



**HAL**  
open science

# Modèles réduits d'interfaces dissipatives en vibroacoustique par approche k-space

Quentin Serra

► **To cite this version:**

Quentin Serra. Modèles réduits d'interfaces dissipatives en vibroacoustique par approche k-space. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Lyon, 2014. Français. NNT: . tel-03186901

**HAL Id: tel-03186901**

**<https://theses.hal.science/tel-03186901>**

Submitted on 31 Mar 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 2014-39

Année : 2014

## **Thèse de Doctorat**

présentée pour obtenir le titre de

**DOCTEUR**

de l'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

dans le cadre de l'École Doctorale MEGA

**(Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique)**

**Spécialité : MÉCANIQUE**

par

**Quentin SERRA**

# **Modèles réduits d'interfaces dissipatives en vibroacoustique par approche k-space**

Présentée et soutenue publiquement le 09/12/2014 à l'École Centrale de Lyon, devant le jury d'examen :

<b>D. Juvé</b> , Professeur, École Centrale de Lyon	Président du jury
<b>N. Atalla</b> , Professeur, Université de Sherbrooke	Rapporteur
<b>O. Dazel</b> , Professeur, Université du Maine	Rapporteur
<b>C. Boutin</b> , Professeur, École Nationale des Travaux Publics de l'État	Examineur
<b>S. Finnveden</b> , Associate Professor, Royal Institute of Technology, Stockholm	Invité
<b>J-F. Deü</b> , Professeur, Conservatoire national des Arts et Métiers	Directeur de thèse
<b>M.N. Ichchou</b> , Professeur, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse

Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, UMR-CNRS 5513  
36 Avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully Cedex, FRANCE



## Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été mené conjointement au Laboratoire de Tribologie et de Dynamique des Systèmes (LTDS) à l'École Centrale de Lyon, et au Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC) au Cnam, Paris. Il a été financé par une bourse doctorale du ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, attribuée à l'École doctorale MEGA, Université de Lyon.

Tout d'abord, je voudrais remercier les personnes qui ont rendu cette thèse possible, à savoir mes deux directeurs de thèse : Mohamed Ichchou et Jean-François Deü. Merci de m'avoir fait confiance, soutenu et guidé tout au long de ces trois ans. Vos conseils, votre disponibilité, votre engagement dans cette thèse m'ont permis de mener ce travail à bout.

Un grand merci aussi aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail, en particulier, Pr. N. Atalla et Pr. O. Dazel, pour avoir accepté de relire et de commenter ce manuscrit.

J'ai eu la chance de pouvoir mener mes premières expériences d'enseignement grâce à Antoine Legay à Paris, et Laurent Blanc à Lyon : merci de m'avoir fait confiance et conseillé.

À Lyon comme à Paris, j'ai profité d'un cadre de travail exceptionnel, grâce aux permanents, chercheurs, administratifs, techniciens, doctorants. Merci à tous pour cette ambiance chaleureuse et conviviale.

Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance à ma famille pour m'avoir accompagné jusqu'à aujourd'hui, je ne sais pas comment vous remercier de vos encouragements constants. Ma merveilleuse épouse, qui m'a supporté, encouragé, félicité et tellement plus tout le long de cette période, a aussi son rôle dans ce document, ainsi qu'Olivier et Anwen, pour m'avoir laissé travailler alors que vous auriez préféré jouer et partir en vacances ensemble – « Maman lit des livres et Papa fait des chiffres ! », pour m'avoir sorti la tête du travail quand je rentrais à la maison.

Merci à tous.

## Résumé

Afin de prédire le niveau sonore et vibratoire dans des systèmes vibroacoustiques semblables à ceux utilisés dans l'industrie des transports, des modèles numériques efficaces sont nécessaires. En particulier, la complexité du problème augmente quand des interfaces dissipatives composées de matériaux poroélastiques sont employées pour dissiper l'énergie acoustique et vibratoire. La méthode des éléments finis est couramment employée, mais conduit à des coûts de calcul très importants. Un objectif de ce travail est de développer une méthode de réduction dans le cadre de la méthode des éléments finis. Une seconde problématique est la justification physique de l'approche proposée. Nous montrons dans ce document que la vision en ondes permet de répondre à ces deux points.

Afin de prédire les ondes se propageant dans un milieu, les approches de transfert peuvent être utilisées. Parmi elles se trouve la méthode des éléments finis ondulatoires (Wave Finite Element Method - WFE). Cette méthode est d'abord appliquée à un matériau monocouche poroélastique. L'influence des paramètres numériques, la convergence des résultats et le choix de la formulation variationnelle sont discutés.

Dans le troisième chapitre, la propagation d'ondes dans des structures multicouches composées de matériaux poroélastiques est étudiée. Les ondes prédites par WFE sont comparées celles prédites par des modèles simplifiés tels que des modèles de plaque équivalente. Le comportement des panneaux composites est principalement influencé par les paramètres mécaniques du squelette du matériau poreux. Toutefois, la présence de la phase fluide induit une onde qui peut mettre en mouvement les domaines voisins.

Dans le chapitre 4, les ondes se propageant dans un guide d'ondes unidirectionnel sont étudiées. Les relations entre le formalisme de Stroh, la méthode des matrices de transfert (TMM) et la méthode WFE sont détaillées. La base d'ondes progressives permet de calculer la réponse forcée de la structure, tout en prenant en compte les effets de taille finie, les conditions aux limites latérales et les effets de réaction non-locale.

Finalement, les ondes calculées sont utilisées pour écrire un problème d'ordre réduit. En utilisant les résultats du chapitre 4, nous montrons que la contribution de l'interface dissipative sur la cavité acoustique se résume à une matrice de rigidité dynamique acoustique complémentaire. Il en résulte une réduction du nombre de degrés de liberté par rapport au problème initial éléments finis. D'intéressants facteurs de réduction peuvent être observés, en particulier quand une approche de type synthèse modale est utilisée pour la cavité acoustique. Deux pistes d'amélioration de la méthode sont proposées, l'une consistant en la sélection des ondes qui contribuent à la dynamique prépondérante du milieu, l'autre en une interpolation en fréquences de la matrice complémentaire représentant le couplage entre la cavité acoustique et le milieu dissipatif. Le gain sur le coût de calcul est observé dans le cas des modèles de Biot-Allard et de fluide équivalent.

Des conclusions et quelques perspectives sont présentées dans le dernier chapitre de ce manuscrit, afin de proposer des pistes d'extension et d'amélioration du travail proposé ici.

**Mots clés :** Matériaux poroélastiques, vibroacoustique, éléments finis, approches de transfert, propagation d'ondes, réduction de modèle.

---

## Abstract

In order to predict the sound pressure level and the vibratory level in vibroacoustic systems such as used in transportation industry, efficient numerical models are needed. In particular, the complexity of such systems is increased when dissipative interfaces composed of poroelastic materials are used to dissipate the acoustic or the vibrational energy. Classically, the finite element method is used, leading however to very large computational costs. One aim of this work consists in the development of a reduction procedure in the finite element method framework. A second problematic of this work is the physical justification of the efficiency of the proposed approach. We show that wave insights allow to provide an answer to both goals.

In order to predict which waves are able to propagate in a medium, transfer approaches may be used. Among them can be found the Wave Finite Element Method (WFE). In a first step, this method is applied to a poroelastic single layer. The role of numerical parameters, the convergence behaviour and the choice of the variational formulation are discussed.

In the third chapter, wave propagation is analysed in multilayer packages including poroelastic materials. Waves predicted by using WFE are compared with simplified models, such as equivalent plate models. The behaviour of composite panels is mainly influenced by the mechanical parameters of the skeleton of the porous material. However, the fluid phase presence induces a wave which may create a displacement of the surrounding domains.

In the fourth chapter, the waves propagating in an unidirectional wave guide are investigated. The relationships between the Stroh formalism, the Transfer Matrix Method (TMM) and the WFE are discussed. Using the basis of progressive waves makes it possible to compute the forced response of the structure, taking into account finite size effects, lateral boundary conditions and non-localized effects.

Finally, the waves modes computed by WFE in an unidirectional wave guide are used to build a reduced order problem. Using the results of the fourth chapter, it is shown that the contribution of the dissipative interface can be represented by an additional acoustic dynamic stiffness matrix. As a result, the number of degrees of freedom is reduced with respect to the initial finite element problem. The approach presents interesting reduction factors, especially by using Component Mode Synthesis for the surrounding cavity. Two enhancements are proposed. The first one consists in the selection of the waves contributing to the main dynamic phenomena of the medium, the second in the interpolation as a function of the frequency of the additional matrix representing for the coupling between the cavity and the dissipative layer. The reduction of the numerical cost is observed in the case of Biot-Allard's model and of an equivalent fluid model

Conclusions and outlooks to enhance the method developed in this work are proposed in the concluding chapter.

**Keywords :** poroelastic materials, vibroacoustics, finite element method, transfer approaches, wave propagation, model reduction.

*« La notion de passoire est indépendante de la notion de trou. »*

Professeur Shadoko

Cours de logique Shadoks

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>xv</b>
<b>1 Modèles de matériaux poroélastiques et méthodes associées</b>	<b>1</b>
1.1 Modélisation des interfaces dissipatives en vibroacoustique . . . . .	2
1.1.1 Que sont les interfaces dissipatives ? . . . . .	2
1.1.2 Modèles théoriques de matériaux poroélastiques . . . . .	3
1.1.3 Revue des techniques numériques classiques . . . . .	5
1.2 Modèles usuels . . . . .	6
1.2.1 Modèle d'impédance localisée . . . . .	7
1.2.2 Modèle de fluide équivalent . . . . .	10
1.2.3 Modèles de plaque équivalente . . . . .	14
1.2.4 Modèle de Biot–Allard . . . . .	15
1.2.5 Conclusion . . . . .	25
1.3 Méthodes de résolution . . . . .	26
1.3.1 Méthode TMM (Transfer Matrix Method) . . . . .	26
1.3.2 Méthode WBM (Wave Based Method) . . . . .	27
1.3.3 Éléments finis et méthodes de réduction . . . . .	27
1.4 Méthodes de guide d'onde . . . . .	29
1.4.1 Approches périodiques analytiques . . . . .	29
1.4.2 Méthode SAFE (Semi–Analytical Finite Elements) . . . . .	29
1.4.3 Méthode WFE (Wave Finite Element Method) . . . . .	29
1.5 Remarques sur les différents types de modèles . . . . .	30
1.5.1 Impédance ou modèle de Biot–Allard . . . . .	30
1.5.2 Fluide équivalent ou modèle de Biot–Allard . . . . .	31
1.5.3 Conclusion . . . . .	34
1.6 Conclusion du chapitre . . . . .	34
<b>2 Application de la WFE aux matériaux poroélastiques</b>	<b>37</b>
2.1 Introduction . . . . .	37
2.2 Méthode WFE . . . . .	38
2.2.1 Propagation unidirectionnelle . . . . .	38
2.2.2 Propagation bidirectionnelle . . . . .	40
2.2.3 Sources d'erreurs . . . . .	44
2.2.4 Post-traitement . . . . .	45
2.2.5 Conclusion . . . . .	47
2.3 Validation de la WFE dans le cas de conditions aux limites latérales infinies	48
2.3.1 Cas de la formulation déplacement–déplacement total UUt . . . . .	49
2.3.2 Cas des formulations déplacement–pression UP-a et UP-b . . . . .	52
2.3.3 Conclusion . . . . .	56

2.4	Propagation d'ondes dans un milieu poreux d'épaisseur finie par la méthode WFE2D . . . . .	56
2.4.1	Formulation UUt . . . . .	58
2.4.2	Formulation UP-a . . . . .	61
2.4.3	Formulation UP-b . . . . .	62
2.4.4	Conclusion . . . . .	64
2.4.5	Paramètres numériques . . . . .	64
2.4.6	Conclusion . . . . .	66
2.5	Conclusion du chapitre . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Propagation d'ondes dans des plaques multicouches</b>	<b>69</b>
3.1	Introduction . . . . .	69
3.2	Modèles analytiques de plaques poroélastiques . . . . .	71
3.2.1	Modèle d'ordre 0 [1] . . . . .	71
3.2.2	Modèle d'ordre 0 [2] . . . . .	72
3.2.3	Modèle d'ordre 1 sans phase fluide [3] . . . . .	73
3.3	Structure monocouche . . . . .	75
3.3.1	Modèle de solide équivalent . . . . .	75
3.3.2	Modèles de plaque équivalente . . . . .	76
3.4	Composite bicouche . . . . .	77
3.4.1	Ondes longitudinales et transversales . . . . .	78
3.4.2	Onde de flexion solide . . . . .	79
3.4.3	Effet de la phase fluide . . . . .	82
3.4.4	Paramètres de plaque équivalente en flexion . . . . .	83
3.5	Composite tricouche . . . . .	86
3.5.1	Courbes de dispersion . . . . .	87
3.5.2	Ondes dominées par les peaux . . . . .	88
3.5.3	Onde associée à la phase fluide du cœur . . . . .	92
3.6	Conclusion du chapitre . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Réponse forcée par approche ondulatoire</b>	<b>97</b>
4.1	Introduction . . . . .	97
4.2	Formulation exacte . . . . .	99
4.2.1	Cas d'un matériau linéaire élastique . . . . .	100
4.2.2	Cas d'un fluide . . . . .	102
4.2.3	Cas d'un matériau poroélastique . . . . .	102
4.3	Méthode des matrices de transfert (TMM) . . . . .	104
4.4	Expression de la réponse forcée . . . . .	106
4.4.1	Réponse forcée par approche de transfert analytique . . . . .	106
4.4.2	Réponse forcée dans le cadre WFE1D . . . . .	109
4.4.3	Stabilité des différentes approches . . . . .	110
4.5	Influence des conditions aux limites latérales sur la propagation d'ondes et sur la réponse acoustique . . . . .	111
4.5.1	Matériau élastique . . . . .	113

---

4.5.2	Cas d'un matériau à squelette rigide . . . . .	116
4.5.3	Cas d'un matériau à squelette souple . . . . .	117
4.6	Conclusion du chapitre . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Condensation sur base d'ondes progressives</b>	<b>119</b>
5.1	Introduction . . . . .	119
5.2	Condensation aux interfaces . . . . .	120
5.2.1	Problème éléments finis vibroacoustique couplé . . . . .	120
5.2.2	Modèle avec impédance localisée . . . . .	121
5.2.3	Problème d'absorption . . . . .	122
5.2.4	Problème de transmission . . . . .	123
5.2.5	Cas de matériaux composites . . . . .	124
5.2.6	Couplage avec une approche modale pour les domaines maîtres . . . . .	125
5.3	Exemples de validation . . . . .	127
5.3.1	Problème d'absorption . . . . .	127
5.3.2	Problème d'absorption par interface multi-matériaux . . . . .	129
5.3.3	Problème de transmission . . . . .	129
5.4	Performance de la méthode présentée . . . . .	131
5.5	Réduction du nombre d'ondes à prendre en compte . . . . .	132
5.5.1	Exemple . . . . .	133
5.5.2	Algorithme de sélection des ondes . . . . .	135
5.5.3	Résultats . . . . .	136
5.6	Application à une cavité non parallélépipédique . . . . .	138
5.6.1	Modèle de fluide équivalent . . . . .	138
5.6.2	Formulation UUt . . . . .	140
5.7	Conclusion du chapitre . . . . .	142
<b>6</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>145</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>
<b>A</b>	<b>Paramètres matériaux</b>	<b>159</b>
<b>B</b>	<b>Condensation aux interfaces pour une cavité acoustique</b>	<b>161</b>



# Table des figures

1.1	Schéma du problème général avec condition d'impédance. . . . .	7
1.2	Définition des angles d'incidences. . . . .	9
1.3	Géométrie et maillage de la cavité acoustique. Rouge : domaine poroélastique ; bleu : domaine acoustique. . . . .	31
1.4	Niveau de pression avec modèle de Biot–Allard ou modèle d'impédance localisée. . . . .	32
1.5	Géométrie et maillage de la cavité acoustique. Rouge : domaine poroélastique ; bleu : domaine acoustique. . . . .	32
1.6	Niveau de pression avec modèle de Biot–Allard ou modèle d'impédance localisée. . . . .	33
1.7	Niveau de pression avec modèle de Biot–Allard ou modèle de fluide équivalent. . . . .	33
1.8	Géométrie et maillage de la cavité acoustique. Rouge : domaine poroélastique ; bleu : domaine acoustique. . . . .	34
1.9	Différence entre modèle de Biot–Allard et fluide équivalent, matériau B. . .	35
1.10	Différence entre modèle de Biot–Allard et fluide équivalent, matériau C. . .	36
2.1	Schéma WFE1D . . . . .	38
2.2	Sous-structure utilisée pour la WFE2D . . . . .	41
2.3	Courbes de dispersion avec conditions aux limites infinies. (+) : WFE, (ligne) analytique (décomposition de Helmholtz ou formalisme de Stroh). . .	49
2.4	Évolution des nombres d'ondes à 2 kHz en fonction de la longueur $L$ . (+) WFE, éléments linéaires, $n_z = 1$ , SC2(7); (—) valeur analytique. . . . .	50
2.5	Erreur relative par rapport à Biot. (ligne) éléments quadratiques ; (ligne discontinue) éléments quadratiques avec condensation ; (pas de ligne) éléments linéaires. . . . .	51
2.6	Évolution des nombres d'ondes à 2 kHz en fonction de la dimension $L$ . (×) WFE, éléments linéaires, $n_z = 1$ , SC2(7); (—) valeur analytique. . . . .	52
2.7	Évolution des nombres d'ondes à 2kHz en fonction de la dimension $L$ . (×) WFE, éléments quadratiques sans condensation, $n_z = 1$ , SC2(20); (—) valeur analytique. . . . .	53
2.8	Convergence avec conditions aux limites infinies et formulation asymétrique à 2kHz. (×) WFE, éléments linéaires, $n_z = 1$ , SC2(7); (—) valeur analytique. . . . .	54
2.9	Convergence pour des conditions de bords Infinies à 2kHz et les formulations asymétriques. (sans ligne) éléments linéaires ; (—) éléments quadratiques. . . . .	55

