situ* sur une paroi existante.

Notons qu'il existe une déclinaison de cette technique : la sonde est plaquée contre la face d'une seule éprouvette, et est pourvue de l'autre côté d'un système qui permet de contrôler le flux échangé entre la sonde et l'environnement. Proposé au niveau industriel cette configuration n'a pas fait l'objet de publication scientifique particulière. Indépendamment de la perte de précision engendrée par cette solution, elle n'est pas adaptée en pratique à la caractérisation placée au cœur d'une paroi de bâtiment.

### 1.3 Caractérisation in situ : la sonde à choc thermique de type aiguille

Une autre technologie classique de détermination des propriétés thermiques d'un matériau est la sonde à choc thermique de type aiguille. Compte tenu du fait qu'elle est la plus appropriée à l'objectif de mesure in situ, elle fait l'objet d'un développement particulier.

#### 1.3.1 Constitution de la sonde

Le principe de cette sonde consiste à insérer dans une aiguille creuse de grande longueur devant son rayon :

- une résistance chauffante qui permet de dissiper une puissance thermique  $P$  [W] constante et connue,
- un ou deux thermocouples permettant le suivi au cours du temps de l'échauffement de cette aiguille.

#### 1.3.2 Modèles analytiques

Initialement cette sonde était (et l'est encore en pratique) destinée à déterminer uniquement la conductivité d'un milieu. Le modèle analytique le plus simple est celui de Carslaw et Jaeger [28], pour lequel on suppose un fil chaud de rayon nul et de longueur infinie, placé dans le milieu à caractériser (considéré également comme infini).

La loi d'évolution de la température amène simplement :

$$\frac{\partial T(t)}{\partial(\ln(t))} = \frac{P}{4\pi lk} \quad (1.3)$$

où  $P$  est la puissance dissipée électriquement en  $l$ , la longueur effective de la sonde.

De nombreux auteurs ont proposé diverses améliorations afin de tenir compte de la réalité physique de la sonde, à savoir un rayon non nul  $r_o$  (d'où un volume effectif  $V_s$ ), une capacité calorifique  $c_s$ , et éventuellement un contact imparfait entre la sonde et le milieu dans lequel elle est insérée, via une résistance de contact RTC [ $m^2.K.W^{-1}$ ]. La relation la plus utilisée est en général celle de Blackwell (1954) [29], qui s'écrit :

$$T(t) = A \left[ \ln(t) + B + \frac{1}{t} (C \ln(t) + D) \right]$$

avec :  $A = \frac{P}{4\pi kl}$

$$B = \ln \left[ \frac{4a}{r_o^2} \right] - \gamma + \frac{2kRTC}{r_o} \quad (1.4)$$

$$C = \frac{r_o^2}{2a} \left[ 1 - \frac{aV_s C_s}{\pi r_o^2 k} \right]$$

$$D = \frac{r_o^2}{2a} \left[ \ln \frac{4a}{r_o^2} - \gamma + 1 - \frac{aV_s c_s B}{\pi r_o^2 k} \right]$$

Blackwell montre que pour un temps  $t_1$  suffisamment long, c'est à dire quand  $\frac{a t_1}{r_o^2} \gg 1$ , la contribution du terme en  $1/t$  devient négligeable et on retrouve alors la relation (1.3) qui permet d'obtenir directement la conductivité thermique.

De nombreuses études utilisent cette technique afin d'obtenir la conductivité de matériaux très divers : Batty *et al.* (1984) [30] présentent les variations de conductivité d'un matériau (de l'argile) en fonction de son degré d'humidité.

On trouve des travaux qui utilisent ce type de sonde dans l'industrie alimentaire. Une étude visant à examiner les propriétés thermophysiques des fruits tropicaux, en particulier lorsqu'ils sont congelés, a été réalisée par Pereira *et al.* [31]. Nahor *et al.* [32] ont optimisé la position du capteur de température dans la sonde à choc de type fil chaud en vue d'estimer les propriétés thermiques des aliments à travers un plan d'expérience optimal.

En 2011, dans un domaine biomédical, Sarkar *et al.* [33] ont mesuré la conductivité thermique des échantillons d'alginate de sodium représentatifs de tissus contenant différents types de nanotubes de carbone afin de prévoir la distribution de la température et la réponse de la tumeur après traitement.

Dans le domaine de la science planétaire on trouve également l'utilisation de ce type de sonde. Kömle *et al.* [34] présentent l'utilisation de ce type de sonde pour caractériser la conductivité de corps planétaires. Plus récemment en 2014, Nagihara *et al.* [35] proposent un algorithme amélioré de réduction des données appliqué à la mesure in-situ de la conductivité thermique des régolites lunaires et planétaires.

### 1.3.3 Extension de la technique par méthode inverse

Des investigations supplémentaires sont effectuées, elles permettent par méthode inverse d'identifier simultanément la conductivité et la capacité. Dès 1994, Zheng *et al.* [36] reprennent le modèle de Blackwell, et proposent une méthode en deux temps : une première sonde de grande longueur donne directement la conductivité, une deuxième sonde courte permet en utilisant une technique inverse de remonter à la capacité. Si nécessaire un rebouclage pour recalculer la conductivité est effectué. Les résultats pour des matériaux à conductivité supérieure à  $k = 0,28$  [W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>] sont validés par comparaison avec d'autres méthodes. Des essais sur des poudres de faible conductivité ( $k \simeq 0,06$  [W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>]) sont présentées mais ne font l'objet d'aucune validation.

En 2004, Goodhew *et al.* [37] présentent différentes routines d'inversion afin de remonter aux deux paramètres à partir de la relation de Blackwell (1.4). Différents matériaux et sondes sont testés, ils montrent que pour un matériau isolant (mélange argile + paille,  $k \simeq 0,06$  [W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>]) l'évolution de température en fonction du logarithme du temps ne représente aucune zone linéaire.

D'une manière similaire, Wenlong *et al.* [38] reprennent le même modèle analytique pour identifier la conductivité et capacité, avec cette fois une technique stochastique de type Monte Carlo. Les auteurs insistent notamment sur l'influence de la résistance thermique de contact (RTC) entre la sonde et le matériau à caractériser, ainsi que sur le niveau de puissance à adapter en fonction du matériau considéré. Les matériaux testés (liquides et solides) ont des conductivités supérieures à  $k = 0,6$  [W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>].

### 1.3.4 Limite des lois analytiques et développement de modèles numériques

En parallèle aux développements précédents, des études viennent remettre en cause la validité du modèle analytique de Blackwell dans le cas de matériaux peu conducteurs : dès 1984, Batty *et al.* [39] étudient l'influence des différents paramètres de ce modèle. Les essais expérimentaux menés viennent valider ce modèle pour des matériaux de maçonnerie, mais le remettent en question pour des matériaux isolants fibreux. En 2012, Pilkington *et al.* [40] analysent précisément ce modèle de Blackwell pour des matériaux isolants du bâtiment. Ils insistent ainsi sur l'incapacité du modèle à prendre en compte les pertes de chaleur le long de la sonde jusqu'à l'extérieur, qui vont dépendre de la conductivité du matériau testé et de la longueur de la sonde. Plus récemment, Humaiish *et al.* [41] en 2016 puis Marmoret *et al.* [42] en 2017, présentent les mêmes conclusions.

Peu à peu l'utilisation de modèles numériques apparaît. Ils permettent en effet de s'affranchir des limitations des lois analytiques. En 2009 Chudzik *et al.* [43] proposent l'étude numérique d'une configuration dans laquelle une sonde de température est placée parallèlement à la sonde chauffante. En considérant ces deux éléments infiniment longs dans le matériau infini, un modèle Éléments Finis 2D, associé à une technique de réseau de neurones donne accès aux valeurs de la conductivité  $k$  et la capacité  $c$ . Aucune résistance de contact n'est prise en compte. En 2016, Humaish *et al.* [41] proposent cette fois une simulation de la sonde de type aiguille classique. En considérant la sonde comme homogène, dissipant une puissance uniforme, le modèle est cette fois de type 2D axisymétrique. Enfin très récemment, Bording *et al.* (2019) [44] reprennent la même configuration. La résistance de contact est prise en compte et une technique de Monte Carlo permet la caractérisation (conductivité  $k$  et capacité thermique  $c$ ) des différents matériaux pour des conductivités  $k > 0,6$  [ $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ]. Aucune validation expérimentale n'est présentée.

## 1.4 Conclusion

L'étude bibliographique menée ici a permis de faire apparaître les points suivants.

Dans le domaine des matériaux du bâtiment, les techniques de caractérisation thermiques reposent sur des principes expérimentaux anciens, dont les récents développements visent à caractériser de façon complète (conductivité  $k$  et capacité thermique  $c$ ), des matériaux orthotropes et hétérogènes.

Cette extension des méthodes originelles s'appuie tout d'abord sur l'utilisation de tout un panel de méthodes de résolution de problèmes inverses, et par ailleurs sur des modèles numériques qui remplacent peu à peu des lois analytiques limitées à certaines configurations.

En ce qui concerne l'objectif de la mesure in-situ, une solution sort du lot : légère et facilement transportable, d'une durée de mesure modérée, peu onéreuse, la sonde à choc de type aiguille satisfait à l'ensemble du cahier des charges.

Initialement dédiée à la détermination de la conductivité seule, cette technique a pu être étendue à une caractérisation complète via là encore des techniques de résolution de problèmes inverses.

Une limitation semble être la non validité des lois analytiques qui lui sont associées dans le cas de matériaux isolants. Là encore la solution passe par une modélisation numérique. On note cependant la difficulté d'associer des modèles précis donc tridimensionnels, caractérisés par un grand nombre de degrés

de liberté avec une technique inverse, très gourmande en temps calculs puisque basée sur un calcul itératif qui appelle de nombreuses fois le modèle numérique.

Ainsi les dernières études ne proposent que des modèles 2D, incomplets car incapables de prendre en considération l'intégralité des phénomènes de transferts thermiques.

Nous nous proposons ainsi de développer des modèles de sondes tridimensionnels, compatibles avec la technique de résolution de problèmes inverses, par l'utilisation de modèles réduits.

Avant d'aborder ce point et de présenter les différents techniques qui s'y réfèrent, le prochain chapitre va être une synthèse des différentes techniques de résolution de problèmes inverses.

## Chapitre 2

# État de l'art des problèmes inverses dans la thermique

Les techniques inverses sont définies comme des méthodes permettant de résoudre un problème inverse, c'est à dire, en partant des observables (conséquences), de remonter aux causes ou de déterminer les paramètres physiques du système.

Ce type de problème a fait l'objet d'un très grand nombre de publications d'articles et d'ouvrages. Dans le cadre de notre étude sur la caractérisation thermique des matériaux, notre objectif n'est pas de développer une nouvelle technique, mais de voir comment l'utilisation de modèles réduits modaux peut permettre d'étendre la résolution de ce type de problème à des géométries tridimensionnelles complexes.

On se contente ici d'une présentation rapide des principaux résultats, en insistant sur les techniques existantes qui vont être utilisées dans cette étude. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer aux ouvrages : articles des Techniques de l'Ingénieur [45, 46], et "Thermal Measurements and Inverse Techniques" [47].

### 2.1 Définition d'un problème inverse

Par opposition à la définition du problème inverse, le problème direct est le cas où on souhaite déterminer la réponse d'un système physique en partant d'un modèle (analytique ou numérique), des conditions

aux limites et de la condition initiale.

Les problèmes directs et inverses peuvent être schématisés respectivement comme dans les figures 2.1 et 2.2.

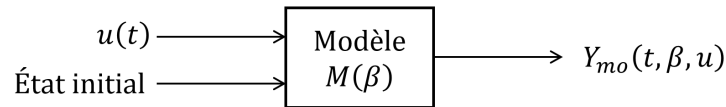


FIGURE 2.1 – Schéma du problème direct

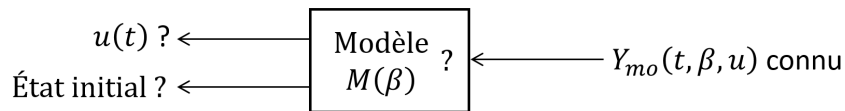


FIGURE 2.2 – Schéma du problème inverse

Dans la Figure 2.2, le point d'interrogation désigne la ou les grandeurs recherchées.

## 2.2 Problème inverse en thermique

En transfert thermique, on peut être confronté à différents types de problèmes inverses que l'on peut distinguer suivant la grandeur estimée. Battaglia et Maillet [48] ont effectué le classement suivant :

1. Problème inverse de mesure [49, 50, 51, 52, 53] : l'information est obtenue à partir des mesures (observables)  $\mathbf{Y}_{mo}$ .
2. Problème de contrôle/commande [54, 55, 56, 57, 58] : cette fois les mesures  $\mathbf{Y}_{mo}$  sont remplacées par la trajectoire des valeurs de consignes  $\mathbf{Y}_c$ .
3. Problème d'estimation du modèle [56, 59, 60] : à partir des mesures et des conditions d'entrée, on souhaite obtenir le modèle permettant de relier les entrées  $u(t)$  aux sorties  $\mathbf{Y}_{mo}$ .

En revenant au premier type de problème inverse, c'est à dire le problème inverse de mesure, il est possible de définir également plusieurs sous catégories de problèmes inverses, parmi lesquelles on peut citer :



- l'estimation des conditions aux limites  $u(t)$  [49, 50, 52, 53] : cela consiste à déterminer la position et/ou la variation (temporelle ou spatiale) de l'entrée ou/et de la source,
- l'estimation de la condition initiale [61, 62, 63],
- l'estimation des paramètres structuraux. Cela peut consister à chercher les propriétés thermophysiques d'un système [64, 7, 27, 65] (conductivité thermique, capacité thermique, résistance thermique, coefficient d'échange, ...).

## 2.3 Résolution du problème inverse

La résolution du problème inverse par une technique inverse revient à minimiser une fonctionnelle d'écart  $\mathcal{J}$  entre les mesures et la réponse du modèle pour un jeu d'entrées donné (cf. Figure 2.3).

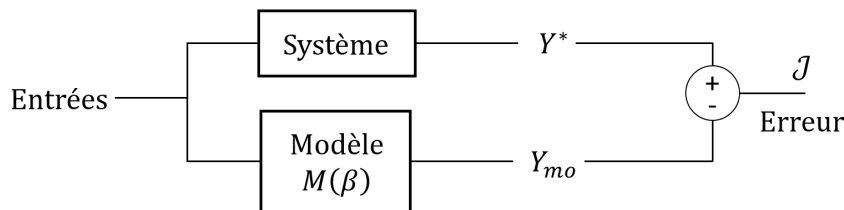


FIGURE 2.3 – Schéma du problème inverse avec la minimisation de la fonctionnelle

On peut définir plusieurs choix de critères  $\mathcal{J}$ , parmi lesquels on peut mentionner les plus courants :

- La norme  $L_1$  ou  $\mathcal{J}$  est définie par  $\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{Mes} |\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{Y}_{i_{mo}}|$ .
- La norme  $L_2$  avec  $\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{Mes} (\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{Y}_{i_{mo}})^2$ .
- La norme  $L_\infty$  avec  $\mathcal{J} = \max(|\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{Y}_{i_{mo}}|)$ .

avec  $Mes$  le nombre de mesures.

La minimisation de  $\mathcal{J}$  conduit à la résolution du problème inverse. Cette minimisation va dépendre de la nature du problème inverse.

## 2.4 Linéarité et non-linéarité du problème inverse

Il est important de noter que le caractère linéaire ou non-linéaire du problème inverse est indépendant de la linéarité ou de la non-linéarité du problème direct.

Un problème direct est linéaire lorsque sa réponse dépend linéairement des entrées ou des paramètres du modèle :

— Linéarité par rapport aux entrées :

$$\mathbf{Y}_{mo}(t, \beta, \alpha u) = \alpha \mathbf{Y}_{mo}(t, \beta, u) \quad (2.1)$$

— Linéarité par rapport aux paramètres du modèle :

$$\mathbf{Y}_{mo}(t, \alpha \beta, u) = \alpha \mathbf{Y}_{mo}(t, \beta, u) \quad (2.2)$$

Un problème inverse est dit linéaire lorsque les sorties du modèle dépendent linéairement des paramètres à estimer. Ceux-ci sont rassemblés sous le vecteur  $\mathbf{P} = [\beta \text{ ou } u]$  par l'intermédiaire d'une matrice indépendante de  $\mathbf{P}$  notée  $\mathbf{S}$  appelée matrice de sensibilité.

$$\mathbf{Y}_{mo}(\mathbf{P}) = \mathbf{S}\mathbf{P} \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{P} = [\beta \text{ ou } u]$  sont les paramètres à estimer et  $\mathbf{S}$  la matrice des sensibilités définie par :

$$\mathbf{S}_j(t, \mathbf{P}) = \frac{\partial \mathbf{Y}_{mo}}{\partial \mathbf{P}_j} \quad (2.4)$$

avec

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_{mo}^1}{\partial P_1} & \frac{\partial Y_{mo}^1}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial Y_{mo}^1}{\partial P_{n_p}} \\ \frac{\partial Y_{mo}^2}{\partial P_1} & \frac{\partial Y_{mo}^2}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial Y_{mo}^2}{\partial P_{n_p}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Y_{mo}^{Mes}}{\partial P_1} & \frac{\partial Y_{mo}^{Mes}}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial Y_{mo}^{Mes}}{\partial P_{n_p}} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

où  $Mes$  et  $n_p$  sont respectivement le nombre de mesures et le nombre de paramètres à estimer. Si le problème inverse est linéaire, alors les sensibilités  $S_j$  sont indépendantes des paramètres  $P_j$ .

Lorsque le modèle n'est pas dérivable analytiquement, la matrice des sensibilités peut être approchée par différences finies par exemple :

$$S_j(t, \mathbf{P}) = \frac{\mathbf{Y}_{mo}(t, \mathbf{P}_j + \Delta \mathbf{P}) - \mathbf{Y}_{mo}(t, \mathbf{P}_j - \Delta \mathbf{P})}{2\Delta \mathbf{P}} \quad (2.6)$$

L'étude de sensibilité est une étape très importante dans la résolution des problèmes inverses. Elle permet de quantifier le caractère d'identifiabilité d'un paramètre (sensibilité non nulle) et de corrélation entre les différents paramètres  $P_j$ .

Le choix de la méthode de résolution du problème inverse, c'est à dire la méthode d'optimisation pour minimiser le critère  $\mathcal{J}$ , va dépendre *in fine* du caractère linéaire ou non du problème inverse.

## 2.5 Méthode d'optimisation

Comme énoncé précédemment, la technique inverse consiste à minimiser le critère  $\mathcal{J}$  présenté précédemment en utilisant une méthode d'optimisation.

### 2.5.1 Principe

Dans ce travail, on utilise le critère quadratique entre la réponse du modèle  $\mathbf{Y}_{mo}$  et la mesure  $\mathbf{Y}^*$  :

$$\mathcal{J}(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{Mes} (\mathbf{Y}_{i_{mo}}(\mathbf{P}) - \mathbf{Y}_i^*)^2 \quad (2.7)$$

avec  $Mes$  le nombre de mesures et  $\mathbf{P}$  le vecteur de paramètres recherchés. L'estimation  $\hat{\mathbf{P}}$  est donnée par :

$$\hat{\mathbf{P}} = \arg \min[\mathcal{J}(\mathbf{P})] \quad (2.8)$$

### 2.5.2 Problème inverse linéaire

#### 2.5.2.1 Estimateur des moindres carrés ordinaires (MCO)

Lorsqu'il existe une relation linéaire entre le modèle et les paramètres à estimer (2.3), le critère à minimiser  $\mathcal{J}$  peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{J} = (\mathbf{SP} - \mathbf{Y}^*)^T (\mathbf{SP} - \mathbf{Y}^*) \quad (2.9)$$

Déterminer le minimum de  $\mathcal{J}$  revient à annuler son gradient  $\nabla \mathcal{J}$  :

$$\nabla \mathcal{J} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial P_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial P_n} \end{bmatrix} = 2\mathbf{S}^T(\mathbf{S}\mathbf{P} - \mathbf{Y}^*) = 0 \quad (2.10)$$

La solution  $\hat{\mathbf{P}}$  au sens des moindres carrés ordinaires (MCO) est donnée par :

$$\hat{\mathbf{P}}_{MCO} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{Y}^* \quad (2.11)$$

### 2.5.2.2 Autres estimateurs

La définition du critère  $\mathcal{J}$  permet de définir d'autres estimateurs. Dans un cas plus général on peut écrire :

$$\mathcal{J}(\mathbf{P}) = (\mathbf{S}\mathbf{P} - \mathbf{Y}^*)^T \mathbf{W}(\mathbf{S}\mathbf{P} - \mathbf{Y}^*) + (\tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{P})\mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{P}) \quad (2.12)$$

avec  $\mathbf{W}$  une matrice de pondération permettant de donner des poids différents à chaque point de mesure et  $\mathbf{Q}$  également une matrice de poids pour caractériser une confiance aux paramètres supposés connus.

La solution  $\hat{\mathbf{P}}$  de l'équation (2.12) est donnée par [66] :

$$\hat{\mathbf{P}} = [\mathbf{S}^T \mathbf{W} \mathbf{S} + \mathbf{Q}]^{-1} [\mathbf{Q} \tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{S}^T \mathbf{W} \mathbf{Y}^*] \quad (2.13)$$

Lorsque  $\mathbf{Q} = 0$  et  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$  nous avons un estimateur de moindres carrés ordinaires (2.11).

Si  $\mathbf{W} = [\text{cov}(\mathbf{Y}^*)]^{-1}$  (en supposant que le bruit de mesure est gaussien, normal, non corrélé et de variance constante),  $\hat{\mathbf{P}}_{GM}$  est l'estimateur de Gauss-Markov [67] ou l'estimateur de variance minimale, et il est donnée par :

$$\hat{\mathbf{P}}_{GM} = [\mathbf{S}^T (\text{cov}(\mathbf{Y}^*))^{-1} \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{S}^T (\text{cov}(\mathbf{Y}^*))^{-1} \mathbf{Y}^* \quad (2.14)$$

### 2.5.3 Problème inverse non-linéaire

Nous avons vu que dans le cas d'un problème inverse linéaire l'expression de l'estimateur est obtenue explicitement. Dans le cas d'un problème inverse non-linéaire, la matrice des sensibilités  $\mathbf{S}$  dépend des

paramètres  $\mathbf{P}$ , un algorithme d'optimisation est alors nécessaire pour obtenir le minimum du critère  $\mathcal{J}$ . Il s'agit d'un algorithme itératif qui, partant d'une initialisation, tend à converger vers l'optimum de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$ . Dans le cas d'estimation de paramètres du modèle, on peut schématiser la résolution comme présenté sur la Figure 2.4.

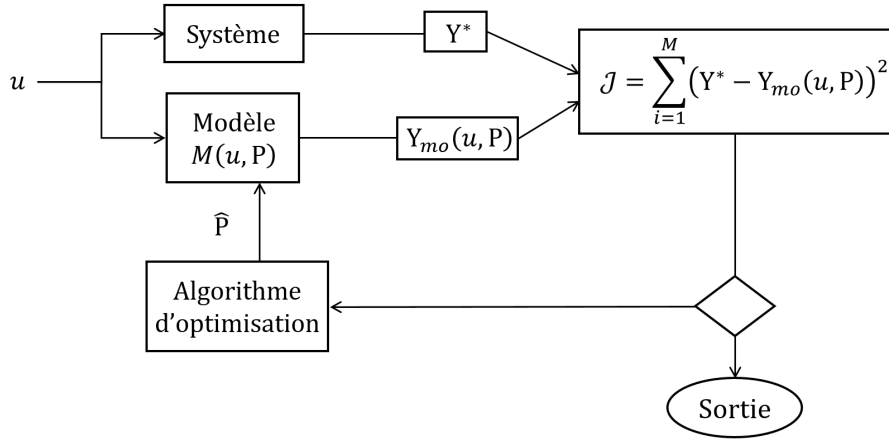


FIGURE 2.4 – Schéma de résolution du problème inverse non-linéaire

De nombreux algorithmes d'optimisation existent. Ils peuvent être classés de différentes manières :

- Méthodes déterministes ou stochastiques : les algorithmes déterministes, convergent toujours vers le même optimum, alors que pour les algorithmes stochastiques, il y a un caractère aléatoire où à chaque fois on peut obtenir un résultat différent.
- Méthode d'ordre 0 et d'ordre supérieur ( $\geq 1$ ) : les méthodes d'ordre 0 s'appuient sur le calcul successif de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  et une certaine stratégie pour converger vers l'optimum. Les méthodes d'ordre supérieur ( $\geq 1$ ) en plus du calcul de  $\mathcal{J}$ , utilisent le calcul de gradient  $\nabla \mathcal{J}$  (pour l'ordre 1) et du Hessien  $\nabla^2 \mathcal{J}$  (pour l'ordre 2) pour trouver une direction de descente et orienter ainsi la recherche de l'optimum.

## 2.5.4 Méthodes à direction de descente

### 2.5.4.1 Méthodes de gradient

Dans les méthodes à direction de descente, la minimisation du critère  $\mathcal{J}$  s'effectue à partir d'un calcul itératif de direction de descente :

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + \alpha^k d^k \quad (2.15)$$

où  $\alpha^k$  est le pas de recherche à effectuer le long de la direction de descente  $d^k$ . Le pas  $\alpha^k$  peut être déterminé par différentes méthodes parmi lesquelles on peut citer la méthode de Wolfe, méthode d'Armijo ou encore la méthode de la sécante [68]. Ici aussi il existe de nombreux choix de direction, on peut citer les suivants :

- La méthode de la plus grande pente [69] (steepest descent)  $d^k = -\nabla \mathcal{J}^k$ . Généralement cette méthode converge lentement vers le minimum. Pour améliorer la vitesse de convergence on peut utiliser la méthode du gradient conjugué [69, 70] :  $d^k = -\nabla \mathcal{J}^k + \gamma^k d^{k-1}$  avec  $\gamma^k$  un paramètre de conjugaison que l'on peut obtenir par la méthode de Fletcher-Reeves [71, 72, 73] (2.16) ou encore la méthode de Polack-Ribière [74, 75, 76] (2.17).

$$\gamma^k = \frac{(\nabla \mathcal{J}^k)^T (\nabla \mathcal{J}^k - \nabla \mathcal{J}^{k-1})}{(\nabla \mathcal{J}^{k-1})^T (\nabla \mathcal{J}^{k-1})}, \gamma^k = 0 \quad \text{pour } k = 0 \quad (2.16)$$

$$\gamma^k = \frac{(\nabla \mathcal{J}^k)^T \nabla \mathcal{J}^k}{(\nabla \mathcal{J}^{k-1})^T (\nabla \mathcal{J}^{k-1})}, \gamma^k = 0 \quad \text{pour } k = 0 \quad (2.17)$$

- La méthode d'ordre 2 utilise en plus du gradient  $\nabla \mathcal{J}^k$  le Hessien  $\nabla^2 \mathcal{J}^k$ . La direction de descente est donnée par [69]  $d^k = -(\mathbf{H}^k) \nabla \mathcal{J}^k$ , avec  $\mathbf{H}^k = (\nabla^2 \mathcal{J}^k)^{-1}$  l'inverse du Hessien pour la méthode de Newton. Cette méthode converge plus rapidement (en termes d'itérations) que les méthodes d'ordre 1. Cependant, le calcul de la matrice du Hessien peut prendre beaucoup de temps de calcul. Dans la méthode de quasi-Newton, il existe des techniques d'approximation rapide de  $\mathbf{H}^k$  parmi lesquelles on peut citer la méthode de DFP [77] ou encore la méthode de BFGS [78] où la matrice  $\mathbf{H}$  est calculée itérativement par :

$$\begin{cases} \mathbf{H}^k = \mathbf{H}^{k-1} + M^{k-1} + N^{k-1} & \text{pour } k \geq 1 \\ \mathbf{H}^k = \mathbf{I} \text{ (matrice identité)} & \text{pour } k = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

avec

$$M^{k-1} = \left( \frac{1 + (\mathbf{Y}^{k-1})^T \mathbf{H}^{k-1} \mathbf{Y}^{k-1}}{(\mathbf{Y}^{k-1})^T d^{k-1}} \right) \left( \frac{d^{k-1} (d^{k-1})^T}{(d^{k-1})^T \mathbf{Y}^{k-1}} \right) \quad (2.19)$$

$$N^{k-1} = \frac{d^{k-1}(\mathbf{Y}^{k-1})^T \mathbf{H}^{k-1} + \mathbf{H}^{k-1} \mathbf{Y}^{k-1} (d^{k-1})^T}{(\mathbf{Y}^{k-1})^T d^{k-1}} \quad (2.20)$$

et

$$\mathbf{Y}^{k-1} = \nabla \mathcal{J}^k - \nabla \mathcal{J}^{k-1} \quad (2.21)$$

Les méthodes à direction de descente sont déterministes, itératives et nécessitent donc une initialisation  $\mathbf{P}^0$ . La difficulté se trouve dans le cas où nous sommes en présence de plusieurs minima locaux, la solution obtenue sera dépendante du paramètre d'initialisation  $\mathbf{P}^0$ .

#### 2.5.4.2 Méthodes à régions de confiance

Le principe de la méthode par région de confiance est de remplacer le problème de base, c'est-à-dire, minimiser  $\mathcal{J}(\mathbf{P})$  (2.7) par un ensemble de sous problèmes de minimisation plus simples.

L'idée de base consiste à approximer  $\mathcal{J}(\mathbf{P})$  par une fonction plus simple  $m^k$  (quadratique par exemple) dans une certaine région  $R^k$  de confiance autour d'un point  $\mathbf{P}^k$  donnée par :

$$R^k = \{\mathbf{P}^k + \zeta \mid \|\zeta\| \leq \Delta\} \quad (2.22)$$

avec  $\Delta$  qui correspond au pas (ou rayon) de la région de confiance. La taille de la région de confiance est un point important dans l'efficacité de la méthode. Si le pas  $\Delta$  est pris trop petit, cela peut nous induire vers des calculs plus longs. À l'inverse, si le pas  $\Delta$  est plus grand, l'optimum du critère  $\mathcal{J}$  peut différer de celui du sous problème  $m$ . Dans la région de confiance, on peut écrire :

$$m^k(\mathbf{P}^k + \zeta) \cong \mathcal{J}(\mathbf{P}^k + \zeta) \quad (2.23)$$

et le sous problème d'optimisation devient :

$$m^k(\mathbf{P}^{k+1}) = \min_{\|\zeta\| < \Delta} m^k(\mathbf{P}^k + \zeta) \quad (2.24)$$

La résolution de ce problème permet d'obtenir  $\mathbf{P}^{k+1}$  et ainsi de vérifier que  $\mathcal{J}(\mathbf{P}^{k+1}) \approx m^k(\mathbf{P}^{k+1})$ , pour ajuster ensuite le rayon  $\Delta$ .

Généralement le critère quadratique  $\mathcal{J}$  est remplacé par un modèle quadratique  $m$  en utilisant les deux premiers termes de la série de Taylor de  $\mathcal{J}$  autour de  $\mathbf{P}$  :

$$m^k(\zeta) = \mathcal{J}(\mathbf{P}^k) + \left[ \nabla \cdot \mathcal{J}(\mathbf{P}^k) \right]^T + \frac{1}{2} \zeta^T \mathbf{H}^k \zeta \quad (2.25)$$

$\mathbf{H}^k$  est une approximation du Hessien de  $\mathcal{J}$  à l'itération  $k$ .

## 2.5.5 Méthodes d'ordre 0

### 2.5.5.1 Principe

Ces méthodes se basent sur une exploration globale de l'espace de recherche à partir du calcul de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$ . Généralement, elles sont basées sur une population d'individus qui exploitent trois principes :

- exploration de l'espace de recherche,
- exploration des meilleures solutions pour les améliorer,
- mémorisation de la meilleure solution pour orienter les nouvelles recherches.

Par une meilleure exploration de l'espace de recherche, les méthodes d'ordre 0 du type métaheuristique permettent de mieux résoudre les problèmes présentant des minima locaux. Cependant, leur inconvénient principal réside dans la nécessité d'évaluer la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  un grand nombre de fois. Ceci les rend donc très gourmandes en temps de calcul.

Il existe de nombreuses méthodes d'ordre 0, parmi lesquelles on peut mentionner :

- la méthode PSO (Particle Swarm Optimization) [79, 80, 81],
- les algorithmes génétiques [82].

Dans ce travail de thèse, la méthode PSO a été utilisée.

### 2.5.5.2 La méthode de PSO

Développée par les docteurs Eberhart et Kennedy, l'optimisation des essaims de particules (PSO) est une technique stochastique basée sur la population et inspirée par le comportement social et cognitif d'une nuée d'oiseaux.



Son principe est basé sur une population de particules qui actualise ses positions  $\mathbf{P}^k$  et sa vitesse  $v^k$  à chaque itération, en cherchant à converger au minimum de la fonction spécifiée. Dans notre cas, l'ensemble des paramètres thermiques étant la valeur cible, l'algorithme actualisera la conductivité et la capacité thermique jusqu'à ce qu'un minimum soit trouvé.

**Objectif :**  $[k_I, c_I]$

Initialiser la position  $\mathbf{P}$  pour chaque particule;

Initialiser la vitesse  $\mathbf{v} = 0$  pour chaque particule;

**tant que** la condition de terminaison n'est pas remplie **faire**

**Pour chaque** particule **faire**

calculer nouvelle vitesse  $\mathbf{v}$  (Eq.(2.26));

calculer nouvelle position  $\mathbf{P}$  (Eq.(2.27));

**si** position dans l'espace viable **alors**

| évaluer la position;

**fin**

**fin**

**Algorithme 1 :** Algorithme PSO

$$v_i^{k+1} = \chi v_i^k + \lambda_1 \cdot rand(pBest_i^k - \mathbf{P}_i^k) + \lambda_2 \cdot rand(gBest^k - \mathbf{P}_i^k) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{P}_i^{k+1} = \mathbf{P}_i^k + v_i^{k+1} \quad (2.27)$$

Ici :

- $\mathbf{P}$  représente la position de la particule,
- $\mathbf{v}$  la vitesse de la particule,
- $\chi$  le poids de l'information locale, également considéré comme le facteur d'inertie. Il définit la capacité d'exploration de chaque particule,
- $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les poids de l'information globale, aussi appelés facteurs de restriction,
- $pBest$  est la meilleure position de la particule,
- $gBest$  est la meilleure position de l'essaim,
- et  $rand$  est un nombre aléatoire compris entre  $[0,1]$ .

L'équation (2.26) permet de mettre à jour les vitesses des particules. Le premier terme concerne l'inertie, il fait bouger la particule dans la même direction et à la même vitesse. Le second terme est lié à l'influence personnelle, il améliore l'individu en faisant revenir la particule à une position antérieure meilleure que la position actuelle. Et le troisième terme concerne l'influence sociale, ce qui signifie que la particule suivra la direction du meilleur voisin [83]. L'équation (2.27) déplace chaque particule vers sa nouvelle position.

Le processus itératif s'achève quand :

- la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  (2.7) cesse d'évoluer,
- le nombre maximum d'itérations est atteint,
- le principe de Morozov est atteint [84].

Cette méthode a été utilisée dans de nombreuses applications telles que la caractérisation de matériaux [21] ou l'estimation de paramètres de modèle réduit [85, 59] ou encore dans [66] pour réaliser une conception optimale d'expérience.

### 2.5.6 Analyse inverse

L'analyse inverse, c'est à dire l'étude et la quantification de l'estimateur est une étape très importante lors de la résolution d'un problème inverse :

- La qualité d'une estimation peut être mesurée par l'analyse de sa variance ou de son biais par exemple.
- L'analyse des sensibilités en amont permet également de déceler des cas de sensibilité nulle (paramètres non identifiables) ou encore une éventuelle corrélation entre les paramètres à estimer. Petit *et al.* [46] utilisent le tracé des coefficients de sensibilité  $S_j$  ( $j^{me}$  colonne de la matrice  $\mathbf{S}$ ) pour détecter des éventuelles corrélations.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons d'abord introduit la définition du problème inverse. Nous avons présenté différents problèmes inverses qu'il est possible de rencontrer en thermique. Les techniques de résolution ont été présentées que ce soit pour des problèmes inverses linéaires ou non-linéaires. Ces techniques de résolution se basent généralement sur la minimisation d'un critère quadratique entre les observables et

la réponse du modèle. Nous avons ensuite introduit les différents outils d'optimisation, parmi lesquels on peut citer l'estimateur des moindres carrés ordinaires ou les méthodes itératives du type direction de descente ou région de confiance. Enfin, nous avons évoqué quelques outils pour quantifier la qualité de l'estimateur.

La résolution de certains problèmes inverses non-linéaires nécessite un calcul itératif où il faut faire appel au modèle. Dans le cas de gros modèles (c'est-à-dire ayant un grand nombre de degrés de liberté (DDL)), la résolution du problème inverse devient très gourmande en temps calcul et/ou nécessite des moyens de calculs importants. L'idée est d'utiliser la réduction de modèle dans le processus inverse pour lever cette contrainte. Dans le prochain chapitre, nous abordons l'état de l'art des méthodes de réduction de modèle.



## Chapitre 3

# État de l'art des méthodes de réduction

En ce qui concerne la problématique d'identification in situ de paramètres thermiques, les chapitres précédents ont fait apparaître deux points antagonistes.

D'une part la sonde de type fil chaud, qui est la méthode la plus adaptée à la caractérisation in situ, s'appuie sur un modèle analytique, qui présente des limites d'utilisation, notamment pour des matériaux très isolants. Ce constat appelle ainsi à l'utilisation de modèles numériques qui permettent la description précise de la géométrie réelle de la sonde placée dans le milieu isolant.

Lorsqu'il s'agit d'obtenir les caractéristiques thermiques d'un matériau, par ce type de modèle numérique (et à partir de mesures de température), on a alors affaire à un problème inverse. Ceci est caractérisé par une procédure itérative qui implique l'utilisation d'un grand nombre de simulations par ces modèles numériques. On voit alors qu'un modèle numérique complet caractérisé par un grand nombre de degrés de liberté va être incompatible avec la procédure inverse, pour des questions de temps calcul.

Ce n'est d'ailleurs pas un hasard si jusqu'à présent, les deux études effectuées qui utilisent un modèle numérique pour décrire la sonde à fil chaud se sont limitées à une géométrie 2D : Chudzik [43] considère une géométrie dans le plan perpendiculaire à la sonde, et donc considère une sonde infiniment longue, alors que Bording *et al.* [44] en 2019 considèrent une sonde homogène dissipant une puissance uniforme, et ne peut donc considérer qu'une géométrie axisymétrique  $(r, z)$ .

Dans le cadre de la caractérisation thermique de matériaux, peu d'études portent sur la recherche de techniques de simulation tridimensionnelles adaptées aux problèmes inverses. Certaines se sont limitées à

des configurations spécifiques. Ainsi en 2016 Chen *et al.* [64] présentent une étude purement numérique, dans laquelle ils proposent une nouvelle méthode pour identifier la conductivité anisotrope, à partir d'une géométrie 3D d'un cylindre creux à l'état stationnaire. L'originalité de l'étude réside dans l'utilisation d'une méthode de singularité de frontière sans maillage, plus rapide que la méthode des éléments finis. La même année, Mohebbi *et al.* [86] proposent une technique de génération de grille elliptique, limitée à des formes 3D compactes non concaves, qui permet l'identification à la fois de sollicitations thermiques aux frontières (flux et coefficients d'échange) et de la conductivité isotrope dans le domaine.

Mis à part ces articles, les quelques autres études trouvées font appel au principe de la réduction modale, qui donne lieu à différentes techniques. Ce chapitre y est dédié. Dans une première partie, une présentation du principe, ainsi qu'un rapide survol des différentes familles de modèles réduits modaux sont effectués. Par la suite la méthode utilisée dans cette thèse sera expliquée dans le détail.

## 3.1 Principe de la réduction modale

### 3.1.1 Contexte de l'étude : l'équation de la chaleur

Le problème est le suivant : le domaine  $\Omega$  isotrope, délimité par sa frontière  $\Gamma$ , est caractérisé par une conductivité thermique  $\bar{\mathbf{k}}(M, t)[\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$  et une capacité thermique volumique  $c(M, t)[\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}]$ .

Ce domaine reçoit deux types de sollicitations thermiques :

- l'influence de l'environnement, qui se caractérise par une température  $T_f(M, t)[\text{K}]$  et un coefficient d'échange thermique  $h(M, t)[\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}]$ ,
- la dissipation d'une puissance thermique, qui peut être sous forme volumique sur le domaine  $\pi(M, t)[\text{W.m}^{-3}]$  ou une densité de flux sur la frontière  $\varphi(M, t)[\text{W.m}^{-2}]$ .

Un tel problème correspond aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & : & c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\bar{\mathbf{k}} \vec{\nabla} T) + \pi \\ \forall M \in \Gamma & : & k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \varphi + h(T_f - T) \end{cases} \quad (3.1)$$

Pour les géométries complexes, la résolution de ce problème est numérique et nécessite une discrétisation spatiale. La méthode des éléments finis conduit à la formulation variationnelle faible de (3.1). Soit  $g$  la fonction de test, définie sur l'espace de Hilbert  $H^1(\Omega)$ , on peut écrire :

$$\forall g \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} g c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \overline{\mathbf{k}} \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} T d\Omega - \int_{\Gamma} g h T d\Gamma + \int_{\Omega} g \pi d\Omega + \int_{\Gamma} g (\varphi + h T_f) d\Gamma \quad (3.2)$$

La discrétisation spatiale de (3.2) conduit à l'équation suivante (en respectant l'ordre des termes de l'équation précédente) :

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = (\mathbf{K} + \mathbf{H})\mathbf{T} + \mathbf{U}_{\Omega} + \mathbf{U}_{\Gamma} \quad (3.3)$$

soit sous forme compacte :

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{U} \quad (3.4)$$

$\mathbf{C}$  et  $\mathbf{A}$  sont des matrices respectivement de dimension  $[N \times N]$ , où  $N$  représente les degrés de liberté (DDL) pour le domaine discrétisé considéré.  $\mathbf{T}$  est le vecteur température, qui dépend du temps, et  $\mathbf{U}$  est le vecteur sollicitation. La dimension de tous ces vecteurs est  $[N \times 1]$ . Cette équation constitue le problème de la chaleur complet, dont le nombre de DDL peut être très important en cas de géométrie complexe.

### 3.1.2 La réduction modale : séparation des variables temps-espace

La méthode de réduction modale peut être vue comme l'extension de la méthode de Fourier, qui dès le dix-neuvième siècle, propose des solutions analytiques aux problèmes de diffusion de la chaleur, par séparation des variables d'espace et de temps :

$$T(M, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(M) x_i(t) \quad (3.5)$$

Dans la technique modale, en considérant que les fonctions spatiales  $V_i(M)$  sont connues, cela signifie que le calcul des champs de température correspond au calcul des états d'excitation  $x_i(t)$  de ces fonctions. On nommera par la suite ces fonctions spatiales  $V_i(M)$ , modes propres ou encore vecteurs propres. Il est important de noter que la relation (3.5) n'est exacte que si ces modes propres  $V_i(M)$  constituent une base de l'espace des solutions du problème thermique (3.2), ce qui n'est pas systématique.

L'idée est alors de réécrire cette formulation en utilisant un nombre limité  $n$  de modes propres  $\tilde{V}_i(M)$ , et qui permettent une reconstitution acceptable des champs thermiques  $\tilde{T}(M, t) \simeq T(M, t)$  :

$$\tilde{T}(M, t) = \sum_{i=1}^n \tilde{V}_i(M) \tilde{x}_i(t) \quad (3.6)$$

Ainsi, le modèle réduit est obtenu par projection de l'équation de la chaleur sur le sous-espace défini par l'ensemble des modes propres  $\tilde{V}_i(M)$ , quelle que soit la technique de réduction utilisée. L'équation (3.2) devient alors :

$$\begin{aligned} \forall g \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} g c \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{V}_i \tilde{x}_i \right) d\Omega = \\ - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{k}} \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{V}_i \tilde{x}_i \right) d\Omega - \int_{\Gamma} g h \left( \sum_{i=1}^n \tilde{V}_i \tilde{x}_i \right) d\Gamma \\ + \int_{\Omega} g \pi d\Omega + \int_{\Gamma} g (\varphi + hT_f) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.7)$$

En considérant que tous ces vecteurs propres  $\tilde{V}_i(M)$  forment une base pour le problème physique, ils peuvent être utilisés comme fonctions de test pour la formulation variationnelle :  $g(M) = \tilde{V}_j(M)$ .

Après le réarrangement, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall \tilde{V}_j \in H^1(\Omega), j \in \mathbb{N}, \\ \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \tilde{V}_j c \tilde{V}_i d\Omega \right) \frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \\ - \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \bar{\mathbf{k}} \vec{\nabla} \tilde{V}_j \cdot \vec{\nabla} \tilde{V}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{V}_j h \tilde{V}_i d\Gamma \right) \tilde{x}_i \\ + \int_{\Omega} \tilde{V}_j \pi d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{V}_j (\varphi + hT_f) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.8)$$

Après la discrétisation spatiale, la fonction  $\tilde{V}_i(M)$  devient un vecteur  $\tilde{\mathbf{V}}_i [N, 1]$ , ce qui donne :

$$\forall j \in [1 : n], \quad \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{V}}_j^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{V}}_i \frac{d\tilde{x}_i}{dt} = - \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{V}}_j^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{V}}_i \tilde{x}_i + \tilde{\mathbf{V}}_j^T \mathbf{U} \quad (3.9)$$

On nomme  $\tilde{\mathbf{V}} [N, n]$  la matrice qui rassemble les  $n$  modes propres discrets  $\tilde{\mathbf{V}}_i [N, 1]$ , et  $\tilde{\mathbf{X}}(t) [n, 1]$  le vecteur des  $n$  états d'excitation temps-dépendant  $\tilde{x}_i(t)$  associé à ces fonctions spatiales :

$$\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{V}} \frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dt} = \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{U} \quad (3.10)$$

Sous forme compacte, on obtient finalement :



$$\mathbf{L} \frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dt} = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{N} \quad (3.11)$$

avec  $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{V}}$  et  $\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{V}}$  dont les dimensions sont  $[n, n]$ , et  $\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{U}$  de dimension  $[n, 1]$ .

Cette formulation conduit à la réduction du nombre d'inconnues, car le modèle complet (3.2) est caractérisé par  $N$  inconnues, tandis que la dimension de ce modèle modal (3.11) correspond aux  $n$  modes propres  $\tilde{V}_i(M)$ . À partir de cette formulation, différentes méthodes existent pour réduire un modèle. On les présente dans la section suivante.

## 3.2 Méthodes de réduction

### 3.2.1 Proper Orthogonal Decomposition

La POD, acronyme de *Proper Orthogonal Decomposition* est une technique qui s'appuie sur un traitement statistique d'un ensemble d'observations (expérimentales ou numériques) d'un signal  $T(M, t)$  noté ici  $T(x)$ .

On cherche à extraire de ces observations, considérées comme aléatoires, un mode dominant  $\tilde{V}$  (3.6), en maximisant une moyenne de projection de ce signal sur la fonction recherchée :

$$\frac{\langle (\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{V}})^2 \rangle}{\|\tilde{\mathbf{V}}\|^2} = \max_{v \in L^2(D)} \frac{\langle \mathbf{T}, v \rangle}{\|v\|^2} \quad (3.12)$$

La solution à ce problème est l'équation intégrale de Fredholm de premier ordre :

$$\sum_{j=1}^{n_c} \int_D R_{ij}(x, x') \tilde{V}_j(x') dx' = z_i \tilde{V}_i(x) \quad (3.13)$$

où :

- $n_c$  est le nombre de composantes de  $T(x)$ ,
- $R$  est la fonction d'auto-corrélation,

$$R(x, x') = \langle T(x), T(x') \rangle \quad (3.14)$$

- et  $z_i$  la valeur propre associée à la fonction propre  $\tilde{V}_i$ .

Dans le domaine de la thermique, différents auteurs ont utilisé cette technique afin de résoudre des problèmes linéaires et non-linéaires. Dans la littérature on trouve l'utilisation de la POD pour traiter les problèmes de convection : Ghosh *et al.* [87] étudient les champs de température convective de l'air à l'intérieur d'un *Data Center*, et Sempey *et al.* [88] ont développé un modèle réduit afin d'effectuer un contrôle continu en temps réel d'une climatisation dans une pièce.

En ce qui concerne les problèmes de conduction, Fic *et al.* [89] utilisent la POD couplée à la méthode des éléments finis pour résoudre un problème thermique non-linéaire où la conductivité et la capacité thermique dépendent de la température. Quelques années plus tard Zhang *et al.* [90] appliquent la POD pour réduire la méthode classique de Galerkin sans maillage en régime transitoire. Khlopov et Mangold [91] ont introduit la POD dans la méthode des volumes finis pour obtenir un modèle de conduction thermique non-linéaire de faible dimension. Plus récemment, Jiang *et al.* [92] combinent la méthode des éléments de frontière à intégration radiale avec la POD de façon à établir un modèle réduit non-linéaire pour les problèmes de conduction de chaleur.

Dans le domaine des problèmes inverses, cette technique a beaucoup été utilisée par Park *et al.* [93] pour identifier différentes sollicitations thermiques. En ce qui concerne la caractérisation thermique de matériaux, la seule étude concerne les travaux de Adamczyk *et al.* [94], qui identifient les différentes composantes d'un tenseur de conductivité, en utilisant une technique de minimisation de type gradient dans la procédure inverse.

### 3.2.2 Méthode d'Identification Modale

La MIM, ou *Modal Identification Method* en anglais, est une méthode basée sur l'identification directe des paramètres d'une équation modale (3.11) à partir d'un ensemble de simulations ou de mesures groupées dans un vecteur.

Cette équation d'état est en général représentée pour un problème linéaire sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{G}\mathbf{U} \quad (3.15)$$

où  $\mathbf{F}$  est la matrice diagonale de  $n$  valeurs propres, et  $\mathbf{G}$  est la matrice d'affectation du vecteur de sollicitation  $\mathbf{U}$ . La relation entre les sorties  $\mathbf{Y}$  et les états d'excitation des modes fait apparaître la matrice d'observation  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} \quad (3.16)$$

L'identification des matrices  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  est effectuée par la minimisation d'un critère basé sur l'écart entre la réponse du modèle complet (ou la référence)  $\mathbf{Y}_{ref}$  et celle du modèle réduit  $\mathbf{Y}$  :

$$\mathcal{J}(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}) = \sum_{i=1}^{N_{mes}} \sum_{j=1}^{N_t} \left( \mathbf{Y}(i, j)_{ref} - \mathbf{Y}(i, j)(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}) \right)^2 \quad (3.17)$$

où  $N_t$  est le nombre de pas de temps de la simulation et  $N_{mes}$  le nombre de mesures. Ainsi, l'ordre du modèle réduit est augmenté jusqu'à obtenir la précision souhaitée.

Cette méthode a d'abord été introduite dans les problèmes de conduction de type linéaire pour l'identification des systèmes d'ordre réduit [95]. Les problèmes non-linéaires de conduction et convection naturelle ont aussi été traités par cette technique afin d'acquérir des modèles réduits permettant de résoudre des problèmes inverses [96, 97, 98, 99].

Dans le cadre de l'identification de propriétés thermiques de matériaux, seul Girault *et al.* [100] présentent une étude dans laquelle est traité un problème simple de diffusion de chaleur linéaire, où un modèle réduit de type MIM permet d'identifier la conductivité thermique d'une plaque en 2D.

### 3.2.3 Proper Generalized Decomposition

La méthode PGD (*Proper Generalized decomposition*) est une généralisation du principe de séparation des variables [101, 102].

Dans un problème thermique, la température est écrite comme un produit multiple d'un ensemble de fonctions, où chacune de ces fonctions dépend soit d'une variable (temps, espace) soit d'un paramètre  $P_i$  (capacité calorifique, conductivité thermique, ...) :

$$T(x, y, z, t, P_1, P_2, \dots) \simeq \sum_{i=1}^n x_i(t) \cdot V_{1_i}(x) \cdot V_{2_i}(y) \cdot V_{3_i}(z) \cdot V_{4_i}(P_1) \cdot V_{5_i}(P_2) \quad (3.18)$$

Ces fonctions sont calculées en enrichissant la base à chaque itération.

