HAL
open science

Améliorations de la précision et de la modélisation de la tension de surface au sein de la méthode SPH, et simulations de cas d'amerrissage d'urgence d'helicoptères.

Alban Vergnaud

To cite this version:

Alban Vergnaud. Améliorations de la précision et de la modélisation de la tension de surface au sein de la méthode SPH, et simulations de cas d'amerrissage d'urgence d'helicoptères.. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. École centrale de Nantes, 2020. Français. NNT : 2020ECDN0033 . tel-03185147

HAL Id: tel-03185147

https://theses.hal.science/tel-03185147v1

Submitted on 30 Mar 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

ECOLE DOCTORALE N° 602
Sciences pour l'Ingénieur
Spécialité : Mécanique des milieux fluides

Par
Alban VERGNAUD

Améliorations de la précision et de la modélisation de la tension de surface au sein de la méthode SPH, et simulations de cas d'amerrissage d'urgence d'hélicoptères

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 9 décembre 2020
Unité de recherche : UMR 6598, Laboratoire d'Hydrodynamique, Energétique et Environnement Atmosphérique (LHEEA)

Rapporteurs avant soutenance :

Damien VIOLEAU	Ingénieur – chercheur HDR, EDF, Chatou
Florian DE VUYST	Professeur des Universités, Université de Technologie de Compiègne

Composition du Jury :

Président :	**Christophe BERTHON**	Professeur des Universités, Université de Nantes
Examinateurs :	**Chloé MIMEAU**	Maître de conférences, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris
	Jean-Luc ESTIVALEZES	Professeur, ENSEEIHT, Toulouse
Directeur de thèse :	**David LE TOUZÉ**	Professeur des Universités, École Centrale de Nantes
Encadrant de thèse :	**Guillaume OGER**	Ingénieur de recherche HDR, École Centrale de Nantes

Remerciements

Beaucoup de personnes ont rendu possible l'aboutissement de ce travail et doivent être remerciées ici. Tout d'abord, merci à David Le Touzé pour avoir accepté de diriger ma thèse, pour la confiance qu'il m'a accordée et la grande liberté qu'il m'a laissée. Un immense merci à Guillaume Oger pour sa disponibilité, ses conseils toujours avisés et la relecture attentive de mes travaux.

Je souhaite également saluer les rapporteurs de ma thèse, Damien Violeau et Florian De Vuyst, pour avoir accepté de relire de mon travail et pour leurs remarques que j'ai essayées d'intégrer au mieux à ce manuscrit. Merci à Chloé Mimeau et Jean-Luc Estivalezes d'avoir participé à mon jury de thèse. Un grand merci également à Christophe Berthon pour avoir présidé mon jury de thèse, et pour avoir participé à mon comité de suivi de thèse au côté de Salvatore Marrone.

Merci également aux collaborateurs de chez NextFlow Software, en particulier à Matthieu De Leffe et Laurent Chiron pour leurs conseils et les discussions techniques sur le code. Merci aussi à Benjamin Bouscasse pour les précisions qu'il m'a apportées sur la campagne d'essais menée au cours de ma thèse. Enfin, ce travail n'aurait pas été le même sans les échanges scientifiques et techniques et les discussions avec les autres doctorants de la méthode SPH du laboratoire, Imadeddine Hammani et Julien Michel.

Pour finir, merci à tous mes proches, mes amis, mes camarades pour avoir été à mes côtés pendant ces plus de trois ans.

Table des matières

Introduction **1**

1 Équations de la mécanique des fluides **5**
1.1 Équations de Navier-Stokes . . . 5
1.1.1 Conservation de la masse . . . 6
1.1.2 Conservation de la quantité de mouvement . . . 6
1.1.3 Loi d'état . . . 7
1.1.4 Approximation de fluide parfait - Équations d'Euler . . . 8
1.2 Écoulements incompressibles et écoulements faiblement compressibles . . . 8
1.3 Conditions aux limites . . . 9
1.3.1 Condition d'adhérence . . . 10
1.3.2 Condition de glissement . . . 10
1.3.3 Conditions de surface libre . . . 11
1.3.3.1 Condition cinématique de surface libre . . . 11
1.3.3.2 Condition dynamique de surface libre . . . 11
1.4 Équations en formalisme ALE . . . 12

2 Principes de la méthode SPH **15**
2.1 Interpolation SPH . . . 15
2.1.1 Définition de la méthode d'interpolation SPH . . . 15
2.1.2 Choix du noyau . . . 17
2.1.3 Opérateurs dérivés . . . 18
2.1.3.1 Opérateurs gradient . . . 18
2.1.3.2 Opérateurs divergence . . . 20
2.1.3.3 Caractère centré des opérateurs . . . 21
2.1.4 Discrétisation des opérateurs SPH . . . 22
2.1.5 Corrections des opérateurs SPH . . . 26
2.1.5.1 Consistance d'ordre 0 - Correction Shepard . . . 26
2.1.5.2 Consistance d'ordre 1 - Matrice de renormalisation . . . 27
2.2 Schémas numériques - Application aux équations de la mécanique des fluides 28
2.2.1 Cas général du schéma SPH pour les équations d'Euler . . . 29
2.2.2 Schéma à viscosité artificielle . . . 30
2.2.3 Schéma δ-SPH . . . 31
2.2.4 Schéma de Parshikov et al. . . . 32
2.2.5 Schéma de Vila . . . 33
2.2.6 Utilisation de problèmes de Riemann . . . 36
2.2.6.1 Présentation du problème de Riemann . . . 36
2.2.6.2 Utilisation au sein des schémas numériques . . . 38
2.2.6.3 Reconstruction MUSCL . . . 39
2.3 Intégration temporelle . . . 41

2.4 Utilisation d'une vitesse du son artificielle 42
2.5 Traitement des conditions limites 44
2.5.1 Approche volumique - Méthode ghost 44
2.5.1.1 Condition de glissement en méthode ghost 45
2.5.1.2 Condition d'adhérence en méthode ghost 47
2.5.2 Approche surfacique - Méthode BIM 48
2.5.2.1 Calcul de la correction Shepard 50
2.5.2.2 Détermination de la pression à la paroi 51
2.5.3 Conditions de surface libre 51
2.5.3.1 Détection de la surface libre 53
2.6 Raffinement particulaire 55
2.6.1 h-variable 56
2.6.2 Adaptative Particle Refinement (APR) 56

3 Désordre particulaire 59
3.1 État de l'art du shifting particulaire 60
3.1.1 Principe du shifting particulaire en SPH 60
3.1.2 XSPH (Monaghan) 61
3.1.3 Loi de shifting basée sur la loi de diffusion de Fick 61
3.1.3.1 Shifting de Lind et al. 63
3.1.3.2 Shifting de Oger et al. 64
3.1.3.3 Shifting de Sun et al. 64
3.1.4 Prise en compte de la surface libre 65
3.2 Amélioration et proposition d'une nouvelle loi de shifting 68
3.2.1 Caractéristiques attendues pour une loi de shifting 68
3.2.1.1 Répartition uniforme des particules 68
3.2.1.2 Convergence et consistance avec le formalisme Lagrangien . 68
3.2.1.3 Invariance par changement de référentiel Galiléen 70
3.2.1.4 Caractère local de la loi de shifting 71
3.2.2 Construction d'une nouvelle loi de shifting 71
3.2.3 Amélioration du shifting à la surface libre 74
3.2.3.1 Étude théorique à la surface libre en dimension 1 74
3.2.3.2 Prise en compte de la surface libre dans la nouvelle loi de shifting 78
3.3 Conclusion 80

4 Modélisation de la viscosité avec la méthode SPH 81
4.1 Opérateur Laplacien loin d'une paroi et/ou d'une surface libre 81
4.1.1 Formulations directes 82
4.1.2 Opérateur de Morris et al. 82
4.1.3 Opérateur de Monaghan et Gingold 83
4.1.4 Consistance des opérateurs loin d'une paroi et/ou d'une surface libre 84
4.1.4.1 Consistance d'ordre 0 85
4.1.4.2 Consistance d'ordre 1 85
4.1.4.3 Consistance d'ordre 2 85
4.2 Opérateur Laplacien à la surface libre 86
4.2.1 Consistance des opérateurs à la surface libre 87
4.2.1.1 Consistance d'ordre 0 87

4.2.1.2 Consistance d'ordre 1 87
4.2.1.3 Consistance d'ordre 2 88
4.2.2 Résultats sur la dissipation d'énergie à la surface libre 89
4.3 Opérateur Laplacien en présence d'une paroi 89
4.3.1 Opérateur de Morris et al. en formalisme BIM 90
4.3.2 Opérateur de Monaghan et Gingold en formalisme BIM 91
4.3.3 Consistance des opérateurs à la paroi 93
4.3.3.1 Consistance d'ordre 0 93
4.3.3.2 Consistance d'ordre 1 94
4.4 Pas de temps visqueux 94
4.5 Résultats numériques 94
4.5.1 Cas sans surface libre et avec parois - écoulement de Poiseuille 95
4.5.1.1 Influence de la discrétisation spatiale et du nombre de particules voisines 95
4.5.1.2 Influence du choix du noyau 96
4.5.2 Cas avec surface libre et parois 97
4.5.2.1 Écoulement de Poiseuille avec surface libre 97
4.5.2.2 Écoulement dans un cylindre tournant partiellement rempli 99
4.6 Bilan et choix d'un opérateur 102

5 Montée en ordre de la méthode SPH 105
5.1 Convergence de la méthode SPH 105
5.2 État de l'art 107
5.2.1 Noyau d'ordre élevé 107
5.2.2 Correction des opérateurs SPH 108
5.2.3 Reconstruction des champs à l'interface entre particules pour les schémas de type Riemann-SPH 111
5.3 Proposition d'une nouvelle méthode de reconstruction WENO-MLS 113
5.3.1 Reconstruction WENO sur une grille uniforme 114
5.3.2 Reconstruction MLS 115
5.3.3 Mise en place d'une nouvelle méthode de reconstruction WENO-MLS 116
5.4 Étude théorique en dimension 1 117
5.4.1 Étude de la reconstruction WENO sans interpolation MLS 117
5.4.2 Convergence de la reconstruction MLS 120
5.4.2.1 Cas d'une reconstruction MLS seule 121
5.4.3 Étude de la reconstruction WENO-MLS 123
5.5 Validation en l'absence de frontière 125
5.5.1 Reconstruction 1D d'un gradient SPH 125
5.5.2 Équation d'advection 1D en configuration Eulérienne 126
5.5.3 Équations d'Euler 1D en configuration Lagrangienne 127
5.5.3.1 Influence de l'ordre des reconstructions WENO et MLS . . . 130
5.5.3.2 Influence du désordre particulaire 131
5.5.3.3 Rapport coût/précision 132
5.5.4 Tourbillons de Taylor-Green 133
5.6 Prise en compte des parois solides et de la surface libre 134
5.7 Validation en présence de frontières 136
5.7.1 Cas avec parois solides - Cavité entraînée à $Re = 1000$ 137

5.7.2 Cas avec parois solides et surface libre - jet impactant une surface plane 139
5.8 Conclusion 142

6 Développement d'un modèle de tension de surface pour des simulations monophasiques 145
6.1 État de l'art des modèles de tension de surface en SPH 145
6.2 Amélioration du modèle CSF et adaptation aux écoulements monophasiques : corrected CSF (C-CSF) 147
6.3 Tension de surface et compressibilité 148
6.4 Condition de stabilité 149
6.5 Cas sans paroi solide 150
6.5.1 Détermination de la normale à l'interface 150
6.5.2 Détermination de la courbure à l'interface 150
6.5.3 Détermination de la fonction d'interface 151
6.5.4 Corrections additionnelles 151
6.5.4.1 Correction de la normale à l'interface dans les jets fluides . . 151
6.5.4.2 Pénalisation de la normale loin de l'interface 152
6.5.4.3 Correction de la courbure à l'interface dans les jets fluides . 152
6.5.4.4 Correction de la fonction d'interface 153
6.6 Validation pour des cas sans paroi solide 154
6.6.1 Déformation de gouttes carrée et cubique 154
6.6.1.1 Étude de robustesse du modèle pour le cas de la déformation d'une goutte cubique 158
6.6.1.2 Inversion des phases 160
6.6.2 Gouttes oscillantes 162
6.6.3 Onde capillaire amortie 165
6.6.4 Impact de deux gouttes - coalescence et séparation 167
6.6.5 Instabilités de Plateau-Rayleigh 169
6.7 Prise en compte des parois solides 171
6.7.1 Prise en compte des parois avec la méthode ghost 171
6.7.2 Prise en compte des parois avec la méthode BIM 172
6.7.2.1 Opérateurs renormalisés en formalisme BIM 172
6.7.2.2 Modèle C-CSF en formalisme BIM 172
6.7.3 Corrections additionnelles 173
6.8 Validation pour des cas avec parois solides 174
6.8.1 Goutte en équilibre sur une surface plane 174
6.8.2 Impact d'une goutte sur une surface plane 178
6.9 Conclusion 180

7 Étude de l'amerrissage d'urgence d'hélicoptères 181
7.1 Motivations 181
7.2 Présentation des expérimentations en bassin 183
7.2.1 Présentation des moyens d'essais 184
7.2.1.1 Système de guidage par rail 184
7.2.1.2 Maquette de l'hélicoptère 185
7.2.1.3 Capteurs 186
7.2.2 Référentiels et propriétés inertielles 187
7.2.3 Incertitudes expérimentales 188

7.3 Modèle numérique adopté . . . 189
7.3.1 Paramètres retenus pour les simulations . . . 190
7.3.1.1 Choix du schéma numérique . . . 190
7.3.1.2 Choix de la vitesse du son artificielle . . . 190
7.3.1.3 Formalisme utilisé pour imposer les conditions aux limites . 190
7.3.1.4 Taille des particules et raffinement particulaire . . . 191
7.3.2 Modélisation des vagues - couplage avec la méthode HOS . . . 192
7.3.3 Modélisation du détachement des jets fluides . . . 193
7.4 Comparaison entre les essais expérimentaux et les simulations numériques . . 195
7.4.1 Cas avec vitesse d'avance et sans houle . . . 195
7.4.1.1 Validation de l'amélioration du détachement des jets fluides 197
7.4.1.2 Influence de la vitesse initiale d'assiette . . . 200
7.4.1.3 Influence de la discrétisation spatiale . . . 203
7.4.2 Cas d'impact vertical et sans houle . . . 208
7.4.3 Cas avec houle . . . 212
7.5 Conclusion . . . 218

Conclusion **219**

A Solution exacte du problème de Riemann **231**
A.1 Caractéristiques et invariants de Riemann . . . 231
A.2 Algorithme pour la solution du problème de Riemann . . . 232
A.2.1 Onde associée à la valeur propre $u - c$ . . . 233
A.2.2 Onde associée à la valeur propre $u + c$ . . . 234
A.2.3 Solution complète . . . 234

B Calcul de la pression à la paroi par la méthode des flux normaux (NFM) **237**

C Détails des calculs de consistance des différents opérateurs Laplacien **241**
C.1 Consistance des opérateurs dans le fluide . . . 242
C.1.1 Consistance d'ordre 1 . . . 242
C.1.1.1 Laplacien de Morris et al. . . . 242
C.1.1.2 Laplacien de Monaghan et Gingold . . . 243
C.1.2 Consistance d'ordre 2 . . . 243
C.1.2.1 Laplacien de Morris et al. . . . 243
C.1.2.2 Laplacien de Monaghan et Gingold . . . 244
C.2 Consistance des opérateurs à la surface libre . . . 245
C.2.1 Consistance d'ordre 1 . . . 245
C.2.1.1 Laplacien de Morris et al. . . . 245
C.2.1.2 Laplacien de Monaghan et Gingold . . . 246
C.2.2 Consistance d'ordre 2 . . . 247
C.2.2.1 Laplacien de Morris et al. . . . 247
C.2.2.2 Laplacien de Monaghan et Gingold . . . 247
C.3 Consistance des opérateurs à la paroi . . . 248
C.3.1 Consistance d'ordre 1 . . . 248
C.3.1.1 Laplacien de Morris et al. . . . 248
C.3.1.2 Laplacien de Monaghan et Gingold . . . 249

D Noyaux utilisés **251**
D.1 Noyau de Wendland C^2, en dimension 2 et 3 251
D.2 Noyau en spline cubique, en dimension 2 et 3 251
D.3 Noyau Hyper 4, en dimension 2 et 3 251
D.4 Noyau Poly3, en dimension 2 et 3 252
D.5 Noyau de Wendland C^4, en dimension 1 252

Table des figures

1 Exemples d'études réalisées avec le code SPH-Flow : étude théorique sur les schémas numériques (en haut à gauche) ; écoulement dans une boîte de vitesse (en haut à droite) ; impact d'une vague sur une carène de navire (en bas à gauche) ; étude d'aquaplaning (en bas à droite). 2

1.1 Schéma représentant la définition du domaine de calcul $\boldsymbol{\Omega}$ et des ensembles $\boldsymbol{\partial\Omega}_S$ et $\boldsymbol{\partial\Omega}_{FS}$ où sont appliquées les conditions limites. 10

2.1 Démonstration du caractère centré des opérateurs ; paramétrage utilisé. . . . 22
2.2 Schéma de principe de l'approximation SPH discrétisée. 23
2.3 Différence de point de vue pour la définition des volumes des particules au niveau du centre d'un tourbillon de Taylor-Green, pour une même répartition de particules ; Gauche : "volumes scalaires" calculés à l'aide des équations d'évolution (1.4-1.6) ; Droite : "volumes géométriques" calculés à l'aide d'une décomposition de Voronoï ; V_{0i} désigne la valeur initiale du volume et coïncide pour les deux points de vue. 25
2.4 Comparaison des différents schémas SPH sur le cas d'un dambreak. On remarque l'intérêt des différentes techniques de stabilisation, en particulier concernant la régularité du champ de pression. 36
2.5 Construction d'un problème de Riemann 1D pour l'interaction entre la particule i et la particule j. 39
2.6 Principe de la reconstruction MUSCL : les valeurs à l'interface $\boldsymbol{x}_{ij}$ sont données par une reconstruction linéaire à l'aide de l'évaluation de gradients SPH. . . 40
2.7 Décomposition du spectre de densité d'énergie présente dans l'écoulement entre la partie acoustique et l'écoulement moyen. La vitesse du son artificielle c_0 influence le contenu fréquentiel de la partie acoustique. 43
2.8 Particules fantômes obtenues par symétrie en proche paroi. 45
2.9 Vitesse de la particule fantôme $g(i)$ obtenue à partir de la vitesse de la particule i pour imposer une condition de glissement ; ici la vitesse de la paroi $\boldsymbol{u}_s$ est prise comme nulle. 46
2.10 Vitesse de la particule fantôme $g(i)$ obtenue à partir de la vitesse de la particule i pour imposer une condition d'adhérence ; ici la vitesse de la paroi $\boldsymbol{u}_s$ est prise comme nulle. 47
2.11 Support du noyau $\Omega(\boldsymbol{x})$ intersectant une paroi, n'assurant plus la condition de partition de l'unité (2.3). 48
2.12 Surface libre théorique $\boldsymbol{\partial\Omega}_{FS}$ et particules SPH. 52
2.13 Comportement de la plus petite valeur propre λ_i, proche d'une surface libre [94]. 53
2.14 Zone à scanner pour lever l'ambigüité d'appartenance d'une particule à la surface libre. 55

2.15 Résultats de l'algorithme de détection de surface libre : les particules à la surface libre (appartenant à l'ensemble $\mathcal{F}$) sont tracées en rose avec leurs normales associées $\tilde{\boldsymbol{n}}_i$ [94]. 55
2.16 Comparaison des différentes techniques de raffinement particulaire en SPH, pour le cas de l'impact d'un cylindre. 57

3.1 Évolution Lagrangienne des particules le long des lignes de trajectoires pour le cas d'un écoulement autour d'un obstacle carré [35]. 59
3.2 Définition de l'ensemble $\mathcal{V}$ des particules en interaction avec la surface libre. 66
3.3 Influence des corrections du vecteur de shifting pour les particules de l'ensemble $\mathcal{V}$ (tracées en rouge) : (a) correction (3.16) ; (b) correction (3.17). . . 67
3.4 Tourbillon de Taylor-Green : influence de la loi de shifting sur la répartition des particules au niveau du centre du tourbillon ; gauche : loi de shifting de Oger et al. (3.13) ; droite : nouvelle loi de shifting (3.24) 74
3.5 Paramétrisation utilisée pour l'étude théorique de la loi de shifting à la surface libre. 75
3.6 Comportement des coefficients β_i (gauche) et σ_i (droite) proche de la surface libre. 79

4.1 Écoulement de Poiseuille sans surface libre : Profils de vitesse pour les opérateurs de Monaghan et Gingold et de Morris et al., en formalismes BIM et ghosts ; $\frac{H}{\Delta x} = 200$. 95
4.2 Écoulement de Poiseuille avec surface libre : Profils de vitesse pour les opérateurs de Monaghan et Gingold et de Morris et al. en formalisme BIM ; $\frac{H}{\Delta x} = 200$. . 98
4.3 Écoulement dans un cylindre tournant partiellement rempli : Champs de vitesse et de pression analytiques pour $Re = 2$, $G = 200$ et $\lambda = 0.19$ (le point rose indique la position du point de stagnation de l'écoulement, i.e. la position du minimum du champ de vitesse). 99
4.4 Écoulement dans un cylindre tournant partiellement rempli : Champs de vitesse et de pression obtenus avec la méthode SPH à $t\omega = 10$ (la ligne magenta désigne la forme analytique de la surface libre). 100
4.5 Écoulement dans un cylindre tournant partiellement rempli : Champ de pression sur la paroi du cylindre obtenu avec la méthode SPH à $t\omega = 10$ pour les deux opérateurs. 102

5.1 Noyaux permettant d'assurer une montée en ordre de l'erreur de troncature au continu (5.3). 108
5.2 Influence de l'ordre de la correction sur le noyau SPH pour une répartition désordonnée de particules. 111
5.3 Principe de la montée en ordre par reconstruction des états gauche et droit des problèmes de Riemann : plus l'ordre de la reconstruction à l'interface $\boldsymbol{x}_{ij}$ est élevé, plus l'ordre de convergence de la méthode SPH est théoriquement élevé. 112
5.4 Reconstruction MLS afin de compléter les stencils utilisés pour la reconstruction WENO des états gauche et droit des problèmes de Riemann. 114
5.5 Stencils utilisés pour une reconstruction WENO d'ordre 5. 114

5.6 Reconstruction 1D d'un gradient SPH : courbe de convergence de l'erreur de troncature (en norme L_2) en fonction du double critère de convergence SPH ; les droites verte et rouge ont respectivement des pentes de 6 et $-\beta-2$. . . . 126
5.7 Équation d'advection 1D : courbe de convergence (en norme L_2) sur la solution à $t = 0.5s$, pour différents ratios $\frac{R}{\Delta x}$. 127
5.8 Équation d'Euler 1D en configuration Lagrangienne : présentation du cas test. 128
5.9 Équation d'Euler 1D en configuration Lagrangienne : champ de pression à $t = 10s$ pour différentes discrétisations et différentes méthodes de reconstruction ; $\frac{R}{\Delta x} = 4$. Haut : vue d'ensemble du profil de pression. Bas : agrandissement autour du second pic de pression. 129
5.10 Équation d'Euler 1D en configuration Lagrangienne : courbe de convergence (en norme L_2) sur le champ de pression à $t = 10s$, pour différents ratios $\frac{R}{\Delta x}$; gauche : reconstruction MUSCL ; droite : reconstruction WENO5-MLS2. . . 130
5.11 Équation d'Euler 1D en configuration Lagrangienne : courbe de convergence (en norme L_2) sur le champ de pression à $t = 10s$, pour différents ordres de reconstruction WENO-MLS ; gauche : $\frac{R}{\Delta x} = 4$; droite : $\frac{R}{\Delta x} = 8$. 131
5.12 Équation d'Euler 1D en configuration Lagrangienne : courbe de convergence (en norme L_2) sur le champ de pression à $t = 10s$, pour différents ordres de reconstruction WENO-MLS et pour un désordre $\xi_{max} \sim 10\%$; gauche : $\frac{R}{\Delta x} = 4$; droite : $\frac{R}{\Delta x} = 8$. 132
5.13 Tourbillons de Taylor-Green : Champs de pression obtenus avec une reconstruction MUSCL (gauche) et une reconstruction WENO-MLS (droite) à $t\frac{U}{L} = 1$; $\frac{L}{\Delta x} = 100$. 133
5.14 Tourbillons de Taylor-Green : Courbes de convergence sur la perte d'énergie cinétique et sur le champ de pression à $t\frac{U}{L} = 1$. 134
5.15 Principe de la montée en ordre proche d'une frontière : ici $d_i > R$ et $d_j \leq R$; le point $k+2$ est obtenu à l'aide d'une reconstruction MUSCL tandis que les points $k-1$ et $k-2$ sont obtenus à l'aide de reconstructions MLS. 136
5.16 Cavité entraînée à $Re = 1000$: Champs de vitesse et de pression obtenus avec une reconstruction MUSCL (gauche) et une reconstruction WENO-MLS (droite) ; $\frac{L}{\Delta x} = 400$. 137
5.17 Cavité entraînée à $Re = 1000$: Profils de vitesse le long des lignes centrales (gauche : $x = 0.5L$; droite : $y = 0.5L$) pour différentes méthodes de reconstruction et différentes discrétisations. 138
5.18 Cavité entraînée à $Re = 1000$: Courbes de convergence (en norme L_2) sur les profils de vitesse le long des lignes centrales et sur la position du tourbillon primaire. 138
5.19 Jet impactant une surface plane : description du cas test [96]. 140
5.20 Jet impactant une surface plane : Champs de vitesse et de pression obtenus avec une reconstruction MUSCL (haut) et une reconstruction WENO-MLS (bas) ; $\frac{H}{\Delta x} = 40$. 140
5.21 Jet impactant une surface plane : Champs de vitesse proche de l'outlet pour une reconstruction MUSCL (haut) et une reconstruction WENO-MLS (bas) ; $\frac{H}{\Delta x} = 40$. 141
5.22 Jet impactant une surface plane : Champs de vitesse et de pression à la paroi pour différentes méthodes de reconstruction et différentes discrétisations. . . 141

5.23 Jet impactant une surface plane : Courbes de convergence (en norme L_2) sur les profils de vitesse et de pression à la paroi. 142

6.1 Schéma illustrant le comportement de la fonction d'interface ; les lignes rouges en pointillé représentent le comportement dans la phase manquante. 148
6.2 Exemple de situation pour laquelle de fortes variations de la direction de la normale ont lieu et pour laquelle la correction (6.14) est nécessaire. 153
6.3 Configurations limites reliées au plus petit rayon de courbure qui puisse être détecté ; Gauche : cas 2D ; Droite ; cas 3D. 153
6.4 Déformation de gouttes carrée et cubique : distributions des particules et champs de pression à $t = 0$ (haut) et $t = 8\sqrt{\frac{\rho R_{eq}^3}{\sigma}}$ (bas) pour les cas 2D (gauche) et 3D (droite) obtenus avec le modèle C-CSF et pour $\frac{L}{\Delta x} = 20$. . . . 155
6.5 Déformation de gouttes carrée et cubique : distribution des particules et champ de pression à $t = 8\sqrt{\frac{\rho R_{eq}^3}{\sigma}}$ avec des opérateurs non-renormalisés (gauche) et renormalisés (droite) pour l'évaluation de la normale et de la courbure à l'interface, montrant l'intérêt d'utiliser les opérateurs (6.8) et (6.9) ; $\frac{L}{\Delta x} = 20$. . . 156
6.6 Déformation de gouttes carrée et cubique : profils de pression à $t = 8\sqrt{\frac{\rho R_{eq}^3}{\sigma}}$ pour les cas 2D et 3D et pour $\frac{L}{\Delta x} = 40$. On donne aussi les résultats pour le schéma $\delta - SPH$, pour la formulation PF de Akinci et al. [2] et sans les corrections présentées à la section 6.5.4. 157
6.7 Déformation de gouttes carrée et cubique : évolution de l'énergie cinétique pour les cas 2D et 3D et pour $\frac{L}{\Delta x} = 20$ et $\frac{L}{\Delta x} = 40$ 158
6.8 Déformation de gouttes carrée et cubique : courbes de convergence sur la pression moyenne dans la goutte à $t = 8\sqrt{\frac{\rho R_{eq}^3}{\sigma}}$ 158
6.9 Déformation de gouttes carrée et cubique : champ de pression à $t = 8\sqrt{\frac{\rho R_{eq}^3}{\sigma}}$ pour différentes discrétisations spatiales et pour des nombres de voisins différents. 160
6.10 Déformation d'une bulle carrée : champ de pression obtenu avec le modèle C-CSF. 161
6.11 Ascension d'une bulle de vide : forme de la surface libre obtenue avec le modèle C-CSF (en rouge) et résultats de référence [121] ; gauche : $t = 0.2s$; milieu : $t = 0.35s$; droite : $t = 0.5s$. 162
6.12 Ascension d'une bulle de vide : champ de pression obtenu avec le modèle C-CSF à $t = 0.5s$. 162
6.13 Gouttes oscillantes ($\frac{R_0}{\Delta x} = 20$) : Haut : champ de vitesse à $t = 0$; Bas : champ de pression à $t = 0.25T_{n,\sigma}$ (les lignes rouges correspondent à la déformation théorique (6.19)). 164
6.14 Gouttes oscillantes ($\frac{R_0}{\Delta x} = 20$) : évolution de la période d'oscillation (échelle logarithmique) en fonction de σ pour les modes $n \in [\![2, 3, 4, 5]\!]$. 165
6.15 Onde capillaire amortie : comparaison de l'évolution de l'amplitude obtenue avec le modèle C-CSF, pour différentes discrétisations. 166
6.16 Onde capillaire amortie : champ de pression obtenu avec le modèle C-CSF à $t\omega_0 = 0.2$, pour $\frac{\lambda}{\Delta x} = 50$. 167
6.17 Impact de deux gouttes : paramétrisation du problème [67]. 167

6.18 Impact de deux gouttes : résultats expérimentaux [123] et résultats des simulations SPH avec le modèle C-CSF ; gauche : $(We, Re, B) = (19.4, 158, 0.05)$; droite : $(We, Re, B) = (37.2, 228, 0.01)$. 168
6.19 Instabilités de Plateau-Rayleigh : propagation des perturbations initiales à partir des extrémités du cylindre et conduisant à la fragmentation en plusieurs gouttes (cas non-visqueux) ; $\frac{R_0}{\Delta x} = 4$. 169
6.20 Instabilités de Plateau-Rayleigh : déformées du rayon du cylindre juste avant la fragmentation (haut) et transformées de Fourier associées (bas), pour trois résolutions spatiales différentes (cas non-visqueux). 170
6.21 Instabilités de Plateau-Rayleigh : nombre d'onde adimensionné de la perturbation la plus instable en fonction de la viscosité adimensionnée. 171
6.22 Paramétrisation utilisée pour la correction de la normale proche de la ligne de contact (représentée ici dans le plan $(\boldsymbol{t}_{b,i}, \boldsymbol{n}_{b,i})$). 174
6.23 Goutte en équilibre sur une surface plane : paramétrisation du problème . . 175
6.24 Goutte en équilibre sur une surface plane : forme de la goutte à l'équilibre (à $t = 8.45\sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}}$) pour $Bo = 1.11$, $\frac{L}{\Delta x} = 40$ et pour différents angles de contact à l'équilibre θ_e ; les lignes magenta correspondent aux formes théoriques déterminées à l'aide de l'équation (6.36). 176
6.25 Goutte en équilibre sur une surface plane : hauteur de la goutte en fonction du nombre de Bond Bo pour $\frac{L}{\Delta x} = 20$. 176
6.26 Goutte en équilibre sur une surface plane : courbes de convergence de la hauteur de la goutte pour $Bo = 0.22$ et $Bo = 1.11$ à $t = 8.45\sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}}$. 178
6.27 Impact d'une goutte sur une surface plane : vue en coupe ; $\frac{D}{\Delta x} = 50$. 179
6.28 Impact d'une goutte sur une surface plane : vue de dessus ; $\frac{D}{\Delta x} = 50$. 179
6.29 Impact d'une goutte sur une surface plane : évolution du diamètre de la surface de contact ; $\frac{D}{\Delta x} = 50$. 180

7.1 Visualisation des flotteurs lors de tests à taille réelle réalisés par Airbus Helicopters [62]. 183
7.2 Système de guidage : hélicoptère au repos et en position initiale (gauche) ; hélicoptère en mouvement après largage (droite). 184
7.3 Vue de la maquette de l'hélicoptère et du charriot qui lui est attaché. 185
7.4 Description schématique de la maquette de l'hélicoptère et de la dénomination utilisée. 186
7.5 Vue de dessous de la maquette et de la position des capteurs d'efforts Sq1, Sq2 et Sq3. 187
7.6 Schéma des différents référentiels utilisés. 188
7.7 Géométrie de la maquette de l'hélicoptère utilisée pour les simulations numériques. 191
7.8 Position des boîtes APR autour de l'hélicoptère. 192
7.9 Schéma de principe de la méthode de forçage entre SPH et HOS [116]. 193
7.10 Influence du critère de détachement des jets fluides pour le cas de l'impact d'un cylindre. 194
7.11 Cas avec vitesse d'avance et sans houle : visualisation générale de l'écoulement. 196
7.12 Cas avec vitesse d'avance et sans houle : comparaison entre l'écoulement simulé et les essais expérimentaux pour différents instants. 197

7.13 Cas avec vitesse d'avance et sans houle : comparaison des écoulements obtenus avec les différents modèles de détachement de jets fluides (vue en coupe) ; on souligne ici la différence de comportement de l'écoulement à l'arrière et à l'avant de la maquette. 198
7.14 Cas avec vitesse d'avance et sans houle : effets du modèle de détachement des jets sur l'évolution de l'assiette ; les résultats expérimentaux sont également donnés pour comparaison. 199
7.15 Cas avec vitesse d'avance et sans houle : effets du modèle de détachement des jets sur l'évolution de l'effort F_{yh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) sur le flotteur arrière gauche ; les résultats expérimentaux sont également donnés pour comparaison. 200
7.16 Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de la vitesse initiale d'assiette. 201
7.17 Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de la vitesse initiale d'assiette sur l'évolution de la force F_{xh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) sur les flotteurs arrière. 202
7.18 Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de la vitesse initiale d'assiette sur l'évolution de la force F_{zh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) sur les plaques Sq1, Sq2 et Sq3. 203
7.19 Cas avec vitesse d'avance et sans houle : position de la boîte APR supplémentaire pour l'étude de l'influence de la discrétisation spatiale. 204
7.20 Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de résolution spatiale sur l'évolution de l'assiette. 205
7.21 Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de la discrétisation spatiale sur l'évolution des efforts F_{xh} et F_{zh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) sur les flotteurs arrière. 206
7.22 Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de la discrétisation spatiale sur l'évolution du moment M_y au niveau des flotteurs arrière et du reste de la maquette (moments au centre de gravité de la maquette). 206
7.23 Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de la discrétisation spatiale sur la surface mouillée sous la maquette à $t = 0.15s$; les points magentas indiquent les positions des points de décollement. 207
7.24 Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de la discrétisation spatiale sur l'évolution de l'effort F_{zh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) sur la plaque Sq1. . 208
7.25 Cas d'impact vertical et sans houle : visualisation générale de l'écoulement. . 209
7.26 Cas d'impact vertical et sans houle : comparaison entre l'écoulement simulé et les essais expérimentaux pour différents instants. 210
7.27 Cas d'impact vertical et sans houle : évolution de l'assiette. 211
7.28 Cas d'impact vertical et sans houle : évolution de la position de la maquette le long des axes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{z}$. 211
7.29 Cas d'impact vertical et sans houle : évolution des efforts F_{zh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) au niveau des plaques Sq3, Sq2 et Sq1. 212
7.30 Cas avec houle : position initiale de la maquette et définition du déphasage initial. 213
7.31 Cas avec houle : visualisation générale de l'écoulement. 213
7.32 Cas avec houle : comparaison entre l'écoulement simulé et les essais expérimentaux pour différents instants. 214
7.33 Cas avec houle : évolution de l'assiette. 215

7.34 Cas avec houle : évolution de la position de la maquette le long des axes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{z}$. 215
7.35 Cas avec houle : évolution du moment M_y au niveau des flotteurs arrière et du reste de la maquette (moments donnés au centre de gravité de la maquette). 216
7.36 Cas avec houle : évolution des efforts F_{zh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) au niveau des plaques Sq3, Sq2 et Sq1. 217
7.37 Cas avec houle : évolution de l'effort F_{zh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) sur l'ensemble de la maquette, à l'exception des flotteurs. 217

A.1 Représentation des caractéristiques dans le plan (x, t), donnant la structure générale de la solution du problème de Riemann (2.84). 233
A.2 Modification de la structure de la solution du problème de Riemann en prenant en compte les zones de détente $\boldsymbol{\phi}_{D,L}$ et $\boldsymbol{\phi}_{D,R}$ (suivant les cas ces zones de détente peuvent éventuellement être nulles) ; la vitesse de l'interface u_I permet alors de déterminer la solution recherchée $\boldsymbol{\phi}_E$. 235

C.1 Paramétrage utilisé pour les calculs de consistance des différents opérateurs Laplacien. 241

Liste des tableaux

3.1 Comparaison des propriétés théoriques des lois de shifting. 73

4.1 Écoulement de Poiseuille 2D sans surface libre : erreur en norme L_2 sur le profil de vitesse en fonction de la taille des particules, pour les 2 opérateurs et pour les formalismes ghost et BIM ; $\frac{R}{\Delta x} = 4$. 96

4.2 Écoulement de Poiseuille 2D sans surface libre : erreur en norme L_2 sur le profil de vitesse en fonction du ratio $\frac{R}{\Delta x}$ pour l'opérateur de Monaghan et Gingold en formalisme BIM ; $\frac{H}{\Delta x} = 200$. 96

4.3 Écoulement de Poiseuille 2D sans surface libre : erreur en norme L_2 sur le profil de vitesse pour différents noyaux, pour l'opérateur de Monaghan et Gingold en formalisme BIM ; $\frac{H}{\Delta x} = 200$; $\frac{R}{\Delta x} = 4$. 97

4.4 Cylindre tournant partiellement rempli : comparaison entre quelques grandeurs (et pourcentage d'erreur associé) à $t\omega = 10$, pour les opérateurs de Morris et al. (4.30) et de Monaghan et Gingold (4.34). 101

4.5 Résumé des résultats théoriques obtenus dans ce chapitre. 103

6.1 Déformation de gouttes carrée et cubique : Pression adimensionnée $P/P_{Laplace}$ au centre des gouttes (et pourcentage d'erreur associé) à $t = 8\sqrt{\frac{\rho R_{eq}^3}{\sigma}}$ pour différents ratios $\frac{R}{\Delta x}$ et $\frac{L}{\Delta x}$. 159

6.2 Gouttes oscillantes ($\frac{R_0}{\Delta x} = 20$) : erreur sur la période d'oscillation en fonction de σ pour les modes $n \in [\![2, 3, 4, 5]\!]$. 164

6.3 Goutte en équilibre sur une surface plane : énergie cinétique à $t = 30\sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}}$ en fonction du nombre de Bond, pour $\frac{L}{\Delta x} = 20$ et $\theta_e = 60°$. 177

6.4 Goutte en équilibre sur une surface plane : énergie cinétique à $t = 30\sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}}$ en fonction de la discrétisation, pour $Bo = 1.11$ et $\theta_e = 60°$. 177

6.5 Goutte en équilibre sur une surface plane : énergie cinétique à $t = 30\sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}}$ en fonction de l'angle de contact à l'équilibre, pour $Bo = 1.11$ et $\frac{L}{\Delta x} = 20$. . . . 177

7.1 Caractéristiques inertielles de la maquette dans le repère $(O_h, \boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$: la position de G est donnée par rapport à O_h et les moments d'inertie sont donnés en G. 188

7.2 Cas avec houle : instant d'impact au niveau des plaques Sq et vitesse verticale de la vague incidente non perturbée au niveau de chaque plaque Sq et aux différents instants d'impact. 218

Introduction

Développée en 1977 par Lucy [88] ainsi que Gingold et Monaghan [55] dans le cadre de simulations astrophysiques, la méthode de simulation numérique Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) est une méthode particulaire, autrement dit sans maillages et Lagrangienne (dans sa version la plus courante). Ces deux caractéristiques permettent en particulier des simulations précises de problèmes fortement convectifs et présentant de nombreuses interfaces. Initialement développée dans le contexte de l'astrophysique [88] [55], la méthode SPH s'est ensuite révélée particulièrement adaptée à de nombreuses autres branches de la physique : mécanique des solides [82] [15], phénomènes thermiques [31], etc... En particulier, Monaghan [101] a adapté la méthode SPH au contexte de l'hydrodynamique à surface libre. Bénéficiant de nombreuses améliorations, la SPH hydrodynamique permet désormais de simuler des écoulements complexes et multiphysiques. La caractère Lagrangien de la méthode SPH permet notamment de simuler des écoulements violents et présentant des formes de surfaces libres complexes. Cet aspect est un avantage important par rapport aux autres méthodes numériques classiquement utilisées en hydrodynamique numérique (comme par exemple les méthodes maillées des Volumes Finis et des Différences Finies), pour lesquelles le suivi de la surface libre se révèle compliqué et diffusif. La méthode SPH souffre cependant d'une précision généralement moindre et de coûts de calculs relativement importants. Bien que réservée à des problèmes très spécifiques, l'utilisation de la méthode SPH est désormais validée pour de nombreux écoulements, les recherches récentes ayant permis un gain en stabilité et en précision important (bien que de nombreux points d'amélioration soient toujours le fait de recherches actives). Les travaux présentés dans ce manuscrit de thèse s'inscrivent dans ce contexte général de l'amélioration de la méthode SPH.

Les avantages de la méthode SPH se révèlent particulièrement adaptés à la simulation d'amerrissage d'urgence d'aéronefs (avions et hélicoptères). Ces écoulements violents présentent en effet des surfaces libres aux formes complexes, particulièrement bien simulées par la méthode SPH. Cette méthode de simulation a donc été retenue au sein du projet européen SARAH pour effectuer des simulations haute fidélité d'amerrissage d'urgence. Ce projet a pour objectif d'améliorer la sécurité des passagers lors de telles phases d'urgence, et en particulier de fournir aux industriels des outils leur permettant de prendre en compte ces phases lors de la conception des appareils. Un des objectifs de cette thèse est de fournir un outil le plus précis possible et permettant de simuler ce type de situation avec la méthode SPH.

Au sein du Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Énergétique et Environnement Atmosphérique (LHEEA) de l'École Centrale de Nantes, la méthode SPH fait l'objet de nombreux sujets de recherche depuis plusieurs années et regroupant des thématiques variées (travaux théoriques, ingénierie navale, ingénierie automobile, ingénierie aéronautique, etc...), à la fois dans des contextes académiques et industriels. L'ensemble des développements réalisés au laboratoire, y compris ceux effectués dans le cadre de cette thèse, sont effectués dans le

code SPH-Flow, co-développé avec Nextflow Software.

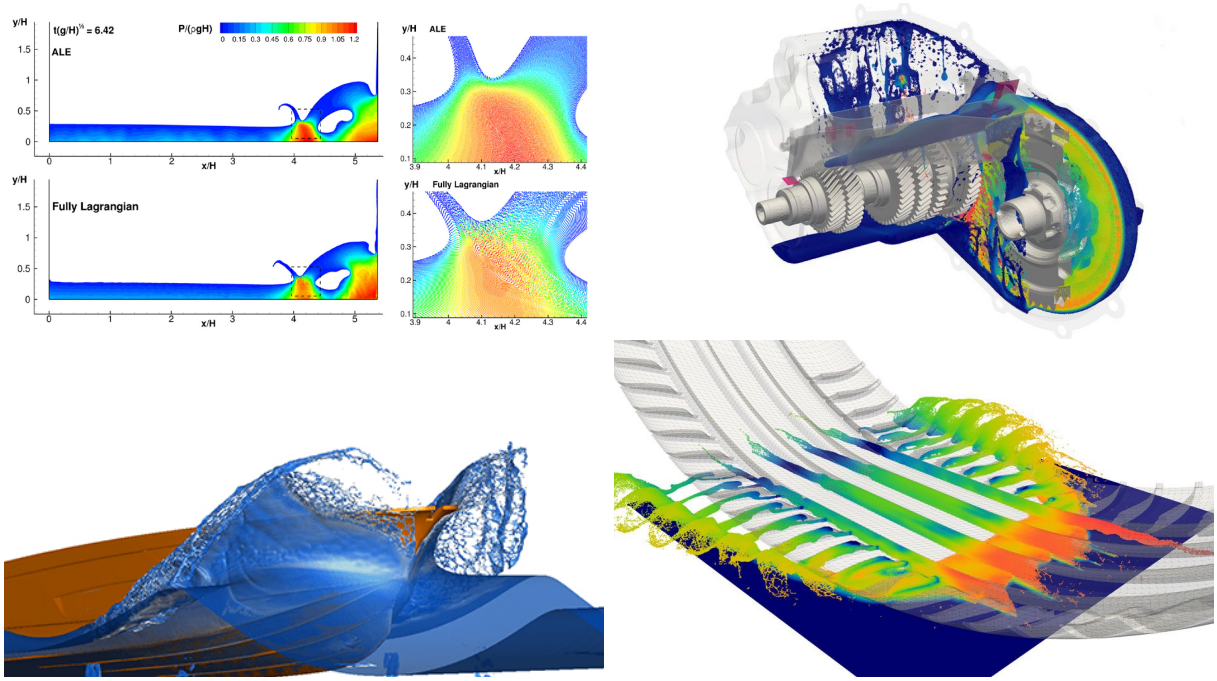

FIGURE 1 – Exemples d'études réalisées avec le code SPH-Flow : étude théorique sur les schémas numériques (en haut à gauche) ; écoulement dans une boîte de vitesse (en haut à droite) ; impact d'une vague sur une carène de navire (en bas à gauche) ; étude d'aquaplaning (en bas à droite).

L'axe principal de ce manuscrit de thèse est l'amélioration du modèle SPH faiblement-compressible pour les écoulements monophasiques, le but étant finalement de proposer un modèle numérique précis pour la simulation d'amerrissage d'urgence d'hélicoptère. Pour cela de nombreuses pistes ont été explorées. Le premier chapitre de ce manuscrit a tout d'abord pour but de rappeler brièvement les équations physiques utiles à la mise en place du modèle SPH monophasique et faiblement compressible. Le deuxième chapitre se concentre ensuite sur l'état de l'art de la méthode SPH monophasique et faiblement compressible (construction des opérateurs SPH, mise en place des différents schémas SPH monophasiques et faiblement compressibles, imposition des conditions aux limites, etc...). Dans le troisième chapitre on se propose d'étudier l'une des principales causes de la faible précision de la méthode SPH : le désordre particulaire. Ce défaut peut être réduit à l'aide de la technique du shifting particulaire. À l'aide d'une étude théorique, on propose dans ce chapitre certaines améliorations importantes du shifting particulaire en SPH. Dans le quatrième chapitre on s'intéresse à la modélisation des effets de la viscosité avec la méthode SPH. On y fournit notamment une étude théorique de la consistance des opérateurs visqueux, tout en proposant la formulation d'un nouvel opérateur en proche paroi (ce chapitre répond principalement à des problématiques industrielles de Nextflow Software et n'a pas de lien direct avec le projet SARAH). Dans le chapitre 5, on étudie un autre défaut important de la méthode SPH : son faible ordre de convergence. Une nouvelle méthode de reconstruction WENO-MLS, valable pour les schémas de type Riemann-SPH, est proposée pour monter en ordre. Le chapitre 6 propose un nouveau modèle de tension de surface pour les écoulements monophasiques, et permettant notamment une imposition de l'angle de contact au niveau de la ligne de

contact (tout comme le chapitre 4, ce chapitre répond principalement à des problématiques industrielles de Nextflow Software et n'a pas de lien direct avec le projet SARAH). Enfin, le septième et dernier chapitre est spécifiquement dédié à la mise en place d'un modèle numérique permettant la simulation de cas d'amerrissage d'urgence d'hélicoptère. Ce modèle est notamment validé grâce à la comparaison des résultats numériques avec ceux obtenus lors d'une campagne d'essais menée au sein du laboratoire.

Chapitre 1

Équations de la mécanique des fluides

Le but de ce chapitre est de rappeler les principales équations physiques qui seront utilisées dans le cadre des travaux de cette thèse. En particulier on présente ici les principales équations utiles à la modélisation des écoulements monophasiques (les écoulements multiphasiques n'étant pas étudiés dans les travaux de recherche présentés dans la suite).

1.1 Équations de Navier-Stokes

Les équations utilisées pour modéliser les écoulements de fluides sont les équations de Navier-Stokes. Elles sont constitués d'un système d'équations aux dérivées partielles ayant pour inconnues le champ de vitesse $\boldsymbol{u}$, le champ de pression P et la masse volumique ρ au sein d'un domaine fluide $\boldsymbol{\Omega}$. Elles traduisent notamment le fait que la masse globale du domaine de fluide se conserve, que la quantité de mouvement globale du domaine de fluide se conserve (cf. la deuxième loi de Newton), la masse volumique ρ et la pression P étant reliées par une loi d'état. Cette équation d'état est ici choisie comme barotrope, et ne fait donc pas intervenir la température. Ainsi, l'équation de conservation de l'énergie généralement présente est ici omise, puisqu'elle est découplée des autres équations du système.

Deux descriptions sont classiquement proposées pour décrire les écoulements au sein d'un fluide : la description Eulérienne et la description Lagrangienne. En résumé, la description Eulérienne ne consiste pas à suivre un petit élément de fluide dans son mouvement mais plutôt à regarder l'évolution des différents champs ($\boldsymbol{u}$, P et ρ par exemple) aux différents points (fixes) du domaine $\boldsymbol{\Omega}$. À l'inverse, la description Lagrangienne du mouvement consiste à suivre dans son mouvement un petit élément de fluide, les différents champs étant transportés avec le mouvement de cet élément matériel. Le passage d'une description à l'autre se fait à l'aide de la dérivée matérielle (notée avec le symbole D ici pour éviter la confusion avec la dérivée "ordinaire" notée classiquement d), qui se définit par :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{grad} f.\boldsymbol{u}, \tag{1.1}$$

$$\frac{D\boldsymbol{f}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} + \mathbb{G}rad\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{u}, \tag{1.2}$$

respectivement pour une quantité scalaire f et pour une une quantité vectorielle $\boldsymbol{f}$. Les termes de gauche dans les relations (1.1) et (1.2) correspondent à la description Lagrangienne du mouvement et les termes de droite correspondent à la description Eulérienne du mouvement, avec l'ajout d'un terme de convection. Ce terme de convection est non-linéaire lorsqu'il est relatif au champ de vitesse $\boldsymbol{u}$. Sauf mention contraire, et afin d'éviter d'avoir à modéliser ce terme de convection non linéaire (et également pour des raisons liées à la modélisation des conditions de surface libre ; cf. plus bas) une description Lagrangienne du mouvement est systématiquement adoptée dans la suite de cette thèse. L'évolution de la position matérielle $\boldsymbol{x}$ d'un élément de fluide est alors fonction de la vitesse $\boldsymbol{u}$:

$$\frac{D\boldsymbol{x}}{Dt} = \boldsymbol{u}. \tag{1.3}$$

1.1.1 Conservation de la masse

La première équation de Navier-Stokes concerne la conservation de la masse et peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho div\boldsymbol{u} = 0. \tag{1.4}$$

Pour un volume élémentaire V, de masse $m = V\rho$ constante on peut alors écrire :

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D\left(\rho V\right)}{Dt} = \rho\frac{DV}{Dt} + V\frac{D\rho}{Dt} = \rho\left(\frac{DV}{Dt} - V div\boldsymbol{u}\right) = 0. \tag{1.5}$$

On en déduit alors la loi d'évolution d'un volume élémentaire V :

$$\frac{DV}{Dt} = V div\boldsymbol{u}. \tag{1.6}$$

1.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

La deuxième équation de Navier-Stokes correspond à la conservation de la quantité de mouvement, ce qui correspond à la deuxième loi de Newton. Cette équation peut s'écrire :

$$\rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\boldsymbol{grad}P + \boldsymbol{div}\mathbb{V} + \rho\boldsymbol{f}, \tag{1.7}$$

où $\mathbb{V}$ et $\boldsymbol{f}$ sont respectivement le tenseur des contraintes visqueuses et le vecteur des forces de volume extérieures (la plupart du temps ces forces se réduisent à l'accélération de la pesanteur $\boldsymbol{g}$). Dans l'équation (1.7), le terme de gauche correspond à la variation de l'inertie

du fluide. Il est compensé par le gradient de pression, les forces visqueuses et les forces de volume présents dans les termes de droite. Dans le cas d'un fluide newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses s'exprime de la manière suivante (deux manières de décomposer le tenseur $\mathbb{V}$ sont possibles en utilisant les paramètres (μ, λ) ou (μ, ζ)) :

$$\mathbb{V} \quad = \quad 2\mu\mathbb{D} + \lambda tr\left(\mathbb{D}\right)\mathbb{I} = \mu\left(2\mathbb{D} - \frac{2}{3}tr\left(\mathbb{D}\right)\mathbb{I}\right) + \zeta tr\left(\mathbb{D}\right)\mathbb{I}, \tag{1.8}$$

où $\mathbb{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{G}rad\boldsymbol{u} +^t \mathbb{G}rad\boldsymbol{u}\right)$ est le tenseur des taux de déformations, μ la viscosité dynamique, λ la seconde viscosité et ζ la viscosité de volume (on a alors la relation : $\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$). Dans le cas d'un fluide newtonien, ces différentes viscosités sont considérées constantes. On peut alors écrire :

$$\boldsymbol{div}\mathbb{V} = \mu\boldsymbol{\Delta u} + (\mu + \lambda)\,\boldsymbol{grad}\,(div\boldsymbol{u}) = \mu\boldsymbol{\Delta u} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\mu\right)\boldsymbol{grad}\,(div\boldsymbol{u})\,. \tag{1.9}$$

Une hypothèse couramment faite, appelée hypothèse de Stokes, est de négliger la viscosité de volume ζ (i.e. $\zeta \ll \mu$).

1.1.3 Loi d'état

Afin de fermer le système constitué des équations (1.4) et (1.7), il est nécessaire d'ajouter une loi d'état. Dans le cadre de l'hypothèse barotrope, la loi d'état relie la pression P et la masse volumique ρ. Elle traduit la compressibilité du fluide subissant des transformations isentropiques. La loi retenue ici, relativement adéquate pour un fluide comme de l'eau, est donnée par :

$$P = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} - 1\right] + P_\chi, \tag{1.10}$$

où P_χ est une pression de fond, ρ_0 la masse volumique de référence du fluide, c_0 la vitesse du son de référence du fluide et γ le coefficient polytropique du fluide. Pour de l'eau, les valeurs typiques sont : $\rho_0 = 1000\ kg/m^3$, $\gamma = 7$ et $c_0 = 1500\ m/s$ (ici il s'agit bien de la vitesse du son physique et non de la vitesse du son artificielle introduite à la section 2.4).

La vitesse du son locale se déduit alors à l'aide de la dérivée de la pression par rapport à la masse volumique, à entropie S constante. Dans le cas de la loi d'état (1.10), la vitesse du son locale (différente de la vitesse du son de référence c_0) est donnée par :

$$c^2 = \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_S = c_0^2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}. \tag{1.11}$$

On notera en particulier qu'à l'aide de l'expression (1.11), le gradient de pression peut être réécrit comme $\boldsymbol{grad}P = c^2\boldsymbol{grad}\rho$.

1.1.4 Approximation de fluide parfait - Équations d'Euler

Pour beaucoup d'écoulements, les phénomènes dus à la viscosité peuvent être négligés au sein des équations de Navier-Stokes (1.4), (1.7), (1.10). Pour quantifier les effets visqueux par rapport aux effets inertiels au sein du fluide, on utilise le nombre de Reynolds, défini par $Re = \frac{\rho LU}{\mu} = \frac{LU}{\nu}$, où L est une échelle de longueur caractéristique de l'écoulement, U une échelle de vitesse caractéristique de l'écoulement et $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ la viscosité cinématique du fluide. Ce nombre peut être vu comme un ordre de grandeur du rapport des termes d'inertie et des termes visqueux de l'équation (1.7). Ainsi pour un nombre de Reynolds très grand (i.e. $Re \to \infty$), on peut considérer les effets dus à la viscosité comme négligeables, à condition que les effets de la turbulence alors engendrée dans l'écoulement puissent être aussi négligés.

On peut alors simplifier l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.7) :

$$\rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\boldsymbol{grad}P + \rho\boldsymbol{f}. \tag{1.12}$$

Le système ainsi constitué des équations (1.4), (1.12), (1.10) est appelé équations d'Euler. À l'exception des travaux abordés au chapitre 4, c'est principalement ce système d'équations que l'on cherchera à résoudre dans cette thèse.

1.2 Écoulements incompressibles et écoulements faiblement compressibles

La compressibilité d'un écoulement se traduit par une modification de la masse volumique du fluide (en fonction du temps et/ou de la position). Or en pratique, ces variations de la masse volumique restent relativement faibles dans la plupart des écoulements étudiés au cours de cette thèse (applications hydrodynamiques, faisant plutôt intervenir des liquides). Il est alors commode de faire l'hypothèse que la masse volumique du fluide reste constante (au cours du temps et en fonction de la position), autrement dit faire l'hypothèse que l'écoulement est incompressible. Sous cette hypothèse, l'équation de conservation de la masse (1.4) devient simplement :

$$div\boldsymbol{u} = 0. \tag{1.13}$$

L'expression de la divergence du tenseur des contraintes visqueuses (1.9) devient alors :

$$\boldsymbol{div}\mathbb{V} = \mu\boldsymbol{\Delta u}. \tag{1.14}$$

Sous l'hypothèse d'un écoulement incompressible et d'un fluide newtonien, la modélisation de la viscosité se réduit donc à l'utilisation de l'opérateur Laplacien.

Pour estimer la compressibilité d'un écoulement, on peut effectuer un raisonnement en ordre de grandeur de l'équation de quantité de mouvement (1.12) pour un écoulement non-visqueux. Pour cela on choisit une échelle de vitesse U, une échelle de longueur L et une échelle de variation de masse volumique $\delta\rho$. L'ordre de grandeur du terme inertiel est alors donné par $\rho\frac{U^2}{L}$, tandis que celui du terme de pression est donné par $c^2\frac{\delta\rho}{L}$ (en utilisant le fait que $\boldsymbol{grad}P = c^2\boldsymbol{grad}\rho$). En négligeant les forces de volume, alors le terme inertiel est du même ordre de grandeur que le terme de pression, donnant :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{U^2}{c^2} = Ma^2, \tag{1.15}$$

où Ma est le nombre de Mach de l'écoulement. Ainsi la compressibilité de l'écoulement est directement reliée au nombre de Mach. Généralement l'hypothèse d'un écoulement faiblement compressible est donnée par une variation maximale (et arbitraire) de 1% autour de la valeur de référence ρ_0 (i.e. $\frac{\delta\rho}{\rho} < 0.01$). Ainsi le critère d'un écoulement faiblement compressible se traduit par le critère d'un nombre de Mach faible ($Ma < 0.1$). Il faut cependant garder à l'esprit que ce critère sur le nombre de Mach n'est qu'un ordre de grandeur et qu'il devra toujours être vérifié a posteriori (en particulier l'analyse faite précédemment ne fournit qu'un ordre de grandeur et ne prend pas en compte les effets d'instationnarité, de la viscosité et des forces de volume). La limite d'un écoulement incompressible est alors donnée lorsque le nombre de Mach tend vers 0.

Il est alors intéressant de quantifier la différence entre l'hypothèse d'un écoulement incompressible et celle d'un écoulement faiblement compressible. On peut montrer [22] que la différence entre les deux hypothèses est donnée par :

$$Solution_{faiblement\ comp.} = Solution_{incomp.} + Ma.Solution_{acoustique} + O\left(Ma^2\right). \tag{1.16}$$

Donc, si l'on met de côté la solution acoustique (qui n'affecte pas l'écoulement moyen lorsque le nombre de Mach est faible et qui peut être "retirée" par simple filtrage), l'hypothèse d'un écoulement faiblement compressible est une bonne approximation de l'hypothèse d'un écoulement incompressible (et vice versa). Dans cette thèse on continuera tout de même d'utiliser une équation compressible de conservation de la masse. D'autre part, le fait d'utiliser uniquement un opérateur Laplacien pour modéliser les effets visqueux reste acceptable (cf. équation (1.14)).

1.3 Conditions aux limites

Afin de pouvoir déterminer une solution aux systèmes d'équations définis précédemment, il est nécessaire d'ajouter un certain nombre de conditions aux limites sur le bord $\boldsymbol{\partial\Omega}$ du domaine de calcul $\boldsymbol{\Omega}$. Le bord du domaine de calcul $\boldsymbol{\partial\Omega}$ se décompose de manière générale

en deux types de frontières différentes : les frontières solides $\boldsymbol{\partial\Omega}_S$ et les surfaces libres $\boldsymbol{\partial\Omega}_{FS}$ (avec $\boldsymbol{\partial\Omega} = \boldsymbol{\partial\Omega}_S \cup \boldsymbol{\partial\Omega}_{FS}$; voir Figure 1.1). Les frontières ouvertes (de type inlet ou outlet) ne sont pas abordées, car peu utilisées dans le cadre des travaux de cette thèse. La taille et la forme de ces différents ensembles peut varier au cours du temps.

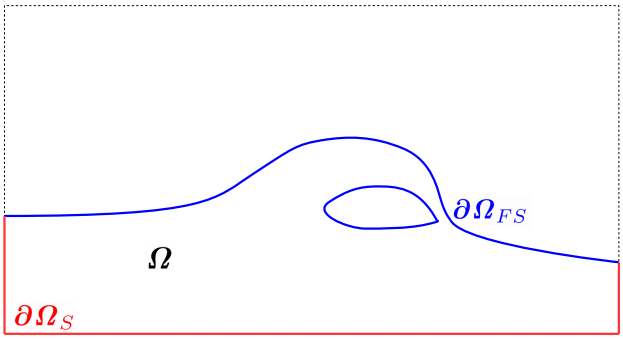

FIGURE 1.1 – Schéma représentant la définition du domaine de calcul $\boldsymbol{\Omega}$ et des ensembles $\boldsymbol{\partial\Omega}_S$ et $\boldsymbol{\partial\Omega}_{FS}$ où sont appliquées les conditions limites.

1.3.1 Condition d'adhérence

Pour un écoulement visqueux il est nécessaire d'imposer une condition limite d'adhérence sur $\boldsymbol{\partial\Omega}_S$. A cause de sa viscosité, un fluide adhère au niveau d'une paroi solide. Cela se traduit, pour un point de l'écoulement situé au niveau d'une paroi, par une vitesse du fluide égale à la vitesse $\boldsymbol{u}_S$ de la paroi :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_S. \tag{1.17}$$

À cette condition cinématique il est nécessaire d'ajouter une condition dynamique, qui se traduit par une continuité de la contrainte normale à la paroi :

$$(-P\mathbb{I} + \mathbb{V})\,\boldsymbol{n}_S = (-P_S\mathbb{I} + \mathbb{V}_S)\,\boldsymbol{n}_S, \tag{1.18}$$

où $\boldsymbol{n}_S$ est le vecteur normal à la paroi $\boldsymbol{\partial\Omega}_S$.

1.3.2 Condition de glissement

En pratique, certains écoulements peuvent être considérés comme non-visqueux (cf. section 1.1.4). Il n'y a donc plus adhérence du fluide contre la paroi. On peut alors imposer une

condition de glissement sur $\boldsymbol{\partial\Omega}_S$, qui se traduit par l'égalité de la composante normale de vitesse pour un point de l'écoulement situé au niveau de la paroi :

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}_S = \boldsymbol{u}_S.\boldsymbol{n}_S, \tag{1.19}$$

où $\boldsymbol{n}_S$ est le vecteur normal à la paroi $\boldsymbol{\partial\Omega}_S$. Cette condition peut s'interpréter comme une condition de non pénétration du fluide à travers la paroi solide. L'absence de viscosité implique alors une simple égalité des pressions à la paroi (i.e. $P = P_S$) pour la condition dynamique.

1.3.3 Conditions de surface libre

Les conditions aux limites de surface libre à imposer au niveau de $\boldsymbol{\partial\Omega}_{FS}$ correspondent au cas de l'interface entre deux fluides, dans le cas où l'un des deux fluides a une densité négligeable par rapport à l'autre (typiquement au niveau d'une interface eau/air). Dans le cadre des travaux présentés dans cette thèse, seuls des écoulements monophasiques sont traités. Cela revient donc à considérer l'absence de la phase la moins dense.

1.3.3.1 Condition cinématique de surface libre

La condition cinématique de surface libre porte sur la continuité des vitesses au niveau de l'interface entre les deux fluides. Elle est intrinsèquement vérifiée dès lors que l'on adopte une description Lagrangienne du mouvement [34] et s'écrit de la manière suivante :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{FS}, \tag{1.20}$$

où $\boldsymbol{u}_{FS}$ est la vitesse de la surface libre. Dans le cas d'un écoulement non-visqueux, cette condition peut être "assouplie" en la réduisant uniquement à la continuité des vitesses normales à la surface libre [34] :

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}_{FS} = \boldsymbol{u}_{FS}.\boldsymbol{n}_{FS}, \tag{1.21}$$

où $\boldsymbol{n}_{FS}$ est la normale locale à la surface libre $\boldsymbol{\partial\Omega}_{FS}$.

1.3.3.2 Condition dynamique de surface libre

La condition dynamique de surface libre porte sur la continuité des contraintes normales à la surface libre entre deux fluides 1 et 2. On a donc, en l'absence de tension de surface :

$$\left(-P_1\mathbb{I} + \mathbb{V}_1\right)\boldsymbol{n}_{FS} = \left(-P_2\mathbb{I} + \mathbb{V}_2\right)\boldsymbol{n}_{FS}, \tag{1.22}$$

Dans le cas où les effets visqueux sont négligés et dans le cas d'un écoulement monophasique, cette condition devient :

$$P = P_0, \tag{1.23}$$

où P_0 est la pression extérieure au fluide. En général, cette pression à la surface libre est prise égale à la pression atmosphérique P_{atm} (et donc une pression nulle si l'on travaille en pression relative). La plupart du temps on considérera cette pression à la surface libre comme étant nulle (et donc constante). L'équation d'état (1.10) permet donc d'affirmer que dans ce cas la masse volumique à la surface libre est également constante, puisqu'un point situé à la surface libre y demeure dans le temps. L'équation de conservation de la masse (1.4) se simplifie donc et la condition dynamique a pour conséquence que :

$$div\boldsymbol{u} = 0, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\partial\Omega}_{FS}. \tag{1.24}$$

1.4 Équations en formalisme ALE

Les équations présentées dans la section précédente 1.1 l'ont été dans un formalisme Lagrangien, car c'est classiquement ce formalisme qui est utilisé pour la méthode SPH grâce à ses nombreux avantages (pas de terme non-linéaire à calculer, suivi intrinsèque de la surface libre, etc...). Or il peut parfois être utile de relaxer cette contrainte et d'utiliser le formalisme général hybride entre la formulation Lagrangienne et la formulation Eulérienne, appelé Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE). D'un point de vue de la méthode SPH cette formulation permet d'introduire de manière plus naturelle la notion de désordre particulaire (cf. chapitre 3) et fournit une formulation proche de la méthode des Volumes Finis. Le but de cette section est de présenter la manière dont peuvent être obtenues les équations d'Euler en formalisme ALE (par souci de simplification, les équations de Navier-Stokes ne sont pas abordées dans cette section, bien que la méthode employée ici puisse également s'appliquer à ces dernières).

Les équations d'Euler (1.4), (1.12) peuvent s'écrire sous forme conservative :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t} + \boldsymbol{div}\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{0}, \tag{1.25}$$

où $\boldsymbol{\phi}$ et $\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi})$ sont respectivement le vecteur des variables conservatives et le tenseur des flux, et sont définis par :

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{F}(\boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} \rho u & \rho v & \rho w \\ \rho u^2 + P & \rho uv & \rho uw \\ \rho uv & \rho v^2 + P & \rho vw \\ \rho uw & \rho vw & \rho w^2 + P \end{pmatrix}, \tag{1.26}$$

avec u, v et w les composantes (en 3D) du vecteur vitesse $\boldsymbol{u}$. L'idée du formalisme ALE est alors d'intégrer l'équation (1.25) sur un volume de contrôle arbitraire $\omega(t)$, délimité par une enveloppe $\partial\omega(t)$ de normale sortante $\boldsymbol{n}$ et ayant une vitesse arbitraire locale $\boldsymbol{u}_0$ (a priori le champ de vitesse arbitraire $\boldsymbol{u}_0$ est différent du champ de vitesse $\boldsymbol{u}$) :

$$\int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t} + \boldsymbol{div}\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi}) \right) dV = \boldsymbol{0}. \tag{1.27}$$

À l'aide du théorème de transport de Reynolds (donné ici pour un champ générique $\boldsymbol{f}$) :

$$\frac{D}{Dt}\left(\int_{\omega(t)} \boldsymbol{f} dV \right) = \int_{\omega(t)} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} dV + \int_{\partial\omega(t)} (\boldsymbol{u}_0.\boldsymbol{n})\, \boldsymbol{f} dS, \tag{1.28}$$

et du théorème de flux-divergence, l'équation (1.27) peut se réécrire :

$$\frac{D}{Dt}\left(\int_{\omega(t)} \boldsymbol{\phi} dV \right) + \int_{\omega(t)} \boldsymbol{div}\left(\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi}) - \boldsymbol{\phi} \otimes \boldsymbol{u}_0\right) dV = \boldsymbol{0}. \tag{1.29}$$

On définit également la valeur moyenne $\overline{f}$ d'un champ f sur le volume arbitraire $\omega(t)$:

$$\overline{f}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\omega(t)} \int_{\omega(t)} f(\boldsymbol{x}, t) dV. \tag{1.30}$$

A l'aide de la définition (1.30), des équations d'Euler intégrées (1.29) et en notant $\mathbb{G}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}_0\right) = \mathbb{F}(\boldsymbol{\phi}) - \boldsymbol{\phi} \otimes \boldsymbol{u}_0$ le flux ALE, on peut finalement donner la formulation ALE des équations d'Euler :

$$\frac{D\left(\omega\overline{\boldsymbol{\phi}}\right)}{Dt} + \omega\overline{\boldsymbol{div}\mathbb{G}\left(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}_0\right)} = \boldsymbol{0}. \tag{1.31}$$

À cette équation on ajoute également une loi d'évolution du volume arbitraire $\omega(t)$, proche de l'équation d'évolution (1.6). Cette dernière équation est obtenue en appliquant le théorème de Reynolds (1.28) à la fonction constante $f = 1$ et s'écrit :

$$\frac{D\omega}{Dt} = \omega\overline{div\boldsymbol{u}_0}. \tag{1.32}$$

Le champ de vitesse $\boldsymbol{u}_0$ est un champ de vitesse arbitraire et n'a donc théoriquement pas de valeur prédéfinie. Cependant si la vitesse arbitraire est choisie comme étant le champ de vitesse du fluide (i.e. $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}$) on se retrouve dans le cas d'un formalisme Lagrangien, sans variation de masse du volume arbitraire mais avec une variation du volume arbitraire (a priori $\frac{D\omega}{Dt} = \omega \overline{div \boldsymbol{u}_0} \neq 0$). Ce volume arbitraire correspond dans ce cas au volume matériel. Au contraire, si la vitesse arbitraire est choisie nulle (i.e. $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}$) alors on se retrouve dans le cas d'un formalisme Eulérien, avec variation de la masse du volume arbitraire mais sans variation de volume. Tout autre choix (d'où la dénomination d'Arbitrary Lagrangian Eulerian) de la vitesse arbitraire $\boldsymbol{u}_0$ mène à des variations du volume et de la masse du volume arbitraire. On notera également que la position du volume de contrôle est déterminé à partir de la vitesse arbitraire :

$$\frac{D\boldsymbol{x}}{Dt} = \boldsymbol{u}_0. \tag{1.33}$$

La philosophie de la formulation ALE est différente de celle utilisée dans la section 1.1. En effet, les équations présentées dans la section 1.1 sont valables en tout point du domaine de calcul $\boldsymbol{\Omega}$. En revanche la formulation ALE n'a de sens que de manière intégrée et en moyenne sur un volume de contrôle (a priori arbitraire), l'équation (1.32) n'ayant par exemple pas de sens en un point.

Chapitre 2

Principes de la méthode SPH

Ce chapitre présente les principes de base de la méthode SPH, les différents schémas numériques et les différentes manières dont peuvent être imposées les conditions aux limites. On se concentrera principalement sur les différents aspects de la méthode se rattachant à l'hydrodynamique en hypothèse faiblement compressible et monophasique. En particulier les développements de la méthode SPH pour d'autres branches de la physique (comme l'astrophysique [55] [88], la mécanique des solides [82] [15], les phénomènes thermiques [31], etc...), pour les écoulements incompressibles [39] [84] et multi-phasiques [105] [68] ne sont pas présentés ici.

2.1 Interpolation SPH

2.1.1 Définition de la méthode d'interpolation SPH

L'idée première de la méthode SPH est d'utiliser le fait que la distribution de Dirac $\delta(\bullet)$ peut être vue comme l'élément neutre du produit de convolution (noté $*$). Autrement dit pour une fonction f :

$$f(\boldsymbol{x}) = f * \delta(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{\Omega}} f(\boldsymbol{y})\, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\, dV, \tag{2.1}$$

où l'intégration porte sur l'ensemble du domaine de calcul $\boldsymbol{\Omega}$ et dV désigne l'élément de volume pour la variable muette $\boldsymbol{y}$. Ainsi, les valeurs d'un champ f peuvent être déterminées par simple convolution avec la distribution de Dirac. On notera également que l'expression (2.1) reste parfaitement valide pour une grandeur vectorielle $\boldsymbol{f}$ et une grandeur matricielle $\mathbb{F}$.

Or la distribution de Dirac δ est impossible à utiliser d'un point de vue numérique. La méthode SPH propose alors d'approximer la distribution de Dirac δ par une fonction régularisante W (théoriquement de classe C^∞), que l'on appelle fonction noyau, définie sur un support compact Ω de taille caractéristique R. Sauf contre-indication, le support Ω, et donc la taille caractéristique R de ce support, seront considérés constants. On définit ainsi l'expression régularisée (notée $\langle\bullet\rangle$) d'une fonction f par :

$$\langle f \rangle (\boldsymbol{x}) = f * W(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y}) W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, R) \, dV \simeq f(\boldsymbol{x}) . \tag{2.2}$$

On supposera dans un premier temps que le support du noyau Ω n'intersecte pas de frontières $\boldsymbol{\partial\Omega}$ (le cas de l'évaluation des opérateurs proche d'une frontière sera abordé en section 2.5). Afin que l'expression régularisée (2.2) converge vers la valeur exacte de la fonction, il est nécessaire de respecter les propriétés suivantes :

$$\int_{\Omega} W(\boldsymbol{y}, R) \, d\boldsymbol{y} = 1, \tag{2.3}$$

$$\lim_{R \to 0} W(\boldsymbol{x}, R) = \delta(\boldsymbol{x}) . \tag{2.4}$$

La première propriété (2.3) est appelée partition de l'unité et permet de retrouver le fait que la distribution de Dirac est "de poids 1" (i.e. $\int_{\boldsymbol{\Omega}} \delta(\boldsymbol{y}) \, dV = 1$) et que, pour un champ constant, la valeur théorique soit retrouvée. La deuxième propriété (2.4) permet d'assurer la convergence de l'expression (2.2) vers la valeur exacte du champ $f(\boldsymbol{x})$.

Généralement, le support compact Ω du noyau est de forme circulaire en 2D (ou sphérique en 3D) et R désigne alors simplement le rayon de ce support. On peut cependant utiliser des noyaux à support non circulaire et/ou sphérique [134] [60]. Le paramètre R peut être remplacé par une autre grandeur caractéristique de la forme du noyau W que l'on appelle la longueur de lissage h (ou smoothing length en anglais) et qui peut se définir à l'aide du moment d'ordre 2, σ, du noyau [42] :

$$h = k\sigma, \text{avec } \sigma^2 = \frac{1}{\eta} \int_{\Omega} ||\boldsymbol{y}||^2 W(\boldsymbol{y}, R) \, dV, \tag{2.5}$$

où η est le nombre de dimensions du problème et k une constante dépendant de la fonction noyau choisie et du nombre de dimension [42]. Pour la plupart des noyaux utilisés dans la méthode SPH on a $R \simeq 2h$ [42]. Cette définition de la taille caractéristique du noyau permet de prendre en compte des noyaux à support non-compact et/ou non circulaire et permet de définir une grandeur ayant généralement plus de sens que le rayon R (notamment d'un point de vue des propriétés de convergence de la méthode SPH). Cependant, d'un point de vue numérique il est plus pertinent d'utiliser le rayon du support comme taille caractéristique (qui sera caractéristique du nombre d'opérations qui seront faites au niveau de chaque point de calcul). Dans la suite de cette thèse, on utilisera généralement le rayon R comme taille caractéristique du noyau.

2.1.2 Choix du noyau

En plus des propriétés générales énoncées dans la section 2.1.1 on ajoute plusieurs propriétés utiles d'un point de vue numérique :

— L'évaluation du noyau doit être le moins coûteuse possible, en terme de nombre d'opérations arithmétiques (et donc de temps de calcul).
— L'interpolation SPH (2.2) doit être stable (en particulier on cherche à avoir des noyaux à valeurs positives afin d'éviter des poids de quadrature négatifs).
— Le noyau doit être à symétrie radiale (i.e. l'expression de W ne dépend que de la distance au point de calcul $\boldsymbol{x}$, ce qui entre autre simplifie l'évaluation numérique du noyau).

Le caractère radial du noyau permet de donner une expression générale dépendant uniquement de la distance adimensionnalisée $r = \frac{||\boldsymbol{x}||}{R}$, qui se met sous la forme :

$$W(\boldsymbol{x}, R) = \frac{1}{R^{\eta}} \Theta \left(r = \frac{||\boldsymbol{x}||}{R} \right), \tag{2.6}$$

où Θ est une fonction sans dimension. On remarque en particulier que W est homogène à l'inverse d'un volume (en 3D) ou d'une surface (en 2D). Le choix de la fonction Θ influence de nombreuses propriétés des simulations numériques et dépend en pratique de nombreux paramètres. Par exemple Quinlan et al. [124], Amicarelli et al. [3] et Violeau et Fonty [153] ont montré que l'erreur de troncature des opérateurs SPH était liée à l'ordre du noyau (en terme de classe de régularité). En particulier on peut montrer théoriquement que plus le noyau est d'ordre élevé, plus l'erreur de troncature sera faible. On préférera donc utiliser des noyaux d'ordre le plus élevé possible, bien que de manière générale les noyaux d'ordre élevé soient plus coûteux en terme d'opérations arithmétiques (le choix final résulte donc en un compromis entre temps de calcul et précision). En parallèle, Franz et Wendland [51] ont également montré de manière théorique que le choix du noyau a une influence sur la convergence des schémas SPH vers les équations d'Euler. Violeau et al. [154] ont également montré que le choix du noyau influençait la stabilité du schéma temporel utilisé et notamment que cela jouait sur la taille maximale acceptable des pas de temps. Dehnen et al. [42] ont proposé une analyse de différents noyaux, en s'intéressant notamment à une instabilité numérique appelée "pairing instability". Ils montrent que cette instabilité peut être réduite dès lors que l'on choisit des noyaux ayant une transformée de Fourier positive. Enfin le choix du noyau peut être influencé par le type d'écoulement que l'on souhaite simuler. Par exemple, Macià et al. [89] montrent que la précision des simulations d'écoulements à surface libre est influencée par le choix de la fonction noyau. Finalement, on ne peut pas conclure de manière définitive sur le choix optimal d'un noyau pour la méthode SPH. Ce choix résultera toujours d'un compromis entre la précision des calculs, leur stabilité et leur coût. Finalement, sauf indication contraire, le noyau utilisé dans cette thèse est un noyau de Wendland de classe C^2 [160], qui permet un bon compromis entre les différentes propriétés énoncées précédemment. Il s'exprime de la manière suivante :

$$\Theta(r) = C_\eta \begin{cases} (1-r)^4 (1+4r) & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \tag{2.7}$$

avec C_η une constante permettant de satisfaire la condition (2.3) et valant $\frac{7}{\pi}$ en 2D et $\frac{21}{2\pi}$ en 3D. On trouvera dans les références citées ci-dessus les expressions des autres noyaux couramment utilisés dans la méthode SPH.

Note : dans cette thèse, nous adoptons systématiquement un noyau ayant un support compact constant de rayon R. Dans la suite de ce manuscrit on utilisera donc, par soucis de clarté et d'allègement des formules, la notation $W(\bullet)$ à la place de $W(\bullet, R)$.

2.1.3 Opérateurs dérivés

L'interpolation SPH définie par (2.2) permet uniquement d'évaluer la valeur d'un champ en un point $\boldsymbol{x}$. Or cela n'est pas suffisant pour résoudre les équations d'Euler ou de Navier-Stokes. Il est nécessaire de disposer d'un moyen d'évaluer les différents opérateurs dérivés (i.e. gradient, divergence, Laplacien, etc...). On présente ici la méthode permettant d'évaluer les opérateurs gradient et divergence dans le cadre de la méthode SPH. L'opérateur Laplacien (et plus généralement les opérateurs permettant de simuler les effets visqueux) n'est pas présenté dans cette section, mais sera présenté dans un chapitre dédié (cf. chapitre 4). De plus, on s'intéresse dans un premier temps au cas où le support du noyau Ω n'intersecte pas de frontières $\boldsymbol{\partial\Omega}$ (le cas de l'évaluation des opérateurs dérivés proche d'une frontière sera abordé en section 2.5).

2.1.3.1 Opérateurs gradient

En partant de l'expression régularisée (2.2), on peut évaluer (par simple substitution) l'opérateur gradient à l'aide de l'expression suivante :

$$\langle \boldsymbol{grad} f \rangle (\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{grad}_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{y}) W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \, dV, \tag{2.8}$$

où $\boldsymbol{grad}_{\boldsymbol{y}}$ signifie que les dérivées de l'opérateur gradient sont prises par rapport à la variable muette $\boldsymbol{y}$. Or le gradient de f n'est pas connu à priori (c'est la grandeur que l'on cherche à déterminer) et la formule (2.8) n'est donc pas utilisable en pratique. Pour pouvoir évaluer le gradient à l'aide de la méthode SPH, on cherche à obtenir une expression qui dépendant uniquement des valeurs du champ f. Pour cela, on applique le théorème de flux-divergence à l'expression (2.8) :

$$\langle \boldsymbol{grad} f \rangle (\boldsymbol{x}) = -\int_{\Omega(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{grad}_{\boldsymbol{y}} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \, dV + \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y}) W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \boldsymbol{n} dS, \tag{2.9}$$

où $\partial\Omega(\boldsymbol{x})$ désigne le bord du support compact $\Omega(\boldsymbol{x})$, dS un élément de surface de $\partial\Omega(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{n}$ la normale (sortante) au bord du support $\partial\Omega(\boldsymbol{x})$. Or le noyau choisi dans ce travail est un noyau symétrique (cf. section 2.1.2), ce qui implique notamment que son gradient est antisymétrique. Autrement dit, on a la propriété suivante :

$$-\boldsymbol{grad}_{\boldsymbol{y}} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{grad}_{\boldsymbol{x}} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{2.10}$$

ce qui conduit à l'expression suivante pour l'approximation du gradient :

$$\langle \boldsymbol{grad} f\rangle(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y})\, \boldsymbol{grad}_{\boldsymbol{x}} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV + \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y})\, W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, \boldsymbol{n} dS. \tag{2.11}$$

Enfin, puisqu'on se place, dans un premier temps, dans le cas où l'on se situe loin d'une frontière, l'intégrale de surface de l'expression (2.11) est nulle (car le noyau est à support compact et donc W est nul sur l'ensemble $\partial\Omega(\boldsymbol{x})$). L'expression du gradient SPH en absence de frontières se réduit donc simplement à :

$$\langle \boldsymbol{grad} f\rangle(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y})\, \boldsymbol{grad}_{\boldsymbol{x}} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV. \tag{2.12}$$

Cette expression présente l'avantage de ne faire apparaître que le champ f (et non ses différentes dérivées) et le gradient du noyau (qui peut être calculé à l'avance). On vient donc de fournir un moyen d'évaluer le gradient d'un champ f à l'aide uniquement des valeurs de ce champ.

<u>Note :</u> par soucis de clarté et d'allègement des formules on adoptera désormais la notation $\boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ à la place de $\boldsymbol{grad}_{\boldsymbol{x}} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$. De plus, le noyau étant à symétrie radiale (cf. équation (2.6)), son gradient est dirigé uniquement dans la direction $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \frac{||\boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})||}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{2.13}$$

Pour des raisons de conservation des schémas (cf. section 2.2.1) et de consistance des opérateurs (cf. section 2.1.5.2), il peut être utile de construire des opérateurs gradients symétriques et antisymétriques (en effet l'expression sous l'intégrale dans l'équation (2.12) ne présente pas de propriétés de symétrie ou d'antisymétrie). Pour construire ces opérateurs, on utilise les identités suivantes :

$$\boldsymbol{grad} f = \boldsymbol{grad} f + f\boldsymbol{grad} 1, \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{grad} f = \boldsymbol{grad} f - f\boldsymbol{grad} 1. \tag{2.15}$$

On définit alors l'opérateur gradient symétrique SPH en l'absence de frontières :

$$\langle \boldsymbol{grad} f \rangle^{+} (\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} (f(\boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{x})) \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \, dV, \tag{2.16}$$

et l'opérateur gradient antisymétrique SPH en l'absence de frontières :

$$\langle \boldsymbol{grad} f \rangle^{-} (\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} (f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})) \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \, dV. \tag{2.17}$$

Les opérateurs gradient SPH ainsi construits peuvent être facilement étendus au cas du gradient d'un vecteur $\boldsymbol{f}$:

$$\langle \mathbb{G}rad \boldsymbol{f} \rangle (\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \otimes \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \, dV, \tag{2.18}$$

$$\langle \mathbb{G}rad \boldsymbol{f} \rangle^{+} (\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \otimes \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \, dV, \tag{2.19}$$

$$\langle \mathbb{G}rad \boldsymbol{f} \rangle^{-} (\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \otimes \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \, dV, \tag{2.20}$$

où $\otimes$ désigne le produit tensoriel (pour deux vecteurs $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^t \boldsymbol{B}$).

2.1.3.2 Opérateurs divergence

Pour définir l'opérateur de divergence on utilise le fait que la divergence est égale à la trace du gradient (i.e. $div \boldsymbol{f} = tr(\mathbb{G}rad \boldsymbol{f})$). De plus on utilise les propriétés de la trace et notamment le fait que pour deux vecteurs $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ on ait $tr(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A}^t \boldsymbol{B}) = tr({}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$. A partir des expressions (2.18-2.20), on peut alors définir facilement les différents opérateurs SPH de la divergence d'un vecteur $\boldsymbol{f}$, en l'absence de frontières :

$$\langle div\boldsymbol{f}\rangle(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}).\boldsymbol{\nabla}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV, \tag{2.21}$$

$$\langle div\boldsymbol{f}\rangle^{+}(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})).\boldsymbol{\nabla}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV, \tag{2.22}$$

$$\langle div\boldsymbol{f}\rangle^{-}(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})).\boldsymbol{\nabla}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV. \tag{2.23}$$

On peut également définir les opérateurs SPH de la divergence d'une matrice $\mathbb{F}$, en l'absence de frontières, en remplaçant les différents produits scalaires par de simples produits matriciels :

$$\langle \boldsymbol{div}\mathbb{F}\rangle(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} \mathbb{F}(\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{\nabla}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV, \tag{2.24}$$

$$\langle \boldsymbol{div}\mathbb{F}\rangle^{+}(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} (\mathbb{F}(\boldsymbol{y})+\mathbb{F}(\boldsymbol{x}))\,\boldsymbol{\nabla}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV, \tag{2.25}$$

$$\langle \boldsymbol{div}\mathbb{F}\rangle^{-}(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} (\mathbb{F}(\boldsymbol{y})-\mathbb{F}(\boldsymbol{x}))\,\boldsymbol{\nabla}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV. \tag{2.26}$$

2.1.3.3 Caractère centré des opérateurs

On montre ici le caractère centré des opérateurs introduits précédemment. Pour cela on se concentre sur l'opérateur gradient (2.12) mais le raisonnement présenté ici reste valable pour tous les autres opérateurs présentés précédemment. Le noyau, centré en $\boldsymbol{x}$, étant à symétrie radiale on peut s'intéresser à une "paire" de points voisins $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{y'}$, symétriques par rapport à $\boldsymbol{x}$ (i.e. $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y'})$) et ayant chacun le même volume élémentaire dV (cf. Figure 2.1 pour le paramétrage utilisé). Ainsi la contribution des points $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{y'}$ dans l'opérateur (2.12) s'écrit $f(\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{\nabla}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV + f(\boldsymbol{y'})\,\boldsymbol{\nabla}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y'})\,dV$. A l'aide de la symétrie du noyau (et donc de l'antisymétrie de son gradient) cette double contribution se réécrit :

$$f(\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{\nabla}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV + f(\boldsymbol{y'})\,\boldsymbol{\nabla}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y'})\,dV = [f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{y'})]\,\boldsymbol{\nabla}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV. \tag{2.27}$$

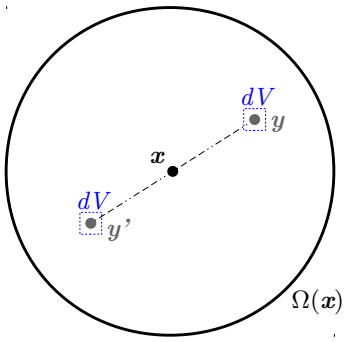

FIGURE 2.1 – Démonstration du caractère centré des opérateurs ; paramétrage utilisé.

Ainsi la double contribution (2.27) peut être interprétée comme une approximation de différences finies centrée d'ordre 1, pondérée par le gradient du noyau. Finalement, l'opérateur (2.12), ainsi que tous les autres opérateurs dérivés peuvent être vus comme une "somme" de différences finies centrées d'ordre 1, pondérées par le gradient du noyau. Or les schémas de différences finies centrés (combinés à une avance en temps explicite) ont la propriété d'être potentiellement instables [22], ce qui sera donc a priori le cas également des opérateurs dérivés SPH. Cette propriété a des conséquences sur la stabilité et la mise en place des différents schémas numériques utilisés dans la méthode SPH (cf. section 2.2.1 pour plus de détails).

2.1.4 Discrétisation des opérateurs SPH

D'un point de vue pratique et numérique, il est difficile d'approximer telles quelles les différentes intégrales introduites. On effectue tout d'abord une partition $\mathcal{P}$ du domaine de calcul $\boldsymbol{\Omega}$. Cette partition $\mathcal{P}$ consiste en un ensemble discret de volumes de contrôle, appelés particules et notées i, ayant pour position $\boldsymbol{x}_i$ et pour volume V_i. On définit également au niveau de ces volumes de contrôle les différentes propriétés du fluide (i.e. sa vitesse $\boldsymbol{u}_i$, sa masse volumique ρ_i, etc...). On notera avec un indice i toute grandeur associée à la particule i.

Dans ce cas, l'expression régularisée (2.2) s'exprime sous forme discrète en approximant l'intégration par la somme sur l'ensemble des particules voisines j se situant dans le support compact Ω_i du noyau de la particule i :

$$\langle f \rangle_i = \sum_{j \in \Omega_i} f_j W\left(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\right) V_j. \tag{2.28}$$

L'expression (2.28) peut s'interpréter comme une approximation de l'intégrale par une méthode de quadrature de type "point milieu", dans laquelle les quantités $W\left(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\right) V_j$ joueraient le rôle des différents poids de quadrature. On montre sur la Figure 2.2 un schéma de principe de l'approximation (2.28).

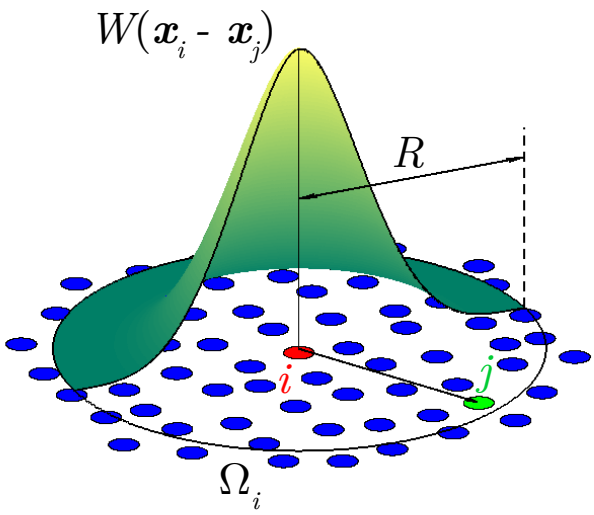

FIGURE 2.2 – Schéma de principe de l'approximation SPH discrétisée.

Note : par soucis de clarté et d'allègement des formules on adoptera désormais la notation W_{ij} à la place de $W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)$. De même, on utilisera la notation $\boldsymbol{\nabla} W_{ij}$ à la place de $\boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)$.

En l'absence de frontières, la discrétisation des opérateurs dérivés SPH est alors donnée par :

$$\langle \boldsymbol{grad} f \rangle_i = \sum_{j \in \Omega_i} f_j \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j, \tag{2.29}$$

$$\langle \boldsymbol{grad} f \rangle_i^+ = \sum_{j \in \Omega_i} (f_j + f_i) \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j, \tag{2.30}$$

$$\langle \boldsymbol{grad} f \rangle_i^- = \sum_{j \in \Omega_i} (f_j - f_i) \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j, \tag{2.31}$$

$$\langle \mathbb{G}rad \boldsymbol{f} \rangle_i = \sum_{j \in \Omega_i} \boldsymbol{f}_j \otimes \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j, \tag{2.32}$$

$$\langle \mathbb{G}rad \boldsymbol{f} \rangle_i^+ = \sum_{j \in \Omega_i} \left(\boldsymbol{f}_j + \boldsymbol{f}_i\right) \otimes \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j, \tag{2.33}$$

$$\langle \mathbb{G}rad \boldsymbol{f} \rangle_i^- = \sum_{j \in \Omega_i} \left(\boldsymbol{f}_j - \boldsymbol{f}_i\right) \otimes \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j, \tag{2.34}$$

$$\langle div\boldsymbol{f}\rangle_i = \sum_{j\in\Omega_i} \boldsymbol{f}_j.\boldsymbol{\nabla}W_{ij}V_j, \tag{2.35}$$

$$\langle div\boldsymbol{f}\rangle_i^+ = \sum_{j\in\Omega_i} \left(\boldsymbol{f}_j + \boldsymbol{f}_i\right).\boldsymbol{\nabla}W_{ij}V_j, \tag{2.36}$$

$$\langle div\boldsymbol{f}\rangle_i^- = \sum_{j\in\Omega_i} \left(\boldsymbol{f}_j - \boldsymbol{f}_i\right).\boldsymbol{\nabla}W_{ij}V_j, \tag{2.37}$$

$$\langle \boldsymbol{div}\mathbb{F}\rangle_i = \sum_{j\in\Omega_i} \mathbb{F}_j\boldsymbol{\nabla}W_{ij}V_j, \tag{2.38}$$

$$\langle \boldsymbol{div}\mathbb{F}\rangle_i^+ = \sum_{j\in\Omega_i} \left(\mathbb{F}_j + \mathbb{F}_i\right)\boldsymbol{\nabla}W_{ij}V_j, \tag{2.39}$$

$$\langle \boldsymbol{div}\mathbb{F}\rangle_i^- = \sum_{j\in\Omega_i} \left(\mathbb{F}_j - \mathbb{F}_i\right)\boldsymbol{\nabla}W_{ij}V_j. \tag{2.40}$$

Plusieurs points doivent être précisés sur la manière dont est effectuée la partition $\mathcal{P}$. Premièrement, la définition des volumes V_i peut prendre plusieurs significations. En effet ces volumes peuvent être vus comme les volumes purement géométriques occupés par l'ensemble des particules (c'est par exemple le point de vue adopté dans la méthode Voronoï-SPH [10] [12], dans laquelle une décomposition de Voronoï est effectuée afin de déterminer le volume géométrique occupé par les particules ; ces volumes géométriques définis par une décomposition de Voronoï perdent cependant leur définition proche d'une surface libre). Mais ces volumes peuvent également être définis à l'aide de la masse volumique et de la masse des particules (i.e. $V_i = \frac{m_i}{\rho_i}$; l'évolution de ces différentes grandeurs est alors déterminée grâce aux équations (1.4-1.6)). Dans ce cas, le volume V_i représente le volume physique (qu'on appellera "scalaire", par opposition à la notion de volume géométrique) de l'élément de fluide représenté par la particule i. Dans ce cas-là, la propriété de partition de l'unité n'est a priori plus respectée de manière générale. Il est important de noter que ces deux points de vue ne sont pas équivalents, comme le montre la Figure 2.3. Ces deux points de vue sont généralement équivalents lors de l'initialisation des simulations (pour laquelle une grille régulière est la plupart du temps adoptée et sur laquelle les deux points de vue coïncident) mais n'ont, a priori, plus de raison de l'être dès que la position et la répartition des particules évoluent. Il n'y a donc pas de définition unique des volumes V_i, et le point de vue adopté dépendra notamment du schéma numérique qui sera utilisé (cf. section 2.2). On parlera par la suite respectivement de "volume géométrique" et de "volume scalaire".