2.10	Courbes de dispersion obtenues avec les formulations UP-a et UP-b, asymétriques, et des conditions de bord infinies. (—) Ondes de Biot ; (×) WFE (UP-a, $L = 1.3\text{mm}$ , $n_z = 1$ , éléments linéaires, SC2(7)) ; (+) WFE (UP-b, $L = 1.3\text{mm}$ , $n_z = 1$ , éléments linéaires). . . . .	56
2.11	Courbes de dispersion avec la formulation UUt (« pressure release ») . . . . .	59
2.12	Déformées propres des ondes solidiennes, formulation UUt, 1300Hz . . . . .	59
2.13	Déformées propres de la première onde « sablier ». . . . .	60
2.14	Courbes de dispersion avec prise en compte du champ de pression ( $\overline{PN}$ ). . . . .	61
2.15	Courbes de dispersion avec la formulation UP à une interface poroélastique/air en $z = L_z$ et $z = 0$ (formulation asymétrique, éléments H8, $L = 0.5\text{mm}$ , $n_z = 20$ ). . . . .	62
2.16	Courbes de dispersion avec formulations UP (éléments H8, $L = 0.2\text{mm}$ , $n_z = 20$ ). (×·×) UP-a libre (DTN) ; (—) UP-b libre (PN et DRN). . . . .	63
2.17	Courbes de dispersion du matériau D, pour les formulations UP-b et UUt, avec hypothèse PN. (—) UP-b, (×·×) UUt. . . . .	63
2.18	Convergence à 2kHz avec la formulation UP-b asymétriques et conditions de bord libre : effet de la dimension size $L$ . (—) éléments H27 ( $n_z = 8$ , référence $L = 0.2\text{ mm}$ ), (no line) éléments H8 ( $n_z = 150$ , référence $L = 0.2\text{ mm}$ ). . . . .	65
2.19	Convergence à 2kHz avec la formulation UP-b asymétrique et condition de bord libre : effet de $n_z$ . (—) éléments H27 ( $L = 0.2\text{ mm}$ , référence $n_z = 150$ ) ; (no line) éléments H8 ( $L = 0.2\text{ mm}$ , référence $n_z = 35$ ). . . . .	65
3.1	Courbes de dispersion des ondes solidiennes. (+—+) WFE2D et (—) WFE2D sur solide <i>in vacuo</i> . . . . .	76
3.2	Courbes de dispersion de l'onde de flexion pour les différents modèles. (+—+) WFE2D (UP-b, PN) ; (---) Plaque poroélastique d'ordre 1 (ref.[3]) ; (-·-) Plaque poroélastique d'ordre 0 [1] ; (—) Plaque d'ordre 0 pour le solide équivalent. . . . .	76
3.3	Déformée de l'onde de flexion. (noir) : section droite non déformée ; (rouge) déplacement de la phase solide ; (bleu) pression (affichée selon x). Échelles arbitraires indépendantes pour le déplacement et la pression. . . . .	77
3.4	Schéma de la géométrie bicouche considérée. . . . .	77
3.5	Courbes de dispersion de la structure composite. . . . .	78
3.6	Courbes de dispersions pour les ondes quasi-longitudinales et transversales. (o) WFE2D ; (—) Onde quasi-longitudinale ; (—) Onde transversale. . . . .	79
3.7	Déformées des ondes quasi-longitudinales et transversales à 30 Hz et 797 Hz. Bleu : déplacement de la plaque élastique, rouge : déplacement de la phase solide de la couche poreuse. . . . .	80
3.8	Déformées de l'onde de flexion. Bleu : déplacement de la plaque élastique, rouge : déplacement de la phase solide de la couche poreuse. . . . .	81
3.9	Courbes de dispersion pour l'onde associée à la phase fluide. (o) WFE2D ; (—) onde lente. . . . .	82

3.10 Déformées de l'onde fluide. Bleu : déplacement de la plaque élastique, rouge : déplacement de la phase solide de la couche poreuse. . . . .	83
3.11 Courbes de dispersion calculées par WFE2D. Couche poroélastique modélisée par : (o) formulation UP01, (—) Solide <i>in vacuo</i> . . . . .	83
3.12 Courbes de dispersion calculées par WFE2D. Couche poroélastique modélisée par : (o) formulation UP-b, (—) Solide <i>in vacuo</i> . Échelle log-log pour visualiser les petits nombres d'ondes. . . . .	84
3.13 Paramètres de la plaque équivalente. . . . .	85
3.14 Courbes de dispersion avec un matériau plus souple. . . . .	86
3.15 Paramètres de la plaque équivalente avec un matériau plus souple (matériau H). . . . .	86
3.16 Schema de la configuration sandwich. . . . .	87
3.17 Courbes de dispersion de la structure sandwich considérée, prédites par WFE2D. . . . .	87
3.18 Déformées de la plaque (avec amortissement nul) sur deux périodes. Modes à 1000 Hz. Bleu : déplacement des peaux, rouge : déplacement de la phase solide du cœur poreux. . . . .	88
3.19 Interprétation des ondes LA et TA. . . . .	89
3.20 Courbes de dispersions des ondes quasi-longitudinales et de cisaillement transverse. (o) WFE, (—) Modèles analytiques. . . . .	90
3.21 Déformées des ondes de flexion FA et FP à 1000 Hz. Bleu : déplacement des peaux, rouge : déplacement de la phase solide du cœur poreux. . . . .	91
3.22 Courbes de dispersion des ondes de flexion. (o) WFE, (—) modèles analytiques. . . . .	92
3.23 Interprétation des modes de flexion. . . . .	92
3.24 Courbes de dispersion pour l'onde fluide. (o) WFE, (—) onde lente. . . . .	93
3.25 Déformées de l'onde associée à la phase fluide. Bleu : déplacement des peaux, rouge : déplacement de la phase solide du cœur, magenta : champ de pression. . . . .	94
3.26 Déformées à 500 Hz des ondes symétriques : FAp, Fae et onde fluide. Bleu : déplacement des peaux, rouge : déplacement de la phase solide du cœur. . . . .	95
4.1 Schéma du système considéré par la TMM. . . . .	105
4.2 Coefficient d'absorption à incidence normale pour le matériau E et pour les 3 méthodes. . . . .	111
4.3 Coefficient d'absorption à incidence oblique pour le matériau E et pour les 3 méthodes. . . . .	111
4.4 Schéma de l'expérience numérique. . . . .	112
4.5 Courbes de dispersion pour le matériau E. . . . .	113
4.6 Partie réelle des déformées d'ondes avec condition latérale glissante à 1000 Hz et le matériau E (configurations déformée et non déformée). Pointillé rouge : déplacement de la phase solide ; + bleu : déplacement de la phase fluide ; blanc : non déformé. . . . .	113

4.7	Partie réelle des déformées modales avec encastrement latéral (configurations déformées et non déformées). Figures de gauche (rouge) : déplacement solide ; figures de droite (bleu) : champ de pression. . . . .	114
4.8	Effets des conditions aux limites latérales sur le matériau E. . . . .	115
4.9	Effets des conditions aux limites sur un matériau à squelette immobile (matériau B). . . . .	117
4.10	Effets des conditions aux limites pour un matériau « limp » (matériau F). . . . .	117
5.1	Géométrie du problème poroacoustique. . . . .	121
5.2	Schéma du problème d'absorption. . . . .	127
5.3	Niveaux de pression moyen dans la cavité acoustique. . . . .	128
5.4	Matrice de couplage traduisant l'effet de l'interface sur la cavité acoustique, dans le cas de conditions limites latérales de type encastrement. . . . .	128
5.5	Problème d'absorption avec interface multimatériaux. . . . .	129
5.6	Niveau de pression dans la cavité acoustique. . . . .	130
5.7	Schéma du problème de transmission . . . . .	130
5.8	Niveaux de pression moyens dans les deux cavités acoustiques. Rouge : cavité émettrice et bleu : cavité réceptrice. . . . .	130
5.9	Temps de calcul (adimensionnels) obtenus par les différentes techniques, pour 19 itérations en fréquences et 50 modes internes sélectionnés pour la CMS. . . . .	132
5.10	Schéma illustrant le principe de réduction de la méthode de condensation sur base d'ondes. . . . .	133
5.11	Niveau de pression moyen dans la cavité en fonction du nombre d'ondes sélectionnées. . . . .	134
5.12	Évolution de l'erreur commise sur le champ de pression en fonction du critère de sélection, à 2 kHz. . . . .	137
5.13	Évolution de l'erreur commise sur le champ de pression en fonction du critère de sélection, à 3500 Hz. . . . .	137
5.14	Niveaux sonores moyens dans la cavité pour les 3 méthodes numériques. . . . .	138
5.15	Géométrie et maillage. . . . .	139
5.16	Niveau de pression moyen dans la cavité. . . . .	139
5.17	Niveau de pression moyen dans la cavité avec réduction du nombre d'ondes progressives et réduction du nombre d'itérations en fréquence. . . . .	140
5.18	Niveau de pression moyen obtenu avec la formulation UUt, condition latérale glissante, pour les différentes approches numériques. La base d'ondes réduite est constituée de 56 ondes parmi les 480 modes d'onde existants. . . . .	142

# Liste des tableaux

1.1	Paramètres de l'air ambiant . . . . .	7
2.1	Hypothèses sur les termes de bord à une interface poroélastique/acoustique en fonction de la formulation. . . . .	58
5.1	Temps de calcul en fonction du nombre d'ondes sélectionnées. . . . .	135
5.2	Temps de calcul des différentes phases. . . . .	141
A.1	Paramètres des matériaux poreux utilisés. . . . .	159



# Introduction générale

---

## Contexte scientifique et industriel

Le sujet de ce doctorat s'insère dans les problématiques de vibroacoustique rencontrées par l'industrie des transports.

En effet, les exigences vibroacoustiques ont fortement évolué depuis quelques années. Cela est dû à la nécessité de satisfaire des normes de plus en plus strictes en terme de masse et de niveau sonore généré, et de s'inscrire dans les objectifs à moyen et long terme donnés par les visions ACARE 2020 et FLIGHPATH 2050, associés entre autres aux programmes de recherche « 7<sup>th</sup> Workshop Programme » et « CleanSky ». Alors que jusque-là les moyens de transport devaient satisfaire prioritairement les exigences de masse, de consommation et de sécurité, et que l'aspect acoustique n'apparaissait que dans la phase finale de conception, ce paramètre est aujourd'hui un paramètre de pré-conception à part entière.

Pour satisfaire ces exigences de masse et d'amortissement vibratoire, les concepteurs ont recours à des interfaces dissipatives, composées de matériaux viscoélastiques et poroélastiques. La faible masse de ces matériaux par rapport aux matériaux servant à la tenue mécanique de la carlingue, ainsi que leur forte dissipation de l'énergie acoustique et vibratoire, permettent de concevoir des traitements acoustiques efficaces à moindre masse ajoutée.

Afin d'intégrer la conception de ces interfaces dissipatives dès les phases d'avant-projet, il est nécessaire de maîtriser leur dynamique, afin de pouvoir prédire correctement leur efficacité. Il est aussi nécessaire de développer des techniques numériques efficaces. Si des modèles existent pour simuler tous les phénomènes vibratoires existant dans le traitement acoustique, leur résolution pose encore des problèmes liés au coût de calcul. De plus, ces modèles ne sont pas forcément adaptés au regard de la grande diversité de configurations géométriques et de la grande variabilité des paramètres matériaux. La validité de ces modèles n'est donc pas forcément bien établie.

La problématique du travail peut alors être décrite en trois points :

- Quels sont les phénomènes physiques prépondérants dans une interface dissipative ?

Une interface dissipative en vibroacoustique est habituellement composée de plusieurs couches de matériaux différents, de type métallique, viscoélastique, poroélastique (mousse ou laine), air. Les différents ordre de grandeur de rigidité et de masse entre ces matériaux provoquent des dynamiques complexes. Nous ciblerons le cas des matériaux poroélastiques, dont la dynamique fait apparaître des couplages à petite longueur d'onde entre la phase fluide et le squelette.

- Quel modèle pour des interfaces dissipatives ?

Nous verrons que plusieurs modèles peuvent être envisagés pour représenter la dy-

namique d'un système incluant des interfaces dissipatives (monocouche ou multicouche). La validité de ces modèles doit être discutée.

- Quelles méthodes numériques sont adaptées à résoudre les équations issues du modèle ?

À partir des équations issues du modèle choisi pour représenter l'interface dissipative, nous chercherons à obtenir un modèle permettant de prédire la dynamique du système à coût réduit par rapport aux approches standard sans pour autant sacrifier à la précision.

## Plan de la thèse

Le premier chapitre de la thèse présente une revue bibliographique des différentes études traitant d'interfaces dissipatives pour la vibroacoustique. Ce chapitre recense les modèles théoriques permettant de modéliser des matériaux poroélastiques ainsi que les méthodes numériques permettant de résoudre le problème. Nous montrerons dans ce chapitre les limites de ces modèles, et nous verrons en quel sens une analyse des ondes se propageant dans le matériau, c'est-à-dire comment le point de vue « k-space » permet de répondre à la problématique.

Dans le deuxième chapitre, nous validerons l'application de la méthode WFE pour le calcul des nombres d'ondes se propageant dans un guide d'onde poroélastique. En particulier, le travail présenté ici constitue la première application de la méthode WFE pour les matériaux poroélastiques, nous rappellerons donc en détail cette méthode, ainsi que les sources d'erreurs. Nous verrons que le choix de la formulation faible et que le choix des variables n'est pas anodin, et nous mettrons en évidence des critères de convergence.

Dans le troisième chapitre, nous verrons que l'analyse des ondes progressives est un critère pertinent pour valider des modèles à physique réduite. En particulier, les modèles de fluide équivalent ou de plaque équivalente reposent sur des approximations sur les champs de déplacements, établies *a priori*. Par conséquent, leur validité n'est pas établie pour tout type de matériau. Nous nous intéresserons à l'étude des ondes se propageant dans le cas d'une structure monocouche, d'une structure bicouche et d'une structure sandwich et nous observerons en particulier l'influence de la présence de la phase fluide sur la dynamique du matériau.

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéresserons à l'utilisation des ondes calculées par les approches de transfert pour la prédiction de la réponse vibratoire d'un système. Cette partie est organisée en plusieurs temps. Dans une première section nous développerons les expressions permettant de calculer la réponse forcée du système sur base d'onde. Cette comparaison mettra en évidence des aspects communs entre l'approche de Stroh, l'approche TMM et la méthode WFE. Ensuite, nous verrons que la méthode WFE permet de prédire les paramètres acoustiques d'un échantillon poroélastique soumis à différentes conditions latérales, à la différence de la méthode TMM.

Dans le cinquième chapitre, un algorithme de condensation de l'interface dissipative sur la cavité acoustique est présenté. Cette condensation de type maître-esclave, où les degrés de liberté associés à l'interface sont exprimés en fonction des degrés de liberté maîtres

à partir de la connaissance des ondes se propageant dans le milieu. Nous obtiendrons alors un modèle d'ordre réduit du système. Nous verrons de plus que dans le cas d'un matériau de type fluide équivalent, un critère de sélection des ondes peut être employé, permettant de réduire de façon importante les coûts de calcul.

Enfin, dans le dernier chapitre, les principales conclusions du travail sont présentées. Les contributions originales sont résumées, et des perspectives à ce travail sont proposées.



# Modèles pour les matériaux poroélastiques en vibroacoustique et méthodes numériques associées

---

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Modélisation des interfaces dissipatives en vibroacoustique</b>	<b>2</b>
1.1.1	Que sont les interfaces dissipatives ?	2
1.1.2	Modèles théoriques de matériaux poroélastiques	3
1.1.3	Revue des techniques numériques classiques	5
<b>1.2</b>	<b>Modèles usuels</b>	<b>6</b>
1.2.1	Modèle d'impédance localisée	7
1.2.2	Modèle de fluide équivalent	10
1.2.3	Modèles de plaque équivalente	14
1.2.4	Modèle de Biot–Allard	15
1.2.5	Conclusion	25
<b>1.3</b>	<b>Méthodes de résolution</b>	<b>26</b>
1.3.1	Méthode TMM (Transfer Matrix Method)	26
1.3.2	Méthode WBM (Wave Based Method)	27
1.3.3	Éléments finis et méthodes de réduction	27
<b>1.4</b>	<b>Méthodes de guide d'onde</b>	<b>29</b>
1.4.1	Approches périodiques analytiques	29
1.4.2	Méthode SAFE (Semi–Analytical Finite Elements)	29
1.4.3	Méthode WFE (Wave Finite Element Method)	29
<b>1.5</b>	<b>Remarques sur les différents types de modèles</b>	<b>30</b>
1.5.1	Impédance ou modèle de Biot–Allard	30
1.5.2	Fluide équivalent ou modèle de Biot–Allard	31
1.5.3	Conclusion	34
<b>1.6</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>34</b>

---

Dans ce chapitre, une revue des différents modèles et méthodes permettant de traiter un problème de vibroacoustique incluant des interfaces dissipatives composées de matériaux poroélastiques est menée. L'objectif est de positionner le travail réalisé dans son contexte scientifique, de justifier la démarche qui a été utilisée, et de conclure sur les hypothèses de travail et les différents objectifs. Ce chapitre est organisé en quatre parties. Dans un

premier temps, une revue descriptive des différentes approches utilisées jusqu'à aujourd'hui et des perspectives ouvertes est proposée. Ensuite, une description plus complète des différents modèles théoriques de matériaux poroélastiques est faite, incluant les modèles d'impédance de surface, de fluide équivalent et le modèle de Biot–Allard. Dans un troisième temps, les méthodes numériques et analytiques classiquement utilisées dans la communauté académique ainsi que par les industriels sont décrites. Quelques remarques quant à l'utilisation de ces modèles sont faites. Enfin, dans une dernière partie, le choix de la méthode de résolution du problème proposée dans ce travail est discuté.

## 1.1 Modélisation des interfaces dissipatives en vibroacoustique

### 1.1.1 Que sont les interfaces dissipatives ?

Le terme d'interface dissipative désigne dans ce travail les couches utilisées massivement dans l'industrie du transport (automobile et aéronautique) afin, d'une part, d'absorber au maximum les réflexions des ondes sonores émises par les sources acoustiques présentes à l'intérieur des cavités acoustiques ; d'autre part de minimiser la transmission des ondes sonores depuis le milieu extérieur jusqu'à l'intérieur de la cavité acoustique. Par cavité acoustique on entend un volume d'air fermé, délimité par des éléments structurels, dans lequel peuvent être présents des passagers. Par exemple, l'intérieur d'un wagon de train, d'une cabine d'avion, l'habitacle d'une voiture. Afin de réaliser ces deux fonctions tout en conservant une masse faible et un coût de production réduit, les matériaux poroélastiques sont très souvent utilisés. Ces matériaux sont des matériaux hétérogènes, composés d'un squelette élastique saturé par un fluide. Ces deux phases interagissent à l'échelle microscopique, menant à un couplage fort entre les deux phases. Le volume rempli par la phase fluide est appelé pores. Deux types de pores peuvent exister : pores ouverts, formant un réseau inter-connecté, et pores fermés, isolés à l'intérieur du squelette, sans qu'une circulation de fluide ne puisse avoir lieu. D'un point de vue mécanique, ce deuxième type de pores n'a qu'un rôle sur la réponse du squelette, son influence peut donc être incluse dans les paramètres mécaniques du matériau constituant le squelette. On appelle porosité (ou porosité ouverte) le rapport du volume rempli par la phase fluide dans les pores ouverts sur le volume total.

Ce type de matériaux est présent dans la nature sous de nombreuses formes : (i) les géomatériaux (étudiés dans le contexte de la prospection pétrolière, des problèmes d'érosion ainsi que pour l'isolation thermique des bâtiments), (ii) les biomatériaux (étudiés dans un contexte médical) et (iii) les matériaux absorbants acoustiques, ayant de bonnes propriétés d'insonorisation. Seuls ces derniers types de matériaux sont étudiés dans ce travail, bien que les approches numériques présentées par la suite puissent être adaptées selon le contexte.