La PGD, à la différence des deux méthodes présentées précédemment de type *a posteriori*, est une méthode de type *a priori* car le modèle réduit est généré à la volée, spécifiquement pour chaque problème.

Dans la littérature, cette méthode est employée dans plusieurs domaines de la physique. Pour la thermique, Berger *et al.* [103, 104, 105] résolvent le couplage de la diffusion de la chaleur et de l'humidité

dans une paroi, et effectuent une modélisation multi-zone dans un bâtiment. Des applications dans les problèmes inverses ont été effectuées par Gonzalez *et al.* [106] de manière à estimer des fonctions spatiales linéaires définies comme des conditions aux limites de problèmes thermiques. On ne trouve pas d'étude qui utilise cette technique pour la caractérisation thermique de matériaux.

### 3.3 Amalgam Reduced Order Modal Model

La méthode AROMM, dit *Amalgam Reduced Order Modal Model* est celle qui va être utilisée dans la suite de ce travail. Elle fait ainsi l'objet d'une présentation détaillée. Cette méthode se caractérise par deux étapes distinctes :

- On procède tout d'abord au calcul d'une base complète<sup>1</sup>  $\{V_i(M)\}_{i \in \mathbb{N}}$ , sur laquelle il est possible de procéder à une décomposition rigoureuse des champs thermiques :

$$T(M, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(M) x_i(t) \quad (3.19)$$

- Des techniques de réduction dans l'espace modal permettent alors à partir de la connaissance de la base complète de construire la base réduite, de manière à obtenir une approximation satisfaisante du champ thermique :

$$T(M, t) \simeq \sum_{i=1}^n \tilde{V}_i(M) \tilde{x}_i(t) \quad (3.20)$$

Ces deux étapes sont précisées dans les paragraphes suivants.

#### 3.3.1 Le calcul de la base complète

Le calcul de la base complète s'effectue par la résolution d'un problème aux valeurs propres, associé à l'équation de diffusion de la chaleur qui intervient dans le problème thermique général (3.1). Ainsi à la relation :

$$\forall M \in \Omega \quad : \quad c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \pi \quad (3.21)$$

---

1. De façon pratique, cette base se calcule numériquement après discrétisation spatiale de la géométrie considérée. Elle contient donc un nombre de vecteurs propres  $V_i$  égale au nombre de degrés de liberté.

on définit le problème suivant :

$$\forall M \in \Omega \quad : \quad \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i) = z_i c_0 \hat{V}_i \quad (3.22)$$

$z_i$  [s<sup>-1</sup>] est la valeur propre associée à chaque vecteur propre  $\hat{V}_i$ . L'inverse de cette quantité est un temps  $\tau_i$  [s] nommé la constante de temps du vecteur propre. Elle caractérise la dynamique du mode propre :

$$\tau_i = -\frac{1}{z_i} \quad (3.23)$$

On note ici trois points fondamentaux :

1. Les paramètres  $c_0$  et  $k_0$  sont ici des fonctions qui ne dépendent que de l'espace, et qui peuvent donc être différents des paramètres  $c$  et  $k$  du problème physique, qui eux peuvent dépendre de la température. Notons par ailleurs que pour la problématique qui est la nôtre, le problème inverse va être résolu par un appel à un grand nombre de simulations, où  $c$  et  $k$  varient (qui vont être donc différents des valeurs  $c_0$  et  $k_0$  choisies pour le calcul de la base).
2. Selon les conditions aux limites qui vont être associées à l'équation (3.22), et qui n'ont pas été précisées jusqu'à présent, on va obtenir différentes familles de vecteurs propres  $\hat{V}_i$ . Puisque chaque famille va définir une base pour un espace fonctionnel bien précis, il sera important de vérifier que les solutions recherchées (les températures) appartiennent bien à cet espace fonctionnel.
3. Quelque soit la base utilisée, la méthode impose deux choses :
  - L'orthogonalité des vecteurs propres est assurée en définissant un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  adapté au problème aux valeurs propres complet (équation (3.22) + conditions limites choisies). Ainsi obtient-on pour chaque couple de vecteurs propres de la base tels que  $i \neq j$  :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad \langle \hat{V}_i, \hat{V}_j \rangle = 0 \quad (3.24)$$

- La normalisation des vecteurs propres est imposée par le calcul :

$$V_i = \frac{\hat{V}_i}{\langle \hat{V}_i | \hat{V}_i \rangle^{1/2}} \quad (3.25)$$

On obtient ainsi quelle que soit la famille de modes propres la relation suivante :

$$\langle \hat{V}_i | \hat{V}_j \rangle = \delta_{ij} \quad (3.26)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

On peut regrouper les différentes familles de base en deux types : les bases classiques (limitées aux problèmes thermiques linéaires) et celles permettant de traiter des problèmes non-linéaires ou à paramètres variables.

### 3.3.1.1 Bases classiques

Ces bases sont obtenues en définissant un problème aux valeurs propres qui reprend les mêmes conditions aux limites que le problème thermique homogène. Ainsi on peut définir trois familles de vecteurs propres différentes, selon les conditions aux limites usuelles utilisées en thermique.

#### La base de Dirichlet $V_i^D$

Pour le problème physique suivant :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & : \quad c_0 \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} T) + \pi \\ \forall M \in \Gamma & : \quad T = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

on associe le problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & : \quad \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i^D) = z_i^D c_0 \hat{V}_i^D \\ \forall M \in \Gamma & : \quad \hat{V}_i^D = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Les vecteurs propres ainsi calculés forment une base pour le sous-espace  $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ , qui est caractérisé par une valeur nulle sur le bord (voir Figure 3.1(c)). Ceci correspond bien à l'espace des solutions du problème physique (3.27).

#### La base de Neumann $V_i^N$

Elle est obtenue à partir du problème thermique suivant :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & : \quad c_0 \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} T) + \pi \\ \forall M \in \Gamma & : \quad \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

auquel on lie le problème aux valeurs propres :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & : \quad \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i^N) = z_i^N c_0 \hat{V}_i^N \\ \forall M \in \Gamma & : \quad \vec{\nabla} \hat{V}_i^N \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Cette fois l'espace fonctionnel associé à cette base est  $H_N^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ , est caractérisé par un flux thermique nul aux frontières (voir Figure 3.1(b)).

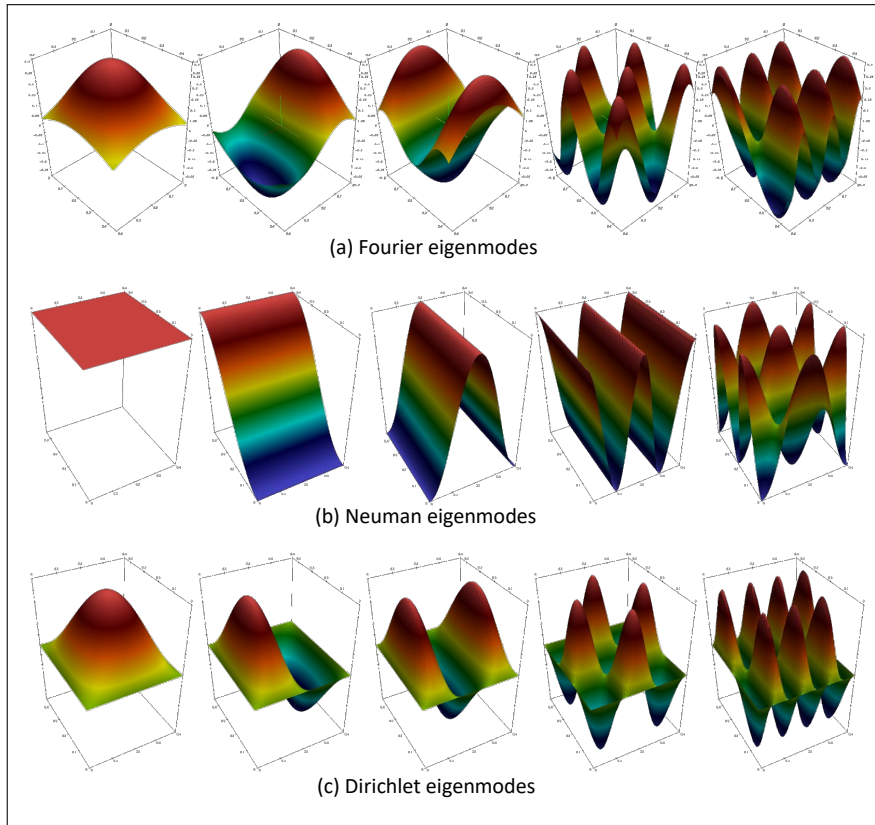


FIGURE 3.1 – Modes classiques pour une simple géométrie rectangulaire (source : École d'automne METTI 2019)

### La base de Fourier $V_i^F$

Elle s'écrit à partir du problème thermique :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & : & c_0 \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} T) + \pi \\ \forall M \in \Gamma & : & k_0 \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = -h_0 T \end{cases} \quad (3.31)$$

Le problème aux valeurs propres est le suivant :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & : & \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i^F) = z_i^F c_0 \hat{V}_i^F \\ \forall M \in \Gamma & : & k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i^F \cdot \vec{n} = -h_0 \hat{V}_i^F \end{cases} \quad (3.32)$$

Cette fois, l'ensemble des vecteurs propres  $\hat{V}_i^F$  forme une base pour le sous-espace  $H_F^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ , qui correspond bien à l'espace des solutions du problème physique (3.31).

### Résolution d'un problème thermique non homogène

Pour un problème non homogène, défini par exemple par la relation :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & : & c_0 \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} T) + \pi \\ \forall M \in \Gamma & : & k_0 \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = h_0(T_f - T) + \varphi \end{cases} \quad (3.33)$$

la solution consiste à séparer la température en deux termes  $T_d$  et  $T_g$ , définis par les deux systèmes suivants :

— La température glissante  $T_f$  est définie en considérant une inertie nulle pour le domaine considéré :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & : & 0 = \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} T_g) + \pi \\ \forall M \in \Gamma & : & k_0 \vec{\nabla} T_g \cdot \vec{n} = -h_0(T_f - T_g) + \varphi \end{cases} \quad (3.34)$$

La résolution du système matriciel associé est alors rapide, d'autant plus si les paramètres ne dépendent pas du temps.

— La température dynamique complémentaire  $T_d$  est homogène sur les conditions limites :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & : & c_0 \frac{\partial T_d}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} T_d) - c_0 \frac{\partial T_g}{\partial t} \\ \forall M \in \Gamma & : & k_0 \vec{\nabla} T_d \cdot \vec{n} = -h_0 T_d \end{cases} \quad (3.35)$$

Elle peut donc s'exprimer sous forme modale par utilisation des modes de Fourier  $V_i^F$ .



### Produit scalaire associé

Il est important de noter que toutes ces bases dites classiques peuvent être associées au produit scalaire suivant :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u c v d\Omega \quad (3.36)$$

ce qui assure l'orthogonalité des modes (3.26). Ce produit scalaire a pour conséquence une simplification importante de l'équation d'état. En effet, nous avons vu précédemment (3.8) que cette équation est obtenue par projection du problème thermique considéré sur la base utilisée. Ainsi dans le cas précédent (3.35), où la base de Fourier  $(z_i^F, V_i^F)$  est utilisée, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N}, \\ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_{\Omega} V_j^F c_0 V_i^F d\Omega \right) \frac{\partial x_i}{\partial t} = \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_{\Omega} \vec{\nabla} V_j^F \cdot k_0 \vec{\nabla} V_i^F d\Omega + \int_{\Gamma} V_j^F h_0 V_i^F d\Gamma \right) x_i \\ - \int_{\Omega} c_0 \frac{\partial T_g}{\partial t} V_j^F d\Omega \end{aligned} \quad (3.37)$$

La propriété d'orthogonalité (3.36) associée à la formulation variationnelle du problème aux valeurs propres considéré (3.32), permet le découplage de ces équations d'état :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \frac{dx_j}{dt} = z_j^F x_j - \int_{\Omega} c_0 \frac{\partial T_g}{\partial t} V_j^F d\Omega \quad (3.38)$$

Après la réduction proprement dite, qui amènera une base réduite constituée de  $n$  valeurs propres  $\tilde{z}_i$  et vecteurs propres  $\tilde{V}_i$ , et en faisant en sorte que les vecteurs réduits  $\tilde{V}_i$  construits respectent les mêmes propriétés d'orthogonalité que les vecteurs  $V_i$ , l'équation d'état à résoudre s'écrira :

$$\forall j \in n, \quad \frac{d\tilde{x}_j}{\partial t} = \tilde{z}_j^F \tilde{x}_j - \int_{\Omega} c_0 \frac{\partial T_g}{\partial t} \tilde{V}_j^F d\Omega \quad (3.39)$$

Sa résolution sera alors immédiate.

De nombreux travaux ont utilisé ces bases, notamment pour pouvoir effectuer des simulations rapides dans le bâtiment [107, 108, 109]. El Khoury *et al.* [110] ont proposé l'adaptation de ces techniques pour des problèmes de diffusion thermique avec transport. Ils ont par ailleurs montré leur pertinence pour les

problèmes inverses : Battaglia [111] identifie des flux variables dans le temps dans le cas d'un problème de diffusion thermique pour une géométrie 2D, Quéméner *et al.* [112] utilisent la même technique pour un problème de transport-diffusion dans le cas d'un disque en rotation qui frotte sur un pion fixe.

Néanmoins, nous avons vu ici que toutes ces bases ne sont définies que pour des sous-espaces de  $H^1(\Omega)$  dans lesquels les paramètres intrinsèques intervenant dans les conditions aux limites sont fixes. Ainsi dans le cas de la résolution d'un problème inverse où les paramètres recherchés sont intrinsèques au problème posé (ici la capacité calorifique et la conductivité thermique), ces bases classiques ne sont pas adaptées puisqu'elles ne permettront une simulation correcte que pour une unique valeur de la conductivité  $k_0$ . Cet objectif impose ainsi l'utilisation de bases plus générales qui seront présentées dans les paragraphes suivants.

### 3.3.1.2 Bases adaptées aux problèmes non-linéaires

#### La base de Branche

Cette base se caractérise par des conditions aux limites dites de Steklov indépendantes du problème physique et dans lesquelles apparait la valeur propre :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & , & k_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \hat{V}_i^B) = z_i^B c_0 \hat{V}_i^B \\ \forall M \in \Gamma & , & k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i^B \cdot \vec{n} = -z_i^B \zeta \hat{V}_i^B \end{cases} \quad (3.40)$$

La résolution de ce problème amène donc des vecteurs propres  $V_i^B$ . On montre que l'espace fonctionnel généré est l'espace de Hilbert  $H^1(\Omega)$  : ces vecteur constituent une base pour tout problème thermique, y compris ceux caractérisés par des paramètres qui sont des fonctions du temps ou de la température. On a donc directement :

$$T(M, t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i V_i^B \quad (3.41)$$

La quantité  $\zeta$  [ $\text{J.m}^{-2}\text{K}^{-1}$ ] est appelée paramètre de Steklov et c'est un simple coefficient qui permet de respecter les dimensions physiques dans la condition aux limites du système d'équations (3.40).

La valeur de ce coefficient est obtenue à partir de la formulation variationnelle du problème aux valeurs propres (3.40) :

$$-\int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} V_i^B d\Omega = z_i \left( \int_{\Omega} c_0 g V_i^B d\Omega + \int_{\Gamma} \zeta g V_i^B d\Gamma \right) \quad (3.42)$$

Pour équilibrer les deux termes liés à la valeur propre, un choix approprié du coefficient de Steklov  $\zeta$  est donné par :

$$\zeta \simeq \frac{\int_{\Omega} c_0 d\Omega}{\int_{\Gamma} d\Gamma} \quad (3.43)$$

Cette fois, le produit scalaire associé est le suivant :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u c_0 v d\Omega + \int_{\Gamma} u \zeta v d\Gamma \quad (3.44)$$

d'où la normalisation :

$$V_i^B = \frac{\hat{V}_i^B}{\left( \int_{\Omega} \hat{V}_i^B c_0 \hat{V}_i^B d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i^B \zeta \hat{V}_i^B d\Gamma \right)^{1/2}} \quad (3.45)$$

Il est par ailleurs possible de caractériser l'évolution spatiale de chaque mode de Branche  $V_i^B$  en définissant un coefficient de localisation  $C_i^{\zeta}$  :

$$C_i^{\zeta} = \int_{\Gamma} V_j^B \zeta V_i^B d\Gamma \quad (3.46)$$

L'évolution de ce coefficient en fonction du numéro de mode, pour une géométrie rectangulaire simple, est présentée sur la Figure 3.2. Elle montre qu'il existe deux familles de modes de Branche :

- En raison de la relation d'orthogonalité définie dans l'équation (3.45), lorsque  $C_i^{\zeta}$  est proche de 1, le mode considéré est nul sur le domaine, sauf près de la frontière. Ces modes sont nommés modes de frontières. Ils n'apparaissent pas dans une base de Fourier classique, et permettent la reconstitution de toute condition aux limites.
- Il existe d'autres modes pour lesquels les évolutions spatiales sont situées dans tout le domaine. Nous les appelons les modes de volume sur la Figure 3.2. Ces modes sont caractérisés par une faible valeur de  $C_i^{\zeta}$  (moins de 0,3 pour l'exemple de la Figure 3.2). Ils sont moins nombreux que les modes de frontières (pour les premiers modes calculés).

La Figure 3.3(a) représente quelques modes de Branche pour une géométrie rectangulaire 2D simple. Cette figure permet de visualiser clairement ces deux familles de modes de Branche. Avec ces modes de Branche, les propriétés d'orthogonalité ne permettent plus d'obtenir un problème modal découplé :

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N}, \quad & \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_{\Omega} V_j^B c V_i^B d\Omega \right) \frac{dx_i}{dt} \\ & = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_{\Omega} \vec{\nabla} V_j^B \cdot k \vec{\nabla} V_i^B d\Omega + \int_{\Gamma} V_j^B h V_i^B d\Gamma \right) x_i \\ & + \int_{\Omega} V_j^B \pi d\Omega + \int_{\Gamma} V_j^B (hT_e + \varphi) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.47)$$

C'est le prix à payer pour utiliser la base de Branche.

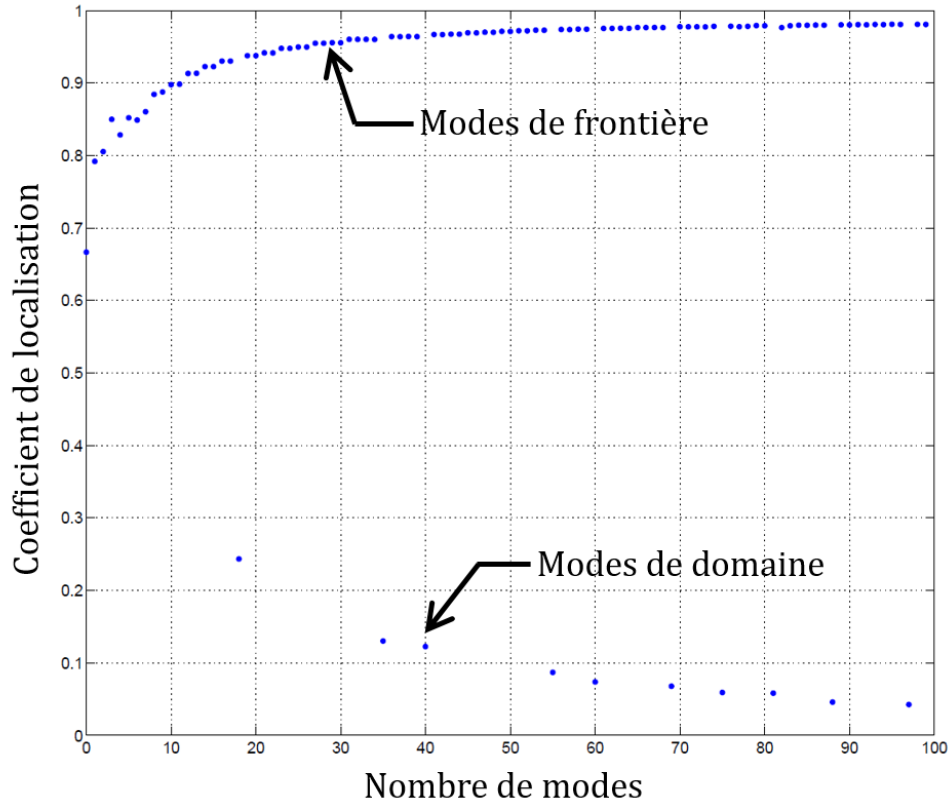


FIGURE 3.2 – Évolution du coefficient de localisation en fonction du numéro de mode de Branche (source : École d'automne METTI 2019)

Initié par Neveu *et al.* [113], ce type de base a été appliqué à différentes configurations : Quéméner *et al.* [114] traitent le cas d'un problème non-linéaire, avec l'existence d'une solidification d'une pièce moulée. Des bases de Branches généralisées aux problèmes de diffusion avec transport sont proposées par Joly

*et al.* [115]. Enfin, Laffay *et al.* [116, 117] proposent une technique de sous-structuration, qui permet de calculer des bases de Branche pour différents sous-domaines, qui sont ensuite couplées entre elles par une résistance de contact thermique.

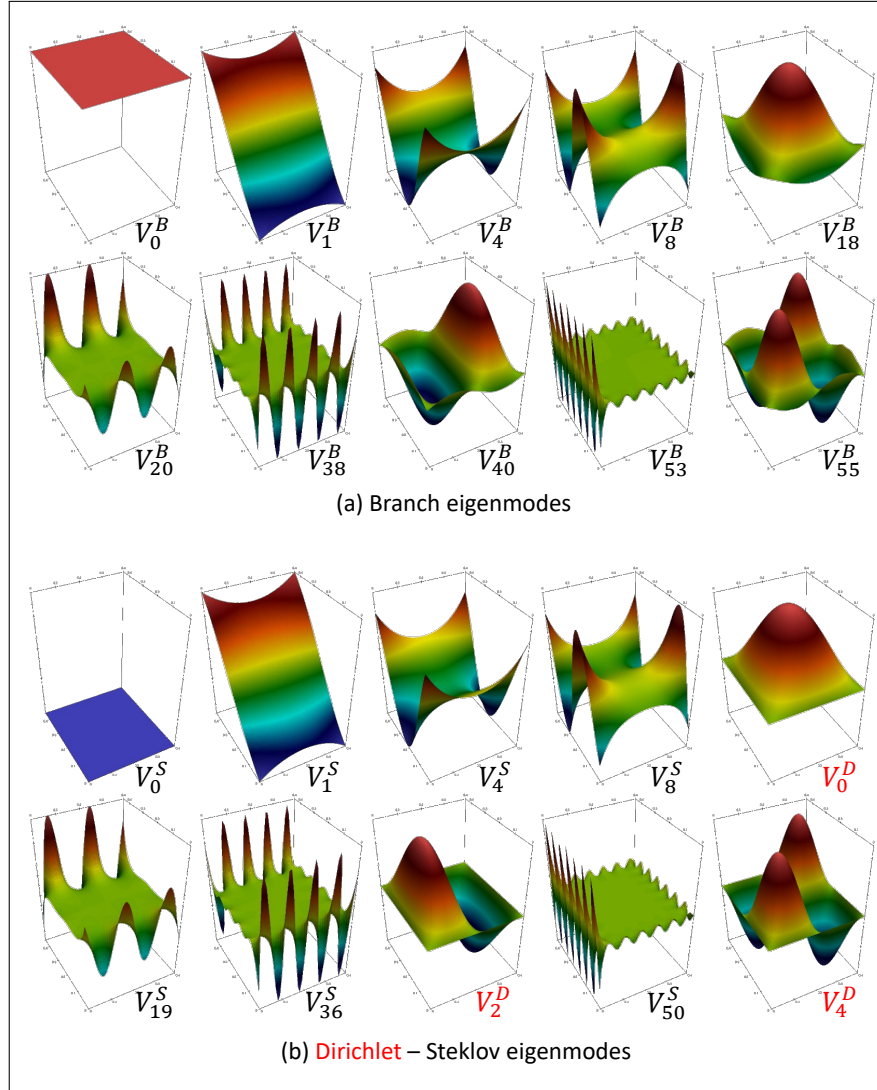


FIGURE 3.3 – Comparaison entre la base de Branche  $\{V_i^B\}$  et la base de Dirichlet-Steklov  $\{V_i^D\} \oplus \{V_j^S\}$  (source : École d’automne METTI 2019)

Jusqu’à présent les travaux concernant les problèmes inverses n’ont considéré que l’identification de sources soit volumique [118], soit surfacique [119], avec transport [49, 120, 121]. Les derniers travaux permettent, par cette méthode, l’identification spatio-temporelle des sollicitations reçues par une plaquette de frein au contact d’un disque, et dont l’usure provoque l’apparition d’un point chaud, qui se déplace, à

l'interface des deux éléments de freinage [50].

Tous ces travaux ont fait apparaître une difficulté d'ordre numérique : en théorie, après discrétisation, la résolution numérique du problème aux valeurs propres (3.40) permet de calculer un nombre de modes propres égal au nombre de degrés de liberté  $N$ . En pratique, on ne calcule qu'une partie  $N_0 < N$  des vecteurs propres de la base<sup>2</sup>. Ce calcul incomplet correspond de facto à un premier niveau de réduction, qui n'est pas optimal puisque  $N_0$  reste néanmoins important. Or l'analyse de l'évolution du coefficient de localisation  $C_i^\zeta$  (Figure 3.2) montre que l'on calcule beaucoup plus de modes de frontières que de modes de domaine. Ainsi pour être certain d'obtenir un nombre suffisant de modes de domaine, il est donc nécessaire de calculer un nombre  $N_0$  de modes qui peut être très important. Cette contrainte peut alors poser problème pour des géométries tridimensionnelles complexes.

### Les modes propres de Dirichlet-Steklov

Très récemment, afin de pallier la difficulté mentionnée ci-dessus, et dans un objectif de sous structuration, un autre moyen de réduire les problèmes non-linéaires avec ou sans paramètres dépendants du temps a été mis au point. Il consiste à utiliser deux bases :

- la base de Dirichlet vue précédemment (3.27),
- la base de Steklov<sup>3</sup>, qui est définie par le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega, & \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i^S) = 0 \\ \forall M \in \Gamma, & k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i^S \cdot \vec{n} = -z_i^S \zeta \hat{V}_i^S \end{cases} \quad (3.48)$$

Les modes de Steklov correspondent à des champs stationnaires obtenus pour un problème dans lequel on impose des flux aux frontières, dont la valeur est proportionnelle à la valeur de ce mode en tout point de la frontière.

Le regroupement de ces deux familles de modes  $\{V_i^D\}_{i \in \mathbb{N}} \oplus \{V_j^S\}_{j \in \mathbb{N}}$  forme une base hilbertienne de  $H^1(\Omega)$ . Il est associé au produit scalaire suivant :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + z_0 \int_{\Gamma} u \zeta v \, d\Gamma \quad (3.49)$$

2. Correspondant aux plus grandes constantes de temps  $\tau_i$ .

3. Les modes de Steklov ne sont rigoureusement définis que sur les frontières. Afin de simplifier la notation, nous appelons ici par abus de langage le mode Steklov comme leur extension dans le domaine (noté  $\hat{V}_i^S$ ).

où  $z_0$  est un paramètre constant [ $s^{-1}$ ] qui permet de respecter la cohérence de la dimension physique des deux termes.

En utilisant la normalisation suivante :

$$\forall \mathcal{X} \in \{D, S\}, \forall i \in \mathbb{N}, \quad V_i^{\mathcal{X}} = \frac{\hat{V}_i^{\mathcal{X}}}{\left( \int_{\Omega} \vec{\nabla} \hat{V}_i^{\mathcal{X}} \cdot k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i^{\mathcal{X}} d\Omega + z_0 \int_{\Gamma} \hat{V}_i^{\mathcal{X}} \zeta \hat{V}_i^{\mathcal{X}} d\Gamma \right)^{1/2}} \quad (3.50)$$

on obtient des modes de Dirichlet et de Steklov qui sont orthogonaux par rapport à ce produit scalaire (3.49) :

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \{D, S\}, \forall i, j \in \mathbb{N}, \\ \langle \hat{V}_i^{\mathcal{X}}, \hat{V}_j^{\mathcal{Y}} \rangle &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} \hat{V}_i^{\mathcal{X}} \cdot k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_j^{\mathcal{Y}} d\Omega + z_0 \int_{\Gamma} \hat{V}_i^{\mathcal{X}} \zeta \hat{V}_j^{\mathcal{Y}} d\Gamma \\ &= \delta_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Un ensemble de modes de la base de Dirichlet-Steklov est comparé aux modes de Branche dans la Figure 3.3. Cela montre que les modes de frontière de Steklov correspondent très bien aux modes de frontière de la base de Branche, alors que les modes de domaine de Branche et les modes de Dirichlet ne sont similaires qu'à l'intérieur du domaine. Aux frontières, les modes de domaine de la base de Branche ne sont pas caractérisés par des valeurs nulles, contrairement aux modes de Dirichlet. Néanmoins, la correspondance entre ces deux bases est flagrante.

Avec cette technique, les calculs des deux familles de modes sont décorrélés, et il est alors possible de maîtriser les nombres respectifs de modes de Steklov  $N_0^S$  et de Dirichlet  $N_0^D$ .

Les seuls travaux qui utilisent cette double base de Dirichlet-Steklov portent sur la modélisation de composants électroniques, caractérisés à la fois par une modélisation géométrique extrêmement fine, et pour lesquelles les sollicitations thermiques variables dans le temps peuvent être très diverses [122, 123].

### 3.3.2 L'obtention de la base réduite

Nous avons vu dans le paragraphe précédent, que la première étape de la méthode AROMM consistait à résoudre un problème aux valeurs propres qui permettait l'obtention d'une base dite complète, constituée d'un nombre maximum de  $N$  modes propres (où  $N$  correspond au nombre de degrés de liberté du problème

discrétisé), et qu'en pratique, on n'en calculait qu'une partie  $N_0$  néanmoins importante, qui correspond aux plus grandes constantes de temps.

Rappelons enfin que la forme du problème modal résultant de cette réduction dépend de la base utilisée :

- Pour une base associée à un problème thermique linéaire et des paramètres stationnaires (ie. la base de Fourier  $\{V_i^F\}$ , la base de Neumann  $\{V_i^N\}$  ou la base de Dirichlet  $\{V_i^D\}$ ) :

$$\forall i \in \{1, n\} \quad \frac{dx_i}{dt} = z_i x_i - \int_{\Omega} c_0 \frac{dT_g}{dt} \tilde{V}_i d\Omega \quad (3.52)$$

- Pour une base adaptée aux problèmes plus généraux (ie. la base de Branche  $\{V_i^B\}$  ou la base de Dirichlet-Steklov  $\{V_i^D\} \oplus \{V_j^S\}$ ) :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, n\} \quad & \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \tilde{V}_j c \tilde{V}_i d\Omega \right) \dot{x}_i \\ & = \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \vec{\nabla} \tilde{V}_j \cdot k \vec{\nabla} \tilde{V}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{V}_j h \tilde{V}_i d\Gamma \right) x_i \\ & + \int_{\Omega} \tilde{V}_j \pi d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{V}_j (h T_e + \varphi) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.53)$$

La deuxième étape de la méthode AROMM consiste alors à construire une base réduite contenant les  $n$  modes  $\tilde{V}_i(M)$  issus de la base complète  $V_i$ . Plusieurs méthodes de réduction existent.

### 3.3.3 La troncature

L'idée la plus simple est de prendre les modes les plus pertinents de la base complète :

$$\forall i \in \{1, n\} \quad \forall j \in \{1, N\}, \quad \tilde{V}_i = V_j \quad (3.54)$$

#### 3.3.3.1 Troncature temporelle

Un premier critère conduit à la troncature de Marshall [124]. Dans cette méthode, les modes ayant les plus grandes constantes de temps sont conservés. Cette technique de réduction a surtout été utilisée lors des premiers travaux dans le cas des bases classiques [107, 111, 125, 108, 112, 109].

Un avantage majeur de cette réduction est son utilisation immédiate, puisque la technique de Lanczos [126] qui est utilisée pour résoudre le problème aux valeurs propres, permet de calculer la base selon



l'ordre des plus grandes constantes de temps. C'est bien cette technique qui est utilisée comme indiqué précédemment et qui permet une réduction de premier niveau : au lieu de calculer la base complète ( $N$  modes), seul un certain pourcentage de cette base est calculé ( $N_0$  modes), à partir duquel il est possible de rendre une deuxième réduction plus efficace. Dans le cas de problèmes thermiques caractérisés par un très grand nombre de DDL, cette possibilité de calculs partiels de la base est d'un grand intérêt, étant donné les temps de calcul importants nécessaires pour résoudre le problème aux valeurs propres et les difficultés de stockage des vecteurs propres.

### 3.3.3.2 Troncature basée sur des états d'excitation de référence

Cette technique est utilisée par Joly *et al.* [115]. À partir d'un ensemble de champs de température connus  $T_{ref}(t)$ , il est possible d'obtenir les états d'excitation par une simple projection de la base complète sur  $T_{ref}$  selon la définition du produit scalaire défini pour la base considérée.

Par exemple, dans le cas de la base de Branche, les propriétés d'orthogonalité conduisent à :

$$\begin{aligned}
& \forall j \in \mathbb{N}, \\
& \int_{\Omega} T_{ref} c_0 V_j^B d\Omega + \int_{\Gamma} T_{ref} \zeta V_j^B d\Gamma \\
& = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (x_i V_i^B) c_0 V_j^B d\Omega + \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^n (x_i V_i^B) \zeta V_j^B d\Gamma \\
& = \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} V_i^B c_0 V_j^B d\Omega + \int_{\Gamma} V_i^B \zeta V_j^B d\Gamma \right) x_i \\
& = \sum_{i=1}^n \delta_{ij} x_i \\
& = x_j
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Pour la base de Dirichlet-Steklov, compte tenu de la définition du produit scalaire utilisé, la projection conduit à :

$$\begin{aligned}
\forall \mathcal{Y} \in \{D, S\}, \forall i, j \in \mathbb{N}, \\
\langle T_{ref}, \hat{V}_j^{\mathcal{Y}} \rangle &= \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} T_{ref} \cdot \vec{\nabla} \hat{V}_j^{\mathcal{Y}} d\Omega + \int_{\Gamma} T_{ref} \zeta \hat{V}_j^{\mathcal{Y}} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} \left( \sum_{\mathcal{X}=D,S} \sum_{i=1}^{n^{\mathcal{X}}} x_i^{\mathcal{X}} \hat{V}_i^{\mathcal{X}} \right) \cdot \vec{\nabla} \hat{V}_j^{\mathcal{Y}} d\Omega + \int_{\Gamma} \left( \sum_{\mathcal{X}=D,S} \sum_{i=1}^{n^{\mathcal{X}}} x_i^{\mathcal{X}} \hat{V}_i^{\mathcal{X}} \right) \zeta \hat{V}_j^{\mathcal{Y}} d\Gamma \\
&= \sum_{\mathcal{X}=D,S} \sum_{i=1}^{n^{\mathcal{X}}} \left( \int_{\Omega} k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i^{\mathcal{X}} \cdot \vec{\nabla} \hat{V}_j^{\mathcal{Y}} d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{V}_i^{\mathcal{X}} \zeta \hat{V}_j^{\mathcal{Y}} d\Gamma \right) x_i^{\mathcal{X}} \\
&= \sum_{\mathcal{X}=D,S} \sum_{i=1}^{n^{\mathcal{X}}} \delta_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \delta_{ij} x_i^{\mathcal{X}} \\
&= x_i^{\mathcal{X}}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Le principe de cette technique de réduction est d'effectuer un classement de l'ensemble des états d'excitation ainsi obtenus, ce qui permet de ne conserver qu'un nombre réduit de modes associés aux états les plus influents. Différents types de classement sont possibles, soit en fonction de la valeur absolue des états à des moments précis, soit en fonction de l'énergie de ces états (intégrale dans un domaine temporel du carré des états). Cette technique conduit généralement à une réduction plus efficace que la simple troncature temporelle, mais elle présente un inconvénient : l'efficacité de la réduction dépend des champs de référence qui doivent être connus. On retrouve ici la même contrainte que celle existant pour la méthode POD.

À partir de la même géométrie discrétisée, il est généralement possible de réaliser des simulations d'un problème thermique plus simple que celui étudié, mais qui pourra cependant exciter les modes caractéristiques.

### 3.3.4 La base d'Amalgame

Une technique encore plus élaborée est celle de l'Amalgame. Le principe est de classer les modes propres selon leurs états d'excitation, mais cette fois, les modes qui ne sont pas conservés lors de la troncature sont ajoutés par de simples combinaisons linéaires aux modes initialement retenus :

$$\forall i \in \{1, n\} \quad \tilde{V}_i = V_{i,1} + \sum_{p=2}^{\tilde{N}_i} \alpha_{i,p} V_{i,p} \quad ; \quad 0 < |\alpha_{i,p}| < 1 \tag{3.57}$$

Afin de conserver les propriétés de la base, chaque mode est utilisé une seule fois :

$$\sum_{i=1}^n (\tilde{N}_i + 1) = N_0 \quad (3.58)$$

La distribution des modes initiaux et le calcul des coefficients d'Amalgame  $\alpha_{i,p}$  sont effectués selon une procédure séquentielle rapide qui ne dépend que de la connaissance des états d'excitation. Mise en place par Oulefki [127] dans le cas des bases classiques pour lesquelles le découplage permettait de déterminer facilement les états de référence, cette technique de réduction a été largement utilisée pour les modes de Branche. La difficulté est en général de déterminer les états d'excitation de la base complète. Une première solution assez simple [128, 129] consiste, comme pour la troncature énergétique, à utiliser un ensemble de champs de température obtenus par résolution complète d'un problème de référence, qui donne accès aux états d'excitation (équation (3.55) ou (3.56)).

Chaque mode propre principal est lié à un mode propre d'Amalgame correspondant. La distribution des modes initiaux dans les sous-espaces de la base amalgamée, ainsi que la détermination des coefficients d'Amalgame  $\alpha$ , sont réalisées en minimisant un critère  $J_R$  basé sur la différence entre les champs de température obtenus respectivement par le modèle complet  $T$  et le modèle réduit  $\tilde{T}$ , défini à partir du produit scalaire :

$$J_R = \int_0^t \langle (T - \tilde{T}), (T - \tilde{T}) \rangle dt \quad (3.59)$$

Par exemple, pour une base de Branche on écrira :

$$J_R = \int_0^{\tau} \left[ \int_{\Omega} c_0 (T - \tilde{T})^2 d\Omega + \int_{\Gamma} \zeta (T - \tilde{T})^2 d\Gamma \right] dt \quad (3.60)$$

Le choix de ce critère particulier permet de tirer parti des propriétés d'orthogonalité de la base complète (3.40), afin d'obtenir un processus d'optimisation rapide et séquentiel en fonction du nombre de modes de la base réduite. Ces calculs sont ensuite effectués à partir de champs de température connus, caractéristiques du processus simulé.

D'autres techniques ont également été testées [116, 114, 118] afin d'éviter de calculer les champs thermiques de référence : puisque les états d'excitation des modes propres sont uniquement utilisés ici pour classer ces modes afin de mettre en place la procédure d'amalgame, ces auteurs ont construit le problème modal complet associé, et ont cherché une estimation simple des états d'excitation. En utilisant une base de Branche et en négligeant les termes de couplage entre les modes, le problème modal a été

résolu analytiquement et les états d'excitation sont devenus extrêmement rapides à obtenir [114]. Une amélioration de cette technique a été réalisée ultérieurement dans le cas d'un disque rotatif, pour lequel seul le couplage d'un petit nombre de modes est pris en compte [121].

### 3.4 Conclusion

Cette étude bibliographique a permis de montrer que la technique de réduction modale offre une solution à l'utilisation de modèles numériques de grande taille pour une problématique inverse. En effet, le changement d'espace de travail "Température - État d'excitation des modes" permet de diminuer de façon importante le nombre d'inconnues du système à résoudre, tout en conservant la complexité du problème posé (en termes de géométrie, de sollicitations thermiques, etc.)

De façon générale, une réduction efficace va s'appuyer sur la connaissance de données de référence pour lesquelles la réduction va être optimum. Dans le cas où l'on cherche à déterminer les caractéristiques thermiques d'un matériau, peu d'études ont été menées. La difficulté est en effet de pouvoir déterminer un modèle réduit qui soit efficace quelque soient les valeurs de ces propriétés intrinsèques au problème thermique posé.

Ainsi dans le cas de la POD, la seule étude réalisée [94] a permis de retrouver des valeurs de conductivité thermique dans un domaine assez restreint (entre  $4,5 \text{ [W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$  et  $6,5 \text{ [W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$ ). Pour la MIM, peu de détails sont donnés sur l'unique étude réalisée [100].

L'objectif de ce travail va donc être d'évaluer l'efficacité des techniques de type AROMM développées par l'équipe THE du laboratoire d'accueil dans le cadre de la problématique de la caractérisation thermique.

Dans ce qui suit, deux types d'application sont proposées :

- L'utilisation d'une sonde à choc de type aiguille va faire l'objet d'une modélisation 3D, puis d'une réduction modale, afin d'être utilisée dans une procédure inverse.
- La caractérisation multi-échelle, qui fait le lien entre la structure micro et la mesure macro sera abordée.

À chaque fois, le choix du type de base utilisée sera discuté, et différentes techniques de minimisation inhérente à la procédure inverse seront comparées.

Deuxième partie

Caractérisation d'un matériau  
homogène



## Chapitre 4

# Caractérisation des isolants isotropes par modélisation complète d'une sonde à choc de type aiguille

### 4.1 Objectif de l'étude

Le travail bibliographique précédent a fait apparaître que la technique expérimentale la plus adaptée à une caractérisation thermique in-situ est la sonde à choc de type aiguille, pour laquelle le modèle analytique atteint ses limites lorsque le matériau considéré est un isolant.

L'incompatibilité des modèles numériques tridimensionnels classiques de grande taille avec les techniques itératives de résolution de problèmes inverses, nécessite alors l'utilisation de modèles réduits modaux.

L'objectif de cette étude est donc la mise en place de ces modèles, et leur utilisation pour la caractérisation thermique d'isolants. Nous utiliserons ici les modèles de type AROMM développés dans le laboratoire.

## 4.2 Configuration étudiée

L'intégralité de cette étude est ici purement numérique. Néanmoins la description de la sonde correspond en tout point à une sonde réelle, qui a été conçue à l'institut IRDL de Lorient, au sein de l'équipe PTR4, avec laquelle une collaboration a été mise en place.

Nous considérons ici une partie d'une plaque de matériau isolant  $\Omega_I$  (Figure 4.1) dont la conductivité thermique  $k_I$  [ $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ] et la capacité  $c_I$  [ $\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ] sont à déterminer. Cet isolant a la forme d'un cube, dont chaque côté mesure 10 cm. Seule une de ses faces ( $\Gamma_h$ ) est en contact avec le milieu extérieur, dont l'échange thermique est caractérisé par un coefficient  $h = 10$  [ $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ]. Les autres parois ( $\Gamma_o$ ) sont adiabatiques.

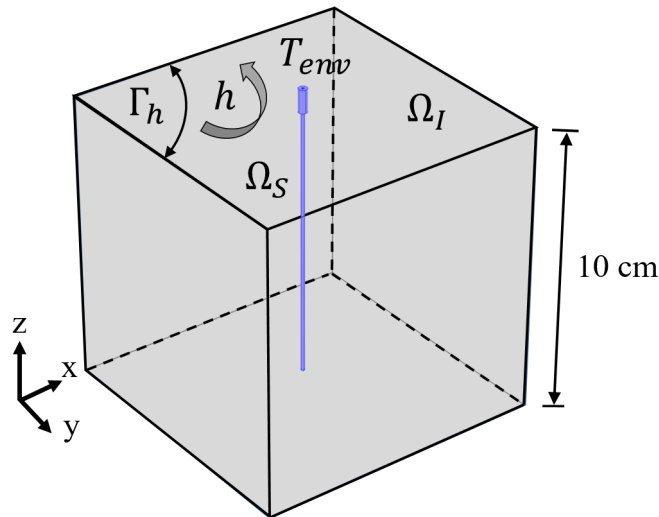


FIGURE 4.1 – Système physique étudié

Dans cet isolant est insérée une sonde à choc de type aiguille (Figure 4.2). Cette sonde modélisée, notée dans sa globalité  $\Omega_S$ , est constituée d'une aiguille creuse en acier ( $\Omega_A$ ), dans laquelle est inséré un fil chauffant ( $\Omega_{HW}$ ), enrobé de sa gaine ( $\Omega_{HS}$ ), et qui va délivrer une puissance volumique connue  $\pi$  telle que la puissance totale soit de 0,0626 [W]. Cette sonde est particulièrement fine, puisque son diamètre est de  $D = 1,3$  [mm] pour une longueur  $L = 9,3$  [cm]. Deux thermocouples de type Chromel ( $\Omega_{Ch}$ )/Alumel ( $\Omega_{Al}$ ), munis de leur gaine ( $\Omega_{ThS}$ ) sont également introduits dans cette aiguille, et dont les soudures ( $\Omega_{Th}$ ) sont positionnées à différentes hauteurs de la sonde (point  $M_1$  et  $M_2$  sur la Figure 4.2). L'ensemble est noyé dans une résine ( $\Omega_G$ ). La description numérique prend également en compte l'extrémité de la sonde



et la liaison électrique du fil chauffant via des câbles en cuivre ( $\Omega_C$ ).

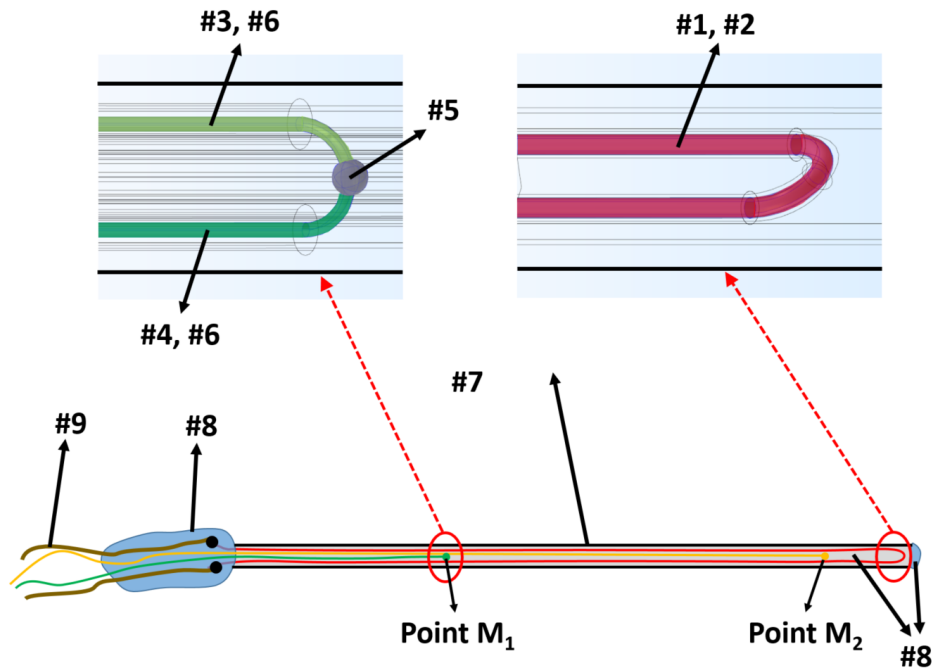


FIGURE 4.2 – Composition de la sonde

La Figure 4.3 présente une vue en coupe de l'aiguille creuse munie des deux thermocouples et de la résistance chauffante.

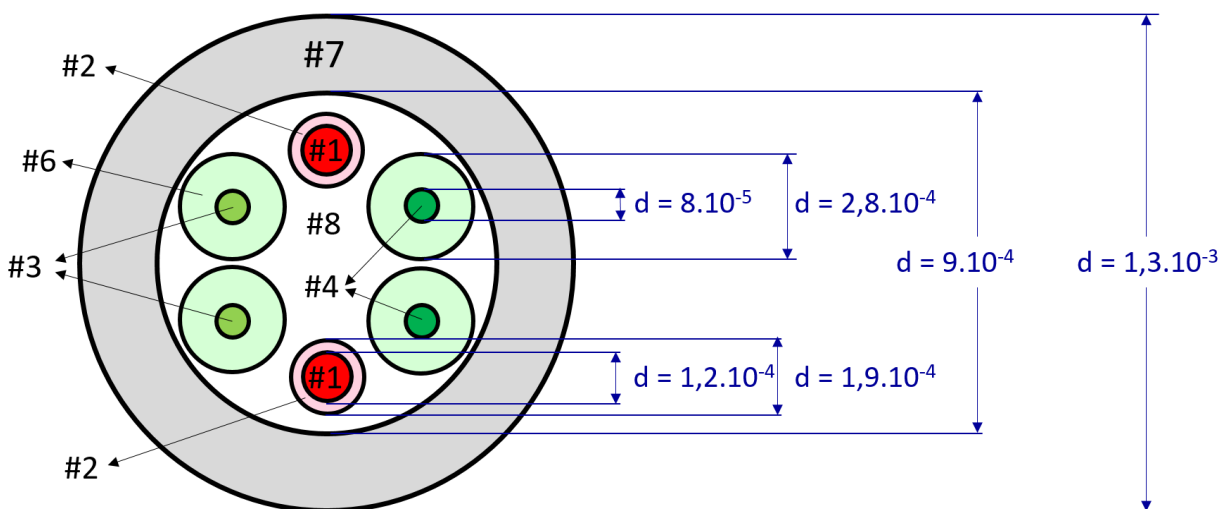


FIGURE 4.3 – Dimensions de la sonde et ses composants internes

Les caractéristiques des différents matériaux, sont présentées dans le Tableau 4.1.

Nbre. du domaine en $\Omega_S$	$k_{S_i}$ [W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$c_{S_i}$ [J.m <sup>-3</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$V_i$ [10 <sup>-9</sup> m <sup>3</sup> ]
#1 - $\Omega_{HW}$ Fil chauffant	19,5	3,47×10 <sup>6</sup>	1,42
#2 - $\Omega_{HS}$ Gaine du fil chauffant	0,25	2,25×10 <sup>6</sup>	2,17
#3 - $\Omega_{Ch}$ Chromel	19	3,81×10 <sup>6</sup>	0,342
#4 - $\Omega_{Al}$ Alumel	29,7	4,50×10 <sup>6</sup>	0,342
#5 - $\Omega_{Th}$ Thermocouple	24,35	4,15×10 <sup>6</sup>	0,008
#6 - $\Omega_{ThS}$ Gaine du thermocouple	0,2	2,25×10 <sup>6</sup>	8,24
#7 - $\Omega_A$ Acier	16,3	3,97×10 <sup>6</sup>	63,3
#8 - $\Omega_G$ Colle/remplissage	0,1	3,15×10 <sup>5</sup>	98,8
#9 - $\Omega_C$ Cuivre	390	3,38×10 <sup>6</sup>	0,115

TABLE 4.1 – Paramètres physiques de la sonde type fil chaud

Le problème thermique est décrit par le système d'équations (4.1) dans lesquelles on introduit la variable  $T$ , définie comme l'élévation de température par rapport à la température de l'environnement.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall M \in \Omega, t > 0 & c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \Pi \\ \forall M \in \Gamma_h, t > 0 & k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = -hT \\ \forall M \in \Gamma_o, t > 0 & \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = 0 \\ \forall M \in \Omega, t = 0 & T = T_0 = 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

On note ici :

—  $\Omega = \Omega_I \cup \Omega_S$

—  $k$  et  $c$ , l'ensemble des valeurs de conductivité thermique et de capacité calorifique,

—  $\Pi$  la puissance volumique définie sur  $\Omega$ , égale à  $\pi$  dans le fil chauffant  $\Omega_{HW}$  et zéro ailleurs.

