



Modèles mathématiques pour le microcrédit et la finance islamique

Djaffar Lessy

► To cite this version:

Djaffar Lessy. Modèles mathématiques pour le microcrédit et la finance islamique. Mathématiques générales [math.GM]. Université Côte d'Azur, 2020. Français. NNT : 2020COAZ4089 . tel-03185438

HAL Id: tel-03185438

<https://theses.hal.science/tel-03185438>

Submitted on 30 Mar 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

THÈSE DE DOCTORAT

Modèles mathématiques pour le microcrédit et la finance islamique

Djaffar LESSY

Laboratoire de Mathématiques J. A. Dieudonné

**Présentée en vue de l'obtention
du grade de docteur en mathématiques
d'Université Côte d'Azur**

Dirigée par : Marc Diener

Soutenue le : 14 décembre 2020

Devant le jury, composé de :

Patricia Reynaud-Bouret, Directeur de
Recherche, Université Côte d'Azur.

Francine Diener, Professeur,
Université Côte d'Azur.

Marc Diener, Professeur,
Université Côte d'Azur.

Augustin Fruchard, Professeur,
Université de Haute-Alsace.

Tewfik Sari, Professeur,
INRAE Montpellier.

Nicole El Karoui, Professeur,
Sorbonne-Université.

Modèles mathématiques pour le microcrédit et la finance islamique

Thèse de doctorat
soutenue le 14 décembre 2020
par Djaffar LESSY

Directeur de thèse : Marc DIENER

Devant le jury composé de :

Rapporteurs :

Augustin FRUCHARD, Professeur, Université de Haute-Alsace.

Tewfik SARI, Professeur, INRAE Montpellier.

Examinatrices et examinateur :

Patricia REYNAUD-BOURET, Directeur de Recherche, Université Côte d'Azur.

Francine DIENER, Professeur, Université Côte d'Azur.

Nicole EL KAROUI, Professeur, Sorbonne-Université.

Marc DIENER, Professeur, Université Côte d'Azur.

Titre : Modèles mathématiques pour le microcrédit et la finance islamique.

Résumé : La thèse aborde trois questions. La première (Chapitre II) présente un modèle de Markov pour le microcrédit conduisant à l'inclusion, la deuxième (Chapitre III) propose des modèles pour certains produits de la finance islamique : profit and loss sharing (PLS) et Cost-Plus financing (CPF) , la troisième (Chapitre IV) propose un modèle en théorie des jeux pour le contrat PLS.

Le chapitre I introduit les notions et résultats utilisés dans les chapitres suivants : Chaines de Markov avec Revenu (CMR), flux de revenu d'une CMR, et Flux de Revenu Espéré (FRE) et nous donnons un théorème permettant de calculer ce FRE.

Au chapitre II, nous considérons un modèle de chaîne de Markov d'un emprunteur d'une Institution de Microfinance (IMF) qui évolue entre quatre états : demandeur (A), bénéficiaire d'un prêt petit (B^-) ou important (B^+), et inclus (I) dans le système bancaire ordinaire. Nous proposons aussi le choix de la matrice de transition P . Nous calculons l'équilibre et déduisons l'influence des paramètres de P sur deux points : le taux d'accès des plus démunis au financement bancaire grâce au microcrédit et le taux d'intérêt minimal à pratiquer par l'IMF compte tenu des deux types de microcrédits accordés. Nous explicitons et analysons aussi quantitativement la contrainte d'Absence de Défaut Stratégique (ADS).

Le chapitre III propose des modèles pour deux produits de finance islamique, à savoir le PLS et le CPF. Pour le PLS, nous construisons un modèle CMR à deux états : demandeur (A) et bénéficiaire (B), nous calculons la proportion de bénéficiaires dans la population à l'équilibre et calculons les conditions d'ADS dans ce contrat. Pour le CPF, nous montrons qu'en cas de remboursements sans retard le microcrédit introduit par Muhammad Yunus est compatible avec les règles du CPF. En cas de retards, nous reprenons un modèle de P. Mauk pour évaluer, en termes d'amortissements, la somme aléatoire qui resterait à payer au terme des versements prévus dans le contrat.

Enfin, le chapitre IV présente un modèle de jeu bayésien pour un contrat PLS pour deux fonctions d'utilité (« sociale » ou non) de la banque lorsqu'elle ne peut savoir quel est le type, efficient ou non, de son agent, mais connaît la proportion p d'agents efficientes. Nous discutons l'effet du taux de partage sur la participation aux bénéfices du contrat PLS, son effet de sélection adverse sur le marché du PLS et donnons l'équilibre de Nash de ce jeu bayésien.

Mots-clés : microcrédit, chaîne de Markov avec revenu, inclusion financière, absence de défaut stratégique, finance islamique, profit and loss sharing, cost plus financing, jeux bayésien, équilibre de Nash bayésien, sélection adverse.

Title : Mathematical models for microcredit and Islamic finance

Abstract : The thesis addresses three questions. The first (Chapter II) presents a Markov model for microcredit leading to inclusion, the second (Chapter III) offers models for certain products of Islamic finance : Profit and Loss Sharing (PLS) and Cost-Plus financing (CPF), the third (Chapter IV) proposes a game theory model for the PLS contract.

Chapter I introduces the concepts and results used in the following chapters : Markov Chains with Income (MCI), income flow of a MCI, and Expected Income Flow (EIF) and we give a theorem to calculate this EIF.

In chapter II, we consider a Markov chain model of a borrower from a Microfinance Institution (MFI) that evolves between four states : applicant (A), beneficiary of a small (B^-) or large loan (B^+), and included (I) in the regular banking system. We also propose the choice of the transition matrix P . We calculate the equilibrium and deduce the influence of the parameters of P on two points : the rate of access of the poorest to bank financing thanks to microcredit and the interest rate minimum to be practiced by the MFI taking into account the two types of microcredits granted. We also explain and quantitatively analyze the constraints in order to have Absence of Strategic Default (ASD).

Chapter III provides models for two Islamic finance products, namely the PLS and the CPF. For the PLS, we build a two-state MCI model : applicant (A) and beneficiary (B), we calculate the proportion of beneficiaries in the population at equilibrium and calculate the ASD conditions in this contract. For the CPF, we show that in the event of repayments without delay, the microcredit introduced by Muhammad Yunus is compatible with the rules of the CPF. In the event of delays, we use a model from P. Mauk to compute the random amount that would remain to be paid at the end of the installments required by the contract.

Finally, Chapter IV provides a Bayesian game model for a PLS contract for two utility functions ("social" or "for profit") of the bank when it cannot know what is the type, efficient or not, of its agent, but knows the proportion p of efficient agents. We discuss the effect of the profit sharing rate of the PLS contract, its adverse selection effect on the PLS market and give the Nash equilibrium of this Bayesian game.

Keywords : microcredit, Markov Chains with Income, financial inclusion, absence of strategic default, islamic finance, profit and loss sharing, cost plus financing, bayesian game, bayesian Nash equilibrium, adverse selection.

Remerciements

Tout d'abord je veux dire un grand merci à mon directeur de thèse, Marc Diener pour la discussion, les conseils, le soutien lors de mes recherches.

Deuxièmement, je tiens à remercier Francine Diener qui m'a beaucoup aidé à m'orienter et bien sûr à partager des connaissances avec moi.

Je remercie Augustin Fruchard et Tewfik Sari d'avoir été les rapporteurs de ma thèse. Je tiens également à remercier Patricia Reynaud-Bouret, Francine Diener et Nicole El Karoui d'avoir bien voulu être examinatrices de la soutenance de ma thèse.

Je voudrais remercier grandement à Kemenag République d'Indonésie d'avoir facilité mes études en me fournissant des bourses.

Je voudrais également remercier Nahla Dhib qui est toujours prête à être amis de discussion et aussi Fouad Koudjeti qui a également partagé des connaissances en particulier sur la finance islamique, et aussi mes amis du LJAD.

Enfin, un grand merci à ma famille toujours apporter soutien et encouragements pendant mes études.

Table des matières

Introduction	6
1 Outils mathématiques	10
1.1 Processus de Bernoulli	11
1.2 Chaîne de Markov	12
1.2.1 Définitions	12
1.2.2 Chaîne de Markov régulière	13
1.3 Chaîne de Markov avec revenu	13
1.3.1 Un exemple	14
1.3.2 Chaînes de Markov avec revenu (CMR), flux de revenus F_X , et flux de revenus espéré (FRE)	15
1.4 Théorie des jeux	18
1.4.1 Jeux sous forme stratégique	18
1.4.2 Équilibre de Nash en stratégie pure	19
1.4.3 Équilibre de Nash en stratégie mixte	21
1.4.4 Jeux bayésiens	24
2 Modèle de chaîne de Markov pour le microcrédit conduisant à l'in-	
clusion	28
2.1 Description du modèle	29
2.2 Formules explicites pour le flux de revenus	32
2.3 Distribution limite	37
2.4 Absence de défaut stratégique	42
2.4.1 Les fonctions ADS^- et ADS^+	43
2.4.2 Illustrations autour de $p_* = (0.1, 0.75, 0.9, 0.98)$	45
2.4.3 Commentaire	52
2.5 Loi du flux de revenus	53
2.5.1 Simulations du flux de revenus	53
2.5.2 Estimation de la probabilité du maximum du flux de revenus	54
2.5.3 Retour aux simulations	56

3	Modélisation mathématique pour des produits de finance islamique	59
3.1	Définition des deux contrats islamiques PLS et CPF	61
3.1.1	Le contrat PLS	61
3.1.2	Le contrat CPF	63
3.2	Modèle d'une succession de contrats PLS	64
3.2.1	Description du modèle	64
3.2.2	Flux de revenus et flux de revenus espéré	66
3.2.3	Choix du taux de partage	68
3.2.4	Hypothèses d'Avantage à Collaborer (AC_E et AC_F)	70
3.2.5	Proportions de bénéficiaires à l'équilibre	73
3.3	Modèle du contrat CPF	75
3.3.1	L'exemple de Yunus	75
3.3.2	Exemple d'un contrat CPF d'une banque indonésienne	76
3.3.3	Modèle de CPF avec retards aléatoires	80
4	Modèle de théorie des jeux pour le contrat "Profit and Loss Sha-	
	ring"	85
4.1	Cas d'une banque à but lucratif	86
4.1.1	Description du modèle	86
4.1.2	Cas d'une banque à but lucratif : un exemple en information	
	complète	89
4.1.3	Banque à but lucratif : un exemple en information incomplète	93
4.2	Cas d'une banque à but social	95
4.2.1	Utilité sociale en information complète	95
4.2.2	Utilité sociale en information imparfaite	96

Introduction

Microcrédit et finance islamique

Un microcrédit est un petit prêt à un microentrepreneur pauvre qui n'a pas accès au système bancaire traditionnel et qui a besoin d'investir dans sa microentreprise.

La naissance du microcrédit est sans doute plus ancienne mais son développement remonte au début des années 1970 à travers des programmes expérimentaux accordant de petits prêts à des groupes de femmes pauvres pour investir dans leurs microentreprises. Les pionniers incluent la Grameen Bank au Bangladesh fondée par Muhammad Yunus, l'ACCION International qui a débuté en Amérique Latine, et la SEWA (Self-Employed Women's Association) ou Association des travailleuses indépendantes en Inde.

Au début des années 1990, le terme "microcrédit" commence à être remplacé par "microfinance", qui comprend non seulement le microcrédit, mais aussi l'épargne et l'assurance. Mais nous nous bornerons dans ce travail à l'étude du microcrédit. Aujourd'hui, la frontière entre la microfinance traditionnelle et le système financier classique commence à s'estomper car les banques et d'autres acteurs commerciaux se lancent aussi dans la microfinance. Et l'accent est mis sur la construction de systèmes financiers complets qui fonctionnent pour les pauvres. (Voir Helms [17]).

On trouve dans Boyé, Hajdenberg, Poursat [4] une présentation des principes du microcrédit : les montants des prêts sont limités, la durée est courte, les taux d'intérêt sont souvent élevés et les remboursements des prêts sont fréquents. Mais la principale caractéristique est le fait que l'emprunteur n'a aucune garantie, ni salaire ni historique de crédits. Ajoutons que les contrats ne prévoient pas de pénalités ou de représailles en cas de retard ou de défaut involontaires.

La première question que nous avons étudiée concerne l'inclusion financière : dans quelle mesure la réussite d'une succession de microcrédits peut-elle conduire le microentrepreneur pauvre à l'inclusion financière, c'est-à-dire à pouvoir obtenir d'une banque classique un crédit avec de meilleurs montants et intérêts. L'idée est que la succession de microcrédits fournit un historique de crédits et aussi améliore par l'expérience les compétences entrepreneuriales du microentrepreneur. L'inclusion financière est importante pour le développement et pour la réduction de la pauvreté,

car, une fois inclus, les pauvres peuvent alors augmenter leurs revenus et espérer sortir de la pauvreté.

Bien que le microcrédit soit né et se soit largement développé dans des pays musulmans comme le Bangladesh ou l'Indonésie (voir Kholed [26]), il est souvent considéré comme contraire aux principes de l'islam (comme tous les prêts) en raison de l'interdiction du *riba* (intérêt ou usure). Nous verrons que pourtant les microcrédits qu'offre la Grameen Bank par exemple sont très proches si ce n'est quasiment semblables à certains produits financiers islamiques, c'est-à-dire des produits qu'offrent les banques islamiques.

La finance islamique est un ensemble de services financiers principalement mis en œuvre pour se conformer aux principes de la charia (loi islamique) (voir Gait et Worthington [15]).

L'origine des banques islamiques remonte au début des années 1960 en Egypte, initiée par Ahmed al-Nagg, selon Chapellière [6] mais elles se sont surtout développées dans les années 70, notamment en Malaisie, puis dans les Pays du Golfe. Les principes de base de la finance islamique sont par exemple présentés dans Broquet [5] ou dans Charbonnier [7], à savoir : l'interdiction du *riba* (l'intérêt ou l'usure), l'interdiction du *gharar* (incertitude), et l'interdiction du *maysir* (jeu de hasard).

La finance islamique offre différents types de produits (Broquet [5] et Segrado [42]) à savoir le *murabaha* (cost plus financing), le *ijarah* (financial lease), le *istisna* (manufacturing Finance), le *mudaraba* (profit and loss sharing), le *musharaka* (joint venture) et bien d'autres. L'*ijarah* (financial lease) est un contrat de location par lequel un financier achète un actif productif au nom d'un client, puis le loue au client en échange de loyers réguliers. Le financier maintient sa responsabilité pour l'actif tout au long du contrat. La durée du bail et la date des paiements doivent être déterminées à l'avance ([28]). L'*istisna* (manufacturing finance) est un contrat de financement de projets ou de biens en construction (donc non disponibles à la souscription) tels que de l'immobilier, entre un producteur et un acheteur (le client), avec tous les matériaux fournis par le producteur. Le contrat permet à une partie d'obtenir des matériaux avec paiement en espèces et paiement différé à la livraison ([28]). Dans le contrat de *musharaka* (joint venture), deux parties fournissent un capital à une entreprise qu'elles peuvent gérer. Les bénéfices sont partagés selon des ratios préalablement convenus mais les pertes sont supportées proportionnellement à la prise de participation ([42]). Le *murabaha* (cost plus financing) et le *mudaraba* (profit and loss sharing) seront définis au chapitre 3.

Dans un rapport de *Chartered Institute of Management Accountants* (CIMA) [8] de janvier 2018, il est affirmé que les deux contrats les plus populaires sont le *profit and loss sharing* (PLS) et le *cost plus financing* (CPF). Ce sont ces deux contrats que nous avons choisi de modéliser. Le PLS est un contrat de partenariat entre un entrepreneur et une banque islamique qui agit comme un investisseur financier.

Les profits de l'entreprise, lorsqu'il y en a, sont partagés entre les deux parties selon un taux de partage fixé par le contrat. Le CPF est un contrat par lequel la banque islamique achète le bien dont le client a besoin, puis le lui cède contre l'engagement du paiement d'une suite d'acomptes provisionnels dont le total égale le prix d'achat du bien, augmenté d'une marge dont le montant est fixé par le contrat. La ressemblance avec un prêt classique est grande mais nous verrons que, la marge étant fixée à l'avance et restant la même y compris s'il y a des retards dans les versements des acomptes provisionnels (à condition qu'ils soient involontaires), la possibilité de ces retards sans pénalités représente un partage de risque entre la banque et le client. Nous modélisons ce phénomène afin de calculer le risque de la banque dû à ces retards éventuels.

A travers nos modèles, nous examinons aussi la question de l'asymétrie d'information qui est l'un des problèmes du microcrédit et de la finance islamique, notamment par le fait qu'elle conduit souvent à de la sélection adverse. Ce concept économique a été introduit par Akerlof [1] sur l'exemple du marché de voitures d'occasion (lemon market/ marché aux tacos), l'asymétrie entre les vendeurs et les acheteurs venant de ce que l'acheteur ne connaît moins bien que le vendeur la qualité réelle de la voiture vendue.

De manière analogue, dans le microcrédit / crédit ou la finance islamique, la banque ne connaît pas le type de l'agent demandant un contrat car elle ne sait pas s'il s'agit d'un agent efficient ou d'un agent non efficient. Nous expliquons comment apparaît cette sélection adverse pour le PLS. Tout comme Stiglitz et Weiss [43], qui voient le rationnement du crédit comme une conséquence de l'asymétrie d'information entre institution financière et emprunteur, la sélection adverse est peut-être l'un des freins au développement des contrats PLS. Plusieurs études ont abordé cette question, notamment Jouaber et Mehri [21] qui proposent d'optimiser le taux de partage du PLS pour éviter la sélection adverse.

Plan de la thèse

Le chapitre 1 présente les outils mathématiques que nous utilisons dans la suite. D'abord, nous introduisons les processus de Bernoulli dont nous avons besoin pour modéliser les conséquences pour la banque de retards dans le versement des acomptes provisionnels des contrats CPF. Ensuite, nous expliquons ce qu'est une chaîne de Markov, et notamment la propriété de Markov et la matrice de transition, la notion de chaîne de Markov régulière. Puis nous introduisons les Chaînes de Markov avec Revenu (CMR) qui généralisent un exemple que nous avons pris de Khodr [25] et que nous utilisons au chapitre 2. La fin du chapitre 1 propose une introduction à la théorie des jeux, en nous limitant aux jeux sous forme stratégique, leurs équilibres de Nash en stratégie pure et en stratégie mixte et enfin la généralisation au cas des

jeux bayésiens qui permettra de modéliser au chapitre 4 la question de l’asymétrie d’information du contrat PLS par un jeu en information incomplète.

Le chapitre 2 est consacré à un modèle pour le microcrédit conduisant à l’inclusion (dans l’accès aux services de la finance traditionnelle). Le modèle est une chaîne de Markov avec revenu. Il permet de calculer le Flux de Revenus Espéré (FRE) pour le microentrepreneur et de discuter, en fonction des paramètres du modèle, comment optimiser la proportion d’inclus dans la distribution d’équilibre et quelle est l’influence de l’hypothèse d’absence de défaut stratégique (ADS). Nous présentons enfin des simulations de la loi du flux de revenus et une estimation de la probabilité de gagner le flux de revenus maximum.

Le chapitre 3 s’intéresse à la finance islamique à travers deux contrats particuliers, le PLS et le CPF. Nous commençons par décrire ces deux contrats en expliquant leurs caractéristiques principales. Puis nous proposons pour le PLS un modèle par une chaîne de Markov très simple : à chaque étape, la banque peut soit renouveler son investissement soit l’interrompre et se retirer et l’entrepreneur peut soit l’utiliser avec succès soit échouer. Le lien entre le taux de partage du PLS et la probabilité de succès de l’entreprise permet de mettre en évidence l’effet de sélection adverse que ce contrat peut générer. Le calcul des flux de revenus espérés à la fois par le bénéficiaire du PLS et par la banque islamique peut être fait explicitement grâce à la simplicité du modèle. Pour le contrat CPF, les calculs du montant des versements et de l’échelonnement des acomptes provisionnels proposés par les banques islamiques ressemblent fortement à ceux des prêts traditionnels, si l’on s’en tient aux bénéficiaires qui remboursent sans retard. Mais pour tenir compte d’éventuels retards, à la charge de la banque, nous proposons un modèle stochastique inspiré de Mauk [32] qui permet de calculer ce qu’il resterait à payer après le dernier versement prévu dans le cas où des retards aléatoires seraient intervenus sans recourir à une mesure du taux d’intérêt réel.

On reprend dans le chapitre 4 l’étude du contrat islamique PLS, cette fois à travers un modèle de théorie des jeux. Nous avons construit ce modèle à partir d’un article de Fakir et Tkouat [13]. L’idée naturelle serait de proposer des PLS avec un taux de partage avantageux pour la banque lorsque le client est peu efficace pour couvrir un risque élevé d’échec et des PLS avec un taux de partage avantageux pour le client lorsqu’il est très efficace et donc peu susceptible d’échec. Notre modèle permet d’étudier les équilibres de Nash du jeu dans chacun des deux cas et il se généralise bien au cas bayésien d’un jeu en information incomplète, lorsque la banque islamique ne connaît pas le type de ses clients (efficace ou non efficace). On verra que si la banque remplace son utilité par une utilité sociale, c’est-à-dire qu’elle tient compte dans son utilité de celle de son bénéficiaire, alors l’équilibre obtenu pourrait être bien plus satisfaisant, pour son bénéficiaire, mais aussi pour elle.

Chapitre 1

Outils mathématiques

Dans ce chapitre, nous avons regroupé la présentation des outils mathématiques nécessaires à la construction des modèles que nous proposons dans la suite. Il s'agit, pour les trois premiers paragraphes, de processus stochastiques particuliers, *processus de Bernoulli*, *chaînes de Markov* et *chaînes de Markov avec revenus*, et pour le dernier, d'un *jeu statique* que nous considérons à la fois en information complète (équilibres de Nash) et incomplète (équilibres bayésiens de Harsanyi).

Le premier processus stochastique, le plus simple, est le processus de Bernoulli dont nous rappelons la définition et indiquons quelques propriétés. Nous l'utilisons au chapitre 3 pour étudier l'effet des retards de remboursements (supposés aléatoires) d'un contrat islamique appelé Cost Plus Financing (CPF). Malgré leur simplicité, les processus de Bernoulli sont rarement utilisés par les économistes lorsqu'ils modélisent des contrats financiers. Les références que nous avons utilisées ici sont [9] et [39].

Le second paragraphe présente les chaînes de Markov. Nous utilisons une telle chaîne de Markov pour construire le modèle de microcrédit conduisant à l'inclusion que nous proposons au chapitre 2 et aussi un modèle du contrat islamique appelé Profit and Loss Sharing (PLS). Les références utilisées pour la présentation des chaînes de Markov comprennent [35], [23], [24], [41].

Au paragraphe 3, nous introduisons une chaîne de Markov d'un type particulier, que nous avons appelée chaîne de Markov avec revenu, dont on peut trouver un exemple dans [25] et dont nous avons précisé la définition générale et détaillé les propriétés les plus utiles.

Enfin, nous présentons au paragraphe 4 la notion de jeu (statique) sous forme stratégique nécessaire pour construire des modèles de contrats PLS au chapitre 4. Nous rappelons la définition d'un équilibre de Nash, en stratégie pure puis en stratégie mixte. Nous généralisons ce jeu au cas dit bayésien en suivant l'approche proposée par Harsanyi. Les références que nous utilisons ici sont [14], [27], [36], [38] et [16].

1.1 Processus de Bernoulli

Les processus de Bernoulli sont utilisés pour modéliser une suite d'expériences avec seulement deux issues possibles, *succès* ou *échec*, généralement codés comme 1 et 0. C'est le processus stochastique le plus simple qui soit.

Rappelons tout d'abord la définition d'une variable aléatoire de Bernoulli et d'une variable aléatoire géométrique. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition 1.1.1. Une variable aléatoire B sur Ω à valeurs dans $\{0, 1\}$ a pour loi une **distribution de Bernoulli** de paramètre p , où $0 \leq p \leq 1$, si l'on a

$$\mathbb{P}(B = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(B = 0) = 1 - p.$$

On dit que B suit une loi de Bernoulli que l'on note $\mathcal{B}(p)$.

Définition 1.1.2. Une variable aléatoire Y sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$ a pour loi une **distribution géométrique** de paramètre p , où $0 \leq p \leq 1$, si pour tout $k = 1, 2, \dots$

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

Nous notons cette distribution par $\mathcal{G}(p)$.

On peut vérifier que l'espérance et la variance de Y sont données par

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Définition 1.1.3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une suite B_t , $t = 1, 2, \dots$ de variables aléatoires sur Ω , indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est un **processus de Bernoulli**.

Notation 1.1.4. Étant donné un processus de Bernoulli $(B_t)_{t \geq 1}$, on désigne par $(T_n)_{n \geq 0}$ la suite de variables aléatoires définie par $T_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$T_n = T_{n-1} + \text{Min}\{l \geq 1 | B_{T_{n-1}+l} = 1\}. \quad (1.1)$$

et par $(Y_n)_{n \geq 1}$ la suite de variables aléatoires définie par $Y_n = T_n - T_{n-1}$.

Si $B_t = 1$ représente un succès (et $B_t = 0$ un échec) alors T_n représente l'instant du n -ième succès et Y_n le temps s'écoulant entre le $(n - 1)$ -ième et le n -ième succès. On a le résultat suivant :

Proposition 1.1.5. Si $(B_t)_{t \geq 1}$ est un processus de Bernoulli alors pour tout $n \geq 1$, le temps entre deux succès Y_n suit une distribution géométrique $\mathcal{G}(p)$, c'est-à-dire que pour tous $j \geq 1$

$$\mathbb{P}(Y_n = j) = (1 - p)^{j-1}p.$$

1.2 Chaîne de Markov

Les chaînes de Markov sont des outils mathématiques simples d'utilisation qui permettent de modéliser l'évolution au cours du temps (la dynamique) d'un système aléatoire. La propriété caractéristique d'une chaîne de Markov est que son évolution future ne dépend que du présent, pas du passé. On trouve des applications des chaînes de Markov dans beaucoup de domaines, de la biologie à la gestion des ressources, en passant par les files d'attente des réseaux, la physique, les sciences de l'ingénieur, la recherche opérationnelle ou les mathématiques financières.

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ un ensemble fini d'états. Une suite X_t , $t = 1, 2, \dots$ de variables aléatoires sur Ω à valeurs dans S est une **chaîne de Markov** si, pour tout $t = 0, 1, 2, \dots$ et tous les états $s, s_0, s_1, \dots, s_t$

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = s | X_t = s_t, X_{t-1} = s_{t-1}, \dots, X_1 = s_1, X_0 = s_0) = \mathbb{P}(X_{t+1} = s | X_t = s_t) \quad (1.2)$$

cette dernière probabilité ne dépendant que de s et s_t et non de t .

La propriété (1.2) s'appelle la **propriété de Markov**. Elle permet de caractériser les chaînes de Markov à espace d'états fini par la donnée de leur espace d'états $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ et d'une matrice P appelée **matrice de transition**.

Définition 1.2.2. On appelle **matrice de transition** de la chaîne de Markov la matrice $P = (p_{ij})$ définie par

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{t+1} = s_j | X_t = s_i) \text{ pour } s_i, s_j \in S, t = 0, 1, 2, \dots$$

A noter que, pour tout i et j , $0 \leq p_{ij} \leq 1$ et $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$. La matrice de transition P contient donc les probabilités de passer d'un état à un autre en une étape, de l'instant t à l'instant $t + 1$. On en déduit facilement que c'est la puissance k -ième de P , P^k , qui contient les probabilités de passer d'un état s_i à l'état s_j après k étapes, comme l'indique la proposition suivante. Notons $p_{ij}^{(k)}$ le (i, j) -ème élément de la matrice P^k .

Proposition 1.2.3. Soit (X_t) une chaîne de Markov et soit $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ sa distribution initiale, loi de X_0 . Alors, pour tout $t, k \geq 0$.

- (i) $\mathbb{P}(X_k = s_j) = (\pi P^k)_j = \sum_i \pi_i p_{ij}^{(k)}$;
- (ii) $\mathbb{P}(X_k = s_j | X_0 = s_i) = \mathbb{P}(X_{t+k} = s_j | X_t = s_i) = p_{ij}^{(k)}$.

Démonstration. Voir [35]. □

1.2.2 Chaîne de Markov régulière

Tous les modèles construits sur une chaîne de Markov que nous présentons par la suite utilisent des chaînes de Markov régulières permettant d'utiliser le théorème de Perron-Frobenius : cette régularité correspond à un comportement dynamique simple puisque la distribution initiale de la chaîne évolue au cours du temps vers une distribution limite (distribution stationnaire) qu'il est facile de calculer.

Définition 1.2.4. Une matrice P telle que pour tout i et j , $0 \leq p_{ij} \leq 1$ et, pour tout i , $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$ est appelée une **matrice stochastique**.

Définition 1.2.5. Une matrice stochastique est dite **régulière** ou aussi **primitive** si l'une de ses puissances P^k a tous ses coefficients strictement positifs. Une chaîne de Markov dont la matrice de transition P est régulière est appelée une **chaîne de Markov régulière**.

Parmi les **distributions** π sur l'ensemble d'états S , c'est-à-dire les vecteurs vérifiant $\pi_i \geq 0$ pour tout i , et $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$, certaines sont importantes pour la dynamique de la chaîne de Markov :

Définition 1.2.6. Une distribution π sur S est appelée distribution **stationnaire** ou distribution **invariante** si elle vérifie

$$\pi P = \pi.$$

On voit qu'une distribution stationnaire est un 1-vecteur propre à gauche de la matrice de transition P dont tous les coefficients sont positifs et de somme 1. Lorsqu'une distribution stationnaire existe, il est donc facile de la déterminer.

Le théorème suivant, appelé théorème de Perron-Frobenius, possède de nombreuses versions. Nous avons choisi la version que nous utilisons plus loin pour énoncer les propriétés dynamiques à long terme des modèles de chaîne de Markov que nous proposons.

Théorème 1.2.7. Une chaîne de Markov (X_t) sur un ensemble fini d'états S et de matrice de transition régulière P possède une distribution stationnaire π^* et, quelque soit sa distribution initiale π_0 , on a

$$\lim_t \pi_0 P^t = \pi^*.$$

1.3 Chaîne de Markov avec revenu

Nous présentons tout d'abord un exemple introduit par Khodr [25] qui a inspiré la définition de **chaîne de Markov avec revenu** et celle de **flux de revenu** que nous donnons ensuite.

1.3.1 Un exemple

On considère un individu qui obtient un prêt d'une institution de microfinance (IMF) pour investir dans sa microentreprise. S'il réussit à rembourser son prêt, il obtient automatiquement un nouveau prêt. Au contraire, s'il ne réussit pas à rembourser son prêt, il ne peut plus obtenir d'autre prêt pendant T périodes. À l'issue de ces T périodes d'exclusion, il peut demander un nouveau prêt et, s'il l'obtient, être à nouveau bénéficiaire d'un prêt.

Pour son modèle, Khodr propose une chaîne de Markov (X_t) sur un ensemble d'états $S := \{B, E^T, E^{T-1}, \dots, E^1\}$, B est l'état de bénéficiaire d'un prêt, E^i l'état d'être exclu pour les $i - 1$ prochaines périodes au moins, $i = 2, \dots, T$, E^1 étant l'état d'être demandeur d'un nouveau prêt. Il suppose que le bénéficiaire d'un prêt le rembourse avec une probabilité α et que le demandeur obtient un prêt avec probabilité γ .

Nous illustrons la dynamique de la chaîne de Markov par l'image suivante :

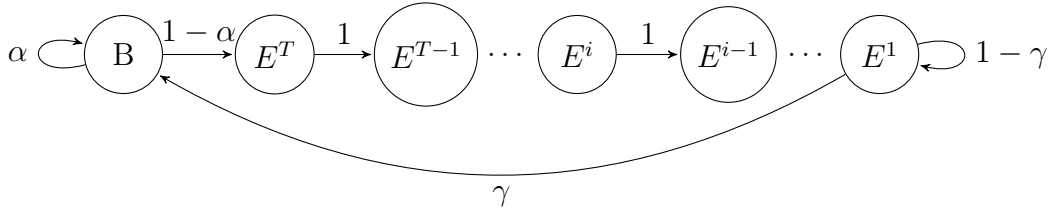


FIGURE 1.1 – Modèle de Khodr pour le microcrédit

La matrice de transition P de la chaîne de Markov est :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\gamma \end{pmatrix}$$

On suppose que le revenu d'une unité investie est w ($w \geq 0$) en cas de succès de l'activité économique et zéro en cas d'échec. Sachant qu'on doit alors rembourser le prêt au taux r en cas de succès mais qu'on ne le rembourse pas en cas d'échec, la fonction de revenu net sur une période $f : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$, est donnée par

$$f(s, s') = \begin{cases} w - (1+r) & \text{si } (s, s') = (B, B) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.3)$$

Si δ désigne le coefficient d'actualisation sur une période, on en déduit le revenu total actualisé pour chaque trajectoire $(X_0, X_1, \dots)$ de la chaîne de Markov :

$$\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} f(X_{t-1}, X_t). \quad (1.4)$$

puis le revenu total espéré $V : S \rightarrow \mathbb{R}$, comme une fonction de l'état $s \in S$,

$$V(s) = \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} f(X_{t-1}, X_t) | X_0 = s \right]. \quad (1.5)$$

Khodr obtient alors le résultat suivant :

Proposition 1.3.1. Le revenu total espéré d'un individu partant de l'état s est donné par

$$V(s) = \begin{cases} \alpha[w - (1+r)] \frac{1}{1 - (\alpha\delta + (1-\alpha)\delta^T \Sigma)} & \text{si } s = B \\ \alpha[w - (1+r)] \frac{\delta^{t-1}\sigma}{1 - (\alpha\delta + (1-\alpha)\delta^T \Sigma)} & \text{si } s = E^i, i = 1, \dots, T \end{cases} \quad (1.6)$$

avec $\Sigma = \frac{\gamma\delta}{1 - \delta(1-\gamma)}$.