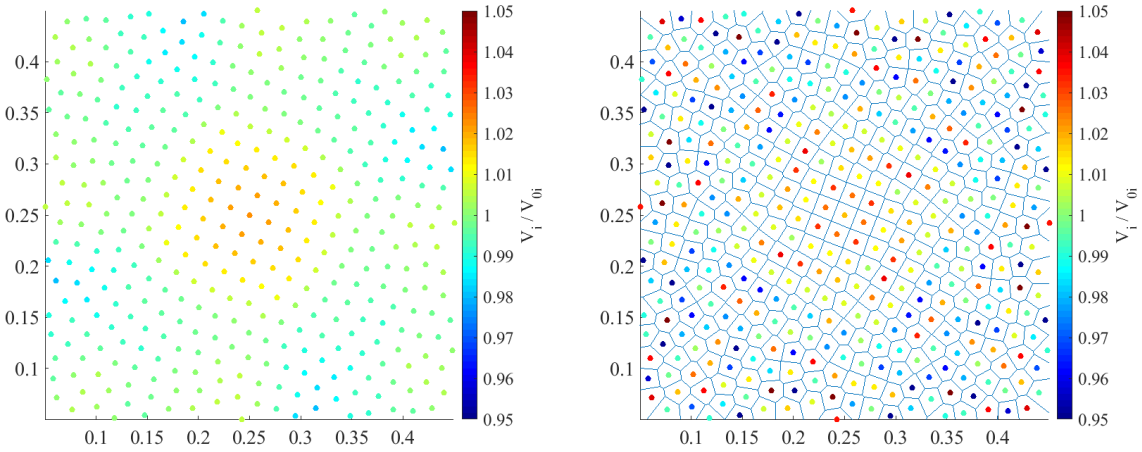

FIGURE 2.3 – Différence de point de vue pour la définition des volumes des particules au niveau du centre d'un tourbillon de Taylor-Green, pour une même répartition de particules ; Gauche : "volumes scalaires" calculés à l'aide des équations d'évolution (1.4-1.6) ; Droite : "volumes géométriques" calculés à l'aide d'une décomposition de Voronoï ; V_{0i} désigne la valeur initiale du volume et coïncide pour les deux points de vue.

À l'instar des volumes, plusieurs manières de définir les grandeurs associées aux particules i (i.e. leurs vitesses $\boldsymbol{u}_i$, leurs masses volumiques ρ_i, etc...) sont possibles. Ces grandeurs peuvent être vues comme les valeurs de ces grandeurs discrètes localisées en $\boldsymbol{x}_i$, mais peuvent être également vues comme la valeur moyennée de cette grandeur sur l'ensemble du volume V_i de la particule. Encore une fois, le point de vue adopté dépendra notamment du schéma numérique qui sera utilisé (cf. section 2.2). On parlera respectivement de "grandeurs ponctuelles" et de "grandeurs moyennes" (moyenne effectuée sur le volume V_i de la particule i).

La méthode SPH a également la particularité de posséder deux discrétisations spatiales, la taille du noyau et la taille des particules, débouchant sur un double critère de convergence. Un premier critère de convergence à respecter est le fait que la taille du noyau doit tendre vers 0 (i.e. $R \to 0$; ce critère est lié à la condition (2.4)). Le deuxième critère de convergence est lié au nombre de particules voisines j dans le voisinage Ω_i. En effet, lorsque le nombre de particules voisines j dans le voisinage Ω_i est important, alors la somme de l'expression (2.28) tend vers l'intégrale (2.2). Ce critère se traduit par le fait que le ratio $\frac{\Delta x}{R}$ tend vers 0 (où $\Delta x = V_i^{1/\eta}$ est la distance inter-particulaire typique). D'un point de vue numérique ce ratio $\frac{R}{\Delta x}$ est très important car il est représentatif du nombre de particules dans chaque voisinage Ω_i et donc du nombre d'opérations à effectuer. Le choix de ce paramètre est donc un compromis entre la précision et le coût des simulations. Typiquement, on prend des valeurs de $\frac{R}{\Delta x} = 4$ en 2D et de $\frac{R}{\Delta x} = 3$ en 3D, ce qui correspond à environ 50 et 110 particules voisines respectivement (on peut cependant être amené à baisser ces valeurs afin de limiter les temps de calcul). Le comportement de ce double critère de convergence sera précisé au chapitre 5.

2.1.5 Corrections des opérateurs SPH

Nous venons de construire différents opérateurs qui pourront être utilisés lors de simulations numériques. Il est alors légitime de se poser la question de la précision de ces opérateurs. Pour ce faire on s'intéresse à la capacité qu'ont les opérateurs ainsi construits à reproduire les valeurs de champs constants, linéaires, quadratiques, etc... (on parle respectivement de consistance à l'ordre 0, à l'ordre 1, à l'ordre 2, etc...) On montre ici que ces propriétés de consistance ne sont pas nécessairement vérifiées et on présente les principales corrections classiquement utilisées afin de rétablir ces propriétés de consistance. D'autres corrections sont également possibles (notamment pour les propriétés de consistance à des ordres élevés) mais seront présentées dans le chapitre 5.

2.1.5.1 Consistance d'ordre 0 - Correction Shepard

Au niveau continu, la propriété de partition de l'unité (2.3) garantit la consistance d'ordre 0. En effet, pour un champ constant tel que $f(\boldsymbol{x}) = A$, l'expression régularisée (2.2) devient :

$$\langle f \rangle (\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y}) W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \, dV = A \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \, dV = A = f(\boldsymbol{x}) . \tag{2.41}$$

Cependant, au niveau discret, la propriété de partition de l'unité n'est plus nécessairement vérifiée car les particules ne sont a priori pas distribuées de manière uniforme. On a donc au niveau discret (sauf cas particuliers) :

$$\sum_{j \in \Omega_i} W_{ij} V_j \neq 1, \tag{2.42}$$

ce qui implique que pour le champ constant introduit précédemment on ait a priori :

$$\langle f \rangle_i = \sum_{j \in \Omega_i} f_j W_{ij} V_j = A \sum_{j \in \Omega_i} W_{ij} V_j \neq f_i, \tag{2.43}$$

signifiant que la consistance d'ordre 0 n'est plus vérifiée au niveau discret. Il est cependant possible de corriger l'interpolation SPH (2.28) afin de retrouver la consistance d'ordre 0. Shepard [136] a montré que, pour un ensemble de particules réparties de manière irrégulière, la consistance d'ordre 0 pouvait être retrouvée en appliquant la correction suivante :

$$\langle f \rangle_i^{Shepard} = \frac{\sum_{j \in \Omega_i} f_j W_{ij} V_j}{\sum_{j \in \Omega_i} W_{ij} V_j} . \tag{2.44}$$

Pour les mêmes raisons, la consistance d'ordre 0 des opérateurs dérivées n'est a priori pas vérifiée au niveau discret (dans ce cas la consistance d'ordre 0 se traduit pas le fait de donner des opérateurs nuls pour un champ constant), sauf pour les opérateurs antisymétriques (2.31) (2.34) (2.37) (2.40), pour lesquels la consistance d'ordre 0 est naturellement vérifiée, par soustraction.

2.1.5.2 Consistance d'ordre 1 - Matrice de renormalisation

De même que pour la consistance d'ordre 0, le fait que les particules ne soient pas distribuées de manière régulière implique que la consistance d'ordre 1 n'est pas assurée. Randles et Libersky [125] ont proposé une correction afin d'assurer la consistance d'ordre 1 des opérateurs dérivés au niveau discret. Cette correction s'applique aux opérateurs antisymétriques (2.31) (2.34) (2.37) (2.40). Le principe de cette correction est de multiplier l'opérateur par une matrice $\mathbb{L}_i$, appelée matrice de renormalisation. Pour l'opérateur gradient d'un vecteur cela donne :

$$\langle \mathbb{G}rad\boldsymbol{f}\rangle_i^{-,R} = \mathbb{L}_i \left(\sum_{j\in\Omega_i} \left(\boldsymbol{f}_j - \boldsymbol{f}_i\right) \otimes \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j \right). \tag{2.45}$$

L'expression de la matrice de renormalisation $\mathbb{L}_i$ est déterminée afin d'assurer la consistance d'ordre 1 (i.e. pour un champ linéaire tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$, pour n'importe quelle matrice constante $\mathbb{A}$; le gradient de ce champ est alors donné par $\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}$). On souhaite donc vérifier la relation suivante pour un champ linéaire :

$$\langle \mathbb{G}rad\left(\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right)\rangle_i^{-,R} = \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{L}_i\mathbb{A} \left(\sum_{j\in\Omega_i} \left(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i\right) \otimes \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j \right) = \mathbb{A}. \tag{2.46}$$

Cette relation étant valable pour toute matrice constante $\mathbb{A}$, on peut alors donner l'expression de la matrice de renormalisation :

$$\mathbb{L}_i = \left(\sum_{j\in\Omega_i} \left(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i\right) \otimes \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j \right)^{-1}. \tag{2.47}$$

On définit de même l'opérateur discret renormalisé du gradient d'un scalaire :

$$\langle \boldsymbol{grad} f\rangle_i^{-,R} = \mathbb{L}_i \left(\sum_{j\in\Omega_i} \left(f_j - f_i\right) \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j \right). \tag{2.48}$$

Pour définir les opérateurs de divergence renormalisés, on utilise encore une fois le

fait que la divergence est égale à la trace du gradient (on va donc définir $\langle div\boldsymbol{f}\rangle_i^{-,R} = tr\left(\langle \mathbb{G}rad\boldsymbol{f}\rangle_i^{-,R}\right)$). En prenant la trace de l'expression (2.45), et en utilisant les propriétés de la trace énoncées dans la section 2.1.3.2, on en déduit l'expression de l'opérateur discret renormalisé de la divergence :

$$\langle div\boldsymbol{f}\rangle_i^{-,R} = \sum_{j\in\Omega_i} \left(\mathbb{L}_i\left(\boldsymbol{f}_j - \boldsymbol{f}_i\right)\right).\boldsymbol{\nabla}W_{ij}V_j. \tag{2.49}$$

On notera que dans le cas de l'opérateur divergence renormalisé, et contrairement à l'opérateur gradient renormalisé, la matrice de renormalisation $\mathbb{L}_i$ ne peut pas être sortie de la sommation.

2.2 Schémas numériques - Application aux équations de la mécanique des fluides

On dispose désormais des outils nécessaires à la mise en place de schémas numériques pour la résolution des équations de la mécanique des fluides introduites au chapitre 1 (on ne s'intéresse qu'aux équations de la mécanique des fluides dans cette thèse mais les opérateurs introduits précédemment restent utilisables pour résoudre d'autres équations de la physique). Dans un premier temps, et afin de simplifier les développements présentés, on ne s'intéressera qu'aux équations d'Euler dans cette section. Les équations de Navier-Stokes (et donc le développement d'opérateurs visqueux) seront abordées dans le chapitre 4. Le formalisme retenu pour les schémas SPH utilisés en mécanique des fluides est généralement un formalisme Lagrangien (cf. chapitre 1), ce qui permet de s'affranchir du calcul du terme de convection (non-linéaire), tout en permettant de suivre de manière Lagrangienne les particules dans leur mouvement. En particulier la description Larangienne des particules à la surface libre permet une vérification intrinsèque de la condition cinématique de surface libre (cf. section 2.5.3) et permet donc de simuler des écoulements dans lesquels de grandes distorsions du domaine de calcul peuvent apparaître (et notamment des fragmentations/reconnexions de la surface libre). On présentera également le cas du formalisme ALE discret (cf. section 1.4) dans la section 2.2.5. Afin de ne pas compliquer le discours, la prise en compte des conditions aux limites dans les différents schémas sera présentée dans la section 2.5.

De plus, on ne s'intéresse ici qu'aux cas de schémas compressibles (ou faiblement compressibles ; cf. [39] [84] pour des exemples de schémas SPH incompressibles). Afin de fermer le système, il est donc important de ne pas oublier l'équation d'état (1.10) dans les schémas qui seront présentés dans la suite (par souci de simplification, cette équation d'état n'est pas rappelée lors de la présentation des schémas, mais elle fait bien partie intégrante des schémas SPH compressibles). Pour une comparaison des différents schémas SPH faiblement compressibles on pourra se référer à [96].

Enfin, les corrections présentées dans la section 2.1.5 ne sont pas utilisées dans les schémas introduits ici mais on pourra se référer à [114] [112] pour des exemples d'utilisation de ces différentes corrections au sein des schémas SPH. De même, l'introduction de la notion de

désordre particulaire (ou shifting en anglais), et en particulier la manière dont cette notion est utilisée dans les différents schémas, ne sera pas présentée ici mais dans le chapitre 3.

2.2.1 Cas général du schéma SPH pour les équations d'Euler

La première idée pour obtenir un schéma SPH adapté aux équations d'Euler est d'utiliser les opérateurs dérivés discrets, introduits dans la section 2.1.4, afin d'évaluer les différents termes des équations (1.3), (1.5), (1.4), (1.12). Or plusieurs choix d'opérateurs SPH sont possibles afin d'évaluer ces différents termes : des opérateurs "classiques" mais aussi des opérateurs symétriques ou antisymétriques. Lorsqu'il a introduit la méthode SPH appliquée à la mécanique des fluides, Monaghan [100] a précisé le choix de ces opérateurs afin de satisfaire certaines propriétés de précision et de conservation des schémas.

Le gradient de la pression dans l'équation (1.12) est évalué à l'aide de l'opérateur symétrique $\langle \boldsymbol{grad} P \rangle_i^+$ (2.30). En effet, comme évoqué dans [100], ce choix permet de conserver la quantité de mouvement globale et le moment angulaire global du fluide. Pour retrouver cette propriété de conservation, il suffit de voir l'opérateur $\frac{m_i}{\rho_i} \langle \boldsymbol{grad} P \rangle_i^+$ comme une somme de forces élémentaires $\boldsymbol{F}_{j \to i} = \frac{m_i}{\rho_i} (P_j + P_i) \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j$, agissant sur la particule i. La propriété d'antisymétrie du gradient du noyau (et le fait que $V = \frac{m}{\rho}$) permet d'écrire :

$$\boldsymbol{F}_{j \to i} = \frac{m_i}{\rho_i} (P_j + P_i) \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j = -\frac{m_j}{\rho_j} (P_i + P_j) \boldsymbol{\nabla} W_{ji} V_i = -\boldsymbol{F}_{i \to j}. \tag{2.50}$$

Ainsi ces forces élémentaires respectent le principe d'action/réaction, assurant la conservation de la quantité de mouvement. On notera que les autres opérateurs gradient ne respectent pas la propriété (2.50).

La divergence de la vitesse dans l'équation (1.4) est évaluée à l'aide de l'opérateur antisymétrique $\langle div \boldsymbol{u} \rangle_i^-$ (2.37). En effet, comme évoqué dans [100], ce choix permet une évaluation beaucoup plus précise de l'évolution de la masse volumique (contrairement aux autres opérateurs, la consistance d'ordre 0 est ici intrinsèquement satisfaite). Il permet également un meilleur respect des conditions aux limites de surface libre (cf. section 2.5.3 pour plus de détails). En revanche, cet opérateur présente le désavantage de ne pas assurer la conservation du volume total de fluide. En effet, il n'existe pas de propriété du type de l'expression (2.50) pour l'opérateur $\langle div \boldsymbol{u} \rangle_i^-$. Cependant, la masse totale de fluide est elle, intrinsèquement conservée (cf. équation (2.52)).

Finalement une première forme générale de schéma SPH adapté aux équations d'Euler peut être donnée par :

$$\frac{D\boldsymbol{x}_i}{Dt} = \boldsymbol{u}_i, \tag{2.51}$$

$$\frac{D\left(\rho_i V_i\right)}{Dt} = 0, \tag{2.52}$$

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \sum_{j\in\Omega_i} \left(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i\right).\boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j, \tag{2.53}$$

$$\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_i} \sum_{j\in\Omega_i} \left(P_j + P_i\right) \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + \boldsymbol{f}_i. \tag{2.54}$$

Cependant, cette forme générale ne peut être utilisée en pratique car elle pose des problèmes de stabilité. Comme nous le verrons dans la section 2.3, l'intégration temporelle des schémas SPH compressibles fait généralement appel à l'utilisation de schémas explicites en temps. De plus nous avons déjà montré dans la section 2.1.3.3 que les opérateurs SPH dérivés sont des opérateurs centrés en espace. Or les schémas à la fois centrés en espace et explicites en temps ont la propriété d'être potentiellement instables [22]. Le schéma (2.51-2.54) ainsi proposé n'est donc pas utilisable tel quel et doit être stabilisé. Les sections suivantes consistent donc à présenter les principales techniques couramment employées afin d'obtenir un schéma numérique stable. Toutes ces techniques peuvent être vues comme un moyen de décentrer le schéma en espace ou comme un moyen d'y introduire de la diffusion numérique.

Il est à noter que la manière dont a été obtenu le schéma numérique repose sur l'utilisation directe des équations de la mécanique des milieux continus, auxquelles ont été appliqués directement les différents opérateurs SPH. Une autre manière d'obtenir ce schéma numérique consiste en l'utilisation du Lagrangien du système composé de l'ensemble des particules et du principe de moindre action (cette méthode n'est pas présentée ici et on pourra trouver le détail de cette méthode dans [103]).

Les équations d'Euler (1.3), (1.5), (1.4), (1.12) utilisées pour obtenir ce schéma ne sont valables que ponctuellement. On parlera donc ici de "valeurs ponctuelles" pour les différentes variables utilisées (cf. section 2.1.4). Cette remarque s'applique également aux schémas présentés aux sections 2.2.2, 2.2.3 et 2.2.4.

2.2.2 Schéma à viscosité artificielle

Une première solution pour stabiliser le schéma (2.51-2.54) est d'utiliser la notion de viscosité artificielle, initialement développée par Von Neumann et Richtmyer [157]. Physiquement, la viscosité d'un fluide agit comme une diffusion et va donc atténuer d'éventuelles perturbations instables. Le but du concept de viscosité artificielle est alors de "mimer" ce comportement de manière purement numérique afin d'empêcher l'apparition de perturbations numériques et donc de stabiliser le schéma. Il faut cependant veiller à ce que les effets de cette viscosité artificielle ne soient pas trop importants, pour ne pas introduire d'effets visqueux non désirés (une manière de s'en assurer est d'utiliser une viscosité artificielle consistante, i.e. tendant vers 0 quand on raffine la discrétisation). Cette notion a été adaptée au formalisme SPH par Monaghan [100]. Elle consiste à introduire un terme diffusif Π_{ij} dans l'équation de quantité de mouvement. Le schéma ainsi modifié est donné par :

$$\frac{D\boldsymbol{x}_i}{Dt} = \boldsymbol{u}_i, \tag{2.55}$$

$$\frac{D\left(\rho_i V_i\right)}{Dt} = 0, \tag{2.56}$$

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \sum_{j\in\Omega_i} \left(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i\right).\boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j, \tag{2.57}$$

$$\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_i} \sum_{j\in\Omega_i} \left(P_j + P_i + \Pi_{ij}\right) \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + \boldsymbol{f}_i, \tag{2.58}$$

où le terme Π_{ij} s'écrit :

$$\Pi_{ij} = -\alpha \overline{\rho}_{ij} h \overline{c}_{ij} \mu_{ij}, \text{ avec } \mu_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\left(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i\right).\left(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i\right)}{||\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i||^2 + \epsilon h^2} & \text{si } \left(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i\right).\left(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i\right) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \tag{2.59}$$

α est un coefficient sans dimension permettant de moduler l'intensité de la diffusion numérique (typiquement $\alpha \in [0.01; 1]$; α doit rester faible pour ne pas introduire une diffusion trop importante), $\overline{\rho}_{ij} = \frac{\rho_i + \rho_j}{2}$, $\overline{c}_{ij} = \frac{c_i + c_j}{2}$ et ϵ est un paramètre permettant d'éviter une division par 0 (typiquement $\epsilon = 0.01$).

Cette formulation de viscosité artificielle présente plusieurs avantages [100] : elle permet de conserver l'invariance Galiléenne, elle est nulle pour un mouvement de rotation pure et elle conserve la quantité de mouvement et le moment angulaire. Cependant, cette formulation présente plusieurs inconvénients : le paramètre α dépend a priori du cas test considéré (et nécessite donc une phase de calibration) et les champs de pression (et donc de densité) obtenus restent relativement bruités (cf. Figure 2.4). Un filtrage du champ de densité et de pression est parfois utilisé pour réduire le niveau de bruit [37].

2.2.3 Schéma δ-SPH

Afin de pallier ces limitations, Antuono et al. [7] [6] et Marrone et al. [93] proposent d'introduire un terme diffusif supplémentaire dans l'équation d'évolution de la densité (un terme de diffusion dans l'équation de quantité de mouvement est également conservé). Ce schéma, appelé δ-SPH, est donné par :

$$\frac{D\boldsymbol{x}_i}{Dt} = \boldsymbol{u}_i, \tag{2.60}$$

$$\frac{D\left(\rho_i V_i\right)}{Dt} = 0, \tag{2.61}$$

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \sum_{j\in\Omega_i} \left(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i\right).\boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + \delta h c_0 \sum_{j\in\Omega_i} \boldsymbol{\psi}_{ij}.\boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j, \tag{2.62}$$

$$\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_i} \sum_{j\in\Omega_i} \left(P_j + P_i\right) \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + \boldsymbol{f}_i + \alpha c_0 h \frac{\rho_0}{\rho_i} \sum_{j\in\Omega_i} \pi_{ij} \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j. \tag{2.63}$$

Le terme π_{ij} est très similaire au terme de diffusion numérique (2.59) introduit dans le schéma (2.55-2.58) et s'écrit :

$$\pi_{ij} = \frac{\left(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i\right).\left(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i\right)}{||\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i||^2}. \tag{2.64}$$

Le terme $\boldsymbol{\psi}_{ij}$ est défini par :

$$\boldsymbol{\psi}_{ij} = 2\left(\rho_j - \rho_i\right) \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{||\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i||^2} - \left(\langle \boldsymbol{grad}\rho\rangle_j^{-,R} + \langle \boldsymbol{grad}\rho\rangle_i^{-,R}\right), \tag{2.65}$$

et permet d'améliorer drastiquement la régularité du champ de pression (cf. Figure 2.4). En revanche, le calcul des gradients renormalisés dans le terme (2.65) nécessite une boucle de calcul supplémentaire, ce qui induit nécessairement un surcoût de calcul (bien que relativement modéré en pratique). Ces gradients renormalisés sont cependant nécessaires afin d'assurer la consistance à la surface libre [7].

Tout comme pour le schéma à viscosité artificielle présenté précédemment, les termes diffusifs introduits dans les équations (2.62) et (2.63) peuvent s'interpréter comme étant proportionnels à des Laplaciens, respectivement, de la densité et de la vitesse. Ils doivent cependant rester suffisamment faibles (donc α et δ également) pour ne pas introduire une diffusion trop importante. Pour des écoulements non visqueux, le coefficient α doit ainsi rester suffisamment faible pour ne pas introduire une viscosité non désirée dans l'écoulement (classiquement $\alpha = 0.01$). Comme démontré dans [5], les valeurs que peut prendre le paramètre δ sont relativement peu étendues ($0 < \delta < 0.2$) et on prend en général $\delta = 0.1$.

2.2.4 Schéma de Parshikov et al.

Pour la méthode des volumes finis, une technique classiquement utilisée pour stabiliser les schémas est basée sur l'utilisation de problèmes de Riemann. Cette méthode consiste à décentrer le schéma de discrétisation spatial au niveau de chaque interface $i - j$ (située en $\boldsymbol{x}_{ij} = \frac{\boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{x}_i}{2}$) entre les particules i et j, en y introduisant la solution d'un problème de Riemann (l'utilisation de problèmes de Riemann sera présentée plus en détails dans la

section 2.2.6). En première approche, la pression et la vitesse au niveau de l'interface $i-j$ sont données respectivement par $\frac{P_j+P_i}{2}$ et $\frac{\boldsymbol{u}_j+\boldsymbol{u}_i}{2}$. L'idée proposée initialement par Parshikov et al. [119] est alors de remplacer ces pressions et vitesses approchées à l'interface par la solution, notée $\bullet_E$, d'un problème de Riemann afin de stabiliser le schéma numérique :

$$\frac{P_j+P_i}{2} \simeq P_{interface} \simeq P_E, \tag{2.66}$$

$$\frac{\boldsymbol{u}_j+\boldsymbol{u}_i}{2} \simeq \boldsymbol{u}_{interface} \simeq \boldsymbol{u}_E. \tag{2.67}$$

En remarquant que $\boldsymbol{u}_j-\boldsymbol{u}_i = 2\left(\frac{\boldsymbol{u}_j+\boldsymbol{u}_i}{2}-\boldsymbol{u}_i\right)$, le schéma Riemann-SPH de Parshikov et al. [119] est alors obtenu à partir du schéma (2.51-2.54) et est donné par :

$$\frac{D\boldsymbol{x}_i}{Dt} = \boldsymbol{u}_i, \tag{2.68}$$

$$\frac{D\left(\rho_i V_i\right)}{Dt} = 0, \tag{2.69}$$

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \sum_{j\in\Omega_i} 2\left(\boldsymbol{u}_E-\boldsymbol{u}_i\right).\boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j, \tag{2.70}$$

$$\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_i}\sum_{j\in\Omega_i} 2P_E \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + \boldsymbol{f}_i. \tag{2.71}$$

Le schéma de Parshikov et al. est le schéma majoritairement utilisé dans cette thèse. Ce choix a été fait car ce schéma présente de nombreux avantages. Premièrement, le schéma de Parshikov et al. est compatible avec les techniques de raffinement particulaire (cf. section 2.6). Il peut aussi être adapté relativement facilement aux techniques surfaciques de traitement des conditions limites, qui sont indispensables dès lors que l'on est en présence de corps à géométrie complexe (cf. section 2.5.2). Enfin, les approximations (2.66) et (2.67) introduisent naturellement de la diffusion numérique au sein du schéma [96], ce qui fournit généralement des champs de pression peu bruités (cf. Figure 2.4). En revanche la résolution des problèmes de Riemann introduit généralement un surcoût de calcul.

2.2.5 Schéma de Vila

Les schémas présentés précédemment utilisent le formalisme Lagrangien, mais il est également possible de dériver des schémas SPH à partir des équations en formalisme ALE (1.31), (1.32). Dans ce cas là on choisit des volumes de contrôle $\omega(t)$ qui coïncident avec les volumes V_i des particules et les grandeurs moyennées $\overline{f}(\boldsymbol{x},t)$ sur les volumes de contrôle sont données par f_i. Pour les même raisons que pour le schéma (2.51-2.54), l'équation d'évolution du volume (1.32) est évaluée à l'aide d'un opérateur antisymétrique alors que l'équation d'évolution des variables conservatives (1.31) est évaluée à l'aide d'un opérateur symétrique (cf. section 2.2.1). Une première version d'un schéma SPH-ALE, initialement proposée par Vila [152], est alors donnée par :

$$\frac{D\boldsymbol{x}_i}{Dt} = \boldsymbol{u}_{0i}, \tag{2.72}$$

$$\frac{DV_i}{Dt} = V_i \sum_{j\in\Omega_i} \left(\boldsymbol{u}_{0j} - \boldsymbol{u}_{0i}\right).\boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j, \tag{2.73}$$

$$\frac{D\left(V_i \boldsymbol{\phi}_i\right)}{Dt} = -V_i \sum_{j\in\Omega_i} \left(\mathbb{G}_j + \mathbb{G}_i\right) \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j. \tag{2.74}$$

Or cette première version d'un schéma ALE est également centrée en espace (cf. section 2.1.3.3), ce qui la rend potentiellement instable. De même que pour les schémas en formalisme Lagrangien, il est donc nécessaire de le stabiliser (cf. section 2.2.1). Initialement, Vila [152] a proposé de stabiliser ce schéma à l'aide de problèmes de Riemann situées au niveau de chaque interface $i-j$ (l'utilisation de problèmes de Riemann sera présentées plus en détails dans la section 2.2.6). Pour cela le tenseur $\mathbb{G} = \mathbb{F} - \boldsymbol{\phi} \otimes \boldsymbol{u}_0$ des flux ALE à l'interface est tout d'abord approché par :

$$\frac{\mathbb{G}_j + \mathbb{G}_i}{2} \simeq \mathbb{G}_{interface} = \mathbb{F}_{interface} - \boldsymbol{\phi}_{interface} \otimes \boldsymbol{u}_{0,interface}. \tag{2.75}$$

De même que pour le schéma de Parshikov et al. (2.68-2.71), le vecteur des variables conservatives $\boldsymbol{\phi}$ et le tenseur des flux $\mathbb{F}$ à l'interface $i-j$ sont alors remplacés par la solution d'un problème de Riemann au niveau de cette interface :

$$\boldsymbol{\phi}_{interface} \simeq \boldsymbol{\phi}_E = \begin{pmatrix} \rho_E \\ \rho_E u_E \\ \rho_E v_E \\ \rho_E w_E \end{pmatrix}, \tag{2.76}$$

$$\mathbb{F}_{interface} \simeq \mathbb{F}_E = \begin{pmatrix} \rho_E u_E & \rho_E v_E & \rho_E w_E \\ \rho_E u_E^2 + P_E & \rho_E u_E v_E & \rho_E u_E w_E \\ \rho_E u_E v_E & \rho_E v_E^2 + P_E & \rho_E v_E w_E \\ \rho_E u_E w_E & \rho_E v_E w_E & \rho_E w_E^2 + P_E \end{pmatrix}. \tag{2.77}$$

Plusieurs décompositions sont alors possibles afin d'approximer le champ de vitesse arbitraire $\boldsymbol{u}_0$ à l'interface, menant à plusieurs variantes du schéma SPH-ALE [96]. Le choix fait par Vila [152] pour approximer cette vitesse arbitraire à l'interface est :

$$\boldsymbol{u}_{0,interface} \simeq \frac{\boldsymbol{u}_{0i} + \boldsymbol{u}_{0j}}{2} = \boldsymbol{u}_{0ij}. \tag{2.78}$$

Finalement le schéma Riemann-SPH de Vila [152] est donné par :

$$\frac{D\boldsymbol{x}_i}{Dt} = \boldsymbol{u}_{0i}, \tag{2.79}$$

$$\frac{DV_i}{Dt} = V_i \sum_{j\in\Omega_i} (\boldsymbol{u}_{0j} - \boldsymbol{u}_{0i}) . \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j, \tag{2.80}$$

$$\frac{D(V_i\rho_i)}{Dt} = -V_i \sum_{j\in\Omega_i} 2\rho_E \left[\boldsymbol{u}_E - \boldsymbol{u}_{0ij}\right], \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j, \tag{2.81}$$

$$\frac{D(V_i\rho_i\boldsymbol{u}_i)}{Dt} = -V_i \sum_{j\in\Omega_i} 2\left[\rho_E \boldsymbol{u}_E \otimes (\boldsymbol{u}_E - \boldsymbol{u}_{0ij}) + P_E\right] \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + V_i\rho_i \boldsymbol{f}_i. \tag{2.82}$$

On remarquera que ici, contrairement au schéma de Parshikov et al., la masse des particules n'est a priori plus constante. Classiquement la vitesse arbitraire $\boldsymbol{u}_0$ est généralement décomposée comme la somme de la vitesse $\boldsymbol{u}$ et d'une vitesse de perturbation $\delta\boldsymbol{u}$ [115] :

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}. \tag{2.83}$$

Cette vitesse de perturbation doit rester faible devant la vitesse $\boldsymbol{u}$ [115] (afin de ne pas trop s'éloigner d'un formalisme Lagrangien) et sert en particulier à imposer un désordre particulaire. L'un des avantages de ce schéma, et en particulier de sa formulation ALE, est que le désordre particulaire pourra y être imposé de manière plus consistante que pour les schémas précédents (cf. chapitre 3). Les détails du calcul de $\delta\boldsymbol{u}$ et de ses propriétés seront détaillés au chapitre 3.

De même que pour le schéma de Parshikov et al., les approximations (2.75), (2.76) et (2.77) permettent d'introduire naturellement de la diffusion numérique au sein du schéma et donc de le stabiliser [96]. A priori, le choix qui a été fait de stabiliser le schéma SPH-ALE (2.72-2.74) à l'aide de problèmes de Riemann est arbitraire (bien que cela permet d'obtenir des champs de pression peu bruités ; cf. Figure 2.4). En particulier il aurait été possible de stabiliser ce schéma à l'aide du concept de viscosité artificielle, comme pour le schéma δ-SPH (2.60-2.63) par exemple. Cette approche a, entre autres, été étudiée par Colagrossi et al. [32] et Sun et al. [139] (le formalisme utilisé, qualifié de "quasi-Lagrangien", n'est pas rigoureusement un formalisme ALE mais le schéma obtenu reste tout de même très proche du schéma SPH-ALE (2.72-2.74)).

Contrairement aux schémas présentés précédemment, et basés sur les équations d'Euler (1.3-1.5), les schémas de type SPH-ALE sont basés sur les équations (1.31-1.32), donc valables uniquement de manière intégrée sur les volumes V_i des particules. Ainsi on parlera ici de "valeurs volumiques" pour les différentes variables utilisées (cf. section 2.1.4).

Ce schéma de type SPH-ALE est également intéressant pour son lien avec la méthode des Volumes Finis. Ce lien est clairement mis en évidence dans les thèses de Guilcher [60] et de Renaut [129]. Il est notamment dû à la formulation en terme de flux de l'équation d'évolution des variables conservatives (2.74) et du calcul de ces flux au niveau des interfaces $i-j$ entre particules voisines. Ainsi on pourra s'inspirer des nombreuses techniques utilisées pour améliorer la méthode des Volumes Finis pour améliorer les différents schémas de type

SPH-ALE. En particulier, on pourra s'inspirer de toutes les techniques de montée en ordre et de reconstruction des flux proposées pour la méthode des Volumes Finis pour la montée en ordre des schémas SPH-ALE (cf. chapitre 5).

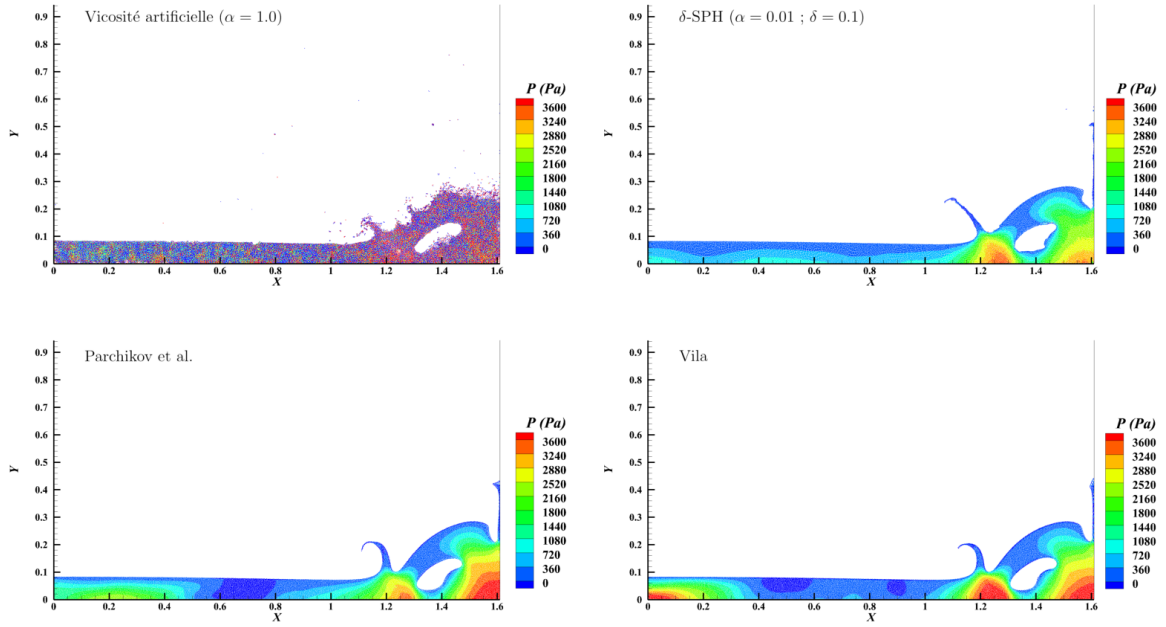

FIGURE 2.4 – Comparaison des différents schémas SPH sur le cas d'un dam-break. On remarque l'intérêt des différentes techniques de stabilisation, en particulier concernant la régularité du champ de pression.

2.2.6 Utilisation de problèmes de Riemann

Les schémas de Parshikov et al. (2.68-2.71) et de Vila (2.79-2.82) utilisent donc des problèmes de Riemann pour leur stabilisation. Le but de cette section est de présenter ce que sont les problèmes de Riemann et leurs liens avec les schémas numériques. Dans le cadre de cette thèse, les problèmes de Riemann (et les différents solveurs utilisés pour les résoudre) ne sont pas étudiés en profondeur ni de manière spécifique, et sont uniquement utilisés comme un outil numérique. On se contentera donc ici d'une présentation rapide des problèmes de Riemann. Pour plus de détails, le lecteur se réfèrera à [91] [60] [57] [80] pour leur utilisation au sein de la méthode SPH.

2.2.6.1 Présentation du problème de Riemann

Un problème de Riemann désigne un problème aux conditions initiales pour un système d'équations de conservation hyperboliques (généralement en 1D) et pour une condition initiale constante par morceau (avec une seule discontinuité). Dans le cas des équations d'Euler (1.25) monodimensionnelles qui nous intéressent ici, ce problème peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}(x,t,\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\phi}(x,t=0) = \begin{cases} \boldsymbol{\phi}_L & \text{si } x < 0 \\ \boldsymbol{\phi}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}, \tag{2.84}$$

où, ici, $\boldsymbol{\phi} = {}^t(\rho, \rho u)$ désigne le vecteur des variables conservatives 1D et $\boldsymbol{F} = {}^t(\rho u, \rho u^2 + P)$ le flux 1D, avec u la composante de la vitesse dans la direction $\boldsymbol{x}$. La discontinuité initiale se situe ici en $x = 0$. $\boldsymbol{\phi}_L = {}^t(\rho_L, \rho_L u_L)$ et $\boldsymbol{\phi}_R = {}^t(\rho_R, \rho_R u_R)$ désignent respectivement les états initiaux constants gauche et droit du problème de Riemann. Physiquement, le problème (2.84) peut s'interpréter comme l'expérience d'un tube à choc dans lequel on disposerait initialement une membrane séparant deux zones de masse volumique et de vitesse différentes. Cette membrane est retirée à $t = 0$ et des ondes de chocs et de détentes vont alors se propager le long du tube. La résolution du problème de Riemann dans le cas des équations d'Euler consiste donc à déterminer les états formés par ces différentes ondes, et en particulier l'état $\boldsymbol{\phi}_E$ au niveau d'une interface située en un point x_I. Cette interface peut être immobile (i.e. $x_I = 0$) ou bien évoluer à une vitesse u_I.

Le problème de Riemann (2.84) est un problème non-linéaire dont la solution ne s'obtient pas de manière immédiate. Cette solution repose entre autres sur les relations de Rankine-Hugoniot qui permettent de déterminer les relations entre la vitesse, la masse volumique, la pression, l'énergie, etc... de part et d'autre d'une onde de choc, ainsi que sur la conservation des invariants de Riemann du problème hyperbolique le long des ondes de choc. En revanche la solution repose sur une méthode itérative, ce qui peut engendrer des surcoûts de calcul (on trouvera en annexe A cette méthode de résolution exacte pour le cas de l'équation d'état (1.10)). Pour remédier à cet inconvénient, plusieurs solveurs de Riemann approchés ont été proposés [132] [118] [148]. Dans cette thèse, outre le solveur exact, on utilisera également un solveur acoustique [108], dont la solution approchée est donnée par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_E = \left[\dfrac{\rho_L c_L \boldsymbol{u}_L.\boldsymbol{n} + \rho_R c_R \boldsymbol{u}_R.\boldsymbol{n}}{\rho_L c_L + \rho_R c_R} - \dfrac{P_R - P_L}{\rho_L c_L + \rho_R c_R} \right] \boldsymbol{n} \\ P_E = \dfrac{\rho_L c_L P_L + \rho_R c_R P_R}{\rho_L c_L + \rho_R c_R} - \dfrac{\rho_L c_L \rho_R c_R (\boldsymbol{u}_R.\boldsymbol{n} - \boldsymbol{u}_L.\boldsymbol{n})}{\rho_L c_L + \rho_R c_R} \end{cases}, \tag{2.85}$$

où $\boldsymbol{n}$ désigne ici la direction du problème de Riemann ($\boldsymbol{x}$ dans le cas 1D) et $\boldsymbol{u}_L.\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{u}_R.\boldsymbol{n}$ désignent respectivement les vitesses initiales des états gauche et droit, projetées dans la direction $\boldsymbol{n}$. Ce solveur présente l'avantage de fournir une solution explicite ne nécessitant pas de gros efforts de calcul. On notera également que la position x_I et la vitesse u_I de l'interface n'interviennent pas dans la solution (2.85) car ce solveur suppose que l'on se trouve en permanence dans l'état "étoilé" $\boldsymbol{\phi}_*$ (ce qui se vérifie dès que l'hypothèse de faible-compressibilité est respectée ; cf. annexe A).

2.2.6.2 Utilisation au sein des schémas numériques

La première utilisation de problèmes de Riemann au sein de méthodes numériques a été faite par Godunov [56] dans le cadre de la méthode des Volumes Finis (VF), appliquée aux équations d'Euler. Dans cette méthode, le domaine de calcul est discrétisé en plusieurs cellules, séparées par différentes facettes aux niveaux desquelles sont calculés des flux numériques. Or comme pour la plupart des méthodes numériques, il est nécessaire de stabiliser les schémas qu'elles utilisent afin d'obtenir des résultats exploitables. L'utilisation de problèmes de Riemann pour stabiliser la méthode des Volumes Finis peut alors se faire de manière presque "naturelle", du fait qu'elle repose sur la forme conservative des équations d'Euler (1.25). En effet, Godunov [56] interprète alors les "discontinuités" au niveau des facettes comme autant de problèmes de Riemann à résoudre. Le calcul de flux numériques au niveau de chaque facette peut alors être remplacé par la solution d'un problème de Riemann, ce qui peut s'interpréter comme un décentrement et donc une stabilisation du schéma. Dans ce cas là, les états gauche et droit proviennent des états donnés au niveau des cellules de part et d'autre de la facette, tandis que la position x_I de l'interface, la vitesse u_I de l'interface et la direction du problème sont données respectivement par la position, la vitesse et la normale à la facette.

Le schéma de Godunov [56] pour les Volumes Finis peut être étendu à la méthode SPH, par l'intermédiaire du schéma de Vila [152]. Le lien entre ces deux méthodes repose, entre autres, sur la formulation en terme de flux de l'équation d'évolution des variables conservatives (2.74) [60] [129]. Par analogie avec le schéma de Godunov, il est possible de voir chaque interaction entre deux particules i et j comme un problème de Riemann 1D (cf. Figure 2.5), ce qui conduit alors à la formulation (2.79-2.82). Dans ce cas, les états gauche et droit sont donnés, en première approximation, par les valeurs au niveau des particules i et j. Contrairement au cas de la méthode des Volumes Finis, on ne dispose pas ici d'une interface donnée par une facette. Les notions de direction du problème de Riemann, de vitesse u_I et de position x_I de l'interface sont donc plus difficiles à définir. Cependant, la direction du gradient $\boldsymbol{\nabla} W_{ij}$ est donnée par $\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i$ (cf. équation (2.13)). Ainsi toutes les quantités impliquées dans l'interaction $i - j$ sont implicitement projetées sur la direction $\boldsymbol{n}_{ij} = \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{||\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i||}$, ce qui fournit une direction naturelle pour le problème de Riemann. En première approximation, la position et la vitesse de l'interface sont alors données par $x_I = \boldsymbol{x}_{ij}.\boldsymbol{n}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{x}_i\right).\boldsymbol{n}_{ij}$ et $u_I = \boldsymbol{u}_{0ij}.\boldsymbol{n}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}_{0j} + \boldsymbol{u}_{0i}\right).\boldsymbol{n}_{ij}$. On notera que par convention on associe l'état gauche à la particule i et l'état droit à la particule j. Dans le cadre de cette thèse, les solutions des problèmes de Riemann au sein du schéma de Vila seront données à l'aide du solveur exact.

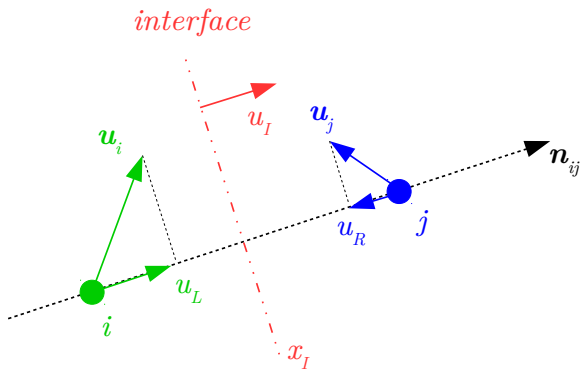

FIGURE 2.5 – Construction d'un problème de Riemann 1D pour l'interaction entre la particule i et la particule j.

L'utilisation de problèmes de Riemann au sein du schéma de de Parshikov et al. (2.68-2.71) peut être vue uniquement comme un moyen de stabiliser le schéma numérique (2.51-2.54). Dans ce cas, la précision du solveur de Riemann peut être légèrement "relâchée". C'est pourquoi Parshikov et al. [119] proposent d'utiliser le solveur acoustique (2.85) pour résoudre les différents problèmes de Riemann et ainsi introduire de manière relativement simple un décentrement au sein du schéma. Cette simplification reste acceptable dès que les écoulements étudiés restes faiblement-compressibles et/ou subsoniques (cf. annexe A). Dans ce cas, la vitesse u_I de l'interface n'a pas besoin d'être définie (car on se trouve toujours dans l'état "étoilé" $\boldsymbol{\phi}_*$; cf. annexe A). De même que précédemment, la normale à l'interface sera prise égale à $\boldsymbol{n}_{ij} = \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{||\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i||}$ et la position sera donnée par $x_I = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{x}_i\right).\boldsymbol{n}_{ij}$ en première approximation.

2.2.6.3 Reconstruction MUSCL

De manière générale, les différents solveurs de Riemann utilisés sont relativement diffusifs, ce qui peut introduire des erreurs importantes au sein des simulations. Le solveur de Riemann vise la résolution d'une discontinuité physique (i.e. un choc) alors qu'il ne s'agit en réalité que d'une discontinuité numérique due à la discrétisation de la méthode. Ce caractère diffusif est notamment dû à l'approximation faite sur le choix des états gauche et droit des problèmes de Riemann. En particulier, le fait de prendre ces états comme étant les valeurs au niveau des particules (ou des cellules pour la méthode des Volumes Finis) se révèle trop imprécis (i.e. $\boldsymbol{\phi}_L = \boldsymbol{\phi}_i$ et $\boldsymbol{\phi}_R = \boldsymbol{\phi}_j$), puisque cela correspond à une approximation à l'ordre 0. Dans le cadre de la méthode des Volumes Finis, une solution a été proposée par Van Leer [150] pour limiter cette diffusion numérique. Cette solution, appelée MUSCL (Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws), consiste à fournir une reconstruction linéaire des états gauche et droit des problèmes de Riemann au niveau de l'interface (la Figure 2.6 illustre le principe de cette reconstruction). Cette reconstruction MUSCL a été adaptée par Vila [152] à la méthode SPH et consiste à reconstruire les états gauche et droit à l'aide de gradients évalués à l'aide d'opérateurs SPH. L'opérateur gradient antisymétrique renormalisé (2.45) est généralement utilisé car il fournit théoriquement une évaluation plus précise du gradient (en effet pour cet opérateur les consistances d'ordre 0 et 1 sont assurées). Les états gauche et droit à l'interface sont finalement donnés par :

$$\boldsymbol{\phi}_L = \boldsymbol{\phi}_i + \langle \mathbb{G}rad\boldsymbol{\phi} \rangle_i^{-,R} (\boldsymbol{x}_{ij} - \boldsymbol{x}_i) , \tag{2.86}$$
$$\boldsymbol{\phi}_R = \boldsymbol{\phi}_j + \langle \mathbb{G}rad\boldsymbol{\phi} \rangle_j^{-,R} (\boldsymbol{x}_{ij} - \boldsymbol{x}_j) , \tag{2.87}$$

En théorie, cette idée de reconstruction des états gauche et droit des problèmes de Riemann peut être étendue à des reconstructions d'ordre plus élevé qu'une simple reconstruction linéaire. Cette piste sera étudiée au chapitre 5.

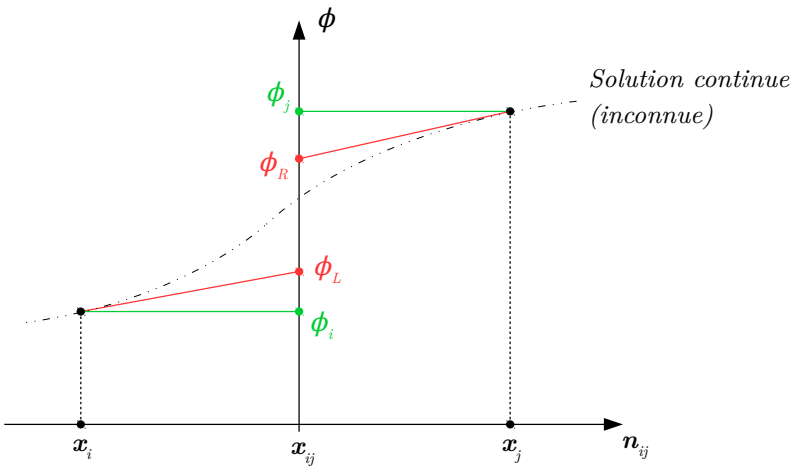

FIGURE 2.6 – Principe de la reconstruction MUSCL : les valeurs à l'interface $\boldsymbol{x}_{ij}$ sont données par une reconstruction linéaire à l'aide de l'évaluation de gradients SPH.

Cependant, a priori rien n'empêche que ces reconstructions conduisent à des oscillations indésirables (voir conduisent à des "inversions" du problème de Riemann). Ainsi, la notion de schéma TVD (Total Variation Diminishing) a été introduite par Harten [65]. Pour respecter cette propriété TVD on utilise un limiteur de pente qui permet de limiter les gradients et empêcher les oscillations de la solution numérique tout en évitant l'inversion des problèmes de Riemann. Cela modifie les états gauche et droit de la manière suivante :

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_L = \boldsymbol{\phi}_i + \theta (r_{ij}) (\boldsymbol{\phi}_L - \boldsymbol{\phi}_i) , \tag{2.88}$$
$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_R = \boldsymbol{\phi}_j + \theta (r_{ji}) \left(\boldsymbol{\phi}_R - \boldsymbol{\phi}_j\right) , \tag{2.89}$$

où $\boldsymbol{\phi}_L$ et $\boldsymbol{\phi}_R$ sont les états reconstruits à l'aide des reconstructions MUSCL (2.86-2.87) et $\theta(r)$ est le limiteur de pente (lorsque $\theta(r) = 0$ c'est uniquement l'état constant qui est utilisé ; à l'inverse lorsque $\theta(r) = 1$ c'est la reconstruction d'ordre élevé qui est retenue). Pour les méthodes numériques utilisant des maillages structurés, les quantités r_{ij} et r_{ji} représentent le rapport des gradients entre les deux cellules voisines (i.e. $r_{ij} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\phi_{i+1} - \phi_i}$ et $r_{ji} = \frac{\phi_j - \phi_{j-1}}{\phi_{j+1} - \phi_j}$). Pour une méthode basée sur une discrétisation déstructurée (ce qui est la cas pour la méthode SPH) il est plus compliqué de définir r_{ij} du fait qu'il est difficile de déterminer les gradients décentrés, car on ne dispose d'une information qu'au niveau de l'interface $i - j$. Certains

auteurs, comme Koukouvinis et al. [75] par exemple, proposent tout de même une méthode pour évaluer ces gradients décentrés (bien que cette méthode soit relativement coûteuse et compliquée à mettre en œuvre). Dans le cadre de cette thèse, on utilise la stratégie proposée dans [60], et qui consiste à évaluer le gradient manquant à l'aide d'un gradient SPH :

$$r_{ij} \simeq \frac{\langle \boldsymbol{grad}\phi \rangle_i^{-,R} . (\boldsymbol{x}_{ij} - \boldsymbol{x}_i)}{\phi_j - \phi_i}, \tag{2.90}$$

$$r_{ji} \simeq \frac{\langle \boldsymbol{grad}\phi \rangle_j^{-,R} . (\boldsymbol{x}_{ij} - \boldsymbol{x}_j)}{\phi_i - \phi_j}, \tag{2.91}$$

où cette estimation doit se faire pour chaque composante ϕ du vecteur des variables conservatives $\boldsymbol{\phi}$. Cette approximation fait que la condition TVD n'est plus strictement vérifiée. Plusieurs choix de limiteurs $\theta(r)$ sont alors possibles. Le limiteur utilisé dans le cadre de cette thèse est le limiteur minmod, défini comme :

$$\theta(r) = max(0, min(1, r)). \tag{2.92}$$

2.3 Intégration temporelle

Dans la section 2.2 une discrétisation spatiale des équations d'Euler a été proposée à l'aide de différents schémas SPH. Il reste alors à déterminer l'évolution de la solution au cours du temps. Pour cela deux types de schémas temporels sont possibles : les schémas implicites et les schémas explicites. Les schémas implicites présentent l'avantage d'être inconditionnellement stables (permettant d'avoir des pas de temps relativement grands) mais sont généralement dissipatifs. Ils nécessitent également l'inversion d'un système matriciel à chaque pas de temps. Or contrairement aux méthodes numériques avec maillages, où le nombre de mailles voisines reste limité, le nombre de particules voisines dépasse plusieurs dizaines pour la méthode SPH (cf. section 2.1.4). Ainsi les matrices à inverser sont "moins creuses" que pour les méthodes avec maillages, ce qui augmente significativement le coût de leur inversion et l'espace mémoire utilisé. Cet aspect limitant fait que les schémas implicites ne sont généralement pas utilisés pour la méthode SPH. On préfèrera donc ici utiliser un schéma d'intégration temporelle explicite, schéma généralement adopté en SPH faiblement compressible. Le schéma majoritairement utilisé dans cette thèse est un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. Pour une variable générique y, dont la dérivée est donnée par une relation de la forme $\frac{Dy}{Dt} = f(y, t)$, il permet de calculer de manière explicite, pour chaque particule i, son évolution de la manière suivante :

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \frac{1}{6}\left[k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}\right], \tag{2.93}$$

avec

$$k_{1,i} = f_i\left(t^n, y_i^n\right), \tag{2.94}$$

$$k_{2,i} = f_i\left(t^n + \frac{1}{2}\Delta t^n, y_i^n + \frac{1}{2}\Delta t^n k_{1,i}\right), \tag{2.95}$$

$$k_{3,i} = f_i\left(t^n + \frac{1}{2}\Delta t^n, y_i^n + \frac{1}{2}\Delta t^n k_{2,i}\right), \tag{2.96}$$

$$k_{2,i} = f_i\left(t^n + \Delta t^n, y_i^n + \Delta t^n k_{3,i}\right), \tag{2.97}$$

où la notation $\bullet^n$ désigne les différentes variables à l'instant n. En pratique, la variable générique y est alors remplacée par l'ensemble des variables dont on cherche à déterminer l'évolution (i.e. $\boldsymbol{x}$, ρ et $\boldsymbol{u}$ dans la plupart des cas), et les étapes (2.94) à (2.97) sont effectuées successivement. Les valeurs de f (i.e. les valeurs de $\frac{D\boldsymbol{x}_i}{Dt}$, $\frac{D\rho_i}{Dt}$ et $\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt}$) sont déterminées à l'aide des différents schémas SPH présentés dans la section 2.2.

La taille du pas de temps Δt doit obéir à une condition de stabilité de type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [38], donnée par :

$$\Delta t \leq CFL_{hyp} \min_{i \in \mathcal{P}} \left(\frac{R_i}{c_i}\right) = \Delta t_{hyp}, \tag{2.98}$$

où CFL_{hyp} est le coefficient CFL hyperbolique. Sa valeur dépend notamment du schéma temporel et du noyau utilisé [154]. Pour un schéma Runge-Kutta d'ordre 4, la valeur typiquement utilisée est $CFL_{hyp} = 0.375$. Cette condition de stabilité (2.98) peut s'interpréter comme le fait qu'une onde (se déplaçant à la vitesse du son c_i) ne doit pas parcourir plus d'une certaine portion de la taille caractéristique de la discrétisation spatiale (ici R_i, le rayon du support du noyau) pendant un pas de temps. Ceci impose des pas de temps généralement faibles. En particulier, cela restreint l'utilisation de la méthode SPH à des écoulements pour lesquels les temps caractéristiques sont relativement faibles. Le choix du schéma d'intégration temporelle est également un compromis entre coût de calcul et précision des simulations. En particulier, l'ordre du schéma choisi peut influencer le résultat des simulations [47].

2.4 Utilisation d'une vitesse du son artificielle

Les faibles pas de temps obtenus à cause de la condition de stabilité (2.98), et donc le coût de calcul important qui en découle sont un désavantage important de la méthode SPH développée ici. Or, pour la plupart des écoulements simulés à l'aide la méthode SPH, la borne de la condition de faible-compressibilité présentée à la section 1.2 est généralement loin d'être atteinte. En particulier, les écoulements physiques que l'on cherche à simuler sont généralement des écoulements à bas nombre de Mach. Une astuce consiste donc à augmenter artificiellement le nombre de Mach de l'écoulement en choisissant une vitesse du son c_0 plus faible que la vitesse du son réelle du fluide considéré (cette vitesse du son sera alors qualifiée de vitesse du son artificielle). Le taille du pas de temps (2.98) s'en trouve alors augmentée, réduisant drastiquement le temps de calcul de la simulation. Le choix de c_0 modifie nécessairement la partie acoustique de l'écoulement, mais la relation (1.16) montre

que l'écoulement moyen ne sera que très faiblement impacté (dans la limite où le nombre de Mach reste faible, i.e. $Ma < 0.1$). Ceci peut se traduire physiquement comme une condition imposant que le spectre d'énergie de la partie acoustique de l'écoulement n'influence pas celui de l'écoulement moyen, la vitesse du son c_0 pouvant donc être abaissée pourvu que ces deux spectres ne s'intersectent pas (cf. Figure 2.7). On note enfin qu'une partie du spectre acoustique sera "naturellement" filtrée en raison de la diffusion numérique présente dans les schémas discutés précédemment (diffusions artificielles α et δ, et problèmes de Riemann).

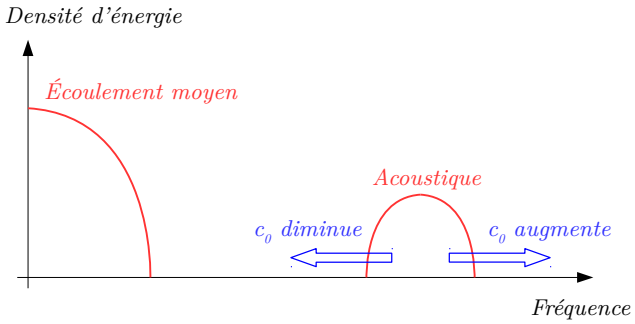

FIGURE 2.7 – Décomposition du spectre de densité d'énergie présente dans l'écoulement entre la partie acoustique et l'écoulement moyen. La vitesse du son artificielle c_0 influence le contenu fréquentiel de la partie acoustique.

Pour garantir la condition $Ma < 0.1$, la vitesse du son artificielle est généralement choisie de sorte que $c_0 \geq 10U_{max}$, où U_{max} est la vitesse maximale de l'écoulement. Or cette vitesse maximale de l'écoulement n'est pas connue a priori, et il est parfois difficile de l'estimer avant d'effectuer une simulation. Il est donc parfois nécessaire de relancer le calcul afin d'avoir une valeur acceptable pour la vitesse du son artificielle c_0 (cette calibration de la valeur de c_0 peut par exemple se faire à l'aide de calculs peu raffinés et donc rapides à exécuter). Il est également important de noter que l'hypothèse de faible-compressibilité porte finalement sur les variations de la masse volumique ρ, et qu'elles peuvent être influencées par de nombreux autres phénomènes (accélération, différence de pression, forces extérieures, etc...). Le critère sur le nombre de Mach n'est qu'une estimation. En particulier, la vitesse du son c_0 peut parfois être choisie légèrement inférieure à 10 fois la vitesse maximale de l'écoulement, tant que les variations de la masse volumique restent acceptables.

Enfin le fait que la vitesse du son c_0 soit artificielle en fait un paramètre qui n'est plus seulement physique, mais également un paramètre numérique. Ainsi, sa valeur influence de nombreuses propriétés numériques des simulations comme la diffusion numérique, la stabilité, etc... La vitesse du son c_0 pourra donc être également utilisée pour modifier l'ensemble de ces propriétés. Ce lien découle du fait que la vitesse du son est utilisée directement au sein des différents schémas et dans la résolution des problèmes de Riemann.

2.5 Traitement des conditions limites

Jusqu'à présent, le formalisme de la méthode SPH a été présenté en l'absence de paroi et/ou de surface libre. Cela a notamment permis de pouvoir négliger les intégrales de surface lors de la construction des opérateurs dérivés (cf. section 2.1.3). En effet, le support $\Omega(\boldsymbol{x})$ du noyau n'intersectant pas de paroi et/ou de surface libre, ces intégrales de surface se trouvent être identiquement nulles. Or en présence d'une paroi et/ou d'une surface libre, ces intégrales de surface ne sont plus nulles a priori. La difficulté ici est donc de pouvoir évaluer correctement ces opérateurs dérivés, tout en imposant les conditions aux limites décrites dans la section 1.3. Ce point est un aspect très critique de la méthode SPH, et plusieurs solutions ont été proposées afin de traiter ce problème. Le cas des frontières ouvertes (de type inlet ou outlet) n'est pas traité ici et on pourra par exemple se référer à [79] [49] pour le traitement de ce type de frontière dans la méthode SPH.

Deux axes ont été explorés afin d'évaluer les opérateurs SPH dans le cas où le support $\Omega(\boldsymbol{x})$ du noyau se trouve intersecté par une frontière solide. La première approche adoptée consiste à compléter la partie tronquée du support $\Omega(\boldsymbol{x})$ en créant un domaine fluide fictif de l'autre côté de la paroi, dans lequel les différents champs (vitesse, pression, etc...) sont déterminés afin d'imposer les conditions aux limites. Les particules fictives ainsi créées sont qualifiées de particules fantômes (ou particules "ghost" en anglais). Cette approche peut être qualifiée de "volumique" puisqu'elle consiste à rétablir la consistance des opérateurs dérivés en complétant le volume tronqué du noyau. La deuxième approche consiste à évaluer directement les intégrales de surface, tout en imposant les conditions limites à la paroi. Cette approche peut être qualifiée de surfacique et est dénommée Boundary Integral Method (BIM).

Enfin, les conditions de surface libre sont discutées dans une section dédiée.

2.5.1 Approche volumique - Méthode ghost

La méthode ghost est l'approche la plus répandue dans la communauté SPH pour traiter les conditions aux limites de paroi. On présente ici les grands principes de cette méthode (on pourra par exemple se référer aux travaux de Libersky et al. [83], Colagrossi et al [37]. et Yildiz et al. [164] pour plus de détails). Le principe de cette approche est d'ajouter des particules fictives (appelées particules fantômes ou particules ghosts) de l'autre côté de la paroi solide, de manière à ce que le support du noyau de chaque particule i soit "plein". Autrement dit, on crée une extension fictive $\boldsymbol{\Omega}_G$ du domaine de fluide $\boldsymbol{\Omega}$, dans laquelle chaque particule i est symétrisée (les particules fantômes ainsi créées sont notées $g(i)$). Or seules les particules i dont le support Ω_i du noyau intersecte la paroi ont besoin d'être symétrisées (le support du noyau des autres particules n'étant pas tronqué). Le domaine fictif $\boldsymbol{\Omega}_G$ (et donc les particules fantômes) n'est donc créé que jusqu'à une distance R de la paroi solide (hormis pour certains cas, comme par exemple l'évaluation des opérateurs renormalisés (2.48) et (2.49), pour lesquels il est nécessaire d'étendre ce domaine jusqu'à une distance 2R de la paroi). La position $\boldsymbol{x}_{g(i)}$ des particules fantômes est donc déterminée par simple symétrie (cf. Figure 2.8), et peut s'écrire :

$$\boldsymbol{x}_{g(i)} = \boldsymbol{x}_i + 2\left[\left(\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{x}_i\right).\boldsymbol{n}_s\right]\boldsymbol{n}_s, \tag{2.99}$$

où $\boldsymbol{x}_s$ et $\boldsymbol{n}_s$ désignent respectivement un point de la paroi et la normale à la paroi. Il reste cependant à déterminer la vitesse et la masse volumique (et donc la pression) que l'on doit imposer à ces particules afin de respecter les conditions de glissement (1.19) ou d'adhérence (1.17).

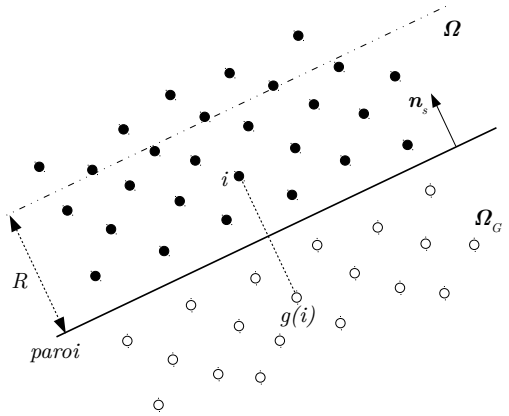

FIGURE 2.8 – Particules fantômes obtenues par symétrie en proche paroi.

On traitera dans cette section uniquement le cas d'une paroi plane afin de ne pas surcharger le propos. Le cas d'une paroi courbe est plus complexe à traiter et on pourra se référer aux articles cités précédemment pour plus de détails (on pourra également se référer à [112] pour la généralisation à une paroi 3D quelconque). L'avantage de la méthode des particules fantômes est que les opérateurs dérivés construits précédemment (cf. section 2.1.3) restent parfaitement valables (les sommes sur les particules voisines porteront également sur les particules fantômes). En particulier, l'extension du domaine de fluide $\boldsymbol{\Omega}_G$ permet de s'affranchir du calcul des intégrales de surface. Cette méthode de symétrisation est effectuée à chaque pas de temps, ce qui représente un coût de calcul supplémentaire. Un moyen de contourner ce problème est d'utiliser la méthode des particules fantômes fixes [93]. Dans cette approche, les particules fantômes sont créées au début de chaque simulation et restent ensuite fixes par rapport aux parois. Les différentes quantités associées aux particules fantômes sont alors calculées à l'aide d'interpolations MLS (Moving Least Square). Cependant, ces deux approches souffrent de problèmes de précision dès lors que l'on est en présence de parois à géométries complexes, et notamment en présence de singularités géométriques telles que des arêtes vives.

2.5.1.1 Condition de glissement en méthode ghost

La condition de glissement est appliquée en imposant une symétrisation de la vitesse (cf. Figure 2.9) :

$$\boldsymbol{u}_{g(i)} = \boldsymbol{u}_i + 2\left[\left(\boldsymbol{u}_s - \boldsymbol{u}_i\right).\boldsymbol{n}_s\right]\boldsymbol{n}_s, \tag{2.100}$$

où $\boldsymbol{u}_s$ est la vitesse de la paroi. Cette symétrisation permet de retrouver le fait que l'expression régularisée $\langle \boldsymbol{u} \rangle (\boldsymbol{x})$ (2.2) de la vitesse pour un point $\boldsymbol{x}$ situé sur la paroi respecte la condition de glissement (1.19).

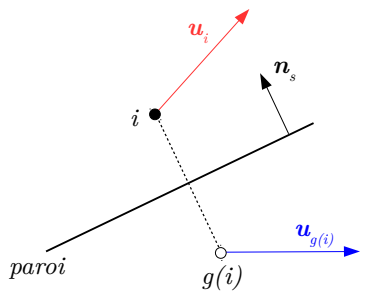

FIGURE 2.9 – Vitesse de la particule fantôme $g(i)$ obtenue à partir de la vitesse de la particule i pour imposer une condition de glissement ; ici la vitesse de la paroi $\boldsymbol{u}_s$ est prise comme nulle.

Pour déterminer la masse volumique (et donc la pression) des particules fantômes, on commence par projeter l'équation de conservation de la quantité de mouvement des équations d'Euler (1.12), évaluée à la paroi, dans la direction $\boldsymbol{n}_s$:

$$\frac{D\boldsymbol{u}_s}{Dt}.\boldsymbol{n}_s = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{grad}P.\boldsymbol{n}_s + \boldsymbol{f}.\boldsymbol{n}_s = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{n}_s} + \boldsymbol{f}.\boldsymbol{n}_s. \tag{2.101}$$

Le gradient de pression normal est alors calculé à l'aide de l'équation d'état (1.10) :

$$\frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{n}_s} = \frac{\partial P}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{n}_s} = c_0^2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}\frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{n}_s}. \tag{2.102}$$

En combinant l'expression (2.102) et l'équation (2.101), on obtient l'expression suivante :

$$\frac{\partial\left(\rho^{\gamma-1}\right)}{\partial \boldsymbol{n}_s} = \frac{(\gamma-1)\,\rho_0^{\gamma-1}}{c_0^2}\left(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{n}_s - \frac{D\boldsymbol{u}_s}{Dt}.\boldsymbol{n}_s\right). \tag{2.103}$$

En considérant le second membre de l'équation précédente comme constant, on peut alors déterminer la masse volumique des particules fantômes à l'aide d'une approximation de type différence finie :

$$\rho_{g(i)} = \left[\rho_i^{\gamma-1} + \frac{(\gamma-1)\,\rho_0^{\gamma-1}}{c_0^2}\left(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{n}_s - \frac{D\boldsymbol{u}_s}{Dt}.\boldsymbol{n}_s\right)\left(\boldsymbol{x}_{g(i)} - \boldsymbol{x}_i\right).\boldsymbol{n}_s\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \tag{2.104}$$

Le terme $\frac{D\boldsymbol{u}_s}{Dt}.\boldsymbol{n}_s$ s'exprime facilement dans le cas d'une paroi statique (où il est nul) ou d'un mouvement de corps rigide [112].

2.5.1.2 Condition d'adhérence en méthode ghost

Bien que la modélisation de la viscosité dans la méthode SPH sera abordée au chapitre 4, on présente ici la manière dont est imposée la condition d'adhérence au niveau d'une paroi en formalisme ghost. La condition d'adhérence est appliquée en imposant une symétrisation de la vitesse normale et une vitesse tangentielle opposée (cf. Figure 2.10) :

$$\boldsymbol{u}_{g(i)} = -\boldsymbol{u}_i + 2\boldsymbol{u}_s. \tag{2.105}$$

Cette condition permet de retrouver le fait que l'expression régularisée $\langle\boldsymbol{u}\rangle(\boldsymbol{x})$ (2.2) de la vitesse pour un point $\boldsymbol{x}$ situé sur la paroi respecte la condition d'adhérence (1.17). Cependant, cette condition se révèle numériquement instable [159] [13]. De Leffe [40] a proposé de rétablir la stabilité en appliquant une vitesse des particules fantômes différente entre l'équation de conservation de la masse (1.4) et l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.7) : l'expression (2.100) est utilisée dans l'équation de conservation de la masse tandis que l'expression (2.105) est utilisée dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

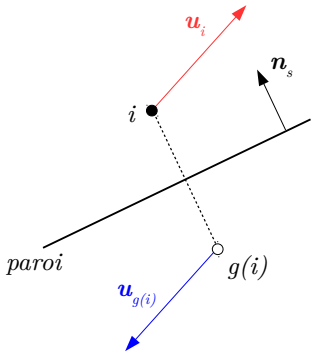

FIGURE 2.10 – Vitesse de la particule fantôme $g(i)$ obtenue à partir de la vitesse de la particule i pour imposer une condition d'adhérence ; ici la vitesse de la paroi $\boldsymbol{u}_s$ est prise comme nulle.

La masse volumique des particules fantômes est obtenue par un raisonnement similaire à celui effectué pour la condition de glissement. Ainsi, dans le cas d'un écoulement faiblement-compressible, il faut ajouter le terme (1.14). La masse volumique des particules fantômes

devient alors :

$$\rho_{g(i)} = \left[\rho_i^{\gamma-1} + \frac{(\gamma-1)\,\rho_0^{\gamma-1}}{c_0^2}\left(\nu\,(\boldsymbol{\Delta u})_s\,.\boldsymbol{n}_s + \boldsymbol{f}.\boldsymbol{n}_s - \frac{D\boldsymbol{u}_s}{Dt}.\boldsymbol{n}_s\right)\left(\boldsymbol{x}_{g(i)} - \boldsymbol{x}_i\right).\boldsymbol{n}_s\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{2.106}$$

2.5.2 Approche surfacique - Méthode BIM

L'autre approche utilisée pour traiter les conditions aux limites dans la méthode SPH est de calculer de manière précise les intégrales de surface qui ont été négligées lors de la construction des différents opérateurs dérivés (cf. section 2.1.3) tout en y imposant les différentes conditions aux limites de paroi. Plusieurs variantes de cette approche ont été développées et sont regroupées sous le terme général de Boundary Integral Method (BIM) [76] [48] [92] [41] [90] [40] [50] [81] [155] [28] [29]. La plupart reposent sur l'utilisation d'une correction Shepard (cf. section 2.1.5.1), comme l'a proposé initialement Kulasegaram et al. [76]. En effet, lorsque le support du noyau $\Omega(\boldsymbol{x})$ intersecte une paroi alors ce support $\Omega(\boldsymbol{x})$ est tronqué (cf. Figure 2.11), et la condition de partition de l'unité (2.3) n'est plus satisfaite (i.e. la consistance d'ordre 0 n'est plus assurée). Une manière simple de retrouver cette propriété est d'utiliser une correction Shepard dans l'expression régularisée (2.2) :

$$\langle f\rangle^{BIM}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\gamma(\boldsymbol{x})}\int_{\Omega(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y})\,W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV, \tag{2.107}$$

où $\gamma(\boldsymbol{x})$ est la correction Shepard au niveau continu et est définie par :

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV. \tag{2.108}$$

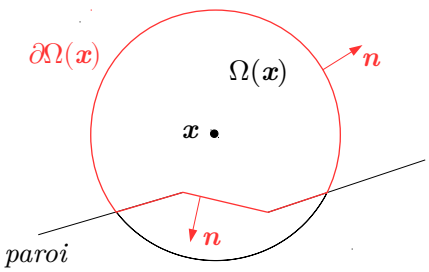

FIGURE 2.11 – Support du noyau $\Omega(\boldsymbol{x})$ intersectant une paroi, n'assurant plus la condition de partition de l'unité (2.3).

Ainsi, de manière similaire à l'obtention de l'expression (2.11), en utilisant le théorème de flux-divergence et la symétrie du noyau, on en déduit l'expression d'un opérateur gradient et d'un opérateur divergence :

$$\langle \boldsymbol{grad} f \rangle^{BIM}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\gamma(\boldsymbol{x})} \left[\int_{\Omega(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) dV + \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y}) W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \boldsymbol{n} dS \right] \tag{2.109}$$

$$\langle div \boldsymbol{f} \rangle^{BIM}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\gamma(\boldsymbol{x})} \left[\int_{\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) . \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) dV + \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) . \boldsymbol{n} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) dS \right] \tag{2.110}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale sortante au domaine $\Omega(\boldsymbol{x})$ (cf. Figure (2.11)) et où l'intégrale sur $\partial\Omega(\boldsymbol{x})$ ne porte finalement que sur la paroi solide, car le noyau est nul sur le reste de $\partial\Omega(\boldsymbol{x})$. Afin de donner une version discrétisée de ces opérateurs, il est nécessaire de définir une partition $\mathcal{S}$ de l'ensemble des parois solides $\boldsymbol{\partial\Omega}_S$. Cette partition $\mathcal{S}$ consiste en une discrétisation en plusieurs facettes "élémentaires" s, de surface S_s. Typiquement, pour un calcul précis des opérateurs BIM (et notamment de la correction Shepard ; cf. section 2.5.2.1), les surfaces S_s sont généralement de taille inférieure à la surface $\Delta x^{\eta-1}$, donnée par la taille caractéristique des particules. Les opérateurs généralement utilisés dans les schémas SPH sont les opérateurs gradient symétrique et divergence antisymétrique (cf. section 2.2.1). Leur expression discrétisée en formalisme BIM est donnée par :

$$\langle \boldsymbol{grad} f \rangle_i^{+,BIM} = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \Omega_i} (f_j + f_i) \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + \frac{1}{\gamma_i} \sum_{s \in \partial\Omega_i} (f_s + f_i) W_{is} \boldsymbol{n}_s S_s, \tag{2.111}$$

$$\langle div \boldsymbol{f} \rangle_i^{-,BIM} = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \Omega_i} (\boldsymbol{f}_j - \boldsymbol{f}_i) . \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + \frac{1}{\gamma_i} \sum_{s \in \partial\Omega_i} (\boldsymbol{f}_s - \boldsymbol{f}_i) . \boldsymbol{n}_s W_{is} S_s, \tag{2.112}$$

où γ_i est la correction Shepard discrétisée, dont le calcul est explicité dans la section 2.5.2.1. On remarque que, loin d'une paroi et d'une surface libre, les opérateurs BIM (2.111) et (2.112) sont bien équivalents aux opérateurs (2.30) et (2.37). En effet, les sommes sur le bord du support $\partial\Omega_i$ deviennent nulles et la correction Shepard tend vers 1 ($\gamma_i \to 1$). Bien qu'ils ne soient pas présentés ici, les autres opérateurs définis à la section 2.1.4 peuvent également être étendus au formalisme BIM. Les opérateurs ainsi définis peuvent alors être utilisés pour donner une version des schémas présentés en section 2.2, valable en formalisme BIM. On donne par exemple le schéma de Parshikov et al. en formalisme BIM :

$$\frac{D\boldsymbol{x}_i}{Dt} = \boldsymbol{u}_i, \tag{2.113}$$

$$\frac{D\left(\rho_i V_i\right)}{Dt} = 0, \tag{2.114}$$

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\frac{\rho_i}{\gamma_i}\sum_{j\in\Omega_i} 2\left(\boldsymbol{u}_E - \boldsymbol{u}_i\right).\boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j - \frac{\rho_i}{\gamma_i}\sum_{s\in\partial\Omega_i}\left(\boldsymbol{u}_s - \boldsymbol{u}_i\right).\boldsymbol{n}_s W_{is} S_s, \tag{2.115}$$

$$\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_i\gamma_i}\sum_{j\in\Omega_i} 2P_E \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j - \frac{1}{\rho_i\gamma_i}\sum_{s\in\partial\Omega_i}\left(P_s + P_i\right) W_{is}\boldsymbol{n}_s S_s + \boldsymbol{f}_i. \tag{2.116}$$

La vitesse $\boldsymbol{u}_s$ dans l'équation (2.115) est simplement prise comme la vitesse locale de la paroi. Le calcul de la pression à la paroi P_s dans l'équation (2.116) est explicité à la section 2.5.2.2.

2.5.2.1 Calcul de la correction Shepard

L'une des difficultés du formalisme BIM est de fournir une évaluation précise de la correction Shepard γ_i. Or le calcul de cette correction à l'aide d'une version discrétisée de l'équation (2.108) (i.e. $\gamma_i = \sum_{j\in\Omega_i} W_{ij} V_j$) se révèle imprécise, notamment lorsque le nombre de particules voisines est faible ou que la géométrie des parois devient relativement complexe [28]. Comme l'ont montré Feldman et al. [48], il est cependant possible de réécrire l'expression (2.108) comme :

$$\gamma\left(\boldsymbol{x}\right) = 1 + \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{W}.\boldsymbol{n} dS, \tag{2.117}$$

où $\boldsymbol{W}$ est une fonction vectorielle telle que $div\boldsymbol{W} = W$. Cette expression présente l'avantage de ne pas faire intervenir d'intégrale volumique. Ainsi, son expression discrétisée ne se fait pas à l'aide d'une somme sur les particules voisines (dont la répartition peut parfois être mauvaise) mais uniquement sur les éléments de surface. Plusieurs stratégies sont alors possibles pour calculer l'expression (2.117). Cette expression peut tout d'abord être calculée de manière numérique [41] [40] [50]. Une autre stratégie consiste à calculer cette expression de manière analytique [48] [81] [155] [28] [29], ce qui fournit généralement des résultats plus précis, mais en augmentant les temps de calcul. L'approche utilisée dans cette thèse est celle développée par Chiron et al. [28] [29] et appelée Cutface Approach (CFA). Elle permet notamment de traiter des géométries dont la discrétisation n'est plus contrainte par la taille des particules. Cela permet, entre autres, de pouvoir traiter des géométries relativement complexes et de rendre cette approche compatible avec les techniques de raffinement particulaire (cf. section 2.6).

2.5.2.2 Détermination de la pression à la paroi

Le calcul de la pression à la paroi P_s dans l'équation (2.116) peut se faire de différentes manières. Marongiu et al. [90] [92] ont proposé de résoudre un problème de Riemann partiel. Di Monaco et al. [44] ont proposé de reconstruire la pression à la paroi à l'aide du gradient de la pression calculé dans le fluide. Dans [50] [155] [81] c'est plutôt une reconstruction Shepard (2.44) qui est utilisée. L'approche retenue ici est celle développée par De Leffe et al. [41] [40]. Elle repose sur une extension à la méthode SPH de la méthode de flux normal, initialement développée par Ghidaglia et al. [53] [54], et consiste à calculer le flux normal au travers de la paroi. L'expression de la pression à la paroi est donnée par (on trouvera en annexe B les calculs permettant d'obtenir cette expression) :

$$P_s = P_f + \rho_f c_f \left(\boldsymbol{u}_f - \boldsymbol{u}_s\right).\boldsymbol{n}, \tag{2.118}$$

où les quantités P_f, ρ_f, c_f et $\boldsymbol{u}_f$ sont les quantités prises dans le fluide et sont estimées en première approximation par $P_f = P_i$, $\rho_f = \rho_i$, $c_f = c_i$ et $\boldsymbol{u}_f = \boldsymbol{u}_i$. Cependant, cette première estimation se révèle trop imprécise. De Leffe et al. [41] [40] ont proposé d'étendre la reconstruction MUSCL (cf. section 2.2.6.3) au niveau de la paroi. Dans ce cas, les valeurs prises dans le fluide sont données par :

$$\boldsymbol{\phi}_f = \boldsymbol{\phi}_i + \langle \mathbb{G}rad\boldsymbol{\phi}\rangle_i^{-,R} \left(\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{x}_i\right), \tag{2.119}$$

avec $\boldsymbol{x}_s$ la position du centre de la facette s. De même que pour les reconstructions (2.86-2.87), cette reconstruction à la paroi peut parfois introduire des oscillations non désirées. Il est donc également nécessaire d'introduire un limiteur. Du fait de l'absence d'information sur l'état du fluide de l'autre côté de la paroi, on ne peut pas utiliser le limiteur (2.88-2.89). De Leffe [40] a proposé une limitation basée sur l'hypothèse de faible-compressibilité :

$$\hat{\rho}_f = max\left[(1-Ma^2)\rho_i, min\left[\rho_f, (1+Ma^2)\rho_i\right]\right], \tag{2.120}$$

$$\hat{\rho}_f \hat{\boldsymbol{u}}_f.\boldsymbol{n} = max\left[-Ma\rho_i c_i, min\left[\rho_f \boldsymbol{u}_f.\boldsymbol{n}, Ma\rho_i c_i\right]\right], \tag{2.121}$$

où ρ_f et $\boldsymbol{u}_f$ sont évalués à l'aide de la reconstruction (2.119).

2.5.3 Conditions de surface libre

La simulation d'écoulements à surface libre a été proposée initialement par Monaghan [101], en utilisant tel quel le schéma qu'il avait proposé pour appliquer la méthode SPH à la mécanique des fluides [100]. Cependant, la manière dont sont imposées les conditions aux limites cinématique (1.20) et dynamique (1.22) de surface libre n'est pas précisée. Plus tard, Colagrossi et al. [34] ont proposé une analyse précise sur ces différentes conditions de surface libre au sein de la méthode SPH.

Comme déjà évoqué à la section 1.3.3.1, la condition cinématique de surface libre (1.20) est intrinsèquement vérifiée dès que l'on adopte un formalisme Lagrangien pour décrire les mouvements du fluide. En effet, ce formalisme permet de suivre les éléments de fluide dans leur mouvement. De manière triviale, un élément de fluide situé à la surface libre se déplace à la vitesse de la surface libre, assurant la condition (1.20). Cette affirmation n'est cependant valable qu'au niveau continu. Comme évoqué dans [34], cette condition n'est vérifiée qu'approximativement après discrétisation du domaine de calcul. Comme le montre la Figure 2.12, la surface libre théorique $\boldsymbol{\partial\Omega}_{FS}$ ne coïncide pas exactement avec les particules. On considère en général qu'il y a une distance $\frac{\Delta x}{2}$ entre la position théorique de la surface libre et les particules qui la "délimiteraient". Cette différence explique, entre autres, que la condition cinématique ne soit satisfaite qu'approximativement. L'erreur commise devient cependant négligeable à convergence (i.e. lorsque Δx tend vers 0).

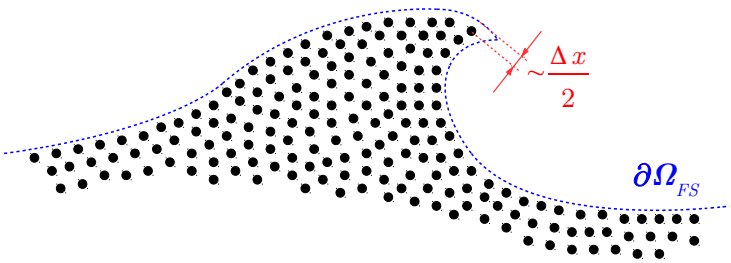

FIGURE 2.12 – Surface libre théorique $\boldsymbol{\partial\Omega}_{FS}$ et particules SPH.

La condition dynamique de surface libre (1.22) doit également être vérifiée. En s'appuyant sur l'expression régularisée (2.2), Colagrossi et al. [34] ont montré que l'erreur sur l'approximation de la pression à la surface libre est donnée par :

$$\langle P \rangle (\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} P(\boldsymbol{x}) + O(R), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\partial\Omega}_{FS}. \tag{2.122}$$

Ainsi la condition dynamique de surface libre (1.22) n'est vérifiée (de manière intrinsèque) que pour une pression nulle à la surface libre $P = P_0 = 0$ (dans ce cas on a bien $\langle P \rangle (\boldsymbol{x}) = 0 = P_0$). Il faut cependant noter que la relation (2.122) a été obtenue au niveau continu. Dès lors que l'on discrétise le domaine de calcul, cette condition n'est vérifiée que de façon approximative.

Ainsi les deux conditions aux limites de surface libre, portant sur la vitesse $\boldsymbol{u}$ et la pression P, peuvent être intrinsèquement vérifiées avec la méthode SPH, ce qui représente un grand avantage par rapport à d'autre méthodes numériques. Mais cela ne précise pas la manière dont ces conditions de surface libre sont imposées au sein des différents schémas. Pour préciser le comportement des conditions de surface libre au sein des schémas SPH, Colagrossi et al. [34] ont effectué une analyse des formulations SPH à l'aide du principe des travaux virtuels. Ils ont notamment montré que ces conditions sont vérifiées dès lors que le principe des travaux virtuels est vérifié au sens faible. Or pour les opérateurs SPH couramment utilisés (i.e. l'association des opérateurs $\langle div\boldsymbol{u} \rangle^-$ et $\langle \boldsymbol{grad} P \rangle^+$) ce principe est bien vérifié au sens faible [34], confirmant que les conditions de surface libre n'ont a priori pas

besoin d'être imposées d'une quelconque manière. Ce résultat est d'autant plus important que Colagrossi et al. [34] ont montré que le gradient de pression $\langle \boldsymbol{grad} P \rangle^+$ n'est a priori pas consistant à la surface libre (en revanche le fait que la divergence de la vitesse soit nulle (1.24) à la surface libre assure la consistance de l'opérateur $\langle div \boldsymbol{u} \rangle^-$ [34]). Ce résultat a cependant été établi à l'aide des opérateurs SPH continus, et n'est donc vérifié que de manière approximative dès lors que l'on discrétise le domaine de calcul.

2.5.3.1 Détection de la surface libre

Bien que les conditions de surface libre soient intrinsèquement vérifiées, il est parfois utile de détecter les particules la délimitant (par exemple pour des raisons de visualisation ou pour effectuer certains traitements numériques comme le désordre particulaire ; cf. chapitre 3). Marrone et al. [94] ont proposé un algorithme simple et rapide permettant de déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des particules appartenant à la surface libre. La première idée consiste à utiliser les valeurs propres de l'inverse $\mathbb{L}_i^{-1}$ de la matrice de renormalisation (2.47). En particulier Doring [47] a montré que la plus petite valeur propre, notée λ_i, de la matrice $\mathbb{L}_i^{-1}$ permettait d'identifier de façon algébrique quelles particules suivent le contour de la surface libre théorique. Comme montré sur la Figure 2.13, la valeur de λ_i diminue lorsque l'on s'approche de la surface libre, et elle devient d'autant plus faible que le nombre de particules voisines diminue. On définit alors trois ensembles distincts $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{I}$ (cf. Figure 2.13), déterminés à l'aide de valeurs seuils λ_{min} et λ_{max} :

$$\begin{cases} i \in \mathcal{E} & \text{si } \lambda_i \leq \lambda_{min} \\ i \in \mathcal{B} & \text{si } \lambda_{min} < \lambda_i \leq \lambda_{max} \\ i \in \mathcal{I} & \text{si } \lambda_i > \lambda_{max} \end{cases} . \tag{2.123}$$

Le choix de ces valeurs seuils λ_{min} et λ_{max} est a priori arbitraire et dépend notamment du ratio $\frac{R}{\Delta x}$ et du noyau utilisé. Cependant, pour les paramètres couramment utilisés lors des simulations, les valeurs $\lambda_{min} = 0.2$ et $\lambda_{max} = 0.75$ sont généralement retenues.

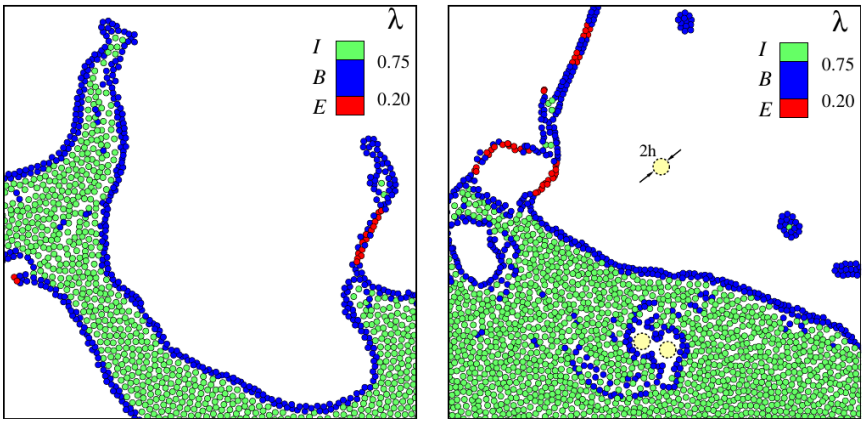

FIGURE 2.13 – Comportement de la plus petite valeur propre λ_i, proche d'une surface libre [94].

Il reste ensuite à trier les particules des différents ensembles (2.123). Les particules appartenant à $\mathcal{I}$ (caractéristiques d'un grand nombre de particules voisines) seront considérées comme n'appartenant pas $\mathcal{F}$, tandis que les particules de l'ensemble $\mathcal{E}$ (caractéristiques d'un faible nombre de particules voisines) seront considérées comme appartenant à $\mathcal{F}$. Cette procédure permet de trier rapidement (et donc sans trop d'effort de calcul) la grande majorité des particules. Il reste cependant à affiner le tri des particules de l'ensemble $\mathcal{B}$. Pour cela, on calcule d'abord une estimation de la normale $\tilde{\boldsymbol{n}}_i$ à la surface libre. Randles et al. [125] ont montré qu'une bonne estimation de la normale à la surface libre, et loin d'une paroi, pouvait être donnée par :

$$\tilde{\boldsymbol{n}}_i = -\frac{\mathbb{L}_i \sum_{j\in\Omega_i} \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j}{\left\| \mathbb{L}_i \sum_{j\in\Omega_i} \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j \right\|}, \tag{2.124}$$

où l'ajout de la matrice de renormalisation $\mathbb{L}_i$ a été proposé par Marrone et al. [94], et permet d'améliorer l'évaluation de $\tilde{\boldsymbol{n}}_i$.

En formalisme BIM (i.e. proche d'une paroi), Chiron [28] a montré que les expressions de la normale et de la matrice de renormalisation (et donc les valeurs de λ_i) pouvaient être calculées de la manière suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{n}}_i = -\frac{\mathbb{L}_i^{BIM} \left(\sum_{j\in\Omega_i} \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + \sum_{s\in\partial\Omega_i} W_{is} \boldsymbol{n}_s S_s \right)}{\left\| \mathbb{L}_i^{BIM} \left(\sum_{j\in\Omega_i} \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + \sum_{s\in\partial\Omega_i} W_{is} \boldsymbol{n}_s S_s \right) \right\|}, \tag{2.125}$$

$$\mathbb{L}_i^{BIM} = \left(\frac{1}{\gamma_i} \sum_{j\in\Omega_i} (\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i) \otimes \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + \frac{1}{\gamma_i} \sum_{s\in\partial\Omega_i} (\boldsymbol{x}_s - \boldsymbol{x}_i) \otimes \boldsymbol{n}_s W_{is} S_s \right)^{-1}. \tag{2.126}$$

Cette estimation de la normale permet de définir une zone cônique (cf. Figure 2.14) dans laquelle on cherche la présence ou non d'une particule voisine (typiquement la taille de cette zone à scanner dépend de Δx ; on se réfèrera à [94] pour les caractéristiques de cette zone). Ainsi, si au moins une particule voisine est présente dans cette zone, alors la particule i ne sera pas définie comme appartenant à $\mathcal{F}$. Dans le cas contraire, on considèrera que la particule appartient à $\mathcal{F}$. On montre sur la Figure 2.15 le résultat de cet algorithme de détection de surface libre, avec l'estimation des normales à la surface libre $\tilde{\boldsymbol{n}}_i$.

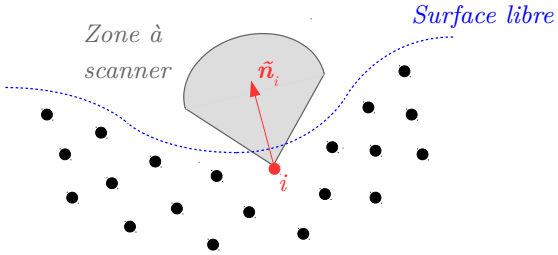

FIGURE 2.14 – Zone à scanner pour lever l'ambigüité d'appartenance d'une particule à la surface libre.

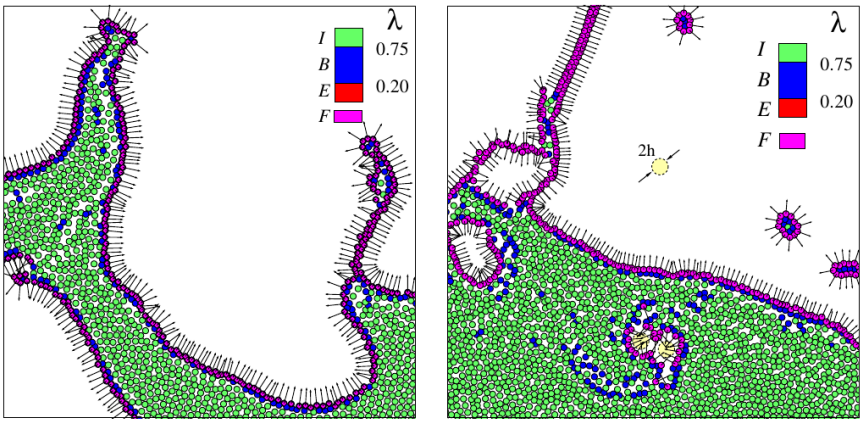

FIGURE 2.15 – Résultats de l'algorithme de détection de surface libre : les particules à la surface libre (appartenant à l'ensemble $\mathcal{F}$) sont tracées en rose avec leurs normales associées $\tilde{\boldsymbol{n}}_i$ [94].

2.6 Raffinement particulaire

L'augmentation de la discrétisation spatiale est souvent nécessaire pour obtenir une précision suffisante des simulations numériques. Cependant, ce raffinement conduit à des coûts de calcul conséquents (liés à la fois à un nombre de particules importants et à une diminution des pas de temps (2.98)), rendant certaines simulations presque impossibles à réaliser en pratique. Or certains écoulements possèdent des zones d'intérêt privilégiées, dans lesquelles une discrétisation spatiale importante est nécessaire. À l'inverse, pour des zones de moindre intérêt une discrétisation spatiale plus grossière peut être utilisée sans nuire à la précision globale de la simulation. Typiquement pour des cas d'impacts, la zone d'impact est une zone d'intérêt tandis que l'écoulement loin de la structure impactante présente généralement un intérêt réduit. Pour ce type d'écoulement, il est donc pertinent de n'augmenter la discrétisation spatiale que dans ces zones d'intérêt. En théorie, cela permet donc à la fois de gagner en précision tout en réduisant le coût du calcul. Pour la méthode SPH, cela se traduit par des zones dans lesquelles la taille des particules sera plus petite. Dans la littérature SPH, il existe principalement deux manières de définir ces zones plus raffinées. Ces deux techniques sont présentées ici de manière succincte.

2.6.1 h-variable

La première solution envisagée est de faire varier spatialement et de manière régulière la taille (et donc la longeur de lissage h) des particules entre les zones grossières et les zones plus raffinées [113] [112] (cf. Figure 2.16 pour un exemple d'application de cette technique). Ce raffinement particulaire est fait à l'initialisation du calcul et permet un gain appréciable en temps de calcul, pour une précision donnée. Cette méthode souffre cependant de plusieurs défauts. Premièrement, la variation de h entre deux particules adjacentes ne doit pas être trop importante afin de limiter les erreurs numériques (Oger et al. [113] [112] suggèrent de ne pas dépasser une variation de 3% à l'initialisation). Deuxièmement, le caractère Lagrangien des schémas SPH, et le "brassage" des particules qui peut en résulter, peut amener des particules de tailles très différentes à interagir, ce qui entraîne là aussi de nombreuses erreurs numériques. Des méthodes proposant une variation temporelle de h ont également été proposées [66] [110], mais sont difficiles à mettre en œuvre et à stabiliser dans le cadre d'applications à la mécanique des fluides. Une autre limitation de la technique de raffinement h-variable est qu'elle n'est effectuée qu'à l'initialisation de la simulation, et ne permet donc pas un raffinement adaptatif et dynamique au cours de la simulation.