## 4.3 Modèle numérique

### 4.3.1 Écriture du modèle

La modélisation numérique du problème (4.1) s'effectue par la méthode des éléments finis, qui s'appuie sur la formulation variationnelle du problème. On note ici  $g$  la fonction d'essai, définie sur  $H^1(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} c \frac{dT}{dt} g d\Omega = - \int_{\Omega} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} g d\Omega - \int_{\Gamma_h} h T g d\Gamma + \int_{\Omega} \Pi g d\Omega \quad (4.2)$$

En exprimant chacune des intégrales de volume précédentes comme la somme de deux termes, d'une part le volume de la sonde  $\Omega_S$  et d'autre part, celui du matériau isolant  $\Omega_I$ , il est possible d'isoler les termes inconnus recherchés, c'est-à-dire la conductivité thermique  $k_I$  et la capacité calorifique  $c_I$  de l'isolant :

$$\begin{aligned} c_I \int_{\Omega_I} \frac{dT}{dt} g d\Omega + \int_{\Omega_S} c_S \frac{dT}{dt} g d\Omega = & - k_I \int_{\Omega_I} \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} g d\Omega - \int_{\Omega_S} \vec{\nabla} T \cdot k_S \vec{\nabla} g d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_h} h T g d\Gamma + \int_{\Omega_{HW}} \pi g d\Omega \end{aligned} \quad (4.3)$$

La discrétisation spatiale est effectuée en considérant pour chaque élément des fonctions d'interpolation linéaires (éléments de type P1). Ce modèle est appelé le Modèle Complet Réel MCR. Après discrétisation spatiale, on obtient l'expression matricielle suivante en respectant le même ordre que dans (4.3) :

$$(c_I \mathbf{C}_I + \mathbf{C}_S) \dot{\mathbf{T}} = (k_I \mathbf{K}_I + \mathbf{K}_S + \mathbf{H}) \mathbf{T} + \mathbf{U} \quad (4.4)$$

soit

$$(c_I \mathbf{C}_I + \mathbf{C}_S) \dot{\mathbf{T}} = (k_I \mathbf{K}_I + \mathbf{A}) \mathbf{T} + \mathbf{U} \quad (4.5)$$

Les différentes matrices  $\mathbf{C}_I$ ,  $\mathbf{C}_S$ ,  $\mathbf{K}_I$ , et  $\mathbf{A}$  sont de taille  $[N, N]$  et sont topologiquement creuses, où  $N = 61591$  est le nombre de degrés de liberté. Le terme  $\mathbf{U}$  est ainsi un vecteur de dimension  $[N, 1]$ .

L'ensemble des programmes permettant la construction de ce modèle discret sont des outils conçus au laboratoire en C++. La résolution est assurée à partir d'un schéma de discrétisation temporelle à pas de temps variable du deuxième ordre. Le solveur utilisé est "PARDISO" soit l'acronyme de *Parallel Direct Sparse Solver Interface* d'Intel, adapté aux matrices creuses. L'ordinateur utilisé pour l'ensemble de ces travaux est un Dell Precision 7530, ayant un processeur Intel(R) Xeon(R) E-2176M avec une mémoire RAM de 64Go.

### 4.3.2 Discussion sur la durée d'utilisation de la sonde

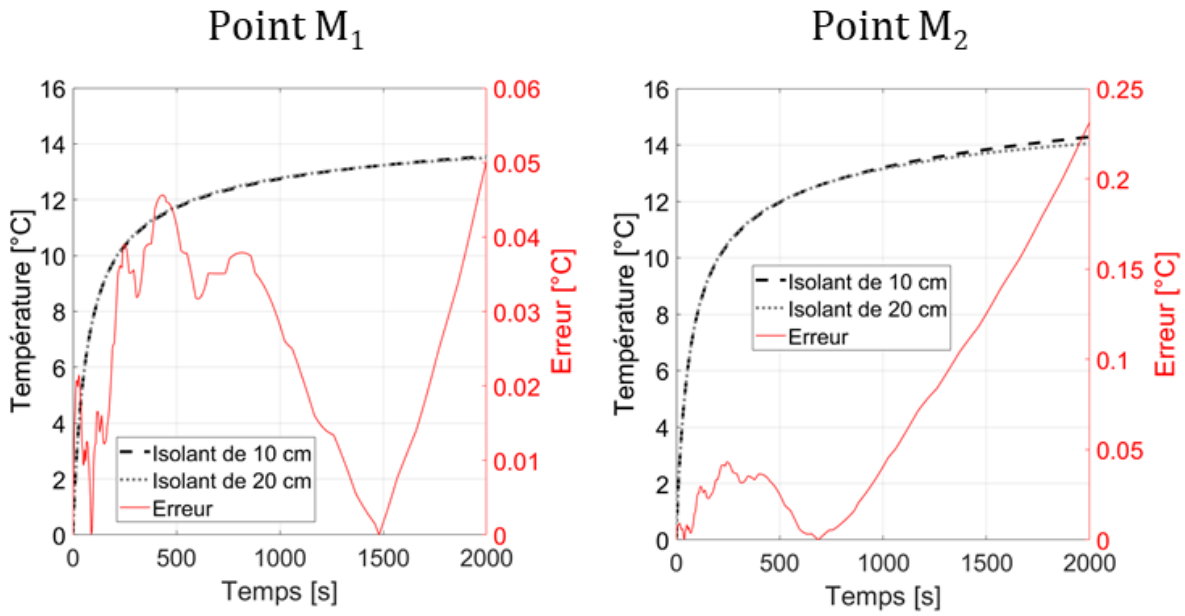
Le choix de la configuration choisie présentée précédemment (Figure 4.1) est lié à une géométrie réelle pour laquelle on cherche à caractériser un isolant d'une épaisseur typique de 10 [cm], placé dans un mur, et dans lequel la sonde est alors insérée.

Pour s'affranchir de la connaissance du matériau placé derrière l'isolant, il est alors nécessaire de limiter le temps d'utilisation de la sonde, de façon à ce que les conditions limites n'influent pas sur les mesures de température. On cherche ici à obtenir un ordre de grandeur de ce temps, qui sera alors utilisé dans l'étude numérique menée dans ce chapitre. Selon les matériaux isolants utilisés, la diffusivité varie de façon non négligeable, et donc la durée limite va dépendre du matériau choisi. De façon pratique, on ne s'intéresse ici qu'aux températures aux points de mesure  $M_1$  et  $M_2$  (Figure 4.2). L'estimation de l'ordre de grandeur de ce temps de mesure s'obtient par comparaison entre la simulation numérique pour deux configurations :

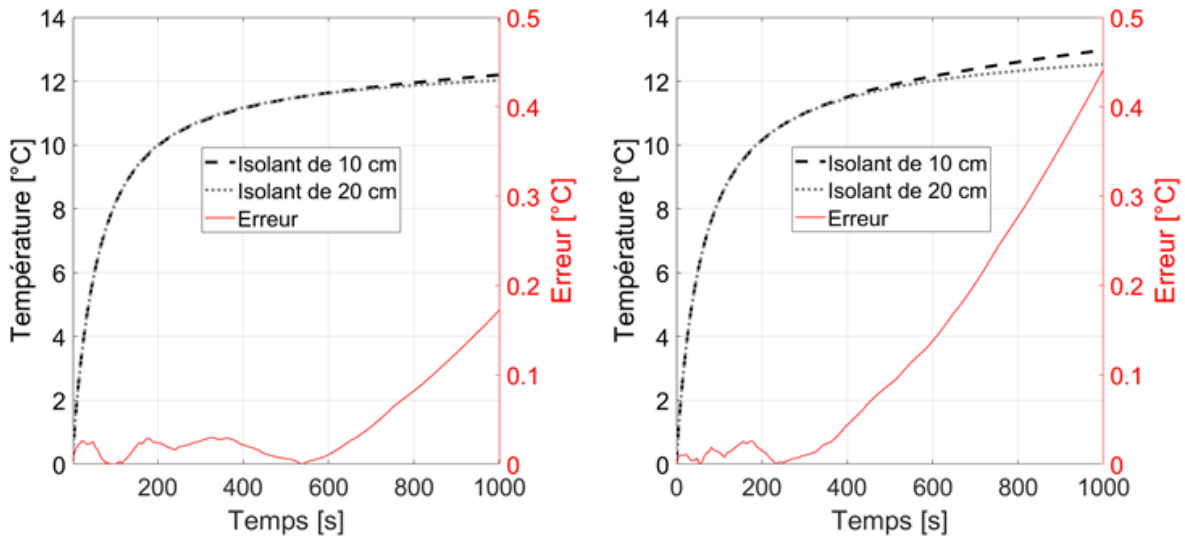
- Le modèle tel que décrit précédemment (Figure 4.1 et équation (4.1)),
- Un nouveau modèle caractérisé par une épaisseur deux fois plus importante (20 [cm]) qui va se comporter comme un modèle semi-infini compte tenu des durées simulées.

La Figure 4.4 représente l'évolution des températures aux points  $M_1$  et  $M_2$ , en fonction du temps, pour les deux modèles considérés, et pour deux matériaux isolants typiques placés dans une paroi de bâtiment. Ces deux isolants sont caractérisés par des diffusivités extrêmes parmi les isolants en général :

- laine minérale :  $k_I = 0,030$  [W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>],  $c_I = 7,2.10^4$  [J.m<sup>-3</sup>.K<sup>-1</sup>],
- polystyrène expansé :  $k_I = 0,035$  [W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>],  $c_I = 2,6.10^4$  [J.m<sup>-3</sup>.K<sup>-1</sup>],



a) Laine minérale



b) Polystyrène expansé

FIGURE 4.4 – Évolution des températures selon la dimension de l'isolant

Les écarts constatés dans les premiers instants s'expliquent par le fait que les deux modèles utilisent des maillages différents. Par contre, il apparaît à partir d'un temps variable selon les isolants et les points de mesure, des erreurs qui augmentent de façon régulière.

Pour toute la suite de l'étude numérique, dans laquelle nous allons effectuer la construction des modèles réduits, ainsi que la phase d'identification des propriétés à partir de mesures purement numériques, nous choisirons une durée moyenne unique de 600 [s], pour tous les matériaux. Cette durée moyenne, pourraient être étendue pour certains matériaux, et s'avère un peu trop longue pour d'autres<sup>1</sup>. Ceci n'aura pas d'influence sur l'étude numérique actuelle, puisque les mesures restent virtuelles, obtenues par le modèle complet défini par le système d'équations (4.1). Lors d'essais expérimentaux ultérieurs, il faudra faire attention à cette limite.

### 4.3.3 Comparaison avec le modèle analytique

Une simulation directe est effectuée en choisissant un isolant de caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} k_I = 0,041 [\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}] \\ c_I = 1,15 \times 10^5 [\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}] \end{cases} \quad (4.6)$$

La sonde dissipe la puissance  $\pi$  pendant une durée  $t = 600$  [s]. Les résultats obtenus aux points de mesures  $M_1$  et  $M_2$  (Figure 4.2) sont comparés au modèle analytique issu du modèle de Blackwell (présenté au chapitre 1 par la relation (1.4)).

Les évolutions de température au point de mesure  $M_2$  du modèle numérique et sur un point unique du modèle de Blackwell sont ainsi représentées sur la Figure 4.5.

On note d'une part que le modèle numérique reproduit un comportement de type sigmoïdal. Et d'autre part, on remarque que la loi analytique de Blackwell ne retrouve pas le même comportement, mais plutôt une ligne droite car elle utilise des hypothèses simplificatrices qui ne prennent pas en compte certains phénomènes physiques.

---

1. Pour le matériau caractérisé par la diffusivité la plus forte et donc la longueur de diffusion la plus importante, une erreur de 0,17 [°C] est en effet observée sur la Figure 4.4b. Une durée de 400 [s] d'utilisation de la sonde serait plus adaptée dans ce cas précis.

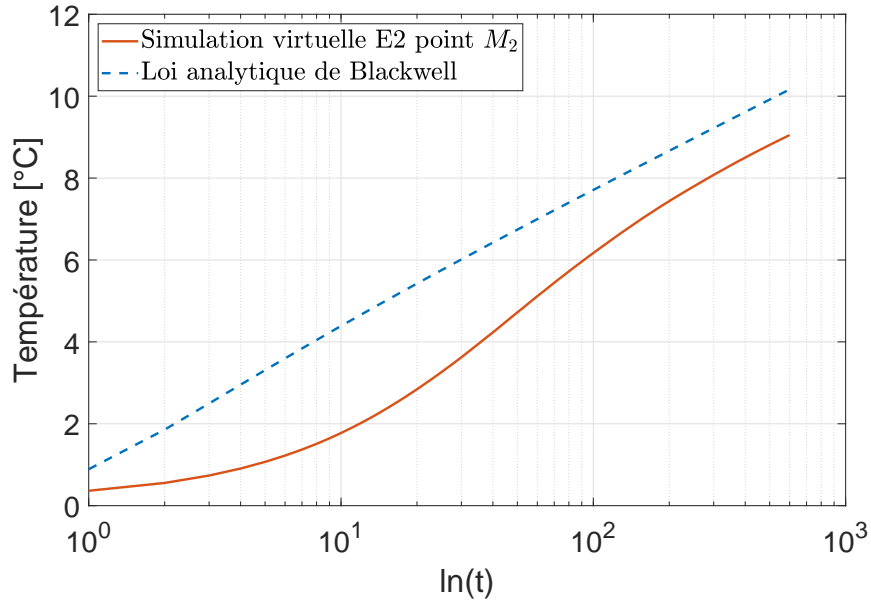


FIGURE 4.5 – Modèle analytique vs simulation virtuelle d’une sonde à choc type aiguille

On note que les deux évolutions sont différentes, et que la réalité simulée par le modèle numérique 3D est caractérisé par une évolution non-linéaire de la température en fonction du logarithme du temps, ce qui interdit une détermination directe de la conductivité. On retrouve ici les résultats bibliographiques [41, 42].

#### 4.3.4 Analyse spatiale

La Figure 4.6 affiche les profils numériques de température aux deux points de mesure  $M_1$  et  $M_2$  de la sonde. Selon l’orientation de l’axe, le profil de température change. Il existe une non-homogénéité notable concernant la température à l’intérieur de la sonde, aussi bien radialement (concernant le fil chauffant), que longitudinalement (flux thermique le long de la sonde). On note ainsi un écart de température maximum dans la sonde de l’ordre de 0,65 [°C]. Cela prouve combien il est essentiel de connaître avec précision la géométrie et les propriétés thermiques de la sonde, et de ne pas se contenter de considérer comme un objet uniforme englobant toutes les composantes. On note que l’écart de température entre les deux points de mesure pourrait varier en fonction du matériau isolant testé, et qu’en cas de conductivité plus faible, cet écart sera plus perceptible.

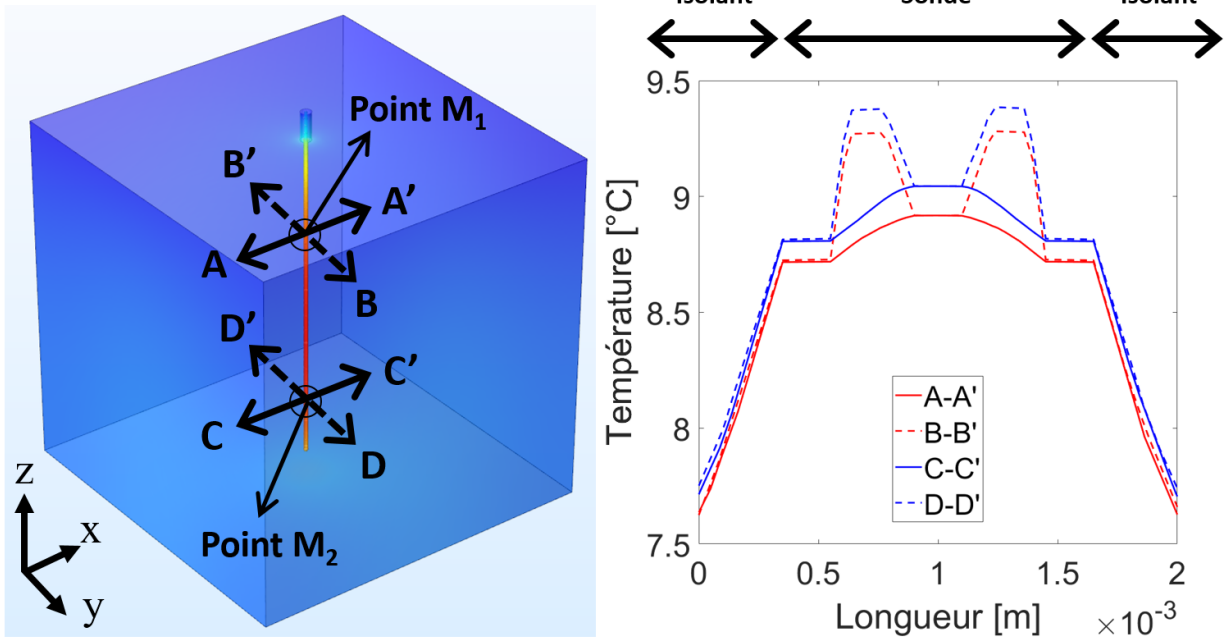


FIGURE 4.6 – Profil de température à  $t = 600$  [s]

Pour la suite de l'étude, ce modèle numérique MCR va servir à 2 choses :

- Il permettra d'obtenir des mesures virtuelles, en ajoutant aux résultats obtenus aux points de mesure  $M_1$  et  $M_2$  un bruit gaussien.
- Comme on le montre dans la suite, il va servir de point de départ pour la construction d'un modèle réduit précis pour toute la gamme d'isolants que l'on souhaite caractériser par cette sonde.



## 4.4 Réduction modale

La résolution modale mise en place utilise la méthode AROMM présentée dans le chapitre 3. On cherche ici un modèle réduit adapté à la procédure d'identification des caractéristiques de l'isolant. Ce modèle doit donc permettre de reconstituer tout champ de température quelle que soit la valeur de la conductivité  $k_I$  et de la capacité  $c_I$ . La base de Branche sera utilisée ici.

### 4.4.1 La base complète

#### 4.4.1.1 Calcul

Comme présenté dans le chapitre 3, la base complète est obtenue par résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega, & k_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \hat{V}_i) = z_i c_0 \hat{V}_i \\ \forall M \in \Gamma, & k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i \cdot \vec{n} = -z_i \zeta \hat{V}_i \end{cases} \quad (4.7)$$

La forme variationnelle s'écrit, en séparant le domaine de la sonde  $\Omega_S$  de celui de l'isolant  $\Omega_I$  :

$$\begin{aligned} -k_{I_0} \int_{\Omega_I} \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{\nabla} g \, d\Omega - \int_{\Omega_S} \vec{\nabla} V_i \cdot k_S \vec{\nabla} g \, d\Omega = \\ z_i \left( c_{I_0} \int_{\Omega_I} V_i g \, d\Omega + \int_{\Omega_S} c_S V_i g \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} \zeta g V_i \, d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Un travail préliminaire (voir Annexe A) a permis d'étudier l'influence de la valeur de la diffusivité (et donc de la conductivité  $k_0$  et la capacité  $c_0$ ) sur l'allure des modes propres. Nous avons ainsi montré que dans le cas d'un domaine parfaitement homogène, la diffusivité ne change absolument pas l'allure spatiale des modes propres, mais influe uniquement sur leur dynamique via les constantes de temps associées. Cependant, lorsque le domaine contient des matériaux différents (comme c'est le cas ici), ce n'est plus vrai puisque les différentes évolutions spatiales de chaque matériau s'entremêlent. Ainsi, le choix des différents paramètres physiques va influencer sur l'allure spatiale des différents modes propres.

Pour notre configuration, le choix de valeurs uniques des différents paramètres intervenant dans ce problème aux valeurs propres est le suivant :

- Pour le domaine de la sonde correspondant à  $\Omega_S$ , on connaît les propriétés de chacun de ces composants,

- En ce qui concerne l'isolant  $\Omega_I$  pour lequel on ne connaît pas la valeur des paramètres  $k_I$  et  $c_I$ , nous avons opté ici pour une valeur arbitraire, proche de la gamme des matériaux étudiés :

$$\forall M \in \Omega_I, \quad k_{I_0} = 0,01 [\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}], \quad c_{I_0} = 1 \times 10^4 [\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}] \quad (4.9)$$

- La valeur du paramètre de Steklov est choisie comme indiqué dans le chapitre 3 par la relation (3.43), ce qui amène ici  $\zeta = 1023,54 [\text{J.m}^{-2}.\text{K}^{-1}]$ .

L'intérêt majeur de ces modes de Branche est qu'ils constituent une base pour tous les types de problèmes thermiques, quel que soit l'ensemble des valeurs de la caractéristique thermophysique de l'isolant  $k_I$  et  $c_I$  :

$$T(M, t)_{(k_I, c_I)} = \sum_{i=1}^N x_i(t) V_i(M)_{(k_{I_0}, c_{I_0}, \zeta)} \quad (4.10)$$

#### 4.4.1.2 Validation numérique

On cherche alors à vérifier que la famille de vecteurs calculés forme bien une base pour un problème thermique caractérisé par des isolants ayant des propriétés différentes de celles ayant servi au calcul de la base.

Pour ce faire, nous considérons les deux isolants suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{isolant 1 : } k_I = k_{I_0} = 0,01 [\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}] \quad c_I = c_{I_0} = 1 \times 10^4 [\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}] \\ \text{isolant 2 : } k_I = 0,06 [\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}] \quad c_I = 150 \times 10^4 [\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}] \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Chacun de ces problèmes thermiques fait alors l'objet d'une simulation numérique et amène à deux ensembles de champs de températures  $T_{ref}^1$  et  $T_{ref}^2$ .

La projection de ces champs sur la base de Branche selon le produit scalaire associé (3.44), permet grâce aux propriétés d'orthogonalités d'obtenir les états d'excitation :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} V_i c T_{ref} d\Omega + \int_{\Gamma} V_i \zeta T_{ref} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} V_i c \sum_{j=1}^N x_j V_j d\Omega + \int_{\Gamma} V_i \zeta \sum_{j=1}^N x_j V_j d\Gamma \\
&= \sum_{j=1}^N x_j \left( \int_{\Omega} V_i c V_j d\Omega + \int_{\Gamma} V_i \zeta V_j d\Gamma \right) \\
&= \sum_{j=1}^N x_j \delta_{ij} \\
&= x_i
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Ces états d'excitation permettent alors de calculer l'erreur entre les champs de températures issus d'un modèle complet construit à partir des éléments finis et les champs de températures reconstruits. La valeur maximale de cette erreur en tout point du domaine  $\Omega$  et pour toute la durée de simulation s'écrit :

$$\epsilon = \max_{t, \Omega} \left| T_{ref} - \sum_{j=1}^N x_j V_j \right| \tag{4.13}$$

Pour les deux tests considérés, nous obtenons une erreur maximale de l'ordre de  $\epsilon \simeq 10^{-10}$  [°C] qui est donc de l'ordre du bruit numérique. Ainsi l'ensemble des  $N$  vecteurs propres calculés pour des paramètres  $c_{I_0}$ , et  $k_{I_0}$  fixes, forment bien une base pour tout type de problème thermique caractérisé par des valeurs quelconques de capacité et de conductivité de l'isolant,  $c_I$  et  $k_I$ .

## 4.4.2 Réduction de la base

### 4.4.2.1 Calcul de la base réduite

La construction de la base réduite  $\tilde{V}_i$  à partir de la base complète  $V_i$  précédemment calculée, s'effectue selon la méthode d'Amalgame présentée dans le chapitre 3. Nous avons vu que cette technique s'appuie sur des champs de référence  $T_{ref}$ , pour lesquels la réduction va être optimale, et dont les évolutions spatiales doivent donc être caractéristiques des différentes configurations d'utilisation du modèle réduit.

Dans notre cas, seules les capacités et conductivités de l'isolant vont varier. On choisit de se limiter à un domaine de caractéristiques d'isolants, délimité par quatre matériaux définis dans le Tableau 4.2 (voir illustration sur la Figure 4.7). Par conséquent, nous allons construire un scénario composé où les champs

de température de référence  $T_{ref_i}$ ,  $i = [1, \dots, 4]$ , sont dérivés de simulations présentant différents ensembles de propriétés thermiques.

No. cas de référence	$k_I$ [ $10^{-2}$ W.m $^{-1}$ .K $^{-1}$ ]	$c_I$ [ $10^4$ J.m $^{-3}$ .K $^{-1}$ ]
R1	1	1,5
R2	1	150
R3	6	1,5
R4	6	150

TABLE 4.2 – Points de référence de la réduction par Amalgame

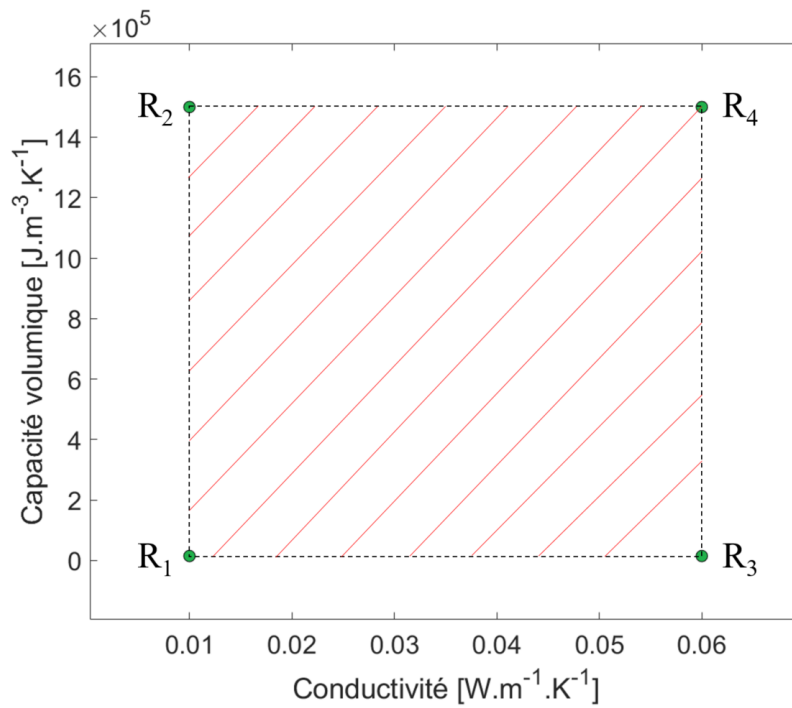


FIGURE 4.7 – Domaine des cas de référence

#### 4.4.2.2 Analyse de la précision

Le critère  $J_R$  que l'on cherche à minimiser dans la réduction par Amalgame est présenté de manière générale dans le chapitre 3 (3.60), et il doit ici tenir compte du fait que l'on cherche à minimiser un écart pour les quatre cas de référence utilisés :

$$J_R = \sum_{i=1}^4 \int_{\tau} \left[ \int_{\Omega} c \left( T_{(R_i)} - \tilde{T}_{(R_i)} \right)^2 d\Omega + \int_{\Gamma} \zeta \left( T_{(R_i)} - \tilde{T}_{(R_i)} \right)^2 d\Gamma \right] dt \quad (4.14)$$

Différentes bases réduites sont alors obtenues en fonction de l'ordre  $n$  de réduction choisi. L'efficacité de ces bases réduites peut être estimée en utilisant la même technique de projection, que celle utilisée pour les bases complètes (4.13). En effet, puisque la technique d'Amalgame respecte les propriétés d'orthogonalité des bases de Branche, on écrit directement que :

$$\tilde{x}_i = \int_{\Omega} \tilde{V}_i c T_{ref} d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{V}_i \zeta T_{ref} d\Gamma \quad (4.15)$$

où  $T_{ref}$  va correspondre à chacun des quatre matériaux (Tableau 4.2) et l'on peut calculer l'erreur de projection du modèle réduit aux points de mesure  $M_1$  et  $M_2$  de la sonde par :

$$p = 1, 2 \quad \sigma_{M_P}(t) = T(M_P, t) - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i(t) \tilde{V}_i(M_P) \quad (4.16)$$

On en déduit alors pour chaque point, l'erreur maximum  $\sigma_{M_Pmax}$  et l'erreur moyenne  $\bar{\sigma}_{M_P}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = 1, 2 \quad \sigma_{M_Pmax} = \max(\sigma_{M_P}(t)) \\ p = 1, 2 \quad \bar{\sigma}_{M_P} = \frac{1}{\Delta t} \int \sigma_{M_P}(t) \quad \text{où } \Delta t \text{ est la durée du processus simulé} \end{array} \right. \quad (4.17)$$

La Figure 4.8 présente l'erreur maximale des températures en fonction de l'ordre du modèle. On choisit pour la suite de l'étude un modèle d'ordre 100, qui conduit à une erreur maximale inférieure à 0,07 [°C].

La Figure 4.9 représente l'évolution temporelle de la température obtenue par le modèle MCR et sa projection sur un modèle réduit de l'ordre  $n = 100$  pour le scénario le plus défavorable (Référence R4 point  $M_1$ ) ainsi que l'évolution de l'erreur. On constate que l'erreur maximale est obtenue aux premiers instants. Comme le montre la Tableau 4.3, l'erreur moyenne  $\bar{\sigma}_{M_P}$  est largement inférieure par rapport à l'erreur maximale  $\sigma_{M_Pmax}$  à chaque point de mesure.

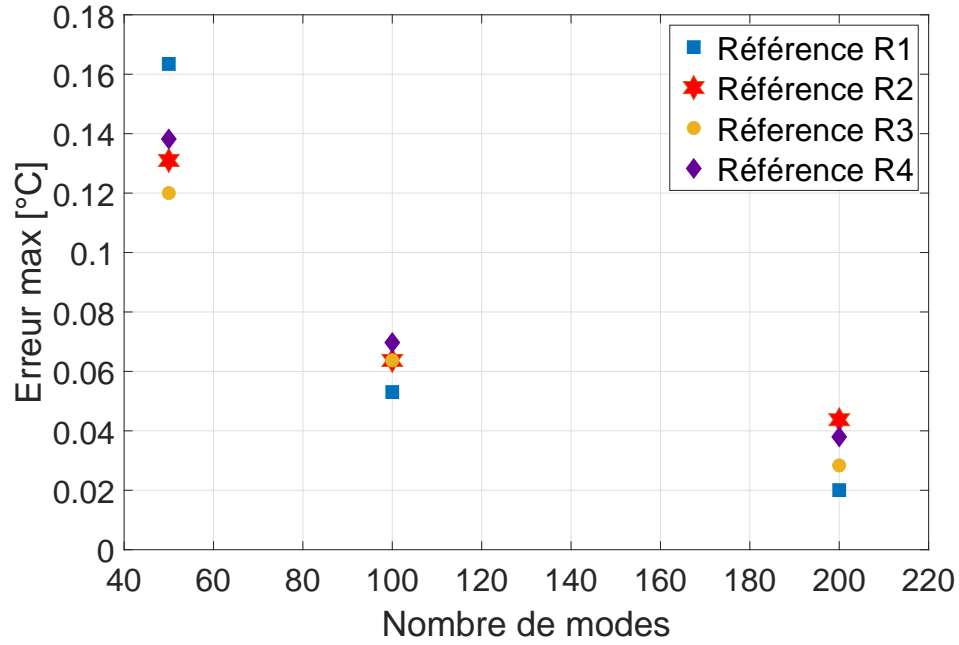
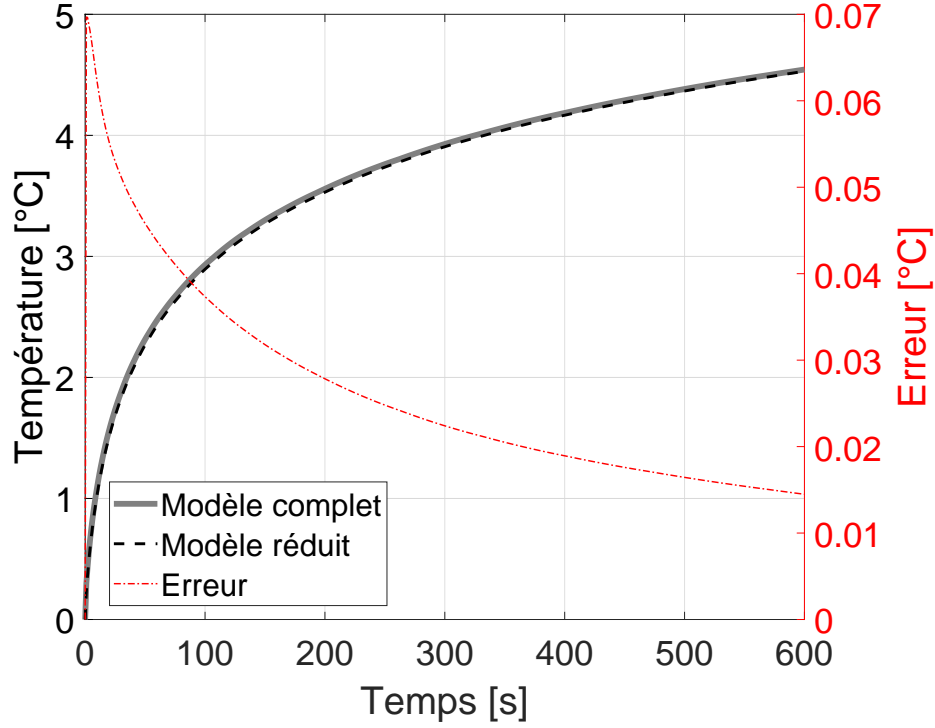


FIGURE 4.8 – Erreur  $\max(\sigma_{M_1max}, \sigma_{M_2max})$  aux points de mesure pour tous les cas de référence en fonction des modes de Branches amalgamés

Isolant	Point	$\sigma_{M_Pmax}$ [ $10^{-2}$ °C]	$\bar{\sigma}_{M_P}$ [ $10^{-2}$ °C]	Tmax [°C]
R1	$M_1$	5,31	1,61	31,50
	$M_2$	5,28	1,96	33,82
R2	$M_1$	6,37	0,76	15,82
	$M_2$	6,36	1,80	16,10
R3	$M_1$	5,50	2,55	7,90
	$M_2$	5,54	1,22	8,47
R4	$M_1$	6,97	2,04	4,54
	$M_2$	6,92	2,20	4,56

TABLE 4.3 – Efficacité du modèle réduit à 100 modes pour les cas de référence

FIGURE 4.9 – Résultats du modèle réduit  $n = 100$  pour la  $R4$  au point  $M_1$ 

Ainsi la base réduite obtenue permet de retrouver de façon précise l'évolution de température aux points de mesures pour les quatre configurations qui délimitent le domaine des isolants et qui ont servi à la construction de ce modèle réduit. L'étape suivante va être d'utiliser cette base dans le cadre de simulation directe pour différents isolants réels.

#### 4.4.3 Équation d'état

Comme présenté dans le chapitre 3, le modèle modal est obtenu en introduisant l'approximation modale de la température (3.6) dans l'équation de la chaleur (3.1). Dans le cas de notre étude, la projection de l'équation (4.3) sur la base réduite  $\tilde{V}_i$  construite amène à :

$$\begin{aligned}
 \forall j \in \mathbb{N}, \quad & \sum_{i=1}^n \left( c_I \int_{\Omega_I} \tilde{V}_j \tilde{V}_i d\Omega + \int_{\Omega_S} \tilde{V}_j c_S \tilde{V}_i d\Omega \right) \frac{d\tilde{x}_i}{dt} \\
 & = - \sum_{i=1}^n \left( k_I \int_{\Omega_I} \vec{\nabla} \tilde{V}_j \cdot \vec{\nabla} \tilde{V}_i d\Omega + \int_{\Omega_S} \vec{\nabla} \tilde{V}_j \cdot k_S \vec{\nabla} \tilde{V}_i d\Omega + \int_{\Gamma_h} \tilde{V}_j h \tilde{V}_i d\Gamma \right) \tilde{x}_i + \int_{\Omega_{HW}} \tilde{V}_j \pi d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Sous forme discrète on appelle  $\tilde{\mathbf{V}} [N, n]$  la matrice regroupant l'ensemble des  $n$  modes réduits  $\tilde{V}_i$ , et  $\tilde{\mathbf{X}} [n, 1]$  le vecteur des  $n$  états d'excitation associés  $\tilde{x}_i$ . L'équation du modèle réduit correspondant à l'équation (4.5) s'écrit alors :

$$(c_I \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{C}_I \tilde{\mathbf{V}} + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{C}_S \tilde{\mathbf{V}}) \dot{\tilde{\mathbf{X}}} = (k_I \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{K}_I \tilde{\mathbf{V}} + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{A} \tilde{\mathbf{V}}) \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{U} \quad (4.19)$$

qui devient sous forme compacte :

$$(c_I \mathbf{L}_I + \mathbf{L}_S) \dot{\tilde{\mathbf{X}}} = (k_I \mathbf{M}_I + \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{N} \quad (4.20)$$

Ce modèle est appelé le Modèle Réduit Réel MRR. En résolvant ce problème, il est possible de déterminer l'évolution transitoire des  $n$  états d'excitation et ainsi de reconstruire le champ de température  $\tilde{T}(M, t) = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \tilde{V}_i$ .

Cette technique de simulation par modèle réduit est utilisée pour cinq échantillons de matériaux isolants fréquemment utilisés dans le bâtiment (voir Tableau 4.4) qui ont donc des propriétés thermiques différentes de celles utilisées pour construire le modèle réduit (Tableau 4.2). Notons que les propriétés thermiques de ces échantillons sont proches les unes des autres, en regard de la gamme possible de propriétés thermiques définies lors de la phase de réduction (cas de référence).

Les erreurs maximales entre le modèle réduit MRR et le modèle complet MCR, aux deux points de mesure, sont présentées dans le Tableau 4.5. Il est important de souligner que les résultats présentent le même ordre d'erreur que celui obtenu par projection pour les matériaux de référence (Tableau 4.3).

No. d'échantillon	$k_I [10^{-2} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$	$c_I [10^4 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}]$	Nom de l'isolant
E1	3,0	7,2	Laine minérale
E2	4,1	11,5	Verre cellulaire
E3	3,5	2,6	Polystyrène expansé
E4	2,8	2,2	Polystyrène extrudé
E5	2,2	3,5	Polyuréthane

TABLE 4.4 – Propriétés thermiques des isolants testés

Pour les cinq cas considérés, la résolution est rapide : l'utilisation de ce modèle réduit ( $n = 100$ ) par



rapport à un modèle classique de type éléments finis ( $N \approx 62,000$ ), conduit à un gain en temps calcul de l'ordre de 250. Quant à la précision du modèle réduit, on calcule là encore l'évolution de l'erreur en fonction du temps aux deux points de mesure  $M_1$  et  $M_2$ , d'où l'on extrait les erreurs maximales et moyennes telles que définies par les relations définies dans l'équation (4.17). Le Tableau 4.5 synthétise les principaux résultats, on voit ainsi que pour tous ces cas, le modèle réduit MRR donne de très bons résultats.

Échantillon	Point	$\sigma_{M_P max}$ [ $10^{-2}$ °C]	$\bar{\sigma}_{M_P}$ [ $10^{-2}$ °C]	Tmax [°C]
E1	$M_1$	5,577	0,709	12,06
	$M_2$	5,541	0,691	12,31
E2	$M_1$	5,735	0,543	8,95
	$M_2$	5,696	0,847	9,05
E3	$M_1$	5,465	1,906	11,68
	$M_2$	5,465	0,527	12,16
E4	$M_1$	5,417	2,079	14,18
	$M_2$	5,413	0,724	14,83
E5	$M_1$	5,435	1,195	16,50
	$M_2$	5,409	1,025	17,12

TABLE 4.5 – Erreurs de réduction du MR des échantillons

C'est ainsi ce modèle, précis et rapide, qui va être utilisé dans la résolution du problème inverse permettant l'identification des caractéristiques  $k_I$  et  $c_I$  de l'isolant thermique.

## 4.5 Procédure inverse

Les différentes techniques de résolution de problèmes inverses ont été présentées dans le chapitre 2. L'idée est ici d'appliquer ces méthodes dans l'espace modal réduit obtenu précédemment afin de rechercher la valeur de la capacité calorifique et de la conductivité thermique à partir des deux mesures de température obtenues par la sonde à choc de type aiguille. Par ailleurs, l'étude est ici purement numérique, les mesures "virtuelles" sont donc obtenues par simulation du modèle complet MCR de type élément finis, avec l'ajout d'un bruit gaussien d'écart-type  $\sigma_B$ . Ainsi le principe de ce problème est présenté sur la Figure 4.10, qui reprend les notations présentées dans le chapitre 2.

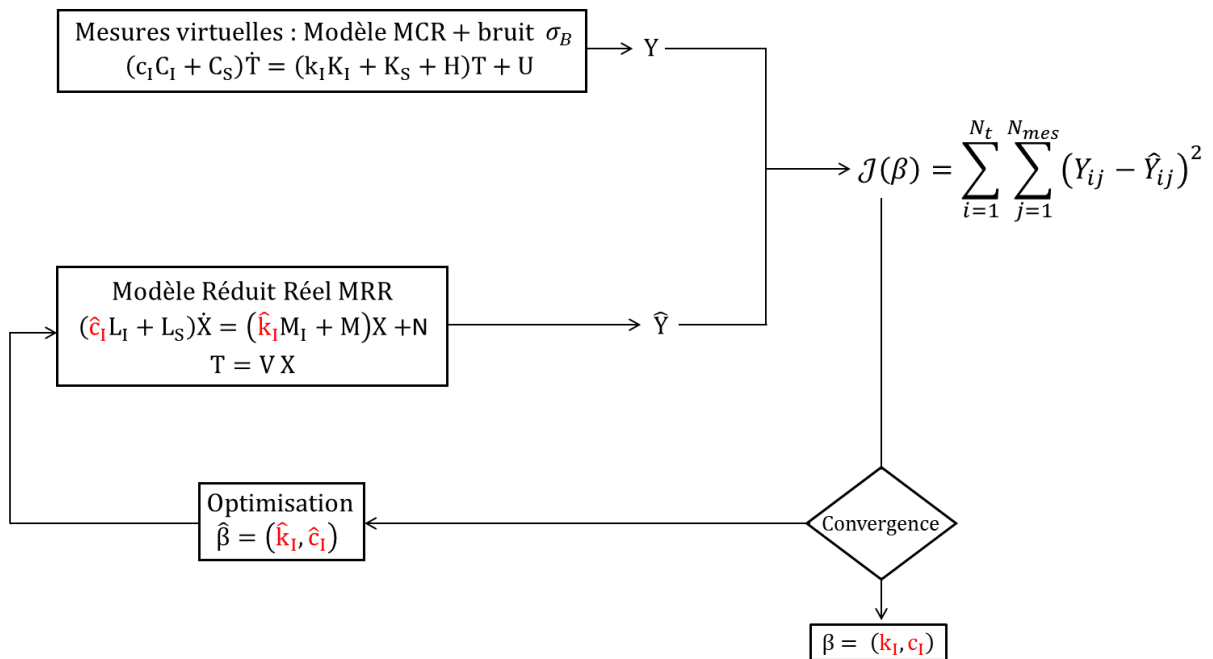


FIGURE 4.10 – Schéma du principe de la procédure inverse

En ce qui concerne le choix de l'algorithme d'optimisation, deux méthodes sont testées pour estimer le couple de valeurs  $(k_I, c_I)$ .

### 4.5.1 Étude de sensibilité

Afin d'évaluer la faisabilité de la procédure d'identification des propriétés thermiques, une étude de sensibilité est réalisée pour garantir la pertinence des points de mesure. Les sensibilités réduites de la mesure à une variation des paramètres recherchés s'écrivent :

$$S_{k_I}^* = k_I \frac{\partial Y}{\partial k_I} \qquad S_{c_I}^* = c_I \frac{\partial Y}{\partial c_I} \qquad (4.21)$$

Ce calcul est effectué pour l'ensemble des matériaux testés, à savoir :

- les matériaux virtuels qui délimitent le domaine de variation des paramètres thermiques ( $R_1$  à  $R_4$ ),
- et les matériaux réels qui ont permis de tester le modèle réduit ( $E1$  à  $E5$ ).

La Figure 4.11 montre la sensibilité réduite des matériaux virtuels c'est-à-dire les références. Ici on analyse spécifiquement  $R1$  et  $R4$  puisqu'elles représentent les valeurs les plus éloignées du domaine. On note tout d'abord que pour un même paramètre à identifier, les variations de sensibilité diffèrent nettement selon le matériau considéré. Cette variation est d'autant plus forte que les matériaux testés sont très différents les uns des autres. La sensibilité réduite pour les matériaux réels, c'est-à-dire les échantillons, s'affiche sur la Figure 4.12, plus précisément  $E2$  (avec la conductivité thermique la plus élevée) et  $E5$  (avec la conductivité thermique la plus faible).

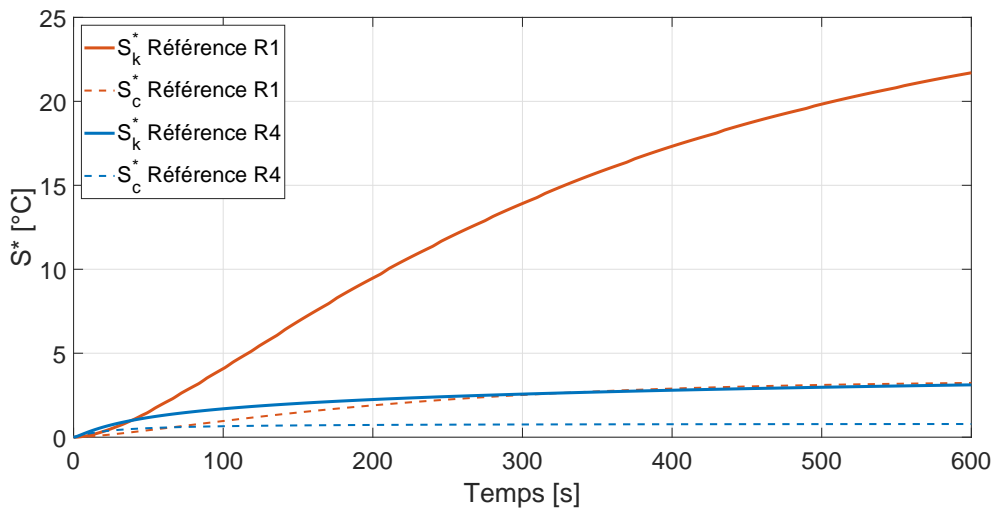


FIGURE 4.11 – Étude de sensibilité des références R1 et R4

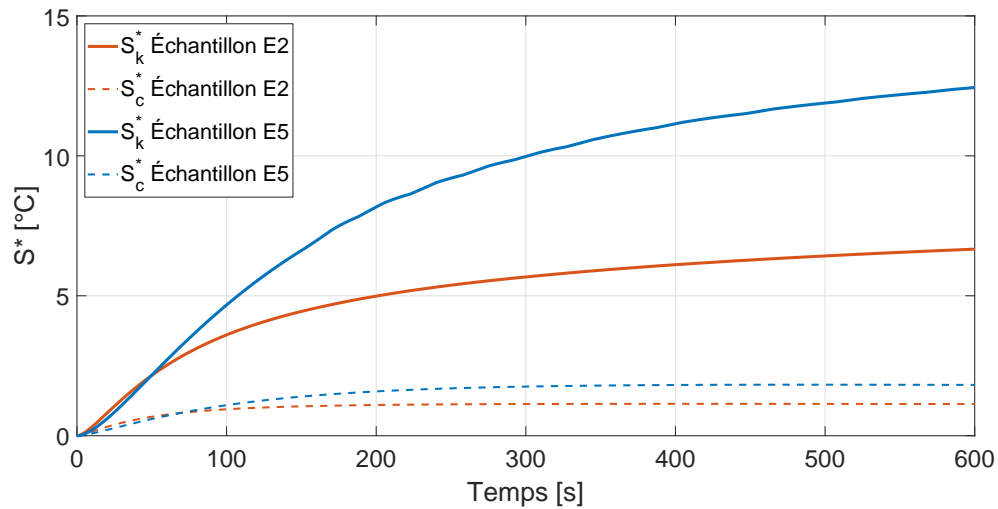


FIGURE 4.12 – Étude de sensibilité des échantillons E2 et E5

Par ailleurs, dans tous les cas de figure, la sensibilité réduite de la mesure vis à vis de la capacité est bien plus faible que celle vis à vis de la conductivité thermique, dans un rapport de l'ordre de 10. Ainsi indépendamment de la précision du modèle réduit, la précision concernant l'identification de la capacité calorifique sera beaucoup moins bonne que celle de la conductivité.

Afin de savoir si on est capable d'identifier chaque paramètre indépendamment de l'autre on étudie la corrélation de l'un par rapport à l'autre. La Figure 4.13 représente l'évolution de la sensibilité de la capacité thermique en fonction de celle de la conductivité. Il est choisi ici d'adimensionnaliser ces valeurs en fonction des valeurs maximales obtenues, afin d'obtenir la même échelle pour les deux cas de référence étudiés  $R1$  et  $R4$ . On note qu'aucune de ces évolutions ne suit une loi linéaire. Il n'y a donc pas de corrélation entre ces sensibilités et l'identification simultanée de la conductivité thermique et de la capacité calorifique est donc théoriquement possible.

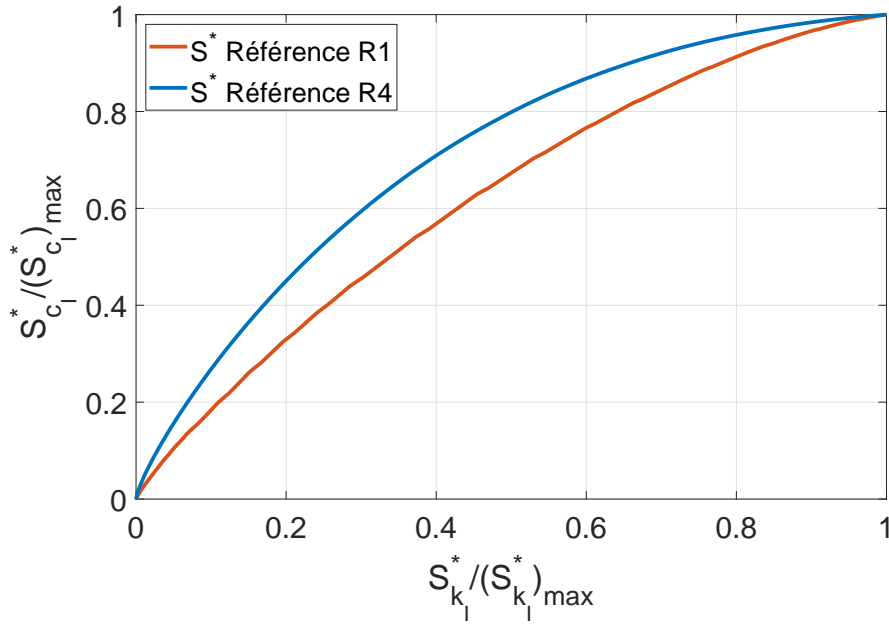


FIGURE 4.13 – Sensibilité de corrélation de la Référence R1 et R4

### 4.5.2 Résultats d'identification par la PSO

Dans cette étude, nous choisissons d'utiliser l'algorithme d'optimisation par essaim de particules (PSO), qui a pour avantage d'être simple (facile à programmer) et robuste (il permet de retrouver le minimum global dans un domaine où l'on peut avoir plusieurs minima locaux).

Cet algorithme est présenté dans le chapitre 2 et nous choisissons d'utiliser ici  $p = 20$  particules à chaque itération. Par ailleurs, le facteur d'inertie de chaque particule est égal à  $\chi = 0,7298$  et le facteur de restriction  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,46618$ .

On peut apprécier une série de captures de l'algorithme PSO sur la Figure 4.14.