Démonstration. Voir [25]. □

Par application du théorème de Perron-Frobenius, on a aussi

Proposition 1.3.2. Pour toute distribution initiale $\pi_0 = (\pi_0^1, \dots, \pi_0^{T+1})$ de la population suivant les différents états $B, E^T, \dots, E^1$, la dynamique $(\pi_0 P^t)_{t \in \mathbb{N}}$, tend, quand t vers l'infini, vers la distribution stationnaire π^*

$$\pi^* = \frac{1}{\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\gamma} + (T-1)} \left(\frac{1}{1-\alpha}, 1, 1, \dots, 1, \frac{1}{\gamma} \right). \quad (1.7)$$

Démonstration. Voir [25]. □

1.3.2 Chaines de Markov avec revenu (CMR), flux de revenus F_X , et flux de revenus espéré (FRE)

En nous inspirant de l'exemple précédent, nous introduisons la définition de chaîne Markov avec revenu puis celle de flux de revenu.

Définition 1.3.3. Nous appelons **Chaîne de Markov avec Revenu** (CMR) un triplet (X, f, δ) où

1. X est une chaîne de Markov $(X_t)_{t=0,1,\dots}$ avec un espace d'états fini $S = (s_i)_{1,\dots,N}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec une matrice de transition P et une distribution initiale π_0 .
2. f est une fonction $f : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$, $(s_i, s_j) \mapsto f(s_i, s_j)$ appelée *fonction de revenu*.
3. $\delta \in]0, 1[$ est un facteur d'actualisation.

On peut alors considérer la variable aléatoire sur Ω qui représente la valeur actuelle du flux de revenus que l'on peut obtenir en se déplaçant le long d'une trajectoire :

Définition 1.3.4. Étant donné une CMR (X, f, δ) , on appelle **flux de revenus** la variable aléatoire notée F_X définie par

$$F_X = \delta f(X_0, X_1) + \delta^2 f(X_1, X_2) + \dots = \sum_{t>0} \delta^t f(X_{t-1}, X_t). \quad (1.8)$$

Remarque Nous donnons au chapitre suivant plusieurs exemples de simulations de la loi de cette variable aléatoire (voir le paragraphe [2.5.1](#)).

Lorsque la distribution initiale π_0 de X est telle que $\pi_0(s) = 1$ pour un état $s \in S$ (et $\pi_0(s') = 0$ pour les autres états s'), l'espérance de la variable aléatoire F_X ne dépend plus que de s et peut être notée w^s :

Définition 1.3.5. Soit (X, f, δ) une CMR. Si la distribution initiale est telle que $\pi_0(s) = 1$ pour certain $s \in S$, on appelle **flux de revenus espéré à partir de l'état s (FRE)**, noté w^s , l'espérance conditionnelle suivante :

$$w^s = \mathbb{E}(F_X \mid X_0 = s).$$

Nous désignons par $W = {}^t(w^{s_1}, \dots, w^{s_N})$ le vecteur de tous les flux de revenus espérés à partir des différents états s_i . De même, pour tout $s \in \mathcal{S}$, on définit $\bar{w}^s$ par

$$\bar{w}^s = \mathbb{E}(f(X_0, X_1) \mid X_0 = s),$$

et par $\bar{W} = {}^t(\bar{w}^{s_1}, \dots, \bar{w}^{s_N})$ le vecteur de tous les flux de revenus espérés pour la première étape à partir des différents états s_i .

Nous allons voir qu'il est possible de calculer le vecteur W à partir de la matrice P et du vecteur $\bar{W}$.

Lemme 1.3.6. Supposons que la distribution initiale de X soit telle que $\pi_0(s_i) = 1$ pour un $s_i \in S$. On a alors

$$w^{s_i} = \delta \bar{w}^{s_i} + \delta \sum_{1 \leq j \leq N} p_{ij} w^{s_j}. \quad (1.9)$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}
w^{s_i} &= \mathbb{E} \left(\delta f(X_0, X_1) + \sum_{t>1} \delta^t f(X_{t-1}, X_t) \middle| X_0 = s_i \right) \\
&= \delta \bar{w}^{s_i} + \delta \mathbb{E} \left(\sum_{t>1} \delta^{t-1} f(X_{t-1}, X_t) \right) \text{ car } X \text{ est de Markov et } t-1 > 0 \\
&= \delta \bar{w}^{s_i} + \delta \sum_{1 \leq j \leq i_{\max}} \mathbb{E} \left(\sum_{t>1} \delta^{t-1} f(X_{t-1}, X_t) \middle| X_1 = s_j \right) p_{ij} \\
&= \delta \bar{w}^{s_i} + \delta \sum_{1 \leq j \leq N} p_{ij} w^{s_j}
\end{aligned}$$

la dernière égalité utilise le fait que la chaîne de Markov Y^{s_j} définie sur $\Omega_j = \{X_1 = s_j\}$ par $Y_t^{s_j} = X_{t+1}$, et dont la distribution initiale est $\pi_0^{Y^{s_j}}(s_j) = 1$, a la même loi que (X, π_0) avec $\pi_0(s_j) = 1$. $\square$

Théorème 1.3.7. Soit (X, f, δ) une chaîne de Markov avec revenu. Le vecteur des flux de revenus espérés W est donné par

$$W = \delta(\mathbb{I} - \delta P)^{-1} \bar{W} = \delta \left(\sum_{t=0}^{\infty} (\delta P)^t \right) \bar{W}, \quad (1.10)$$

où P est la matrice de transition de X et $\bar{W} = {}^t(\bar{w}^{s_1}, \dots, \bar{w}^{s_N})$ le vecteur des flux de revenus espérés pour la première étape.

Démonstration. Par le lemme (1.3.6), nous avons

$$w^{s_i} = \delta \bar{w}^{s_i} + \delta \sum_{1 \leq j \leq N} p_{ij} w^{s_j}$$

pour chaque état $s_i \in S$. Ainsi, en utilisant les vecteurs W et $\bar{W}$, on peut écrire $W = \delta \bar{W} + \delta P W$, ou $(\mathbb{I} - \delta P)W = \delta \bar{W}$. Comme la norme $\|P\| = \max_i \{\sum_j |p_{ij}|\}$, et comme $\|\delta P\| = |\delta| \|P\| = \delta \cdot 1 < 1$, on voit que la somme infinie $\sum_{t=0}^{\infty} (\delta P)^t$ converge normalement vers $(\mathbb{I} - \delta P)^{-1}$, d'où le théorème. $\square$

Le résultat suivant donne une formule générale pour les dérivées du vecteur de flux de revenus espérés W par rapport à des paramètres du modèle qui sera utile au chapitre suivant lors de l'étude de la sensibilité de ce vecteur aux paramètres du modèle.

Corollaire 1.3.8. Soit $M = \mathbb{I} - \delta P$. Supposons que la matrice de transition P et le vecteur des revenus espérés pour la première étape $\bar{W}$ soit une fonction $\mathcal{C}^1$ d'un paramètre $p \neq \delta$. Nous avons alors

$$\frac{\partial W}{\partial p} = -\delta M^{-1} \frac{\partial M}{\partial p} M^{-1} \bar{W} + \delta M^{-1} \frac{\partial \bar{W}}{\partial p}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \delta} = M^{-1} (\mathbb{I} + \delta P M^{-1}) \bar{W}. \quad (1.12)$$

Démonstration. Comme $MM^{-1} = \mathbb{I}$, nous avons $\frac{\partial M}{\partial p} M^{-1} + M \frac{\partial M^{-1}}{\partial p} = 0$, donc

$$\frac{\partial M^{-1}}{\partial p} = M^{-1} M \frac{\partial M^{-1}}{\partial p} = -M^{-1} \frac{\partial M}{\partial p} M^{-1}.$$

La formule (1.11) découle alors de (1.10) $W = \delta(\mathbb{I} - \delta P)^{-1} \bar{W} = \delta M^{-1} \bar{W}$.

Par ailleurs, il est clair que $\frac{\partial M}{\partial \delta} = \frac{\partial}{\partial \delta}(\mathbb{I} - \delta P) = -P$ car P ne dépend pas de δ , donc, à nouveau, comme $\mathbb{I} = MM^{-1}$, nous avons $0 = \frac{\partial M}{\partial \delta} M^{-1} + M \frac{\partial M^{-1}}{\partial \delta} = -PM^{-1} + M \frac{\partial M^{-1}}{\partial \delta}$ ainsi $\frac{\partial M^{-1}}{\partial \delta} = M^{-1} P M^{-1}$, et donc (1.10) implique

$$\frac{\partial W}{\partial \delta} = \left(M^{-1} + \delta \frac{\partial M^{-1}}{\partial \delta} \right) \bar{W} = (M^{-1} + \delta M^{-1} P M^{-1}) \bar{W} = M^{-1} (\mathbb{I} + \delta P M^{-1}) \bar{W}.$$

□

1.4 Théorie des jeux

Dans ce paragraphe on introduit quelques éléments de théorie des jeux qui seront utilisés au chapitre 4. La plupart des définitions et résultats présentés sont inspirés de [36]. Cette théorie permet de construire des modèles pour mieux comprendre des situations où plusieurs décideurs interagissent [36].

Tout comme les chaînes de Markov, la théorie des jeux peut s'appliquer dans de nombreux domaines tels que l'économie, la gestion, les sciences politiques, la biologie, l'informatique ou la philosophie.

1.4.1 Jeux sous forme stratégique

Il existe de nombreux types de jeux. Ceux que nous allons utiliser au chapitre 4 sont appelés *jeux sous forme stratégique* : ils sont à la fois statiques (on ne joue qu'une fois), non corrélés (les probabilités des joueurs de jouer telle ou telle action sont indépendantes), et non coopératifs. Lorsqu'il n'y a que deux joueurs, on peut

les représenter par des tableaux dans lesquels on inscrit les utilités des actions des joueurs.

Définition 1.4.1. Un **jeu sous forme stratégique** $(N, \mathcal{S}, u)$ consiste en :

- un ensemble fini $N = \{1, 2, \dots, i, \dots, n\}$ de n **joueurs**.
- un ensemble $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n$ où $\mathcal{S}_i$ est l'ensemble des **actions** disponibles ou **stratégies** pour chaque joueur i . Un vecteur $s = (s_1, \dots, s_n)$ de $\mathcal{S}$ est un **profil d'actions**.
- une **fonction d'utilité** $u = (u_1, \dots, u_n)$ où, pour chaque joueur i , $u_i : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 1.4.2. Voici un exemple, que nous tirons de Fudenberg et Tirole [14], d'un jeu à deux joueurs : le joueur 1 a pour actions possibles U et D (en ligne dans le tableau) tandis que le joueur 2 a pour actions possibles L et R (en colonne dans le tableau). Dans chaque case du tableau, on écrit d'abord l'utilité du joueur 1 et ensuite l'utilité du joueur 2. Dans l'une des case, (U, L) , nous avons mis en gras les utilités car cette case est un équilibre de Nash en stratégie pure comme nous allons l'expliquer maintenant.

	L	R
U	1; 3	4; 1
D	0; 2	3; 4

FIGURE 1.2 – Utilités d'un jeu sous forme stratégique à deux joueurs, le joueur 1 avec les actions U et D et le joueur 2 avec les actions L et R .

1.4.2 Équilibre de Nash en stratégie pure

Nous désignons par $-i$ tous les joueurs autres qu'un joueur i donné. Par exemple l'utilité $u_j(s_1, s_2, \dots, s_n)$ pourra aussi s'écrire $u_j(s_i, s_{-i})$.

Définition 1.4.3. Pour un jeu sous forme stratégique, on dit qu'une action s_i du joueur i **domine** une autre action s'_i du même joueur si l'on a

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

pour tous les s_{-i} .

Définition 1.4.4. Un **équilibre de Nash en stratégie pure** d'un jeu sous forme stratégique est un profil d'action $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ tel que, pour tout joueur i et pour tout $s_i \in \mathcal{S}_i$,

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

Pour l'exemple 1.4.2 ci-dessus, on peut vérifier, en appliquant simplement la définition ci-dessus, que (U, L) est un équilibre de Nash en stratégie pure. En effet, si la stratégie du joueur 2 est L , on voit que le joueur 1 n'a pas intérêt à choisir D plutôt que U . De même, si la stratégie du joueur 1 est U , on voit que le joueur 2 n'a pas intérêt à choisir R plutôt que L . Donc (U, L) est bien un équilibre de Nash en stratégie pure et il est facile de vérifier de même que les 3 autres possibilités ne sont pas des équilibres en ce sens.

Lorsqu'on recherche un équilibre de Nash en stratégie pure, on peut commencer par éliminer une à une toutes les stratégies dominées pour l'un ou l'autre des joueurs et on réduit ainsi à un petit nombre les stratégies restantes. S'il n'en reste qu'une, c'est un équilibre de Nash en stratégie pure. On dit qu'on l'a trouvé par **élimination des stratégies dominées**.

Souvent, les jeux que l'on utilise pour modéliser des situations concrètes possèdent un équilibre de Nash en stratégie pure et parfois même plusieurs (voir l'exemple 1.4.14). Néanmoins il n'y a pas d'existence dans tous les cas comme le montre l'exemple dit **Matching Pennies** [14].

Exemple 1.4.5. Voici l'exemple d'un jeu à deux joueurs, dit **Matching Pennies** pour appariement des pièces, que nous tirons de Fudenberg et Tirole [14]. Les deux joueurs ont une pièce et la présentent en pile ou face. Ils ont donc chacun deux actions possibles *heads* (H) et *tails* (T). Ils annoncent simultanément H ou T . Si les annonces correspondent, le joueur 1 garde les deux pièces (il gagne un) et le joueur 2 perd un. Si les annonces diffèrent, c'est le joueur 2 qui gagne un et le joueur 1 qui perd un.

	H	T
H	1; -1	-1; 1
T	-1; 1	1; -1

FIGURE 1.3 – Matching Pennies

On peut vérifier qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégie pure.

Pour obtenir un **théorème d'existence** dans tous les cas, Nash a dû élargir la notion d'équilibre en stratégie pure à celle, plus générale, d'équilibre en stratégie mixte que nous allons définir maintenant.

1.4.3 Équilibre de Nash en stratégie mixte

Stratégie mixte

Définition 1.4.6. Dans un jeu sous forme stratégique, une **stratégie mixte** σ_i **pour le joueur** i est une distribution de probabilité sur son ensemble d'actions $\mathcal{S}_i$. En d'autres termes, si le joueur i a m actions disponibles, une stratégie mixte est un vecteur $\sigma_i = (\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^m)$ tel que $\sigma_i^k \geq 0$ pour tout $k = 1, 2, \dots, m$, et $\sum_{k=1}^m \sigma_i^k = 1$.

Définition 1.4.7. On appelle **profil de stratégies mixtes** σ le vecteur $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ des stratégies mixtes des différents joueurs.

Notons qu'une stratégie pure $s_i \in \mathcal{S}_i$ peut être vue comme un cas particulier de stratégie mixte σ_i : la distribution dont toutes les composantes σ_i^k sont nulles sauf l'une d'elles qui est égale à 1.

Utilité d'une stratégie mixte

On a défini l'utilité du joueur i comme une fonction $u_i : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto u_i(s)$. On suppose à présent que tout joueur i peut utiliser une action aléatoire S_i ¹ composante d'une stratégie aléatoire $S = (S_1, \dots, S_N)$, de loi σ . On suppose que les S_i sont indépendantes, de loi σ_i .

Pour toute stratégie aléatoire $S = (S_1, \dots, S_N)$, on note, comme pour les actions, (S_i, S_{-i}) le vecteur aléatoire $(S_i, S_{-i}) = (S_1, \dots, S_{i-1}, S_i, S_{i+1}, \dots, S_N)$, et, dans le cas où S_i est non aléatoire, égale à une action $s_i \in \mathcal{S}_i$, on note (s_i, S_{-i}) la loi de (S_i, S_{-i}) .

Définition 1.4.8. Soit $S = (S_1, \dots, S_N)$ de loi $\sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_N$, les v.a. $S_1, \dots, S_N$ étant supposées indépendantes. Pour tout joueur i d'utilité u_i , l'**utilité espérée de la stratégie mixte** σ , notée $u_i(\sigma)$ est définie par $u_i(\sigma) = \mathbb{E}^\sigma(u_i(S_1, \dots, S_N))$, où $\mathbb{E}^\sigma$ désigne l'espérance sous la loi σ .

Définition 1.4.9. Pour tout joueur i on appelle **utilité sous σ de l'action** s_i le nombre $\mathbb{E}^\sigma(u_i(s_i, S_{-i}))$.

Ceci permet de définir l'équilibre de Nash en stratégie mixte :

Définition 1.4.10. Un profil de stratégie mixte σ^* est un **équilibre de Nash en stratégie mixte** ou simplement un **équilibre de Nash** si pour tout joueur i et pour tout $s_i \in \mathcal{S}_i$, on a :

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i}^*).$$

1. Une manière de concevoir cela est de voir ce qui est appelé ici un joueur comme une classe de joueurs et les composantes de la distribution $\sigma_i = (\sigma_i^1, \dots, \sigma_i^N)$ comme les proportions de ces joueurs optant pour les différentes stratégies pures.

En d'autres termes, à l'équilibre, pour chaque joueur, sa stratégie d'équilibre est préférable à toutes ses stratégies pures. L'intérêt de cette définition d'équilibre est que nous avons alors le théorème d'existence suivant :

Théorème 1.4.11. Chaque jeu sous forme stratégique possède (au moins) un équilibre de Nash en stratégie mixte (qui parfois est un équilibre en stratégie pure).

Démonstration. Voir [14]. □

Principe d'indifférence pour le calcul d'un équilibre de Nash

Le résultat suivant, dit principe d'indifférence, est utile à la mise en équation du calcul de l'équilibre de Nash en stratégie effectivement mixte : il existe toujours au moins un équilibre de Nash mais il se peut que ce soit seulement des équilibres en stratégie pure et qu'il n'existe pas d'équilibre effectivement mixte au sens suivant :

Définition 1.4.12. On dit qu'une stratégie σ est **effectivement mixte** pour i si $\mathbb{P}^{\sigma_i}(s_i) \neq 0$ pour tout $s_i \in \mathcal{S}_i$.

Proposition 1.4.13 (Principe d'indifférence). Soient $S_1, \dots, S_d$ indépendantes de loi jointe $\sigma^* = \sigma_1^* \times \dots \times \sigma_d^*$. Si σ^* est un équilibre de Nash effectivement mixte pour i , toutes les utilités du joueur i sous σ^* , $\mathbb{E}^{\sigma^*}(u_i(s_i, S_{-i}))$, de ses actions (pures) $s_i \in \mathcal{S}_i$ sont égales. En d'autres termes, pour toutes actions $s'_i \in \mathcal{S}_i$ et $s''_i \in \mathcal{S}_i$.

$$\mathbb{E}^{\sigma^*}(u_i(s'_i, S_{-i})) = \mathbb{E}^{\sigma^*}(u_i(s''_i, S_{-i})).$$

Démonstration. Pour tout $s_i \in \mathcal{S}_i$ notons $a_{s_i} = \mathbb{E}^{\sigma^*}(u_i(s_i, S_{-i}))$ et $p_{s_i}^* = \mathbb{P}^{\sigma^*}(S_i = s_i)$.

Comme σ^* est un équilibre de Nash, l'utilité pour i de l'action aléatoire $S_i \rightsquigarrow \sigma_i^*$ est préférable à toute action pure $\bar{s}_i \in \mathcal{S}_i$ et donc $a_{\bar{s}_i} \leq \sum_{s_i \in \mathcal{S}_i} a_{s_i} p_{s_i}^*$, d'où

$$0 \leq \sum_{s_i \in \mathcal{S}} a_{s_i} p_{s_i}^* - a_{\bar{s}_i} = \sum_{s_i \in \mathcal{S}_i} a_{s_i} p_{s_i}^* - a_{\bar{s}_i} \sum_{s_i \in \mathcal{S}_i} p_{s_i}^* = \sum_{s_i \in \mathcal{S}_i} (a_{s_i} - a_{\bar{s}_i}) p_{s_i}^*. \quad (1.13)$$

Choisissons $\bar{s}_i = \text{Argmax}_{s_i \in \mathcal{S}_i} a_{s_i}$, et donc $a_{s_i} - a_{\bar{s}_i} \leq 0$ pour tout s_i . En revenant à (1.13), on voit que $0 \leq \sum_{s_i \in \mathcal{S}_i} (a_{s_i} - a_{\bar{s}_i}) p_{s_i}^* \leq 0$ d'où $a_{s_i} - a_{\bar{s}_i} = 0$ pour tout s_i , ce qui montre que tous les $a_{s_i} = \mathbb{E}^{\sigma^*}(u_i(s_i, S_{-i}))$ sont égaux. □

Exemple 1.4.14. Fudenberg et Tirole [14] considèrent le jeu suivant qui va nous fournir l'occasion de déterminer un équilibre de Nash en stratégie mixte en utilisant le principe d'indifférence.

	E	$\neg E$
B	1.5, -1	3.5, 0
$\neg B$	2, 1	3, 0

FIGURE 1.4 – Utilités d'un jeu à deux joueurs, à savoir le joueur 1 avec les stratégies B et $\neg B$ et le joueur 2 avec les stratégies E et $\neg E$.

On vérifie tout d'abord que ce jeu possède deux équilibres en stratégie pure : $(\neg B, E)$ et $(B, \neg E)$, en gras sur le tableau. Recherchons s'il y a un équilibre en stratégie mixte σ^* , effectivement mixte. Posons $x = \mathbb{P}^{\sigma_1^*}(B)$ et $y = \mathbb{P}^{\sigma_2^*}(E)$. Si on suppose que x et y sont différents de 0 et 1, nous pouvons appliquer le principe d'indifférence.

(σ^*)	E	$\neg E$	σ_1^*
B	xy	$x(1-y)$	x
$\neg B$	$(1-x)y$	$(1-x)(1-y)$	$1-x$
σ_2^*	y	$1-y$	1

FIGURE 1.5 – Probabilités conjointes et marginales du jeu de la figure 1.4.

Le principe d'indifférence (proposition 1.4.13) conduit aux deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*(u_1(B, S_2)) &= \mathbb{E}^*(u_1(\neg B, S_2)) \\ \mathbb{E}^*(u_2(S_1, E)) &= \mathbb{E}^*(u_2(S_1, \neg E))\end{aligned}$$

d'où les deux chaînes d'égalités

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*(u_1(B, S_2)) &= \mathbb{E}^*(u_1(\neg B, S_2)) \\ 1.5y + 3.5(1-y) &= 2y + 3(1-y) \\ y &= 0.5\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*(u_2(S_1, E)) &= \mathbb{E}^*(u_2(S_1, \neg E)) \\ -x + (1-x) &= 0(x) + 0(1-x) \\ 1 - 2x &= 0 \\ x &= 0.5.\end{aligned}$$

On trouve $x = 0.5$ et $y = 0.5$ et donc $\sigma_1 = \sigma_2 = (0.5, 0.5)$. A noter que les deux équilibres en stratégie pure $(\neg B, E)$ et $(B, \neg E)$ sont l'un et l'autre des équilibres en stratégie mixte, correspondant à $(x, y) = (0, 1)$ et $(x, y) = (1, 0)$ respectivement mais ils ne peuvent pas être obtenus par le principe d'indifférence.

1.4.4 Jeux bayésiens

Les jeux suivants ont été introduits par Harsanyi sous le nom de jeux bayésiens [14]. Dans le cas des jeux sous forme stratégique décrits ci-dessus, les différentes stratégies et leurs utilités sont connues de l'ensemble des joueurs : on dit qu'il s'agit de jeux en **information complète**.

Mais parfois certains joueurs possèdent une information sur le jeu dont les autres joueurs ne disposent pas. Par exemple dans le cas d'un prêt financier, la banque ignore en général si l'emprunteur est efficient ou non alors que l'emprunteur, lui, le sait (information privée).

L'approche de Harsanyi permet de transformer un jeu en **information incomplète** en un jeu en **information imparfaite** selon Bien et al. [3] : on suppose que certains joueurs possèdent plusieurs types différents, et que ce sont les « mouvements de la nature » qui choisissent le type des joueurs. Ces mouvements de la nature sont aléatoires et interviennent selon une distribution de probabilité donnée.

Ce point de vue permet de ramener le jeu en information incomplète à un jeu sous forme stratégique, pour lequel on sait qu'un équilibre de Nash (en stratégie pure ou mixte) existe, mais en ayant remplacé les stratégies des joueurs ayant plusieurs types par des stratégies "fonctionnelles", assignant à chaque type l'une des stratégies disponibles.

Nous détaillons un exemple au chapitre 4.

Les jeux bayésiens se représentent dans des tableaux d'utilités comme les jeux sous forme stratégique.

Définition 1.4.15. Un **jeu bayésien**, jeu sous forme stratégique en information incomplète, consiste en

- un ensemble fini $N = \{1, 2, \dots, i, \dots, n\}$ de n **joueurs**
- un ensemble fini $\mathcal{S}_i$ d'actions pour chaque joueur i , ($\mathcal{S} = \prod_{i \in N} \mathcal{S}_i$).
- un ensemble de types ² Θ , ($\Theta = \prod_{i \in N} \Theta_i$).
- une fonction utilité u_i pour chaque joueur i , $u_i : \mathcal{S} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$.
- une fonction de probabilité p_i pour chaque joueur, $p_i : \Theta_i \rightarrow \Delta(\Theta_{-i})$,

où $\Delta(\mathcal{E})$ désigne l'ensemble des distributions de probabilité sur $\mathcal{E}$.

La fonction p_i résume ce que le joueur i pense des types des autres joueurs étant donné son type. Donc, $p_i(\theta_{-i}|\theta_i)$ est la probabilité conditionnelle attribuée par le

2. Le type de joueur est l'information privée initiale.

joueur i de type θ_i au profil type $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$. De même, $u_i(s|\theta)$ est l'utilité du joueur i lorsque le profil d'action est s et le profil de type est θ .

Le jeu bayésien est dit **fini** si N , $\mathcal{S}_i$, et Θ_i sont tous finis, pour tout $i \in N$.

L'idée nouvelle des jeux bayésiens est de définir les stratégies pures non plus comme une liste des actions disponibles pour chaque joueur mais comme une fonction qui à chaque type associe une action.

Définition 1.4.16. Dans un jeu bayésien, une **stratégie pure du joueur i** est une fonction $s_i : \Theta_i \rightarrow \mathcal{S}_i$, $s_i(\theta_i)$ représentant le choix d'action du joueur i s'il est de type θ_i .

Une **stratégie mixte du joueur i** est une fonction $\alpha_i : \Theta_i \rightarrow \Delta(\mathcal{S}_i)$, où $\alpha_i(\theta_i)(s_i)$, aussi notée $\alpha_i(s_i|\theta_i)$, est la probabilité de l'action s_i pour un joueur de type θ_i .

On peut maintenant définir la notion d'équilibre pour les jeux bayésiens :

Définition 1.4.17. Un **équilibre bayésien** d'un jeu bayésien est un profil de stratégie mixte $\alpha = (\alpha_i)_{i \in N}$, tel que pour chaque joueur $i \in N$ et chaque type $\theta_i \in \Theta_i$, nous avons

$$\alpha_i(\cdot|\theta_i) \in \arg \max_{\gamma \in \Delta(\mathcal{S}_i)} \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p_i(\theta_{-i}|\theta_i) \sum_{s \in \mathcal{S}} \left(\prod_{j \in N \setminus \{i\}} \alpha_j(s_j|\theta_j) \right) \gamma(s_i) u_i(s|\theta).$$

Exemple 1.4.18. Voici un exemple donné par Munoz-Gracia [34], d'un jeux bayésien appelé *le jeu de la dispute* qui a un équilibre en stratégie pure. Les joueurs 1 et 2 ont chacun deux stratégies, *fight* (F) et *yield* (Y). Le joueur 2 a deux types différents, *strong* (S) et *weak* (W), le joueur 2 connaît son propre type mais le joueur 1 ne connaît pas le type du joueur 2. Les utilités des deux joueurs sont présentées dans les tableaux suivants, selon que le joueur 2 est de type S (à gauche) ou W (à droite) :

$(\Theta_2 = S)$	F	Y	$(\Theta_2 = W)$	F	Y
F	$-1; 1$	$1; 0$	F	$1; -1$	$1; 0$
Y	$0; 1$	$0; 0$	Y	$0; 1$	$0; 0$

FIGURE 1.6 – Utilités des deux joueurs dans le cas où le type du joueur 2 est connu

Il est facile de vérifier que, si le joueur 2 est de type S , la stratégie $\{Y, F\}$ est un équilibre de Nash en stratégie pure et si le joueur 2 est de type W , c'est la stratégie $\{F, Y\}$ qui est un équilibre de Nash en stratégie pure.

Pour construire le jeu bayésien correspondant, il faut redéfinir les stratégies du joueur 2 en tenant compte de son type, celles du joueur 1 restant inchangées. On a les stratégies du joueur 1 (S_1) et les stratégies du joueur 2 (S_2) suivantes :

$$S_1 = \{F, Y\} \text{ et } S_2 = \{F^S F^W, F^S Y^W, Y^S F^W, Y^S Y^W\}$$

où $F^S F^W$ signifie que le joueur 2 choisit la stratégie F , qu'il soit de type S ou W , alors que $F^S Y^W$ signifie que le joueur 2 choisit la stratégie F s'il est de type S et la stratégie Y s'il est de type W . De même pour $Y^S F^W$ et $Y^S Y^W$.

Afin de pouvoir calculer les utilités de chacune des stratégies S_2 , on suppose qu'elles reposent sur une "croyance" : la probabilité, appelée prior, de chacun des types du joueur 2. On considère que la probabilité que le joueur 2 soit de type S est p et donc que la probabilité que le joueur 2 soit de type W est $1 - p$.

Nous allons voir que l'utilité espérée de chaque stratégie est donnée par le tableau suivant :

	$F^S F^W$	$F^S Y^W$	$Y^S F^W$	$Y^S Y^W$
F	$1 - 2p; 2p - 1$	$1 - 2p; p$	$1; p - 1$	$1; 0$
Y	$0; 1$	$0; p$	$0; 1 - p$	$0; 0$

FIGURE 1.7 – Utilités des 2 joueurs si le type du joueur 2 n'est pas connu

- Si le joueur 1 choisit la stratégie F , et si le joueur 2 choisit la stratégie F s'il est de type S et la stratégie F s'il est de type W , on a :

$$\mathbb{E}[u_1(F, F^S F^W)] = (-1)p + (1)(1 - p) = 1 - 2p.$$

$$\mathbb{E}[u_2(F, F^S F^W)] = (1)p + (-1)(1 - p) = 2p - 1.$$

- Si le joueur 1 choisit la stratégie F , et si le joueur 2 choisit la stratégie F s'il est de type S et la stratégie Y s'il est de type W , on a :

$$\mathbb{E}[u_1(F, F^S Y^W)] = (-1)p + (1)(1 - p) = 1 - 2p.$$

$$\mathbb{E}[u_2(F, F^S Y^W)] = (1)p + (0)(1 - p) = p.$$

De même pour l'espérance des utilités de la banque et de l'agent d'autres stratégies, ce que nous pouvons voir dans la figure [1.7](#).