Les matériaux poreux utilisés pour l'insonorisation sont saturés par un fluide compressible, l'air ambiant. Ils possèdent des caractéristiques très intéressantes qui justifient leur utilisation pour la réduction passive de bruit. En effet, outre leur légèreté, trois types de mécanismes de dissipation de l'énergie coexistent : un amortissement dû aux pertes dans le squelette (amortissement structurel), un amortissement dû aux frottements entre les deux

phases (amortissement visqueux), et un amortissement dû aux transferts thermiques entre les deux phases (amortissement thermique). Le premier type d'amortissement est classique en mécanique des structures. Dans le contexte de l'étude on considère que cet amortissement est indépendant de la fréquence (amortissement hystérétique). Il ne dépend pas de la présence du fluide entre les pores, il peut donc être identifié quand le squelette est asséché, ou *in vacuo*. Une modélisation plus complexe avec des modèles viscoélastiques du squelette est toutefois envisageable, mais pour les matériaux insonorisants usuels, la dissipation structurelle est faible devant la dissipation visqueuse et thermique dans la phase fluide. Ces deux mécanismes dissipatifs de l'énergie dépendent du rapport entre la taille des pores et les effets de couches limites (visqueuse et thermique). Ces effets dépendent donc de la fréquence d'excitation.

Si ces matériaux sont très efficaces dans le domaine des hautes fréquences (typiquement plusieurs kHz), leur efficacité est moindre dans les basses fréquences. À cela différentes causes. D'une part, il est bien connu que pour atténuer des grandes longueurs d'onde, de grande épaisseurs sont nécessaires, mais cela n'est pas possible pour des raisons de masse et d'encombrement. D'autre part, si un matériau poreux constitue un bon absorbant acoustique, sa perméabilité sur ses deux extrémités en fait un piètre isolant. Les interfaces dissipatives utilisées dans l'industrie combinent grâce à une configuration multicouche les avantages des matériaux poroélastiques, des matériaux élastiques rigides et des matériaux viscoélastiques. Ces interfaces sont alors appelées panneaux insonorisants.

Enfin, deux types d'interfaces peuvent être distinguées : une interface à réaction locale et une interface à réaction non locale. La plupart des matériaux poreux peuvent être vus comme ayant une réaction locale. Cela signifie qu'une force ponctuelle n'engendre un déplacement qu'au point d'application. Des interfaces dissipatives multicouches incluant des plaques élastiques simplement supportées ou des cavités d'air internes génèrent des réactions non locales, par exemple de type modales. D'autre part, beaucoup d'efforts sont fait actuellement pour améliorer l'efficacité acoustique d'une interface, notamment en utilisant des effets non locaux, induits par exemple par des plaques perforées.

La nature multiphysique, la géométrie complexe et le fort potentiel des matériaux poreux pour l'acoustique s'est traduit par un grand nombre de travaux depuis les années 1950. Cela a donné naissance à une théorie des matériaux poreux pour l'acoustique qui fournit une description complète des différents types de couplage et des mécanismes dissipatifs. Cette théorie appelée modèle de Biot–Allard est considérée comme une référence par la communauté académique et industrielle. La complexité du modèle offre la possibilité de dimensionner et d'optimiser les interfaces dissipatives à base de matériaux poroélastiques dans des cas industriels. Avant d'en arriver à cet objectif final, il est nécessaire de pouvoir prédire à moindre coût l'efficacité d'un panneau insonorisant. Les étapes menant au modèle de Biot–Allard sont présentées dans la sous-section suivante, suivies par les méthodes numériques permettant de prédire leur efficacité acoustique.

### 1.1.2 Modèles théoriques de matériaux poroélastiques

Historiquement, les matériaux poreux en acoustique ont d'abord été étudiés pour le capacité à absorber les ondes sonores. Étant composés très majoritairement d'air, la première

idée a été de supposer que le squelette n'est pas mis en mouvement par les ondes de pression et que seul le fluide saturant est mis en mouvement. Ce modèle de fluide équivalent, appelé modèle de fluide équivalent avec hypothèse de squelette immobile a été proposée par Zwikker et Kösten en 1949 [4]. Ce modèle nécessite deux paramètres (la vitesse de ondes de compression et la compressibilité du fluide). Ce modèle est basé sur cette hypothèse forte ainsi que sur l'hypothèse de pores cylindriques à section circulaire de même direction. Si la réalité de ces hypothèses est discutable, ce modèle a permis d'identifier les mécanismes d'amortissement visqueux et thermique, ainsi qu'une fréquence de découplage des deux phases. Ce modèle a été enrichi progressivement, de manière analytique en supposant des formes de pores plus complexes [5] et de manière empirique par Delany et Bazley ([6]), puis par Miki ([7]), qui ont supposé que la masse volumique, la porosité et la résistivité du milieu sont les paramètres les plus influents sur l'efficacité du matériau et proposé une loi donnant les paramètres du fluide équivalent en fonction de ces paramètres. Ces modèles ont été complétés afin de couvrir une très grande variété de matériaux [8, 9].

Parallèlement à ces travaux, Biot [10, 11, 12] a proposé une vision radicalement différente du problème. Initialement dédiée au géomatériaux, cette modélisation a ensuite été adaptée pour les matériaux acoustiques. Ce modèle permet de modéliser l'intégralité des phénomènes observés dans un cadre de vibroacoustique. Au lieu de considérer deux phases distinctes, Biot fait l'hypothèse d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER). Ce volume est grand par rapport à la taille des pores, et petit devant les longueurs d'ondes. Cette hypothèse permet d'obtenir une description homogénéisée du milieu biphasique. D'un milieu biphasique hétérogène, Biot passe à un modèle homogène équivalent continu, dans lequel en chaque point les deux phases sont présentes. Les paramètres du matériau équivalent sont identifiés par des considérations énergétiques par une approche lagrangienne.

De nombreux travaux ont été réalisés par la suite pour intégrer la dépendance fréquentielle des interactions thermiques et visqueuses, notamment par Johnson *et al.* [13], Lafarge *et al.* [14], Champoux et Allard [15]. Ce modèle est parfaitement compatible avec le modèle de fluide équivalent (squelette immobile). Tous les détails sur ces différents modèles sont recensés dans le livre de référence écrit par Allard et Atalla [16].

Finalement, pour modéliser une interface dissipative multicouche, composée de couches poreuses, de couches viscoélastiques et de couches d'air, deux approches peuvent être dégagées. D'une part, la modélisation couche par couche utilisant l'une des théories précédemment citées pour les matériaux poreux. Ce type de modélisation, *a priori* plus complet, nécessite beaucoup de soin au niveau des interfaces entre les différentes couches pour garantir la convergence des résultats. Cela implique, outre une complexité de modélisation, un ajout d'un grand nombre d'inconnues au problème, et donc une grande augmentation des temps de calcul. Une autre approche consiste à considérer que l'interface dissipative ne joue le rôle que d'une condition aux limites particulière. Cette condition aux limites peut être représentée sous la forme d'un unique coefficient : impédance de surface ou coefficient d'absorption. Le premier modèle est plutôt dédié à une modélisation par éléments finis, tandis que le second est une approche plutôt hautes fréquences, et est par conséquent utilisée dans des approches type SEA ou tir de rayons. La difficulté est que ce coefficient dépend de la configuration géométrique du problème et sa valeur exacte ne peut donc pas être déterminée directement dans le cas général. Enfin, cette approche est limitée

au cas de matériaux à réaction locale.

### 1.1.3 Revue des techniques numériques classiques

La complexité géométrique, l'aspect multiphysique rendent les solutions purement analytiques limitées à des configurations très simples. Deux méthodes sont couramment utilisées dans le monde académique et industriel, de manière complémentaire : la méthode des matrices de transfert, et la méthode des éléments finis.

La méthode des matrices de transfert (TMM) [17, 16, 18] est une méthode semi-analytique, faisant l'hypothèse d'une géométrie plane de dimensions latérales infinies et dédiée au calcul de la réponse d'un panneau acoustique à un champ de pression de type ondes planes. Le modèle de Biot–Allard faisant apparaître des solutions sous la forme d'ondes, des relations reliant les extrémités de chaque couche sont écrites, permettant de relier les conditions aux limites exercées aux deux extrémités du multicouche. Cette méthode permet de calculer à coût très faible le coefficient d'impédance de surface, comme une fonction des matériaux, de leur disposition, de la fréquence et de l'angle d'incidence de l'excitation. Elle peut être étendue au cas d'une excitation ponctuelle ou d'un champ diffus.

La méthode des éléments finis (FEM) [19] est une méthode numérique basée sur la discrétisation spatiale du domaine. Elle est particulièrement adaptée aux géométries complexes, et permet de prédire avec une très faible erreur la réponse dynamique de systèmes structure–cavité avec interfaces dissipatives. Cette méthode est couramment utilisée dans l'industrie pour des problèmes sans interface dissipative, il a donc été naturel d'étendre cette méthode au modèle de Biot–Allard. Ce travail a été fait dans les années 1990 par de nombreux auteurs (voir par exemple [20, 21, 22, 23]), à la fois pour les modèles de fluide équivalent et le modèle de Biot–Allard.

Le problème à traiter consiste dans le cas le plus général en une structure rayonnant dans un fluide, en présence de matériaux poroélastiques placés sur les murs, rigides ou mobiles, de la cavité. Classiquement, une formulation primale est choisie pour la structure avec le déplacement comme inconnue. Pour le fluide plusieurs choix peuvent être faits : pression, déplacement ou déplacement et potentiel de vitesse [24]. Dans le cadre d'une étude de vibroacoustique, la réponse fréquentielle est souhaitée, donc une étude fréquentielle est adoptée généralement, même si elle mène à des temps de calcul supérieurs. Le choix de la pression comme degré de liberté permet de n'avoir qu'une inconnue par point tout en obtenant un système fluide/structure symétrique (si le cas de la fréquence nulle est exclus).

La modélisation par FEM d'un matériau poroélastique nécessite de choisir les variables. La première formulation proposée par Biot utilise 6 inconnues en chaque point, les déplacements de la phase solide et de la phase fluide. Un autre choix peut être fait en prenant comme variables les déplacements de la phase solide et les déplacements relatifs fluide/solide [25], ou encore en choisissant le déplacement solide et le déplacement total [26]. Göransson [23] a montré que l'hypothèse d'un fluide irrotationnel dans la phase poreuse permet de développer une formulation déplacement solide–potentiel de vitesses pour la phase fluide qui permet d'aboutir à un système symétrique à 4 inconnues par noeuds.

Cependant, ce modèle sous-estime la dissipation, car la phase équivalente fluide possède une partie rotationnelle. Cette correction peut être apportée en utilisant une formulation déplacement solide–potentiel de vitesse–rotationnel [27]. Enfin, Atalla *et al.* ont proposé dans [28, 29] deux formulations avec 4 inconnues par point en utilisant la pression comme variable fluide. Ces formulations sont équivalentes à la première dans le domaine fréquentiel, et ne diffèrent que par le traitement des conditions aux limites.

La principale difficulté avec la méthode FEM est le coût de calcul. En effet, pour un problème tridimensionnel, un grand nombre de nœuds et d'éléments sont nécessaires pour assurer la convergence des résultats. Le critère déterminant la convergence des résultats est relié aux longueurs d'ondes se propageant dans le milieu. En général, au moins 6 éléments par longueur d'onde sont nécessaires [30]. Or les longueurs d'ondes se propageant dans les matériaux poroélastiques sont très petites (de l'ordre du centimètre), beaucoup d'inconnues par nœud sont alors nécessaires (6 inconnues par nœud pour la formulation originelle de Biot, 4 inconnues par nœud pour la formulation proposée par Atalla [28, 29]). En outre, les dimensions latérales importantes induisent un grand nombre de nœuds par section, tandis que le maillage dans l'épaisseur doit être suffisamment fin pour prendre en compte la compression de la couche poreuse, notamment dans le cas de multicouches. Par exemple, Rumpler a montré dans [31] que le nombre d'inconnues associées à la couche poreuse pouvait être supérieur ou égal au nombre de degrés de liberté associés à la fois aux domaines acoustiques et structure. Le coût de calcul induit par la présence des matériaux poroélastiques empêche toute tentative d'optimisation de matériaux ou géométrie utilisant le modèle complet de Biot–Allard, malgré l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs.

Pour contourner le problème, deux approches sont couramment utilisées. La première consiste à calculer la réponse par FEM du matériau modélisé par un modèle de fluide équivalent [32, 33, 34]. Les effets de dissipation sont pris en compte par une compressibilité et une masse volumique complexes dépendants de la fréquence.

La seconde approche est de considérer que l'interface dissipative ne joue que le rôle d'une impédance. Cette impédance peut être calculée par TMM dans une étape antérieure au calcul FEM, ou intégrée directement dans une approche couplée FEM–TMM [35, 36, 37, 38]. Des approches d'impédance probabilistes ont aussi été proposées ([39, 40, 41]). L'intérêt de cette modélisation provient du faible coût de calcul associé au modèle d'impédance localisée ainsi qu'à la prise en compte des incertitudes concernant la valeur de l'impédance, incertitudes liées au matériau et aux conditions aux limites.

## 1.2 Modèles usuels

Dans cette section, les différents modèles utilisables pour traiter un problème de vibroacoustique avec interfaces dissipatives sont décrits de manière plus détaillée. Différentes degrés d'approximation peuvent être faits pour décrire la réponse d'un système composé d'une structure rayonnant dans un fluide léger compressible en présence de matériaux poroélastiques.

Par ordre de complexité croissante on trouve : le modèle d'impédance localisée, les modèles de fluide équivalent, les modèles de plaque équivalente, le modèle tridimensionnel de Biot–Allard.

### 1.2.1 Modèle d'impédance localisée

Le modèle d'impédance localisée est très souvent utilisé pour des interfaces insonorisantes appliquées sur des parois rigides planes. L'idée sous-jacente est que seul le niveau de pression dans la cavité acoustique doit être déterminé, et que la connaissance de la dynamique tri-dimensionnelle de l'interface dissipative n'est pas nécessaire. Le modèle consiste à utiliser une relation reliant la pression et la vitesse pariétale à l'interface pour exprimer le travail virtuel dû à la vibration de l'interface dissipative sur la cavité acoustique seulement en fonction de la pression acoustique.

La configuration est décrite en figure 1.1.

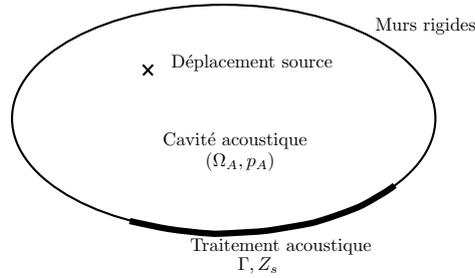


Figure 1.1 – Schéma du problème général avec condition d'impédance.

Les paramètres acoustiques utilisés dans la suite sont donnés dans le tableau 1.1.

Paramètre	Valeur
Masse volumique $\rho_0$ (kg.m <sup>-3</sup> )	1.21
Viscosité dynamique $\eta$ (10 <sup>-5</sup> N.m <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup> )	1.84
Pression standard $P_0$ (Pa)	101325
Rapport des capacités calorifiques $\gamma$	1.4
nombre de Prandtl $Pr$	0.71

Tableau 1.1 – Paramètres de l'air ambiant

Dans le domaine fréquentiel, le champ de pression  $p_A$  dans le domaine fluide  $\Omega_A$  est régi pour toute pulsation  $\omega$  non nulle par l'équation variationnelle :

$$\int_{\Omega_A} \left( \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \nabla p_A \cdot \nabla \delta p_A - \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p_A \delta p_A \right) d\Omega_A = \int_{\Gamma_A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_A \delta p_A d\Gamma_A \quad (1.1)$$

où  $\Gamma_A$  représente l'ensemble des surfaces du domaine,  $\mathbf{n}_A$  est la normale sortante au domaine et où  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_A$  est le déplacement normal de l'interface.

On définit d'autre part l'impédance de paroi en un point donné par le rapport de la pression pariétale  $p$  en ce point par la vitesse normale  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_F$  dans l'espace des nombres d'ondes :

$$Z_s(k_x, k_y) = \frac{p(k_x, k_y)}{\mathbf{v}(k_x, k_y) \cdot \mathbf{n}_F}. \quad (1.2)$$

Cette condition d'impédance peut être retrouvée en représentant l'interface dissipative comme un système parallèle ressort–amortisseur surfacique agissant entre la cavité et le bâti [42]. Par conséquent, le déplacement normal  $\mathbf{u}(x, y) \cdot \mathbf{n}_F$  à l'interface s'écrit comme le produit de convolution de la fonction d'impédance et du champ de pression à l'interface :

$$\mathbf{u}(x, y) \cdot \mathbf{n}_F = \frac{1}{i\omega} Z_s(x, y) * p(x, y). \quad (1.3)$$

La connaissance de la valeur de l'impédance  $Z_s$  en tous points de l'interface permet donc de traiter le problème couplé sans ajouter d'inconnue au problème acoustique, ce qui implique des temps de calcul faibles. Cette approche générale est exacte aussi bien pour des géométries planes que pour des géométries complexes incluant des courbures importantes. La seule approximation de l'approche est l'hypothèse concernant la valeur de l'impédance  $Z_s(x, y)$ .

Habituellement, on considère que ce paramètre ne dépend que de la fréquence, de l'épaisseur et des matériaux constituant l'interface dissipative. Sa valeur est donc choisie constante sur toute l'interface. Elle est calculée par TMM ou mesurée dans un tube d'impédance. Cela revient à considérer que l'interface n'est excitée qu'à une direction d'excitation donnée, c'est-à-dire que les réflexions sur les conditions aux limites latérales sont elles-aussi négligées.

Pour calculer la réponse acoustique dans ce cas, il est utile d'invoquer le théorème de Parseval pour exprimer le travail de l'interface sur la cavité acoustique

$$\begin{aligned} W_{P \rightarrow A} &= \int_{\Gamma_A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_A \delta p_A d\Gamma_A \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{k_x, k_y} Z_s(k_x, k_y) p_A(k_x, k_y) \delta p_A(k_x, k_y) dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dans le cas où l'excitation acoustique sur l'interface est une onde d'incidence unique  $(\theta_0, \Phi_0)$  (voir figure 1.2, l'impédance vérifie alors :

$$Z_s(k_x, k_y) = Z_s(k_x^0, k_y^0) \delta_{(k_x - k_x^0, k_y - k_y^0)} \quad (1.5)$$

où  $\delta$  est la fonction Dirac et où les nombres d'ondes  $k_x^0$  et  $k_y^0$  sont respectivement donnés en fonction du nombre d'onde de l'excitation  $\omega/c_0$  par :

$$k_x^0 = \omega/c_0 \sin \theta_0 \cos \Phi_0 \text{ et } k_y^0 = \omega/c_0 \sin \theta_0 \sin \Phi_0. \quad (1.6)$$

Par conséquent la vibration de l'interface dissipative génère une source acoustique qui peut s'écrire :

$$W_{P \rightarrow A} = \frac{1}{i\omega Z_s(k_x^0, k_y^0)} \int_{\Gamma_A} p_A \delta p_A d\Gamma_A. \quad (1.7)$$

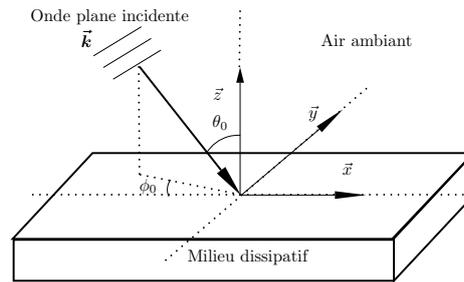


Figure 1.2 – Définition des angles d’incidences.