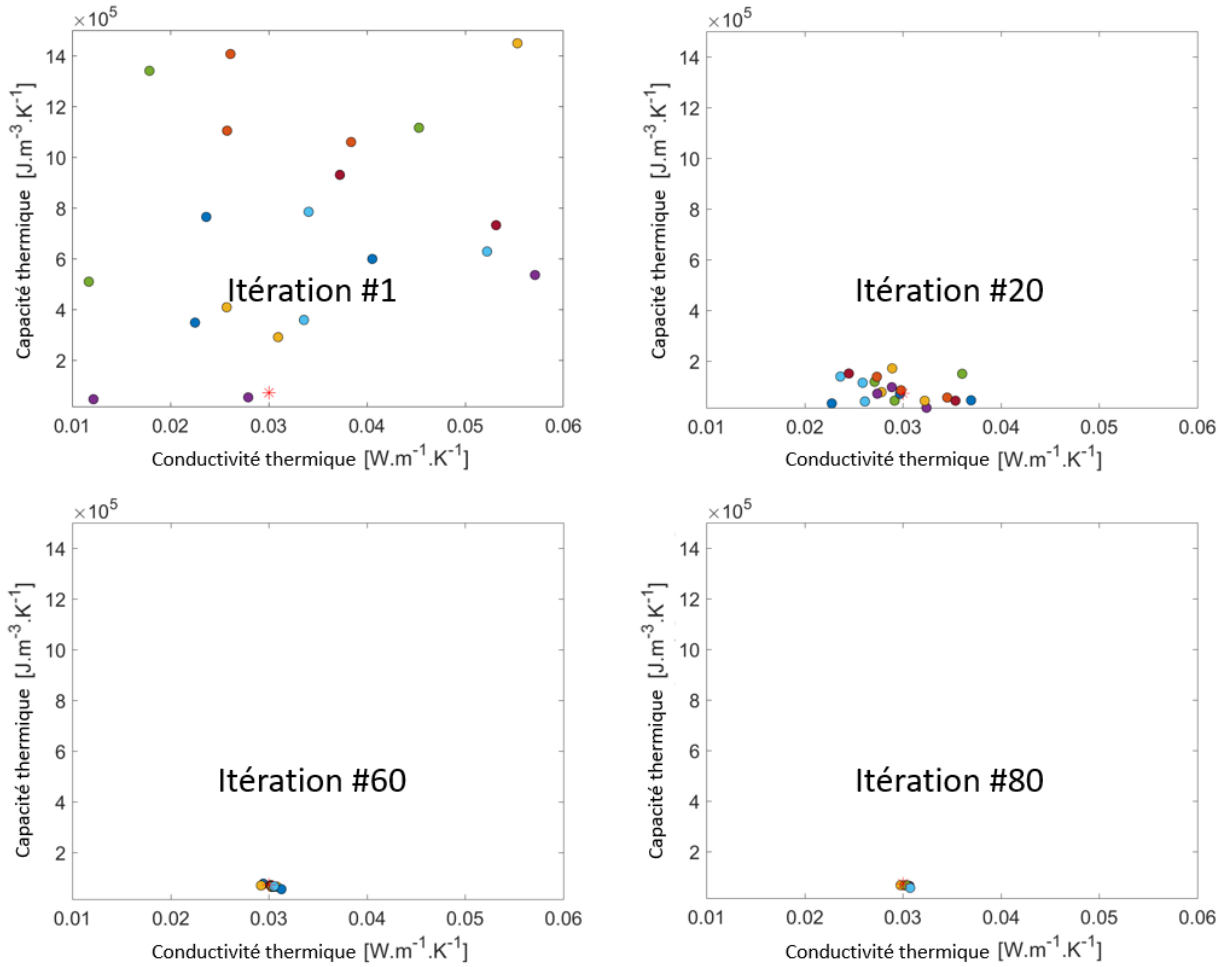


FIGURE 4.14 – Évolution de la position des particules pour l’algorithme du PSO

#### 4.5.2.1 Identification sans bruit de mesure

À partir de mesures virtuelles obtenues par des simulations numériques réalisées à l’aide d’un modèle complet (4.4), nous recherchons l’ensemble des caractéristiques thermiques de différents matériaux : d’une part, ceux qui ont été utilisés pour la construction du modèle réduit (Tableau 4.2) et, d’autre part, ceux qui sont couramment utilisés (Tableau 4.4).

Pour un paramètre  $\beta_i$  donné, nous définissons  $\sigma_{\beta_i}$  comme l’erreur relative de la valeur, et  $\sigma_{total}$  comme l’erreur quadratique entre la mesure et la température construite avec les paramètres identifiés :

$$\sigma_{\beta_i} [\%] = \frac{|\hat{\beta}_i - \beta_i|}{\beta_i} \times 100 \quad (4.22)$$

$$\sigma_{total} [^{\circ}C] = \sqrt{\frac{1}{N_t N_{mes}} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_{mes}} \left( Y_{ij} - \widehat{Y}_{ij}(\widehat{\beta}) \right)^2} \quad (4.23)$$

L'ensemble des résultats obtenus sans bruit de mesure est présenté dans le Tableau 4.6 (pour les références) et dans le Tableau 4.7 (pour les échantillons).

	$k_I$ [10 <sup>-2</sup> W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\widehat{k}_I$	$\sigma_{k_I}$ [%]	$c_I$ [10 <sup>4</sup> J.m <sup>-3</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\widehat{c}_I$	$\sigma_{c_I}$ [%]	$\sigma_{total}$ [ <sup>o</sup> C]	$t_{cpu}$ [s]
R1	1,000	1,000	0	1,500	1,500	0	0,020	5
R2	1,000	1,000	0	150,00	148,971	0,7	0,255	285
R3	6,000	5,942	1,0	1,500	1,500	0	0,017	8
R4	6,000	6,000	0	150,00	140,890	6,1	0,037	185

TABLE 4.6 – Identification sans bruit de mesure des références

	$k_I$ [10 <sup>-2</sup> W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\widehat{k}_I$	$\sigma_{k_I}$ [%]	$c_I$ [10 <sup>4</sup> J.m <sup>-3</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\widehat{c}_I$	$\sigma_{c_I}$ [%]	$\sigma_{total}$ [ <sup>o</sup> C]	$t_{cpu}$ [s]
E1	3,000	3,011	0,4	7,200	6,868	4,6	0,016	220
E2	4,100	4,121	0,5	11,500	10,830	5,8	0,011	189
E3	3,500	3,464	1,0	2,600	2,713	4,4	0,015	192
E4	2,800	2,775	0,9	2,200	2,295	4,3	0,018	204
E5	2,200	2,199	0,1	3,500	3,447	1,5	0,021	198

TABLE 4.7 – Identification sans bruit de mesure des échantillons

On note tout d'abord que l'erreur quadratique  $\sigma_{total}$  correspond à l'erreur trouvée entre le modèle réduit et le modèle complet : les valeurs obtenues sont donc optimales compte tenu de l'erreur liée à l'utilisation d'un modèle réduit imparfait.

Par ailleurs, cette erreur de modèle (et malgré des mesures parfaites sans bruit), se répercute différemment selon la sensibilité des mesures aux paramètres recherchés.

En ce qui concerne les matériaux de référence (R1 à R4), la précision des résultats est très satisfaisante puisque l'ensemble des paramètres identifiés présente une erreur négligeable, sauf pour la capacité ther-

mique de l'échantillon de référence *R4*, pour laquelle l'erreur est de l'ordre de 6%. Ce résultat particulier se justifie par la faible sensibilité observée précédemment dans la Figure 4.11.

Pour les isolants classiques (échantillons *E1* à *E5*), on constate que les erreurs d'identification sont globalement satisfaisantes. En termes de conductivité thermique, l'erreur d'identification reste inférieure à 1%, alors que l'erreur pour la capacité thermique atteint 6% au maximum. Là encore, la faible sensibilité de la mesure vis à vis de la capacité par rapport à celle vis à vis de la conductivité explique cette différence.

Pour tous les essais réalisés, les temps des estimations sont toujours inférieurs à 5 minutes. L'intérêt d'utiliser un modèle réduit dans le cadre de cette procédure itérative, qui nécessite un grand nombre de simulations, devient alors évident. À titre d'exemple, dans le cas de l'échantillon *E1*, il a fallu 200 itérations, et en tenant compte du fait que le nombre de particules utilisées dans chaque itération est égal à 20, cela conduit à 4000 simulations. En utilisant une simple extrapolation, une identification à l'aide d'un modèle complet aurait nécessité environ 20 heures de temps de calcul.

#### 4.5.2.2 Influence du bruit de mesure

Dans cette section, nous avons étudié l'échantillon *E1* pour lequel nous considérons un bruit gaussien d'écart-type  $\sigma_B = 0,05[^\circ\text{C}]$ . Afin de caractériser la dispersion des résultats liée à ce bruit, un grand nombre d'identifications est effectué ( $n_I = 300$ ) ce qui permet d'évaluer pour chaque grandeur identifiée  $\beta_i$  :

- la valeur moyenne définie par :

$$\bar{\beta}_i = \frac{1}{n_I} \sum_{j=1}^{n_I} \hat{\beta}_i^j \quad (4.24)$$

- l'écart-type caractérisé par la dispersion de l'estimation  $\hat{\beta}_i^j$  du paramètre  $\beta_i$  autour de l'espérance de l'estimateur :

$$std_{\beta_i} = \sqrt{\frac{1}{n_I} \sum_{j=1}^{n_I} (\hat{\beta}_i^j - \bar{\beta}_i)^2} \quad (4.25)$$

- l'erreur moyenne :

$$\bar{\sigma}_{\beta_i} = |\bar{\beta}_i - \beta_i| \quad (4.26)$$



- l'intervalle de confiance, qui correspond à l'erreur maximale effectuée sur une mesure avec une probabilité de 99,7% :

$$\sigma_{max} = \bar{\sigma}_{\beta_i} + 3 \text{std}_{\beta_i} \quad (4.27)$$

L'ensemble des résultats obtenus est présenté dans le Tableau 4.8, et représenté graphiquement pour chaque paramètre thermique sur les figures 4.15 et 4.16.

$\beta_i$	k [ $10^{-2}$ W.m $^{-1}$ .K $^{-1}$ ]	c [ $10^4$ J.m $^{-3}$ .K $^{-1}$ ]
$\bar{\beta}_i$	3,011	6,871
$\text{std}_{\beta_i}$	0,004	0,059
$\bar{\sigma}_{\beta_i}$	0,011	0,329
$\sigma_{max}$	0,023	0,506

TABLE 4.8 – Étude statistique avec bruit de mesure

Après le calcul, on note que chacune des 300 identifications a donné des résultats très satisfaisants. Par ailleurs, pour chaque paramètre, la valeur moyenne  $\bar{\beta}_i$  de ces identifications correspond aux valeurs obtenues sans bruit de mesure (voir Table 4.7). Ainsi, l'erreur moyenne  $\bar{\sigma}_{\beta_i}$  donne un aperçu de l'erreur entre le modèle complet et le modèle réduit. De plus, l'écart-type  $\text{std}_{\beta_i}$  reste tout à fait acceptable par rapport à la valeur réelle  $\beta_i$ . L'intervalle de confiance maximum  $\sigma_{max}$ , choisi volontairement large, correspond respectivement à 0,8% pour la conductivité thermique et à 7% pour la capacité calorifique.

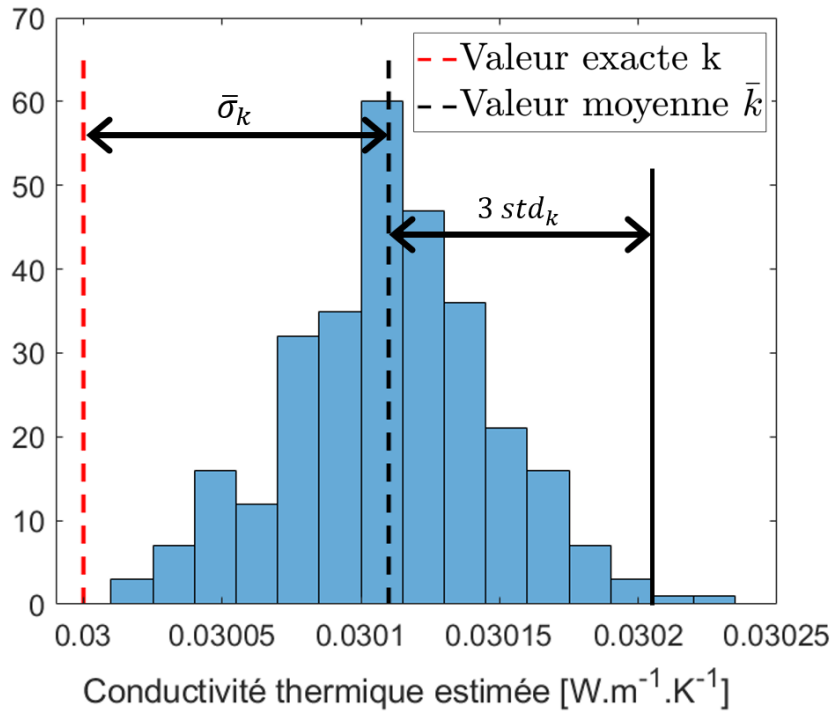


FIGURE 4.15 – Identification de  $k$  pour un  $\sigma_B = 0,05^\circ C$

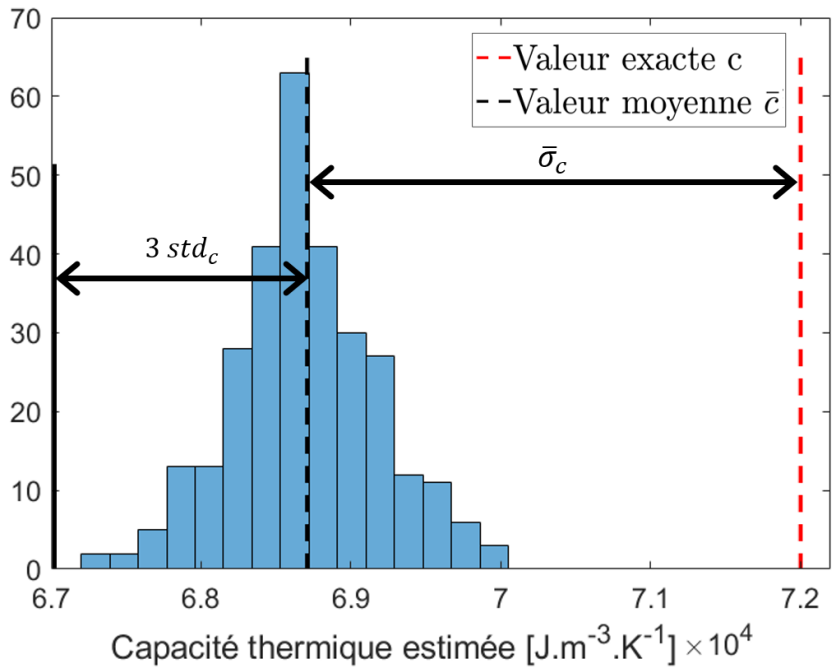


FIGURE 4.16 – Identification de  $c$  pour un  $\sigma_B = 0,05^\circ C$

Il est possible d'obtenir théoriquement des valeurs d'écart-type sans effectuer les 300 estimations. Cela dépend des sensibilités des mesures en chaque point  $M_1$  et  $M_2$ , par rapport aux paramètres à identifier  $k_I$  et  $c_I$ , regroupés sous la forme d'une matrice de sensibilité :

$$\mathbf{S} = \left[ \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \beta_i} \right] \quad (4.28)$$

Pour quantifier la qualité de la procédure d'estimation, on peut calculer la matrice de variance-covariance déduite par :

$$\mathbf{cov}(\hat{\beta}) = \sigma_B^2 \left( \mathbf{S}^T \mathbf{S} \right)^{-1} \quad (4.29)$$

Cette matrice de covariance comporte des éléments diagonaux qui permettent de se rapprocher de l'écart-type théorique :

$$std_{\beta_i} \approx \sqrt{cov(i, i)} \quad (4.30)$$

Dans le cas de l'échantillon  $E1$ , nous avons obtenu :

Échantillon	$std_k [10^{-2} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$	$std_c [10^4 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}]$
E1	0,004	0,050

Ces résultats sont comparés à ceux obtenus à partir des 300 estimations figurant au Tableau 4.8. En ce qui concerne la conductivité thermique, l'approximation est précise. En ce qui concerne la capacité calorifique, il y a une différence de 20% entre les deux écarts-types. Mais quelle que soit cette valeur, cet écart  $std_c$  reste plus petit par rapport à la valeur réelle de la capacité thermique  $c$ .

Cette technique est appliquée pour approximer l'intervalle de confiance max  $\sigma_{max}$  (4.27), puisque la valeur moyenne  $\bar{\sigma}_{\beta_i}$  correspond à la valeur sans bruit (voir Tableau 4.7). Le Tableau 4.9 regroupe ces estimations pour l'ensemble des échantillons pour deux bruits différents.

Échantillon	Conductivité : $\sigma_{max_k}$ [%]		Capacité : $\sigma_{max_c}$ [%]	
	$\sigma_B = 0,05[^\circ C]$	$\sigma_B = 0,1[^\circ C]$	$\sigma_B = 0,05[^\circ C]$	$\sigma_B = 0,1[^\circ C]$
E1	0,70	1,06	6,66	8,73
E2	0,96	1,44	8,70	11,31
E3	1,43	1,71	6,41	8,58
E4	1,32	1,57	5,98	7,87
E5	0,72	0,99	3,12	4,81

TABLE 4.9 – Estimations de l'intervalle de confiance  $\sigma_{max}$  pour différents bruits de mesure  $\sigma_B$ 

Les résultats globaux de ces estimations sont satisfaisants. Comme indiqué précédemment, l'estimation de la capacité thermique est moins précise que celle de la conductivité. De plus, un bruit de mesure avec un écart type  $\sigma_B$  plus important entraîne une légère augmentation de l'intervalle de confiance  $\sigma_{max}$ .

Une seule estimation est effectuée pour chaque échantillon en considérant chacun des deux bruits de mesure. Le Tableau 4.10 présente les résultats obtenus, qui restent dans l'intervalle de confiance obtenu dans le Tableau 4.8.

Échantillon	Conductivité : $\sigma_k$ [%]		Capacité : $\sigma_c$ [%]	
	$\sigma_B = 0,05[^\circ C]$	$\sigma_B = 0,1[^\circ C]$	$\sigma_B = 0,05[^\circ C]$	$\sigma_B = 0,1[^\circ C]$
E1	0,33	0,10	4,30	1,87
E2	0,40	0,78	5,38	7,28
E3	1,04	1,25	4,23	6,25
E4	0,91	0,64	4,47	2,17
E5	0,06	0,06	1,36	2,03

TABLE 4.10 – Une seule identification pour différents bruits de mesure  $\sigma_B$ 

### 4.5.3 Identification par méthode de descente

Une comparaison des techniques d'identification est effectuée en réalisant le même travail que précédemment avec une méthode de descente dans laquelle le gradient de la température vis à vis de chaque

paramètre recherché permet l'estimation des paramètres pour l'itération suivante du processus d'identification. On choisit ici d'utiliser la technique de la région de confiance, présenté au chapitre 2, utilisable directement via la fonction *lsqcurvefit* sous MATLAB. Il est important de noter que cet outil utilise un solveur MATLAB pour la résolution du modèle réduit direct utilisé dans la procédure qui est différent de celui utilisé dans la procédure de PSO (programmé en C++).

L'ensemble des résultats sans bruit de mesure est présenté dans le Tableau 4.11.

	$k_I$	$\hat{k}_I$	$\sigma_{k_I}$	$c_I$	$\hat{c}_I$	$\sigma_{c_I}$	$\sigma_{total}$	$t_{cpu}$
	[ $10^{-2}$ W.m $^{-1}$ .K $^{-1}$ ]		[%]	[ $10^4$ J.m $^{-3}$ .K $^{-1}$ ]		[%]	[°C]	[s]
E1	3,000	3,000	0	7,200	6,961	3,3	0,033	4
E2	4,100	4,110	0,2	11,500	10,964	4,7	0,027	3
E3	3,500	3,460	1,1	2,600	2,731	5,0	0,034	3
E4	2,800	2,770	1,1	2,200	2,321	5,5	0,038	7
E5	2,200	2,190	0,4	3,500	3,512	0,3	0,041	7

TABLE 4.11 – Identification des échantillons sans bruit de mesure

	$k_I$	$\hat{k}_I$	$\sigma_{k_I}$	$c_I$	$\hat{c}_I$	$\sigma_{c_I}$	$\sigma_{total}$	$t_{cpu}$
	[ $10^{-2}$ W.m $^{-1}$ .K $^{-1}$ ]		[%]	[ $10^4$ J.m $^{-3}$ .K $^{-1}$ ]		[%]	[°C]	[s]
E1	3,000	3,000	0	7,200	6,985	3,0	0,063	4
E2	4,100	4,100	0,2	11,500	11,015	4,2	0,056	5
E3	3,500	3,460	1,1	2,600	2,727	4,9	0,061	5
E4	2,800	2,770	1,1	2,200	2,324	5,6	0,063	10
E5	2,200	2,190	0,4	3,500	3,517	0,5	0,064	10

TABLE 4.12 – Identification des échantillons avec un bruit d'écart type  $\sigma_B = 0,05$  [°C]

	$k_I$ [ $10^{-2}$ W.m $^{-1}$ .K $^{-1}$ ]	$\hat{k}_I$	$\sigma_{k_I}$ [%]	$c_I$ [ $10^4$ J.m $^{-3}$ .K $^{-1}$ ]	$\hat{c}_I$	$\sigma_{c_I}$ [%]	$\sigma_{total}$ [°C]	$t_{cpu}$ [s]
E1	3,000	2,990	0,3	7,200	7,162	0,5	0,106	5
E2	4,100	4,120	0,2	11,500	10,793	6,1	0,100	4
E3	3,500	3,465	1,4	2,600	2,788	7,2	0,113	5
E4	2,800	2,770	1,1	2,200	2,272	3,3	0,106	10
E5	2,200	2,190	0,4	3,500	3,494	0,2	0,107	10

TABLE 4.13 – Identification par gradient avec un bruit de mesure  $\sigma_B = 0,10$  [°C] des échantillons

On retrouve ainsi des précisions identiques à celles obtenues avec la PSO : la convergence des deux algorithmes est ainsi confirmée, et les écarts d'identification ne sont ici dûs qu'aux erreurs liées à l'utilisation du modèle réduit associé à une sensibilité plus ou moins importante selon le paramètre recherché et le matériau considéré.

On remarque par contre que les temps de calculs sont très différents : la méthode de descente est plus rapide ( $t_{cpu} < 10[s]$ ), devant le  $t_{cpu}$  maximum obtenu par la méthode de PSO avec un  $t_{cpu}$  maximum de 220[s] pour les échantillons (voir Tableau 4.7). Indépendamment du fait que les deux techniques sont utilisées via des langages différents (C++ et Matlab), cette forte différence s'explique d'une part par le fait que la technique de descente converge bien plus rapidement que la méthode PSO, et que d'autre part, à chaque itération, le nombre d'appels à la simulation est très différent : la méthode de descente appelle une seule fois le modèle réduit, alors que la PSO nécessite  $p = 20$ .

Ainsi, bien qu'aucun élément ne permette de justifier la convergence de l'algorithme, l'ensemble des essais effectués montre que le problème de caractérisation est bien caractérisé par un seul minimum dans le domaine recherché.

#### 4.5.4 Influence de la résistance de contact thermique

Jusqu'à présent, toute l'étude a considéré que lors de l'insertion de la sonde rigide dans le matériau tendre que constitue l'isolant, le forçage du passage n'entraînait pas de modification de structure de nature à créer un contact imparfait entre les deux solides. Or dans la littérature, de nombreux auteurs font

référence à l'existence d'un contact imparfait entre la sonde et le matériau, modélisé par une résistance de contact thermique. Dans notre configuration on peut en effet imaginer que la réalisation d'un pré-perçage avant introduction de la sonde crée effectivement un contact imparfait. L'objectif est ici de voir comment modéliser ce contact imparfait et d'estimer son influence sur la caractérisation thermique des isolants.

#### 4.5.4.1 Rappel du modèle de la résistance thermique de contact

La résistance thermique de contact se définit à partir de deux milieux mis en contact, pour lesquels l'état de surface est imparfait (Figure 4.17 - extrait de la thèse de Somé [130]).

De part et d'autre de ce contact, une zone est alors thermiquement perturbée, puisque le transfert de chaleur du solide 1 vers le solide 2 via la frontière s'effectue :

- À travers les milieux solides directement en contact au niveau de surfaces communes de faibles aires, que entraîne l'apparition d'un phénomène de constriction des lignes de flux,
- À travers l'air présent dans les interstices, dans lesquels l'échange thermique s'effectue essentiellement par conduction (pas de mouvement du fluide compte tenu des faibles dimensions des cavités, rayonnement négligeable hors hautes températures).

Lorsque la zone perturbée est de faible dimension devant la taille des deux solides, le comportement thermique est modélisé par un saut de température  $|T_1^o - T_2^o|$  à l'interface entre les deux solides (comme présenté sur la Figure 4.17), caractérisé par une résistance de contact  $RTC [m^2.K.W^{-1}]$  telle que :

$$\varphi = \frac{T_1^o - T_2^o}{RTC} [W.m^{-2}] \quad (4.31)$$

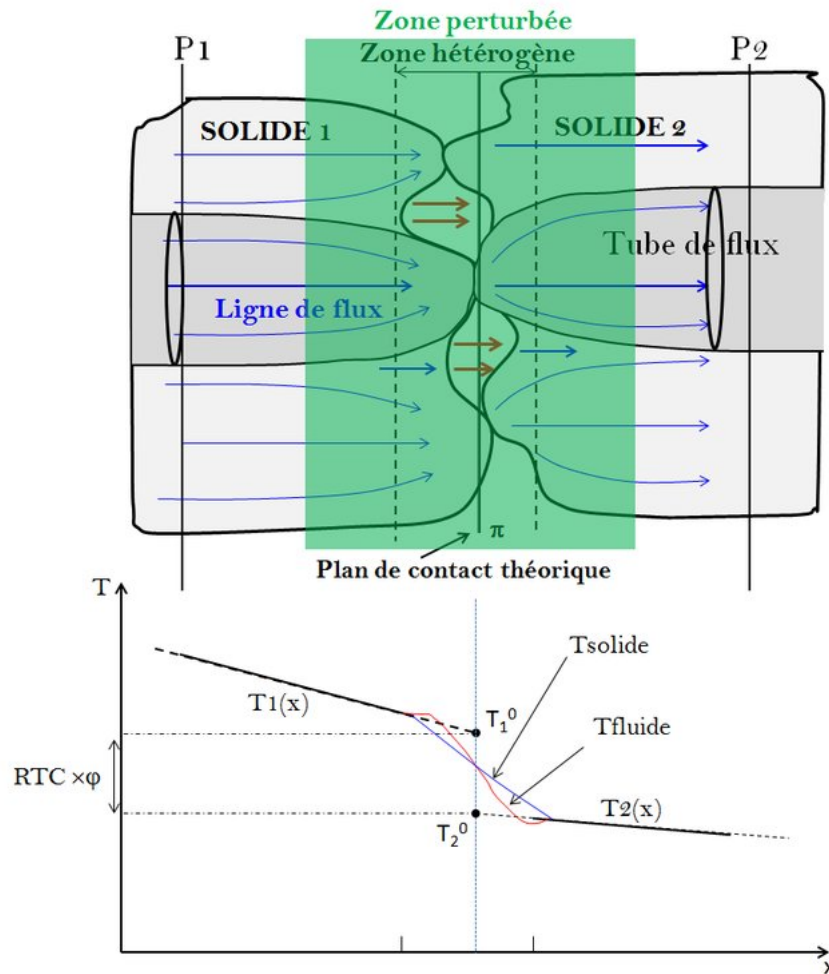


FIGURE 4.17 – Représentation d'une résistance de contact

De nombreuses études de RTC ont concerné les matériaux métalliques conducteurs avec des approches analytiques, en considérant soit des géométries de contact simples et uniformément distribuées [131], soit le traitement statique des données profilométriques [132], soit une approche fractale [133]. Dans le cadre de la sonde à choc de type aiguille, Bording *et al.* [44] analysent l'influence de la RTC sur un très large spectre. Ils montrent de plus que la RTC a peu d'influence sur la détermination de la conductivité  $k$  mais conduit à des erreurs sur la capacité  $c$ . Deux autres auteurs ont donné des valeurs de RTC en fonction du matériau dans lequel la sonde est implantée : Wenlong *et al.* [38] affichent une  $RTC \approx 10^{-3} [m^2.K.W^{-1}]$  pour les céramiques. Goodhew *et al.* [37] proposent des valeurs de  $RTC = 5.10^{-3} [m^2.K.W^{-1}]$  dans la paille d'argile et  $RTC = 2.10^{-3} [m^2.K.W^{-1}]$  dans l'Agar. Ces auteurs ne précisent pas la procédure d'implantation de la



sonde dans le matériau (avec ou sans pré-perçage avant l'introduction de la sonde). Assez fréquemment, cette résistance est également représentée sous forme d'épaisseur d'air  $e$  équivalente telle que  $RTC = e/k_{air}$ . L'Annexe B présente en détail le lien entre la représentation géométrique d'une résistance de contact par rapport à une lame d'air qui entoure la sonde et qui s'écrit :

$$RTC = \frac{D}{2} \ln\left(\frac{D+2e}{D}\right) \left(\frac{1}{k_{air}} - \frac{1}{k_I}\right) \quad (4.32)$$

#### 4.5.4.2 Sensibilité de la RTC

Afin d'évaluer la capacité d'identification des paramètres thermiques, on étudie la sensibilité réduite de chacun. La Figure 4.18 présente l'évolution de la sensibilité réduite en fonction du temps de simulation pour  $k_I$ ,  $c_I$  et la RTC de l'échantillon E2.

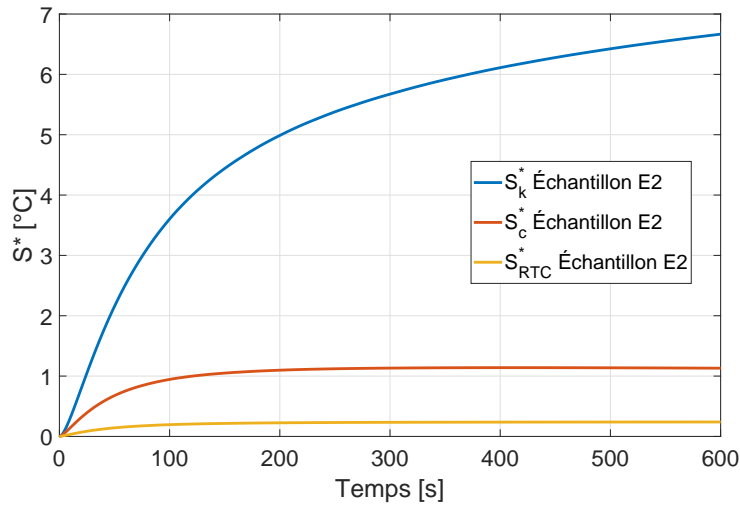


FIGURE 4.18 – Comparaison des sensibilités pour l'échantillon E2

On note que le paramètre le plus sensible est la conductivité thermique allant jusqu'à 7 [°C]. Ensuite, c'est la capacité thermique, avec une valeur maximale de 1,2 [°C]. Et enfin, la RTC, qui présente une valeur très faible de sensibilité réduite devant les autres deux paramètres avec 0,3 [°C]. On peut déjà avoir une idée préliminaire du comportement à attendre lors de l'identification au niveau de précision. Il ne serait pas surprenant de rencontrer les erreurs plus significatives sur la capacité thermique, et encore plus sur la résistance de contact RTC.

#### 4.5.4.3 Identification de la conductivité et la capacité thermique avec une mesure prenant en compte une RTC

L'utilisation d'un modèle numérique qui prend en compte une résistance de contact entre la sonde et le matériau isolant permet d'obtenir de nouvelles mesures virtuelles à partir desquelles le processus d'identification se fait avec le modèle MRR. Ce processus est réalisé sans bruit de mesure pour l'échantillon *E2* (le plus conducteur) et pour une variété de valeurs de RTC. Le Tableau 4.14 présente les erreurs d'identification des deux paramètres  $k_I$  et  $c_I$  pour chaque valeur de RTC étudiée. Le tableau spécifie la correspondance en termes d'épaisseur équivalente de la lame d'air autour de la sonde, en tenant compte à la fois de la géométrie circulaire de la sonde et de sa très petite taille (cf. équation (4.32)).

$RTC [10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}]$	$e [\text{mm}]$	$\hat{k}_I [10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$	$\sigma_{k_I} [\%]$	$\hat{c}_I [10^4 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}]$	$\sigma_{c_I} [\%]$
0	0	4,121	0,5	10,830	5,8
0,25	0,015	4,131	0,8	10,446	9,2
0,50	0,03	4,126	0,6	10,145	11,8
1,00	0,03	4,116	0,4	9,578	16,7
1,64	0,10	4,103	0,1	8,908	22,5
5,0	0,34	4,012	2,1	6,327	44,9

TABLE 4.14 – Influence de la RTC sur la précision de l'identification sur l'échantillon *E2*

Nous pouvons donc constater que nous retrouvons les tendances présentées dans les études précédentes [44] : D'une part, la valeur de la conductivité thermique identifiée reste satisfaisante quelle que soit la qualité du contact entre la sonde et la lame d'air. Seule une forte résistance ( $RTC = 5 [10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}]$ ) qui correspond à un pré-perçage d'un diamètre significativement plus grand que la sonde, conduit à une erreur de 2 [%], du même ordre de grandeur que l'erreur liée au bruit de mesure<sup>2</sup>.

D'autre part, les résultats obtenus montrent une très forte sensibilité de la capacité thermique à la qualité du contact entre la sonde et le matériau. La difficulté à gérer ce paramètre dégrade fortement la qualité de l'identification de cette capacité, qui dépend déjà de manière significative du bruit de mesure<sup>3</sup>.

2. Selon le Tableau 4.9, un bruit gaussien d'écart type 0,1 [°C] conduit à une erreur d'identification de 1,44% pour *E2*.

3. Le Tableau 4.9 montre qu'un bruit gaussien d'écart type  $\sigma_B = 0,1 [^\circ\text{C}]$  entraîne une erreur d'identification d'environ 11% pour *E2*.

	$k_I$ [ $10^{-2}$ W.m $^{-1}$ .K $^{-1}$ ]	$\sigma_{k_I}$ [%]	$c_I$ [ $10^4$ J.m $^{-3}$ .K $^{-1}$ ]	$\sigma_{c_I}$ [%]
E1	3,000	0,2	7,200	17,8
E2	4,100	0,1	11,500	22,5
E3	3,500	1,8	2,600	9,1
E4	2,800	1,1	2,200	9,3
E5	2,200	0,3	3,500	13,8

TABLE 4.15 – Identification avec une RTC sans bruit de mesure

L'utilisation d'une RTC = 1,64 [ $10^{-3}$  m $^2$ .K.W $^{-1}$ ] sur tous les isolants (Tableau 4.15) confirme cette analyse.

Cette étude met en évidence la nécessité de procéder à une caractérisation d'un contact imparfait entre la sonde et le matériau. Dans ce cas, le modèle réduit doit alors être adapté pour prendre en compte la RTC estimée.

## 4.6 Conclusion

Cette étude évalue la possibilité de tirer parti des progrès récents dans la réduction des modèles thermiques pour étendre l'utilisation de sondes de caractérisation thermique sur site, comme le type à fil chaud. Nous voulions pouvoir les utiliser, d'une part sur des matériaux isolants, qui jusqu'à présent étaient difficiles à caractériser par ce type de sondes, et d'autre part pour effectuer une détermination complète des propriétés thermiques, y compris la capacité calorifique.

Ce chapitre a montré la nécessité d'utiliser un modèle numérique de grande taille, afin de pouvoir réaliser une simulation précise prenant en compte l'intégralité des phénomènes thermiques avec la géométrie complexe de la sonde. Compte tenu de la difficulté d'utiliser ce modèle dans un processus itératif d'identification, une solution est un modèle réduit, à condition que ce dernier puisse être indépendant des propriétés intrinsèques du modèle que l'on veut identifier.

Cette étude a analysé des modèles réduits modaux du type AROMM. La construction du modèle réduit a été optimisée à partir de cas de référence définissant une large gamme de matériaux isolants ayant une

conductivité thermique variant de 1 à 6 [ $10^{-2} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ] et, une capacité thermique allant de 1,5 à 150 [ $10^4 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ]. Des tests de simulation directe pour différents matériaux avec un modèle réduit unique ont montré une réduction significative du temps de calcul (250 fois) avec une erreur maximale aux points de mesure inférieure à 0,08 [ $^{\circ}\text{C}$ ]. Par conséquent, le modèle réduit amène à des résultats précis, tout en évitant un temps de calcul prohibitif pour un processus d'identification. Afin d'estimer l'influence du modèle réduit dans le cadre de la procédure inverse, les premiers tests ont été effectués avec des mesures virtuelles obtenues à partir d'un modèle complet par éléments finis en l'absence de bruit. Les résultats ont été très satisfaisants, même s'il est apparu que la faible sensibilité des températures mesurées par rapport à la capacité calorifique générerait une erreur atteignant 6%.

Une étude statistique a permis :

- une estimation de l'intervalle de confiance pour une mesure,
- de s'affranchir totalement de l'influence d'un bruit de mesure blanc pour un nombre suffisant d'identifications<sup>4</sup>.

Enfin, l'éventualité d'un contact imparfait entre la sonde et le matériau isolant a été abordée en utilisant des mesures virtuelles de température prenant en compte la résistance thermique de contact associée. Il a été constaté la possibilité d'identifier correctement la conductivité (2% d'erreur dans le cas le plus défavorable). Par contre, on note la difficulté d'obtenir une valeur précise de la capacité. Des recherches supplémentaires seront nécessaires pour évaluer cette résistance thermique, soit en analysant l'état du matériau isolant autour de la sonde, ou en identifiant la résistance elle-même. La question se pose alors de savoir comment traiter un contact imparfait dans le modèle réduit.

Quoi qu'il en soit, cette étude a montré la force des modèles réduits pour simuler des phénomènes thermiques complexes, en se rapprochant à la réalité.

---

4. Notons que les modèles réduits rendent possible de nombreux essais, qui pourraient s'effectuer en continu dans une configuration réelle de mesure in-situ.

## Chapitre 5

# Caractérisation des isolants isotropes : application d'une sonde identifiée semi-homogène 3D

### 5.1 Principe d'un modèle semi-homogène

#### 5.1.1 Objectifs

Le chapitre précédent a permis de valider le principe de la technique développée, à savoir que l'utilisation du modèle réduit modal permet l'implantation d'une modélisation complexe tridimensionnelle dans un processus d'identification rapide. Cette technique a ainsi été validée numériquement dans le cadre de l'identification in situ des caractéristiques thermiques d'isolant au moyen d'une sonde de type aiguille. Cependant cette technique s'accompagne de conditions qui peuvent s'avérer contraignantes :

- d'une part, elle s'appuie sur une description numérique qui doit parfaitement correspondre à la réalité de la sonde, en termes de propriétés des différents constituants, et de leur positionnement les uns par rapport aux autres. Tout ceci n'est pas toujours simple à obtenir. Même si dans le cas de la sonde étudiée construite en laboratoire, l'ajustement des différents éléments était précis (voir

Figure 4.2 au chapitre 4), ce n'est pas toujours le cas pour des sondes industrielles<sup>1</sup>. Par ailleurs, leurs propriétés sont en général issues de la littérature et peuvent ne pas correspondre tout à fait à leurs valeurs réelles.

- Un second point mis en avant dans le chapitre précédent a été l'importance du contact imparfait entre la sonde et l'isolant sur l'identification de la capacité thermique de l'isolant. Même s'il est possible de construire des modèles réduits qui prennent en compte un tel contact imparfait via un modèle de résistance thermique de contact<sup>2</sup>, la véritable difficulté réside dans la méconnaissance de la valeur de cette RTC. En effet, les études de sensibilités précédentes ont bien montré qu'un processus d'identification de l'ensemble des paramètres ( $k_I$ ,  $c_I$  et RTC) semble difficile. Il faut bien admettre qu'il existe une limite sur les connaissances liées à l'importance ou non de cette RTC.

Face à ces difficultés, l'idée est alors d'identifier la sonde qui intègre toutes ces incertitudes en moyennant un certain nombre d'hypothèses.

Compte tenu du très faible diamètre de la sonde devant sa longueur, on considère un modèle de sonde homogène, c'est-à-dire constitué d'un unique constituant, caractérisé par une conductivité  $k_S$  et une capacité  $c_S$ . De plus, en cas d'existence de résistance thermique de contact, celle-ci sera alors intégrée dans la détermination de ces deux paramètres. Ce modèle permet ainsi de limiter le nombre de paramètres à identifier, tout en s'adaptant aux valeurs exactes de chaque constituant de la sonde.

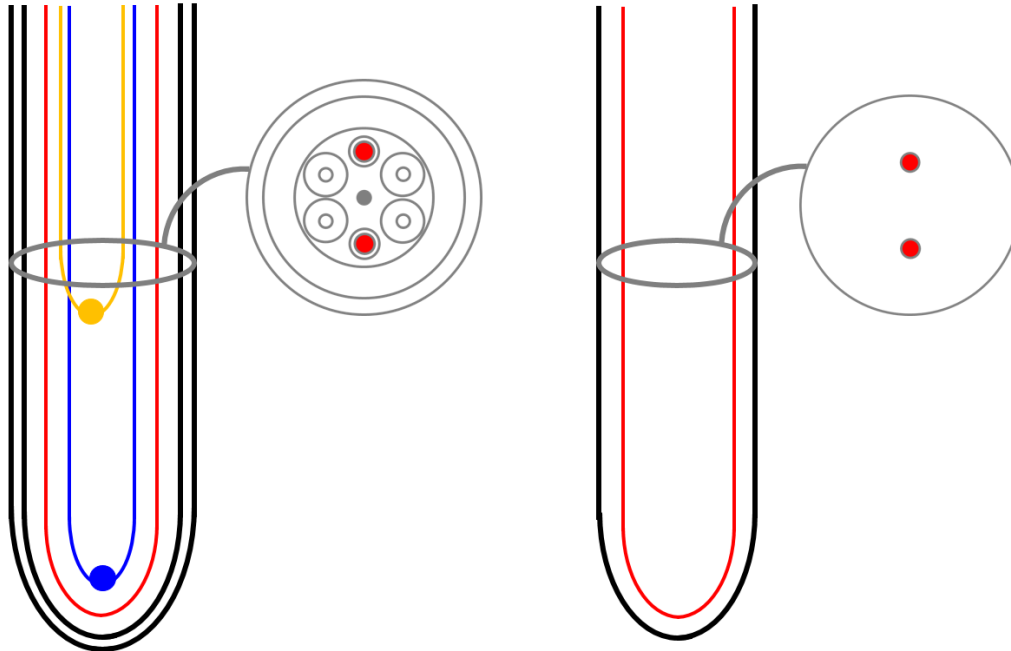
Suite aux observations obtenues lors de l'étude numérique du modèle précis hétérogène (Figure 4.2 et 4.3), on considérera que seule l'empreinte du câble chauffant  $\Omega_{HW}$  fera l'objet d'une dissipation de source électrique.

La Figure 5.1 présente les deux types de sondes, chacun avec une vue en coupe qui schématise la géométrie utilisée.

---

1. Des premiers tests avec la sonde TP02 de la marque Hukseflux<sup>®</sup> avaient été réalisés, et avaient montré la difficulté à obtenir des renseignements précis sur la constitution de la sonde.

2. Ce type de modèle réduit s'accompagne d'une technique de sous-structuration, dans laquelle chaque domaine séparé par la RTC fait l'objet d'un modèle réduit propre. La difficulté se reporte alors sur le couplage entre ces deux modèles réduits, qui a fait l'objet d'études récentes [122].



a : Sonde réelle hétérogène numérique    b : Sonde modélisée homogène

FIGURE 5.1 – Différents types de sondes

### 5.1.2 Mise en équation

La réalité dans toute sa complexité reste définie (dans un premier temps en l'absence de RTC) par l'équation (4.3) du chapitre précédent qui correspond au modèle complet réel MCR.

Dans le cas du modèle simplifié étudié ici, les caractéristiques thermiques uniques de la sonde homogène ( $k_S$  et  $c_S$ ) peuvent apparaître explicitement : ce modèle est appelé le Modèle Complet Simplifié MCS :

$$\begin{aligned}
 c_I \int_{\Omega_I} \frac{dT}{dt} g d\Omega + c_S \int_{\Omega_S} \frac{dT}{dt} g d\Omega = & -k_I \int_{\Omega_I} \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} g d\Omega - k_S \int_{\Omega_S} \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} g d\Omega \\
 & - \int_{\Gamma_h} hT g d\Gamma + \int_{\Omega_{HW}} \pi g d\Omega
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Sous forme discrète, il s'écrit alors en respectant l'ordre des termes de l'équation (5.1) :

$$(c_I \mathbf{C}_I + c_S \mathbf{C}_S) \dot{\mathbf{T}} = (k_I \mathbf{K}_I + k_S \mathbf{K}_S + \mathbf{H}) \mathbf{T} + \mathbf{U} \tag{5.2}$$

Comme dans l'étude précédente, ce modèle complet sera alors réduit par projection sur une base réduite  $\tilde{\mathbf{V}}_i$  (4.18). L'homogénéité de la sonde amène cette fois :

$$\begin{aligned}
\forall j \in \mathbb{N}, \quad & \sum_{i=1}^n \left( c_I \int_{\Omega_I} \tilde{V}_j \tilde{V}_i d\Omega + c_S \int_{\Omega_S} \tilde{V}_j \tilde{V}_i d\Omega \right) \frac{d\tilde{x}_i}{dt} \\
& = \sum_{i=1}^n \left( k_I \int_{\Omega_I} \vec{\nabla} \tilde{V}_j \cdot \vec{\nabla} \tilde{V}_i d\Omega + k_S \int_{\Omega_S} \vec{\nabla} \tilde{V}_j \cdot \vec{\nabla} \tilde{V}_i d\Omega + \int_{\Gamma_h} \tilde{V}_j h \tilde{V}_i d\Gamma \right) \tilde{x}_i + \int_{\Omega_{HW}} \tilde{V}_j \pi d\Omega
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Sous forme discrète en respectant l'ordre des termes de l'équation précédente, on arrive ainsi d'une manière équivalente à l'équation (4.20) :

$$(c_I \mathbf{L}_I + c_S \mathbf{L}_S) \ddot{\tilde{\mathbf{X}}} = (k_I \mathbf{M}_I + k_S \mathbf{M}_S + \mathbf{H}) \ddot{\tilde{\mathbf{X}}} + \mathbf{N} \tag{5.4}$$

Ce modèle est appelé le Modèle Réduit Simplifié MRS.

### 5.1.3 Processus

Cette fois, dans le processus d'identification des caractéristiques d'un isolant par la sonde à fil chaud :

- La mesure s'obtient toujours avec la réalité simulée soit le Modèle Complet Réel MCR.
- Le modèle utilisé est le Modèle Réduit Simplifié MRS dans lequel les paramètres  $k_S$  et  $c_S$  doivent permettre d'approcher le modèle à la réalité (variation des paramètres de la sonde + RTC).

Avant ce processus on voit ainsi apparaître deux étapes préliminaires :

1. La création du modèle réduit MRS.
2. L'identification des paramètres  $k_S$  et  $c_S$  dans ce modèle de la sonde à partir de campagne d'identification sur des matériaux isolants connus.

## 5.2 Modèle réduit MRS

La construction du modèle réduit suit les mêmes principes que ceux décrits dans le chapitre 4, c'est-à-dire la construction de la base complète de Branche générique  $V_i$ , qui fait alors l'objet d'une réduction pour donner accès à une base comportant un faible nombre  $n$  de modes  $\tilde{V}_i$ .



### 5.2.1 Base complète de Branche

Comme précédemment cette base s'obtient à partir de la description discrétisée de la géométrie utilisée, qui est donc ici le modèle complet simplifié MCS (5.2). Le problème aux valeurs propres associé s'écrit maintenant (en parallèle avec l'équation (4.8)) :

$$\begin{aligned}
 -k_I \int_{\Omega_I} \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{\nabla} f \, d\Omega - k_S \int_{\Omega_S} \vec{\nabla} V_i \cdot \vec{\nabla} f \, d\Omega = \\
 z_i \left( c_I \int_{\Omega_I} V_i f \, d\Omega + c_S \int_{\Omega_S} V_i f \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} \zeta V_i f \, d\Gamma_h \right)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

soit sous forme discrète :

$$(k_I \mathbf{K}_I + k_S \mathbf{K}_S) V_i = z_i (c_I \mathbf{C}_I + c_S \mathbf{C}_S + C_\zeta) V_i \tag{5.6}$$

Le choix des différents paramètres est alors :

— Pour l'isolant, on utilise les mêmes valeurs que celles choisies lors du chapitre 4, soit :

$$k_{I_0} = 0,01 \text{ [W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}\text{]}, \quad c_{I_0} = 1 \times 10^4 \text{ [J.m}^{-3}\text{.K}^{-1}\text{]}$$

— Pour la sonde, le choix des paramètres n'est pas simple à estimer compte tenu des fortes différences des caractéristiques thermiques des constituants de la sonde (Tableau 4.1).

- Pour la capacité, un ordre de grandeur peut être obtenu à partir du calcul des valeurs moyennes des données issues de la littérature (Tableau 4.1) :

$$c_S = \frac{1}{V_{\Omega_S}} \int_{\Omega_S} c \, d\Omega = 1,8 \times 10^6 \text{ [J.m}^{-3}\text{.K}^{-1}\text{]} \tag{5.7}$$

- Pour la conductivité, il est extrêmement difficile de prévoir une estimation. On utilise ici une valeur arbitraire comprise entre les valeurs extrêmes des différentes conductivités thermiques des constituants de la sonde :

$$k_S = 0,4 \text{ [W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}\text{]} \tag{5.8}$$

— Enfin, le nombre de Steklov est comme précédemment (3.43) calculé en fonction des valeurs des capacités par la relation :

$$\zeta = \frac{c_I V_{\Omega_I} + c_s V_{\Omega_S}}{S_{\Gamma_h}} = 3528 \text{ [J.m}^{-2}\text{.K}^{-1}\text{]} \quad (5.9)$$

On calcule l'ensemble des  $N$  modes de la base, et là encore, on peut vérifier pour différentes valeurs de  $k_I$ ,  $c_I$ ,  $k_S$  et  $c_S$ , que l'utilisation de cette base complète permet la reconstruction exacte des champs de température correspondant au modèle complet simplifié MCS (5.2), soit :

$$T = \sum_{i=1}^N x_i V_i \quad (5.10)$$

## 5.2.2 Base réduite

La création de la base réduite à partir de la technique d'Amalgame nécessite un certain nombre de champs de températures de référence, sur lesquels s'appuie la procédure.

Ces champs de température sont ainsi construits par le modèle numérique complet simplifié MCS pour lequel il est nécessaire de choisir les différentes valeurs inconnues, cette fois pour l'isolant et pour la sonde.

En ce qui concerne les caractéristiques  $k_I$  et  $c_I$ , on connaît cette fois les isolants qui serviront à caractériser la sonde<sup>3</sup>, ce sont donc ceux-ci qui sont utilisés dans la simulation complète. On reprend (Tableau 5.1) ainsi trois des matériaux réels testés dans le chapitre 4.

No. cas de référence	$k_I$ [ $10^{-2}$ W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$c_I$ [ $10^4$ J.m <sup>-3</sup> .K <sup>-1</sup> ]
E2	4,1	11,5
E4	2,8	2,2
E5	2,2	3,5

TABLE 5.1 – Propriétés thermiques des isolants connus

En ce qui concerne le choix des propriétés de la sonde (qui n'est pas connue), nous avons vu précédemment qu'il était très difficile d'avoir une idée du domaine possible des valeurs des caractéristiques<sup>4</sup>.

3. Lors de l'étude de la sonde numérique hétérogène utilisé dans le chapitre 4, aucun isolant n'était a priori disponible, c'est la raison pour laquelle nous avons choisi des valeurs fictives (Tableau 4.2).

4. C'est principalement la conductivité thermique qu'il est difficile d'estimer a priori.

Autant cette méconnaissance ne pose pas de problème pour le calcul de la base complète (car elle permet de reconstituer rigoureusement tout champ de température), autant le choix des paramètres  $k_S$  et  $c_S$  va conditionner l'efficacité de la base réduite.

Pour lever cette difficulté, la procédure d'Amalgame va être couplée avec l'étape d'identification de la sonde. Ce couplage sera présenté par la suite dans le paragraphe suivant.

Nous présentons ici les résultats obtenus lors de la première itération qui effectue la réduction par Amalgame à partir des valeurs initiales choisies pour le calcul de la base complète, présentées dans (5.7) et (5.8). L'analyse des résultats issus de ce premier calcul va permettre de choisir l'ordre de réduction qui va être utilisé par la suite.