Nous pouvons déterminer maintenant les équilibres de Nash bayésiens, en stratégie pure de ce jeu. Par examen du tableau des utilités de la figure [1.7](#), on comprend que ce jeu possède un équilibre de Nash en stratégie pure mais que celui-ci dépend de la probabilité p . On peut en effet vérifier que

- si $p \leq \frac{1}{2}$, la stratégie $(F, F^S Y^W)$ est un équilibre : en effet si la stratégie du joueur 2 est $F^S Y^W$, la stratégie F est préférable à Y pour le joueur 1 car $1 - 2p \geq 0$. Et si la stratégie du joueur 1 est F , la stratégie $F^S Y^W$ est préférable aux trois autres stratégies du joueur 2 car $p \geq 2p - 1$, $p \geq p - 1$ et $p \geq 0$.

- si $p \geq \frac{1}{2}$, la stratégie $(Y, F^S F^W)$ est un équilibre : en effet, si la stratégie du joueur 2 est $F^S F^W$, la stratégie Y est préférable à la stratégie F pour le joueur 1 car $0 \geq 1 - 2p$. Et si Y est la stratégie du joueur 1, la stratégie $F^S F^W$ est préférable aux trois autres car $1 \geq p$, $1 \geq 1 - p$ et $1 \geq 0$.

En d'autres termes, le joueur 1, qui ignore le type du joueur 2, jouera à l'équilibre F s'il croit que le type du joueur 2 est plus probablement W que S . Au contraire, s'il croit que le type du joueur 2 est plus probablement S que W , il jouera Y . De son côté, à l'équilibre, le joueur 2 jouera toujours F s'il est de type S mais, s'il est de type W , il jouera Y ou F selon la croyance p qu'il a sur le type du joueur 1.

Chapitre 2

Modèle de chaîne de Markov pour le microcrédit conduisant à l'inclusion

Au fil du temps, des institutions de microfinance ont vu le jour dans divers pays pour fournir des microcrédits. On appelle institution de microfinance (IMF) l'organisme (souvent une ONG) qui accorde un prêt à une microentreprise et assure l'accompagnement des microentrepreneurs. L'objectif d'inclusion financière, c'est-à-dire la possibilité donnée à chacun d'accéder aux produits financiers classiques, notamment d'obtenir un prêt auprès d'une banque régulière, est une des missions souvent affichées par les IMF. Les entrepreneurs pauvres pourraient ainsi augmenter leurs revenus et sortir lentement de la pauvreté. (Voir Helms [17])

Auparavant, plusieurs articles ont traité des problèmes du microcrédit et de sa modélisation.

Plusieurs études abordent la question de l'asymétrie d'information entre l'IMF et le microentrepreneur, notamment sous l'angle de la sélection adverse.

Stiglitz et Weiss [43] ont discuté du rationnement du crédit dû à l'information incomplète de la banque. Celle-ci accorde un prêt à taux d'intérêt élevé à un emprunteur dont la probabilité de rembourser le prêt est faible et un prêt à taux plus faible à celui dont la probabilité de rembourser le prêt est plus élevée.

Dans [12], Duflo explique la même idée que Stiglitz et Weiss c'est-à-dire que le taux d'intérêt du prêt dépend de la probabilité de rembourser le prêt et elle explique que les IMF offrent initialement de très petits prêts, dont la taille augmente avec le temps afin de révéler la véritable probabilité de succès du microentrepreneur et pouvoir lui accorder de meilleurs taux d'intérêt plus tard.

Tedeschi [45] montre que, pour que les prêts progressifs fonctionnent, la rentabilité de l'emprunteur doit être élevée, les coûts des prêts doivent être faibles et les emprunteurs à risque ne doivent pas être trop risqués.

Que la microfinance soit ou non un moyen de permettre à ses bénéficiaires de sor-

tir de la pauvreté, ou simplement un instrument d'inclusion est un sujet controversé, en particulier quand il n'y a pas de projet entrepreneurial clair pour l'utilisation du prêt comme, c'est souvent le cas dans l'activité agricole et pastorale (voir Morvant-Roux et al. [33]).

Dans notre modèle, nous étudions la possibilité que le microcrédit mène à l'inclusion financière, dans le sens de l'opportunité pour les pauvres d'avoir accès au système bancaire régulier pour obtenir des prêts pour leur petite entreprise. Nous nous inspirons d'études précédentes, Diener et al. [11] et Khodr [25] qui ont introduit des modèles de microcrédit utilisant des chaînes de Markov. Dans leurs modèles, si les bénéficiaires échouent à rembourser leur prêt, ils ne peuvent obtenir un nouveau prêt mais entrent dans une phase d'exclusion (sans prêt). Nous avons présenté le modèle de prêt individuel de Khodr dans la section 1.3.1. Ici, nous discutons de cette question dans le cadre de ce que nous appelons une Chaîne de Markov avec Revenu (CMR) qui permet de considérer le Flux de Revenus Espéré (FRE) comme mesure d'un comportement rationnel des bénéficiaires. Des modèles mathématiques similaires ont également été utilisés par N. Dhib pour discuter de l'activité de microcrédit dans le sud de la Tunisie [10].

Dans ce chapitre, nous commençons par décrire notre modèle (section 2.1) puis nous donnons des formules explicites pour calculer le flux de revenus espéré (section 2.2). Un calcul de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov (section 2.3) montre que, si l'on veut favoriser l'inclusion, il faut augmenter les probabilités de succès des divers prêts, ce qui n'est pas surprenant, mais inversement, la section 2.4 montre que l'hypothèse d'absence de défaut stratégique (ADS) fournit non seulement des limites supérieures aux probabilités de succès, mais aussi parfois des limites inférieures, ce qui est moins intuitif. L'hypothèse d'ADS est l'hypothèse selon laquelle il ne doit pas être plus intéressant pour un bénéficiaire rationnel de faire défaut que de rembourser son prêt afin d'obtenir un prêt plus favorable. Enfin nous terminons (section 2.5) par une étude, encore très partielle, par simulations, de la loi du flux de revenus dans notre modèle.

2.1 Description du modèle

Considérons une institution de microfinance (IMF) qui travaille pour un groupe de bénéficiaires potentiels et dont l'objectif principal est d'aider chacun d'eux, par l'octroi de deux microcrédits successifs, à être acceptés dans le système bancaire ordinaire s'ils ont réussi, grâce à leur historique de crédit favorable. Lorsqu'il obtient un microcrédit, le bénéficiaire est confronté à des taux d'intérêt élevés, de sorte que sa petite entreprise ne produit pas un revenu net élevé. Pour modéliser une forte incitation à l'inclusion, nous supposons que la petite entreprise permet au

bénéficiaire de couvrir ses coûts de base c mais sans générer de revenu net. Au contraire, nous supposons que, lorsqu'il est inclus dans le système bancaire ordinaire, le taux d'intérêt est beaucoup plus bas et cela lui permet de générer un flux de revenus nets.

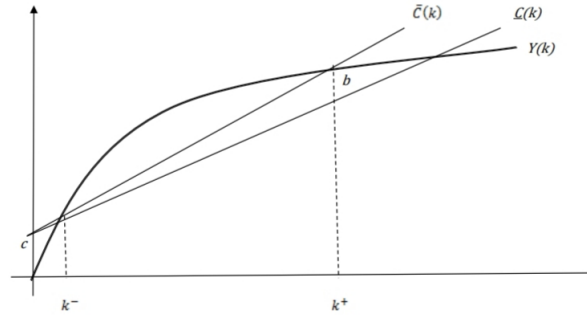


FIGURE 2.1 – Fonctions de production et de coût en fonction du taux d'intérêt du prêt.

Plus précisément, soit $Y(k)$ la fonction de production qui représente le revenu que le bénéficiaire peut tirer d'un prêt k investi dans sa microentreprise. Supposons que $Y(k)$ est croissante et concave, par exemple $Y(k) = k^\alpha$, avec $0 < \alpha < 1$, comme pour une fonction de Cobb-Douglas. Désignons par $\overline{C}(k)$ et $\underline{C}(k)$ les fonctions de coût, $\overline{C}(k) = c + (1+r)k$, $\underline{C}(k) = c + (1+r')k$ qui sont la somme de la consommation de base c du bénéficiaire pendant une période et du montant qu'il doit rembourser, r et r' représentant les taux d'intérêt pour un microcrédit et pour un crédit régulier respectivement (nous supposons que $r > r'$). Nous supposons que les fonctions $Y(k)$, $\overline{C}(k) = c + (1+r)k$ et $\underline{C}(k) = c + (1+r')k$ sont comme dans la figure 2.1, ce qui signifie qu'un microcrédit (avec un taux d'intérêt r) n'est rentable que lorsque $k^- \leq k \leq k^+$. Nous choisirons deux types de microcrédits, un petit $k = k^-$ et un plus grand $k = k^+$. Comme $Y(k^-) = \overline{C}(k^-)$ et $Y(k^+) = \overline{C}(k^+)$, aucun de ces microcrédits ne génère des profits au-delà de la couverture des coûts. Au contraire, nous supposons que lorsque il est inclus dans le système bancaire ordinaire, le bénéficiaire reçoit un prêt de même montant k^+ et comme le taux d'intérêt r' est plus petit, $r' < r$, le revenu net $b = Y(k^+) - \underline{C}(k^+)$ est strictement positif. Ce prêt est maintenant rentable, générant un bénéfice net b , tant que le bénéficiaire réussit son entreprise.

Pour décrire la dynamique du modèle, nous utilisons la chaîne de Markov suivante. Nous supposons que le bénéficiaire se trouve dans l'un des quatre états : demandeur (A) sollicitant un petit prêt, bénéficiaire (B^-) d'un petit prêt, bénéficiaire (B^+) d'un gros prêt, et inclus (I) dans le système bancaire ordinaire. L'ensemble

des états est dès lors $\mathcal{S} := \{A, B^-, B^+, I\}$ et les probabilités de transition d'un état à l'autre sont données dans la figure suivante :

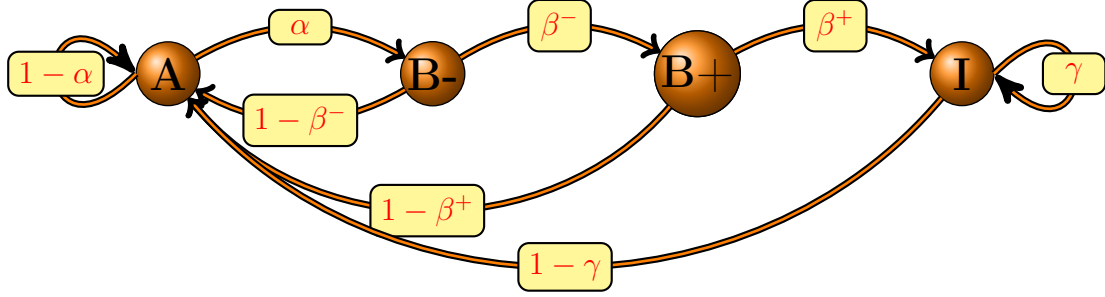


FIGURE 2.2 – Les quatre états de l'emprunteur potentiel : demandeur d'un prêt (A), bénéficiaire d'un petit prêt (B^-), bénéficiaire d'un grand prêt (B^+) et inclus (I), et les probabilités de transition d'un état à l'autre.

Un demandeur A peut soit devenir un bénéficiaire B^- avec une probabilité α , soit rester à l'état A avec une probabilité $1 - \alpha$. Nous pouvons considérer α comme la proportion de candidats retenus dans la population ciblée par l'IMF. Cette proportion peut être faible, même si l'IMF accorde beaucoup de prêts. Un bénéficiaire dans l'état B^- peut soit réussir dans son entreprise et être capable de rembourser son prêt, avec une probabilité β^- , ce qui lui permet de passer dans l'état B^+ et obtenir un nouveau prêt plus important k^+ , soit il ne peut pas rembourser son prêt et retourne à l'état A avec probabilité $1 - \beta^-$. De même, le bénéficiaire dans l'état B^+ est soit capable de rembourser son prêt avec probabilité β^+ et il devient alors inclus I et obtient à nouveau un prêt k^+ mais avec un meilleur taux d'intérêt r' du système bancaire ordinaire, soit il ne peut pas rembourser son prêt et il retourne à l'état A avec probabilité $1 - \beta^+$. Les deux paramètres β^- et β^+ peuvent être considérés comme les probabilités de succès de la petite entreprise ayant obtenu un petit k^- ou un grand k^+ microcrédit. Enfin, le bénéficiaire dans l'état I peut soit réussir et rembourser son prêt avec la probabilité γ , il restera alors dans l'état I et recevra à nouveau le même prêt, soit retourner à l'état A avec la probabilité $1 - \gamma$, s'il ne peut pas rembourser son prêt. La matrice de transition P de cette chaîne de Markov est donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 1 - \beta^- & 0 & \beta^- & 0 \\ 1 - \beta^+ & 0 & 0 & \beta^+ \\ 1 - \gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Pour résumer, la dynamique de la population des emprunteurs potentiels est donnée par une chaîne de Markov à quatre états $\mathcal{S} = \{A, B^-, B^+, I\}$ avec une matrice de transition P dépendant de quatre paramètres, α , β^- , β^+ et γ et, pour décrire le revenu produit par l'entreprise grâce aux différents prêts, nous supposons une absence de revenu net lorsque le bénéficiaire obtient son prêt d'une IMF et un revenu net strictement positif $b = k^+(r - r')$ lorsqu'il est inclus dans le système bancaire ordinaire.

Notre modèle est un exemple de chaîne de Markov avec revenu (CMR) comme défini en [1.3.3](#). L'idée est de considérer non seulement la dynamique stochastique d'un agent passant d'un état au temps t à un autre état au temps $t + 1$, avec la loi donnée par la chaîne de Markov X , mais aussi une fonction de revenu f (profit ou perte) que l'agent peut obtenir en se déplaçant le long de cette dynamique.

Dans notre modèle, la fonction de revenu est donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} Y(k^-) - \overline{C}(k^-) = 0 & \text{si } (x, y) = (B^-, B^+) \\ Y(k^+) - \overline{C}(k^+) = 0 & \text{si } (x, y) = (B^+, I) \\ Y(k^+) - \underline{C}(k^+) = b = k^+(r - r') & \text{si } (x, y) = (I, I) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2)$$

ou plus simplement

$$f(x, y) = \begin{cases} k^+(r - r') & \text{si } x = I = y \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2 Formules explicites pour le flux de revenus

Comme nous l'avons vu au chapitre 1 (théorème [1.3.7](#)), dans une chaîne de Markov avec revenu, on peut calculer le flux de revenus espéré par une formule utilisant la matrice P , le taux d'actualisation δ et le revenu espéré sur une période. Nous allons faire ce calcul maintenant.

Rappelons que le flux de revenus espéré (FRE) noté $W = {}^t(w^A, w^{B^-}, w^{B^+}, w^I)$ est défini, pour tout état $s \in \mathcal{S} = \{A, B^-, B^+, I\}$, par

$$w^s = \mathbb{E} \left(\sum_{t \geq 0} \delta^t f(X_{t+1}, X_t) \mid X_0 = s \right)$$

et l'espérance de revenu sur une étape $\overline{W} = {}^t(\overline{w}^{s_1}, \dots, \overline{w}^{s_N})$ par

$$\overline{w}^s = \mathbb{E}(f(X_0, X_1) \mid X_0 = s)$$

pour tout état $s \in \mathcal{S} = \{A, B^-, B^+, I\}$.

On a vu (théorème [1.3.7](#)) que l'on a la relation

$$W = \delta(\mathbb{I} - \delta P)^{-1} \overline{W}$$

ce qui va nous permettre de calculer explicitement le FRE dans notre modèle. Notons que, pour tout état $s \in \mathcal{S}$, w^s est une fonction de tous les paramètres $\alpha, \beta^-, \beta^+, \gamma, \delta, k^-, k^+, r, r'$ du modèle.

On pose $M = \mathbb{I} - \delta P$, $\Delta = \det(M)$ et on désigne par C la transposée de la matrice des cofacteurs de M de sorte que $M^{-1} = \frac{1}{\Delta} C$. Un calcul un peu long mais simple montre que

Proposition 2.2.1. Pour $\delta \in (0, 1)$, la matrice inverse de $M = \mathbb{I} - \delta P$ est donnée par $M^{-1} = \frac{1}{\Delta} C$, avec

$$C = \begin{pmatrix} 1 - \delta\gamma & \delta\alpha(1 - \delta\gamma) & \delta^2\alpha\beta^-(1 - \delta\gamma) & \delta^3\alpha\beta^-\beta^+ \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & C_{3,4} \\ \delta(1 - \gamma) & \delta^2\alpha(1 - \gamma) & \delta^3\alpha\beta^-(1 - \gamma) & C_{4,4} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

où

$$\begin{aligned} C_{2,1} &= \delta - \delta(1 - \delta)\beta^- - \delta^2\gamma - \delta^2(1 - \delta)\beta^-\beta^+ + \delta^2(1 - \delta)\beta^-\gamma \\ C_{2,2} &= 1 - \delta + \delta\alpha - \delta(1 - \delta)\gamma - \delta^2\alpha\gamma \\ C_{2,3} &= \delta(1 - \delta)\beta^- + \delta^2\alpha\beta^- - \delta^2(1 - \delta)\beta^-\gamma - \delta^3\alpha\beta^-\gamma \\ C_{2,4} &= \delta^2(1 - \delta)\beta^-\beta^+ + \delta^3\alpha\beta^-\beta^+ \\ C_{3,1} &= \delta - \delta(1 - \delta)\beta^+ - \delta^2\gamma \\ C_{3,2} &= \delta^2\alpha - \delta^2(1 - \delta)\alpha\beta^+ - \delta^3\alpha\gamma \\ C_{3,3} &= 1 - \delta + \delta(1 - \delta)\alpha - \delta(1 - \delta)\gamma + \delta^2\alpha\beta^- - \delta^2(1 - \delta)\alpha\gamma - \delta^3\alpha\beta^-\gamma \\ C_{3,4} &= \delta(1 - \delta)\beta^+ + \delta^2(1 - \delta)\alpha\beta^+ + \delta^3\alpha\beta^-\beta^+ \\ C_{4,4} &= 1 - \delta + \delta(1 - \delta)\alpha + \delta^2(1 - \delta)\alpha\beta^- + \delta^3\alpha\beta^-\beta^+. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta &= \det(\mathbb{I} - \delta P) \\ &= (1 - \delta) (1 + \delta\alpha - \delta\gamma + \delta^2\alpha\beta^- - \delta^2\alpha\gamma + \delta^3\alpha\beta^-\beta^+ - \delta^3\alpha\beta^-\gamma) \\ &> 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ainsi, Δ est un polynôme de degré un en chacun des paramètres α, β^-, β^+ et γ , de même que tous les coefficients $C_{i,j}$ de la matrice C .

Démonstration. Un calcul simple permet de vérifier que $\frac{1}{\Delta}C(\mathbb{I} - \delta P) = \mathbb{I} = \frac{1}{\Delta}(\mathbb{I} - \delta P)C$. Le fait que $\Delta > 0$ pour $\delta \in]0, 1[$ découle du fait que Δ est une fonction continue de δ , égale à 1 pour $\delta = 0$ et ne peut pas s'annuler sur $[0, 1[$ car $\Delta = \det(\mathbb{I} - \delta P)$ et $M = \mathbb{I} - \delta P$ est inversible. $\square$

Nous expliquons ci-dessous comment nous avons trouvé les coefficients de la matrice C et le déterminant de la matrice M donnés dans la proposition [2.2.1](#). De l'expression de P donnée en [\(2.1\)](#), nous trouvons

$$M = \mathbb{I} - \delta P = \begin{pmatrix} 1 - \delta(1 - \alpha) & -\delta\alpha & 0 & 0 \\ -\delta(1 - \beta^-) & 1 & -\delta\beta^- & 0 \\ -\delta(1 - \beta^+) & 0 & 1 & -\delta\beta^+ \\ -\delta(1 - \gamma) & 0 & 0 & 1 - \delta\gamma \end{pmatrix}.$$

Calculons $\det(M) = \Delta$:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^{2+3}(-\delta\beta^-) \begin{vmatrix} 1 - \delta(1 - \alpha) & -\delta\alpha & 0 \\ -\delta(1 - \beta^+) & 0 & -\delta\beta^+ \\ -\delta(1 - \gamma) & 0 & 1 - \delta\gamma \end{vmatrix} + \\ &\quad (-1)^{3+3}(1) \begin{vmatrix} 1 - \delta(1 - \alpha) & -\delta\alpha & 0 \\ -\delta(1 - \beta^-) & 1 & 0 \\ -\delta(1 - \gamma) & 0 & 1 - \delta\gamma \end{vmatrix} + \\ &= \delta\beta^-(-1)^{1+2}(-\delta\alpha) \begin{vmatrix} -\delta(1 - \beta^+) & -\delta\beta^+ \\ -\delta(1 - \gamma) & 1 - \delta\gamma \end{vmatrix} + \\ &\quad (-1)^{3+3}(1 - \delta\gamma) \begin{vmatrix} 1 - \delta(1 - \alpha) & -\delta\alpha \\ -\delta(1 - \beta^-) & 1 \end{vmatrix} + \\ &= \delta^2\alpha\beta^- [-\delta(1 - \beta^+)(1 - \delta\gamma) - (-\delta\beta^+)(-\delta(1 - \gamma))] + \\ &\quad (1 - \delta\gamma)[(1 - \delta)(1 - \alpha) - (-\delta\alpha)(-\delta(1 - \beta^-))] + \\ &= (1 - \delta)(1 + \delta\alpha - \delta\gamma + \delta^2\alpha\beta^- - \delta^2\alpha\gamma + \delta^3\alpha\beta^-\beta^+ - \delta^3\alpha\beta^-\gamma). \end{aligned}$$

Calculons maintenant la matrice A des cofacteurs de M en déterminant successivement chacun de ses 16 coefficients a_{ij} :

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -\delta\beta^- & 0 \\ 0 & 1 & -\delta\beta^+ \\ 0 & 0 & 1 - \delta\gamma \end{vmatrix} \\ &= (1)(1)(1 - \delta\gamma) \\ &= 1 - \delta\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,2} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -\delta(1-\beta^-) & -\delta\beta^- & 0 \\ -\delta(1-\beta^+) & 1 & -\delta\beta^+ \\ -\delta(1-\gamma) & 0 & 1-\delta\gamma \end{vmatrix} \\
&= (-1) \left[(-1)^{3+1}(-\delta(1-\gamma)) \begin{vmatrix} -\delta\beta^- & 0 \\ 1 & -\delta\beta^+ \end{vmatrix} + \right. \\
&\quad \left. (-1)^{3+3}(1-\delta\gamma) \begin{vmatrix} -\delta(1-\beta^-) & -\delta\beta^- \\ -\delta(1-\beta^+) & 1 \end{vmatrix} \right] \\
&= (-1) [(-\delta(1-\gamma))((- \delta\beta^-)(- \delta\beta^+) - (1)(0)) + \\
&\quad (1-\delta\gamma)((- \delta(1-\beta^-))(1) - (- \delta\beta^-)(- \delta(1-\beta^+)))] \\
&= \delta - \delta(1-\delta)\beta^- - \delta^2\gamma - \delta^2(1-\delta)\beta^-\beta^+ + \delta^2(1-\delta)\beta^-\gamma \\
a_{1,3} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -\delta(1-\beta^-) & 1 & 0 \\ -\delta(1-\beta^+) & 0 & -\delta\beta^+ \\ -\delta(1-\gamma) & 0 & 1-\delta\gamma \end{vmatrix} \\
&= (1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -\delta(1-\beta^+) & -\delta\beta^+ \\ -\delta(1-\gamma) & 1-\delta\gamma \end{vmatrix} \\
&= (-1) [-\delta(1-\beta^+)(-\delta(1-\gamma)) - (-\delta\beta^+)(-\delta(1-\gamma))] \\
&= \delta - \delta(1-\delta)\beta^+ - \delta^2\gamma \\
a_{1,4} &= (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -\delta(1-\beta^-) & 1 & -\delta\beta^- \\ -\delta(1-\beta^+) & 0 & 1 \\ -\delta(1-\gamma) & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-1)^{3+1}(-\delta(1-\gamma))[(1)(1) - (-\delta\beta^-)(0)] \\
&= \delta(1-\gamma) \\
a_{2,1} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -\delta\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta\beta^+ \\ 0 & 0 & 1-\delta\gamma \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-\delta\alpha)(1)(1-\delta\gamma) \\
&= \delta\alpha(1-\delta\gamma) \\
a_{2,2} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1-\delta(1-\alpha) & 0 & 0 \\ -\delta(1-\beta^+) & 1 & -\delta\beta^+ \\ -\delta(1-\gamma) & 0 & 1-\delta\gamma \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}(1-\delta(1-\alpha)) \begin{vmatrix} 1 & -\delta\beta^+ \\ 0 & 1-\delta\gamma \end{vmatrix} \\
&= (1-\delta(1-\alpha))[(1)(1-\delta\gamma) - (0)(-\delta\beta^+)] \\
&= 1 - \delta + \delta\alpha - \delta(1-\delta)\gamma - \delta^2\alpha\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{2,3} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 - \delta(1 - \alpha) & -\delta\alpha & 0 \\ -\delta(1 - \beta^+) & 0 & -\delta\beta^+ \\ -\delta(1 - \gamma) & 0 & 1 - \delta\gamma \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-1)^{1+2}(-\delta\alpha) \begin{vmatrix} -\delta(1 - \beta^+) & -\delta\beta^+ \\ -\delta(1 - \gamma) & 1 - \delta\gamma \end{vmatrix} \\
&= (-\delta\alpha)[(-\delta(1 - \beta^+))(1 - \delta\gamma) - (-\delta\beta^+)(-\delta(1 - \gamma))] \\
&= \delta^2\alpha - \delta^2(1 - \delta)\alpha\beta^+ - \delta^3\alpha\gamma \\
a_{2,4} &= (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 - \delta(1 - \alpha) & -\delta\alpha & 0 \\ -\delta(1 - \beta^+) & 0 & 1 \\ -\delta(1 - \gamma) & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+2}(-\delta\alpha) \begin{vmatrix} -\delta(1 - \beta^+) & 1 \\ -\delta(1 - \gamma) & 0 \end{vmatrix} \\
&= (\delta\alpha)[(-\delta(1 - \beta^+))(0) - (1)(-\delta(1 - \gamma))] \\
&= \delta^2\alpha(1 - \gamma) \\
a_{3,1} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -\delta\alpha & 0 & 0 \\ 1 & -\delta\beta^- & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \delta\gamma \end{vmatrix} \\
&= (-\delta\alpha)(-\delta\beta^-)(1 - \delta\gamma) \\
&= \delta^2\alpha\beta^-(1 - \delta\gamma) \\
a_{3,2} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 - \delta(1 - \alpha) & 0 & 0 \\ -\delta(1 - \beta^-) & -\delta\beta^- & 0 \\ -\delta(1 - \gamma) & 0 & 1 - \delta\gamma \end{vmatrix} \\
&= (-1)(1 - \delta(1 - \alpha))(-\delta\beta^-)(1 - \delta\gamma) \\
&= \delta(1 - \delta)\beta^- + \delta^2\alpha\beta^- - \delta^2(1 - \delta)\beta^-\gamma - \delta^3\alpha\beta^-\gamma \\
a_{3,3} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 - \delta(1 - \alpha) & -\delta\alpha & 0 \\ -\delta(1 - \beta^-) & 1 & 0 \\ -\delta(1 - \gamma) & 0 & 1 - \delta\gamma \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{3+3}(1 - \delta\alpha) \begin{vmatrix} 1 - \delta(1 - \alpha) & -\delta\alpha \\ -\delta(1 - \beta^-) & 1 \end{vmatrix} \\
&= (1 - \delta\alpha)[(1 - \delta(1 - \alpha))(1) - (-\delta\alpha)(-\delta(1 - \beta^-))] \\
&= 1 - \delta + \delta(1 - \delta)\alpha - \delta(1 - \delta)\gamma + \delta^2\alpha\beta^- - \delta^2(1 - \delta)\alpha\gamma - \delta^3\alpha\beta^-\gamma \\
a_{3,4} &= (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 - \delta(1 - \alpha) & -\delta\alpha & 0 \\ -\delta(1 - \beta^-) & 1 & -\delta\beta^- \\ -\delta(1 - \gamma) & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-1)^{2+3}(-\delta\beta^-) \begin{vmatrix} 1 - \delta(1 - \alpha) & -\delta\alpha \\ -\delta(1 - \gamma) & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-\delta\beta^-)[(1 - \delta(1 - \alpha))(0) - (-\delta\alpha)(-\delta(1 - \gamma))] \\
&= \delta^3\alpha\beta^-(1 - \gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4,1} &= (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -\delta\alpha & 0 & 0 \\ 1 & -\delta\beta^- & 0 \\ 0 & 1 & -\delta\beta^+ \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-\delta\alpha)(-\delta\beta^-)(-\delta\beta^+) \\
&= \delta^3\alpha\beta^-\beta^+ \\
a_{4,2} &= (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1-\delta(1-\alpha) & 0 & 0 \\ -\delta(1-\beta^-) & -\delta\beta^- & 0 \\ -\delta(1-\beta^+) & 1 & -\delta\beta^+ \end{vmatrix} \\
&= (-1)(1-\delta(1-\alpha))(-\delta\beta^-)(-\delta\beta^+) \\
&= \delta^2(1-\delta)\beta^-\beta^+ + \delta^3\alpha\beta^-\beta^+ \\
a_{4,3} &= (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1-\delta(1-\alpha) & -\delta\alpha & 0 \\ -\delta(1-\beta^-) & 1 & 0 \\ -\delta(1-\beta^+) & 0 & -\delta\beta^+ \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-1)^{3+3}(-\delta\beta^+) \begin{vmatrix} 1-\delta(1-\alpha) & -\delta\alpha \\ -\delta(1-\beta^-) & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-\delta\beta^+) [(1-\delta(1-\alpha))(1) - (-\delta\alpha)(-\delta(1-\beta^-))] \\
&= \delta(1-\delta)\beta^+ + \delta^2(1-\delta)\alpha\beta^+ + \delta^3\alpha\beta^-\beta^+ \\
a_{4,4} &= (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1-\delta(1-\alpha) & -\delta\alpha & 0 \\ -\delta(1-\beta^-) & 1 & -\delta\beta^- \\ -\delta(1-\beta^+) & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{3+3}(-\delta(1-\beta^+)) \begin{vmatrix} 1-\delta(1-\alpha) & -\delta\alpha \\ -\delta(1-\beta^-) & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\delta(1-\beta^+) [(1-\delta(1-\alpha))(1) - (-\delta\alpha)(-\delta(1-\beta^-))] \\
&= 1-\delta + \delta(1-\delta)\alpha + \delta^2(1-\delta)\alpha\beta^- + \delta^3\alpha\beta^-\beta^+.
\end{aligned}$$

Ayant déterminé les coefficients de la matrice A , nous pouvons facilement en déduire les coefficients de la matrice $C = (C_{i,j}) = (a_{j,i})$ donnés dans la proposition car $C = {}^t A$.

2.3 Distribution limite

Comme la plupart des chaînes de Markov, notre modèle a la propriété suivante : quelque soit la distribution initiale des agents entre les différents états, la dynamique modifie la distribution de telle sorte que lorsque le temps tend vers l'infini, cette distribution tend vers une même distribution limite.

Proposition 2.3.1. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ la chaîne de Markov ci-dessus avec la distribution initiale π_0 . Supposons que tous les paramètres de probabilité α , β^- , β^+ et γ ne sont égaux ni à 0 ni à 1, de sorte que P est régulière. Soit π_t sa distribution au temps t .

Alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t = \pi^\infty = (\pi_A^\infty, \pi_{B^-}^\infty, \pi_{B^+}^\infty, \pi_I^\infty)$ avec

$$\pi^\infty(\alpha, \beta^-, \beta^+, \gamma) = \frac{1}{D(\alpha, \beta^-, \beta^+, \gamma)} (1 - \gamma, \alpha(1 - \gamma), \alpha\beta^-(1 - \gamma), \alpha\beta^-\beta^+), \quad (2.6)$$

où $D(\alpha, \beta^-, \beta^+, \gamma) = (1 + \alpha + \alpha\beta^-)(1 - \gamma) + \alpha\beta^-\beta^+$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que la distribution limite π^∞ donnée est un 1-vecteur propre à gauche de la matrice P et d'appliquer le théorème 1.2.7 de Perron-Frobenius. $\square$

Nous explicitons ci-dessous comment nous avons trouvé l'expression de π^∞ ci-dessus (2.6).

Soit P la matrice de transition de la chaîne de Markov et $\pi^\infty = (x, y, u, v)$ la distribution stationnaire recherchée, où x, y, u et v sont respectivement les proportions à l'équilibre de l'état A , de l'état B^- , de l'état B^+ et de l'état I .