La valeur de l’impédance dépend du champ de pression incident, et donc de l’excitation. Elle est donc susceptible de varier dans l’espace et pour différentes excitations acoustiques. Cela est dû au fait que l’incidence des ondes de pression incidentes à un rôle sur l’énergie transmise à l’interface dissipative. En particulier, dans le cas de fortes courbures, l’hypothèse de la contribution d’une seule incidence sur la paroi n’est plus valide. L’approche est donc valide pour les géométries planes. La validité de l’approche est discutée plus en détail par la suite.

Dans ce cas, deux cas limites peuvent être distingués. En basses fréquences, le champ de pression tend vers un champ de pression uniforme car les longueurs d’ondes sont très grandes. L’excitation étant uniforme, l’impédance est donc constante sur l’interface. En général on utilise la valeur de l’impédance à incidence normale car elle est très facile à déterminer à partir d’expériences utilisant un tube de Kundt. Sa valeur dans les basses fréquences est indépendante de l’angle d’incidence choisi.

Dans les hautes fréquences, le grand nombre de réverbérations sur les parois conduit à un champ diffus. Des approches HF comme la SEA peuvent être utilisées en utilisant l’expression du coefficient d’absorption en champ diffus, provenant de la somme des contributions des différents angles d’incidences. Récemment, en minimisant l’écart entre le coefficient d’absorption en champ diffus et le coefficient d’absorption à un angle d’incidence donné, Jeong et Brunskog [43] ont montré que l’angle d’incidence optimal est de l’ordre de  $55^\circ$  pour des matériaux à réaction locale, et de  $45^\circ$  pour les matériaux à réaction non locale testés dans l’étude, selon les auteurs. En champ diffus, même si la réalité physique de la démarche est discutable, il suffit donc d’appliquer sur les parois une impédance constante obtenue pour une incidence de  $55^\circ$ .

La force de ce modèle est qu’à partir de la connaissance du paramètre d’impédance de paroi, il est possible de calculer la réponse vibratoire du système à faible coût, puisqu’aucune inconnue n’est utilisée pour modéliser l’interface dissipative. La difficulté associée à ce problème est d’obtenir la valeur de ce paramètre sur toute la bande de fréquences d’étude. Toutefois, si cette valeur est connue, le faible coût de calcul en fait l’approche la plus adaptée à de l’optimisation de placement de dispositifs insonorisants.

Cette approche a aussi menée à des études stochastiques [39, 40, 41]. Les incertitudes dans les matériaux, les épaisseurs, les conditions aux limites entre les différentes couches observées dans la réalité génèrent de fortes différences entre l’impédance nominale et l’impédance réelle. Ce type d’approche permet de s’affranchir de ces variations et d’étendre la

validité des éléments finis aux plus hautes fréquences.

### 1.2.2 Modèle de fluide équivalent

Un modèle plus riche est le modèle de fluide équivalent. Ce modèle permet de prendre en compte la variation spatiale de la réponse, notamment en présence d'écoulements. La remarque fondamentale derrière ce modèle est que la plupart des problèmes étudiés font apparaître une excitation acoustique. Ce type d'excitation n'excite en général que faiblement le squelette, donc le matériau poroélastique biphasique peut être approché par un fluide équivalent. Ce type de modèle permet de n'avoir qu'un seul degré de liberté par nœud, la pression. La limite de ce modèle réside dans l'hypothèse régissant le mouvement de la phase solide. Dans le cas où le squelette peut être comprimé ou subir une déformation importante, par exemple quand une force est directement appliquée sur une couche poreuse ou quand cette couche poreuse constitue le cœur d'un sandwich, ce modèle n'est plus valide car ce sont alors les ondes caractéristiques du squelette qui influent majoritairement sur la réponse du matériau poreux.

#### 1.2.2.1 Paramètres poroacoustiques

Les paramètres nécessaires pour modéliser le matériau poreux sous la forme d'un fluide équivalent sont les paramètres du fluide saturant les pores (l'air) et les paramètres permettant de représenter la géométrie des pores. Ces paramètres sont la porosité, la résistivité, la tortuosité, les longueurs caractéristiques thermiques et visqueuses, la perméabilité thermique et visqueuse. Ils sont appelés paramètres poroacoustiques, par opposition aux paramètres mécaniques du squelette utilisés dans la théorie de Biot.

**Porosité  $\phi$**  La porosité représente le rapport du volume occupé par le fluide saturant  $V_f$  sur le volume total  $V_t$  :

$$\phi = \frac{V_f}{V_t} < 1. \quad (1.8)$$

Ce rapport est de l'ordre de 0.9 à 1 pour les matériaux utilisés en acoustique.

**Résistivité  $\sigma$**  La résistivité d'un matériau poreux à un écoulement est donnée par :

$$\frac{\Delta p}{d} = \sigma \phi \quad (1.9)$$

où  $\Delta p$  est la différence de pression exercée de part et d'autre du milieu poreux de longueur  $d$  et de porosité  $\phi$ .

Ce paramètre est habituellement compris entre  $1kN.m.s^4$  et  $500kN.m.s^4$ .

**Tortuosité  $\alpha_\infty$**  La tortuosité est définie par :

$$\alpha_\infty = \frac{\langle v(M)^2 \rangle}{\langle v(M) \rangle^2} > 1 \quad (1.10)$$

où  $v(M)$  représente la vitesse du fluide. Ce coefficient représente un effet de masse ajoutée, puisque la moyenne de l'énergie cinétique est toujours supérieure à l'énergie cinétique calculée à partir de la vitesse moyenne. Ce coefficient est typiquement de l'ordre de 1.0 pour des matériaux fibreux à 3.

**Perméabilité  $k_0$**  La perméabilité est reliée à la loi de Darcy :

$$\phi \mathbf{v} = -\frac{k_0}{\eta_f} \nabla p. \quad (1.11)$$

Ce paramètre, mesurée en  $m^2$ , est indépendant du fluide. Le rapport  $k_0/\phi$  représente la surface effective des pores.

$$k_0 = \phi \frac{\langle \mathbf{v} \rangle^2}{-\langle \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} \rangle}. \quad (1.12)$$

En basses fréquences, le paramètre  $k_0$  est relié à la résistivité et à la viscosité dynamique  $\eta_f$  du fluide saturant par :  $k_0 = \eta_f/\sigma$ .

**Résistivité thermique, tortuosité thermique, perméabilité thermique** Ces quantités sont les analogues des quantités précédentes quand le champ de vitesses est remplacé par la température  $T$ .

**Longueurs caractéristiques  $\Lambda$  et  $\Lambda'$**  La taille de la couche limite visqueuse est définie en fonction de la viscosité dynamique du fluide saturant  $\nu$  par :  $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ . La couche limite thermique est définie par :  $\delta' = \sqrt{\frac{2\nu'}{\omega}}$ , où  $\nu' = \nu/Pr$ . Ces quantités permettent de définir la limite entre les modèles basses fréquences et hautes fréquences.

L'aire spécifique est  $S_p$ , rapport de la surface des pores sur le volume du matériau.

La longueur thermique est définie par :  $\Lambda' = \frac{2\phi}{S_p}$

La longueur visqueuse est définie par :  $\Lambda = \frac{\int_{V_p} \mathbf{v}^2 dV_p}{\int_{S_p} \mathbf{v}^2 dS_p}$

La longueur caractéristique visqueuse est reliée à la résistivité par [44] :

$$\Lambda = \sqrt{\frac{8\eta_f \alpha \infty}{\sigma \phi}} / c \quad (1.13)$$

où  $c$  est proche de 1.

### 1.2.2.2 Mise en équation du modèle de fluide équivalent

Le fluide équivalent est caractérisé par deux grandeurs, classiquement on utilise sa masse volumique  $\tilde{\rho}_{eq}$  et son module de compressibilité  $\tilde{K}_{eq}$ . Le symbole  $\tilde{\phantom{x}}$  signifie que le paramètre est complexe et dépendant de la fréquence. Ces deux paramètres peuvent être

reliés à la vitesse des ondes de compression  $c_{\text{eq}}$ , au nombre d'onde  $k_{\text{eq}}$  et à l'impédance caractéristique  $Z_{\text{eq}}$  par :

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{\text{eq}} &= \tilde{\rho}_{\text{eq}} c_{\text{eq}}^2 \\ k_{\text{eq}} &= \omega / c_{\text{eq}} \\ Z_{\text{eq}} &= \tilde{\rho}_{\text{eq}} c_{\text{eq}}.\end{aligned}\quad (1.14)$$

À l'interface entre le fluide acoustique et le fluide équivalent, la discontinuité des impédances caractéristiques conduit à une réflexion partielle des ondes sonores. Le coefficient de réflexion  $R$  et le coefficient d'absorption  $\alpha$  sont fonction de l'impédance de surface  $Z_s$ , des impédances caractéristiques des fluides et de l'épaisseur de la couche poreuse  $d$ .

$$\begin{aligned}Z_s &= -\frac{iZ_{\text{eq}}}{\cos \theta} \cot(k_{\text{eq}}d) \\ R &= \frac{Z_s \cos \theta - Z_0}{Z_s \cos \theta + Z_0} \\ \alpha &= 1 - |R|^2\end{aligned}\quad (1.15)$$

où  $\theta$  est l'angle d'incidence du champ de pression exciteur, défini par rapport à la normale à l'interface entre les deux fluides.

Les équations reliant le champ de pression et le champ de déplacements sont les équations d'Euler linéarisées dans les petits déplacements écrites en régime harmonique :

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{\text{eq}} \omega^2 \mathbf{u} &= \nabla p \\ p &= -\tilde{K}_{\text{eq}} \nabla \cdot \mathbf{u}.\end{aligned}\quad (1.16)$$

Le fluide équivalent est donc régi par une équation de Helmholtz :

$$\nabla^2 p + k_{\text{eq}}^2 p = 0. \quad (1.17)$$

Ces équations font apparaître qu'un fluide équivalent au matériau poreux est considéré comme un fluide parfait, c'est-à-dire non visqueux. La viscosité est en faite présente dans le caractère complexe et dépendant de la fréquence des paramètres équivalents. De plus, le fluide est considéré comme purement irrotationnel.

Les conditions limites classiquement définies sont :

- Interface fluide/fluide : continuité de la pression et du déplacement normal ;
- Interface solide/fluide : continuité du déplacement normal et des efforts normaux.

Des modèles plus complexes ont été développés (voir [45] par exemple). Ces modèles, dits modèles généralisés, font apparaître des termes de viscosité, et permettent de définir des conditions aux limites plus réalistes, en particulier de séparer la condition de pores fermés et de pores ouvertes. Ces modèles ne sont pas développés dans la suite, puisqu'ils complexifient la phase fluide, alors que nous nous intéresserons en particulier à l'influence du squelette.

Afin de relier les paramètres du fluide équivalent aux paramètres poroacoustiques du matériau poreux, différents modèles approchés ont été proposés. Ces modèles sont de plusieurs sortes.

### Approche empirique

Cette approche consiste à identifier les paramètres prépondérants et à les relier aux paramètres des fluides équivalents par des lois empiriques. Delany et Bazley [6] ont d'abord considéré que la résistivité et la porosité sont les paramètres les plus influents. Basé sur un grand nombre d'échantillons, ils ont proposé la loi suivante :

$$\begin{aligned} k_{\text{eq}}(\omega) &= \frac{\omega}{c_0} \left( 1 + 0.0978X^{-0.700} - i 0.189X^{0.595} \right) \\ Z_{\text{eq}}(\omega) &= \frac{\rho_0 c_0}{\phi} \left( 1 + 0.0571X^{-0.754} - i 0.087X^{-0.732} \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

où  $X = \rho_0 f / \sigma$  et où  $f$  est la fréquence. Ce modèle est valide pour  $0.01 < X < 1$ .

D'autres modèles similaires ont été proposés sur le même principe afin d'étendre le domaine de validité du modèle (voir par exemple [7, 46, 47]).

### Approche géométrique

Des approximations géométriques peuvent être faites pour décrire les pores, par exemple une description par des cylindres, des sphères etc.

D'une manière générale, la masse volumique et le module de compressibilité sont écrits sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\text{eq}}(\omega) &= \alpha(\omega)\rho_0 \\ \tilde{K}_{\text{eq}}(\omega) &= \frac{K_a}{\beta(\omega)} \end{aligned} \quad (1.19)$$

où  $K_a = \gamma P_0$  est le module de compressibilité de l'air et  $\rho_0$  sa masse volumique.

Un résumé complet des différents modèles permettant de décrire les paramètres  $\alpha(\omega)$  et  $\beta(\omega)$  est proposé dans [16].

Tout d'abord, la géométrie imparfaite des pores, la dispersion des paramètres due aux procédés de fabrication, aux inhomogénéités et à l'anisotropie implique qu'une précision très importante ne peut pas être atteinte. De plus, les paramètres poroélastiques doivent être identifiés expérimentalement. Des modèles simples, faisant intervenir un petit nombre de paramètres, sont donc intéressants. Une comparaison de différents modèles a été proposée dans [48, 49, 14].

Connaissant les limites du modèle de fluide équivalent, le choix a été fait de considérer le modèle tridimensionnel de Biot–Allard comme référence. Comme ce qui est couramment fait dans la littérature, ce modèle est associé au modèle de Johnson pour obtenir l'expression de  $\alpha(\omega)$ , tandis que  $\beta(\omega)$  est donné par le modèle de Champoux–Allard.

Avec ce choix de modèle, les valeurs des paramètres du fluide saturant les pores en présence du squelette sont donnés en fonction de la porosité, de la résistivité, de la tortuosité et des longueurs caractéristiques thermiques et visqueuses par :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_f &= \rho_0 \alpha_\infty \left( 1 - \frac{i\sigma\phi}{\omega\rho_0\alpha_\infty} \sqrt{1 + \frac{4i\omega\eta_f\alpha_\infty^2\rho_0}{(\sigma\lambda\phi)^2}} \right), \\ \tilde{K}_f &= \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left[ 1 + \frac{8\eta_f}{i\omega P_r \Lambda'^2 \rho_0} \left( 1 + \frac{i\omega P_r \Lambda'^2 \rho_0}{16\eta_f} \right)^{1/2} \right]^{-1}}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Finalement, les paramètres du fluide équivalent à squelette immobile sont donnés par :

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{\text{eq}} &= \frac{\tilde{\rho}_f}{\phi} \\ \tilde{K}_{\text{eq}} &= \frac{\tilde{K}_f}{\phi}.\end{aligned}\tag{1.21}$$

Cette dépendance fréquentielle a été justifiée par la suite par des approches micro-macro [16, 50, 51]. Ces approches ont permis de montrer que ces expressions possèdent des asymptotes horizontales en basses fréquences et en hautes fréquences, et que leurs valeurs peuvent être reliées aux paramètres poroacoustiques. De plus, la dépendance fréquentielle de ces fonctions est complètement déterminée si les valeurs asymptotiques sont connues.

Les modèles de fluide équivalent sont donc adaptés à la prédiction de la réponse de matériaux simples à des excitations acoustiques. D'autre part, de nouvelles géométries sont apparues, conduisant à de nouveaux matériaux acoustiques. Ces nouvelles structures jouent sur l'inhomogénéité du comportement vibratoire. Afin d'éviter un maillage très riche par des méthodes purement numériques, résultant en des problèmes dont le coût est hors de portée actuellement, des approches analytiques ont été développées à partir du modèle de fluide équivalent [52, 53]. Cela a permis de modéliser des métamatériaux, comme par exemple, des plaques perforées, des matériaux à inclusions ou à double porosité, par un modèle de fluide équivalent.

### 1.2.3 Modèles de plaque équivalente

Les modèles de plaque équivalente sont des modèles réduits dédiés à la simplification de la géométrie et de la prédiction de la réponse vibratoire de structures planes composites multicouches. Ces structures sont très courantes dans l'industrie aérospatiale, aéronautique et automobile, par exemple sous la forme d'interfaces insonorisantes.

Ces modèles sont une réponse à l'inefficacité des éléments finis dans ces configurations. En effet, la modélisation de l'ensemble des couches par des éléments finis tridimensionnels est envisageable, même dans les hautes fréquences, si le maillage est suffisamment fin. Les plaques étant usuellement soumises à de la flexion, des éléments quadratiques doivent être utilisés. Cela induit cependant des coûts de calcul prohibitifs. Cela est d'autant plus vrai que si des matériaux dont les paramètres dépendent de la fréquence, comme les matériaux viscoélastiques ou les matériaux poroélastiques, sont utilisés, seule une résolution fréquence par fréquence peut être envisagée.

Plusieurs modèles de plaque équivalente ont été développés dans la littérature. Les théories Classical Laminated Plate Theory (CLPT) et First Shear Deformation Theory (FSDT) sont couramment employées. Pour plus de détails on pourra consulter le livre très complet de Reddy [54] sur le sujet.

La CLPT est une généralisation de la théorie de Kirchoff–Love, dans laquelle la déformation transverse en cisaillement est négligée ainsi que les efforts normaux. Cette théorie est satisfaisante pour des matériaux rigides et des plaques fines.

La FSDT a été présentée par Whitney [55] pour généraliser la théorie de Reissner Mindlin. Avec cette théorie, la déformation en cisaillement est supposée constante dans

l'épaisseur. L'intégrale sur l'épaisseur des efforts transverses est calculée de manière approchée en utilisant un coefficient de recalage  $\kappa$  habituellement choisi tel que :  $\kappa = 5/6$ .

D'autres théories d'ordre plus élevé ont été développées. La High order Shear Deformation Theory (HSDT) est basée sur le même principe que la FSDT, sauf que les déformations transverses sont prises sous la forme de polynômes d'ordre arbitraire de la coordonnée de l'épaisseur.

Ces différents modèles sont des modèles de couche équivalente, autrement dit que la plaque équivalente est une plaque monocouche. Au contraire, des approches couche-par-couche (*Layer-wise LW*) ont été développées spécifiquement pour le cas de multicouches et permettent d'obtenir de meilleurs résultats. Ces approches utilisent les mêmes hypothèses que les modèles précédents, mais pour chaque couche du multicouche. La discontinuité des déformations et la continuité des efforts à toutes les interfaces sont prises en compte. Il est possible d'améliorer les performances de ces modèles en ajoutant une fonction zig-zag comme fonction sur laquelle projeter le champ de déplacements. Ces approches ont été utilisées dans le cas de matériaux viscoélastiques ou plus récemment de matériaux poroélastiques [56].

Les théories CPLT et FSDT sont peu coûteuses, mais sont limitées aux basses fréquences. Leur limite de validité est définie par :

$$k(\omega)h \ll 1 \quad \text{ou} \quad h \ll \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (1.22)$$

où  $k(\omega)$  est le nombre d'onde de flexion et  $h$  l'épaisseur du panneau composite. La limite de validité de ces théories est donc atteinte quand l'épaisseur du panneau augmente ou quand les longueurs d'ondes se propageant dans le matériau diminuent. Ce cas est particulièrement critique dans le cas de matériaux sandwich à cœur poroélastique, puisque les longueurs d'ondes s'y propageant sont très courtes.