Ainsi, à partir des 6 enregistrements de températures issus du modèle MCS (2 points de mesure  $M_1$  et  $M_2$  pour les trois matériaux  $E2$ ,  $E4$  et  $E5$ ), l'utilisation de la technique d'Amalgame est effectuée pour différentes ordres de réduction. L'efficacité des différents modèles réduits ainsi obtenus est quantifiée par le calcul de l'erreur entre les modèles complet et réduits simplifiés MCS et MRS, telle que définie par (4.13). Les résultats sont présentés sur la Figure 5.2.

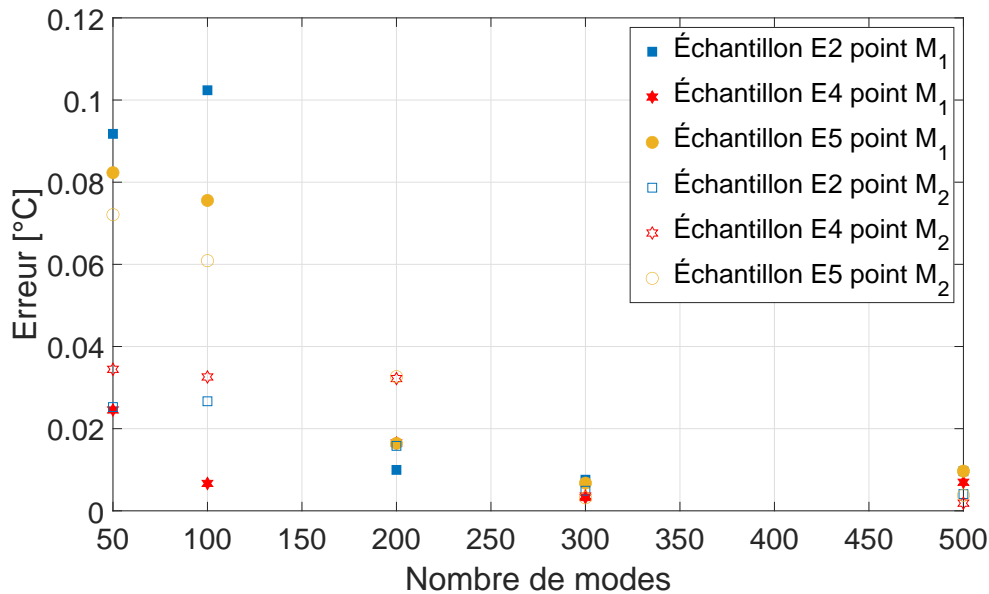


FIGURE 5.2 – Erreur  $\max(\sigma_{M_1max}, \sigma_{M_2max})$  aux points de mesure pour les isolants de référence

Pour la suite de cette étude on choisit de travailler avec un modèle d'ordre  $n = 200$  ayant une erreur maximale inférieure à  $0,033$  [ $^{\circ}C$ ]. On estime que ceci est un bon compromis entre précision et rapidité

du modèle réduit simplifié MRS. On note que l'erreur maximale à 500 modes est supérieure à celle du modèle à 300 modes. Ceci vient du fait que l'Amalgame s'effectue de façon globale sur tous les points du maillage, elle n'est donc pas optimisée que sur un seul point mais sur l'ensemble. Par contre, lorsqu'il s'agit des erreurs moyennes, la valeur continue toujours à descendre selon l'ordre des modes. Dans notre cas, le modèle à 300 modes a pour erreur moyenne  $9,95 \times 10^{-4}$  [ $^{\circ}C$ ] et à 500 modes  $6,20 \times 10^{-4}$  [ $^{\circ}C$ ].

### 5.2.3 Création du modèle réduit et validation

Comme présenté dans l'équation (5.4), le Modèle Réduit Simplifié MRS s'obtient par la projection de l'équation du problème complet simplifié sur la base réduite  $\tilde{V}$  d'ordre  $n = 200$ .

Pour valider ce modèle, il suffit de l'utiliser pour différentes caractéristiques d'isolants et de sondes et de comparer les résultats aux points de mesure  $M_1$  et  $M_2$  à ceux obtenus par le Modèle Complet Simplifié MCS.

Le choix des valeurs des isolants se fait simplement en reprenant les matériaux réels utilisés dans le chapitre 4 (Tableau 4.4).

En ce qui concerne la sonde, tant qu'aucune identification de  $k_S$  et  $c_S$  n'est effectuée, nous n'avons aucune idée des valeurs qui seront utilisées, nous nous contentons de choisir a priori les valeurs suivantes (Tableau 5.2).

Configuration de sonde	$k_S$ [ $W.m^{-1}.K^{-1}$ ]	$c_S$ [ $10^6 J.m^{-3}.K^{-1}$ ]
S1	0,4	1,8
S2	2,0	1,0

TABLE 5.2 – Configurations de sondes semi-homogènes

Les calculs pour les différents couples "isolant-sondes" sont présentés dans le Tableau 5.3, dans lequel on reprend les erreurs maximum  $\sigma_{M_Pmax}$  et moyenne  $\bar{\sigma}_{M_P}$  définie à l'équation (4.17).

Isolant vs. sonde	Point	$\sigma_{M_Pmax}$ [ $10^{-2}$ °C]	$\bar{\sigma}_{M_P}$ [ $10^{-2}$ °C]
E1/S1	$M_1$	1,77	0,49
	$M_2$	1,77	0,46
E2/S1	$M_1$	1,78	0,49
	$M_2$	2,29	0,77
E3/S1	$M_1$	1,08	0,33
	$M_2$	2,26	0,57
E4/S1	$M_1$	1,03	0,38
	$M_2$	1,92	0,51
E5/S1	$M_1$	1,32	0,45
	$M_2$	1,31	0,63
E5/S2	$M_1$	3,47	0,83
	$M_2$	2,85	1,82

TABLE 5.3 – Efficacité du modèle réduit à 200 modes pour tous les scénarios

On note ainsi que l'ensemble des erreurs reste très faible, même si l'utilisation d'une sonde homogène est différente de celle ayant servi à construire l'Amalgame, ce qui entraîne une erreur plus importante.

On voit ainsi que la validation (ou la non validation) du modèle réduit reste dépendante de la phase d'identification de la sonde : si celle-ci entraîne des valeurs très différentes de  $k_S$  ou  $c_S$  par rapport à celles utilisées pour la réduction, rien n'indique que le modèle réduit conservera sa précision.

Ceci n'est cependant pas un problème majeur puisque il est tout à fait possible de coupler de façon itérative :

- la réduction de la base à partir de données  $(k_S, c_S)$ ,
- l'identification de ces valeurs.

En effet de façon pratique ces deux étapes s'effectue très rapidement <sup>5</sup>.

---

5. Contrairement au calcul de la base complète qui est très gourmand en temps de calcul.

### 5.3 Identification de la sonde

#### 5.3.1 Détail du processus d'identification

L'objectif est ici de déterminer les propriétés  $k_S$  et  $c_S$  du modèle de sonde semi-homogène, à partir de mesures effectuées sur plusieurs isolants dont on connaît les caractéristiques  $k_I$  et  $c_I$ .

Comme indiqué précédemment, nous choisissons les matériaux  $E_2$ ,  $E_4$  et  $E_5$  (Tableau 5.1). Ici encore les mesures sont virtuelles, et donc obtenues à partir du modèle complet réel avec ajout sur les résultats d'un bruit gaussien d'écart type  $\sigma_B = 0,1$  [ $^{\circ}C$ ]. Le processus est précisé sur la Figure 5.3.

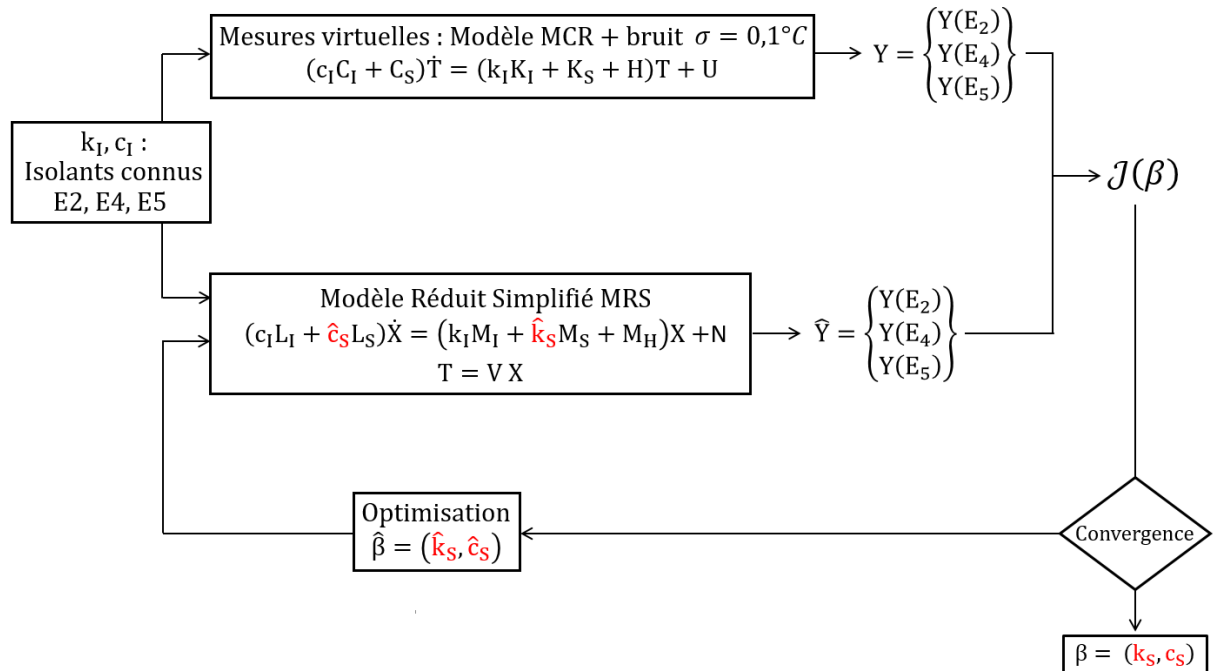


FIGURE 5.3 – Processus d'identification des propriétés  $k_S$  et  $c_S$  du modèle de sonde semi-homogène

#### 5.3.2 Couplage avec la phase de réduction par Amalgame

Puisque la réduction par Amalgame s'appuie sur la connaissance de la capacité et de la conductivité de la sonde, il est donc nécessaire de coupler cette étape avec la procédure d'identification de la sonde. Comme indiqué sur la Figure 5.4, les valeurs identifiées  $k_S^{(I)}$  et  $c_S^{(I)}$  sont comparées aux valeurs ayant servi à la réduction par Amalgame  $k_S^{(A)}$  et  $c_S^{(A)}$  et on procède alors à une nouvelle itération de calcul qui englobe à la fois la réduction par Amalgame et l'identification de la sonde, jusqu'à convergence entre les couples

de valeurs  $(k_S^{(I)}, c_S^{(I)})$  et  $(k_S^{(A)}, c_S^{(A)})$ .

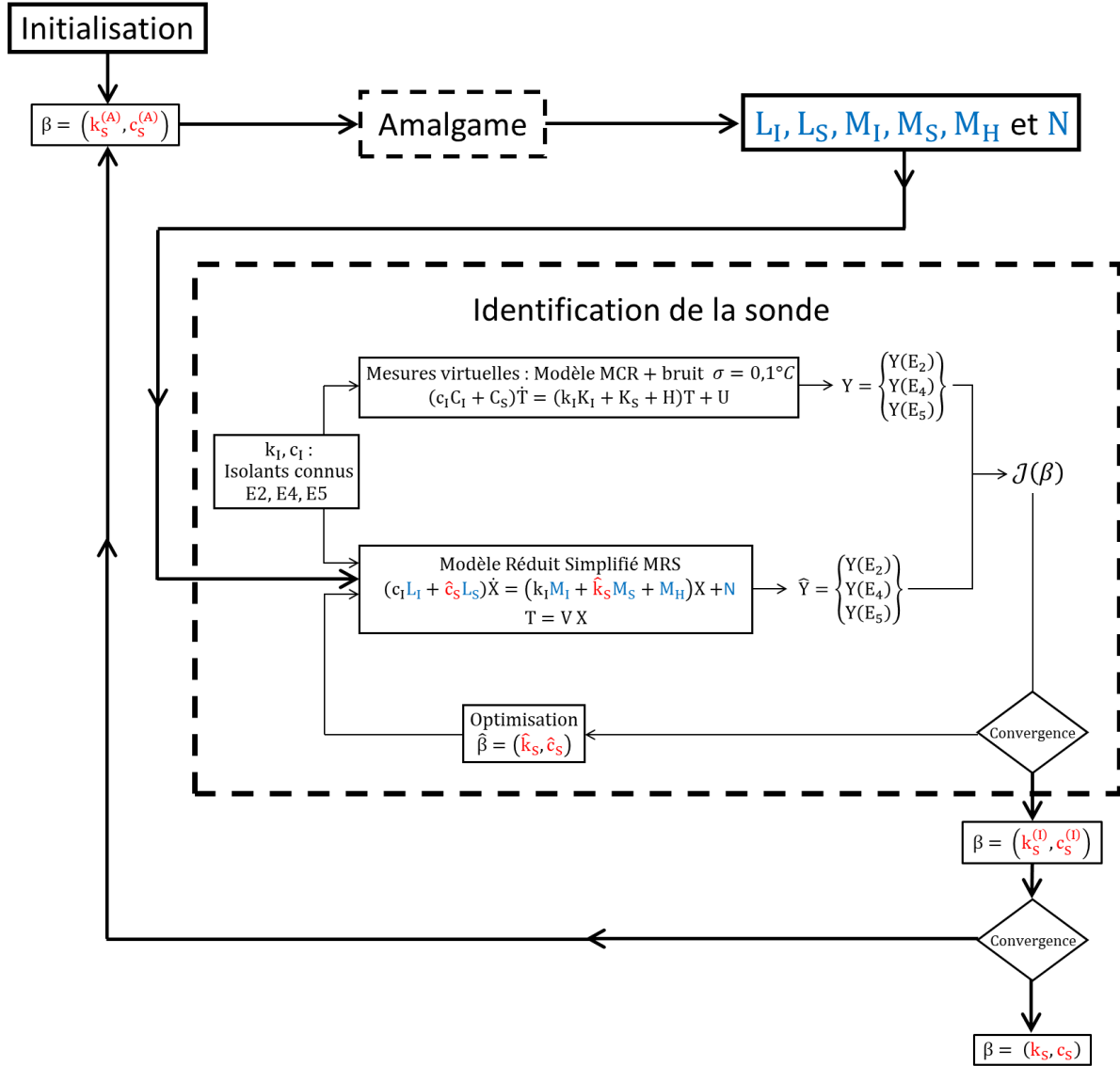


FIGURE 5.4 – Schéma de couplage entre l'identification des propriétés de la sonde et l'Amalgame

Dans la pratique, deux itérations suffisent pour obtenir les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} k_S = 3,87 \text{ [W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}] \\ c_S = 2,40 \times 10^6 \text{ [J.m}^{-3}\text{.K}^{-1}] \end{cases} \quad (5.11)$$

L'erreur quadratique sur les mesures utilisées dans la procédure d'Amalgame a alors pour valeur :

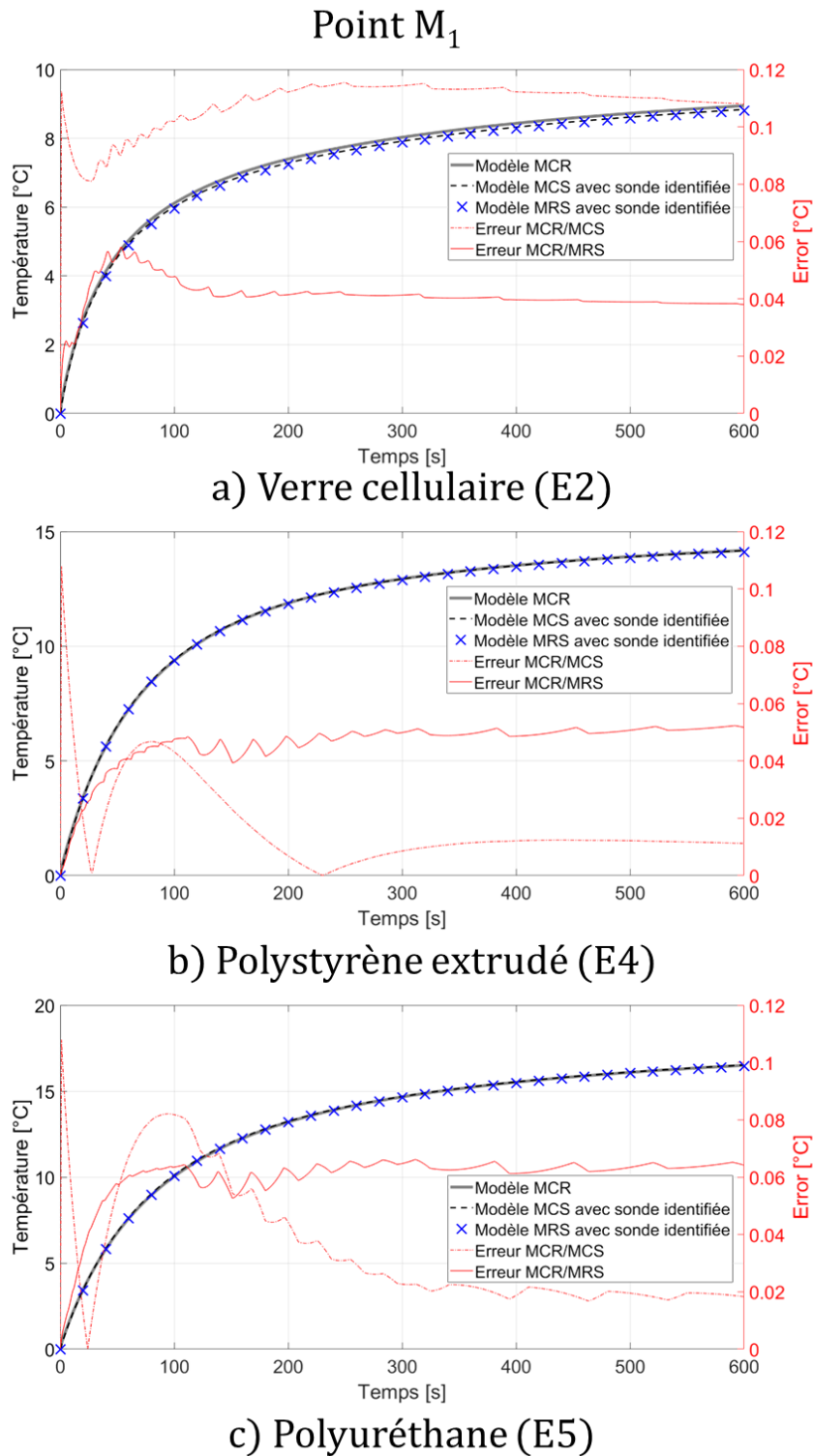
$$\sigma_{total} = \sqrt{\frac{1}{N_{iso} N_t N_{mes}} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_{mes}} \left( Y_{ij} - \widehat{Y}_{ij}(\widehat{\beta}) \right)^2} = 0,09 [^{\circ}C] \quad (5.12)$$

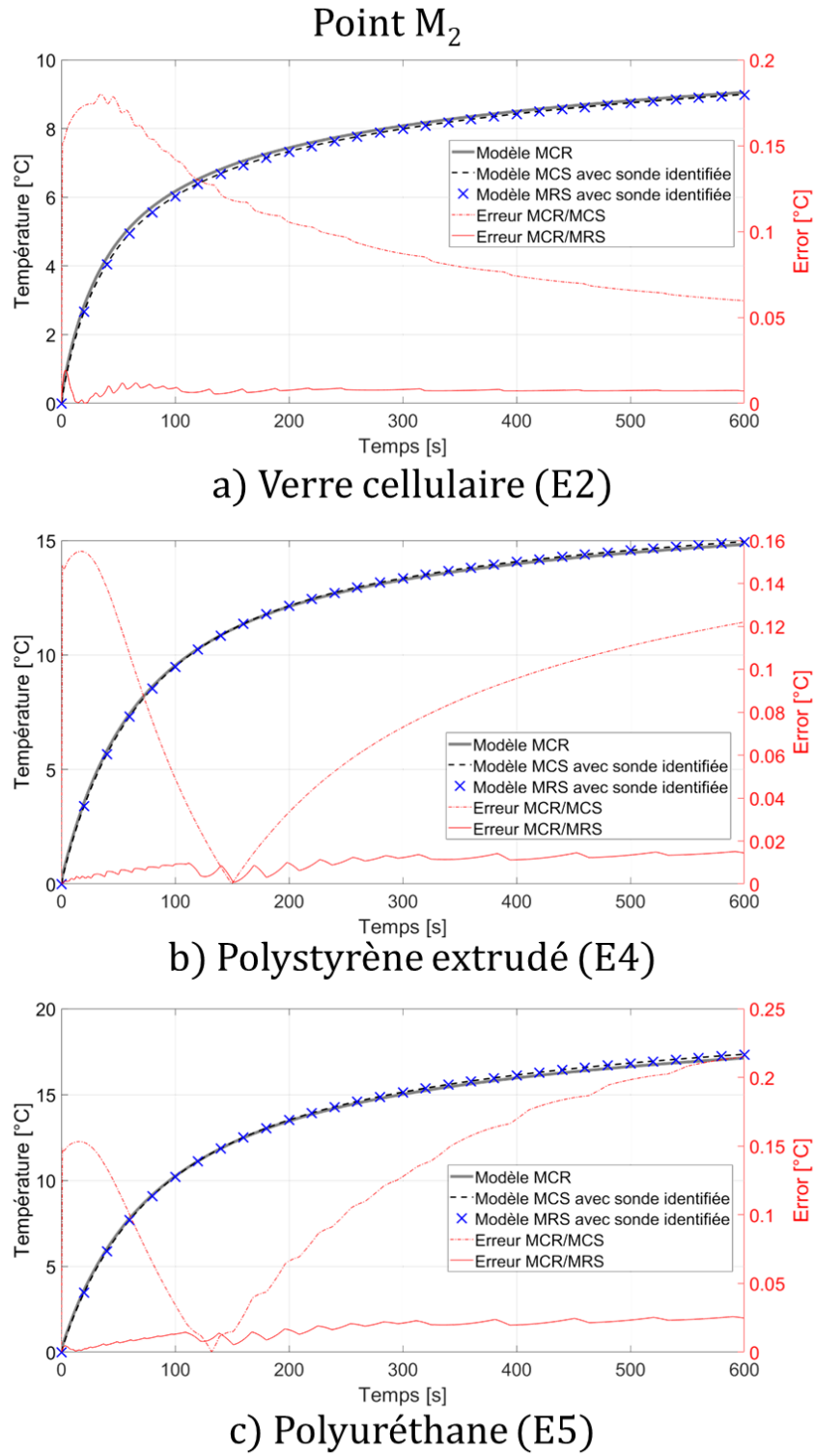
Cette erreur quadratique converge vers la valeur de l'écart type du bruit de mesure utilisé pour créer les mesures virtuelles à partir du modèle complet réel MCR : la convergence du processus d'identification a bien été assurée.

La Figure 5.6 présente l'évolution des températures issues des différents modèles :

- le modèle réduit Simplifié MRS,
- le modèle complet simplifié MCS,
- le modèle complet réel MCR (qui fait office de mesures virtuelles).



FIGURE 5.5 – Résultats du modèle réduit après le deuxième Amalgame pour les échantillons au point  $M_1$

FIGURE 5.6 – Résultats du modèle réduit après le deuxième Amalgame pour les échantillons au point  $M_2$

Cette figure présente également les erreurs entre ces modèles. Il apparait clairement que l'erreur liée à la réduction de modèle est faible devant celle liée à la simplification de structure de la sonde. Nous verrons par la suite l'influence de ces erreurs sur le processus d'identification des propriétés thermiques de l'isolant.

## 5.4 Identification des isolants

### 5.4.1 Principe

Cette étape est en tout point identique à l'étape du chapitre 4 (Figure 4.10), excepté le choix du modèle qui est ici le modèle réduit simplifié MRS (illustré sur la Figure 5.7).

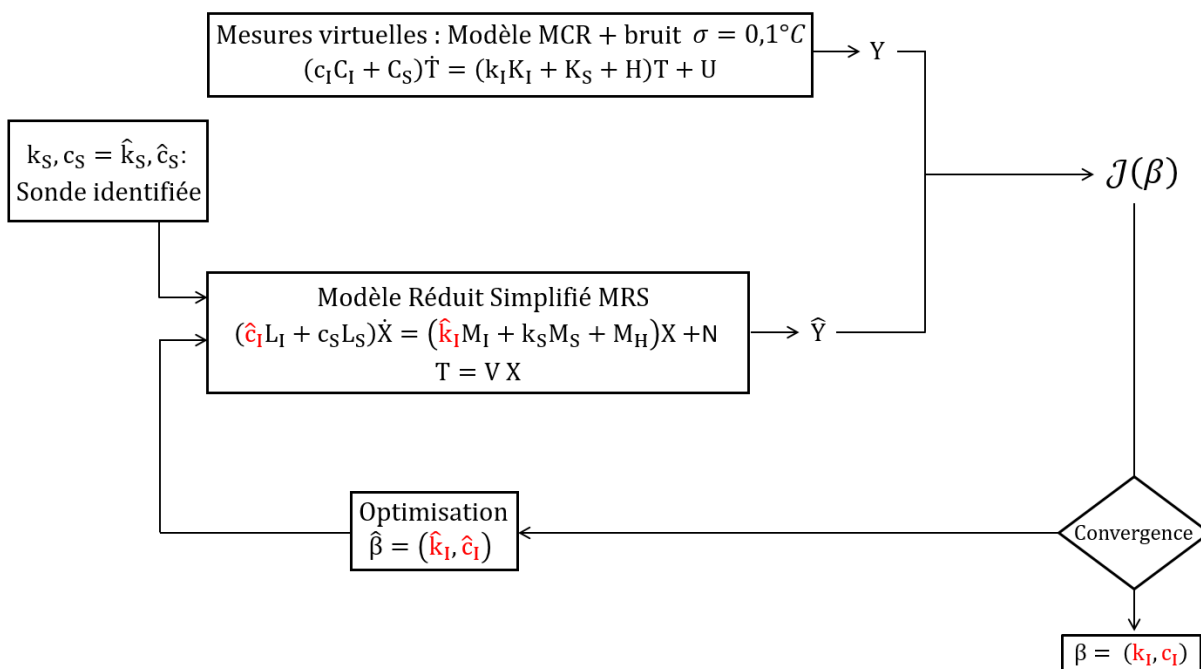


FIGURE 5.7 – Processus d'identification des propriétés  $k_I$  et  $c_I$  du modèle de sonde semi-homogène

On cherche ici à identifier uniquement les échantillons  $E1$  et  $E3$ .

### 5.4.2 Premiers résultats

Par la suite, on présente l'ensemble des résultats obtenus après identification. On se concentrera plus précisément sur les échantillons  $E1$  et  $E3$ , différents de ceux ayant servi à la construction du modèle réduit

MRS. L'identification est effectuée sans bruit de mesure sur une durée de signal égale à  $t = 600$  [s]. Le Tableau 5.4 recueille les résultats obtenus pour les deux isolants.

Échantillon	$\sigma_k$ [%]	$\sigma_c$ [%]
E1	1,52	11,64
E3	0,05	3,64

TABLE 5.4 – Identification sans bruit de mesure de  $E1$  et  $E3$

On note que l'échantillon  $E1$  montre une erreur relative plus élevée par rapport à celle de l'échantillon  $E3$ , notamment pour la valeur de la capacité thermique. En ce qui concerne la conductivité thermique, les erreurs sont faibles et donc acceptables. On cherche donc à expliquer les causes de l'erreur élevée sur la capacité  $c_I$  constatée sur  $E1$ .

### 5.4.3 Analyse

#### Analyse des erreurs

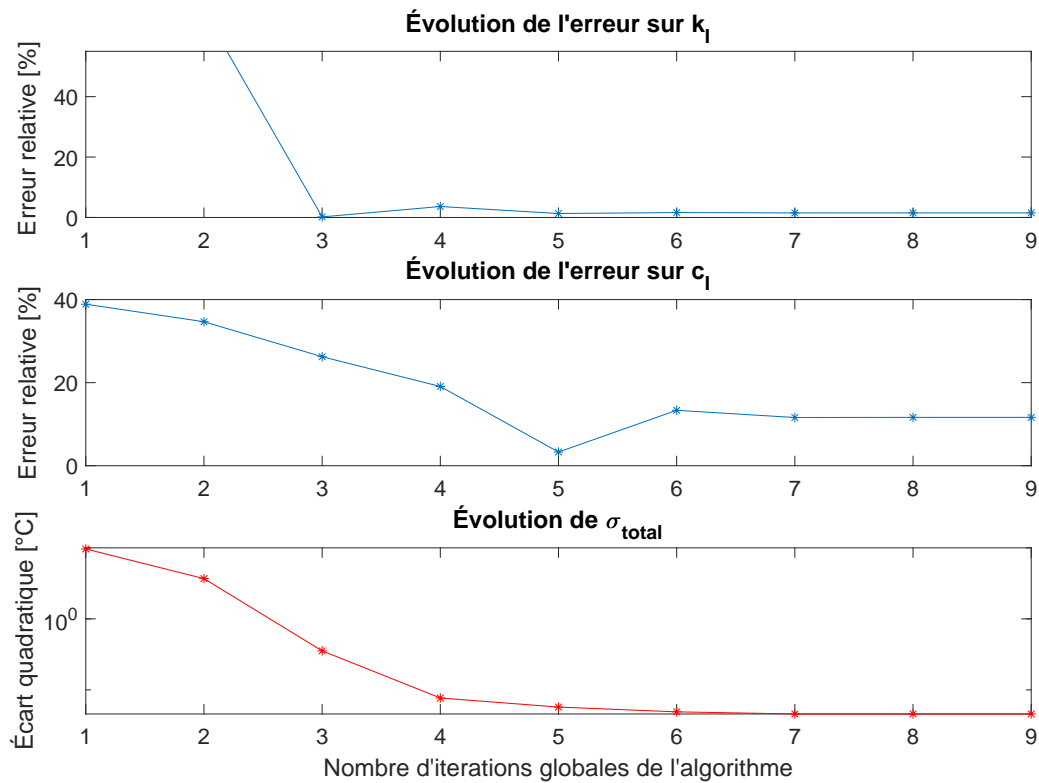
Afin de mieux comprendre les erreurs obtenues, on trace leurs évolutions en fonction du nombre d'itérations globales<sup>6</sup>.

La Figure 5.8 présente cette évolution pour chaque paramètre recherché ( $k_I$  et  $c_I$ ), ainsi que l'évolution de  $\sigma_{total}$  (qui correspond à (5.12)). On note que l'optimum se trouve à la 5ème itération pour les deux paramètres ( $k_I$  et  $c_I$ ). Or, l'algorithme s'est arrêté à la 9ème itération. C'est à dire qu'on a dépassé l'optimum, et que vis-à-vis du nombre d'itération on va plus loin que nécessaire. Pour en tenir compte, on définit le critère  $\sigma_{glob}$  comme l'erreur globale cumulée entre : le bruit de mesure, l'erreur entraînée par la réduction du modèle (MRR) et l'erreur liée à la simplification du modèle réel (MCS), ainsi :

$$\sigma_{glob} = \sigma_B + \sigma_{MRR} + \sigma_{MCS} \quad (5.13)$$

---

6. À chaque itération globale de l'algorithme d'optimisation par région de confiance *lsqcurvefit*, la fonction fait appel plusieurs fois à la fonction du modèle réduit. Ceci est spécifié de façon automatique par l'algorithme selon le nombre de paramètres recherchés.

FIGURE 5.8 – Erreurs relatives et l'écart quadratique par itération de l'échantillon  $E1$ 

Ceci correspond à l'erreur minimale qu'on peut obtenir et donc devient un critère d'arrêt optimum.

Ici, on a imposé  $\sigma_B = 0$  [ $^{\circ}C$ ], afin d'évaluer l'impact des autres erreurs. Autant l'erreur de réduction  $\sigma_{MRR}$  est faible, autant l'erreur du modèle simplifié  $\sigma_{MCS}$  a une influence importante. Donc il faut en tenir compte pour le choix du critère d'arrêt du processus itératif.

On effectue l'identification des paramètres cette fois-ci en prenant en compte le critère d'arrêt optimum.

Le Tableau 5.5 présente les résultats obtenus pour un critère d'arrêt optimum sur  $\sigma_{glob}$ .

Condition	$\sigma_k$ [%]	$\sigma_c$ [%]
Non optimum	1,52	11,64
Optimisé	1,33	3,44

TABLE 5.5 – Résultats pour un critère d'arrêt optimisé sur  $\sigma_{glob}$  de l'échantillon  $E1$ 

On note une amélioration considérable, on passe d'un erreur sur la capacité thermique de 11,64% à

3,44%. Ceci prouve l'importance du critère d'arrêt du processus itératif.

### Analyse du temps de mesure

Puisque le matériau *E1* testé est caractérisé par un temps de diffusion plus important que celui du matériau *E3*, l'idée est ici de regarder l'influence de la durée de la mesure de manière isolée (on n'utilise pas le critère d'arrêt optimisé sur le  $\sigma_{glob}$ ). Les résultats sont présentés dans le Tableau 5.6 exclusivement pour l'isolant *E1*.

Durée de mesure [s]	$\sigma_k$ [%]	$\sigma_c$ [%]
600	1,52	11,64
2500	0,11	0,04

TABLE 5.6 – Résultats avec la durée de mesure optimisée pour l'échantillon *E1*

La Figure 5.9 affiche pour plusieurs valeurs de durée de mesure l'évolution de  $\mathcal{J}$  en fonction du nombre d'itérations globales de l'algorithme. Une explication possible de ce phénomène est que le temps de mesure doit s'approcher du temps de diffusion du flux à partir du fil chaud jusqu'à la frontière de l'isolant, ce qui rend le signal plus riche. La question de cette problématique reste ouverte et serait intéressante d'explorer à l'avenir.

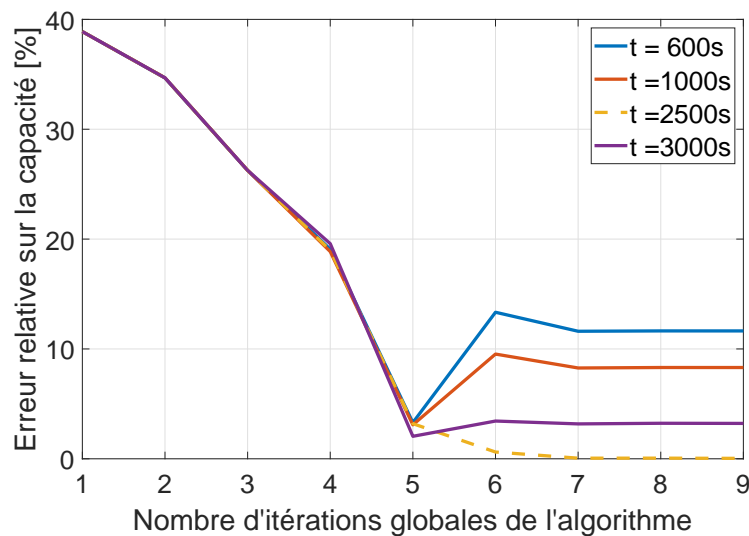


FIGURE 5.9 – Évolution de  $\mathcal{J}$  selon le nombre d'itérations globales pour l'échantillon *E1*

### 5.4.4 Influence du bruit de mesure

Afin d'observer l'influence du bruit de mesure lors de l'identification, on a ajouté un bruit gaussien d'écart type  $\sigma_B = 0,1$  [ $^{\circ}C$ ] aux enregistrements de température. Nous avons mené une étude statistique avec 100 estimations. Les résultats sont présentés dans le Tableau 5.7 en termes de valeurs moyennes des erreurs relatives. On note que le bruit de mesure ne dégrade pas les résultats d'estimation.

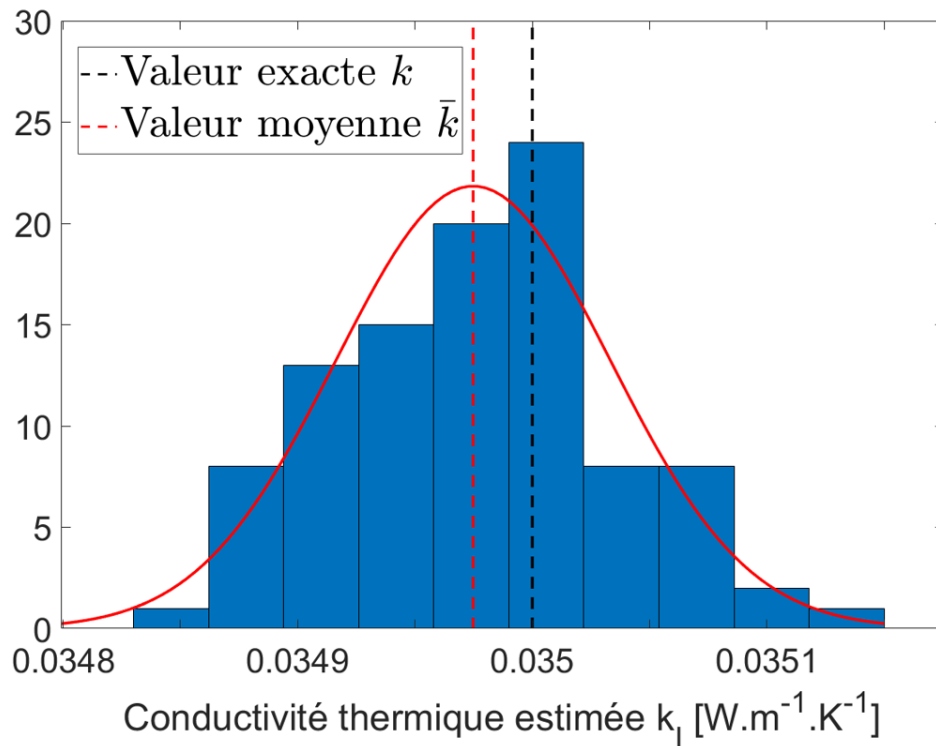
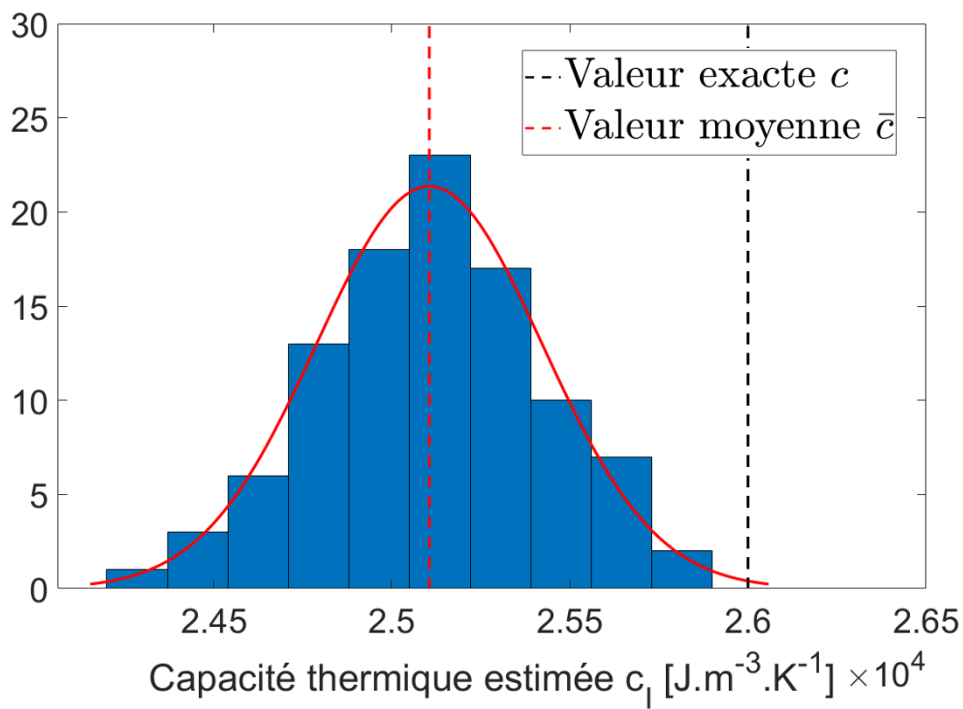
Échantillon	Durée de mesure [s]	$\sigma_B$ [ $^{\circ}C$ ]	Nombre d'estimations	$\sigma_k$ [%]	$\sigma_c$ [%]
E1	2500	0	1	0,11	0,04
		0,1	100	0	0,03
E3	600	0	1	0,05	3,64
		0,1	100	0	3,44

TABLE 5.7 – Identification des échantillons *E1* et *E3* avec un bruit de mesure d'écart type  $\sigma_B = 0,1$  [ $^{\circ}C$ ]

En traçant les histogrammes des valeurs estimées pour la conductivité (Figure 5.10) et la capacité thermique (Figure 5.11) pour le cas le plus défavorable (*E3*), on note que les variances sont très faibles (cf. Tableau 5.8), avec une erreur moyenne pour chaque paramètre ( $k_I$  et  $c_I$ ) proche des erreurs obtenues sans bruit de mesure.

Échantillon	$k_I$ [ $10^{-2}$ W.m $^{-1}$ .K $^{-1}$ ]	$c_I$ [ $10^4$ W.m $^{-1}$ .K $^{-1}$ ]
E1	0,0021	0,0383
E3	0,0058	0,0317

TABLE 5.8 – Variances des estimations des échantillons *E1* et *E3*

FIGURE 5.10 – Identification de  $k_I$  pour un  $\sigma_B = 0,1$  [ $^{\circ}\text{C}$ ]FIGURE 5.11 – Identification de  $c_I$  pour un  $\sigma_B = 0,1$  [ $^{\circ}\text{C}$ ]



### 5.4.5 Capacité du modèle simplifié à prendre en compte une RTC

#### 5.4.5.1 Estimation des paramètres du modèle simplifié MCS

On utilise cette fois des mesures virtuelles (sans bruit de mesure) issues du modèle MCR qui prend en compte une RTC que l'on fixe,  $RTC = 1,64 \cdot 10^{-3} [m^2 \cdot K \cdot W^{-1}]$  pour les trois échantillons de référence *E2*, *E4* et *E5*. Les nouveaux paramètres de la sonde identifiée sont présentés dans le Tableau 5.9.

Type de sonde	$k_S [10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$	$c_S [10^4 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}]$
sans RTC	3,874	2,399
avec RTC	3,135	2,305

TABLE 5.9 – Paramètres de la sonde identifiée sans et avec RTC

En ce qui concerne la valeur de la conductivité thermique, on note une baisse de l'ordre de 19%. Concernant la capacité thermique cette baisse est de 4%. Ces résultats nous indiquent bien le rôle de la RTC et l'importance de sa prise en compte dans le modèle.

#### 5.4.5.2 Identification des isolants *E1* et *E3*

A partir de la sonde identifiée, on peut alors rechercher les paramètres des isolants. On choisit là encore : un critère d'arrêt non optimum et une durée de mesure optimisée. On utilise les mesures non bruitées (elles sont identiques aux mesures utilisées au chapitre 4). Le Tableau 5.10 montre l'ensemble de résultats obtenus à partir du modèle réduit simplifié MRS pour l'échantillon *E1* et *E3*.

Échantillon	Durée de mesure [s]	$\sigma_k$ [%]	$\sigma_c$ [%]
<i>E1</i>	5000	0,30	0,99
<i>E3</i>	1800	1,61	2,70

TABLE 5.10 – Identification des isolants avec une durée optimisée sans bruit de mesure

On note des résultats bien plus précis que ceux obtenus avec une sonde parfaitement définie MRR au chapitre 4 (voir Tableau 4.15), qui ne peut pas prendre en compte la RTC.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons cherché à nous affranchir de la connaissance précise de la sonde (géométrie et caractéristiques des différents constituants), et de son contact avec le matériau isolant (Résistance Thermique de Contact). Pour ce faire, l'idée a été d'utiliser un modèle numérique simplifié, dans lequel la sonde est constituée d'un seul matériau.

Cette étude a montré que cette solution engendre une double difficulté puisque :

1. Les caractéristiques de la sonde (capacité et conductivité) sont inconnues et doivent être identifiées en amont.
2. Le modèle simplifié entraîne une erreur supplémentaire.

La conséquence du premier point (l'identification de la sonde) est la nécessité de coupler le processus de réduction du modèle avec l'étape d'identification de la sonde. Cette technique, qui alourdit les calculs préliminaires, n'en est pas moins efficace puisque nous avons obtenu un modèle réduit simplifié (MRS) optimisé par rapport aux cas de référence choisis. On note cependant que l'erreur engendrée par le modèle simplifié est bien plus importante que l'erreur liée à la réduction du modèle.

En ce qui concerne le second point (erreur du modèle), les conclusions sont les suivantes.

Tout d'abord les résultats de l'identification de la conductivité thermique de l'isolant  $k_I$  restent très satisfaisants avec une erreur inférieure à 2% sur l'ensemble des tests effectués quels que soient les paramètres de calculs choisis.

Par contre en ce qui concerne la capacité calorifique de l'isolant  $c_I$ , la précision des résultats dépend très fortement du moment où l'on arrête la procédure itérative d'identification. Il est en effet apparu que pour éviter que la procédure itérative ne cherche à compenser l'erreur du Modèle Réduit Simplifié MRS par des valeurs erronées de la capacité, il est nécessaire de stopper le processus suffisamment tôt. La difficulté est alors de pouvoir définir un critère d'arrêt de la procédure qui soit efficace, puisqu'il n'est pas possible de prédire suffisamment précisément l'erreur du modèle simplifié, qui varie selon l'isolant utilisé. On note par ailleurs que l'effet de ce critère d'arrêt diminue lorsque la durée de chauffage augmente. Compte tenu des dimensions finies du problème réel (épaisseur de l'isolant sur site), on est cependant limité sur la durée de chauffage à imposer. Une idée à tester serait d'imposer une dissipation de puissance variable, importante au début du processus, afin de reproduire sur la durée utilisable de 600[s], le comportement observé pour

les temps longs. Ceci nous éviterait alors la recherche d'un critère d'arrêt optimum.

Enfin, en présence d'une résistance de contact importante, on montre que la sonde identifiée est différente de la sonde initiale : l'effet de la résistance de contact est alors intégré dans le modèle simplifié. A condition de respecter un critère d'arrêt de la procédure inverse ou de choisir un temps suffisamment long, les caractéristiques de l'isolant sont très bien identifiées.

Cette étude constitue des premiers résultats, elle doit être approfondie afin de chercher à déterminer le critère d'arrêt de la procédure mise en place.



## Chapitre 6

# Validation expérimentale par sonde à choc de type aiguille

L'objet de ce chapitre est de mettre en pratique la technique d'identification par modèle réduit des caractéristiques d'un isolant thermique par sonde à fil chaud, qui jusqu'ici a été étudiée uniquement de façon numérique.

Deux types de solutions ont ainsi été proposées :

- Un modèle réduit réel MRR (chapitre 4), qui d'une part nécessite la description précise des constituants de la sonde, et d'autre part ne permet pas de prendre en compte une hypothétique résistance de contact entre la sonde et le matériau.
- Un modèle réduit simplifié MRS (chapitre 5), qui permet l'identification des caractéristiques d'une sonde supposée homogène avec prise en compte d'un éventuel contact imparfait à partir de mesures expérimentales préliminaires.

Lors de cette première campagne expérimentale, nous allons nous limiter à tester une sonde à fil chaud utilisant un modèle réduit réel MRR. Pour cela nous allons nous appuyer sur deux techniques de caractérisation :

- des mesures conventionnelles indépendantes : plaque chaude gardée et calorimètre DSC,
- la technique du Hot Disk<sup>®</sup>.

Trois isolants sont testés, dont les données issues de la littérature correspondent à des matériaux utilisés dans les chapitres précédents :

- Verre cellulaire : *E2*,
- polystyrène extrudé XPS : *E4*,
- polyuréthane : *E5*.

Après une présentation successive des trois méthodes, une synthèse et une comparaison des différents résultats seront effectuées.

## 6.1 Méthodes Conventionnelles : Plaque chaude gardée + DSC

L'ensemble des essais a été réalisé à l'Institut IRDL de Lorient, qui a mis à disposition son matériel expérimental.

### 6.1.1 Plaque chaude gardée

Cette technique est mise en œuvre via un appareil spécifique aux conductivités thermiques faibles. Il s'agit du conductivimètre "Heat Flow Meter HF436 Lambda" de la marque NETZSCH, dont le principe et une photo sont présentés sur le Figure 6.1.

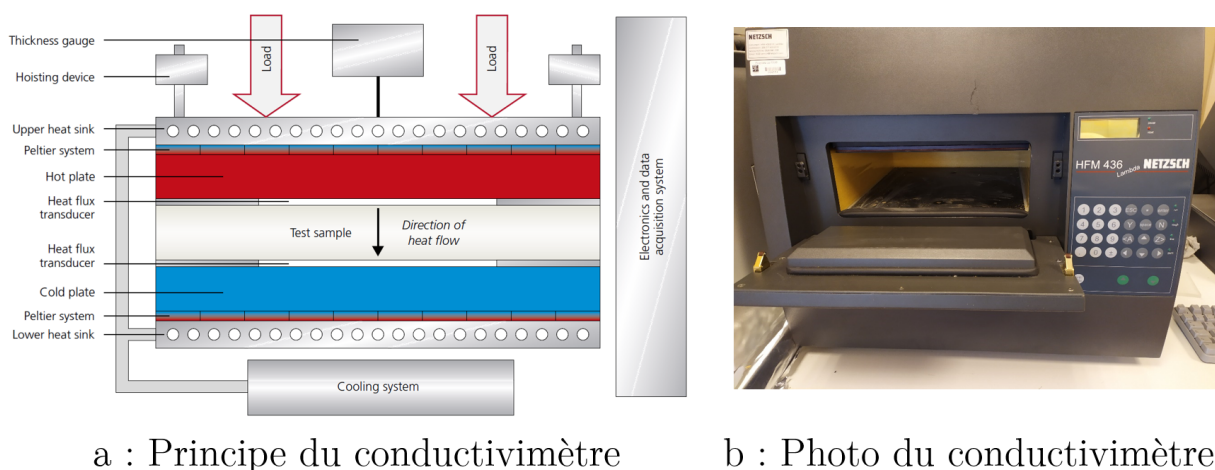


FIGURE 6.1 – Principe et photo du conductivimètre

Ce système permet d'appliquer une différence de température  $\Delta T$  uniforme de part et d'autre de la

plaque du matériau testé, d'épaisseur  $e$ . La mesure de la conductivité s'obtient alors à partir de la mesure de la densité de flux  $\varphi$  qui traverse cette plaque en régime établi :

$$k = \frac{\varphi \cdot e}{\Delta T} \quad (6.1)$$

L'utilisation de cet appareil est automatisée : une série de différences de températures est programmée, et l'appareil régule le flux de façon à obtenir l'équilibre thermique aux températures souhaitées. Lorsque celui-ci est détecté (stabilisation des différentes grandeurs sur un écart de temps suffisant), on peut alors calculer la conductivité et l'appareil passe à la consigne suivante. Compte tenu de la durée importante d'un essai, et de la fidélité affichée de l'appareil ( $0,25 [^{\circ}C]$ ), un seul essai est effectué par matériau. On estime alors que l'ordre d'incertitude pour la conductivité est autour de plus ou moins 3%.

La Figure 6.2 présente l'enregistrement des températures au cours du temps et les différentes valeurs de conductivité obtenues pour le verre cellulaire (E2).