Par définition 1.2.6, nous avons

$$\pi^\infty P = \pi^\infty,$$

d'où

$$\begin{pmatrix} x & y & u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 1 - \beta^- & 0 & \beta^- & 0 \\ 1 - \beta^+ & 0 & 0 & \beta^+ \\ 1 - \gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & u & v \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

A partir de l'équation (2.7), nous obtenons

$$(1 - \alpha)x + (1 - \beta^-)y + (1 - \beta^+)u + (1 - \gamma)v = x \quad (2.8)$$

$$\alpha x = y \quad (2.9)$$

$$\beta^- y = u \quad (2.10)$$

$$\beta^+ u + \gamma v = v. \quad (2.11)$$

Comme x, y, u et v sont les proportions des états de la chaîne de Markov, alors

$$x + y + u + v = 1. \quad (2.12)$$

De l'équation (2.11), nous déduisons

$$u = \frac{1 - \gamma}{\beta^+} v. \quad (2.13)$$

Remplaçons l'expression (2.13) dans l'équation (2.10)

$$\beta^- y = \frac{1 - \gamma}{\beta^+} v,$$

alors nous obtenons

$$y = \frac{1 - \gamma}{\beta^- \beta^+} v, \quad (2.14)$$

Remplaçons l'équation (2.14) par l'équation (2.9)

$$\alpha x = \frac{1 - \gamma}{\beta^- \beta^+} v,$$

alors nous obtenons

$$x = \frac{1 - \gamma}{\alpha \beta^- \beta^+} v, \quad (2.15)$$

Remplaçons l'équation (2.13), l'équation (2.14) et l'équation (2.15) par l'équation (2.8),

$$(1 - \alpha) \frac{(1 - \gamma)}{\alpha \beta^- \beta^+} v + (1 - \beta^-) \frac{(1 - \gamma)}{\beta^- \beta^+} v + (1 - \beta^+) \frac{(1 - \gamma)}{\beta^+} v + (1 - \gamma) v = \frac{(1 - \gamma)}{\alpha \beta^- \beta^+} v,$$

enfin nous trouvons que $v = v$ (toujours vrai).

Ensuite, remplaçons l'équation (2.13), l'équation (2.14) et l'équation (2.15) par l'équation (2.12),

$$\frac{(1 - \gamma)}{\alpha \beta^- \beta^+} v + \frac{(1 - \gamma)}{\beta^- \beta^+} v + \frac{(1 - \gamma)}{\beta^+} v + v = 1,$$

alors nous trouvons la proportion de l'état I :

$$v = \frac{\alpha \beta^- \beta^+}{(1 - \gamma) + \alpha(1 - \gamma) + \alpha \beta^- (1 - \gamma) + \gamma \beta^- \beta^+}. \quad (2.16)$$

Puis nous remplaçons l'équation (2.16) par l'équation (2.13), l'équation (2.14) et l'équation (2.15), d'où les proportions de l'état B^+ , de l'état B^- et de l'état A

$$u = \frac{\alpha \beta^- (1 - \gamma)}{(1 - \gamma) + \alpha(1 - \gamma) + \alpha \beta^- (1 - \gamma) + \gamma \beta^- \beta^+},$$

$$y = \frac{\alpha(1 - \gamma)}{(1 - \gamma) + \alpha(1 - \gamma) + \alpha \beta^- (1 - \gamma) + \gamma \beta^- \beta^+},$$

$$x = \frac{(1 - \gamma)}{(1 - \gamma) + \alpha(1 - \gamma) + \alpha \beta^- (1 - \gamma) + \gamma \beta^- \beta^+}.$$

On en déduit

$$\pi^\infty = \frac{1}{(1-\gamma) + \alpha(1-\gamma) + \alpha\beta^-(1-\gamma) + \gamma\beta^-\beta^+} (1-\gamma, \alpha(1-\gamma), \alpha\beta^-(1-\gamma), \gamma\beta^-\beta^+).$$

Voici un exemple de calcul des proportions d'agents de chaque état dans la population à l'équilibre.

Exemple 2.3.2. Nous calculons les proportions d'agents de chaque état dans la population à l'équilibre, si $\alpha = 0.1, \beta^- = 0.75, \beta^+ = 0.90$ et $\gamma = 0.98$, en utilisant l'équation (2.6),

$$\begin{aligned} \text{--- } \pi_A^\infty &= \frac{1-0.98}{1-0.98+(0.1(1-0.98))+(0.1)(0.75)(1-0.98))+((0.1)(0.75)(0.90))} = 0.220 \\ \text{--- } \pi_{B^-}^\infty &= \frac{0.1(1-0.98)}{1-0.98+(0.1(1-0.98))+(0.1)(0.75)(1-0.98))+((0.1)(0.75)(0.90))} = 0.022 \\ \text{--- } \pi_{B^+}^\infty &= \frac{(0.1)(0.75)(1-0.98)}{1-0.98+(0.1(1-0.98))+(0.1)(0.75)(1-0.98))+((0.1)(0.75)(0.90))} = 0.016 \\ \text{--- } \pi_I^\infty &= \frac{(0.1)(0.75)(0.90)}{1-0.98+(0.1(1-0.98))+(0.1)(0.75)(1-0.98))+((0.1)(0.75)(0.90))} = 0.742. \end{aligned}$$

Les résultats de cet exemple sont illustrés à la figure 2.3.

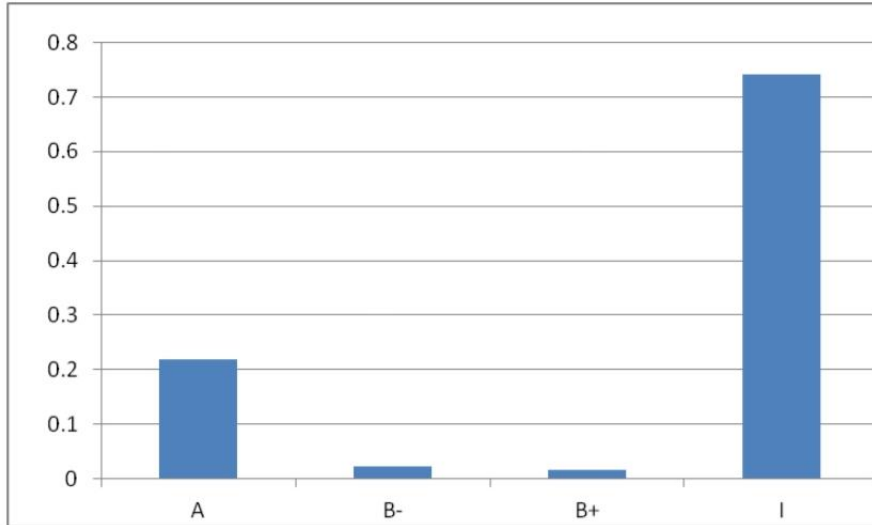


FIGURE 2.3 – La distribution d'équilibre $\pi^\infty = (\pi_A^\infty, \pi_{B^-}^\infty, \pi_{B^+}^\infty, \pi_I^\infty)$ si $(\alpha, \beta^-, \beta^+, \gamma) = (0.1, 0.75, 0.90, 0.98)$

Remarque :

À noter que les proportions limites $(\pi_A^\infty, \pi_{B^-}^\infty, \pi_{B^+}^\infty, \pi_I^\infty)$ des demandeurs et des bénéficiaires dans la population données par la proposition précédente ne sont atteints que lorsque t tend vers l'infini. Mais lorsque l'activité de microcrédit d'une

IMF s'adresse à un groupe spécifique de personnes pendant un certain temps, on peut considérer ces proportions comme valables (ou sur le point de l'être) sur le long terme. Il peut être intéressant pour une IMF de les prendre en compte lorsqu'elle essaie d'améliorer son activité. C'est l'objet des deux propositions suivantes.

Proposition 2.3.3. La proportion limite π_I^∞ de personnes ayant accès au crédit régulier grâce au microcrédit et la proportion $\pi_{B-}^\infty + \pi_{B+}^\infty + \pi_I^\infty$ de personnes qui peuvent financer leur activité grâce à un prêt (microcrédit ou crédit ordinaire) sont toutes deux des fonctions croissantes des paramètres de probabilité de réussite α , β^- , β^+ et γ .

Démonstration. De la proposition [2.3.1](#) nous avons

$$\begin{aligned}\pi_I^\infty &= \frac{\alpha\beta^-\beta^+}{(1-\gamma) + (1-\gamma)\alpha + (1-\gamma)\alpha\beta^- + \alpha\beta^-\beta^+} \\ \pi_{B-}^\infty + \pi_{B+}^\infty + \pi_I^\infty &= 1 - \pi_A^\infty = 1 - \frac{(1-\gamma)}{(1-\gamma) + (1-\gamma)\alpha + (1-\gamma)\alpha\beta^- + \alpha\beta^-\beta^+}\end{aligned}$$

On observe alors que les deux proportions sont des fonctions homographiques de chacun des paramètres, de la forme $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ pour x égal à α , β^- , β^+ et $(1-\gamma)$, à coefficients a , b , c et d positifs ou nuls, et avec $a = 0$ ou $b = 0$. Considérant le signe de $\varphi'(x) = (ad-bc)/(cx+d)^2$, il est facile de voir que φ est croissante lorsque $b = 0$ et décroissante lorsque $a = 0$. Le résultat s'en déduit facilement en considérant chacune des huit fonctions φ impliquées. $\square$

Le fait que pour favoriser à long terme l'inclusion (π_I^∞) ou l'accès à une activité autofinancée ($\pi_{B-}^\infty + \pi_{B+}^\infty + \pi_I^\infty$) il convienne d'augmenter les probabilités de succès α , β^- , β^+ et γ , est facile à comprendre. Mais nous verrons dans la section suivante que d'autres questions créeront des limitations sur ces paramètres.

Examinons maintenant une autre conséquence de la proposition [2.3.1](#). Nous utiliserons le fait que, à long terme, la proportion de grands et petits microcrédits est égale à $\frac{\pi_{B+}^\infty}{\pi_{B-}^\infty} = \beta^-$, ce qui donne une estimation de la proportion à long terme de petits et grands prêts dans le portefeuille de l'IMF. Comme le risque auquel l'IMF est confrontée n'est pas le même pour les petits et les grands prêts, cela va nous permettre de calculer un taux d'intérêt moyen minimal r_0 qu'elle doit faire payer à ses bénéficiaires pour équilibrer ses comptes. Bien entendu, le taux d'intérêt réel r que l'IMF facturera doit certainement être bien plus élevé que r_0 , car ce taux d'intérêt prend également en charge les coûts de l'IMF pour la formation et le suivi de ses clients.

Proposition 2.3.4. Si l'IMF emprunte au taux ρ , le taux d'intérêt minimal r_0 qu'elle doit appliquer pour équilibrer ses comptes est tel que

$$1 + r_0 = (1 + \rho) \frac{1 + \beta^- \frac{k^+}{k^-}}{\beta^- (1 + \beta^+ \frac{k^+}{k^-})} = (1 + \rho) \frac{\frac{1}{\beta^-} + \frac{k^+}{k^-}}{1 + \beta^+ \frac{k^+}{k^-}}. \quad (2.17)$$

Démonstration. D'après (2.6), nous avons $\frac{\pi_{B^+}^\infty}{\pi_{B^-}^\infty} = \beta^-$. Ainsi, pour chaque petit crédit d'un montant k^- l'IMF accorde une proportion β^- de grands crédits d'un montant k^+ , donc un capital total $k = k^- + \beta^- k^+$, ce qui donne un remboursement espéré $\beta^- k^- (1 + r) + \beta^+ \beta^- k^+ (1 + r)$, et donc un taux de remboursement espéré

$$\beta^0(r) = \frac{\beta^- k^- (1 + r) + \beta^- \beta^+ k^+ (1 + r)}{k^- + \beta^- k^+} = \beta^- (1 + r) \frac{k^- + \beta^+ k^+}{k^- + \beta^- k^+}.$$

Ainsi, pour atteindre le seuil de rentabilité, l'IMF qui emprunte k au taux d'intérêt ρ , doit appliquer un taux d'intérêt minimum r_0 tel que $k(1 + \rho) = k\beta^0(r_0)$. Donc on a $1 + \rho = \beta^- (1 + r_0) \frac{k^- + \beta^+ k^+}{k^- + \beta^- k^+}$, d'où l'on déduit (2.17). $\square$

Le fait que le taux minimal r_0 soit une fonction décroissante des paramètres β^- et β^+ est facile à comprendre. Des valeurs trop faibles des probabilités de succès β^- et β^+ des petits et grands microcrédits peuvent conduire à des valeurs très élevées de r_0 . Par exemple, dans le cas de $\frac{k^+}{k^-} = 4$, $\beta^- = 0.75$ et $\beta^+ = 0.9$, la formule (2.17) conduit à un $r_0 = 0.20579... \simeq 20\%$.

2.4 Absence de défaut stratégique

Le défaut, dans le contexte d'un prêt, correspond au fait que l'emprunteur ne rembourse pas la somme $k(1 + r)$ qui a été convenue pour un prêt de k accordé au taux r . Cela se produit généralement lorsque le bénéficiaire est confronté à des difficultés inattendues ; quoiqu'il en soit, le contrat entre le prêteur et le bénéficiaire fixe ce qui se passerait dans ce cas, par exemple le fait que le prêteur deviennent le propriétaire de ce qui a été donné par le bénéficiaire en garantie. Le défaut est dit **stratégique** lorsque le bénéficiaire pourrait effectivement payer mais préfère faire face aux conséquences qui ont été convenues dans le contrat, car il s'avère préférable pour l'emprunteur rationnel de faire défaut plutôt que de rembourser. Le contexte de la microfinance impliquant un bénéficiaire "pauvre" sans garantie et un prêteur "riche" rend la question du défaut stratégique assez embarrassante car, souvent, le contrat entre les deux parties n'est pas seulement fondé sur la rationalité mais aussi sur la morale. Certains auteurs interprètent les règles par défaut comme une "punition" pour ne pas avoir payé. Considérer la valeur du flux de revenus espéré comme

contrepartie permet de revenir à une approche rationnelle. Pour nous, *Absence de Défaut Stratégique* (ADS) est une exigence pour un modèle de microfinance. Dans le contexte du modèle présenté ici, l'ADS signifie que la perspective d'un flux de revenus espéré w^{s^+} doit être plus intéressante pour un bénéficiaire atteignant un état s^+ à partir d'un état s^- que de garder pour lui la somme $k(1+r)$ qu'il aurait dû rembourser et d'avoir alors w^A comme flux de revenus espérés.

2.4.1 Les fonctions ADS^- et ADS^+

D'un point de vue quantitatif, l'ADS peut être résumée par le résultat suivant :

Proposition 2.4.1. L'ADS est assurée pour un ensemble $\alpha, \beta^-, \beta^+, \gamma, \delta, k^-, k^+, r, r', w^A, w^{B^+}, w^I$ de paramètres si et seulement si les deux inégalités suivantes sont satisfaites :

$$w^{B^+} \geq (1+r)k^- + w^A \quad (2.18)$$

$$w^I \geq (1+r)k^+ + w^A \quad (2.19)$$

Démonstration. Les deux conditions ici ne sont que la contrainte explicite de l'ADS pour un bénéficiaire qui réussit à atteindre B^+ à partir de B^- et à atteindre I à partir de B^+ . Il n'y a pas de défaut stratégique possible pour un bénéficiaire qui a réussi à atteindre B^- depuis A car il n'a pas encore obtenu de prêt et n'a donc rien à rembourser. Enfin, pour un bénéficiaire qui a réussi à atteindre I à partir de I , l'ADS exige que $w^I \geq (1+r')k^+ + w^A$, ce qui résulte déjà de (2.19) puisque $r' < r$. $\square$

Dans la proposition 2.3.3 nous avons vu que, pour favoriser l'inclusion (c'est-à-dire pour augmenter π_I^∞) ou favoriser l'accès à une activité financée (i.e. pour augmenter $\pi_{B^-}^\infty + \pi_{B^+}^\infty + \pi_I^\infty$) il suffit d'augmenter, autant que possible, l'une des probabilités de succès α, β^-, β^+ , ou γ . La proposition suivante aborde la question de savoir si l'ADS crée des limitations supérieures ou inférieures dans certains ou tous ces paramètres. À cette fin, nous définissons les deux fonctions suivantes ADS^- et ADS^+ :

$$ADS^-(\alpha, \beta^-, \beta^+, \gamma) = w^{B^+} - w^A - (1+r)k^- \quad (2.20)$$

$$ADS^+(\alpha, \beta^-, \beta^+, \gamma) = w^I - w^A - (1+r)k^+, \quad (2.21)$$

la première, ADS^- , doit rester positive pour éviter un défaut stratégique sur un petit microcrédit k^- , la deuxième, ADS^+ , devant rester positive pour éviter un défaut stratégique sur un grand microcrédit k^+ . La proposition suivante observe que ces deux fonctions sont monotones par rapport à chacune des variables α, β^-, β^+ , ou γ .

Proposition 2.4.2. Les fonctions ADS^- et ADS^+ sont bien définies sur $[0, 1]^4$ et toutes leurs fonctions partielles sont monotones sur $[0, 1]$. Les deux fonctions sont décroissantes en α et β^- , donc l’Absence de Défaut Stratégique (ADS) peut conduire à une limitation supérieure de ces variables. Les deux fonctions sont croissantes en γ , donc l’ADS peut conduire à une limitation inférieure de γ . Pour β^+ , la fonction ADS^- croît et la fonction ADS^+ décroît, donc l’ADS peut imposer à β^+ de rester dans un intervalle.

Démonstration. Par théorème [1.3.7](#) et proposition [2.2.1](#) nous avons

$$\begin{aligned} W &= \frac{\delta}{\Delta} C^t(0, 0, 0, \mathbb{E}(f(X_0, X_1) \mid X_0 = I)) \\ &= \frac{\delta(r - r')k^+\gamma}{\Delta} C e_4, \end{aligned}$$

où $e_4 = {}^t(0, 0, 0, 1)$, C et Δ étant définis en [\(2.4\)](#) et [\(2.5\)](#). Nous avons donc les valeurs explicites suivantes des fonctions ADS^- et ADS^+ :

$$\text{ADS}^-(\alpha, \beta^-, \beta^+, \gamma) = \delta(r - r')k^+ \frac{\gamma(C_{3,4} - C_{1,4})}{\Delta} - (1 + r)k^-$$

et

$$\text{ADS}^+(\alpha, \beta^-, \beta^+, \gamma) = \delta(r - r')k^+ \frac{\gamma(C_{4,4} - C_{1,4})}{\Delta} - (1 + r)k^+.$$

Comme la matrice P est stochastique et que $0 \leq \delta < 1$, on a $\Delta = \det(\mathbb{I} - \delta P) > 0$ pour tout $(\alpha, \beta^-, \beta^+, \gamma) \in [0, 1]^4$, et par les formules explicites [\(2.4\)](#) et [\(2.5\)](#) nous voyons que ADS^- et ADS^+ sont des fonctions homographiques de chaque variable α , β^- , β^+ , et γ , avec pôle uniquement lorsque $\Delta = 0$, donc à l’extérieur $[0, 1]^4$. Ainsi, toutes ces fonctions partielles sont monotones décroissantes ou croissantes, selon que la différence de leurs valeurs en 1 et en 0 est négative ou positive. Ainsi, il suffit de vérifier le signe de $\text{ADS}^\pm(\alpha = 1) - \text{ADS}^\pm(\alpha = 0)$, et similairement pour β^- , β^+ , et γ .

Ici pour α et ADS^- . Soit $N^- = \gamma(C_{3,4} - C_{1,4}) = \delta(1 - \delta)\beta^+\gamma(1 + \delta\alpha)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \text{ADS}^-(\alpha = 1) - \text{ADS}^-(\alpha = 0) &= \delta(r - r')k^+ \left[\frac{N^-(\alpha = 1)}{\Delta(\alpha = 1)} - \frac{N^-(\alpha = 0)}{\Delta(\alpha = 0)} \right] \\ &= \delta(r - r')k^+ [N^-(\alpha = 1)\Delta(\alpha = 0) - N^-(\alpha = 0)\Delta(\alpha = 1)] / \Delta(\alpha = 0)\Delta(\alpha = 1). \end{aligned}$$

Comme déjà mentionné, $\Delta > 0$, donc le dénominateur $\Delta(\alpha = 0)\Delta(\alpha = 1)$ est positif, ainsi que $\delta(r - r')k^+$, donc le signe de $\text{ADS}^-(\alpha = 1) - \text{ADS}^-(\alpha = 0)$ est le même que celui de $N^-(\alpha = 1)\Delta(\alpha = 0) - N^-(\alpha = 0)\Delta(\alpha = 1)$. Un calcul élémentaire montre

que cette différence est $-\delta^3(1-\delta)^2\beta^-\beta^+\gamma(1+\beta^+-\delta\gamma)$, elle est donc négative et ADS^- est donc également une fonction décroissante de α .

De même, avec $N^+ = \gamma(C_{4,4} - C_{1,4}) = \gamma(1-\delta + (1-\delta)\alpha + \delta^2(1-\delta)\alpha\beta^-)$ et cette fois le signe de $\text{ADS}^+(\alpha=1) - \text{ADS}^+(\alpha=0)$ qui est du même signe que $N^+(\alpha=1)\Delta(\alpha=0) - N^+(\alpha=0)\Delta(\alpha=1)$. Un calcul élémentaire montre que cette différence vaut $-\delta^3(1-\delta)\beta^-\beta^+\gamma$, elle est donc négative et donc ADS^+ est une fonction décroissante de α aussi.

En raisonnant de la même manière pour les trois autres paramètres β^- , β^+ , et γ , nous comprenons que les autres énoncés de la proposition découlent de calculs élémentaires similaires, à savoir

$$\begin{aligned}
& N^-(\beta^- = 1)\Delta(\beta^- = 0) - N^-(\beta^- = 0)\Delta(\beta^- = 1) \\
& \quad = -\delta^3(1-\delta)\alpha(1+\delta\alpha)\beta^+\gamma(1+\delta(\beta^+-\gamma)) < 0 \\
& N^+(\beta^- = 1)\Delta(\beta^- = 0) - N^+(\beta^- = 0)\Delta(\beta^- = 1) \\
& \quad = -\delta^2(1-\delta)\alpha\gamma[\alpha(1-\delta)(1-\delta\gamma) + \delta\beta^+(1-\alpha)] < 0 \\
& N^-(\gamma = 1)\Delta(\gamma = 0) - N^-(\gamma = 0)\Delta(\gamma = 1) \\
& \quad = +\delta(1-\delta)(1+\delta\alpha)\beta^+\Delta(\gamma = 0) > 0 \\
& N^+(\gamma = 1)\Delta(\gamma = 0) - N^+(\gamma = 0)\Delta(\gamma = 1) \\
& \quad = +(1-\delta)(1+\alpha+\delta^2\alpha\beta^-)\Delta(\gamma = 0) > 0 \\
& N^-(\beta^+ = 1)\Delta(\beta^+ = 0) - N^-(\beta^+ = 0)\Delta(\beta^+ = 1) \\
& \quad = \delta(1-\delta)(1+\delta\alpha)\Delta(\beta^+ = 0) > 0 \\
& N^+(\beta^+ = 1)\Delta(\beta^+ = 0) - N^+(\beta^+ = 0)\Delta(\beta^+ = 1) \\
& \quad = -\delta^3(1-\delta)\alpha\beta^-\gamma(1+\alpha+\delta^2\alpha\beta^-) < 0.
\end{aligned}$$

□

2.4.2 Illustrations autour de $p_* = (0.1, 0.75, 0.9, 0.98)$

Nous explorons les propriétés du “domaine d’ADS” composé des paramètres de probabilité où l’ADS est satisfaite. La question de savoir s’il existe une limitation supérieure ou inférieure des paramètres α , β^- , β^+ et γ dépend de la décroissance ou de la croissance des fonctions partielles de ADS^- et ADS^+ , à condition bien entendu d’être au voisinage d’un point p_* où elles sont toutes deux positives de façon à assurer l’ADS. Nous avons utilisé $\delta = 0.95$, $k^- = 1$ (le choix de numéraire), $k^+ = 5$, $r = 0.20$, $r' = 0.04$ et nous avons trouvé un tel $p_* : p_* = (\alpha_*, \beta_*^-, \beta_*^+, \gamma_*) = (0.1, 0.75, 0.9, 0.98)$. Dans les figures [2.4](#), [2.5](#), [2.6](#), et [2.7](#) nous explorons le domaine d’ADS paramètre par paramètre puis dans les figures [2.8](#), [2.9](#) et [2.10](#) nous explorons la géométrie de ce domaine pour des couples de paramètres.

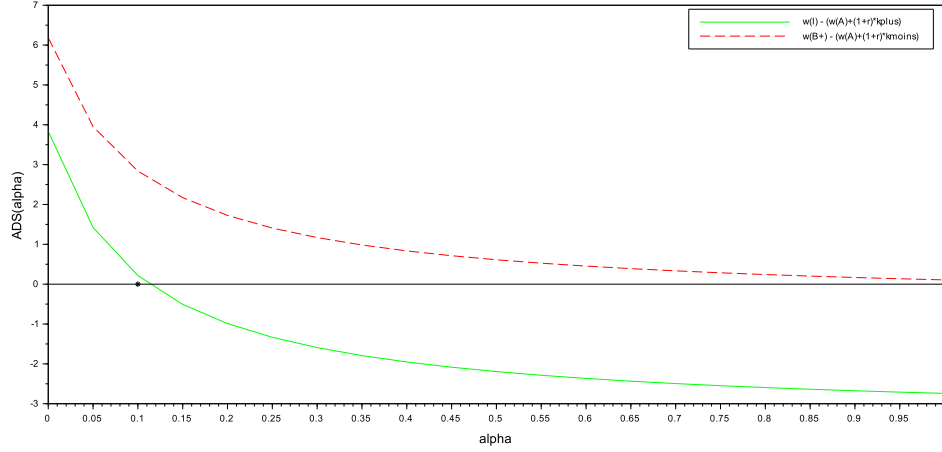


FIGURE 2.4 – Vérification de l’absence de défaut stratégique autour du point p_* où il y bien ADS. Nous avons tracé les graphes des fonctions partielles $\alpha \mapsto \text{ADS}^-(\alpha, \beta_*^-, \beta_*^+, \gamma_*) = w^{B^+} - (1+r)k^- - w^A$ (ligne pointillée, ADS pour un petit microcrédit k^-) et $\alpha \mapsto \text{ADS}^+(\alpha, \beta_*^-, \beta_*^+, \gamma_*) = w^I - (1+r)k^+ - w^A$ (ligne continue, ADS pour un grand microcrédit k^+) qui doivent rester positives. Nous avons placé un * à l’abscisse $\alpha = \alpha_*$.

Dans la figure [2.4](#), nous retrouvons bien que les fonction partielles en α de ADS^- et ADS^+ sont deux fonctions décroissantes. Toutes les valeurs $\alpha \in [0, 1]$ satisfont la condition d’ADS pour ADS^- , alors que pour ADS^+ nous voyons qu’il faut $\alpha \in [0, 0.12]$. Rappelons qu’ici les autres paramètres sont fixés à $(\beta_*^-, \beta_*^+, \gamma_*) = (0.75, 0.9, 0.98)$.

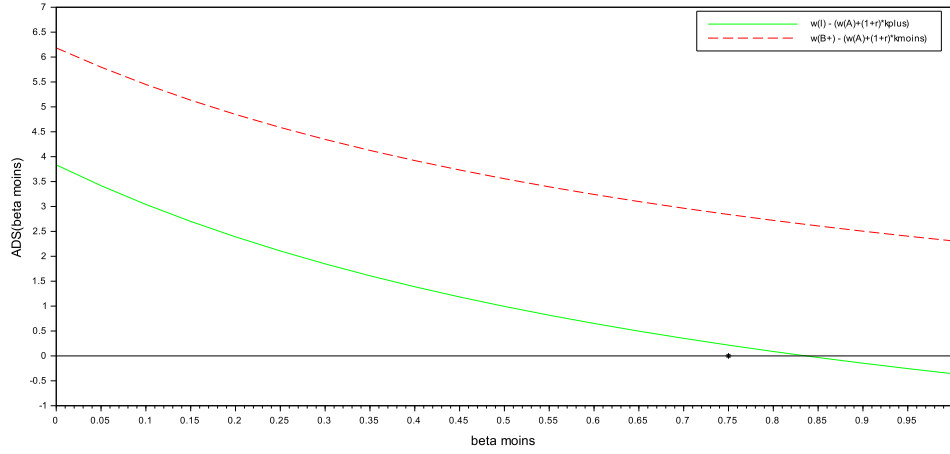


FIGURE 2.5 – Vérification de l’ADS autour du point p_* . Ici nous avons tracé les graphes des fonctions partielles $\beta^- \mapsto \text{ADS}^-(\alpha_*, \beta^-, \beta_*^+, \gamma_*)$ (ligne pointillée, ADS pour un petit microcrédit k^-) et $\beta^- \mapsto \text{ADS}^+(\alpha_*, \beta^-, \beta_*^+, \gamma_*)$ (ligne continue, ADS pour un grand microcrédit k^+) qui doivent rester positives. Nous avons placé un * à l’abscisse $\beta^- = \beta_*^-$.

Comme pour les fonctions partielles d’ADS en α , les fonctions partielles d’ADS en β^- sont des fonctions décroissantes, comme on le retrouve sur la figure 2.5. Toutes les valeurs β^- conviennent pour ADS^- , alors que pour ADS^+ les valeurs β^- ne conviennent que pour les valeurs $\beta^- \in [0, 0.83]$. Rappelons qu’ici les autres paramètres sont fixés à $(\alpha_*, \beta_*^+, \gamma_*) = (0.1, 0.9, 0.98)$.

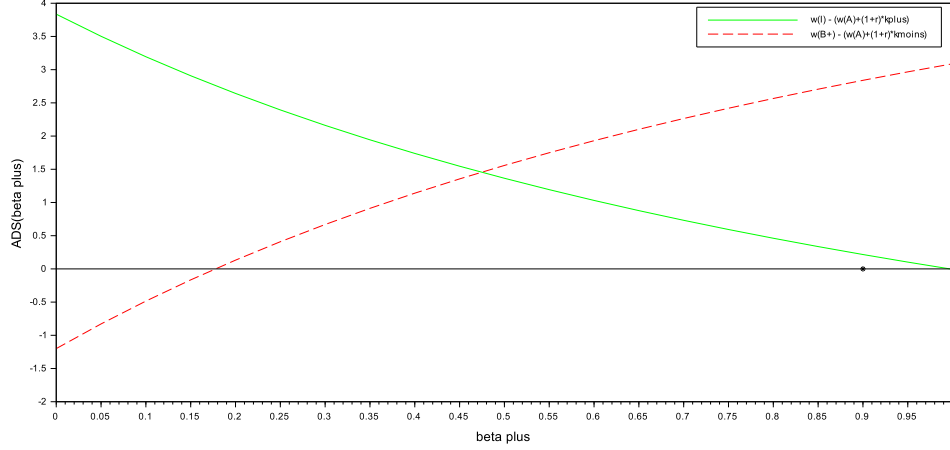


FIGURE 2.6 – Vérification de l’ADS autour du point p_* . Ici nous avons tracé les graphes des fonctions partielles $\beta^+ \mapsto \text{ADS}^-(\alpha_*, \beta_*^-, \beta^+, \gamma_*)$ (ligne pointillée, ADS pour un petit microcrédit k^-) et $\beta^+ \mapsto \text{ADS}^+(\alpha_*, \beta_*^-, \beta^+, \gamma_*)$ (ligne continue, ADS pour un grand microcrédit k^+) qui doivent rester positives. Nous avons placé un * à l’abscisse $\beta^+ = \beta_*^+$. Ici β^+ doit rester entre une limite inférieure et une limite supérieure.

Contrairement aux deux fonctions ADS décrites précédemment, la fonction partielle $\beta^+ \mapsto \text{ADS}^-(\alpha_*, \beta_*^-, \beta^+, \gamma_*)$ est croissante et le fait qu’elle doive être positive crée une limite inférieure pour β^+ . Comme la fonction partielle $\beta^+ \mapsto \text{ADS}^+(\alpha_*, \beta_*^-, \beta^+, \gamma_*)$ reste, elle, décroissante, l’ADS impose que $\beta^+ \in [0.17 \dots, 0.99 \dots]$. Rappelons qu’ici les autres paramètres sont fixés à $(\alpha_*, \beta_*^-, \gamma_*) = (0.1, 0.75, 0.98)$.