Les théories d'ordre plus élevées ont un intérêt dans le cas de matériaux très souples et épais. Dans ce cas, les déformations en cisaillement ne peuvent pas être négligées. Les théories plus complexes permettent alors d'étendre les théories d'ordre faible aux domaines des hautes fréquences, à un coût numérique très supérieur. En effet, dans le cas de matériaux très souples comme les matériaux poroélastiques, l'ordre polynomial nécessaire est très élevé, au moins de l'ordre de 4. Le modèle de plaque équivalente est alors valide jusqu'à plusieurs centaines de Hz, mais implique des coûts de calcul similaires aux éléments finis.

## 1.2.4 Modèle de Biot–Allard

Le modèle de Biot–Allard est le modèle le plus riche considéré dans ce travail. Il consiste en une extension pour les milieux acoustiques de la théorie de Biot [10, 11, 12] initialement développée pour les géomatériaux et en l'absence de dissipation.

### 1.2.4.1 Hypothèses

L'hypothèse principale de ce modèle est l'existence d'un volume élémentaire représentatif (VER). Ce VER est petit devant les longueurs d'ondes, mais grand devant la taille des pores. Sur ce volume, il est possible d'intégrer le champ de déplacement microscopique

fluide et le champ de déplacements du squelette. Deux champs de déplacement moyens existent donc, correspondant à ce que l'on appellera « phase solide » et « phase fluide » par la suite. La difficulté conceptuelle de ce modèle est que d'un matériau biphasique, hétérogène, on traite un matériau équivalent homogène possédant deux champs de vitesses et de contraintes en tous points. Les champs de déplacements et de contraintes obtenus prennent à la fois en compte la présence du squelette et du fluide saturant les pores.

Plusieurs choix ont été faits pour décrire les vibrations d'un tel matériau. La première formulation, appelée formulation  $(\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^f)$ , utilise le champ de déplacement de la phase solide  $\mathbf{u}^s$  et le champ de déplacement de la phase fluide  $\mathbf{u}^f$ , soit 6 inconnues en tous points. Une seconde formulation a été proposée par Biot afin de mieux quantifier l'énergie dans un tel matériau [25], en remplaçant le champ de déplacement fluide par le champ de déplacement relatif du fluide par rapport au déplacement du solide (formulation  $(\mathbf{u}^s, \mathbf{w})$ ).

Ces formulations ont ensuite été utilisées pour l'acoustique en réutilisant les paramètres poroacoustiques ainsi que les expressions des paramètres des fluides équivalents, donnant naissance à la théorie de Biot–Allard. Cette théorie est décrite en profondeur par Allard et Atalla dans l'ouvrage de référence [16].

Dans toute la suite, les indices ou exposants s et f désigneront respectivement la phase solide et la phase fluide, et  $p$  la pression exercée dans la phase fluide à l'intérieur du milieu poreux.

#### 1.2.4.2 Paramètres et variables

**Variables possibles** Pour modéliser la partie solide, on utilise une formulation primale en déplacement, la variable naturelle utilisée est le champ de déplacement de la phase solide  $\mathbf{u}^s$ . Pour la phase fluide, de la même manière que pour des problèmes d'interactions fluide/structure classiques, deux choix sont possibles : soit le champ de déplacement de la phase fluide  $\mathbf{u}^f$  est choisi, soit la pression exercée dans la phase fluide  $p$  est considérée. Il est aussi possible de considérer à la place de la phase fluide n'importe quelle combinaison des déplacements de la phase solide et de la phase fluide. En particulier, deux champs de déplacements sont importants : le champ de déplacement relatif  $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s)$  et le champ de déplacement total  $\mathbf{u}^t = \phi\mathbf{u}^f + (1 - \phi)\mathbf{u}^s$ .

**Tenseurs des contraintes** Les contraintes exercées dans les phases solide et fluide sont :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^s &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s - \phi \frac{\tilde{Q}}{R} p \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\sigma}^f &= -\phi p \mathbf{I}\end{aligned}\tag{1.23}$$

où  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^s$  est le tenseur des contraintes ressenties par la phase solide quand la pression est nulle. Pour cette raison, elle est aussi appelée contrainte du poreux *in vacuo*, et ne dépend que des paramètres mécaniques du squelette : la masse volumique du milieu *in vacuo*  $\rho_s$ , les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , l'amortissement structural  $\eta$ . Ce tenseur des contraintes est relié au tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{u}^s + \nabla^T\mathbf{u}^s)/2$  par la relation classique :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^s = \lambda \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}.\tag{1.24}$$

Cette relation suppose un comportement isotrope du matériau. Un comportement anisotrope est observé pour certains matériaux, on se référera par exemple à [57, 58, 59] pour leur modélisation numérique. Dans le cadre de ce manuscrit, on se limite à des matériaux isotropes.

On peut aussi définir le tenseur des contraintes associé aux contraintes totales ressenties par le volume élémentaire comme la somme des contributions dues aux phases solide et fluide :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^t &= \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\sigma}^f \\ &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s - \phi \left(1 + \tilde{Q}/\tilde{R}\right) p \mathbf{I}.\end{aligned}\quad (1.25)$$

Dans le cadre des hypothèses de Johnson–Champoux–Allard (JCA), les expressions des coefficients  $\tilde{Q}$  et  $\tilde{R}$  se simplifient en :

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s - p \mathbf{I}.\quad (1.26)$$

**Paramètres de rigidité** La rigidité du squelette *in vacuo* est paramétrée par ses coefficients de Lamé. Cependant, la présence de la phase fluide modifie la rigidité du matériau poreux saturé d'air. Pour prendre en compte cette modification, quatre paramètres sont définis en fonction de la porosité et des modules de compressibilité du matériau constituant le squelette  $K_s$ , du squelette *in vacuo*  $K_b$  et du fluide  $K_f$  par [60] :

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= \frac{(1 - \phi)(1 - \phi - K_b/K_s)K_s + \phi(K_s/K_f)K_b}{1 - \phi - K_b/K_s + \phi K_s/K_f} + 4/3N \\ \tilde{Q} &= \frac{(1 - \phi - K_b/K_s)\phi K_s}{1 - \phi - K_b/K_s + \phi K_s/K_f} \\ \tilde{R} &= \frac{\phi^2 K_s}{1 - \phi - K_b/K_s + \phi K_s/K_f} \\ N &= \mu.\end{aligned}\quad (1.27)$$

On note parfois  $\tilde{A} = \tilde{P} - 2N$  le coefficient de Lamé du milieu saturé d'air et  $\hat{A} = A - \tilde{Q}^2/\tilde{R}^2 = \lambda$  le premier coefficient de Lamé du squelette dans le vide.

Cependant, le module de compressibilité du matériau est souvent inconnu, d'autant qu'il varie selon le procédé de fabrication. La théorie de Johnson–Champoux–Allard fait l'hypothèse que la rigidité du squelette est grande devant celle de l'air et petite devant celle du matériau :  $K_f \ll K_s \ll K_m$ . Cela permet de simplifier les expressions précédentes pour obtenir finalement [16] :

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= \lambda + 2\mu + \tilde{Q}^2/\tilde{R} \\ \tilde{Q} &= (1 - \phi)\tilde{K}_f \\ \tilde{R} &= \phi\tilde{K}_f \\ N &= \mu.\end{aligned}\quad (1.28)$$

**Paramètres de masse** On définit les masses volumiques effectives des différentes phases en l'absence de dissipation par :

$$\begin{aligned}\rho_{12} &= -\phi\rho_0(\alpha_\infty - 1), \\ \rho_{11} &= \rho_s - \rho_{12}, \\ \rho_{22} &= \phi\rho_0 - \rho_{12}\end{aligned}\tag{1.29}$$

où  $\rho_s$  est la masse volumique du squelette *in vacuo*.

En présence de dissipation, le modèle de Champoux–Allard permet de compléter ces expressions en ajoutant une dépendance fréquentielle :

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{12} &= -\phi\rho_0(\alpha_\infty - 1) + \frac{i\tilde{b}}{\omega}, \\ \tilde{\rho}_{11} &= \rho_s - \tilde{\rho}_{12}, \\ \tilde{\rho}_{22} &= \phi\rho_0 - \tilde{\rho}_{12}.\end{aligned}\tag{1.30}$$

Le coefficient de correction de couche limite visqueuse est donné par :

$$\tilde{b} = \sigma\phi^2 \left( 1 + \frac{4i\omega\eta_f\alpha_\infty^2\rho_0}{(\sigma\lambda\phi)^2} \right)^{1/2}.\tag{1.31}$$

#### 1.2.4.3 Première formulation de Biot, formulation $(\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^f)$

Les déplacements  $\mathbf{u}^s$  et  $\mathbf{u}^f$  sont utilisés comme variables, tandis que les contraintes considérées sont le tenseur des contraintes de la phase solide  $\boldsymbol{\sigma}^s$  et de la phase fluide  $\boldsymbol{\sigma}^f$ . Les équations de la dynamique du milieu poreux s'écrivent en fonctions des paramètres donnés dans le paragraphe précédent par :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^s &= -\omega^2\tilde{\rho}_{11}\mathbf{u}^s - \omega^2\tilde{\rho}_{12}\mathbf{u}^f \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^f &= -\omega^2\tilde{\rho}_{12}\mathbf{u}^s - \omega^2\tilde{\rho}_{22}\mathbf{u}^f.\end{aligned}\tag{1.32}$$

On observe un couplage inertiel symétrique entre les deux phases tandis que l'expression des contraintes est elle-même symétrique. Tous les coefficients sont complexes et dépendent de la fréquence.

La formulation variationnelle associée à cette formulation s'écrit :

$$\begin{aligned}\text{Trouver } \mathbf{u}^s \in C^s \text{ et } \mathbf{u}^f \in C^f \text{ tels que pour tous } \delta\mathbf{u}^s \in C^{s*} \text{ et } \delta\mathbf{u}^f \in C^{f*}, \\ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^s : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}^s) - \omega^2\tilde{\rho}_{11}\mathbf{u}^s \cdot \delta\mathbf{u}^s - \omega^2\tilde{\rho}_{12}\mathbf{u}^f \cdot \delta\mathbf{u}^s) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^s \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u}^s \, d\Gamma, \\ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^f : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}^f) - \omega^2\tilde{\rho}_{21}\mathbf{u}^s \cdot \delta\mathbf{u}^f - \omega^2\tilde{\rho}_{22}\mathbf{u}^f \cdot \delta\mathbf{u}^f) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^f \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u}^f \, d\Gamma.\end{aligned}\tag{1.33}$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}^f = -\phi p \mathbf{I}$ .

#### 1.2.4.4 Ondes volumiques

À partir de la première formulation, il est possible de décomposer les champs de déplacements en la somme d'une partie irrotationnelle et d'une partie solénoïdale. Cette décomposition de Helmholtz s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^s &= \nabla\phi^s + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}^s \\ \mathbf{u}^f &= \nabla\phi^f + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}^f.\end{aligned}\tag{1.34}$$

Utiliser l'équation (1.34) dans l'équation (1.32) permet de découpler les termes rotationnels  $\Psi^s$  et  $\Psi^f$  des termes irrotationnels  $\phi^s$  et  $\phi^f$  :

$$\begin{aligned} \tilde{P}\nabla^2\phi^s + \tilde{Q}\nabla^2\phi^f &= -\omega^2\tilde{\rho}_{11}\phi^s - \omega^2\tilde{\rho}_{12}\phi^f, \\ \tilde{Q}\nabla^2\phi^s + \tilde{R}\nabla^2\phi^f &= -\omega^2\tilde{\rho}_{12}\phi^s - \omega^2\tilde{\rho}_{22}\phi^f, \\ N\nabla^2\Psi^s + \omega^2\left(\tilde{\rho}_{11} - \frac{\tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}}\right)\Psi^s &= \mathbf{0}, \\ \Psi^f &= -\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}}\Psi^s. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Cette décomposition fait apparaître trois solutions indépendantes (voir [16]). Une onde de cisaillement  $\Psi_3$  se propage dans les deux phases. Cette onde est apportée par la présence de la phase solide, mais se propage aussi dans la phase fluide par un effet visco-inertiel. Deux ondes longitudinales  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  associées respectivement aux potentiels  $\phi^s$  et  $\phi^f$  proviennent du couplage entre les ondes longitudinales se propageant dans l'air saturant les pores et le squelette, pris indépendamment l'un de l'autre. Ces deux ondes sont appelées « onde rapide » et « onde lente » respectivement. Dans le cas d'un découplage total entre les deux phases, chaque onde se propage indépendamment de l'autre dans son milieu original. Cependant, la grande surface effective de couplage entre squelette et fluide au sein d'un matériau poroélastique fait qu'en général ces deux ondes sont couplées. Le couplage est cependant partiel ou asymétrique. Alors que le rapport de la vitesse fluide sur la vitesse solide est proche de 1 pour l'onde rapide et pour l'onde de cisaillement, signifiant que le fluide est mis en mouvement par le solide avec la même amplitude, ce rapport est très grand pour l'onde lente. Cela signifie que le mouvement de l'air saturant n'a que peu d'influence sur le mouvement du squelette.

L'onde lente est une onde principalement « fluide ». Elle est fortement dissipée même en basses fréquences, en particulier à cause des importantes pertes par dissipation visqueuse dues aux grandes vitesses relatives entre la phase solide et la phase fluide.

Les nombres d'ondes des ondes de compression sont donnés par :

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{\omega^2 \left( \tilde{P}\tilde{\rho}_{22} + \tilde{R}\tilde{\rho}_{11} - 2\tilde{Q}\tilde{\rho}_{12} - \sqrt{\Delta} \right)}{2 \left( \tilde{P}\tilde{R} - \tilde{Q}^2 \right)}, \\ k_2^2 &= \frac{\omega^2 \left( \tilde{P}\tilde{\rho}_{22} + \tilde{R}\tilde{\rho}_{11} - 2\tilde{Q}\tilde{\rho}_{12} + \sqrt{\Delta} \right)}{2 \left( \tilde{P}\tilde{R} - \tilde{Q}^2 \right)}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

où  $\Delta$  est donné par :

$$\Delta = \left( \tilde{P}\tilde{\rho}_{22} + \tilde{R}\tilde{\rho}_{11} - 2\tilde{Q}\tilde{\rho}_{12} \right)^2 - 4 \left( \tilde{P}\tilde{R} - \tilde{Q}^2 \right) \left( \tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2 \right). \quad (1.37)$$

L'équation de dispersion de l'onde de cisaillement est quant à elle :

$$k_3^2 = \frac{\tilde{\rho}\omega^2}{N} \quad (1.38)$$

où :

$$\tilde{\rho} = \left( \tilde{\rho}_{11} - \frac{\tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \quad (1.39)$$

Le rapport des amplitudes des ondes dans la phase fluide et dans la phase solide est donné pour chaque onde par :

$$\begin{aligned}\Phi_1^f/\Phi_1^s &= \mu_1 = \frac{\tilde{P}k_1^2 - \omega^2\tilde{\rho}_{11}}{\omega^2\tilde{\rho}_{12} - \tilde{Q}k_1^2} \\ \Phi_2^f/\Phi_2^s &= \mu_2 = \frac{\tilde{P}k_2^2 - \omega^2\tilde{\rho}_{11}}{\omega^2\tilde{\rho}_{12} - \tilde{Q}k_2^2} \\ \Psi_3^f/\Psi_3^s &= \mu_3 = \frac{Nk_3^2 - \omega^2\tilde{\rho}_{11}}{\omega^2\tilde{\rho}_{22}}.\end{aligned}\quad (1.40)$$

#### 1.2.4.5 Formulation déplacement–déplacement total ( $\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^t$ )

Cette formulation a été proposée par Dazel [26]. L'origine de cette formulation réside dans le constat que toute combinaison linéaire des champs de déplacement  $\mathbf{u}^s$  et  $\mathbf{u}^f$  peut être utilisée. On peut alors choisir comme variables :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= a\mathbf{u}^s + b\mathbf{u}^f \\ \mathbf{u}_2 &= c\mathbf{u}^s + d\mathbf{u}^f.\end{aligned}\quad (1.41)$$

L'énergie de déformation est donnée par Biot en fonction de  $\mathbf{u}^s$  et  $\mathbf{u}^f$  par l'expression quadratique suivante :

$$W = A\frac{e^2}{2} + \tilde{R}\frac{\varepsilon^2}{2} + 2N\varepsilon_{ij}^s\varepsilon_{ij}^s + \tilde{Q}e\varepsilon \quad (1.42)$$

où  $e = \nabla \cdot \mathbf{u}^f$ ,  $\varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{u}^s$  et les termes de déformation  $\varepsilon_{ij}^s$  valent :

$$\varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^s}{\partial j} + \frac{\partial u_j^s}{\partial i} \right) \text{ pour tout } (i, j) \in \{x, y, z\}^2. \quad (1.43)$$

Cette expression de l'énergie de déformation peut être réécrite en fonction des termes  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  (voir [26]). L'idée de Dazel est de choisir les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  tels que les termes croisés en  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  disparaissent. Un choix possible est :

$$a = 1 \quad b = 0 \quad c = \phi Q/R \quad d = \phi. \quad (1.44)$$

On obtient finalement pour les variables permettant de découpler le couplage de raideur entre les deux phases :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}^W = \phi \left( \mathbf{u}^f + \frac{\tilde{Q}}{R} \mathbf{u}^s \right).\end{aligned}\quad (1.45)$$

Dans l'hypothèse du modèle de Johnson–Champoux–Allard, le terme  $\tilde{Q}/\tilde{R}$  peut être simplifié, la variable  $\mathbf{u}^W$  vaut alors :

$$\mathbf{u}^W = \phi \mathbf{u}^f + (1 - \phi) \mathbf{u}^s = \mathbf{u}^t. \quad (1.46)$$

Les variables finalement proposées par Dazel sont donc le champ de déplacements de la phase solide  $\mathbf{u}^s$  et le champ de déplacements totaux  $\mathbf{u}^t$ . Il faut remarquer qu'aucune approximation autre que le modèle de Johnson–Champoux–Allard n'est ajoutée.

Les équations de la dynamique peuvent alors être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s &= -\omega^2 \tilde{\rho}_s \mathbf{u}^s - \omega^2 \tilde{\rho}_{\text{eq}} \tilde{\gamma} \mathbf{u}^t \\ -\nabla p &= -\omega^2 \tilde{\rho}_{\text{eq}} \tilde{\gamma} \mathbf{u}^s - \omega^2 \tilde{\rho}_{\text{eq}} \mathbf{u}^t.\end{aligned}\quad (1.47)$$

Les coefficients apparaissant dans l'équation précédente sont donnés par :

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_s &= \tilde{\rho} + \tilde{\gamma}^2 \tilde{\rho}_{\text{eq}} \\ \tilde{\gamma} &= \phi \left( \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\rho_{22}} - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \\ p &= -\tilde{K}_{\text{eq}} \nabla \cdot \mathbf{u}^t.\end{aligned}\quad (1.48)$$

La formulation variationnelle associée s'écrit :

$$\begin{aligned}\text{Trouver } \mathbf{u}^s \in C^s \text{ et } \mathbf{u}^t \in C^t \text{ tels que pour tous } \delta \mathbf{u}^s \in C^{s*} \text{ et } \delta \mathbf{u}^t \in C^{t*}, \\ \int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\sigma}}^s : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^s) - \omega^2 \tilde{\rho}_s \mathbf{u}^s \cdot \delta \mathbf{u}^s - \omega^2 \tilde{\gamma} \tilde{\rho}_{\text{eq}} \mathbf{u}^t \cdot \delta \mathbf{u}^s) d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^s d\Gamma, \\ \int_{\Omega} (-\phi p \mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^t) - \omega^2 \tilde{\gamma} \tilde{\rho}_{\text{eq}} \mathbf{u}^s \cdot \delta \mathbf{u}^t - \omega^2 \tilde{\rho}_{\text{eq}} \mathbf{u}^t \cdot \delta \mathbf{u}^t) d\Omega = \int_{\Gamma} -p \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^t d\Gamma.\end{aligned}\quad (1.49)$$

#### 1.2.4.6 Formulation déplacement–pression ( $\mathbf{u}^s, p$ )

Cette formulation a été proposée en 1998 par Atalla *et al.*[28] et est appelée formulation mixte déplacement–pression. Ce n'est pas à strictement parler une formulation mixte au sens mathématique puisque les variables ne sont pas les variables de déplacement et d'effort pour chaque phase. Cependant, une variable de déplacement est utilisée pour la phase solide tandis qu'une variable d'effort (la pression) est utilisée pour la partie fluide. Cette formulation n'a été obtenue que dans le cas d'un régime harmonique (dépendance en  $\exp(i\omega t)$ ), excluant le cas statique. Elle permet de n'utiliser que quatre degrés de liberté en chaque point au lieu des six degrés de liberté précédemment utilisés dans les modèles en déplacement–déplacement.