2.6.2 Adaptative Particle Refinement (APR)

La deuxième solution envisagée dans la littérature SPH est la méthode appelée Adaptative Particle Refinement (APR). Elle a été initialement proposée par Feldman et al. [48] puis améliorée par Reyes López et al. [131]. Elle est basée sur la définition de zones géométriques, appelées boîtes de raffinement, au sein desquelles toutes les particules ont la même taille (cet aspect contraste notamment avec la méthode h-variable pour laquelle des particules de tailles très différentes peuvent interagir entre elles). On note que plusieurs boîtes APR peuvent être intriquées les unes dans les autres. Lorsqu'une particule entre dans une boîte de raffinement de discrétisation plus faible (on parle de particules mères), elle est divisée en plusieurs particules de taille plus faible (on parle de particules filles). Dans le cadre de cette thèse, la taille des particules est divisée par 2 à chaque passage de boîte APR (bien que d'autres situations soient théoriquement possibles). Les différentes variables de ces nouvelles particules sont alors déterminées par interpolation [48] [131]. Le point difficile de cette méthode est le déraffinement, autrement dit la manière dont est gérée une particule sortant d'une boîte de raffinement vers une zone de discrétisation plus grossière. La première proposition d'une méthode de déraffinement a été réalisée par Vacondio et al. [149] et est basée sur la coalescence de particules fines en particules plus grossières. Dans le cadre de cette thèse, c'est plutôt la méthode développée par Barcarolo et al. [11] qui est retenue. Dans cette méthode, les particules mères ne sont pas supprimées mais servent de support pour le déraffinement particulaire (la trajectoire de ces particules mères est déterminée de manière purement passive à l'aide du champ de vitesse des particules filles). Finalement, la méthode utilisée dans cette thèse est celle détaillée par Chiron et al. [30] [28], dans laquelle de nombreuses améliorations ont été apportées en se basant sur les principes de l'AMR (Adaptive Mesh Refinement) employé pour les méthodes maillées. Ces améliorations permettent notamment la prise en compte d'un désordre particulaire et de disposer de zones où le nombre de particules voisines reste globalement constant [30] [28]. On montre sur la Figure 2.16 une comparaison de la méthode APR avec la technique h-variable.

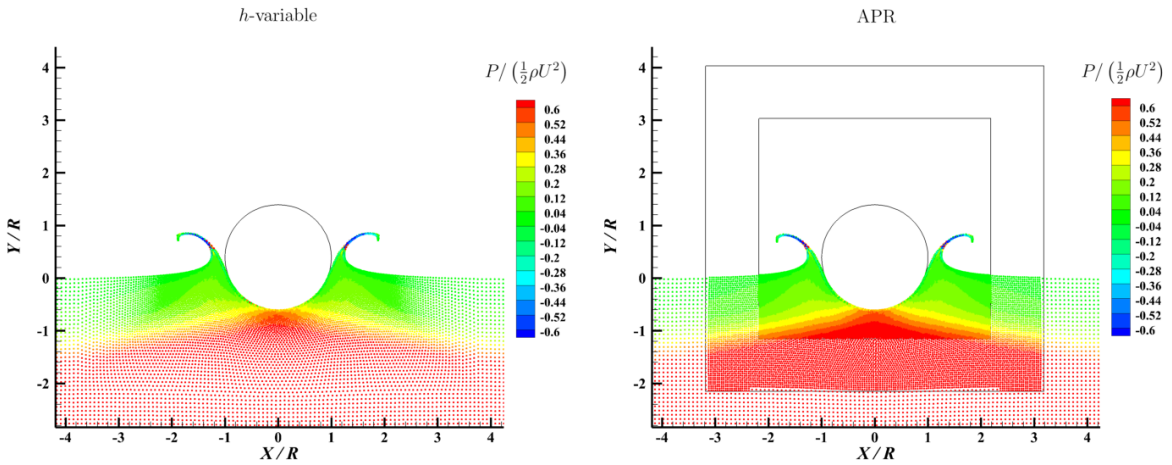

FIGURE 2.16 – Comparaison des différentes techniques de raffinement particulaire en SPH, pour le cas de l'impact d'un cylindre.

Chapitre 3

Désordre particulaire

Le caractère sans maillage et Lagrangien de la méthode SPH présente de nombreux avantages déjà évoqués précédemment. Cependant, l'un des principaux désavantages de cette méthode provient justement de son caractère Lagrangien, qui tend à organiser les particules le long des trajectoires de l'écoulement (cf. Figure 3.1), et à créer ainsi des structures anisotropes. Certaines directions peuvent donc présenter un nombre trop faible de particules (et donc de points d'interpolation), conduisant à une mauvaise évaluation des différents opérateurs SPH dans ces directions. Cet effet peut être comparé, dans le cadre des méthodes maillées, aux cas où un maillage mal construit donnera des résultats de calcul peu précis. On préférera disposer d'un maillage le plus régulier possible. Mais contrairement aux méthodes maillées on ne contrôle pas directement la disposition des points de calcul avec la méthode SPH.

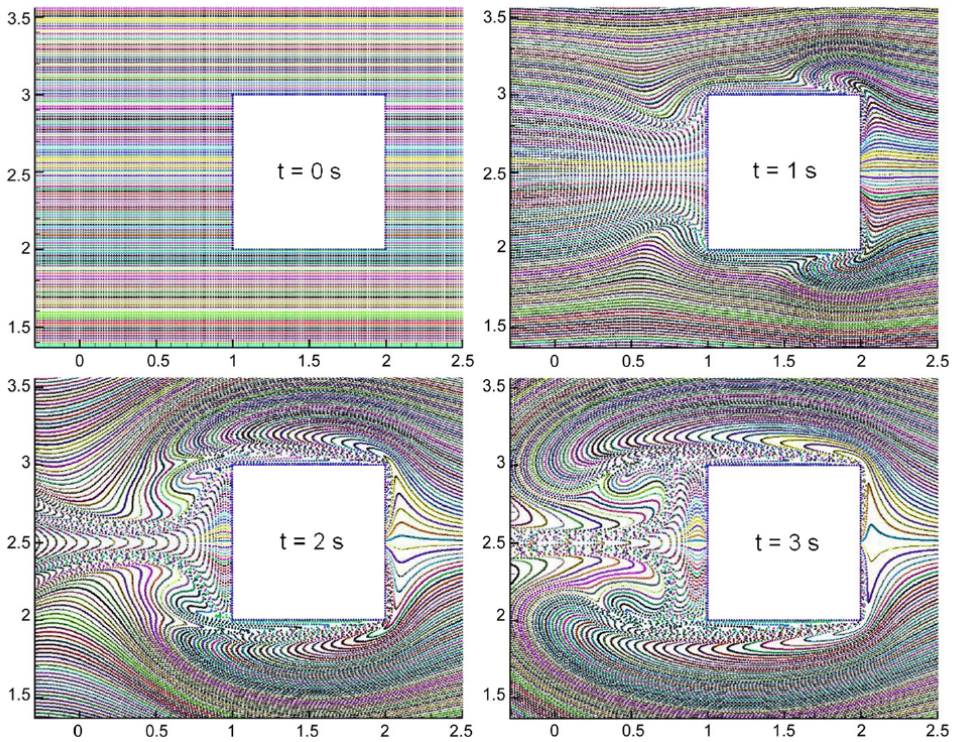

FIGURE 3.1 – Évolution Lagrangienne des particules le long des lignes de trajectoires pour le cas d'un écoulement autour d'un obstacle carré [35].

Plusieurs solutions ont été envisagées afin de contourner ce problème et le manque de

précision qu'il engendre. Une première approche peut simplement consister à augmenter la précision des opérateurs SPH, à l'aide des corrections présentées à la section 2.1.5 par exemple, et ceci quelle que soit la répartition des particules. Une autre possibilité est d'utiliser des noyaux à support elliptique afin de suivre les anisotropies de l'écoulement au cours du temps et permettre ainsi de maintenir un nombre de points d'interpolation globalement identique quelle que soit la direction considérée [134] [60]. Enfin, la solution désormais majoritairement adoptée par la communauté SPH est la technique de désordre particulaire, dénommée "shifting" en anglais. Elle consiste à "briser" les structures Lagrangiennes de manière artificielle, afin de retrouver une répartition particulaire la plus régulière possible (cf. [124] par exemple pour une étude de l'influence du désordre particulaire sur la précision des opérateurs SPH).

Ce chapitre a pour but, dans un premier temps, de présenter les différentes méthodes de shifting utilisées dans la littérature. On montrera notamment comment elles sont intégrées dans les différents schémas SPH présentés à la section 2.2, tout en conservant le caractère Lagrangien de la méthode. On montrera en particulier que certaines propriétés importantes ne sont généralement pas vérifiées par les lois de shifting couramment employées. On propose ici certaines améliorations pouvant être apportées aux différentes lois de shifting. Ce travail d'amélioration a été réalisé de façon conjointe avec Julien Michel, dont le manuscrit de thèse [96] présente également ces travaux.

3.1 État de l'art du shifting particulaire

3.1.1 Principe du shifting particulaire en SPH

L'idée générale de la technique de shifting particulaire est de modifier légèrement l'équation d'évolution de la position des particules (1.3) et ainsi de forcer les particules à ne plus évoluer exactement le long des trajectoires. Cela permet donc de briser artificiellement les structures Lagrangiennes que l'on observe classiquement avec la méthode SPH. En pratique, cela se traduit par l'ajout d'une vitesse supplémentaire $\delta\boldsymbol{u}$, appelée vitesse de shifting, à la vitesse Lagrangienne $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}, \tag{3.1}$$

où $\boldsymbol{u}^*$ est la vitesse modifiée qui sera désormais utilisée dans l'équation d'évolution de la position des particules (1.3). De manière équivalente, l'équation (3.1) peut également se formuler sous forme de déplacement, par simple intégration temporelle :

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}. \tag{3.2}$$

Pour conserver un caractère "quasi"-Lagrangien il faut tout de même s'assurer que la vitesse de shifting $\delta\boldsymbol{u}$ (ou le déplacement $\delta\boldsymbol{r}$) soit suffisamment faible par rapport à $\boldsymbol{u}$ (ou à la taille caractéristique des particules pour le déplacement). On notera que les schémas ALE

peuvent permettre un shifting consistant, en utilisant la vitesse arbitraire $\boldsymbol{u}_0$ du volume de contrôle. Dans ce cas, la vitesse de shifting est alors utilisée dans l'ensemble des équations d'évolution du schéma numérique (et pas seulement dans l'équation d'évolution de la position des particules).

On détaille dans la suite les différentes méthodes utilisées pour déterminer et calculer les termes de shifting et la manière dont ils sont introduits dans les différents schémas.

3.1.2 XSPH (Monaghan)

La première proposition s'apparentant à une loi de shifting a été faite par Monaghan [99] (et nommée XSPH), et s'exprime de la manière suivante :

$$\delta \boldsymbol{u}_i^{MON} = 2\epsilon \sum_{j \in \Omega_i} \rho_j \left(\frac{\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i}{\rho_i + \rho_j} \right) W_{ij} V_j, \tag{3.3}$$

où ϵ est un paramètre permettant de moduler l'intensité de la perturbation de vitesse $\delta \boldsymbol{u}_i^{MON}$, et est typiquement pris égal à $\epsilon = 0.5$. La loi (3.3) est basée sur une évaluation SPH de la vitesse relative dans le voisinage Ω_i de la particule i et a été construite afin d'éviter que des particules ne se regroupent et occupent la même position (cf. [99] pour plus de détails). On note que cette loi est invariante par changement de référentiel Galiléen (i.e. par translation rectiligne uniforme) et elle conserve le moment angulaire. Un autre avantage de cette loi est que la convergence vers $\mathbf{0}$ de la relation (3.3) est assurée dès que le champ de vitesse est suffisamment régulier (car somme de termes tendant tous vers $\mathbf{0}$), justifiant ainsi le fait que la perturbation de vitesse reste faible devant la vitesse Lagrangienne (maintenant ainsi le caractère Lagrangien de la méthode SPH à convergence). En effet, pour un champ de vitesse dérivable, on peut vérifier cette propriété à l'aide d'un simple développement de Taylor :

$$\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i = \mathbb{G}rad\boldsymbol{u}_{ij} \left(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i \right) + ... = O(\Delta x) \underset{\frac{R}{\Delta x} = cst}{=} O(R), \tag{3.4}$$

où $\mathbb{G}rad\boldsymbol{u}_{ij}$ désigne le gradient du champ de vitesse au niveau de l'interface $\boldsymbol{x}_{ij}$.

Cependant, bien que cette loi permette de briser les structures Lagrangiennes, elle n'assure pas, a priori, une répartition régulière des particules.

3.1.3 Loi de shifting basée sur la loi de diffusion de Fick

D'un point de vue purement numérique, on souhaiterait en effet disposer d'une loi de shifting assurant une répartition des particules la plus uniforme possible. Un moyen relativement simple d'y parvenir est d'assurer un déplacement des particules situées dans les zones les plus denses en particules vers les zones les moins denses. Cette idée de construire un vecteur de shifting pointant vers les zones les moins denses a été développée initialement par Xu et al. [163] et Nestor et al. [111]. Un autre moyen de déplacer les particules depuis

les zones les plus concentrées vers les zones les moins denses est de s'appuyer sur les lois de diffusion de la matière, et en particulier de la loi de diffusion de Fick comme proposé par Lind et al. [84]. De manière générale, cette loi de diffusion exprime la relation entre le flux $\boldsymbol{j}$ d'une quantité physique et le gradient de cette quantité $\boldsymbol{\nabla} C$ (où C représente la densité en particules dans le cadre du désordre particulaire). Pour un milieu isotrope, la loi de Fick s'exprime à l'aide d'une simple relation linéaire :

$$\boldsymbol{j} = -D\boldsymbol{\nabla} C, \tag{3.5}$$

où D est le coefficient (positif) de diffusion (dans le cas d'un milieu anisotrope ce coefficient est remplacé par une matrice $\mathbb{D}$ symétrique et définie positive). Le signe moins dans l'expression (3.5) indique simplement que le flux s'effectue toujours des zones les plus denses vers les moins denses.

Lind et al. [84] ont proposé une manière simple d'estimer la densité C_i de particules à l'aide de l'expression suivante :

$$C_i = \sum_{j\in\Omega_i} W_{ij} V_j, \tag{3.6}$$

où C_i tend vers 1 lorsque la répartition des particules est suffisamment dense et uniforme, et prend des valeurs plus faibles lorsque la répartition des particules est moins dense et moins régulière (typiquement dans les zones présentant des structures Lagrangiennes). Le gradient $\boldsymbol{\nabla} C$ s'obtient alors simplement :

$$\boldsymbol{\nabla} C_i = \sum_{j\in\Omega_i} \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j = \langle \boldsymbol{grad} 1 \rangle_i \,, \tag{3.7}$$

ou alors en formalisme BIM [28] :

$$\boldsymbol{\nabla} C_i^{BIM} = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j\in\Omega_i} \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + \frac{1}{\gamma_i} \sum_{s\in\partial\Omega_i} W_{is} \boldsymbol{n}_s S_s, \tag{3.8}$$

De manière purement géométrique, l'opposé de ce gradient est un vecteur pointant vers la zone la moins dense en particules. Son intensité est quant à elle déterminée par l'importance relative de la densité en particules. Cette loi de shifting repose donc sur des considérations géométriques et physiques (contrairement à la loi de Monaghan (3.3)) et permet donc, en théorie, une répartition plus homogène des particules. Il reste alors à déterminer le coefficient de diffusion D. D'un point de vue dimensionnel, $\boldsymbol{\nabla} C_i$ est homogène à l'inverse d'une longueur. Afin de disposer d'une loi de shifting en vitesse, il suffit donc de choisir une longueur caractéristique L_i et une vitesse caractéristique U_i. De manière générale, une loi de shifting basée sur la loi de Fick peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\delta \boldsymbol{u}_i^{Fick} = -aU_iL_i\boldsymbol{\nabla}C_i. \tag{3.9}$$

avec a un coefficient permettant éventuellement de régler l'intensité du shifting. On notera qu'initialement Lind et al. [84] ont proposé une loi de shifting exprimée en déplacement, et non en vitesse, mais que les deux formulations sont équivalentes par simple intégration/dérivation. Afin de faciliter la comparaison entre les différentes lois de shifting, on utilisera uniquement la description en vitesse par la suite.

3.1.3.1 Shifting de Lind et al.

Dans le cas de la loi de shifting proposée dans [84], le choix des paramètres est le suivant : $a = 0.5$, $L_i = h$ et $U_i = \frac{h}{\Delta t}$ (avec Δt désignant le pas de temps). De plus, afin d'éviter une instabilité numérique nommée "tensile instability", Lind et al. [84] proposent d'utiliser une version modifiée du gradient (3.7), initialement proposée par Monaghan [102] (voir [102] [84] pour plus de détails sur l'utilité et les propriétés de cette correction) :

$$\widehat{\boldsymbol{\nabla}}C_i = \sum_{j\in\Omega_i}\left[1 + b\left(\frac{W_{ij}}{W(\Delta x)}\right)^n\right]\boldsymbol{\nabla}W_{ij}V_j, \tag{3.10}$$

où b et n sont des coefficients pris ici égaux à $b = 0.2$ et $n = 4$. $\Delta x = V_i^{1/\eta}$ est la distance inter-particulaire. Bien que cela améliore la robustesse de la méthode, l'expression (3.10) peut prendre des valeurs relativement élevées, notamment dans les zones où la concentration en particules varie fortement ou bien pour des répartitions de particules très désordonnées. Afin de vérifier que la vitesse de shifting reste petite devant la vitesse Lagrangienne, Lind et al. [84] proposent alors de limiter le déplacement d'une particule dû au shifting à une certaine portion de la longueur h (choisie ici à 20% de h). Finalement la loi de shifting de Lind et al. se résume de la manière suivante :

$$\delta \boldsymbol{u}_i^{LEA} = \begin{cases} -0.5h\dfrac{h}{\Delta t}\widehat{\boldsymbol{\nabla}}C_i & \text{si } \left\|0.5h\dfrac{h}{\Delta t}\widehat{\boldsymbol{\nabla}}C_i\right\| < 0.2\dfrac{h}{\Delta t} \\ -0.2\dfrac{h}{\Delta t}\dfrac{\widehat{\boldsymbol{\nabla}}C_i}{||\widehat{\boldsymbol{\nabla}}C_i||} & \text{sinon} \end{cases}. \tag{3.11}$$

Le déplacement des particules pour briser les structures Lagrangiennes peut poser certains problèmes de consistance. Il faut en effet interpoler les valeurs des différents champs (pression, vitesse, etc...) au niveau des nouvelles positions des particules. En première approximation (à l'ordre 1), Lind et al. [84] proposent de modifier la valeur du champ au niveau de la nouvelle position de la particule de la manière suivante :

$$\phi_i^* \simeq \phi_i + \boldsymbol{\nabla}\phi_i.\delta\boldsymbol{r}_i, \tag{3.12}$$

où ϕ_i et ϕ_i^* désignent respectivement la valeur du champ avant et après le shifting, et où le gradient $\boldsymbol{\nabla}\phi_i$ peut simplement être évalué à l'aide d'un opérateur gradient SPH tel que (2.31). Cette interpolation est importante, notamment dès que le déplacement de shifting devient non négligeable. En revanche, dès lors que le déplacement lié au shifting est suffisamment faible, cette interpolation n'est pas forcément nécessaire.

Initialement, la loi de shifting (3.11) a été proposée dans le cadre d'un schéma SPH incompressible [84], mais elle reste en théorie valable pour tout autre schéma SPH (pour les schémas ALE toutefois, l'étape d'interpolation (3.12) est absente et prise directement en compte au sein des schémas).

3.1.3.2 Shifting de Oger et al.

Tout en conservant l'idée d'une loi de shifting basée sur la loi de Fick, Oger et al. [115] ont proposé certaines modifications de la loi (3.11). Tout d'abord le choix des paramètres L_i et U_i est différent. La longueur caractéristique est ici choisie comme étant le rayon du support du noyau d'une particule (i.e. $L_i = R$). La vitesse caractéristique est cette fois-ci déterminée en utilisant une caractéristique physique de l'écoulement : $U_i = Ma\ c_0$ (selon les cas ce nombre de Mach peut être le nombre de Mach local $Ma = Ma_i = \frac{||\boldsymbol{u}_i||}{c_0}$ ou bien le nombre de Mach global de l'écoulement $Ma = \frac{U_{max}}{c_0} \leq 0.1$). Le calcul du gradient de la concentration se fait à l'aide de l'expression non-corrigée (3.7), et peut éventuellement se faire avec un noyau plus petit (afin d'accentuer le désordre particulaire). Enfin, il est également nécessaire de limiter l'intensité du vecteur de shifting afin de conserver un caractère "quasi"-Lagrangien. Oger et al. [115] proposent de limiter la vitesse de shifting à une certaine proportion de la vitesse Lagrangienne (typiquement de l'ordre de 25%). Ainsi la loi de shifting de Oger et al. [115] se résume de la manière suivante :

$$\delta\boldsymbol{u}_i^{OEA} = \begin{cases} -Ma\ c_0 R\boldsymbol{\nabla}C_i & \text{si } ||Ma\ c_0 R\boldsymbol{\nabla}C_i|| < 0.25||\boldsymbol{u}_i|| \\ -0.25||\boldsymbol{u}_i||\dfrac{\boldsymbol{\nabla}C_i}{||\boldsymbol{\nabla}C_i||} & \text{sinon} \end{cases} . \tag{3.13}$$

Bien qu'elle soit a priori valable pour l'ensemble des schémas SPH, la loi (3.13) proposée par Oger et al. [115] a d'abord été développée en combinaison avec le schéma ALE de Vila (2.72-2.74). Le formalisme ALE permet d'imposer une vitesse de shifting de manière plus consistante, par l'intermédiaire de la vitesse arbitraire $\boldsymbol{u}_0$ [115]. Dans ce cas, la vitesse $\boldsymbol{u}_0$ est simplement évaluée à l'aide de la relation (3.1) et permet donc de prendre en compte la vitesse de shifting dans l'ensemble des équations d'évolution du schéma (2.72-2.74). L'avantage principal repose sur l'absence d'une étape d'interpolation des champs (3.12), puisque l'évolution des champs est directement prise en compte dans la vitesse arbitraire $\boldsymbol{u}_0$ au sein des différentes équations du schéma ALE.

3.1.3.3 Shifting de Sun et al.

Jusqu'à récemment, le formalisme ALE (et donc tous ses avantages liés au caractère plus "naturel" d'y imposer une loi de shifting) n'était utilisé en SPH que dans le cadre d'une

stabilisation à l'aide de problèmes de Riemann [152] [115]. Sun et al. [139] ont proposé d'adapter ce formalisme dans le cadre de l'utilisation d'une stabilisation de type δ-SPH, permettant ainsi de conserver les nombreux avantages du formalisme ALE (vitesse de shifting a priori arbitraire, absence d'une phase d'interpolation sur les nouvelles positions, etc...). Le formalisme utilisé, qualifié de "quasi-Lagrangien", n'est pas rigoureusement un formalisme ALE mais le schéma obtenu reste tout de même très proche du schéma (2.72-2.74) (cf. [139] pour plus de détails).

Dans ce cadre, Sun et al. [139] ont par ailleurs proposé quelques modifications de la loi de shifting (3.13). Outre le fait que le gradient corrigé (3.10) soit préféré ici, la principale différence de la loi de shifting de Sun et al. se situe au niveau de la limitation de la vitesse de shifting à l'aide du maximum U_{max} de la vitesse Lagrangienne de l'écoulement. Cette légère différence au niveau de la limitation a tout de même une importance non négligeable. L'un des principaux défauts de la loi (3.13) est que la vitesse de shifting est parfois trop faible, notamment dans les zones de faible vitesse (ceci s'explique par la limitation par la vitesse Lagrangienne $||\boldsymbol{u}_i||$), ce qui ne force pas les particules à se réorganiser en structures régulières dans ces zones. Le fait de limiter la vitesse de shifting à l'aide de U_{max} supprime en théorie ce défaut. Finalement, la loi de shifting de Sun et al. [139] se résume de la manière suivante :

$$\delta \boldsymbol{u}_i^{SEA} = \begin{cases} -Ma\ c_0(2h)\widehat{\boldsymbol{\nabla}} C_i & \text{si } ||Ma\ c_0(2h)\widehat{\boldsymbol{\nabla}} C_i|| < 0.5U_{max} \\ -0.5U_{max}\dfrac{\widehat{\boldsymbol{\nabla}} C_i}{||\widehat{\boldsymbol{\nabla}} C_i||} & \text{sinon} \end{cases} . \tag{3.14}$$

3.1.4 Prise en compte de la surface libre

La prise en compte de la surface libre nécessite une attention particulière dans la mise en place du shifting particulaire. La principale difficulté est de respecter la condition cinématique de surface libre (1.21), qui implique qu'un élément de fluide situé à la surface libre doit se déplacer à la vitesse de la surface libre. En formalisme Lagrangien, cette condition est vérifiée de manière intrinsèque (cf. section 2.5.3), mais ce n'est a priori plus le cas dès lors que l'on introduit une vitesse de shifting $\delta\boldsymbol{u}$. En particulier, pour les lois de shifting basées sur la loi de Fick, la région proche de la surface libre peut être vue comme une zone de faible densité en particules. De plus, le noyau étant tronqué, l'évaluation de la concentration (3.6) est relativement éloignée de 1. Ainsi, pour ces lois de shifting, le vecteur de shifting $\delta\boldsymbol{u}$ aura tendance à pointer vers l'extérieur du domaine de fluide, brisant ainsi la condition de surface libre (1.21).

Une manière simple de retrouver la condition (1.21) est d'effectuer le shifting, proche de la surface libre, uniquement dans la direction tangentielle à la surface libre (une autre manière triviale de respecter la condition (1.21) est simplement de ne pas faire de shifting dans la région proche de la surface libre [115]). Pour cela, il est nécessaire de détecter correctement les particules situées à la surface libre et de disposer d'une évaluation précise de la normale à la surface libre. L'algorithme de Marrone et al. [94] (cf. section 2.5.3.1) est souvent utilisé pour la détection de la surface libre. On peut alors en déduire simplement l'ensemble $\mathcal{V}$ des particules en interaction avec la surface libre (i.e. les particules situées au plus à une distance R de la surface libre ; cf. Figure 3.2). De même, l'évaluation de la normale à la surface libre $\tilde{\boldsymbol{n}}$

à l'aide de l'expression (2.124) est généralement adoptée. On notera que Sun et al. [140] ont récemment proposé une évaluation plus précise de la normale à la surface libre (notamment dans les zones où le nombre de particules voisines est relativement faible) reposant sur les valeurs propres λ de la matrice de renormalisation, définies à la section 2.5.3.1.

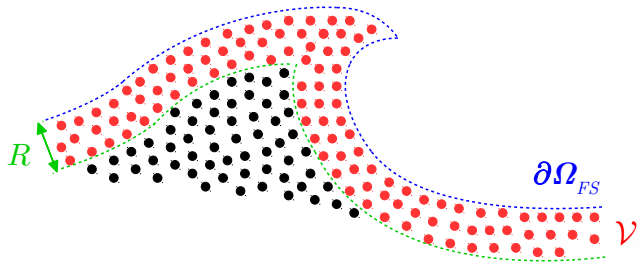

FIGURE 3.2 – Définition de l'ensemble $\mathcal{V}$ des particules en interaction avec la surface libre.

Finalement, la correction $\delta\boldsymbol{u}_i^*$ du vecteur de shifting proche de la surface libre, peut se résumer par une simple projection :

$$\delta\boldsymbol{u}_i^* = \begin{cases} \delta\boldsymbol{u}_i - (\delta\boldsymbol{u}_i.\tilde{\boldsymbol{n}}_i)\,\tilde{\boldsymbol{n}}_i & \text{si } i \in \mathcal{V} \\ \delta\boldsymbol{u}_i & \text{si } i \notin \mathcal{V} \end{cases}. \tag{3.15}$$

Cependant, lors d'écoulements violents, la surface libre est caractérisée par l'apparition de jets fluides et/ou de groupes de particules isolées. Dans ces zones, le nombre de particules voisines peut se révéler relativement faible, induisant une évaluation erronée de la normale $\tilde{\boldsymbol{n}}$. Pour de telles zones il est nécessaire d'annuler le shifting à la surface libre, comme proposé par Sun et al. [140] et Khayyer et al. [73]. Le critère proposé par Sun et al. [140] pour détecter les zones où le nombre de particules voisines est faible repose sur la valeur propre λ de la matrice de renormalisation et se résume de la manière suivante :

$$\delta\boldsymbol{u}_i^* = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \text{si } i \in \mathcal{V} \text{ et } \lambda_i < 0.4 \\ \delta\boldsymbol{u}_i - (\delta\boldsymbol{u}_i.\tilde{\boldsymbol{n}}_i)\,\tilde{\boldsymbol{n}}_i & \text{si } i \in \mathcal{V} \text{ et } \lambda_i \geq 0.4 \\ \delta\boldsymbol{u}_i & \text{si } i \notin \mathcal{V} \end{cases}, \tag{3.16}$$

où la valeur de 0.4 est un seuil fixé de manière empirique. Bien que très similaire, le critère proposé par Khayyer et al. [73] pour détecter les zones avec un faible nombre de particules voisines est légèrement différent (cf. [73] pour plus de détails).

Un autre défaut de la projection (3.15) est qu'elle fournit une variation brusque du vecteur de shifting au passage entre la région $\mathcal{V}$ et le reste du domaine fluide (par exemple pour une surface libre plane, tous les vecteurs de shifting dans la zone $\mathcal{V}$ auront la même direction). Pour éviter cette variation brusque du vecteur de shifting (i.e. cette non-régularité), Sun et al. [139] proposent la modification suivante de la projection proche de la surface libre :

$$\delta \boldsymbol{u}_i^* = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \text{si } i \in \mathcal{V} \text{ et } \lambda_i < 0.55 \\ \kappa_i \left[\delta \boldsymbol{u}_i - (\delta \boldsymbol{u}_i . \tilde{\boldsymbol{n}}_i)\, \tilde{\boldsymbol{n}}_i\right] & \text{si } i \in \mathcal{V} \text{ et } \lambda_i \geq 0.55 \text{ et } \delta \boldsymbol{u}_i . \tilde{\boldsymbol{n}}_i \geq 0 \\ \delta \boldsymbol{u}_i & \text{si } i \in \mathcal{V} \text{ et } \lambda_i \geq 0.55 \text{ et } \delta \boldsymbol{u}_i . \tilde{\boldsymbol{n}}_i < 0 \\ \delta \boldsymbol{u}_i & \text{si } i \notin \mathcal{V} \end{cases}, \tag{3.17}$$

où encore une fois le seuil de 0.55 pour la valeur de λ est obtenu empiriquement et dépend notamment du choix du noyau et du ratio $\frac{R}{\Delta x}$. Le critère sur le produit scalaire $\delta \boldsymbol{u}_i . \tilde{\boldsymbol{n}}_i$ permet d'autoriser le shifting dans la direction normale à la surface libre uniquement si le vecteur de shifting non corrigé $\delta \boldsymbol{u}_i$ a tendance à pointer vers l'intérieur du domaine fluide (et non vers la surface libre). La Figure 3.3 montre l'influence de cette correction sur le vecteur de shifting, et en particulier que cette correction permet une variation moins brusque au niveau de la frontière de l'ensemble $\mathcal{V}$. Le coefficient κ_i apporte une sécurité supplémentaire, en empêchant le shifting dans les zones où une forte variation de la direction de la normale $\tilde{\boldsymbol{n}}$ est observée (autrement dit dans les zones de fortes courbures de la surface libre). Il s'exprime de la manière suivante :

$$\kappa_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \max\limits_{j \in \Omega_i} \left[arccos\left(\tilde{\boldsymbol{n}}_i . \tilde{\boldsymbol{n}}_j\right)\right] \geq 15^\circ \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}. \tag{3.18}$$

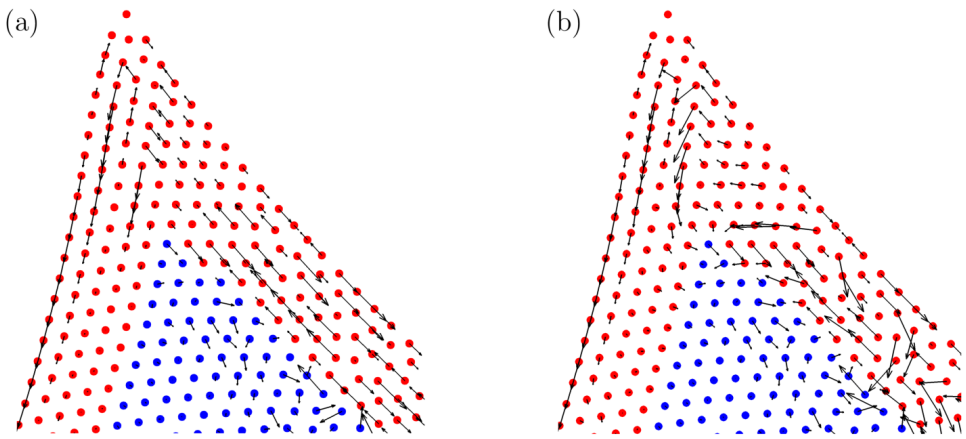

FIGURE 3.3 – Influence des corrections du vecteur de shifting pour les particules de l'ensemble $\mathcal{V}$ (tracées en rouge) : (a) correction (3.16) ; (b) correction (3.17).

3.2 Amélioration et proposition d'une nouvelle loi de shifting

Les travaux présentés dans cette section sont l'œuvre d'un travail commun effectué avec un autre doctorant, Julien Michel, et dont les résultats ont été présentés dans [96]. On rappelle donc ici uniquement les développements théoriques qui ont permis la proposition d'une nouvelle loi de shifting. En particulier, le lecteur est invité à se référer à [96] pour une mise en évidence détaillée des améliorations évoquées sur des cas tests précis.

3.2.1 Caractéristiques attendues pour une loi de shifting

De manière générale, les propriétés que doit respecter une loi de shifting ne sont pas détaillées dans la littérature SPH. Afin de pouvoir proposer une nouvelle loi de shifting, il paraît donc important de lister l'ensemble des propriétés que doit satisfaire, selon notre point de vue, une loi de shifting. Ces propriétés sont les suivantes et sont détaillées par la suite :

(I)	Répartition uniforme des particules
(II)	Convergence et consistance avec le formalisme Lagrangien
(III)	Invariance par changement de référentiel Galiléen
(IV)	Caractère local de la loi de shifting

3.2.1.1 Répartition uniforme des particules

La première propriété que doit vérifier une loi de shifting est d'assurer une répartition la plus uniforme possible des particules. Cette propriété, bien qu'évidente a priori, est pourtant plus générale que la condition de briser les structures Lagrangienne au sein de l'écoulement. À titre d'exemple, comme déjà évoqué plus haut, la loi de Monaghan (3.3) bien qu'elle permette de briser les structures Lagrangiennes, n'assure pas une répartition uniforme des particules. Idéalement, on souhaite donc disposer d'un vecteur de shifting basé sur un critère géométrique et pointant vers l'endroit le moins dense en particule. Cette propriété est vérifiée par l'ensemble des lois de shifting basées sur la loi de Fick présentées en section 3.1.3. On privilégiera donc, par la suite, l'étude des lois de shifting basées sur la loi de Fick.

3.2.1.2 Convergence et consistance avec le formalisme Lagrangien

Afin de ne pas perdre les propriétés avantageuses offertes par le caractère Lagrangien de la méthode SPH, il est nécessaire que la vitesse de shifting $\delta\boldsymbol{u}$ reste suffisamment faible devant la vitesse Lagrangienne $\boldsymbol{u}$ de l'écoulement. En particulier, comme évoqué par Oger at al. [115], il est important que la vitesse de shifting $\delta\boldsymbol{u}$ tende vers $\mathbf{0}$ à convergence afin d'être consistant avec une formulation purement Lagrangienne de l'écoulement. Or la méthode SPH se caractérise par un double critère de convergence : la taille caractéristique Δx des particules doit tendre vers 0 tout en ayant un nombre de particules voisines qui tende vers l'infini (i.e. $\frac{R}{\Delta x} \to \infty$). En pratique, on utilise cependant un ratio $\frac{R}{\Delta x}$ fixe (cette seconde condition étant

impossible à satisfaire en pratique). Finalement, la propriété recherchée peut se résumer de la manière suivante :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \frac{R}{\Delta x} = cst}} \delta \boldsymbol{u}_i = \mathbf{0}. \tag{3.19}$$

On peut tout d'abord noter que la loi de Monaghan (3.3) respecte cette condition (car étant la somme de termes tendant tous vers $\mathbf{0}$ dès lors que le champ de vitesse $\boldsymbol{u}$ est suffisamment régulier). On cherche ensuite à vérifier si la propriété (3.19) est également vérifiée pour les lois basées sur la loi de diffusion de Fick. Pour cela, on cherche à déterminer les propriétés de convergence du gradient de la concentration $\boldsymbol{\nabla} C_i$. Les propriétés de convergence des opérateurs SPH sont relativement difficiles à obtenir, en particulier lorsqu'on considère une répartition désordonnée des particules. Cependant, certains résultats ont pu être établis en 1D par Quinlan et al. [124], fournissant l'erreur de troncature pour l'évaluation du gradient SPH d'une fonction A. Cette erreur de troncature peut s'écrire de la manière suivante [124] :

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \Omega_i} A_j \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j - A_i' = & \frac{A_i}{R} \left[\xi O\left(\left(\frac{\Delta x}{R} \right)^3 \right) + \frac{1}{2} \left(\xi^2 + \frac{1}{12} \right) O\left(\left(\frac{\Delta x}{R} \right)^4 \right) \right] \\
& + A_i' \left[\xi O\left(\left(\frac{\Delta x}{R} \right)^3 \right) + O\left(\left(\frac{\Delta x}{R} \right)^4 \right) \right] \\
& + A_i'' R \left[\xi O\left(\frac{\Delta x}{R} \right) + O\left(\left(\frac{\Delta x}{R} \right)^4 \right) \right] + \ldots \\
& + A_i''' R^2 O(1) + \ldots,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

où ξ est ici une mesure du désordre de la distribution spatiale des particules (cf. [124] pour plus de détails) et la notation $\bullet'$ désigne la dérivation "ordinnaire" (i.e. en dimension 1). Or, dans [4], il est montré que le désordre tend généralement vers une valeur fixe non nulle (certes faible mais de l'ordre de $\xi \sim 10\%$). Ainsi, pour un ratio $\frac{R}{\Delta x}$ fixé et pour la fonction constante $A = 1$, on en déduit que :

$$\boldsymbol{\nabla} C_i = \frac{1}{R} \left[\xi O\left(\left(\frac{\Delta x}{R} \right)^3 \right) + \frac{1}{2} \left(\xi^2 + \frac{1}{12} \right) O\left(\left(\frac{\Delta x}{R} \right)^4 \right) \right] \underset{\frac{R}{\Delta x} = cst}{=} O\left(\frac{1}{R} \right). \tag{3.21}$$

On notera que cette dernière propriété reste également vraie pour le gradient de concentration modifié $\widehat{\boldsymbol{\nabla}} C_i$ (ce résultat est obtenu par simple majoration du terme $1 + b \left(\frac{W_{ij}}{W(\Delta x)} \right)^n$, et de ses dérivées successives). De plus, les différents choix faits pour la longueur caractéristique L_i de la loi de shifting générale (3.9) sont tous proportionnels entre eux. On a donc $L_i = O(R)$, ce qui implique que $L_i \boldsymbol{\nabla} C_i = O(1)$ (toujours pour un ratio $\frac{R}{\Delta x}$ fixé). Ainsi, si la convergence existe, elle ne peut être assurée que par la vitesse caractéristique U_i (ou éventuellement par la limitation de la vitesse de shifting). Or, pour un écoulement donné, tous les choix de

vitesse caractéristique U_i présentés à la section 3.1.3 sont tels que $U_i = O(1)$. Donc, pour les lois présentées en section 3.1.3, la propriété de convergence (3.19) n'est pas assurée a priori.

On peut également se poser la question du respect de la condition de convergence pour la formulation du shifting (3.2) en terme de déplacement (bien que la condition (3.19) sur la vitesse soit la plus importante, car elle permet de tendre vers la solution physique Lagrangienne de l'écoulement). Le passage de la formulation en vitesse à la formulation en déplacement se fait par intégration numérique, autrement dit par une simple multiplication par le pas de temps Δt. Or l'expression (2.98) montre, pour une vitesse du son artificielle c_0 fixée, que le pas de temps est donné par $\Delta t = O(R)$. Ainsi, dans ce cas, la convergence du shifting en terme de déplacement est bien assurée pour les lois de shifting basées sur la loi de Fick :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \frac{R}{\Delta x} = cst}} \delta \boldsymbol{r}_i^{Fick} = \mathbf{0}. \tag{3.22}$$

L'importance de la propriété de convergence (3.19) est cependant à nuancer lorsque l'on utilise un schéma ALE. En effet, pour ce type de schéma, la vitesse de shifting peut être a priori choisie de manière purement arbitraire. Pour des raisons de stabilité du schéma, on souhaite cependant disposer d'un niveau de shifting limité même dans ce cas particulier. De plus, comme montré dans [96], le niveau de shifting dans un schéma ALE influence fortement la variation relative du volume et de la masse des particules. En particulier, plus l'intensité du shifting est faible, plus la variation du volume et de la masse des particules reste faible, ce qui améliore la stabilité du schéma ALE. Ainsi, il est intéressant que la propriété (3.19) soit vérifiée, y compris dans le cas d'un schéma ALE.

3.2.1.3 Invariance par changement de référentiel Galiléen

La méthode SPH est invariante par changement de référentiel Galiléen. On souhaite donc conserver cette propriété importante lorsqu'on utilise du shifting au sein de la méthode SPH. On notera tout d'abord que, par construction, la loi de shifting de Monaghan (3.3) est bien invariante par changement de référentiel Galiléen [99] (car elle est basée sur une évaluation de la vitesse relative dans le voisinage Ω_i).

De même, pour les lois de shifting basées sur la loi de Fick, la quantité $L_i \boldsymbol{\nabla} C_i$ est purement géométrique et est donc invariante par changement de référentiel Galiléen (il en est de même lorsqu'on utilise la correction $L_i \widehat{\boldsymbol{\nabla}} C_i$). Ainsi, pour qu'une loi de shifting basée sur la loi de Fick soit invariante par changement de référentiel Galiléen, il est nécessaire que la vitesse caractéristique U_i la soit également. Pour la loi de Lind et al. (3.11), la vitesse caractéristique est donnée par $U_i^{LEA} = \frac{h}{\Delta t}$. Dans le cadre de la modélisation d'écoulements faiblement compressibles, le pas de temps Δt (2.98) est proportionnel à $\frac{R}{c_i}$, et est donc invariant par changement de référentiel Galiléen (pour un choix de vitesse du son artificielle c_0 donné et en condition faiblement compressible). Cependant, cette loi de shifting a été proposée initialement dans le cadre de la modélisation d'écoulements incompressibles [84], pour lesquels le pas de temps est cette fois-ci proportionnel à $\frac{R}{||\boldsymbol{u}_i||}$. Ainsi, dans le cas d'écoulements incompressibles, la loi de Lind et al. (3.11) n'est pas invariante par changement de référentiel

Galiléen. Les lois de Oger et al. (3.13) et de Sun et al. (3.14) utilisent également des vitesses caractéristiques faisant intervenir respectivement $||\boldsymbol{u}_i||$ et U_{max}, et ne sont donc pas invariantes par changement de référentiel Galiléen.

3.2.1.4 Caractère local de la loi de shifting

La dernière propriété que doit vérifier une loi de shifting concerne son caractère local. Pour souligner l'importance de cette propriété, on peut prendre l'exemple d'un cas de dambreak. Pour ce type d'écoulement, la vitesse maximale est atteinte au niveau du front mouvant de fluide alors que la dynamique dans le reste de l'écoulement est beaucoup plus modérée (ce qui implique un désordre moindre des particules de sorte que le besoin de faire du shifting dans ces zones y est plus limité). Ainsi, pour de tels écoulements, baser l'intensité de la vitesse de shifting sur un critère global (tel que la vitesse maximale U_{max} au sein de l'écoulement) peut mener à une surestimation de l'intensité du shifting dans les zones de faibles dynamiques. Plus généralement, il n'y a aucune raison pour que l'ensemble des zones de l'écoulement soient gouvernées par la même intensité de la loi de shifting.

La loi de shifting de Monaghan (3.3) est basée sur une évaluation locale de la vitesse relative et vérifie donc bien la propriété désirée. Pour les lois de shifting basées sur la loi de Fick, le caractère local ou non dépend du choix de la vitesse caractéristique U_i. Pour la loi de Lind et al. (3.11), la vitesse caractéristique U_i est la même pour toutes les zones de l'écoulement et ne présente donc pas un caractère local. Pour les lois de Oger et al. (3.13) et de Sun et al. (3.14), le caractère local dépend du choix d'un nombre de Mach local ou d'un nombre de Mach global.

3.2.2 Construction d'une nouvelle loi de shifting

A partir des remarques faites à la section 3.2.1, on propose ici la construction d'une nouvelle loi de shifting vérifiant l'ensemble des propriétés désirées. Afin de respecter la condition (I) on utilise une loi de shifting basée sur la loi de Fick et le gradient de la concentration en particules. De plus, afin de prévenir l'instabilité de "tensile instability" on choisit d'utiliser l'expression corrigée (3.10) du gradient de la concentration en particules. Par ailleurs, comme évoqué dans la section 3.2.1, pour une loi de shifting basée sur la loi de Fick, les propriétés (II) à (IV) ne peuvent être imposées que par l'intermédiaire de la vitesse caractéristique U_i. Le choix de la vitesse U_i est donc d'une importance cruciale, et doit vérifier les caractéristiques suivantes : avoir une définition locale (et non globale), être invariante par translation rectiligne uniforme et tendre vers 0 pour un ratio $\frac{R}{\Delta x}$ fixé. La solution retenue ici, et qui permet de vérifier ces caractéristiques, est la suivante :

$$U_i = \max_{j \in \Omega_i} \left| \frac{(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i) \,.\, (\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i)}{||\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i||} \right| . \tag{3.23}$$

Premièrement la définition de la vitesse caractéristique (3.23) possède bien un caractère local, car elle est calculée uniquement sur le voisinage Ω_i de la particule i. De plus, contrairement à la loi de Oger et al. (3.13) basée sur un nombre de Mach local, cette définition de

la vitesse caractéristique permet d'avoir une vitesse de shifting a priori non nulle dans les zones de faible vitesse (i.e. l'intensité du shifting est gouvernée par le gradient de la vitesse plutôt que par l'intensité de la vitesse). Deuxièmement, la différence de vitesse $\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i$ dans l'expression (3.23) assure bien l'invariance par translation rectiligne et uniforme. De plus le produit scalaire $(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i) \,.\, (\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i)$ permet d'assurer une invariance supplémentaire pour une rotation de corps rigide locale. Enfin, l'expression (3.23) converge bien vers 0 lorsque la discrétisation spatiale augmente, pour un champ de vitesse continu. Pour un champ de vitesse dérivable, le développement de Taylor (3.4) permet de vérifier cette propriété. On a donc théoriquement une convergence à l'ordre 1 de la vitesse caractéristique (le vecteur unitaire $\frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{||\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i||}$ ne modifie pas l'ordre de convergence).

Finalement la nouvelle loi de shifting proposée dans ce travail est donnée par :

$$\delta \boldsymbol{u}_i = a \begin{cases} -\beta_i U_i R \widehat{\boldsymbol{\nabla}} C_i & \text{si } \left\| \beta_i R \widehat{\boldsymbol{\nabla}} C_i \right\| < \dfrac{R}{2\Delta x} \\ -U_i \dfrac{R}{2\Delta x} \dfrac{\widehat{\boldsymbol{\nabla}} C_i}{||\widehat{\boldsymbol{\nabla}} C_i||} & \text{sinon} \end{cases}, \tag{3.24}$$

où U_i est la vitesse caractéristique donnée par l'expression (3.23) et a est un coefficient permettant de modifier l'intensité du shifting (ici on fixe $a = 0.5$). Le coefficient $\beta_i = \left(\frac{R}{\Delta x}\right)^3$ permet de contrebalancer le terme de plus faible degré dans le développement (3.21) et ainsi de supprimer la dépendance au ratio $\frac{R}{\Delta x}$ (le comportement de la loi de shifting sera donc théoriquement le même quel que soit le ratio $\frac{R}{\Delta x}$). On remarquera que le coefficient β_i peut prendre des valeurs relativement élevées, mais qui sont contrebalancées par les valeurs relativement limitées de la vitesse caractéristique U_i (du moins dès lors qu'on est en présence d'un champ de vitesse sans fort gradient). Enfin, bien que la quantité $\beta_i R \widehat{\boldsymbol{\nabla}} C_i$ soit théoriquement en $O(1)$, elle peut tout de même prendre des valeurs relativement élevées (notamment en présence de forts gradients de la concentration en particules ou dans des zones de fort désordre particulaire). On applique donc une limitation (déterminée de manière empirique) sur cette quantité afin d'éviter des valeurs excessives.

Une question demeure sur la condition de convergence vers $\mathbf{0}$ de la vitesse de shifting. Le risque est en effet de ne plus faire suffisamment de shifting lorsque Δx tend vers 0, et donc de ne plus assurer la fonction du shifting qui est de briser les structures Lagrangiennes tout en assurant une répartition la plus uniforme possible des particules. On peut tout d'abord remarquer que lorsque la discrétisation spatiale augmente, certes l'intensité du shifting tend vers $\mathbf{0}$, mais le nombre de pas de temps augmente lui aussi. Finalement, un shifting moins intense est appliqué à chaque pas de temps, mais cela est compensé par un nombre de pas de temps plus grand. De plus, le fait de faire suffisamment de shifting malgré la convergence vers $\mathbf{0}$ a été validé numériquement pour la nouvelle loi de shifting (3.24), y compris pour des discrétisations spatiales très fines [96].

On résume finalement l'ensemble des propriétés établies de manière théorique pour les différentes lois de shifting dans la Table 3.1. Pour la nouvelle loi de shifting (3.24), ces résultats théoriques ont également été confirmés et validés numériquement. Afin de ne pas allonger le propos, le lecteur est renvoyé à [96] pour la validation numérique de cette nouvelle loi de shifting. En particulier, il y est montré que l'invariance Galiléenne est bien rétablie

ainsi que la convergence et la consistance avec le formalisme Lagrangien. À titre d'exemple, on compare tout de même l'influence de la nouvelle loi de shifting sur la répartition des particules, pour le cas du tourbillon de Taylor-Green. Les résultats sont donnés sur la Figure 3.4. Ainsi, la nouvelle loi de shifting permet une répartition plus uniforme des particules, et notamment dans les zones de faibles vitesses. Cela permet de mettre en évidence l'intérêt, à la fois, du caractère local d'une loi de shifting et de baser cette loi de shifting sur une vitesse relative.

	Pointe vers les zones faiblement concentrées en particules	$\lim_{\Delta x \to 0} \delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{0}$	$\lim_{\Delta x \to 0} \delta \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}$	Invariance par changement de référentiel Galiléen	Caractère local
Monaghan (3.3)	Non	Oui	Oui	Oui	Oui
Lind et al. (3.11)	Oui	Oui	Oui si $\frac{R}{\Delta x} \to \infty$	Oui si compressible Non si incompressible	Non
Oger et al. (3.13)	Oui	Oui	Oui si $\frac{R}{\Delta x} \to \infty$	Non	Oui si Mach local
Sun et al. (3.14)	Oui	Oui	Oui si $\frac{R}{\Delta x} \to \infty$	Non	Oui si Mach local
Nouvelle loi (3.24)	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui

TABLE 3.1 – Comparaison des propriétés théoriques des lois de shifting.

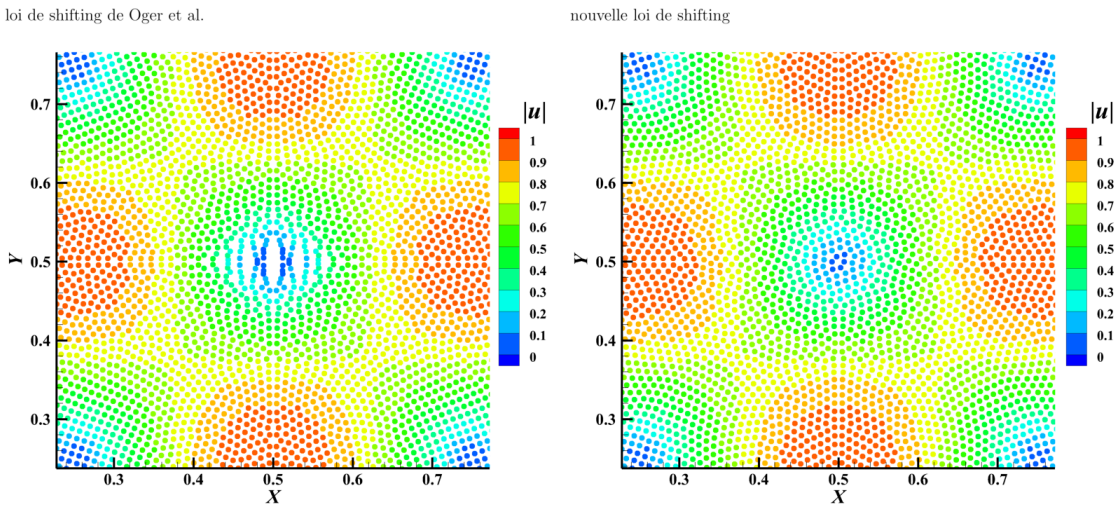

FIGURE 3.4 – Tourbillon de Taylor-Green : influence de la loi de shifting sur la répartition des particules au niveau du centre du tourbillon ; gauche : loi de shifting de Oger et al. (3.13) ; droite : nouvelle loi de shifting (3.24)

3.2.3 Amélioration du shifting à la surface libre

3.2.3.1 Étude théorique à la surface libre en dimension 1

L'étude de l'erreur de troncature (3.20) effectuée par Quinlan et al. [124] pour le gradient SPH d'une fonction A, en 1D, peut être étendue au cas de la présence d'une surface libre. Dans un premier temps, on cherche donc à déterminer l'ordre de convergence d'un opérateur gradient SPH $\langle \boldsymbol{grad} A \rangle_i$ en présence d'une surface libre, pour le cas simplifié en dimension 1. Une manière simple de déterminer cet ordre de convergence est de déterminer l'erreur de troncature de cet opérateur (i.e. la différence entre la valeur prise par cet opérateur gradient SPH et la valeur effective de ce gradient).

Tout d'abord, on se place dans le cas où l'on évalue l'opérateur à la surface libre exactement (ce cas est le plus contraignant car le support est à demi-rempli quelle que soit sa taille). Le cas d'une surface libre en dimension 1 correspond donc à un domaine semi-infini (choisi ici arbitrairement comme $[x_i, +\infty]$, avec la surface libre est localisée en $x = x_i$). De plus, on se place dans le cas où les particules ne sont pas uniformément distribuées (et n'ont donc pas nécessairement le même volume Δx). Pour cela, on considère que les particules j sont localisées en $\bar{x}_j$, qui est a priori différente de la position x_j qu'auraient les particules si elles étaient distribuées uniformément (cf. Figure 3.5 pour la paramétrisation du problème). Les particules j occupent donc un volume Δx_j (a priori $\Delta x_j \neq \Delta x$) situé dans l'intervalle $\left[\bar{x}_j - \frac{\Delta x_j}{2}, \bar{x}_j + \frac{\Delta x_j}{2}\right]$.

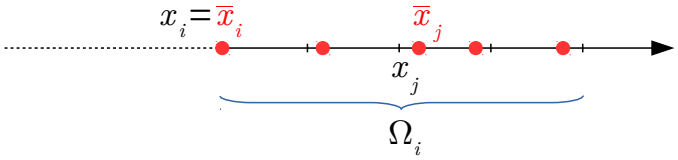

FIGURE 3.5 – Paramétrisation utilisée pour l'étude théorique de la loi de shifting à la surface libre.

La première étape du calcul consiste à décomposer l'expression de l'opérateur gradient SPH au continu sur l'ensemble des intervalles considérés (on notera qu'en dimension 1 le gradient se réduit à une simple dérivée du premier ordre), puis à effectuer un développement limité des termes sous les intégrales (cf. [124] pour une justification détaillée des calculs) :

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_i+R} AW'dx &= \sum_{j\in\Omega_i} \int_{\bar{x}_j-\frac{\Delta x_j}{2}}^{\bar{x}_j+\frac{\Delta x_j}{2}} AW'dx \\ &= \sum_{j\in\Omega_i} \int_{\bar{x}_j-\frac{\Delta x_j}{2}}^{\bar{x}_j+\frac{\Delta x_j}{2}} \left[A_i + (x-x_i)\,A_i' + ...\right]\left[W'j + (x-x_j)\,W_j'' + ...\right] dx.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Afin d'éliminer la dépendance en R de l'expression précédente on propose d'utiliser le changement de variable suivant :

$$\hat{W}_i(s) = RW\left(x - x_i\right), \quad s = \frac{x - x_i}{R}, \quad s_j = \frac{x_j - x_i}{R}, \tag{3.26}$$

ce qui permet d'avoir une variable appartenant à l'intervalle $s \in [0,1]$ et une quantité $\hat{W}$ en $O(1)$ (de même que toutes ses dérivées successives). On peut également définir les valeurs $\Delta s_j = \frac{\Delta x_j}{R}$ et $\bar{s}_j = \frac{\bar{x}_j - x_i}{R}$, correspondant respectivement au volume et à la position adimensionnés de la particule j. Afin de retrouver l'expression de l'opérateur gradient SPH discrétisé, on fait de plus l'hypothèse que $A_i W_j' \simeq A_j W_j'$ (cela peut être obtenu par un simple développement limité dont le reste sera d'un ordre de convergence supérieur aux termes restants dans l'expression (3.25) ; cf. [124] pour plus de détails). Ainsi l'expression (3.25) peut se réécrire :

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_i+R} AW'dx &= \sum_{j\in\Omega_i} A_j W'_j \Delta x_j + \sum_{j\in\Omega_i}\left(A'_i\hat{W}'_j + \frac{1}{R}A_i\hat{W}''_j\right)\int (s-s_j)\,ds \\ &+ \sum_{j\in\Omega_i}\frac{1}{2R}A_i\hat{W}'''_j\int (s-s_j)^2\,ds + \sum_{j\in\Omega_i}A'_i\hat{W}''_j\int s\,(s-s_j)\,ds \\ &+ \sum_{j\in\Omega_i}\frac{R}{2}A''_i\hat{W}'_j\left(\int s^2 ds - s_j^2\int ds\right) + ...,\end{aligned} \tag{3.27}$$

où les intégrales du membre de droite sont évaluées sur l'intervalle $\left[\bar{s}_j - \frac{\Delta s_j}{2}, \bar{s}_j + \frac{\Delta s_j}{2}\right]$. On définit alors la variable $\xi_j = \frac{\bar{x}_j - x_j}{\Delta x_j}$, qui peut s'interpréter comme une mesure locale du désordre particulaire (si $\xi_j = 0$ alors les particules sont situées sur une grille régulière ; à l'inverse plus ξ_j s'éloigne de 0, plus les particules sont désordonnées). Après calcul des différentes intégrales de l'expression (3.27), on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\Omega_i} A_j W'_j \Delta x_j - \int_{x_i}^{x_i+R} AW'dx &= -A'_i\sum_{j\in\Omega_i}\hat{W}'_j\xi_j\Delta s_j^2 - \frac{A_i}{R}\sum_{j\in\Omega_i}\hat{W}''_j\xi_j\Delta s_j^2 \\ &- \frac{A_i}{2R}\sum_{j\in\Omega_i}\hat{W}'''_j\left(\frac{\Delta s_j^2}{12} + \xi_j^2\Delta s_j^2\right)\Delta s_j \\ &- A'_i\sum_{j\in\Omega_i}\hat{W}''_j\left(\frac{\Delta s_j^2}{12} + \bar{s}_j\xi_j\Delta s_j\right)\Delta s_j \\ &- A''_i\frac{R}{2}\sum_{j\in\Omega_i}\hat{W}'_j\left(\frac{\Delta s_j^2}{12} + (\bar{s}_j + s_j)\,\xi_j\Delta s_j\right)\Delta s_j + ...\end{aligned} \tag{3.28}$$

Afin d'estimer les différentes sommes du membre de droite, on remplace les termes ξ_j et Δs_j par leurs valeurs moyennes ξ et $\Delta s = \frac{\Delta x}{R}$, ce qui permet de les "sortir" des sommes (on garde cependant un terme Δs_j dans chaque somme afin de les approximer par des intégrales). Ainsi on a :

$$\sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}'_j \xi_j \Delta s_j^2 \simeq \xi\Delta s \sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}'_j \Delta s_j \simeq \xi\Delta s \int_0^1 \hat{W}' ds \tag{3.29}$$

$$\sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}''_j \xi_j \Delta s_j^2 \simeq \xi\Delta s \sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}''_j \Delta s_j \simeq \xi\Delta s \int_0^1 \hat{W}'' ds \tag{3.30}$$

$$\sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}'''_j \Delta s_j^3 \simeq \Delta s^2 \sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}'''_j \Delta s_j \simeq \Delta s^2 \int_0^1 \hat{W}''' ds \tag{3.31}$$

$$\sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}'''_j \xi_j^2 \Delta s_j^3 \simeq \xi^2\Delta s^2 \sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}'''_j \Delta s_j \simeq \xi^2\Delta s^2 \int_0^1 \hat{W}''' ds \tag{3.32}$$

$$\sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}''_j \Delta s_j^3 \simeq \Delta s^2 \sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}''_j \Delta s_j \simeq \Delta s^2 \int_0^1 \hat{W}'' ds \tag{3.33}$$

$$\sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}''_j \bar{s}_j \xi_j \Delta s_j^2 \simeq \xi\Delta s \sum_{j\in\Omega_i} \bar{s}_j \hat{W}''_j \Delta s_j \simeq \xi\Delta s \int_0^1 s\hat{W}'' ds \tag{3.34}$$

$$\sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}'_j \Delta s_j^3 \simeq \Delta s^2 \sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}'_j \Delta s_j \simeq \Delta s^2 \int_0^1 \hat{W}' ds \tag{3.35}$$

$$\sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}'_j \left(\bar{s}_j + s_j\right) \xi_j \Delta s_j^2 \simeq \xi\Delta s \sum_{j\in\Omega_i} \hat{W}'_j \left(\bar{s}_j + s_j\right) \Delta s_j \simeq \xi\Delta s \int_0^1 2s\hat{W}' ds. \tag{3.36}$$

Le changement de variable (3.26) implique en particulier que toutes les intégrales ci-dessus sont en $O(1)$ (on notera en particulier que, bien que la parité du noyau soit conservée, le fait que le support soit à demi rempli implique que toutes ces intégrales sont non-nulles a priori). Il reste à évaluer l'intégrale $\int_{x_i}^{x_i+R} AW'dx$. Pour cela, on effectue une simple intégration par partie :

$$\int_{x_i}^{x_i+R} AW'dx = [AW]_{x_i}^{x_i+R} - \int_{x_i}^{x_i+R} A'W dx = -A_iW_i - \int_{x_i}^{x_i+R} A'W dx. \tag{3.37}$$

Or le changement de variable montre que le terme $A_iW_i = \frac{A_i}{R}O(1)$ (l'autre terme est d'ordre supérieur). L'expression (3.28) peut donc s'exprimer en terme d'ordre de convergence. Ainsi, l'erreur de troncature en présence d'une surface libre est donnée par :

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\Omega_i} A_j \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j - A'_i = \frac{A_i}{R}&\left[O(1) + \xi O\left(\frac{\Delta x}{R}\right) + \frac{1}{2}\left(\xi^2 + \frac{1}{12}\right) O\left(\left(\frac{\Delta x}{R}\right)^2\right)\right] \\ &+ A'_i\left[O(1) + \xi O\left(\frac{\Delta x}{R}\right) + O\left(\left(\frac{\Delta x}{R}\right)^2\right)\right] \\ &+ A''_i R\left[\xi O\left(\frac{\Delta x}{R}\right) + O\left(\left(\frac{\Delta x}{R}\right)^2\right)\right] + ...\end{aligned} \tag{3.38}$$

Enfin, pour la fonction constante $A = 1$ on en déduit :

$$\boldsymbol{\nabla} C_i = \frac{1}{R}\left[O(1) + \xi O\left(\frac{\Delta x}{R}\right) + \frac{1}{2}\left(\xi^2 + \frac{1}{12}\right) O\left(\left(\frac{\Delta x}{R}\right)^2\right)\right] = O\left(\frac{1}{R}\right). \tag{3.39}$$

Tout d'abord, on peut remarquer une différence avec le cas sans surface libre (3.21), notamment au niveau des 2 premiers termes. En conséquence, même dans le cas où $\frac{\Delta x}{R} \to 0$, on aura toujours $L_i \boldsymbol{\nabla} C_i = O(1)$ à la surface libre. Dans cette zone, le double critère de convergence ne suffit donc plus, rendant d'autant plus importante la condition de convergence (3.19) à $\frac{R}{\Delta x}$ fixé. On note que cette propriété reste également vraie pour le gradient de concentration modifié $\widehat{\boldsymbol{\nabla}} C_i$.

3.2.3.2 Prise en compte de la surface libre dans la nouvelle loi de shifting

Afin d'adapter la nouvelle loi de shifting (3.24) à la surface libre, on conserve l'idée de la projection du vecteur de shifting dans la direction tangente à la surface libre (cf. section 3.1.4). En particulier, l'idée du critère (3.16) proposé par Sun et al. [140] et permettant de détecter les zones où le nombre de particules voisines est faible est conservée. Ensuite, pour prendre en compte la modification du terme de plus bas degré en $\frac{\Delta x}{R}$ dans le développement (3.39) de $\boldsymbol{\nabla} C_i$, on modifie le coefficient β_i dans la loi (3.24). En première approximation, on choisit une variation linéaire entre les ordres de plus bas degré dans les différents développements de $\boldsymbol{\nabla} C_i$:

$$\beta_i = \min\left[\left(\frac{R}{\Delta x}\right)^3, 1 + \left(\left(\frac{R}{\Delta x}\right)^3 - 1\right)\frac{d_i^{FS}}{R}\right], \tag{3.40}$$

où d_i^{FS} est la distance à la surface libre. Cette expression permet de retrouver la valeur de $\beta_i = \left(\frac{R}{\Delta x}\right)^3$ loin de la surface libre et $\beta_i = 1$ à la surface libre, ce qui correspond aux termes d'ordre le plus bas respectivement dans les expressions (3.21) et (3.39) (la Figure 3.6 montre le comportement du coefficient β_i proche de la surface libre). Enfin, contrairement à l'expression (3.16), on autorise une variation plus régulière de la projection dans la direction tangente : proche de la surface libre seule la direction tangente du vecteur de shifting est

conservée, tandis qu'en se rapprochant de l'intérieur du domaine fluide, on autorise en partie une composante normale au vecteur de shifting. Finalement, la prise en compte de la surface libre pour la nouvelle loi de shifting (3.24) est donnée par :

$$\delta \boldsymbol{u}_i^* = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \text{si } i \in \mathcal{V} \text{ et } \lambda_i < 0.4 \\ \lambda_i^2 \left[\delta \boldsymbol{u}_i - \sigma_i \left(\delta \boldsymbol{u}_i . \tilde{\boldsymbol{n}}_i\right) \tilde{\boldsymbol{n}}_i\right] & \text{si } i \in \mathcal{V} \text{ et } \lambda_i \geq 0.4 \\ \delta \boldsymbol{u}_i & \text{si } i \notin \mathcal{V} \end{cases}, \tag{3.41}$$

où $\delta \boldsymbol{u}_i$ est la nouvelle loi de shifting (3.24) calculée avec le coefficient β_i (3.40). Le coefficient σ_i permet d'assurer la variation régulière de la projection entre la surface libre et l'intérieur du domaine fluide. En première approximation, l'expression suivante est retenue :

$$\sigma_i = \min\left[1, \max\left[0, 2\left(1 - \frac{d_i^{FS}}{R}\right)\right]\right], \tag{3.42}$$

et permet de retrouver une projection dans la direction uniquement tangentielle dès lors que $d_i^{FS} < \frac{R}{2}$ (la Figure 3.6 montre le comportement de ce coefficient σ_i proche de la surface libre). Enfin, le coefficient λ_i^2 est un coefficient empirique permettant de gagner en robustesse et de limiter l'intensité du shifting proche de la surface libre et dans les zones ayant un faible nombre de particules voisines (en effet la valeur propre λ_i tend vers 1 au sein du domaine fluide et prend des valeurs plus faibles en se rapprochant de la surface libre).

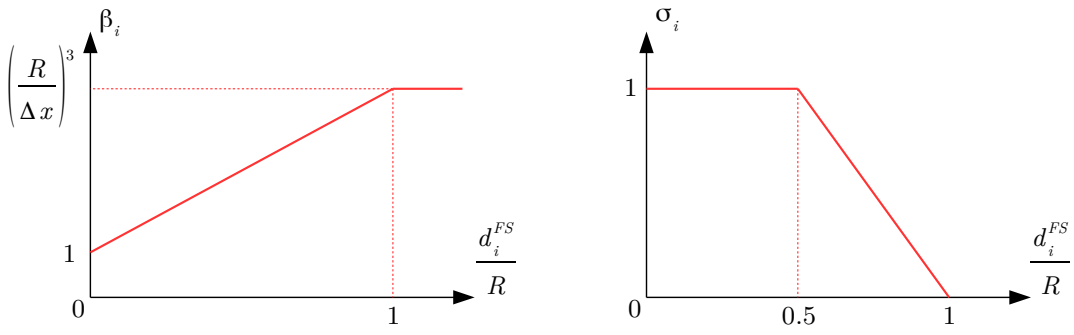

FIGURE 3.6 – Comportement des coefficients β_i (gauche) et σ_i (droite) proche de la surface libre.

On notera que les modifications apportées proche de la surface libre vérifient toujours les propriétés de convergence, d'invariance Galiléenne et de localité de la loi de shifting. On trouvera dans [96] la validation numérique de ce nouveau traitement du shifting à la surface libre, et notamment le fait que l'ensemble des propriétés (I) à (IV) sont conservées.

3.3 Conclusion

La première contribution apportée dans ce chapitre consiste en une étude détaillée des différentes propriétés a priori attendues pour une loi de shifting. 4 propriétés distinctes ont été retenues : (I) assurer une répartition uniforme des particules ; (II) convergence de la loi de shifting et consistance avec un formalisme Lagrangien ; (III) invariance Galiléenne ; (IV) caractère local de la loi de shifting pour ne pas surestimer et/ou sous-estimer le shifting selon les différentes zones de l'écoulement.

Certaines de ces propriétés n'étant pas vérifiées par les lois de shifting classiquement utilisées dans la littérature SPH, nous avons alors proposé une nouvelle loi les vérifiant toutes. De plus, à l'aide d'une étude théorique du shifting à la surface libre, nous avons proposé une modification de la nouvelle loi de shifting proche de la surface libre.

Plusieurs questions relatives au shifting dans la méthode SPH n'ont pas été explorées au sein de ce chapitre et pourront faire l'objet de travaux futurs : Comment doit être pris en compte le shifting au sein des différents schémas SPH pour respecter les différentes conditions limites ? Doit-on effectuer une projection du vecteur de shifting proche d'une paroi ? Le fait d'effectuer du shifting tangentiellement à la surface libre a-t-il du sens pour un écoulement visqueux (en effet la condition (1.21) sur laquelle est basée le shifting proche de la surface libre n'est a priori valable que pour un écoulement non-visqueux) ? etc...

Chapitre 4

Modélisation de la viscosité avec la méthode SPH

Comme évoqué à la section 1.2, la modélisation de la viscosité dans le cadre d'écoulements faiblement-compressibles peut se résumer à l'utilisation d'un opérateur Laplacien, pour un fluide Newtonien. Cette section a donc pour but de détailler les différentes méthodes utilisées pour calculer cet opérateur Laplacien dans le cadre de la méthode SPH, et en particulier les opérateurs proposés par Morris et al. [107] et Monaghan et Gingold [104]. On détaillera également le comportement de ces opérateurs en présence d'une surface libre, en s'appuyant notamment sur les travaux de Colagrossi et al. [33]. Enfin, on montrera comment ces différents opérateurs peuvent être adaptés au formalisme BIM pour imposer une condition d'adhérence en proche paroi. En particulier, on présentera une nouvelle adaptation de l'opérateur de Monaghan et Gingold à ce formalisme BIM. Pour préciser le comportement de ces opérateurs, on propose notamment une étude systématique de leur consistance en l'absence de frontières, puis en présence d'une surface libre et en présence d'une paroi.

Dans ce chapitre, on se concentre sur l'utilisation de l'opérateur Laplacien pour modéliser la viscosité. Cela revient donc à négliger à la fois les effets de la compressibilité de l'écoulement, mais également les effets de la viscosité de volume ζ (cf. section 1.2). Bien qu'une étude des effets de cette viscosité de volume au sein de la méthode SPH ait été initiée dans [17] et [36], on négligera ses effets dans le cadre de cette thèse. De même, la modélisation de la turbulence à l'aide de modèles RANS ou LES ne sera pas étudiée dans cette thèse, bien que plusieurs travaux aient récemment proposé d'adapter ces différents modèles à la méthode SPH [43] [8]. Ainsi, le fait de ne pas utiliser de modèle de turbulence limite en théorie la simulation d'écoulements visqueux à des nombres de Reynolds relativement faibles.

4.1 Opérateur Laplacien loin d'une paroi et/ou d'une surface libre

On détaille ici la construction de différents opérateurs Laplaciens, et en particulier la construction des opérateurs de Morris et al. [107] et de Monaghan et Gingold [104], dans le cas où l'on se situe loin d'une paroi et/ou d'une surface libre. Ainsi, dans un premier temps, le support $\Omega(\boldsymbol{x})$ du noyau des particules est considéré comme complet et donc tous les termes de paroi sont nuls. À noter également que l'on s'intéresse ici à l'opérateur Laplacien vectoriel, puisque la modélisation de la viscosité fait appel au Laplacien du vecteur vitesse

$\boldsymbol{u}$ (les résultats obtenus pourront facilement être étendus au cas du Laplacien scalaire en considérant un vecteur à une seule composante).

4.1.1 Formulations directes

Avant de présenter les opérateurs de Morris et al. et de Monaghan et Gingold, il faut signaler que des méthodes "directes" peuvent être employées pour calculer un opérateur Laplacien avec la méthode SPH. La première, proposée par Watkins et al. [159], repose sur le fait que le Laplacien peut être vu comme la divergence du gradient. Elle propose donc de calculer dans un premier temps le gradient lors d'une première boucle d'interactions, puis de déterminer le Laplacien lors d'une deuxième boucle d'interactions pour calculer la divergence de ce gradient. Cette méthode simple est relativement coûteuse et imprécise en présence de paroi et/ou de surface libre, de sorte qu'elle est peu utilisée en pratique. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\Delta f} \rangle^{WEA}(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} \Bigg(& \int_{\Omega(\boldsymbol{y})} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})) \otimes \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})\, dV_{\boldsymbol{z}} \\ & - \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \otimes \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z})\, dV_{\boldsymbol{z}} \Bigg) \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\, dV.\end{aligned} \tag{4.1}$$

La deuxième méthode consiste simplement à utiliser deux fois de suite le théorème de flux-divergence (cf. section 2.1.3) pour évaluer la divergence du gradient (cf. Chaniotis et al. [25] par exemple). En absence de paroi et/ou de surface libre, cette formulation est donnée simplement par :

$$\langle \boldsymbol{\Delta f} \rangle^{CEA}(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\, \Delta W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\, dV. \tag{4.2}$$

De même, cette formulation souffre de problèmes de précision en présence de paroi et/ou de surface libre et est donc peu utilisée en pratique. Pour ces raisons les deux opérateurs (4.1) et (4.2) ne seront pas étudiés dans la suite.

4.1.2 Opérateur de Morris et al.

D'un point de vue de l'analyse vectorielle, le Laplacien s'exprime comme la divergence du gradient. Pour des raisons de conservation de la quantité de mouvement et du moment angulaire (cf. section 2.2.1), l'opérateur de divergence symétrique (2.39) est retenu ici. Ainsi, en utilisant la symétrie du noyau (2.13), la divergence du gradient au niveau continu s'exprime par :

$$\begin{aligned}\left\langle \boldsymbol{div}^{+}\left(\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}\right)\right\rangle(\boldsymbol{x}) &= \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \left(\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{y}\right)+\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\boldsymbol{\nabla}W\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)dV \\ &= \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \left(\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{y}\right)+\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\frac{||\boldsymbol{\nabla}W\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)||}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)dV \quad .\end{aligned} \tag{4.3}$$

Or les gradients dans l'expression (4.3) ne sont a priori pas connus. Morris et al. [107] proposent d'estimer ces gradients à l'aide d'un développement de Taylor :

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)\simeq\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{y}\right)+\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{y}\right)\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\\ \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{y}\right)\simeq\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)+\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{y}\right)\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\simeq\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)-\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{y}\right)\\ \mathbb{G}rad\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\simeq\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)-\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{y}\right)\end{cases} . \tag{4.4}$$

On peut donc maintenant exprimer l'opérateur Laplacien de Morris et al. au niveau continu :

$$\begin{aligned}\left\langle\boldsymbol{\Delta f}\right\rangle^{MEA}(\boldsymbol{x}) &= 2\int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})}\left(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)-\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{y}\right)\right)\frac{||\boldsymbol{\nabla}W\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)||}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||}dV \\ &= 2\int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})}\frac{\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)-\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{y}\right)}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).\boldsymbol{\nabla}W\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)dV \quad .\end{aligned} \tag{4.5}$$

Au niveau discret, cet opérateur devient :

$$\left\langle\boldsymbol{\Delta f}\right\rangle_i^{MEA} = 2\sum_{j\in\Omega_i}\frac{\boldsymbol{f}_i-\boldsymbol{f}_j}{||\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j||^2}\left(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j\right).\boldsymbol{\nabla}W_{ij}V_j. \tag{4.6}$$

4.1.3 Opérateur de Monaghan et Gingold

Une autre idée est d'étendre le concept de viscosité artificielle développée pour la SPH (cf. section 2.2.2) à une viscosité physique. Ainsi, par analogie avec l'expression de la viscosité artificielle (2.59), Monaghan et al. [104] ont proposé l'expression suivante pour un opérateur Laplacien SPH au niveau continu :

$$\left\langle\boldsymbol{\Delta f}\right\rangle^{MG}(\boldsymbol{x}) = C\int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})}\frac{\left(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)-\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{y}\right)\right).\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2}\boldsymbol{\nabla}W\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)d\boldsymbol{y}, \tag{4.7}$$

où C est une constante égale à 8 en 2D et 10 en 3D (cf. section 4.1.4.3 pour une justification de la valeur de cette constante C). Cette constante C est reliée au paramètre de viscosité

artificielle α par la relation $C\mu = \alpha\rho_0 c_0 h$. De plus, la viscosité numérique est classiquement introduite et calibrée pour des équations 1D. L'extension proposée par Monaghan et Gingold n'est donc a priori pas valable en dimensions supérieures, expliquant le fait que l'on ait besoin d'introduire une constante corrective C. Cet opérateur est également très proche du terme de diffusion numérique utilisé dans l'équation de continuité au sein du schéma δ-SPH (cf. section 2.2.3). En particulier, dans [5] il est montré qu'une certaine condition de stabilité doit être respectée pour cet opérateur. Cette condition peut s'exprimer de la manière suivante (voir [5] pour les détails) :

$$\frac{3\pi\nu}{2\Delta x} < c_0. \tag{4.8}$$

Il est notamment montré dans [5] que si cette condition n'est pas satisfaite, alors l'amortissement constaté lors des simulations numériques est plus faible que celui attendu (i.e. on observe une viscosité plus faible qu'attendue). Il est à noter que cette condition a été établie pour une particule loin d'une surface libre et/ou d'une paroi et pour le cas en 1D. La condition (4.8) peut donc être légèrement différente pour les cas en dimension supérieure et en présence d'une surface libre et/ou d'une paroi. Notamment, il faut logiquement prendre en compte le fait que la constante C augmente avec le nombre de dimensions du problème, ce qui rend a priori le critère (4.8) plus restrictif.

Une autre remarque concerne la viscosité de volume. En effet, comme mentionné dans [103] [34], l'opérateur de Monaghan et Gingold introduit de manière intrinsèque une viscosité de volume et n'est donc a priori pas un opérateur Laplacien pur. Cette viscosité de volume est a priori non-physique puisque sa valeur est fixe et est donnée par $\zeta = \frac{5}{3}\mu$ (l'hypothèse de Stokes, $\zeta = 0$, n'est donc pas vérifiée).

Au niveau discret l'opérateur de Monaghan et Gingold est alors donné par :

$$\langle \boldsymbol{\Delta f} \rangle_i^{MG} = C \sum_{j \in \Omega_i} \frac{\left(\boldsymbol{f}_i - \boldsymbol{f}_j\right) . \left(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\right)}{||\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j||^2} \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j. \tag{4.9}$$

Cette dernière expression présente l'avantage de conserver le moment cinétique global du domaine de fluide [103].

4.1.4 Consistance des opérateurs loin d'une paroi et/ou d'une surface libre

Afin de préciser le comportement de ces deux opérateurs, on propose ici une étude de leur consistance et donc de leur précision. On se limitera uniquement à la consistance aux ordres les plus faibles et uniquement pour les opérateurs au continu (4.5) et (4.7). Afin de ne pas surcharger le propos, les calculs seront effectués uniquement dans le cas 2D et leurs développements seront effectués en annexe C. A un changement de repère près, on peut considérer que l'origine du repère se situe en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Dans ce cas, on a alors : $\boldsymbol{y} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$.

4.1.4.1 Consistance d'ordre 0

Soit un champ constant et son Laplacien donnés par :

$$\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Delta f}_0(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}. \tag{4.10}$$

Du fait de la présence d'une différence dans les deux opérateurs (4.5) et (4.7), la consistance à l'ordre 0 est directement assurée pour les deux opérateurs. En effet, on a bien $\boldsymbol{\Delta f}_0(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{\Delta f}_0 \rangle^{MEA}(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{\Delta f}_0 \rangle^{MG}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$. Cette propriété reste parfaitement valable au niveau discret pour les opérateurs (4.6) et (4.9).

4.1.4.2 Consistance d'ordre 1

Soit un champ linéaire et son Laplacien donnés par :

$$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Delta f}_1(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}. \tag{4.11}$$

On peut également montrer que la consistance à l'ordre 1 des deux opérateurs (4.5) et (4.7) est assurée. Autrement dit, on a bien $\boldsymbol{\Delta f}_1(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MEA}(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MG}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ (cf. annexe C). Cependant, cette propriété n'est a priori plus vérifiée au niveau discret. Elle reste cependant vérifiée de manière approximative à convergence (i.e. lorsque le nombre de particules voisines tend vers l'infini).

4.1.4.3 Consistance d'ordre 2

Soit un champ quadratique et son Laplacien donnés par :

$$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} ax^2 + bxy + cy^2 \\ dx^2 + exy + fy^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Delta f}_2(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 2a + 2c \\ 2d + 2f \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

On peut alors montrer que les opérateurs (4.5) et (4.7) fournissent respectivement les évaluations suivantes (cf. annexe C) :

$$\langle \boldsymbol{\Delta f}_2 \rangle^{MEA}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2a + 2c \\ 2d + 2f \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

$$\langle \boldsymbol{\Delta f}_2 \rangle^{MG}(\boldsymbol{x}) = \frac{C}{8} \begin{pmatrix} 6a + 2c + 2e \\ 2b + 2d + 6f \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

La consistance à l'ordre 2 est donc assurée pour l'opérateur de Morris et al. (4.5) (en effet, on a bien $\boldsymbol{\Delta f}_2(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{\Delta f}_2 \rangle^{MEA}(\boldsymbol{x})$). En revanche, cette consistance n'est a priori pas vérifiée pour l'opérateur de Monaghan et Gingold (4.7). Cependant, la divergence du champ $\boldsymbol{f}_2$ est donnée par : $div\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) = (2a+e)x + (2f+b)y$. Si l'on suppose alors que ce champ est à divergence nulle (i.e. $e = -2a$ et $b = -2f$) on a alors :

$$\left\langle \boldsymbol{\Delta}^{MG} \boldsymbol{f}_2 \right\rangle (\boldsymbol{x}) = \frac{C}{8} \begin{pmatrix} 2a + 2c \\ 2d + 2f \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Donc dans le cas où le champ quadratique considéré est à divergence nulle la consistance à l'ordre 2 de l'opérateur de Monaghan est assurée, puisqu'en 2D $C = 8$. Cette dernière expression permet également de justifier la valeur de la constante C. Le fait que l'opérateur (4.7) ne soit pas consistant à l'ordre 2 pour un champ qui n'est pas à divergence nulle, est à mettre en lien avec le fait que cet opérateur introduit de manière intrinsèque une viscosité de volume. L'influence de cette viscosité de volume devient négligeable dès lors que l'hypothèse de faible-compressibilité est vérifiée (i.e. dès lors que la divergence de la vitesse tend vers 0).

Ici également, ces propriétés ne sont a priori plus vérifiées au niveau discret. Elles restent cependant vérifiées de manière approximative à convergence (i.e. lorsque le nombre de particules voisines tend vers l'infini). En résumé, il y a une différence importante entre les opérateurs de Morris et al. et de Monaghan et Gingold. En effet, l'opérateur de Morris donnera toujours la bonne valeur du Laplacien (pour un champ jusqu'à l'ordre 2), et ce quelle que soit la forme de ce champ. On peut donc qualifier l'opérateur de Morris d'opérateur "universel" (à l'ordre 2). En revanche l'opérateur de Monaghan et Gingold n'est consistant à l'ordre 2 que si le champ considéré est à divergence nulle. L'opérateur de Monaghan n'est donc pas "universel". Cependant, pour des calculs pour des écoulements incompressibles (ou faiblement-compressibles), l'approximation d'une divergence nulle de la vitesse est généralement faite, justifiant l'utilisation de l'opérateur de Monaghan et Gingold.

4.2 Opérateur Laplacien à la surface libre

Dans cette section, on cherche à préciser le comportement des deux opérateurs (4.5) et (4.7) en présence d'une surface libre. Dans ce cas, les supports des noyaux ne sont plus complets et des intégrales de surface supplémentaires apparaissent dans les expressions (4.5) et (4.7). Or évaluer ces intégrales suppose de connaître a priori la position et la forme de la surface libre, ce qui s'avère relativement complexe en pratique. Habituellement, ces intégrales de surface sont simplement négligées dans la littérature, sans que cela ne dégrade trop les résultats de consistance à la surface libre et le respect des conditions aux limites (cf. section 2.5.3 et [34] [33] pour les considérations théoriques associées). Ici également, les expressions (4.5) et (4.7) ne seront pas modifiées en présence d'une surface libre, et nous proposons donc d'étudier la consistance de ces opérateurs dans ces conditions.

4.2.1 Consistance des opérateurs à la surface libre

Afin de simplifier les calculs, on considère ici uniquement le cas d'un point situé exactement à la surface libre. Au niveau discret, cette situation n'est pas rencontrée en pratique. En effet, on considère généralement qu'il y a une distance $\frac{\Delta x}{2}$ entre la position théorique de la surface libre et les particules la délimitant (cf. section 2.5.3). Ces approximations ne donneront donc que des résultats approchés, mais permettront tout de même de préciser le comportement des opérateurs à proximité de la surface libre. De plus, on étudie uniquement le cas d'une surface libre plane, de sorte que le support du noyau soit à demi-rempli, et par convention on choisit une normale à la surface libre donnée par $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_y$. Dans ce cas, la surface libre est caractérisée par $y = 0$ pour le paramétrage choisi précédemment. Le détail des calculs est donné en annexe C.

4.2.1.1 Consistance d'ordre 0

Pour les mêmes raisons que celles évoquées à la section 4.1.4.1, la consistance d'ordre 0 à la surface libre est immédiate à établir (par soustraction des champs). Cette propriété reste également vérifiée au niveau discret.

4.2.1.2 Consistance d'ordre 1

Pour un champ linéaire on peut montrer qu'à la surface libre l'opérateur (4.5) donne le résultat suivant (cf. annexe C) :

$$\langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MEA} (\boldsymbol{x}) = 2 \int_{r=0}^{R} W(r)\, dr \begin{pmatrix} -2b \\ -2d \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

où $\boldsymbol{f}_1$ est le champ défini par l'expression (4.11) et l'intégrale $\int_{r=0}^{R} W(r)\, dr$ une constante dépendant du noyau (et de son rayon). La consistance à l'ordre 1 de l'opérateur de Morris en présence d'une surface libre n'est donc vérifiée que si $b = 0$ et $d = 0$ (i.e. pour un champ qui ne varie pas en fonction de la distance à la surface libre). On retrouve donc le résultat obtenu par Colagrossi et al. [33], qui avaient déjà montré la non consistance de l'opérateur de Morris et al. à la surface libre dans le cas général.

De même, on peut montrer qu'à la surface libre l'opérateur (4.7) donne le résultat suivant (cf. annexe C) :

$$\langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MG} (\boldsymbol{x}) = C \int_{r=0}^{R} W(r) dr \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}b - \frac{2}{3}c \\ -\frac{2}{3}a - \frac{4}{3}d \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Or on a vu précédemment que l'opérateur de Monaghan et Gingold n'était consistant que pour un champ à divergence nulle (correspondant ici à $div\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) = a + d = 0$). On a alors :

$$\langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MG}(\boldsymbol{x}) = C \int_{r=0}^{R} W(r)dr \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}(b+c) \\ -\frac{2}{3}d \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

La consistance à l'ordre 1 de l'opérateur de Monaghan en présence d'une surface libre n'est donc vérifiée que si $d = -a = 0$ et $b = -c$ (i.e. pour un champ $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) = b\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$, ce qui correspond à un champ de vitesse tournant à la surface libre). On retrouve également le résultat obtenu par Colagrossi et al. [33], qui avaient déjà montré la non consistance de l'opérateur de Monaghan et Gingold à la surface libre dans le cas général.

4.2.1.3 Consistance d'ordre 2

En pratique, cela n'a pas vraiment de sens de parler de consistance d'ordre 2 si la consistance d'ordre 1 n'est pas assurée. Cependant, puisqu'il existe des cas particuliers pour lesquels la consistance d'ordre 1 est assurée, on étudie tout de même ici la consistance d'ordre 2. Pour le champ quadratique (4.12), l'opérateur (4.5) donne le résultat suivant :

$$\langle \boldsymbol{\Delta f}_2 \rangle^{MEA}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a+c \\ d+f \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

On obtient donc un facteur 2 entre la valeur donnée par l'opérateur de Morris et al. et la valeur analytique. La consistance d'ordre 2 à la surface libre n'est donc vérifiée que si $a + c = 0$ et $d + f = 0$.

De même, on peut montrer que l'opérateur (4.7) donne le résultat suivant (cf. annexe C) :

$$\langle \boldsymbol{\Delta f}_2 \rangle^{MG}(\boldsymbol{x}) = \frac{C}{16}\begin{pmatrix} 6a+2c+2e \\ 2b+2d+6f \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

L'opérateur de Monaghan et Gingold n'étant valable que pour un champ à divergence nulle (ici cela correspond à $e = -2a$ et $b = -2f$), l'expression (4.20) devient (cf. annexe C) :

$$\left\langle \boldsymbol{\Delta}^{MG}\boldsymbol{f}_2 \right\rangle(\boldsymbol{x}) = \frac{C}{8}\begin{pmatrix} a+c \\ d+f \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

On n'obtient ici aussi un facteur 2 entre la valeur analytique et la valeur donnée par l'opérateur de Monaghan et Gingold. La consistance d'ordre 2 n'est donc vérifiée que si

$a + c = 0$ et $d + f = 0$.

4.2.2 Résultats sur la dissipation d'énergie à la surface libre

En plus des résultats de consistance à la surface libre qui viennent d'être établis, on peut également mener une analyse sur la dissipation d'énergie due à la viscosité à la surface libre. Cette analyse a été menée par Colagrossi et al. [33]. On en rappelle ici les principaux résultats. La dissipation due aux termes visqueux (intégrée sur le support $\Omega(\boldsymbol{x})$) peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\int_{\Omega(\boldsymbol{x})} \langle \boldsymbol{div}\mathbb{V}\rangle . \boldsymbol{u} dV, \tag{4.22}$$

où $\boldsymbol{u}$ est le champ de vitesse, $\mathbb{V}$ le tenseur des contraintes visqueuses et $\langle \boldsymbol{div}\mathbb{V}\rangle$ la divergence du tenseur des contraintes visqueuses, évaluée avec un opérateur SPH. On peut alors montrer que pour un fluide newtonien et un écoulement incompressible ou faiblement-compressible (i.e. pour $\mathbb{V} = 2\mu\mathbb{D}$ et $\boldsymbol{div}\mathbb{V} = \mu\boldsymbol{\Delta u}$), la dissipation visqueuse à la surface libre (4.22) dépend du choix de l'opérateur SPH utilisé (voir [33] pour plus de détails) :

$$\int_{\Omega(\boldsymbol{x})} \langle \boldsymbol{div}\mathbb{V}\rangle^{MEA} . \boldsymbol{u} dV = -\mu \int_{\Omega(\boldsymbol{x})} ||\mathbb{G}rad\boldsymbol{u}||^2 dV + O(R), \tag{4.23}$$

$$\int_{\Omega(\boldsymbol{x})} \langle \boldsymbol{div}\mathbb{V}\rangle^{MG} . \boldsymbol{u} dV = -\int_{\Omega(\boldsymbol{x})} \mathbb{V} : \mathbb{D}\, dV + O(R). \tag{4.24}$$

Ce résultat est important et permet d'affirmer que l'opérateur de Monaghan et Gingold respecte le principe des travaux virtuels et que donc la dissipation d'énergie par la viscosité est correctement assurée à la surface libre (à une erreur en $O(R)$ près). En effet, le terme sous l'intégrale du membre de gauche dans (4.24) correspond exactement au terme de dissipation visqueuse (voir [33] pour plus de détails). À l'inverse, l'opérateur de Morris et al. ne respecte pas ce principe et la dissipation d'énergie par la viscosité n'est pas correctement assurée à la surface libre a priori, sauf cas particuliers. Comme précisé dans [33], ces résultats sont cependant valables uniquement loin d'une paroi.

4.3 Opérateur Laplacien en présence d'une paroi

La viscosité d'un fluide se traduit par une condition d'adhérence (1.17) à la paroi. Une manière simple d'imposer cette condition d'adhérence est d'utiliser des particules fantômes dont la vitesse aura été calculée afin d'imposer correctement cette condition (cf. section 2.5.1.2). Dans ce cas, les opérateurs (discrets et continus) proposés à la section 4.1 sont

utilisables tels quels (à condition d'effectuer également les boucles d'interactions sur les particules fantômes ; la consistance des opérateurs avec cette méthode ne sera pas étudiée ici). En revanche, pour les méthodes BIM, il est nécessaire d'ajouter des termes de parois aux différents opérateurs SPH (cf. section 2.5.2). On donne ci-dessous une méthode permettant de calculer ces termes de parois, à la fois pour l'opérateur de Morris et al. et pour l'opérateur de Monaghan et Gingold.

4.3.1 Opérateur de Morris et al. en formalisme BIM

Une version en formalisme BIM de l'opérateur de Morris et al. a déjà été proposée par Ferrand et al. [50]. On détaille ici la méthode développée dans [50] pour obtenir cet opérateur. Elle sera ensuite utilisée pour proposer une version BIM de l'opérateur de Monaghan et Gingold. L'idée est de repartir de l'évaluation de la divergence du gradient (4.3) mais à l'aide d'un opérateur BIM développé à la section 2.5.2 :

$$\begin{aligned}\left\langle \boldsymbol{div}^{+}\left(\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}\right)\right\rangle^{BIM}(\boldsymbol{x}) = & \frac{1}{\gamma(\boldsymbol{x})}\int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})}\left(\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})+\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{\nabla}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV \\ & + \frac{1}{\gamma(\boldsymbol{x})}\int\limits_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})}\left(\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})+\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{n}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dS.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Le terme volumique sera exprimé de la même manière qu'en l'absence de paroi (i.e. à l'aide des développements (4.4) ; cf. section 4.1.2). Il reste donc à exprimer le terme surfacique uniquement en fonction du champ $\boldsymbol{f}$ (et non en fonction de son gradient qui est a priori inconnu). Pour cela, Ferrand et al. [50] proposent de faire l'approximation d'un champ linéaire en proche paroi, et ne dépendant que de la distance à la paroi. Autrement dit, le gradient normal de vitesse à la paroi est donné par la relation :

$$\left(\mathbb{G}rad\boldsymbol{u}\right)_s\boldsymbol{n}_s \simeq \frac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_s}{d}, \tag{4.26}$$

où $\boldsymbol{u}_s$ est la vitesse locale de la paroi, $\boldsymbol{n}_s$ la normale locale à la paroi et d est la distance à la paroi. On notera que l'expression (4.26) implique un respect de la condition d'adhérence (1.17). On a alors l'opérateur de Morris et al. en formalisme BIM :

$$\begin{aligned}\left\langle\boldsymbol{\Delta f}\right\rangle^{MEA,BIM}(\boldsymbol{x}) = & \frac{2}{\gamma(\boldsymbol{x})}\int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{\nabla}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} \\ & + \frac{2}{\gamma(\boldsymbol{x})}\int\limits_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{n}}W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dS.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Bien que l'approximation (4.26) d'un champ linéaire en proche paroi puisse sembler

relativement contraignante, elle se révèle suffisante pour certains types d'écoulements. En particulier, elle est une bonne approximation pour des écoulements laminaires en proche paroi (et donc des nombres de Reynolds pas trop importants). Pour des écoulements turbulents (et donc de grands nombres de Reynolds), on peut cependant utiliser une loi de paroi afin de calculer le gradient normal [50].

Une manière équivalente d'arriver à l'expression (4.27) est de décomposer le vecteur $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ dans la base $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{t})$ [29] :

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{n}\right]\boldsymbol{n}+\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{t}\right]\boldsymbol{t}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}=\frac{1}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{t}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{n}}\boldsymbol{t}. \quad (4.28)$$

En utilisant les développements (4.4), le terme sous l'intégrale surfacique devient :

$$\begin{aligned}(\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})+\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{n}&=(\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})+\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\frac{1}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\&-(\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})+\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{t}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{n}}\boldsymbol{t}\\&\simeq 2\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{n}}\\&-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{t}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{n}}(\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})+\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{t}.\end{aligned} \quad (4.29)$$

En négligeant le terme tangentiel $(\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})+\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{t}$ on retrouve bien sur l'expression (4.27).