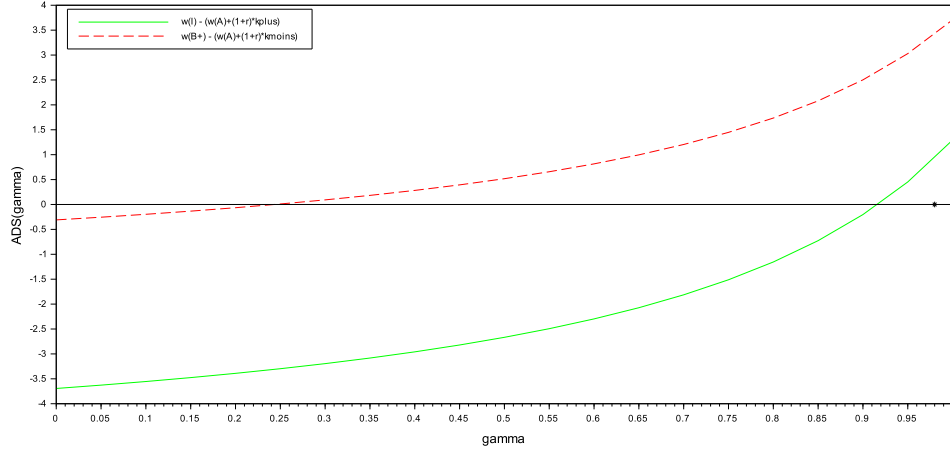


FIGURE 2.7 – Vérification de l’ADS autour du point p_* . Ici nous avons tracé les graphes des fonctions partielles $\gamma \mapsto \text{ADS}^-(\alpha_*, \beta_*^-, \beta_*^+, \gamma)$ (ligne pointillée, ADS pour un petit microcrédit k^-) et $\gamma \mapsto \text{ADS}^+(\alpha_*, \beta_*^-, \beta_*^+, \gamma)$ (ligne continue, ADS pour un grand microcrédit k^+) qui doivent rester positives. Nous avons placé un $*$ à l’abscisse $\gamma = \gamma_*$.

Ici, les fonctions partielles $\gamma \mapsto \text{ADS}^-(\alpha_*, \beta_*^-, \beta_*^+, \gamma)$ et $\gamma \mapsto \text{ADS}^+(\alpha_*, \beta_*^-, \beta_*^+, \gamma)$ sont croissantes toutes les deux. L’ADS impose que γ soit bornée inférieurement, $\gamma \in [0.91 \dots, 1]$. Rappelons qu’ici les autres paramètres sont fixés à $(\alpha_*, \beta_*^-, \beta_*^+) = (0.1, 0.75, 0.9)$.

Nous représentons maintenant trois coupes du domaine d'ADS par des plans passant par le point p_* et parallèles à deux des axes de coordonnées (notés en abscisse et ordonnée). Nous représentons par une ligne continue (verte) la courbe d'équation $\text{ADS}^- = 0$ et la ligne pointillée (rouge) d'équation $\text{ADS}^+ = 0$ qui limitent le domaine avec les bords des carrés $[0, 1] \times [0, 1]$. La trace de p_* sur le plan est représenté par un $*$ qui permet d'indiquer quel est le domaine d'ADS.

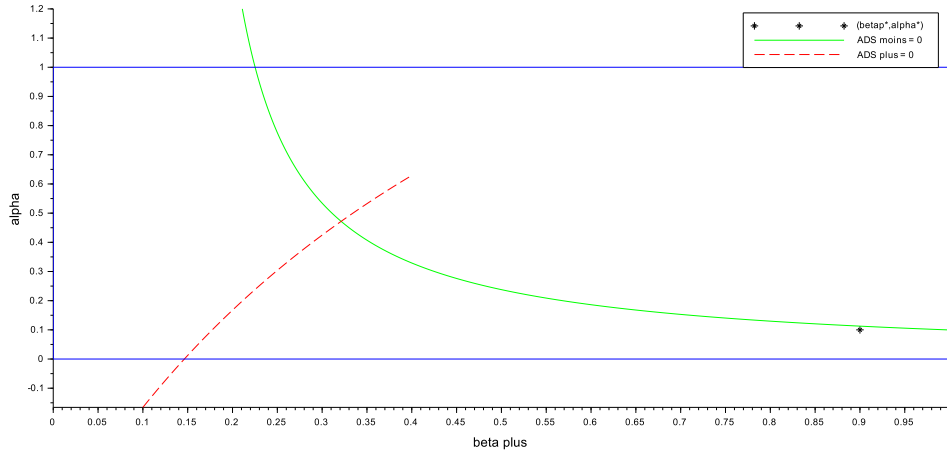


FIGURE 2.8 – Intersection du domaine d'ADS de $[0, 1]^4$ avec le plan $(\beta^-, \gamma) = (\beta_*, \gamma_*)$. Le point marqué par $*$, trace sur ce plan de p_* , appartient au domaine. La ligne rouge pointillée exprime l'ADS pour un petit microcrédit k^- et la ligne verte continue exprime l'ADS pour un grand microcrédit k^+ .

Dans la figure 2.8, nous voyons que c'est tantôt ADS^- (en vert - ligne continue) tantôt ADS^+ (en rouge - ligne pointillée) qui constitue la relation entre β^+ et α qui limite ces deux paramètres (quand $(\beta^-, \gamma) = (\beta_*, \gamma_*) = (0.75, 0.95)$) pour assurer l'ADS.

Ensuite, nous représentons sur la figure 2.9 l'intersection du domaine d'ADS de $[0, 1]^4$ avec le plan $(\alpha, \beta^+) = (\alpha_*, \beta_*)$. Nous voyons qu'alors c'est la ligne continue verte (qui exprime l'ADS pour un grand microcrédit k^+) qui porte seule la contrainte d'ADS.

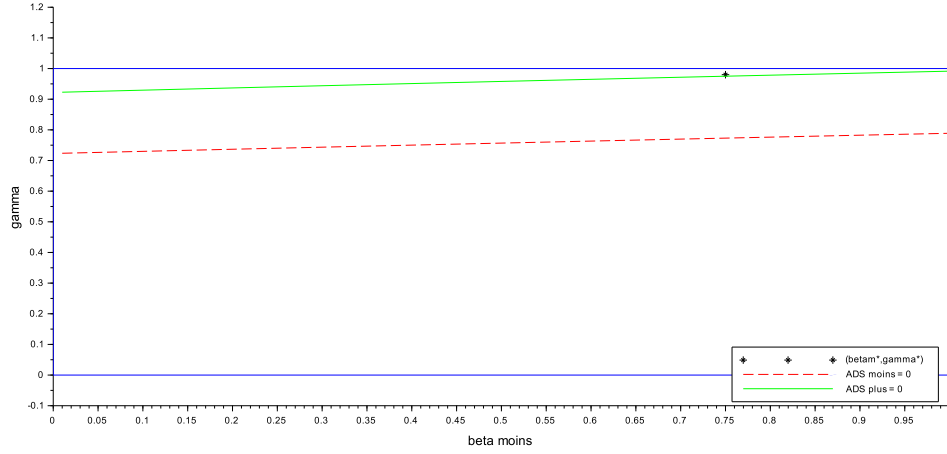


FIGURE 2.9 – Intersection du domaine d’ADS de $[0, 1]^4$ avec le plan $(\alpha, \beta^+) = (\alpha_*, \beta_*^+)$. Le point marqué par *, trace sur ce plan de p_* , appartient au domaine. La ligne rouge pointillée exprime l’ADS pour un petit microcrédit k^- et la ligne verte continue exprime l’ADS pour un grand microcrédit k^+ .

Enfin, nous représentons sur la figure 2.10 l’intersection du domaine d’ADS de $[0, 1]^4$ avec le plan $(\beta^-, \beta^+) = (\beta_*, \beta_*^+)$. Nous voyons qu’ici encore c’est la ligne continue verte (qui exprime l’ADS pour un grand microcrédit k^+) qui porte seule la contrainte d’ADS. Finalement, à proximité du point p_* , seule des valeurs très petites de α peuvent assurer l’ADS. L’ADS pour un petit microcrédit k^- (ligne rouge pointillée) ne crée une contrainte que sur les petites valeurs de β^+ .

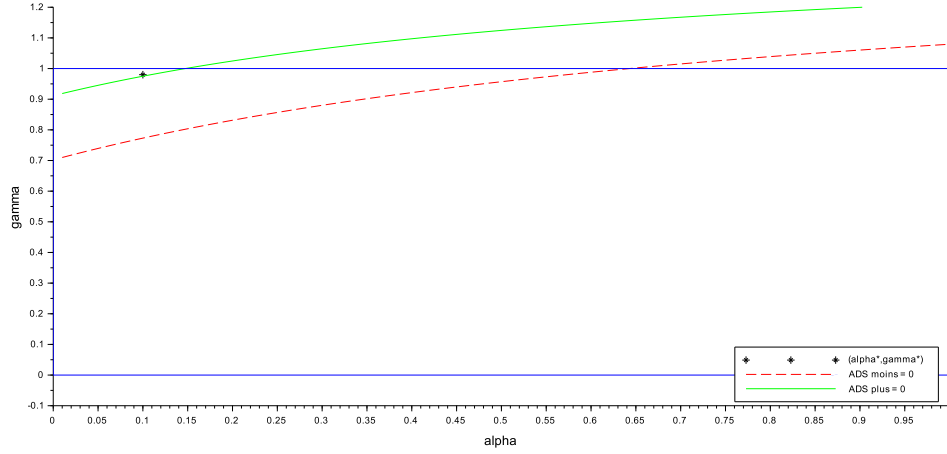


FIGURE 2.10 – Intersection du domaine d'ADS de $[0, 1]^4$ avec le plan $(\beta^-, \beta^+) = (\beta_*, \beta_*^+)$. Le point marqué par *, trace sur ce plan de p_* , appartient au domaine. La ligne rouge pointillée exprime l'ADS pour un petit microcrédit k^- et la ligne verte continue exprime l'ADS pour un grand microcrédit k^+ .

2.4.3 Commentaire

Le fait que l'ADS soit une contrainte antagoniste au souhait de l'IMF de favoriser l'inclusion ou le financement est conforme au "bon sens" des banques ordinaires : une trop grande chance d'obtenir un microcrédit (paramètre α), ou une trop grande chance de réussir un microcrédit (paramètres β) ou un prêt ordinaire (paramètre γ) entraînent et une trop grande incitation au défaut lorsqu'il n'y a pas de contrepartie. Le résultat précédent ne fait que fournir une limite supérieure quantitative pour ces paramètres en fonction des différents paramètres du modèle.

Il est plus intéressant de comprendre comment une limite inférieure peut se produire. Considérons d'abord le cas où l'ADS⁻ crée une limite inférieure pour β^+ : il faut donc comprendre pourquoi un bénéficiaire rationnel d'un petit prêt peut préférer garder pour lui les $(1 + r)k^-$ (et w^A) que de devenir B^+ et ses w^{B^+} , c'est-à-dire obtenir un grand microcrédit k^+ . Le fait qu'il y ait ici une limite inférieure pour β^+ montre simplement que cet emprunteur rationnel doit avoir suffisamment de chances de réussir dans cette nouvelle entreprise de grand prêts. Sinon, il est préférable qu'il conserve les $(1 + r)k^-$ qu'il serait en mesure de payer et de solliciter à nouveau un éventuel futur petit prêt : un micro-entrepreneur rationnel doit avoir suffisamment de chances de réussir dans son entreprise pour avoir la possibilité, après

une nouvelle étape réussie, d'être inclus dans le système bancaire ordinaire grâce au microcrédit. Il en va de même (avec une limite inférieure encore plus élevée) pour un bénéficiaire rationnel sans contrepartie de k^+ : s'il a trop peu de chances γ de réussir lorsqu'il obtient un prêt bancaire ordinaire, même s'il a réussi ("par hasard", éventuellement), alors, s'il est juste rationnel, il devrait garder les $(1+r)k^+$ pour lui (et w^A) lorsqu'il a pourtant droit à devenir inclus plutôt que de rembourser son prêt. Ce phénomène peut être une raison pour laquelle le microcrédit n'a pas plus de succès pour mener à l'inclusion dans le système bancaire. Cela devrait aussi encourager les IMF à se concentrer encore plus sur l'amélioration des chances de succès de leurs bénéficiaires d'un prêt important k^+ , ici β^+ , et aussi plus tard dans leur entreprise lorsqu'ils seront inclus (γ) en fournissant de la formation et de l'accompagnement.

2.5 Loi du flux de revenus

On se propose d'étudier ici le flux de revenus F_X de notre modèle. Rappelons qu'étant donnée une CMR (X, f, δ) , son **flux de revenus** est la variable aléatoire

$$F_X = \delta f(X_0, X_1) + \delta^2 f(X_1, X_2) + \dots = \sum_{t \geq 0} \delta^t f(X_t, X_{t+1}). \quad (2.22)$$

Nous allons tout d'abord simuler cette v.a. puis nous verrons qu'il est possible, dans notre modèle, d'estimer la probabilité de sa valeur maximale.

2.5.1 Simulations du flux de revenus

Pour simuler le flux de revenus, nous choisissons des échantillons de 500 trajectoires $(X_t)_{t=0, \dots, N}$ de la chaîne de Markov, de longueur N . Les trajectoires de nos échantillons sont issues de l'état A , $X_0 = A$.

Définition 2.5.1. Soit $N \geq 1$. On appelle **flux de revenus jusqu'à l'instant N** la variable aléatoire

$$Y_N(X) = \sum_{t=0}^{N-1} f(X_t, X_{t+1}).$$

Pour simplifier la lecture des histogrammes obtenus, notons que si nous remplaçons notre fonction de revenu f donnée par (2.3), par la fonction plus simple

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) = (I, I) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.23)$$

alors nous calculons un flux de revenus proportionnel et les valeurs prises par la v.a. $Y_N(X)$ peuvent être vues simplement comme le nombre de fois qu'un bénéficiaire

(une trajectoire) reste dans l'état I (c'est-à-dire passe de I à I) entre $t = 0$ et $t = N$. Il est facile de voir qu'il est nécessairement compris entre 0 et $N - 3$.

Pour les simulations, nous avons choisi les valeurs suivantes des paramètres du modèle : $k^+ = 5, r = 0.20, r' = 0.04$ et $\delta = 0.95$ et pour les paramètres de la matrice de transition P , α, β^-, β^+ et γ , nous avons choisis des valeurs qui respectent les contraintes d'ADS de la proposition 2.4.1, à savoir $\alpha = 0.1, \beta^- = 0.75, \beta^+ = 0.9$, et $\gamma = 0.98$.

Voici le résultat de 2 simulations lorsque la longueur de la trajectoire $N = 25$.

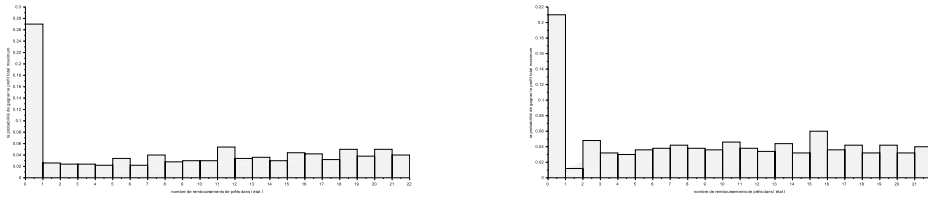


FIGURE 2.11 – Loi du flux de revenus jusqu'à l'instant $N = 25$ (deux simulations de 500 trajectoires).

Avec pour longueur de trajectoire $N = 25$, la valeur maximale du flux de revenus est 22 car c'est le nombre maximal de fois que la trajectoire peut passer de l'état I à l'état I , à savoir $AB^-B^+III \dots III$.

Comme N est petit, on observe que c'est le revenu nul qui est le plus probable (pic à gauche de l'histogramme). Il correspond à tous les bénéficiaires qui n'atteignent pas l'état I ou qui l'atteignent mais sans parvenir à y rester. On verra plus loin d'autres simulations correspondant à des plus grandes longueurs de trajectoire N où ce pic disparaît.

2.5.2 Estimation de la probabilité du maximum du flux de revenus

On ne connaît pas la loi du flux de revenus d'une CMR mais nous allons voir qu'on peut facilement estimer la probabilité de la valeur maximale qui vaut $N - 3$ si l'on suppose que $X_0 = A$. Cette probabilité dépend des paramètres du modèle, et plus précisément des paramètres de la chaîne de Markov. Comme, lorsque $X_0 = A$, le flux de revenus vaut $N - 3$ si et seulement si $X_1 = B^-$, $X_2 = B^+$ et $X_t = I$ pour tout $t \geq 3$, on a le lemme suivant :

Lemme 2.5.2. Soit l'évènement $\Omega_1 = \{X_0 = A, X_1 = B^-, X_2 = B^+, X_3 = I\}$ de la chaîne de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$. On a :

$$\mathbb{P}(\Omega_1) = \mathbb{P}(X_0 = A)\alpha\beta^-\beta^+. \quad (2.24)$$

La preuve de ce lemme utilise la définition de la probabilité conditionnelle et de la propriété de Markov d'un processus X_t que nous rappelons ici :

- i. Supposons que C et D soient deux événements. La probabilité conditionnelle que C se produise étant donné que D se produit, est définie par

$$\mathbb{P}(C|D) = \frac{\mathbb{P}(C, D)}{\mathbb{P}(D)}. \quad (2.25)$$

- ii. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov avec espace d'états S . On a la propriété de Markov suivante : pour tout $s_0, s_1, \dots, s_t, s \in S$,

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = s | X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_t = s_t) = \mathbb{P}(X_{t+1} = s | X_t = s_t) \quad (2.26)$$

Démonstration. Montrons le lemme 2.5.2. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega_1) &= \mathbb{P}(X_0 = A, X_1 = B^-, X_2 = B^+, X_3 = I) \\ &= \mathbb{P}(X_3 = I | X_0 = A, X_1 = B^-, X_2 = B^+) \cdot \mathbb{P}(X_0 = A, X_1 = B^-, X_2 = B^+) \\ &= \mathbb{P}(X_3 = I | X_2 = B^+) \cdot \mathbb{P}(X_0 = A, X_1 = B^-, X_2 = B^+) \text{ (par (2.26))} \\ &= \beta^+ \mathbb{P}(X_0 = A, X_1 = B^-, X_2 = B^+) \text{ (par définition du modèle)} \\ &= \beta^+ \mathbb{P}(X_2 = B^+ | X_0 = A, X_1 = B^-) \cdot \mathbb{P}(X_0 = A, X_1 = B^-) \text{ (par (2.25))} \\ &= \beta^+ \mathbb{P}(X_2 = B^+ | X_1 = B^-) \cdot \mathbb{P}(X_0 = A, X_1 = B^-) \text{ (par (2.26))} \\ &= \beta^+ \beta^- \mathbb{P}(X_0 = A, X_1 = B^-) \text{ (par définition du modèle)} \\ &= \beta^+ \beta^- \mathbb{P}(X_1 = B^- | X_0 = A) \cdot \mathbb{P}(X_0 = A) \text{ (par (2.25))} \\ &= \beta^+ \beta^- \alpha \mathbb{P}(X_0 = A) \text{ (par définition du modèle)} \\ &= \mathbb{P}(X_0 = A) \alpha \beta^- \beta^+ \end{aligned}$$

□

Proposition 2.5.3. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ la chaîne de Markov ci-dessus. Si $X_0 = A$, la probabilité de gagner un flux de revenus maximal à l'instant $N \geq 4$ est donnée par

$$\alpha\beta^-\beta^+\gamma^{N-3}. \quad (2.27)$$

Démonstration. Nous prouverons cette proposition par récurrence. La preuve doit montrer que la probabilité (2.27) est vraie pour chaque $N \geq 4$.

— Montrons que la probabilité (2.27) est valable pour $N = 4$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = A, X_1 = B^-, X_2 = B^+, X_3 = I, X_4 = I) \\
&= \mathbb{P}(\Omega_1, X_4 = I) \text{ (lemme 2.5.2)} \\
&= \mathbb{P}(X_4 = I | \Omega_1) \cdot \mathbb{P}(\Omega_1) \text{ (par (2.25))} \\
&= \mathbb{P}(X_4 = I | X_3 = I) \cdot \mathbb{P}(\Omega_1) \text{ (par (2.26))} \\
&= \gamma \mathbb{P}(X_0 = A) \alpha \beta^- \beta^+ \text{ (par définition du modèle et par le lemme 2.5.2)} \\
&= \alpha \beta^- \beta^+ \gamma
\end{aligned}$$

— Supposons que la probabilité (2.27) est valable pour $N - 1$, puis montrons que la probabilité (2.27) est valable pour N . On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = A, X_1 = B^-, X_2 = B^+, X_3 = I, \dots, X_N = I) \\
&= \mathbb{P}(\Omega_1, X_4 = I, \dots, X_N = I) \text{ (lemme 2.5.2)} \\
&= \mathbb{P}(X_N = I | (\Omega_1, X_4 = I, \dots, X_{N-1} = I)) \cdot \mathbb{P}(\Omega_1, X_4 = I, \dots, X_{N-1} = I) \\
&= \mathbb{P}(X_N = I | X_{N-1} = I) \cdot \mathbb{P}(\Omega_1, X_4 = I, \dots, X_{N-1} = I) \text{ (par (2.26))} \\
&= \gamma \mathbb{P}(\Omega_1, X_4 = I, \dots, X_{N-1} = I) \text{ (par définition du modèle)} \\
&= \gamma \alpha \beta^- \beta^+ \gamma^{N-4} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \alpha \beta^- \beta^+ \gamma^{N-3}
\end{aligned}$$

D'où la proposition 2.5.3. □

2.5.3 Retour aux simulations

Pour les deux simulations de la figure 2.11, nous avons choisi les valeurs des paramètres $\alpha = 0.1$, $\beta^- = 0.75$, $\beta^+ = 0.9$, et $\gamma = 0.98$. Nous pouvons donc observer sur nos histogrammes la probabilité du maximum du flux de revenus jusqu'à $N = 25$ (taille de la barre la plus à droite) et la comparer à celle obtenue grâce à la proposition 2.5.3.

Nous obtenons 0.039 et 0.038 respectivement pour les deux simulations et 0.043279 pour la valeur théorique donnée par la formule (2.27).

Nous avons recommencé les simulations avec cette fois $N = 50$.

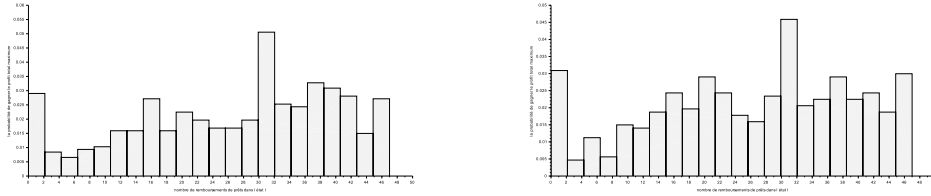


FIGURE 2.12 – Loi du flux de revenus jusqu'à l'instant $N = 50$ (deux simulations de 500 trajectoires).

Pour les simulations avec $N = 50$, la valeur maximale du flux de revenus est cette fois 47. On a obtenu que les probabilités de gagner le flux de revenus maximal pour l'emprunteur sont respectivement 0.027 et 0.029.

Pour $N = 65$, on a obtenu les graphiques suivants :

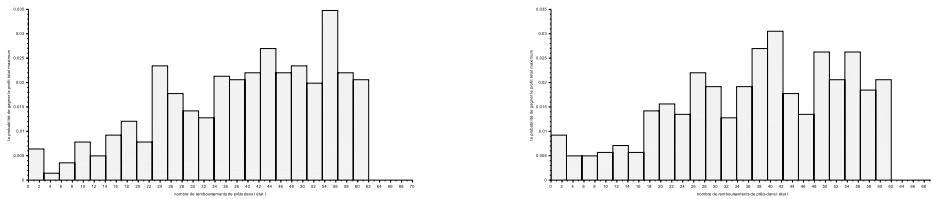


FIGURE 2.13 – Loi du flux de revenus jusqu'à l'instant $N = 65$ (deux simulations de 500 trajectoires).

Pour les simulations avec $N = 65$, la valeur maximale du flux de revenus est cette fois 62. On a obtenu que les probabilités de gagner le flux de revenus maximal sont respectivement 0.0198 et 0.02.

Nous comparons les résultats des figures 2.11, 2.12 et 2.13 sur le calcul de la probabilité de gagner le flux de revenus maximal pour $N = 25$, $N = 50$ et $N = 65$ dans le tableau suivant avec ceux que donne la formule (2.27) dans le tableau suivant :

Longueur de la trajectoire	Probabilité de la simulation 1	Probabilité de la simulation 2	Valeur donnée par la formule (2.27)
25	0.039	0.038	0.043279
50	0.027	0.029	0.0261174
65	0.0198	0.02	0.0192895

TABLE 2.1 – Comparaison entre les probabilités simulées (simulation 1 et simulation 2) et théoriques pour trois longueurs de trajectoire, à savoir $N = 25$, $N = 50$ et $N = 65$.

Nous observons que les valeurs des probabilités obtenues par simulation sont assez proches des valeurs des probabilités données par la formule (2.27), à la fois pour $N = 25$, $N = 50$ et $N = 65$.

Chapitre 3

Modélisation mathématique pour des produits de finance islamique

Il existe de nombreux types de contrats de finance islamique, notamment le murabahah (*cost plus financing*), l'ijarah (*financial Lease*), l'istisna (*manufacturing finance*), le mudarabah (*profit and loss sharing*), et le musyarakah (*joint venture*). Le *profit and loss sharing* que nous désignerons par PLS, et le *cost plus financing* que nous appelons CPF sont deux contrats de finance islamique qui ont un bon potentiel pour créer un équilibre entre le secteur monétaire et la charia, car ces deux produits évoluent pour gérer le secteur des entreprises, ce qui ajoute une valeur directe au mouvement économique. Alors que les besoins en finance islamique augmentent, divers problèmes se posent dans leur mise en œuvre, notamment dans ces deux contrats *profit and loss sharing* et *cost plus financing*. Dans ce chapitre nous proposons différents modèles mathématiques pour les deux contrats *profit and loss sharing* et *cost plus financing* pour mieux les comprendre et envisager plusieurs questions qui se posent en terme d'asymétrie d'information.

Dans le domaine des sciences économiques ou de la gestion financière, il existe de nombreux articles qui étudient ces deux contrats. On trouve par exemple dans un article de Radoni et Yaman [40] une étude dans le secteur bancaire islamique indonésien sur le problème de l'information asymétrique dans les contrats PLS et CPF. En effet comme toute banque, la banque islamique ne connaît pas les compétences réelles de ses clients pour mener à bien les entreprises qu'elle finance et elle ne sait pas non plus quel sera, une fois le contrat signé, le comportement du client (niveau d'investissement personnel, prise de risques trop grands, etc...). Ces deux types d'informations incomplètes conduisent à la sélection adverse et à l'aléa moral. Jouaber et Mehri [21] développent un modèle concernant la sélection adverse dans le contrat PLS. Leur modèle définit le taux de partage comme un dispositif de dépistage de sélection adverse. Ils montrent que l'agent de type efficient acceptera

un taux de partage supérieur à celui qui sera accepté par un agent de type non efficient. Dans leur recherche Zandi et Arifin [47] ont expliqué le cadre pratique du *cost plus financing* en Iran. Les banques iraniennes offrent une facilité de vente à tempérament pour l'achat de matières premières. Ils exposent la formule du montant des mensualités utilisée par les banques iraniennes pour les contrats CPF, que nous utiliserons sous le nom de formule d'investissement [31] pour construire l'un de nos modèles. Ismal [19] a aussi présenté un modèle de contrat CPF. Il discute des critères que la banque islamique applique pour sélectionner ses partenaires commerciaux. Le but principal de sa recherche est de minimiser l'aléa moral créé par des bénéficiaires qui, pour faire face à un taux de partage trop petit, pensent augmenter leurs profits en faisant semblant d'être en défaut. Les banques islamiques enquêteraient sur les risques qu'elles courent à cause de ces clients. Il a trouvé des formules pour comparer leur profit lorsque l'aléa moral n'est pas trouvé et lorsque l'aléa moral est découvert par les enquêtes de la banque.

Nous consacrons le premier paragraphe de ce chapitre à décrire quels sont précisément ces deux contrats islamiques, le PLS puis le CPF. Dans chacun des deux cas, nous avons choisi un exemple numérique qui servira d'illustration dans la suite.

Le second paragraphe est consacré au PLS. Nous proposons d'abord un modèle de chaîne de Markov qui étudie la dynamique d'investissement de la banque dans une entreprise en supposant que le PLS est renouvelé automatiquement aussi longtemps que l'entreprise génère des bénéfices donc aussi longtemps qu'elle réussit mais qui peut être non renouvelé en cas d'échec. Ce modèle d'une succession de contrats PLS est similaire au modèle du microcrédit conduisant à l'inclusion du chapitre 2 : il s'agit également d'une chaîne de Markov avec revenu (CMR) mais cette fois on peut calculer à la fois le flux de revenus de l'entrepreneur et celui de la banque. On étudie par simulation les lois de ces deux flux de revenus et on compare leur espérance (introduisant la notion de PLS équitable). Une relation entre le taux de partage des bénéfices et les chances de succès de l'entrepreneur nous permet aussi de discuter la question de la sélection adverse liée au PLS. Finalement nous introduisons deux hypothèses, comparables à l'hypothèse d'absence de défaut stratégique du modèle d'inclusion du chapitre 1 : pour notre contrat PLS nous faisons l'hypothèse qu'à la fois la banque a avantage à investir dans l'entreprise plutôt que de ne pas investir et à la fois l'entrepreneur a avantage à continuer à partager ses bénéfices en cas de succès plutôt que de prétendre un échec (et garder la totalité des bénéfices mais sortir du contrat). Ces deux hypothèses conduisent à des contraintes sur les paramètres du modèle.

Enfin dans le troisième paragraphe, nous proposons un modèle pour le CPF construit en adaptant un modèle de microcrédit que Mauk [32] a proposé dans sa thèse pour rendre compte de retards de remboursement. Un premier exemple dû à Muhammad Yunus nous permet d'introduire le calcul du taux d'intérêt implicite

des microcrédits, même si les termes d'un tel contrat de microcrédit (montrant du prêt, nombre et montant des remboursements et dates des remboursements) n'utilisent jamais la notion de taux d'intérêt. Cette approche est ensuite appliquée à un second exemple venant du contrat CPF d'une banque indonésienne et comparée à l'approche, considérée comme islamique, contenue dans une formule dite d'amortissement et qui utilise la marge du CPF dans des termes très proches de l'intérêt d'un prêt conventionnel. Puis cette formule d'amortissement, réécrite non plus pour le calcul des versements successifs mais pour le calcul du capital restant à payer après chaque versement, nous permet de proposer un modèle stochastique de CPF (construit sur un processus de Bernoulli) avec retards aléatoires pour prendre en compte, du point de vue de la banque, le risque auquel elle fait face en acceptant, de fait, la possibilité de retards de remboursement sans pénalités pour l'agent.

3.1 Définition des deux contrats islamiques PLS et CPF

Dans ce paragraphe, nous définirons les deux contrats islamiques que nous allons ensuite modéliser, à savoir le contrat *profit and loss sharing* (PLS) et le contrat *cost plus financing* (CPF).

3.1.1 Le contrat PLS

Le contrat *Profit and Loss Sharing* (PLS) est un contrat entre deux parties : un investisseur (une banque/*rabb-ul-mal*) donne de l'argent à un agent (emprunteur/*mudarib*) pour investir dans une entreprise. L'investisseur fournit le capital et l'agent fournit sa connaissance spécialisée et son travail pour mener à bien le projet d'investissement. Le profit de l'entreprise, s'il y en a, est partagé entre les deux parties selon un ratio préalablement convenu (taux de partage), mais en cas de perte, l'investisseur perdra tout ou partie de son capital et le client perdra le temps et les efforts investis dans le projet³. On peut résumer le contrat dans son aspect financier par la figure schématique 3.1 tirée du livre de Causse-Broquet [5] :

3. Cette définition du contrat PLS s'inspire des définitions données par Causse-Broquet [5] et Gait et Worthington [15].

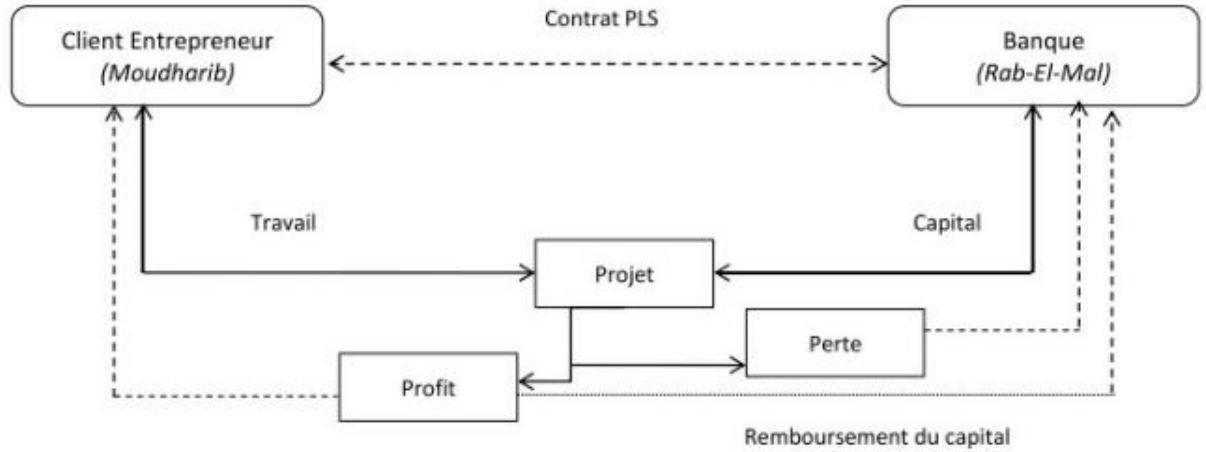


FIGURE 3.1 – Schéma du contrat PLS : en cas de succès de l'entreprise (profit), les profits sont partagés au taux ρ (le bénéficiaire gagne $\rho\%$ et la banque touche $(1-\rho)\%$) et le bénéficiaire rembourse le capital investi. En cas d'échec (perte), la perte est entièrement supportée par la banque.