Les équations de la dynamique s'écrivent avec ce choix de variable (voir [28] pour plus de détails) :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s + \tilde{\rho} \omega^2 \mathbf{u}^s + \tilde{\gamma} \nabla p &= 0 \\ \nabla^2 p + \frac{\tilde{\rho}_{22} \omega^2}{\tilde{R}} p - \frac{\tilde{\rho}_{22} \tilde{\gamma} \omega^2}{\phi^2} \nabla \cdot \mathbf{u}^s &= 0.\end{aligned}\quad (1.50)$$

Les équations de la dynamique peuvent aussi être réécrites en faisant apparaître les paramètres du fluide équivalent avec squelette immobile  $\tilde{K}_{\text{eq}}$  et  $\tilde{\rho}_{\text{eq}}$  :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s + \tilde{\rho} \omega^2 \mathbf{u}^s + \tilde{\gamma} \nabla p &= 0 \\ \frac{1}{\tilde{\rho}_{\text{eq}} \omega^2} \nabla^2 p + \frac{1}{\tilde{K}_{\text{eq}}} p - \tilde{\gamma} \nabla \cdot \mathbf{u}^s &= 0.\end{aligned}\quad (1.51)$$

Deux formulations variationnelles ont été proposées par Atalla *et al.* ([28, 29]). La pre-

mière s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \text{Trouver } \mathbf{u}^s \in C^s \text{ et } p \in C^p \text{ tels que pour tous } \delta \mathbf{u}^s \in C^{s*} \text{ et } \delta p \in C^{p*}, \\
& \int_{\Omega} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^s) - \omega^2 \tilde{\rho} \mathbf{u}^s \cdot \delta \mathbf{u}^s - \tilde{\gamma} \nabla p \cdot \delta \mathbf{u}^s \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^s d\Gamma, \\
& \int_{\Omega} \left( \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22} \omega^2} \nabla p \cdot \nabla \delta p - \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p \delta p - \tilde{\gamma} \nabla \delta p \cdot \mathbf{u}^s \right) d\Omega = - \int_{\Gamma} \left( \tilde{\gamma} \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n} - \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22} \omega^2} \nabla p \cdot \mathbf{n} \right) \delta p d\Gamma.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

La seconde formulation permet de construire rapidement les matrices éléments finis pour une structure composite. En effet, avec cette formulation, le couplage entre poreux et poreux et entre poreux et solide est naturel. Cela signifie qu'il n'y a pas de matrices de couplage entre les deux matériaux, mais seulement des conditions de Dirichlet. Le couplage entre un milieu poreux et un milieu acoustique se fait par l'introduction de matrices de couplage classiquement utilisées en interactions fluide–structure.

$$\begin{aligned}
& \text{Trouver } \mathbf{u}^s \in C^s \text{ et } p \in C^p \text{ tels que pour tous } \delta \mathbf{u}^s \in C^{s*} \text{ et } \delta p \in C^{p*}, \\
& \int_{\Omega} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^s) - \omega^2 \tilde{\rho} \mathbf{u}^s \cdot \delta \mathbf{u}^s \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \phi \left( 1 + \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \nabla p \cdot \delta \mathbf{u}^s + \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) p \nabla \cdot \delta \mathbf{u}^s \right] d\Omega = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^s d\Gamma, \\
& \int_{\Omega} \left( \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22} \omega^2} \nabla p \cdot \nabla \delta p - \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p \delta p \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \phi \left( 1 + \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \nabla \delta p \cdot \mathbf{u}^s + \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \delta p \nabla \cdot \mathbf{u}^s \right] d\Omega = \int_{\Gamma} \phi (\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s) \cdot \mathbf{n} \delta p d\Gamma.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

#### 1.2.4.7 Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'exerçant sur un milieu poreux sont décrites par la suite. Il est important de garder à l'esprit que ces conditions limites s'appliquent sur le milieu équivalent au matériau réel, par conséquent la question de la prise en compte de phénomènes microscopiques à l'interface est difficile à résoudre dans ce formalisme. En effet, les paramètres du matériau équivalent sont identifiés en fonction de conditions expérimentales, donc des taux de compression appliqués. Deux matériaux *a priori* identiques, selon la façon dont ils sont fixés sur les parois, sont donc susceptibles d'avoir des paramètres équivalents très différents.

**Interface poreux/poreux** Les conditions aux limites entre deux milieux poroélastiques sont la continuité des effort normaux totaux, du déplacement total normal et de la pression. On peut ajouter la continuité du déplacement de la phase solide suivant la condition de collage entre les deux couches. On note par les indices 1 et 2 les deux milieux et  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$  respectivement la normale et la tangente à l'interface. Ces conditions s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_1^t \cdot \mathbf{n} &= \boldsymbol{\sigma}_2^t \cdot \mathbf{n} \\
\mathbf{u}_1^t \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{u}_2^t \cdot \mathbf{n} \\
\mathbf{u}_1^s &= \mathbf{u}_2^s (\text{collage}) \\
p_1 &= p_2.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

En utilisant l'expression (1.25) reliant la contrainte totale, la contrainte *in vacuo* et la pression, il apparaît que les contraintes exercées sur le solide *in vacuo* ne sont en général pas continues :

$$\left( \hat{\sigma}_1^s - \phi_1 \left( 1 + \frac{\tilde{Q}_1}{\tilde{R}_1} \right) \right) \cdot \mathbf{n} = \left( \hat{\sigma}_2^s - \phi_2 \left( 1 + \frac{\tilde{Q}_2}{\tilde{R}_2} \right) \right) \cdot \mathbf{n}. \quad (1.55)$$

Cependant, dans l'hypothèse du modèle de Johnson–Champoux–Allard, le terme  $\phi \left( 1 + \tilde{Q}/\tilde{R} \right)$  est égal à 1, résultant dans la continuité des contraintes *in vacuo* :

$$\hat{\sigma}_1^s = \hat{\sigma}_2^s. \quad (1.56)$$

D'autre part, à l'exception du cas où les porosités sont constantes, les contraintes exercées dans la phase solide et dans la phase fluide  $\sigma^s$  et  $\sigma^f$  sont discontinues.

Enfin, trois types d'interface peuvent être réalisés dans la pratique : condition collée, glissante ou libre (espace d'air). Dans le troisième cas, une couche d'air de faible épaisseur (de l'ordre du millimètre) doit être prise en compte. Les deux autres conditions s'expriment sur le déplacement solide :

$$\begin{aligned} \text{Collage parfait : } & \mathbf{u}_1^s = \mathbf{u}_2^s \\ \text{Interface glissante : } & \mathbf{u}_1^s \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_2^s \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

**Interface poroélastique/solide** Les conditions aux limites entre un milieu poroélastique P et une structure solide S sont :

$$\begin{aligned} & \sigma_p^t \cdot \mathbf{n} = \sigma_s \cdot \mathbf{n} \\ \text{Collage parfait : } & \mathbf{u}_p^s = \mathbf{u}_s \text{ et } \mathbf{u}_p^f \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} \\ \text{Liaison glissante : } & \mathbf{u}_p^s \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} \text{ et } \mathbf{u}_p^f \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

**Interface poroélastique/acoustique** Les conditions aux limites entre un milieu poroélastique P et un fluide acoustique (air) A s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_p^t \cdot \mathbf{n} + p_A \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ et } \hat{\sigma}_p^s \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \mathbf{u}_p^t \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (1.59)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à l'interface.

#### 1.2.4.8 Modèle de Biot–Allard et lien avec fluides équivalents

Le modèle de Biot–Allard est parfaitement compatible avec les modèles de fluide équivalent. Deux modèles sont généralement utilisés.

Le premier considère que l'excitation acoustique ne met pas en mouvement le squelette (modèle dit « rigide », ou à squelette immobile). Il suffit d'utiliser la relation  $\mathbf{u}^s = \mathbf{0}$  dans les modèles précédents pour obtenir l'équation du fluide équivalent. Le champ de déplacement du fluide équivalent est alors égal au champ de déplacement total :

$$\mathbf{u}_{\text{eq}} = \mathbf{u}^t = \phi \mathbf{u}^f + (1 - \phi) \mathbf{u}^s = \phi \mathbf{u}^f \quad (1.60)$$

tandis que le champ de pression est le même  $p_{\text{eq}} = p$ . La formulation  $(\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^l)$  permet alors de retrouver directement la relation liant la pression et la divergence du champ de déplacement ainsi que l'équation d'Euler vérifiée par le fluide :

$$\begin{aligned} p &= -\tilde{K}_{\text{eq}} \nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{eq}} \\ -\nabla p &= -\omega^2 \tilde{\rho}_{\text{eq}} \mathbf{u}_{\text{eq}}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Ces relations peuvent aussi être obtenues à partir des autres formulations, puisque toutes ces formulations sont équivalentes dans le domaine fréquentiel.

Un autre modèle de fluide équivalent est parfois utilisé pour simuler la réponse acoustique de matériaux poreux très souples, la plupart du temps des matériaux fibreux. Ces matériaux ont la particularité d'avoir une rigidité très faible. On peut alors considérer que l'énergie de déformation associée à la phase solide est faible devant les énergies cinétiques des deux phases et devant l'énergie potentielle de la phase fluide. Ce modèle est appelé modèle souple (*limp*) [61, 62]. Ainsi le module de compressibilité du squelette *in vacuo* est pris égal à 0 :

$$\lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0. \quad (1.62)$$

Cela se traduit dans le modèle de Biot par l'hypothèse :

$$\nabla \cdot \hat{\sigma}^s = 0. \quad (1.63)$$

Cette hypothèse permet d'exprimer le déplacement de la phase solide en fonction du déplacement total :

$$\mathbf{u}^s = -\frac{\tilde{\gamma} \tilde{\rho}_{\text{eq}}}{\tilde{\rho}_s} \mathbf{u}^t. \quad (1.64)$$

Cela conduit à une masse volumique équivalente et un module de compressibilité équivalent égaux à :

$$\begin{aligned} \rho_{\text{limp}} &= \frac{1}{\frac{1}{\tilde{\rho}} + \frac{\tilde{\gamma}^2}{\tilde{\rho}_{\text{eq}}}} \\ \tilde{K}_{\text{limp}} &= \tilde{K}_{\text{eq}} \end{aligned} \quad (1.65)$$

où l'indice eq désigne les paramètres du fluide équivalent à squelette rigide. Ce modèle permet d'inclure l'énergie cinétique de la phase solide. Ce modèle est donc adapté pour des couches poroélastiques en matériau fibreux et placées sur des parties mobiles.

Le modèle de fluide équivalent ne fait intervenir qu'une onde de compression, comme si le fluide était purement irrotationnel. Au contraire, la prise en compte du squelette crée l'existence d'une onde de cisaillement qui peut se propager à la fois dans la phase solide et dans la phase fluide. En réalité, cette onde ne se propage que si le squelette est excité, ce qui signifie que pour un matériau très rigide, celle-ci a une amplitude nulle. Ensuite si le matériau est très souple (matériau fibreux), l'onde de cisaillement a une longueur d'onde très faible, tendant vers 0 dans l'approximation du modèle souple. Même si elle est excitée, cette onde ne peut donc pas avoir d'influence sur la réponse du matériau à l'échelle macroscopique. Le modèle de fluide équivalent est donc cohérent dans ces deux cas.

### 1.2.4.9 Critères pour les fluides équivalents

Afin de déterminer si un matériau poroélastique peut être ou non modélisé par un modèle de fluide équivalent, plusieurs critères peuvent être utilisés.

Le premier critère a été proposé par Zwikker et Kosten [4]. La fréquence de Zwikker et Kosten définit la limite basses fréquences au delà de laquelle le fluide ne transmet pas d'énergie au solide. Cette fréquence vaut :

$$f_{ZK} = \frac{\sigma\phi^2}{2\pi\rho_s}. \quad (1.66)$$

Cette fréquence est de l'ordre de quelques centaines de Hz pour la plupart des matériaux usuellement utilisés en vibroacoustique. Au-delà de cette fréquence, il y a donc découplage partiel.

Le modèle de fluide rigide peut être en général utilisé quand seules des excitations acoustiques sont appliquées sur la couche poroélastique. La validité de ce modèle est d'autant plus grande que le module d'Young du squelette est grand. D'autre part, le modèle de fluide équivalent dit rigide signifie que le squelette est immobile. Ainsi, le déplacement de la phase fluide ne permet pas de mettre en mouvement la phase solide. Cela a typiquement été observé pour des matériaux possédant une résistivité inférieure à  $10000 \text{ N.m.s}^{-4}$ .

Pour déterminer si le modèle souple est meilleur, on utilise le critère appelé *Frame Stiffness Influence* (FSI) [61]. Ce critère est basé sur le rapport entre les longueurs d'ondes de l'onde fluide et celui de l'onde de compression du solide :

$$\text{FSI} = \frac{k_{\text{limp}}^2}{k_c^2} = \frac{\rho_{\text{limp}}}{\rho_c \tilde{K}_f} \quad (1.67)$$

où  $k_c = \omega \sqrt{\tilde{\rho}_c / \hat{P}}$  est le nombre d'onde de compression se propageant dans le matériau ayant le module de compressibilité du squelette *in vacuo*  $\hat{P} = \lambda + 2\mu$  et la masse volumique du squelette saturé d'air  $\tilde{\rho}_c = \rho_s + \phi\rho_0 - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\phi}$ .

Typiquement, quand le FSI est inférieur à 0.5 le matériau peut être considéré comme vérifiant le modèle limp.

## 1.2.5 Conclusion

Différents degrés de modélisation sont donc possibles afin de prendre en compte la complexité des échanges au sein d'un milieu poroélastique. Le modèle le plus simple, mais le plus difficile à interpréter physiquement, est le modèle d'impédance. À l'autre extrémité, le modèle de Biot–Allard permet de prendre en compte tous les échanges énergétiques ainsi que la dépendance fréquentielle des paramètres. Ce modèle, tridimensionnel, implique des coûts de calcul importants, limitant, en l'état des moyens actuels, son application à des géométries de faibles dimensions et des configurations simples.

La notion d'onde se propageant dans un milieu poroélastique a été introduite. Elle sera au cœur des développements dans ce manuscrit.

### 1.3 Méthodes de résolution

Dans cette section on présente brièvement les différentes méthodes numériques utilisées pour résoudre le problème en utilisant les modèles précédents. En raison de la complexité des matériaux poreux, les approches purement analytiques sont difficiles à mettre en œuvre. Des solutions exactes de champs rayonnés par des fluides équivalents peuvent toutefois être calculées (voir [16] par exemple).

Les approches couramment utilisées sont donc des approches semi-analytiques (méthode des matrices de transfert – TMM) et des méthodes purement numériques. Parmi celles-ci, malgré le développement récent de techniques sans maillage (PUFEM [63]), la méthode des éléments finis (FEM) [19] reste actuellement la référence à la fois dans le monde universitaire et pour l'industrie.

#### 1.3.1 Méthode TMM (Transfer Matrix Method)

La méthode des matrices de transfert est une méthode semi-analytique très connue dans la communauté scientifique et industrielle traitant de problèmes de vibroacoustique. Elle a été initiée par Thomson [17] et Haskell [64] puis développée dans de nombreux domaines de la physique. En particulier, une application intéressante de la technique réside dans son utilisation pour calculer les paramètres acoustiques de structures multicouches, incluant en particulier des matériaux poroélastiques [18, 16].

On considère une géométrie plane de largeur infinie, d'épaisseur arbitraire, dans un cadre bidimensionnel.

Dans chaque couche, la TMM considère le vecteur d'état, constitué des déplacements et des contraintes. Ce vecteur dépend de la position dans l'épaisseur. À partir de la projection sur les ondes volumiques dans la couche, il est possible de calculer la matrice de transfert permettant de relier les vecteurs d'état aux deux extrémités de chaque couche. Ensuite, la prise en compte des conditions aux limites aux interfaces entre les différentes couches et aux interfaces extérieures permet d'exprimer un système linéaire dont les inconnues sont les vecteurs d'état dans chaque couche. À partir de ce système peuvent être calculés les coefficients caractérisant la réponse acoustique du multicouche, comme son impédance de surface, ou son coefficient de transmission. Pour être valide, cette méthode doit s'appliquer à un milieu plan de largeur infinie. Elle sera rappelée plus en détail dans le chapitre 4.

Cette approche est utilisée pour dimensionner des interfaces dissipatives vis-à-vis de leurs coefficients acoustiques. La valeur de l'impédance peut être utilisée dans un code FEM pour simuler l'influence de l'interface dissipative sans ajouter d'inconnues, le coefficient d'absorption peut être utilisé dans des codes de tir de rayons ou des approches hautes fréquences comme la Statistical Energy Analysis.

Un défaut de la méthode est son instabilité. Pour des couches de grandes dimensions par rapport aux longueurs d'ondes, les matrices de transfert ont des mauvais conditionnements. En effet, leurs valeurs propres sont reliées à la longueur de la couche  $L$  et aux nombres d'onde  $k$  par :

$$\lambda = \exp(-ikL). \quad (1.68)$$

Pour des ondes dissipatives, le nombre d'onde est complexe, donc le module de la valeur propre croît ou décroît exponentiellement suivant la direction de propagation de l'onde :

$$|\lambda| = \exp(\text{Im}(k)L) \quad (1.69)$$

où  $\text{Im}(k) < 0$  pour des ondes incidentes et  $\text{Im}(k) > 0$  pour des ondes réfléchies. Ainsi, les erreurs numériques sont démultipliées par l'existence des ondes réfléchies. Pour résoudre ce problème, plusieurs formulations stables ont été proposées [65, 66]. En particulier, Dazel *et al.* [66] ont montré que l'instabilité inhérente à la méthode pouvait être supprimée car le vecteur d'état contient de l'information non nécessaire. Ainsi, il est possible, en utilisant la notion de « vecteur Information », qui est un vecteur de taille réduite à partir duquel le vecteur d'état peut être calculé, de développer une formulation n'impliquant que des exponentielles décroissantes. La formulation est alors stable.