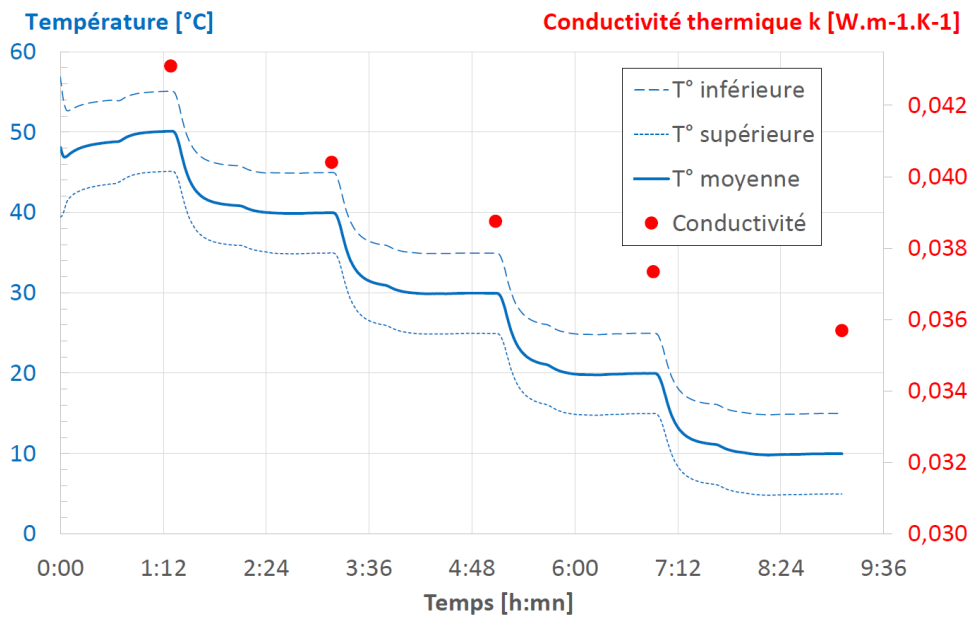


FIGURE 6.2 – Résultats du conductivimètre pour le verre cellulaire (E2)

On voit ainsi apparaître des valeurs qui dépendent des niveaux de températures. Pour tous les essais, un écart de température  $T_{sup} - T_{inf}$  est fixé à  $10 [^{\circ}C]$ , et compte tenu du principe de la mesure, il est aisé de relier la conductivité à la température moyenne  $\bar{T} = \frac{T_{sup} - T_{inf}}{2}$ .

L'ensemble de l'évolution de la conductivité thermique en fonction de la température pour les trois

matériaux testés est représenté sur la Figure 6.3. On y fait apparaître les incertitudes de mesures obtenues en appliquant l'erreur maximum affichée par l'appareil (3%).

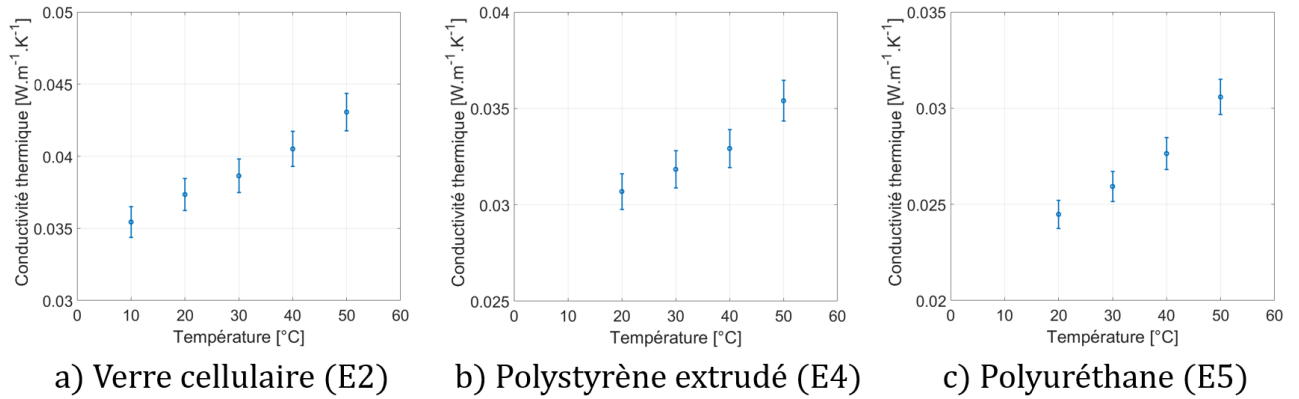
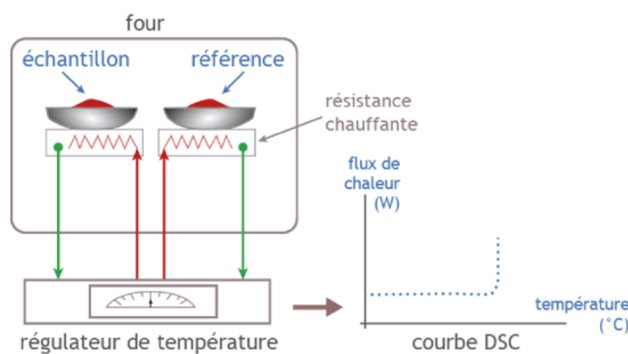


FIGURE 6.3 – Évolution de la conductivité pour les trois matériaux

### 6.1.2 Calorimètre Différentiel à Balayage DSC

Cette technique est basée sur la mesure de la différence de flux thermiques  $\phi$  entre un creuset de référence et un second creuset contenant le matériau testé, lorsqu'ils sont soumis au même régime de chauffage ou de refroidissement (Figure 6.4a). L'appareil utilisé est le "DSC 131 evo" de la marque "SETARAM" (Figure 6.4b). L'incertitude provenant de ce matériel est difficile à préciser d'après la documentation technique, néanmoins l'équipe du laboratoire de Lorient estime qu'elle est autour de 2%.



a : Principe de la DSC



b : Photo du calorimètre DSC

FIGURE 6.4 – Principe et photo du calorimètre différentiel à balayage DSC

La Figure 6.5 présente l'évolution de la température obtenue au cours du temps dans le cas du verre



cellulaire (E2). Le calcul des pertes lors des épisodes de chauffage puis de refroidissement permet d'obtenir simplement la capacité massique  $C_p$  [ $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ] :

$$C_p = \frac{\phi}{m \frac{dT}{dt}} \quad (6.2)$$

Pour une uniformité de température les masses sont très faibles (pour les isolants de l'ordre de 100 mg).

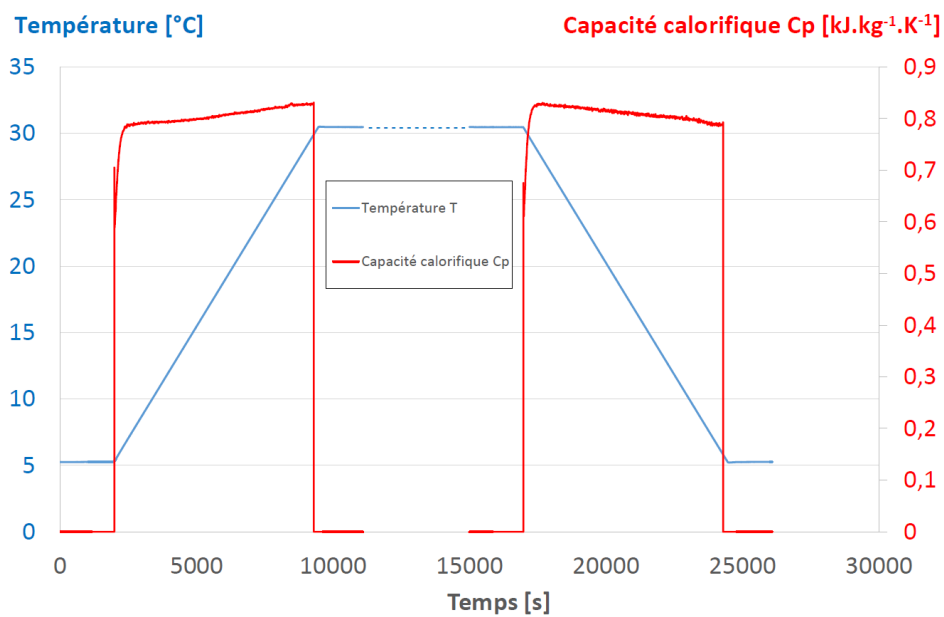


FIGURE 6.5 – Évolution de la capacité en fonction de la température DSC

Il est alors possible de représenter l'évolution des capacités massiques  $C_p$  en fonction de la température pour les deux phases (chauffage et refroidissement) pour chacun des matériaux testés (Figure 6.6).

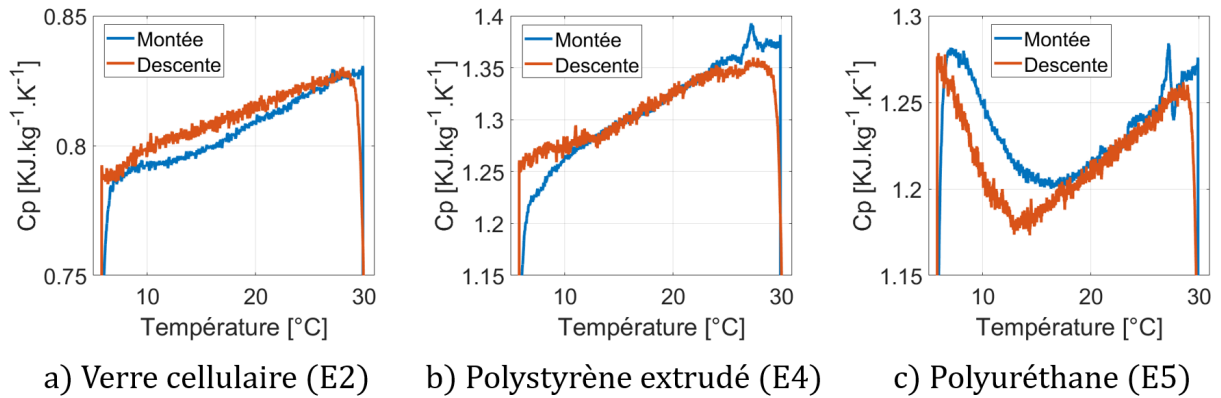


FIGURE 6.6 – Évolution des capacités massiques de la DSC

On note ainsi des évolutions régulières avec un comportement particulier pour le polyuréthane (Figure 6.6.c) qui se reproduit bien lors des deux phases de caractérisation. Cette mesure par DSC nécessite d'y adjoindre la détermination de la masse volumique de chaque matériau. On l'obtient à température ambiante par la mesure des dimensions et de la masse d'un simple parallélépipède. Compte tenu des dimensions on estime chaque incertitude de mesure de longueur à 2%, soit 6% en volume. En termes de masse volumique on estime l'incertitude à 0,3%<sup>1</sup>. Les différents résultats sont présentés dans le Tableau 6.1.

Isolant	Masse volumique [ $kg.m^{-3}$ ]
Verre cellulaire	$85,00 \pm 0,255$
Polystyrène extrudé	$31,45 \pm 0,094$
Polyuréthane	$30,90 \pm 0,093$

TABLE 6.1 – Masse volumique mesurée à la température ambiante

En additionnant l'ensemble des incertitudes, sur la capacité massique  $C_p$ , sur le volume et sur la masse volumique on obtient une incertitude globale de l'ordre de 10%. L'ensemble des valeurs de capacité et de conductivité à trois températures de référence, est présenté pour les trois matériaux dans le tableau suivant.

1. On note que la masse volumique varie aussi en fonction de la température. D'après Le Neindre *et al.*[134] dans notre gamme de température étudiée on est autour de 0,3% pour le polystyrène.

Isolant	Propriété thermique	Température		
		20 [°C]	30 [°C]	40 [°C]
Verre cellulaire	$k$ [ $10^{-2}$ W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	3,735 ± 0,112	3,864 ± 0,116	4,051 ± 0,121
	$c$ [ $10^4$ J.m <sup>-3</sup> .K <sup>-1</sup> ]	6,885 ± 0,688	7,055 ± 0,705	7,225 ± 0,722
Polystyrène extrudé	$k$ [ $10^{-2}$ W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	3,069 ± 0,092	3,184 ± 0,095	3,292 ± 0,099
	$c$ [ $10^4$ J.m <sup>-3</sup> .K <sup>-1</sup> ]	4,183 ± 0,418	4,309 ± 0,431	4,529 ± 0,453
Polyuréthane	$k$ [ $10^{-2}$ W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	2,448 ± 0,073	2,593 ± 0,078	2,764 ± 0,083
	$c$ [ $10^4$ J.m <sup>-3</sup> .K <sup>-1</sup> ]	3,739 ± 0,374	3,878 ± 0,388	4,079 ± 0,408

TABLE 6.2 – Propriétés thermiques estimées par les méthodes conventionnelles

## 6.2 Mesure par Hot Disk<sup>®</sup>

Le principe de ce type de mesure repose sur l'utilisation d'une sonde en forme de disque et de très faible épaisseur  $e$  (Figure 6.7a). Elle est constituée d'une résistance électrique en forme de spirale, prise en sandwich entre deux isolants électriques (kapton). Placée entre deux échantillons du matériau testé (Figure 6.7b), elle dégage une puissance  $P$  qui va alors se dissiper dans le matériau, et créer un échauffement progressif de la sonde, dont la température moyenne  $T_{HD}$  est connue à partir de la mesure de la variation de résistance électrique de la sonde. L'échauffement thermique que subit le matériau peut être décrit par une loi analytique, qui permet de remonter à la fois à la conductivité, à la diffusivité et donc à la capacité volumique  $c$  [J.m<sup>-3</sup>.K<sup>-1</sup>].

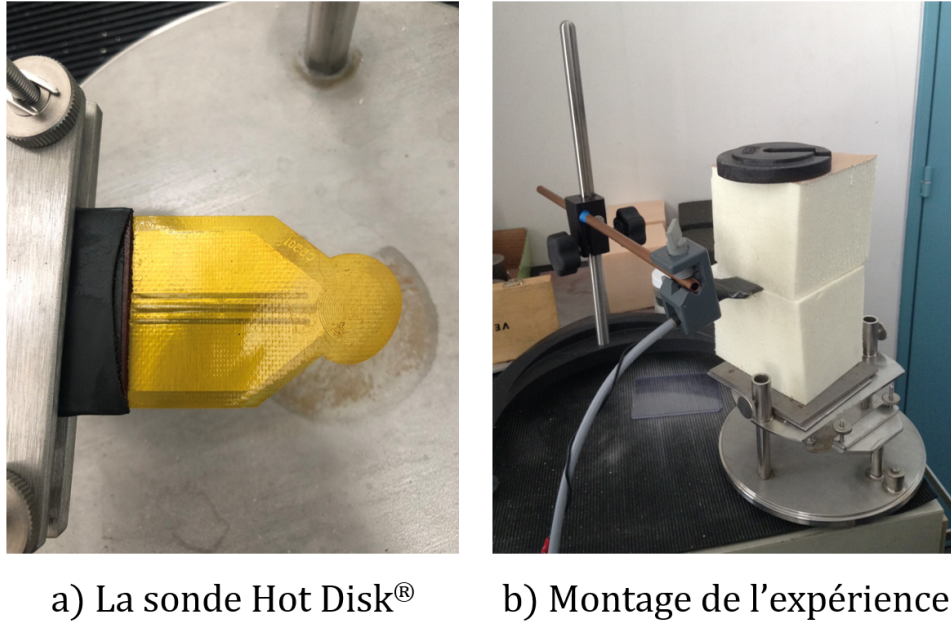


FIGURE 6.7 – La sonde thermique Hot Disk®

L'augmentation de la température du capteur est donnée par la loi analytique suivante :

$$T_{HD} = T_0 + \frac{P}{\pi^{3/2} R k} \cdot f(\tau) \quad (6.3)$$

où  $P$  la puissance de chauffage,  $R$  est le rayon de l'anneau extérieur du capteur,  $k$  est la conductivité thermique de l'échantillon, et  $f(\tau)$  une fonction temporelle sans dimension qui s'écrit :

$$f(\tau) = [m(m+1)]^{-2} \int_0^\tau \sigma^{-2} d\sigma \times \left[ \sum_{l=1}^m l \sum_{k=1}^m k \exp\left(\frac{-(l^2 + k^2)}{4m^2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{lk}{2m^2\sigma^2}\right) \right] \quad (6.4)$$

Ici,  $k$  et  $l$  sont des variables intermédiaires,  $m$  correspond au nombre d'anneaux concentriques, et  $I_0$  est la fonction de Bessel d'ordre zéro modifiée. Tandis que  $\sigma^2$  est une variable adimensionnelle d'intégration définie comme  $\sigma^2 = \kappa(t - t')/a^2$  (pour  $t' = 0$  le temps caractéristique ( $\tau$ ) est exprimé comme  $\tau = \sqrt{\kappa t}/a$ ) [24, 135].

Dans le cas du verre cellulaire, on présente :

- Dans la Figure 6.8a, l'évolution de la température  $T_{HD}$  en fonction de la fonction  $f(z)$ , dont l'évolution linéaire permet de vérifier la cohérence de la mesure avec la loi analytique.
- Dans la Figure 6.8b, la comparaison des deux températures mesurées et reconstruites avec la loi

analytique (6.3) pour les paramètres identifiés. On y fait apparaître explicitement l'erreur de température associée, qui est ainsi très faible.

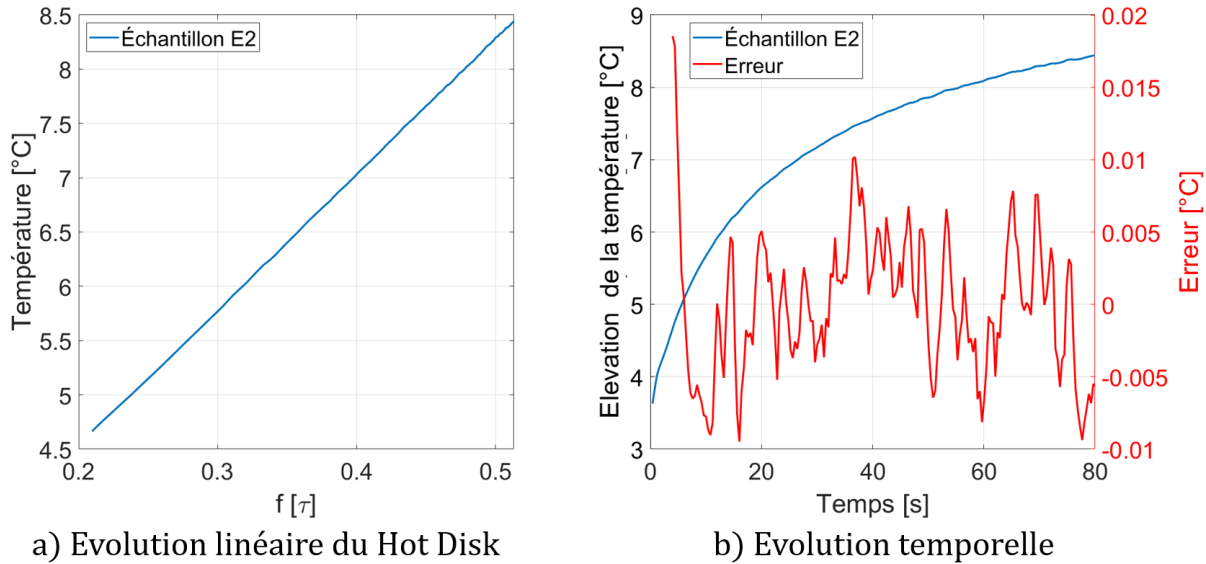
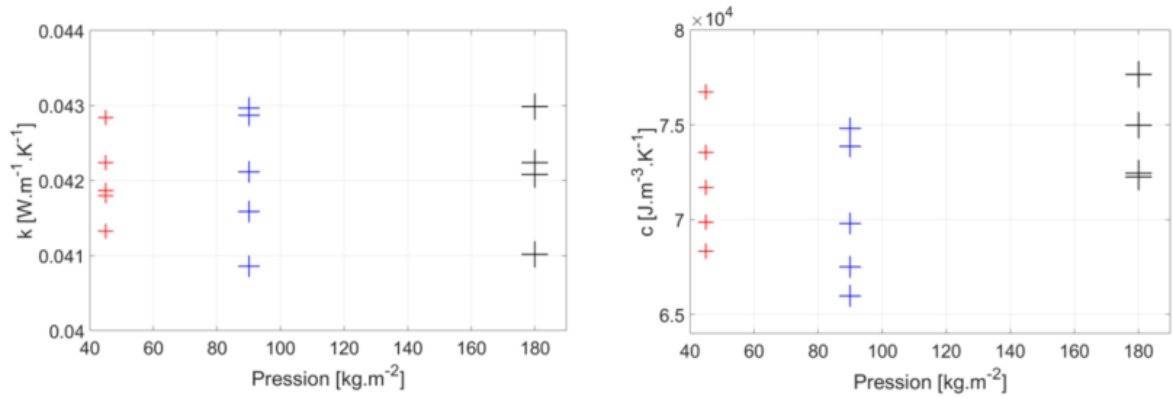


FIGURE 6.8 – Résultats du Hot Disk<sup>®</sup>

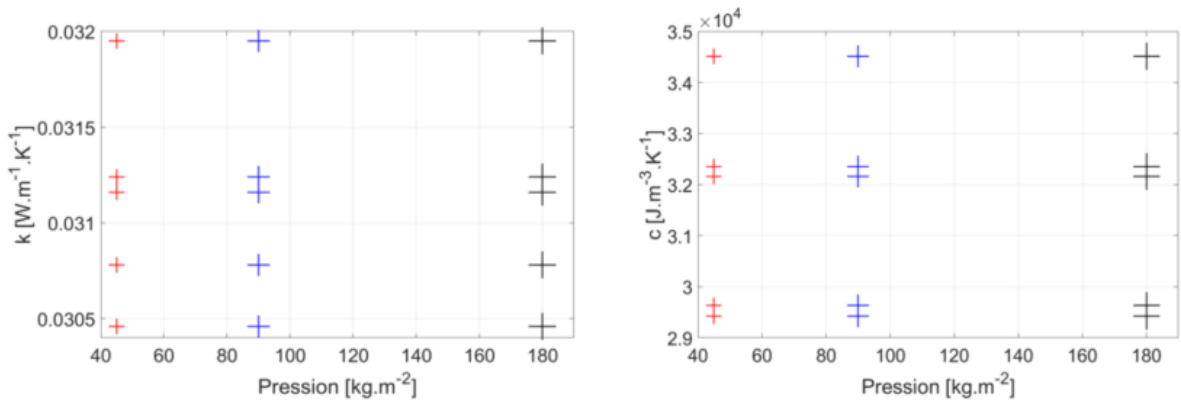
Ces résultats indiquent que les différents paramètres utilisés (puissance dissipée, durée de l'essai) sont conformes à l'utilisation de la loi analytique de type massif semi-infini (6.3).

On note que ce type de détermination s'effectue sur une montée en température de l'ordre de 5 [°C], soit pour une gamme 20 – 25 [°C]. Contrairement aux méthodes conventionnelles il est difficile ici de relier les deux paramètres identifiés ( $k$  et  $c$ ) à une température précise, puisque l'augmentation de température au cours du temps n'est pas linéaire et est de plus très localisée spatialement autour de la sonde.

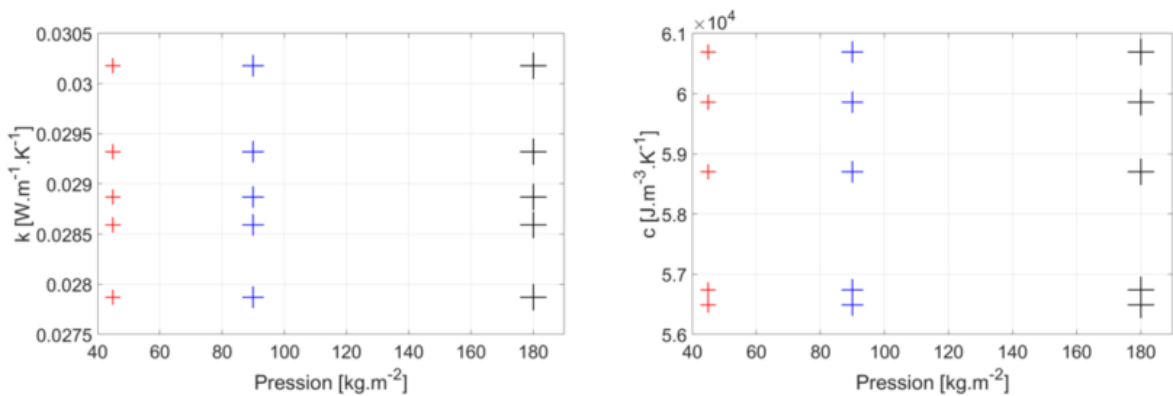
Une seconde difficulté est l'existence ou non d'un contact imparfait entre la sonde et les matériaux. Pour estimer l'influence d'une éventuelle résistance thermique de contact, plusieurs essais sont effectués en exerçant une pression plus ou moins importante entre les deux échantillons. À chaque pression, plusieurs essais sont effectués en prenant soin de démonter et remonter l'ensemble "échantillons - sonde" entre chaque mesure. L'ensemble des résultats pour les trois isolants testés est présenté sur la Figure 6.9.



a) Verre cellulaire (E2)



b) Polystyrène extrudé (E4)



c) Polyuréthane (E5)

FIGURE 6.9 – Évolution des résultats du Hot Disk<sup>®</sup> en fonction de la pression exercée

On note ainsi une dispersion des résultats, mais sans corrélation avec la pression. Par ailleurs, l'analyse de l'erreur de température du Hot Disk<sup>®</sup> amène pour l'ensemble de toutes les mesures, un écart maximum de 0,025 [°C].

Puisque ces faibles erreurs valident les conditions d'utilisation du modèle analytique, la dispersion des résultats peut provenir :

- soit d'une faible sensibilité de la température mesurée du paramètre recherché,
- soit d'une inhomogénéité de l'isolant à proximité de la sonde, dont la taille réduite est un paramètre qui limite la précision de la mesure.

## 6.3 Mesure par fil chaud

### 6.3.1 Réalisation de la sonde

La sonde à fil chaud a été réalisée au laboratoire IRDL de Lorient. Le principe est le suivant : on utilise une aiguille creuse métallique de diamètre de 1,3 [mm] (Figure 6.10a), dans laquelle on insère les deux thermocouples de type K ainsi que la résistance chauffante. Les dimensions des différents constituants sont obtenues à partir d'images issues d'un microscope électronique (Figure 6.11). Une difficulté réside dans la connaissance précise du positionnement des différents éléments les uns par rapport aux autres lorsqu'ils sont insérés dans l'aiguille. Par la suite, l'ensemble de ces éléments est noyé dans une colle, insérée par dépression dans l'aiguille. Là encore il est difficile de s'assurer du remplissage intégral de l'aiguille.

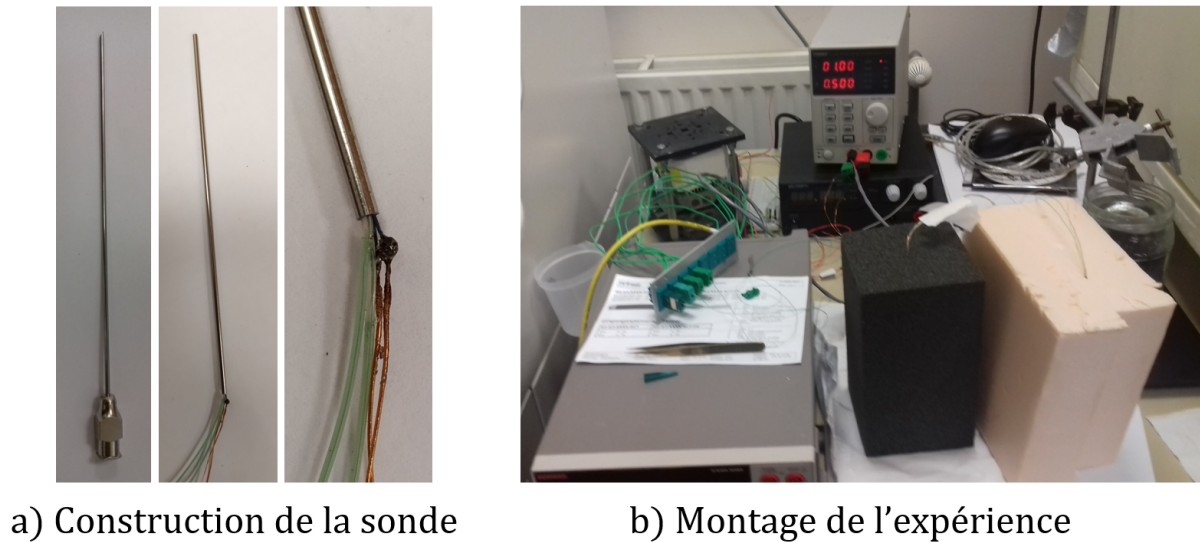


FIGURE 6.10 – Construction de la sonde à fil chaud et montage de l'expérience

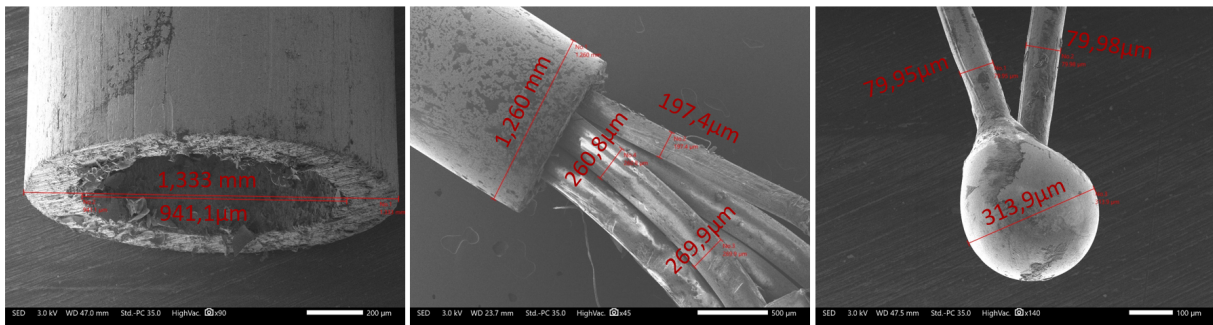


FIGURE 6.11 – Dimensions de la sonde sous microscope

Cette sonde fait alors l'objet d'une description numérique à partir de laquelle est construit le Modèle Réduit Réel MRR. C'est ce modèle qui a été utilisé dans l'étude numérique présentée précédemment (chapitre 4, Table 4.1 et Figure 5.1).

### 6.3.2 Déroulement des essais

La sonde est insérée dans le matériau testé (Figure 6.10b), dans un orifice obtenu par pré-perçage effectué par une aiguille équivalente. Lors d'un essai, une alimentation stabilisée dissipe une puissance électrique constante dans le fil chauffant pendant une durée fixée ici à  $t = 300$  [s]. La mesure de cette puissance et de l'évolution des deux températures  $M_1$  et  $M_2$  est récupérée par une centrale d'acquisition.



L'ensemble de ces relevés permet alors par utilisation du modèle réduit MRR de remonter directement à la conductivité  $k$  [ $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ] et à la capacité volumique  $c$  [ $\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ]. Un seul essai est effectué pour chacun des trois isolants testés. Le Tableau 6.3 présente les résultats obtenus.

Isolant testé	$k$ [ $10^{-2} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ]	$c$ [ $10^4 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ]
Verre cellulaire	3,901	6,685
Polystyrène extrudé XPS	3,092	2,680
Polyuréthane	2,749	1,500

TABLE 6.3 – Isolants identifiés par MRR

À partir de ces valeurs de conductivité et de capacité, il est alors possible de tracer les différentes évolutions de température aux deux points de mesure  $M_1$  et  $M_2$ , à savoir :

- les mesures expérimentales,
- les résultats de la simulation par modèle complet MCR,
- les résultats de la simulation par modèle réduit MRR (200 modes).

On peut alors obtenir l'évolution des différentes erreurs, c'est-à-dire :

- l'erreur entre modèle réduit et modèle complet,
- l'erreur entre modèle réduit et mesures.

L'ensemble de ces courbes est présenté sur les figures 6.12 et 6.13, et les observations qui en découlent sont les suivantes :

- Les courbes obtenues indiquent globalement une bonne adéquation entre le modèle utilisé MRR et les mesures, avec cependant une erreur plus importante dans le cas du polyuréthane *E5*.
- Les écarts entre mesure et modèle sont d'un ordre de grandeur au-dessus de ceux obtenus par la technique du Hot Disc<sup>®</sup> (Figure 6.8b).
- Enfin, l'écart entre les modèles réduits et complets reste très faible dans tous les cas étudiés.

Tout ceci montre que l'erreur ne peut pas être imputée à la réduction du modèle, qui s'avère performante comme l'avait montré l'étude numérique. La difficulté est ainsi d'obtenir une description suffisamment précise de la géométrie et des caractéristiques thermiques des différents constituants de la sonde. Cette

difficulté est exacerbée par les dimensions extrêmement réduites de la sonde. Enfin se pose la question de la qualité du contact entre la sonde et le matériau, notamment du fait du pré-perçage préalablement effectué.

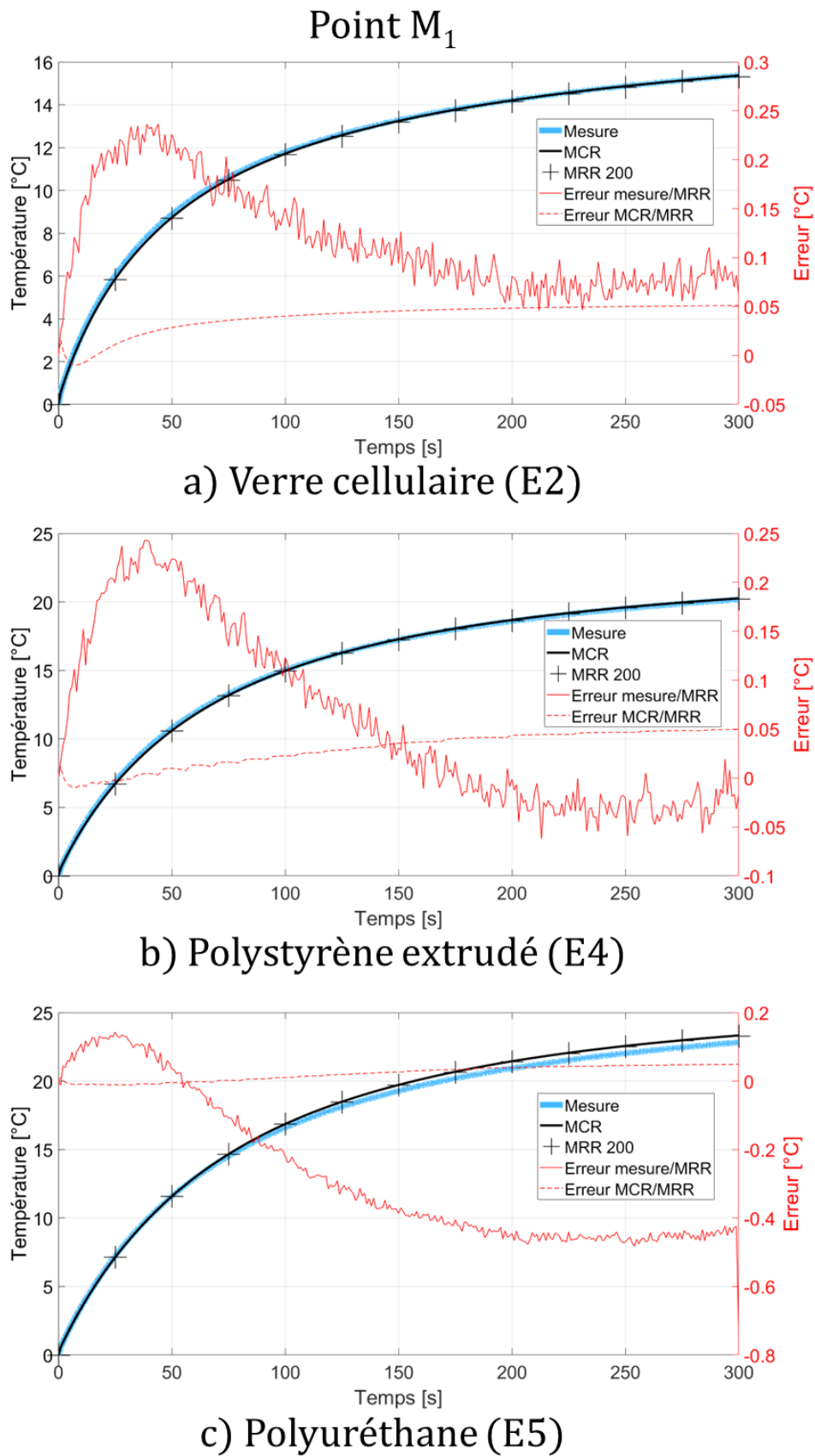
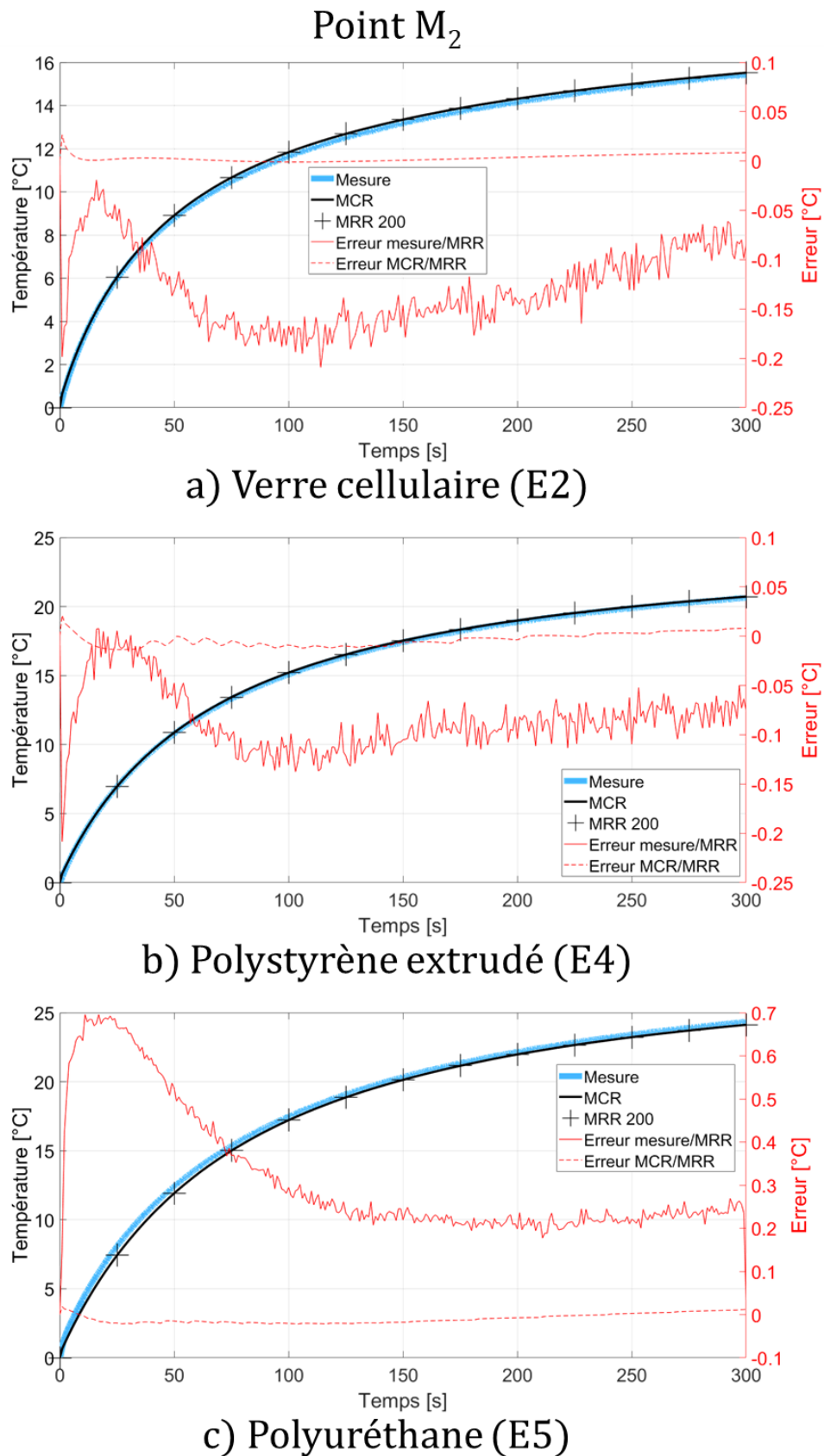


FIGURE 6.12 – Erreurs de la méthode du fil chaud sur le point  $M_1$

FIGURE 6.13 – Erreurs de la méthode du fil chaud  $M_2$

## 6.4 Comparaison des résultats

L'ensemble des résultats obtenus par les trois techniques (conventionnelles, Hot Disk<sup>®</sup> et sonde à fil chaud) est synthétisé sous la forme d'un graphique qui représente le positionnement des couples des paramètres ( $k, c$ ) obtenus pour les différents essais (Figures 6.14, 6.15, 6.16).

Seules les mesures conventionnelles (conductivimètre en régime établi et calorimètre DSC) peuvent être caractérisées à la fois par une incertitude quantifiée (conductivité thermique :  $\pm 3\%$  et capacité thermique  $\pm 10\%$ ), et par une température de référence associée.

Pour les deux autres types de mesures (Hot Disk<sup>®</sup> et sonde à fil chaud), on est certes capable de vérifier la cohérence entre les mesures de températures et l'évolution donnée par le modèle utilisé, mais on ne peut pas pour autant remonter à l'incertitude sur les caractéristiques identifiées  $k$  et  $c$ . De plus, il est difficile d'estimer la température de référence à laquelle est effectuée la mesure, compte tenu de l'aspect localisé de l'échauffement dans le milieu semi infini initialement présent à température ambiante.

Pour toutes ces raisons, on considère ici comme référence les mesures effectuées par les méthodes conventionnelles.

En ce qui concerne la conductivité thermique, on retrouve les mêmes ordres de grandeurs pour toutes les méthodes. On note cependant que selon les matériaux testés, les résultats avec le Hot Disk<sup>®</sup> et avec la sonde à fil chaud ne correspondent pas aux mêmes températures de référence. Ainsi pour la sonde à fil chaud, les 3 conductivités obtenues correspondent respectivement aux températures de 30 [°C] pour le verre cellulaire, 20 [°C] pour le polystyrène et 40 [°C] pour le polyuréthane. On note par ailleurs que les conductivités obtenues par le Hot Disk<sup>®</sup> sont dans tous les cas égales ou supérieures à celles obtenues par la sonde à fil chaud, et en général supérieures à celles obtenues par la méthode du conductivimètre en régime établi.

Si on fixe comme référence une température de 30 [°C], l'écart de conductivité obtenu par la sonde à fil chaud par rapport à celui obtenu avec le conductivimètre en régime permanent est respectivement de l'ordre de 1% pour le verre cellulaire, 3% pour le polystyrène et de 6% pour le polyuréthane. Pour le Hot Disk<sup>®</sup>, les écarts sont eux en moyenne de l'ordre de 10% pour le verre cellulaire, 3% pour le polystyrène et de 10% pour le polyuréthane.

En ce qui concerne la détermination de la capacité thermique, l'ensemble des résultats est caractérisé par une grande dispersion, qui varie selon les matériaux considérés : ainsi l'écart de capacité obtenu par

la sonde à fil chaud par rapport à celui obtenu par DSC pour une température de référence de 30 [°C], est respectivement de l'ordre de 7% pour le verre cellulaire, 30% pour le polystyrène et de 40% pour le polyuréthane. On notera que les écarts des mesures par Hot Disk<sup>®</sup> par rapport à ceux obtenus par DSC sont du même ordre de grandeur.

On voit ainsi toute la difficulté d'effectuer une mesure de capacité par des méthodes localisées, aussi bien la technique du Hot Disk<sup>®</sup> que la sonde à fil chaud. L'explication principale est liée à la faible sensibilité des mesures par rapport à ce paramètre. Une autre explication est l'existence d'un contact imparfait qui, on l'a vu dans le chapitre 4, est rédhibitoire pour la détermination de la capacité.

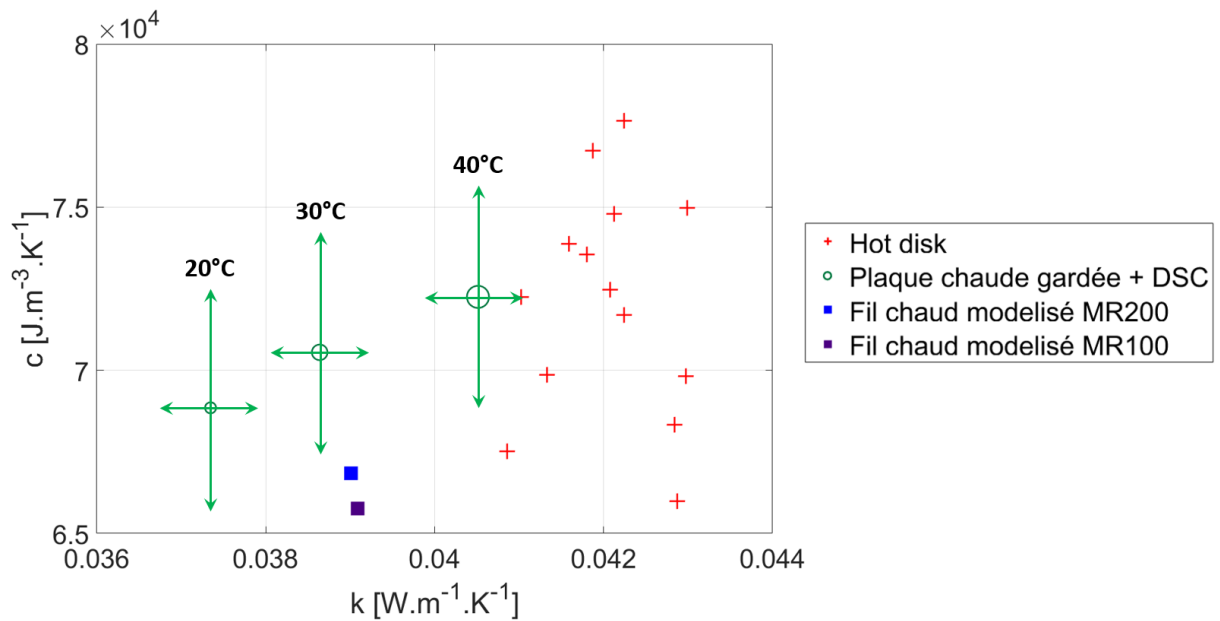


FIGURE 6.14 – Comparaison de méthodes pour le verre cellulaire

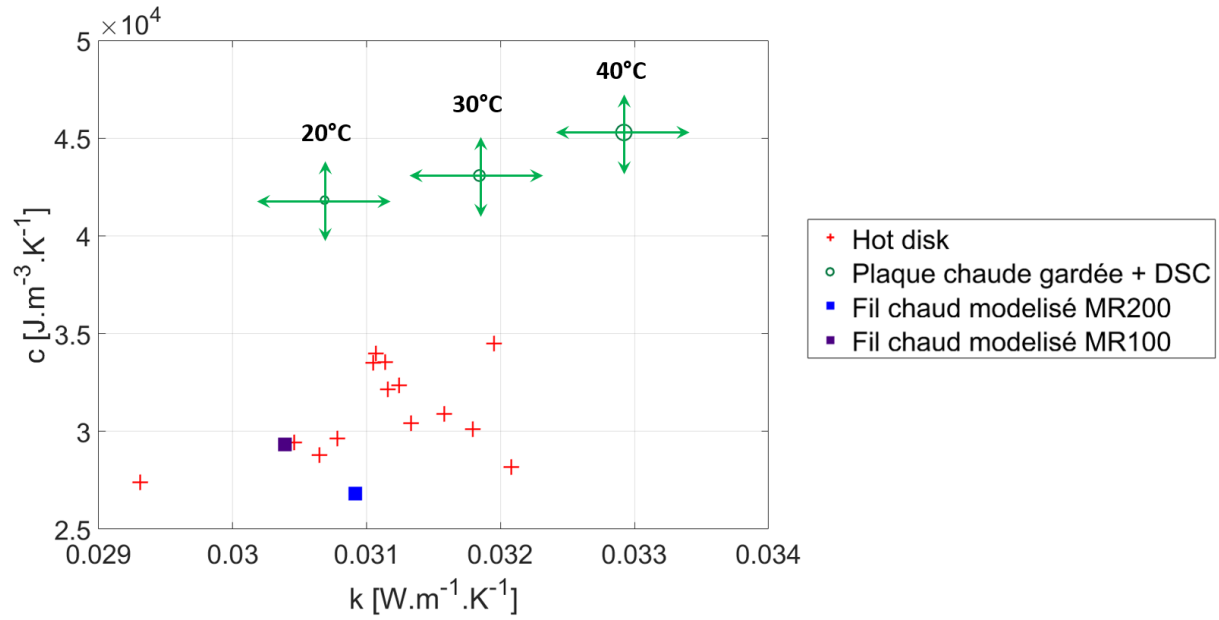


FIGURE 6.15 – Comparaison de méthodes pour le polystyrène extrudé XPS

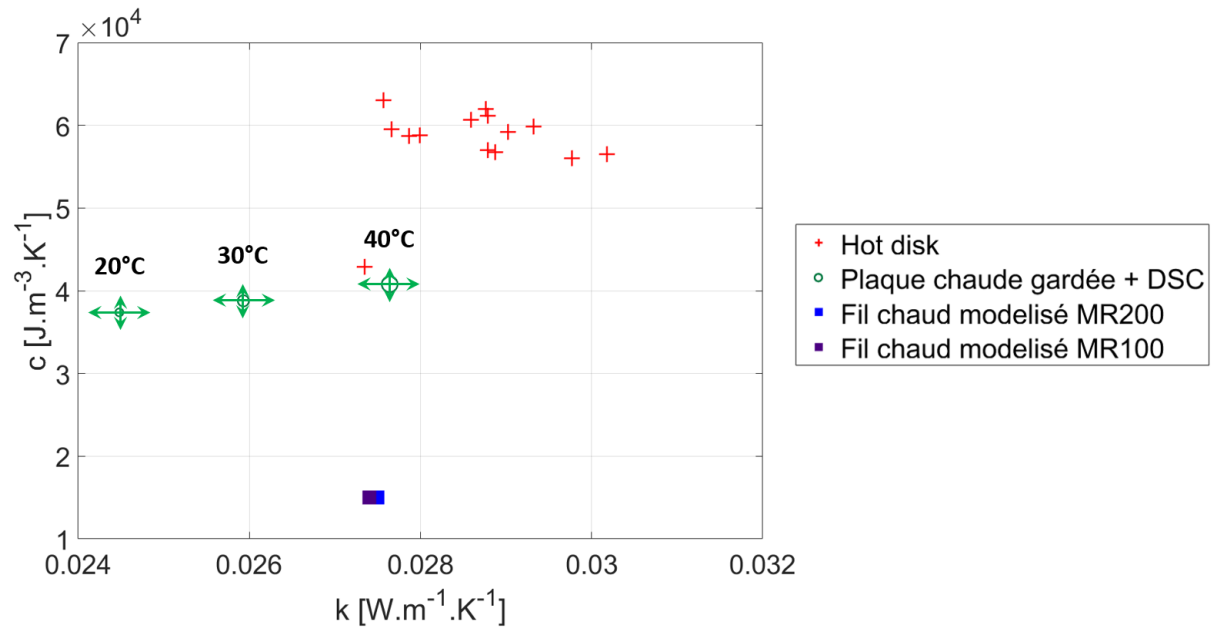


FIGURE 6.16 – Comparaison de méthodes pour le polyuréthane

## 6.5 Conclusion

Ce travail expérimental avait pour objectif de valider la technique mise en place numériquement, et de voir comment elle se positionnait par rapport à d'autres techniques de caractérisation. Il est certain que cette étude ne constitue que les prémices d'une campagne expérimentale complète. Un point préalable à l'étude réside dans l'obtention de valeurs de référence sûres et précises. Nous avons vu ici que les deux autres techniques utilisées présentaient des différences importantes en termes de résultats, et nous avons alors considéré que la technique de caractérisation la plus fiable était celle utilisant des moyens conventionnels (conductivimètre en régime établi et calorimètre de type DSC). Il faut avant tout certifier ces résultats, d'une part par la répétition de mesures, et d'autre part en utilisant une tout autre technique telle que la méthode flash, afin de croiser les résultats.