Exemple 3.1.1. Dans [18], Hussein donne l'exemple suivant de PLS : une banque islamique accorde un crédit⁴ de 100 (1 kRM) à un bénéficiaire au taux de partage $\rho = 30\%$, ce qui signifie que le bénéficiaire gagne en cas de succès 30% des bénéfices nets de l'entreprise et la banque 70%. Si l'on suppose que l'entreprise rapporte 140, donc son profit est de 40, la banque touchera 28 et le bénéficiaire 12. Par contre si l'entreprise ne rapporte que 80, la perte de 20 est entièrement à la charge de la banque, c'est-à-dire que le bénéficiaire ne fait aucune perte financière dans ce cas.

Nous définissons également deux autres propriétés des contrats PLS dont nous aurons besoin plus loin :

Définition 3.1.2. On dira qu'un contrat PLS est **équitable** si l'espérance du profit du bénéficiaire est égal à l'espérance du profit de la banque.

Ainsi dans l'exemple 3.1.1 ci-dessus, si la probabilité de réussite du bénéficiaire est β , le PLS est équitable si l'on a

$$28\beta + (-20)(1 - \beta) = 12\beta,$$

ce qui donne $\beta = \frac{5}{9} \simeq 0.55$.

4. Le capital dans cet exemple s'exprime en millier de Ringgit malaisienne (noté RM)

Définition 3.1.3. Dans un contrat PLS, si le montant de l'investissement est k , le taux de partage ρ , le revenu R , la fraction "liquidative" L et la probabilité de réussite de l'entreprise β , et si le taux du rendement espéré par la banque pour cet investissement est r , on dira que le contrat PLS est **durable** si

$$\beta(1 - \rho)R - (1 - \beta)(1 - L)k = rk.$$

Nous envisagerons des PLS qui sont durables en ce sens au chapitre 4. Dans l'exemple 3.1.1 ci-dessus, si la probabilité de réussite du bénéficiaire est $\beta = \frac{5}{9}$ (contrat équitable), alors le rendement r du contrat sera $r = \frac{1}{15} \simeq 6,66\%$.

3.1.2 Le contrat CPF

Le contrat *Cost Plus Financing* (CPF) est un produit financier islamique⁵ qui suppose qu'une banque achète un bien donné pour un agent puis cède ce bien à l'agent moyennant un (des) versement(s) d'un montant et à des dates convenues d'avance entre les deux parties, le total des versements (qu'on appellera acomptes provisionnels) correspondant au prix d'achat plus une marge convenue, cette marge pouvant être un pourcentage du prix d'achat ou une somme forfaitaire [par The Accounting and Auditing Organisation for Islamic Financial Institutions (AAOIFI)].

Voici une figure schématique d'un contrat CPF adaptée d'une figure de Levy [30].

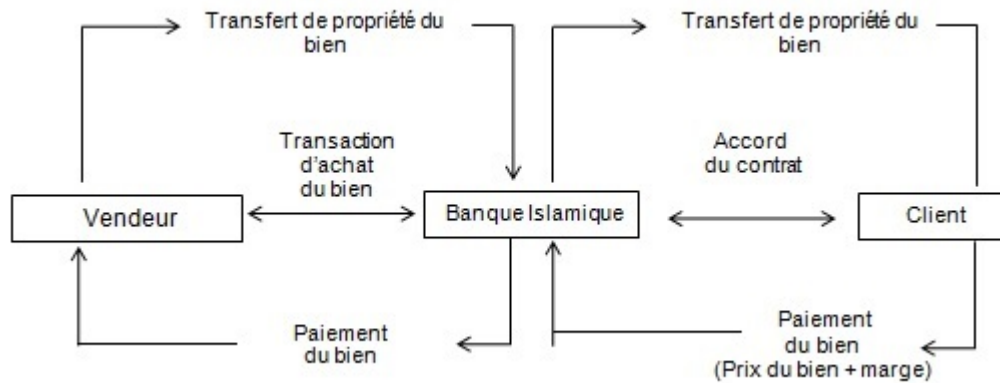


FIGURE 3.2 – Le contrat CPF. On notera que l'étalement et le montant des acomptes provisionnels ne figure pas dans le contrat. Il sont à comprendre comme des arrangements entre les parties.

5. L'explication de ce qu'est un contrat CPF est citée à partir de plusieurs références, Jouini et Pastré [22], Sultan et Ebrahim [44] et Causse-Broquet [5].

Exemple 3.1.4. Voici un exemple de Jamaldeen [20] : un fabricant veut acheter du bois. Il approche une banque islamique et signe un accord pour acheter le bois à la banque (qui se le procure au prix 100) à un prix égal à 100 plus une marge de 20 % du prix d'achat du bois par la banque⁶. Le fabricant est donc tenu de payer 120 à la banque. Il peut payer cette dette par versements dans des délais convenus.

L'un des principes de base du contrat CPF, qui semble le distinguer nettement du crédit conventionnel, est qu'il ne concerne que les besoins en biens de l'agent et pas ses besoins en argent. Néanmoins, il n'est pas vraisemblable que le bois de l'exemple précédent soit à acheter par la banque elle-même. C'est donc sans doute l'agent lui-même qui fera l'achat, mais il le fera "au nom de la banque", agissant ainsi comme un agent de la banque qui sera donc propriétaire du bois le temps de la transaction. Et, dans la pratique, il semble que le bénéficiaire devient le propriétaire du bien dès la signature du contrat s'il comporte l'échéancier des acomptes provisionnels dus.

3.2 Modèle d'une succession de contrats PLS

Dans le modèle que nous proposons dans ce paragraphe, le contrat PLS consiste pour la banque islamique à investir dans une entreprise qui peut soit être bénéficiaire, et dans ce cas on suppose que le contrat est renouvelé automatiquement, soit faire des pertes, et dans ce cas on suppose que le contrat est remis en cause et peut être, après une étape, soit stoppé soit renouvelé. Ce modèle a été publié dans [29].

3.2.1 Description du modèle

Nous considérons une banque qui accorde un contrat PLS d'un investissement k à un entrepreneur pour réaliser des activités de production. Nous supposons que ces activités de production conduisent à un revenu $Y^+(k) > k$ si le bénéficiaire du contrat réussit dans son entreprise et un revenu $Y^-(k) < k$ s'il échoue.

Le contrat PLS prévoit que, dans le cas où le bénéficiaire tire un profit de son entreprise (car $Y^+(k) - k > 0$), il doit partager ce profit avec la banque selon un taux de partage ρ : le bénéficiaire obtient un revenu $\rho(Y^+(k) - k)$ et la banque obtient un revenu $(1 - \rho)(Y^+(k) - k)$. Dans le cas où le bénéficiaire échoue dans son entreprise (si son revenu est $Y^-(k)$), la banque assume seule la perte $k - Y^-(k)$.

Dans notre modèle nous supposons que le client de la banque islamique peut être dans deux états : soit il n'est pas financé par la banque et on dira qu'il est dans l'état (A) soit il est financé par la banque comme bénéficiaire d'un contrat PLS et

6. Le coût dans cet exemple s'exprime en milliers de dollars

on dira qu'il est dans l'état B . Nous considérons une chaîne de Markov à ensemble d'états $S := \{A, B\}$ et les probabilités suivantes pour passer d'un état à un autre.

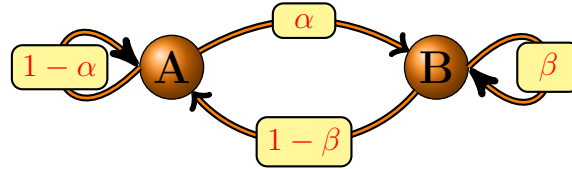


FIGURE 3.3 – La chaîne de Markov avec revenu de la banque. Les deux états du modèle, client non financé (A) et bénéficiaire d'un PLS (B), et les probabilités de transition d'un état à un autre.

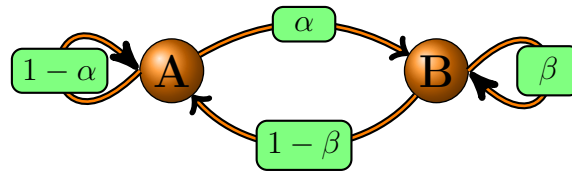


FIGURE 3.4 – La chaîne de Markov avec revenu de l'entrepreneur. Les deux états du modèle, client non financé (A) et bénéficiaire d'un PLS (B), et les probabilités de transition d'un état à un autre.

Un entrepreneur non financé peut soit devenir un bénéficiaire B avec une probabilité α , soit rester à l'état A avec une probabilité $1 - \alpha$. Nous pouvons voir α comme la probabilité pour la banque d'accorder un PLS. Le bénéficiaire dans l'état B peut soit réussir son entreprise avec la probabilité β et il partagera son bénéfice avec la banque puis il restera dans l'état B car la banque continuera à le financer, soit échouer et revenir à l'état A avec la probabilité $1 - \beta$. On peut également décrire le modèle par la matrice de transition P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ 1 - \beta & \beta \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Revenus de la banque et du bénéficiaire

Pour compléter la chaîne de Markov précédente et obtenir un modèle de chaîne Markov avec revenu (CMR) comme définie au chapitre 1 (définition [1.3.3](#)), nous introduisons la fonction de revenu d'un bénéficiaire f_E qui est non nulle seulement lorsque le bénéficiaire passe de l'état B à l'état B .

Définition 3.2.1. La fonction de revenu du bénéficiaire est donnée par

$$f_E(x, y) = \begin{cases} \rho(Y^+(k) - k) & \text{si } (x, y) = (B, B) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.2)$$

et nous introduisons une seconde fonction de revenu : la fonction de revenu de la banque f_F qui peut être un profit ou une perte selon la dynamique du bénéficiaire

Définition 3.2.2. La fonction de revenu de la banque est donnée par

$$f_F(x, y) = \begin{cases} (1 - \rho)(Y^+(k) - k) & \text{si } (x, y) = (B, B) \\ Y^-(k) - k & \text{si } (x, y) = (B, A) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Dans le cas de l'exemple [3.1.1](#), la fonction de revenus du bénéficiaire et la fonction de revenus de la banque sont respectivement

$$f_E(x, y) = \begin{cases} 12 & \text{si } (x, y) = (B, B) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$f_F(x, y) = \begin{cases} 28 & \text{si } (x, y) = (B, B) \\ -20 & \text{si } (x, y) = (B, A) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2.2 Flux de revenus et flux de revenus espéré

Dans notre modèle de succession de PLS, nous allons pouvoir calculer explicitement les flux de revenus espérés (FRE) du bénéficiaire et de la banque en utilisant les définitions [1.3.4](#) et [1.3.5](#)

Selon ces définitions, le FRE du bénéficiaire, noté $W_E = {}^t(w_E^A, w_E^B)$, est défini, pour tout état $s \in \mathcal{S} = \{A, B\}$, par

$$w_E^s = \mathbb{E} \left(\sum_{t>0} \delta^t f_E(X_{t-1}, X_t) \mid X_0 = s \right)$$

et le FRE du bénéficiaire sur une étape $\overline{W}_E = {}^t(\overline{w}_E^A, \overline{w}_E^B)$ par

$$\overline{w}_E^s = \mathbb{E} (f_E(X_0, X_1) \mid X_0 = s)$$

pour tout état $s \in \mathcal{S} = \{A, B\}$.

Et selon notre choix de fonction de revenu f_E , on a donc pour le bénéficiaire,

$$\begin{aligned}\overline{w_E^A} &= 0 \\ \overline{w_E^B} &= \beta f_E(B, B) \\ &= \beta \rho(Y^+(k) - k)\end{aligned}$$

De même, on définit pour la banque le flux de revenus espéré W_F et le flux de revenus espéré sur une étape $\overline{W_F}$.

Selon notre choix de fonction de revenu f_F , on a donc, pour la banque

$$\begin{aligned}\overline{w_F^A} &= 0 \\ \overline{w_F^B} &= \beta f_F(B, B) + (1 - \beta)f_F(B, A) \\ &= \beta(1 - \rho)(Y^+(k) - k) + (1 - \beta)(Y^-(k) - k).\end{aligned}$$

D'autre part, le théorème [1.3.7](#) permet de calculer W_E et W_F moyennant le calcul de l'inverse de la matrice $M = \mathbb{I} - \delta P$, où P est la matrice de transition de la chaîne de Markov et δ le coefficient d'actualisation de la structure CMR.

Proposition 3.2.3. Pour $\delta \in (0, 1)$, la matrice inverse de $M = \mathbb{I} - \delta P$ est donnée par

$$M^{-1} = \frac{1}{(1 - \delta)(1 + \delta\alpha - \delta\beta)} \begin{pmatrix} 1 - \delta\beta & \delta\alpha \\ \delta(1 - \beta) & 1 - \delta(1 - \alpha) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que c'est bien l'inverse de M . □

Cette proposition permet de calculer W_e puisque l'on a $W_E = M^{-1}\overline{W_E}$ selon le théorème [1.3.7](#). On a

$$\begin{pmatrix} w_E^A \\ w_E^B \end{pmatrix} = \frac{1}{(1 - \delta)(1 + \delta\alpha - \delta\beta)} \begin{pmatrix} 1 - \delta\beta & \delta\alpha \\ \delta(1 - \beta) & 1 - \delta(1 - \alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta\rho(Y^+(k) - k) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

donc

$$\begin{pmatrix} w_E^A \\ w_E^B \end{pmatrix} = \frac{\beta\rho(Y^+(k) - k)}{(1 - \delta)(1 + \delta\alpha - \delta\beta)} \begin{pmatrix} \delta\alpha \\ 1 - \delta(1 - \alpha) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

De même pour la banque,

$$\begin{pmatrix} w_F^A \\ w_F^B \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(1 - \rho)(Y^+(k) - k) + (1 - \beta)(Y^-(k) - k) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

donc

$$\begin{pmatrix} w_F^A \\ w_F^B \end{pmatrix} = \frac{\beta(1 - \rho)(Y^+(k) - k) + (1 - \beta)(Y^-(k) - k)}{(1 - \delta)(1 + \delta\alpha - \delta\beta)} \begin{pmatrix} \delta\alpha \\ 1 - \delta(1 - \alpha) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Simulation des lois des deux flux de revenus

Enfin, pour avoir une idée de la loi des flux de revenus du bénéficiaire et de la banque, voici une simulation, dans le cas de l'exemple [3.1.1](#). Nous avons choisi un échantillon de 500 trajectoires de longueur $N = 25$ et les valeurs suivantes des paramètres $\alpha = 0.15$ et $\beta = 5/9$.

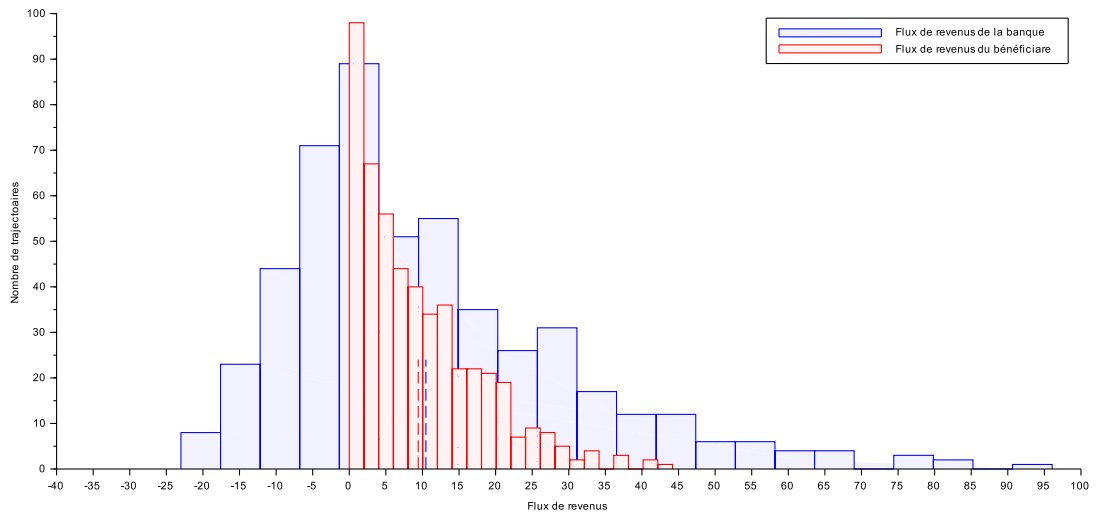


FIGURE 3.5 – Simulation du flux de revenus pour 500 trajectoires de longueur $N = 25$, pour $\delta = 0.95$, $\rho = 0.3$, $\alpha = 0.15$, $\beta = 5/9$, la ligne pointillée rouge présente la moyenne du flux de revenus espéré du bénéficiaire et la ligne pointillée bleue présente la moyenne du flux de revenus espéré de la banque.

Les résultats obtenus à partir de cette simulation, le flux de revenus espéré du bénéficiaire minimum est 0 kRM et le flux de revenus espéré du bénéficiaire maximum est KRM 44 avec la moyenne est 9,43 kRM, tandis que le flux de revenus espéré de la banque minimum est -23 kRM et le flux de revenus espéré du bénéficiaire maximum est KRM 96 avec la moyenne est 10,47 kRM.

3.2.3 Choix du taux de partage

Dans un contrat PLS, la banque investissant dans une entreprise qui sera ensuite gérée par le bénéficiaire du contrat, les deux parties ont intérêt à ce que le bénéficiaire réussisse dans son entreprise puisqu'elles s'en partageront les bénéfices et, pour ce qui est de la banque, elle en subira les pertes. Mais le contrat présente

une situation d'**asymétrie d'information** puisque la banque ne sait pas, avant la signature du contrat, dans quelle mesure son client est un entrepreneur efficient ou non (asymétrie ex ante) et elle ne sait pas non plus, après la signature du contrat, dans quelle mesure le bénéficiaire acceptera de s'investir complètement ou non dans son entreprise (asymétrie ex post). Il est donc difficile pour la banque islamique de choisir pour le PLS qu'elle propose un taux de partage adapté à la fois aux compétences de son client et au risque qu'il représente après la signature du contrat.

Dans ce paragraphe nous allons voir que, si le contrat est supposé équitable au sens de la définition [3.1.2](#), c'est-à-dire si l'espérance du revenu du bénéficiaire sur une étape est égale à l'espérance du revenu de la banque sur une étape, cela fournit une relation entre le taux de partage ρ et la probabilité de succès β de l'entreprise.

On a calculé les flux de revenus espérés sur une étape,

$$\begin{aligned}\overline{w_E^A} &= 0 \\ \overline{w_E^B} &= \beta\rho(Y^+(k) - k)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\overline{w_F^A} &= 0 \\ \overline{w_F^B} &= \beta(1 - \rho)(Y^+(k) - k) + (1 - \beta)(Y^-(k) - k).\end{aligned}$$

donc pour que le PLS soit équitable il faut que $W_E = {}^t(w_E^A, w_E^B)$ et $W_F = {}^t(w_F^A, w_F^B)$ soient égaux, et donc que

$$\begin{aligned}\beta\rho(Y^+(k) - k) &= \beta(1 - \rho)(Y^+(k) - k) + (1 - \beta)(Y^-(k) - k) \\ 2\beta\rho(Y^+(k) - k) &= \beta(Y^+(k) - Y^-(k)) + (Y^-(k) - k) \\ \rho &= \frac{\beta(Y^+(k) - Y^-(k)) + (Y^-(k) - k)}{2\beta(Y^+(k) - k)}\end{aligned}$$

D'où la relation suivante entre la taux de partage ρ et la probabilité de succès β :

Proposition 3.2.4. Un PLS qui investit un montant k dans une entreprise pouvant générer un revenu $Y^+(k) > k$ avec probabilité β et un revenu $Y^-(k) < k$ avec probabilité $1 - \beta$, est équitable si son taux de partage ρ satisfait l'équation

$$\rho = \frac{Y^+(k) - Y^-(k)}{2(Y^+(k) - k)} + \frac{Y^-(k) - k}{2\beta(Y^+(k) - k)}. \quad (3.9)$$

Donc si la banque islamique connaissait parfaitement la probabilité de succès de son client, elle pourrait choisir un taux de partage de façon à ce que le PLS soit équitable. Notons que comme, selon notre modèle, $\frac{Y^-(k) - k}{2(Y^+(k) - k)}$ est toujours négatif, on voit que ρ est une fonction croissante de β (qui tend vers $1/2$ quand β tend vers 1).

Dans le cas de l'exemple [3.1.1](#), on avait $k = 100$, $Y^+(k) = 140$, $Y^-(k) = 80$ et un taux de partage $\rho = 0,3$. Cette formule nous conduit à une probabilité de succès $\beta = 5/9$ qui est proche de $\beta = 0,55$.

Sélection adverse

Supposons qu'en l'absence d'information sur la probabilité réelle de succès β de son client, cette probabilité inconnue soit égale à une probabilité moyenne β_0 (par exemple celle observée sur l'ensemble de ses contrats PLS passés et qu'elle choisisse le taux de partage ρ_0 correspondant (selon la formule [\(3.9\)](#)). Un investisseur qui estimerait ses chances de succès supérieures se détournera de ce contrat, lui préférant d'autres financements jugés plus favorables. Il pourrait considérer que le taux de partage qui lui est proposé, s'il est possiblement équitable pour un entrepreneur "moyen", n'est pas équitable pour lui (ou elle). Ce raisonnement s'applique à tous les "bons" clients mais pas, à l'inverse, aux investisseurs qui savent qu'ils sont plus risqués que la moyenne et qui considéreront le taux de partage proposé par la banque avantageux pour eux. Le choix d'un taux de partage trop bas peut ainsi décourager les "bons" entrepreneurs et encourager les moins efficaces ou les plus risqués. C'est ce phénomène qu'on appelle **sélection adverse** et qui est l'une des conséquences connues de l'asymétrie d'information. Selon la sélection adverse, on peut même noter que, quelque soit le taux de partage choisi, ce choix fera fuir les meilleurs entrepreneurs, faisant ainsi baisser mécaniquement la probabilité de succès moyenne des entrepreneurs qui acceptent finalement le contrat proposé.

3.2.4 Hypothèses d'Avantage à Collaborer (AC_E et AC_F)

Dans notre modèle de PLS, il y a deux hypothèses qu'il est naturel de faire, un peu comme les conditions d'absence de défaut stratégique (ADS) du modèle d'inclusion du chapitre précédent, et qui vont apparaître comme des contraintes sur les paramètres du modèle.

- La première que nous désignerons par hypothèse d'**Avantage à Collaborer pour le bénéficiaire** (AC_E), qui consiste à supposer, en terme de flux de revenus espéré, qu'il ne peut pas être plus avantageux pour le bénéficiaire d'un PLS de se déclarer en échec (revenu $Y^-(k)$) et donc d'infliger une perte à la banque alors que l'entreprise a réussi (revenu $Y^+(k)$). Il faut qu'il y ait toujours, pour le bénéficiaire un avantage à poursuivre la collaboration. On va donc supposer l'hypothèse AC_e suivante :

$$w_E^B + \rho(Y^+(k) - k) \geq w_E^A + (Y^+(k) - k)$$

En d'autre terme, pour le bénéficiaire qui réussit, il est toujours préférable de prendre sa part ρ des bénéfices et d'obtenir la poursuite du financement (il reste dans l'état B et son flux de revenu espéré est w_E^B) que de garder la totalité des bénéfices (en prétendant un échec), ce qui le conduit à perdre le renouvellement de son PLS (passant à l'état A).

On peut réécrire cette inégalité

$$w_E^B - w_E^A - (1 - \rho)(Y^+(k) - k) \geq 0$$

Et, en utilisant l'équation (3.6)

$$\frac{\beta\rho(Y^+(k) - k)}{(1 - \delta)(1 + \delta\alpha - \delta\beta)}(1 - \delta(1 - \alpha) - \delta\alpha) - (1 - \rho)(Y^+(k) - k) \geq 0$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\beta\rho - (1 - \rho)(1 + \delta\alpha - \delta\beta) &\geq 0 \\ \beta\rho + \delta(1 - \rho)\beta - \delta(1 - \rho)\alpha - (1 - \rho) &\geq 0 \\ \alpha &\leq \frac{\rho + \delta(1 - \rho)}{\delta(1 - \rho)}\beta - \frac{1}{\delta}\end{aligned}$$

et finalement :

$$\alpha \leq \left(1 + \frac{\rho}{\delta(1 - \rho)}\right)\beta - \frac{1}{\delta} \quad (3.10)$$

- La seconde hypothèse, appelée AC_F , concerne la banque islamique. Il doit être plus avantageux pour elle de financer l'entreprise que de s'abstenir de la financer, c'est-à-dire que, même en tenant compte du risque de pertes, son flux de revenus espéré, lorsqu'elle finance doit être supérieur à son flux de revenu espéré lorsqu'elle ne finance pas. On a donc l'hypothèse AC_F : suivante :

$$w_F^B \geq w_F^A.$$

De l'équation (3.8), on déduit

$$\frac{\beta(1 - \rho)(Y^+(k) - k) + (1 - \beta)(Y^-(k) - k)}{(1 - \delta)(1 + \delta\alpha - \delta\beta)}(1 - \delta(1 - \alpha) - \delta\alpha) \geq 0$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{\beta(1 - \rho)(Y^+(k) - k) + (1 - \beta)(Y^-(k) - k)}{(1 + \delta\alpha - \delta\beta)} &\geq 0 \\ \beta &\geq \frac{Y^-(k) - k}{(Y^-(k) - k) - (1 - \rho)(Y^+(k) - k)}\end{aligned} \quad (3.11)$$

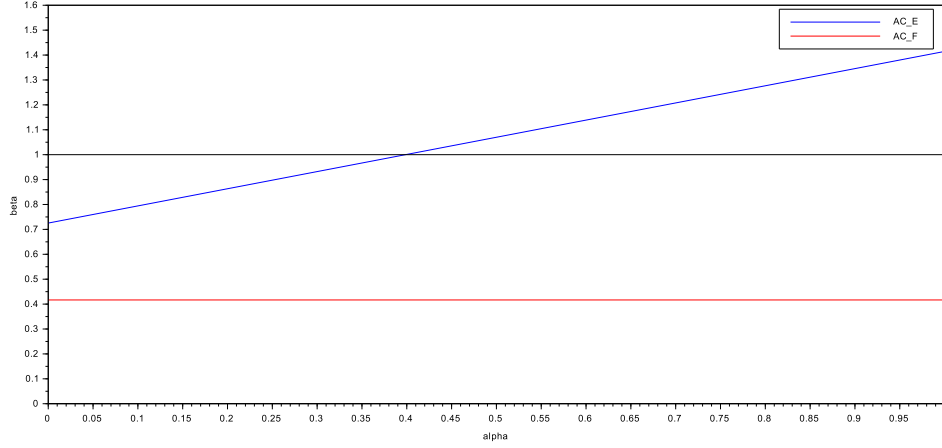


FIGURE 3.6 – En bleu la droite d'équation $\alpha = \frac{193}{133}\beta - \frac{20}{19}$ et en rouge la droite d'équation $\beta = \frac{5}{12}$. Les valeurs de α et β pour lesquelles les hypothèses d'(AC_E) et d'(AC_F) sont satisfaites sont situées dans le triangle au dessus de la droite bleue (et sous la droite $\beta = 1$). Ici $\delta = 0,95$.

Dans le cas de l'exemple de la sous-section 3.1.1, on avait $k = 100$, $Y^+(k) = 140$, $Y^-(k) = 80$ et un taux de partage $\rho = 0.3$. Ces deux hypothèses d'avantage à collaborer, (3.10) et (3.11), conduisent aux inégalités suivantes

$$\alpha \leq \left(1 + \frac{\rho}{\delta(1-\rho)}\right) \beta - \frac{1}{\delta} \leq \frac{193}{133}\beta - 20/19$$

et

$$\beta \geq \frac{(Y^-(k) - k)}{(Y^-(k) - k) - (1 - \rho)(Y^+(k) - k)} = \frac{5}{12}$$

La figure 3.6 illustre les deux inégalités d'avantage à collaborer pour l'entrepreneur (AC_E) et pour la banque (AC_F).

Cette figure montre que la zone qui satisfait la condition AC_E est la zone située au-dessus de la ligne bleue et en dessous de la ligne noire $\beta = 1$ (donc α est inférieur à 0,398.. et β supérieur à 0,725..), tandis que la zone qui satisfait la condition AC_F est la zone au-dessus de la ligne rouge (β au moins égal à 0,416..). On voit donc que dans cet exemple la condition d'(AC_F) est automatiquement satisfaite dès que la condition d'(AC_E) l'est.

Mais on voit aussi que le taux de partage de cet exemple, $\rho = 0,3$, qui n'est équitable, comme nous l'avons observé, que si $\beta = \frac{5}{9}$, n'est pas assez grand pour

correspondre à un contrat vérifiant à la fois les hypothèses d'avantage à collaborer et qui soit équitable. S'il est équitable, alors le bénéficiaire rationnel aura intérêt, s'il réussit à stopper la collaboration en annonçant qu'il a échoué.

3.2.5 Proportions de bénéficiaires à l'équilibre

A présent, nous nous proposons de calculer les proportions d'agents financés et non financés par un PLS à l'équilibre de la dynamique, c'est-à-dire dans l'état stationnaire de la chaîne de Markov de notre modèle décrit au paragraphe 3.2.1

Proposition 3.2.5. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ la chaîne de Markov décrite au paragraphe 3.2.1. Si les paramètres α et β ne sont ni égaux à 0 ni à 1, de sorte que P est régulière et si π_t est la distribution au temps t alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t = \pi^\infty$ où

$$\pi^\infty = (\pi_A^\infty, \pi_B^\infty) = \left(\frac{1 - \beta}{1 - \beta + \alpha}, \frac{\alpha}{1 - \beta + \alpha} \right) \quad (3.12)$$

Démonstration. On applique le théorème 1.2.7 de Perron Frobenius. $\square$

Nous expliquons ci-dessous comment nous avons trouvé la formule (3.12).

Par définition 1.2.6, π^∞ vérifie $\pi^\infty P = \pi^\infty$, où P est la matrice de transition, soit

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ 1 - \beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

ce qui donne

$$(1 - \alpha)x + (1 - \beta)y = x \quad (3.14)$$

$$\alpha x + \beta y = y. \quad (3.15)$$

Comme x et y sont les proportions des états de la chaîne de Markov, on a

$$x + y = 1 \quad (3.16)$$

A partir de l'équation (3.15), nous obtenons

$$x = \frac{(1 - \beta)}{\alpha} y. \quad (3.17)$$

En remplaçant l'équation (3.17) par l'équation (3.14), on obtient

$$(1 - \alpha) \frac{(1 - \beta)}{\alpha} y + (1 - \beta)y = \frac{(1 - \beta)}{\alpha} y,$$

donc nous trouvons que $y = y$ (toujours vrai).

Ensuite, en utilisant l'équation (3.17) dans l'équation (3.16),

$$\frac{(1 - \beta)}{\alpha}y + y = 1,$$

d'où la proportion de l'état B :

$$y = \frac{\alpha}{1 - \beta + \alpha}. \quad (3.18)$$

Puis nous remplaçons l'équation (3.18) par l'équation (3.17) d'où la proportion de l'état A :

$$x = \frac{1 - \beta}{1 - \beta + \alpha}$$

d'où le résultat

$$\pi^\infty = \frac{1}{1 - \beta + \alpha} (1 - \beta, \alpha).$$

Exemple 3.2.6. Si nous choisissons $\alpha = 0.15$ et $\beta = 0.95$ alors nous pouvons calculer les proportions d'agents dans la population à l'équilibre en utilisant l'équation (3.12). Nous trouvons que

$$\pi_A^\infty = \frac{1 - 0.95}{1 - 0.95 + 0.15} = 0.25$$

et

$$\pi_B^\infty = \frac{0.15}{1 - 0.95 + 0.15} = 0.75.$$

La proportion des deux états peut être représentée sur la figure 3.7.