### 1.3.2 Méthode WBM (Wave Based Method)

La méthode WBM a été initiée par W. Desmet [67] et a conduit à de nombreux développements pour la modélisation de cavités acoustiques, de matériaux élastiques ou poroélastiques. Cette approche de Trefftz consiste à exprimer le champ des inconnues sur chaque élément du domaine par une somme d'ondes volumiques, vérifiant exactement l'équation de propagation. Les conditions aux limites sont ensuite appliquées sous forme faible en construisant la formulation variationnelle associée au problème.

Il a été montré [68] que cette méthode converge dans le cadre de géométries convexes, avec une convergence plus rapide que celle des éléments finis. Cette convergence rapide s'explique par l'utilisation de fonctions de forme physiquement admissibles pour chaque élément. Des travaux ont été menés pour modéliser des géométries plus complexes, en utilisant notamment des techniques de sous-structuration [69, 70].

Dans le cas d'un problème vibroacoustique industriel, cette méthode est limitée par les géométries complexes qu'on peut trouver. Afin de combiner les performances de la WBM avec la généralité des éléments finis, des approches couplées FEM–WBM sont développées [71, 72]. Ces approches permettent de réduire fortement le coût numérique associé au domaine acoustique, donc de condenser la complexité du problème sur les interfaces dissipatives.

### 1.3.3 Éléments finis et méthodes de réduction

Si la méthode des éléments finis est très générale et versatile, son défaut principal est le temps de calcul. En effet, le problème avec interface dissipative est de très grande taille et est seulement valide dans le domaine fréquentiel. Des approches modales standard ne peuvent pas être utilisées car les paramètres dépendent de la fréquence, donc le problème aux valeurs propres obtenu est non-linéaire en fréquence. Dans cette partie, on se limite à une présentation succincte de deux approches, la réduction par approximants de Padé et par superposition modale pour un matériau poroélastique.

### Réduction du nombre de degrés de liberté par approche modale

La méthode de synthèse modale (Component Mode Synthesis – CMS) est une méthode courante habituellement utilisée en dynamique des structures ou en acoustique qui consiste à utiliser comme inconnues les amplitudes des modes stationnaires de la structure à la place des inconnues nodales. Le succès des approches modales s’explique par le fait que cette technique permet à la fois une réduction très importante du nombre d’inconnues, mais aussi que ce type de réduction s’interprète très facilement en considérant les modes propres comme des déformées caractéristiques du système. La difficulté à appliquer cette technique aux domaines poroélastiques vient du caractère complexe et dépendant de la fréquence des matrices.

Dazel [73, 74] a utilisé une technique de modes complexes pour résoudre le problème. Cependant les réductions importants coûts de calcul qui sont générés ne rendent pas l’approche très intéressante du point de vue du temps de calcul.

Au contraire, des approches de types modes réels ont été développées par Rumpler et al. [75] pour la formulation déplacement–déplacement et par Dazel [76, 77] pour les formulations déplacement–déplacement et déplacement–pression. Les matrices sont exprimées comme combinaison linéaire de matrices indépendantes de la fréquence, utilisées pour calculer une base modale. Ces approches permettent dans le cas de géométries simples d’obtenir de grands facteurs de réduction du coût de calcul, cependant dans le cas de géométries complexes le nombre minimal de modes à considérer reste très grand, limitant l’intérêt de l’approche aux domaines des basses fréquences.

La difficulté dans les approches modales est de tenir compte du couplage entre les deux phases. Ainsi, Sgard *et al.* [78, 79] ont projeté la réponse dynamique du matériau poreux sur les modes découplés (Decoupled Modal Analysis) de chaque phase. Cela conduit à des erreurs quand le couplage entre les deux phases a une grande importance sur la dynamique.

### Réduction du nombre de fréquences de résolution par interpolation

Une seconde méthode de réduction des coûts de calcul consiste à interpoler le résultat à une fréquence arbitraire à partir des résultats calculés en un nombre réduit de fréquences. Cette approche est donc intéressante pour des problèmes dont les paramètres sont fonction de la fréquence. La difficulté de l’approche est liée aux fonctions d’interpolation et au choix des fréquences de calcul. Afin de représenter correctement les résonances et les antirésonances, on utilise souvent l’interpolation basée par les fonctions de Padé, définies par une fraction rationnelle de deux polynômes. Cette méthode a été utilisée récemment dans le cas de matériaux poroélastiques par [80, 81, 56].

Cependant, avec cette approche il est toujours nécessaire de résoudre le problème éléments finis en un nombre donné de fréquences. D’autre part, on ne peut pas prédire l’erreur commise par le choix de l’ordre d’interpolation et de la fréquence de calcul. En particulier, pour une précision optimale, un algorithme adaptatif peut être utilisé pour choisir les fréquences de calcul. Cela peut conduire à un nombre important de fréquences centrales, réduisant l’intérêt de l’approche.

## 1.4 Méthodes de guide d'onde

Enfin, depuis plusieurs années émergent les techniques basées sur l'hypothèse de périodicité du milieu. Nous proposons de classer ces techniques selon leur caractère analytique ou au contraire numérique, bien que les développements soient parfois similaires.

### 1.4.1 Approches périodiques analytiques

Les approches périodiques pour la mécanique ont été formulées par Mead [82, 83, 84, 85]. Au lieu de considérer une formulation en raideur dynamique, reliant les efforts et les déplacements en tous points, ces méthodes considèrent une formulation en espace d'état, contenant en un point donné à la fois les efforts et les déplacements, afin de construire une relation donnant la variation du vecteur d'état en fonction de la position. Ces formulations mènent donc à des formulations dites « de transfert ». Ces approches trouvent leur justification mathématique dans les travaux de Floquet et dans le formalisme de Stroh.

Cette démarche, naturellement dédiée au cas de géométries unidirectionnelles, a été adoptée dans de nombreux travaux analytiques dans le domaine de la mécanique des solides, en particulier pour le contrôle non destructif, l'atténuation de vibration par utilisation de matériaux piézoélectriques utilisés en shunt ou switch. En ce qui concerne l'acoustique, cette méthode se retrouve dans la méthode des ondes forcées. Ces approches peuvent être développées de manière totalement analytique. C'est ce que Mead a appelé *Periodic Structure Theory* [82].

### 1.4.2 Méthode SAFE (Semi-Analytical Finite Elements)

La méthode SAFE permet de prédire les courbes de dispersion de structures composites à partir de matrices éléments finis. La formulation forte du problème est transformée par l'hypothèse de propagation d'ondes planes dans la direction de propagation. Cela permet d'exprimer un problème spectral à chaque fréquence dont la résolution donne les nombres d'ondes de la structure. Les premiers développements de cette méthode ont été menés par Dong *et al.*[86], puis par Shah *et al.*[87] qui a montré comment obtenir les modes évanescents. La technique a ensuite été appliquée dans de nombreux exemples, concernant la propagation unidirectionnelle dans des guides d'ondes à section complexe comme des rails [88], des guides d'ondes multicouches [89, 90], des panneaux raidis [91] et des guides d'ondes courbes [92]. Enfin, elle a été étendue pour permettre la prédiction des ondes progressives dans des plaques anisotropes en fonction de l'angle de propagation [93, 94]. Si l'utilisation des éléments finis permet de considérer toutes configurations de structures multicouches et toutes formes de section, la méthode nécessite le développement d'outils spécifiques afin de générer les matrices nécessaires à la méthode.

### 1.4.3 Méthode WFE (Wave Finite Element Method)

La méthode WFE est une méthode de transfert basée sur les équations de l'équilibre de la structure discrétisées par éléments finis. La démarche de la méthode est la suivante :

1. Modélisation éléments finis d'une sous-structure périodique ;

2. Construction de la matrice de transfert ;
3. Résolution d'un problème aux valeurs propres ;
4. Stockage des nombres d'ondes et vecteurs d'ondes ;
5. Post-traitement.

Cette méthode a été appliquée dans le cas de matériaux élastiques métalliques ou viscoélastiques, à section homogène ou périodique, dans le cas d'une propagation unidirectionnelle ou bidirectionnelle ([95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103]). Des applications stochastiques ont également été développées [104].

La force des approches périodiques est de permettre une interprétation physique des phénomènes vibratoires, ainsi que de pouvoir caractériser les paramètres macroscopiques équivalents permettant la propagation des mêmes ondes (homogénéisation périodique). D'autre part, l'utilisation de variables périodiques permet de réduire de façon importante le nombre d'inconnues du problème, et donc les coûts de calcul associés.

## 1.5 Remarques sur les différents types de modèles

Dans cette partie, on se propose de comparer les différents modèles de matériaux poroélastiques en termes de coût numérique, de validité, pour déterminer des cas de non-applicabilité. Ces comparaisons ont été faites pour des cas académiques pour lesquels une cavité acoustique rigide est recouverte partiellement par une couche d'un matériau poroélastique. Elle est excitée par un déplacement acoustique imposé sur un coin et constant pour toutes les fréquences.

### 1.5.1 Impédance ou modèle de Biot–Allard

On compare ici le niveau sonore dans une cavité acoustique rigide dont une des faces est recouverte d'une couche poroélastique, dans les cas où la couche poroélastique est modélisée par une impédance localisée ou par le modèle de Biot–Allard.

#### 1.5.1.1 Cas test : interface dissipative plane

On considère ici une cavité acoustique parallélépipédique de dimensions (40x60x70) cm<sup>3</sup>. Une couche de 5 cm d'épaisseur d'un matériau poroélastique (matériau A, voir annexe A) est insérée dans la cavité sur la face  $z = 0$  (voir figure 1.3). La cavité est excitée par une excitation acoustique en un de ses coins. On compare le niveau sonore prédit en utilisant le modèle de Biot–Allard avec celui obtenu avec le modèle d'impédance. On ne cherchera pas à généraliser les résultats, cet exemple est un cas particulier dans lequel les effets non localisés peuvent être vus.

La figure 1.4 présente le niveau de pression dans la cavité prédit par le modèle de Biot–Allard et celui obtenu avec le modèle d'impédance localisée, dont la valeur est prise à incidence normale ou à 55°.

Si une bonne superposition est obtenue sur toute la gamme de fréquences, la figure 1.4b montre que des différences peuvent parfois survenir à certaines fréquences. Aux fréquences

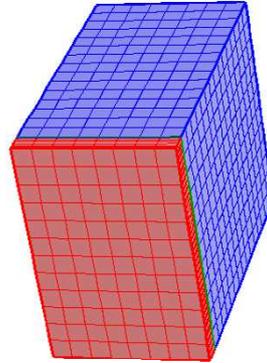


Figure 1.3 – Géométrie et maillage de la cavité acoustique. Rouge : domaine poroélastique ; bleu : domaine acoustique.

de résonance du système, le champ de pression acoustique est de type modal, et se couple avec les effets de bords, de telle façon que l'impédance normale n'est pas suffisante pour représenter parfaitement la dynamique de l'interface. Cependant, choisir l'impédance équivalente au champ diffus, obtenue à  $55^\circ$  permet d'obtenir une superposition quasi parfaite avec le modèle de Biot–Allard, bien que cette valeur ne puisse pas être justifiée physiquement.

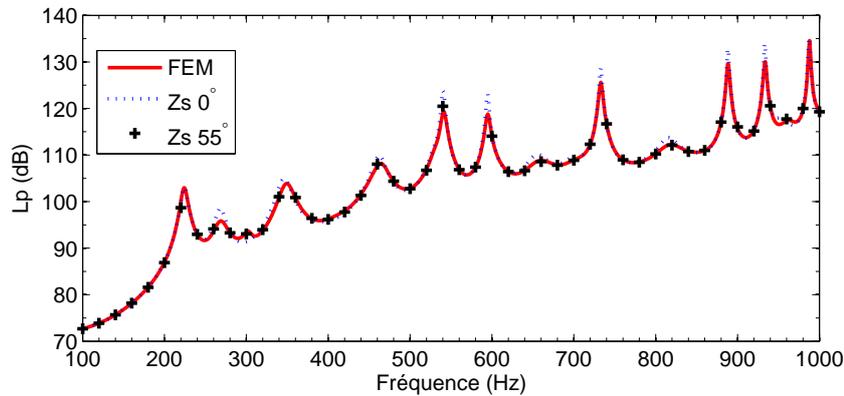
### 1.5.1.2 Cas d'une interface dissipative courbe

On considère cette fois la géométrie montrée dans la figure 1.5. La cavité acoustique possède un mur de forme cylindrique, sur laquelle est collée un échantillon de 5 cm d'épaisseur du matériau E. L'excitation est un déplacement source imposé dans un coin opposé à la face courbe.

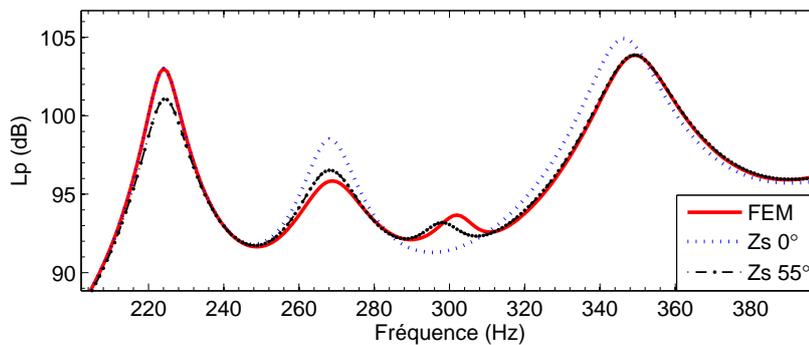
Il est possible de voir sur la figure 1.6 que dans le cas d'interfaces courbes, le modèle d'impédance ne permet plus de prédire l'influence de la couche poreuse. En effet, la géométrie fait intervenir des incidences très différentes suivant la position sur l'interface. Une autre interprétation de ces écarts provient de la méthode utilisée pour calculer la valeur de l'impédance. En effet, la valeur de l'impédance est prédite par la TMM, dans laquelle l'hypothèse d'ondes planes est faite. La géométrie fortement courbée considérée ici est donc incompatible avec cette hypothèse.

## 1.5.2 Fluide équivalent ou modèle de Biot–Allard

On compare ici dans la même configuration géométrique le niveau sonore dans une cavité acoustique cylindrique rigide dont une des faces est recouverte d'une couche po-



(a) Large bande de fréquences.



(b) Zoom sur les premières résonances.

Figure 1.4 – Niveau de pression avec modèle de Biot–Allard ou modèle d’impédance localisée.

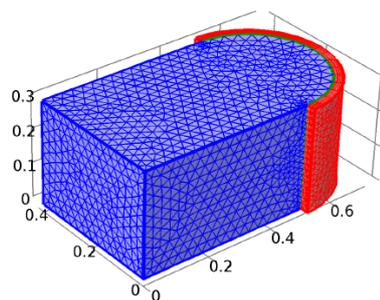


Figure 1.5 – Géométrie et maillage de la cavité acoustique. Rouge : domaine poroélastique ; bleu : domaine acoustique.

roélastique, dans les cas où la couche poroélastique est modélisée par un fluide équivalent (rigide ou limp) ou par le modèle de Biot Allard.

On observe sur la figure 1.7 que les deux modèles de fluide équivalent permettent de

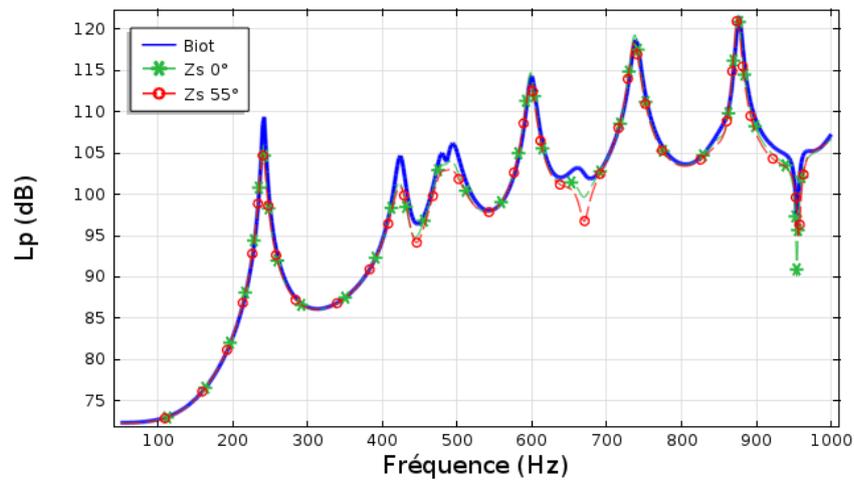


Figure 1.6 – Niveau de pression avec modèle de Biot–Allard ou modèle d’impédance localisée.

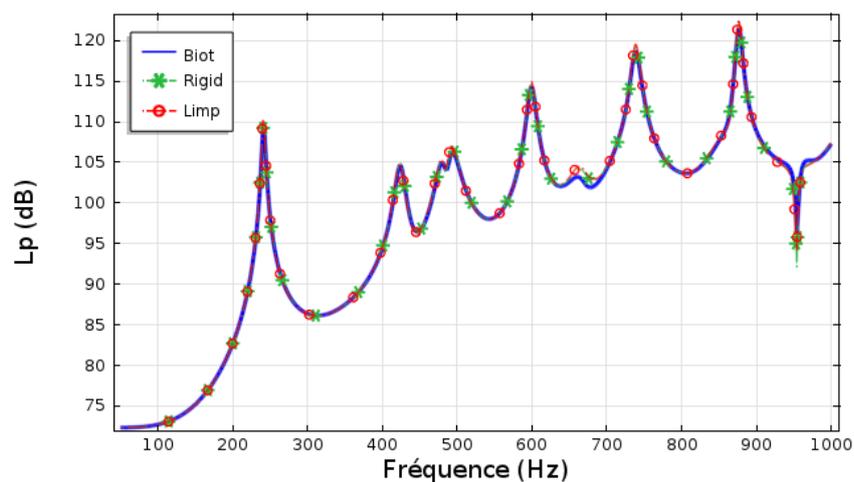


Figure 1.7 – Niveau de pression avec modèle de Biot–Allard ou modèle de fluide équivalent.

prédire correctement le niveau de pression dans la cavité acoustique. Le modèle de fluide équivalent à squelette immobile semble donc adapté à la modélisation du matériau.

On considère maintenant le cas d’un quart de cylindre (Fig. 1.8) dont les deux sections extrémales sont rigides. Une source ponctuelle est placée au centre du cylindre. L’épaisseur du matériau poreux vaut 3 cm, le rayon intérieur du cylindre est de 20 cm, sa longueur mesure 50 cm.

Deux matériaux différents sont testés : matériau B et matériau C (voir annexe A).

Les courbes de dispersion et le niveau sonore dans la cavité acoustique dans le cas du matériau B sont données en figure 1.9a. Le modèle de fluide équivalent à squelette immobile permet de retrouver la courbe de dispersion de l’onde lente de Biot–Allard. La

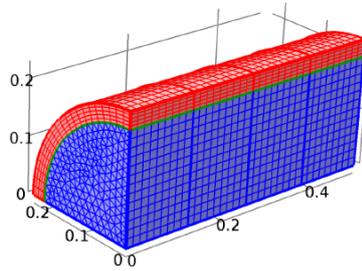


Figure 1.8 – Géométrie et maillage de la cavité acoustique. Rouge : domaine poroélastique ; bleu : domaine acoustique.

dynamique du milieu est capturée par le modèle simplifié, le niveau sonore prédit avec le modèle de fluide équivalent est donc superposé à celui obtenu avec le modèle de Biot–Allard (figure 1.9b).