En ce qui concerne la technique de la sonde à fil chaud pour laquelle nous avons développé la méthode d'identification par modèles réduits, il faut bien sûr multiplier les essais afin de s'assurer de la répétabilité des résultats. Par ailleurs à la suite de ces premiers tests, le travail suivant sera d'affiner le protocole expérimental, en faisant varier les paramètres de durée d'essais, de puissance dissipée et en étudiant l'effet du pré-perçage sur la qualité du contact entre la sonde et l'isolant, etc.

Néanmoins on voit ici que ces tous premiers résultats sont encourageants en ce qui concerne la conductivité thermique. Pour la capacité, une détermination précise semble beaucoup plus difficile. Ceci peut être lié à sa faible sensibilité, mais également aux limites du modèle de type MRR, qui nécessite la connaissance précise de l'ensemble des composants de la sonde et du contact de celle-ci avec l'isolant.



Troisième partie

Caractérisation d'un matériau  
hétérogène



## Chapitre 7

# Caractérisation d'un matériau fortement hétérogène

### 7.1 Introduction

Ce chapitre présente une tout autre application de l'utilisation des modèles réduits pour la caractérisation thermique des matériaux.

Jusqu'à présent, l'ensemble des travaux a concerné la caractérisation thermique in situ à l'échelle macroscopique de matériaux isolants à l'aide d'une sonde spécifique. Une première difficulté était la caractérisation de la sonde et de son comportement thermique, les tests se sont limités à des matériaux minéraux, homogènes et isotropes. Dans le cas de matériaux bio-sourcés, la matière est en général constituée d'un ensemble de fibres poreuses, qui ont un comportement hygroscopique, et dont les phénomènes thermiques sont complexes compte tenu de leur dépendance à l'état hydrique et de leur structure complexe.

Cette étude se concentre sur le cas du bois. Compte tenu des performances mécaniques, thermiques et acoustiques, ce matériau est très utilisé dans le génie civil, notamment dans le secteur du bâtiment.

De nombreuses études existent. À l'échelle macroscopique, on peut utiliser les techniques précédemment présentées pour le caractériser : le Hot Disk<sup>®</sup> a été utilisé par Lagueta *et al.* [23], Raji *et al.* [27] ont effectué des mesures de diffusivité par une sonde de type ruban chaud. Soubibel *et al.* [136] utilisent une méthode flash pour identifier dans une direction simultanément la conductivité thermique et la capacité de planches

de bois.

D'autres techniques utilisant des modèles numériques associés à des techniques inverses ont également été utilisées. Czajkowski *et al.* [137] ont identifié la conductivité d'un échantillon de bois supposé homogène isotrope et sec via une configuration tridimensionnelle à partir de mesures de température à l'intérieur de l'échantillon. Une étude sur l'évolution de la conductivité en fonction de la température est effectuée. Dantas *et al.* [138] effectuent une identification des paramètres caractéristiques des phénomènes hygrothermiques sur une géométrie 1D avec des mesures simultanées.

Avec l'évolution des techniques d'imagerie qui permettent une caractérisation précise de la structure réelle du bois, à l'échelle microscopique, des travaux récents ont été réalisés sur des études d'homogénéisation multi-échelles. L'intérêt de ce type d'études est qu'il permet une meilleure compréhension des phénomènes physiques, afin de pouvoir caractériser précisément les performances et prédire sa dégradation. De façon générale, il s'agit, à partir des connaissances des propriétés intrinsèques de la zone solide de l'échantillon, de remonter aux paramètres globaux à l'échelle macroscopique. Ainsi Eitelberger *et al.* [139] sont remontés au tenseur de conductivité et au coefficient de diffusion de vapeur à partir de modèles analytiques d'homogénéisation.

Lux *et al.* [140] effectuent un travail similaire, dans lequel la structure est obtenue par tomographie à rayons X. Ceci permet le calcul précis de la fraction solide, du diamètre des fibres, de leur orientation et de la taille des pores, là encore des modèles analytiques de conductivité moyenne sont utilisés. El Hachem *et al.* [141] et [142] utilisent l'outil numérique à partir de la structure réelle issue du tomographe afin de caractériser le comportement hygrothermique du matériau.

A chaque fois, l'approche est de type "up-scaling" : on retrouve des paramètres globaux à partir de caractéristiques de la structure solide microscopique considérées comme connues et mesurées par ailleurs. Par contre on ne retrouve pas de méthodes de type "down-scaling" qui permettent à partir de la connaissance de caractéristiques globales, de remonter aux paramètres intrinsèques de la phase solide à l'échelle microscopique. C'est l'objectif de ce travail, où on utilise là encore des modèles réduits. Ces modèles rendent possible l'identification de ces paramètres à partir d'une géométrie complexe caractérisée par un grand nombre de degrés de liberté.

## 7.2 Position du problème

On s'intéresse ici à l'étude du bois, appelé à jouer un rôle important pour le bâtiment dans les prochaines années<sup>1</sup>. On cherche ainsi à retrouver les caractéristiques intrinsèques de la structure micrométrique d'un échantillon d'épicéa. Dans cette étude on se limite au bois totalement sec : aucun phénomène de diffusion de vapeur et d'humidité n'est pris en compte.

### 7.2.1 Le bois : une structure complexe

Le bois se distingue par une structure très complexe, qui diffère selon son essence, et que l'on considère comme poreux, fortement hétérogène et anisotrope.

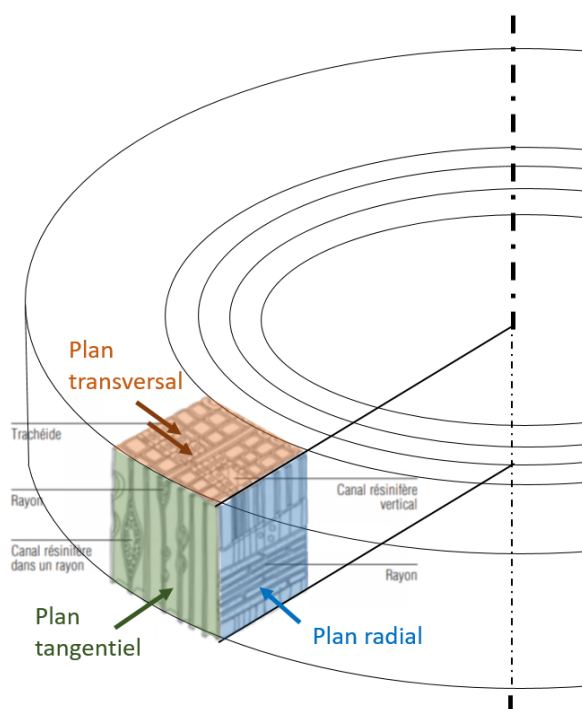


FIGURE 7.1 – Plans de coupe du bois

Comme le montre la figure 7.1, le bois est constitué de trois éléments principaux :

- les trachéides verticales qui sont des éléments en forme de canaux. Le lumen en constitue la partie creuse et est conducteur de la sève, et les parois de trachéides permettent le soutien mécanique de

1. Objectif de l'état français : attendre 10% de construction bois dans les établissements publics d'aménagement, à horizon 2020 (Conseil National de l'Industrie, "Plan d'action interministériel forêt-bois du 16/10/2018").

l'arbre. Selon les saisons, le diamètre et les épaisseurs de ces trachéides varient fortement pour un même épicéa. C'est ce qu'on appelle communément les fibres du bois.

- les rayons ligneux qui sont orientés horizontalement dans le sens radial. Ils sont composés d'un ensemble de cellules (les parenchymes) qui communiquent entre elles (par des ponctuations auréolées), ce qui permet le passage de la sève entre les trachéides,
- de plus chez certaines espèces, il existe des réseaux résinifères longitudinaux ou horizontaux, sortes de cavités tubulaires formées par plusieurs couches de cellules.

Compte tenu de cette structure, on distingue trois orientations principales [143] :

- le plan transversal, perpendiculaire à l'axe de l'arbre,
- le plan radial, passant par le centre de l'arbre,
- le plan tangentiel aux cernes du bois.

Initialement étudiée au microscope, la structure réelle du bois peut être maintenant très précisément caractérisée par la généralisation des appareils de tomographie à rayon X. Basée sur l'atténuation des rayons X par la matière, l'échantillon est scanné à différents angles de rotation et l'ensemble des images obtenues permet la reconstruction tridimensionnelle de la structure microscopique du bois.

Dans notre étude, on utilise une géométrie issue de la tomographie d'un Volume Élémentaire de Référence (VER) de type cubique dont les arêtes correspondent à une longueur  $L = 231 \mu\text{m}^3$ . La tomographie a été effectuée au Laboratoire de Mécanique et de Technologie (LMT) de l'ENS Paris Saclay. Ce maillage est présenté sur la Figure 7.2. On y voit apparaître clairement la phase solide des trachéides (en rouge) ainsi que les lumens et les rayons ligneux, qui ne contiennent ici que de l'air sec.

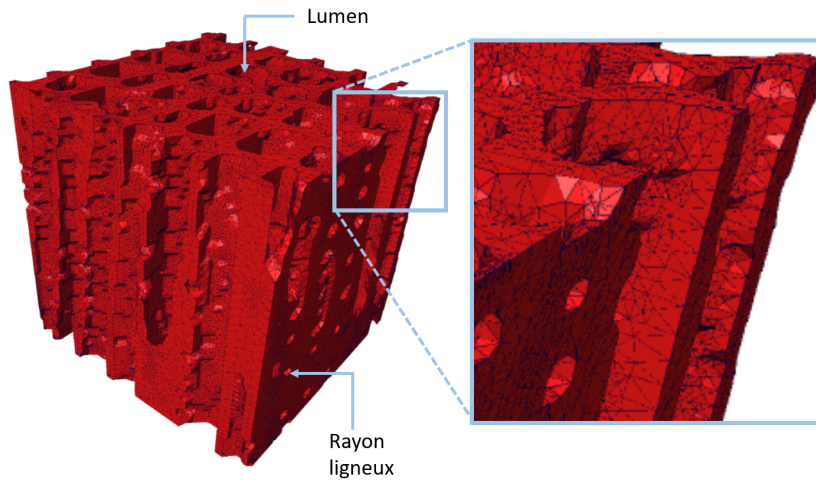


FIGURE 7.2 – Plans de coupe du bois

Le maillage obtenu est constitué de tétraèdres et est caractérisé par un nombre de nœuds  $N = 100000$ .

### 7.2.2 Définition des problèmes thermiques

Ce VER peut être décrit de deux manières, selon que l'on se place à l'échelle macroscopique ou microscopique :

- modèle macroscopique : le VER est considéré comme homogène et caractérisé par une capacité calorifique volumique moyenne  $\bar{c}$  et d'une conductivité thermique orthotrope  $\bar{k}(k_x, k_y, k_z)$  moyenne.
- modèle microscopique : le VER est considéré comme hétérogène car il est constitué des deux phases : solide et gazeuse. Chacune d'entre elles est caractérisée par une capacité et une conductivité isotrope.

On notera :

- pour la phase solide :  $k_S, c_S$
- pour la phase gazeuse(air) :  $k_G, c_G$

Pour chacun de ces deux modèles, on applique sur le VER des sollicitations qui correspondent à un flux thermique globalement unidirectionnel selon respectivement les trois directions principales  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Pour cela on impose des conditions non adiabatiques sur deux surfaces des frontières  $S_1$  et  $S_2$  positionnées en vis à vis :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 \quad -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \phi = 500 \text{ [W.m}^{-2}\text{]} \\ S_2 \quad -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = hT, \text{ où } h = 20 \text{ [W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}\text{]} \end{array} \right. \quad (7.1)$$

Les quatre autres surfaces sont adiabatiques et la température initiale est nulle. La Figure 7.3 présente les trois scénarios pour chaque modèle, et le Tableau 7.1 récapitule le positionnement des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  selon les scénarios considérés.

	$S_1$	$S_2$
Scénario #1	$\Gamma_{yz}^0$	$\Gamma_{yz}^e$
Scénario #2	$\Gamma_{xy}^0$	$\Gamma_{xy}^e$
Scénario #3	$\Gamma_{zx}^0$	$\Gamma_{zx}^e$

TABLE 7.1 – Scénarios des sollicitations thermiques



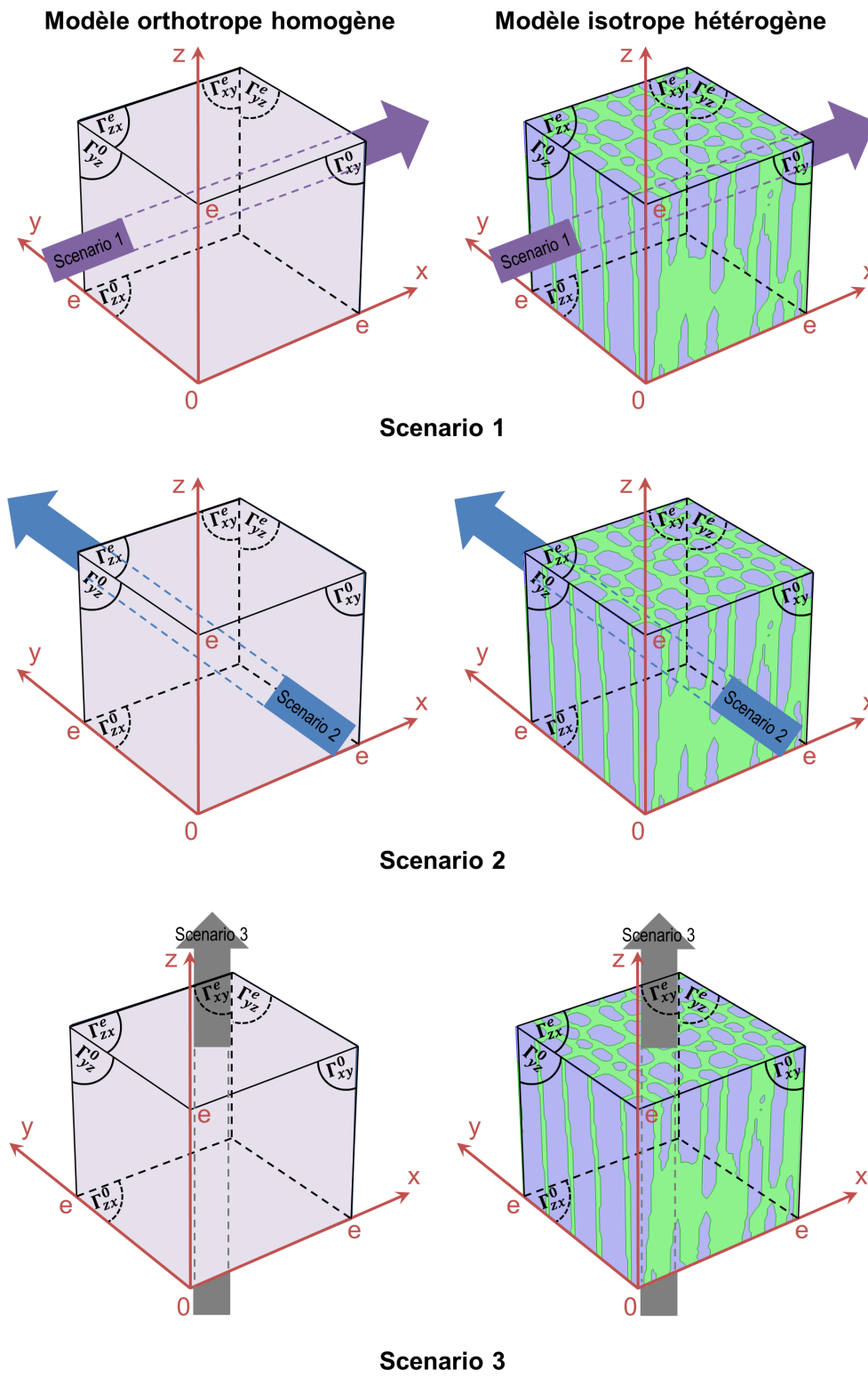


FIGURE 7.3 – Scénarios de simulation pour l'échantillon du bois

En écrivant la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur pour chacune de ces deux modélisations, on obtient les modèles complets suivants :

— Modèle Complet Homogène MCHO : variable  $T^{Ho}$

$$\int_{\Omega} \bar{c} g \frac{\partial T^{Ho}}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} T^{Ho} \bar{\mathbf{k}} \vec{\nabla} g d\Omega - \int_{S_1} T^{Ho} h g d\Gamma + \int_{S_2} \varphi g d\Gamma \quad (7.2)$$

Dans cette équation,  $g \in H^1$  est la fonction test de ce problème variationnel. Compte tenu de l'aspect unidirectionnel des sollicitations thermiques définies par les scénarios 1 à 3, ce problème homogène devient un simple problème 1D instationnaire<sup>2</sup>  $T(X, t)$  où  $X = x, y$  ou  $z$  selon les scénarios. On notera ainsi  $T_{S_1}^{Ho}$  et  $T_{S_2}^{Ho}$  les températures des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  obtenues par ce modèle.

— Modèle Complet Hétérogène MCHE : variable  $T^{He}$

$$\begin{aligned} c_S \int_{\Omega_S} g \frac{\partial T^{He}}{\partial t} d\Omega + c_G \int_{\Omega_G} g \frac{\partial T^{He}}{\partial t} d\Omega = \\ - k_S \int_{\Omega_S} \vec{\nabla} T^{He} \vec{\nabla} g d\Omega - k_G \int_{\Omega_G} \vec{\nabla} T^{He} \vec{\nabla} g d\Omega \\ - \int_{S_1} T^{He} h g d\Gamma + \int_{S_2} \varphi g d\Gamma \end{aligned} \quad (7.3)$$

Soit sous forme discrète :

$$(c_S \mathbf{C}_S + c_G \mathbf{C}_G) \dot{\mathbf{T}}^{He} = (k_S \mathbf{K}_S + k_G \mathbf{K}_G + \mathbf{H}) \mathbf{T}^{He} + \mathbf{U} \quad (7.4)$$

En partant de mesures générées par le modèle homogène orthotrope MCHO (7.2), l'objectif est d'estimer les propriétés des fibres ( $c_S$  et  $k_S$ ) qui apparaissent dans le modèle hétérogène MCHE (7.3), par comparaison entre des températures sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . Pour le modèle hétérogène MCHE, on calculera alors la température moyenne de chaque surface :

$$i = 1, 2 \quad \bar{T}_{S_i}^{He} = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} T^{He} d\Gamma \quad (7.5)$$

Ce problème inverse engendre un grand nombre de simulations, incompatible avec un modèle numérique de grand taille de type éléments finis. On va alors chercher à construire un modèle numérique de type modal.

<sup>2</sup>. Ce problème 1D peut être résolu analytiquement par séries de Fourier.

### 7.3 Le modèle réduit

Comme pour les études précédentes, le modèle réduit modal est de type AROMM, qui s'appuie (i) sur le calcul d'une base générique  $V_i$ , (ii) qui est alors réduite par la technique d'Amalgame à partir de champs de températures de référence.

#### 7.3.1 Base générique : Dirichlet-Steklov

Jusqu'à présent, nous avons toujours utilisé la base de Branche (3.40), bien adaptée aux problèmes inverses pour lesquels les paramètres à identifier sont intrinsèques au problème thermique (conductivité, capacité,...). La difficulté de ce type de base est que les deux familles de modes qui apparaissent dans la base calculée (et qui sont nécessaires à une reconstruction correcte des champs de température) sont réparties de façon déséquilibrée dans la base : il faut ainsi effectuer le calcul complet des modes de la base de Branche, ce qui pose des problèmes de temps de calcul et de stockage pour des problèmes de grande dimension.

On a vu au chapitre 3 que pour dépasser cette limite, une nouvelle famille de modes a été développée : il s'agit de la base de Dirichlet-Steklov que nous utilisons ici. Comme présentée au chapitre 3, cette base correspond à la réunion de deux bases qui, appliquées au problème posé, sont définies par les équations aux valeurs propres suivantes :

— Base de Dirichlet (3.28),

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall M \in \Omega_S, \quad k_{S_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \hat{V}_i^D) = z_i^D c_{S_0} \hat{V}_i^D \\ \forall M \in \Omega_G, \quad k_{G_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \hat{V}_i^D) = z_i^D c_{G_0} \hat{V}_i^D \\ \forall M \in \Gamma, \quad \hat{V}_i^D = 0 \\ \text{(où } \Gamma = \Gamma_{xy}^0 \cup \Gamma_{xy}^e \cup \Gamma_{xz}^0 \cup \Gamma_{xz}^e \cup \Gamma_{yz}^0 \cup \Gamma_{yz}^e \text{)} \end{array} \right. \quad (7.6)$$

— Base de Steklov (3.48),

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall M \in \Omega, \quad \vec{\nabla} \cdot (k_0 \vec{\nabla} \hat{V}_i^S) = 0 \\ \text{(où } \Omega = \Omega_S \cup \Omega_G \text{)} \\ \forall M \in \Gamma, \forall X = S, G, \quad k_{0X} \vec{\nabla} \hat{V}_i^S \cdot \vec{n} = -z_i^S \zeta \hat{V}_i^S \end{array} \right. \quad (7.7)$$

— Enfin, le coefficient de Steklov  $\zeta = 17,80 \text{ [J.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}]$

On voit ainsi que la résolution de ces deux problèmes aux valeurs propres nécessite le choix des différents paramètres intervenant dans ces équations. On choisit ainsi :

— Pour la fraction gazeuse (air) :

$$k_{G_0} = 0,025 [\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$$

$$c_{G_0} = 1,2 \times 10^3 [\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}]$$

— Pour la fraction solide (pour laquelle les paramètres sont inconnus) on choisit a priori :

$$k_{S_0} = 0,53 [\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$$

$$c_{S_0} = 1,2 \times 10^6 [\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}]$$

Puisque la résolution de chacun de ces deux problèmes permet d'obtenir deux familles de modes complémentaires et totalement indépendants, il est alors possible de ne calculer qu'une fraction de chacune d'entre elles. On choisit ici de calculer 20% des deux bases.

La Figure 7.4 représente quelques uns des modes de chaque famille. On visualise sur cette figure, l'influence des caractéristiques thermiques  $k_0$  et  $c_0$  associées à chaque phase solide ou gazeuse, qui donnent aux isovaleurs représentées un aspect granuleux.

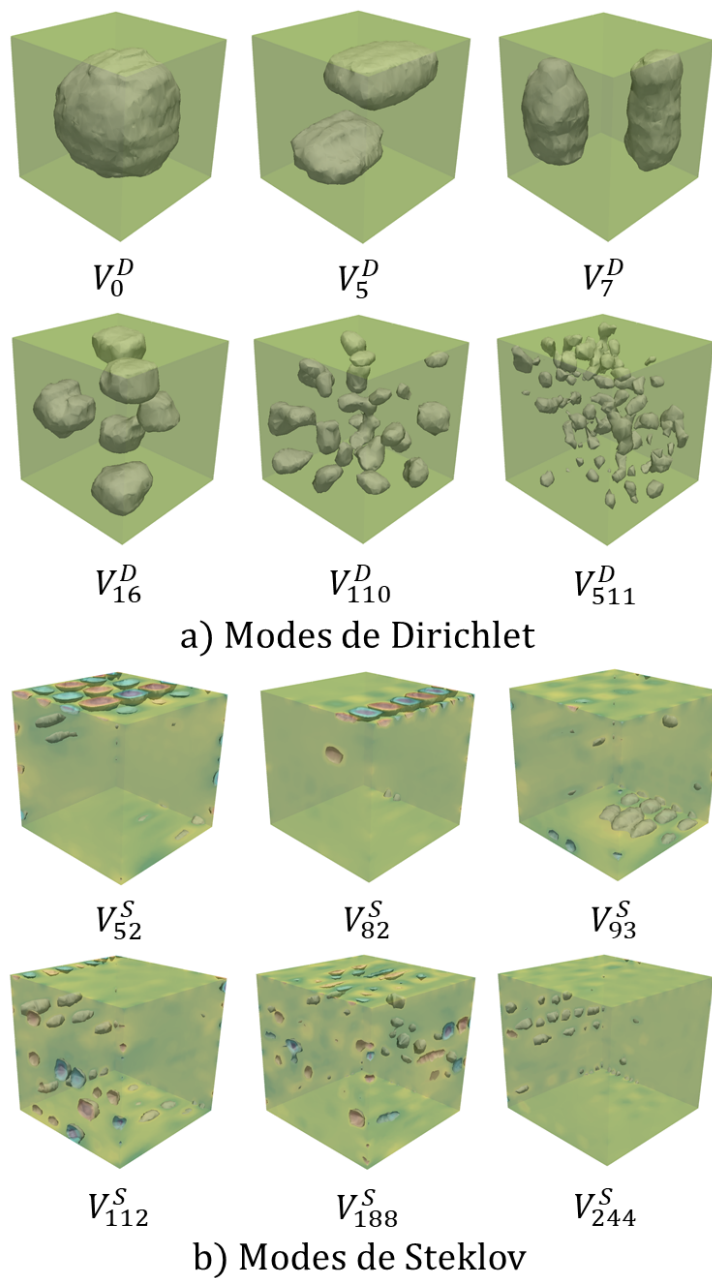


FIGURE 7.4 – Représentation des modes de Dirichlet et modes de Steklov

Afin de vérifier la pertinence de la base de Dirichlet-Steklov, on effectue alors le calcul de l'erreur de projection pour un champ de température donné. Celui-ci s'effectue en deux temps : d'une part, les calculs des états d'excitation associés au champ de température tels que définis au chapitre 3 par l'équation (3.56); d'autre part, le calcul de l'erreur à partir des états définis au chapitre 4 par l'équation (4.13).

Dans ces tests :

- On utilise deux scénarios définis par le tableau suivant.

	$S_1$	$S_2$
Scénario #1	$\Gamma_{yz}^0$	$\Gamma_{yz}^e$
Scénario #4	$\Gamma_{yz}^0 \cup \Gamma_{xy}^0 \cup \Gamma_{zx}^0$	$\Gamma_{yz}^e \cup \Gamma_{xy}^e \cup \Gamma_{zx}^e$

TABLE 7.2 – Scénarios des sollicitations thermiques

- On applique différentes valeurs de propriétés thermiques.
- Deux bases de tailles différentes (20% et 5%) sont utilisées.

Scénario	$k [10^{-2} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$	$c [10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}]$	$\bar{\sigma}_{MP} [10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}]$	$\sigma_{MPmax} [10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}]$
#1	0,53	1,2	0,020	2,956
#1	0,30	4,0	3,896	42,114
#1	0,10	1,2	15,118	81,736
#4	0,13	1,2	10,599	62,859

TABLE 7.3 – Erreurs de projection pour la base de Dirichlet-Steklov à 20% (18382 modes)

Scénario	$k$ [ $10^{-2}$ W.m $^{-1}$ .K $^{-1}$ ]	$c$ [ $10^6$ J.m $^{-3}$ .K $^{-1}$ ]	$\bar{\sigma}_{MP}$ [ $10^{-3}$ °C]	$\sigma_{MPmax}$ [ $10^{-3}$ °C]
#1	0,53	1,2	0,335	16,013
#1	0,30	4,0	1,318	43,603
#1	0,10	1,2	6,460	163,077
#4	0,13	1,2	4,594	129,612

TABLE 7.4 – Erreurs de projection pour la base de Dirichlet-Steklov à 5% (4597 modes)

L'ensemble de ces erreurs est très faible. On note ainsi l'intérêt d'utiliser des bases de Dirichlet-Steklov : une fraction de chacune de ces deux bases permet une reconstitution satisfaisante des champs de température, ce qui n'est pas du tout le cas pour la base de Branche.

### 7.3.2 Base réduite et équation d'état

La procédure de réduction est en tout point similaire à celles effectuées dans les études précédentes. Les champs de référence choisis pour l'Amalgame sont les suivants :

- les trois scénarios présentés dans le Tableau 7.1, c'est à dire des flux unidirectionnels imposés dans les directions principales  $x$ ,  $y$  puis  $z$ ,
- un scénario supplémentaire qui correspond à une relaxation des températures dans les trois directions (ce qui permet de prendre en compte l'aspect 3D) :

$$\begin{cases} \forall g \in H^1(\Omega), & \int_{\Omega} c T g d\Omega = - \int_{\Omega} k \vec{\nabla} T \vec{\nabla} g d\Omega + \int_{\Gamma} h T d\Gamma \\ t = 0 & T_0 = 30 \text{ [}^\circ\text{C]} \end{cases} \quad (7.8)$$

Pour ces quatre problèmes thermiques, on choisit a priori les propriétés des fibres<sup>3</sup> :

$$k_S = 0,1 \text{ [W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}] \quad \text{et} \quad c_S = 1,2 \times 10^6 \text{ [J.m}^{-3}\text{.K}^{-1}]$$

L'obtention de la base réduite permet de calculer directement l'équation d'état associée, qui s'écrit sous forme compacte :

---

3. Nous aurions pu effectuer l'Amalgame à partir d'ensembles de propriétés qui définissent un domaine possible, comme effectué lors du chapitre 4. Dans un premier test, nous nous contentons d'une seule valeur qui provient d'une étude

$$(c_F \mathbf{L}_F + c_G \mathbf{L}_G) \dot{\tilde{\mathbf{X}}} = (k_F \mathbf{M}_F + k_G \mathbf{M}_G + \mathbf{M}_H) \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{N} \quad (7.9)$$

Les dimensions de ce problème correspondent alors à l'ordre  $\tilde{n}$  du modèle réduit. Sa résolution permet l'obtention des états d'excitation  $\tilde{x}$  et donc des températures  $T^{He}$ . Cette équation constitue le Modèle Réduit Hétérogène MRHE qui sera utilisé dans la procédure inverse d'identification.

Dans notre cas le choix d'un modèle réduit d'ordre  $\tilde{n} = 200$  est effectué. La Figure 7.5 montre l'évolution de la température moyenne  $\bar{T}_{S_1}^{He}$  par modèle complet et par modèle réduit dans une configuration différente de celle utilisée pour la réduction du modèle, soit  $k_S = 0,3 \text{ [W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$  et  $c_S = 4.10^6 \text{ [J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}]$ . Là encore les propriétés du gaz ne changent pas puisqu'elles sont connues.

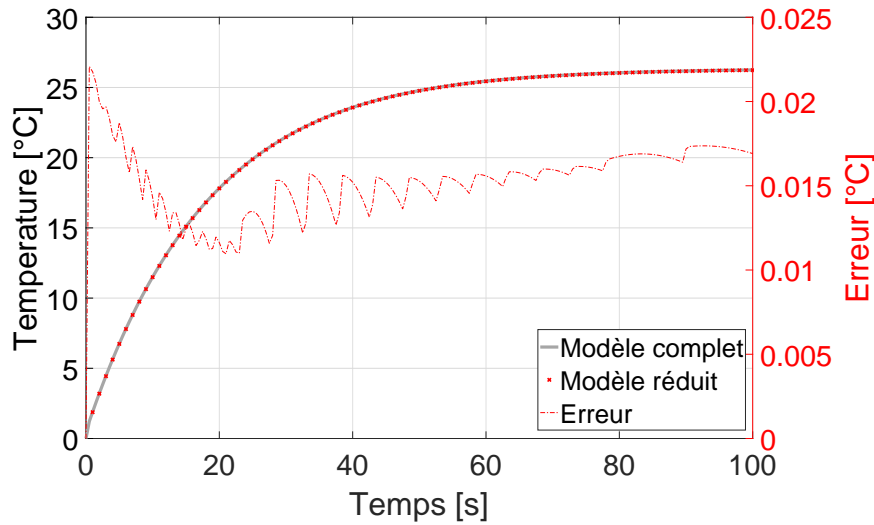


FIGURE 7.5 – Erreur de  $\bar{T}_{S_1}^{He}$  entre le modèle complet et modèle réduit

Le gain en temps de calcul du modèle MCHE par rapport à celui du modèle MRHE, permet d'exécuter une simulation 220 fois plus vite en ayant une erreur maximum de l'ordre de  $0,02 \text{ [}^\circ\text{C]}$  (voir Figure 7.5). Les résultats obtenus sont très satisfaisants et montrent l'intérêt de ces modèles pour l'identification des paramètres  $k_F$  et  $c_F$ .



## 7.4 Problème inverse

Comme présenté précédemment, on cherche ici à identifier la valeur des propriétés thermiques de la structure solide du VER  $k_S$  et  $c_S$ , à partir de la connaissance des valeurs globales à l'échelle macroscopique  $\bar{k}_{xx}$ ,  $\bar{k}_{yy}$ ,  $\bar{k}_{zz}$ ,  $c$ , qui peuvent être déterminées expérimentalement. La Figure 7.6 synthétise la procédure.

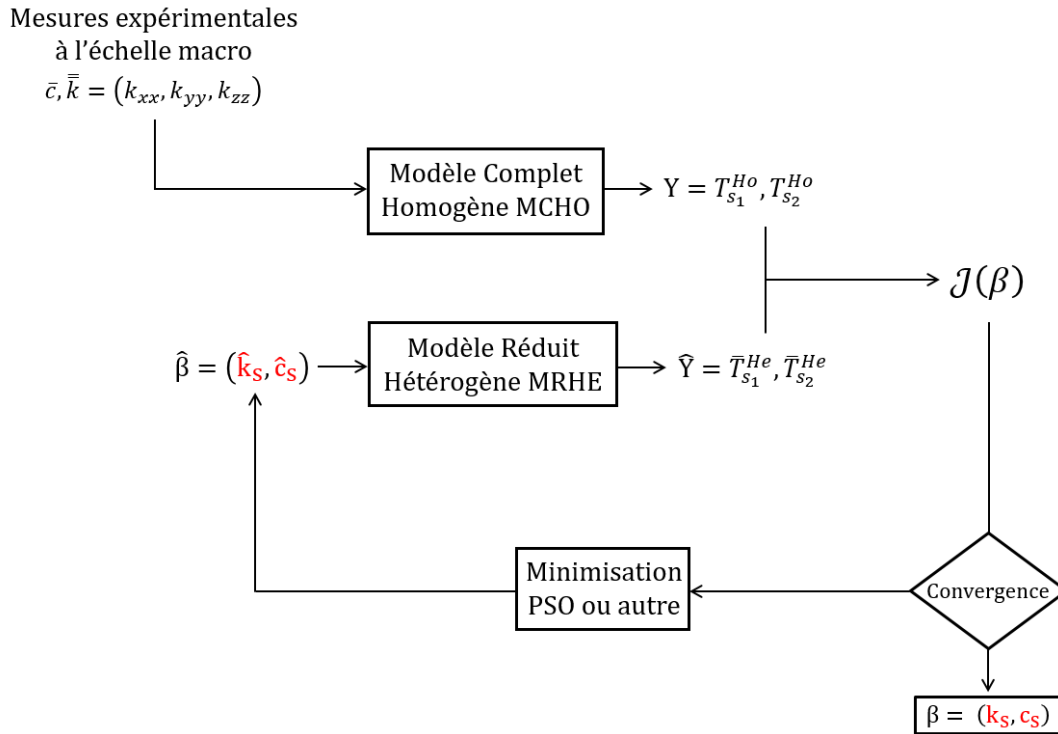


FIGURE 7.6 – Schéma d'identification des propriétés thermiques du bois

### 7.4.1 Obtention des mesures

Afin d'obtenir les observables  $T_{S_1}^{Ho}$  et  $T_{S_2}^{Ho}$  à partir du modèle homogène (7.2), on cherche ici à définir numériquement les valeurs des caractéristiques physiques  $\bar{k}$  et  $\bar{c}$ , normalement obtenues expérimentalement. La détermination de ces propriétés est issue du modèle hétérogène isotrope (7.3) avec respectivement les scénarios 1, 2 et 3 (Tableau 7.1) et qui amènent simplement au tenseur orthotrope de conductivité, par la relation suivante :

$$k_{ii} = \frac{\phi_i}{\bar{T}_{S_1}^{He} - \bar{T}_{S_2}^{He}} \times \frac{e}{S} \quad (7.10)$$

avec  $i = x, y, z$  selon le scénario utilisé

La capacité moyenne est obtenue par la relation :

$$\bar{c} = c_S \int_{\Omega_S} d\Omega + c_G \int_{\Omega_G} d\Omega \quad (7.11)$$

Pour des caractéristiques de fibres  $k_S = 0,3$  [W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>] et à  $c_S = 4.10^6$  [J.m<sup>-3</sup>.K<sup>-1</sup>], on obtient les valeurs suivantes :

$$\bar{k}_{xx} = 0,087$$
 [W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>],  $\bar{k}_{yy} = 0,099$  [W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>],  $\bar{k}_{zz} = 0,123$  [W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>], et  $\bar{c} = 1,558.10^6$  [J.m<sup>-3</sup>.K<sup>-1</sup>].

Notons que les conductivités  $k_{xx}$  et  $k_{yy}$ , orthogonales au sens des fibres sont relativement différentes l'une de l'autre, et inférieures à  $k_{zz}$  correspondant au sens des fibres. Les valeurs sont alors utilisées dans le modèle homogène orthotrope pour donner accès aux observables  $\mathbf{Y} = \{T_{S_1}^{Ho}, T_{S_2}^{Ho}\}$ .

## 7.4.2 Résultats de l'identification

Afin de vérifier la pertinence des résultats, différentes identifications sont effectuées à partir de chacun des trois scénarios (Tableau 7.1). L'efficacité du processus d'identification est caractérisée par l'erreur relative de chaque paramètre estimé :

$$\sigma_{\beta_i} = \frac{|\hat{\beta}_i - \beta_i|}{\beta_i} \quad (7.12)$$

Le Tableau 7.5 montre l'efficacité de la méthode puisque pour tous les cas la précision est très satisfaisante autant pour la conductivité thermique que pour la capacité calorifique.

Sens de sollicitation	$k_F$ [W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\hat{k}_F$	$\sigma_k$ [%]	$c_F$ 10 <sup>6</sup> [J.m <sup>-3</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\hat{c}_F$	$\sigma_c$ [%]	$t_{CPU}$ [h]
xx	0,3	0,299	0,230	4,00	4,051	1,276	4,1
yy		0,298	0,798		4,042	1,052	5,2
zz		0,296	1,290		4,048	1,212	3,6

TABLE 7.5 – Résultats de l'identification

Afin d'estimer l'effet de l'incertitude de la détermination expérimentale des coefficients globaux  $\bar{k}$  et  $\bar{c}$ , une dernière estimation est effectuée en considérant que toutes les propriétés du matériau homogène sont augmentées de 2%. Ce calcul est mené pour une sollicitation orientée selon l'axe  $x$  (scénario 1). L'augmentation de l'incertitude dans le processus d'identification atteint alors 2,9% pour la conductivité et 3,3%

pour la capacité par rapport aux valeurs recherchées  $k_f = 0,3$  [ $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ] et  $c_f = 4.10^6$  [ $\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ]. On voit ainsi que l'ordre de grandeur de l'augmentation de l'erreur d'identification reste du même ordre de grandeur que l'erreur expérimentale.

## 7.5 Influence du VER

Tout le principe de cette technique repose sur la capacité du VER à avoir un comportement identique à celui du matériau considéré au niveau macroscopique.

Afin de vérifier cette propriété, des relevés tomographiques supplémentaires permettent d'extraire un deuxième volume élémentaire représentatif de mêmes dimensions mais de microstructure géométrique différente (voir Figure 7.7).

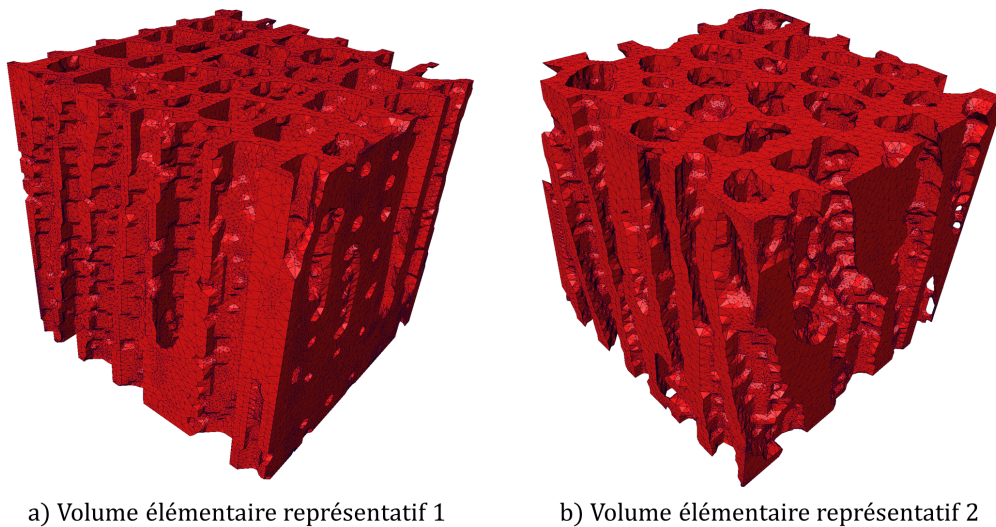


FIGURE 7.7 – Représentation de deux VER du bois

À partir des paramètres de la phase solide choisis précédemment ( $k_S = 0,3$  [ $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ] et  $c_S = 4.10^6$  [ $\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ]) des simulations complètes du modèle hétérogène ont été effectuées afin d'obtenir les températures moyennes des différentes surfaces et donc de remonter aux propriétés globales du VER considéré comme homogène (7.2). Le Tableau 7.6 récapitule les résultats obtenus.

No. VER	$\bar{k}_{xx}$ [W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\bar{k}_{yy}$ [W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\bar{k}_{zz}$ [W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\bar{c}$ [J.m <sup>-3</sup> .K <sup>-1</sup> ]
1	0,087	0,099	0,123	1,558.10 <sup>6</sup>
2	0,117	0,110	0,153	2,054.10 <sup>6</sup>

TABLE 7.6 – Résultats du tenseur de conductivité et la capacité thermique pour les deux VER

On voit ainsi que les trois valeurs de conductivité thermique ainsi que celle de la capacité calorifique varient fortement selon le VER considéré. En d'autres termes les deux géométries utilisées ne correspondent pas à de véritables Volumes Élémentaires Représentatifs. Cela est dû à leur taille trop réduite.

## 7.6 Conclusion

L'objectif de ce travail était de voir s'il était possible de remonter aux caractéristiques intrinsèques de la phase solide d'un matériau fibreux tel que le bois, à partir de mesures globales, qui peuvent être aisément mesurées à l'échelle macroscopique par des moyens de mesures conventionnels. L'étude a ainsi montré que l'obtention de la structure complexe d'un petit échantillon par tomographie permet effectivement la mise en place d'un modèle numérique réduit qui amène à des résultats de simulations précis sur tout le domaine, et en un temps suffisamment court pour être utilisés dans une procédure itérative d'identification.

Les résultats obtenus pour plusieurs scénarios de sollicitation sont bien concordants, et prouvent l'efficacité du procédé. En revanche, la condition d'utilisation de cette technique est de pouvoir disposer d'une géométrie à l'échelle microscopique qui soit représentative de l'échelle macroscopique, ce qui n'est pas le cas actuellement. Cela tient dans les capacités du tomographe à reconstituer le niveau de précision obtenu avec les volumes utilisés ici, pour de plus grandes dimensions d'échantillons.

L'obtention de telles structures va alors entraîner une forte augmentation du nombre de degrés de libertés du modèle numérisé : Multiplier par deux ou trois chaque dimension du volume étudié va correspondre à un nombre d'inconnues du modèle numérique respectivement de l'ordre de 800000 ou de 2700000 nœuds. On voit ici l'intérêt d'utiliser des modèles réduits pour la procédure d'identification.

En ce qui concerne la technique de réduction à proprement dit, on a montré que l'utilisation d'une base de Dirichlet Steklov permet de ne calculer qu'une petite partie de la base complète. Si ce choix n'était pas une nécessité pour la configuration étudiée dans ce chapitre, il est certain qu'une telle possibilité va

s'avérer particulièrement intéressante dans un modèle numérique de très grande dimension correspondant à un véritable Volume Élémentaire Représentatif.



## Chapitre 8

# Conclusion générale et perspectives

L'objectif de ce travail de thèse était de montrer l'intérêt d'utiliser un modèle réduit modal dans le cadre de la caractérisation thermique d'un matériau, c'est-à-dire estimer sa conductivité thermique et sa capacité calorifique. La question posée à l'origine de ce travail était alors de voir si ce type de modèle était capable de reconstituer de façon précise le comportement thermique d'un système, quelle que soit la valeur de ses paramètres intrinsèques.

Deux applications ont été considérées dans ce travail.

La première problématique était le suivi de la caractérisation thermique in-situ de matériaux de construction, qui bien que non effectuées actuellement, pourrait s'avérer pertinente compte tenu de la problématique actuelle de maîtrise de la consommation d'énergie dans le bâtiment, des modifications des techniques d'isolation et de l'arrivée de matériaux bio-sourcés dont on connaît mal l'évolution au cours du temps.

L'étude bibliographique a montré la difficulté de l'exercice et un objectif pratique a été la mise en place d'une solution via une sonde à fil chaud, jusqu'alors peu adaptée aux matériaux isolants ni à la détermination de la capacité calorifique. Les travaux effectués ont abouti à deux types de modèles : Un premier modèle s'appuie sur une description exacte des différents constituants de la sonde. Pour une connaissance précise de cette sonde et pour un contact parfait entre cette sonde et le matériau à caractériser, les résultats ont montré l'efficacité du procédé, et ce quelle que soit la méthode d'identification utilisée (méthode PSO ou méthode de régions de confiance). En revanche, à partir du moment où le contact

entre la sonde et l'isolant devient imparfait, les calculs ont montré la difficulté à identifier précisément la capacité calorifique.

Un second modèle a alors été testé qui cette fois repose sur un modèle simplifié de la sonde supposée constituée d'un matériau unique, et qui nécessite alors une caractérisation préalable de ses propres caractéristiques thermiques. L'intérêt de cette solution est alors de s'affranchir à la fois de la connaissance précise de la sonde ainsi que de la nécessité d'obtenir un contact parfait entre la sonde et l'isolant. D'un point de vue de la technique de réduction, on a alors montré que l'impossibilité de se référer à des caractéristiques connues pour ce modèle de sonde nécessitait le couplage entre la phase de réduction de modèle et la phase d'identification des caractéristiques de cette sonde. Ce couplage a alors permis d'obtenir un modèle réduit simplifié (MRS) optimisé, mais néanmoins caractérisé par une erreur plus importante que l'erreur liée à la réduction proprement dite. Lors de la phase d'identification du matériau isolant, on a alors montré la nécessité de mettre en place un critère d'arrêt qui permet de stopper le processus itératif avant que la procédure ne cherche à compenser cette erreur par l'obtention de valeurs de capacité éloignée de la valeur réelle. La difficulté est alors de pouvoir prédire ce critère. On a par ailleurs fait apparaître que l'effet de ce critère d'arrêt diminue lorsque la durée de chauffage augmente.

Une partie expérimentale a été effectuée afin de chercher à quantifier l'intérêt de la technique développée, en la comparant à d'autres techniques de laboratoire, c'est-à-dire des techniques conventionnelles (conductivimètre en régime établi et calorimètre DSC), ainsi que la technique du Hot Disc. Les premiers résultats ont permis de conforter les conclusions des études numériques, à savoir que la méthode mise en œuvre permet effectivement d'identifier in situ et rapidement la conductivité thermique d'un matériau isolant. A contrario, les résultats concernant la capacité calorifique sont très imprécis.

L'ensemble de ce travail pourrait être poursuivi sur différents plans. La caractérisation d'un contact imparfait pourrait permettre d'utiliser le modèle hétérogène afin de parvenir à caractériser la capacité. Une autre approche pourrait être de tenter d'évaluer directement le contact imparfait de façon expérimentale.

En ce qui concerne le modèle homogène identifié, il est nécessaire soit de parvenir à qualifier le critère d'arrêt, soit de s'en affranchir en imposant une puissance variable dans le temps afin d'accélérer la dynamique du processus.

Une campagne expérimentale plus complète doit être menée afin de vérifier les résultats obtenus jusqu'à présent, y compris en appliquant la technique du modèle identifié MRS.



Si ces tests confirment la tendance observée ici, c'est-à-dire la difficulté à identifier la capacité, l'idée serait alors de revoir entièrement la conception de la sonde. En effet, nous avons ici utilisé une sonde la plus proche possible de la configuration théorique du fil chaud, ce qui a entraîné d'une part de nombreuses difficultés numériques en termes de réalisation, de définition de la géométrie, et d'autre part une faible sensibilité de la sonde à la capacité calorifique. Puisque le modèle est numérique, et que la technique de réduction est générale à tout type de géométrie, rien ne s'oppose à définir une conception différente, éloignée de la géométrie filaire utilisée jusqu'ici. Tout est à faire dans ce domaine.

Un second domaine d'études a consisté à chercher à identifier les caractéristiques à l'échelle microscopique d'un matériau biosourcé. On a considéré ici un bois sec, pour lequel l'utilisation d'un tomographe permet d'avoir accès à une définition précise de la géométrie. Les premiers résultats ont permis là encore de valider l'utilisation d'un modèle réduit dans le processus d'identification. Dans l'état actuel de nos travaux, la difficulté est aujourd'hui d'obtenir un échantillon décrit par le tomographe qui corresponde à un véritable Volume Élémentaire Représentatif des phénomènes traités. Compte tenu de la taille d'autant plus importante du modèle numérique qu'on obtiendra alors, on voit immédiatement l'intérêt de la technique de réduction modale utilisée ici. Pour finir, cette étude purement thermique doit être couplée avec les phénomènes de diffusion de vapeur et d'humidité. Il serait intéressant de voir dans quelles mesures ces phénomènes pourraient eux même faire l'objet d'une réduction modale.



# Annexes



# Annexe A

## Particularité de la base de Branche

Lorsqu'on traite un problème physique ayant plusieurs domaines, le choix de la base est essentiel pour garantir une résolution la plus conforme à la réalité.

Quand il s'agit d'un problème inverse, les propriétés thermiques (conductivité et capacité thermique) utilisées pour la construction du problème aux valeurs propres sont différentes de celles qu'on cherche à identifier. Les méthodes de réduction classiques deviennent alors inadéquates pour un problème inverse. Les modes de Branche sont capables de former une base quelles que soient les valeurs de conductivité, capacité et des conditions aux limites d'un problème thermique.

On cherche ici à étudier l'influence des paramètres physiques ( $k, c$ ) utilisés dans le problème aux valeurs propres, sur le comportement du modèle réduit de Branche.

### A.1 Matériau homogène

Lorsque on reprend le problème aux valeurs propres donné par la base de Branche par l'équation (3.40) (Chapitre 3) en une seule dimension, on obtient :

$$0 < x < L \quad \lambda_0 \frac{d^2 V_i}{dx^2} = z_i c V_i \quad (\text{A.1})$$

$$x = 0 \quad \lambda_0 \frac{dV_i}{dx} = z_i \zeta V_i \quad (\text{A.2a})$$

$$x = L \quad \lambda_0 \frac{dV_i}{dx} = -z_i \zeta V_i \quad (\text{A.2b})$$

La résolution de ce problème permet d'obtenir le résultat suivant :

$$V_i = A_i \left[ \cos \left( \alpha_i \frac{x}{L} \right) - \frac{\alpha_i}{2} \sin \left( \alpha_i \frac{x}{L} \right) \right] \quad (\text{A.3})$$

et

$$z_i = -\frac{\alpha_i^2 a_0}{L^2} < 0 \quad (\text{A.4})$$

avec  $a_0 = \frac{\lambda_0}{c_0} [m^2.s^{-1}]$  comme la diffusivité thermique.

Le coefficient  $\alpha_i$  est obtenu par résolution de l'équation transcendante suivante :

$$\tan \alpha_i = \frac{\alpha_i}{\frac{\alpha_i^2}{4} - 1} \quad (\text{A.5})$$

On voit ainsi que :

- l'évolution spatiale des différents vecteurs propres  $V_i$  est indépendante des caractéristiques du matériau (A.3) ;
- la valeur propre varie linéairement avec la diffusivité thermique  $a_0$  (A.4).