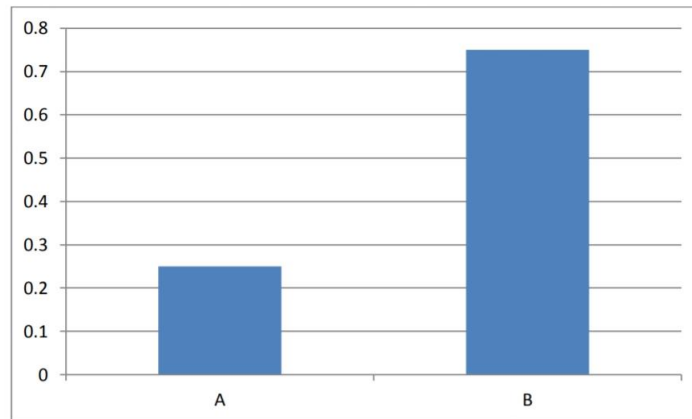


FIGURE 3.7 – La distribution d'équilibre $\pi^\infty = (\pi_A^\infty, \pi_B^\infty)$, pour $(\alpha, \beta) = (0.15, 0.95)$

3.3 Modèle du contrat CPF

Rappelons (paragraphe 3.1.2) que le *murabaha* (*Cost Plus Financing*) est un contrat entre un client et une banque qui achète un actif choisi par le client, puis lui cède cet actif à un prix correspondant au prix d'achat augmenté d'une *marge* fixée, moyennant un (des) remboursement(s) de ce prix majoré à une (des) date(s) convenue(s). Quand le bénéficiaire a payé le prix d'achat majoré, il est quitte.

Pour construire un modèle mathématique de CPF, nous allons d'abord examiner l'équation de Yunus qui sert de base au modèle mathématique de microcrédit que P. Mauk [32] a présenté dans sa thèse et que nous allons utiliser comme modèle de CPF lorsqu'il y a des retards dans les remboursements.

3.3.1 L'exemple de Yunus

Pour construire son modèle, Mauk [32] a pris l'exemple des microcrédits tel qu'expliqué par Yunus. Un bénéficiaire obtient un prêt de 1.000 BDT (Bangladesh Taka) de la Grameen Bank. Il rembourse son prêt par petits versements hebdomadaires : il fait des versements de 22 BDT pendant 50 semaines. Donc, il rembourse un total de 1.100 BDT (ce qui correspond donc à une marge annuelle de 10%).

Bien que ce contrat de microcrédit ne mentionne pas de taux d'intérêt, on peut le regarder comme un prêt classique et calculer le taux d'intérêt correspondant à cette marge annuelle de 10%, si les 50 versements sont effectués chaque semaine sans retard. Les calculs se font ainsi :

Soit r le taux d'intérêt annuel continu⁷ implicitement contenu dans ce contrat. La valeur des premiers 22 BDT remboursés après une semaine est $22e^{\frac{-r}{52}}$, la valeur du deuxième remboursement de 22 BDT, après deux semaines, est $22e^{\frac{-2r}{52}}$, etc. En général, la valeur du n -ième remboursement, à la semaine n , est $22e^{\frac{-nr}{52}}$. En écrivant que le 50-ième remboursement solde le prêt nous obtenons une équation, que nous appellerons l'*équation déterministe de Yunus* :

$$1.000 = 22 \sum_{n=1}^{50} e^{\frac{-nr}{52}} \quad (3.19)$$

En posant $x = e^{\frac{-r}{52}}$, l'équation (3.19) devient

$$1.000 = 22 \sum_{n=1}^{50} x^n = 22 \frac{x - x^{51}}{1 - x}. \quad (3.20)$$

7. par taux continu r nous entendons qu'une somme k empruntée à la date 0 vaut ke^{rt} à la date t .

De l'équation (3.20), nous obtenons une équation polynomiale $f(x) = 0$ de degré 51 avec x inconnu et $f(x)$ le polynôme :

$$f(x) := 22x^{51} - 1.022x + 1.000. \quad (3.21)$$

On obtient une unique racine réelle, positive et distincte de $x = 1$, qui vaut $x = 0,9962107...$, d'où on déduit le taux d'intérêt $r = 19,74175... \% \approx 20\%$. On peut donc voir ce microcrédit comme un prêt à un taux d'intérêt annuel effectif r d'environ 20%.

A noter que ce taux d'intérêt est seulement une façon de traduire les termes du contrat qui ne le mentionne pas et à noter aussi que ce calcul tient compte des dates de versements et qu'il n'est plus valable si certains versement sont retardés.

Dans la pratique du microcrédit, si un bénéficiaire ne peut pas rembourser certaines semaines pour des raisons indépendantes de sa volonté, il est accepté qu'il rembourse alors les versements restants dès qu'il le pourra à nouveau, le dernier versement n'intervenant plus alors en semaine 50 mais seulement en semaine 51 ou plus tard encore. Dans le modèle de Mauk, dont nous nous inspirons plus loin, on étudie l'effet de ces retards dans les versements sur le taux annuel réel.

3.3.2 Exemple d'un contrat CPF d'une banque indonésienne

La différence entre un contrat CPF et un microcrédit, est que le CPF se conforme à la loi islamique en cela que le bénéficiaire obtient de la banque un bien qu'il veut acquérir, et non un prêt d'argent.

Néanmoins, concernant les calculs financiers relatifs aux contrats CPF (le calcul du montant des versements en fonction du prix et de la marge), sont-ils les mêmes que ceux que nous venons de présenter pour le microcrédit de Yunus ? Comme exemple test, nous utilisons un exemple de calcul d'une banque islamique en Indonésie, à savoir BCA Syariah⁸.

On suppose que la banque achète un actif pour 15.000 kRp⁹ remis à un agent avec une marge $m = 14\%$. L'agent paiera alors l'actif au prix majoré, sous formes de mensualités pendant $N = 24$ mois, d'un montant v dont la banque indique le montant de 720,19325 kRp.

En adaptant l'équation (3.19) aux valeurs de cet exemple, nous obtenons l'équation :

$$15.000 = 720,19325 \sum_{l=1}^{24} e^{-\frac{nm}{12}}. \quad (3.22)$$

8. On peut voir la simulation de versements d'un contrat CPF (murabahah) sur le site : www.bcasyariah.co.id/produk/pembiayaan/simulasi/#Simulasi-Angsuran-Murabahah.

9. Rp (rupiah) est la monnaie de l'Indonésie. Nous notons kRp pour 1.000 Rp.

En posant $x = e^{\frac{-m}{12}}$, on obtient l'équation polynomiale :

$$f(x) := 720,19325x^{25} - 15.720,19325x + 15.000 = 0. \quad (3.23)$$

On obtient aussi un zéro réel positif de la fonction f , $x = 0,9962107\dots$, d'où l'on déduit la marge $m = 13,91896\% \approx 14\%$. En fait, la BCA Syariah dit appliquer la marge 14%.

En adaptant l'équation déterministe de Yunus (3.19), nous définissons le modèle de paiement d'un bien de prix k d'un contrat CPF en N versements de montant v aux dates t_n (en mois depuis l'achat) avec marge m , que nous appellerons *modèle ou équation de Yunus pour le CPF* :

$$k = v \sum_{n=1}^N e^{\frac{-m}{12} t_n}. \quad (3.24)$$

Au début du contrat CPF d'achat d'un bien de prix k , la banque islamique et le client conviennent de la marge m , du nombre N de versements et leurs montant v et des dates $(t_n)_{n=1..N}$ des versements. Généralement les versements sont mensuels et donc $t_n = n$. Les versements sont déterminés à partir de (3.24) et sont donc

$$v = k \frac{1}{\sum_{n=1}^N e^{\frac{-m}{12} t_n}}. \quad (3.25)$$

Dans le cas où le bénéficiaire verse un acompte (DP) à la banque islamique dans un contrat CPF, le bénéficiaire remboursera le prix d'achat restant de l'actif plus la marge. Par exemple, la banque islamique achète un actif pour 15.000 kRp. Le bénéficiaire paie une avance de 5.000 kRp. Le client paiera le prix restant de l'actif 10.000 kRp avec la marge de 14%. Le client paiera 480,12883 kRp par mois pendant 24 mois. De façon générale, en cas de versement d'un acompte DP, les N versements aux dates t_n sont alors donnés par

$$v = (k - DP) \frac{1}{\sum_{n=1}^N e^{\frac{-m}{12} t_n}}. \quad (3.26)$$

Nous avons utilisé l'équation (3.25) pour calculer les versements mensuels payés avec différentes durées N du contrat, de 12 mois, 24 mois, 36 mois, 48 mois ou 60 mois. Le calcul est fait pour le prix d'achat de l'actif 15.000 kRp et la marge 14% (et sans acompte (DP)).

Les calculs sont présentés dans le tableau 3.1

Nombre de paiements	Calcul pour le modèle proposé
12	1.347.385,50 Rp.
24	720.774,35 Rp.
36	513.261,94 Rp.
48	410.514,31 Rp.
60	349.661,65 Rp.

TABLE 3.1 – Calcul des versements selon l'équation (3.25) pour des durées de remboursement de 12 mois, 24 mois, 36 mois, 48 mois et 60 mois.

Formule d'amortissement

Comme indiqué dans l'introduction de ce chapitre, Zandi et Arifin proposent dans l'article [47] une formule calculant les mensualités qui est utilisée par les banques iraniennes pour leurs contrats CPF. Ils ont présenté une équation considérée comme proche de la philosophie islamique par les experts "car elle ne privilégie pas les profits importants des banques". Cette formule est la suivante :

$$v = \frac{m}{12} \times \frac{k(1 + \frac{m}{12})^N}{(1 + \frac{m}{12})^N - 1}, \quad (3.27)$$

où v est le versement mensuel, m est la marge annuelle, k est le prix de l'actif acheté et N est le nombre de versements.

Nous observons que la formule ci-dessus, dite **formule d'amortissement**, est la même que celle généralement utilisée dans le calcul des acomptes provisionnels des prêts par les banques conventionnelles.

Nous avons utilisé la formule (3.27) pour calculer le montant des versements mensuels payés selon différentes durées de contrat, qui sont de 12 mois, 24 mois, 36 mois, 48 mois et 60 mois dans l'exemple de la section précédente. Les résultats du calcul coïncident avec ceux de la banque BCA Syariah. Ils sont présentés dans le tableau 3.2.

Comparons le calcul du montant des versements mensuels à partir du modèle que nous proposons (table 3.1) résultant de l'équation (3.25) et ceux du modèle présenté par Zandi et Arifin à partir de la formule d'amortissement (3.27) (table 3.2). (et les calculs du site de la banque BCA Syariah qui donnent les mêmes résultats que ceux de la formule amortissement). Nous supposons que le calcul de la formule d'amortissement est la valeur exacte, puis nous calculons la valeur d'erreur à partir du calcul du modèle que nous proposons.

Nombre de paiements	Calcul de la banque
12	1.346.806,76 Rp.
24	720.193,25 Rp.
36	512.664,45 Rp.
48	409.897,15 Rp.
60	349.023,76 Rp.

TABLE 3.2 – Le calcul du montant du paiement de la BCA Syariah bank avec la formule d’amortissement (3.27) pour des durées de paiements de 12 mois, 24 mois, 36 mois, 48 mois et 60 mois.

Nombre de versements	Calcul avec le modèle proposé (3.24)	Calcul de la banque : formule (3.27)	Erreur (%)
12	1.347.385,50 Rp.	1.346.806,76 Rp.	0,043
24	720.774,35 Rp.	720.193,25 Rp.	0,080
36	513.261,94 Rp.	512.664,45 Rp.	0,116
48	410.514,31 Rp.	409.897,15 Rp.	0,128
60	349.661,65 Rp.	349.023,76 Rp.	0,183

TABLE 3.3 – Comparaison du calcul du montant du paiement du modèle proposé (l’équation (3.25)) et de la BCA Syariah bank (avec la formule d’amortissement), ainsi que l’erreur, pour des durées de paiement de 12 mois, 24 mois, 36 mois, 48 mois et 60 mois.

Nous voyons dans le table 3.3 que l’erreur de calcul du modèle que nous proposons est très faible par rapport au calcul de la banque utilisant la formule amortissement.

Une comparaison des deux calculs peut être vue dans la figure suivante, qui est également une illustration de la valeur d’erreur de nos calculs de modèle.

Nous pouvons voir sur la figure 3.8, que la valeur d’erreur du calcul des mensualités par le modèle que nous proposons et par la banque indonésienne est proche de zéro (très faible) pour toutes les durées de paiement.

Nous avons également essayé de faire d’autres expériences de calcul en modifiant la valeur du prix d’achat des biens, les frais de versement, la durée des versements. D’après les calculs effectués, tous répondent au modèle de Yunus de CPF. En d’autres termes, on peut adapter l’équation déterministe de Yunus (3.19) à ce produit islamique, le contrat CPF.

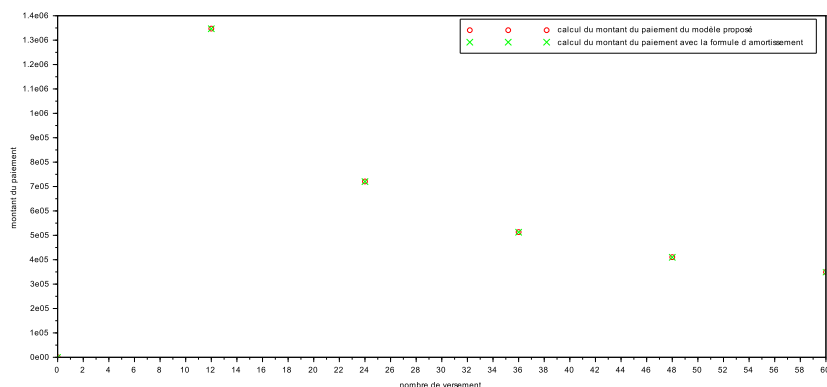


FIGURE 3.8 – Comparaison du calcul du montant du paiement du modèle proposé par l'équation (3.25) (les cercles rouges) et de la banque BCA Syariah avec la formule amortissement (les croix vertes) pour la durée de paiement de 12 mois, 24 mois, 36 mois, 48 mois et 60 mois. L'abscisse est le nombre de versements et l'ordonnée est le montant des versements.

3.3.3 Modèle de CPF avec retards aléatoires

Une réécriture de la formule d'amortissement (3.27) va nous permettre d'introduire un modèle aléatoire qui prend en compte d'éventuels retards des versements d'un CPF pour calculer le montant du capital restant à payer à la banque une fois le dernier versement prévu effectué, lorsqu'une ou plusieurs des dates de versement n'a pas fait l'objet d'un versement. Ce modèle aléatoire s'inspire du modèle de P. Mauk [32].

Calcul de la formule d'amortissement

Voici comment la formule d'amortissement (3.27) découle de la proposition *Amortissement* et le théorème *Periodic Payment* présentés par Lovelock et al [31] et la preuve de Paulus [37]. Si k est le principal emprunté (le prix du bien du CPF), notons m la marge (annuelle) et posons $\mu = \frac{m}{12}$ que nous désignerons un peu abusivement par marge-mensuelle. Nous voulons comprendre pourquoi les versements mensuels sont donnés par

$$v = \frac{k\mu(1 + \mu)^N}{(1 + \mu)^N - 1}, \quad (3.28)$$

À la date 0, le principal k_0 vaut $k_0 = k$. Le bénéficiaire paie les versements aux dates $n = 1, 2, \dots, N$. Le premier versement dont nous allons réduire le principal

emprunté est

$$v - k_0\mu.$$

Donc, le principal emprunté après le premier versement (à la date $n = 1$), k_1 , sera

$$\begin{aligned} k_1 &= k_0 - (v - k_0\mu) \\ &= k_0(1 + \mu) - v. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ensuite, le principal emprunté après le deuxième versement (à la date $n = 2$), k_2 , sera

$$\begin{aligned} k_2 &= k_1 - (v - k_1\mu) \\ &= k_1(1 + \mu) - v \\ &= k_0(1 + \mu)^2 - (v + v(1 + \mu)), \end{aligned} \quad (3.30)$$

et le principal emprunté après le troisième versement (à la date $n = 3$), k_3 , sera

$$\begin{aligned} k_3 &= k_2 - (v - k_2\mu) \\ &= k_2(1 + \mu) - v \\ &= k_0(1 + \mu)^3 - (v + v(1 + \mu) + v(1 + \mu)^2), \end{aligned} \quad (3.31)$$

D'après les équations (3.29), (3.30) et (3.31), nous pouvons comprendre que le principal emprunté après le N -ème versement (à la date $n = N$) est

$$k_N = k_0(1 + \mu)^N - (v + v(1 + \mu) + v(1 + \mu)^2 + \dots + v(1 + \mu)^{N-1}). \quad (3.32)$$

Comme

$$v + v(1 + \mu) + v(1 + \mu)^2 + \dots + v(1 + \mu)^{N-1}$$

est une série géométrique de premier terme v et de rapport $1 + \mu$, nous avons

$$v + v(1 + \mu) + v(1 + \mu)^2 + \dots + v(1 + \mu)^{N-1} = v \left[\frac{1 - (1 + \mu)^N}{1 - (1 + \mu)} \right],$$

et donc l'équation (3.32) devient

$$k_N = k_0(1 + \mu)^N - v \left[\frac{1 - (1 + \mu)^N}{1 - (1 + \mu)} \right].$$

Nous voulons que $k_N = 0$ car cela signifie que le principal emprunté k est passé à 0 et que le bénéficiaire ne doit plus rien à la banque islamique. Nous devons donc fixer le montant du versement mensuel à

$$v = \frac{k_0\mu(1 + \mu)^N}{(1 + \mu)^N - 1}$$

qui est précisément la formule (3.28)

Retards aléatoires

Nous comprenons que le point essentiel du raisonnement est que, si k_{n-1} est le principal dû après le $(n-1)$ -ième paiement du versement v , le n -ième paiement de v est consacré à la fois à payer une marge $k_{n-1}\mu$ et un amortissement $a_n = v - k_{n-1}\mu$, d'où $k_n = k_{n-1} - a_n = k_{n-1}(1 + \mu) - v$. Supposons que le n -ième paiement ait lieu y_n mois après le $(n-1)$ -ième. La somme due serait alors $k_{n-1}(1 + \mu)^{y_n}$. On aura alors

$$k_n = k_{n-1}(1 + \mu)^{y_n} - v. \quad (3.33)$$

Soient $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < \dots < t_N$ les dates (en mois) auxquelles ont lieu le paiement des N versements v . Posons $t_0 = 0$ et soient $y_n = t_n - t_{n-1} > 0$ les durées séparant le n -ième versement $(n-1)$ ième. À partir de la formule (3.33) nous voyons que la formule d'amortissement donnant la somme k_n restant due après le n -ième paiement intervenu à la date t_n est $k_1 = k_0(1 + \mu)^{y_1} - v$ et, plus généralement, donnée par la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. Soit k_n la somme due après le n -ième versement de v , au mois t_n , après une durée de $y_n = t_n - t_{n-1}$ mois depuis le $(n-1)$ -ième. Alors $k_1 = k_0(1 + \mu)^{y_1}$ et, en posant $u = 1 + \mu = 1 + \frac{m}{12}$, pour $n \geq 2$, on a les trois égalités équivalentes suivantes :

$$k_n = k_0 u^{t_n} - v \left(1 + \sum_{i=0}^{n-2} u^{t_n - t_{i+1}} \right) \quad (3.34)$$

$$k_n = k_0 u^{\sum_{i=1}^n y_i} - v \left(1 + \sum_{j=0}^{n-2} u^{\sum_{l=0}^{n-j-2} y_{n-l}} \right) \quad (3.35)$$

$$k_n = k_0 u^{y_1} u^{y_2} \dots u^{y_n} - v(1 + u^{y_n}(1 + u^{y_{n-1}}(1 + \dots u^{y_3}(1 + u^{y_2}) \dots))) \quad (3.36)$$

Cette même relation s'applique pour le modèle de Yunus pour le CPF défini par l'équation (3.24) moyennant le fait de poser $u = e^\mu = e^{\frac{m}{12}}$.

Généralement les contrats prévoient des versements chaque mois et donc $t_n = n$ et tous les y_i sont égaux à 1. Mais des circonstances imprévues peuvent survenir et certains y_i peuvent être strictement supérieurs à 1. On dit qu'il y a *retard* dans le paiement du i -ième versement v .

Le processus de Bernoulli défini en 1.1.3 modélise, par $\{B_i = 1\}$ ou $\{B_i = 0\}$, l'événement que le paiement prévu au mois i a pu avoir lieu ou non. C'est un modèle simple, puisqu'il suppose que tous les retards sont indépendants et ont la même probabilité, $1 - p$.

Le processus $(T_n)_{n \geq 0}$ défini par (1.1) modélise alors les dates où le n -ième versement a lieu. Rappelons qu'à la proposition 1.1.5 nous avons vu que les $Y_n := T_n - T_{n-1}$ suivent une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Dans un contrat CPF, nous savons que, si le bénéficiaire ne peut pas payer un versement, il peut retarder le paiement et peut payer dans les périodes suivantes sans augmenter la marge. Avec cette règle, nous pouvons utiliser le modèle de Yunus pour le CPF (3.24) et son corollaire (3.25) pour déterminer le montant des N paiements mensuels $\bar{v}$:

$$v = k \frac{1}{\sum_{n=1}^N e^{\frac{-m}{12}n}}.$$

Les $Y_n = T_n - T_{n-1}$ représentent les temps séparant les paiements effectifs. Si $Y_n > 1$ il y a retard de $Y_n - 1$ mois. La proposition (3.3.1) permet d'expliciter la valeur (aléatoire) K_n de la somme qui reste à payer après le n -ième paiement effectif.

$$K_n = k_0 u^{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n} - v(1 + u^{Y_n}(1 + u^{Y_{n-1}}(1 + \dots u^{Y_3}(1 + u^{Y_2}) \dots))), \quad (3.37)$$

toujours avec $u = e^{\frac{m}{12}}$. En particulier, lors du N -ième paiement (qui devrait être le dernier) en cas de retards il reste un solde de

$$K_N = k_0 u^{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N} - v(1 + u^{Y_N}(1 + u^{Y_{N-1}}(1 + \dots u^{Y_3}(1 + u^{Y_2}) \dots))). \quad (3.38)$$

Si la banque renonce à toute indemnisation pour retard, le solde K_N est une perte par rapport à une prise en compte des retards et constitue une évaluation du risque pour la banque islamique lié aux retards de son bénéficiaire.

Pour illustrer la valeur de ce risque nous avons représenté à la figure 3.9 les histogrammes d'une simulation de 20.000 tirages aléatoires d'autant de prêts de MRp 15 en N remboursements avec probabilité p que chaque remboursement suivant intervienne bien au mois suivant, pour $p = 0.8$ (en rouge) et $p = 0.9$ (en bleu), pour pour $N = 12$, $N = 24$, $N = 36$, $N = 48$, et $N = 60$. Nous avons également représenté par un segment vertical la valeur moyenne des pertes sur l'échantillon considéré, qui constitue une estimation de l'espérance de la variable aléatoire K_N . Nous voyons que pour $N = 12$ et $N = 24$ il reste encore beaucoup de prêts qui ne rencontrent pas de retard, et n'occasionnent donc pas de perte pour la banque. Mais lorsque N augmente, la perte augmente.

Nous voyons sur l'expression (3.38) que le solde qui resterait à payer se présente comme sommes et produits de variables aléatoires indépendantes. Ceci permet de calculer explicitement l'espérance du solde K_N .

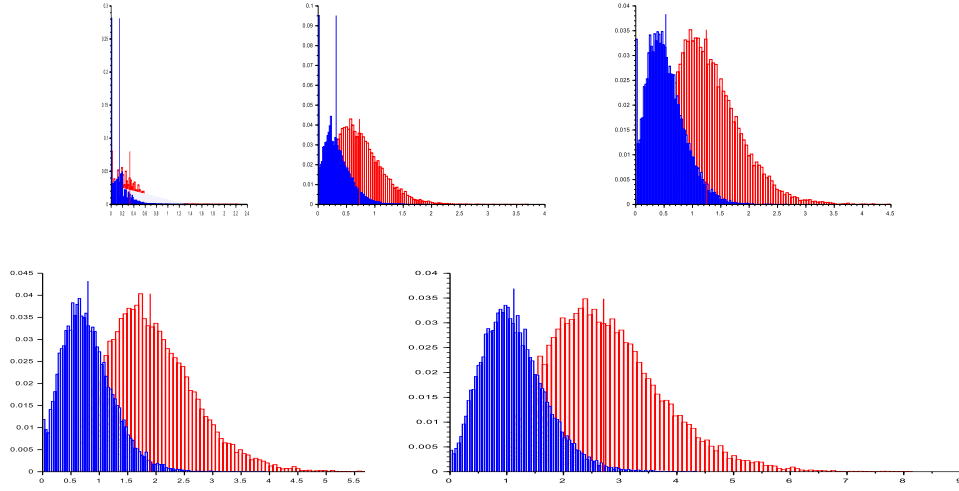


FIGURE 3.9 – Histogramme des montants non amortis, compte tenu des retards, après les N versements convenus, sur une simulation de 20000 trajectoires pour $m = 0.14$, $k_0 = \text{MRp } 15$, avec une probabilité de paiement sans retard $p = 0.8$ (en rouge) et $p = 0.9$ (en bleu), pour $N = 12$, $N = 24$, $N = 36$, $N = 48$, et $N = 60$. La valeur moyenne est marquée par un segment vertical de même couleur.

Chapitre 4

Modèle de théorie des jeux pour le contrat "Profit and Loss Sharing"

Dans le chapitre précédent, il a été expliqué que l'un des problèmes du contrat PLS est l'asymétrie d'information. Elle se produit lorsqu'il existe de l'information privée du demandeur du l'investissement, les banques ne connaissant pas pleinement toutes les informations du demandeur (existence d'information incomplète).

Dans l'article [13], Fakir et Tkouat présentent un modèle de théorie des jeux pour prendre en compte les différents types d'agents et de financiers et voir comment ces différents types interagissent pour que le financier puisse choisir un contrat optimal. Leur modèle utilise les *jeux bayésiens* proposés par Harsanyi (jeux en information incomplète) [16] qui sont des jeux dans lesquels les joueurs ne disposent que d'informations partielles sur les données du jeu ou sur les autres joueurs [46]. Le taux de partage (ρ) du PLS est fonction du niveau supposé de risque de l'agent. On suppose qu'il y a deux types d'agents (entrepreneurs) à savoir, l'agent efficient et l'agent non efficient. Ce que nous entendons par agent efficient est un agent qui réussit avec une plus forte probabilité que l'agent non efficient.

Nous verrons que, si la banque mesure son utilité uniquement en terme de profit (on dit qu'elle est à but lucratif), les équilibres du jeu, qu'on soit en information complète (le type de l'agent est connu) ou en information incomplète, ne sont pas satisfaisants, ni pour les clients ni pour la banque. Mais nous verrons aussi que si l'on modifie l'utilité de la banque pour en faire une banque à but social, alors les équilibres sont bien plus satisfaisants.

Les modèles que nous allons construire sont divisés en deux parties, le modèle de contrat PLS dans les banques à but lucratif et le modèle de contrat PLS dans les banques à but social. La différence que nous introduisons entre banques à but lucratif et banques à but social est empruntée à un article de Benedikter [2]. L'activité d'une banque à but lucratif consiste uniquement à maximiser son profit, tandis que la

banque à but social se soucie de faire du profit, mais également se concentre sur l'investissement dans la communauté, en offrant des opportunités aux personnes défavorisées. Pour une banque à but social, sa responsabilité envers l'ensemble de la société est plus importante pour sa pratique financière que le profit seul.

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord notre modèle, un jeu sous forme stratégique à deux joueurs, la banque et l'agent, leurs stratégies et l'utilité espérée de chaque stratégie. Puis nous déterminerons les équilibres de Nash et équilibres bayésiens dans le cas d'un contrat PLS d'une banque à but lucratif. Enfin nous faisons de même dans le cas d'une banque à but social. Les résultats sont obtenus dans le cas d'un exemple concret adapté de l'article de Fakir et Tkiouat [13].

4.1 Cas d'une banque à but lucratif

4.1.1 Description du modèle

Dans notre modèle, le jeu se compose de deux joueurs, une banque B et un agent A . Le joueur 1 est la banque qui propose l'un des deux contrats, un contrat 1 (C_1) ou un contrat 2 (C_2) représentant un investissement k conduisant à un revenu du contrat 1 (R_1) ou du contrat 2 (R_2) avec une probabilité de succès du contrat 1 (β_1) inférieure à la probabilité de succès du contrat 2 (β_2), $\beta_1 < \beta_2$. C_1 est le contrat avec un montant du revenu plus élevé que C_2 , ($R_1 > R_2$). Ce sont ces probabilités qui dépendent également du type de l'agent, efficient ou non. Le joueur 2 est l'agent qui travaille pour son entreprise, qui peut accepter (Ac) ou refuser (Re) le contrat proposé par la banque. Les deux joueurs évaluent leurs utilités en espérance. Chaque action choisie par l'agent affectera l'utilité obtenue par la banque (u_B) et l'agent (u_A).

L'information ici, disponible ou non, sera le type c'est-à-dire l'efficacité de l'agent. Nous décrirons d'abord le cas où ce type est connu, pour aborder ensuite la question lorsque le joueur 1, la banque B , ne connaît pas ce type, mais qu'elle ne connaît que la probabilité p que l'agent soit efficient (cas bayésien).

Dans ce contrat PLS, on suppose qu'en cas d'échec la banque B ne récupère que la fraction "liquidative" L de son investissement k et subit donc une perte $(1 - L)k$, l'agent A n'étant pas autrement pénalisé qu'en n'ayant pas reçu le salaire W qu'il aurait gagné s'il n'était pas entré dans ce contrat.

Pour chaque contrat C_j on convient à l'avance du taux de partage ρ_j , part du profit qui revient à l'agent, et donc de la part du profit $1 - \rho_j$ qui revient à la banque (pour $j = 1, 2$).

Si l'agent accepte le contrat, l'utilité de l'agent (u_A) est

$$u_A(C_j, Ac) = \beta_j \rho_j R_j. \quad (4.1)$$

S'il refuse le contrat, u_A se réduit, pour tout contrat offert C_j :

$$u_A(C_j, Re) = W. \quad (4.2)$$

Voyons l'utilité de la banque. Si l'agent accepte le contrat, l'utilité de la banque (u_B) est

$$u_B(C_j, Ac) = \beta_j(1 - \rho_j)R_j - (1 - \beta_j)(1 - L)k. \quad (4.3)$$

Calcul du taux de partage

Si l'on désigne par r_j est le taux de rendement espéré par la banque sur le marché pour le niveau de risque d'un placement tel que le contrat C_j , on va supposer que l'utilité de ce PLS pour la banque u_B (que l'agent accepte ou refuse le contrat) doit satisfaire à l'égalité

$$u_B(C_j, \cdot) = r_j k. \quad (4.4)$$

Si l'agent accepte un contrat offert par la banque, la situation dans l'équation (4.3) doit être la même que dans l'équation (4.4). Nous pouvons donc écrire

$$\beta_j(1 - \rho_j)R_j - (1 - \beta_j)(1 - L)k = r_j k. \quad (4.5)$$

À partir de l'équation (4.5), nous pouvons déterminer le taux de partage d'un contrat

$$1 - \rho_j = \frac{r_j k + (1 - \beta_j)(1 - L)k}{\beta_j R_j},$$

et donc

$$\rho_j = 1 - \frac{r_j k + (1 - \beta_j)(1 - L)k}{\beta_j R_j}. \quad (4.6)$$

Description du jeu

Dans notre modèle, la banque offre deux contrats, à savoir C_1 et C_2 à un agent. Le contrat C_1 est un contrat intéressant mais risqué alors que le contrat C_2 l'est moins. Les agents sont divisés en deux types, à savoir des agents efficaces et des agents non efficaces.

Les probabilités de succès de l'agent efficace et de l'agent non efficace sont différentes, tant pour C_1 que pour C_2 , Si bien que le taux de partage pour le contrat C_1 et le contrat C_2 sont différents selon le type de l'agent. Nous distinguerons donc ρ_j^E de ρ_j^{-E} et, partant, C_j^E de C_j^{-E} .

De ce qui précède, brièvement dans notre modèle, nous supposons que

- le revenu de l'agent s'il prend le contrat 1 est plus grand que s'il prend le contrat 2 ($R_1 > R_2$),

- le taux de rendement espéré r_1 sur le marché pour le niveau de risque d'un placement tel que le contrat C_1 est supérieur au le taux de rendement espéré r_2 sur le marché pour le niveau de risque d'un placement tel que le contrat C_2 : ($r_1 > r_2$).
- la probabilité de succès du contrat 1 par l'agent efficient est plus petite que celle du contrat 2 ($\beta_1^E < \beta_2^E$). De même pour l'agent non efficient ($\beta_1^{-E} < \beta_2^{-E}$).
- le taux de partage du contrat 1, offert à l'agent efficient est inférieur à celui du contrat 2 ($\rho_1^E > \rho_2^E$). De même pour l'agent non efficient ($\rho_1^{-E} > \rho_2^{-E}$).
- le salaire de l'agent efficient est plus grand que celui de l'agent non efficient ($W^E > W^{-E}$).