La version discrétisée de cet opérateur est finalement donnée par :

$$\langle\boldsymbol{\Delta f}\rangle_i^{MEA,BIM}=\frac{2}{\gamma_i}\sum_{j\in\Omega_i}\frac{\boldsymbol{f}_i-\boldsymbol{f}_j}{||\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j||^2}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j).\boldsymbol{\nabla}W_{ij}V_j+\frac{2}{\gamma_i}\sum_{s\in\partial\Omega_i}\frac{\boldsymbol{f}_i-\boldsymbol{f}_s}{d_{n,is}}W_{is}S_s, \quad (4.30)$$

où $d_{n,is}=(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_s).\boldsymbol{n_s}$ est la distance de la particule i à la facette s (ayant pour normale $\boldsymbol{n_s}$).

4.3.2 Opérateur de Monaghan et Gingold en formalisme BIM

Contrairement à l'opérateur de Morris et al., il n'existe pas dans la littérature de version en formalisme BIM de l'opérateur de Monaghan et Gingold. Jusqu'à présent, l'opérateur de Morris et al. était systématiquement utilisé dès que l'on devait effectuer une simulation en formalisme BIM, tout en sachant que cet opérateur fournit des résultats peu satisfaisants en présence d'une surface libre. On souhaiterait donc disposer d'une version en formalisme BIM de l'opérateur de Monaghan et Gingold, afin notamment de bénéficier des avantages qu'il fournit en présence d'une surface libre (cf. section 4.2). On propose donc ici une première

approche afin d'exprimer l'opérateur de Monaghan et Gingold en formalisme BIM. Pour cela on commence par réécrire l'opérateur (4.7) à l'aide des développements de Taylor (4.4) (dans un premier temps la présence de la paroi n'est pas prise en compte) :

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\Delta f} \rangle^{MG}(\boldsymbol{x}) &= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})) \,.\, (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2} \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2} \left[\boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \otimes (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right] (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}))\, dV \\
&\simeq \frac{C}{2} \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{\boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \otimes (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2} \left[\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) + \mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right] (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&\simeq \frac{C}{2} \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \otimes (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2} \left[\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) + \mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right] \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Cette dernière expression permet de calculer le terme surfacique en faisant apparaître le gradient de $\boldsymbol{f}$. On peut maintenant donner une expression approchée de l'opérateur de Monaghan et Gingold en formalisme BIM :

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\Delta f} \rangle^{MG,BIM}(\boldsymbol{x}) \simeq & \frac{C}{2\gamma(\boldsymbol{x})} \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \otimes (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2} \left[\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) + \mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right] \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
& + \frac{C}{2\gamma(\boldsymbol{x})} \int\limits_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \otimes (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2} \left[\mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) + \mathbb{G}rad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right] \boldsymbol{n} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dS.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

De même que pour l'opérateur de Morris et al. on se place dans le cas de l'approximation d'un champ linéaire en proche paroi (les remarques faites précédemment s'appliquent donc ici aussi), ce qui permet d'utiliser l'expression (4.26) du gradient normal à la paroi. On propose finalement l'expression suivante pour l'opérateur de Monaghan et Gingold en formalisme BIM :

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\Delta f} \rangle^{MG,BIM}(\boldsymbol{x}) &= \frac{C}{\gamma(\boldsymbol{x})} \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})).(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2} \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&+ \frac{C}{\gamma(\boldsymbol{x})} \int\limits_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \otimes (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{n}} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dS \\
&= \frac{C}{\gamma(\boldsymbol{x})} \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})).(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2} \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&+ \frac{C}{\gamma(\boldsymbol{x})} \int\limits_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})).(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dS.
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

La décomposition (4.29) permet également de retrouver l'expression (4.33).

La version discrétisée de cet opérateur peut finalement être donnée par :

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\Delta f} \rangle_i^{MG,BIM} &= \frac{C}{\gamma_i} \sum_{j \in \Omega_i} \frac{(\boldsymbol{f}_i - \boldsymbol{f}_j).(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)}{||\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j||^2} \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j \\
&+ \frac{C}{\gamma_i} \sum_{s \in \partial\Omega_i} \frac{(\boldsymbol{f}_i - \boldsymbol{f}_s).(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_s)}{||\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_s||^2 d_{n,is}} (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_s) W_{is} S_s.
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

4.3.3 Consistance des opérateurs à la paroi

On s'intéresse ici au cas où il y a uniquement une paroi et du fluide (i.e. il n'y a pas de surface libre et donc de point "triple"). On se place au niveau d'un point sur la paroi, considérée comme plane. On se place également au niveau continu (dans ce cas on a $\gamma(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}$). Pour simplifier les calculs, on considérera une paroi immobile (i.e. $\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{0}$) et on prendra une condition d'adhérence à la paroi. On notera bien que les résultats sont obtenus à la paroi exactement et que les calculs se complexifient dès que l'on s'éloigne (même très légèrement) de la paroi. La paramétrisation utilisée est la même que pour le cas d'une surface libre (cf. section 4.2.1) dans lequel la surface libre est remplacée par la paroi. Le détail des calculs est donné en annexe C.

4.3.3.1 Consistance d'ordre 0

Pour les mêmes raisons que celles évoquées à la section 4.1.4.1, la consistance d'ordre 0 à la paroi est immédiate à établir pour les deux opérateurs. Cette propriété reste également vérifiée au niveau discret.

4.3.3.2 Consistance d'ordre 1

La condition d'adhérence à la paroi impose certaines conditions sur le champ $\boldsymbol{f}_1$ (4.11) (i.e. $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{0}$ en $y = 0$) : $a = c = 0$. En appliquant cette condition, on peut montrer que l'opérateur de Morris et al. (4.27) est consistant à l'ordre 1 (cf. annexe C). Si, de plus, on considère un champ $\boldsymbol{f}_1$ à divergence nulle (i.e. $a + d = 0$), alors l'évaluation de l'opérateur de Monaghan et Gingold (4.33) est donnée par (cf. annexe C) :

$$\langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MG,BIM}(\boldsymbol{x}) = \frac{C}{\gamma(\boldsymbol{x})} \int_{r=0}^{R} W(r)dr \begin{pmatrix} \frac{4}{3}b \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

Donc l'opérateur de Monaghan et Gingold en formalisme BIM n'est pas consistant à l'ordre 1 à la paroi, ce qui semble être a priori un défaut important. On se propose tout de même, dans la suite, de l'utiliser sur des cas tests concrets car il présente des caractéristiques intéressantes en présence d'une surface libre (de manière similaire l'opérateur de Morris et al. en formalisme BIM fournit des résultats erronés en présence d'une surface libre mais demeure couramment utilisé, même pour de tels cas).

4.4 Pas de temps visqueux

De même que pour la condition de stabilité (2.98) liée à la partie hyperbolique du système d'équations à résoudre, une condition de stabilité liée à la partie elliptique des équations (i.e. liée à la viscosité) doit être ajoutée. Elle s'exprime également comme une condition sur la taille du pas de temps :

$$\Delta t \leq CFL_\nu \min_{i \in \mathcal{P}} \left(\frac{R_i^2}{\nu_i} \right) = \Delta t_\nu, \tag{4.36}$$

où CFL_ν est le coefficient CFL visqueux. Sa valeur dépend notamment du schéma temporel et du noyau utilisés [154]. Pour un schéma Runge-Kutta d'ordre 4 (le schéma majoritairement utilisé dans cette thèse) la valeur typiquement utilisée est $CFL_\nu \simeq 0.1$. Comme constaté dans [154], ce coefficient est également influencé par la présence de parois, diminuant légèrement la stabilité du schéma numérique.

4.5 Résultats numériques

Le but de cette section est de valider numériquement la nouvelle formulation de l'opérateur de Monaghan et Gingold en formalisme BIM (4.34). On ne s'intéressera donc ici qu'à des cas avec présence de parois solides. Pour des cas sans paroi et avec surface libre (par exemple le cas d'une onde de surface amortie) on se réfèrera aux travaux de Colagrossi et al. [33].

4.5.1 Cas sans surface libre et avec parois - écoulement de Poiseuille

Le premier cas considéré est le cas d'un écoulement de Poiseuille 2D à $Re = 10$ ($\rho = 1kg/m^3$, $\mu = 0.1kg/m/s$, $U_{max} = 1m/s$, $H = 1m$ et $c_0 = 10m/s$). Il présente l'avantage de pouvoir être simulé avec un nombre limité de particules, à l'aide de conditions périodiques, et donc de pouvoir être validé relativement rapidement. De plus, la solution analytique est connue et simple à déterminer. On comparera ici le nouvel opérateur de Monaghan et Gingold (4.34) avec l'opérateur de Morris et al., à la fois en formalisme ghost et en formalisme BIM. On donne sur la Figure 4.1 les résultats des simulations pour une discrétisation de 200 particules dans l'épaisseur H de la conduite.

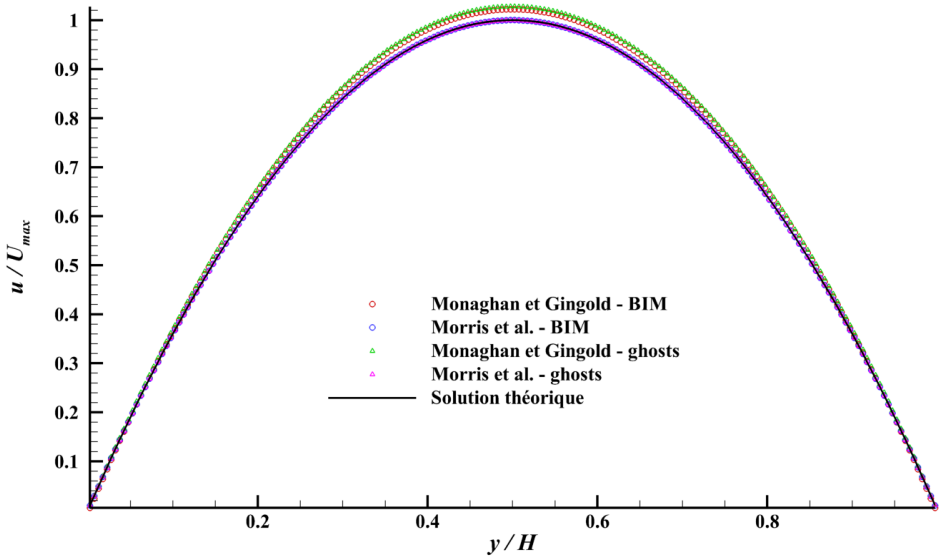

FIGURE 4.1 – Écoulement de Poiseuille sans surface libre : Profils de vitesse pour les opérateurs de Monaghan et Gingold et de Morris et al., en formalismes BIM et ghosts ; $\frac{H}{\Delta x} = 200$.

On remarque tout d'abord que l'opérateur de Monaghan et Gingold en formalisme BIM (4.34) est capable de simuler la condition d'adhérence, puisqu'une vitesse nulle est bien observée au niveau des parois. En revanche, on observe un écart entre la solution analytique et la solution obtenue numériquement pour l'opérateur de Monaghan et Gingold (de l'ordre de 3%), aussi bien en formalisme BIM qu'en formalisme ghost. Il est possible que cette erreur soit due à la non-consistance à l'ordre 1 de l'opérateur (4.34) en proche paroi. On cherche donc, dans la suite, à préciser cette différence de comportement entre les opérateurs de Morris et al. et de Monaghan et Gingold en proche paroi.

4.5.1.1 Influence de la discrétisation spatiale et du nombre de particules voisines

La première source d'erreur à prendre en compte est la discrétisation spatiale, autrement dit la convergence de la simulation. En particulier on regardera ici l'influence du double

critère de convergence de la méthode SPH (i.e. la taille des particules et le nombre de particules voisines comprises dans le support du noyau). On donne tout d'abord les résultats de l'influence de la taille des particules dans la Table 4.1. Premièrement, on remarque que les résultats obtenus avec l'opérateur de Morris et al. sont meilleurs, et ceci quel que soit le formalisme utilisé pour les conditions aux limites. En effet, on obtient des résultats très similaires entre les formalismes ghost et BIM, pour un opérateur donné. Deuxièmement, il semble que l'opérateur de Monaghan et Gingold converge mais vers une valeur légèrement supérieure à la valeur attendue (avec une erreur résiduelle d'environ 2.6% pour un ratio $\frac{R}{\Delta x} = 4$ et en formalisme BIM).

	$\frac{H}{\Delta x} = 50$	$\frac{H}{\Delta x} = 100$	$\frac{H}{\Delta x} = 200$	$\frac{H}{\Delta x} = 400$
MG ghost	1.94%	2.34%	2.77%	2.87%
MG BIM	1.69%	1.53%	2.11%	2.50%
MEA ghost	4.00%	0.555%	0.0932%	0.0348%
MEA BIM	0.655%	0.108%	0.259%	0.0375%

Table 4.1 – Écoulement de Poiseuille 2D sans surface libre : erreur en norme L_2 sur le profil de vitesse en fonction de la taille des particules, pour les 2 opérateurs et pour les formalismes ghost et BIM ; $\frac{R}{\Delta x} = 4$.

Pour déterminer la source de cette erreur résiduelle, on regarde l'influence du deuxième critère de convergence de la méthode SPH : le nombre de particules voisines présentes dans le support du noyau (i.e. le ratio $\frac{R}{\Delta x}$). On ne réalise l'étude que sur le nouvel opérateur (4.34). Les résultats sont montrés dans la Table 4.2. On constate que l'erreur diminue en augmentant le nombre de voisins, mais qu'une erreur acceptable n'est atteinte que pour des tailles de particules faibles et des nombres de voisins relativement élevés. Ainsi, cela semble indiquer que l'opérateur de Monaghan en Gingold en formalisme BIM (4.34) ne peut pas être utilisé pour des cas avec uniquement des parois solides (i.e. sans surface libre ; ce qui confirme le résultat obtenu à la section 4.3.3.2).

	$\frac{R}{\Delta x} = 2.5$	$\frac{R}{\Delta x} = 4$	$\frac{R}{\Delta x} = 6$
erreur en norme L_2	17.1%	2.11%	0.643%

Table 4.2 – Écoulement de Poiseuille 2D sans surface libre : erreur en norme L_2 sur le profil de vitesse en fonction du ratio $\frac{R}{\Delta x}$ pour l'opérateur de Monaghan et Gingold en formalisme BIM ; $\frac{H}{\Delta x} = 200$.

4.5.1.2 Influence du choix du noyau

Il semble donc que cette erreur résiduelle soit en partie liée au double critère de convergence de la méthode SPH. Or Quilan et al. [124] ont montré que l'erreur de troncature des opérateurs SPH dépend de ces deux paramètres, mais est également influencée par le choix du noyau utilisé et de son ordre (ces résultats ont été obtenus en 1D et pour une répartition

uniforme de particules). On cherche donc ici à montrer que le choix du noyau a une influence sur cette erreur résiduelle (on teste les noyaux déjà présents dans SPH-Flow : Wendland C^2, Cubic, Hyper4 et Poly3). Les résultats sont montrés dans la Table 4.3. On constate effectivement une influence du choix du noyau sur la précision des résultats. En particulier, on constate que l'erreur est plus importante pour les noyaux Hyper4 et Poly3, qui sont des noyaux d'ordre bas (leur gradient est discontinu en 0). Pour les noyaux d'ordre plus élevé (Cubic et Wendland C^2), l'erreur est plus faible. Le choix du noyau semble donc important lorsque l'on utilise l'opérateur (4.34). En particulier on privilégiera des noyaux d'ordre élevé dans ce cas-là (tout en faisant attention aux problèmes de stabilité liés à l'augmentation de l'ordre du noyau [154] [42]).

	Wendland C^2	Cubic	Hyper4	Poly3
erreur en norme L_2	2.11%	0.915%	2.55%	5.19%

TABLE 4.3 – Écoulement de Poiseuille 2D sans surface libre : erreur en norme L_2 sur le profil de vitesse pour différents noyaux, pour l'opérateur de Monaghan et Gingold en formalisme BIM ; $\frac{H}{\Delta x} = 200$; $\frac{R}{\Delta x} = 4$.

4.5.2 Cas avec surface libre et parois

Bien que les résultats précédents semblent montrer que l'opérateur (4.34) ne puisse pas être utilisé pour des cas avec uniquement des parois solides, on cherche ici à montrer qu'il peut cependant être utilisé pour des cas présentant une surface libre (et toujours en présence de parois solides).

4.5.2.1 Écoulement de Poiseuille avec surface libre

Le premier cas considéré ici est un écoulement de Poiseuille 2D avec surface libre. Théoriquement ce cas est équivalent à un "demi" écoulement de Poiseuille (en effet la condition de cisaillement nul à la surface libre est dans ce cas équivalente à une condition de symétrie). On utilisera donc les mêmes paramètres que pour le cas de l'écoulement de Poiseuille présenté en section 4.5.1. On montre les résultats obtenus sur la Figure 4.2 (seuls les résultats en formalisme BIM sont présentés car, comme pour le cas précédent, les résultats en formalisme ghost sont très similaires pour un opérateur donné). Le profil général de l'écoulement est encore respecté. Cependant, on observe toujours des résultats légèrement meilleurs avec l'opérateur de Morris et al. qu'avec l'opérateur de Monaghan et Gingold. On mesure une erreur de l'ordre de 2% pour l'opérateur de Monaghan et Gingold et de 0.7% pour l'opérateur de Morris et al.

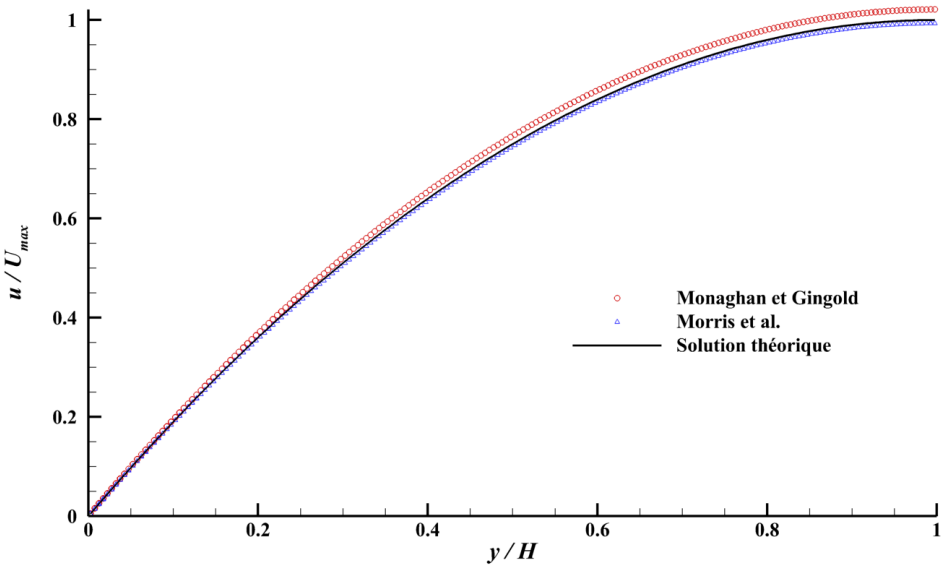

FIGURE 4.2 – Écoulement de Poiseuille avec surface libre : Profils de vitesse pour les opérateurs de Monaghan et Gingold et de Morris et al. en formalisme BIM ; $\frac{H}{\Delta x} = 200$.

Afin de préciser le comportement des opérateurs à la surface libre pour ce cas test, on cherche à déterminer les termes de dissipation visqueuse donnés à la section 4.2.2. Or le champ de vitesse attendu pour cet écoulement est ici donné par :

$$\boldsymbol{u} = 2U_{max}\frac{y}{H}\left(1 - \frac{y}{2H}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \tag{4.37}$$

avec la position de la surface libre donnée par $y = H$ et celle de la paroi par $y = 0$. On a alors :

$$\mathbb{G}rad\boldsymbol{u} = \frac{2U_{max}}{H}\left(1 - \frac{y}{H}\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{D} = \frac{U_{max}}{H}\left(1 - \frac{y}{H}\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

Les termes de dissipation visqueuse à la surface libre (4.23-4.24) (i.e. pour $y = H$) sont donc nuls (à la fois pour l'opérateur de Monaghan et Gingold et pour l'opérateur de Morris et al.). On est donc dans un cas particulier où la dissipation d'énergie à la surface libre par la viscosité est correctement assurée par l'opérateur de Morris et al. (en effet cette dissipation est théoriquement nulle dans ce cas précis). Ainsi, la différence observée sur la Figure 4.2 entre les deux opérateurs ne vient pas de la présence d'une surface libre mais bien de l'évaluation des opérateurs à la paroi. Cette affirmation est renforcée par le fait que toutes les tendances observées pour le cas sans surface libre (taille des particules, nombre de voisins et choix du noyau ; cf. section 4.5.1) sont également observées ici (les résultats ne sont pas présentés ici pour ne pas surcharger le propos et éviter les redites). Il est donc nécessaire de trouver un

cas plus complexe pour valider l'opérateur (4.34) en présence de parois et de surfaces libres, et en particulier un cas où les effets de surface libre sont significatifs.

4.5.2.2 Écoulement dans un cylindre tournant partiellement rempli

Le second cas, plus complexe, est le cas de l'écoulement stationnaire dans un cylindre tournant et partiellement rempli. Ce cas présente l'avantage de disposer d'une solution analytique [61]. Il dépend uniquement des paramètres adimensionnels suivant : le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho\omega r_0^2}{\mu}$, le nombre de Froude $Fr = \frac{r_0\omega^2}{g}$ et le taux de remplissage du cylindre λ (où ρ est la masse volumique du fluide, μ sa viscosité dynamique, r_0 le rayon du cylindre, ω sa vitesse de rotation, g l'accélération de la pesanteur et λ est défini comme le rapport entre le volume de fluide et le volume du cylindre). On définit également le nombre sans dimension $G = \frac{Re}{Fr} = \frac{\rho g r_0}{\mu\omega}$. Il est à noter que la solution analytique proposée dans [61] n'est valable que pour des Re faibles ($Re \lesssim 5$), des G grands ($G \gtrsim 100$) et des λ faibles ($\lambda \lesssim 0.4$). La solution analytique fournit la solution complète de l'écoulement (i.e. le champ de vitesse, le champ de pression, la position de la surface libre, les lignes de courants, etc...). On présente ici le cas avec les paramètres suivants : $Re = 2$, $G = 200$ et $\lambda = 0.19$ ($\rho = 1000kg/m^3$, $\mu = 0.5kg/m/s$, $r_0 = 0.01m$, $\omega = 10rad/s$, $g = 100m/s^2$ et $c_0 = 50m/s$). On donne l'allure de la solution analytique des champs de vitesse et de pression pour ce jeu de paramètre sur la Figure 4.3.

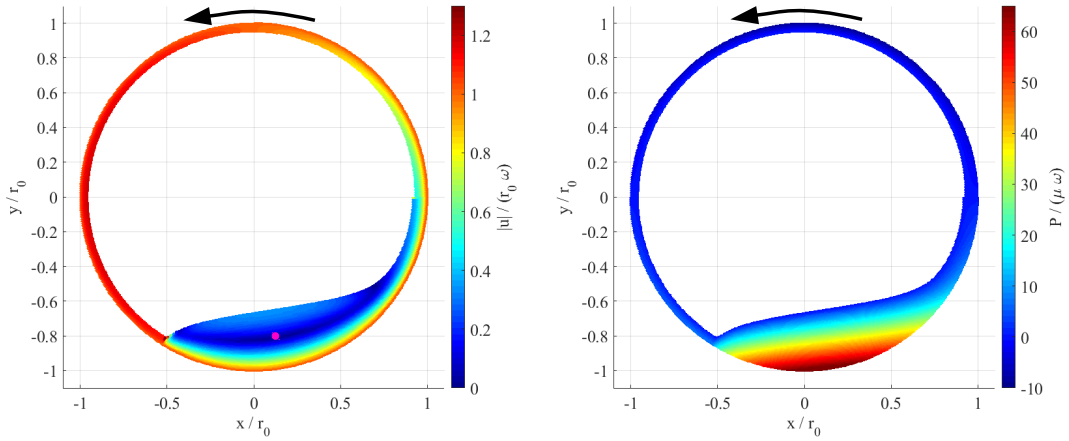

FIGURE 4.3 – Écoulement dans un cylindre tournant partiellement rempli : Champs de vitesse et de pression analytiques pour $Re = 2$, $G = 200$ et $\lambda = 0.19$ (le point rose indique la position du point de stagnation de l'écoulement, i.e. la position du minimum du champ de vitesse).

D'un point de vue numérique, l'initialisation de ce cas se fait avec un anneau de fluide en contact avec la paroi et ayant un mouvement de rotation pur (cela permet de gagner en temps de calcul en diminuant le temps d'établissement du régime stationnaire). La discrétisation choisie est telle que l'on prend environ 10 particules dans l'épaisseur la plus fine du film fluide ($\frac{r_0}{\Delta x} = 200$; soit environ 24000 particules au total).

On montre sur la Figure 4.4 l'allure générale de l'écoulement. On remarque que la solution obtenue est relativement proche de la solution analytique donnée sur la Figure 4.3, et ceci pour les deux opérateurs de Morris et al. (4.30) et de Monaghan et Gingold (4.34). On remarque cependant un léger écart au niveau de la forme de la surface libre, notamment proche du point de rebroussement (i.e. le point marquant la discontinuité de la surface libre proche de $\theta = -\frac{2\pi}{3}$). Plusieurs effets peuvent expliquer cette différence. Premièrement, nous nous sommes placés ici dans des conditions proches des limites de validité de la solution théorique (notamment le Re utilisé, $Re = 2$ ici, est probablement encore trop grand, bien que pour des raisons liées aux temps de calcul, il est difficile de descendre en deçà de cette limite). Deuxièmement, la convergence n'est peut-être pas tout à fait assurée. Au-delà de ces différences, on remarque sur la Figure 4.4 que le choix de l'opérateur tend à influencer la forme de la surface libre, notamment dans la zone en amont du point de rebroussement. On remarque en particulier que la surface libre présente des perturbations lorsque l'on utilise l'opérateur de Morris et al. (4.30), ce qui tendrait à montrer que l'opérateur de Monaghan et Gingold (4.34) est plus "stable" à la surface libre.

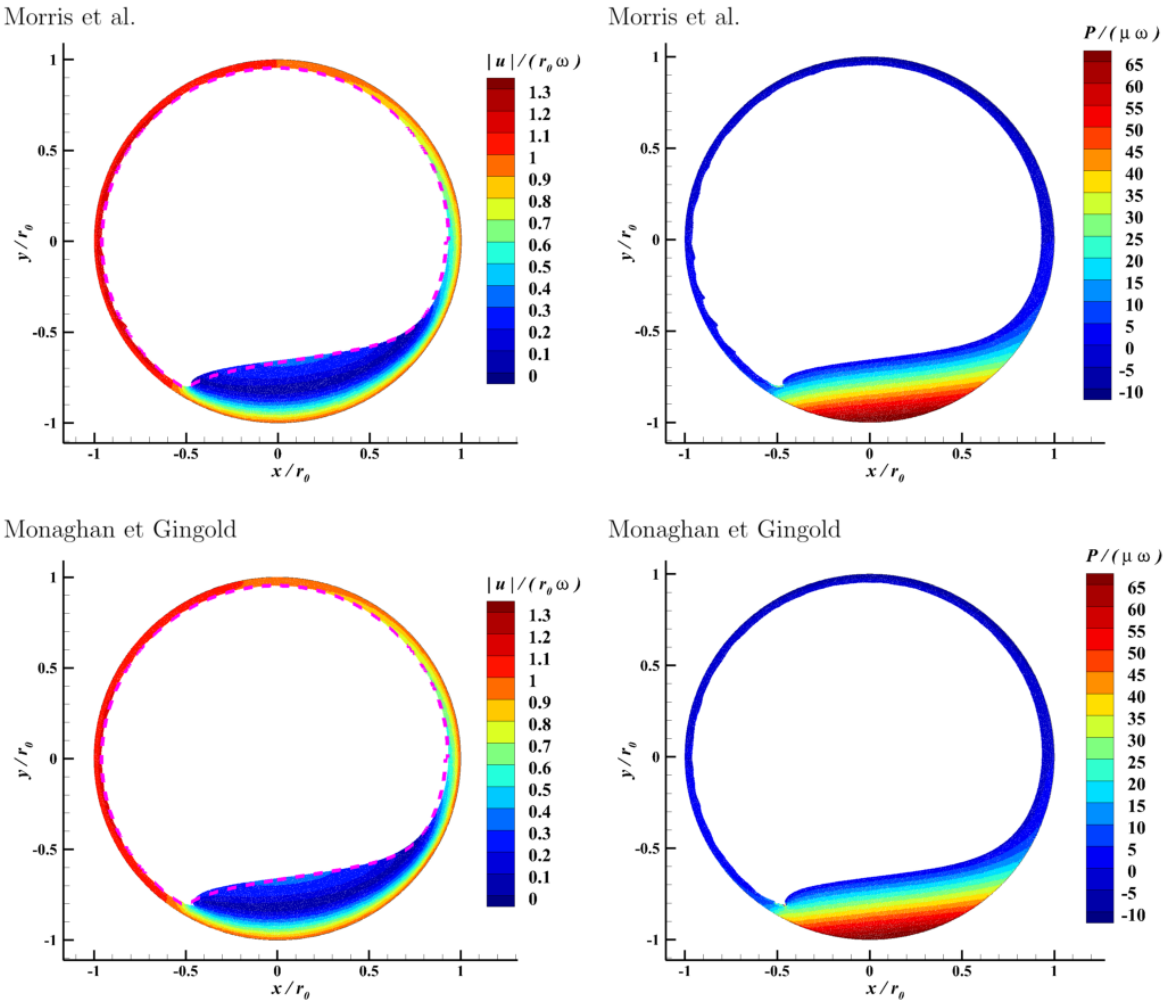

FIGURE 4.4 – Écoulement dans un cylindre tournant partiellement rempli : Champs de vitesse et de pression obtenus avec la méthode SPH à $t\omega = 10$ (la ligne magenta désigne la forme analytique de la surface libre).

Nous complétons cette observation par la comparaison de plusieurs grandeurs avec leurs solutions analytiques : la position du point de stagnation, la position du point de rebroussement de la surface libre, la hauteur de fluide en $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et le couple exercé par le fluide sur le cylindre (les erreurs sur les positions du point de stagnation et du point de rebroussement sont calculées par : $\frac{||\boldsymbol{x}_{analytique} - \boldsymbol{x}_{SPH}||}{r_0}$). Les résultats sont donnés dans la Table 4.4. Pour la position du point de stagnation et de la hauteur de la surface libre en $\theta = -\frac{\pi}{2}$, l'opérateur de Monaghan et Gingold donne de meilleurs résultats. En revanche, l'opérateur de Morris et al. s'avère plus précis pour la mesure du couple. Pour la position du point de rebroussement, les deux opérateurs donnent des résultats similaires. Il est donc difficile de conclure sur le meilleur choix entre ces deux opérateurs. On remarque cependant que l'erreur la plus importante se situe au niveau de la mesure du couple avec l'opérateur de Monaghan et Gingold. Ceci suggère que l'opérateur de Morris et al. semble être plus approprié pour déterminer des efforts de cisaillement au niveau d'une paroi. À l'opposé, les phénomènes localisés au niveau de la surface libre semble être mieux capturés avec l'opérateur de Monaghan et Gingold.

	Analytique	Morris et al.	Monaghan et Gingold
Point de stagnation (mm)	[1.28 ;-8.10]	[0.883 ;-8.10] (3.97%)	[1.04 ;-8.10] (2.40%)
Point de rebroussement (mm)	[-5.07 ;-8.10]	[-4.69 ;-8.09] (3.98%)	[-4.78 ;-7.99] (3.25%)
Hauteur en $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (mm)	3.31	3.45 (4.23%)	3.42 (3.32%)
Couple sur le cylindre ($mN.m$)	8.43	8.80 (4.39%)	7.66 (9.13%)

Table 4.4 – Cylindre tournant partiellement rempli : comparaison entre quelques grandeurs (et pourcentage d'erreur associé) à $t\omega = 10$, pour les opérateurs de Morris et al. (4.30) et de Monaghan et Gingold (4.34).

On compare également une dernière grandeur pour ce cas test : la champ de pression sur la paroi du cylindre. Les résultats sont donnés sur la Figure 4.5, et présentent de faibles différences. Cependant, on observe un écart avec la solution analytique dans la zone proche de $\theta = -\frac{\pi}{2}$, pour les deux opérateurs. Cet écart est possiblement dû à la convergence qui n'est peut-être pas atteinte et aux différentes approximations effectuées pour obtenir la solution analytique, et en particulier au fait que l'on soit ici dans des conditions proches des limites de validité de cette solution.

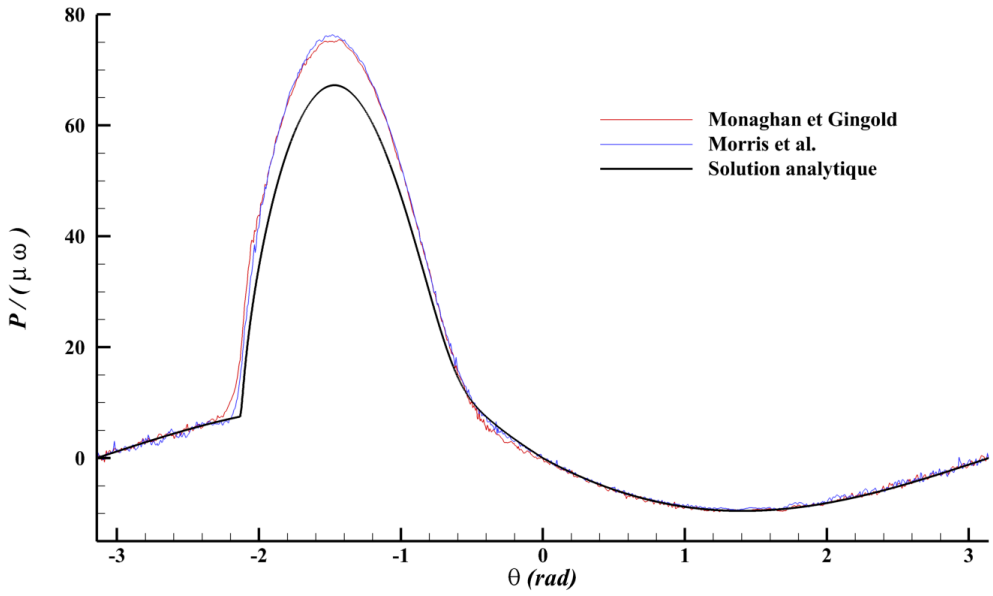

FIGURE 4.5 – Écoulement dans un cylindre tournant partiellement rempli : Champ de pression sur la paroi du cylindre obtenu avec la méthode SPH à $t\omega = 10$ pour les deux opérateurs.

4.6 Bilan et choix d'un opérateur

Dans ce chapitre, nous avons donc proposé et validé une nouvelle formulation (4.34) de l'opérateur de Monaghan et Gingold en formalisme BIM. De plus certains résultats de consistance ont été établis afin de comparer l'opérateur obtenu avec celui de Morris et al. (4.30). Ces résultats sont rappelés dans la Table 4.5.

		Opérateur de Morris et al.	Opérateur de Monaghan et Gingold
Dans le fluide	Consistance à l'ordre 0	oui	oui
	Consistance à l'ordre 1	oui au continu	oui au continu
	Consistance à l'ordre 2	oui au continu	oui au continu si la divergence est nulle
	Conservation du moment cinétique	non	oui
A la surface libre	Consistance à l'ordre 0	oui	oui
	Consistance à l'ordre 1	oui au continu si champ indépendant de la distance à la surface libre	oui au continu si champ tournant et à divergence nulle
	Consistance à l'ordre 2	non (facteur 2 au continu)	non (facteur 2 au continu si la divergence est nulle)
	Dissipation de l'énergie	incorrecte $\Rightarrow$ amortissement erroné	correcte au continu
A la paroi (en formalisme BIM)	Consistance à l'ordre 0	oui	oui
	Consistance à l'ordre 1	oui au continu si condition d'adhérence respectée	non $\Rightarrow$ cisaillement à la paroi erroné

TABLE 4.5 – Résumé des résultats théoriques obtenus dans ce chapitre.

Cependant, ce tableau et les résultats numériques obtenus montrent que la précision des simulations dépend fortement de l'opérateur choisi ainsi que du cas test considéré (et notamment de la présence de parois et/ou de surface libre). En particulier, il semble qu'en proche paroi l'opérateur de Morris et al. (4.30) donne de meilleurs résultats (notamment au niveau du cisaillement à la paroi). À l'inverse, l'opérateur de Monaghan et Gingold (4.34) semble donner de meilleurs résultats proche de la surface libre. Ainsi, pour des cas avec surface libre mais sans parois on préfèrera l'opérateur de Monaghan et Gingold [33], tandis que pour des cas avec parois mais sans surface libre l'opérateur de Morris et al. sera privilégié. Pour tous les autres cas (i.e. les cas avec à la fois des parois solides et une surface libre) le choix dépendra du type d'écoulement qui sera simulé et des grandeurs d'intérêts, et en particulier du fait que les effets de surface libre ou de parois dominent l'écoulement.

Chapitre 5

Montée en ordre de la méthode SPH

L'avantage des méthodes sans maillages (et donc de la méthode SPH) en comparaison des méthodes maillées (comme la méthode des Différences Finies ou des Volumes Finis par exemple) réside principalement dans leur caractère Lagrangien, et donc dans un suivi précis des différentes interfaces. En revanche, l'un des principaux défauts de la méthode SPH, réside dans son ordre de convergence relativement bas (ne dépassant pas l'ordre 2 théoriquement et plutôt autour d'un ordre 1 en pratique), combiné à des pas de temps relativement petits (notamment dans sa formulation faiblement-compressible) et conduisant à des coûts de calculs généralement plus élevés. Une montée en ordre de la méthode SPH pourrait donc s'accompagner d'un gain important en terme de compromis coût/précision, en permettant ainsi des distances inter-particulaires plus grandes (à précision donnée et donc des nombres de particules plus faibles) avec également des pas de temps plus grands. L'ordre de convergence relativement faible de la méthode SPH peut s'expliquer principalement par le double critère de convergence de la méthode (cf. section 2.1.4) et par la grande distorsion de la distribution des particules (cf. [124] pour une étude en dimension 1 de l'influence du désordre et du double critère de convergence). La relative complexité des opérateurs SPH rend donc la montée en ordre de la méthode assez difficile et demeure encore un sujet peu exploré dans la littérature.

Après une revue des différentes pistes proposées dans la littérature pour monter en ordre la méthode SPH, ce chapitre a pour but de proposer et de valider une nouvelle méthode de montée en ordre basée sur des reconstructions WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) et MLS (Moving Least Squares).

5.1 Convergence de la méthode SPH

Avant de parler d'ordre de convergence de la méthode SPH, il est important de se demander si la convergence de la méthode SPH est effectivement assurée. La relative complexité des opérateurs SPH (et notamment la double discrétisation de la méthode) rend la preuve d'une convergence de la méthode relativement complexe. Cependant Raviart et Mas-Gallic [126] [95] ont fourni d'importants résultats et ont notamment montré que la convergence des opérateurs SPH était assurée dès lors que $R \to 0$ et $\frac{\Delta x}{R} \to 0$ (i.e. dès que le support du noyau tend vers 0 et que le nombre de particules voisines tend vers l'infini). En pratique, le critère $\frac{\Delta x}{R} \to 0$ n'est pas "tenable" au sens où il implique un nombre de particules voisines tendant vers l'infini. Ainsi, on fixe en pratique le rapport $\frac{R}{\Delta x}$.

Un autre paramètre influençant l'ordre de convergence des opérateurs SPH est le désordre particulaire. Afin d'estimer l'influence de ces paramètres (la taille du support du noyau, le nombre de particule voisines et le désordre) Quinlan et al. [124] ont proposé une étude en dimension 1 de l'erreur de troncature des opérateurs SPH. Pour un opérateur gradient SPH d'une fonction A, cette erreur de troncature peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\Omega_i} A_j \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j - A'_i = \frac{A_i}{R}&\left[\xi O\left(\left(\frac{\Delta x}{R}\right)^3\right) + \frac{1}{2}\left(\xi^2 + \frac{1}{12}\right) O\left(\left(\frac{\Delta x}{R}\right)^4\right)\right] \\ &+ A'_i\left[\xi O\left(\left(\frac{\Delta x}{R}\right)^3\right) + O\left(\left(\frac{\Delta x}{R}\right)^4\right)\right] \\ &+ A''_i R\left[\xi O\left(\frac{\Delta x}{R}\right) + O\left(\left(\frac{\Delta x}{R}\right)^4\right)\right] + ... \\ &+ A'''_i R^2 O\left(1\right) + ...,\end{aligned} \tag{5.1}$$

où ξ est une mesure du désordre dans la distribution spatiale des particules ($\xi = 0$ correspond à une répartition uniforme des particules). Bien que plusieurs simplifications aient été effectuées pour obtenir cette expression, elle permet de rendre compte de plusieurs comportements de la convergence des opérateurs SPH qui peuvent ensuite se vérifier en pratique et également en dimensions supérieures (cf. [124] pour plus de détails). Premièrement, elle confirme bien que la convergence des opérateurs SPH n'est assurée que lorsque le double critère $R \to 0$ et $\frac{\Delta x}{R} \to 0$ est assuré. Deuxièmement, l'expression (5.1) montre qu'en fixant le rapport $\frac{R}{\Delta x}$ (ce qui est fait en pratique) la convergence n'est a priori plus assurée et qu'on a même une divergence des opérateurs, comme le montre le terme en $\frac{1}{R}$. En pratique, Quinlan et al. [124] ont montré que pour les discrétisations utilisées en pratique, si le désordre ξ est relativement faible et/ou si le ratio $\frac{R}{\Delta x}$ est suffisamment grand et/ou si la consistance des opérateurs est améliorée (par exemple à l'aide des corrections présentées à la section 2.1.5) alors le terme en $\frac{1}{R}$ demeure négligeable et la divergence des opérateurs reste limitée. On observe un phénomène de saturation qui fait qu'à partir d'une certaine discrétisation, l'erreur ne diverge pas mais stagne à une valeur constante non nulle (mais faible en pratique), dès que le désordre particulaire devient suffisamment faible.

Les travaux cités ci-dessus se concentrent uniquement sur la convergence des opérateurs SPH, et non sur la convergence de la méthode en elle-même (i.e. sur la convergence des schémas numériques SPH vers la solution physique des équations de la mécanique des milieux continus). Cette convergence de la méthode SPH est beaucoup plus complexe à établir que la convergence des seuls opérateurs SPH (pour des résultats partiels sur la convergence de la méthode SPH, dans le cas des équations d'Euler, on pourra se référer par exemple à [51]). Ceci explique que toutes les tentatives de montée en ordre de la méthode SPH passent finalement par l'augmentation de la précision et/ou de la consistance et/ou de l'ordre des opérateurs SPH. La montée en ordre de la méthode SPH complète est alors uniquement étudiée de manière purement heuristique. On notera cependant que, bien que la convergence de la méthode complète ne soit jamais étudiée de manière théorique, une certaine précision de la méthode est assurée par les propriétés de conservation des schémas numériques SPH (cf. section 2.2.1). Finalement, bien que la convergence des opérateurs SPH n'est pas toujours

assurée, au moins un ordre 1 de convergence est tout de même observé en pratique (ce qui reste faible comparé à d'autre méthodes numériques).

5.2 État de l'art

Plusieurs pistes ont été envisagées dans la littérature afin d'augmenter l'ordre de convergence de la méthode SPH. Elles peuvent être regroupées en trois grandes catégories : l'utilisation d'un noyau d'ordre élevé, la correction des opérateurs SPH eux-mêmes et la reconstruction des différents champs interpolés. Comme évoqué ci-dessus, toutes ces méthodes se concentrent uniquement sur les opérateurs SPH, la montée en ordre de la méthode SPH complète (i.e. la convergence vers les solutions continus des équations d'Euler et/ou de Navier-Stokes) n'étant étudiée que de manière heuristique.

5.2.1 Noyau d'ordre élevé

Comme montré à la section 2.1.2, le choix de la fonction noyau a de nombreuses influences sur la simulation. Il est donc légitime de se poser la question de savoir si un choix plus "judicieux" du noyau peut permettre d'augmenter l'ordre de convergence de la méthode SPH. Cela présenterait l'avantage de ne pas ajouter de procédures de calcul supplémentaires puisque le choix du noyau se fait une fois pour toutes au début du calcul.

Afin de mettre en évidence l'importance du choix du noyau dans la précision et l'ordre de convergence de l'interpolation SPH, on effectue une analyse de l'expression régularisée (2.2). Afin de simplifier le raisonnement, cette étude est effectuée ici en dimension 1 mais peut aisément être étendue aux dimensions supérieures. À l'aide d'un développement de Taylor, l'expression (2.2) s'écrit :

$$\begin{aligned}\langle f\rangle(x) &= \int_{\Omega(x)} f(y)\, W(x-y)\, dV \\ &= \int_{\Omega(x)} \left[f(x) + (y-x) f'(x) + \frac{(y-x)^2}{2} f''(x) + ... \right] W(x-y)\, dV.\end{aligned} \tag{5.2}$$

En définissant les intégrales $M_k = \int_{\Omega(x)} \frac{(y-x)^k}{k!} W(x-y)\, dV$ on peut réécrire l'expression (5.2) (on notera que la propriété de partition de l'unité impose $M_0 = 1$ et que la symétrie du noyau impose $M_{2n+1} = 0$, au continu) :

$$\langle f\rangle(x) - f(x) = M_2 f^{(2)}(x) + M_4 f^{(4)}(x) + M_6 f^{(6)}(x) + ... \tag{5.3}$$

Ainsi, la montée en ordre de l'interpolation SPH au continu peut être obtenue en annulant successivement les intégrales M_2, M_4, etc... Plus le nombre d'intégrales M_{2n} nulles est grand, plus un ordre de convergence élevé est théoriquement obtenu. Il est donc théoriquement possible d'augmenter l'ordre de convergence à l'aide d'un choix approprié de la fonction noyau. Cependant, la seule manière d'annuler les intégrales M_{2n} est de choisir un noyau prenant des valeurs négatives (car si le noyau est positif sur tout son support alors les intégrales M_{2n} seront positives car intégrales d'une fonction positive). Ainsi, pour atteindre un ordre de convergence élevé il faut choisir un noyau présentant des oscillations entre des valeurs positives et négatives. De plus, comme le montre la Figure 5.1, plus l'ordre est élevé plus ces oscillations sont importantes. Ce phénomène, proche du phénomène de Runge, aura une influence sur la stabilité et la robustesse des simulations. Comme évoqué dans [109], ce phénomène n'est a priori pas problématique pour des simulations SPH Eulériennes, mais le devient dès que l'on se place en formalisme Lagrangien. Le risque est de se retrouver avec des poids de quadrature négatifs, et ainsi de s'éloigner fortement de la propriété de partition de l'unité (2.42) au niveau discret [109] (ce phénomène est rencontré pour d'autres méthodes de quadrature comme par exemple la méthode de Newton-Cotes). Pour cette raison, cette méthode de montée en ordre est très peu rencontrée en pratique. De plus, dès que l'on est en présence d'une répartition non-uniforme des particules, alors le développement (5.3) n'est plus valable puisque les intégrales M_{2n+1} au niveau discret ne sont plus nulles a priori.

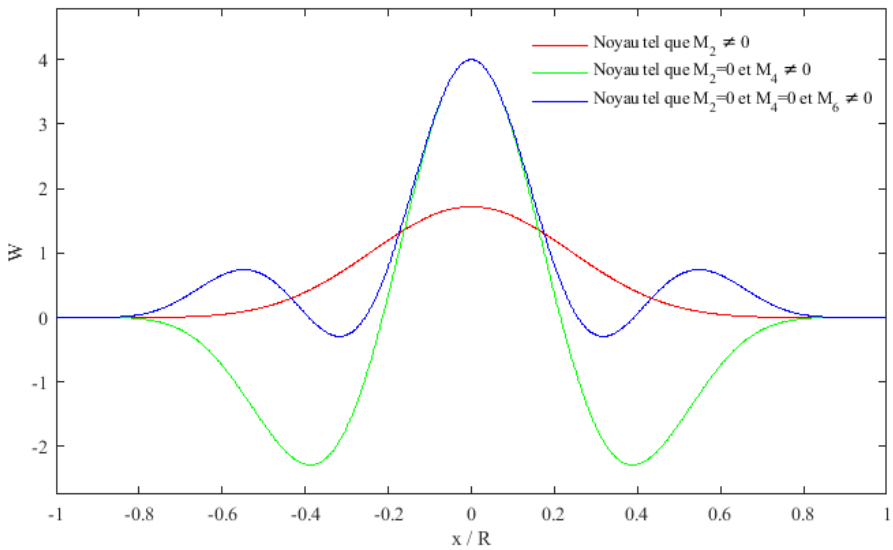

FIGURE 5.1 – Noyaux permettant d'assurer une montée en ordre de l'erreur de troncature au continu (5.3).

5.2.2 Correction des opérateurs SPH

Une autre piste pour augmenter l'ordre de la méthode SPH consiste à corriger directement les opérateurs SPH. Deux exemples élémentaires ont déjà été donnés à la section 2.1.5 avec la correction des opérateurs à l'aide de la correction Shepard et de la matrice de renormalisation, permettant d'atteindre des propriétés de consistance respectivement à l'ordre 0 et à l'ordre 1. L'idée générale de la correction des opérateurs SPH est d'étendre cette idée de consistance des opérateurs jusqu'à un ordre arbitrairement élevé en théorie. Cette piste fait l'objet d'une

littérature relativement variée et on pourra par exemple se référer à [85] [14] [16] [45] [46] [112] pour plus de détails. On présente ici les grands principes de cette méthode.

La correction des opérateurs classiquement proposée consiste à ajouter un terme correctif au sein de l'interpolation SPH (2.28) :

$$\langle f \rangle_i^C = \sum_{j \in \Omega_i} f_j P_i(\boldsymbol{x}_j) W_{ij} V_j = \sum_{j \in \Omega_i} f_j W_{ij}^C V_j, \tag{5.4}$$

où $W_{ij}^C = P_i(\boldsymbol{x}_j) W_{ij}$ peut être interprété comme une modification du noyau par l'intermédiaire du terme $P_i(\boldsymbol{x}_j)$, permettant de vérifier les différentes propriétés de consistance. Classiquement, la fonction correctrice P_i est décomposée sur une base de fonctions $\left\{\psi_i^1, \psi_i^2, ..., \psi_i^N\right\}$ choisie à l'avance (où N désigne la taille de la base choisie) :

$$P_i(\boldsymbol{x}_j) = \alpha_i^1 \psi_i^1(\boldsymbol{x}_j) + \alpha_i^2 \psi_i^2(\boldsymbol{x}_j) + ... + \alpha_i^N \psi_i^N(\boldsymbol{x}_j), \tag{5.5}$$

où les coefficients $\alpha_i^1, \alpha_i^2, ..., \alpha_i^N$ sont déterminés afin que l'expression (5.4) donne une évaluation exacte sur l'ensemble des vecteurs de la base ; i.e. :

$$\forall k \in [\![1, N]\!], \quad \left\langle \psi_i^k \right\rangle_i^C = \psi_i^k(\boldsymbol{x}_i). \tag{5.6}$$

La condition (5.6) est équivalente au système linéaire suivant :

$$\mathbb{A}_i \boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{B}_i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \cdots & A_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i^1 \\ \alpha_i^2 \\ \vdots \\ \alpha_i^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_i^1(\boldsymbol{x}_i) \\ \psi_i^2(\boldsymbol{x}_i) \\ \vdots \\ \psi_i^N(\boldsymbol{x}_i) \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

où les coefficients de la matrice $\mathbb{A}_i$ sont donnés par $A_{k,l} = \sum_{j \in \Omega_i} \psi_i^k(\boldsymbol{x}_j) \psi_i^l(\boldsymbol{x}_j) W_{ij} V_j$. La résolution de ce système permet de déterminer les coefficients $\alpha_i^1, \alpha_i^2, ..., \alpha_i^N$. On remarquera que le système (5.7) ne correspond à rien d'autre qu'à la résolution d'un système aux moindres carrés. Il présente l'avantage de dépendre uniquement de la position des particules (et non de la valeur des différents champs physiques). Le calcul de la correction P_i est donc effectué une seule fois par pas de temps.

Pour atteindre les propriétés de consistance à un ordre arbitraire n (i.e. être capable de reproduire de manière exacte toute fonction polynomiale d'ordre au moins égal à n) il suffit alors de choisir la base de fonctions $\left\{\psi_i^1, \psi_i^2, ..., \psi_i^N\right\}$ comme étant la base canonique des polynômes d'ordre inférieur ou égal à n (la piste d'une base de fonctions non-polynomiale n'a pas été explorée dans la littérature). Par exemple, en 2D et pour assurer une consistance à l'ordre 2, la base choisie pourra être $\left\{1, (x - x_i), (y - y_i), (x - x_i)^2, (x - x_i)(y - y_i), (y - y_i)^2\right\}$ (où

x et y sont les composantes du vecteur position $\boldsymbol{x}$).

Ce raisonnement appliqué à l'interpolation SPH (2.28) peut également être appliqué pour la correction des opérateurs dérivés. Pour ne pas alourdir le propos et les notations, on présente dans la suite uniquement le cas en dimension 1 (le passage aux dimensions supérieures se fait alors en raisonnant composante par composante). Ainsi, de même que précédemment, la correction de l'opérateur gradient (2.29) se fait par l'ajout d'un terme correctif :

$$\langle \boldsymbol{grad} f \rangle_i^C = \sum_{j \in \Omega_i} f_j Q_i(\boldsymbol{x}_j) \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j = \sum_{j \in \Omega_i} f_j \boldsymbol{\nabla} W_{ij}^C V_j, \tag{5.8}$$

où le terme correctif est décomposé sur la base de fonctions choisie :

$$Q_i(\boldsymbol{x}_j) = \beta_i^1 \psi_i^1(\boldsymbol{x}_j) + \beta_i^2 \psi_i^2(\boldsymbol{x}_j) + ... + \beta_i^N \psi_i^N(\boldsymbol{x}_j). \tag{5.9}$$

Les coefficients $\beta_i^1, \beta_i^2, ..., \beta^N$ sont déterminés afin que l'opérateur corrigé (5.8) donne une valeur exacte des gradients de la base choisie (on rappelle qu'en dimension 1 le gradient est équivalent à une simple dérivation). On obtient alors un système linéaire similaire au système (5.7) :

$$\mathbb{C}_i \boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{D}_i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,N} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \dots & C_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N,1} & C_{N,2} & \cdots & C_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_i^1 \\ \beta_i^2 \\ \vdots \\ \beta_i^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_i^{1'}(\boldsymbol{x}_i) \\ \psi_i^{2'}(\boldsymbol{x}_i) \\ \vdots \\ \psi_i^{N'}(\boldsymbol{x}_i) \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

où les coefficients de la matrice $\mathbb{C}_i$ sont donnés par $C_{k,l} = \sum_{j \in \Omega_i} \psi_i^k(\boldsymbol{x}_j) \psi_i^l(\boldsymbol{x}_j) \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j$. Cette procédure peut également être étendue aux opérateurs symétriques et antisymétriques.

Cette correction des opérateurs pour assurer la montée en ordre présente plusieurs avantages. Les termes correctifs ne dépendent là encore que de la position des particules et sont a priori utilisables même pour une distribution très désordonnée des particules. De plus, cette correction est a priori valable jusqu'à un ordre arbitrairement élevé. Cependant, en pratique seul un ordre de convergence jusqu'à l'ordre 2 semble pouvoir être envisageable (ce qui est tout de même un gain important par rapport à l'ordre 1 observé sans correction). Cela s'explique par plusieurs phénomènes. Tout d'abord, pour des ordres de consistance trop élevés on observe un phénomène de Runge similaire à celui décrit à la section 5.2.1, et qui aura tendance à rendre la simulation instable. On montre sur la Figure 5.2 comment l'ordre de consistance influence la forme du noyau corrigé W^C. Ainsi, en pratique cette méthode n'est pas utilisée au-delà d'un ordre 2 de consistance. Ensuite, il existe une condition pour que les matrices $\mathbb{A}_i$ et $\mathbb{C}_i$ soient inversibles : le nombre de particules voisines M doit être supérieur à la taille N de la base de fonction choisie (en pratique on impose plutôt la condition $M > 1.5N$). Cela rend donc cette méthode inutilisable pour les ordres de consistance

trop élevés. Enfin, un autre désavantage de cette correction est qu'elle implique a priori une perte de la symétrie du noyau. Ainsi, la symétrie des interactions (2.50) n'est plus vérifiée, ce qui modifie les propriétés de conservation des schémas SPH [112].

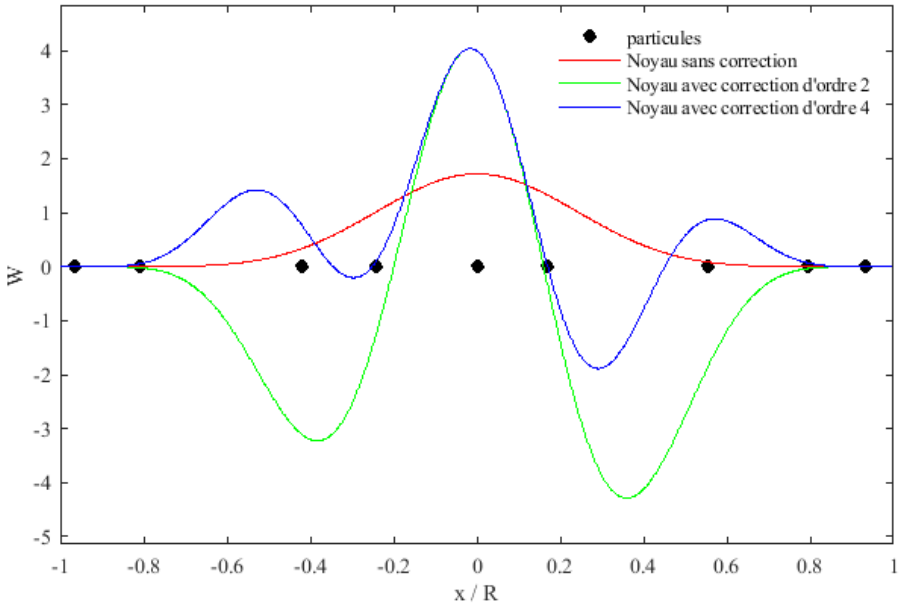

FIGURE 5.2 – Influence de l'ordre de la correction sur le noyau SPH pour une répartition désordonnée de particules.

5.2.3 Reconstruction des champs à l'interface entre particules pour les schémas de type Riemann-SPH

Une nouvelle approche pour la montée en ordre de la méthode SPH a été rendue possible par les travaux de Parshikov et al. [119] et de Vila [152] et l'introduction de nouveaux schémas. Ces schémas (présentés aux sections 2.2.4 et 2.2.5) sont notamment basés sur la résolution de problèmes de Riemann à l'interface entre chaque paire de particules en interaction. Cette utilisation de problèmes de Riemann est très proche de ce qui peut être fait au sein de la méthode des Volumes Finis. Comme montré dans [152] [60] [129], il existe d'ailleurs un lien fort entre la méthode des Volumes Finis et ces nouvelles formulations. Ainsi, il est théoriquement possible d'utiliser et de s'inspirer de l'ensemble des techniques développées au sein de la méthode des Volumes Finis pour augmenter l'ordre de convergence et la précision des opérateurs SPH. En particulier, une manière de gagner en précision au sein de la méthode des Volumes Finis est de fournir une reconstruction d'ordre élevé des états initiaux gauche $\boldsymbol{\phi}_L$ et droit $\boldsymbol{\phi}_R$ des problèmes de Riemann (2.84). Pour la méthode SPH, et en particulier pour les schémas de type Riemann-SPH, il est donc possible en principe d'augmenter la précision des opérateurs en fournissant une reconstruction à l'interface $\boldsymbol{x}_{ij}$ d'ordre élevé des états initiaux gauche $\boldsymbol{\phi}_L$ et droit $\boldsymbol{\phi}_R$ des problèmes de Riemann (on donne sur la Figure 5.3 un schéma de principe de cette méthode de montée en ordre).

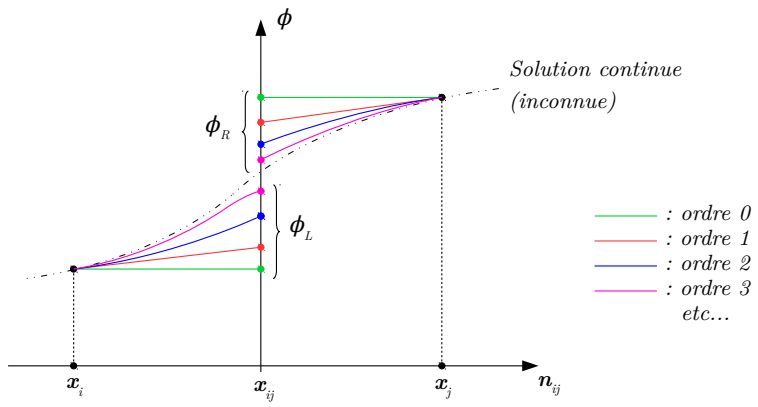

FIGURE 5.3 – Principe de la montée en ordre par reconstruction des états gauche et droit des problèmes de Riemann : plus l'ordre de la reconstruction à l'interface $\boldsymbol{x}_{ij}$ est élevé, plus l'ordre de convergence de la méthode SPH est théoriquement élevé.

Dans [152], Vila propose déjà une méthode de montée en ordre et de reconstruction des états initiaux des problèmes de Riemann. Une reconstruction MUSCL d'ordre 1 (i.e. une reconstruction linéaire) y est proposée pour reconstruire ces états initiaux. Cette approche a été détaillée à la section 2.2.6.3. Numériquement, elle permet d'atteindre jusqu'à un ordre 2 de convergence pour certains cas tests. Afin de tenter de dépasser cet ordre 2 de convergence, d'autres méthodes de reconstruction des états gauche et droit des problèmes de Riemann ont ensuite été proposées.

Afin d'augmenter l'ordre de reconstruction des états gauche et droit des problèmes de Riemann, il est également possible d'utiliser des reconstructions MLS (Moving Least Squares), qui ne sont rien d'autre que des reconstructions aux moindres carrés sur le voisinage de chaque particule (pour les développements théoriques liés à cette méthode on pourra se référer à [78]). Ces reconstructions MLS présentent l'avantage de pouvoir être effectuées à un ordre a priori arbitraire. En pratique, le nombre de particules voisines limite cependant l'ordre maximal que l'on peut atteindre. Au sein des schémas Riemann-SPH, cette méthode de reconstruction a été utilisée par Renaut et al. [130] [129], permettant d'atteindre jusqu'à un ordre 3 pour certains cas tests (comme le cas d'un écoulement derrière un cylindre).

Au sein de la méthode des Volumes Finis, une méthode classiquement utilisée pour la reconstruction à un ordre élevé des états gauche et droit des problèmes de Riemann est la méthode de reconstruction WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory). Cette méthode est basée sur une reconstruction polynomiale sur différents stencils. Une pondération astucieuse des différents stencils permet de se passer de limiteurs, bien que dans ce cas le caractère TVD (qui était garanti avec une reconstruction MUSCL ; cf. section 2.2.6.3) ne soit plus assuré. On pourra se référer à [86] pour les considérations théoriques de la méthode WENO et à [72] [146] pour des exemples pratiques d'applications au sein de la méthode des Volumes Finis. Au sein de la méthode SPH, Avesani et al. [9] ont proposé d'utiliser cette méthode de reconstruction pour les états gauche et droit des problèmes de Riemann. Les stencils y sont définis comme des sous-ensembles du voisinage de chaque particule et sont complétés à l'aide de reconstructions MLS. Une amélioration des résultats est globalement obtenue, et une convergence à l'ordre 4 est observée pour le cas simple de la reconstruction

d'un champ scalaire.

5.3 Proposition d'une nouvelle méthode de reconstruction WENO-MLS

L'utilisation d'une reconstruction WENO présente de nombreux avantages. D'abord, un ordre arbitrairement élevé peut théoriquement être atteint (bien qu'en pratique différents effets viennent nuancer cette affirmation comme on le verra par la suite). D'autre part, l'utilisation d'indicateurs de régularité (cf. section 5.3.1) permet de se passer de l'utilisation de limiteurs qui se trouvent être relativement diffusifs, tout en maintenant la stabilité et la robustesse des simulations. Ces indicateurs de régularité permettent de traiter les zones de fort gradient en dégradant localement (de manière régulière et non "brutale") l'ordre de la reconstruction, permettant ainsi une capture correcte des champs dans ces régions (y compris au voisinage de chocs). Cela en fait une méthode qui est largement utilisée au sein des Volumes Finis, et c'est pour ces avantages que le choix d'explorer l'utilisation d'une reconstruction WENO dans la méthode SPH a été retenu. On se propose ici d'étendre la méthode proposée par Avesani et al. [9] et qui a permis de valider les avantages d'une reconstruction WENO pour les états gauche et droit des problèmes de Riemann au sein d'une formulation SPH.

Dans le cadre d'un formalisme Lagrangien (cas de la méthode SPH) les différents points de calcul ne sont pas uniformément répartis et ne suivent pas de directions privilégiées. Or la méthode de reconstruction WENO, bien que pouvant être adaptée à une distribution non-uniforme des points d'interpolation le long de la direction de reconstruction (cf. par exemple [23]), s'avère beaucoup plus simple à mettre en œuvre sur une répartition uniforme. L'utilisation de reconstructions WENO dans la méthode SPH nécessite donc a priori de d'abord reconstruire les points manquants au niveau de chaque stencil (voir Figure 5.4). Comme proposé par Avesani et al. [9], on propose ici également d'utiliser une reconstruction MLS afin de reconstruire l'information manquante au niveau de chaque stencil. Pour chaque paire de particule $i-j$ en interaction, la résolution des problèmes de Riemann 1D se fait le long de la direction $\Delta\boldsymbol{x}_{ij} = \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i$. Ainsi, les reconstructions MLS permettent de déterminer les points manquants de manière uniforme le long de cette direction. Par convention, on associe l'état gauche à la particule i et l'état droit à la particule j (ainsi les points manquants "à gauche" seront calculés à l'aide de la reconstruction MLS associée à la particule i et réciproquement pour les points "à droite" avec la particule j). Contrairement à [9], les stencils utilisés ici ne seront qu'en dimension 1 (plus proche de ce qui se fait pour la méthode des Volumes Finis) et le calcul des poids associés à chaque stencil est également différent (cf. section 5.3.1). On donne par la suite plus de détails sur les différentes étapes de calcul de cette nouvelle méthode de reconstruction.

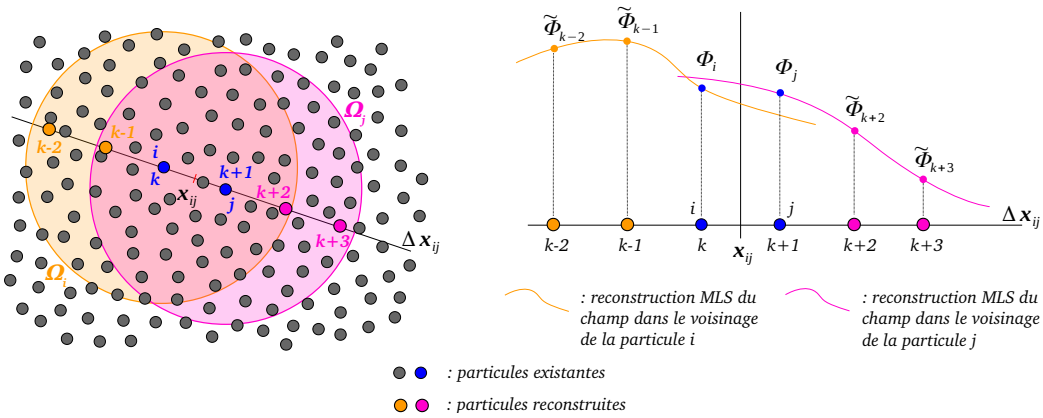

FIGURE 5.4 – Reconstruction MLS afin de compléter les stencils utilisés pour la reconstruction WENO des états gauche et droit des problèmes de Riemann.

5.3.1 Reconstruction WENO sur une grille uniforme

La méthode de reconstruction proposée s'appuie donc sur l'utilisation de points "virtuels" équitablement répartis le long de la direction $\Delta \boldsymbol{x}_{ij} = \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i$. Ces points régulièrement espacés servent alors de points d'appui pour effectuer la reconstruction WENO sur grille uniforme présentée dans cette section. Celle-ci se base sur plusieurs reconstructions polynomiales sur différents stencils. Elle est alors déterminée comme une combinaison convexe de chacune des reconstructions sur les différents stencils (le calcul des poids de la combinaison convexe dépend de l'ordre de la reconstruction et des stencils choisis ; cf. [86] [72] [146] pour plus de détails et en particulier pour les formules de reconstruction aux différents ordres). À titre d'exemple, on détaille ici les calculs pour une méthode de reconstruction WENO d'ordre 5. Dans ce cas, trois stencils sont utilisés, comme illustré sur la Figure 5.5.

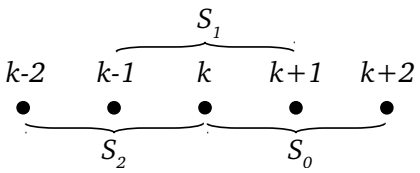

FIGURE 5.5 – Stencils utilisés pour une reconstruction WENO d'ordre 5.

On supposera donc ici que l'on connaît la valeur du champ ϕ au niveau des points de calcul $k-2$, $k-1$, k, $k+1$ et $k+2$. La reconstruction WENO d'ordre 5 à gauche d'un champ ϕ au niveau de l'interface $k+\frac{1}{2}$ est alors donnée par :

$$\begin{aligned}\phi^L_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\,[&\omega_0(-\phi_{k+2} + 5\phi_{k+1} + 2\phi_k)\\ &+\omega_1(-\phi_{k-1} + 5\phi_k + 2\phi_{k+1})\\ &+\omega_2(2\phi_{k-2} - 7\phi_{k-1} + 11\phi_k)\,]\,,\end{aligned} \tag{5.11}$$

où les poids ω_l sont donnés par :

$$\omega_l = \frac{\alpha_l}{\sum_{n=0}^{2} \alpha_n}, \quad \alpha_l = \frac{d_l}{(\beta_l + \epsilon)^2}, \quad l = 0, 1, 2 \quad , \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{13}{12}\left(\phi_k - 2\phi_{k+1} + \phi_{k+2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(3\phi_k - 4\phi_{k+1} + \phi_{k+2}\right)^2, \\
\beta_1 &= \frac{13}{12}\left(\phi_{k-1} - 2\phi_k + \phi_{k+1}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\phi_{k-1} - \phi_{k+1}\right)^2, \\
\beta_2 &= \frac{13}{12}\left(\phi_{k-2} - 2\phi_{k-1} + \phi_k\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\phi_{k-2} - 4\phi_{k-1} + 3\phi_k\right)^2,
\end{aligned} \tag{5.13}$$

et où les β_l sont les indicateurs de régularité. ϵ est introduit pour éviter une division par 0 (usuellement fixé à $\epsilon = 10^{-6}$) et les d_l sont les poids optimaux ($d_0 = \frac{3}{10}$, $d_1 = \frac{3}{5}$, $d_2 = \frac{1}{10}$ pour le cas d'une reconstruction WENO d'ordre 5). La reconstruction à droite $\phi^R_{k+\frac{1}{2}}$ au niveau de l'interface $k + \frac{1}{2}$ est obtenue de manière "symétrique" en s'appuyant cette fois-ci sur les points $k-1$, k, $k+1$, $k+2$ et $k+3$. $\phi^L_{k+\frac{1}{2}}$ et $\phi^R_{k+\frac{1}{2}}$ sont alors utilisés comme états gauche et droit respectivement du problème de Riemann localisé en $k + \frac{1}{2}$.

5.3.2 Reconstruction MLS

La reconstruction MLS utilisée ici est très proche de la méthode présentée à la section 5.2.2. Étant donnée une base de N fonctions $\left\{\psi_i^1, \psi_i^2, ..., \psi_i^N\right\}$, l'expression générale de la reconstruction MLS du champ ϕ dans le voisinage de la particule i est donnée par :

$$\phi_i^{MLS}\left(\boldsymbol{x}_j\right) = \phi_i + \sum_{k=1}^{N} a_i^k \psi_i^k\left(\boldsymbol{x}_j\right), \tag{5.14}$$

où les coefficients a_i^k sont déterminés en résolvant le système linéaire :

$$\mathbb{M}_i \boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{B}_i. \tag{5.15}$$

On notera que, dans l'expression (5.14), l'état constant ϕ_i n'est pas reconstruit, ce qui permet d'éviter certains problèmes de conservation des schémas tout en diminuant la taille des systèmes linéaires à résoudre. Le vecteur $\boldsymbol{A}_i$ contient les coefficients inconnus a_i^k, tandis que $\mathbb{M}_i$ et $\boldsymbol{B}_i$ s'expriment comme :

$$\mathbb{M}_i = \sum_{j \in \Omega_i} \boldsymbol{C}_{ij}{}^t \boldsymbol{C}_{ij} W_{ij} V_j, \tag{5.16}$$

$$\boldsymbol{B}_i = \sum_{j\in\Omega_i} (\phi_j - \phi_i)\boldsymbol{C}_{ij} W_{ij} V_j, \tag{5.17}$$

où le vecteur $\boldsymbol{C}_{ij} = {}^t\left(\psi_i^1(\boldsymbol{x}_j), \psi_i^2(\boldsymbol{x}_j), ..., \psi_i^N(\boldsymbol{x}_j)\right)$ contient les évaluations en $\boldsymbol{x}_j$ des vecteurs de la base choisie. Classiquement, la base choisie est la base polynomiale canonique d'ordre n. Par exemple, en 2D et pour une reconstruction MLS d'ordre 2, la base choisie pourra être $\left\{(x-x_i), (y-y_i), (x-x_i)^2, (x-x_i)(y-y_i), (y-y_i)^2\right\}$ (où x et y sont les composantes du vecteur position $\boldsymbol{x}$). On notera que l'ordre dans lequel sont rangés les polynômes n'a aucune influence et que le polynôme constant n'est pas présent puisque que l'état constant n'est pas reconstruit. De manière générale, la taille de la base polynomiale (et donc des systèmes linéaires à résoudre) est donnée par $N = \binom{n+\eta}{\eta} - 1$ (le terme -1 correspondant au fait que l'état constant n'est pas reconstruit). On remarque donc que la taille des systèmes linéaires augmente rapidement avec l'ordre n de la reconstruction MLS et avec la dimension η du problème. De plus, on peut montrer que dès lors que la taille N de la base devient supérieure au nombre de particules voisines, le système n'est a priori plus inversible. Ces deux limitations font qu'on ne peut pas atteindre un ordre arbitrairement grand en pratique (bien que cette limite soit rarement atteinte).

5.3.3 Mise en place d'une nouvelle méthode de reconstruction WENO-MLS

On dispose désormais de tous les éléments pour préciser la mise en place de la nouvelle méthode de reconstruction WENO-MLS. Par convention, on associe la particule i au point de calcul k et la particule j au point de calcul $k+1$ (ainsi reconstruire les états gauche et droit des problèmes de Riemann en $\boldsymbol{x}_{ij}$ revient bien à reconstruire les champs en $k+\frac{1}{2}$). La première étape consiste donc à compléter les stencils WENO à l'aide d'une reconstruction MLS. On notera que seuls les points de calcul $\phi_k = \phi_i$ et $\phi_{k+1} = \phi_j$ sont a priori connus. Ainsi les valeurs des champs au niveau des points manquants, notées $\tilde{\phi}$, sont données par :

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_{k+2} &= \phi_j^{MLS}(\boldsymbol{x}_j + \Delta\boldsymbol{x}_{ij}), \\
\tilde{\phi}_{k-1} &= \phi_i^{MLS}(\boldsymbol{x}_i - \Delta\boldsymbol{x}_{ij}), \\
\tilde{\phi}_{k-2} &= \phi_i^{MLS}(\boldsymbol{x}_i - 2\Delta\boldsymbol{x}_{ij}).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Finalement la reconstruction WENO-MLS de l'état gauche du problème de Riemann est donnée par la formule (5.11), mais en utilisant cette fois-ci les points reconstruits :

$$\begin{aligned}
\phi_L = \frac{1}{6}\,[&\omega_0(-\tilde{\phi}_{k+2} + 5\phi_{k+1} + 2\phi_k) \\
&+\omega_1(-\tilde{\phi}_{k-1} + 5\phi_k + 2\phi_{k+1}) \\
&+\omega_2(2\tilde{\phi}_{k-2} - 7\tilde{\phi}_{k-1} + 11\phi_k)\,],
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Le calcul des poids ω_l et des indicateurs de régularité β_l se fait respectivement à l'aide des expressions (5.12) et (5.13) mais en utilisant les valeurs (5.18) au niveau des points manquants. L'expression de l'état droit s'obtient de manière similaire et symétrique en échangeant le rôle des particules i et j.

On notera qu'aucun limiteur n'est utilisé dans cette méthode de reconstruction. Or, comme évoqué à la section 5.2.2, une reconstruction MLS à un ordre élevé est susceptible de provoquer des oscillations non désirées (aussi appelées phénomène de Runge) ce qui rend le calcul instable. Il est donc nécessaire de limiter l'influence de ces éventuelles oscillations. Ici, la stabilisation de la méthode est assurée par les indicateurs de régularité au niveau de chaque stencil. Dans un stencil S_l donné, si le champ à reconstruire est fortement oscillant ou bien s'il présente un fort gradient (tout cela en comparaison aux autres stencils), alors l'indicateur de régularité β_l (5.13) est bien supérieur à ceux des autres stencils. Ainsi le poids ω_l (5.12) est négligeable et tout se passe comme si le stencil S_l n'était pas pris en compte dans la reconstruction WENO. La stabilité est donc a priori préservée.

5.4 Étude théorique en dimension 1

On propose ici une étude théorique de cette méthode de reconstruction. Cette étude s'inspire de l'étude menée par Quinlan et al. [124] et a notamment pour but de déterminer l'erreur de troncature des opérateurs SPH. Afin de simplifier les calculs, cette étude est menée en dimension 1. De plus, le désordre particulaire n'est pas pris en compte ici (on se place dans le cas où les particules sont régulièrement espacées). Enfin, toujours afin de simplifier les calculs, on remplace la solution du problème de Riemann par le flux centré $\phi_E \simeq \frac{1}{2}(\phi_L + \phi_R)$. De manière générale, on étudie donc ici l'erreur de troncature de l'opérateur dérivé suivant, en dimension 1 :

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \sum_{j \in \Omega_i} 2\phi_E \nabla W_{ij} V_j \simeq \sum_{j \in \Omega_i} (\phi_L + \phi_R) \nabla W_{ij} V_j. \tag{5.20}$$

Malgré les nombreuses simplifications effectuées, les résultats obtenus vont permettre de dégager certaines tendances qui pourront être validées et comparées par la suite avec des résultats numériques.

5.4.1 Étude de la reconstruction WENO sans interpolation MLS

Dans un premier temps, on profite d'avoir choisi une distribution uniforme des particules pour étudier la reconstruction WENO seule, au sein de l'opérateur SPH (5.20). En effet, dans ce cas il n'y a pas besoin de reconstruire les points virtuels au niveau de chaque stencil et la formule (5.11) peut être directement utilisée. On suppose également que l'on est dans une configuration où les poids ω_l sont pris égaux à leurs valeurs optimales (i.e. $\omega_l = d_l$, ce qui revient à supprimer l'influence des indicateurs de régularité). Dans ces conditions, la solution à l'interface est donnée par :

$$\phi_E = \frac{1}{2}\left(\phi_L + \phi_R\right) = \frac{1}{60}\left(\phi_{k-2} - 8\phi_{k-1} + 37\phi_k + 37\phi_{k+1} - 8\phi_{k+2} + \phi_{k+3}\right). \tag{5.21}$$

Par souci d'allègement des notations, l'expression (5.21) ne fait pas référence aux particules i et j mais il faut bien garder à l'esprit que la solution ϕ_E du problème de Riemann est obtenue au niveau de l'interface $i-j$ (dans ce cas les points k et $k+1$ sont respectivement associés aux particules i et j). À l'aide d'un développement de Taylor au voisinage de $i \sim k$, l'expression (5.21) peut s'exprimer comme :

$$\begin{aligned}\phi_E = \frac{1}{60}\,(&60\phi_i + 30\Delta x_{ij}\phi_i^{(1)} + 5\Delta x_{ij}^2\phi_i^{(2)} - \frac{1}{12}\Delta x_{ij}^4\phi_i^{(4)} \\ &+ \frac{31}{72}\Delta x_{ij}^6\phi_i^{(6)} + \frac{3}{14}\Delta x_{ij}^7\phi_i^{(7)} + \dots\,).\end{aligned} \tag{5.22}$$

On peut tout d'abord remarquer que les termes d'ordres 3 et 5 sont nuls dans l'expression (5.22). De plus, par parité du noyau et puisque la répartition des particules est uniforme, tous les termes d'ordre pair au sein de l'expression (5.20) sont nuls. Ainsi on a :

$$\langle\nabla\phi\rangle_i = \phi_i^{(1)}\sum_{j\in\Omega_i}\Delta x_{ij}\nabla W_{ij}V_j + \frac{1}{140}\phi_i^{(7)}\sum_{j\in\Omega_i}\Delta x_{ij}^7\nabla W_{ij}V_j + \dots \tag{5.23}$$

Il faut donc évaluer les sommes du type $\sum_{j\in\Omega_i}\Delta x_{ij}^k\nabla W_{ij}V_j$, pour k un entier impair. Pour cela on utilise la méthode développée par Quinlan et al. [124]. Ces sommes peuvent se réécrire à l'aide de la formule d'Euler-McLaurin :

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\Omega_i}\Delta x_{ij}^k\nabla W_{ij}V_j &= \int_{x_i-R}^{x_i+R}(x-x_i)^k\,W'\left(x_i-x\right)dx \\ &+ \Delta x^{\beta+2}\frac{B_{\beta+2}}{(\beta+2)!}\left[\left((x-x_i)^kW'(x_i-x)\right)_{x=x_i+R}^{(\beta+1)} - \left((x-x_i)^kW'(x_i-x)\right)_{x=x_i-R}^{(\beta+1)}\right] + \dots,\end{aligned} \tag{5.24}$$

où les $B_{\beta+2}$ sont les nombres de Bernoulli et β est l'entier le plus grand tel que la dérivée d'ordre β du noyau et toutes les dérivées d'ordres inférieurs soient nulles sur le bord du support du noyau Ω_i (par exemple, pour un noyau de Wendland de classe C^m, $\beta = m$). Afin d'éliminer la dépendance en R de l'expression précédente, on propose d'utiliser le changement de variable suivant :

$$\hat{W}(s) = RW\left(x-x_i\right), \quad s = \frac{x-x_i}{R}, \quad \frac{\partial^n W\left(x-x_i\right)}{\partial x^n} = \frac{1}{R^{n+1}}\hat{W}^{(n)}(s), \tag{5.25}$$

ce qui permet d'avoir une variable appartenant à l'intervalle $s \in [0,1]$ et une quantité $\hat{W}$ en $O(1)$ (de même que toutes ses dérivées successives). Cela permet alors de donner l'ordre de grandeur des termes de l'expression (5.24) :

$$\begin{aligned}\int_{x_i-R}^{x_i+R} (x-x_i)^k W'(x_i-x)\,dx &= -R^{k-1}\int_{-1}^{1} s^k \hat{W}'(s)ds \\ &= O\left(R^{k-1}\right) = O\left(\left(\frac{R}{\Delta x}\right)^{k-1}\Delta x^{k-1}\right),\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}&\Delta x^{\beta+2}\frac{B_{\beta+2}}{(\beta+2)!}\left[\left((x-x_i)^k W'(x_i-x)\right)^{(\beta+1)}_{x=x_i+R} - \left((x-x_i)^k W'(x_i-x)\right)^{(\beta+1)}_{x=x_i-R}\right] \\ &= -\Delta x^{\beta+2}\frac{B_{\beta+2}}{(\beta+2)!}R^{k-2}\frac{1}{R^{\beta+1}}\left[\left(s^k\hat{W}'(s)\right)^{(\beta+1)}_{s=1} - \left(s^k\hat{W}'(s)\right)^{(\beta+1)}_{s=-1}\right] \\ &= O\left(R^{k-\beta-3}\Delta x^{\beta+2}\right) = O\left(\left(\frac{R}{\Delta x}\right)^{k-\beta-3}\Delta x^{k-1}\right),\end{aligned} \tag{5.27}$$

ce qui donne finalement :

$$\sum_{j\in\Omega_i}\Delta x_{ij}^k \nabla W_{ij} V_j = O\left(\left(\frac{R}{\Delta x}\right)^{k-1}\Delta x^{k-1}\right) + O\left(\left(\frac{R}{\Delta x}\right)^{k-\beta-3}\Delta x^{k-1}\right). \tag{5.28}$$

En remarquant que la partition de l'unité implique $-\int_{-1}^{1} s\hat{W}'(s)ds = 1$ et en ne conservant que les termes de plus hauts degrés, on en déduit alors l'erreur de troncature de l'opérateur (5.20) (pour une répartition uniforme des particules) :

$$\langle\nabla\phi\rangle_i - \phi_i^{(1)} = O\left(\left(\frac{R}{\Delta x}\right)^{-\beta-2}\right) + O\left(\left(\frac{R}{\Delta x}\right)^{6}\Delta x^{6}\right). \tag{5.29}$$

Ainsi, pour une reconstruction WENO d'ordre 5 et pour un ratio $\frac{R}{\Delta x}$ fixé, un ordre 6 de convergence spatiale est théoriquement obtenu (le terme à la puissance $-\beta-2$ correspondant à l'erreur de saturation, et devient négligeable dès que $\frac{R}{\Delta x}$ est suffisamment grand). Bien entendu ce résultat est modifié si l'on change l'ordre de la reconstruction WENO utilisé (plus l'ordre de cette reconstruction est élevé, plus l'ordre de l'opérateur SPH est théoriquement élevé).

5.4.2 Convergence de la reconstruction MLS

Avant d'étudier la nouvelle reconstruction WENO-MLS, il est important de préciser le comportement de la méthode MLS en elle-même, et en particulier des coefficients a_i^k. Ces résultats seront utiles pour l'étude de la reconstruction WENO-MLS. En dimension 1, la base polynomiale canonique d'ordre n est donnée par $\left\{(x-x_i), (x-x_i)^2, ..., (x-x_i)^n\right\}$. Ainsi la matrice $\mathbb{M}_i$ (5.16) s'exprime ici comme :

$$\mathbb{M}_i = \sum_{j\in\Omega_i} \begin{pmatrix} \Delta x_{ij}^2 & \Delta x_{ij}^3 & \dots & \Delta x_{ij}^{n+1} \\ \Delta x_{ij}^3 & \Delta x_{ij}^4 & \dots & \Delta x_{ij}^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta x_{ij}^{n+1} & \Delta x_{ij}^{n+2} & \cdots & \Delta x_{ij}^{2n} \end{pmatrix} W_{ij} V_j. \tag{5.30}$$

On reconnaît dans cette expression les sommes $\sum_{j\in\Omega_i} \Delta x_{ij}^k \nabla W_{ij} V_j$. À l'aide des équations (5.24-5.27) on peut déterminer que leur limite lorsque le ratio $\frac{R}{\Delta x}$ tend vers l'infini est donnée par $-R^{k-1}\int_{-1}^{1} s^k \hat{W}'(s)ds = R^{k-1} I_k$. La limite de la matrice (5.30) est alors donnée par :

$$\lim_{\frac{R}{\Delta x}\to+\infty} \mathbb{M}_i = \begin{pmatrix} R^2 I_2 & 0 & R^4 I_4 & \dots & R^n I_n & 0 \\ 0 & R^4 I_4 & 0 & \dots & 0 & R^{n+2} I_{n+2} \\ R^4 I_4 & 0 & R^6 I_6 & \dots & R^{n+2} I_{n+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R^n I_n & 0 & R^{n+2} I_{n+2} & \cdots & R^{2n-2} I_{2n-2} & 0 \\ 0 & R^{n+2} I_{n+2} & 0 & \cdots & 0 & R^{2n} I_{2n} \end{pmatrix}. \tag{5.31}$$

De même, la limite du vecteur $\boldsymbol{B}_i$ (5.17) peut se déterminer en le réécrivant à l'aide de développements de Taylor :

$$\boldsymbol{B}_i = \sum_{j\in\Omega_i} (\phi_j - \phi_i) \begin{pmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta x_{ij}^2 \\ \vdots \\ \Delta x_{ij}^n \end{pmatrix} W_{ij} V_j = \sum_{j\in\Omega_i} \begin{pmatrix} \Delta x_{ij}^2 \phi_i^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta x_{ij}^3 \phi_i^{(2)} + ... \\ \Delta x_{ij}^3 \phi_i^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta x_{ij}^4 \phi_i^{(2)} + ... \\ \Delta x_{ij}^4 \phi_i^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta x_{ij}^5 \phi_i^{(2)} + ... \\ \vdots \\ \Delta x_{ij}^n \phi_i^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta x_{ij}^{n+1} \phi_i^{(2)} + ... \\ \Delta x_{ij}^{n+1} \phi_i^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta x_{ij}^{n+2} \phi_i^{(2)} + ... \end{pmatrix} W_{ij} V_j. \tag{5.32}$$

La limite du vecteur $\boldsymbol{B}_i$ est alors donnée par :

$$\lim_{\frac{R}{\Delta x}\to+\infty} \boldsymbol{B}_i = \begin{pmatrix} R^2 I_2 \phi_i^{(1)} + \frac{1}{6} R^4 I_4 \phi_i^{(3)} + \ \dots \ + \frac{1}{(n-1)!} R^n I_n \phi_i^{(n-1)} + O\left(R^{n+2}\right) \\ \frac{1}{2} R^4 I_4 \phi_i^{(2)} + \frac{1}{24} R^6 I_6 \phi_i^{(4)} + \ \dots \ + \frac{1}{n!} R^{n+2} I_{n+2} \phi_i^{(n)} + O\left(R^{n+4}\right) \\ R^4 I_4 \phi_i^{(1)} + \frac{1}{6} R^6 I_6 \phi_i^{(3)} + \ \dots \ + \frac{1}{(n-1)!} R^{n+2} I_{n+2} \phi_i^{(n-1)} + O\left(R^{n+4}\right) \\ \vdots \\ R^n I_n \phi_i^{(1)} + \frac{1}{6} R^{n+2} I_{n+2} \phi_i^{(3)} + \ \dots \ + \frac{1}{(n-1)!} R^{2n-2} I_{2n-2} \phi_i^{(n-1)} + O\left(R^{2n}\right) \\ \frac{1}{2} R^{n+2} I_{n+2} \phi_i^{(2)} + \frac{1}{24} R^{n+4} I_{n+4} \phi_i^{(4)} + \ \dots \ + \frac{1}{n!} R^{2n} I_{2n} \phi_i^{(n)} + O\left(R^{2n+2}\right) \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

La limite du vecteur $\boldsymbol{A}_i$ (et donc des coefficients a_i^k) est alors donnée par la solution du système linéaire suivant :

$$\left(\lim_{\frac{R}{\Delta x}\to+\infty} \mathbb{M}_i\right)\left(\lim_{\frac{R}{\Delta x}\to+\infty} \boldsymbol{A}_i\right) = \left(\lim_{\frac{R}{\Delta x}\to+\infty} \boldsymbol{B}_i\right). \tag{5.34}$$

On peut alors vérifier que le vecteur :

$$\lim_{\frac{R}{\Delta x}\to+\infty} \boldsymbol{A}_i = \begin{pmatrix} \phi_i^{(1)} + O\left(R^n\right) \\ \frac{1}{2}\phi_i^{(2)} + O\left(R^n\right) \\ \frac{1}{6}\phi_i^{(3)} + O\left(R^{n-2}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!}\phi_i^{(n-1)} + O\left(R^2\right) \\ \frac{1}{n!}\phi_i^{(n)} + O\left(R^2\right) \end{pmatrix}, \tag{5.35}$$

est bien solution du système (5.34). Finalement, la limite des coefficients a_i^k lorsque le double critère de convergence est vérifié est donnée par :

$$\lim_{\substack{\frac{R}{\Delta x}\to+\infty \\ R\to 0}} a_i^k = \frac{1}{k!}\phi_i^{(k)}. \tag{5.36}$$

5.4.2.1 Cas d'une reconstruction MLS seule

Dans la méthode proposée, la reconstruction MLS sert uniquement à reconstruire les points virtuels afin de compléter les stencils WENO. On peut légitimement se poser la question de ce choix et en particulier se demander pourquoi on n'utilise pas une reconstruction MLS pour reconstruire directement les états gauche et droit des problèmes de Riemann, comme proposé par Renaut et al. [130] [129]. Cela permettrait en particulier d'économiser les étapes de calcul liées à la reconstruction WENO. Outre le phénomène de Runge que cela peut entraîner, le fait d'utiliser directement une reconstruction MLS pour les états initiaux

du problème de Riemann induit une limitation au niveau de l'ordre de convergence que l'on peut théoriquement atteindre. C'est ce que nous montrons ci-après.

Supposons donc que les états gauche et droits soient déterminés directement à l'aide d'une reconstruction MLS d'ordre n :

$$\begin{cases} \phi_L = \phi_i^{MLS}\left(x_{ij}\right) = \phi_i + \sum_{k=1}^{n} a_i^k \left(\frac{1}{2}\left(x_i + x_j\right) - x_i\right)^k = \phi_i + \sum_{k=1}^{n} a_i^k \left(\frac{\Delta x_{ij}}{2}\right)^k \\ \phi_R = \phi_j^{MLS}\left(x_{ij}\right) = \phi_j + \sum_{k=1}^{n} a_j^k \left(\frac{1}{2}\left(x_i + x_j\right) - x_j\right)^k = \phi_j + \sum_{k=1}^{n} a_j^k \left(-1\right)^k \left(\frac{\Delta x_{ij}}{2}\right)^k. \end{cases} \tag{5.37}$$

On peut alors déterminer la solution à l'interface, qui peut se réécrire en utilisant le résultat (5.36) :

$$\begin{aligned} 2\phi_E = \phi_L + \phi_R &= \phi_i + \phi_j + \sum_{k=1}^{n} \left[a_i^k + \left(-1\right)^k a_j^k\right] \left(\frac{\Delta x_{ij}}{2}\right)^k \\ &= \phi_i + \phi_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[\phi_i^{(k)} + \left(-1\right)^k \phi_j^{(k)} + ...\right] \left(\frac{\Delta x_{ij}}{2}\right)^k. \end{aligned} \tag{5.38}$$

À l'aide de développements de Taylor, on peut réécrire chacun des termes de l'expression (5.38) :

$$\begin{array}{lllllll} \text{Ordre 0 :} & 2\phi_i & +\Delta x_{ij}\phi_i^{(1)} & +\frac{1}{2}\Delta x_{ij}^2\phi_i^{(2)} & +\frac{1}{6}\Delta x_{ij}^3\phi_i^{(3)} & +\frac{1}{24}\Delta x_{ij}^4\phi_i^{(4)} & +... \\ \text{Ordre 1 :} & & & -\frac{1}{4}\Delta x_{ij}^2\phi_i^{(2)} & -\frac{1}{8}\Delta x_{ij}^3\phi_i^{(3)} & -\frac{1}{24}\Delta x_{ij}^4\phi_i^{(4)} & +... \\ \text{Ordre 2 :} & & & \frac{1}{4}\Delta x_{ij}^2\phi_i^{(2)} & +\frac{1}{8}\Delta x_{ij}^3\phi_i^{(3)} & +\frac{1}{16}\Delta x_{ij}^4\phi_i^{(4)} & +... \\ \text{Ordre 3 :} & & & & & -\frac{1}{48}\Delta x_{ij}^4\phi_i^{(4)} & +... \\ \vdots & & & & & & \end{array} \tag{5.39}$$

Finalement la solution à l'interface (5.38) se réécrit :

$$2\phi_E = 2\phi_i + \Delta x_{ij}\phi_i^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta x_{ij}^2\phi_i^{(2)} + \frac{1}{6}\Delta x_{ij}^3\phi_i^{(3)} + ... \tag{5.40}$$

De même que pour l'expression (5.23), tous les termes d'ordre pair au sein de l'expression (5.20) sont nuls. Ainsi on a :

$$\langle\nabla\phi\rangle_i = \phi_i^{(1)} \sum_{j\in\Omega_i} \Delta x_{ij} \nabla W_{ij} V_j + \frac{1}{6}\phi_i^{(3)} \sum_{j\in\Omega_i} \Delta x_{ij}^3 \nabla W_{ij} V_j + ..., \tag{5.41}$$

qui peut se réécrire à l'aide de l'expression (5.28) (et en ne gardant que les termes de plus haut degré) :

$$\langle \nabla \phi \rangle_i - \phi_i^{(1)} = O\left(\left(\frac{R}{\Delta x}\right)^{-\beta-2}\right) + O\left(\left(\frac{R}{\Delta x}\right)^{2} \Delta x^2\right). \tag{5.42}$$

Ainsi, pour une reconstruction MLS et pour un ratio $\frac{R}{\Delta x}$ fixé, seul un ordre 2 de convergence spatiale est théoriquement obtenu (le terme à la puissance $-\beta - 2$ correspondant à l'erreur de saturation, et devient négligeable dès que $\frac{R}{\Delta x}$ est suffisamment grand). On remarque en particulier que cet ordre ne peut a priori pas être dépassé en augmentant l'ordre de la reconstruction MLS. En effet, même en prenant en compte des termes supplémentaires dans l'expression (5.38), les termes d'ordre 3 de l'expression (5.40) ne peuvent être annulés. En vue d'explorer par la suite la possibilité d'obtenir un ordre de convergence élevé, le choix d'une reconstruction MLS seule à l'interface n'est donc pas retenu. Ce résultat peut sembler contre-intuitif car la stratégie présentée à la section 5.2.2, et basée elle aussi sur une reconstruction MLS, permet en théorie d'atteindre un ordre de consistance arbitrairement élevé (bien que dans ce cas des problèmes de stabilité sont généralement rencontrés). Mais ces deux méthodes sont bien différentes en pratiques : dans la première cela revient à corriger le gradient du noyau (et donc directement les opérateurs SPH ; en particulier cette correction dépend uniquement de la position des particules et non des valeurs des champs à interpoler), alors qu'ici c'est directement le champ à interpoler qui est reconstruit.