Un test numérique est effectué pour une simple géométrie 2D, un carré de 1m x 1m, correspondant à un domaine homogène. On choisit de comparer deux bases obtenues par résolution numérique du problème aux valeurs propres de Branche (3.40), en choisissant les paramètres suivants :

- Base n°1 :  $\lambda_0^{(1)} = 0,01 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$   $c_0^{(1)} = 60000 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$  d'où  $a_0^{(1)} = 1,667 \times 10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  ;
- Base n°2 :  $\lambda_0^{(2)} = 1,00 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$   $c_0^{(2)} = 60000 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$  d'où  $a_0^{(2)} = 1,667 \times 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ .

Soit finalement un rapport,

$$\frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(2)}} = \frac{1}{100} \quad (\text{A.6})$$

La Figure A.1 permet de retrouver les résultats analytiques du cas 1D, puisque :

- elle représente l'évolution des constantes de temps des deux bases, présentées dans l'ordre décroissant. On note ainsi que ces évolutions sont similaires pour les deux bases avec un rapport  $\Delta\tau$  égal au rapport des diffusivités;
- sur cette même figure sont représentés quelques vecteurs propres. Il apparaît ainsi que ces vecteurs propres  $V_i(M)$  sont les mêmes pour les deux bases; ils sont indépendants de la diffusivité.

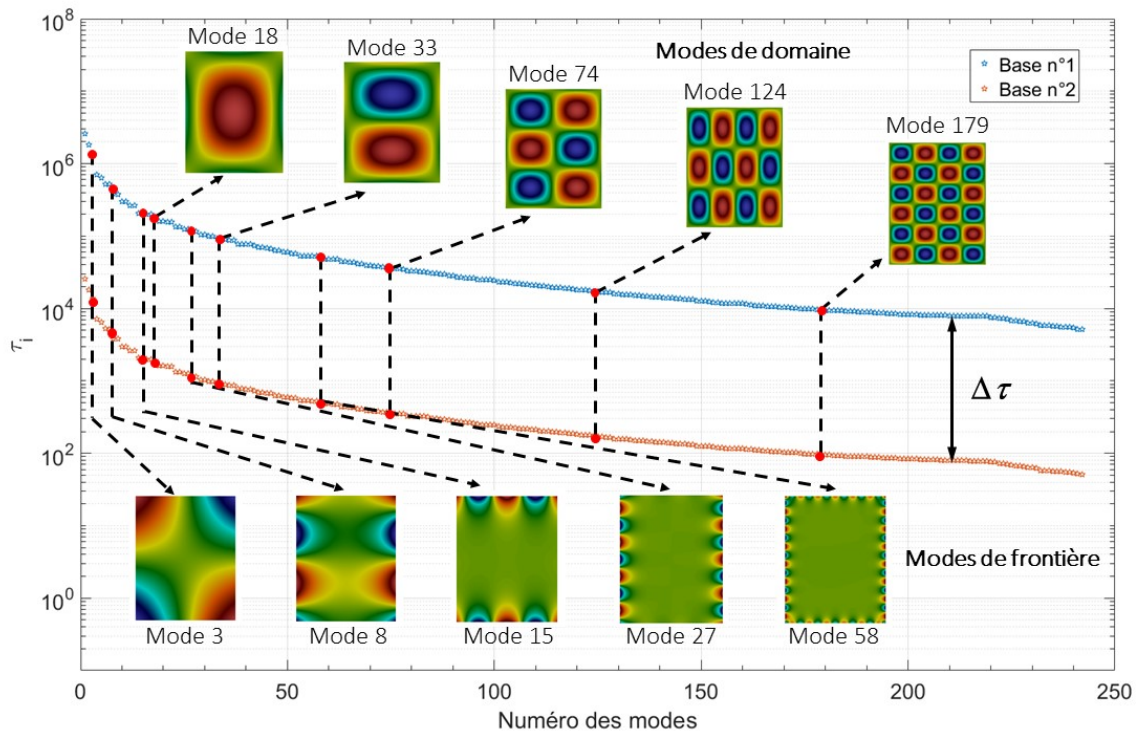


FIGURE A.1 – Évolution de la constante de temps  $\tau_i$  du matériau homogène et représentation de quelques vecteurs propres associés

On retrouve par ailleurs les spécificités de la base de Branche à savoir :

- une séparation des modes en deux familles de domaine ou de frontière;
- une augmentation des oscillations spatiales des modes lorsque l'ordre des modes augmente et que la constante de temps diminue.

## A.2 Matériaux à plusieurs domaines

Dans le cas où un même matériau est composé de plusieurs domaines (Figure A.2), le comportement n'est plus le même. On choisit ici la configuration suivante :

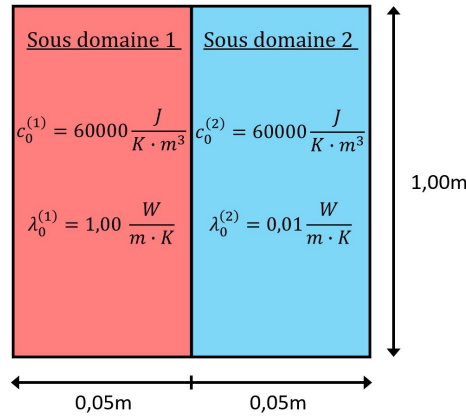


FIGURE A.2 – Configuration du matériau

La Figure A.3 présente l'évolution des vecteurs  $V_i$  en fonction de la constante de temps correspondante. Il est possible alors d'interpréter les comportements obtenus.

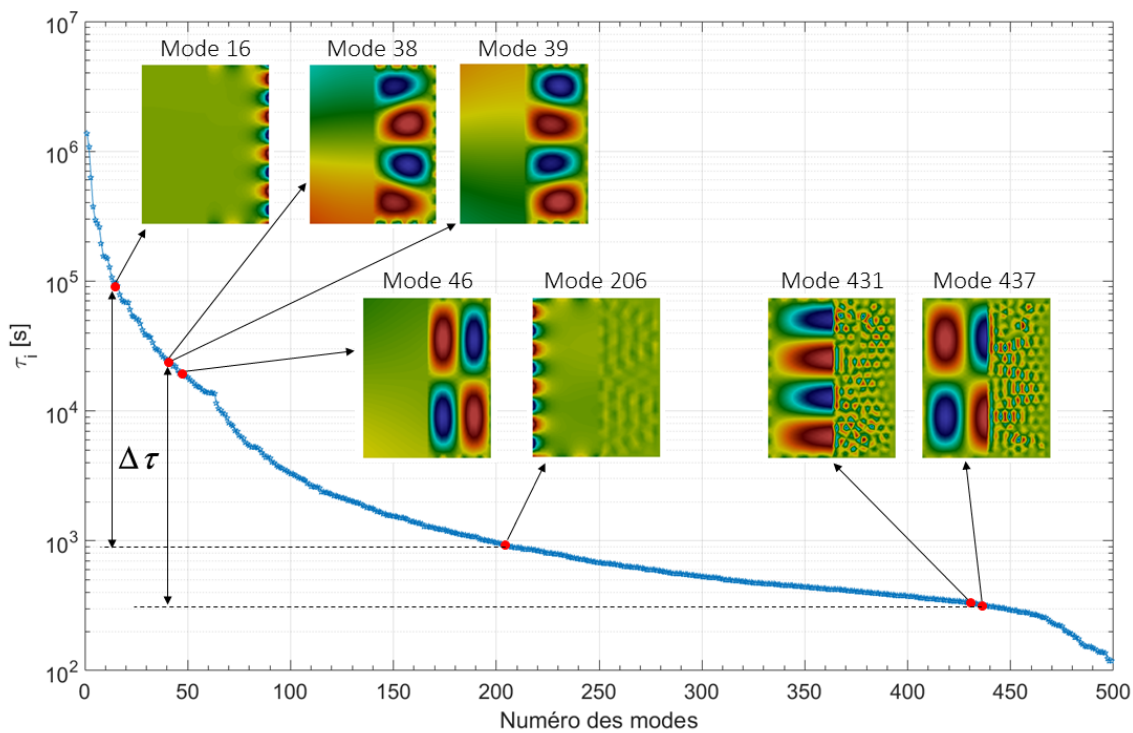
Tout d'abord quand on analyse les évolutions spatiales pour chacun des deux sous-domaines pris indépendamment l'un de l'autre, on retrouve les spécificités des bases de Branche déjà décrites précédemment à savoir la séparation de la base en modes de frontière et de domaine, et l'augmentation des oscillations spatiales en fonction de l'ordre des modes.

Par ailleurs, on note qu'il apparait pour chaque vecteur de la base un très net décalage d'évolution spatiale entre les deux zones correspondant aux deux matériaux. Ainsi, le sous-domaine 2 possède pour chaque mode un nombre d'oscillations spatiales beaucoup plus important que le nombre d'oscillations du côté du sous-domaine 1. Il est possible de chercher des correspondances entre les oscillations du sous-domaine 1 et sous-domaine 2 :

- Pour les modes de frontière (par exemple les modes n°16 côté sous-domaine 2 et n°206 côté sous-domaine 1), on observe une très bonne similitude. On note par ailleurs que le rapport entre les deux constante de temps  $\Delta\tau$  est toujours de l'ordre du rapport des diffusivités.



- Pour les modes de domaine, la correspondance est plus délicate. Ainsi les modes n°46 coté sous-domaine 2 et n°437 coté sous-domaine 1 possèdent le même nombre d'oscillations spatiales. Par contre à la frontière interne entre les deux matériaux, les comportements sont différents :
  - pour le mode n°437, le sous-domaine 1 est au contact d'un domaine très isolant, ou s'approche alors d'une condition de gradient nul à la frontière interne ;
  - pour le mode n°46, c'est l'inverse : le sous-domaine 2 est en contact d'un matériau beaucoup plus conducteur. L'évolution spatiale du mode le long de la frontière interne est alors conditionnée par l'allure pratiquement uniforme du mode côté sous-domaine 1.
- On retrouve le même type de comportement entre le mode n°431 (sous-domaine 1) et les deux modes n°38 et 39 pour le sous-domaine 2. Ici l'existence d'un mode double côté sous-domaine 1 impose l'apparition des deux modes 38 et 39. On note alors que pour ces modes, les évolutions spatiales côté sous-domaine 2 subissent une distorsion pour s'adapter à l'évolution spatiale du côté sous-domaine 1.

FIGURE A.3 – Évolution de la constante de temps  $\tau_i$  du matériau composé

Enfin là encore, les rapports des constantes de temps  $\Delta\tau$  restent proches du rapport des diffusivités des deux sous-domaines.

On voit globalement que l'existence de deux matériaux différents engendre l'apparition de deux familles, chacune liée à un matériau, qui s'entremêlent, et dont le décalage d'évolution est lié au rapport des deux diffusivités. Les conditions de couplage entre ces deux matériaux entraînent par ailleurs une distorsion par rapport à ce qui serait obtenu pour deux sous-domaines considérés indépendamment l'un de l'autre.

## Annexe B

# Lien entre la résistance de contact RTC et la lame d'air

On considère ici le cas d'une sonde homogène qui dissipe une puissance  $P$  uniformément répartie dans le volume. Placée dans un matériau cylindrique et en négligeant les extrémités de la sonde, la symétrie axiale permet d'utiliser deux modèles analytiques :

- le cas de la lame d'air entourant de manière uniforme la sonde est représentée sur la Figure B.1(a), et un simple bilan de puissance à l'équilibre permet d'écrire :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_3}{\frac{\ln\left(\frac{D+2e}{D}\right)}{2\pi Lk_{air}} + \frac{\ln\left(\frac{D_{tot}}{D+2e}\right)}{2\pi Lk_I}} \quad (\text{B.1})$$

- le cas d'une résistance thermique équivalente  $RTC$  qui impose un saut de température à l'interface entre la sonde et l'isolant amène (Figure B.1(b)) :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_3}{\frac{RTC}{\pi DL} + \frac{\ln\left(\frac{D_{tot}}{D}\right)}{2\pi Lk_I}} \quad (\text{B.2})$$

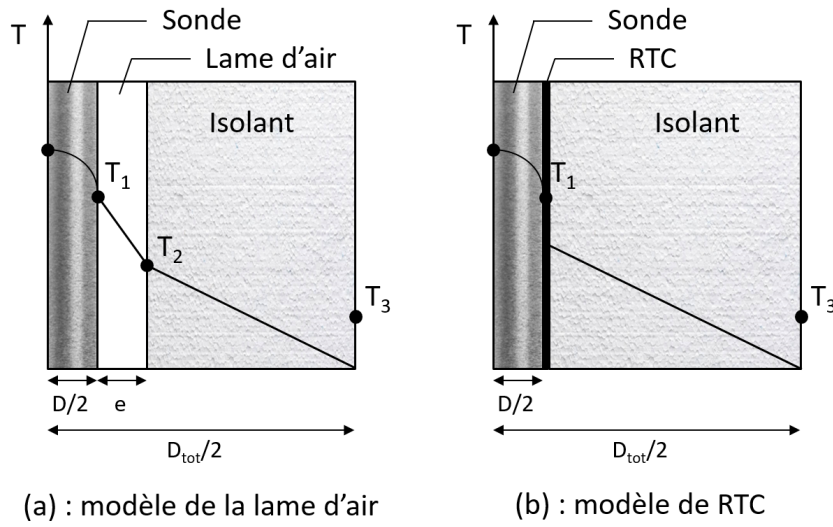


FIGURE B.1 – Configurations du modèle de la résistance de contact

L'égalité des différentes résistances des équations (B.1) et (B.2) amène :

$$\frac{\ln\left(\frac{D+2e}{D}\right)}{2\pi Lk_{air}} + \frac{\ln\left(\frac{D_{tot}}{D+2e}\right)}{2\pi Lk_I} = \frac{RTC}{\pi DL} + \frac{\ln\left(\frac{D_{tot}}{D}\right)}{2\pi Lk_I} = \frac{RTC}{\pi DL} + \frac{\ln\left(\frac{D_{tot}}{D+2e}\right) + \ln\left(\frac{D+2e}{D}\right)}{2\pi Lk_I} \quad (B.3)$$

soit finalement,

$$RTC = \frac{D}{2} \ln\left(\frac{D+2e}{D}\right) \left(\frac{1}{k_{air}} - \frac{1}{k_I}\right) \quad (B.4)$$

On voit ici que l'expression de la résistance équivalente de contact n'est plus aussi simple que le modèle  $RTC = e/k_{air}$  utilisé fréquemment. Cette résistance de contact dépend non seulement de la géométrie cylindrique, mais également de la conductivité du matériau dans lequel est insérée la sonde.

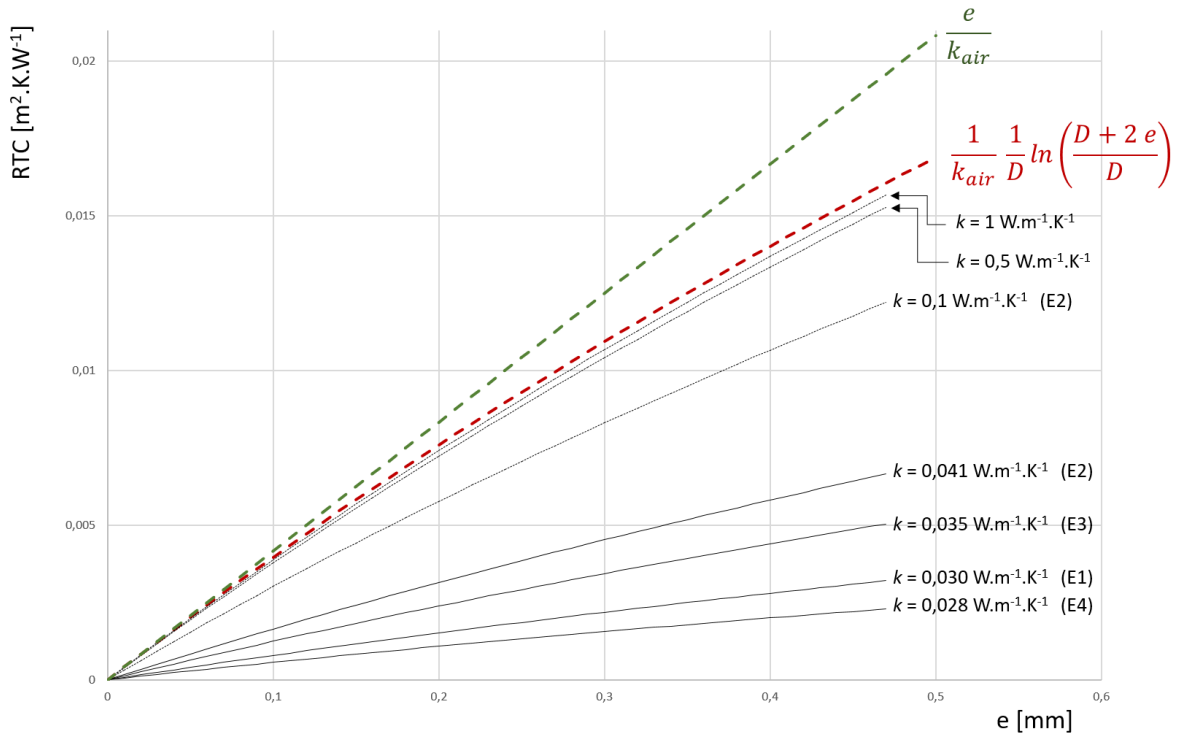


FIGURE B.2 – Configurations du modèle de la résistance de contact

La Figure B.2 représente l'évolution de cette résistance de contact en fonction de l'épaisseur de la lame d'air, pour les dimensions correspondant à la sonde étudiée ( $D = 1,3 [mm]$ ) et pour différents matériaux.

On note ainsi que la conductivité du matériau n'aura une influence que pour de faibles conductivités, inférieures à  $1 [W.m^{-1}.K^{-1}]$ . Dans le cas contraire on retrouve des valeurs proches de celles calculées par les expressions usuelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} RTC = \frac{1}{k_{air}} \cdot \frac{1}{D} \ln\left(\frac{D+2e}{D}\right) \text{ en géométrie cylindrique} \\ RTC = \frac{e}{k_{air}} \text{ en géométrie cartésienne} \end{array} \right. \quad (B.5)$$

Notons pour une épaisseur de lame d'air de  $0,1 [mm]$ , ces deux valeurs sont très proches.

Pour toute la suite de l'étude nous allons considérer l'isolant  $E_2$  qui correspond au cas le plus défavorable, et dans lequel on considère un orifice  $D + 2e = 1,5 [mm]$ , soit une épaisseur de lame d'air  $e = 0,1 [mm]$ .



# Bibliographie

- [1] P. Apostolidis, X. Liu, S. Erkens, and A. Scarpas, “Characterization of epoxy-asphalt binders by differential scanning calorimetry,” Construction and Building Materials, vol. 249, p. 118800, 2020.
- [2] J. E. Schawe, S. Pogatscher, and J. F. Löffler, “Thermodynamics of polymorphism in a bulk metallic glass : Heat capacity measurements by fast differential scanning calorimetry,” Thermochimica Acta, vol. 685, p. 178518, 2020.
- [3] P. Stepień, Z. Rusin, and K. Skowera, “Cement mortar porosity by modified analysis of differential scanning calorimetry records,” Materials, vol. 13, no. 5, 2020.
- [4] ASTM, Standard Test Method for Steady-State Heat Flux Measurements and Thermal Transmission Properties by Means of the Guarded-Hot-Plate Apparatus. ASTM C117-19, Annual book of astm standards ed., 2000.
- [5] T. Kobari, J. Okajima, A. Komiya, and S. Maruyama, “Development of guarded hot plate apparatus utilizing peltier module for precise thermal conductivity measurement of insulation materials,” International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 91, pp. 1157 – 1166, 2015.
- [6] K. Reddy and S. Jayachandran, “Investigations on design and construction of a square guarded hot plate (sghp) apparatus for thermal conductivity measurement of insulation materials,” International Journal of Thermal Sciences, vol. 120, pp. 136 – 147, 2017.
- [7] Y. Jannot, A. Degiovanni, and G. Payet, “Thermal conductivity measurement of insulating materials with a three layers device,” International Journal of Heat and Mass Transfer, 2008.
- [8] C. S. Sanjaya, T.-H. Wee, and T. Tamilselvan, “Regression analysis estimation of thermal conductivity using guarded-hot-plate apparatus,” Applied Thermal Engineering, vol. 31, no. 10, pp. 1566 – 1575, 2011.

- [9] W. J. Parker, R. J. Jenkins, C. P. Butler, and G. L. Abbott, "Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity," Journal of Applied Physics, vol. 32, no. 9, pp. 1679–1684, 1961.
- [10] M. Akoshima, H. Abe, and T. Baba, "Development of reference materials for thermal-diffusivity measurements by the flash method," International Journal of Thermophysics, vol. 36, no. 12, pp. 3272–3287, 2015.
- [11] M. Akoshima, B. Hay, M. Neda, and M. Grelard, "Experimental verification to obtain intrinsic thermal diffusivity by laser-flash method," International Journal of Thermophysics, vol. 34, no. 5, pp. 778–791, 2013.
- [12] M. Boutinguiza, F. Lusquiños, J. Pou, R. Soto, F. Quintero, and R. Comesaña, "Thermal properties measurement of slate using laser flash method," Optics and Lasers in Engineering, vol. 50, no. 5, pp. 727 – 730, 2012.
- [13] T.-W. Lian, A. Kondo, M. Akoshima, H. Abe, T. Ohmura, W.-H. Tuan, and M. Naito, "Rapid thermal conductivity measurement of porous thermal insulation material by laser flash method," Advanced Powder Technology, vol. 27, no. 3, pp. 882 – 885, 2016. Special issue of the 5th Int'l Conf. on the Characterization and Control of Interfaces for High Quality Advanced Materials (ICCCI2015).
- [14] S. C. Nagpure, R. Dinwiddie, S. Babu, G. Rizzoni, B. Bhushan, and T. Frech, "Thermal diffusivity study of aged li-ion batteries using flash method," Journal of Power Sources, vol. 195, no. 3, pp. 872 – 876, 2010.
- [15] P. Jeon, J. Kim, and J. Yoo, "Thermal conductivity measurement of anisotropic material using photothermal deflection method," Thermochimica Acta, vol. 477, pp. 32–37, 2008.
- [16] J. Gembarovič, L. Vozár, and V. Majerník, "Using the least square method for data reduction in the flash method," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 33, no. 7, pp. 1563 – 1565, 1990.
- [17] N. D. Milošević, M. Raynaud, and K. D. Maglić, "Simultaneous estimation of the thermal diffusivity and thermal contact resistance of thin solid films and coatings using the two-dimensional flash method," International Journal of Thermophysics, vol. 24, no. 3, pp. 799–819, 2003.



- [18] L. Pawlowski and P. Fauchais, "The least square method in the determination of thermal diffusivity using a flash method," Revue de Physique Appliquée, vol. 21, no. 2, pp. 83–86, 1986.
- [19] P. Reulet and G. Leplat, "Méthode inverse pour la détermination expérimentale des conductivités thermiques et de la capacité calorifique de matériaux orthotropes en fonction de la température," Congrès Société Thermique Française, 2011.
- [20] J. Brouns, A. Crinière, J. Dumoulin, A. Nassiopoulos, and F. Bo, "Diagnostic de structures de génie civil : Identification des propriétés spatiales et de la surface d'un défaut," Société Française de Thermique, 2014.
- [21] E. El Rassy, Development of Methods to Identify Thermophysical Properties of Complex Media. PhD thesis, Ecole nationale supérieure de mécanique et d'aérotechnique, 2019. Thèse de doctorat dirigée par Saury, Didier et Billaud, Yann Energétique, thermique, combustion Chasseneuil-du-Poitou, Ecole nationale supérieure de mécanique et d'aérotechnique 2019.
- [22] S. E. Gustafsson, "Transient plane source techniques for thermal conductivity and thermal diffusivity measurements of solid materials," Review of Scientific Instruments, vol. 62, no. 3, pp. 797–804, 1991.
- [23] S. Lagüela, P. Bison, F. Peron, and P. Romagnoni, "Thermal conductivity measurements on wood materials with transient plane source technique," Thermochemica Acta, vol. 600, pp. 45 – 51, 2015.
- [24] H. Zhang, Y.-M. Li, and W.-Q. Tao, "Theoretical accuracy of anisotropic thermal conductivity determined by transient plane source method," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 108, pp. 1634 – 1644, 2017.
- [25] B. Mihiretie, D. Cederkrantz, A. Rosén, H. Otterberg, M. Sundin, S. Gustafsson, and M. Karlsteen, "Finite element modeling of the hot disc method," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 115, pp. 216 – 223, 2017.
- [26] Y. Jannot and P. Meukam, "Simplified estimation method for the determination of the thermal effusivity and thermal conductivity using a low cost hot strip," Measurement Science and Technology, vol. 15, p. 1932, 08 2004.
- [27] S. Raji, Y. Jannot, P. Lagièrre, and J. Puiggali, "Thermophysical characterization of a laminated solid-wood pine wall," Construction and Building Materials, 2009.

- [28] J. C. Jaeger, "Conduction of Heat in an Infinite Region Bounded Internally by a Circular Cylinder of a Perfect Conductor," Australian Journal of Physics, vol. 9, p. 167, June 1956.
- [29] J. H. Blackwell, "A transient-flow method for determination of thermal constants of insulating materials in bulk part i—theory," Journal of Applied Physics, vol. 25, no. 2, pp. 137–144, 1954.
- [30] W. Batty, P. O'Callaghan, and S. Probert, "Assessment of the thermal-probe technique for rapid, accurate measurements of effective thermal conductivities," Applied Energy, vol. 16, no. 2, pp. 83 – 113, 1984.
- [31] C. G. Pereira, J. V. Resende, G. G. Pereira, T. O. Giarola, and M. E. Prado, "Thermal conductivity measurements and predictive models for frozen guava and passion fruit pulps," International Journal of Food Properties, vol. 16, no. 4, pp. 778–789, 2013.
- [32] H. Nahor, N. Scheerlinck, J. V. Impe], and B. Nicolai, "Optimization of the temperature sensor position in a hot wire probe set up for estimation of the thermal properties of foods using optimal experimental design," Journal of Food Engineering, vol. 57, no. 1, pp. 103 – 110, 2003.
- [33] S. Sarkar, K. Zimmermann, W. Leng, P. Vikesland, J. Zhang, H. Dorn, T. Diller, C. Rylander, and M. N. Rylander, "Measurement of the thermal conductivity of carbon nanotube-tissue phantom composites with the hot wire probe method," Annals of Biomedical Engineering, vol. 39, no. 6, pp. 1745–1758, 2011.
- [34] N. I. Kömle, E. S. Hütter, W. Macher, E. Kaufmann, G. Kargl, J. Knollenberg, M. Grott, T. Spohn, R. Wawrzaszek, M. Banaszkiwicz, K. Seweryn, and A. Hagermann, "In situ methods for measuring thermal properties and heat flux on planetary bodies," Planetary and Space Science, vol. 59, no. 8, pp. 639 – 660, 2011.
- [35] S. Nagihara, M. Hedlund, K. Zacny, and P. T. Taylor, "Improved data reduction algorithm for the needle probe method applied to in-situ thermal conductivity measurements of lunar and planetary regoliths," Planetary and Space Science, vol. 92, pp. 49 – 56, 2014.
- [36] W. Zheng, Z. Yinping, L. Xingang, and G. Xinshi, "Long/short hot-probe method for determining thermophysical properties," Measurement Science and Technology, vol. 5, pp. 964–968, aug 1994.
- [37] S. Goodhew and R. Griffiths, "Analysis of thermal-probe measurements using an iterative method to give sample conductivity and diffusivity data," Applied Energy, vol. 77, no. 2, pp. 205 – 223, 2004.

- [38] W. Cheng, R. Ma, K. Xie, N. Liu, and Y. Huang, "Simultaneous measurement of thermal properties by thermal probe using stochastic approximation method," Applied Energy, vol. 88, no. 5, pp. 1834 – 1840, 2011.
- [39] W. Batty, S. Probert, M. Ball, and P. O'Callaghan, "Use of the thermal-probe technique for the measurement of the apparent thermal conductivities of moist materials," Applied Energy, vol. 18, no. 4, pp. 301 – 317, 1984.
- [40] B. Pilkington and S. Grove, "Thermal conductivity probe length to radius ratio problem when measuring building insulation materials," Construction and Building Materials, vol. 35, pp. 531 – 546, 2012.
- [41] H. Humaish, B. Ruet, L. Marmoret, and H. Beji, "Assessment of long time approximation equation to determine thermal conductivity of high porous materials with nss probe," Journal of Sustainable Construction Materials and Technologies, vol. 1, no. 1, pp. 1–15, 2016.
- [42] L. Marmoret and H. Humaish, "Limit of validity of the log-linear model for determining thermal properties of light insulation materials with cylindrical hot probe," International Journal of Thermal Sciences, 2017.
- [43] S. Chudzik, "The idea of using artificial neural network in measurement system with hot probe for testing parameters of heat-insulating materials," Measurement, vol. 42, no. 5, pp. 764 – 770, 2009.
- [44] T. S. Bording, S. B. Nielsen, and N. Balling, "Determination of thermal properties of materials by monte carlo inversion of pulsed needle probe data," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 133, pp. 154 – 165, 2019.
- [45] D. Petit and D. Maillet, "Techniques inverses et estimation de paramètres. partie 1," Techniques de l'ingénieur Physique statistique et mathématique, vol. base documentaire : 42619210., no. ref. article : af4515, 2008. fre.
- [46] D. Petit and D. Maillet, "Techniques inverses et estimation de paramètres. partie 2," Techniques de l'ingénieur Physique statistique et mathématique, vol. base documentaire : 42619210., no. ref. article : af4516, 2008. fre.
- [47] H. Orlande, O. Fudym, D. Maillet, and R. Cotta, Thermal Measurements and Inverse Techniques. Heat Transfer, CRC Press, 2011.

- [48] J.-L. Battaglia and D. Maillet, Thermal Measurements and Inverse Techniques, ch. Modeling in Heat Transfer, pp. 3–52. CRC Press, 2011.
- [49] S. Carmona, Y. Rouizi, O. Quéméner, F. Joly, and A. Neveu, “Estimation of heat flux by using reduced model and the adjoint method. application to a brake disc rotating,” International Journal of Thermal Sciences, vol. 131, pp. 94 – 104, 2018.
- [50] S. Carmona, Y. Rouizi, and O. Quéméner, “Spatio-temporal identification of heat flux density using reduced models. application to a brake pad,” International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 128, pp. 1048 – 1063, 2019.
- [51] V. M. Luchesi and R. T. Coelho, “An inverse method to estimate the moving heat source in machining process,” Applied Thermal Engineering, vol. 45-46, pp. 64 – 78, 2012.
- [52] Y. Rouizi, W. Al Hadad, D. Maillet, and Y. Jannot, “Experimental assessment of the fluid bulk temperature profile in a mini channel through inversion of external surface temperature measurements,” International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 83, pp. 522 – 535, 2015.
- [53] A. Vergnaud, L. Perez, and L. Autrique, “Quasi-online parametric identification of moving heating devices in a 2D geometry,” International Journal of Thermal Sciences, vol. 102, pp. 47 – 61, 2016.
- [54] Y. Favennec, Y. Rouizi, and D. Petit, “On the use of reduced models obtained through identification for feedback optimal control problems in a heat convection–diffusion problem,” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, no. 17, pp. 1193 – 1201, 2010.
- [55] M. Girault and E. Videcoq, “Temperature regulation and tracking in a mimo system with a mobile heat source by lqg control with a low order model,” Control Engineering Practice, vol. 21, no. 3, pp. 333 – 349, 2013.
- [56] M. Girault, E. Videcoq, and D. Petit, “Estimation of time-varying heat sources through inversion of a low order model built with the modal identification method from in-situ temperature measurements,” International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 53, no. 1, pp. 206 – 219, 2010.
- [57] Y. Rouizi, Y. Favennec, Y. Jarny, and D. Petit, “Model reduction through identification – application to some diffusion–convection problems in heat transfer, with an extension towards control strategies,” Comptes Rendus Mécanique, vol. 341, no. 11, pp. 776 – 792, 2013.

- [58] E. Videcoq, M. Girault, and A. Piteau, "Thermal control via state feedback using a low order model built from experimental data by the modal identification method," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 55, no. 5, pp. 1679 – 1694, 2012.
- [59] Y. Rouizi, M. Girault, Y. Favennec, and D. Petit, "Model reduction by the modal identification method in forced convection : Application to a heated flow over a backward-facing step," International Journal of Thermal Sciences, vol. 49, no. 8, pp. 1354 – 1368, 2010.
- [60] D. Zheng and K. Hoo, "System identification and model-based control for distributed parameter systems," Computers & Chemical Engineering, vol. 28, no. 8, pp. 1361 – 1375, 2004.
- [61] K. Cao, D. Lesnic, and J. Liu, "Simultaneous reconstruction of space-dependent heat transfer coefficients and initial temperature," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 375, p. 112800, 2020.
- [62] W. B. Muniz, H. F. de Campos Velho, and F. M. Ramos, "A comparison of some inverse methods for estimating the initial condition of the heat equation," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 103, no. 1, pp. 145 – 163, 1999. Applied and Computational Topics in Partial Differential Equations.
- [63] Y. Wang and M. Tadi, "On evaluation of the initial condition for a parabolic system," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 115, pp. 424 – 427, 2017.
- [64] B. Chen, W. Chen, A. H.-D. Cheng, L. Sun, X. Wei, and H. Peng, "Identification of the thermal conductivity coefficients of 3d anisotropic media by the singular boundary method," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 100, pp. 24–33, 2016.
- [65] J. Su and G. F. Hewitt, "Inverse heat conduction problem of estimating time-varying heat transfer coefficient," Numerical Heat Transfer, Part A : Applications, vol. 45, no. 8, pp. 777–789, 2004.
- [66] E. Ruffio, Estimation of parameters and limit boundary conditions of unsteady thermal conduction problems with anisotropic materials. Contribution of stochastic algorithms to optimal experiment design. phdthesis, ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, Dec. 2011.
- [67] O. Fudym and J.-C. Batsale, Thermal Measurements and Inverse Techniques, ch. Introduction to Linear Least Squares Estimation and Ill-Posed Problem for Experimental Data Processing, pp. 233–

281. CRC Press, 2011.
- [68] J. R. Shewchuk, "An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain," tech. rep., Pittsburgh, PA, USA, 1994.
- [69] M. J. Colaço and G. S. Dulikravich, Thermal Measurements and Inverse Techniques, ch. A Survey of Basic Deterministic, Heuristic, and Hybrid Methods for Single-Objective Optimization and Response Surface Generation, pp. 355–405. CRC Press, 2011.
- [70] Y. Jarny and H. R. B. Orlande, Thermal Measurements and Inverse Techniques, ch. Adjoint Methods, pp. 407–436. CRC Press, 2011.
- [71] R. Fletcher, Practical Methods of Optimization. Wiley, 2013.
- [72] R. Fletcher and C. M. Reeves, "Function minimization by conjugate gradients," The Computer Journal, vol. 7, pp. 149–154, 01 1964.
- [73] M. Ozisik and H. Orlande, Inverse Heat transfer : Fundamendats and applications. 01 2000.
- [74] O. Alifanov, Inverse Heat Transfer Problems. International Series in Heat and Mass Transfer, Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [75] J. Daniel, The Approximate Minimization of Functionals. Prentice-Hall series in automatic computation, Prentice-Hall, 1971.
- [76] Y. Jarny, M. Ozisik, and J. Bardon, "A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 34, no. 11, pp. 2911 – 2919, 1991.
- [77] R. Fletcher and M. J. D. Powell, "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization," The Computer Journal, vol. 6, pp. 163–168, 08 1963.
- [78] C. Broyden, "Quasi-newton methods and their application to function minimisation," Mathematics of Computation, vol. 21, pp. 368–381, 1967.
- [79] M. Clerc, "L'optimisation par essaim particulaire," Technique et Science Informatiques, vol. 21, no. 7, pp. 941–964, 2002.
- [80] M. Clerc and J. Kennedy, "The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space," IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 6, no. 1, pp. 58–73, 2002.

- [81] R. Poli, J. Kennedy, and T. Blackwell, "Particle swarm optimization," Swarm Intelligence, vol. 1, pp. 33–57, Jun 2007.
- [82] DREO, Johann and PETROWSKI, Alain and Siarry, Patrick and Taillard, Eric, Métaheuristiques pour l'optimisation difficile. EYROLLES, 2003.
- [83] R. C. Eberhart and Y. Shi, "Comparing inertia weights and constriction factors in particle swarm optimization," Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation, vol. 1, pp. 84–88, 2000.
- [84] J. V. Beck, B. Blackwell, and C. R. Saint-Clair, Inverse Heat Conduction : Ill Posed Problems. 1985.
- [85] Y. Rouizi, Réduction de modèle par identification en convection forcée pour des systèmes soumis à des conditions aux limites thermiques instationnaires : application à l'écoulement le long d'une marche avec contrôle thermique par retour d'état. phdthesis, ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, June 2010.
- [86] F. Mohebbi and M. Sellier, "Estimation of thermal conductivity, heat transfer coefficient, and heat flux using a three dimensional inverse analysis," International Journal of Thermal Sciences, vol. 99, pp. 258 – 270, 2016.
- [87] R. Ghosh and Y. Joshi, "Error estimation in pod-based dynamic reduced-order thermal modeling of data centers," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 57, no. 2, pp. 698 – 707, 2013.
- [88] A. Sempey, C. Inard, C. Ghiaus, and C. Allery, "Fast simulation of temperature distribution in air conditioned rooms by using proper orthogonal decomposition," Building and Environment, vol. 44, no. 2, pp. 280 – 289, 2009.
- [89] A. Fic, R. Bialecki, and A. Kassab, "Solving transient nonlinear heat conduction problems by proper orthogonal decomposition and the finite-element method," Numerical Heat Transfer Part B : Fundamentals, vol. 48, pp. 103–124, 08 2005.
- [90] X. Zhang and H. Xiang, "A fast meshless method based on proper orthogonal decomposition for the transient heat conduction problems," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 84, pp. 729 – 739, 2015.
- [91] D. Khlopov and M. Mangold, "Automatic model reduction of differential algebraic systems by proper orthogonal decomposition," Computers & Chemical Engineering, vol. 97, pp. 104 – 113, 2017.

- [92] G. Jiang, H. Liu, K. Yang, and X. Gao, "A fast reduced-order model for radial integral boundary element method based on proper orthogonal decomposition in nonlinear transient heat conduction problems," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 368, p. 113190, 2020.
- [93] M. C. PARK, H. M ; SUNG, "Sequential solution of a three-dimensional inverse radiation problem," Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 192, no. 33-34, pp. 3689–3704, 2003.
- [94] W. P. Adamczyk and Z. Ostrowski, "Retrieving thermal conductivity of the solid sample using reduced order model inverse approach," International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, vol. 27, pp. 729–739, Jan. 2017.
- [95] E. Videcoq and D. Petit, "Model reduction for the resolution of multidimensional inverse heat conduction problems," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 44, no. 10, pp. 1899 – 1911, 2001.
- [96] O. Balima, Y. Favennec, M. Girault, and D. Petit, "Comparison between the modal identification method and the pod-galerkin method for model reduction in nonlinear diffusive systems," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 67, no. 7, pp. 895–915, 2006.
- [97] M. Girault, S. Derouineau, J. Salat, and D. Petit, "Réduction de modèle en convection naturelle par une méthode d'identification," Comptes Rendus Mécanique, vol. 332, no. 10, pp. 811 – 818, 2004.
- [98] M. Girault and D. Petit, "Identification methods in nonlinear heat conduction. part i : Model reduction," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 48, no. 1, pp. 105 – 118, 2005.
- [99] M. Girault and D. Petit, "Identification methods in nonlinear heat conduction. part ii : inverse problem using a reduced model," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 48, no. 1, pp. 119 – 133, 2005.
- [100] M. Girault, L. Cordier, and E. Videcoq, "Parametric low-order models in transient heat diffusion by MIM. estimation of thermal conductivity in a 2d slab," Journal of Physics : Conference Series, vol. 395, p. 012019, nov 2012.
- [101] F. Chinesta, A. Ammar, A. Leygue, and R. Keunings, "An overview of the proper generalized decomposition with applications in computational rheology," Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics,



- vol. 166, no. 11, pp. 578 – 592, 2011. XVIth International Workshop on Numerical Methods for Non-Newtonian Flows.
- [102] J. P. Senecal and W. Ji, “Characterization of the proper generalized decomposition method for fixed-source diffusion problems,” Annals of Nuclear Energy, vol. 126, pp. 68 – 83, 2019.
- [103] J. Berger, S. Guernouti, M. Woloszyn, and F. Chinesta, “Proper generalised decomposition for heat and moisture multizone modelling,” Energy and Buildings, vol. 105, pp. 334 – 351, 2015.
- [104] J. Berger, W. Mazuroski, N. Mendes, S. Guernouti, and M. Woloszyn, “2d whole-building hygro-thermal simulation analysis based on a pgd reduced order model,” Energy and Buildings, vol. 112, pp. 49 – 61, 2016.
- [105] J. Berger and N. Mendes, “An innovative method for the design of high energy performance building envelopes,” Applied Energy, vol. 190, pp. 266 – 277, 2017.
- [106] D. González, F. Masson, F. Poulhaon, A. Leygue, E. Cueto, and F. Chinesta, “Proper generalized decomposition based dynamic data driven inverse identification,” Mathematics and Computers in Simulation, vol. 82, no. 9, pp. 1677 – 1695, 2012.
- [107] P. Bacot, A. Neveu, and J. Sicard, “Analyse modale des phénomènes thermiques en régime variable dans le bâtiment,” Revue Générale de Thermique, vol. 267, pp. 189–201, 1984.
- [108] A. Neveu, P. Bacot, and R. Regas, “Modèles d’évolution thermique des bâtiments : Conditions pratiques d’identification,” Revue Générale de la Thermique, vol. 296-297, pp. 413–420, 1986.
- [109] J. Salgon and A. Neveu, “Application of modal analysis to modelling of thermal bridge in building,” Energy and Buildings, vol. 10, pp. 109–120, 1987.
- [110] K. E. Khoury and A. Neveu, “Analyse modale des systèmes thermiques en présence de transferts non réciproques,” Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 32, pp. 213–226, 1989.
- [111] J.-L. Battaglia, “A modal approach to solve inverse heat conduction problems,” Inverse Problems Engng, vol. 10 (1), pp. 41 – 63, 2002.
- [112] O. Quémener, J.-L. Battaglia, and A. Neveu, “Résolution d’un problème inverse par utilisation d’un modèle réduit modal. application au frottement d’un pion sur un disque en rotation,” International Journal of Thermal Sciences, vol. 42, no. 4, pp. 361 – 378, 2003.

- [113] A. Neveu, K. El-Khoury, and B. Flament, "Simulation de la conduction non linéaire en régime variable : décomposition sur les modes de branche," International Journal of Thermal Sciences, vol. 38, no. 4, pp. 289 – 304, 1999.
- [114] O. Quéméner, A. Neveu, and E. Videcoq, "A specific reduction method for the branch modal formulation : Application to a highly non-linear configuration," International Journal of Thermal Sciences, vol. 46, no. 9, pp. 890 – 907, 2007.
- [115] F. Joly, O. Quéméner, and A. Neveu, "Modal reduction of an advection-diffusion model using a branch basis," Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals, vol. 53, no. 5, pp. 466–485, 2008.
- [116] P. Laffay, O. Quéméner, and A. Neveu, "Developing a method for coupling branch modal models," International Journal of Thermal Sciences, vol. 48, no. 6, pp. 1060 – 1067, 2009.
- [117] P.-O. Laffay, O. Quéméner, A. Neveu, and B. Elhajjar, "The modal substructuring method : An efficient technique for large-size numerical simulations," Numerical Heat Transfer Part B-fundamentals, vol. 60, pp. 278–304, 10 2011.
- [118] E. Videcoq, O. Quéméner, M. Lazard, and A. Neveu, "Heat source identification and on-line temperature control by a branch eigenmodes reduced model," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 51, no. 19, pp. 4743 – 4752, 2008.
- [119] E. Videcoq, M. Lazard, and O. Q. A. Neveu, "Online temperature prediction using a branch eigenmode reduced model applied to cutting process," Numerical Heat Transfer, Part A : Applications, vol. 55, no. 7, pp. 683–705, 2009.
- [120] O. Quéméner, F. Joly, and A. Neveu, "On-line heat flux identification from a rotating disk at variable speed," Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 53, Issues 7-8, pp. 1529–1541, 2009.
- [121] O. Quéméner, F. Joly, and A. Neveu, "The generalized amalgam method for modal reduction," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 55, no. 4, pp. 1197 – 1207, 2012.
- [122] S. Grosjean, B. Gaume, F. Joly, K. Vera, and A. Neveu, "A modal substructuring method for non-conformal mesh. application to an electronic board," International Journal of Thermal Sciences, vol. 152, p. 106298, 2020.

- [123] S. Grosjean, F. Joly, K. Vera, A. Neveu, and E. Monier-Vinard, "Reduction of an Electronic Card Thermal Problem by the Modal Substructuring Method," in IHTC-16, (Beijing, China), pp. 1899–1906, 2018.
- [124] S. Marshall, "An approximate method for reducing the order of linear systems," Control, vol. 10, pp. 642–643, 01 1966.
- [125] K. El-Khoury and A. Neveu, "Analyse modale des systèmes thermiques en présence de transferts non réciproques," Int. Heat Mass Transfer, vol. 32, no. 2, pp. 213–226, 1989.
- [126] C. Lanczos, "An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators," Journal of Research of the National Bureau of Standards, vol. 45, pp. 255–282, Oct. 1950.
- [127] A. Oulefki, Réduction de modèles thermiques par amalgame modal. phdthesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Feb. 1993.
- [128] N. B. S. Brou, Modélisation et commande d'un système de cogénération utilisant des énergies renouvelables pour le bâtiment. phdthesis, Université Paris-Saclay, Oct. 2015. Thèse de doctorat dirigée par Neveu, Alain et Joly, Frédéric Énergétique Université Paris-Saclay (ComUE) 2015.
- [129] B. Gaume, Réduction d'un problème d'auto-rayonnement par modes de branche : application aux échanges thermiques dans un domaine multi-enceintes. phdthesis, Université Paris-Saclay, Oct. 2016. Thèse de doctorat dirigée par Quéméner, Olivier et Joly, Frédéric Thermique Université Paris-Saclay (ComUE) 2016.
- [130] Somé, Sâannibè Ciryle, Thermomechanical behavior of warm mix asphalt and the bitumen-aggregate interface. phdthesis, Université de Nantes, Oct. 2012.
- [131] A. K. Das and S. S. Sadhal, "Analytical solution for constriction resistance with interstitial fluid in the gap," Heat and Mass Transfer, vol. 34, pp. 111–119, October 1998.
- [132] J. Salgon, O. Quéméner, M. Belghali, and J. Bransier, "Resistances thermiques de contact statique. évaluation expérimentale des performances d'un modèle à deux résistances issu d'une description probabiliste des déformations de l'interface," Revue Generale de la Thermique, vol. 37, pp. 284–294, 1998.

- [133] A. Majumdar and C. L. Tien, "Fractal Network Model for Contact Conductance," Journal of Heat Transfer, vol. 113, pp. 516–525, 08 1991.
- [134] P. Le Neindre, Bernard ;Cancouet, "Mesure des volumes spécifiques des polymères," Techniques de l'ingénieur Bases de données : polymères, vol. base documentaire : TIB603DUO., no. ref. article : k497, 2009. fre.
- [135] Y. He, "Rapid thermal conductivity measurement with a hot disk sensor : Part 1. theoretical considerations," Thermochimica Acta, vol. 436, no. 1, pp. 122 – 129, 2005.
- [136] M. Souihel, M. Garoum, S. Raefat, and N. Laaroussi, "Simultaneous estimation of volumetric capacity and thermal conductivity of moroccan wood species from experimental flash method," Energy Procedia, vol. 139, pp. 639 – 644, 2017.
- [137] u. Czajkowski, W. Olek, J. Weres, and R. Guzenda, "Thermal properties of wood-based panels : thermal conductivity identification with inverse modeling," European Journal of Wood and Wood Products, vol. 74, 2016.
- [138] L. Dantas, H. Orlande, and R. Cotta, "An inverse problem of parameter estimation for heat and mass transfer in capillary porous media," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 46, no. 9, pp. 1587 – 1598, 2003.
- [139] J. Eitelberger and K. Hofstetter, "Prediction of transport properties of wood below the fiber saturation point – a multiscale homogenization approach and its experimental validation. part ii : Steady state moisture diffusion coefficient," Composites Science and Technology, vol. 71, no. 2, pp. 145 – 151, 2011.
- [140] J. Lux, A. Ahmadi, C. Gobbé, and C. Delisée, "Macroscopic thermal properties of real fibrous materials : Volume averaging method and 3d image analysis," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 49, no. 11, pp. 1958 – 1973, 2006.
- [141] C. El Hachem, P. Ye, K. Abahri, and R. Bennacer, "Fiber's hygromorphic effect on thermal conductivity of wooden fibrous insulation characterized by x-ray tomography," Construction and Building Materials, vol. 150, pp. 758 – 765, 2017.
- [142] C. EL HACHEM, K. ABAHRI, J. Vicente, R. Bennacer, and R. Belarbi, "Hygromorphic characterization of softwood under high resolution x-ray tomography for hygrothermal simulation," Heat and

Mass Transfer, vol. 54, p. 2761–2769, 2018.

- [143] M.-C. TROUY and P. TRIBOULOT, “Matériau bois - structure et caractéristiques,” Techniques de l’ingénieur - Construction bois, vol. base documentaire : TIB824., no. ref. article : c925, 2019. fre.

**Titre:** Apport des modèles réduits pour la caractérisation thermique de matériaux de construction : mesures in situ d'isolants, et étude multi-échelle d'un bois sec

**Mots clés:** Modèles réduits, identification in situ, biosourcé, caractérisation thermique, AROMM méthode, méthode inverse

**Résumé:** En simulation numérique thermique, le problème inverse consiste à partir de mesures de température, à retrouver un ou plusieurs paramètres de l'équation de la chaleur discrétisée. C'est une procédure complexe qui reste souvent limitée à une géométrie simple. L'idée est alors d'utiliser des modèles réduits thermiques de type modaux, qui vont permettre de diminuer considérablement le nombre d'inconnues tout en maintenant une précision satisfaisante sur l'intégralité du domaine modélisé. Ces modèles vont alors permettre d'étendre la technique des problèmes inverses à tout type de géométrie, quelle que soit sa complexité. L'objectif de ce travail de thèse consiste à évaluer l'efficacité d'une telle méth-

ode pour une application liée à la thermique du bâtiment, dans laquelle on cherche à identifier les propriétés de matériaux isolants (capacité et conductivité thermiques). Le principal travail a été la mise en application de cette technique pour une mesure in situ, via une sonde de type fil chaud, jusqu'ici inadaptée aux isolants thermiques. Une seconde application de cette technique de résolution de problèmes inverses par modèle réduit est la caractérisation d'un matériau bio-sourcé à partir de relevés tomographiques à l'échelle microscopique. Pour ces deux applications, les développements numériques effectués ont permis la réalisation de premiers essais expérimentaux encourageants.

**Title:** Contribution of reduced models for the thermal characterization of building materials: in situ measurements of insulation, and multi-scale study of dry wood

**Keywords:** Reduced models, in situ identification, bio-sourced, thermal characterization, AROMM method, inverse method

**Abstract:** In numerical thermal simulation, the inverse problem consists in finding one or more parameters of the discretized heat equation from temperature measurements. This is a complex procedure that often remains limited to simple geometry. The idea is then to use modal-type thermal reduced models, which will considerably reduce the number of unknowns while maintaining satisfactory accuracy over the entire modelled domain. These models will then allow to extend the technique of inverse problems to any type of geometry, whatever its complexity. The objective of this thesis work is to evaluate the efficiency of such a method for

an application related to building thermics, in which one seeks to identify the properties of insulating materials (thermal capacity and conductivity). The main work has been the application of this technique for an in situ measurement, using a hot wire probe, which has so far been unsuitable for thermal insulation. A second application of this technique to solve inverse problems by reduced model is the characterization of a bio-sourced material from tomographic surveys at the microscopic scale. For these two applications, the digital developments carried out have allowed the realization of encouraging first experimental trials.