Déterminons l'utilité de la banque et de l'agent selon leur choix de stratégie. Pour chacun des contrats C_j comme vu en (4.5) l'utilité de la banque la stratégie Ac et Re de l'agent est la même. Cela s'applique à l'agent efficient et l'agent non efficient. Avec l'équation (4.3), on a les utilités de la banque pour à l'agent efficient (u_B^E) et l'agent non efficient (u_B^{-E}) :

$$u_B^E(C_1^E, Ac) = \beta_1^E(1 - \rho_1^E)R_1 - (1 - \beta_1^E)(1 - L)k, \quad (4.7)$$

$$u_B^E(C_2^E, Ac) = \beta_2^E(1 - \rho_2^E)R_2 - (1 - \beta_2^E)(1 - L)k, \quad (4.8)$$

$$u_B^{-E}(C_1^{-E}, Ac) = \beta_1^{-E}(1 - \rho_1^{-E})R_1 - (1 - \beta_1^{-E})(1 - L)k, \quad (4.9)$$

et

$$u_B^{-E}(C_2^{-E}, Ac) = \beta_2^{-E}(1 - \rho_2^{-E})R_2 - (1 - \beta_2^{-E})(1 - L)k. \quad (4.10)$$

Nous pouvons également utiliser l'équation (4.4) pour déterminer u_B^E et u_B^{-E} , si l'agent accepte le contrat proposé par la banque, quel qu'il sont :

$$u_B^E(C_1^E, Ac) = r_1k = u_B^{-E}(C_1^{-E}, Ac) \quad (4.11)$$

et

$$u_B^E(C_2^E, Ac) = r_2k = u_B^{-E}(C_2^{-E}, Ac), \quad (4.12)$$

Ensuite, nous utilisons l'équation (4.4) pour calculer les utilités de la banque, si l'agent refuse le contrat proposé par la banque.

$$u_B^E(C_1^E, Re) = r_1k = u_B^{-E}(C_1^{-E}, Re) \quad (4.13)$$

et

$$u_B^E(C_2^E, Re) = r_2k = u_B^{-E}(C_2^{-E}, Re). \quad (4.14)$$

En appliquant l'équation (4.1) l'utilité de l'agent est l'espérance de son profit et donc l'utilité de l'agent efficient u_A^E est :

$$u_A^E(C_1^E, Ac) = \beta_1^E \rho_1^E R_1, \quad (4.15)$$

et

$$u_A^E(C_2^E, Ac) = \beta_2^E \rho_2^E R_2, \quad (4.16)$$

tandis que l'utilité de l'agent non efficient u_A^{-E} est :

$$u_A^{-E}(C_1^{-E}, Ac) = \beta_1^{-E} \rho_1^{-E} R_1 \quad (4.17)$$

et

$$u_A^{-E}(C_2^{-E}, Ac) = \beta_2^{-E} \rho_2^{-E} R_2. \quad (4.18)$$

Au contraire si l'agent refuse le contrat, son utilité se réduit à son salaire comme vu à l'équation (4.2).

$$u_A^E(C_1^E, Re) = W^E = u_A^E(C_2^E, Re) \quad (4.19)$$

et

$$u_A^{-E}(C_1^{-E}, Re) = W^{-E} = u_A^{-E}(C_2^{-E}, Re). \quad (4.20)$$

4.1.2 Cas d'une banque à but lucratif : un exemple en information complète

En commençant par le modèle dans les banques à but lucratif, nous présentons un exemple de jeu en information complète pour offrir des contrats PLS à des agents de types efficients et non efficients..

Dans notre exemple, on suppose que $k = 10000$, $R_1 = 6000$, $R_2 = 4000$, $L = 30\% = 0.3$, $r_1 = 7.5\% = 0.075$ et $r_2 = 5\% = 0.05$ et on suppose que les probabilités de succès de l'agent efficient pour C_1 et C_2 soient respectivement,

$$\beta_1^E = 80\% \text{ et } \beta_2^E = 90\%.$$

Ceci conduit aux taux de partage que nous obtenons en utilisant l'équation (4.6),

$$\rho_1^E = 1 - \frac{(0.075)(10000) + (1 - 0.8)(1 - 0.3)(10000)}{(0.8)(6000)} \simeq 55.2 \dots \% \quad (4.21)$$

et

$$\rho_2^E = 1 - \frac{(0.05)(10000) + (1 - 0.9)(1 - 0.3)(10000)}{(0.9)(4000)} \simeq 66.6 \dots \%. \quad (4.22)$$

Avec les formules (4.15) et (4.16) on obtient les utilités suivantes pour l'agent efficient, s'il accepte le contrat C_1 et C_2 , respectivement

$$u_A^E(C_1^E, Ac) = (0.8)(55.2 \dots \%)(6000) = 2650 \quad (4.23)$$

et

$$u_A^E(C_2^E, Ac) = (0.9)(66.6 \dots \%)(4000) = 2400. \quad (4.24)$$

Si l'agent efficient refuse le contrat, il conserve, comme indiqué dans la formule (4.19), son ancien salaire $W = W^E = 400$, et donc, quel que soit le contrat C_1 et C_2 , on a

$$u_A^E(C_1^E, Re) = u_A^E(C_2^E, Re) = 400.$$

Par agent non efficient, on entend le cas où les probabilités tombent à

$$\beta_1^{-E} = 60\% \text{ et } \beta_2^{-E} = 80\%$$

ce qui conduit aux taux de partage

$$\rho_1^{-E} = 1 - \frac{(0.075)(10000) + (1 - 0.6)(1 - 0.3)(10000)}{(0.6)(6000)} \simeq 1.4 \dots \% \quad (4.25)$$

et

$$\rho_2^{-E} = 1 - \frac{(0.05)(10000) + (1 - 0.8)(1 - 0.3)(10000)}{(0.8)(4000)} \simeq 40.6 \dots \%. \quad (4.26)$$

On utilise les équation (4.17) et (4.18), les utilités pour l'agent non efficient tombent donc à

$$\begin{aligned} u_A^{-E}(C_1^{-E}, Ac) &= (0.6)(1.4 \dots \%)(6000) \\ &= 50 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_A^{-E}(C_2^{-E}, Ac) &= (0.8)(40.6 \dots \%)(4000) \\ &= 1300. \end{aligned}$$

Avec l'équation (4.20), si l'agent non efficient refuse le contrat, il conserve son ancien salaire $W = W^{-E} = 200$ (qui a été choisi inférieur à celui de l'agent efficient) et donc, quel que soit le contrat C_j

$$u_A^{-E}(C_j^{-E}, Re) = W^{-E} = 200.$$

Ensuite, nous déterminons les utilités de la banque pour le type de l'agent efficient et les utilités de la banque pour le type de l'agent non efficient avec l'équation (4.4). De même, puisqu'on a choisi $r_1 = 0.075$ et $r_2 = 0.05$, on trouve

$$u_B^E(C_1^E, \cdot) = u_B^{-E}(C_1^{-E}, \cdot) = (0.075)(10000) = 750$$

et

$$u_B^E(C_2^E, \cdot) = u_B^{-E}(C_2^{-E}, \cdot) = (0.05)(10000) = 500$$

car le rendement attendu par la banque pour ce contrat PLS peut être obtenu par ailleurs en cas de refus de l'agent.

On en déduit deux jeux sous forme stratégique : entre la banque et un agent efficient d'une part et entre la banque et un agent non efficient d'autre part. Nous présentons les utilités des deux jeux sur la figure 4.1, dont chacun a un équilibre de Nash en stratégie pure¹⁰.

(E)	Ac	Re	$(\neg E)$	Ac	Re
C_1^E	750; 2650	750; 400	C_1^{-E}	750; 50	750; 200
C_2^E	500; 2400	500; 400	C_2^{-E}	500; 1300	500; 200

FIGURE 4.1 – Utilités des deux jeux sous forme stratégique entre une banque qui offre deux types de contrats C_1 et C_2 et un agent (efficient à gauche et non efficient à droite). En gras, les équilibres de Nash en stratégie pure.

On vérifie facilement que les stratégies en gras sur la tableau (4.1), (750;2650) et (750;200), sont des équilibres de Nash en stratégies pure.

Ce résultat, satisfaisant dans le cas d'un agent efficient, est socialement décevant pour un agent non efficient, qui n'acceptera pas le contrat C_1 choisi par la banque, alors que le contrat C_2 lui serait avantageux, et même s'il est non optimal pour la banque, reste acceptable pour elle.

Cas où la banque n'offre que deux contrats C_1^E et C_2^{-E}

Nous envisageons à présent le fait de dédier le contrat C_1 à un agent efficient et le contrat C_2 à une agent non efficient.

Nous envisageons le cas de deux types d'agents, efficient E et non efficient $\neg E$, pensons dédier le contrat C_1 à l'efficient et le C_2 au non efficient et fixons le taux de partage $\rho_1 = \rho_1^E$ et $\rho_2 = \rho_2^{-E}$ en conséquence. Nous calculons néanmoins à titre indicatif les utilités "croisées", car celles-ci seront utiles lorsque nous envisagerons le cas de l'information incomplète (type de l'agent non connu de la banque).

10. Voir définition 1.4.4

Puisque la banque a tendance à offrir le contrat C_1 à l'agent efficient et le contrat C_2 à l'agent non efficient, nous utilisons β_1^E pour déterminer le taux de partage du contrat 1 (ρ_1) par la formule (4.6) tandis que β_1^{-E} est utilisé pour déterminer le taux de partage du contrat 2 (ρ_2) par la même formule (4.6). Nous obtenons les taux de partage

$$\rho_1 = \rho_1^E \simeq 55.2 \dots \%$$

et

$$\rho_2 = \rho_2^{-E} \simeq 40.6 \dots \%.$$

En raison du changement du ρ_2 d'un agent efficient et du ρ_1 d'un agent non efficient, nous devons revoir les utilités de la banque

$$u_B^E(C_1^E, Ac) = 750,$$

$$\begin{aligned} u_B^E(C_2^{-E}, Ac) &= ((0.9)(1 - 40.6 \dots \%)(4000)) - ((1 - 0.9)(1 - 0.3)(10000)) \\ &= 1437.5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_B^{-E}(C_1^E, Ac) &= ((0.6)(1 - 55.2 \dots \%)(6000)) - ((1 - 0.6)(1 - 0.3)(10000)) \\ &= -1187.5, \end{aligned}$$

et

$$u_B^{-E}(C_2^{-E}, Ac) = 500.$$

Les utilités de la banque ne changent pas, si l'agent efficient refuse le contrat proposé par la banque.

$$u_B^E(C_1^E, Re) = u_B^{-E}(C_1, Re) = 750$$

et

$$u_B^E(C_2^{-E}, Re) = u_B^{-E}(C_2^{-E}, Re) = 500.$$

Les utilités pour l'agent efficient (u_A^E) et l'agent non efficient (u_A^{-E}), s'il accepte, dont :

$$u_A^E(C_1^E, Ac) = 2650,$$

$$\begin{aligned} u_A^E(C_2^{-E}, Ac) &= (0.9)(40.6 \dots \%)(4000) \\ &= 1462.5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_A^{-E}(C_1^E, Ac) &= (0.6)(55.2 \dots \%)(6000) \\ &= 1987.5 \end{aligned}$$

et

$$u_A^{-E}(C_2^{-E}, Ac) = 1300.$$

Si l'agent refuse le contrat, les utilités de la banque ne changent pas, quel que soit le type d'agent. Son utilité est égale à son salaire.

$$u_A^E(C_1^E, Re) = u_A^E(C_2^{-E}, Re) = W^E = 400.$$

et

$$u_A^{-E}(C_1^E, Re^{-E}) = u_A^{-E}(C_2^{-E}, Re^{-E}) = W^{-E} = 200.$$

On en déduit, deux jeux sous forme stratégique, entre la banque et un agent efficient d'une part et entre la banque et un agent non efficient d'autre part. Nous présentons les utilités des deux jeux sur la figure 4.1. Chacun a un équilibre de Nash en stratégie pure¹¹.

(E)	Ac	Re	$(\neg E)$	Ac	Re
C_1^E	750; 2650	750; 400	C_1^E	-1187.5; 1987.5	750; 200
C_2^{-E}	1437.5 ; 1462.5	500; 400	C_2^{-E}	500 ; 1300	500; 200

FIGURE 4.2 – Utilités des deux jeux sous forme stratégique entre une banque qui offre deux types de contrats C_1 et C_2 et un agent (efficient à gauche et non efficient à droite). En gras, les équilibres de Nash en stratégie pure.

On vérifie facilement que les stratégies en gras sur la figure 4.2, (1437.5; 1462.5) et (500; 1300), sont des équilibres de Nash en stratégies pure.

Ce résultat n'est guère satisfaisant dans le cas d'un agent efficient puisque seul le contrat $C_2 = C_2^{-E}$, conçu pour un agent non efficient, donne lieu à un équilibre de Nash. On voit qu'à l'équilibre, quelque soit le type de l'agent, la banque ne propose que son contrat C_2 .

4.1.3 Banque à but lucratif : un exemple en information incomplète

Nous avons vu un exemple de jeu entre banque et agent en information complète. Nous allons à présent étudier ce jeu, mais en information incomplète, lorsque la

11. Voir définition 1.4.4

banque ne connaît pas le type d'un demandeur agent efficient ou non efficient. Nous utilisons la méthode dite bayésienne de Harsanyi : la banque postule le type d'agent avec une certaine probabilité. Soit p la probabilité a priori que la banque assigne au type d'agent efficient E alors $1 - p$; est la probabilité du type agent non efficient $\neg E$.

Cherchons les équilibres de Nash bayésiens. Commençons par décrire l'espace stratégique de chaque joueur. Notons les stratégies de la banque (S_B) et les stratégies de l'agent (S_A). On a les espaces stratégiques de chaque joueur, banque (joueur 1) et agent bayésien (joueur 2) suivantes :

$$S_B = \{C_1^E, C_2^{\neg E}\} \text{ et } S_A = \{Ac^E Ac^{\neg E}, Ac^E Re^{\neg E}, Re^E Ac^{\neg E}, Re^E Re^{\neg E}\}.$$

Nous avons expliqué précédemment que la probabilité de l'agent efficient est p , tandis que la probabilité de l'agent non efficient est $1 - p$. Calculons l'espérance d'utilité de chaque stratégie.

Nous allons voir ci-dessous que l'utilité de chaque stratégie est donnée par le tableau suivant :

	$Ac^E Ac^{\neg E}$	$Ac^E Re^{\neg E}$
C_1^E	$1937.5p - 1187.5; 662.5p + 1987.5$	$750; 2450p + 200$
$C_2^{\neg E}$	$937.5p + 500; 162.5p + 1300$	$937.5p + 500; 1262.5p + 200$
	$Re^E Ac^{\neg E}$	$Re^E Re^{\neg E}$
C_1^E	$1937.5p - 1187.5; -1587.5p + 1987.5$	$750; 200p + 200$
$C_2^{\neg E}$	$500; -900p + 1300$	$500; 200p + 200$

FIGURE 4.3 – Utilité de la banque et de l'agent bayésien au jeu en information imparfaite dans le cas d'une banque à but lucratif.

- Si la banque propose le contrat C_1^E , et si l'agent efficient accepte et l'agent non efficient accepte ($C_1^E, Ac^E Ac^{\neg E}$) on a les utilités
 $\mathbb{E}[u_B(C_1^E, Ac^E Ac^{\neg E})] = 750p + (-1187.5)(1 - p) = 1937.5p - 1187.5$
 $\mathbb{E}[u_A(C_1^E, Ac^E Ac^{\neg E})] = 2650p + 1987.5(1 - p) = 662.5p + 1987.5$
d'où la paire d'utilités $(1937.5p - 1187.5; 662.5p + 1987.5)$.
- Si la banque propose le contrat C_1^E , et si l'agent efficient accepte et l'agent non efficient refuse ($C_1^E, Ac^E Re^{\neg E}$) on a les utilités
 $\mathbb{E}[u_B(C_1^E, Ac^E Re^{\neg E})] = 750p + 750(1 - p) = 750$
 $\mathbb{E}[u_A(C_1^E, Ac^E Re^{\neg E})] = 2650p + 200(1 - p) = 2450p + 200$
d'où la paire d'utilités $(750; 2450p + 200)$.

De même pour l'espérance des utilités de la banques et de l'agent d'autres stratégies, ce que nous pouvons voir dans la figure [4.3](#).

Par examen du tableau des utilités de la figure 4.3 on comprends que ce jeu bayésien possède un équilibre de Nash en stratégie pure. Il ne dépend pas de la probabilité p .

Proposition 4.1.1. $(C_2^{-E}, Ac^E Ac^{-E})$ est un équilibre de Nash bayésien en stratégie pure quelque soit $p \in [0, 1]$, et c'est le seul.

Démonstration. Si la stratégie de l'agent est $Ac^E Ac^{-E}$, la stratégie C_2^{-E} est préférable à C_1^E pour la banque car $937.5p + 500 \geq 1937.5p - 1187.5$ pour $p \in [0, 1]$. Et si la stratégie de la banque est C_2^{-E} , la stratégie $Ac^E Ac^{-E}$ est préférable aux trois autres stratégies de l'agent car $162.5p + 1300 \geq 1262.5p + 200$, $162.5p + 1300 \geq -900p + 1300$ et $162.5p + 1300 \geq 200p + 200$ pour $p \in [0, 1]$. Donc la stratégie $(C_2^{-E}, Ac^E Ac^{-E})$ est bien un équilibre de Nash bayésien.

Pour vérifier que c'est le seul équilibre bayésien en stratégie pure, il suffit de s'assurer, en appliquant la définition que les autres stratégies pures n'en sont pas. $\square$

4.2 Cas d'une banque à but social

Nous voyons qu'avec l'utilité u_B et en n'offrant que les deux contrats C_1^E et C_2^{-E} en information imparfaite le contrat C_1^E n'est plus un équilibre de Nash bayésien car la banque préférera donner le contrat C_2^{-E} , même à un agent efficient, à fortiori si elle ne sait pas distinguer un agent efficient d'un agent non efficient. Pour dépasser cette difficulté nous allons à présent envisager une autre utilité. En effet le contrat C_2^{-E} est le plus intéressant (et le moins risqué) pour la banque.

4.2.1 Utilité sociale en information complète

Nous proposons un modèle pour les banques avec des objectifs sociaux, qui devrait être un modèle qui, dans son application, peut satisfaire à la fois les agents efficientes et les agents non efficientes, et optimiser les revenus bancaires.

Nous proposons une utilité alternative que nous appelons **utilité sociale**. Si la banque est un organisme à but social, elle peut, sans renoncer à rentrer dans ses frais (break even), adopter par exemple pour utilité, la somme de son espérance et de celle de son agent

$$u_B^S = u_B + u_A.$$

Envisageons donc les nouveaux tableaux d'utilités suivants pour les mêmes contrats et les mêmes types d'agents. On suppose que la banque connaît le type de ses agents.

(E)	Ac	Re	$(\neg E)$	Ac	Re
C_1^E	3400 ; 2650	1150; 400	C_1^E	800; 1987.5	950; 200
C_2^{-E}	2900; 1462.5	900; 400	C_2^{-E}	1800 ; 1300	700; 200

FIGURE 4.4 – Utilités des deux jeux sous forme stratégique entre une banque qui offre deux types de contrats C_1^E et C_2^{-E} et un agent (efficient à gauche et non efficient à droite). En gras, les équilibres de Nash en stratégie pure.

On vérifie facilement que les stratégies en gras sur les tableaux 4.4, ((3400 ; 2650) et (1800 ; 1300)), sont des équilibres de Nash en stratégies pure. Ce résultat est socialement satisfaisant car, à l'équilibre, la banque proposera des contrats correspondant aux différents types d'agent et ils les accepteront.

4.2.2 Utilité sociale en information imparfaite

Nous avons vu un exemple de jeu entre banques et agents en information complète pour une banque à but social. Maintenant nous allons étudier ce jeu en information incomplète (on suppose que la banque ne connaît pas le type de l'agent).

Nous allons chercher les équilibres de Nash bayésiens. L'espace stratégique de deux joueurs est respectivement :

$$S_B = \{C_1^E, C_2^{-E}\} \text{ et } S_A = \{Ac^E Ac^{-E}, Ac^E Re^{-E}, Re^E Ac^{-E}, Re^E Re^{-E}\}.$$

Nous calculons ci-dessous les utilités de chaque stratégie et nous verrons qu'elles sont données par le tableau suivant :

	$Ac^E Ac^{-E}$	$Ac^E Re^{-E}$
C_1^E	2600p + 800 ; 662.5p + 1987.5	$2450p + 950; 2450p + 200$
C_2^{-E}	1100p + 1800 ; 162.5p + 1300	$2200p + 700; 1262.5p + 200$
	$Re^E Ac^{-E}$	$Re^E Re^{-E}$
C_1^E	$350p + 800; -1587.5p + 1987.5$	$200p + 950; 200p + 200$
C_2^{-E}	$-900p + 1800; -900p + 1300$	$200p + 700; 200p + 200$

FIGURE 4.5 – Jeu bayésien entre la banque et l'agent dans le cas d'une banque à but social. On désigne par p la proportion d'agents efficients.

- Stratégie $(C_1^E, Ac^E Ac^{-E})$: on a les utilités
 $\mathbb{E}[u_B(C_1^E, Ac^E Ac^{-E})] = 3400p + 800(1 - p) = 2600p + 800$
 $\mathbb{E}[u_A(C_1^E, Ac^E Ac^{-E})] = 2650p + 1987.5(1 - p) = 662.5p + 1987.5$
d'où la paire d'utilités $(2600p + 800; 662.5p + 1987.5)$.

- Stratégie $(C_1^E, Ac^E Re^{-E})$: on a les utilités
 $\mathbb{E}[u_B(C_1^E, Ac^E Re^{-E})] = 3400p + 950(1 - p) = 2450p + 950$
 $\mathbb{E}[u_A(C_1^E, Ac^E Re^{-E})] = 2650p + 200(1 - p) = 2450p + 200$
d'où la paire d'utilités $(2450p + 950; 2450p + 200)$.

De même pour l'espérance des utilités de la banque et de l'agent d'autres stratégies, ce que nous pouvons voir dans la figure 4.5.

Par examen du tableau des utilités de la figure 4.5 on voit que ce jeu possède un équilibre de Nash bayésien en stratégie pure mais qu'à présent il dépend de la probabilité p :

Proposition 4.2.1. Si $p \leq \frac{2}{3}$, $(C_2^{-E}, Ac^E Ac^{-E})$ est un équilibre de Nash bayésien et si $p \geq \frac{2}{3}$, $(C_1^E, Ac^E Ac^{-E})$ est un équilibre de Nash bayésien.

Démonstration. .

- supposons $p \leq \frac{2}{3}$: si la stratégie de l'agent bayésien est $Ac^E Ac^{-E}$, la stratégie C_2^{-E} est préférable à C_1^E pour la banque car $1100p + 1800 \geq 2600p + 800$. Et si la stratégie de la banque est C_2^{-E} , la stratégie $Ac^E Ac^{-E}$ est préférable aux trois autres stratégies pour l'agent bayésien car $162.5p + 1300 \geq 1262.5p + 200$, $162.5p + 1300 \geq -900p + 1300$ et $162.5p + 1300 \geq 200p + 200$. La stratégie $(C_2^{-E}, Ac^E Ac^{-E})$ est donc un équilibre de Nash bayésien lorsque $p \leq \frac{2}{3}$.
- supposons $p \geq \frac{2}{3}$: si la stratégie du joueur 2 est $Ac^E Ac^{-E}$, la stratégie C_1^E est préférable à C_2^{-E} pour la banque car $2600p + 800 \geq 1100p + 1800$. Et si la stratégie de la banque est C_1^E , la stratégie $Ac^E Ac^{-E}$ est préférable aux trois autres stratégies pour l'agent car $662.5p + 1987.5 \geq 2450p + 200$, $662.5p + 1987.5 \geq -1587.5p + 1987.5$ et $662.5p + 1987.5 \geq 200p + 200$. La stratégie $(C_1^E, Ac^E Ac^{-E})$ est donc un équilibre de Nash bayésien lorsque $p \geq \frac{2}{3}$.

□

Nous voyons ici comment l'approche de Harsanyi permet à une banque à but social d'opter pour l'un ou l'autre des contrats en substituant une croyance sur p à une information sur l'efficacité d'un client particulier. A l'équilibre, elle proposera à ses clients l'un ou l'autre de ses deux contrats selon qu'elle pensera que peu sont non efficaces ($1 - p \leq \frac{1}{3}$) ou qu'un trop grand nombre d'entre eux sont non efficaces ($1 - p \geq \frac{1}{3}$). Et à l'équilibre, les contrats proposés sont acceptés par les clients, qu'ils soient efficaces ou non.

Bibliographie

- [1] Akerlof, G. A. The Market for "Lemons" : Quality Uncertainty and the Market Mechanism. *The Quarterly Journal of Economics*, 84 :488-500, 1970.
- [2] Benedikter, R. *European Answers to the Financial Crisis : Social Banking and Social Finance*. Spice Stanford, Spring, 2011.
- [3] Bien, F., Lanzi, T. et Mathis, J.. *Théories des jeux et des contrats*, Pearson. Montreuil, 2019.
- [4] Boyé, S J. Hajdenberg et Poursat, C. *Le guide de la microfinance : microcredit et épargne pour le développement*, Eyrolles, Paris, 2009.
- [5] Causse-Broquet, G. *La finance islamique*, Revue Banque ed., Paris, 2009.
- [6] Chapellière, I. *Éthique & finance en islam*, Koutoubia, Paris, 2009.
- [7] Charbonnier, J. *Islam : droit, finance et assurance*, Larcier, Bruxelles, 2011.
- [8] Chartered Institute of Management Accountants. *An introduction to Islamic Finance : A Different Perspective on Global Business* (Report, January), 2018.
- [9] Dekking, F. M., Kraaikamp, C., Lopuhaä, H. P. et Meester, L. E. *A Modern Introduction to Probability and Statistics : Understanding Why and How*, Springer, London, 2005.
- [10] Dhib, N. *Les effets du microcrédit sur le développement économique en Tunisie : d'une étude statistique vers une modélisation mathématique*, Ph.D thesis, Université de Sfax, Tunisie, 2017.
- [11] Diener, F., Diener, M., Khodr O. et Protter, P. Mathematical Models for Microlending. *Proceedings of the 16th Mathematical Conference of Bangladesh Mathematical Society, Dhaka, Bangladesh*, <https://math.unice.fr/~diener/Mifi/MMM.pdf>, 2009.
- [12] Duflo, E. Savoirs contre pauvreté. https://www.college-de-france.fr/media/esther-duflo/UPL35719_duflo_res0809.pdf, 2009.
- [13] Fakir, A. et Tkouat, M. Single or Menu Contracting : A Game Theory Application of the Hersanyi Model to Mudaraba Financing. *International Journal of Economics and Financial Issues*, 6(1) :221-230, 2016.

- [14] Fudenberg, D et Tirole, J. *Game Theory*, The MIT Press, London, 1991.
- [15] Gait, A. H. et Worthington, A. C. *A Primer on Islamic Finance : Definitions, Sources, Principles and Methods* (Working Paper, 09). Griffith Business School, 2009.
- [16] Harsanyi, J. C. Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, I-III. *Management Science*, 14(3) :159-182, 1967.
- [17] Helms, B. *Acess for All Building Inclusive Financial Syestems*. Consultive Group to Assist The Poor, Washington DC, 2016.
- [18] Hussein, Y. Accounting for Islamic Banks and Financial Institutions Chapter 3 Accounting For Mudharabah Financing, [https ://www.scribd.com/presentation/343713254/Ch-3-Accounting-for-Mudharabah-Financing-1](https://www.scribd.com/presentation/343713254/Ch-3-Accounting-for-Mudharabah-Financing-1).
- [19] Ismal, R. Assessing Moral Hazard Problem in Murabahah Financing. *Journal of Islamic Economics, Banking and Finance*, 5(2) :101-112, 2009.
- [20] Jamaldeen, F. Make Purchases with Cost Plus Profit (Murabaha) Contracts, [https ://www.dummies.com/personal-finance/islamic-finance/make-purchases-with-cost-plus-profit-murabaha-contracts](https://www.dummies.com/personal-finance/islamic-finance/make-purchases-with-cost-plus-profit-murabaha-contracts).
- [21] Jouaber, K. et Mehri, M. *A Theory of Profit Sharing Ratio Under Adverse Selection : The Case of Islamic Venture Capital* (Working Paper). HAL archives-ouvertes, 2017.
- [22] Jouini, E. et Pastré, O. *La finance Islamique : Une solutions à la crise ?*, Economica, Paris, 2009.
- [23] Kemeny, J. G. et Snell, J. L. *Finite Markov Chains*, D. Van Nostrand Company, New York, 1965.
- [24] Kemeny, J. G., Snell, J. L. et Knapp, A. W. *Denumerable Markov Chains*, Springer, New York, 1976.
- [25] Khodr, O. *Modèles dynamiques des innovations du microcrédit*, Ph.D thesis, Université Nice- Sophia Antipolis, 2011.
- [26] Kholed, M. *Building A Successful Business Model for Islamic Microfinance* (Working Paper, November). Mena Regional Representative, The Consultative Group to Assist the Poor (CGAP), Palestine, 2011.
- [27] Koçkesen, L. et Ok, E. A. An Introduction to Game Theory, Course au Koç Üniversitesi, [https ://www.ku.edu.tr](https://www.ku.edu.tr), 2007.
- [28] Kustin, B. *Islamic (Micro)Finance : Culture, Context, Promise, Challenges*. Financial Services for the Poor, August, 2015.

- [29] Lessy, D., Koudjeti F., Diener M. et Diener, F. A Markov Chain Model for Islamic Micro-Financing. *Journal of Islamic Monetary Economics and Finance*, 5(4) :763-784, 2019.
- [30] Lévy, A. *Finance islamique : opérations financières autorisées et prohibées. Vers une finance humaniste*, Gulino, Paris, 2012.
- [31] Lovelock, D., Mendel, M. et Wright, A. L. *An Introduction to the Mathematics of Money : Saving and Investing*, Springer, New York, 2007.
- [32] Mauk, P. *Modélisation mathématique du microcrédit*, Ph.D thesis, Université Nice- Sophia Antipolis, 2013.
- [33] Morvant-Roux, S, Guérin, I, Roesch, M. et Servet, J. M. Politiques d'inclusion financière, microfinance et financement de l'agriculture : les cas de l'Inde et du Mexique. *Mondes en Développement*, 38.3(151) :9-24, 2010.
- [34] Munoz-Garcia, F. Course au Washington State University, <https://felixmunozgarcia.com/econs-424>.
- [35] Norris, J. R. *Markov Chains*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [36] Osborne, M. J. et Rubinstein, A. *A Course in Game Theory*, The MIT Press, London, 1994.
- [37] Paulus, M. Derivation of the Loan/mortgage Monthly Payment Formula. <https://mitchellt.com>, 2018.
- [38] Peters, H. *Game Theory*, Springer, New York, 2015.
- [39] Pitman, J. *Probability*, Springer, New York, 1997.
- [40] Rodoni, A. et Yaman, B. Asymmetric Information and Non-Performing Financing Study in The Indonesian Islamic Banking Industry. *Al-Iqtishad Jurnal Ilmu Ekonomi Syariah (Journal of Islamic Economics)*, 10(2) :403-416, 2018.
- [41] Ross, S. M. *Stochastic Process*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1996.
- [42] Segrado, C. *Islamic Microfinance and Socially Responsible Investments* (Working Paper, August). University of Torino, 2005.
- [43] Stiglitz, J. E. et Weiss, A. Credit Rationing in Markets with Imperfect Information. *The American Economic Review*, 73 :393-410, 1981.
- [44] Sultan, H. et Ebrahim, M-S. *Murabaha* (Working Paper, October). Bangor University, 2011.
- [45] Tedeschi, G. A.. Here Today, Gone Tomorrow : Can Dynamic incentives Make Microfinance More Flexible? *Journal of Development Economics*, 89, 2006.
- [46] Zamir, S . *Bayesian Games : Games with Incomplete Information*. In : Meyers R. (eds) *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. Springer, New York, 2009.

- [47] Zandi, G. et Arifin, M. N. Some Issues on Murabahah Practices in Iran and Malaysian Islamic Banks. *Journal of Bussiness Management*, 6(24) :2, 2012.