5.4.3 Étude de la reconstruction WENO-MLS

On étudie maintenant la nouvelle méthode de reconstruction WENO-MLS décrite à la section 5.3.3. Comme précédemment, on se place dans le cas où les poids ω_l sont égaux à leurs valeurs optimales. La solution à l'interface est similaire à l'expression (5.21), mais en utilisant les valeurs reconstruites à l'aide d'une reconstruction MLS :

$$\phi_E = \frac{1}{2}\left(\phi_L + \phi_R\right) = \frac{1}{60}\left(\tilde{\phi}_{k-2} - 8\tilde{\phi}_{k-1} + 37\phi_k + 37\phi_{k+1} - 8\tilde{\phi}_{k+2} + \tilde{\phi}_{k+3}\right), \tag{5.43}$$

où les grandeurs $\tilde{\phi}$ sont données en dimension 1, et pour une reconstruction MLS d'ordre $n = 2$, par :

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_{k+3} &= \phi_j^{MLS}\left(x_j + 2\Delta x_{ij}\right) = \phi_j + 2a_j^1 \Delta x_{ij} + 4a_j^2 \Delta x_{ij}^2, \\
\tilde{\phi}_{k+2} &= \phi_j^{MLS}\left(x_j + \Delta x_{ij}\right) = \phi_j + a_j^1 \Delta x_{ij} + a_j^2 \Delta x_{ij}^2, \\
\tilde{\phi}_{k-1} &= \phi_i^{MLS}\left(x_i - \Delta x_{ij}\right) = \phi_i - a_i^1 \Delta x_{ij} + a_i^2 \Delta x_{ij}^2, \\
\tilde{\phi}_{k-2} &= \phi_i^{MLS}\left(x_i - 2\Delta x_{ij}\right) = \phi_i - 2a_i^1 \Delta x_{ij} + 4a_i^2 \Delta x_{ij}^2.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

En utilisant les expressions (5.44) et (5.36), la solution (5.43) se réécrit donc :

$$\begin{aligned}\phi_E &= \frac{1}{2}\left(\phi_i+\phi_j\right)+\frac{1}{10}\left(a_i^1-a_j^1\right)\Delta x_{ij}-\frac{1}{15}\left(a_i^2+a_j^2\right)\Delta x_{ij}^2\\ &= \frac{1}{2}\left(\phi_i+\phi_j\right)+\frac{1}{10}\left(\phi_i^{(1)}-\phi_j^{(1)}\right)\Delta x_{ij}-\frac{1}{30}\left(\phi_i^{(2)}+\phi_j^{(2)}\right)\Delta x_{ij}^2+...\end{aligned} \tag{5.45}$$

À l'aide de développements de Taylor en x_i on peut montrer que cette expression s'écrit également :

$$\phi_E = \phi_i+\frac{1}{2}\Delta x_{ij}\phi_i^{(1)}+\frac{1}{12}\Delta x_{ij}^2\phi_i^{(2)}-\frac{1}{80}\Delta x_{ij}^4\phi_i^{(4)}-\frac{1}{180}\Delta x_{ij}^5\phi_i^{(5)}+... \tag{5.46}$$

On remarque que le terme d'ordre 3 est nul dans l'expression (5.46). De même que précédemment, tous les termes d'ordre pair au sein de l'expression (5.20) sont nuls. Ainsi on a :

$$\langle\nabla\phi\rangle_i = \phi_i^{(1)}\sum_{j\in\Omega_i}\Delta x_{ij}\nabla W_{ij}V_j-\frac{1}{90}\phi_i^{(5)}\sum_{j\in\Omega_i}\Delta x_{ij}^5\nabla W_{ij}V_j+... \tag{5.47}$$

En utilisant l'expression (5.28), et en ne gardant que les termes d'ordre le plus élevé, on peut alors déterminer l'erreur de troncature de l'opérateur gradient lorsque la nouvelle méthode de reconstruction WENO-MLS est utilisée :

$$\langle\nabla\phi\rangle_i-\phi_i^{(1)} = O\left(\left(\frac{R}{\Delta x}\right)^{-\beta-2}\right)+O\left(\left(\frac{R}{\Delta x}\right)^{4}\Delta x^4\right). \tag{5.48}$$

Cette dernière expression a été obtenue pour une reconstruction MLS d'ordre 2 pour les points virtuels, et dans ce cas une convergence spatiale d'ordre 4 est obtenue (pour un ratio $\frac{R}{\Delta x}$ fixé ; le terme à la puissance $-\beta-2$ correspondant à l'erreur de saturation, et devient négligeable dès que $\frac{R}{\Delta x}$ est suffisamment grand). On peut également montrer (non présenté ici) que si l'on augmente l'ordre de la reconstruction MLS, l'ordre de convergence (5.48) est également augmenté, tant que l'ordre de la reconstruction MLS ne dépasse pas l'ordre de la reconstruction WENO. Par exemple, pour une reconstruction MLS d'ordre 4 (et en utilisant toujours une reconstruction WENO d'ordre 5), on peut montrer que l'on obtient théoriquement une convergence spatiale d'ordre 6 :

$$\langle\nabla\phi\rangle_i-\phi_i^{(1)} = O\left(\left(\frac{R}{\Delta x}\right)^{-\beta-2}\right)+O\left(\left(\frac{R}{\Delta x}\right)^{6}\Delta x^6\right). \tag{5.49}$$

De plus, à cause des phénomènes de parité, seules les reconstructions MLS d'ordres pairs permettent d'obtenir un ordre de convergence supérieur (i.e. une reconstruction MLS

d'ordre $2n$ des points virtuels donnera par exemple le même ordre de convergence qu'une reconstruction MLS d'ordre $2n+1$).

5.5 Validation en l'absence de frontière

On cherche désormais à valider numériquement les résultats théoriques obtenus à la section 5.4. Ces résultats étant obtenus en dimension 1 et pour une répartition uniforme des particules, on se concentre dans un premier temps sur des cas présentant de telles configurations. On étudiera notamment l'influence du double critère de convergence (i.e. l'influence de la discrétisation Δx et du ratio $\frac{R}{\Delta x}$). On s'intéressera ensuite à l'extension de ces résultats en présence d'une répartition non-uniforme des particules et également pour un cas test en dimension 2. Dans toute cette section, on se place dans des cas ne faisant pas intervenir de frontières (i.e. absence de paroi solide et/ou de surface libre), qui seront traitées dans les sections suivantes. Pour tous les cas en dimension 1, un noyau de Wendland C^4 est utilisé, de sorte que pour ces cas $\beta = 4$ (cf. (5.24)).

5.5.1 Reconstruction 1D d'un gradient SPH

Le premier cas considéré consiste à valider l'expression théorique (5.29) relative à l'erreur de troncature d'un gradient SPH. On se place donc dans le cadre d'une répartition uniforme des particules et donc sans la nécessité de compléter les stencils WENO à l'aide d'une reconstruction MLS. Tout comme dans [9], on s'intéresse ici à la reconstruction du gradient SPH de la fonction :

$$\phi(x) = e^{-0.2x} cos(4x) \quad , \quad x \in [-5; 5]. \tag{5.50}$$

On montre sur la Figure 5.6 l'erreur de troncature entre le gradient SPH de la fonction (5.50) et son expression théorique, pour les deux paramètres de discrétisation SPH (i.e. pour Δx et $\frac{R}{\Delta x}$). Premièrement, ces résultats confirment le fait que la convergence est assurée dès que $\Delta x \to 0$ et $\frac{R}{\Delta x} \to \infty$. De plus, la Figure 5.6 montre que l'expression (5.29) est bien vérifiée de manière asymptotique. En effet, les ordres théoriques 6 et $-\beta - 2$ (respectivement pour Δx et $\frac{R}{\Delta x}$) sont obtenus dès que $\frac{\Delta x}{R}$ et Δx sont suffisamment faibles, respectivement.

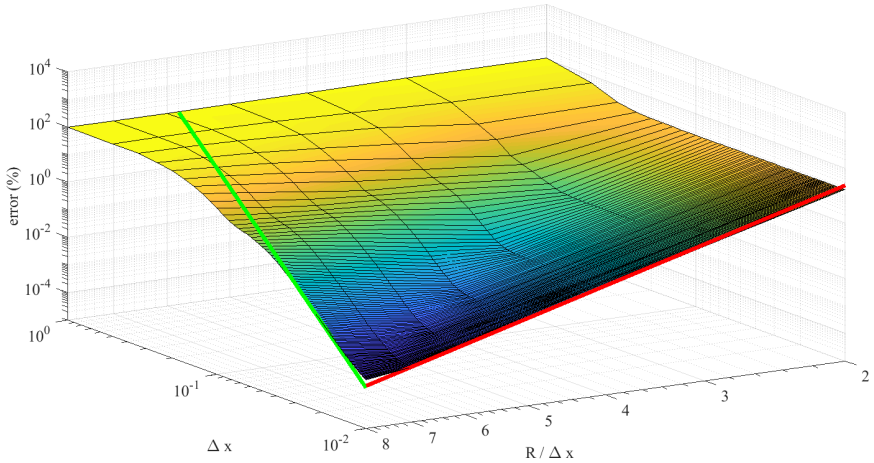

FIGURE 5.6 – Reconstruction 1D d'un gradient SPH : courbe de convergence de l'erreur de troncature (en norme L_2) en fonction du double critère de convergence SPH ; les droites verte et rouge ont respectivement des pentes de 6 et $-\beta - 2$.

En pratique, les simulations SPH sont effectuées à ratio $\frac{R}{\Delta x}$ fixé (généralement à des valeurs entre 2 et 4). Or la Figure 5.6 montre que l'ordre 6 théorique en Δx n'est atteint que pour un ratio $\frac{R}{\Delta x}$ suffisamment grand. En particulier, l'ordre 6 n'est pas atteint pour un ratio $\frac{R}{\Delta x}$ compris entre 2 et 4. Cette observation justifie, en partie, le fait qu'il est difficile de monter en ordre au sein de la méthode SPH (on verra dans la suite que le désordre particulaire joue également un rôle important).

5.5.2 Équation d'advection 1D en configuration Eulérienne

Afin de tester l'influence de l'avance en temps sur l'erreur de troncature (5.29), on propose ici de résoudre l'équation d'advection donnée par :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + a\nabla Q = 0, \tag{5.51}$$

où a est la vitesse d'advection, prise ici constante ($a = 1m/s$) et Q la quantité à advecter. Cette équation présente l'avantage d'être linéaire en ne faisant pas intervenir de terme convectif non-linéaire. Pour ce cas, on se place dans une configuration Eulérienne avec une répartition uniforme des particules, afin de respecter les hypothèses retenues pour obtenir l'expression (5.29) (en particulier il n'est pas nécessaire d'utiliser de reconstruction MLS pour compléter les stencils WENO). La condition initiale retenue est une condition périodique :

$$Q(x, t = 0) = sin(2\pi x). \tag{5.52}$$

Les résultats de l'erreur obtenue à $t = 0.5s$ sont donnés sur la Figure 5.7 et sont très similaires à ceux obtenus pour le cas plus simple de la reconstruction d'un gradient SPH (cf. section 5.5.1). La convergence est bien assurée dès que $\Delta x \to 0$ et $\frac{R}{\Delta x} \to \infty$. Pour un ratio $\frac{R}{\Delta x}$ suffisamment grand, l'ordre 6 théorique est bien atteint. De plus, on remarque que l'erreur de saturation diminue lorsque le ratio $\frac{R}{\Delta x}$ augmente. Cette diminution se fait à un ordre proche de l'ordre théorique $-\beta - 2$. L'expression (5.29) est donc également vérifiée asymptotiquement pour le cas d'une équation d'advection, bien que l'ordre 6 maximal ne soit atteint que pour des valeurs importantes du ratio $\frac{R}{\Delta x}$. Ainsi, l'ajout d'une avance en temps a une influence négligeable sur l'ordre de convergence spatial pour ce cas. On notera que plusieurs schémas temporels ont été testés (Euler explicite, Runge-Kutta d'ordre 4 et Runge-Kutta d'ordre 6), sans observer de changement significatifs dans les résultats obtenus.

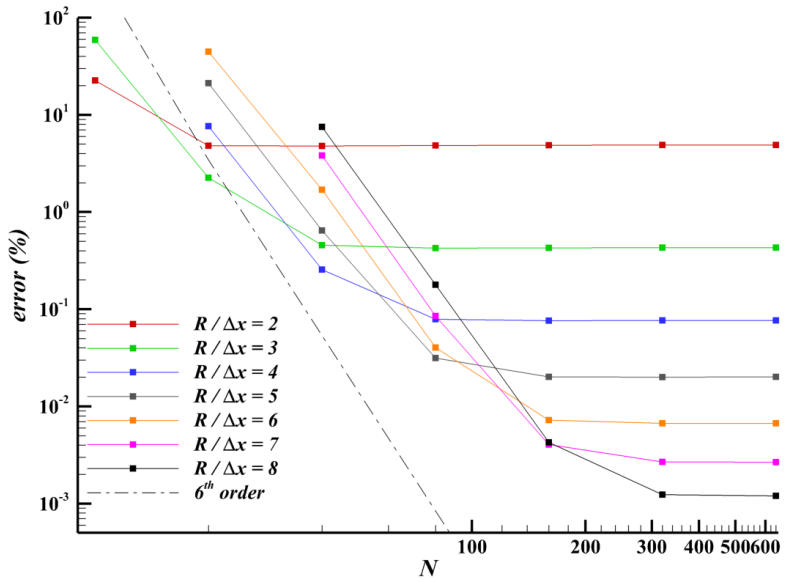

FIGURE 5.7 – Équation d'advection 1D : courbe de convergence (en norme L_2) sur la solution à $t = 0.5s$, pour différents ratios $\frac{R}{\Delta x}$.

5.5.3 Équations d'Euler 1D en configuration Lagrangienne

Afin de se rapprocher d'une configuration plus usuelle, on propose ici d'étudier la résolution des équations d'Euler 1D en configuration Lagrangienne. Il est donc nécessaire ici d'utiliser la stratégie de reconstruction proposée à la section 5.3.3, et en particulier de reconstruire les points virtuels au sein des stencils WENO à l'aide d'une reconstruction MLS. Dans un premier temps, une reconstruction MLS d'ordre 2 est utilisée. Bien que la répartition des particules ne soit plus uniforme a priori, on comparera les résultats à l'expression théorique (5.48) (obtenue en considérant une répartition uniforme des particules).

La configuration initiale retenue ici consiste en un champ de vitesse nul et une répartition Gaussienne du champ de pression [64] donnée par :

$$p(x, t = 0) = p_0 e^{-ax^2}, \tag{5.53}$$

où p_0 est la pression initiale maximale et $a = \frac{log(2)}{9}$. On montre sur la Figure 5.8 la forme du champ de pression à $t = 0$ et $t = 10s$. La valeur de p_0 est, dans un premier temps, prise égale à $p_0 = 10^{-5} Pa$. La solution analytique pour ce cas test n'est, a priori, pas connue. Les erreurs seront donc déterminées par rapport à une solution Différences Finies d'ordre élevé, obtenue avec un très grand nombre de points de calcul (3200 points de calcul, ce qui fournit une solution convergée).

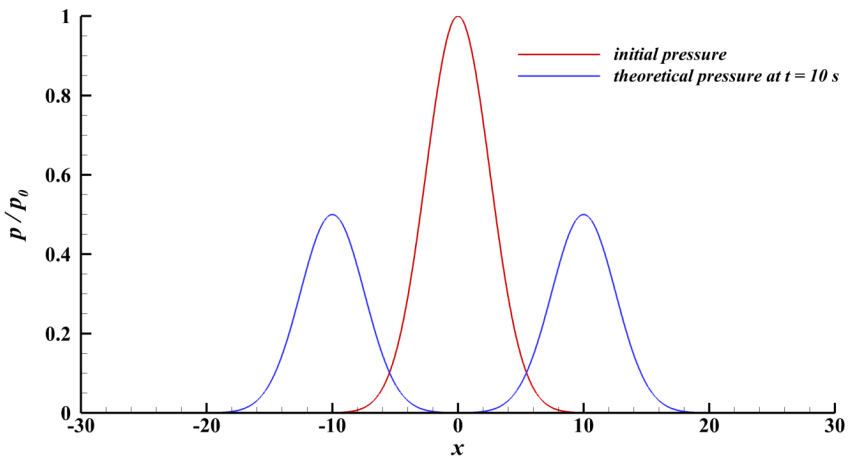

FIGURE 5.8 – Équation d'Euler 1D en configuration Lagrangienne : présentation du cas test.

Sur la Figure 5.9 on montre de manière qualitative l'influence de la méthode de reconstruction sur la solution du champ de pression. La reconstruction WENO-MLS donne des résultats beaucoup plus proches de la solution attendue que la reconstruction MUSCL. En particulier, pour $N = 100$ particules, la solution ne présente pas d'oscillation proche de $x = 0$ pour la reconstruction WENO-MLS.

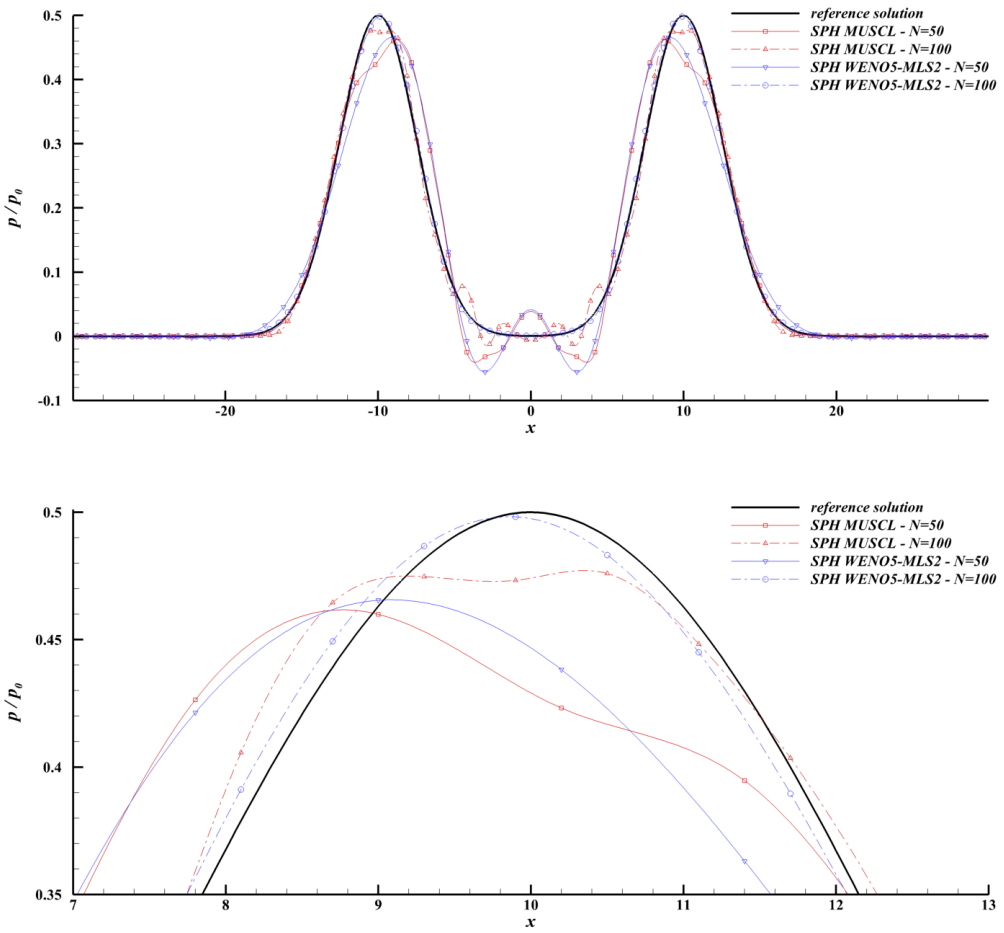

FIGURE 5.9 – Équation d'Euler 1D en configuration Lagrangienne : champ de pression à $t = 10s$ pour différentes discrétisations et différentes méthodes de reconstruction ; $\frac{R}{\Delta x} = 4$. Haut : vue d'ensemble du profil de pression. Bas : agrandissement autour du second pic de pression.

De manière quantitative, on donne sur la Figure 5.10 les courbes de convergence obtenues pour les méthodes de reconstruction MUSCL et WENO-MLS, pour différents ratios $\frac{R}{\Delta x}$. Pour la reconstruction MUSCL, on n'obtient pas plus qu'un ordre 2 de convergence (comme attendu). En revanche, pour la reconstruction WENO-MLS, l'ordre 4 théorique est effectivement obtenu (et ceci d'autant plus que le ratio $\frac{R}{\Delta x}$ est grand). L'expression théorique (5.48) est donc vérifiée de manière asymptotique. La stratégie de reconstruction WENO-MLS permet donc une amélioration importante de la précision des résultats pour ce cas.

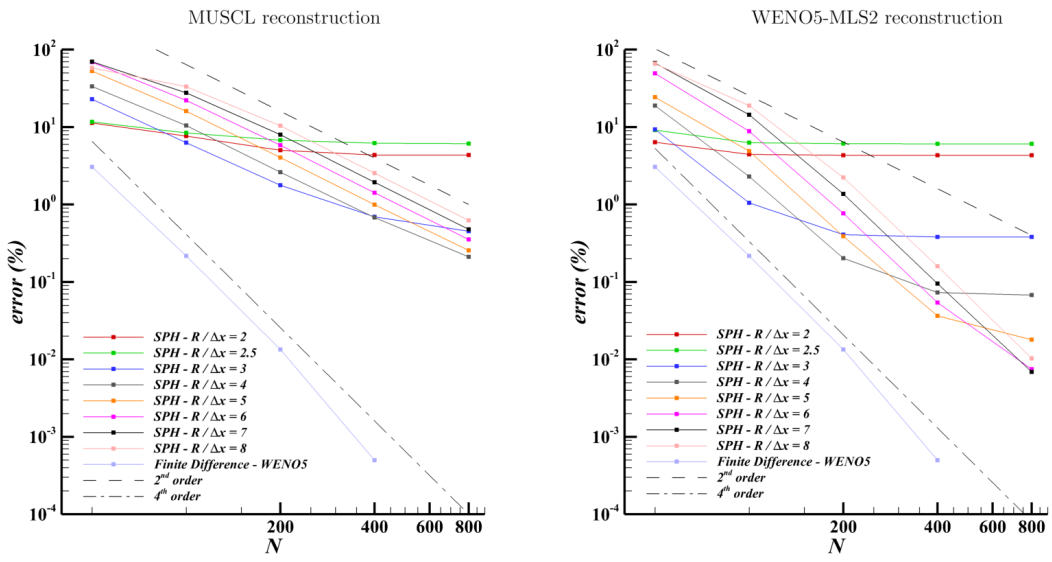

FIGURE 5.10 – Équation d'Euler 1D en configuration Lagrangienne : courbe de convergence (en norme L_2) sur le champ de pression à $t = 10s$, pour différents ratios $\frac{R}{\Delta x}$; gauche : reconstruction MUSCL ; droite : reconstruction WENO5-MLS2.

5.5.3.1 Influence de l'ordre des reconstructions WENO et MLS

Jusqu'à présent, on a choisi une reconstruction MLS d'ordre 2 pour les points virtuels ainsi qu'une reconstruction WENO d'ordre 5. Dans cette section, on se propose d'étudier l'influence de l'ordre de ces différentes reconstructions sur la précision et l'ordre des résultats. L'utilisation d'un ordre m pour la reconstruction WENO et d'un ordre n pour la reconstruction MLS sera désignée par WENOm-MLSn. Les résultats sont donnés sur la Figure 5.11, pour deux ratios $\frac{R}{\Delta x}$ différents.

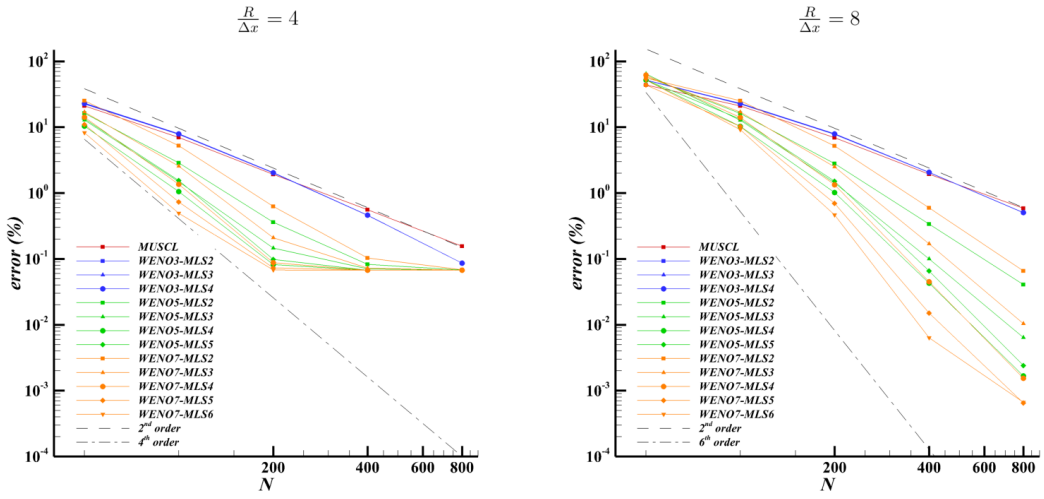

FIGURE 5.11 – Équation d'Euler 1D en configuration Lagrangienne : courbe de convergence (en norme L_2) sur le champ de pression à $t = 10s$, pour différents ordres de reconstruction WENO-MLS ; gauche : $\frac{R}{\Delta x} = 4$; droite : $\frac{R}{\Delta x} = 8$.

Pour un ratio $\frac{R}{\Delta x} = 4$, l'ordre maximal obtenu se situe autour de 4. En particulier, le fait d'augmenter l'ordre des reconstructions WENO et MLS ne permet pas d'atteindre des ordres plus élevés, contrairement à ce qui aurait pu être attendu. Le nombre de particules trop faible dans le voisinage explique ce phénomène. En revanche, pour un ratio $\frac{R}{\Delta x}$ plus élevé (et donc un nombre de particules voisines plus important), le fait d'augmenter l'ordre des reconstruction WENO et MLS permet de dépasser l'ordre 4. Un ordre 6 est obtenu pour des ordres de reconstructions suffisamment élevés. Des ordres de convergence élevés peuvent donc être obtenus au sein de la méthode SPH, bien qu'ils ne soient atteints que pour des ratios $\frac{R}{\Delta x}$ importants. Pour des ratios plus usuels, il semble que l'ordre 4 ne puisse pas être dépassé avec la stratégie de reconstruction proposée.

5.5.3.2 Influence du désordre particulaire

Le choix d'une valeur faible de la pression p_0 (jusqu'à présent on avait $p_0 = 10^{-5}$) implique une perturbation relativement faible de la position des particules. Ainsi pour les cas présentés précédemment, la répartition des particules était en réalité proche d'être uniforme. Afin d'étudier l'influence du désordre particulaire on augmente ici la valeur de p_0. Pour une valeur $p_0 = 0.1$ le désordre observé est proche de ce qui est obtenu classiquement en SPH (on obtient un désordre maximal autour de $\xi_{max} \sim 10\%$, où ξ est la mesure de désordre proposée dans [124] et identique à celle donnée à la section 3.2.3.1). Les résultats sont donnés sur la Figure 5.12, pour deux ratios $\frac{R}{\Delta x}$ différents.

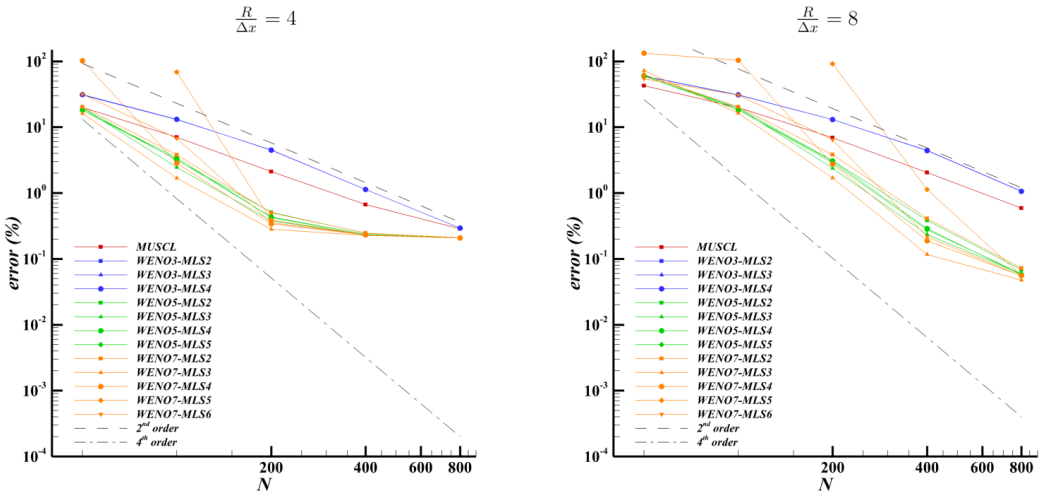

FIGURE 5.12 – Équation d'Euler 1D en configuration Lagrangienne : courbe de convergence (en norme L_2) sur le champ de pression à $t = 10s$, pour différents ordres de reconstruction WENO-MLS et pour un désordre $\xi_{max} \sim 10\%$; gauche : $\frac{R}{\Delta x} = 4$; droite : $\frac{R}{\Delta x} = 8$.

On remarque tout d'abord que le désordre particulaire a tendance à faire diminuer l'ordre de convergence, bien que cela reste une amélioration significative par rapport à une reconstruction MUSCL. Pour $\frac{R}{\Delta x} = 4$ on passe d'un ordre 4 (pour un désordre plus limité) à un ordre 3. Pour $\frac{R}{\Delta x} = 8$ on passe d'un ordre 6 à un ordre 4. Ensuite, l'augmentation de l'ordre des reconstructions WENO et MLS a une influence limitée. En effet, à l'exception des reconstructions WENO3-MLSn, l'ensemble des courbes de convergence sont quasiment superposées. Cependant, plus les ordres des reconstructions WENOm-MLSn sont élevés, plus les coûts de calculs deviennent importants. Pour la suite, on utilisera donc la reconstruction WENOm-MLSn présentant le meilleur compromis coût/précision. La reconstruction WENO5-MLS2 est donc retenue pour la suite.

5.5.3.3 Rapport coût/précision

S'intéresser à l'augmentation de l'ordre de convergence d'une méthode numérique (et plus généralement à l'amélioration de la précision) nécessite de mesurer l'augmentation du coût de calcul qui en résulte. En effet, on souhaite disposer d'une méthode qui, à précision donnée, nécessite un temps de calcul plus faible (ou inversement pour un temps de calcul donné disposer d'une méthode plus précise).

L'augmentation du temps de calcul observée avec la méthode de reconstruction WENO5-MLS2 est de l'ordre 15%. Or les gains observés en terme de précision par rapport à une reconstruction MUSCL sont bien supérieurs à 15% (cf. Figure 5.12). Donc, bien que la reconstruction WENO5-MLS2 soit plus coûteuse, le gain en terme de coût/précision est significatif en dimension 1. Cependant, en dimensions supérieures les matrices MLS auront une taille plus grande, induisant une augmentation plus importante du temps de calcul, et donc potentiellement un gain en terme de coût/précision moins significatif (cf. sections suivantes pour plus de détails).

5.5.4 Tourbillons de Taylor-Green

On s'intéresse ici à un cas en dimension 2 : les tourbillons de Taylor-Green non visqueux [145], problème stationnaire dont la solution est donnée par :

$$\frac{u}{U} = sin\left(2\pi\frac{x}{L}\right) cos\left(2\pi\frac{y}{L}\right), \tag{5.54}$$

$$\frac{v}{U} = -cos\left(2\pi\frac{x}{L}\right) sin\left(2\pi\frac{y}{L}\right), \tag{5.55}$$

$$\frac{p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{1}{2}\left[cos\left(4\pi\frac{x}{L}\right) + sin\left(4\pi\frac{y}{L}\right)\right], \tag{5.56}$$

où ρ, L et U sont respectivement une masse volumique de référence, une longueur de référence et une vitesse de référence. Ce cas test présente l'avantage d'être périodique et ne nécessite donc pas l'application de conditions aux limites particulières (la prise en compte des frontières sera effectuée par la suite). Ici, un ratio $\frac{R}{\Delta x} = 4$ est utilisé. On donne sur la Figure 5.13 le champ de pression obtenu avec une reconstruction MUSCL et avec la stratégie de reconstruction WENO-MLS. Les résultats sont relativement proches et une mesure précise des erreurs est nécessaire afin de conclure sur l'intérêt de la nouvelle reconstruction WENO-MLS. On donne les différentes courbes de convergence sur la Figure 5.14.

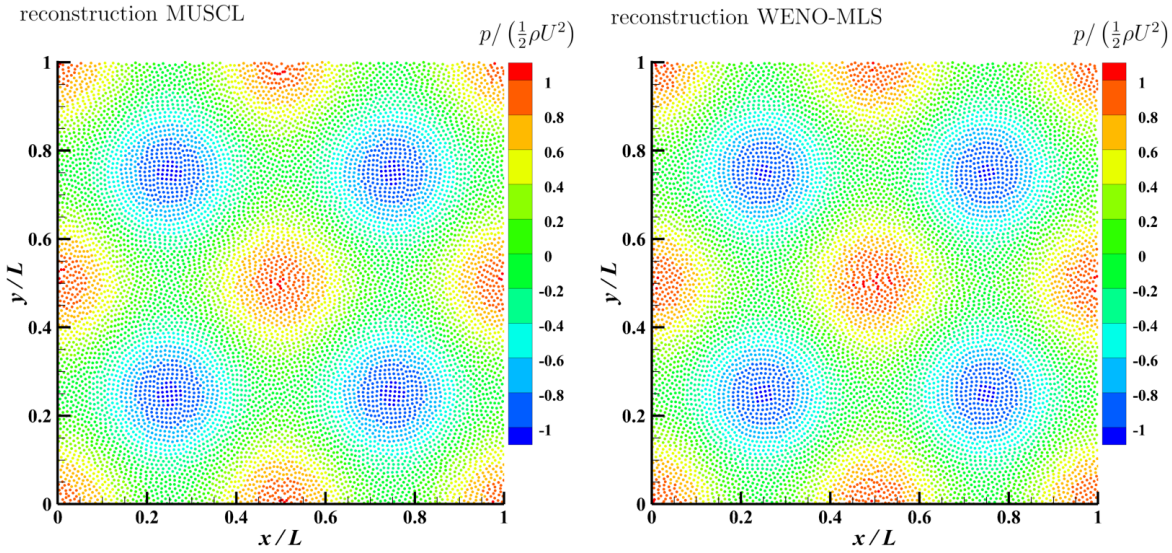

FIGURE 5.13 – Tourbillons de Taylor-Green : Champs de pression obtenus avec une reconstruction MUSCL (gauche) et une reconstruction WENO-MLS (droite) à $t\frac{U}{L} = 1$; $\frac{L}{\Delta x} = 100$.

Pour les deux grandeurs considérées (l'énergie cinétique et le champ de pression), la Figure 5.14 ne montre pas de gain en terme d'ordre de convergence entre une reconstruction MUSCL et une reconstruction WENO-MLS (contrairement au cas en dimension 1 présenté à la section 5.5.3). Pour le champ de pression, on constate une saturation relativement rapide de l'erreur, qui est sûrement à rapprocher de la saturation évoquée à la section 5.1. En

revanche, l'utilisation d'une reconstruction WENO-MLS améliore la précision des simulations (à l'exception de l'énergie cinétique pour $\frac{L}{\Delta x} = 400$). En moyenne, on observe en gain autour de 70% de la précision des simulations.

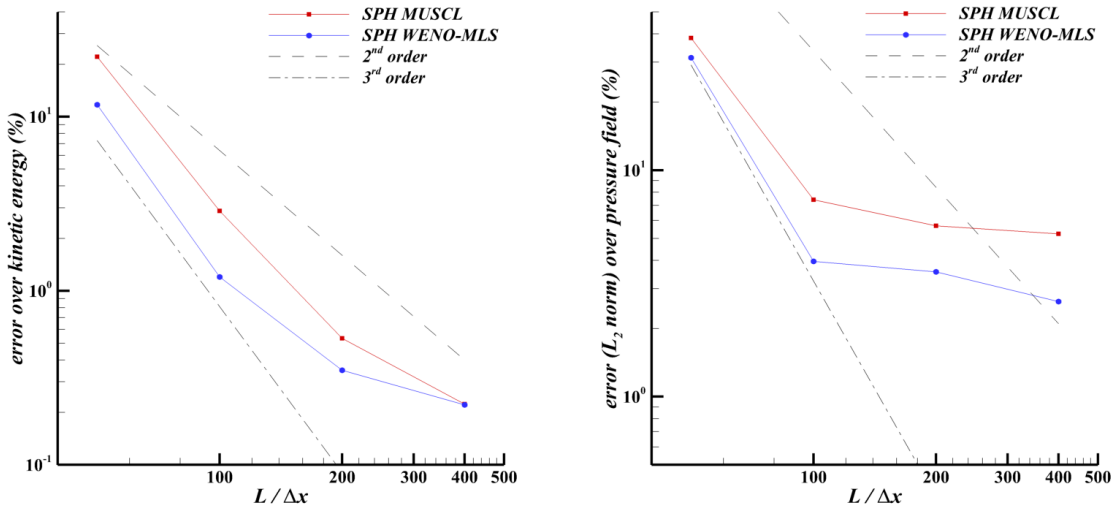

FIGURE 5.14 – Tourbillons de Taylor-Green : Courbes de convergence sur la perte d'énergie cinétique et sur le champ de pression à $t\frac{U}{L} = 1$.

En dimension 2, le calcul et l'inversion des matrices MLS est, en proportion, plus coûteux qu'en dimension 1. Cela a pour conséquence une augmentation du temps de calcul d'environ 90% pour la reconstruction WENO-MLS par rapport à la reconstruction MUSCL (contre seulement 15% en dimension 1). Il n'y a donc à première vue pas de gain en terme de coût/précision pour ce cas test (on note que, faute de temps, l'algorithme de reconstruction WENO-MLS n'a pas fait l'objet d'une optimisation poussée et que des améliorations sont sûrement possibles sur cet aspect). Cependant, on observe une amélioration de la limite de stabilité des simulations avec une reconstruction WENO-MLS. Cela se traduit par une augmentation de la limite de la condition de stabilité (2.98), et en particulier du coefficient CFL CFL_{hyp} limite à partir de laquelle la simulation devient instable. Pour un schéma temporel Runge-Kutta d'ordre 4, on relève les limites de stabilité suivantes : $CFL_{hyp,MUSCL} = 0.6$ et $CFL_{hyp,WENO-MLS} = 0.95$. Ainsi, l'augmentation du temps de calcul se situe plutôt autour de 20% seulement pour ce cas test, ce qui implique finalement un gain en terme de coût/précision. L'origine de ce phénomène est difficile à expliquer, mais pourrait peut-être provenir du fait que la reconstruction WENO-MLS s'appuie sur des stencils plus longs.

5.6 Prise en compte des parois solides et de la surface libre

Quelle que soit la méthode numérique utilisée, la question de la montée en ordre en présence de frontières (i.e. parois solides ou surfaces libres) est souvent un point délicat. En particulier, on est souvent amené à diminuer l'ordre des opérateurs et/ou des différentes

reconstructions proche d'une frontière, ce qui induit nécessairement une baisse de l'ordre de convergence par rapport à un cas sans frontière. Dans la méthode SPH, et pour le cas des schémas de type Riemann-SPH qui nous intéressent ici, quelques pistes ont été proposées. L'une de ces pistes, déjà présentée à la section 2.5.2.2 et proposée par De Leffe et al. [41] [40], s'appuie sur une reconstruction MUSCL combinée avec un limiteur basé sur l'hypothèse de faible-compressibilité en proche paroi. Pour le cas des reconstructions MLS proposées par Renaut [129], on constate qu'elles fournissent des reconstructions erronées lorsque le nombre de particules voisines diminue (i.e. lorsque l'on se rapproche d'une frontière). Renaut propose alors différents critères pour modifier les reconstructions MLS proche d'une frontière (cf. [129] pour plus de détails sur ces différents critères). On note enfin que cette question des frontières n'est pas abordée pour le cas de la reconstruction WENO proposée par Avesani et al. [9].

La difficulté est donc de proposer une stratégie de reconstruction proche d'une frontière qui soit compatible avec la méthode proposée à la section 5.3, tout en dégradant le moins possible les gains observés (en l'absence de frontière). On propose donc ici une première approche pour prendre en compte les frontières au sein de la méthode de reconstruction WENO-MLS. Dans la perspective de futures applications sur des cas à géométrie complexe, on ne s'intéresse ici qu'au formalisme BIM et non au formalisme ghost. Comme montré par Renaut [129], pour un faible nombre de particules voisines (i.e. proche d'une frontière), la matrice MLS (5.16) devient mal évaluée et mal conditionnée. On peut même montrer que, dès lors que le nombre de particules voisines devient inférieur à la taille N de la base de fonctions choisie, les matrices MLS deviennent potentiellement non-inversibles. De plus, il est difficile d'adapter le calcul des matrices (5.16) et vecteurs (5.17) MLS en formalisme BIM, et en particulier de déterminer une expression faisant intervenir des termes surfaciques afin de compléter le support du noyau. Il n'est donc a priori pas possible d'utiliser une reconstruction MLS proche d'une frontière.

L'alternative proposée ici consiste alors à utiliser une reconstruction MUSCL, en lieu et place d'une reconstruction MLS, pour déterminer les points manquants (5.18) au sein des stencils WENO. Ainsi, à l'approche d'une frontière, on utilise une reconstruction MUSCL (2.86-2.87) pour reconstruire les points manquants :

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}_{k+2} &= \begin{cases} \phi_j^{MLS}\left(\boldsymbol{x}_j + \Delta\boldsymbol{x}_{ij}\right) & \text{si } d_j > R \\ \phi_j + \langle \boldsymbol{grad}\phi \rangle_j^{-,R} . \Delta\boldsymbol{x}_{ij} & \text{sinon} \end{cases}, \\
\tilde{\phi}_{k-1} &= \begin{cases} \phi_i^{MLS}\left(\boldsymbol{x}_i - \Delta\boldsymbol{x}_{ij}\right) & \text{si } d_i > R \\ \phi_i - \langle \boldsymbol{grad}\phi \rangle_i^{-,R} . \Delta\boldsymbol{x}_{ij} & \text{sinon} \end{cases}, \\
\tilde{\phi}_{k-2} &= \begin{cases} \phi_i^{MLS}\left(\boldsymbol{x}_i - 2\Delta\boldsymbol{x}_{ij}\right) & \text{si } d_i > R \\ \phi_i - 2\langle \boldsymbol{grad}\phi \rangle_i^{-,R} . \Delta\boldsymbol{x}_{ij} & \text{sinon} \end{cases},
\end{aligned}
\tag{5.57}
$$

où d_i et d_j désignent respectivement la distance à une frontière (paroi solide ou surface libre) pour les particules i et j. On montre sur la Figure 5.15 un schéma de principe de cette technique. Cette formulation présente donc le double avantage d'être utilisable en formalisme BIM et d'être valable à la fois en présence d'une paroi solide et d'une surface libre.

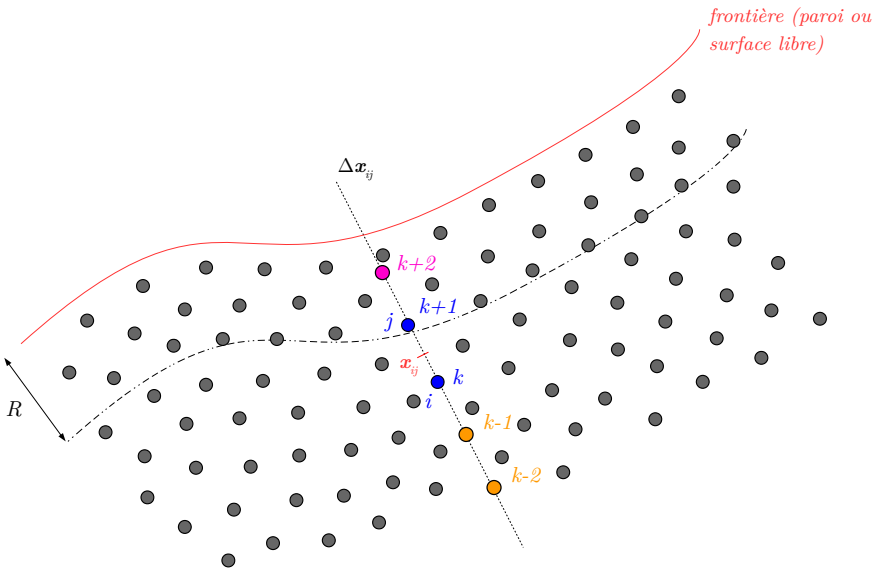

FIGURE 5.15 – Principe de la montée en ordre proche d'une frontière : ici $d_i > R$ et $d_j \leq R$; le point $k+2$ est obtenu à l'aide d'une reconstruction MUSCL tandis que les points $k-1$ et $k-2$ sont obtenus à l'aide de reconstructions MLS.

Pour le cas particulier d'une interaction particule-facette, on ne dispose cette fois-ci que de l'information provenant de la seule particule i pour reconstruire la pression à la paroi. Ainsi tous les points manquants des stencils WENO sont donnés, comme précédemment, par une reconstruction MUSCL (i.e. une reconstruction linéaire) basée sur le voisinage de la particule i. Or la reconstruction WENO est exacte pour un champ linéaire. Dans ce cas, la reconstruction WENO est donc équivalente à la reconstruction MUSCL (2.119) à la paroi, qui est alors utilisée pour déterminer la pression P_s à la paroi à l'aide de l'expression (2.118). Le limiteur (2.120-2.121) proposé par De Leffe [40] est également utilisé dans ce cas afin de limiter les oscillations non désirées introduites par la reconstruction MUSCL.

La stratégie proposée dans cette section n'est qu'une première approche et est probablement sujette à de nombreuses améliorations. En effet, plusieurs pistes n'ont pas été explorées faute de temps, mais mériteraient une attention particulière pour de futures investigations (ex : traitement différencié entre une paroi solide et une surface libre, modification de la taille des stencils WENO, modification de l'ordre de la reconstruction WENO, autre critère que la distance à une frontière, changement moins "brusque" entre les reconstructions MUSCL et MLS des points virtuels (5.57), etc...).

5.7 Validation en présence de frontières

On cherche ici à valider la stratégie proposée en présence de frontières. Deux cas tests sont considérés : l'un avec uniquement la présence de parois solides et l'autre en ajoutant une surface libre. Dans toute cette section, un ratio $\frac{R}{\Delta x} = 4$ est utilisé.

5.7.1 Cas avec parois solides - Cavité entraînée à $Re = 1000$

Le premier cas considéré est le cas de la cavité entraînée à $Re = 1000$ [52] [18]. Les différentes erreurs y sont calculées par rapport aux résultats de référence donnés par Botella et al. [18]. On donne sur la Figure 5.16 une allure générale des champs de vitesse et de pression obtenus avec des reconstructions MUSCL et WENO-MLS.

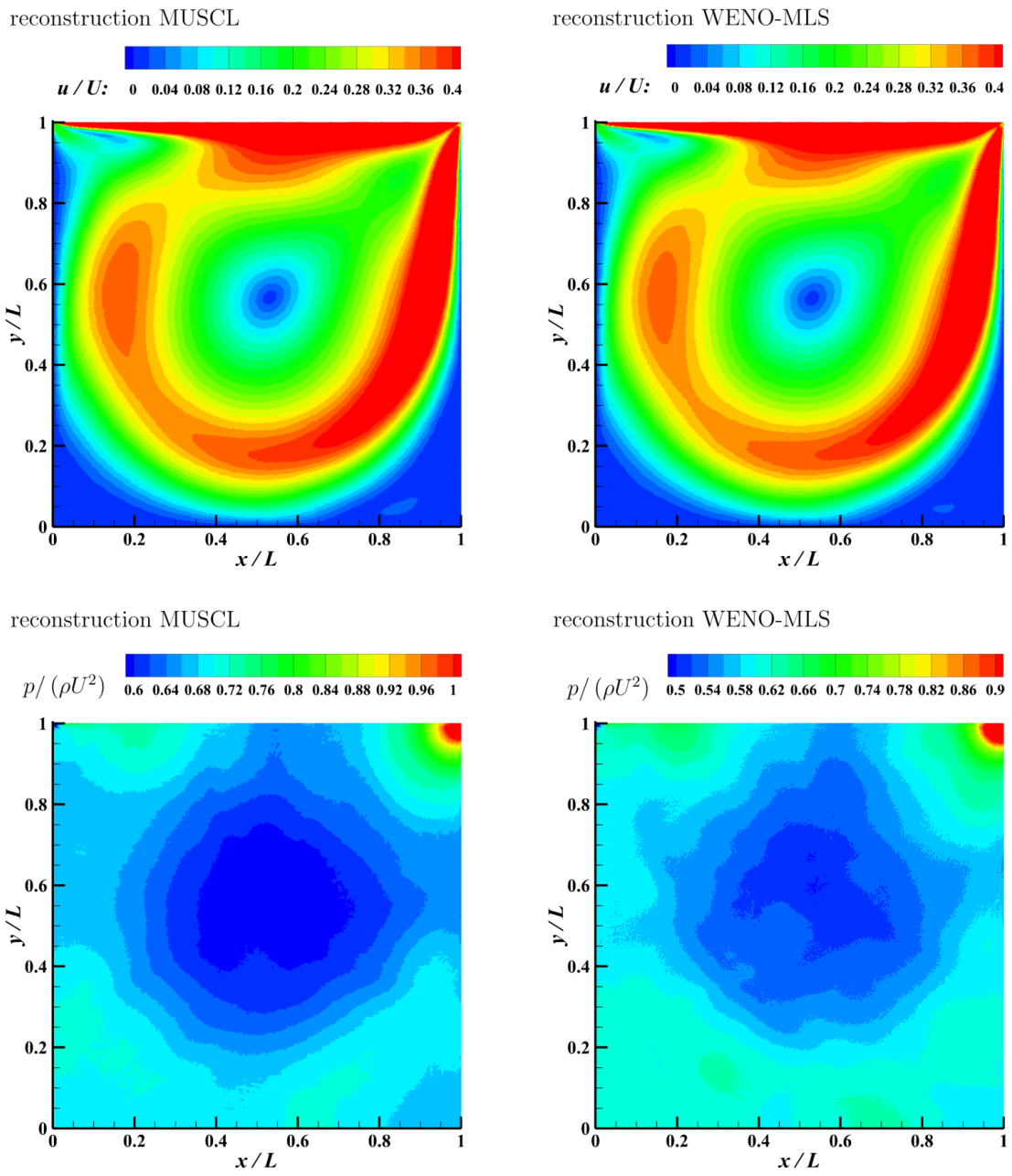

FIGURE 5.16 – Cavité entraînée à $Re = 1000$: Champs de vitesse et de pression obtenus avec une reconstruction MUSCL (gauche) et une reconstruction WENO-MLS (droite) ; $\frac{L}{\Delta x} = 400$.

On observe que le champ de pression obtenu avec une reconstruction WENO-MLS est plus bruité que celui obtenu avec une reconstruction MUSCL. L'origine de ce phénomène est

cependant difficile à déterminer, bien que le changement "brusque" entre les reconstructions MUSCL et MLS des points virtuels (5.57) puisse être à l'origine de ces oscillations. Au niveau du champ de vitesse, les différences sont plus faibles. Par ailleurs, la Figure 5.17 montre que les profils de vitesse sont bien calculés, à la fois pour une reconstruction MUSCL et une reconstruction WENO-MLS, sans que l'on puisse conclure à première vue quelle reconstruction donne les meilleurs résultats. Pour cela on donne sur la Figure 5.18 les courbes de convergence au niveau de ces profils de vitesse, ainsi que sur la position du tourbillon central.

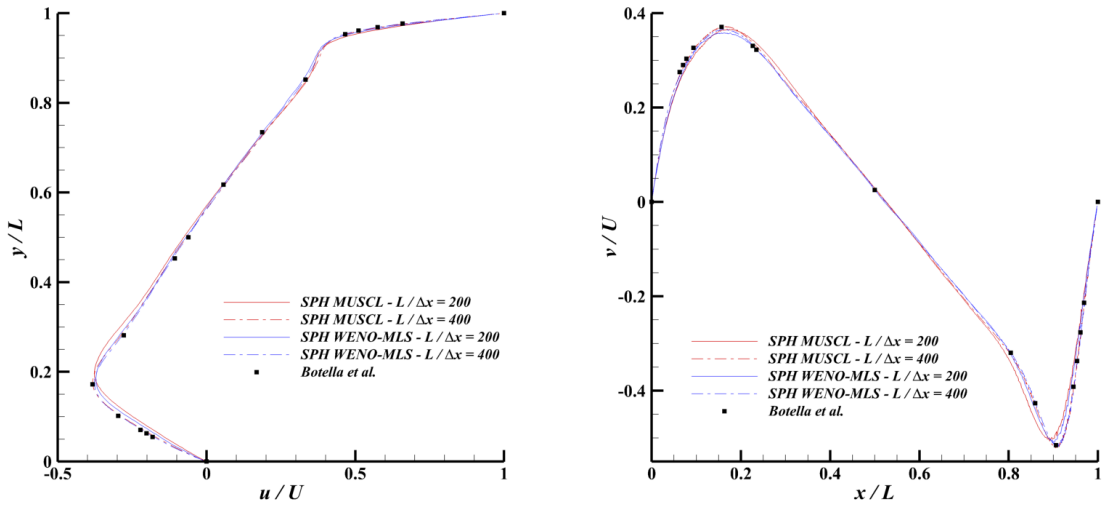

FIGURE 5.17 – Cavité entraînée à $Re = 1000$: Profils de vitesse le long des lignes centrales (gauche : $x = 0.5L$; droite : $y = 0.5L$) pour différentes méthodes de reconstruction et différentes discrétisations.

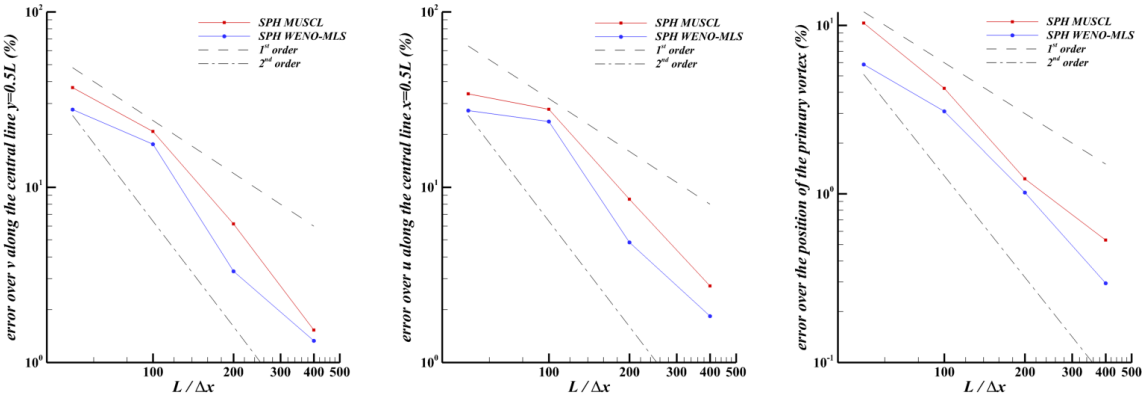

FIGURE 5.18 – Cavité entraînée à $Re = 1000$: Courbes de convergence (en norme L_2) sur les profils de vitesse le long des lignes centrales et sur la position du tourbillon primaire.

Tout comme le cas des tourbillons de Taylor-Green (cf. section 5.5.4), aucun gain en terme d'ordre de convergence n'est observé. En revanche, une amélioration en terme de précision

autour de 40% est obtenue. Les courbes de convergence pour la position des tourbillons secondaires ne sont pas données car aucune amélioration n'a été observée. De même que précédemment, une augmentation de 90% du temps de calcul est observée lorsque l'on utilise une reconstruction WENO-MLS. Cependant, la possibilité d'augmenter la limite de stabilité évoquée pour le cas des tourbillons de Taylor-Green n'a pu être appliquée à ce cas de cavité entraînée. Cela provient probablement du fait que des stencils plus courts sont utilisés en proche paroi. Il n'y a donc ici pas de gain en terme de coût/précision.

Pour ce cas test, l'utilisation d'une reconstruction WENO-MLS fournit des améliorations partielles. Pour certaines quantités, des améliorations sont observées en terme de précision. Cependant, les temps de calcul obtenus ainsi que les gains limités en terme de précision restent un frein à l'utilisation d'une reconstruction WENO-MLS pour ce cas test. Ces deux points devront faire l'objet de futures recherches. La viscosité, le caractère convectif de ce cas test, le fait que l'on soit en milieu confiné, etc... expliquent également que la cavité entraînée est un cas complexe pour la méthode SPH.

5.7.2 Cas avec parois solides et surface libre - jet impactant une surface plane

Le deuxième cas considéré est le cas 2D d'un jet impactant une surface plane [97] [144]. Il présente l'avantage de pouvoir tester la nouvelle méthode de reconstruction WENO-MLS avec à la fois une paroi solide et une surface libre (le milieu n'est alors plus confiné), tout en disposant d'une solution analytique. En particulier, Taylor [144] fournit une expression implicite pour le champ de vitesse et de pression le long de la paroi :

$$\frac{x}{H} = \frac{(1+cos\alpha)\,ln\,(1+q) - (1-cos\alpha)\,ln\,(1-q)}{2\pi} + \frac{sin\alpha}{\pi} arcsin\ q + cte, \quad (5.58)$$

$$\frac{u}{U} = \frac{-1+q\ cos\alpha + \sqrt{1-q^2} sin\alpha}{q - cos\alpha}, \quad (5.59)$$

$$\frac{p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \left(\frac{u}{U}\right)^2, \quad (5.60)$$

où H est la largeur du jet à l'inlet, U la vitesse du jet à l'inlet, ρ la masse volumique du fluide et α l'angle d'impact du jet (cf. Figure 5.19 pour la paramétrisation du problème). q est une variable auxiliaire permettant de lier la position x et la vitesse u. L'expression de la pression (5.60) correspond à l'équation de Bernoulli, en considérant une pression nulle à la surface libre. On étudie ici uniquement le cas symétrique d'un impact orthogonal, i.e. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

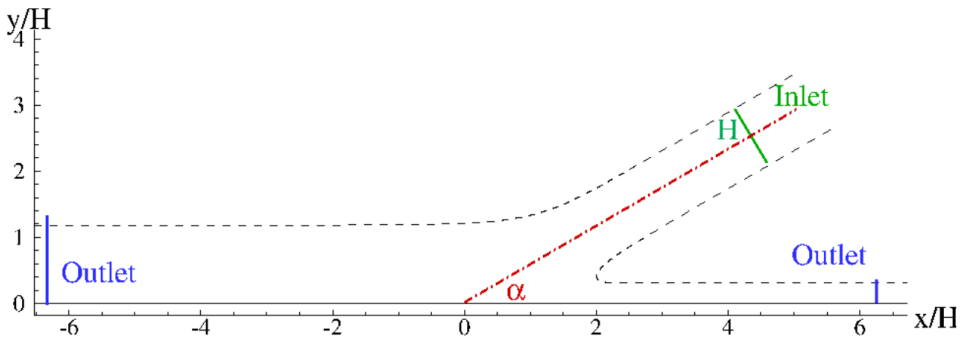

FIGURE 5.19 – Jet impactant une surface plane : description du cas test [96].

La Figure 5.20 montre les champs de vitesse et de pression obtenus avec les reconstructions MUSCL et WENO-MLS. Le champ de pression obtenu avec une reconstruction WENO-MLS est légèrement plus bruité que celui obtenu avec une reconstruction MUSCL. De même que pour le cas de la cavité entraînée, l'origine de ce phénomène est difficile à déterminer. Les différences au niveau du champ de vitesse sont plus limitées. Cependant, on remarque quelques différences au niveau du champ de vitesse proche de l'outlet, comme le montre la Figure 5.21. Le champ de vitesse y est plus uniforme avec une reconstruction WENO-MLS, comme prédit par la solution analytique. On donne également, sur la Figure 5.22, les profils de vitesse et de pression à la paroi, pour différentes discrétisations et pour les deux méthodes de reconstructions. Les résultats sont proches de la solution analytique (5.58-5.60) et sont meilleurs lorsque l'on utilise une reconstruction WENO-MLS.

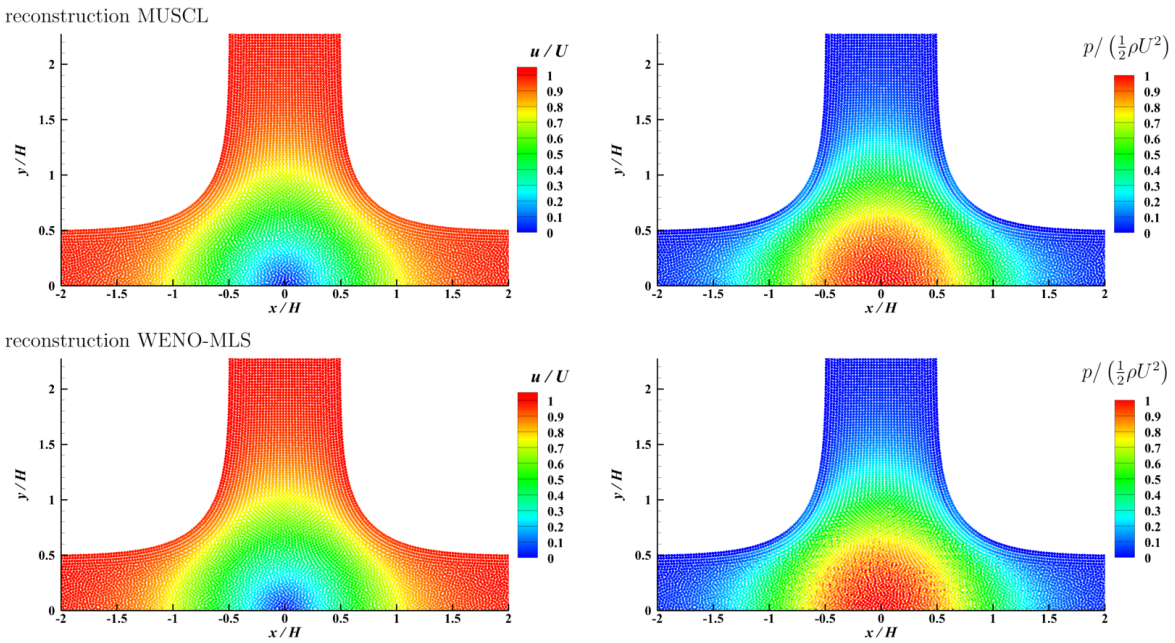

FIGURE 5.20 – Jet impactant une surface plane : Champs de vitesse et de pression obtenus avec une reconstruction MUSCL (haut) et une reconstruction WENO-MLS (bas) ; $\frac{H}{\Delta x} = 40$.

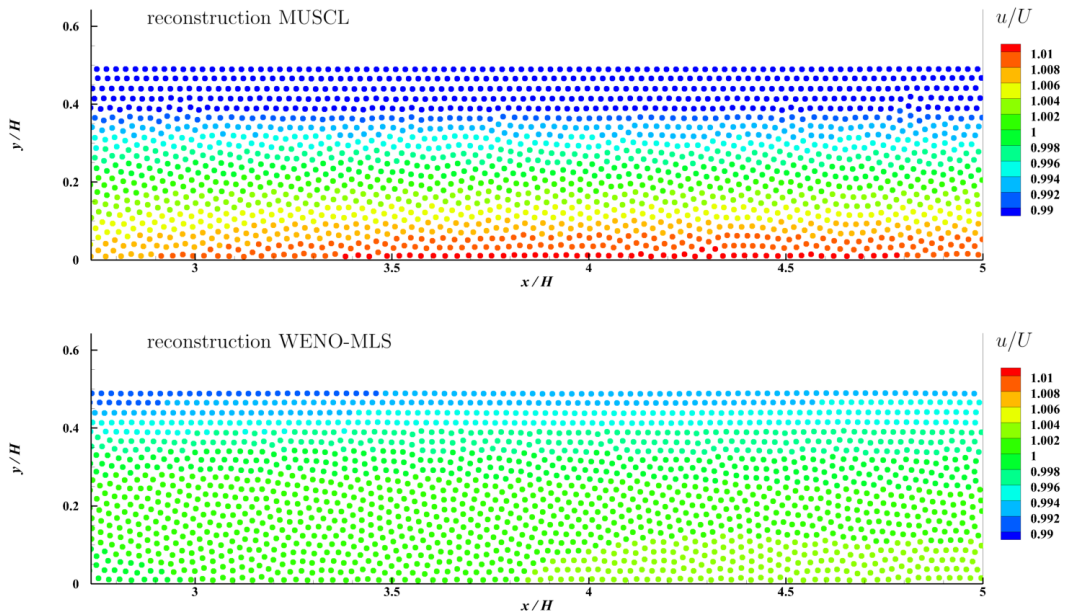

FIGURE 5.21 – Jet impactant une surface plane : Champs de vitesse proche de l'outlet pour une reconstruction MUSCL (haut) et une reconstruction WENO-MLS (bas) ; $\frac{H}{\Delta x} = 40$.

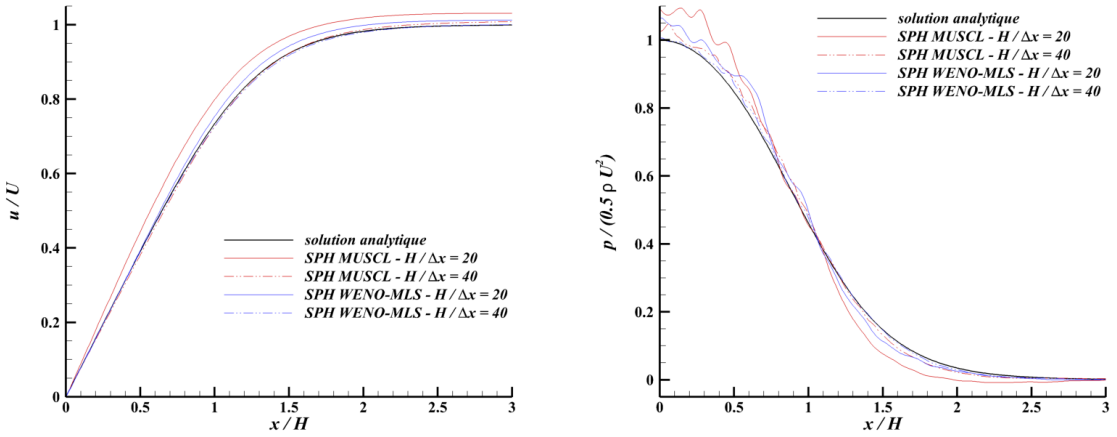

FIGURE 5.22 – Jet impactant une surface plane : Champs de vitesse et de pression à la paroi pour différentes méthodes de reconstruction et différentes discrétisations.

Afin de quantifier la convergence pour ce cas test, on donne sur la Figure 5.23 les courbes de convergence pour les profils de vitesse et de pression à la paroi. Bien que l'on n'observe pas de gain évident en terme d'ordre de convergence, la reconstruction WENO-MLS permet un gain en terme de précision par rapport à la reconstruction MUSCL. En moyenne, plus d'un facteur 2 est observé sur l'amélioration de la précision avec la reconstruction WENO-MLS. Ainsi, pour ce cas test, on observe bien un gain en terme de coût/précision (on a toujours ici une augmentation d'environ 90% du temps de calcul).

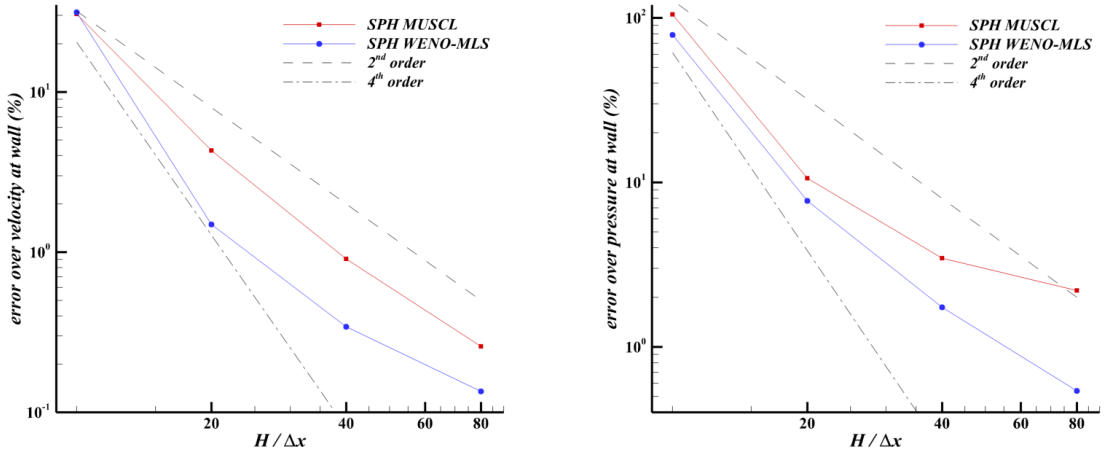

FIGURE 5.23 – Jet impactant une surface plane : Courbes de convergence (en norme L_2) sur les profils de vitesse et de pression à la paroi.

5.8 Conclusion

Une nouvelle stratégie de reconstruction à l'interface entre deux particules a été proposée pour augmenter l'ordre des schémas de type Riemann-SPH. Cette méthode propose d'adapter le schéma WENO au formalisme Lagrangien, et se base en particulier sur le fait de compléter les stencils WENO dans la direction $\boldsymbol{x}_{ij}$ à l'aide de reconstructions MLS. Cette méthode présente l'avantage de se passer de l'utilisation de limiteurs et d'être valable quelle que soit la dimension. Une adaptation en présence de frontières a également été proposée.

Une étude théorique en dimension 1 a permis de montrer que des ordres élevés peuvent être atteints en théorie, pourvu que les ordres des reconstructions WENO et MLS soient suffisamment grands. Ces résultats théoriques ont été confirmés numériquement pour des cas simples en dimension 1. En revanche, plusieurs phénomènes venant dégrader ces résultats ont été observés. Premièrement, les ordres maximaux théoriques ne sont atteints que pour un ratio $\frac{R}{\Delta x}$ important (pour des ratios $\frac{R}{\Delta x}$ usuels, des améliorations sont tout de même constatées mais sans atteindre les ordres de convergence théoriques). Ensuite, le désordre particulaire joue également un rôle important dans le fait que l'on soit limité dans la montée en ordre de la méthode SPH. Malgré ces deux limitations importantes, on constate tout de même une amélioration de la précision des simulations pour de nombreux cas test ainsi qu'un rapport coût/précision avantageux pour les cas en dimension 1.

En dimensions supérieures, ces résultats sont à nuancer fortement. Les ordres de convergence observés sont beaucoup plus limités (on ne dépasse l'ordre 2 que dans des cas très particuliers). L'ajout de frontières a tendance à donner des champs de pression plus bruités avec la nouvelle méthode de reconstruction WENO-MLS, tout en limitant encore plus les ordres de convergence observés.

La méthode proposée produit donc des résultats encourageants, en particulier en 1D, mais met également en évidence de nombreux points d'améliorations possibles. D'abord, les temps de calcul en dimension 2 et 3 sont encore trop importants et une optimisation plus

poussée de l'algorithme pourra être effectuée. Ensuite, de nombreuses améliorations de cette approche préliminaire sont sûrement possibles, notamment en présence de frontières (ex : traitement différencié entre une paroi solide et une surface libre, modification de la taille des stencils WENO, modification de l'ordre de la reconstruction WENO, autre critère que la distance à une frontière, changement moins "brusque" entre la reconstruction MUSCL et MLS des points virtuels (5.57), etc...).

Chapitre 6

Développement d'un modèle de tension de surface pour des simulations monophasiques

Dans ce chapitre, on propose un nouveau modèle de tension de surface pour les écoulements monophasiques et valable pour l'ensemble des schémas SPH détaillés à la section 2.2. En particulier, on montre qu'une évaluation précise de la normale et de la courbure à la surface libre est nécessaire à la mise en place de ce modèle. De plus, on propose une solution pour imposer un angle de contact au sein du formalisme BIM. Ce modèle est ensuite testé et validé sur un certain nombre de cas tests.

6.1 État de l'art des modèles de tension de surface en SPH

D'un point de vue physique, le phénomène de tension de surface est une force prenant place à l'interface entre deux fluides. Cette force peut s'expliquer soit à l'aide d'une description microscopique du phénomène (au niveau moléculaire) soit à l'aide d'une description macroscopique (au niveau continu). Au niveau moléculaire, la tension de surface s'explique par un déséquilibre des interactions entre les molécules des deux phases en contact (ce contact peut être un contact fluide/fluide ou un contact fluide/solide). Mais typiquement, la portée de ces interactions déséquilibrées est de l'ordre de quelques tailles caractéristiques de ces molécules. Ainsi au niveau continu, la tension de surface peut être vue comme une force n'agissant qu'au niveau de la surface de contact entre les deux phases. Elle va notamment agir en minimisant l'énergie qu'elle engendre au niveau de cette surface.

Pour des simulations numériques impliquant des effets de tension de surface, ces deux points de vue peuvent être adoptés, chacun présentant ses avantages et ses inconvénients. Puisque généralement les simulations numériques reposent sur la résolution numérique des équations de la mécanique des milieux continus, la description macroscopique (et donc continue) de la tension de surface est habituellement préférée. Or la plupart de ces méthodes reposent sur une description volumique (et non surfacique) du domaine de calcul, comme la méthode des Volumes Finis ou la méthode SPH. Cette description volumique rend généralement la détection de l'interface entre deux phases difficile à réaliser. Les efforts de tension de surface, agissant donc au niveau de cette interface, sont donc généralement difficiles à imposer.

Néanmoins, cet inconvénient peut être contourné en réécrivant la formulation surfacique classique de la tension de surface en une formulation volumique, qui pourra être implantée de manière plus simple au sein des méthodes numériques basées sur des descriptions volumiques du domaine de calcul. Cette reformulation a été proposée initialement par Brackbill et al. [20] et propose d'étendre les efforts de tension de surface sur un petit volume proche de l'interface. Comme montré dans [20], cette formulation converge vers la formulation surfacique classique lorsque la discrétisation du domaine de calcul augmente. Elle est notamment basée sur le calcul de la courbure de l'interface, combiné avec l'utilisation d'un gradient de couleur. Cette formulation est appelée Continuous Surface Force (CSF) et a été utilisée avec succès dans de nombreuses méthodes numériques [20] [133] [135] [70] [98]. Au sein de la méthode SPH, cette approche a tout d'abord été testée par Morris [106] puis étendue par Hu and Adams [68]. Cette approche au sein de la méthode SPH a été validée pour les écoulements multiphasiques. Cependant, les simulations multiphasiques en SPH sont relativement coûteuses. De plus, il n'est pas toujours nécessaire de prendre en considération la phase légère, même quand on a besoin de modéliser les effets de tension de surface. Pour de tels cas, un développement de cette méthode au sein de la méthode SPH restait à effectuer, ce qui est l'objet du présent travail. Cette approche a également permis de proposer des moyens d'imposer des angles de contact pour la méthode SPH [68] [21].

Parallèlement, la description microscopique de la tension de surface peut également être utilisée au sein des simulations numériques. Comme expliqué plus haut, à l'échelle des molécules la tension de surface est causée par un déséquilibre des interactions entre molécules au niveau de l'interface. Ainsi, un moyen de simuler les efforts de tension de surface est de mimer ce déséquilibre en imposant un champ de force spécifique près de l'interface (dans la littérature ce champ de force est usuellement nommé Pairwise Force (PF)). Pour la méthode SPH, son caractère particulaire facilite l'implémentation de cette technique basée sur l'approche "moléculaire". Typiquement elle consiste à imposer ce champ PF au niveau de chaque interaction entre particules (cf. [142] [74] [2] pour plus de détails). Cette approche présente l'avantage d'être relativement facile à implémenter et ne nécessite pas de calcul explicite de la normale et de la courbure à l'interface. Cependant, elle requiert généralement une phase de calibration qui peut dépendre du cas test considéré (par exemple, pour le cas d'une goutte à l'équilibre on doit ajuster un coefficient en fonction de la taille de la goutte [142]). Récemment Tartakovsky et Panchenko [143] ont cependant dérivé une relation entre le champ PF et le coefficient de tension de surface σ, évitant donc en théorie cette phase de calibration. L'un des principaux avantages de cette méthode est qu'elle est valide pour des écoulements monophasiques, ce qui réduit de manière significative les coûts de calcul. Cependant, elle fournit des évaluations erronées du champ de pression proche de l'interface [142]. Cette erreur est principalement due à l'inconsistance des échelles auxquelles ont lieu les différents phénomènes étudiés : l'échelle des particules SPH (et du champ numérique PF) est généralement bien supérieure à l'échelle réelle des molécules (et des interactions qui ont lieu entre elles). Pour cette raison, le modèle PF-SPH n'est pas retenu dans ce travail et le modèle CSF est privilégié.

6.2 Amélioration du modèle CSF et adaptation aux écoulements monophasiques : corrected CSF (C-CSF)

Comme évoqué plus haut, le modèle CSF [20] peut être vu comme une extension d'une force surfacique locale à une force volumique n'agissant qu'à proximité de l'interface (ou de la surface libre dans le cas d'un écoulement monophasique). Cette force volumique est donc simplement ajoutée dans l'équation de conservation de quantité de mouvement. Pour le schéma de Parshikov et al., cela ce traduit par une modification de l'équation de quantité de mouvement (2.71) :

$$\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_i}\sum_{j\in\Omega_i} 2P_E \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + \frac{1}{\rho_i}\boldsymbol{F}_i^{\sigma}, \tag{6.1}$$

avec $\boldsymbol{F}_i^{\sigma}$ le champ de force volumique qui diffère de zéro uniquement à proximité de l'interface. On notera que cette expression peut aisément être adaptée à tous les autres schémas SPH (δ-SPH, schémas à viscosité artificielle, etc...). Comme proposé par Brackbill et al. [20], ce champ de force $\boldsymbol{F}_i^{\sigma}$ peut s'écrire à l'aide du formalisme CSF :

$$\boldsymbol{F}_i^{\sigma} = -\sigma\kappa_i \boldsymbol{n}_i \delta_{\Sigma,i}, \tag{6.2}$$

où σ est le coefficient de tension de surface, κ_i la courbure à l'interface, $\boldsymbol{n}_i$ le vecteur unitaire normal à l'interface et $\delta_{\Sigma,i}$ la fonction d'interface. La fonction d'interface $\delta_{\Sigma,i}$ décroît lorsque la distance à l'interface diminue et est en théorie nulle dès lors que la distance à l'interface est plus grande que le rayon R d'une particule (cf. Figure 6.1). Cela permet d'assurer la consistance de cette formulation volumique avec la description surfacique de la tension de surface [20]. L'expression (6.2) est également construite de manière à imposer le saut de pression à l'interface (voir [20] pour plus de détails). Cette formulation basée sur une fonction d'interface $\delta_{\Sigma,i}$ a également été utilisé par Adami et al. [1] dans le contexte de la méthode SPH multiphasique.

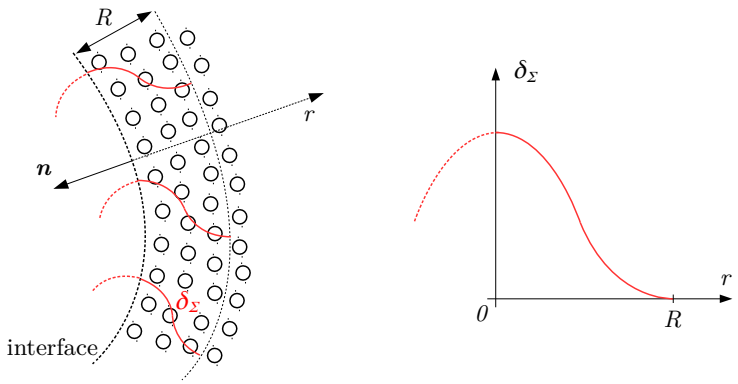

FIGURE 6.1 – Schéma illustrant le comportement de la fonction d'interface ; les lignes rouges en pointillé représentent le comportement dans la phase manquante.

Le travail effectué par la suite propose d'adapter la formulation CSF proposée dans [20] à la formulation SPH monophasique. La principale difficulté rencontrée ici est l'incomplétude du support du noyau proche de l'interface (contrairement au cas multiphasique), ce qui fait que la précision des opérateurs SPH dans cette zone présente une forte influence sur le modèle proposé. Les sections suivantes ont donc pour but d'expliciter les différents termes de l'expression (6.2) et de présenter certaines améliorations importantes, dans le contexte monophasique. On note que cette formulation améliorée, baptisée "corrected-CSF" (C-CSF), pourra en théorie être appliquée à l'ensemble des schémas monophasiques SPH.

6.3 Tension de surface et compressibilité

La tension de surface est notamment caractérisée par un saut de pression à l'interface, donné par la loi de Laplace. En particulier, ce saut de pression peut devenir significatif pour des valeurs importantes de la courbure à l'interface, ce qui peut impacter l'hypothèse de faible-compressibilité. Comme montré dans [26], l'hypothèse de faible-compressibilité reste vérifiée tant que la condition suivante est satisfaite :

$$\frac{\sigma|\kappa|}{\rho c^2} < 0.01. \tag{6.3}$$

Cette condition peut s'obtenir par une analyse en ordre de grandeur de l'équation (6.1) et implique que la variation de densité autour de la valeur de référence ρ_0 reste de l'ordre du pourcent. Cette condition est importante pour garantir les propriétés de faible-compressibilité pour des cas à fortes courbures. Elle n'est pas directement imposée au sein de la formulation (6.2) mais doit être vérifiée a posteriori (si ce n'est pas le cas alors la vitesse du son artificielle c_0 doit être augmentée en conséquence).

6.4 Condition de stabilité

Comme montré dans [20], la formulation (6.2) implique l'utilisation d'une condition de stabilité, basée sur la vitesse de propagation des ondes capillaires. Pour des écoulements monophasiques, la vitesse de phase d'une onde capillaire est donnée par :

$$c_\phi = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}}, \tag{6.4}$$

où k est le nombre d'onde associé à l'onde capillaire considérée. De même que pour la condition de stabilité (2.98), cette condition de stabilité impose alors qu'une onde capillaire ne doit pas parcourir plus qu'une certaine fraction de la longueur caractéristique de la discrétisation spatiale (prise ici égale au rayon R du noyau) au cours d'un pas de temps Δt. On a alors la condition de stabilité suivante :

$$\Delta t \leq CFL_\sigma \min_{i\in\mathcal{P}} \left(\frac{R_i}{c_{\phi,i}} \right) = CFL_\sigma \min_{i\in\mathcal{P}} \left(\sqrt{\frac{\rho_i R_i^2}{\sigma k_i}} \right), \tag{6.5}$$

où CFL_σ est la constante de stabilité liée aux termes de tension de surface. Le nombre d'onde k_i doit donc être évalué. Brackbill et al. [20] et Morris [106] proposent d'évaluer k_i à l'aide de la discrétisation spatiale de la méthode choisie (par exemple Brackbill et al. [20] prennent $k_i \sim \frac{2\pi}{\Delta x}$). Ce choix implique un pas de temps constant et relativement faible, et ce même lorsque des courbures relativement modérées sont en jeu. On propose ici un choix différent pour évaluer k_i, afin de prendre en compte les changements de courbure au cours de la simulation notamment, en utilisant la courbure $k_i \sim 2\pi|\kappa_i|$:

$$\Delta t \leq CFL_\sigma \min_{i\in\mathcal{P}} \left(\sqrt{\frac{\rho_i R_i^2}{2\pi\sigma|\kappa_i|}} \right) = \Delta t_\sigma, \tag{6.6}$$

avec le coefficient CFL_σ fixé de manière heuristique à $CFL_\sigma = 0.05$. La formulation (6.6) peut être interprétée comme un pas de temps adaptatif, prenant en compte les variations de courbure au cours de l'écoulement. Lorsque des courbures importantes interviennent, les ondes capillaires ont une vitesse (6.4) importante, ce qui nécessite d'avoir un pas de temps faible. À l'inverse, lorsque des courbures plus limitées interviennent, la condition de stabilité peut être relaxée.

6.5 Cas sans paroi solide

6.5.1 Détermination de la normale à l'interface

En premier lieu, il est nécessaire d'évaluer la normale à l'interface. Usuellement, cette normale est évaluée à l'aide d'un gradient de couleur à l'interface [20] [106] [68] [1] (chaque phase de part et d'autre de l'interface se voit affecter une "couleur" c qui lui est propre, i.e. un scalaire constant, typiquement soit 1 soit 0 ; la normale est alors donnée par $\pm\frac{\boldsymbol{\nabla} c}{||\boldsymbol{\nabla} c||}$). Cependant, cette évaluation ne demeure suffisamment précise qu'à proximité immédiate de l'interface (typiquement jusqu'à une ou deux fois la taille caractéristique d'une particule SPH). Idéalement, l'évaluation de la normale à l'interface doit se faire de manière précise jusqu'à une distance R de l'interface. Dans le contexte du désordre particulaire proche d'une surface libre, Sun et al. [140] ont montré que l'évaluation de la normale à la surface libre pouvait être améliorée en utilisant le gradient du minimum des valeurs propres λ_i de la matrice $\mathbb{L}_i^{-1}$ (2.47). Ce champ est bien plus régulier que le champ de couleur discontinu classiquement utilisé, et permet donc d'étendre l'évaluation de la normale jusqu'à une distance R de l'interface [140]. Enfin, de même que Huber et al. [69], on constate que le fait d'utiliser un opérateur gradient renormalisé (2.48) fournit de meilleurs résultats (cf. section 6.6.1 pour la validation sur un cas numérique). Finalement la normale à l'interface peut être donnée par :

$$\boldsymbol{n}_i = -\frac{\boldsymbol{\nabla}\lambda_i}{||\boldsymbol{\nabla}\lambda_i||}, \tag{6.7}$$

où

$$\boldsymbol{\nabla}\lambda_i = \mathbb{L}_i \left(\sum_{j\in\Omega_i} (\lambda_j - \lambda_i)\, \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j \right). \tag{6.8}$$

Le signe moins dans (6.7) est nécessaire pour imposer une normale dirigée vers l'extérieur du domaine de fluide. Loin de l'interface, la valeur de λ_i est quasiment constante et est proche de 1 (dès lors que cette distance est supérieure au rayon R du noyau), et décroit régulièrement à l'approche de l'interface (typiquement $\lambda_i \simeq 0.5$ à l'interface, pour une surface libre plane). Cela explique pourquoi l'expression (6.7) fournit une meilleure évaluation que l'évaluation classique basée sur un gradient de couleur, notamment lorsque la distance à l'interface approche R. Elle requiert cependant le calcul des valeurs de λ_i, ce qui augmente légèrement le temps de calcul.

6.5.2 Détermination de la courbure à l'interface

Ensuite, la courbure à l'interface est simplement calculée en déterminant la divergence de la normale $\boldsymbol{n}_i$ (6.7) calculée précédemment. Ici encore, et comme discuté dans [69], un opérateur renormalisé (2.49) est préféré car cela fournit de meilleurs résultats (cf. section

6.6.1 pour la validation sur un cas numérique). La courbure à l'interface κ_i est alors donnée par :

$$\kappa_i = \sum_{j \in \Omega_i} \left(\mathbb{L}_i \left(\boldsymbol{n}_j - \boldsymbol{n}_i \right) \right) . \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j. \tag{6.9}$$

6.5.3 Détermination de la fonction d'interface

La fonction d'interface $\delta_{\Sigma,i}$ est habituellement déterminée en utilisant la norme du gradient de couleur $\boldsymbol{\nabla} c_i$ [106] [1] :

$$\boldsymbol{\nabla} c_i = \sum_{j \in \Omega_i} \left(c_j + c_i \right) \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j. \tag{6.10}$$

Pour une simulation monophasique, la fonction couleur prend une unique valeur donnée par $c_i = c_j = 1$ (tout se passe comme si la seconde phase inexistante avait une couleur égale à 0), conduisant à l'expression suivante pour la fonction d'interface :

$$\delta_{\Sigma,i} = ||\boldsymbol{\nabla} c_i|| = 2|| \sum_{j \in \Omega_i} \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j||. \tag{6.11}$$

6.5.4 Corrections additionnelles

Plusieurs corrections additionnelles sont nécessaires pour rendre la formulation proposée plus précise et plus robuste, en particulier lorsque le nombre de particules voisines devient relativement faible, comme au sein d'un jet fluide par exemple. Dans ces zones, les opérateurs SPH peuvent donner de mauvaises évaluations et doivent donc être corrigés. Il est cependant important de noter que toutes ces corrections sont là pour pallier le manque de consistance entre la formulation surfacique de la tension de surface et sa reformulation volumique proposée par Brackbill et al. [20]. Théoriquement, ces corrections ne doivent donc plus intervenir lorsque le nombre de particules est suffisant.

6.5.4.1 Correction de la normale à l'interface dans les jets fluides

En premier lieu, on notera que l'évaluation de $\boldsymbol{\nabla} \lambda_i$ par (6.8) est erronée au sein des jets fluides, en particulier pour ce qui concerne la direction de la normale. En effet, dans un jet fluide (i.e. pour un faible nombre de particules voisines) on observe que λ est quasiment uniforme (avec des valeurs faibles), conduisant à des valeurs proches de $\mathbf{0}$ pour $\boldsymbol{\nabla} \lambda_i$ lorsque l'on utilise l'opérateur antisymétrique (6.8). On propose donc la modification suivante afin de rétablir une évaluation correcte de la normale dans ces zones :

$$\boldsymbol{\nabla}\lambda_i = \begin{cases} \mathbb{L}_i \left(\sum_{j\in\Omega_i} (\lambda_j - \lambda_i) \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j \right) & \text{si } \lambda_i \geq \lambda_{jet} \\ \mathbb{L}_i \left(\sum_{j\in\Omega_i} \lambda_j \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j \right) & \text{sinon} \end{cases}, \tag{6.12}$$

où λ_{jet} est une valeur seuil utilisée ici pour détecter si une particule i est entourée par un nombre suffisant de particules voisines. Cette valeur est fixée en première approche à $\lambda_{jet} = 0.7$.

6.5.4.2 Pénalisation de la normale loin de l'interface

Loin de l'interface, la valeur de λ_i est proche d'une valeur constante ($\lambda_i \simeq 1$) ce qui induit que $\boldsymbol{\nabla}\lambda_i$ tende vers $\mathbf{0}$. En conséquence, les normales évaluées loin de l'interface à l'aide de l'évaluation (6.8) vont pointer dans des directions a priori arbitraires. Pour de telles particules, il est préférable d'imposer une normale nulle dans le but de fournir ensuite une évaluation correcte de la courbure κ_i (6.9). En s'inspirant de [106], on propose ici un critère basé sur la norme de $\boldsymbol{\nabla}\lambda_i$ pour effectuer cette pénalisation :

$$\boldsymbol{n}_i = \begin{cases} -\dfrac{\boldsymbol{\nabla}\lambda_i}{||\boldsymbol{\nabla}\lambda_i||} & \text{si } ||\boldsymbol{\nabla}\lambda_i|| > \epsilon \frac{\lambda_i}{h_i} \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases}, \tag{6.13}$$

où h_i est la longueur de lissage du noyau et ϵ une constante prise égale à $\epsilon = 0.1$ (cf. [106] pour plus de justifications). Cette pénalisation peut paraître relativement brusque. Cependant il faut garder à l'esprit qu'elle n'intervient en théorie que dans des zones (typiquement loin d'une interface) où les effets de tension de surface attendus sont inexistants. Ce critère est donc présent uniquement pour rendre le modèle plus robuste.

6.5.4.3 Correction de la courbure à l'interface dans les jets fluides

Une autre difficulté présente dans les zones de jets fluides est qu'elles sont le lieu de très fortes variations de la direction de la normale à l'interface, même dans le cas où ces normales sont correctement évaluées (cf. Figure 6.2). Dans ces zones, l'évaluation de la courbure à l'aide de l'expression (6.9) n'est plus suffisamment précise et doit donc être modifiée. On propose la correction suivante :

$$\kappa_i = \sum_{j\in\Omega_i} s_{ij} \left(\mathbb{L}_i \left(\boldsymbol{n}_j - \boldsymbol{n}_i \right) \right) . \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j, \tag{6.14}$$

où

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{n}_i.\boldsymbol{n}_j \geq cos\alpha_t \text{ et } ||\boldsymbol{n}_i|| > 0 \text{ et } ||\boldsymbol{n}_j|| > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \tag{6.15}$$

où α_t est un angle seuil défini par $cos\alpha_t = -\frac{1}{2}$ en 2D et $cos\alpha_t = -\frac{1}{3}$ en 3D. Ces valeurs seuils correspondent respectivement à l'angle au centre d'un triangle équilatéral et d'un tétraèdre régulier (cf. Figure 6.3). Ce choix est basé sur le plus petit rayon de courbure qui puisse être détecté (3 points sont nécessaires pour définir un cercle et 4 pour définir une sphère). Physiquement, le critère (6.15) correspond au fait que les interfaces de part et d'autre d'un jet ne doivent pas interagir entre elles, du fait du caractère surfacique des efforts de tension de surface.

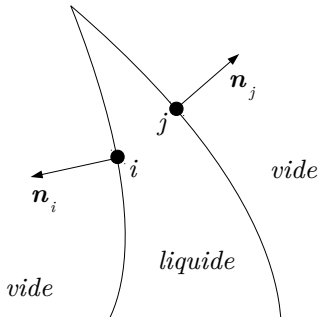

FIGURE 6.2 – Exemple de situation pour laquelle de fortes variations de la direction de la normale ont lieu et pour laquelle la correction (6.14) est nécessaire.

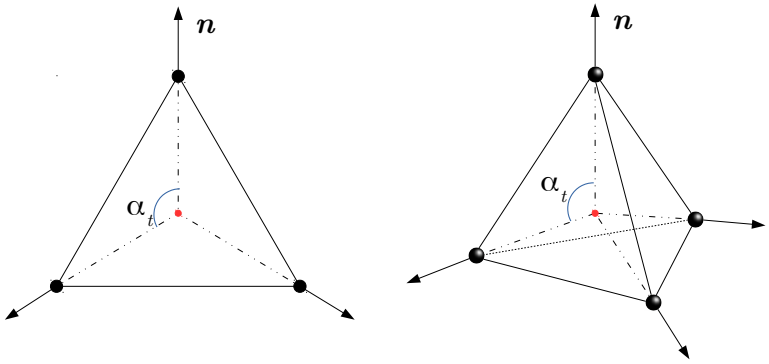

FIGURE 6.3 – Configurations limites reliées au plus petit rayon de courbure qui puisse être détecté ; Gauche : cas 2D ; Droite ; cas 3D.

6.5.4.4 Correction de la fonction d'interface

La dernière correction proposée est liée à la fonction d'interface (6.11). Dans des régions où le nombre de particules voisines est faible (par exemple au bout de jets fluides ou dans

des zones de rupture de filaments fluides) on observe en pratique que les effets de tension de surface sont sous-estimés. En conséquence, des particules peuvent se "détacher" du domaine de fluide de façon inattendue ou bien des ruptures de filaments fluides peuvent être réalisées de façon incorrecte, engendrant des comportements non-physiques et rendant le modèle peu robuste. On propose donc une modification de l'expression (6.11) afin d'augmenter les effets de tension de surface dans ces zones :

$$\delta_{\Sigma,i} = 2\ max\,(1, g_i)\,||\sum_{j\in\Omega_i} \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j||, \tag{6.16}$$

où g_i est une fonction qui doit être légèrement supérieure à 1 seulement dans les régions où le nombre de particules voisines est faible (i.e. dans les régions évoquées plus haut). Cela a donc pour conséquence d'augmenter les effets de tension de surface dans ces régions. Dans une première approche, on propose d'utiliser une correction Shepard de la manière suivante :

$$g_i = \frac{1}{2\sum_{j\in\Omega_i} W_{ij} V_j}. \tag{6.17}$$

L'opérateur $\sum_{j\in\Omega_i} W_{ij} V_j$ permet en effet de donner une estimation du nombre de particules voisines. En particulier, la fonction (6.17) respecte la condition désirée puisqu'en pratique la correction Shepard discrétisée est proche de 0.7 près d'une surface libre plane (i.e. $g_i \simeq 0.71$), empêchant de déclencher la correction (6.16) dans ce cas par exemple. À l'inverse, cette fonction (6.17) devient supérieure à 1 dès lors que le nombre de particules voisines est suffisamment faible (dès lors que la correction Shepard discrétisée devient inférieure à 0.5), ce qui augmentera légèrement les effets de tension de surface dans les zones évoquées plus haut. Cette première proposition est purement empirique et nécessitera sans doute des améliorations futures.

6.6 Validation pour des cas sans paroi solide

On cherche maintenant à valider le modèle C-CSF proposé. Le modèle sera appliqué à un grand nombre de cas tests présentant des comportements variés, montrant la grande polyvalence du modèle C-CSF ainsi proposé. On s'intéressera aussi bien à des cas statiques ou oscillants, des cas de ruptures de jets fluides, etc. Sauf mention contraire, le ratio $\frac{R}{\Delta x}$ sera pris égal à 4 en 2D et à 3 en 3D.

6.6.1 Déformation de gouttes carrée et cubique

Le premier cas test considéré consiste à étudier la déformation d'un domaine fluide initialement constitué d'un carré de côté L (ou d'un cube de côté L pour le cas 3D). Le volume de fluide initial V_0 doit se déformer, pour minimiser son énergie de surface, jusqu'à atteindre

un état d'équilibre statique et prendre un forme circulaire ou sphérique (cf. Figure 6.4). Ce cas est intéressant pour deux raisons : il permet de valider le fait que la loi de Laplace est bien vérifiée à l'équilibre, et il montre la pertinence des corrections développées à la section 6.5.4. À l'état d'équilibre, la pression à l'intérieur de la goutte est théoriquement uniforme, et sa valeur est donnée par la loi de Laplace :

$$P_{Laplace} = \begin{cases} \dfrac{2\sigma}{R_{eq}} & \text{en 3D,} \\ \dfrac{\sigma}{R_{eq}} & \text{en 2D,} \end{cases} \tag{6.18}$$

où R_{eq} est le rayon de la goutte à l'état d'équilibre. Par conservation du volume, on a simplement $R_{eq} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} L$ en 3D et $R_{eq} = \frac{L}{\sqrt{\pi}}$ en 2D. Les paramètres retenus sont les mêmes que ceux utilisés dans [1] : $\rho_0 = 1kg/m^3$, $\sigma = 1N/m$, $\mu = 0.2kg/m/s$ et $L = 0.4m$. Numériquement, on peut considérer que l'état d'équilibre est atteint à $t = 8\sqrt{\frac{\rho R_{eq}^3}{\sigma}}$ (ce qui correspond à une énergie cinétique et une pression qui ne varient plus ; cf. Figure 6.7). De manière purement qualitative, on peut tout d'abord remarquer sur la Figure 6.4 que les formes des gouttes à l'équilibre sont bien circulaire et sphérique respectivement, et que la pression au sein des gouttes est quasiment uniforme et proche de la pression de Laplace (6.18). Une erreur d'environ $10 - 15\%$ est cependant observée, mais n'est au final due qu'à un problème de convergence et une discrétisation trop grossière (cf. Figure 6.8).

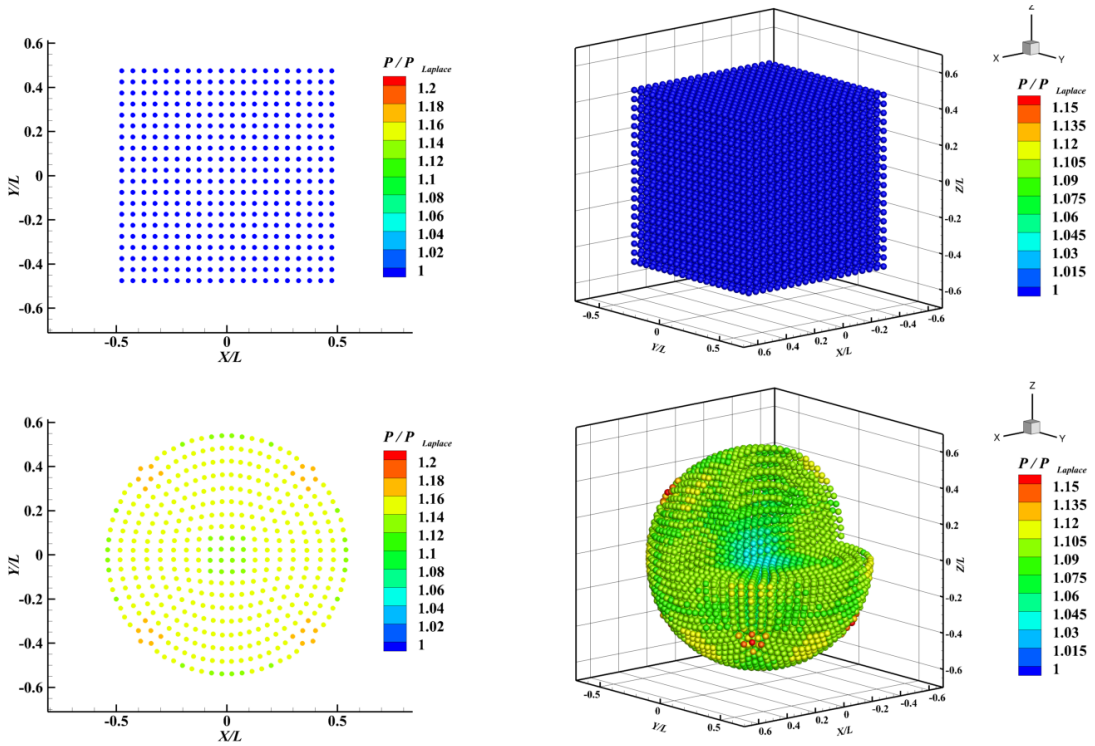

FIGURE 6.4 – Déformation de gouttes carrée et cubique : distributions des particules et champs de pression à $t = 0$ (haut) et $t = 8\sqrt{\frac{\rho R_{eq}^3}{\sigma}}$ (bas) pour les cas 2D (gauche) et 3D (droite) obtenus avec le modèle C-CSF et pour $\frac{L}{\Delta x} = 20$.

Premièrement, ce cas est utile pour mettre en évidence l'importance de l'utilisation des opérateurs renormalisés (6.8) et (6.9) pour le calcul de la normale et de la courbure à l'interface. On montre sur la Figure 6.5 l'influence des opérateurs renormalisés sur la précision du modèle. En particulier, l'utilisation des opérateurs renormalisés permet d'éviter que les particules initialement situées aux sommets du domaine de fluide ne se détachent. On peut également montrer, à l'aide de ce cas, l'importance des corrections développées à la section 6.5.4. La Figure 6.6 montre en particulier que ces corrections permettent d'obtenir une pression beaucoup plus régulière et plus proche de la pression de Laplace théorique (6.18) au sein de la goutte. De plus, la Figure 6.6 valide le fait que le modèle C-CSF puisse être utilisé avec succès avec d'autres schémas, comme le schéma δ-SPH par exemple. Enfin, on donne sur cette Figure 6.6 une comparaison avec le champ de pression obtenu à l'aide d'une formulation PF proposée par Akinci et al. [2]. On montre en particulier que la formulation PF donne une mauvaise évaluation du champ de pression, notamment lorsque l'on se rapproche de la surface libre.

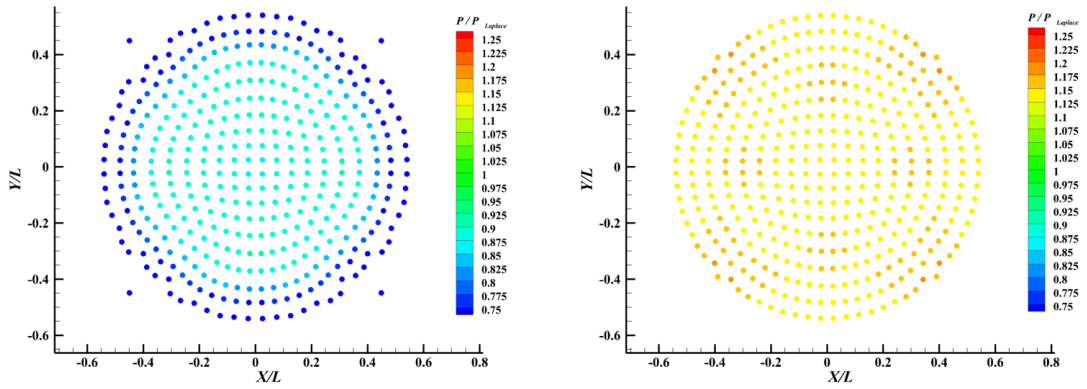

FIGURE 6.5 – Déformation de gouttes carrée et cubique : distribution des particules et champ de pression à $t = 8\sqrt{\frac{\rho R_{eq}^3}{\sigma}}$ avec des opérateurs non-renormalisés (gauche) et renormalisés (droite) pour l'évaluation de la normale et de la courbure à l'interface, montrant l'intérêt d'utiliser les opérateurs (6.8) et (6.9) ; $\frac{L}{\Delta x} = 20$.

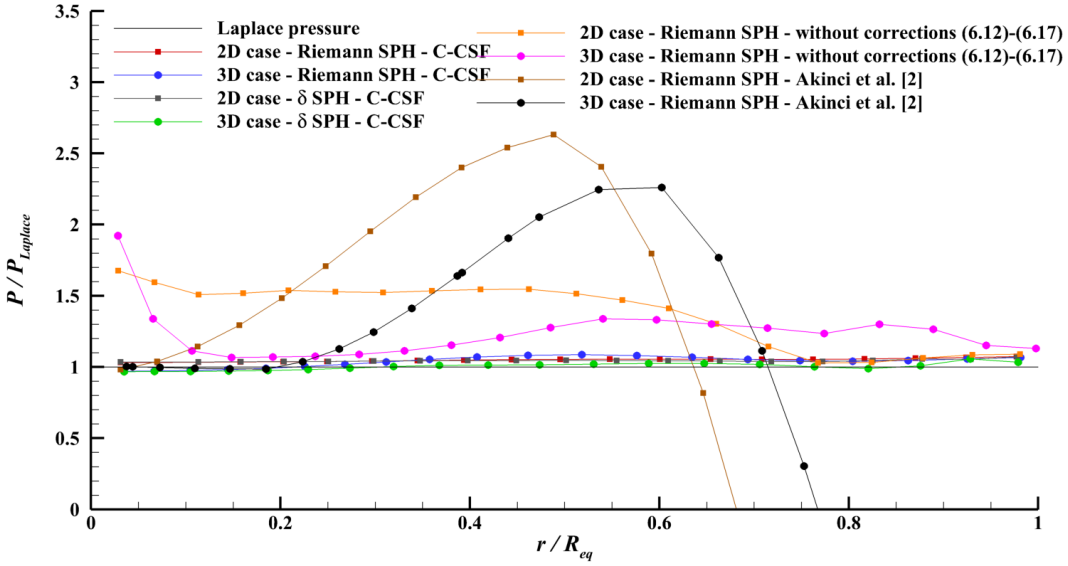

FIGURE 6.6 – Déformation de gouttes carrée et cubique : profils de pression à $t = 8\sqrt{\frac{\rho R_{eq}^3}{\sigma}}$ pour les cas 2D et 3D et pour $\frac{L}{\Delta x} = 40$. On donne aussi les résultats pour le schéma $\delta - SPH$, pour la formulation PF de Akinci et al. [2] et sans les corrections présentées à la section 6.5.4.

On présente également l'évolution de l'énergie cinétique sur la Figure 6.7, montrant notamment qu'elle tend rapidement vers une valeur proche de 0. Le fait que cette valeur ne soit pas strictement nulle montre que des courants parasites demeurent tout de même au sein de la goutte en équilibre (ces courants sont souvent observés pour les modèles de tension de surface dans la méthode SPH comme pour d'autres méthodes [133] [98]). Néanmoins, la Figure 6.7 montre que cette valeur résiduelle de l'énergie cinétique diminue lorsque l'on augmente la discrétisation, ce qui suggère que ces courants parasites deviennent négligeables à convergence. On cherche alors à préciser les propriétés de convergence du modèle C-CSF. Pour cela, on effectue une étude de convergence sur la pression à l'équilibre au sein de la goutte. Les résultats sont donnés sur la Figure 6.8. On notera que les résultats sans les corrections présentées à la section 6.5.4 ne sont pas présentés ici car aucune convergence n'a été observée. On observe jusqu'à un ordre 2 de convergence (à la fois pour les cas 2D et 3D), montrant que la convergence est assurée en utilisant le modèle C-CSF.

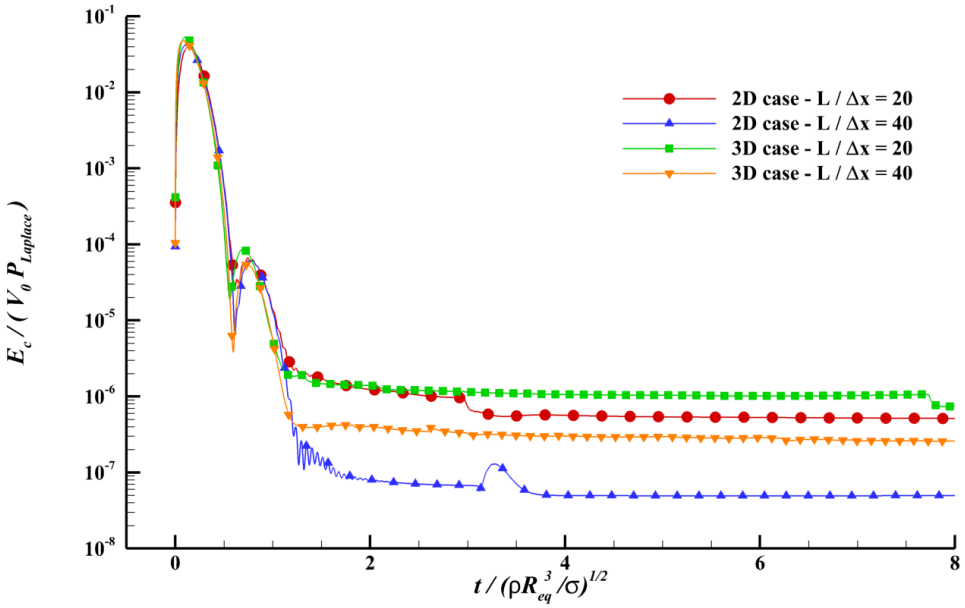

FIGURE 6.7 – Déformation de gouttes carrée et cubique : évolution de l'énergie cinétique pour les cas 2D et 3D et pour $\frac{L}{\Delta x} = 20$ et $\frac{L}{\Delta x} = 40$

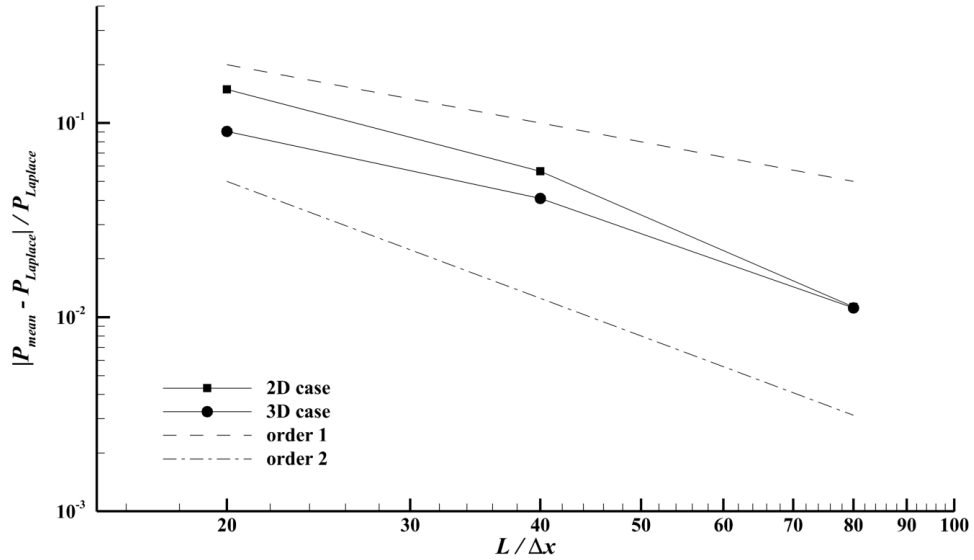

FIGURE 6.8 – Déformation de gouttes carrée et cubique : courbes de convergence sur la pression moyenne dans la goutte à $t = 8\sqrt{\frac{\rho R_{eq}^3}{\sigma}}$

6.6.1.1 Étude de robustesse du modèle pour le cas de la déformation d'une goutte cubique

On ajoute ici une rapide étude de la robustesse du modèle proposé. Cette étude de robustesse est motivée par des considérations industrielles. En effet, pour des raisons de

coûts de calcul, on ne peut parfois pas se permettre d'effectuer des calculs présentant une trop forte résolution. Pour de tels cas on souhaite tout de même conserver une certaine stabilité. En particulier on cherche ici à étudier la robustesse de la nouvelle formulation, notamment lorsque le ratio $\frac{R}{\Delta x}$ diminue et lorsque le nombre de particules au sein d'une goutte diminue également. Pour cela on s'intéresse au cas d'un domaine de fluide initialement cubique devenant une goutte. On fixe une taille de goutte (ici la taille L du cube initial) et on regarde l'influence des ratios $\frac{R}{\Delta x}$ et $\frac{L}{\Delta x}$. Les paramètres sont les suivants : $\frac{R}{\Delta x} \in [2.11; 2.4; 3]$, $\frac{L}{\Delta x} \in [2; 3; 5; 10; 20; 40]$ et $t_{max} = 0.01s$. On mesure la pression au centre des gouttes, que l'on compare à la pression de Laplace. On cherche aussi à déterminer si le calcul reste stable (notamment pour les ratios $\frac{R}{\Delta x}$ et $\frac{L}{\Delta x}$ faibles). On donne les résultats des mesures de pression dans la Table 6.1.

	$\frac{R}{\Delta x} = 2.11$	$\frac{R}{\Delta x} = 2.4$	$\frac{R}{\Delta x} = 3$
$\frac{L}{\Delta x} = 2$	1.885 (88.5%)	1.748 (74.8%)	2.050 (105%)
$\frac{L}{\Delta x} = 3$	1.819 (81.9%)	1.841 (84.1%)	1.792 (79.2%)
$\frac{L}{\Delta x} = 5$	1.819 (81.9%)	1.580 (58.0%)	1.704 (70.4%)
$\frac{L}{\Delta x} = 10$	1.265 (26.5%)	1.177 (17.7%)	1.159 (15.9%)
$\frac{L}{\Delta x} = 20$	1.066 (6.6%)	1.181 (18.1%)	1.088 (8.8%)
$\frac{L}{\Delta x} = 40$	1.027 (2.7%)	1.035 (3.5%)	1.013 (1.3%)

TABLE 6.1 – Déformation de gouttes carrée et cubique : Pression adimensionnée $P/P_{Laplace}$ au centre des gouttes (et pourcentage d'erreur associé) à $t = 8\sqrt{\frac{\rho R_{eq}^3}{\sigma}}$ pour différents ratios $\frac{R}{\Delta x}$ et $\frac{L}{\Delta x}$.

On constate tout d'abord que les calculs sont stables (i.e. nous n'avons pas observé de divergence des résultats ni d'arrêt brutal des simulations) pour toutes les valeurs de $\frac{R}{\Delta x}$ et $\frac{L}{\Delta x}$ (y compris pour de faibles valeurs de ces ratios). Pour un nombre de particules suffisamment élevé par goutte (jusqu'à $\frac{L}{\Delta x} = 10$) on constate un bon accord avec la pression de Laplace théorique. En revanche, lorsque le nombre de particules par goutte devient faible, les mesures de pression deviennent éloignées de la pression théorique, bien que le calcul reste stable. On peut estimer à l'aide de ces valeurs que le rayon de la goutte doit être au moins égal à deux fois le rayon des particules si l'on souhaite une valeur de pression "acceptable". On montre également, sur la Figure 6.9, la forme des gouttes et le champ de pression à l'instant final. On remarque que le champ de pression est relativement uniforme et que la forme des gouttes est bien sphérique (sauf bien sûr pour les gouttes contenant peu de particules).

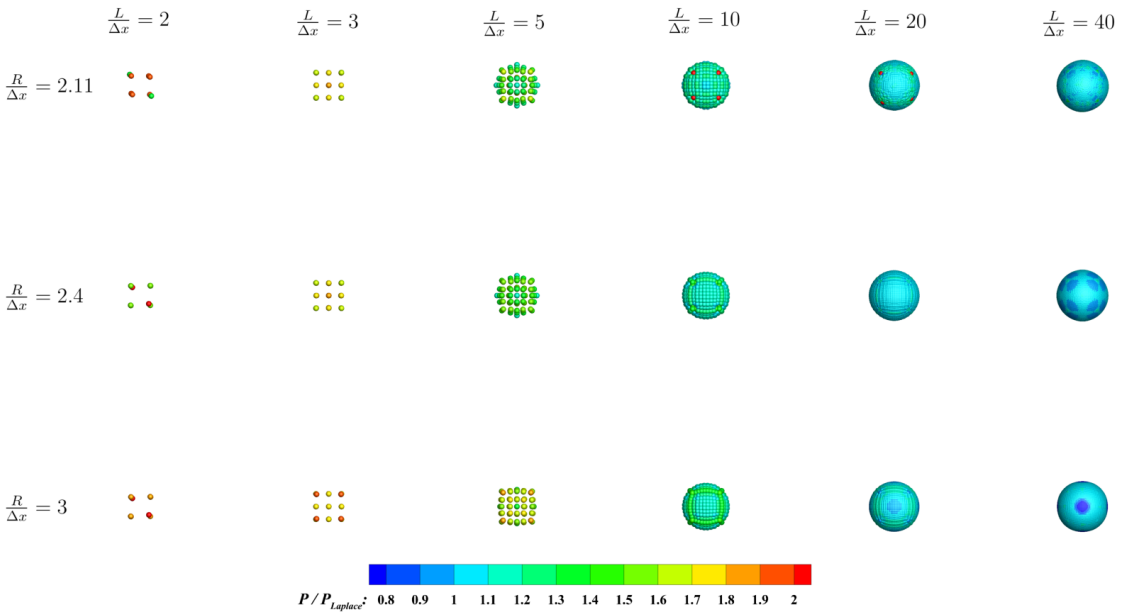

FIGURE 6.9 – Déformation de gouttes carrée et cubique : champ de pression à $t = 8\sqrt{\frac{\rho R_{eq}^3}{\sigma}}$ pour différentes discrétisations spatiales et pour des nombres de voisins différents.

6.6.1.2 Inversion des phases

Le cas ci-dessus présente des courbures positives à l'interface. Il est alors légitime de se demander comment se comporte le modèle C-CSF en présence de courbures négatives. Pour le cas ci-dessus cela revient à inverser les phases en présence. Autrement dit, cela correspond au cas de la déformation d'une bulle de vide au sein d'un domaine fluide. Dans ce cas, la pression théorique à l'équilibre dans le domaine fluide est donnée par l'opposé de l'expression (6.18) (la pression à l'équilibre dans le fluide est ici négative car la courbure à l'interface est comptée négativement). Ce cas n'est pas étudié en profondeur ici et sert uniquement à montrer la polyvalence du modèle C-CSF. On montre les résultats obtenus sur la Figure 6.10. La forme de la bulle tend bien vers une forme circulaire et la pression dans le fluide est proche de la pression théorique. On observe également qu'il n'y a, a priori, pas de problème de stabilité lorsque les phases sont inversées.

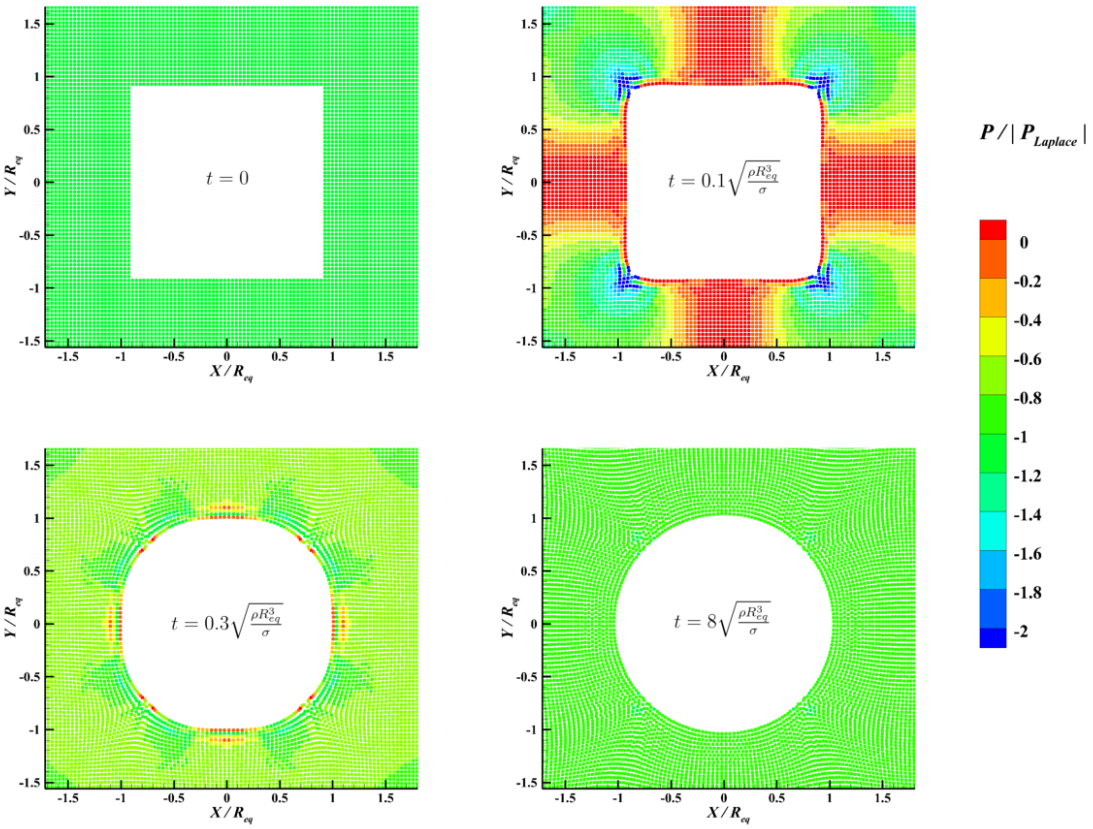

FIGURE 6.10 – Déformation d'une bulle carrée : champ de pression obtenu avec le modèle C-CSF.

Ce cas peut être complexifié en y ajoutant la gravité. Il en résultera alors une ascension de la bulle de vide au sein du fluide. On peut comparer les résultats avec ceux donnés dans [121]. On note que les résultats donnés dans [121] ont été obtenus avec deux fluides de rapport de densité 1 : 1000 (donc non nul contrairement à notre cas). Les résultats obtenus avec la simulation SPH seront donc légèrement différents de ceux montrés dans [121]. De même que précédemment, on n'approfondira pas ici l'analyse de ce cas. Les paramètres initiaux du calcul sont [121] : $\sigma = 728N/m$, $\rho = 1000kg/m^3$, $g = 9.81m/s^2$, $R = \frac{1}{3}m$. La forme de la surface libre est donnée sur la Figure 6.11, montrant un bon accord avec les résultats de référence. On donne également le champ de pression à la fin de la simulation sur la Figure 6.12.

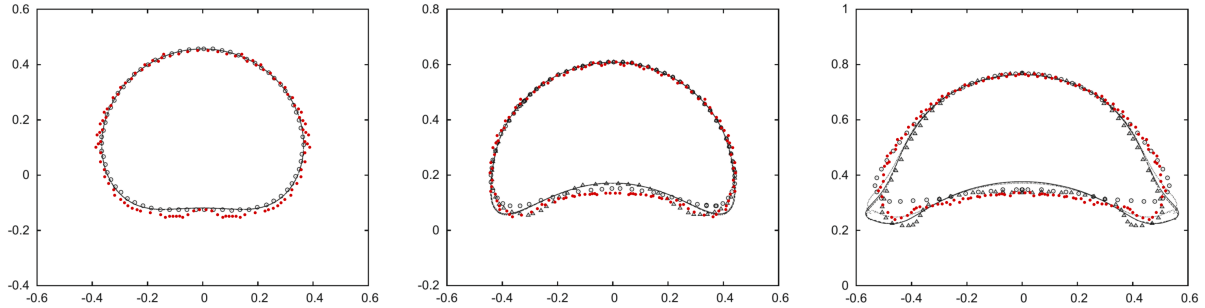

FIGURE 6.11 – Ascension d'une bulle de vide : forme de la surface libre obtenue avec le modèle C-CSF (en rouge) et résultats de référence [121] ; gauche : $t = 0.2s$; milieu : $t = 0.35s$; droite : $t = 0.5s$.

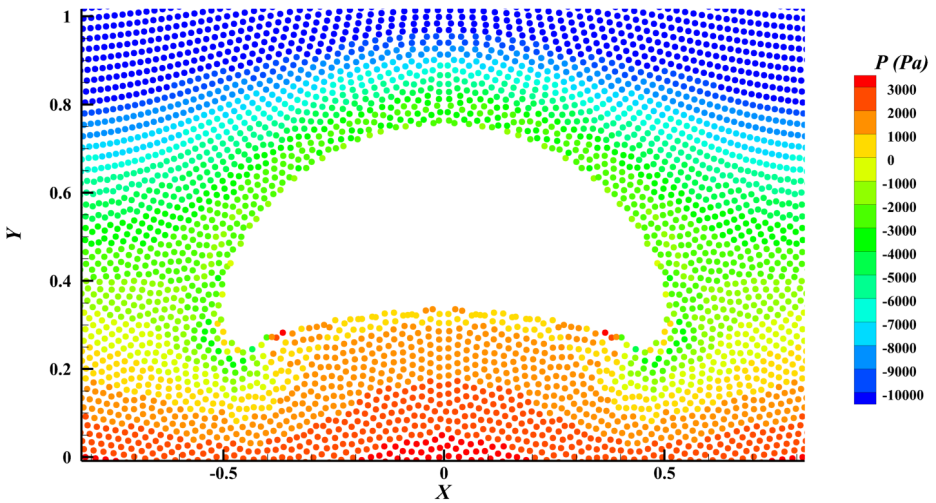

FIGURE 6.12 – Ascension d'une bulle de vide : champ de pression obtenu avec le modèle C-CSF à $t = 0.5s$.

6.6.2 Gouttes oscillantes

Le second cas test est le cas d'une goutte oscillante sous l'action de la tension de surface. Pour un fluide non-visqueux, la solution linéarisée analytique est donnée par une superposition d'ondes stationnaires, correspondant aux différents modes d'oscillations (cf. [77] ; ici on n'étudiera que le cas 2D). Pour le mode n, la déformation de l'interface est donnée par l'oscillation harmonique suivante :

$$r_{n,interface} = R_0 + aH_{mn} sin(\omega_n t + \psi). \tag{6.19}$$

La solution, en termes de potentiel de vitesse et de pression, est alors donnée par :

$$\phi_n = -\frac{a\omega_{n,\sigma}R_0}{n}H_{mn}\frac{r^n}{R_0^n}cos(\omega_{n,\sigma}t+\psi), \tag{6.20}$$

$$P_n = \frac{a\rho\omega_{n,\sigma}^2R_0}{n}H_{mn}\frac{r^n}{R_0^n}sin(\omega_{n,\sigma}t+\psi)+P_{Laplace}, \tag{6.21}$$

où R_0 est le rayon de la goutte au repos, le paramètre a ($a \ll R_0$) détermine l'amplitude des oscillations, ψ est une phase arbitraire, r la coordonnée radiale ($r \in [0, r_{interface}]$) et H_{mn} la fonction harmonique d'ordre (m, n) (pour le cas 2D $H_{mn} = cos(n\theta)$, avec θ la coordonnée cylindrique ; cf. [77] pour le cas 3D). En 2D la pulsation propre $\omega_{n,\sigma}$ est donnée par :

$$\omega_{n,\sigma}^2 = \frac{n(n+1)(n-1)\sigma}{\rho R_0^3}. \tag{6.22}$$

Les paramètres suivants sont retenus : $\rho = 1kg/m^3$, $R_0 = 0.2m$, $a = 0.1R_0$ et $\sigma = 0.5N/m$ (la phase ψ est prise ici nulle). On étudie les quatre premiers modes d'oscillation de la goutte : $n \in \{2, 3, 4, 5\}$. L'initialisation de ce cas se fait en considérant une goutte de forme initialement circulaire dont les champs de vitesse et de pression initiaux sont donnés par (6.20-6.21). La répartition des particules et le champ de pression à $t = 0.25T_{n,\sigma}$ sont donnés sur la Figure 6.13. On donne également la déformation théorique (6.19) de l'interface (tracée à l'aide de la ligne rouge sur la Figure 6.13). Un bon accord est observé avec les résultats numériques obtenus avec le modèle C-CSF, pour ces quatre premiers modes.

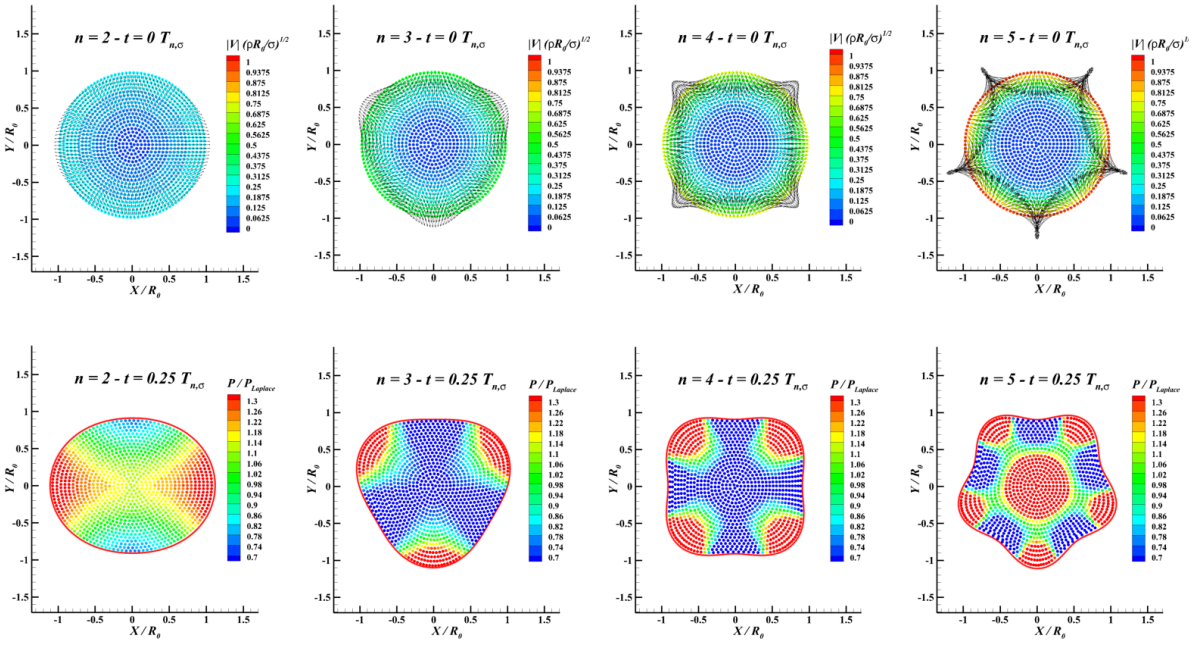

FIGURE 6.13 – Gouttes oscillantes ($\frac{R_0}{\Delta x} = 20$) : Haut : champ de vitesse à $t = 0$; Bas : champ de pression à $t = 0.25T_{n,\sigma}$ (les lignes rouges correspondent à la déformation théorique (6.19)).

Pour poursuivre l'analyse du modèle C-CSF, l'influence de la valeur du coefficient de tension de surface σ est également étudiée. En particulier sa valeur influence théoriquement la période des oscillations de la goutte (cf. relation (6.22)). Pour les quatre premiers modes, on montre sur la Figure 6.14 l'influence de σ sur la période $T_{n,\sigma}$ et la comparaison avec sa valeur théorique (les erreurs associées sont données dans la Table 6.2). Un bon accord entre les résultats théoriques et numériques est obtenu, malgré des erreurs plus importantes pour les modes élevés (pour ces cas, la discrétisation retenue est trop faible et le nombre de particules par "longueur d'onde" est insuffisant). Les résultats obtenus sans l'utilisation des corrections présentées à la section 6.5.4 ne sont pas présentés ici car des solutions instables ont été observées. Cela montre encore une fois la nécessité de ces corrections.

σ (N/m)	0.2	0.5	1	1.5	2
mode 2	2.73%	1.99%	0.623%	0.359%	1.71%
mode 3	0.199%	0.474%	2.86%	3.99%	6.64%
mode 4	4.17%	7.21%	4.34%	7.19%	9.16%
mode 5	6.35%	6.13%	9.16%	12.0%	14.7%

TABLE 6.2 – Gouttes oscillantes ($\frac{R_0}{\Delta x} = 20$) : erreur sur la période d'oscillation en fonction de σ pour les modes $n \in [\![2, 3, 4, 5]\!]$.

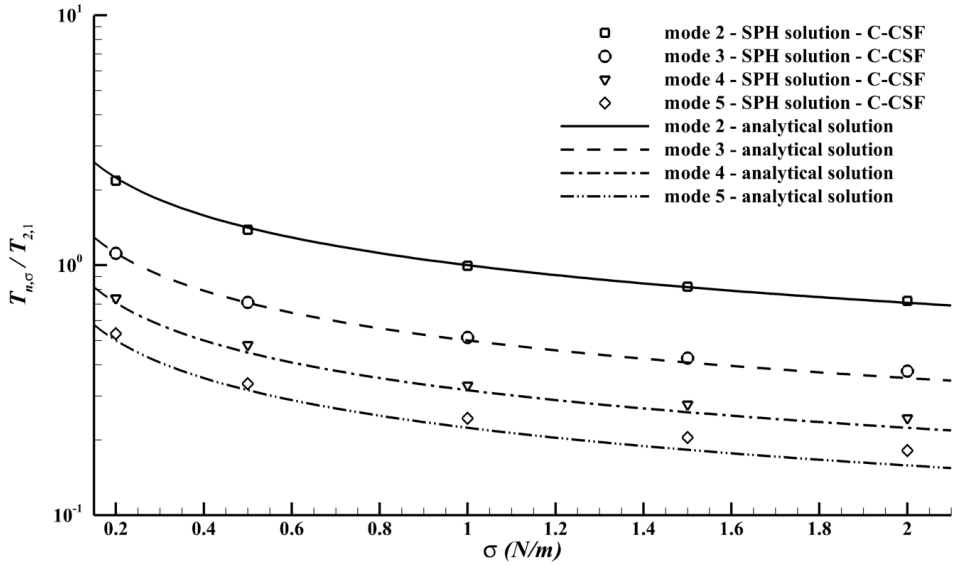

FIGURE 6.14 – Gouttes oscillantes ($\frac{R_0}{\Delta x} = 20$) : évolution de la période d'oscillation (échelle logarithmique) en fonction de σ pour les modes $n \in [\![2, 3, 4, 5]\!]$.

6.6.3 Onde capillaire amortie

On cherche ici à simuler le comportement d'une onde capillaire amortie. On cherche en particulier à capter la période d'oscillation et l'amortissement de l'amplitude de l'onde. La solution analytique de ce problème a été donnée par Prosperetti [122]. Elle n'est valable que pour des petites oscillations et en profondeur infinie. Cette solution analytique s'intéresse à l'évolution d'une onde de surface libre stationnaire dont la déformée initiale est donnée par :

$$\eta(x, t = 0) = a_0 cos(kx), \tag{6.23}$$

où $a_0 = a(t = 0)$ est l'amplitude initiale et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ le nombre d'onde. La solution donnée par [122] aborde le cas plus général d'une onde mue à la fois par la tension de surface et par la gravité (dans notre cas la gravité sera prise nulle). La pulsation de l'onde est alors donnée par :

$$\omega_0^2 = \frac{\rho_l - \rho_u}{\rho_l + \rho_u} gk + \frac{\sigma}{\rho_l + \rho_u} k^3, \tag{6.24}$$

où ρ_l et ρ_u désignent respectivement la masse volumique de la phase inférieure et de la phase supérieure (dans le cas monophasique $\rho_u = 0$). La solution du problème est alors donnée par (cas où $\nu_u = \nu_l = \nu$) :

$$
\begin{aligned}
a(t) =& \frac{4(1-4\beta)\nu^2k^4}{8(1-4\beta)\nu^2k^4+\omega_0^2}a_0 erfc\left(\left(\nu k^2 t\right)^{1/2}\right) \\
&+\sum_{i=1}^{4}\frac{z_i}{Z_i}\left(\frac{\omega_0^2 a_0}{z_i^2-\nu k^2}-u_0\right)e^{\left(z_i^2-\nu k^2\right)t}erfc\left(z_i t^{1/2}\right),
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

où u_0 est la vitesse initiale de l'interface (dans notre cas on choisit $u_0 = 0$), β un paramètre donné par $\beta = \frac{\rho_l\rho_u}{(\rho_l+\rho_u)^2}$ ($\beta = 0$ dans le cas monophasique) et les z_i sont les quatre racines complexes de l'équation polynomiale suivante :

$$
z^4 - 4\beta k\nu^{1/2}z^3 + 2(1-6\beta)k^2\nu z^2 + 4(1-3\beta)k^3\nu^{3/2}z + (1-4\beta)\nu^2k^4 + \omega_0^2 = 0. \tag{6.26}
$$

Z_1 est alors donné par $Z_1 = (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)(z_4 - z_1)$ et Z_2, Z_3 et Z_4 s'obtiennent de la même manière à l'aide d'une permutation circulaire des indices.

Les paramètres utilisés pour le calcul sont les suivants : $\rho_l = 1000kg.m^{-3}$, $\sigma = 0.1N/m$, $\nu = 0.00001m^2/s$, $\lambda = 0.001m$ et $a_0 = 0.01\lambda$. On vérifie que l'on est bien dans l'hypothèse d'onde de faible amplitude (on a $ka_0 \simeq 0.0628 \ll 1$). De plus, afin de vérifier l'hypothèse de grande profondeur, on fixe la profondeur à $d = 10\lambda$.

Les résultats sont donnés sur la Figure 6.15, pour différentes discrétisations. Les résultats obtenus avec le modèle C-CSF sont très proches de la solution analytique. On remarque une légère surestimation de la période d'oscillation, bien que cette erreur tende vers 0 lorsque l'on augmente le nombre de particules. On donne également une visualisation du champ de pression sur la Figure 6.16, montrant sa régularité.

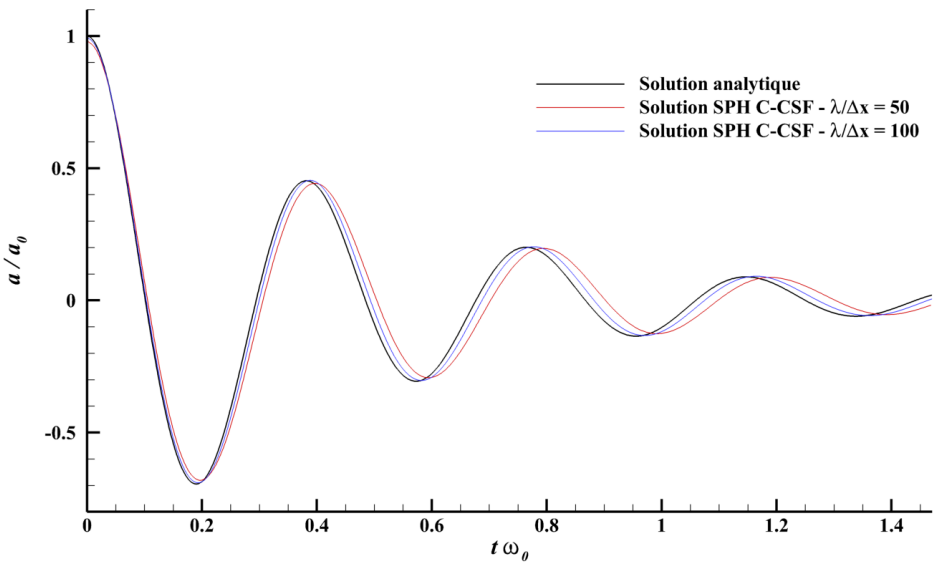

FIGURE 6.15 – Onde capillaire amortie : comparaison de l'évolution de l'amplitude obtenue avec le modèle C-CSF, pour différentes discrétisations.

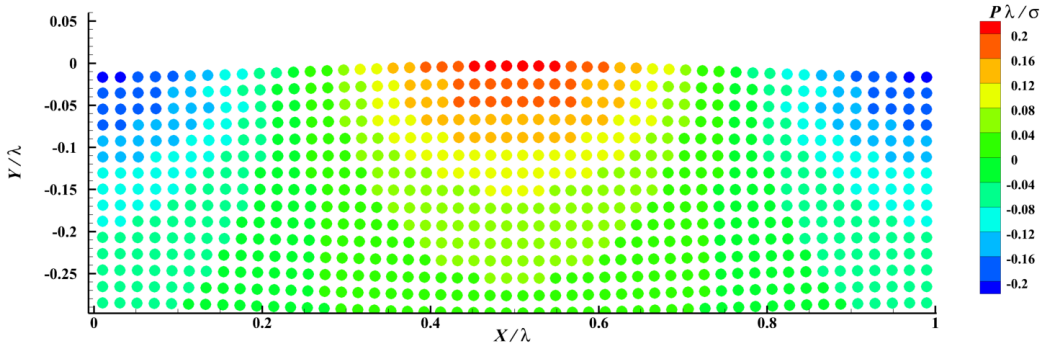

FIGURE 6.16 – Onde capillaire amortie : champ de pression obtenu avec le modèle C-CSF à $t\omega_0 = 0.2$, pour $\frac{\lambda}{\Delta x} = 50$.

6.6.4 Impact de deux gouttes - coalescence et séparation

On cherche désormais à simuler des écoulements plus complexes et en trois dimensions. Dans un premier temps, on montre l'applicabilité du modèle C-CSF à travers l'exemple du cas d'impact de deux gouttes. La paramétrisation du problème est donnée sur la Figure 6.17. Le problème est notamment gouverné par les trois nombres sans dimension suivant : $Re = \frac{2R\rho U}{\mu}$, $We = \frac{2R\rho U^2}{\sigma}$ et $B = \frac{b}{2R}$. Ce cas test a déjà été modélisé avec la méthode SPH par Hirschler et al. [67] (en s'appuyant sur des expériences décrites dans [123]). En particulier, dans [123] il est montré que suivant les valeurs que prennent les paramètres (We, Re, B), trois régimes d'impact peuvent être observés : un rebond des deux gouttes, une coalescence des deux gouttes ou une coalescence puis une séparation des deux gouttes. Le régime de rebond ne peut pas être simulé avec le modèle C-CSF tel qu'il a été proposé. En effet, il faudrait pour cela ajouter un algorithme de détection des différentes gouttes (cf. [67] dans lequel une astuce est employée en attribuant un marqueur à chaque goutte), ce qui n'est pas le cas ici. On ne s'intéressera donc qu'aux cas de coalescence et de séparation des deux gouttes.

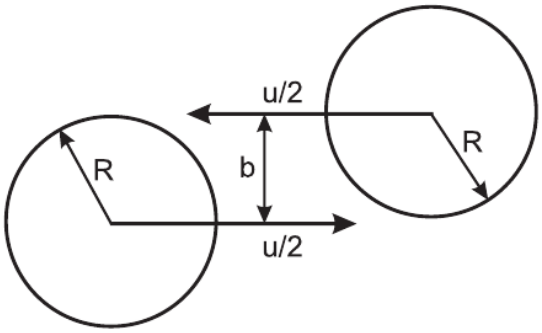

FIGURE 6.17 – Impact de deux gouttes : paramétrisation du problème [67].

Expérimentalement, les paramètres suivants correspondent par exemple à ces deux régimes d'impact [123] : $(We, Re, B) = (19.4, 158, 0.05)$ pour le cas de coalescence seule et $(We, Re, B) = (37.2, 228, 0.01)$ pour le cas de coalescence puis séparation. Cela correspond aux paramètres physiques $(R, b, \mu, \rho, \sigma, U) = (151\mu m, 15.1\mu m, 0.002Pa.s, 759kg/m^3, 0.0225N/m, 1.38m/s)$

et $(R, b, \mu, \rho, \sigma, U) = (164\mu m, 3.8\mu m, 0.002Pa.s, 759kg/m^3, 0.0225N/m, 1.83m/s)$ respectivement. Les résultats sont montrés sur la Figure 6.18. On montre ainsi que l'on est capable de simuler des comportements relativement différents avec le nouveau modèle de tension de surface. Dans le premier cas, on obtient la coalescence des deux gouttes en une goutte plus grande, tandis que dans le second cas on obtient la fusion des gouttes puis à nouveau la séparation en deux gouttes, ce qui correspond bien aux résultats expérimentaux. On remarque aussi que les temps caractéristiques du phénomène sont mieux respectés pour le cas de la séparation que pour le cas de la coalescence.

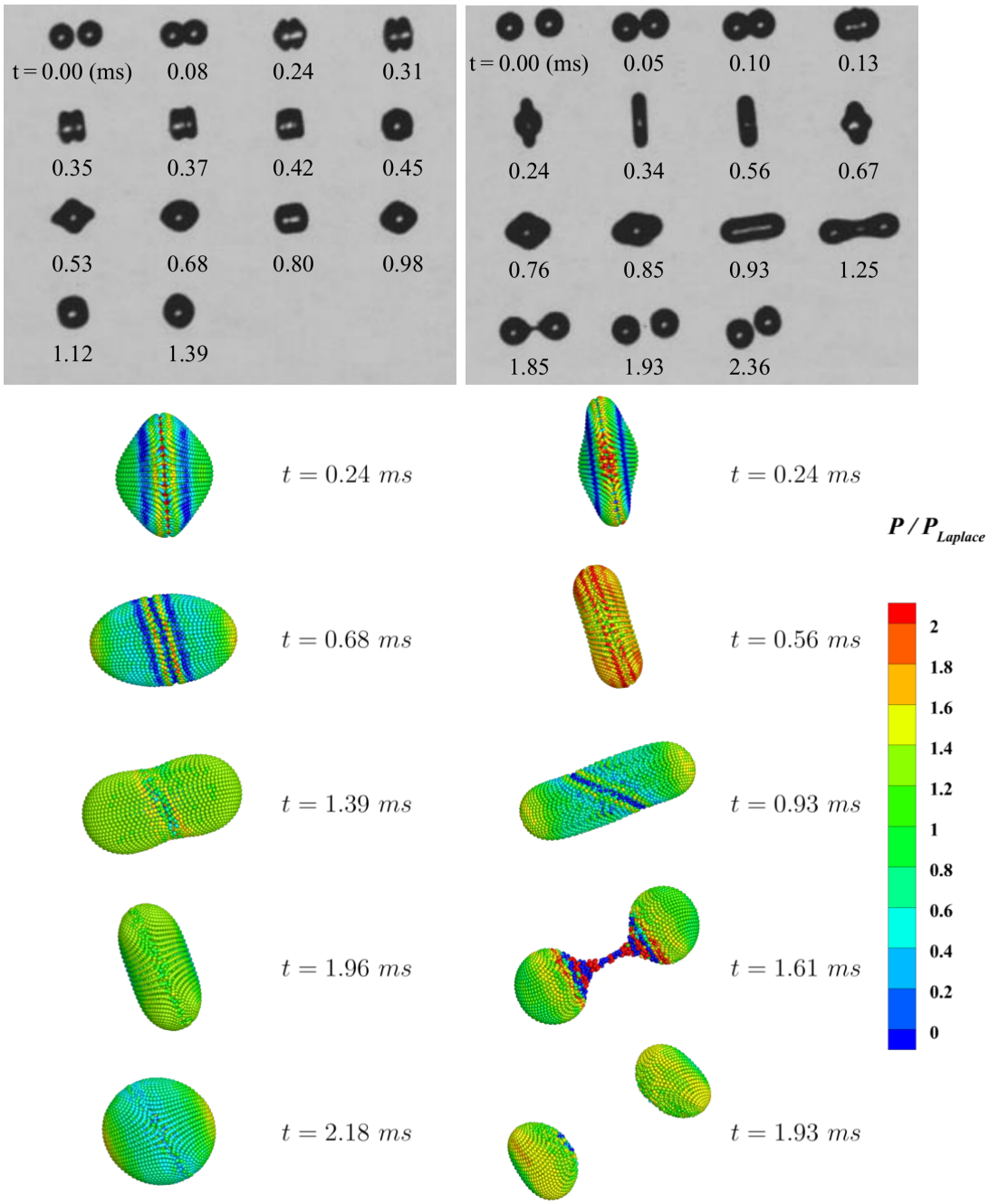

FIGURE 6.18 – Impact de deux gouttes : résultats expérimentaux [123] et résultats des simulations SPH avec le modèle C-CSF ; gauche : $(We, Re, B) = (19.4, 158, 0.05)$; droite : $(We, Re, B) = (37.2, 228, 0.01)$.

6.6.5 Instabilités de Plateau-Rayleigh

Les instabilités de Plateau-Rayleigh sont caractéristiques des cylindres fluides soumis à des perturbations initiales. En notant $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ le nombre d'onde associé à une perturbation transversale donnée et R_0 le rayon initial du cylindre fluide, on peut montrer théoriquement que la perturbation est instable (i.e. que son amplitude croit de façon exponentielle) dès lors que $kR_0 \leq 1$, causant alors la fragmentation du cylindre fluide en plusieurs gouttes [127] (cf. Figure 6.19). De plus, on peut montrer que la perturbation la plus instable est donnée par $kR_0 \simeq 0.697$, dans le cas d'un fluide non-visqueux [127]. On cherche ici à simuler et capter avec précision ce comportement relativement complexe à l'aide du modèle C-CSF. En pratique, le cas est initialisé à l'aide d'un long cylindre fluide de longueur L, dont les extrémités sont volontairement laissées avec des arêtes vives (i.e. un cylindre sans "bouts arrondis"). Ces arêtes vives entraînent alors de fortes courbures aux premiers instants de la simulation, créant des perturbations qui vont se propager le long du cylindre à partir de ses extrémités. On s'attend alors à ce que certaines d'entre elles conduisent à la fragmentation du cylindre en plusieurs gouttes.

Les paramètres choisis sont les suivants : $R_0 = 0.005m$, $L = 2m$, $\rho = 1000kg/m^3$ et $\sigma = 0.0728N/m$ (le fluide est ici non-visqueux). On donne les résultats de la simulation sur la Figure 6.19, montrant que l'on obtient bien la fragmentation du cylindre fluide, tout en conservant une simulation stable numériquement.

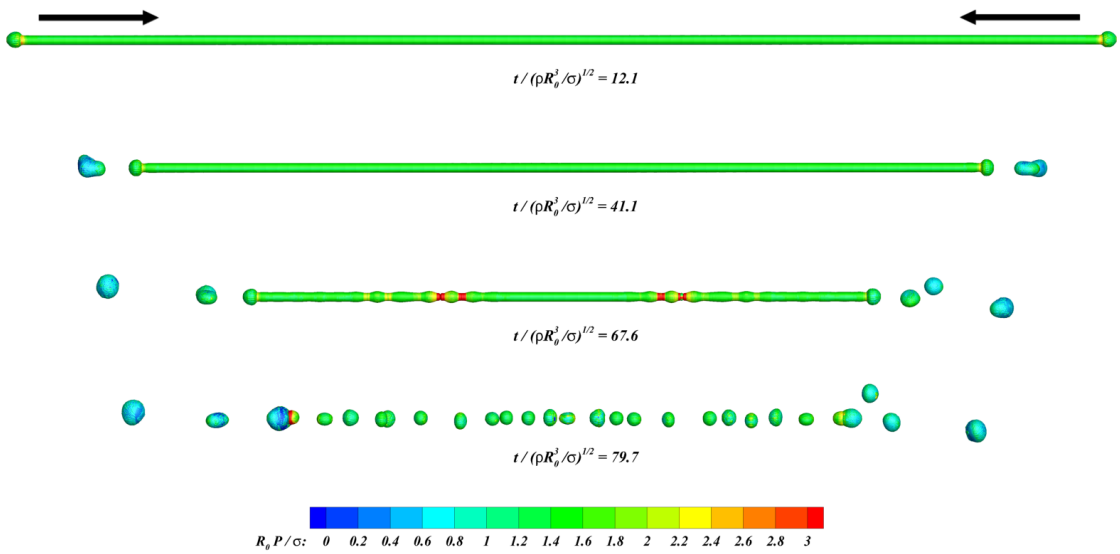

FIGURE 6.19 – Instabilités de Plateau-Rayleigh : propagation des perturbations initiales à partir des extrémités du cylindre et conduisant à la fragmentation en plusieurs gouttes (cas non-visqueux) ; $\frac{R_0}{\Delta x} = 4$.

Afin d'analyser plus en profondeur ce cas, on cherche à déterminer le nombre d'onde le plus instable et à déterminer si l'on obtient la valeur théorique attendue. Pour ce faire, on calcule la transformée de Fourier de la déformée du rayon du cylindre juste avant la fragmentation. Les résultats sont montrés sur la Figure 6.20, pour trois discrétisations différentes. Ces transformées de Fourier présentent des maximums qui sont caractéristiques des perturbations les plus instables. Pour les deux discrétisations spatiales les plus fines, on obtient

des valeurs de kR_0 éloignées de moins de 2% de la valeur théorique attendue $kR_0 \simeq 0.697$. Le modèle C-CSF semble donc adapté à la simulation de ce type d'écoulement complexe.

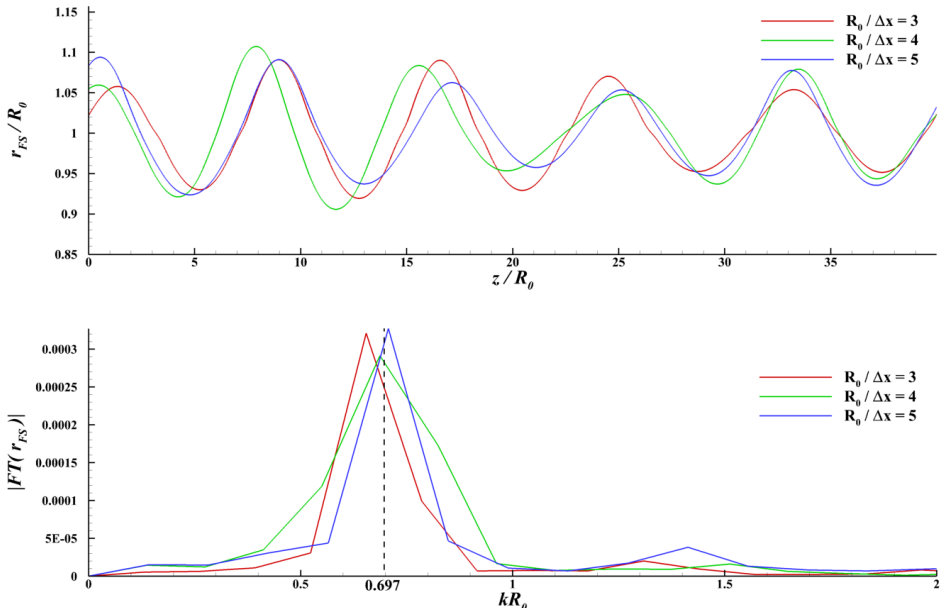

FIGURE 6.20 – Instabilités de Plateau-Rayleigh : déformées du rayon du cylindre juste avant la fragmentation (haut) et transformées de Fourier associées (bas), pour trois résolutions spatiales différentes (cas non-visqueux).

L'étude ci-dessus peut être étendue au cas de fluides visqueux [128], montrant en particulier que le nombre d'onde de la perturbation la plus instable diminue lorsque la viscosité augmente. On propose ici de tester l'influence de la viscosité sur le comportement de l'écoulement. De même que précédemment, les résultats sont analysés à l'aide de la transformée de Fourier de la déformée du rayon du cylindre juste avant la fragmentation. La Figure 6.21 montre les résultats obtenus. Un bon accord est observé entre les résultats théoriques et numériques obtenus à l'aide du modèle C-CSF, soulignant encore une fois la précision du modèle proposé.

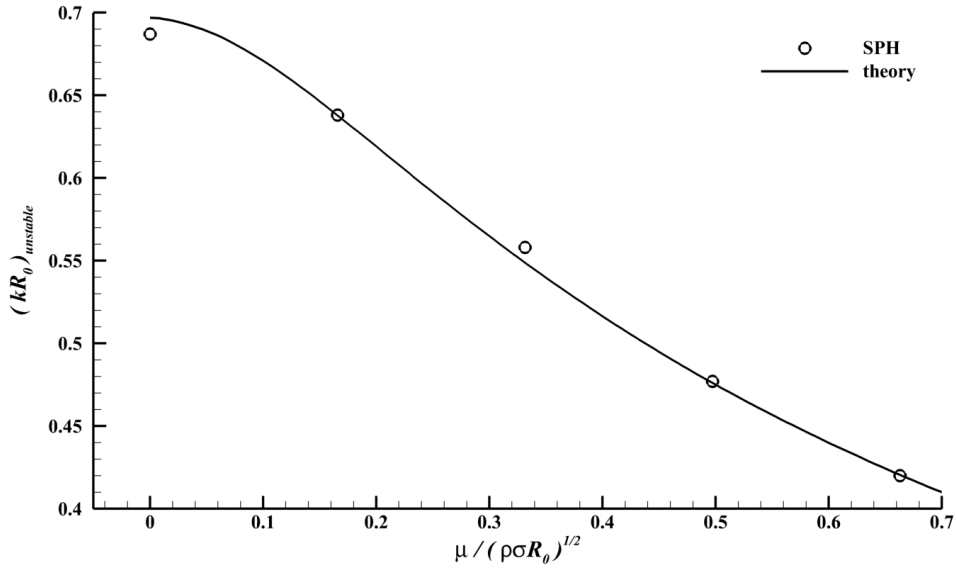

FIGURE 6.21 – Instabilités de Plateau-Rayleigh : nombre d'onde adimensionné de la perturbation la plus instable en fonction de la viscosité adimensionnée.

6.7 Prise en compte des parois solides

Le modèle C-CSF étant validé pour des écoulements sans parois solides, on propose ici d'étendre le modèle aux écoulements avec parois. Cela se traduit par la nécessité de calculer précisément les différents termes et opérateurs du modèle (normale à l'interface, courbure à l'interface et fonction d'interface) en présence de frontières solides. Les deux formalismes utilisés par la méthode SPH pour imposer les conditions de paroi, et présentés en section 2.5, sont évoqués ici. Cependant, la méthode ghost n'est évoquée que très rapidement et on se concentre essentiellement sur le formalisme BIM, qui permet en théorie de s'adapter à des géométries beaucoup plus complexes. L'une des spécificités des effets de tension de surface en proche paroi est la présence d'un angle de contact. On propose donc ici un moyen d'imposer de manière précise cet angle de contact (en nous limitant au cas d'un angle de contact statique ; le cas d'un angle de contact dynamique étant laissé pour de futurs travaux).

6.7.1 Prise en compte des parois avec la méthode ghost

Le modèle C-CSF présenté précédemment demeure théoriquement valide en formalisme ghost, à condition d'effectuer également les différentes interactions sur les particules fantômes et de symétriser de manière correcte les différents champs (par exemple une simple symétrie doit être appliquée au champ λ). Par symétrie des particules fantômes, un angle de contact $\theta_e = 90°$ est intrinsèquement imposé, sans qu'aucune modification n'ait à être effectuée. Ainsi, seuls des cas impliquant des angles de contact $\theta_e = 90°$ (ou relativement proche de $\theta_e = 90°$) pourront être simulés à l'aide du modèle C-CSF en formalisme ghost.

6.7.2 Prise en compte des parois avec la méthode BIM

6.7.2.1 Opérateurs renormalisés en formalisme BIM

Comme montré pour le cas sans prise en compte des parois, l'utilisation d'opérateurs rénormalisés fournit des résultats plus précis dans le cadre de simulations SPH monophasiques. On proposera donc par la suite d'utiliser ces opérateurs dans le cadre d'un formalisme BIM. Chiron [28] a déjà fourni une expression d'un opérateur gradient antisymétrique renormalisé en formalisme BIM :

$$\langle \boldsymbol{grad} f\rangle_i^{-,R,BIM} = \mathbb{L}_i^{BIM}\left(\frac{1}{\gamma_i}\sum_{j\in\Omega_i}(f_j - f_i)\,\boldsymbol{\nabla}W_{ij}V_j + \frac{1}{\gamma_i}\sum_{s\in\partial\Omega_i}(f_s - f_i)\,\boldsymbol{n}_{w,s}W_{is}S_s\right), \tag{6.27}$$

avec $\boldsymbol{n}_{w,s}$ la normale à la paroi (dirigée du fluide vers la paroi) et $\mathbb{L}_i^{BIM}$ la matrice de renormalisation en formalisme BIM (2.126). Pour un champ vectoriel, cette expression devient :

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{G}rad\boldsymbol{f}\rangle_i^{-,R,BIM} = \mathbb{L}_i^{BIM}\Bigg(&\frac{1}{\gamma_i}\sum_{j\in\Omega_i}(\boldsymbol{f}_j - \boldsymbol{f}_i)\otimes\boldsymbol{\nabla}W_{ij}V_j\\ &+\frac{1}{\gamma_i}\sum_{s\in\partial\Omega_i}(\boldsymbol{f}_s - \boldsymbol{f}_i)\otimes\boldsymbol{n}_{w,s}W_{is}S_s\Bigg).\end{aligned} \tag{6.28}$$

La divergence en formalisme BIM est alors définie comme la trace de l'opérateur gradient (6.28). À l'aide des propriétés de la trace, l'opérateur divergence antisymétrique renormalisé en formalisme BIM peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\langle div\boldsymbol{f}\rangle_i^{-,R,BIM} =&\frac{1}{\gamma_i}\sum_{j\in\Omega_i}\left(\mathbb{L}_i^{BIM}(\boldsymbol{f}_j - \boldsymbol{f}_i)\right).\boldsymbol{\nabla}W_{ij}V_j\\ &+\frac{1}{\gamma_i}\sum_{s\in\partial\Omega_i}\left(\mathbb{L}_i^{BIM}(\boldsymbol{f}_s - \boldsymbol{f}_i)\right).\boldsymbol{n}_{w,s}W_{is}S_s.\end{aligned} \tag{6.29}$$

6.7.2.2 Modèle C-CSF en formalisme BIM

Le modèle C-CSF consiste à calculer les différents termes de (6.2) de la même manière qu'à la section 6.5, mais à l'aide des opérateurs définis ci-dessus. L'expression (6.7) est maintenue, mais la forme discrète (6.8) se généralise en :

$$\boldsymbol{\nabla}\lambda_i = \mathbb{L}_i^{BIM}\left(\frac{1}{\gamma_i}\sum_{j\in\Omega_i}(\lambda_j - \lambda_i)\,\boldsymbol{\nabla}W_{ij}V_j + \frac{1}{\gamma_i}\sum_{s\in\partial\Omega_i}(\lambda_s - \lambda_i)\,\boldsymbol{n}_{w,s}W_{is}S_s\right). \tag{6.30}$$

On notera que l'expression (6.30) nécessite la valeur λ_s pour $s \in \partial\Omega_i$ mais que cette valeur est a priori inconnue. En première approche, cette valeur sera prise égale à $\lambda_s = 1$, comme proposé par Sun et al. [139] dans le cadre du formalisme des particules fantômes fixes (cette approximation sera "atténuée" par l'utilisation des corrections présentées à la section 6.7.3).

La courbure à l'interface κ_i est toujours calculée comme la divergence de la normale à l'interface $\boldsymbol{n}_i$:

$$\kappa_i = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in \Omega_i} \left(\mathbb{L}_i^{BIM} \left(\boldsymbol{n}_j - \boldsymbol{n}_i \right) \right) . \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + \frac{1}{\gamma_i} \sum_{s \in \partial\Omega_i} \left(\mathbb{L}_i^{BIM} \left(\boldsymbol{n}_s - \boldsymbol{n}_i \right) \right) . \boldsymbol{n}_{w,s} W_{is} S_s, \quad (6.31)$$

où le produit scalaire $\boldsymbol{n}_s . \boldsymbol{n}_{w,s}$ peut être utilisé pour imposer l'angle de contact au niveau de la ligne de contact. Pour un angle de contact à l'équilibre constant θ_e, on impose $\boldsymbol{n}_s . \boldsymbol{n}_{w,s} = -cos\theta_e$. On souligne ici l'avantage du formalisme BIM par rapport aux particules fantômes en terme de liberté d'imposition de l'angle de contact.

Enfin, le gradient de couleur est calculé de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\nabla} c_i = \frac{2}{\gamma_i} \sum_{j \in \Omega_i} \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j + \frac{2}{\gamma_i} \sum_{s \in \partial\Omega_i} \boldsymbol{n}_{w,j} W_{is} S_s. \quad (6.32)$$

6.7.3 Corrections additionnelles

Tout comme pour le cas sans prise en compte des parois, certaines corrections doivent être faites afin de rendre le modèle plus précis et plus robuste. Tout d'abord, toutes les corrections détaillées à la section 6.5.4 demeurent valables en formalisme BIM et seront donc également appliquées ici. Ensuite, l'approximation d'imposer $\lambda_s = 1$ à la paroi peut conduire à des évaluations erronées de la normale à l'interface proche de la ligne de contact. Il est donc nécessaire de corriger l'évaluation de la normale $\boldsymbol{n}_i$ en proche paroi. Bien qu'erronée à première vue, on observe que $\boldsymbol{n}_i$ fournit cependant une bonne estimation du vecteur tangent $\boldsymbol{t}_{b,i}$ à la paroi (et normal à la ligne de contact) :

$$\boldsymbol{t}_{b,i} = \frac{\boldsymbol{n}_i - \left(\boldsymbol{n}_i . \boldsymbol{n}_{b,i} \right) \boldsymbol{n}_{b,i}}{||\boldsymbol{n}_i - \left(\boldsymbol{n}_i . \boldsymbol{n}_{b,i} \right) \boldsymbol{n}_{b,i}||}. \quad (6.33)$$

où $\boldsymbol{n}_{b,i}$ est le vecteur normal à la facette la plus proche de la particule i et pointant de la paroi vers le fluide (cf. Figure 6.22). Ce vecteur tangent peut donc être utilisé pour corriger l'évaluation de la normale, tout en imposant une valeur correcte de l'angle de contact. En s'inspirant de la correction proposée par Breinlinger et al. [21], on applique une correction régulière proche de la paroi :

$$\boldsymbol{n}_i^* = cos\theta_i^* \boldsymbol{n}_{b,i} + sin\theta_i^* \boldsymbol{t}_{b,i}, \quad (6.34)$$

avec θ_i^* l'angle de contact corrigé et $\boldsymbol{n}_{b,i}$ le vecteur normal à la facette la plus proche de la particule i (pointant de la paroi vers le fluide).

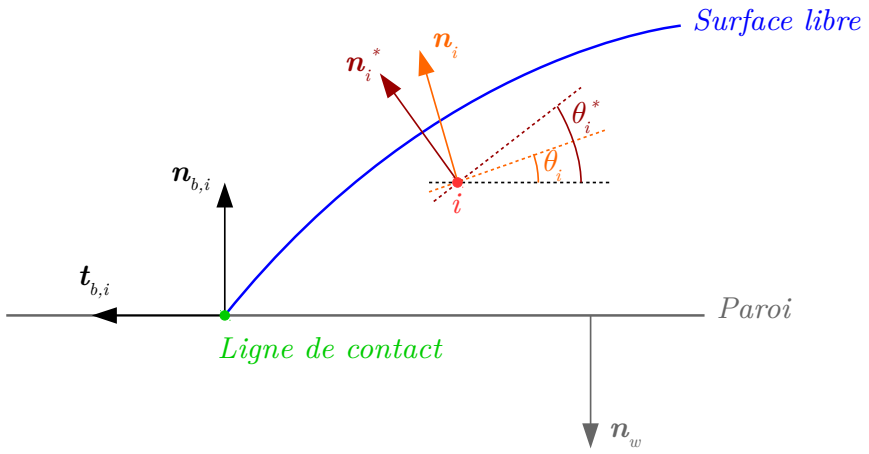

FIGURE 6.22 – Paramétrisation utilisée pour la correction de la normale proche de la ligne de contact (représentée ici dans le plan $(\boldsymbol{t}_{b,i}, \boldsymbol{n}_{b,i})$).

Finalement, on applique une correction quadratique à l'angle de contact :

$$\theta_i^* = \begin{cases} \theta_e + (\theta_i - \theta_e)\left(\dfrac{d_i}{R_i}\right)^2 & \text{si } d_i < R_i \\ \theta_i & \text{sinon} \end{cases}, \tag{6.35}$$

où d_i est la distance à la facette la plus proche et θ_i l'angle de contact déterminé avant l'application de la correction (et donné par $\theta_i = arccos\,(\boldsymbol{n}_i.\boldsymbol{n}_{b,i})$). Cette correction est effectuée avant le calcul de la courbure (6.31) et $\boldsymbol{n}_i$ est alors remplacée par $\boldsymbol{n}_i^*$ dans (6.31) et (6.2). On notera que le choix d'une correction quadratique est arbitraire, ce choix ayant été fait en première approche (il fournit de meilleurs résultats que d'autres corrections testées, mais pourra faire l'objet d'améliorations futures).

6.8 Validation pour des cas avec parois solides

6.8.1 Goutte en équilibre sur une surface plane

Le premier cas considéré pour valider le modèle C-CSF en présence de parois consiste à capturer la forme d'une goutte à l'équilibre sur une surface plane. Théoriquement, sa forme dépend du coefficient de tension de surface σ, du volume V_0 de la goutte, de l'accélération de la pesanteur g et de l'angle de contact à l'équilibre θ_e. Le nombre sans dimension qui gouverne ce problème est donc le nombre de Bond $Bo = \frac{R_0^2 \rho g}{\sigma}$, avec R_0 le rayon de la goutte si elle avait une forme sphérique (i.e. $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$). On propose ici de valider le modèle pour

plusieurs valeurs du nombre de Bond et de l'angle de contact à l'équilibre. En particulier, on compare la mesure de la hauteur de la goutte avec sa valeur théorique. Cette valeur théorique peut être déterminée en résolvant l'équation différentielle suivante [87] :

$$-\frac{\bar{r}''}{\left(1+\bar{r}'^2\right)^{3/2}}+\frac{1}{\bar{r}\left(1+\bar{r}'^2\right)^{1/2}}=2+\left(\frac{b}{R_0}\right)^2 Bo\bar{z}, \tag{6.36}$$

où b est un paramètre permettant d'assurer la conservation du volume de la goutte (ce paramètre n'est pas connu a priori mais est déterminé à travers une résolution itérative de l'équation (6.36)). $\left(\bar{r}=\frac{r}{b}, \bar{z}=\frac{z}{b}\right)$ est une paramétrisation adimensionnée du problème (cf. Figure 6.23 pour la position des axes et de l'origine du repère). Cette équation est résolue avec les conditions initiales suivantes : $\bar{r}(\bar{z}=0)=0$ et $\bar{r}'(\bar{z}=0)=+\infty$ (en pratique on choisit une valeur suffisamment grande pour cette dérivée à l'origine). L'angle de contact à l'équilibre est pris en compte à travers la condition $\bar{r}'=cot\ \theta_e$ au niveau de la ligne de contact. L'équation (6.36) est alors résolue de manière numérique à l'aide d'un simple schéma de différences finies par exemple.

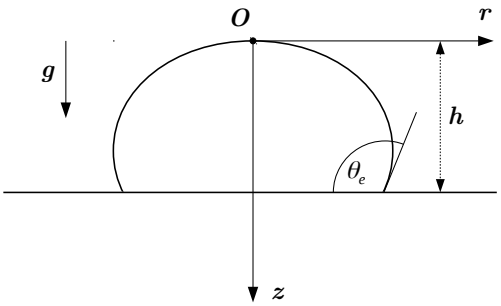

FIGURE 6.23 – Goutte en équilibre sur une surface plane : paramétrisation du problème

Numériquement, le cas est initialisé à l'aide d'un pavé de fluide de dimension $L \times L \times \frac{L}{2}$ pouvant évoluer librement vers l'état d'équilibre recherché. Les paramètres suivants sont retenus : $\rho = 1000 kg/m^3$, $\sigma = 0.07 N/m$, $L = 0.008 m$, $\theta_e \in [60, 90, 150]^\circ$ et $g \in [1, 5, 10, 15]\, m/s^2$ (correspondant respectivement à $Bo \in [0.22, 1.11, 2.22, 3.32]$). On montre sur la Figure 6.24 la forme des gouttes obtenues à l'aide du modèle C-CSF, pour $Bo = 1.11$ et pour plusieurs angle de contact à l'équilibre. On constate un bon accord qualitatif avec la forme théorique prédite par l'équation (6.36). La hauteur de la goutte obtenue avec le modèle C-CSF est aussi donnée sur la Figure 6.25 et est comparée avec la valeur théoriquement attendue. Une erreur de l'ordre de 5 % est observée. Ceci peut en partie s'expliquer par de légères différences observées entre la forme théorique et la forme déterminée avec le modèle C-CSF, notamment proche de la ligne de contact (cf. Figure 6.24). Ces différences peuvent s'expliquer par l'approximation faite sur la valeur de λ_j à la paroi (6.30).

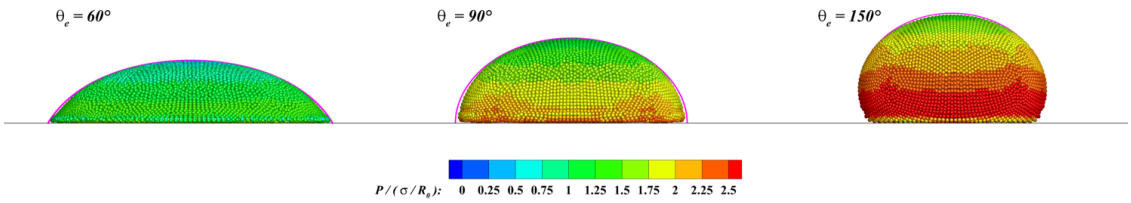

FIGURE 6.24 – Goutte en équilibre sur une surface plane : forme de la goutte à l'équilibre (à $t = 8.45\sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}}$) pour $Bo = 1.11$, $\frac{L}{\Delta x} = 40$ et pour différents angles de contact à l'équilibre θ_e ; les lignes magenta correspondent aux formes théoriques déterminées à l'aide de l'équation (6.36).

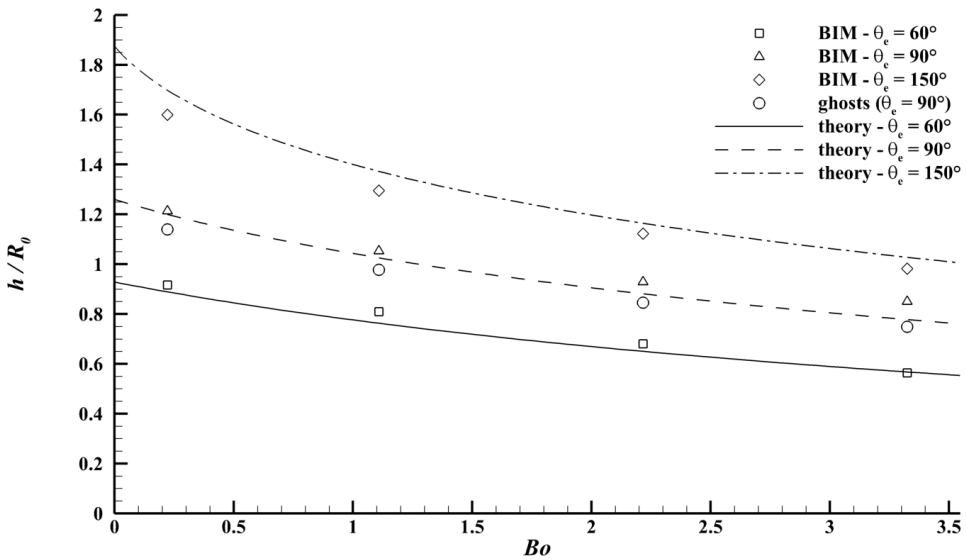

FIGURE 6.25 – Goutte en équilibre sur une surface plane : hauteur de la goutte en fonction du nombre de Bond Bo pour $\frac{L}{\Delta x} = 20$.

Tout comme le cas de la déformation de gouttes carrée et cubique (cf. section 6.6.1) on observe à l'équilibre la présence de courants parasites résiduels. Ces courants se traduisent par une énergie cinétique qui tend vers une valeur non-nulle et sont encore une fois dus aux approximations faites au niveau de la ligne de contact. Les valeurs que prend cette énergie cinétique résiduelle sont données dans les Tables 6.3-6.5 pour différents paramètres (on donne ici seulement des résultats partiels bien que lorsque l'on réalise une étude exhaustive les résultats obtenus respectent les tendances données dans ces Tables). On note tout d'abord que l'énergie cinétique à l'équilibre, et donc les courants parasites, diminue lorsque la discrétisation augmente. Ensuite cette énergie résiduelle et les courants parasites sont d'autant plus faibles que l'angle de contact à l'équilibre et le nombre de Bond sont faibles.

Bo	0.22	1.11	2.22	3.32
$E_c/\left(\sigma V_0/R_0\right)$	$2.15\ 10^{-6}$	$4.26\ 10^{-6}$	$6.51\ 10^{-6}$	$7.89\ 10^{-6}$

TABLE 6.3 – Goutte en équilibre sur une surface plane : énergie cinétique à $t = 30\sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}}$ en fonction du nombre de Bond, pour $\frac{L}{\Delta x} = 20$ et $\theta_e = 60°$.

$L/\Delta x$	10	20	40
$E_c/\left(\sigma V_0/R_0\right)$	$6.57\ 10^{-6}$	$4.26\ 10^{-6}$	$2.09\ 10^{-6}$

TABLE 6.4 – Goutte en équilibre sur une surface plane : énergie cinétique à $t = 30\sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}}$ en fonction de la discrétisation, pour $Bo = 1.11$ et $\theta_e = 60°$.

θ_e (°)	60	90	150
$E_c/\left(\sigma V_0/R_0\right)$	$4.26\ 10^{-6}$	$7.06\ 10^{-6}$	$5.72\ 10^{-5}$

TABLE 6.5 – Goutte en équilibre sur une surface plane : énergie cinétique à $t = 30\sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}}$ en fonction de l'angle de contact à l'équilibre, pour $Bo = 1.11$ et $\frac{L}{\Delta x} = 20$.

On cherche maintenant à préciser les propriétés de convergence du modèle proposé. Pour cela, on effectue une étude de convergence sur la hauteur mesurée de la goutte. Les résultats sont donnés sur la Figure 6.26 pour deux nombres de Bond différents. Ils montrent que l'ordre de convergence obtenu avec le modèle C-CSF en présence de parois se situe entre 1 et 2, montrant la convergence du modèle.

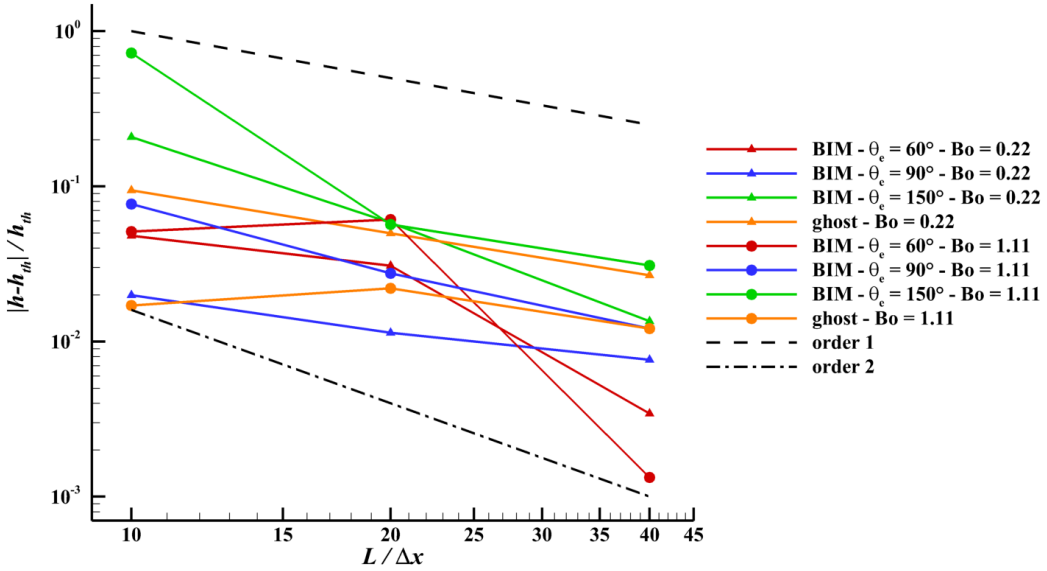

FIGURE 6.26 – Goutte en équilibre sur une surface plane : courbes de convergence de la hauteur de la goutte pour $Bo = 0.22$ et $Bo = 1.11$ à $t = 8.45\sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}}$.

6.8.2 Impact d'une goutte sur une surface plane

Le but ici est de valider le modèle de tension de surface C-CSF sur un cas plus complexe. Ce cas consiste à étudier l'évolution dynamique d'une goutte sphérique impactant une surface plane et a fait l'objet d'une étude expérimentale et numérique dans [137]. Les caractéristiques du fluide sont les suivantes : $\rho = 996kg/m^3$, $\sigma = 0.073N/m$ et $\mu = 0.001kg/m/s$. La vitesse d'impact de la goutte et son diamètre initial sont respectivement $U = 1.64m/s$ et $D = 2.454mm$. La surface est supposée être de la paraffine, ce qui implique un angle de contact à l'équilibre d'environ $\theta_e \simeq 100°$ pour le fluide considéré [137]. On notera ici que la dynamique de l'angle de contact n'est pas prise en compte par notre modèle, bien que cette dynamique ait une influence sur le comportement global de l'écoulement (cf. [137]). Une légère erreur sera donc nécessairement commise. De même, cet angle de contact de $\theta_e \simeq 100°$ est relativement proche de 90°, de sorte que l'on pourra également modéliser ce cas en utilisant une formulation ghost.

Ce cas est particulièrement difficile à simuler, du fait de la vitesse d'impact de la goutte qui est relativement élevée. Cette vitesse d'impact élevée force la goutte à s'étaler jusqu'à devenir un film fluide relativement fin. Après avoir atteint sa taille maximale d'étalement, la goutte va ensuite commencer à se rétracter en une forme plus compacte sous les effets de tension de surface (cf. [137] pour une description complète de ce cas). Les résultats de la simulation sont présentés sur les Figures 6.27 et 6.28 pour $\frac{D}{\Delta x} = 50$. Un phénomène notable apparaît lors de cet écoulement lorsque le diamètre d'étalement maximal est atteint. Des instabilités apparaissent sur le bord de la circonférence du film fluide, formant alors une couronne irrégulière au niveau de la ligne de contact. Ces instabilités sont prédites par l'expérience [137], montrant la capacité du modèle C-CSF à capter ce type de phénomène complexe.

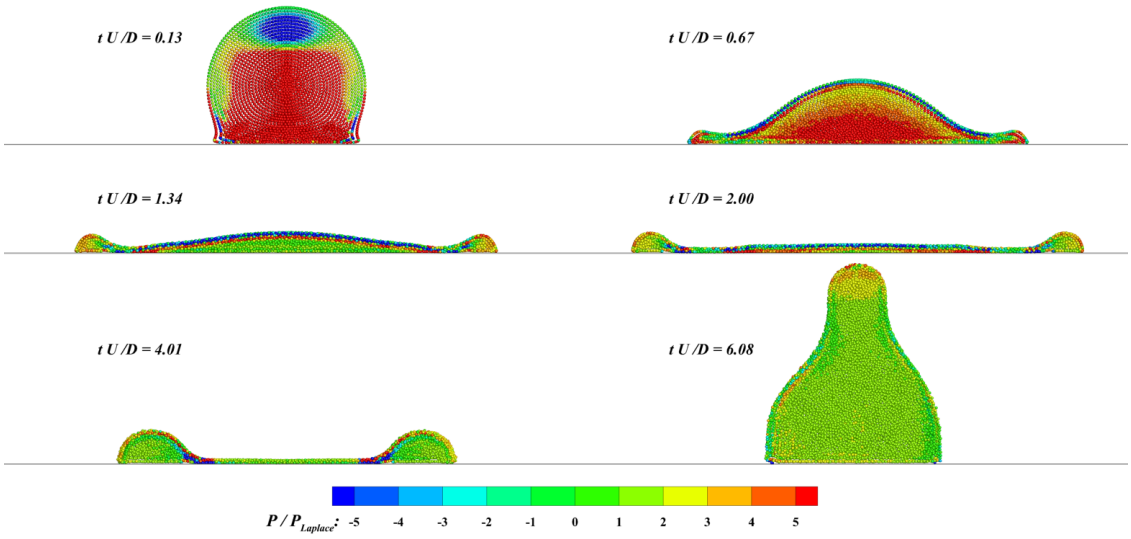

FIGURE 6.27 – Impact d'une goutte sur une surface plane : vue en coupe ; $\frac{D}{\Delta x} = 50$.

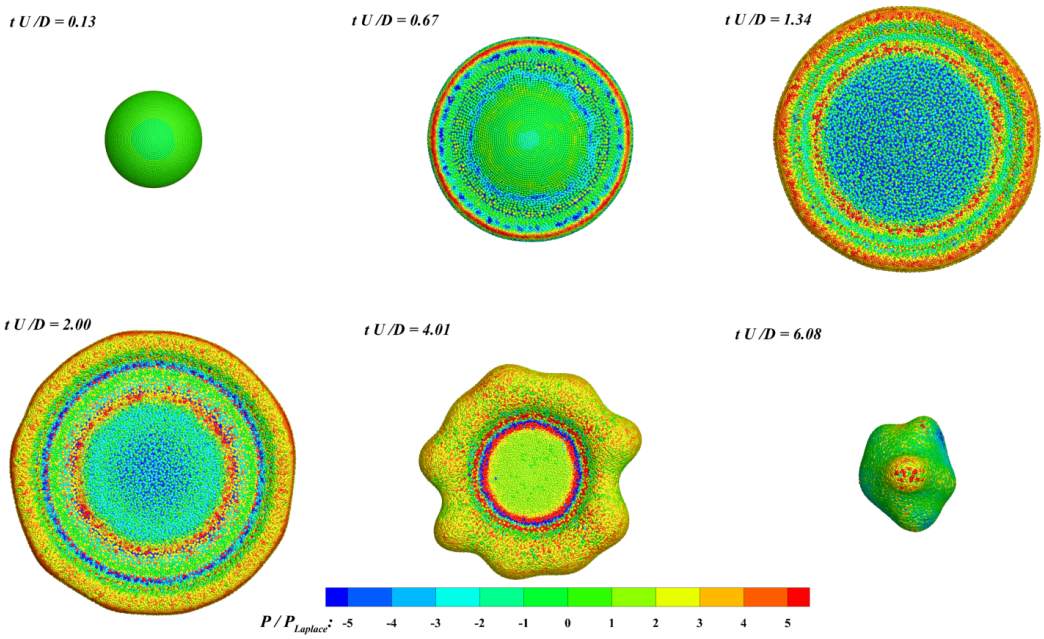

FIGURE 6.28 – Impact d'une goutte sur une surface plane : vue de dessus ; $\frac{D}{\Delta x} = 50$.

Sikalo et al. [137] fournissent des résultats de référence pour la mesure du diamètre de la surface de contact entre le fluide et la surface plane. Les mesures obtenues avec le modèle C-CSF (à la fois en formalisme ghost et en formalisme BIM) sont montrées sur la Figure 6.29. Un bon accord est obtenu, à la fois avec une formulation BIM et une formulation ghost des conditions aux limites (bien qu'une formulation ghost ne soit en théorie valable que pour des angles de contact à l'équilibre de $\theta_e = 90°$). Sur la Figure 6.27, on observe quelques petites imprécisions proche de la ligne de contact et de la paroi qui pourraient s'expliquer par

l'approximation faite pour λ_j à la paroi (6.30). Cette approximation pourrait aussi expliquer les différences observées sur la Figure 6.29. Ces différences sont peut être également dues à la convergence de la simulation qui n'est pas encore atteinte.

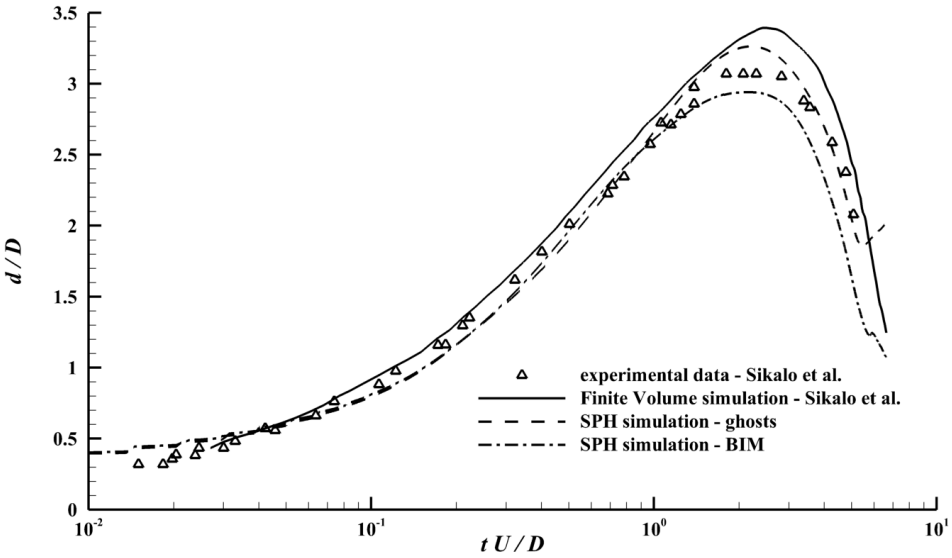

FIGURE 6.29 – Impact d'une goutte sur une surface plane : évolution du diamètre de la surface de contact ; $\frac{D}{\Delta x} = 50$.

6.9 Conclusion

Dans ce chapitre un modèle de tension de surface, appelé C-CSF et basé sur la formulation CSF [20], a été proposé pour des simulations SPH monophasiques. Ce modèle est valable pour l'ensemble des schémas SPH (tels que les schémas Riemann-SPH ou δ-SPH ; bien que la validation pour une formulation SPH incompressible n'ait pas été faite, on s'attend à ce que le modèle C-CSF demeure valable dans ce cas-là). Il a été montré qu'une attention particulière devait être apportée à la précision des opérateurs SPH, et en particulier que la renormalisation des opérateurs SPH avait une grande influence. Bien que cette approche soit plus coûteuse, elle est nécessaire pour obtenir des simulations plus stables et robustes tout en augmentant la précision du modèle. Une extension du modèle C-CSF en présence de parois solides, et pour un formalisme BIM, a également été proposée. En particulier, une approche simple a été proposée pour imposer un angle de contact constant à l'équilibre proche de la ligne de contact. Le modèle C-CSF a été validé à travers de nombreux cas tests, mettant en jeux un large éventail de phénomènes physiques (cas statiques, cas oscillants, cas de rupture de filaments fluides, cas de coalescence, cas d'étalement de goutte, etc...). Cependant, quelques imprécisions au sein du modèle ont pu être observées, notamment proche de la ligne de contact, impliquant la présence de courants parasites. L'amélioration du modèle proche de la ligne de contact ainsi que l'imposition d'angles de contact dynamiques est laissé pour des travaux futurs.

Chapitre 7

Étude de l'amerrissage d'urgence d'hélicoptères

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été effectués dans le cadre du projet européen SARAH (increased SAfety and Robust certification for ditching of Aircraft and Helicopters ; European Union's Horizon 2020 Research and Innovation Programme Grant No. 724139). Après une brève présentation du projet SARAH ainsi que des expérimentations menées au bassin d'essais de l'École Centrale de Nantes, le principal but de ce chapitre est de comparer les résultats expérimentaux avec les résultats numériques obtenus à l'aide de simulations SPH.

7.1 Motivations

Les avions et les hélicoptères se déplacent souvent au-dessus de larges étendues d'eau et sont donc parfois amenés à amerrir, lors de situations d'urgence notamment. Lors de telles phases d'amerrissage d'urgence, les structures des avions et des hélicoptères impactent la surface de l'eau de manière relativement violente, ce qui peut engendrer des risques importants pour l'intégrité des occupants et pour la structure des appareils. Le projet SARAH s'inscrit dans le cadre de ces amerrissages d'urgence d'avions et d'hélicoptères, et vise à répondre à plusieurs problématiques liées à ce phénomène. Les principaux objectifs de ce projet sont les suivants :

— Fournir des outils de certification dans lesquels auront été définis avec précision les chargements que devra supporter une structure d'avion ou d'hélicoptère en cas d'amerrissage d'urgence.
— Fournir des outils numériques de simulation haute fidélité de tels cas d'amerrissages d'urgences, qui pourront nourrir les outils de certification et aider les industriels à améliorer la conception et la sécurité des appareils pour de tels scénarios (sont notamment partenaires du projet, Airbus, Airbus Helicopters, Airbus Defense and Space, Dassault Aviation et des sous-traitants).
— Utiliser les méthodes ainsi développées pour fournir aux pilotes des instructions à suivre lors de scénarios d'amerrissages.

Ce projet est donc le fruit d'une collaboration au niveau européen entre différents acteurs et réunissant à la fois des laboratoires de recherche, des universités et des industriels.

L'objectif de cette thèse est de répondre, en partie seulement, au deuxième objectif énoncé ci-dessus, c'est-à-dire de fournir un outil de simulation haute fidélité pour les cas d'amerrissage d'urgence d'hélicoptères.

La conception d'un avion ou d'un hélicoptère (et en particulier l'intégration de scénarios d'amerrissages) est un processus complexe nécessitant la prise en compte de très nombreuses contraintes telles que la sécurité des occupants, la résistance de la structure de l'appareil, le choix des matériaux, le choix de la géométrie de la carlingue, etc... ; et bien entendu ces différentes contraintes s'influencent entre elles. Idéalement, la validation des choix de conception ne peut se faire que lors de campagnes de tests sur des prototypes à l'échelle réelle. Cependant, de telles campagnes de tests sont très coûteuses et relativement peu répétables. Une alternative à ces tests à échelle réelle consiste à faire des tests à échelle réduite. Ce type de tests sur des maquettes permet de réduire fortement le coût des campagnes d'essais tout en permettant une augmentation du nombre de configurations testées. Ces tests restent cependant relativement complexes à mettre en place et sont confrontés aux problèmes de la mise à l'échelle des différents phénomènes physiques rencontrés.

C'est pour répondre à ces limitations des campagnes d'essais que l'utilisation de simulations numériques est désormais privilégiée lors des phases de conception. En effet, une simulation ne souffre a priori pas de problème de mise à l'échelle et permet de tester un très grand nombre de configurations à la fois et dans un temps généralement bien plus court, le tout pour à un coût réduit. On distingue généralement deux types de simulations numériques : les simulations basse fidélité et les simulations haute fidélité. Les simulations basse fidélité ne cherchent pas à simuler le comportement complet de l'écoulement mais permettent de donner une estimation globale de certaines grandeurs d'intérêts (la cinématique générale de la structure, le niveau global des chargements, etc...). Ces modèles basse fidélité sont généralement issus de lois empiriques (déterminées à l'aide d'autres simulations numériques ou d'essais réels) et utilisent de nombreux paramètres déterminés en amont (tels que des coefficients de portance, de traînée ou d'autres coefficients adimensionnels). Ce type de simulation est très peu coûteux et très rapide. Ces simulations sont généralement utilisées pour obtenir les tendances générales de tel ou tel paramètre. À l'inverse, les simulations haute fidélité cherchent à simuler tout ou partie de l'écoulement à l'aide des équations de la mécanique des milieux continus. Elle sont plus coûteuses que les simulations basse fidélité mais fournissent des résultats plus fidèles. Elle permettent notamment de se concentrer sur des zones précises de l'écoulement, ce que ne font pas les simulations basse fidélité (qui ne fournissent que des estimations des différentes grandeurs). Cependant, ces deux types de simulation ont besoin d'être validés à l'aide de tests réels. Par ailleurs, pour des phénomènes aussi complexes que l'amerrissage d'un avion ou d'un hélicoptère réel, une simulation convergée avec tous les détails physiques et géométriques du problème réel est encore difficilement atteignable avec les solveurs haute fidélité actuels. C'est pourquoi des campagnes d'essais sont tout de même nécessaires, bien qu'elles ne soient en général menées que sur un nombre limité de cas représentatifs des phénomènes étudiés. On notera également que pour certains cas simplifiés d'impact sur une surface libre, on dispose de solutions analytiques de l'écoulement (voir par exemple [156] [158]).

L'un des objectifs du projet SARAH est de fournir des outils permettant d'effectuer ces deux types de simulations, tout en s'appuyant sur des campagnes d'essais à échelle réduite qui ont été effectuées lors de ce projet. Dans ce travail de thèse, on se concentre sur les simulations haute fidélité d'amerrissage d'hélicoptère. En particulier, on montre que la méthode SPH est

une méthode numérique bien adaptée à la simulation de tels cas. Les simulations effectuées ici sur quelques cas représentatifs seront comparées aux résultats expérimentaux obtenus lors d'essais en bassin.

Bien que le projet SARAH soit consacré à la fois aux cas des avions et des hélicoptères, on ne s'intéresse ici qu'au cas d'amerrissage d'hélicoptères. Cela impose certaines caractéristiques qu'il est important de prendre en compte pour effectuer les essais et les simulations. Un hélicoptère est équipé de flotteurs latéraux qui, lors de telles situations d'urgence, vont se gonfler et permettre à la fois d'amortir le choc lors de l'impact et d'assurer la flottaison de l'appareil une fois l'impact terminé (cf. Figure 7.1). Ces flotteurs modifient bien sûr fortement la géométrie du corps impactant et ont une grande influence sur le comportement de l'écoulement lors de l'impact. Ensuite, les gammes de vitesses d'impact sont généralement différentes des vitesses d'impacts rencontrées pour le cas d'un avion. Tout d'abord, la vitesse d'avance d'un hélicoptère est généralement plus limitée que celle d'un avion et il est même possible de rencontrer des cas d'impacts purement verticaux. Mais la spécificité d'un hélicoptère réside surtout dans la capacité de mise en autorotation du rotor : en cas d'incident ou de panne, le rotor peut être découplé du moteur. La rotation libre des pales combinée à la chute de l'hélicoptère induit alors une résistance de l'air au niveau des pales qui va agir comme une force résistante et donc freiner l'hélicoptère dans sa chute. Cela limite grandement la vitesse d'impact verticale de l'hélicoptère.

FIGURE 7.1 – Visualisation des flotteurs lors de tests à taille réelle réalisés par Airbus Helicopters [62].

La phase d'impact est la plus critique pour la sécurité des occupants et pour l'intégrité de la structure. C'est pourquoi c'est uniquement cette phase qui est étudiée par la suite. La phase de vol libre précédent l'impact et la phase de flottaison suivant l'impact ne seront pas étudiées ici. On ne s'intéresse donc qu'à un phénomène très bref, pouvant durer de quelques centièmes de seconde à une ou deux secondes.

Note : Pour une vision d'ensemble du projet SARAH on pourra consulter le site internet du projet : *sarah-project.eu*

7.2 Présentation des expérimentations en bassin

Le but ici n'est pas de détailler le fonctionnement de l'ensemble du dispositif expérimental, ni d'en présenter les différentes étapes qui ont mené à sa conception. On se contentera ici de

présenter les expérimentations dans leur ensemble (pour une présentation détaillée on pourra se référer au délivrable [19] du projet SARAH consultable en ligne, sur le site du projet). On présentera également certains détails utiles à la mise en place des simulations numériques et à l'exploitation des différents signaux obtenus. Les moyens mis en place visent à mesurer et étudier l'évolution de la trajectoire de l'hélicoptère au cours du temps ainsi que des efforts exercés sur certaines parties de sa structure pour une large gamme de configurations d'impact (i.e. pour différentes attitudes, pour différentes vitesses d'impact, pour des cas en eau calme ou en présence de vagues et pour des cas avec flotteurs rigides ou avec flotteurs déformables).

7.2.1 Présentation des moyens d'essais

7.2.1.1 Système de guidage par rail

Après plusieurs itérations impliquant des solutions motorisées, le choix final s'est porté sur un système faisant intervenir uniquement la gravité, et similaire à ceux utilisés pour des manèges de type "montagnes russes" (rails + charriot). Le système utilisé est présenté sur la Figure 7.2 et consiste en un système de guidage permettant de lancer l'hélicoptère de la manière la plus précise possible et pour de nombreuses configurations. Contrairement aux tests conduits dans [71] (tests effectués dans le cas d'amerrissage d'avions) le rail de guidage se termine ici de façon purement horizontale.

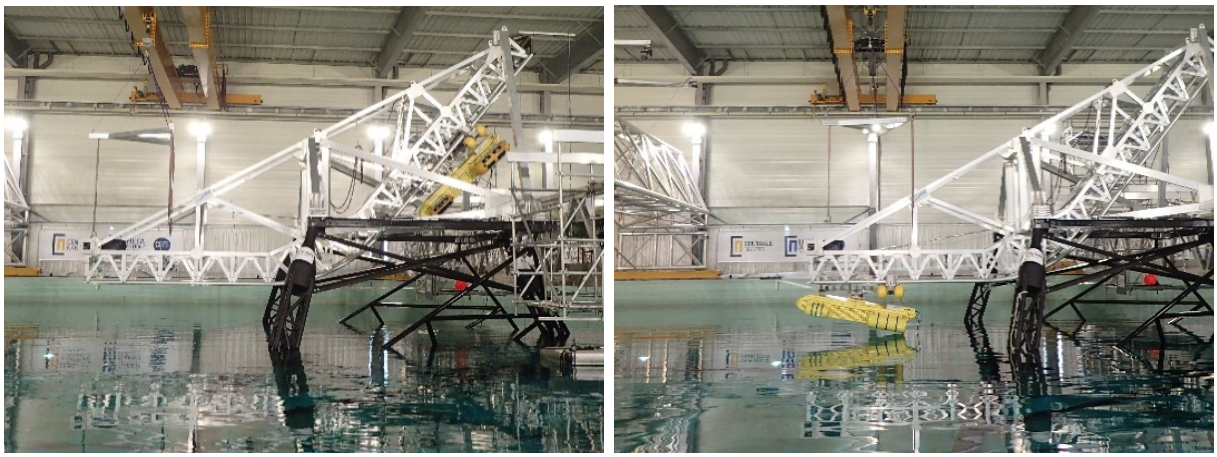

FIGURE 7.2 – Système de guidage : hélicoptère au repos et en position initiale (gauche) ; hélicoptère en mouvement après largage (droite).

Le système est composé de quatre rails (deux rails externes et deux rails internes). Le charriot, équipé de quatre roues, est chargé de supporter la maquette de l'hélicoptère. Le but est de reproduire le plus fidèlement possible une situation d'impact d'hélicoptère dans laquelle ce dernier est lancé d'une certaine hauteur avant de subir une phase de "vol" libre puis d'impacter la surface de l'eau. Le système doit également permettre de contrôler la vitesse de libération de la maquette. La difficulté de cette tâche est de permettre à la fois une vitesse d'impact verticale relativement limitée (i.e. quelques centimètres de chute libre seulement ; pour un système réel ce sont les pales de l'hélicoptère qui permettent de limiter sa vitesse de chute) tout en permettant d'obtenir un vitesse d'impact horizontale élevée. Le système retenu se compose alors d'un système de rails de guidage de 10 mètres de long

et de 5 mètres de hauteur (en excluant la partie immergée du système). La maquette peut alors être positionnée au niveau de quatre positions initiales différentes, impliquant des vitesses horizontales durant la phase de vol libre d'environ $8m/s$, $7m/s$, $6m/s$ et $0.4m/s$ respectivement.

7.2.1.2 Maquette de l'hélicoptère

La maquette utilisée lors des essais est présentée sur la Figure 7.3, avec le charriot auquel elle est attachée. Le système d'attache entre le charriot et la maquette (non visible sur la Figure 7.3) est constitué d'une pièce interchangeable qui permet d'imposer de façon pré-réglée les différentes attitudes (i.e. les différents angles par rapports au repère de référence) qu'aura l'hélicoptère lors de l'impact.

FIGURE 7.3 – Vue de la maquette de l'hélicoptère et du charriot qui lui est attaché.

Comme illustré sur la Figure 7.4, la maquette se compose d'une cabine (partie principale dans laquelle seront notamment placés de nombreux capteurs), de quatre flotteurs rigides ou déformables, de deux supports latéraux arrières (permettant de lier les flotteurs arrière à la cabine et dénommés "sponson") et de sangles permettant de relier les flotteurs au reste de la maquette (trois sangles par flotteur). Les quatre flotteurs rigides sont composés de cylindres circulaires dont les extrémités ont été arrondies. Des essais ont également été menés avec des flotteurs gonflables et déformables mais ne sont pas étudiés dans la suite de ce travail.

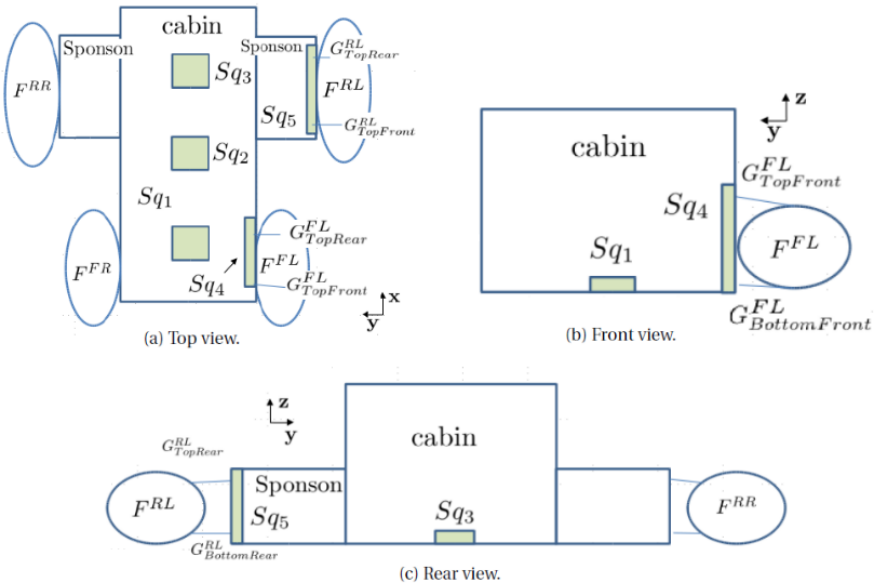

FIGURE 7.4 – Description schématique de la maquette de l'hélicoptère et de la dénomination utilisée.

7.2.1.3 Capteurs

Trois capteurs d'efforts sont placés sous le fuselage de la maquette (cf. Figure 7.5). Ils sont connectés à trois plaques carrées (de taille $75 \times 75mm$ et dénommées Sq1, Sq2 et Sq3 ; cf. Figure 7.4) et permettent une mesure "localisée" des efforts durant la phase d'impact de la maquette. À l'aide de simulations SPH préalables (non présentées ici) on a pu estimer le niveau des efforts attendus ainsi que la durée du pic de ces différents efforts (de l'ordre de $0.01s$), permettant alors de dimensionner et de choisir les capteurs les plus adaptés. Le choix de capteurs piézoélectriques Kistler 9227A a été retenu. Deux capteurs de forces et de moments à 6 degrés de libertés sont également utilisés pour mesurer les efforts au niveau des liaisons flotteurs/cabines et flotteurs/sponsons (et dénommés respectivement Sq4 et Sq5 ; cf. Figure 7.4).

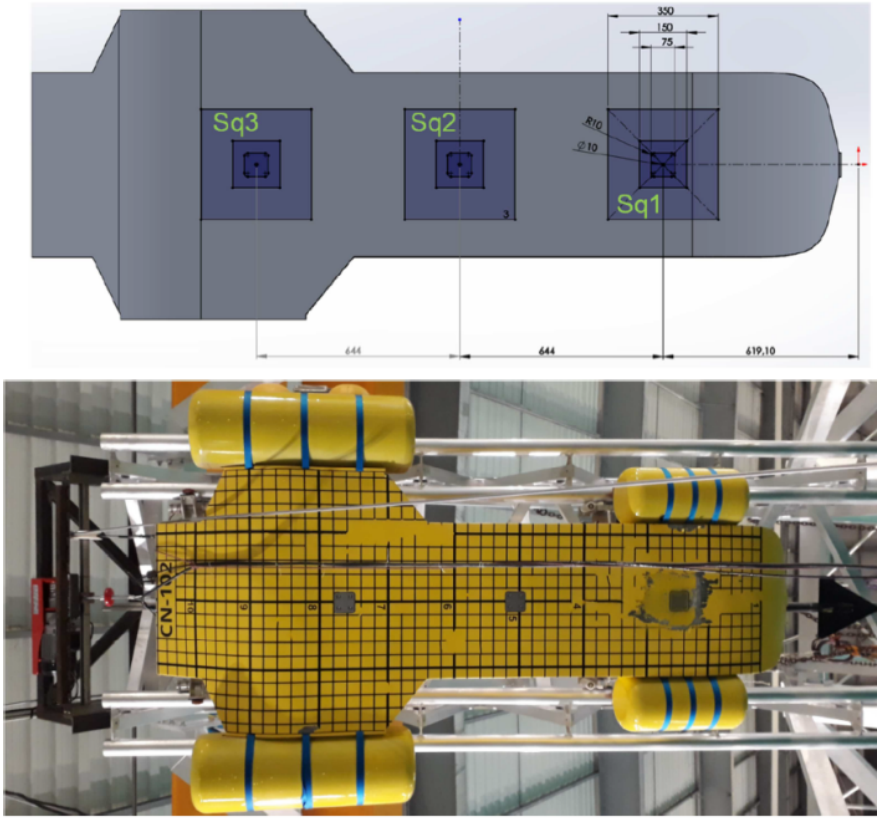

FIGURE 7.5 – Vue de dessous de la maquette et de la position des capteurs d'efforts Sq1, Sq2 et Sq3.

Finalement, la trajectoire de la maquette au cours de la phase d'impact est précisément relevée à l'aide d'un système optique "QUALISYS". Plusieurs LEDs sont disposées à différents endroits de la maquette, à la fois sur le charriot et sur la cabine. Six caméras sont alors placées à différents endroits et permettent de détecter et de traquer la position des différentes LEDs. Un post-traitement permet alors de remonter aux informations de la trajectoire de la maquette (positions, angles, vitesses, etc...). Trois caméras haute vitesse sont également ajoutées à des fins de visualisation de l'écoulement, dont une sous-marine. De plus, une centrale inertielle IMU ELLIPSE2-E-G5A4_B2 est positionnée au sein de la maquette, permettant une mesure plus précise des angles de roulis, de tangage et de lacet.

7.2.2 Référentiels et propriétés inertielles

Le référentiel d'étude est donné par l'origine et les axes $(O, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, où $\boldsymbol{z}$ est la verticale ascendante (direction de l'accélération de la pesanteur) et pour laquelle la surface libre au repos est donnée par $z = 0$. $\boldsymbol{x}$ est la direction donnée par le rail horizontal, avec $x = 0$ correspondant au début du rail. On introduit également un autre référentiel $(O_h, \boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$ attaché à la maquette (cf. Figure 7.6).

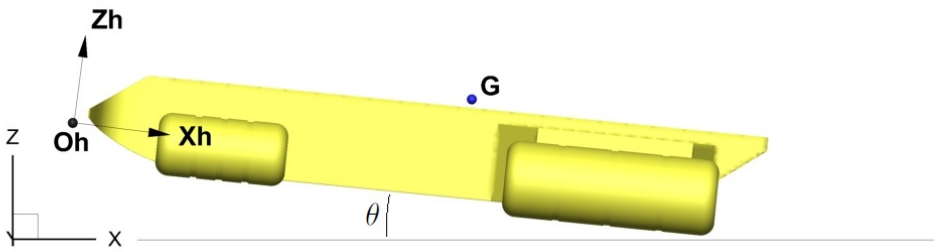

FIGURE 7.6 – Schéma des différents référentiels utilisés.

En plus de ces définitions de référentiels, on donne dans la Table 7.1 les caractéristiques inertielles de la maquette (prise dans son ensemble, notamment en prenant en compte le charriot). Ces propriétés sont données dans le repère $(O_h, \boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$ lié à l'hélicoptère (la position du centre de gravité G est donnée par rapport à O_h et les différents moments d'inerties sont pris au centre de gravité G).

x_G (m)	1.49
y_G (m)	-0.013
z_G (m)	0.238
$Masse$ (kg)	348.1
I_{xx} $(kg.m^2)$	84.3
I_{yy} $(kg.m^2)$	190.7
I_{zz} $(kg.m^2)$	205.8
I_{xy} $(kg.m^2)$	-0.5
I_{xz} $(kg.m^2)$	4.4
I_{yz} $(kg.m^2)$	-0.5

TABLE 7.1 – Caractéristiques inertielles de la maquette dans le repère $(O_h, \boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$: la position de G est donnée par rapport à O_h et les moments d'inertie sont donnés en G.

7.2.3 Incertitudes expérimentales

On notera que plusieurs sources d'incertitudes sont présentes dans les données des expériences et dans les grandeurs qui y sont mesurées. Ces incertitudes sont les suivantes :

— La cinématique de la maquette à l'instant de l'impact. En particulier, il est relativement difficile de déterminer avec une bonne précision l'instant précis de l'impact, les

angles (et les vitesses angulaires associées) et la vitesse prise par la maquette à cet instant. Cette incertitude provient en partie de problèmes de répétabilité rencontrés lors de la campagne d'essai et du fait que de grandes masses soient mises en jeu lors de ces expérimentations.

— Les mesures des caractéristiques inertielles. La masse peut facilement être obtenue en pesant la maquette. Cependant, ce n'est pas le cas pour la valeur des différents moments d'inertie et la position du centre de gravité, qui ont été obtenus en pesant indépendamment chaque partie du système et en s'aidant d'outils CAO. On s'attend ainsi à ce que les erreurs de mesures commises sur les différentes masses (incluant toute la visserie, l'électronique, etc.) aient une influence non négligeable sur les conditions d'impact (par exemple la position de G le long de l'axe $\boldsymbol{x}_h$ aura inévitablement une grande influence sur l'assiette à l'impact).

— Les mesures au niveau des capteurs d'efforts et l'influence de leur inertie propre. Au moment de l'impact, l'accélération verticale subie par l'hélicoptère est très importante. La masse et l'inertie des pièces internes aux capteurs d'efforts peuvent alors affecter de manière significative les signaux mesurés (en introduisant de fortes vibrations et donc des signaux relativement bruités et éventuellement inexploitables). Cependant, tous les degrés de libertés ne sont pas affectés de la même manière (certains signaux resteront exploitables, éventuellement après corrections prenant en compte les inerties internes des capteurs, tandis que d'autres ne pourront pas servir pour une éventuelle comparaison).

Dans la suite, l'influence de certaines de ces incertitudes sera explorée à l'aide d'une étude purement numérique.

7.3 Modèle numérique adopté

Les simulations numériques haute fidélité de cas d'impacts d'avion ou d'hélicoptère demeurent toujours difficiles à réaliser. En effet, elles doivent intégrer à la fois des effets hydrodynamiques complexes (forme complexe de la surface libre et des géométries, effets de chocs, etc...) tout en permettant une interaction couplée entre la structure et le fluide. Récemment, plusieurs études ont montré l'avantage que pouvait présenter la méthode SPH pour simuler ce type de cas [24] [58] [59] [162] [27] [161]. En particulier, son caractère Lagrangien et sans maillage évite les problèmes de distorsion de maillage rencontrés lors d'études similaires effectuées à l'aide de la méthode des Éléments Finis [151] [117] [120]. Ceci explique pourquoi la méthode SPH a été retenue (entre autres) dans le cadre des études menées au sein du projet SARAH (on pourra également se référer à la thèse d'Imadeddine Hammani [63] pour les simulations SPH effectuées pour le cas des avions dans le cadre du projet). On détaille par la suite le modèle numérique retenu ici et visant à étendre les études du même type déjà réalisées à l'aide de la méthode SPH.

7.3.1 Paramètres retenus pour les simulations

7.3.1.1 Choix du schéma numérique

Le schéma numérique retenu ici est le schéma de Parshikov et al. (2.68-2.71). Il a été choisi parmi les autres schémas pour les nombreux avantages qu'il présente pour simuler le type d'écoulement qui nous intéresse ici. Il permet une bonne régularité des champs, et notamment du champ de pression. Ce point est nécessaire pour intégrer correctement les efforts au niveau de la maquette et donc pour fournir une bonne évaluation des 6 degrés de liberté du mouvement. Ce schéma fait aussi preuve d'une grande robustesse et permet notamment d'utiliser de manière relativement simple les outils de raffinement particulaire (cf. section 2.6), de désordre particulaire (notamment à la surface libre et en proche paroi ; cf. chapitre 3) et de formalisme BIM des conditions aux limites (cf. section 2.5.2).

7.3.1.2 Choix de la vitesse du son artificielle

La vitesse du son artificielle est un paramètre important de la simulation numérique avec la méthode SPH. En effet, le nombre de particules utilisé dans les calculs est relativement élevé. Ainsi, une vitesse du son artificielle élevée entrainera un nombre de pas de temps élevé (du fait que le pas de temps (2.98) sera très petit) et donc des coûts de calculs prohibitifs. À l'inverse, une vitesse du son trop faible peut rendre la simulation moins robuste et modifier certains comportements de l'écoulement (notamment la formation et le développement des jets fluides). Bien entendu, le choix de la vitesse du son artificielle doit respecter l'hypothèse de faible-compressibilité (cf. section 1.2). Expérimentalement, on peut estimer que les vitesses maximales atteintes par le fluide sont de l'ordre de $30m/s$, conduisant alors à une vitesse du son artificielle de $300m/s$ pour respecter le critère sur le nombre de Mach.

7.3.1.3 Formalisme utilisé pour imposer les conditions aux limites

Comme le montre la Figure 7.7, la géométrie de la maquette de l'hélicoptère est relativement complexe, et présente des surfaces convexes ainsi que des arêtes vives. Pour de telles géométries, le formalisme BIM semble donc le plus adapté pour imposer les conditions aux limites de paroi (cf. section 2.5.2). On notera que les termes surfaciques calculés à l'aide du formalisme BIM sont directement utilisés pour effectuer l'intégration des forces de pression sur l'ensemble de la géométrie, permettant ainsi de déterminer le mouvement libre et à 6 degrés de liberté (mouvement de corps rigide) de l'hélicoptère en interaction couplée avec l'eau. La géométrie de l'hélicoptère est définie dans la simulation SPH à l'aide d'un fichier *.stl*.

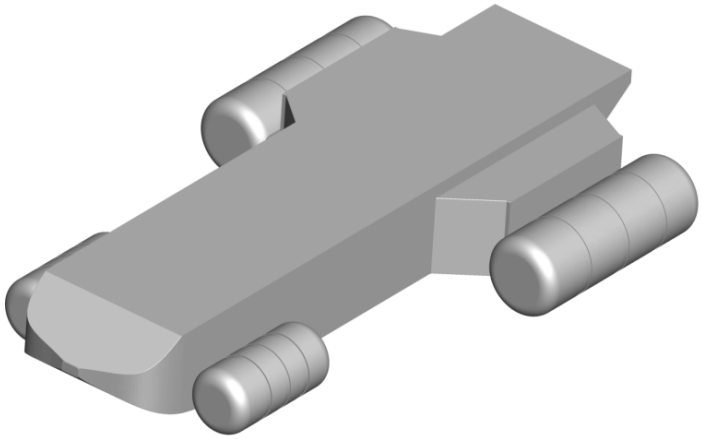

FIGURE 7.7 – Géométrie de la maquette de l'hélicoptère utilisée pour les simulations numériques.

7.3.1.4 Taille des particules et raffinement particulaire

Afin de déterminer la taille des particules dans la zone d'impact de l'hélicoptère, on s'appuie sur la publication de Sun et al. [141] dans laquelle sont étudiés des écoulements d'impact de cylindres avec la méthode SPH. Il est notamment montré qu'une précision et une convergence suffisante des résultats est atteinte pour une discrétisation d'environ 50 particules dans le diamètre du cylindre. On supposera qu'il en est de même pour le cas de l'hélicoptère, dont les flotteurs peuvent notamment être assimilés à des cylindres. On propose donc de choisir une discrétisation telle que le nombre de particules dans le diamètre d'un flotteur soit d'environ 50. Ainsi la taille retenue est $\Delta x_{fine} = 0.00625m$ dans la zone d'impact, pour une maquette longue de $2,5m$ environ (ce qui équivaut à un nombre de particules de 10 à 20 millions suivant les cas).

Afin de réduire le nombre de particules, tout en réduisant le temps de calcul, la procédure de raffinement particulaire adaptatif APR (cf. section 2.6.2) est utilisée ici. Elle présente l'avantage de pouvoir suivre le corps de l'hélicoptère dans son mouvement au cours de la simulation, avec des boîtes de raffinement qui restent fixes par rapport à l'hélicoptère. Cela permet également un filtrage "naturel" des ondes acoustiques se réfléchissant sur les parois de la cuve numérique. Dans un premier temps, 5 boîtes APR sont utilisées, conduisant à une taille de particule de $\Delta x_{coarse} = 0.2m$ pour la zone la moins raffinée (loin de l'hélicoptère et de la zone d'impact). On montre sur la Figure 7.8 la position des différentes boîtes APR.

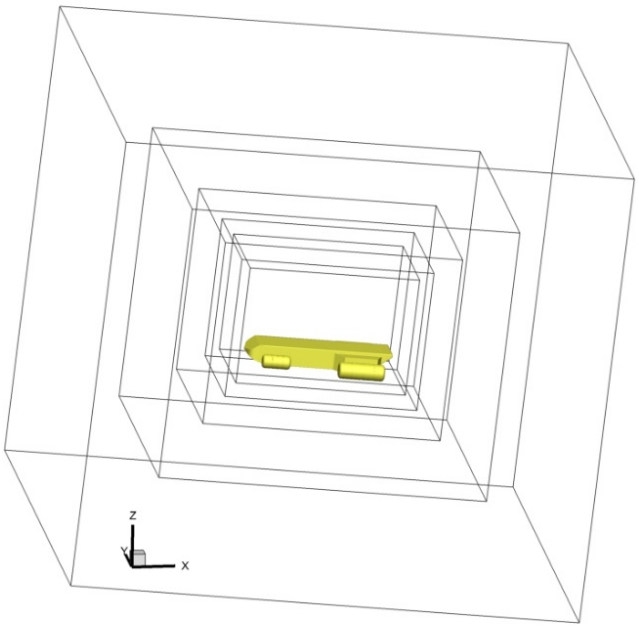

FIGURE 7.8 – Position des boîtes APR autour de l'hélicoptère.

7.3.2 Modélisation des vagues - couplage avec la méthode HOS

Afin d'effectuer des simulations de cas avec vagues, il est nécessaire d'imposer de manière précise les conditions de houles. Ceci est effectué à l'aide d'un couplage entre la méthode SPH et la méthode appelée High Order Spectral (HOS) de modélisation de propagation de la houle, développée au laboratoire. Le principe général de cette méthode de couplage est détaillé dans [116]. Elle consiste à décomposer le domaine de calcul en deux domaines distincts : le domaine SPH et le domaine HOS (cf. Figure 7.9). La méthode de couplage utilisée consiste plus concrètement en un "forçage", dans le sens où la solution HOS est utilisée comme condition d'entrée de la méthode SPH mais qu'à l'inverse, la méthode SPH n'influence pas la solution HOS. La solution HOS de propagation des vagues peut donc être calculée indépendamment de la simulation SPH et une fois pour toutes avant la simulation, pour l'ensemble de la durée de la simulation et l'ensemble du domaine de calcul. Cette solution (champs de pression et de vitesse de houle) est alors imposée au niveau de la frontière du domaine SPH, à l'aide d'une simple interpolation. Cette méthode a été testée et validée par le passé pour des cas complexes d'ingénierie navale [116].

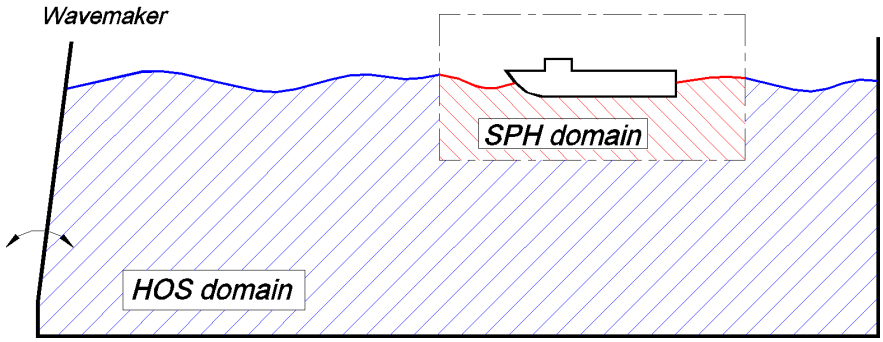

FIGURE 7.9 – Schéma de principe de la méthode de forçage entre SPH et HOS [116].

La solution spectrale est déterminée en utilisant les 20 premiers modes de la houle régulière générée. Les dimensions du bassin numérique sont similaires à celles du bassin dans lequel ont été effectué les essais expérimentaux et sont données par $L_x = 35m$ (contrairement aux $45m$ du bassin réel), $L_y = 30m$ et $L_z = 5m$.

7.3.3 Modélisation du détachement des jets fluides

Les problèmes d'impact sur une surface libre sont la plupart du temps caractérisés par la formation de jets fluides se détachant du corps impactant, souvent avec une vitesse élevée. L'origine physique de ce comportement localisé de détachement de jet est relativement complexe et reste sujette à de nombreuses hypothèses : phénomènes de ventilation, frottements visqueux du fluide sur le corps et phénomène de couche limite, géométrie et courbure du corps, phénomènes de tension de surface et d'angle de contact, ou bien une combinaison de plusieurs de ces phénomènes. Numériquement, la capture du détachement des jets fluides représente une difficulté, en particulier pour les géométries complexes (ex : impact de cylindre). En effet, les pressions relatives négatives observées en amont de la ligne de contact eau/air/solide, associées aux interactions entre points de calcul dans le fluide et points de calcul de la paroi, ont souvent tendance à maintenir les jets fluides en contact avec la paroi. Ce phénomène a été observé au sein de plusieurs méthodes numériques comme la Boundary Element Method (BEM) [138] mais aussi la méthode SPH [141]. Un traitement numérique particulier doit donc être effectué afin de modéliser le détachement des jets fluides.

Pour la méthode BEM, Sun et Faltinsen [138] ont proposé un critère basé sur la pression proche de la ligne de contact : lorsque la pression est inférieure à la pression atmosphérique (i.e. lorsque $P < P_{atm}$) sur une surface suffisamment grande et proche de la ligne de contact, alors un traitement spécifique est appliqué pour autoriser le détachement du jet fluide.

Dans la méthode SPH, un critère similaire a été proposé par Sun et al. [141], dans le cas où les conditions aux limites sont traitées à l'aide de la méthode des particules fantômes fixes. Il consiste à imposer une pression nulle aux particules fantômes situées proches d'une surface libre et ayant une pression négative (on rappelle que dans le cas de la méthode SPH appliquée aux écoulements à surface libre, la pression atmosphérique est considérée nulle $P_{atm} = 0$). Un traitement particulier du shifting doit également être effectué (cf. [141] pour plus de détails).

Au sein du laboratoire, un critère a également été proposé afin de modéliser le détachement des jets fluides au sein de la méthode SPH. Il est cette fois-ci utilisable pour une formulation BIM des conditions aux limites, mais repose également sur un critère basé sur la pression. On rappelle que, pour le schéma de Parshikov, l'équation de quantité de mouvement est donnée par :

$$\frac{D\boldsymbol{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_i \gamma_i} \sum_{j \in \Omega_i} 2P_E \boldsymbol{\nabla} W_{ij} V_j - \frac{1}{\rho_i \gamma_i} \sum_{s \in \partial\Omega_i} (P_s + P_i) W_{is} \boldsymbol{n}_s S_s + \boldsymbol{f}_i, \tag{7.1}$$

avec P_s la pression à la paroi, donnée par la relation (2.118). Ainsi le cas où $P_s + P_i < 0$ correspond à une force qui a tendance à rapprocher la particule i de la paroi ; les jets fluides ont donc tendance à rester attachés à la paroi. Dans ce cas le critère proposé est d'annuler l'interaction entre la particule i et la paroi (i.e. si $P_s + P_i < 0$ alors on impose $P_s + P_i = 0$) pour "forcer" le jet fluide à se détacher. On montre sur la Figure 7.10 l'influence de ce traitement pour le cas d'un impact vertical de cylindre qui, dans ce cas, est suffisant pour modéliser correctement le détachement des jets fluides. On notera que le raisonnement reste valable dans le cas d'un formalisme ghost et pour l'ensemble des schémas SPH.

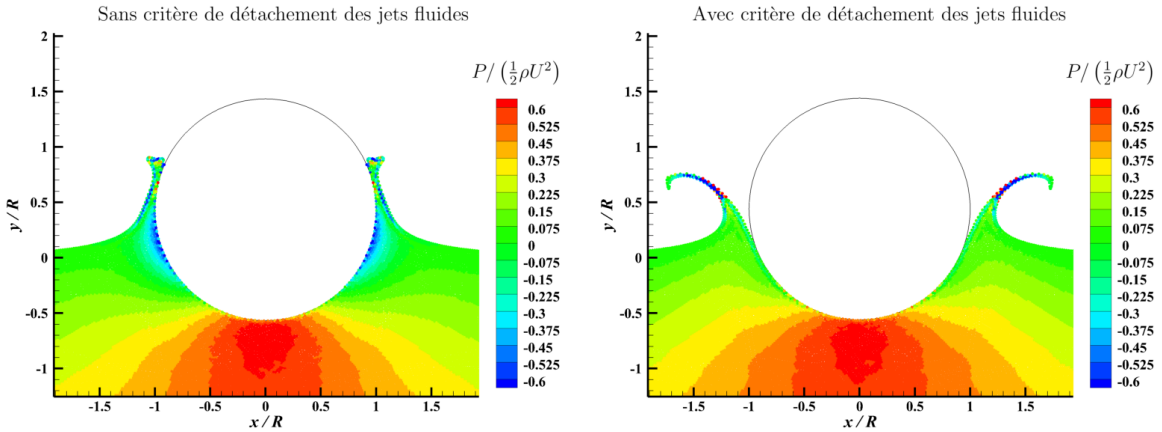

FIGURE 7.10 – Influence du critère de détachement des jets fluides pour le cas de l'impact d'un cylindre.

Cependant les cas de validations du critère ci-dessus ne concernent que des cas de mouvements d'entrée de corps dans un fluide et non des mouvements de sortie. Dès lors que le corps impactant présente un mouvement de sortie du domaine fluide, les critères précédents se révèlent malheureusement insuffisants. Ce phénomène a été mis en évidence par Julien Michel [96] au cours de sa thèse. Il peut s'expliquer par la non prise en compte des effets de succion dans le critère ci-dessus. En effet, les effets de succion sont justement caractérisés par des pressions négatives qui peuvent donc déclencher le critère précédent et ainsi créer des "surfaces libres artificielles", donc non-physiques (cf. [96] pour une mise en évidence de ce phénomène). Il est donc nécessaire de modifier le modèle précédent afin de prendre en compte ces effets de succion. Julien Michel [96] propose en particulier d'ajouter un test sur la vitesse relative de la particule i par rapport à la paroi et de n'autoriser le détachement du jet fluide que si la particule i a tendance à s'éloigner de la paroi (le test sur la pression étant

conservé). Finalement, le nouveau modèle de détachement de jet adopté peut se résumer de la manière suivante :

$$P_s + P_i = \begin{cases} 0 & \text{si } P_s + P_i < 0 \text{ et } (\boldsymbol{u}_s - \boldsymbol{u}_i) . \boldsymbol{n}_s > 0 \\ P_s + P_i & \text{sinon} \end{cases}, \tag{7.2}$$

où $\boldsymbol{n}_s$ est le vecteur normal local à la paroi dirigé vers l'extérieur du domaine fluide et $\boldsymbol{u}_s$ est la vitesse locale de la paroi. Quelques subtilités supplémentaires doivent être ajoutées pour rendre le modèle plus robuste (cf. [96] pour plus de détails et pour la validation de ce nouveau modèle).

Le cas d'impact d'un hélicoptère est un cas très complexe à 6 degrés de liberté. En particulier, la dynamique de l'assiette (i.e. de l'angle autour de l'axe $\boldsymbol{y}$) implique un mouvement qui diffère entre l'avant et l'arrière de l'appareil relativement à la surface libre. On s'attend donc à la présence d'effets de succion pour un tel cas d'impact. On adopte donc le nouveau modèle de détachement des jets fluides (7.2) pour effectuer les simulations d'amerrissage d'hélicoptère (les effets de ce modèle sont étudiés plus précisément à la section 7.4.1.1).

7.4 Comparaison entre les essais expérimentaux et les simulations numériques

7.4.1 Cas avec vitesse d'avance et sans houle

Le premier cas étudié consiste en un cas d'impact avec vitesse d'avance, une faible vitesse verticale et sans houle. Ce cas est représentatif de l'ensemble des cas simulés et permet notamment de tester l'influence de nombreux paramètres. Ce cas est défini par les conditions suivantes (définies en G et dans le repère $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$) : une vitesse $(V_x, V_y, V_z) = (-7.92, 0, -0.81)\, m/s$ et une attitude $(\phi, \theta, \psi) = (0, 5.4, 0)^\circ$. Dans un premier temps les vitesses angulaires initiales sont prises nulles (leur influence sera notamment discutée à la section 7.4.1.2). Une visualisation de l'écoulement simulé est présentée sur la Figure 7.11. On donne également sur la Figure 7.12 une comparaison entre l'écoulement simulé et les essais expérimentaux, montrant un bon accord au niveau du comportement général de l'écoulement.

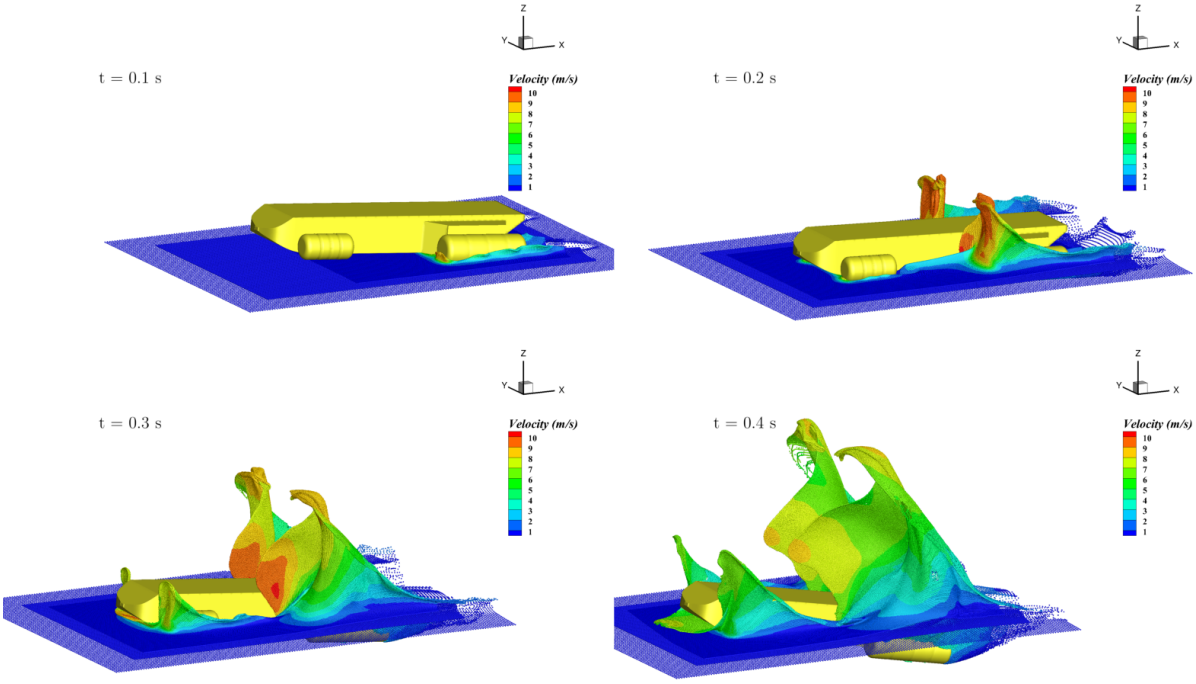

FIGURE 7.11 – Cas avec vitesse d'avance et sans houle : visualisation générale de l'écoulement.

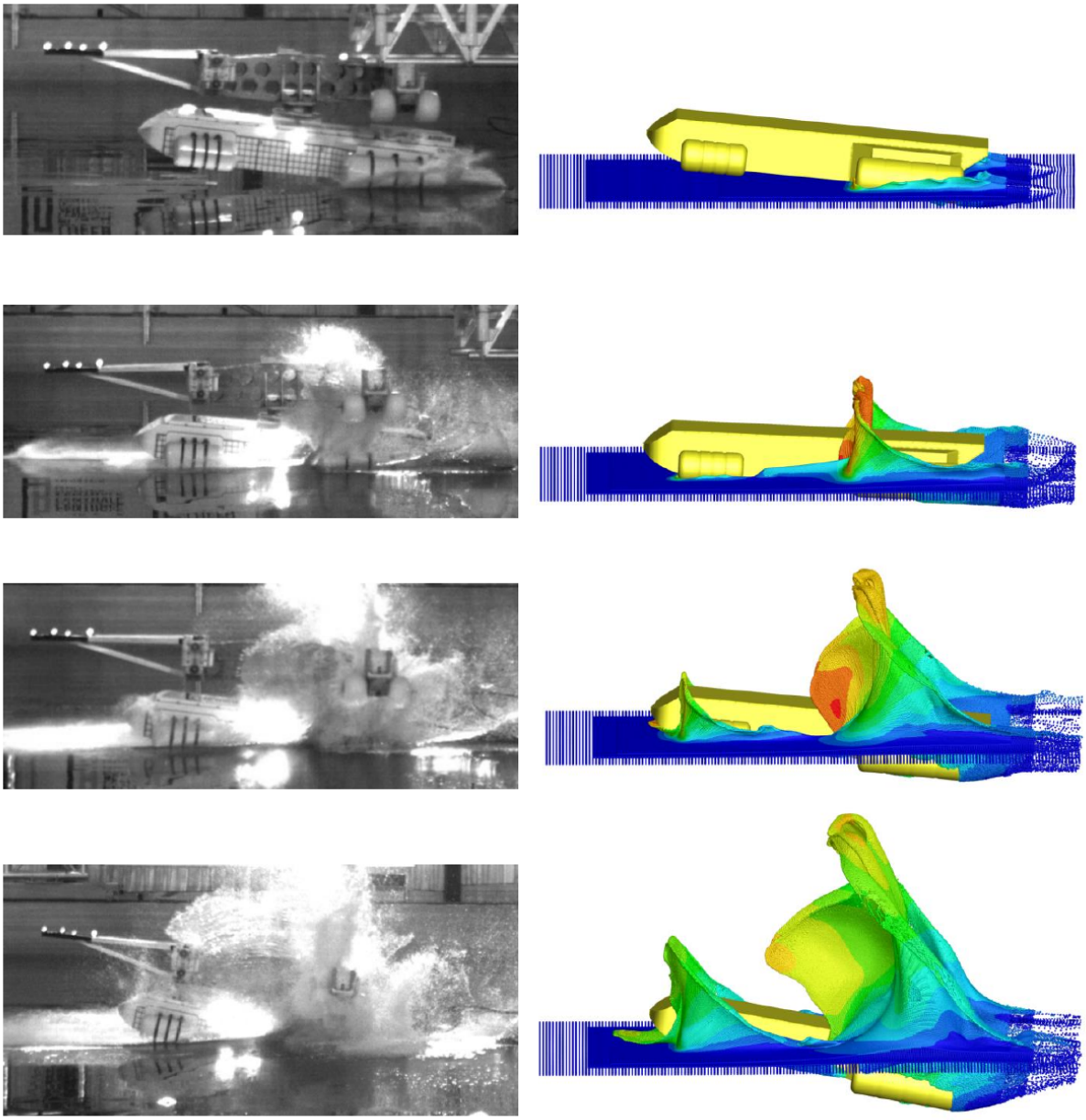

FIGURE 7.12 – Cas avec vitesse d'avance et sans houle : comparaison entre l'écoulement simulé et les essais expérimentaux pour différents instants.

7.4.1.1 Validation de l'amélioration du détachement des jets fluides

En premier lieu, ce cas est intéressant pour la validation du nouveau modèle de détachement des jets fluides présenté à la section 7.3.3 et développé par Julien Michel [96]. En effet, ce cas se caractérise par un fort mouvement de tangage qui implique à la fois un mouvement de plongeon de l'avant de la maquette mais également des effets de succion à l'arrière. On compare qualitativement sur la Figure 7.13 les écoulements obtenus avec différents modèles de détachement de jets fluides. Comme montré sur cette figure, sans modèle de détachement de jets, le fluide reste attaché au corps à la fois à l'arrière et à l'avant de la maquette. À l'inverse, l'ancien modèle de détachement conduit à un décollement du fluide aussi bien à

l'arrière qu'à l'avant de la maquette. Quant au nouveau modèle, il permet un détachement du fluide à l'avant de la maquette alors qu'il reste attaché à l'arrière (caractéristique d'un effet de succion). Ce dernier comportement correspond à celui observé lors des essais en bassin. Pour valider plus précisément ce modèle, on quantifie par la suite ces différences à l'aide de comparaisons avec les signaux expérimentaux.

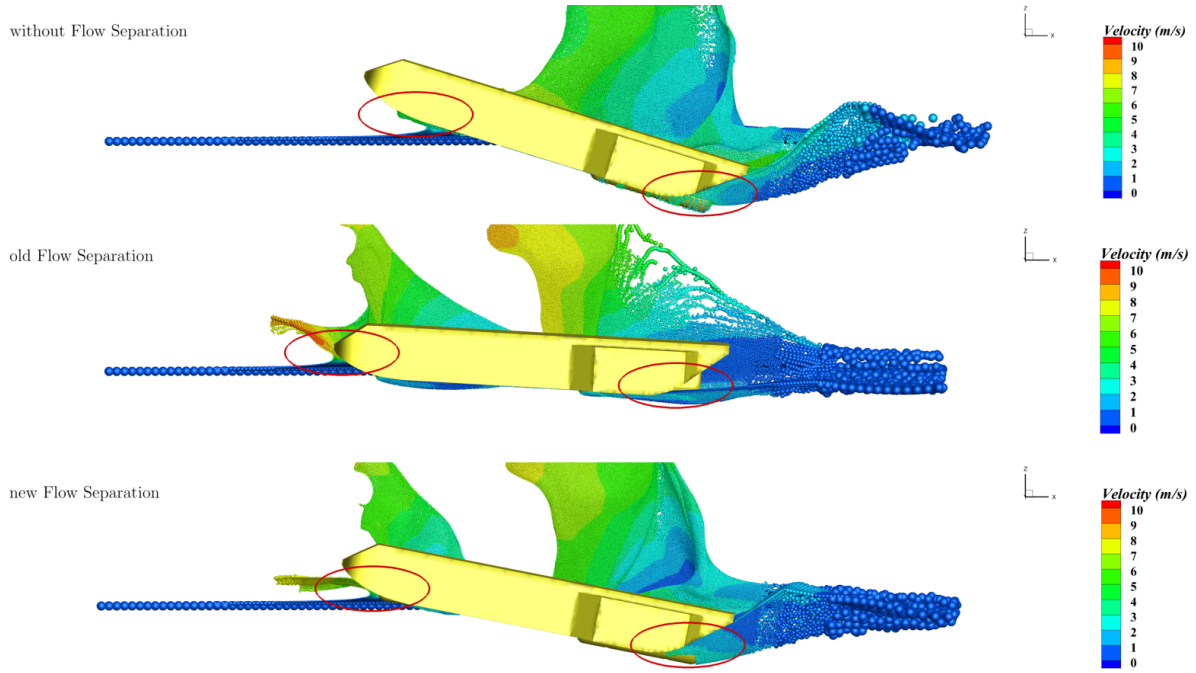

FIGURE 7.13 – Cas avec vitesse d'avance et sans houle : comparaison des écoulements obtenus avec les différents modèles de détachement de jets fluides (vue en coupe) ; on souligne ici la différence de comportement de l'écoulement à l'arrière et à l'avant de la maquette.

La principale différence observée entre les différents modèles de détachement de jets a lieu au niveau de l'évolution de l'assiette au cours du temps. L'évolution de l'assiette, à la fois pour les essais en bassin et pour les différents modèles de détachement de jets, est présentée sur la Figure 7.14. Comme attendu, le modèle de détachement de jets le plus précis correspond à la nouvelle formulation. Pour l'ancien modèle de détachement des jets, les effets de succion ne peuvent être pris en compte, ce qui explique que la maquette affiche un mouvement de plongeon plus important (i.e. une assiette plus faible). À l'inverse, pour le cas sans modèle de détachement de jets, le fluide ne se détache pas à l'avant de la maquette, forçant celle-ci à adopter un fort mouvement de cabrage. Ainsi, de façon non surprenante, le nouveau modèle de détachement de jets offre le meilleur résultat de capture d'évolution de l'assiette de la maquette. On remarque sur la Figure 7.14 que les vitesses initiales d'assiette expérimentales ne sont pas exactement nulles. Cela explique en grande partie les différences résiduelles (l'influence de ce paramètre est étudié à la section suivante). Théoriquement il aurait fallu prendre les conditions initiales relevées expérimentalement (et non les valeurs nominales déterminées avant les essais) pour effectuer les différents simulations numériques. Cependant le processus de post-traitement des résultats expérimentaux a été effectué en parallèle (et de manière itérative) des simulations numériques. Les calculs étant relativement coûteux (plusieurs centaines d'euros par calculs), nous avons décidé de ne

pas relancer les simulations, même si les conditions initiales en angle et en vitesse angulaire ne correspondent pas exactement au conditions relevées expérimentalement. Cette remarque s'applique à l'ensemble des simulations effectuées dans ce chapitre.

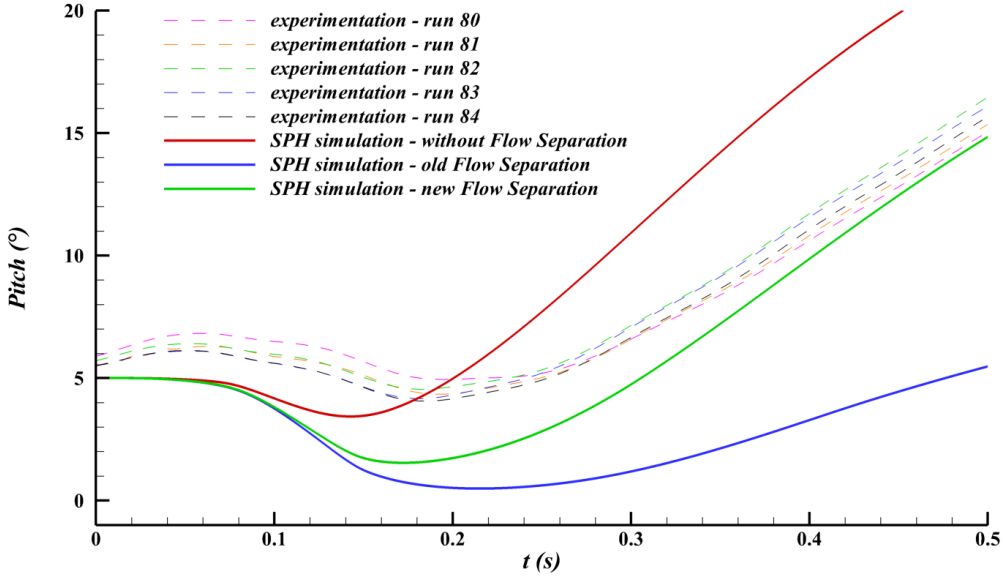

FIGURE 7.14 – Cas avec vitesse d'avance et sans houle : effets du modèle de détachement des jets sur l'évolution de l'assiette ; les résultats expérimentaux sont également donnés pour comparaison.

Un autre signal fortement influencé par le modèle de détachement des jets fluides est l'effort F_{yh} au niveau des flotteurs. En effet, le détachement des jets a une grande influence sur la taille de la surface mouillée (cf. Figure 7.13) et donc potentiellement sur les efforts résultants. Les résultats sont donnés sur la Figure 7.15. Ici encore, le meilleur résultat est obtenu avec le nouveau modèle de détachement des jets. Un facteur 2 environ est observé avec l'ancien modèle de détachement des jets. Le choix de ce modèle est donc un choix critique pour obtenir des résultats précis et le nouveau modèle de détachement est retenu dans la suite.

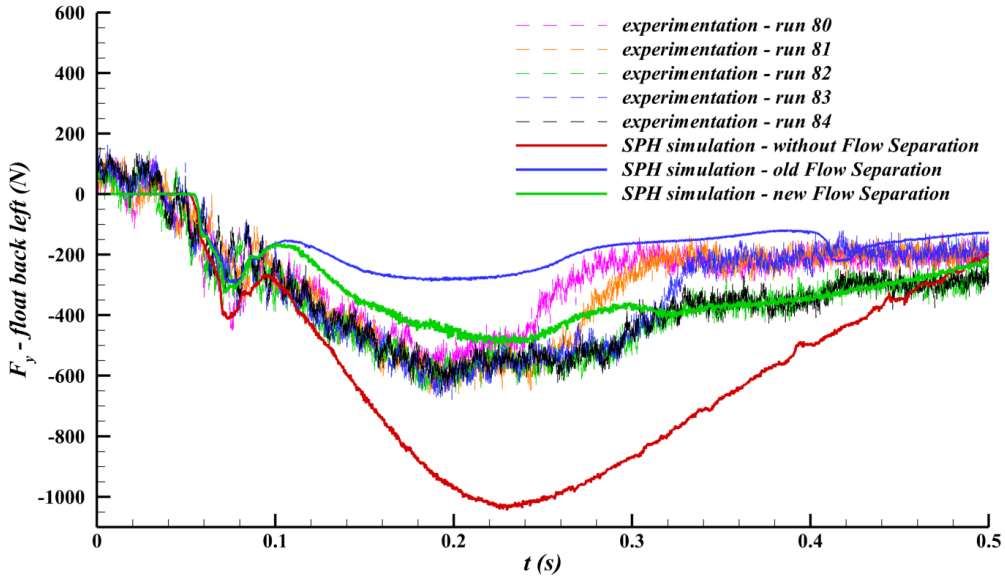

FIGURE 7.15 – Cas avec vitesse d'avance et sans houle : effets du modèle de détachement des jets sur l'évolution de l'effort F_{yh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) sur le flotteur arrière gauche ; les résultats expérimentaux sont également donnés pour comparaison.

7.4.1.2 Influence de la vitesse initiale d'assiette

L'assiette de la maquette est un des paramètres les plus importants et influents sur le comportement global de l'écoulement. En effet, elle influence à la fois la vitesse des jets fluides (une assiette faible a tendance à créer des jets se déplaçant rapidement au niveau du dessous de la carlingue) et le niveau des efforts sur la maquette (une assiette faible a tendance a favoriser les impacts à plat et donc des efforts importants selon $\boldsymbol{z}$). Ainsi, la vitesse angulaire de l'assiette à l'impact θ_0' peut être potentiellement responsable d'effets importants lors de l'impact de la maquette. Lors des essais en bassin, une vitesse d'assiette nulle était attendue à l'instant de l'impact. Cependant, une valeur de $\theta_0' \simeq 16°/s$ est systématiquement observée dans les faits. L'origine de cette vitesse initiale est probablement due à la manière dont la maquette sort du système de guidage, puisque les roues avant et arrière du charriot ne quittent pas leur rail respectif exactement au même instant. La maquette acquiert donc une vitesse d'assiette $\theta_0' > 0$ lors de la phase de vol libre (i.e. la phase de vol avant l'impact). On se propose donc ici d'étudier l'effet de cette vitesse θ_0' sur l'évolution de l'attitude de la maquette. La Figure 7.16 présente l'évolution de l'assiette pour $\theta_0' = 0°/s$ et $\theta_0' = 16°/s$, en comparaison avec les résultats expérimentaux.

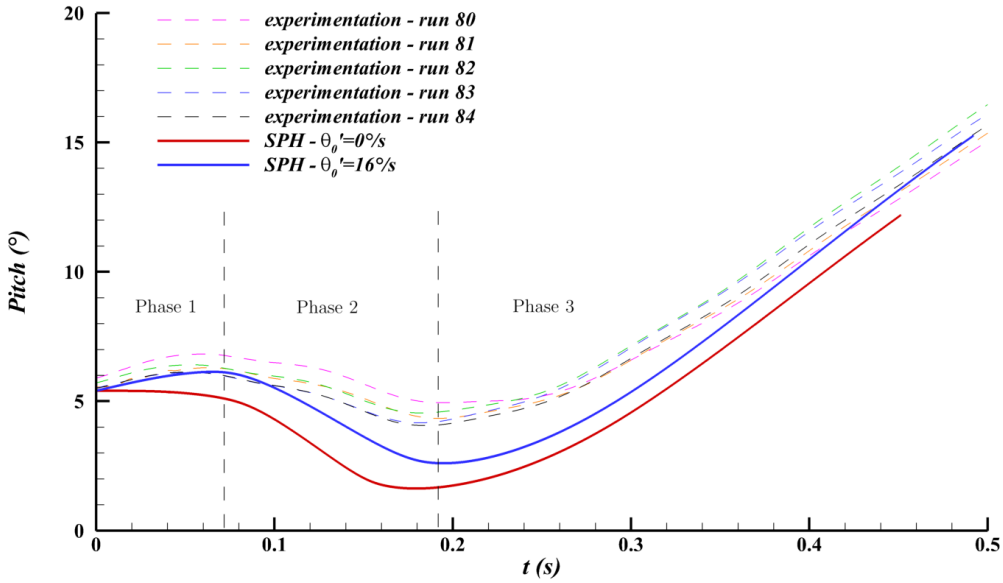

FIGURE 7.16 – Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de la vitesse initiale d'assiette.

Cette figure illustre l'importance de la vitesse initiale d'assiette sur l'évolution de la cinématique globale de la maquette. En particulier, ce paramètre a une influence notable sur l'évolution de l'assiette, comme le montre la Figure 7.16. Cette évolution peut être décomposée en trois phases distinctes. Lors de la phase 1, l'assiette augmente régulièrement à cause de la vitesse initiale θ'_0 tandis que les deux flotteurs arrière et l'arrière de la maquette commencent à impacter la surface libre. Lors de cette phase, les efforts dus au fluide sur l'ensemble de la maquette ne sont pas prédominants et la cinématique de la maquette est principalement due à son mouvement initial. Lors de la phase 2, les efforts dus au fluide à l'arrière de la maquette deviennent de plus en plus importants au fur et à mesure que la maquette s'enfonce dans l'eau. Cela induit un moment résultant qui fait décroître l'assiette. On note que les effets de succion à l'arrière de la maquette tendent à renforcer ce moment. Enfin, la phase 3 est caractérisée par une forte augmentation de la surface mouillée et un déplacement du point d'application global des efforts dus au fluide vers l'avant de la maquette. Un moment opposé est donc observé, ce qui explique l'augmentation de l'assiette lors de cette phase.

La Figure 7.16 montre que la prise en compte de la vitesse initiale θ'_0 présente dans l'expérience donne de meilleurs résultats qu'en prenant une vitesse nulle. On observe cependant une différence lors de la phase 2, notamment au niveau de l'assiette minimale observée ($\theta_{min} = 2.5°$ pour la simulation numérique contre $\theta_{min} = 4°$ pour les essais en bassin). Cette différence peut s'expliquer par une surestimation du moment d'assiette lors des premiers instants de l'impact (induisant un mouvement de plongeon plus important que celui observé expérimentalement). Cette surestimation du moment d'assiette provient en partie d'une surestimation des efforts longitudinaux sur les flotteurs arrière, comme le montre la Figure 7.17. À noter que l'origine de cette surestimation des efforts n'a pas été élucidée et devra faire l'objet de futures investigations.

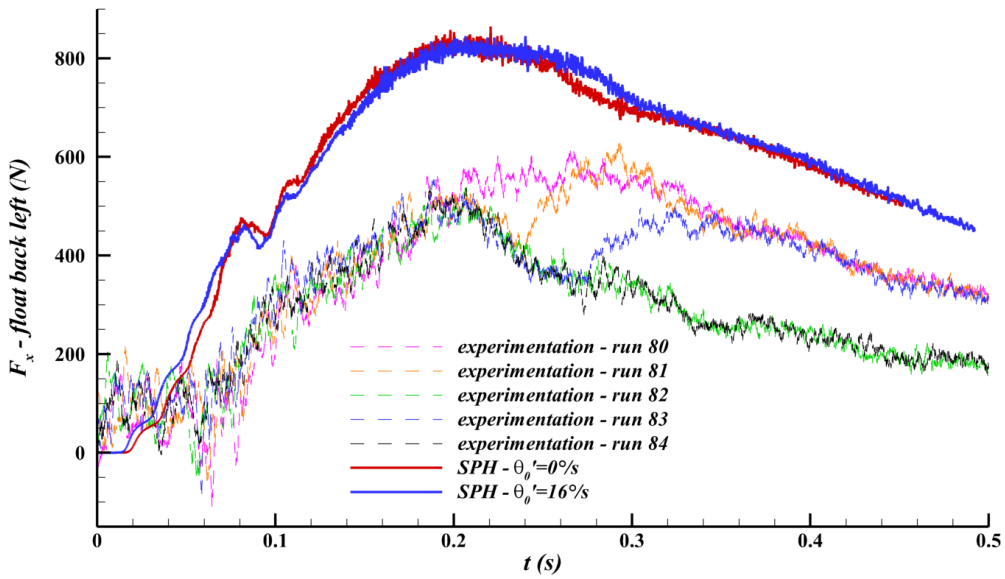

FIGURE 7.17 – Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de la vitesse initiale d'assiette sur l'évolution de la force F_{xh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) sur les flotteurs arrière.

Afin de compléter les résultats obtenus, on montre sur la Figure 7.18 l'évolution de la force F_{zh} (le long de l'axe $\boldsymbol{z}_h$) sur les trois plaques Sq1, Sq2 et Sq3. Pour les plaques Sq3 et Sq2 les résultats numériques et expérimentaux sont relativement proches, à la fois en termes d'instant d'impact et d'amplitude des efforts. Cependant, pour la plaque Sq1 la solution numérique fournit un pic d'effort en avance sur les résultats expérimentaux. Ce pic d'effort a lieu approximativement lorsque l'assiette numérique est plus faible que celle relevée expérimentalement (cf. Figure 7.16). Cela suggère donc que la simulation prédit un déplacement plus rapide du jet fluide le long du dessous de la maquette (et donc un pic d'effort en avance sur les relevés expérimentaux), de manière logique puisque l'impact prédit se fait avec un angle plus faible par rapport à la surface libre qu'en réalité. Cela est confirmé par la solution numérique avec $\theta_0' = 0°/s$, pour laquelle le pic d'effort sur Sq1 a lieu encore plus tôt à cause de l'assiette plus faible en fin de phase 2 (cf. Figure 7.16). Pour la même raison, bien que l'amplitude des efforts soit en accord pour les plaques Sq3 et Sq2, elle est surestimée pour la plaque Sq1 (et ce d'autant plus que l'assiette à la fin de la phase 2 est faible).

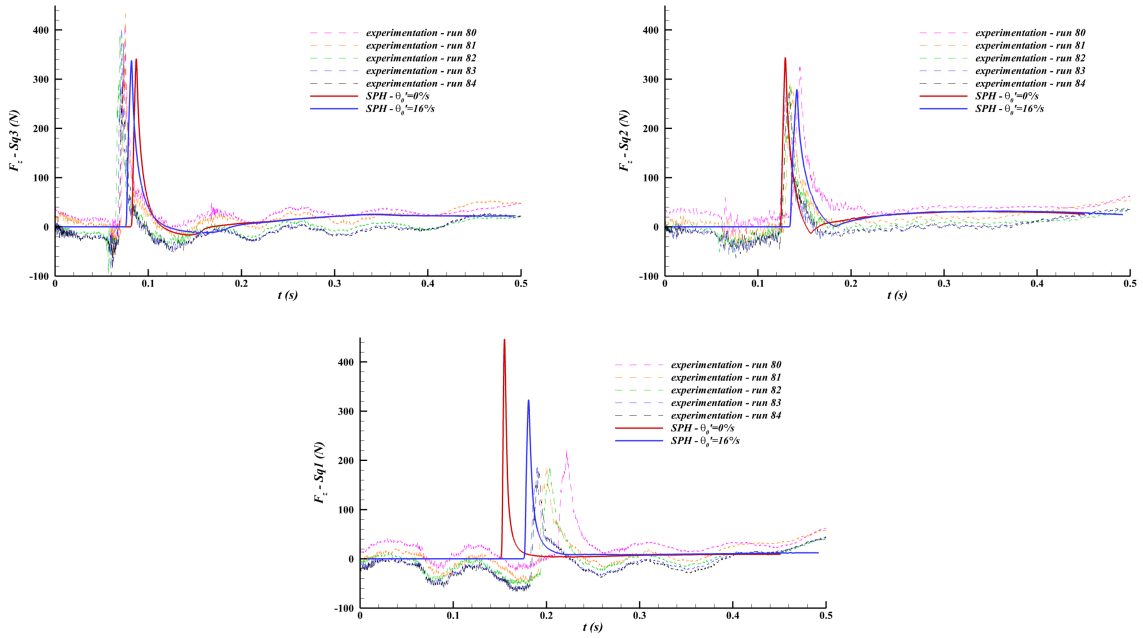

FIGURE 7.18 – Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de la vitesse initiale d'assiette sur l'évolution de la force F_{zh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) sur les plaques Sq1, Sq2 et Sq3.

Il faut cependant souligner qu'une importante dispersion des résultats est obtenue pour les données expérimentales, notamment en terme d'assiette. Ces différences d'assiette se traduisent en une dispersion des instants d'impact sur les plaques Sq2 et Sq1. Ces décalages d'instant d'impact sont bien corrélés avec l'assiette mesurée à la phase 2 (plus l'assiette est grande, plus le pic d'effort arrive tardivement), ce qui montre bien la sensibilité des conditions initiales (en termes d'angle θ_0 et de vitesse θ_0' d'assiette à l'impact) sur les résultats obtenus.

7.4.1.3 Influence de la discrétisation spatiale

Afin d'expliquer les différences observées entre les résultats numériques et expérimentaux, on s'interroge ici sur l'influence de la discrétisation spatiale sur les résultats numériques. En particulier, on cherche à déterminer l'influence de la discrétisation spatiale au niveau des flotteurs arrière. En effet, on a montré précédemment que le comportement global de la maquette était très largement influencé par les premiers instants de l'impact, correspondant à l'entrée en contact de l'arrière de la maquette avec la surface libre. La formation et le détachement des jets se déplaçant sous la maquette et au niveau des flotteurs arrière ont notamment une grande influence sur la physique de l'écoulement. Ainsi, la discrétisation spatiale dans cette région semble être aussi un paramètre crucial. Afin d'étudier cette éventuelle dépendance, on effectue une simulation supplémentaire avec une boîte APR additionnelle, mais uniquement localisée à l'arrière de la maquette, comme le montre la Figure 7.19. Cet ajout va nécessairement augmenter le coût de calcul de la simulation puisque l'on augmente le nombre de particules tout en diminuant les pas de temps (Δx_{fine} devient alors égal à $\Delta x_{fine} = 0.003125m$). Les coûts de calcul devenant trop importants, la simulation

ne sera pas effectuée ici jusqu'à $t = 0.5s$. On se concentrera donc sur les premiers instants de l'écoulement qui sont, comme nous l'avons vu, les plus déterminants en termes de cinématique et d'amplitude des efforts.

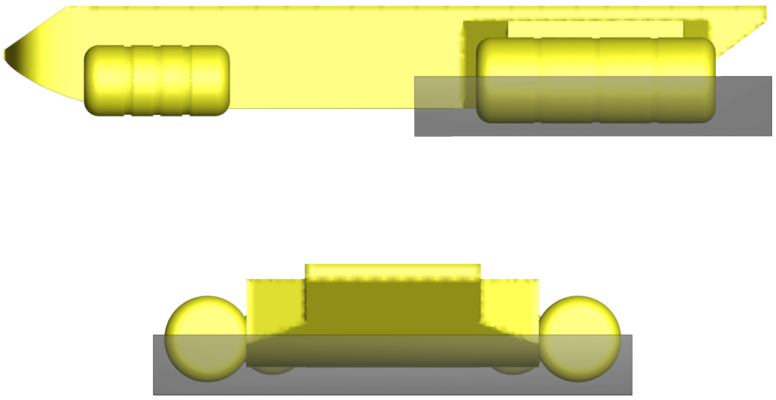

FIGURE 7.19 – Cas avec vitesse d'avance et sans houle : position de la boîte APR supplémentaire pour l'étude de l'influence de la discrétisation spatiale.

Globalement, on observe un comportement relativement similaire de l'écoulement (cf. Figure 7.20). Mais quelques différences peuvent cependant être observées, en particulier sur le mouvement d'assiette. L'influence de la résolution spatiale est surtout notable lors de la phase 2. Durant cette phase, la boîte APR tend à affaiblir la diminution de l'assiette, se rapprochant ainsi des résultats expérimentaux. Il est difficile de conclure sur le comportement lors de la phase 3, puisque les simulations ne couvrent que le début de cette phase de l'écoulement. Dans tous les cas, la discrétisation spatiale semble avoir une influence non négligeable sur le comportement de l'impact, montrant que même avec la discrétisation relativement fine employée, on n'a pas encore atteint la convergence complète. Pour des raisons de coûts de calcul, on n'a cependant pas pu aller jusqu'à cette convergence complète. En effet, le coût d'une simulation est déjà de 48 heures sur 300 cœurs pour le cas sans la boîte APR supplémentaire, et pour les 0.5 secondes de temps physique.

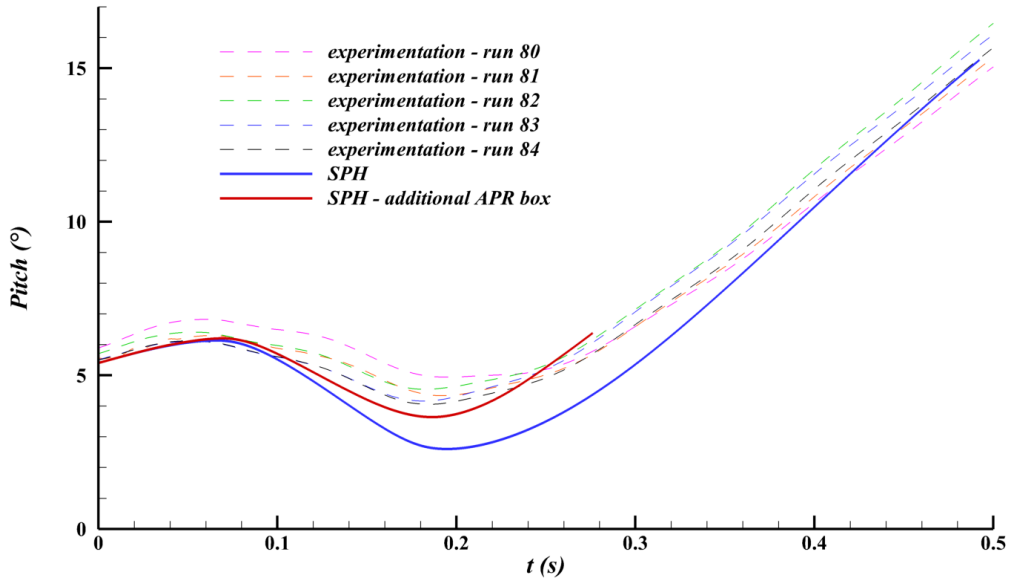

FIGURE 7.20 – Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de résolution spatiale sur l'évolution de l'assiette.

L'ajout d'une boîte APR supplémentaire modifie également le chargement au niveau des flotteurs arrière. Comme le montre la Figure 7.21, les efforts F_{xh} et F_{zh} sur les flotteurs arrière sont influencés par la discrétisation spatiale utilisée (les efforts F_{zh} expérimentaux ne sont pas montrés car les signaux sont beaucoup trop bruités et donc inexploitables). En particulier, lors de la phase 1 la force F_{xh} sur les flotteurs arrière est environ deux fois plus faible avec la boîte APR supplémentaire, et est en accord avec les mesures expérimentales jusqu'au deux tiers de la phase 2 environ. La force F_{zh} est quant à elle beaucoup moins influencée par la boîte supplémentaire. Or les forces F_{xh} et F_{zh} sont les forces responsables du moment M_y autour de l'axe $\boldsymbol{y}$, et donc du mouvement d'assiette. Ce moment associé autour de l'axe $\boldsymbol{y}$ au niveau des flotteurs arrière (moment donné au centre de gravité de la maquette) est montré sur la Figure 7.22. Pour comparaison, le moment M_y au niveau du reste de la maquette est également donné sur cette figure (on notera que le moment sur le reste de la maquette n'est donné que par la simulation SPH puisque les essais expérimentaux n'y donnent pas accès). Tout d'abord, on peut noter que le moment au niveau des flotteurs arrière n'est influencé par la discrétisation spatiale que sur l'intervalle $t \in [0.1, 0.25]s$. De plus, il y a plus d'un ordre de grandeur entre le moment au niveau des flotteurs arrière et celui sur le reste de la maquette. C'est donc le moment M_y sur le reste de la maquette qui est en grande majorité responsable du mouvement d'assiette de l'hélicoptère (les efforts au niveau des flotteurs arrière n'ont une influence significative que lors des tout premiers instants de l'impact). Ainsi, les différences observées sur l'assiette dues à la discrétisation spatiale (cf. Figure 7.20) peuvent s'expliquer par les efforts au niveau du reste de la maquette (i.e. sans prendre en compte les flotteurs arrière), et en particulier les efforts sous l'hélicoptère. En effet, comme le montre la Figure 7.23 la discrétisation spatiale a une influence sur la surface mouillée au niveau du dessous de la maquette. En particulier, l'augmentation de la discrétisation spatiale a tendance à augmenter la surface mouillée en modifiant la formation des jets fluides et la position des points de décollements (notamment à l'arrière de la maquette). Cela montre l'importance de

la discrétisation spatiale dans cette zone de l'écoulement.

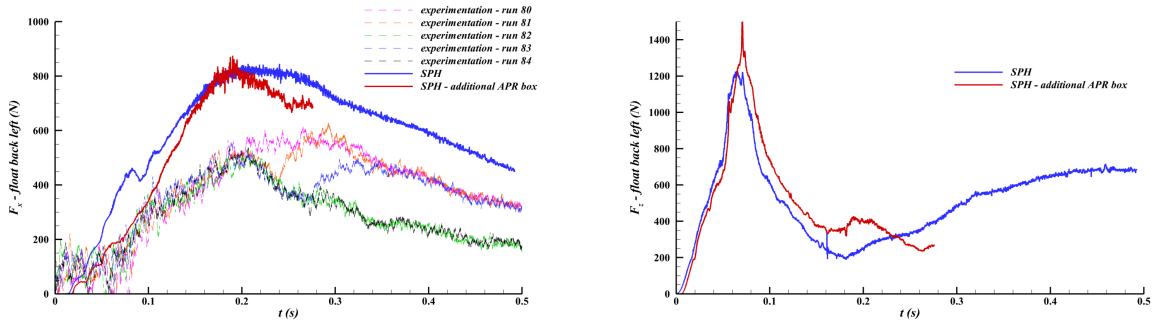

FIGURE 7.21 – Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de la discrétisation spatiale sur l'évolution des efforts F_{xh} et F_{zh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) sur les flotteurs arrière.

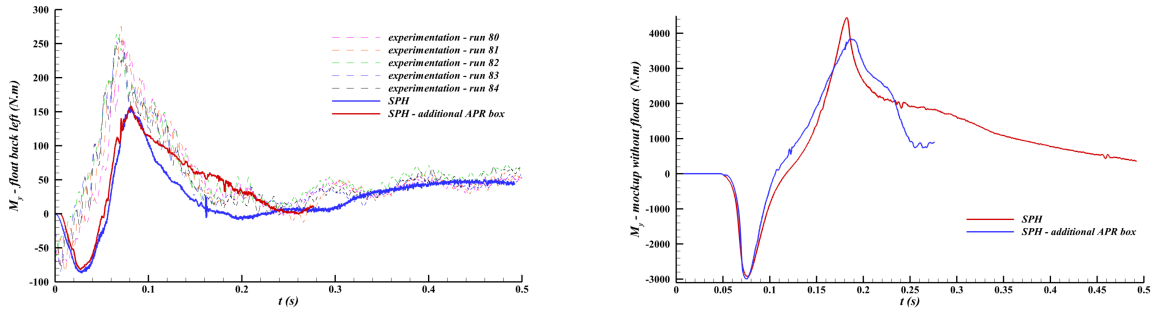

FIGURE 7.22 – Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de la discrétisation spatiale sur l'évolution du moment M_y au niveau des flotteurs arrière et du reste de la maquette (moments au centre de gravité de la maquette).

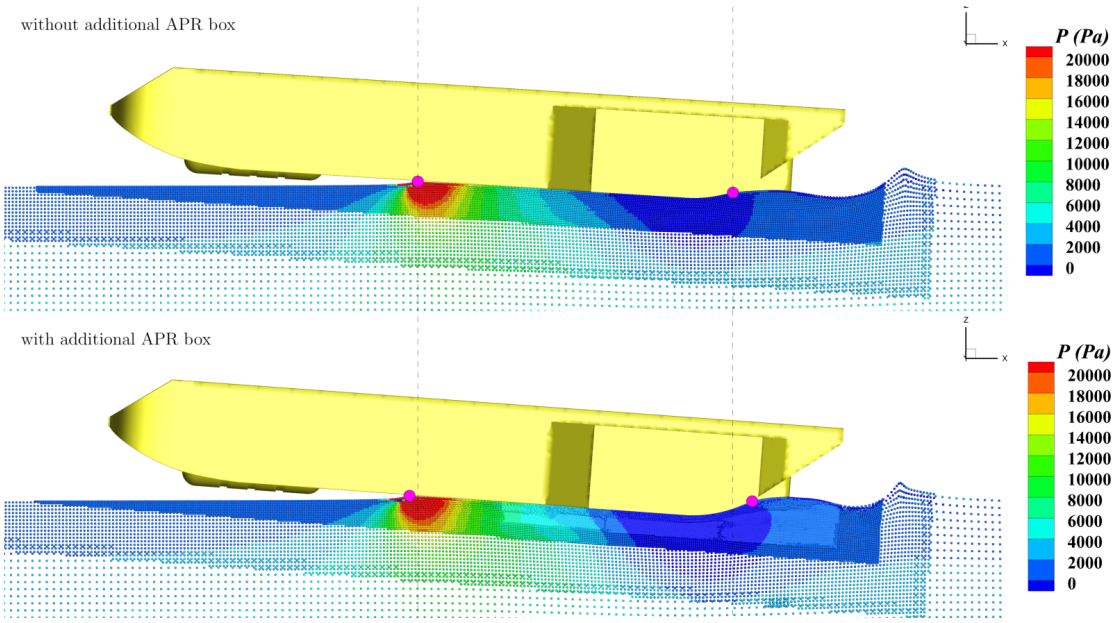

FIGURE 7.23 – Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de la discrétisation spatiale sur la surface mouillée sous la maquette à $t = 0.15s$; les points magentas indiquent les positions des points de décollement.

Un autre signal influencé par la discrétisation spatiale est l'effort F_{zh} sur la plaque Sq1 (les efforts sur les autres plaques ne sont presque pas modifiés), comme le montre la Figure 7.24. Une fois de plus l'augmentation de la discrétisation spatiale fournit de meilleurs résultats, à la fois en termes d'amplitude des efforts et d'instant d'impact (cela est à mettre en relation avec le fait que l'assiette $\theta(t)$ relevée numériquement est plus proche des expériences ; cf. Figure 7.20). Pour des raisons de coûts de calcul, la discrétisation spatiale sans la boîte APR supplémentaire est utilisée dans la suite de ce chapitre.

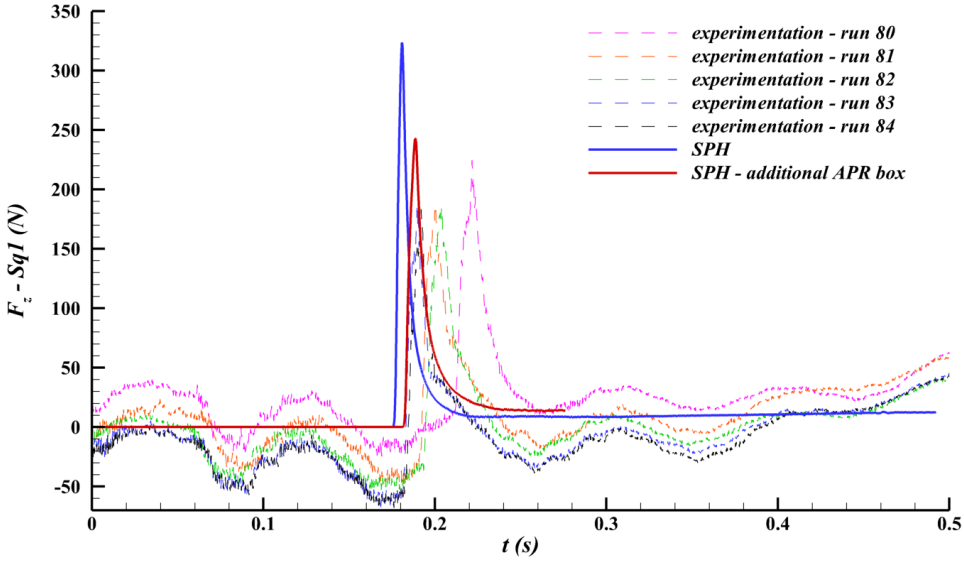

FIGURE 7.24 – Cas avec vitesse d'avance et sans houle : influence de la discrétisation spatiale sur l'évolution de l'effort F_{zh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) sur la plaque Sq1.

7.4.2 Cas d'impact vertical et sans houle

Le cas précédent, qui était un cas relativement complexe mais représentatif de l'ensemble des configurations testées, a donc permis de valider le modèle numérique utilisé. On s'intéresse maintenant à un cas plus simple, qui va permettre de confirmer la pertinence du modèle numérique retenu. Ce cas est un cas de lâcher vertical, défini par les conditions à l'impact suivantes (toujours définies en G et dans le repère $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$) : une vitesse $(V_x, V_y, V_z) = (-0.4, 0, -1.15)\, m/s$ et une attitude $(\phi, \theta, \psi) = (0, 5, 0)^\circ$. On notera qu'ici les conditions initiales en terme de vitesse angulaire seront considérées comme nulles (encore une fois cela ne correspond pas exactement aux valeurs expérimentales ; cf. section 7.4.1.1 pour la justification de cet écart). Ce cas est similaire au cas précédent, mais cette fois-ci sans vitesse d'avance (même si la vitesse V_x à l'impact n'est pas strictement nulle). Ce cas est donc moins violent et moins complexe a priori. Une visualisation de l'écoulement simulé est donnée sur la Figure 7.25. La Figure 7.26 présente une comparaison entre l'écoulement simulé et les essais expérimentaux, montrant un bon accord au niveau du comportement général de l'écoulement.

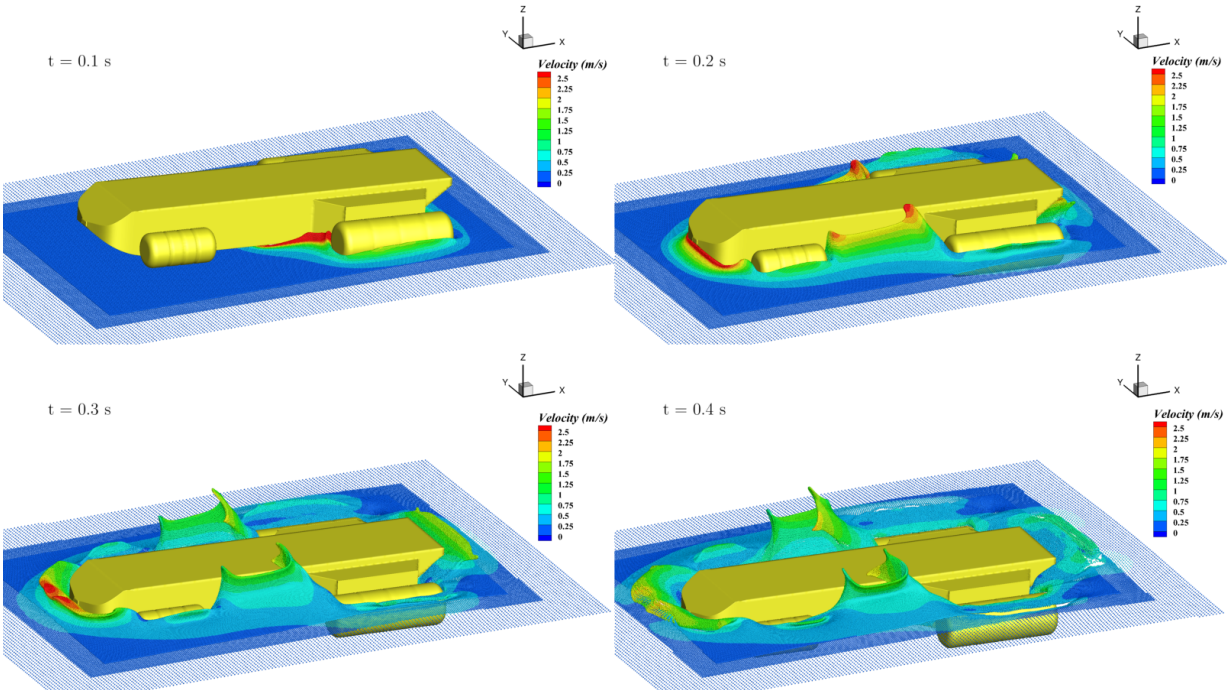

FIGURE 7.25 – Cas d'impact vertical et sans houle : visualisation générale de l'écoulement.

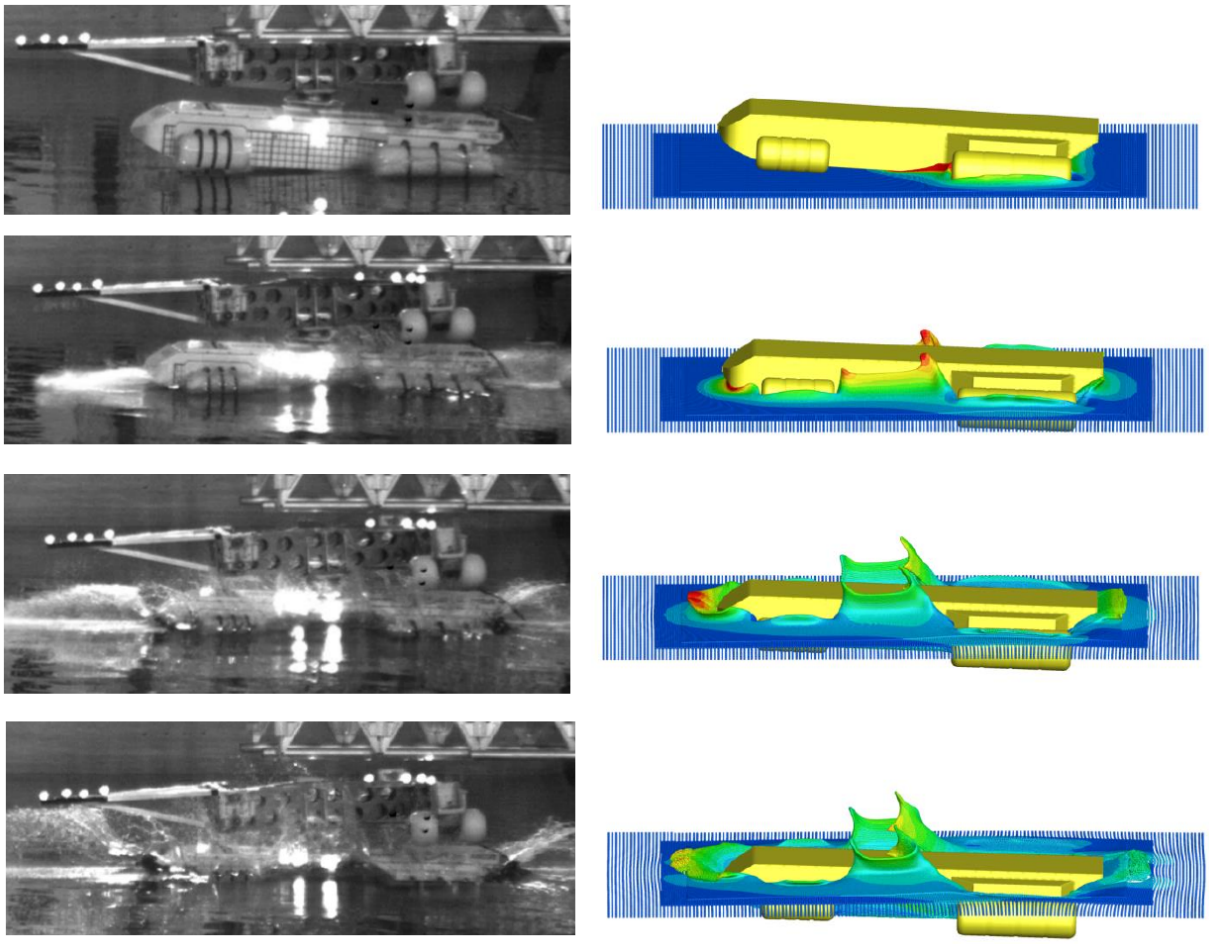

FIGURE 7.26 – Cas d'impact vertical et sans houle : comparaison entre l'écoulement simulé et les essais expérimentaux pour différents instants.

Pour décrire ce cas, on s'intéresse tout d'abord à l'évolution de l'assiette de la maquette. Les résultats sont donnés sur la Figure 7.27. Comme précédemment, ce cas peut être décomposé en trois phases distinctes. La phase 1 est caractérisée par une assiette presque constante et un mouvement proche de la chute libre (le chargement dû au fluide reste faible lors de cette phase). Lors de la phase 2, l'assiette décroît relativement rapidement à cause des efforts du fluide sur la maquette, principalement localisés à l'arrière de l'hélicoptère. Finalement, la phase 3 est caractérisée par des efforts fluides plus limités et globalement dominés par la poussée d'Archimède. Ces trois phases sont bien capturées par la simulation SPH, comme le montre la comparaison des évolutions numérique et expérimentales de l'assiette sur la Figure 7.27.

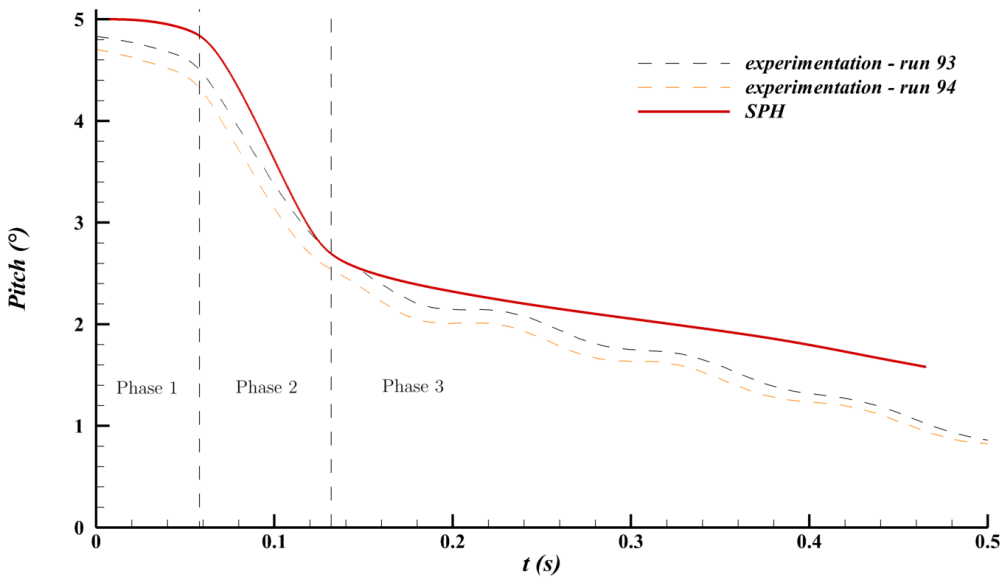

FIGURE 7.27 – Cas d'impact vertical et sans houle : évolution de l'assiette.

La Figure 7.28 montre l'évolution de la position de la maquette le long des axes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{z}$. La simulation SPH fournit des résultats très proches des données expérimentales. Finalement, la position de la maquette est bien capturée par la simulation SPH pour ce cas, à la fois en termes d'angle et de position.

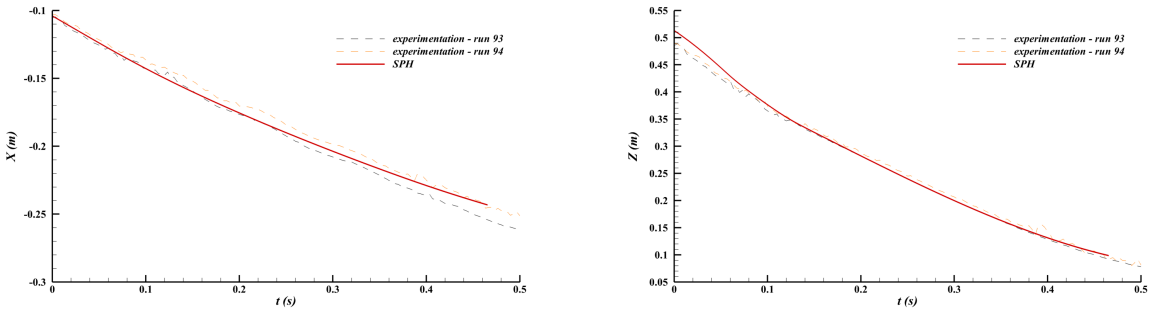

FIGURE 7.28 – Cas d'impact vertical et sans houle : évolution de la position de la maquette le long des axes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{z}$.

On donne également sur la Figure 7.29 l'évolution des efforts F_{zh} (le long de l'axe $\boldsymbol{z}_h$) au niveau des plaques Sq3, Sq2 et Sq1. Bien que les résultats de la simulation soient proches des signaux expérimentaux, l'instant auquel à lieu l'effort F_{zh} maximal est légèrement en retard par rapport aux essais en bassin (avec approximativement le même décalage temporel de $0.01s$ pour l'ensemble des plaques). Ce décalage est probablement dû aux petites différences observées sur la Figure 7.27 entre les assiettes initiales, modifiant l'écoulement du jet fluide sous la maquette (et modifiant donc également les instants d'impact). En particulier, l'assiette mesurée expérimentalement étant légèrement plus faible, cela induit un jet

fluide se déplaçant plus rapidement sous la maquette, expliquant que les signaux d'efforts soient légèrement en avance par rapport au résultat numérique.

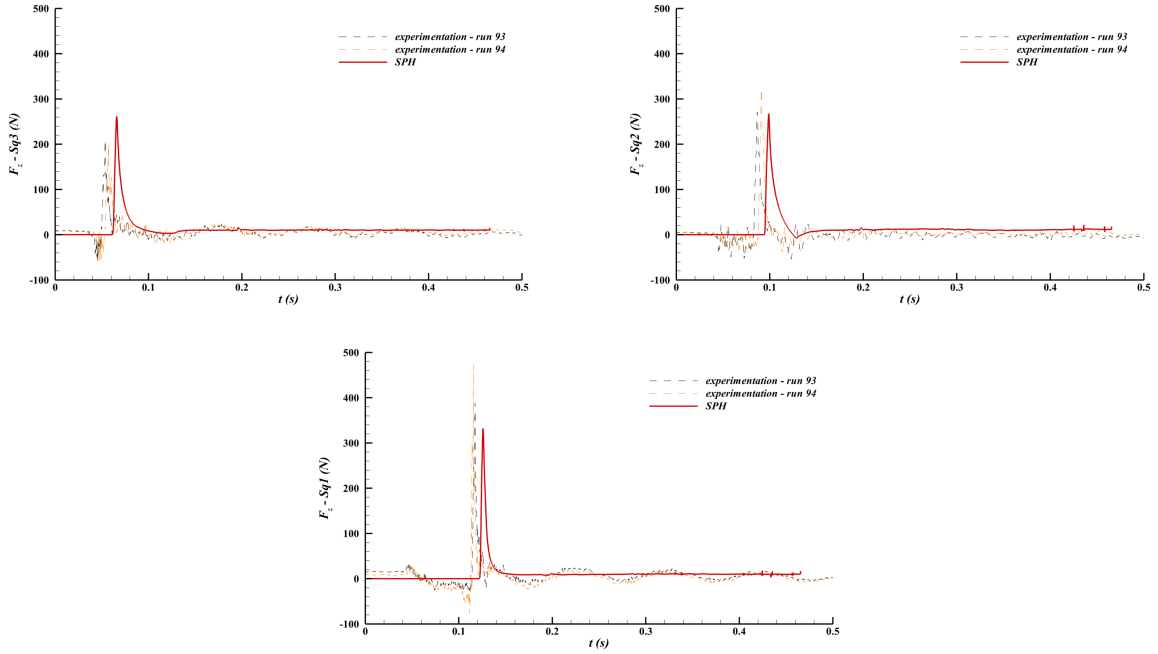

FIGURE 7.29 – Cas d'impact vertical et sans houle : évolution des efforts F_{zh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) au niveau des plaques Sq3, Sq2 et Sq1.

7.4.3 Cas avec houle

Le dernier cas étudié est le cas d'un impact en condition de houle. Il est défini par les conditions suivantes à l'instant d'impact (toujours définies en G et dans le repère $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$) : une vitesse $(V_x, V_y, V_z) = (-7.85, 0, -3.88)\, m/s$ et une attitude $(\phi, \theta, \psi) = (0, 10.7, 0)^\circ$. En plus de ces valeurs, la vitesse initiale d'assiette à l'impact est relevée expérimentalement à $\theta'_0 = 20.2^\circ/s$. Cette valeur relativement importante est principalement due à la phase de vol libre (comme pour le premier cas étudié à la section 7.4.1). Comme montré précédemment, ce paramètre a une grande influence sur le comportement de l'écoulement, et il est donc important d'utiliser sa valeur expérimentale lors de la simulation. La houle qui a été retenue pour ce cas est une houle unidirectionnelle et régulière, dont les caractéristiques sont les suivantes : une longueur d'onde de $\lambda = 16.372m$, une hauteur de $H = 0.94m$ ainsi qu'une profondeur du bassin de $d = 5m$. En plus de ces caractéristiques, il est nécessaire de définir le décalage de phase φ permettant de déterminer la position de la maquette par rapport aux vagues à l'impact. Comme le montre la Figure 7.30, le décalage de phase est déterminé entre la crête de la vague et le centre de gravité de la maquette (un déphasage de $\varphi = 0^\circ$ correspond à un impact sur la crête de la vague ; à l'inverse un déphasage de $\varphi = 180^\circ$ correspond à un impact dans le creux de la vague). Expérimentalement, on mesure un déphasage initial de $\varphi = 196^\circ$, ce qui correspond à la position affichée sur la Figure 7.30. On notera que la mesure de cette valeur expérimentale est source d'incertitudes, et peut influencer de manière significative l'écoulement simulé. Ce cas est également caractérisé par une vitesse d'impact verticale V_z plus importante que pour les autres cas étudiés, ce qui induit théoriquement

des chargements plus importants pour la structure. Une visualisation de l'écoulement simulé est donné sur la Figure 7.31. On donne également, sur la Figure 7.32, une comparaison entre l'écoulement simulé et les essais expérimentaux, montrant un bon accord au niveau du comportement général de l'écoulement.

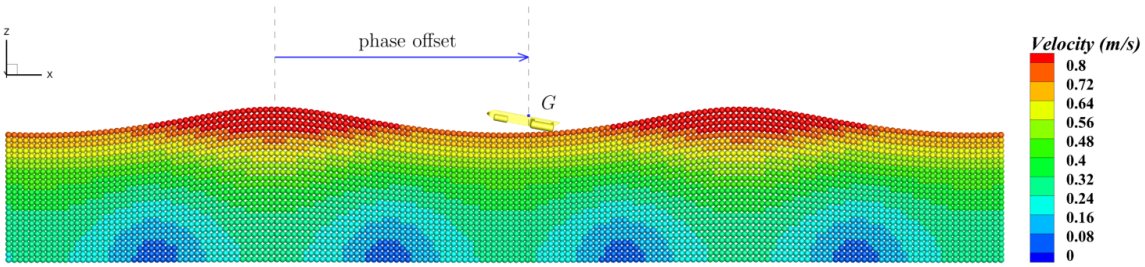

FIGURE 7.30 – Cas avec houle : position initiale de la maquette et définition du déphasage initial.

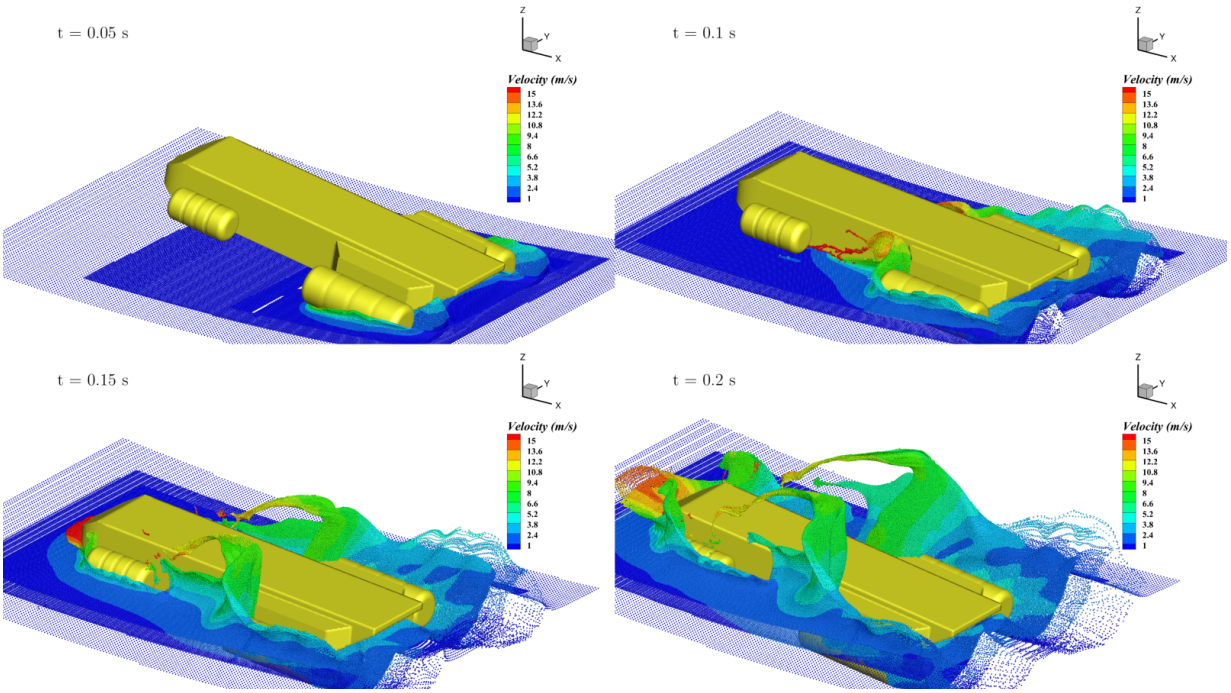

FIGURE 7.31 – Cas avec houle : visualisation générale de l'écoulement.

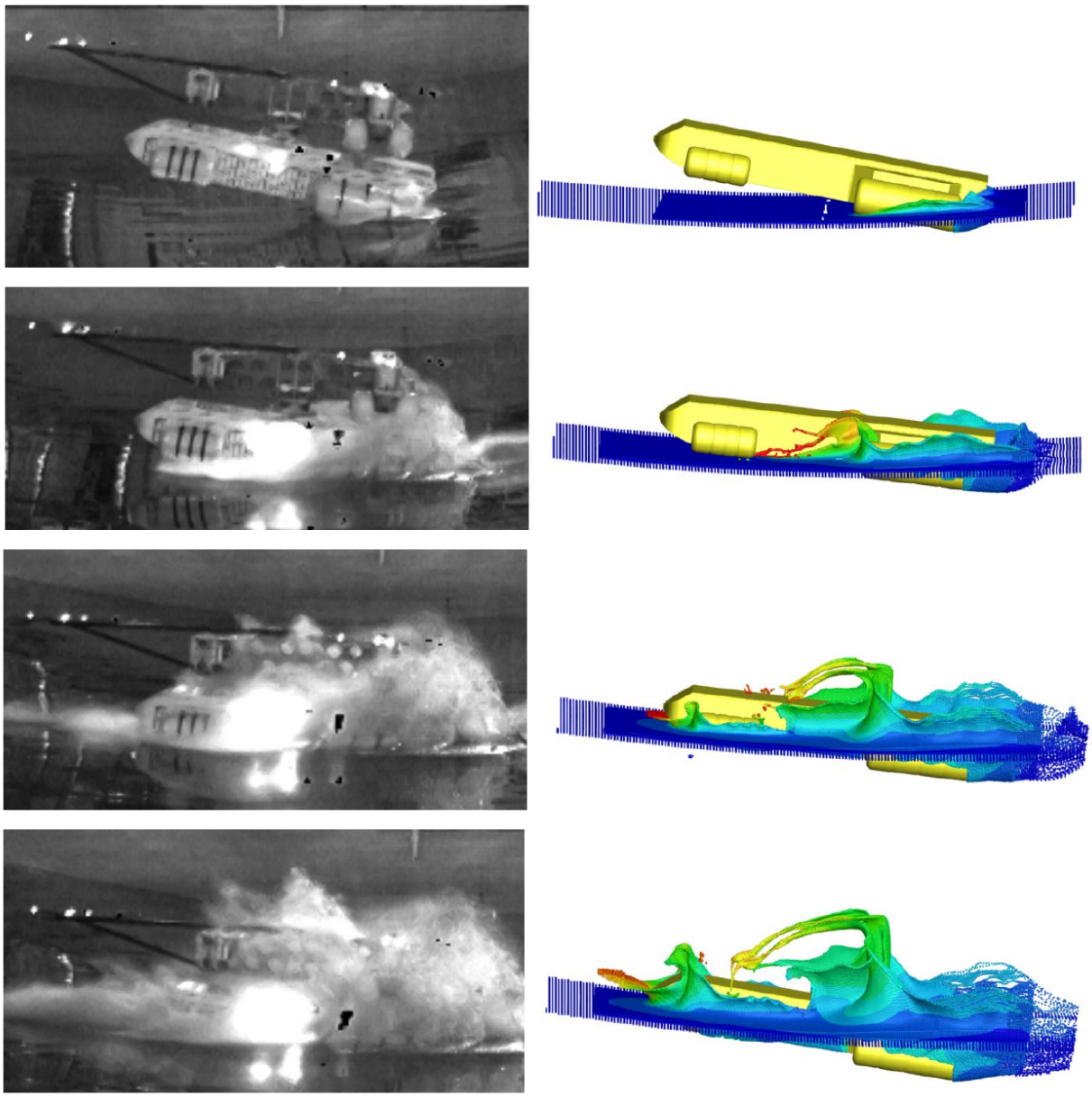

FIGURE 7.32 – Cas avec houle : comparaison entre l'écoulement simulé et les essais expérimentaux pour différents instants.

Ici également, ce cas peut se décomposer en trois phases distinctes, mises en évidence dans l'évolution de l'assiette montrée sur la Figure 7.33. Comme pour les cas précédents, la phase 1 est caractérisée par une augmentation régulière de l'assiette à cause de la vitesse initiale θ'_0, tandis que les deux flotteurs arrière et l'arrière de la maquette commencent à impacter la surface libre. Lors de cette phase, les efforts dus au fluide sur l'ensemble de la maquette ne sont pas prédominants et la cinématique de la maquette est principalement due à son mouvement initial. Ensuite, une diminution de l'assiette est observée lors de la phase 2, pouvant s'expliquer par les efforts dus au fluide à l'arrière de la maquette et responsables d'un moment expliquant cette diminution. Finalement, la phase 3 est caractérisée par une augmentation de l'assiette. Cette augmentation est principalement due au fait que l'avant de la maquette impacte le front de la vague incidente. Ces 3 phases sont bien capturées par la simulation SPH, comme le montre la Figure 7.33. On observe cependant que l'assiette est

sous-estimée par la simulation SPH au cours de la phase 2. L'origine de ce petit décalage est relativement difficile à identifier. On suppose cependant qu'il est principalement dû à l'incertitude de mesure du déphasage φ. En effet la différence observée lors de la phase 2 peut s'interpréter également comme un léger déphasage temporel, et donc possiblement comme une différence sur le déphasage initial φ. On constate aussi une différence sur les assiettes initiales (cf. Figure 7.33 ; cf. section 7.4.1.1 pour la justification de cet écart), pouvant expliquer en partie le décalage observé.

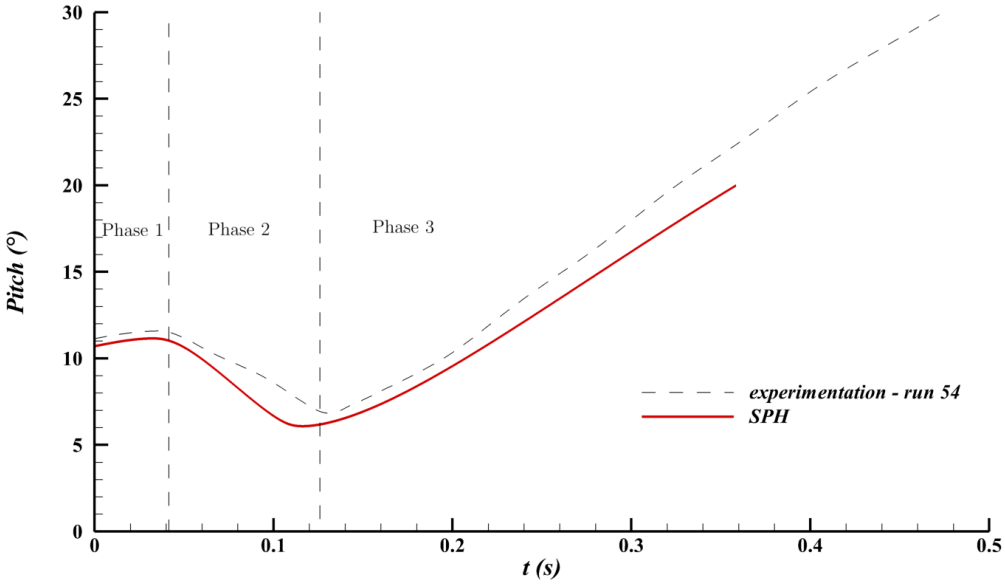

FIGURE 7.33 – Cas avec houle : évolution de l'assiette.

L'une des caractéristiques de la phase 3 est que la maquette se rapproche de la crête de la vague incidente. En particulier, cela tend à augmenter les forces de flottaisons sur la maquette et donc à induire une augmentation de la position z, comme le montre la Figure 7.34. Cette tendance est bien capturée par la simulation SPH. La Figure 7.34 montre également un très bon accord entre la simulation SPH et les essais pour l'évolution de la position x de la maquette.

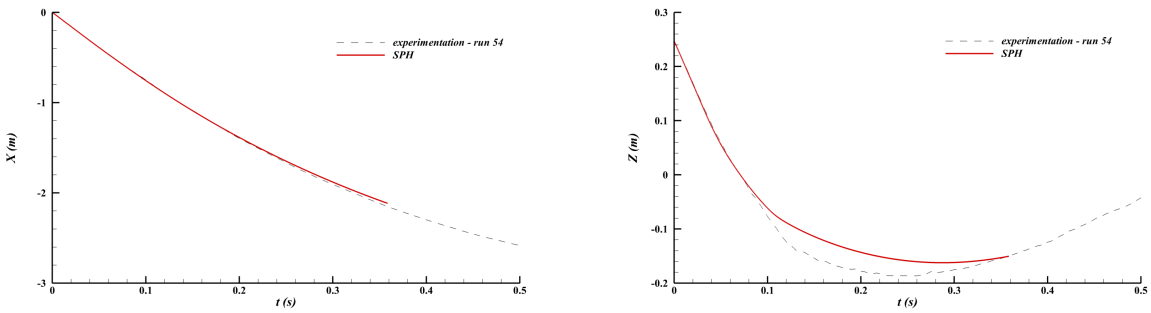

FIGURE 7.34 – Cas avec houle : évolution de la position de la maquette le long des axes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{z}$.

Puisque ce cas est un cas symétrique par rapport au plan xz, les forces F_{xh} et F_{zh} sont les seules responsables du moment M_y autour de l'axe $\boldsymbol{y}$, et donc du mouvement d'assiette de la maquette. Le moment associé M_y sur les flotteurs arrière ainsi que le moment M_y sur le reste de la maquette sont donnés sur la Figure 7.35 (on notera que le moment sur le reste de la maquette n'est donné que par la simulation SPH puisque les essais expérimentaux n'y donnent pas accès). On peut noter qu'il y a plus d'un ordre de grandeur entre le moment M_y au niveau des flotteurs arrière et celui au niveau du reste de la maquette (pour pour le cas de la section 7.4.1). Ainsi, comme pour le cas sans houle, le moment M_y au niveau du reste de la maquette est responsable en grande partie de l'évolution de l'assiette de l'hélicoptère.

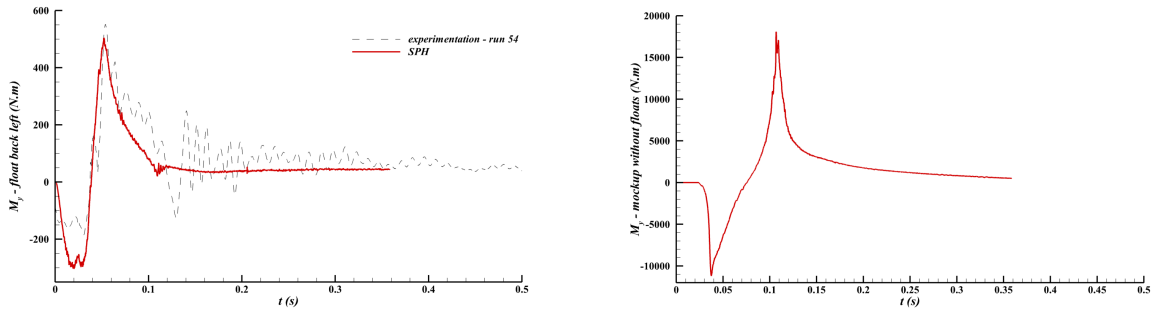

FIGURE 7.35 – Cas avec houle : évolution du moment M_y au niveau des flotteurs arrière et du reste de la maquette (moments donnés au centre de gravité de la maquette).

On donne également sur la Figure 7.36 l'évolution des efforts F_{zh} (le long de l'axe $\boldsymbol{z}_h$) au niveau des plaques Sq3, Sq2 et Sq1. On remarque tout d'abord que le chargement au niveau de la plaque Sq1 obtenu avec la simulation SPH est assez éloigné des résultats expérimentaux. Cet écart peut s'expliquer par la conjonction de deux phénomènes. Premièrement, on peut remarquer que le pic d'effort sur la plaque Sq1 a lieu approximativement au même instant que lorsque l'assiette minimale est atteinte (cf. Figure 7.33). Or l'assiette minimale obtenue avec la simulation SPH est plus faible que celle observée expérimentalement à cet instant. Ensuite, l'instant d'impact sur la plaque Sq1 obtenu numériquement correspond également à l'instant auquel l'avant de la maquette impacte le front de la vague incidente. Or cette vague possède sa propre pente qui est approximativement égale à l'assiette de la maquette. Ainsi, la combinaison de ces deux phénomènes explique que, pour la simulation SPH, l'impact au niveau de la plaque Sq1 se fait quasiment à plat, ce qui augmente fortement les efforts relevés. Tout se passe comme si la maquette subissait un deuxième impact en rencontrant le front de vague incident, comme le montre l'évolution de l'effort F_{zh} sur la maquette donné sur la Figure 7.37. On remarque également que l'instant d'impact numérique est légèrement en avance pour l'ensemble des plaques. On suppose que ces écarts proviennent en partie de l'incertitude sur le déphasage initial φ mentionné plus haut.

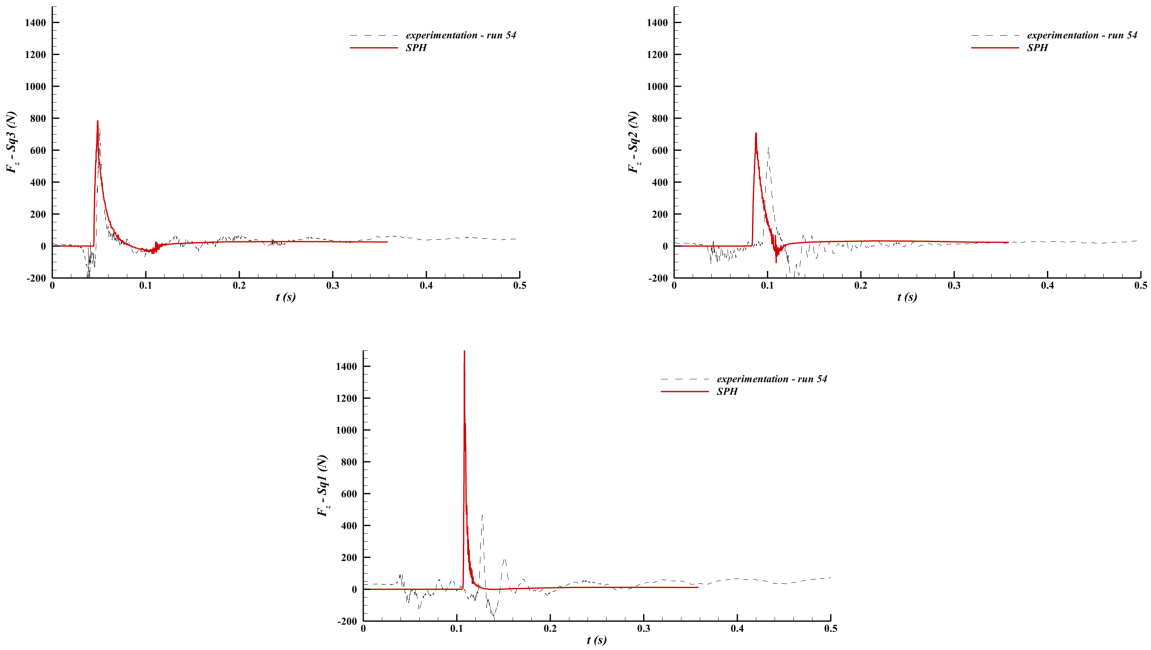

FIGURE 7.36 – Cas avec houle : évolution des efforts F_{zh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) au niveau des plaques Sq3, Sq2 et Sq1.

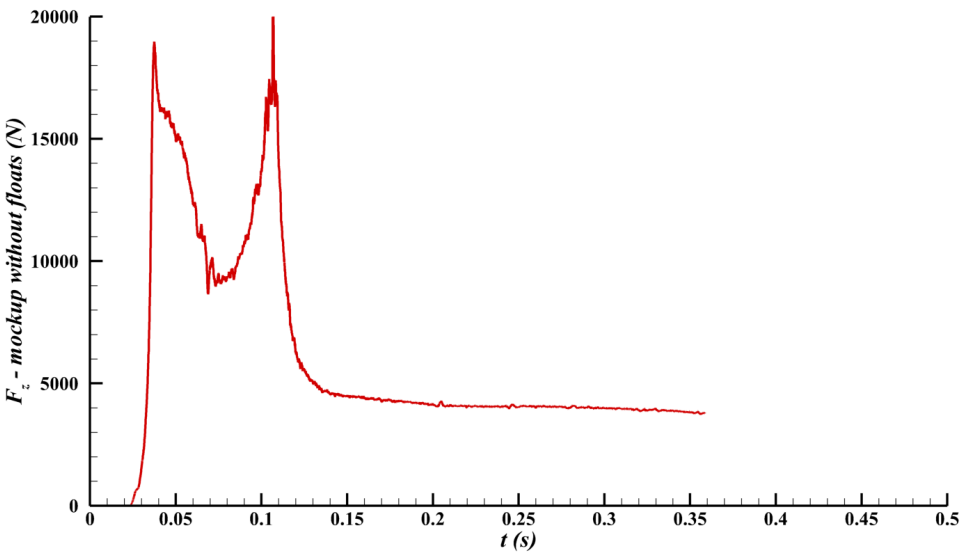

FIGURE 7.37 – Cas avec houle : évolution de l'effort F_{zh} (dans le repère $(\boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{z}_h)$) sur l'ensemble de la maquette, à l'exception des flotteurs.

Il est également important de noter que la vague incidente possède sa propre cinématique, modifiant la vitesse d'impact de la maquette relativement à la surface libre. Pour quantifier ce phénomène, on donne dans la Table 7.2 la vitesse verticale V_z de la vague incidente non-perturbée (i.e. la vitesse de la vague si l'impact n'avait pas eu lieu) au niveau des plaques Sq. Cela montre que la cinématique de la vague incidente a une influence sur la vitesse relative

de la maquette par rapport à la surface libre et donc sur la vitesse d'impact. En particulier, la Table 7.2 montre que la vitesse de la vague est importante au niveau de la plaque Sq1, ce qui pourrait contribuer à expliquer que celle-ci reçoive un chargement plus important.

	Instant d'impact	Vitesse verticale de la vague incidente non perturbée au niveau de chaque plaque et à l'instant d'impact
Plaque Sq3	$t \simeq 0.05s$	$V_z \simeq -0.12m/s$
Plaque Sq2	$t \simeq 0.09s$	$V_z \simeq 0.13m/s$
Plaque Sq1	$t \simeq 0.11s$	$V_z \simeq 0.36m/s$

Table 7.2 – Cas avec houle : instant d'impact au niveau des plaques Sq et vitesse verticale de la vague incidente non perturbée au niveau de chaque plaque Sq et aux différents instants d'impact.

7.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fourni une méthodologie afin d'effectuer des simulations d'amerrissage d'urgence d'hélicoptère. Cette méthodologie a ensuite été testée et validée en s'appuyant sur la campagne d'essais menée au sein du laboratoire. Des résultats satisfaisant ont été obtenus. En effet, les simulations effectuées permettent de capturer les différentes phases de l'impact, tout en donnant les bonnes tendances au niveau des signaux d'efforts et de cinématiques. Il a cependant été observé une forte sensibilité aux conditions initiales, combinée à de nombreuses incertitudes expérimentales (reproductibilité des essais, signaux bruités, etc...). Pour de futures simulations, un soin important devra donc être apporté au choix des différentes conditions initiales.

Il est également possible que ces incertitudes proviennent de la modélisation physique retenue. En particulier, certains phénomènes physiques négligés dans une première approche ne le sont peut-être pas en réalité (comme les effets de la viscosité et de la turbulence, les effets aérodynamiques, les effets biphasiques comme les effets de cousin d'air, etc...). Cela devra faire l'objet d'investigations futures. Enfin, on a montré que l'obtention de résultats totalement convergés nécessiterait des discrétisations encore plus fines que celles que nous avons utilisées avec les moyens de calcul dont nous disposions, ce qui sera aussi nécessaire dans le futur pour déterminer d'où viennent les petites différences restantes par rapport aux expériences.

Conclusion

Les travaux présentés dans ce manuscrit de thèse couvrent un large éventail de thèmes, allant d'améliorations d'un point de vue théorique (amélioration du shifting particulaire et proposition d'une nouvelle méthode WENO-MLS de montée en ordre), jusqu'à des applications à des cas industriels (simulations de cas d'amerrissage d'urgence dans le cadre du projet SARAH), en passant par des modèles physico-numériques (proposition d'un nouvel opérateur visqueux en proche paroi et mise en place d'un modèle de tension de surface valable pour des simulations monophasiques). Pour ces différents thèmes, des gains ont pu être proposés et validés sur un grand nombre de cas tests, montrant le potentiel d'amélioration de la méthode SPH.

Le chapitre 3 a permis l'étude théorique des propriétés que doit respecter a priori une loi de shifting : préservation d'une répartition uniforme des particules ; convergence de la loi de shifting et consistance avec un formalisme Lagrangien ; invariance Galiléenne ; caractère local de la loi de shifting pour ne pas surestimer et/ou sous-estimer le shifting selon les différentes zones de l'écoulement. Une nouvelle loi de shifting vérifiant l'ensemble de ces propriétés (contrairement aux lois de shifting classiquement utilisées en SPH) a été proposée et validée. La question de la forme d'une loi de shifting en proche frontière (et en particulier de son utilisation dans les différents schémas) reste à explorer dans de futurs travaux.

Au chapitre 4, un nouvel opérateur visqueux valable en proche paroi a été proposé en s'appuyant sur l'opérateur Laplacien de Monaghan et Gingold. Des résultats théoriques de consistance, ainsi que des résultats numériques ont permis de valider cet opérateur. Bien qu'a priori non-consistant proche d'une paroi (ce point devra faire l'objet de futures recherches), il présente l'avantage de mieux capter les phénomènes localisés à la surface libre, par rapport à l'opérateur de Morris et al.. Ainsi, il est montré dans ce chapitre que le choix de l'opérateur visqueux dépend fortement du cas test considéré et des différentes grandeurs d'intérêts.

Une nouvelle méthode de montée en ordre WENO-MLS pour les schémas de type Riemann-SPH a été proposée au chapitre 5. Basée sur une reconstruction WENO des états gauche et droit des problèmes de Riemann, elle nécessite l'utilisation de reconstructions MLS afin de compléter les différents stencils WENO. Des résultats théoriques en dimension 1 ont été obtenus, et validés numériquement, montrant qu'il est théoriquement possible d'atteindre des ordres de convergence élevés pour les schémas Riemann-SPH (bien que ces ordres élevés ne soient atteints que pour des ratios $\frac{R}{\Delta x}$ élevés). Une extension de cette méthode proche d'une frontière (paroi solide et/ou surface libre) a également été proposée. Bien que présentant des améliorations pour certains cas, de nombreuses améliorations sont cependant possibles pour cette stratégie de reconstruction en proche frontières.

Le chapitre 6 propose la mise en place d'un modèle C-CSF précis et robuste de tension de surface pour des simulations SPH monophasiques. On a notamment montré qu'une attention particulière devait être portée à la précision des différents opérateurs SPH. Ce modèle a été validé sur une grande variété de cas tests, y compris des cas tests avec parois solides et

présentant une large gamme d'angles de contact (statiques). Des développements futurs devront être réalisés pour réduire certaines imprécisions proche des lignes de contact ainsi que pour imposer un angle de contact dynamique au sein du modèle.

Enfin, le chapitre 7 a permis la mise en place d'un modèle numérique pour la simulation d'amerrissage d'urgence d'hélicoptères. Ce modèle a été validé à l'aide de comparaisons avec des essais expérimentaux, montrant la capacité de la méthode SPH à traiter ce type d'impact complexe avec une bonne précision. Il a notamment été montré une forte sensibilité aux conditions initiales. Cette sensibilité devra faire l'objet d'une étude plus poussée lors de futures études.

Bibliographie

[1] S. Adami, X.Y. Hu, and N.A. Adams. A new surface-tension formulation for multiphase SPH using a reproducing divergence approximation. *Journal of Computational Physics*, 229 :5011–5021, 2010.

[2] N. Akinci, G. Akinci, and M. Teschner. Versatile surface tension and adhesion for SPH Fluids. *ACM Transactions on Graphics*, 32, 2013.

[3] A. Amicarelli, J-C. Marongiu, F. Leboeuf, J. Leduc, and J. Caro. SPH truncation error in estimating a 3D function. *Computers and Fluids*, 44 :279–296, 2011.

[4] M. Antuono, B. Bouscasse, A. Colagrossi, and S. Marrone. A measure of spatial disorder in particle methods. *Computer Physics Communications*, 185 :2609–2621, 2014.

[5] M. Antuono, A. Colagrossi, and S. Marrone. Numerical diffusive terms in weakly-compressible SPH schemes. *Computer Physics Communications*, 183(12) :2570–2580, 2012.

[6] M. Antuono, A. Colagrossi, S. Marrone, and C. Lugni. Propagation of gravity waves through an SPH scheme with numerical diffusive terms. *Computer Physics Communications*, 182(4) :866–877, 2011.

[7] M. Antuono, A. Colagrossi, S. Marrone, and D. Molteni. Free-surface flows solved by means of SPH schemes with numerical diffusive terms. *Computer Physics Communications*, 181(3) :532–549, 2010.

[8] M. Antuono, A. Di Mascio, S. Marrone, D.D. Meringolo, and A. Colagrossi. Headway in large-eddy-simulation within the SPH models. In *VI International Conference on Particle-Based Methods : fundamentals and applications (PARTICLES 2019)*, 2019.

[9] D. Avesani, M. Dumbser, and A. Bellin. A new class of Moving-Least-Squares WENO-SPH schemes. *Journal of Computational Physics*, 270 :278–299, 2014.

[10] D.A. Barcarolo. *Improvement of the precision and the efficiency of the SPH method : theoretical and numerical study.* PhD thesis, École Centrale de Nantes, October 2013.

[11] D.A. Barcarolo, D. Le Touzé, G. Oger, and F. de Vuyst. Adaptive particle refinement and derefinement applied to the smoothed particle hydrodynamics method. *Journal of Computational Physics*, 273 :640–657, 2014.

[12] D.A. Barcarolo, D. Le Touzé, G. Oger, and F. De Vuyst. Voronoi-SPH : on the analysis of a hybrid Finite Volumes - Smoothed Particle Hydrodynamics method. In *Proceedings of the* 9th *International SPHERIC Workshop*, 2014.

[13] M. Basa, N.J. Quinlan, and M. Lastiwka. Robustness and accuracy of SPH formulations for viscous flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 60(10) :1127–1148, 2009.

[14] T. Belytschko, Y. Kongrauz, J. Dolbow, and C. Gerlach. On the completeness of meshfree particle methods. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 43 :785–819, 1998.

[15] W. Benz and E. Asphaug. Impact simulations with fracture. i. method and tests. *Icarus*, 107(1) :98–116, 1994.

[16] J. Bonet and T.S.L. Lok. Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamics formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 180 :97–115, 1999.

[17] J. Bonet Avalos, A. Colagrossi, M. Antuono, and A. Souto-Iglesias. Formulation for an angular momentum conservative SPH bulk viscosity term. In *Proceedings of the 2020 SPHERIC Harbin International Workshop*, 2020.

[18] O. Botella and R. Peyret. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. *Computers and Fluids*, 27 :421–433, 1998.

[19] B. Bouscasse, J. Ohana, M.A.U.A. Abu Zarim, A. Merrien, S. Haquin, L. Davoust, S. Halbout, and D. Le Touzé. D5.2 : Report on the test data on helicopter ditching. In *Delivrable of the H2020 SARAH project*, 2019.

[20] J.U. Brackbill, D.B. Kothe, and C. Zemach. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*, 100 :335–354, 1992.

[21] T. Breinlinger, P. Polfer, A. Hashibon, and T. Kraft. Surface tension and wetting effects with smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 243 :14–27, 2013.

[22] G. Capdeville. Modélisation numérique d'écoulements compressibles, partie I et II. Cours de l'École Centrale de Nantes, 2006.

[23] G. Capdeville. A central WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws on non-uniform meshes. *Journal of Computational Physics*, 227(5) :2977–3014, 2008.

[24] B.K. Cartwright, A. Chhor, and P. Groenenboom. Numerical simulation of a helicopter ditching with emergency flotation devices. In *Proceedings of the* 5th *International SPHERIC Workshop*, 2010.

[25] A.K. Chaniotis, D. Poulikakos, and P. Koumoutsakos. Remeshed smoothed particle hydrodynamics for the simulation of viscous and heat conducting flows. *Journal of Computational Physics*, 182 :67–90, 2002.

[26] G. Chanteperdix. *Modélisation et simulation numérique d'écoulements diphasiques à interface libre. Application à l'étude des mouvements de liquides dans les réservoirs de véhicules spatiaux.* PhD thesis, École Nationale Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, 2004.

[27] H. Cheng, F.R. Ming, P.N. Sun, P.P. Wang, and A.M. Zhang. Towards the modeling of the ditching of a ground-effect wing ship within the framework of the SPH method. *Applied Ocean Research*, 82 :370–384, 2019.

[28] L. Chiron. *Couplage et améliorations de la méthode SPH pour traiter des écoulements à multi-échelles temporelles et spatiales.* PhD thesis, École Centrale de Nantes, May 2017.

[29] L. Chiron, M. de Leffe, G. Oger, and D. Le Touzé. Fast and accurate SPH modelling of 3D complex wall boundaries in viscous and non viscous flows. *Computer Physics Communications*, 234 :93–111, 2019.

[30] L. Chiron, G. Oger, M. de Leffe, and D. Le Touzé. Analysis and improvements of Adaptive Particle Refinement (APR) through CPU time, accuracy and robustness considerations. *Journal of Computational Physics*, 354 :552–575, 2018.

[31] P.W. Cleary. Modelling confined multi-material heat and mass flows using SPH. *Applied Mathematical Modelling*, 22(12) :981–993, 1998.

[32] A. Colagrossi, M. Antuono, S. Marrone, P.N. Sun, and A.M. Zhang. Notes on the SPH model within the Arbitrary-Lagragian-Eulerian framework. In *Proceedings of the* 13th *International SPHERIC Workshop*, 2018.

[33] A. Colagrossi, M. Antuono, A. Souto-Iglesias, and D. Le Touzé. Theoretical analysis and numerical verification of the consistency of viscous smoothed-particle-hydrodynamics formulations in simulating free-surface flows. *Physical Review E*, 84 :26705, 2011.

[34] A. Colagrossi, M. Antuono, and D. Le Touzé. Theoretical considerations on the free-surface role in the Smoothed-particle-hydrodynamics model. *Physical Review E*, 79(5), 2009.

[35] A. Colagrossi, G. Colicchio, and D. Le Touzé. Enforcing boundary conditions in SPH applications involving bodies with right angles. In *proceedings of the* 2nd *SPHERIC Workshop*, 2007.

[36] A. Colagrossi, D. Durante, J. Bonet Avalos, and A. Souto-Iglesias. Discussion of Stokes' hypothesis through the smoothed particle hydrodynamics model. *Physical Review E*, 96(2) :023101, 2017.

[37] A. Colagrossi and M. Landrini. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 191 :448–475, 2003.

[38] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100 :32–74, 1928.

[39] S.J. Cummins and M. Rudman. An SPH projection method. *Journal of Computational Physics*, 152(2) :584–607, July 1999.

[40] M. De Leffe. *Modelisation d'écoulements visqueux par methode SPH en vue d'application à l'hydrodynamique navale*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2011.

[41] M. De Leffe, D. Le Touzé, and B. Alessandrini. Normal flux method at the boundary for SPH. In *Proceedings of the* 4th *International SPHERIC Workshop*, 2009.

[42] W. Dehnen and H. Aly. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 425(2) :1068–1082, 2012.

[43] A. Di Mascio, M. Antuono, A. Colagrossi, and S. Marrone. Smoothed particle hydrodynamics method from a large eddy simulation perspective. *Physics of Fluids*, 29(3) :035102, 2017.

[44] A. Di Monaco, S. Manenti, M. Gallati, S. Sibilla, G. Agate, and R. Guandalini. Sph modeling of solid boundaries through a semi-analytic approach. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 5(1) :1–15, 2011.

[45] G.A. Dilts. Moving-least-squares-particle hydrodynamics - I. Consistency and stability. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(8) :1115–1155, 1999.

[46] G.A. Dilts. Moving-least-squares-particle hydrodynamics - II. Conservation and boundaries. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48 :1503–1524, 2000.

[47] M. Doring. *Développement d'une méthode SPH pour les applications à surface libre en hydrodynamique*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, 2005.

[48] J. Feldman and J. Bonet. Dynamic refinement and boundary contact forces in SPH with applications in fluid flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(3) :295–324, 2007.

[49] M. Ferrand, A. Joly, C. Kassiotis, D. Violeau, A. Leroy, F. Morel, and B.D. Rogers. Unsteady open boundaries for SPH using semi-analytical conditions and Riemann solver in 2D. *Computer Physics Communications*, 210 :29–44, 2017.

[50] M. Ferrand, D.R. Laurence, B.D. Rogers, D. Violeau, and C. Kassiotis. Unified semi-analytical wall boundary conditions for inviscid, laminar or turbulent flows in the meshless SPH method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71(4) :446–472, 2013.

[51] T. Franz and H. Wendland. Convergence of the smoothed particle hydrodynamics method for a specific barotropic fluid flow : constructive kernel theory. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 50(5) :4752–4784, 2018.

[52] U. Ghia, K.N. Ghia, and C.T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48 :387–411, 1982.

[53] J.M. Ghidaglia, A. Kumbaro, and G. Le Coq. Une méthode volumes finis à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 322 :981–988, 1996.

[54] J.M. Ghidaglia and F. Pascal. The normal flux method at the boundary for multidimensional finite volume approximations in CFD. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 24(1) :1–17, 2005.

[55] R.A. Gingold and J.J. Monaghan. Smoothed Particle Hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181 :375–389, 1977.

[56] S.K. Godunov. A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations. *Math Sbornik*, 47 :271–306, 1959.

[57] N. Grenier. *Modélisation numérique par la méthode SPH de la séparation eau-huile dans les séparateurs gravitaires*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, 2009.

[58] P. Groenenboom and B.K. Cartwright. Sph simulations of free surface waves and the interaction with objects. *Proceedings of ECCOMAS CFD 2010, the European Community of Computational Methods in Applied Sciences*, 2010.

[59] P. Groenenboom and M. Siemann. Fluid-structure interaction by the mixed SPH-FE method with application to aircraft ditching. *The International Journal of Multiphysics*, 9(3), 2016.

[60] P-M. Guilcher. *Contribution au développement d'une méthode SPH pour la simulation numérique des interactions houle-structure*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, 2008.

[61] A. Haji-Sheikh, R. Lakshimanarayanan, D.Y.S. Lou, and P.J. Ryan. Confined flow in a partially-filled rotating horizontal cylinder. *Transactions of the ASME*, 106 :270–278, 1984.

[62] S. Halbout, A. Vagnot, and J. Markmiller. Modelling of water impact during ditching event. In *Environmental Science*, 2016.

[63] I. Hammani. *Improvement of the SPH method for multiphase flows and application to the emergency water landing of aircrafts.* PhD thesis, École Centrale de Nantes, Janvier 2020.

[64] J.C. Hardin, J.R. Ristorcelli, and C.K.W. Tam. Benchmark Problems and Solutions. In *ICASE/LaRC Workshop on Benchmark Problems in Computational Aeroacoustics (CAA)*, 1995.

[65] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of computational physics*, 135(2) :260–278, 1997.

[66] L. Hernquist and N. Katz. TreeSPH : A Unification of SPH with the Hierarchical Tree Method. *Astrophysical Journal Supplement*, 70 :419–446, 1989.

[67] M. Hirschler, G. Oger, U. Nieken, and D. Le Touzé. Modeling of droplet collisions using Smoothed Particle Hydrodynamics. *International Journal of Multiphase Flow*, 995 :175–187, 2017.

[68] X.Y. Hu and N.A. Adams. A multi-phase SPH method for macroscopic and mesoscopic flows. *Journal of Computational Physics*, 213 (2) :844–861, 2006.

[69] M. Huber, F. Keller, W. Säckel, M. Hirschler, P. Kunz, S.M. Hassanizadeh, and U. Nieken. On the physically based modeling of surface tension and moving contact lines with dynamic contact angles on the continuum scale. *Journal of Computational Physics*, 310 :459–477, 2016.

[70] S. Hysing. A new implicit surface tension implementation for interfacial flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 51 :659–672, 2006.

[71] A. Iafratia and S. Grizzi. Cavitation and ventilation modalities during ditching. *Physics of Fluids*, 31(052101) :1–14, 2019.

[72] G.-S. Jiang and C.-W. Shu. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes. *Journal of Computational Physics*, 126 :202–228, 1996.

[73] A. Khayyer, H. Gotoh, and Y. Shimizu. Comparative study on accuracy and conservation properties of two particle regularization schemes and proposal of an optimized particle shifting scheme in isph context. *Journal of Computational Physics*, 332 :236–256, 2017.

[74] J. Kordilla, A.M. Tartakovsky, and T. Geyer. A smoothed particle hydrodynamics model for droplet and film flow. *Advances in Water Resources*, 59 :1–14, 2013.

[75] P.K. Koukouvinis, J.S. Anagnostopoulos, and D.E. Papantonis. An improved muscl treatment for the sph-ale method : comparison with the standard sph method for the jet impingement case. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71(9) :1152–1177, 2013.

[76] S. Kulasegaram, J. Bonet, R.W. Lewis, and M. Profit. A variational formulation based contact algorithm for rigid boundaries in two-dimensional SPH applications. *Computational Mechanics*, 33 :316–325, 2004.

[77] H. Lamb. Hydrodynamics, 6th edition. Cambridge University Press, 1975.

[78] P. Lancaster and K. Salkauskas. Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods. *Mathematics of Computation*, 37 :141–158, 1981.

[79] M. Lastiwka, M. Basa, and N.J. Quinlan. Permeable and non-reflecting boundary conditions in SPH. *International journal for numerical methods in fluids*, 61(7) :709–724, 2009.

[80] J. Leduc. *Étude physique et numérique de l'écoulement dans un système d'injection de turbine Pelton*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, September 2010.

[81] A. Leroy, D. Violeau, M. Ferrand, and C. Kassiotis. Unified semi-analytical wall boundary conditions applied to 2-D incompressible SPH. *Journal of Computational Physics*, 261 :106–129, 2014.

[82] L.D. Libersky and A.G. Petschek. Smooth particle hydrodynamics with strength of materials. In *Advances in the free-Lagrange method including contributions on adaptive gridding and the smooth particle hydrodynamics method*, pages 248–257. Springer, 1991.

[83] L.D. Libersky, A.G. Petschek, T.C. Carney, J.R. Hipp, and F.A. Allahdadi. High strain lagrangian hydrodynamics : a three-dimensional SPH code for dynamic material response. *Journal of Computational Physics*, 109 :67–75, 1993.

[84] S.J. Lind, R. Xu, P.K. Stansby, and B.D. Rogers. Incompressible smoothed particle hydrodynamics for free-surface flows : A generalised diffusion-based algorithm for stability and validations for impulsive flows and propagating waves. *Journal of Computational Physics*, 231 :1499–1523, 2012.

[85] W.-K. Liu, S. Li, and T. Belytschko. Moving least-square reproducing kernel methods (i) methodology and convergence. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143(1) :113 – 154, 1997.

[86] X.-D. Liu, S. Osher, and T. Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics*, 115 :200–212, 1994.

[87] V.A. Lubarda and K.A. Talke. Analysis of the equilibrium droplet shape based on an ellipsoidal droplet model. *Langmuir*, 27 :10705–10713, 2011.

[88] L.B. Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, 82 :1013–1024, 1977.

[89] F. Macià, A. Colagrossi, M. Antuono, and A. Souto-Iglesias. Benefits of using a Wendland kernel for free-surface flows. In *Proceedings of the* 6th *International SPHERIC Workshop*, 2011.

[90] J. C. Marongiu, F. Leboeuf, J. Caro, and E. Parkinson. Free surface flows simulations in Pelton turbines using an hybrid SPH-ALE method. *Journal of Hydraulic Research*, 48 :40–49, 2010.

[91] J.C. Marongiu. *Méthode numérique lagrangienne pour la simulation d'écoulements à surface libre - Application aux turbines Pelton*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2007.

[92] J.C. Marongiu, F. Leboeuf, and E. Parkinson. Riemann solvers and efficient boundary treatments : an hybrid SPH-finite volume numerical method. In *Proceedings of the* 3rd *International SPHERIC Workshop*, 2008.

[93] S. Marrone, M. Antuono, A. Colagrossi, G. Colicchio, D. Le Touzé, and G. Graziani. Delta-SPH model for simulating violent impact flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(13-16) :1526–1542, 2011.

[94] S. Marrone, A. Colagrossi, D. Le Touzé, and G. Graziani. Fast free-surface detection and level-set function definition in SPH solvers. *Journal of Computational Physics*, 229(10) :3652–3663, 2010.

[95] S. Mas-Gallic and P.A. Raviart. A particle method for first-order symmetric systems. *Numerische Mathematik*, 51 :323–352, 1987.

[96] J. Michel. *Développements numériques de la méthode SPH couplée aux Eléments Finis appliqués au phénomène de l'hydroplanage*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, Juillet 2020.

[97] J.H. Michell. On the theory of free stream lines. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, (181) :389–431, 1890.

[98] M.H. Moghimi and N.J. Quinlan. A model for surface tension in the meshless finite volume particle method without spurious velocity. *Computers and Fluids*, 179 :521–532, 2019.

[99] J.J. Monaghan. On the problem of penetration in particle methods. *Journal of Computational Physics*, 82 :1–15, 1989.

[100] J.J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and astrophysics*, 30 :543–574, 1992.

[101] J.J. Monaghan. Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, 110 :399–406, 1994.

[102] J.J. Monaghan. SPH without a tensile instability. *Journal of Computational Physics*, 159(2) :290–311, 2000.

[103] J.J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, 68 :1703–1759, 2005.

[104] J.J. Monaghan and R.A. Gingold. Shock simulation by the particle method SPH. *Journal of Computational Physics*, 52 :374–389, 1983.

[105] J.J. Monaghan and Kocharyan. SPH simulation of multi-phase flow. *Computer Physics Communications*, 87(1–2) :225, 1995.

[106] J.P. Morris. Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 33(3) :333–353, 2000.

[107] J.P. Morris, P.J. Fox, and Y. Zhu. Modelling low reynolds number incompressible flows using SPH. *Journal of Computational Physics*, 136 :214–226, 1997.

[108] A. Murrone and H. Guillard. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems. *Journal of Computational Physics*, 202 :664–698, 2005.

[109] A.M.A. Nasar, G. Fourtakas, S.J. Lind, B.D. Rogers, P.K. Stansby, and J.R.C. King. High-order velocity and pressure wall boundary conditions in eulerian incompressible sph. *Journal of Computational Physics*, page 109793, 2020.

[110] R. Nelson and J. Papaloizou. Variable smoothing lengths and energy conservation in smoothed particle hydrodynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 270 :1–20, 1994.

[111] R.M. Nestor, M. Basa, M. Lastiwka, and N.J. Quinlan. Extension of the finite volume particle method to viscous flow. *Journal of Computational Physics*, 228 :1733–1749, 2009.

[112] G. Oger. *Aspects théoriques de la méthode SPH et applications à l'hydrodynamique à surface libre*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, France, 2006.

[113] G. Oger, M. Doring, B. Alessandrini, and P. Ferrant. Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries. *Journal of Computational Physics*, 213 (2) :803–822, 2006.

[114] G. Oger, M. Doring, B. Alessandrini, and P. Ferrant. An improved SPH method : towards higher order convergence. *Journal of Computational Physics*, 225 :1472–1492, 2007.

[115] G. Oger, S. Marrone, D. Le Touzé, and M. de Leffe. SPH accuracy improvement through the combination of a quasi-Lagrangian shifting transport velocity and consistent ALE formalisms. *Journal of Computational Physics*, 313 :76–98, 2016.

[116] G. Oger, D. Le Touzé, P.M. Guilcher, and M. de Leffe. Advances in SPH for Naval Hydrodynamics. In *Proceedings of the 30th Symposium on Naval Hydrodynamics*, 2014.

[117] R. Ortiz, G. Portemont, J.L. Charles, and J.F. Sobry. Assesment of explicit FE capabilities for full scale coupled fluid/structure aircraft ditching simulation. In *ICAS 2002 CONGRESS*, 2002.

[118] S. Osher. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21 :217–235, 1984.

[119] A.N. Parshikov and S.A. Medin. Smoothed Particle Hydrodynamics using interparticle contact algorithms. *Journal of Computational Physics*, 180 :358–382, 2002.

[120] N. Pentecôte and A. Vigliotti. Crashworthiness of helicopters on water : Test and simulation of a full-scale WG30 impacting on water. *International journal of crashworthiness*, 8(6) :559–572, 2003.

[121] S. Popinet. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *Journal of Computational Physics*, 228 :5838–5866, 2009.

[122] A. Prosperetti. Motion of two superposed viscous fluids. *The Physics of Fluids*, 24 :1217–1223, 1981.

[123] J. Qian and C.K. Law. Regimes of coalescence and separation in droplet collision. *Journal of fluid mechanics*, 331 :59–80, 1997.

[124] N.J. Quinlan, M. Basa, and M. Lastiwka. Truncation error in mesh-free particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66 :2064–2085, 2006.

[125] R.W. Randles and L.D. Libersky. Smoothed particle hydrodynamics : Some recent improvements and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 139 :375–408, 1996.

[126] P.A. Raviart. An Analysis of Particule Methods. *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, 1127 :243–324, 1983.

[127] Lord Rayleigh. On the instability of jets. *Proceedings of the London mathematical society*, 10 :4–13, 1878.

[128] Lord Rayleigh. XVI. On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 34(207) :145–154, 1892.

[129] G-A. Renaut. *Schémas d'ordre élevé pour la méthode SPH-ALE appliquée à des simulations sur machines hydrauliques.* PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2015.

[130] G-A. Renaut, J-C. Marongiu, and S. Aubert. Higher order SPH-ALE method and adaptive procedure for hydraulic simulations based on Moving Least Squares method. In *Proceedings of the* 10th *International SPHERIC Workshop*, 2015.

[131] Y. Reyes López, D. Roose, and C. Recarey Morfa. Dynamic particle refinement in SPH : application to free surface flow and non-cohesive soil simulations. *Computational Mechanics*, 51(5) :731–741, 2013.

[132] P.L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of computational physics*, 43(2) :357–372, 1981.

[133] R. Scardovelli and S. Zaleski. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 31 :567–603, 1999.

[134] C. Schick. *Adaptivity for particle methods in fluid dynamics.* PhD thesis, University of Kaiserslautern, Germany, 2000.

[135] J.A. Sethian and P. Smereka. Level set methods for fluid interfaces. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 35 :341–372, 2003.

[136] D. Shepard. A Two-dimensional Interpolation Function for Irregularly-spaced Data. In *Proceedings of the 1968* 23rd *ACM National Conference*, 1968.

[137] S. Sikalo, H.D. Wilhelm, I.V. Roisman, S. Jakirlic, and C. Tropea. A dynamic contact angle of spreading droplets : Experiments and simulations. *Physics of Fluids*, 17 :062103, 2005.

[138] H. Sun and O.M. Faltinsen. Water impact of horizontal circular cylinders and cylindrical shells. *Applied Ocean Research*, 28(5) :299–311, 2006.

[139] P.N. Sun, A. Colagrossi, S. Marrone, M. Antuono, and A.-M. Zhang. A consistent approach to particle shifting in the δ-Plus-SPH model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 348 :912 – 934, 2019.

[140] P.N. Sun, A. Colagrossi, S. Marrone, and A.M. Zhang. The δplus-SPH model : Simple procedures for a further improvement of the SPH scheme. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 315 :25–49, 2017.

[141] P.N. Sun, A.M. Zhang, S. Marrone, and F. Ming. An accurate and efficient SPH modeling of the water entry of circular cylinders. *Applied Ocean Research*, 72 :60–75, 2018.

[142] A. Tartakovsky and P. Meakin. Modeling of surface tension and contact angles with smoothed particle hydrodunamics. *Physical Review E*, 72, 2005.

[143] A.M. Tartakovsky and A. Panchenko. Pairwise Force Smoothed Particle Hydrodynamics model for multiphase flow : Surface tension and contact line dynamics. *Journal of Computational Physics*, 305 :1119–1146, 2016.

[144] G. Taylor. Oblique Impact of a Jet on a Plane Surface. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 260 :96–100, July 1966.

[145] G. Taylor and A.E. Green. Mechanism of the Production of Small Eddies from Large Ones. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 158 :499–521, 1937.

[146] V.A Titarev and E.F Toro. Finite-Volume WENO schemes for three dimensional conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 201 :238–260, 2004.

[147] E.F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction.* Springer Science & Business Media, 2013.

[148] E.F. Toro, M. Spruce, and W. Speares. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock waves*, 4(1) :25–34, 1994.

[149] R. Vacondio, B.D. Rogers, P.K. Stansby, P. Mignosa, and J. Feldman. Variable resolution for SPH : a dynamic particle coalescing and splitting scheme. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013.

[150] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's method. *Journal of Computational Physics*, 32 :101–136, 1979.

[151] R. Vignjevic and M. Meo. Simulation of helicopter under-floor structure impact on water. *International journal of crashworthiness*, 6(3) :425–443, 2001.

[152] J.P. Vila. On particle weighted methods and SPH. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 9 :161–210, 1999.

[153] D. Violeau and T. Fonty. Calculating the smoothing error in SPH. *Computers & Fluids*, 191 :104240, 2019.

[154] D. Violeau and A. Leroy. On the maximum time step in weakly compressible SPH. *Journal of Computational Physics*, 256 :388–415, 2014.

[155] D. Violeau, A. Leroy, and A. Mayrhofer. Exact computation of SPH wall renormalising integrals in 3-D. In *Proceedings of the* 9th *International SPHERIC Workshop*, 2014.

[156] T. Von Karman. The impact on seaplane floats during landing. *National Advisory Committee on Aeronautics*, 1929.

[157] J. Von Neumann and R.D. Ritchtmyer. A new method for the numerical calculation of hydrodynamics shocks. *Journal of Applied Physics*, 21 :232–247, 1950.

[158] H. Wagner. Phenomena associated with impacts and sliding on liquid surfaces. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 12(4) :193–215, 1932.

[159] S.J. Watkins, A.S. Bhattal, N. Francis, J.A. Turner, and A.P. Whitworth. A new prescription for viscosity in Smoothed Particle Hydrodynamics. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 119 :177–187, 1996.

[160] H. Wendland. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Advances in computational Mathematics*, 4(4) :389–396, 1995.

[161] M.A. Woodgate, G.N. Barakos, N. Scrase, and T. Neville. Simulation of helicopter ditching using smoothed particle hydrodynamics. *Aerospace Science and Technology*, 85 :277–292, 2019.

[162] T. Xiao, N. Qin, Z. Lu, X. Sun, M. Tong, and Z. Wang. Development of a smoothed particle hydrodynamics method and its application to aircraft ditching simulations. *Aerospace Science and Technology*, 66 :28–43, 2017.

[163] R. Xu, P.K. Stansby, and D. Laurence. Accuracy and stability in incompressible SPH (ISPH) based on the projection method and a new approach. *Journal of Computational Physics*, 228 :6703–6725, 2009.

[164] M. Yildiz, R. A. Rook, and A. Suleman. SPH with the multiple boundary tangent method. *International journal for numerical methods in engineering*, 77(10) :1416–1438, 2009.

Annexe A

Solution exacte du problème de Riemann

A.1 Caractéristiques et invariants de Riemann

La première étape de la résolution du problème de Riemann (2.84) est d'en déterminer les courbes caractéristiques et les invariants de Riemann associés. Ces invariants seront particulièrement utiles pour la suite car ce sont justement des quantités qui restent constantes le long des courbes caractéristiques. Le système (2.84) peut se réécrire simplement de la manière suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}(x,t) + \mathbb{A}\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x}(x,t) = \mathbf{0}, \tag{A.1}$$

avec :

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & u \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

où $\boldsymbol{\psi}$ désigne le vecteur des variables convectives et $\frac{\partial P}{\partial x} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$. Cette matrice $\mathbb{A}$ est diagonalisable :

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}\mathbb{A}\mathbb{R}^{-1} \Leftrightarrow \mathbb{D}\mathbb{R} = \mathbb{R}\mathbb{A}, \tag{A.3}$$

avec :

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} u-c & 0 \\ 0 & u+c \end{pmatrix}, \tag{A.4}$$

$$\mathbb{R} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{c}{\rho} & 1 \\ \frac{c}{\rho} & 1 \end{pmatrix}, \tag{A.5}$$

$$\mathbb{R}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{c} & \frac{\rho}{c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A.6}$$

En multipliant (à gauche) l'équation (A.1) par la matrice $\mathbb{R}$, on obtient un système d'équations indépendantes :

$$\mathbb{R}\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} + \mathbb{D}\mathbb{R}\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \mathbb{D}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x} = \mathbf{0}, \tag{A.7}$$

avec $\partial \boldsymbol{w}$ le vecteur accroissement des variables caractéristiques donné par :

$$\partial \boldsymbol{w} = \mathbb{R}\partial \boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -c\frac{\partial \rho}{\rho} + \partial u \\ c\frac{\partial \rho}{\rho} + \partial u \end{pmatrix}. \tag{A.8}$$

Le système d'équation (A.7) se réduit donc à deux équations de convection :

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} + (u-c)\frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + (u+c)\frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \end{cases}, \tag{A.9}$$

qui s'intègre facilement en : $w_1(x,t) = w_1(x-(u-c)t, 0)$ et $w_2(x,t) = w_2(x-(u+c)t, 0)$. Les courbes caractéristiques (dans le plan (x,t)) sont alors données par de simple droites d'équations $\frac{x}{t} = u - c$ et $\frac{x}{t} = u + c$. Les invariants de Riemann associés à ces courbes caractéristiques sont alors obtenus en intégrant l'expression (A.8), et dépendent de la loi d'état considérée. Pour la loi d'état (1.10), ces invariants de Riemann sont donnés par $u - \frac{2c}{\gamma-1}$ et $u + \frac{2c}{\gamma-1}$.

A.2 Algorithme pour la solution du problème de Riemann

Physiquement le problème de Riemann (2.84) peut s'interpréter comme l'expérience d'un tube à choc dans lequel des ondes de chocs et de détentes vont se propager à partir de

l'instant initial. La résolution du problème de Riemann dans le cas des équations d'Euler consiste donc à déterminer les états formés par ces différentes ondes. La position de ces ondes est alors donnée par les caractéristiques déterminées précédemment et elles délimitent le plan (x, t) en trois zones distinctes (cf. Figure A.1). La première étape de la résolution consiste à déterminer l'état central, noté $\boldsymbol{\phi}_*$. On présente ici le cas de la résolution pour l'équation d'état (1.10) bien que la démarche développée ici reste valable pour un autre choix de loi d'état. On se référera à [147] pour plus de détails.

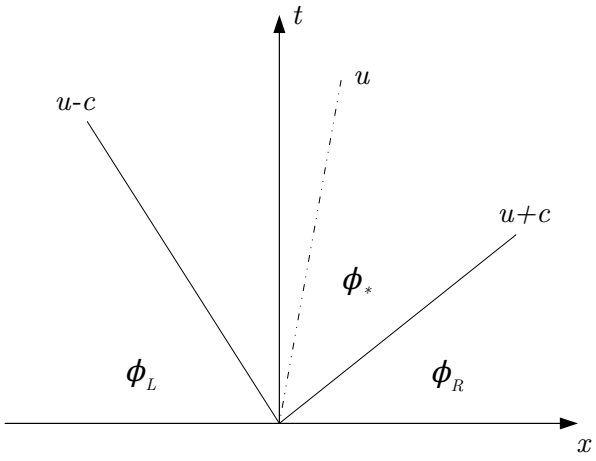

FIGURE A.1 – Représentation des caractéristiques dans le plan (x, t), donnant la structure générale de la solution du problème de Riemann (2.84).

A.2.1 Onde associée à la valeur propre $u - c$

On cherche ici à déterminer une relation entre l'état $\boldsymbol{\phi}_*$ et l'état $\boldsymbol{\phi}_L$ au niveau de la caractéristique donnée par la valeur propre $u - c$. Dans le cas où cette onde est une onde de détente (i.e. si $\rho_* \leq \rho_L$) on peut utiliser les invariants de Riemann déterminés précédemment. Comme montré dans [147], l'invariant de Riemann $u + \frac{2c}{\gamma-1}$ est constant au passage de la caractéristique $u - c$. On en déduit la relation suivante :

$$u_* + \frac{2c_*}{\gamma - 1} = u_L + \frac{2c_L}{\gamma - 1} \Leftrightarrow u_* = u_L - \frac{2}{\gamma - 1}\left[c_0 \left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - c_L\right]. \tag{A.10}$$

Dans le cas d'une onde de choc (i.e. si $\rho_* > \rho_L$), ce sont les relations de Rankine-Hugoniot qui s'appliquent :

$$\begin{cases} \rho_L (u_L - \sigma) = \rho_* (u_* - \sigma) \\ \rho_L (u_L - \sigma)^2 + \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}\left(\frac{\rho_L}{\rho_0}\right)^\gamma = \rho_* (u_* - \sigma)^2 + \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}\left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^\gamma \end{cases}, \tag{A.11}$$

où σ est la vitesse (a priori inconnue) du choc. En éliminant la vitesse du choc σ on obtient la relation suivante :

$$u_* = u_L - \left[\frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}\frac{\rho_* - \rho_L}{\rho_* \rho_L}\left(\left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^\gamma - \left(\frac{\rho_L}{\rho_0}\right)^\gamma\right)\right]^{1/2}. \tag{A.12}$$

Ainsi la relation qui nous intéresse pour l'onde de valeur propre $u - c$ peut se mettre sous la forme :

$$u_* = u_L - f_L\left(\rho_*, \boldsymbol{\phi}_L\right) \tag{A.13}$$

avec :

$$f_L\left(\rho_*, \boldsymbol{\phi}_L\right) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma-1}\left[c_0\left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - c_L\right] & \text{si } \rho_* \leq \rho_L \\ \left[\frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}\frac{\rho_* - \rho_L}{\rho_* \rho_L}\left(\left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^\gamma - \left(\frac{\rho_L}{\rho_0}\right)^\gamma\right)\right]^{1/2} & \text{si } \rho_* > \rho_L \end{cases}. \tag{A.14}$$

A.2.2 Onde associée à la valeur propre $u + c$

Le raisonnement ici est le même que celui développé à la section A.2.1 et n'est donc pas détaillé. Finalement la relation entre l'état $\boldsymbol{\phi}_*$ et l'état $\boldsymbol{\phi}_R$ au niveau de la caractéristique donnée par la valeur propre $u + c$ est donnée par :

$$u_* = u_R + f_R\left(\rho_*, \boldsymbol{\phi}_R\right) \tag{A.15}$$

avec :

$$f_R\left(\rho_*, \boldsymbol{\phi}_R\right) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma-1}\left[c_0\left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - c_R\right] & \text{si } \rho_* \leq \rho_R \\ \left[\frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}\frac{\rho_* - \rho_R}{\rho_* \rho_R}\left(\left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^\gamma - \left(\frac{\rho_R}{\rho_0}\right)^\gamma\right)\right]^{1/2} & \text{si } \rho_* > \rho_R \end{cases}. \tag{A.16}$$

A.2.3 Solution complète

Les relations (A.14) et (A.16) permettent alors de définir une équation non-linéaire ayant pour seule inconnue ρ_* :

$$u_L - f_L\left(\rho_*, \boldsymbol{\phi}_L\right) = u_R + f_R\left(\rho_*, \boldsymbol{\phi}_R\right), \tag{A.17}$$

et pouvant être résolue de manière itérative, à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson par exemple. En réalité si les ondes sont des ondes de détentes, elles ne sont pas localisées uniquement au niveau des courbes caractéristiques mais sur toutes une zone du plan (x, t). Si l'onde à gauche est une détente elle est limitée par les droites $\frac{x}{t} = u_L - c_L$ et $\frac{x}{t} = u_* - c_*$. Si l'onde à droite est une détente elle est limitée par les droites $\frac{x}{t} = u_* + c_*$ et $\frac{x}{t} = u_R + c_R$. La Figure A.2 illustre l'étendue de ces zones en présence d'ondes de détentes. Ces zones deviennent inexistantes dans le cas où l'on est en présence d'ondes de choc.

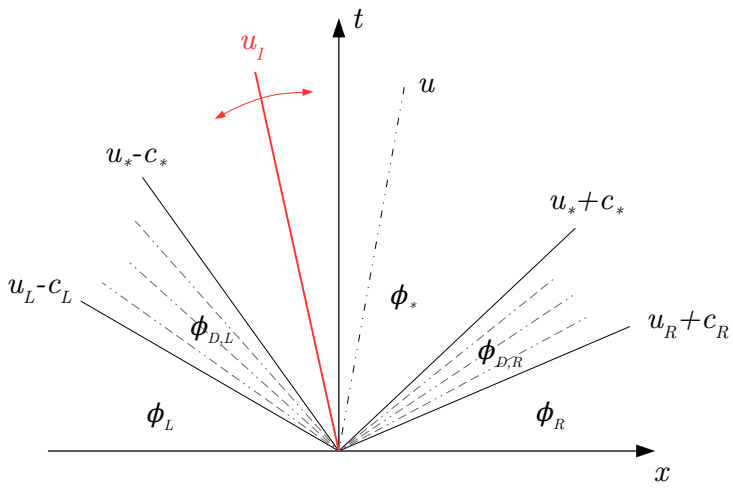

FIGURE A.2 – Modification de la structure de la solution du problème de Riemann en prenant en compte les zones de détente $\phi_{D,L}$ et $\phi_{D,R}$ (suivant les cas ces zones de détente peuvent éventuellement être nulles) ; la vitesse de l'interface u_I permet alors de déterminer la solution recherchée ϕ_E.

La solution au problème de Riemann dans ces zones de détente se détermine alors le long du rai $\frac{x}{t} = u_{D,L} - c_{D,L}$, pour la zone de détente à gauche. La vitesse et la masse volumique sont alors déterminées respectivement par :

$$u_{D,L} = \frac{2}{\gamma+1}\left(c_L + \frac{\gamma-1}{2}u_L + \frac{x}{t}\right), \tag{A.18}$$

$$\rho_{D,L} = \rho_0\left(\frac{c_{D,L}}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} = \rho_0\left(\frac{u_{D,L} - \frac{x}{t}}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \tag{A.19}$$

permettant de retrouver la bonne vitesse au niveau des droites délimitant la zone de détente à gauche (i.e. pour $\frac{x}{t} = u_L - c_L$ et $\frac{x}{t} = u_* - c_*$). De même, pour la zone de détente à droite la solution se détermine le long du rai $\frac{x}{t} = u_{D,R} + c_{D,R}$. La vitesse et la masse volumique sont alors déterminées respectivement par :

$$u_{D,R} = \frac{2}{\gamma+1}\left(-c_R + \frac{\gamma-1}{2}u_R + \frac{x}{t}\right), \tag{A.20}$$

$$\rho_{D,R} = \rho_0\left(\frac{c_{D,R}}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} = \rho_0\left(\frac{\frac{x}{t} - u_{D,R}}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \tag{A.21}$$

permettant de retrouver la bonne vitesse au niveau des droites délimitant la zone de détente à droite (i.e. pour $\frac{x}{t} = u_* + c_*$ et $\frac{x}{t} = u_R + c_R$).

Les calculs présentés ci-dessus permettent donc de déterminer l'ensemble de la solution du problème de Riemann (2.84). On peut notamment remarquer que cette solution est autosimilaire en $\frac{x}{t}$, ce qui permet de s'affranchir du paramètre temporel lors de la résolution. D'un point de vue numérique, seule la solution à l'interface $\boldsymbol{\phi}_E$ nous intéresse. Pour cela il suffit de connaître la vitesse de l'interface u_I et de déterminer dans quelle zone se situe la droite $\frac{x}{t} = u_I$. Cette droite donne alors la valeur de la solution recherchée $\boldsymbol{\phi}_E$ (cf. Figure A.2). On notera que dans le cas d'un régime subsonique et/ou faiblement compressible, les caractéristiques $u - c$ et $u + c$ sont généralement éloignées de la vitesse moyenne u de l'écoulement (cela se traduit par un "éventail" très ouvert sur la Figure A.1). Dans ce cas l'état $\boldsymbol{\phi}_*$ est donc quasiment toujours l'état recherché. C'est pour cela qu'il est parfois utile d'utiliser des solveurs approchés afin de ne pas déterminer la solution complète du problème de Riemann.

Annexe B

Calcul de la pression à la paroi par la méthode des flux normaux (NFM)

On présente ici les calculs permettant d'obtenir la pression à la paroi dans le cadre de la méthode NFM, initialement proposée par Ghidaglia et al. [53] [54]. L'idée est de repartir des équations d'Euler écrites sous forme conservative :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t} + \boldsymbol{div}\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}, \tag{B.1}$$

où le vecteur des variables conservatives $\boldsymbol{\phi}$ et le tenseur des flux $\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi})$ peuvent se réécrire (ici on utilisera l'écriture matricielle "par bloc") :

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \boldsymbol{u} \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{F}(\boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} \rho^t \boldsymbol{u} \\ \rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} + P\mathbb{I} \end{pmatrix}. \tag{B.2}$$

Le tenseur des flux projeté dans une direction quelconque $\boldsymbol{e}$ s'exprime alors par :

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} \rho\,(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{e}) \\ \rho\,(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{u} + P\boldsymbol{e} \end{pmatrix}. \tag{B.3}$$

La Jacobienne $\mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{e})$ du flux dans une direction quelconque $\boldsymbol{e}$ s'exprime alors par :

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{e}) = \frac{\partial\,(\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{e})}{\partial \boldsymbol{\phi}} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{e} \\ c^2\boldsymbol{e} - (\boldsymbol{u}.\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{e} + (\boldsymbol{u}.\boldsymbol{e})\,\mathbb{I} \end{pmatrix}, \tag{B.4}$$

où la présence de la vitesse du son c découle de la relation (1.11). La méthode NFM consiste alors à décomposer les flux entre la partie normale et la partie tangentielle à la paroi. Pour cela on se place dans la base $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n})$ (ici on a une base en dimension 2 mais on peut ajouter un deuxième vecteur tangent afin d'avoir une base en dimension 3). L'équation (B.1) s'écrit alors :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial t} + \mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\tau})\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \tau} + \mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n})\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial n} = \mathbf{0}. \tag{B.5}$$

En multipliant l'équation (B.5) par la Jacobienne $\mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n}) = \dfrac{\partial\left(\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{n}\right)}{\partial \boldsymbol{\phi}}$ et en négligeant les termes tangentiels on obtient :

$$\frac{\partial\left(\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{n}\right)}{\partial t} + \mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n})\frac{\partial\left(\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{n}\right)}{\partial n} = \mathbf{0}. \tag{B.6}$$

Or la matrice $\mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n})$ est diagonalisable :

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n}) = {}^t\mathbb{L}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n})\mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n})\mathbb{R}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n}), \tag{B.7}$$

avec :

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n} - c & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n} + c \end{pmatrix}, \tag{B.8}$$

$$\mathbb{L}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n}) = \frac{1}{2c}\begin{pmatrix} c + \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n} & -2c\left(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{\tau}\right) & c - \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n} \\ -\boldsymbol{n} & 2c\boldsymbol{\tau} & \boldsymbol{n} \end{pmatrix}, \tag{B.9}$$

$$\mathbb{R}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \boldsymbol{u} - c\boldsymbol{n} & \boldsymbol{\tau} & \boldsymbol{u} + c\boldsymbol{n} \end{pmatrix}, \tag{B.10}$$

vérifiant ${}^t\mathbb{L}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n})\mathbb{R}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n}) = \mathbb{R}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n}){}^t\mathbb{L}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n}) = \mathbb{I}$ et $\mathbb{D}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n}){}^t\mathbb{L}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n}) = {}^t\mathbb{L}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n})\mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n})$. En multipliant (à gauche) l'équation (B.6) par la matrice ${}^t\mathbb{L}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n})$ on peut alors écrire un système de $\eta + 1$ équations indépendantes ($k \in [\![\eta + 1]\!]$) :

$$\boldsymbol{l}_k(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n}).\frac{\partial\left(\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{n}\right)}{\partial t} + \lambda_k(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n})\boldsymbol{l}_k(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n}).\frac{\partial\left(\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{n}\right)}{\partial n} = \mathbf{0}, \tag{B.11}$$

où les $\lambda_k(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n})$ sont les valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n})$ et les $\boldsymbol{l}_k(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n})$ sont les vecteurs colonne de la matrice $\mathbb{L}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n})$. Or, d'après Ghidaglia et al. [53], seule l'équation associée à la valeur propre positive $\lambda_3(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n} + c$ apporte de l'information. En particulier Ghidaglia et al. [53] proposent d'approximer le flux dans la direction normale à la paroi par :

$$\boldsymbol{l}_3(\boldsymbol{\phi}_f, \boldsymbol{n}).\left(\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi}_s)\boldsymbol{n}\right) \simeq \boldsymbol{l}_3(\boldsymbol{\phi}_f, \boldsymbol{n}).\left(\mathbb{F}(\boldsymbol{\phi}_f)\boldsymbol{n}\right), \tag{B.12}$$

où l'indice f désigne une grandeur évaluée dans le fluide et l'indice s une grandeur évaluée à la paroi. L'utilisation de la condition limite de glissement (1.19) permet alors de déterminer l'expression de la pression à la paroi :

$$P_s = P_f + \rho_f c_f \left(\boldsymbol{u}_f - \boldsymbol{u}_s\right).\boldsymbol{n}. \tag{B.13}$$

Cette expression a été obtenue pour les équations d'Euler et une condition de glissement. Dans le cas des équations de Navier-Stokes et d'une condition d'adhérence l'expression (B.13) reste inchangée. En effet cette expression ne concerne que la partie hyperbolique du système. La partie elliptique (et donc la modélisation de la viscosité) n'est donc pas influencée.

Annexe C

Détails des calculs de consistance des différents opérateurs Laplacien

On donne dans cette annexe les détails des calculs permettant d'aboutir aux résultats de consistance présentés au chapitre 4. On donne sur la Figure C.1 le paramétrage utilisé. En particulier on pourra utiliser, pour certains calculs, un système de coordonnées cylindriques : $\boldsymbol{y} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y = r\boldsymbol{e}_r$ (avec $x = rcos\theta$ et $y = rsin\theta$). Dans toute la suite du rapport on notera indicé par $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$ des vecteurs et/ou des matrices exprimés dans le repère cylindrique (l'absence d'indice signifie que les vecteurs et/ou les matrices sont exprimés dans le repère cartésien classique). Pour les cas des calculs à la surface libre et à la paroi, la normale sera prise égale à $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_y$.

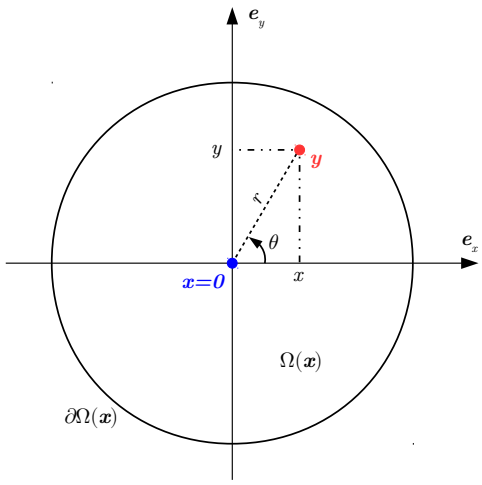

FIGURE C.1 – Paramétrage utilisé pour les calculs de consistance des différents opérateurs Laplacien.

C.1 Consistance des opérateurs dans le fluide

C.1.1 Consistance d'ordre 1

C.1.1.1 Laplacien de Morris et al.

On peut tout d'abord noter que l'expression (4.5) peut également (et de manière totalement équivalente) se mettre sous la forme :

$$\langle \boldsymbol{\Delta f} \rangle^{MEA} (\boldsymbol{x}) = 2 \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2} \left[(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})) \otimes (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \right] \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV. \tag{C.1}$$

On commence alors par calculer le terme sous l'intégrale :

$$\frac{1}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2} \left[(\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{y})) \otimes (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \right] = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} ax^2+bxy & axy+by^2 \\ cx^2+dxy & cxy+dy^2 \end{pmatrix}. \tag{C.2}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MEA} (\boldsymbol{x}) &= 2 \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} ax^2+bxy & axy+by^2 \\ cx^2+dxy & cxy+dy^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\ &= 2 \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{div} \left(\frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} ax^2+bxy & axy+by^2 \\ cx^2+dxy & cxy+dy^2 \end{pmatrix} \right) W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\ &= 2 \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV = \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{C.3}$$

Cette dernière intégrale est nulle par symétrie du noyau et parce qu'ici le support du noyau est complet.

C.1.1.2 Laplacien de Monaghan et Gingold

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MG}(\boldsymbol{x}) &= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{x^2+y^2}\left(ax^2+(b+c)xy+dy^2\right)\boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV \\
&= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \left(acos^2\theta+(b+c)cos\theta sin\theta+dsin^2\theta\right)\boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV \\
&= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{grad}\left(acos^2\theta+(b+c)cos\theta sin\theta+dsin^2\theta\right) W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV \\
&= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{r}\left(2(d-a)sin\theta cos\theta-(b+c)sin^2\theta+(b+c)cos^2\theta\right)\boldsymbol{e}_\theta W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV \\
&= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{r}\left(2(d-a)sin\theta cos\theta-(b+c)sin^2\theta+(b+c)cos^2\theta\right)\begin{pmatrix}-sin\theta\\ cos\theta\end{pmatrix} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,dV. \\
&= \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

On peut vérifier que cette dernière intégrale est bien nulle (car l'intégration se fait pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et que donc toutes les intégrales sont nulles).

C.1.2 Consistance d'ordre 2

C.1.2.1 Laplacien de Morris et al.

On commence par calculer le terme sous l'intégrale dans l'expression (C.1) :

$$
\frac{1}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2}\left[\left(\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{y})\right)\otimes(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right] = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} ax^3+bx^2y+cxy^2 & ax^2y+bxy^2+cy^3 \\ dx^3+ex^2y+fxy^2 & dx^2y+exy^2+fy^3 \end{pmatrix} \tag{C.5}
$$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\Delta f}_2 \rangle^{MEA}(\boldsymbol{x}) &= 2 \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} ax^3+bx^2y+cxy^2 & ax^2y+bxy^2+cy^3 \\ dx^3+ex^2y+fxy^2 & dx^2y+exy^2+fy^3 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&= 2 \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{div} \left(\frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} ax^3+bx^2y+cxy^2 & ax^2y+bxy^2+cy^3 \\ dx^3+ex^2y+fxy^2 & dx^2y+exy^2+fy^3 \end{pmatrix} \right) W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&= 2 \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{2}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} ax^2+bxy+cy^2 \\ dx^2+exy+fy^2 \end{pmatrix} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&= 4 \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \begin{pmatrix} acos^2\theta+bcos\theta sin\theta+csin^2\theta \\ dcos^2\theta+ecos\theta sin\theta+fsin^2\theta \end{pmatrix} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&= 4 \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} acos^2\theta+bcos\theta sin\theta+csin^2\theta \\ dcos^2\theta+ecos\theta sin\theta+fsin^2\theta \end{pmatrix} W(r) r dr d\theta.
\end{aligned}
\tag{C.6}
$$

Or l'intégrale du noyau doit être unitaire : $\int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} W(r) r dr d\theta = 1 \Leftrightarrow \int\limits_{r=0}^{R} W(r) r dr = \frac{1}{2\pi}$.

On a alors :

$$
\langle \boldsymbol{\Delta f}_2 \rangle^{MEA}(\boldsymbol{x}) = 4\pi \int\limits_{r=0}^{R} \begin{pmatrix} a+c \\ d+f \end{pmatrix} W(r) r dr = \begin{pmatrix} 2a+2c \\ 2d+2f \end{pmatrix}. \tag{C.7}
$$

C.1.2.2 Laplacien de Monaghan et Gingold

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\Delta f}_2 \rangle^{MG}(\boldsymbol{x}) &= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{x^2+y^2} \left(ax^3+(b+d)x^2y+(c+e)xy^2+fy^3 \right) \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} r \left(acos^3\theta+(b+d)cos^2\theta sin\theta+(c+e)cos\theta sin^2\theta+fsin^3\theta \right) \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{grad} \left(r \left(acos^3\theta+(b+d)cos^2\theta sin\theta+(c+e)cos\theta sin^2\theta+fsin^3\theta \right) \right) W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{A} W(r)\, r dr d\theta = \frac{C}{2\pi} \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} \boldsymbol{A} d\theta,
\end{aligned}
\tag{C.8}
$$

avec :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} acos^3\theta + (b+d)cos^2\theta sin\theta + (c+e)cos\theta sin^2\theta + fsin^3\theta \\ (2c+2e-3a)cos^2\theta sin\theta + (3f-2b-2d)cos\theta sin^2\theta + (b+d)cos^3\theta + (-c-e)sin^3\theta \end{pmatrix}_{(\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta)} \\ &= \begin{pmatrix} acos^4\theta + (3a-c-e)cos^2\theta sin^2\theta + (2b+2d-2f)cos\theta sin^3\theta + (c+e)sin^4\theta \\ (b+d)cos^4\theta + (2c+2e-2a)cos^3\theta sin\theta + (3f-b-d)cos^2\theta sin^2\theta + fsin^4\theta \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{C.9}$$

On a donc :

$$\langle \boldsymbol{\Delta f}_2 \rangle^{MG}(\boldsymbol{x}) = \frac{C}{2\pi}\begin{pmatrix} \frac{3\pi}{4}a + \frac{\pi}{4}(3a-c-e) + \frac{3\pi}{4}(c+e) \\ \frac{3\pi}{4}(b+d) + \frac{\pi}{4}(3f-b-d) + \frac{3\pi}{4}f \end{pmatrix} = \frac{C}{8}\begin{pmatrix} 6a+2c+2e \\ 2b+2d+6f \end{pmatrix} \tag{C.10}$$

C.2 Consistance des opérateurs à la surface libre

C.2.1 Consistance d'ordre 1

C.2.1.1 Laplacien de Morris et al.

Le calcul effectué dans la partie précédente (i.e. dans le fluide) diffère lorsque l'on applique le théorème de flux-divergence. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MEA}(\boldsymbol{x}) &= 2\int_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} ax^2+bxy & axy+by^2 \\ cx^2+dxy & cxy+dy^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\ &= 2\int_{\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{div}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} ax^2+bxy & axy+by^2 \\ cx^2+dxy & cxy+dy^2 \end{pmatrix}\right) W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\ &- 2\int_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} ax^2+bxy & axy+by^2 \\ cx^2+dxy & cxy+dy^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{n} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dS \\ &= 2\int_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\ &- 2\int_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} axy+by^2 \\ cxy+dy^2 \end{pmatrix} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dS.\end{aligned} \tag{C.11}$$

On remarque ici que l'intégrale de surface est nulle car la surface libre se caractérise par $y = 0$. On exprime ensuite l'intégrale volumique à l'aide des coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MEA}(\boldsymbol{x}) &= 2 \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \begin{pmatrix} acos\theta + bsin\theta \\ ccos\theta + dsin\theta \end{pmatrix} W(r)\, dr d\theta \\ &= 2 \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\theta=-\pi}^{0} \begin{pmatrix} acos\theta + bsin\theta \\ ccos\theta + dsin\theta \end{pmatrix} W(r)\, dr d\theta = 2 \int\limits_{r=0}^{R} W(r)\, dr \begin{pmatrix} -2b \\ -2d \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{C.12}$$

C.2.1.2 Laplacien de Monaghan et Gingold

De même le calcul diffère lorsque l'on applique le théorème de flux-divergence :

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MG}(\boldsymbol{x}) &= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \left(acos^2\theta + (b+c)cos\theta sin\theta + dsin^2\theta\right) \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\ &= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{grad}\left(acos^2\theta + (b+c)cos\theta sin\theta + dsin^2\theta\right) W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \\ &- C \int\limits_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} \left(acos^2\theta + (b+c)cos\theta sin\theta + dsin^2\theta\right) \boldsymbol{n} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dS.\end{aligned} \tag{C.13}$$

Or la surface libre est caractérisée par $\theta \in \{-\pi, 0\}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MG}(\boldsymbol{x}) &= C \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\theta=-\pi}^{0} \begin{pmatrix} 2(a-d)cos\theta sin^2\theta + (b+c)sin^3\theta - (b+c)cos^2\theta sin\theta \\ 2(d-a)cos^2\theta sin\theta - (b+c)sin^2\theta cos\theta + (b+c)cos^3\theta \end{pmatrix} W(r) dr d\theta \\ &- C \int\limits_{r=-R}^{R} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} W(r) dr \\ &= C \int\limits_{r=0}^{R} W(r) dr \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}(b+c) + \frac{2}{3}(b+c) \\ -\frac{4}{3}(d-a) \end{pmatrix} - C \int\limits_{r=-R}^{R} W(r) dr \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \\ &= C \int\limits_{r=0}^{R} W(r) dr \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}b - \frac{2}{3}c \\ -\frac{2}{3}a - \frac{4}{3}d \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{C.14}$$

C.2.2 Consistance d'ordre 2

C.2.2.1 Laplacien de Morris et al.

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\Delta f}_2 \rangle^{MEA}(\boldsymbol{x}) &= 2 \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} ax^3+bx^2y+cxy^2 & ax^2y+bxy^2+cy^3 \\ dx^3+ex^2y+fxy^2 & dx^2y+exy^2+fy^3 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&= 2 \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{div} \left(\frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} ax^3+bx^2y+cxy^2 & ax^2y+bxy^2+cy^3 \\ dx^3+ex^2y+fxy^2 & dx^2y+exy^2+fy^3 \end{pmatrix} \right) W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&- 2 \int\limits_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} ax^3+bx^2y+cxy^2 & ax^2y+bxy^2+cy^3 \\ dx^3+ex^2y+fxy^2 & dx^2y+exy^2+fy^3 \end{pmatrix} \boldsymbol{n} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dS \\
&= 2 \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{2}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} ax^2+bxy+cy^2 \\ dx^2+exy+fy^2 \end{pmatrix} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&- 2 \int\limits_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} ax^2y+bxy^2+cy^3 \\ dx^2y+exy^2+fy^3 \end{pmatrix} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dS \\
&= 4 \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \begin{pmatrix} acos^2\theta+bcos\theta sin\theta+csin^2\theta \\ dcos^2\theta+ecos\theta sin\theta+fsin^2\theta \end{pmatrix} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&= 4 \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\theta=-\pi}^{0} \begin{pmatrix} acos^2\theta+bcos\theta sin\theta+csin^2\theta \\ dcos^2\theta+ecos\theta sin\theta+fsin^2\theta \end{pmatrix} W(r) r dr d\theta \\
&= \frac{2}{\pi} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}a+\frac{\pi}{2}c \\ \frac{\pi}{2}d+\frac{\pi}{2}f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ d+f \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{C.15}
$$

C.2.2.2 Laplacien de Monaghan et Gingold

$$
\begin{aligned}
\left\langle \boldsymbol{\Delta}^{MG} \boldsymbol{f}_2 \right\rangle(\boldsymbol{x}) &= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{x^2+y^2} \left(ax^3+(b+d)x^2y+(c+e)xy^2+fy^3 \right) \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} r \left(acos^3\theta+(b+d)cos^2\theta sin\theta+(c+e)cos\theta sin^2\theta+fsin^3\theta \right) \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&= C \int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{grad} \left(r \left(acos^3\theta+(b+d)cos^2\theta sin\theta+(c+e)cos\theta sin^2\theta+fsin^3\theta \right) \right) W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\
&- C \int\limits_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} r \left(acos^3\theta+(b+d)cos^2\theta sin\theta+(c+e)cos\theta sin^2\theta+fsin^3\theta \right) \boldsymbol{n} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dS \\
&= \frac{C}{2\pi} \int\limits_{\theta=-\pi}^{0} \boldsymbol{A} d\theta - C \int\limits_{r=-R}^{R} \int\limits_{\theta=-\pi}^{0} r \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} W(r) dr.
\end{aligned}
\tag{C.16}
$$

La deuxième intégrale est nulle par parité du noyau. On a alors :

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\Delta f}_2 \rangle^{MG}(\boldsymbol{x}) &= \frac{C}{2\pi}\int\limits_{\theta=-\pi}^{0} \boldsymbol{A} d\theta = \frac{C}{2\pi}\begin{pmatrix} \frac{3\pi}{8}a + \frac{\pi}{8}(3a-c-e) + \frac{3\pi}{8}(c+e) \\ \frac{3\pi}{8}(b+d) + \frac{\pi}{8}(3f-b-d) + \frac{3\pi}{8}f \end{pmatrix} \\ &= \frac{C}{16}\begin{pmatrix} 6a+2c+2e \\ 2b+2d+6f \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{C.17}$$

C.3 Consistance des opérateurs à la paroi

C.3.1 Consistance d'ordre 1

C.3.1.1 Laplacien de Morris et al.

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MEA,BIM}(\boldsymbol{x}) &= \frac{2}{\gamma(\boldsymbol{x})}\int\limits_{\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} ax^2+bxy & axy+by^2 \\ cx^2+dxy & cxy+dy^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dV \\ &+ \frac{2}{\gamma(\boldsymbol{x})}\int\limits_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{1}{y}\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dS.\end{aligned} \tag{C.18}$$

La première intégrale a déjà été calculée pour le cas avec une surface libre (à un coefficient $\gamma(\boldsymbol{x})$ près). On a alors (en utilisant le fait que l'on doit avoir $a = c = 0$) :

$$\langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MEA,BIM}(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{\gamma(\boldsymbol{x})}\int\limits_{r=0}^{R} W(r)\, dr \begin{pmatrix} -2b \\ -2d \end{pmatrix} + \frac{2}{\gamma(\boldsymbol{x})}\int\limits_{r=-R}^{R} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} W(r)\, dr = \mathbf{0}. \tag{C.19}$$

C.3.1.2 Laplacien de Monaghan et Gingold

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\Delta f}_1 \rangle^{MG,BIM}(\boldsymbol{x}) &= \frac{C}{\gamma(\boldsymbol{x})} \int_{r=0}^{R} W(r)dr \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}b \\ -\frac{4}{3}d \end{pmatrix} \\
&+ \frac{C}{\gamma(\boldsymbol{x})} \int_{\partial\Omega(\boldsymbol{x})} \frac{bxy + dy^2}{y(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, dS \\
&= \frac{C}{\gamma(\boldsymbol{x})} \int_{r=0}^{R} W(r)dr \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}b \\ -\frac{4}{3}d \end{pmatrix} + \frac{C}{\gamma(\boldsymbol{x})} \int_{r=-R}^{R} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} W(r)dr \\
&= \frac{C}{\gamma(\boldsymbol{x})} \int_{r=0}^{R} W(r)dr \begin{pmatrix} \frac{4}{3}b \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{C.20}
$$

Annexe D

Noyaux utilisés

On rappelle ici les expressions des différents noyaux utilisés dans ce manuscrit. Les expressions sont données à la fois en dimension 2 et 3. Seul le noyau de Wendland C^4 est donné en dimension 1 uniquement (car, dans ce manuscrit, il n'est utilisé que pour l'analyse en dimension 1 faite au chapitre 5).

De manière générale, la variable adimensionnée r désigne le rapport $\frac{||\boldsymbol{x}||}{R}$.

D.1 Noyau de Wendland C^2, en dimension 2 et 3

$$W(\boldsymbol{x}, R) = \frac{C_\eta}{R^\eta} \begin{cases} (1-r)^4 (1+4r) & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \tag{D.1}$$

avec $C_\eta = \frac{7}{\pi}$ en 2D et $C_\eta = \frac{21}{2\pi}$ en 3D.

D.2 Noyau en spline cubique, en dimension 2 et 3

$$W(\boldsymbol{x}, R) = \frac{D_\eta}{R^\eta} \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \tag{D.2}$$

avec $D_\eta =$ en 2D et $D_\eta =$ en 3D.

D.3 Noyau Hyper 4, en dimension 2 et 3

$$W(\boldsymbol{x}, R) = \frac{E_\eta}{R^\eta} \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \tag{D.3}$$

avec $E_\eta =$ en 2D et $E_\eta =$ en 3D.

D.4 Noyau Poly3, en dimension 2 et 3

$$W(\boldsymbol{x}, R) = \frac{F_\eta}{R^\eta} \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \tag{D.4}$$

avec $F_\eta =$ en 2D et $F_\eta =$ en 3D.

D.5 Noyau de Wendland C^4, en dimension 1

$$W(x, R) = \frac{3}{2R} \begin{cases} (1-r)^5 (1+5r+8r^2) & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \tag{D.5}$$

Titre : Améliorations de la précision et de la modélisation de la tension de surface au sein de la méthode SPH, et simulations de cas d'amerrissage d'urgence d'hélicoptères

Mots clés : Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), désordre particulaire, montée en ordre, tension de surface, écoulements monophasiques, amerrissage

Résumé : La méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) est une méthode de simulation numérique Lagrangienne et sans maillage, utilisée dans de nombreux domaines de la physique et de l'ingénierie (astrophysique, mécanique des milieux solides, mécanique des milieux fluides, etc...). Dans le domaine de la mécanique des fluides, cette méthode est désormais utilisée dans de nombreux champs d'application (ingénierie navale, automobile, aéronautique, etc...), profitant en particulier de son caractère Lagrangien et de l'absence de connectivités pour simuler des écoulements complexes à surface libre avec de grandes déformations et de nombreuses reconnexions d'interfaces. Cependant, la méthode SPH souffre encore d'un certain manque de précision dû à son caractère Lagrangien et à la relative complexité des opérateurs utilisés. L'objectif général de cette thèse est de proposer plusieurs améliorations en vue d'augmenter la précision de la méthode SPH. Le premier axe de ce travail de recherche porte sur l'étude du désordre particulaire (ou "particle shifting" en anglais) afin de briser les structures Lagrangiennes classiquement observées en SPH et responsables d'une dégradation de la précision des simulations. En particulier, à l'aide d'une étude théorique portant notamment sur des propriétés de convergence et de consistance, une nouvelle loi de shifting est proposée. Un deuxième axe s'intéresse à l'étude d'un nouvel opérateur visqueux en proche paroi, pour un traitement surfacique des conditions aux limites. Le troisième axe de développement concerne la montée en ordre de la méthode SPH, et notamment dans le cas des schémas de type Riemann-SPH. Une nouvelle méthode de reconstruction, basée sur le schéma WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) et des interpolations MLS (Moving Least Squares), des états gauche et droit des problèmes de Riemann est proposée. En complément de ces recherches, un nouveau modèle de tension de surface précis et robuste est proposé pour les écoulements monophasiques, permettant notamment une imposition de l'angle de contact au niveau de la ligne de contact. Enfin, dans le cadre du projet SARAH (increased SAfety and Robust certification for ditching of Aircraft and Helicopters ; European Unions Horizon 2020 Research and Innovation Programme Grant No. 724139), le dernier axe de cette thèse est consacré à la mise en place d'un modèle numérique permettant la simulation de cas d'amerrissage d'urgence d'hélicoptère. Ce modèle est validé grâce à la comparaison des résultats numériques avec ceux obtenus lors d'une campagne d'essais expérimentaux menée au bassin d'essais de l'Ecole Centrale de Nantes.

Title : Improvement of precision and surface tension modelling in SPH method, and simulations of emergency ditching cases of helicopters

Keywords : Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), particle shifting, high order convergence, surface tension, single-phase flows, ditching

Abstract : Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) is a Lagrangian and meshless numerical method, used in many branches of physics and engineering (astrophysics, solid mechanics, fluid mechanics, etc...). In fluid mechanics, this method is now used in many application fields (naval engineering, automotive engineering, aeronautic engineering, etc...), using its meshless and Lagrangian features to simulate free-surface flows with complex shapes and with many interface reconnexions. However, the SPH method still suffers from a lack of precision due to its Lagrangian feature and the relative complexity of the SPH operators. The objective of this thesis is to propose several improvements to increase the precision of the SPH method. The first part of this work focuses on a particle shifting technique aiming at breaking the Lagrangian structures inherently observed in SPH and which usually leads to a deterioration of the simulations. In particular, thanks to a theoretical study on consistency and convergence properties, a new shifting law is proposed. Secondly, a new viscous operator for near-body areas is proposed, based on a surface formulation of the boundary conditions. The third part concerns higher orders of convergence in the SPH method, and in particular for the case of Riemann-SPH schemes. A new reconstruction method, based the WENO scheme (Weighted Essentially Non-Oscillatory) and MLS (Moving Least Squares) interpolations, is proposed for the left and right state reconstructions of the Riemann problems. Then, a new accurate and robust surface tension model for single-phase flows is proposed, allowing namely to impose the contact angles at the contact line. Finally, as part of the SARAH project (increased SAfety and Robust certification for ditching of Aircraft and Helicopters ; European Unions Horizon 2020 Research and Innovation Programme Grant No. 724139), the last topic of this thesis is dedicated to the establishment of a numerical model allowing the SPH simulations of emergency ditching cases of helicopters. This model is validated thanks to comparisons with experimental results conducted in the wave basin of Ecole Centrale Nantes.