Au contraire, dans le cas du matériau C, ni le modèle « rigide » ni le modèle « limp » ne permettent d’approcher correctement l’onde lente de Biot–Allard (figure 1.10a). Cela signifie que la dynamique du milieu fait intervenir un couplage fort entre la phase solide et la phase fluide. Le modèle de fluide équivalent ne permet donc pas de prédire correctement le niveau sonore dans la cavité (figure 1.10b). Le modèle de Biot–Allard est alors nécessaire.

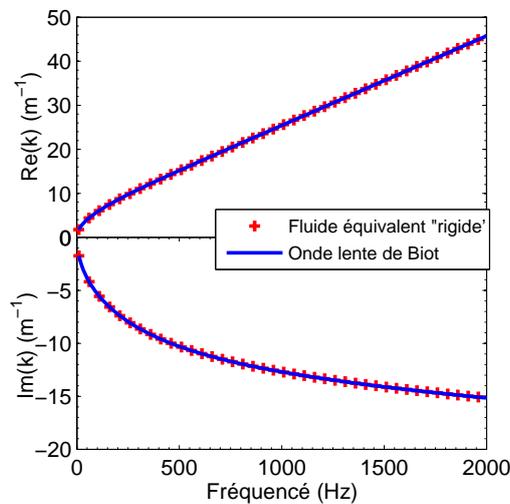
### 1.5.3 Conclusion

Les modèles simplifiés comme le modèle d’impédance et le modèle de fluide équivalent donnent de très bons résultats en général, mais il est possible de trouver des cas pour lesquels ces modèles mènent à des erreurs importantes. En particulier, la validité du modèle de fluide équivalent dépend du matériau, tandis que celle du modèle d’impédance dépend de la configuration géométrique du système (taille, position de la source et courbures notamment). Le modèle de fluide équivalent ne permet pas de prendre en compte des excitations ou des conditions aux limites structurales, tandis que la valeur de l’impédance, obtenue pour une incidence particulière, ne permet pas forcément de représenter la réponse réelle du matériau soumis à des incidences multiples et ne permet pas de prendre en compte les effets des conditions aux limites sur le comportement de l’interface dissipative.

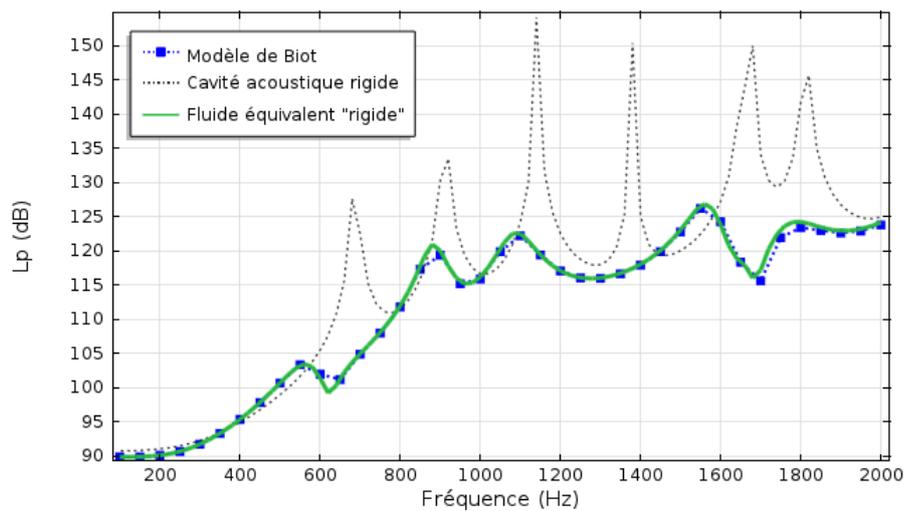
## 1.6 Conclusion du chapitre

Afin de prédire la réponse de panneaux insonorisants à base de matériaux poroélastiques, plusieurs modèles peuvent être employés. Les modèles simplifiés, fluide équivalent et impédance localisée, mènent en général à une faible erreur, mais peuvent parfois conduire à des écarts importants avec le modèle de Biot–Allard.

En raison des très courtes longueurs d’ondes se propageant dans le matériau, la méthode des éléments finis appliquée à un modèle tridimensionnel de poroélastique avec la théorie de Biot–Allard conduit à des temps de calcul prohibitifs. Des approches « wave-based » permettent de s’affranchir du problème lié à une discrétisation plus fine dans les



(a) Courbes de dispersion.



(b) Niveau de pression.

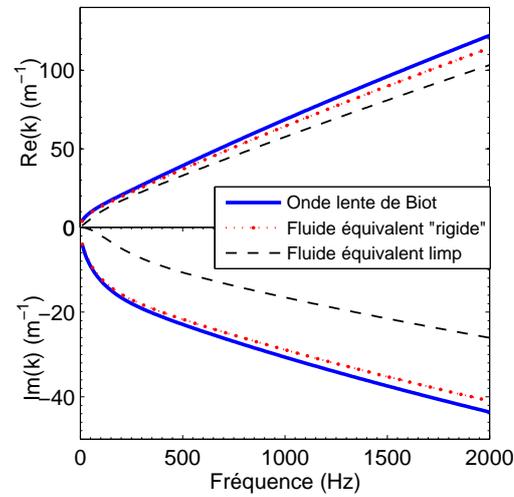
Figure 1.9 – Différence entre modèle de Biot–Allard et fluide équivalent, matériau B.

hautes fréquences, elles semblent donc pertinentes pour traiter le problème. Elles restent toutefois limitées à des géométries simples.

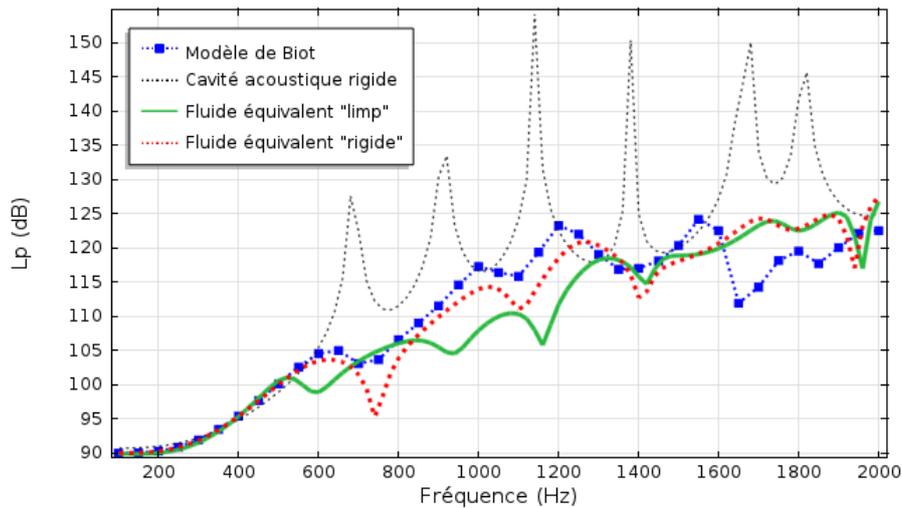
On remarquera que la méthode des matrices de transfert est une méthode ondulatoire, on s'intéressera par la suite à étendre ce type d'approche pour prendre en compte les conditions aux limites latérales.

D'autre part, le tracé des courbes de dispersion semble fournir une indication pertinente sur la validité du modèle de fluide équivalent, on verra que cette approche permet de valider ou d'invalider des modèles de solide équivalent ou de plaque équivalente.

Le regard «  $k$ -space » consiste en l'observation et l'analyse des ondes se propageant



(a) Courbes de dispersion.



(b) Niveau de pression.

Figure 1.10 – Différence entre modèle de Biot–Allard et fluide équivalent, matériau C.

dans la structure. Ce type d'approche semble donc adapté au problème, à la fois pour identifier les mécanismes principaux de transmission d'énergie, pour établir des réductions pertinentes de la physique ainsi que pour développer des modèles réduits permettant de diminuer les coûts de résolution du problème.

# Application de la WFE aux matériaux poroélastiques

---

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>37</b>
<b>2.2</b>	<b>Méthode WFE</b>	<b>38</b>
2.2.1	Propagation unidirectionnelle	38
2.2.2	Propagation bidirectionnelle	40
2.2.3	Sources d'erreurs	44
2.2.4	Post-traitement	45
2.2.5	Conclusion	47
<b>2.3</b>	<b>Validation de la WFE dans le cas de conditions aux limites latérales infinies</b>	<b>48</b>
2.3.1	Cas de la formulation déplacement-déplacement total UUt	49
2.3.2	Cas des formulations déplacement-pression UP-a et UP-b	52
2.3.3	Conclusion	56
<b>2.4</b>	<b>Propagation d'ondes dans un milieu poreux d'épaisseur finie par la méthode WFE2D</b>	<b>56</b>
2.4.1	Formulation UUt	58
2.4.2	Formulation UP-a	61
2.4.3	Formulation UP-b	62
2.4.4	Conclusion	64
2.4.5	Paramètres numériques	64
2.4.6	Conclusion	66
<b>2.5</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>66</b>

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons en détail la méthode WFE, afin de valider son application aux matériaux poroélastiques. Bien que la méthode soit décrite dans de nombreuses références pour des matériaux élastiques, certains aspects importants doivent être précisés quand cette méthode est appliquée à des matériaux poroélastiques. Il nous semble donc nécessaire de reprendre les différents points clés de la méthode. En particulier, nous répondrons à la question de l'influence du choix des variables, de la prise en compte des conditions aux limites, ainsi que de l'influence des paramètres numériques sur l'erreur commise par la méthode.

## 2.2 Méthode WFE

La méthode WFE est une méthode de transfert basée sur l'utilisation de l'équilibre d'une sous-structure périodique, discrétisé par éléments finis. Elle est présentée ici dans ses versions unidirectionnelle et bidirectionnelle.

### 2.2.1 Propagation unidirectionnelle

La méthode WFE peut être appliquée à un guide d'onde unidirectionnel de longueur  $L_z$ . Le plan de la section est parallèle au plan  $(O, x, y)$  et la direction de propagation est  $z$ .

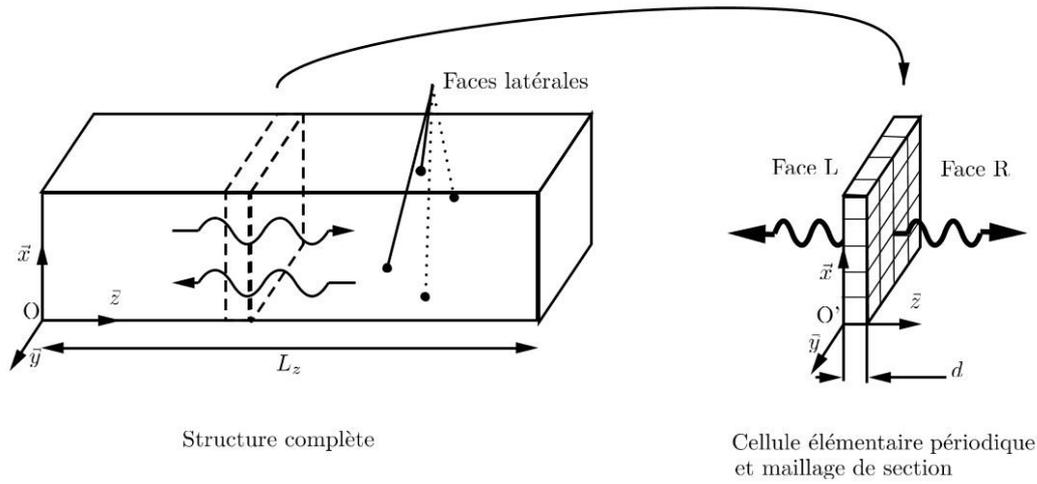


Figure 2.1 – Schéma WFE1D

Une sous-structure de dimension  $d$  dans l'épaisseur est modélisée par éléments finis. Le système matriciel provenant de la discrétisation des équations de l'équilibre est :

$$\mathbf{D}(\omega)\mathbf{q}(\omega) = \mathbf{F}(\omega). \quad (2.1)$$

En notant respectivement L et R les faces gauche ( $z = 0$ ) et droite ( $z = d$ ), les équations de la dynamique discrétisées sont alors réorganisées sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix}(\omega) \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{pmatrix}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_L \\ \mathbf{F}_R \end{pmatrix}(\omega). \quad (2.2)$$

Cette formulation de type raideur dynamique peut être mise sous la forme d'une équation de transfert :

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L \\ -\mathbf{F}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_R \\ \mathbf{F}_R \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

avec :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{LR}^{-1}\mathbf{D}_{LL} & -\mathbf{D}_{LR}^{-1} \\ \mathbf{D}_{RL} - \mathbf{D}_{RR}\mathbf{D}_{LR}^{-1}\mathbf{D}_{LL} & -\mathbf{D}_{RR}\mathbf{D}_{LR}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Ces équations font intervenir les vecteurs d'état éléments finis, contenant les degrés de liberté nodaux  $\mathbf{q}$  ainsi que les efforts nodaux  $\mathbf{F}$  en chaque section L et R.

Le vecteur d'état étant continu entre toutes les couches du même matériau, la matrice de transfert globale sur l'épaisseur totale  $L_z$  du matériau s'écrit en fonction du nombre de cellules élémentaires  $N = L_z/d$  présentes dans la structure complète :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}_{|z=L_z} &= \mathbf{T}^N \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ -\mathbf{F} \end{pmatrix}_{|z=0} \\ &= \mathbf{\Phi} \mathbf{\Lambda}^N \mathbf{\Phi}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ -\mathbf{F} \end{pmatrix}_{|z=0}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{\Phi}$  est la matrice des vecteurs propres de la matrice de transfert  $\mathbf{T}$  et où  $\mathbf{\Lambda}$  est la matrice diagonale des valeurs propres.

Du fait de la discrétisation éléments finis, les déformées propres prennent en compte les conditions aux limites latérales de Dirichlet ou de Neumann exprimées sous forme faible dans la formulation variationnelle ou sous forme forte pas l'introduction de matrices booléennes. Les courbes de dispersion mettent aussi en évidence l'existence de ces conditions aux limites.

Appliquer cette méthode de transfert numérique directement est possible, dans le cas où très peu de degrés de liberté sont utilisés dans la section, mais plusieurs difficultés doivent être considérées :

1. Les vecteurs d'état ne sont pas toujours continus aux interfaces entre différents matériaux . La matrice de transfert ne peut donc pas être obtenue par la simple multiplication des matrices de transfert des couches périodiques.
2. Le calcul de la matrice  $\mathbf{\Phi}^{-1}$  est très coûteux dans le cas d'un maillage très fin dans la section.
3. La matrice des constantes de propagation  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\exp(-ikL_z))$  fait intervenir des termes exponentiellement décroissants (ondes telles que  $\text{Im}(k) < 0$ ) et exponentiellement croissants (ondes telles que  $\text{Im}(k) > 0$ ). Ces derniers sont susceptibles d'amplifier les erreurs numériques jusqu'à des niveaux non négligeables.
4. Des erreurs numériques peuvent survenir pendant le calcul de l'inversion de la matrice  $D_{LR}$ . Pour éviter ce problème on se référera avec intérêt à [105], où les auteurs décrivent les problèmes aux valeurs propres permettant de calculer les modes de section. Entre autres, une forme mieux conditionnée est proposée :

$$\left( \mu \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_{LL} & -\mathbf{D}_{LR} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{D}_{RL} & -\mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Le vecteur propre obtenu par cette forme contient les déplacements à gauche  $\mathbf{q}_L$  et à droite  $\mathbf{q}_R$  :

$$\mathbf{\Psi} = [\mathbf{q}_L^T, \mathbf{q}_R^T]^T. \quad (2.7)$$

Le vecteur d'état associé à ce mode propre peut alors être obtenu en calculant :

$$\mathbf{\Phi} = [\mathbf{q}_L^T, -\mathbf{F}_L^T]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_{LL} & -\mathbf{D}_{LR} \end{bmatrix} \mathbf{\Psi}. \quad (2.8)$$

Une fois les modes propres connus, les déplacements et les efforts en chaque section peuvent être projetés sur l'ensemble des modes progressifs sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \pm \mathbf{F} \end{pmatrix} (z) = \begin{bmatrix} \Phi_q^+ & \Phi_q^- \\ \Phi_F^+ & \Phi_F^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^+ \\ \mathbf{Q}^- \end{pmatrix} (z), \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{Q}^\pm$  désigne le vecteur des amplitudes d'ondes et  $\pm$  désigne la direction de propagation des ondes ( $\pm \mathbf{z}$ ).

La réponse forcée par WFE1D d'une structure unidirectionnelle périodique est présentée dans le chapitre 3. Dans la suite de ce chapitre, nous rappelons la WFE en version bidirectionnelle, puis nous discutons les sources d'erreurs, ainsi que l'application de la méthode à des milieux poroélastiques.

### 2.2.2 Propagation bidirectionnelle

Une version bidirectionnelle de la WFE a été proposée par Akrouit [106], Manconi et Mace [107, 108], ainsi que Inquieté [109]. Cette méthode a été initialement développée pour prédire la propagation d'ondes dans des milieux plans dans un repère cartésien. Deux approches cylindriques ont ensuite été proposées dans [107, 109]. Cette approche a aussi été adaptée pour prédire les ondes se propageant dans une plaque courbée ou un cylindre [96, 110, 111, 112, 113]

Un matériau mono ou multicouche plan est ici considéré. Son épaisseur est notée  $L_z$ . On suppose que les ondes se propageant dans le matériau ont la forme d'ondes planes  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{x} + k_y \mathbf{y}$  dans le plan  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Chaque variable  $w(x, y, z, t)$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$w(x, y, z, t) = W(z) \exp \left[ i(\omega t - k_x x - k_y y) \right], \quad (2.10)$$

où  $W(z)$  est une fonction décrivant la forme du mode dans l'épaisseur. Le but de la WFE2D est de calculer à la fois les nombres d'ondes  $k_x, k_y$  des ondes propagatives à chaque fréquence et la réponse dans l'épaisseur  $W(z)$  associé à chacun des modes d'ondes.

Comme la WFE1D, la WFE2D utilise les résultats du théorème de Floquet et d'une analyse par éléments finis. L'hypothèse additionnelle est que le milieu est périodique dans les deux directions. Il est alors possible de modéliser une sous-structure périodique à section rectangulaire, dont on note les dimensions latérales  $L_x$  et  $L_y$  (figure 2.2). Le maillage consiste en un élément selon les direction  $x$  et  $y$ , et  $n_z$  éléments dans l'épaisseur. Typiquement sont utilisés des éléments linéaires cubiques à 8 noeuds (H8) ou des éléments quadratiques hexaédriques à 27 noeuds (H27). Nous appellerons faces latérales les faces en contact avec le milieu extérieur, c'est-à-dire les faces  $z = 0$  et  $z = L_z$ .

À une pulsation imposée  $\omega$  et après discrétisation par éléments finis, les équations d'équilibre de la sous-structure périodique sont données sous la forme suivante :

$$\mathbf{D}(\omega) \mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{D}$  est la matrice de rigidité dynamique résultant de la discrétisation par éléments finis de la forme variationnelle régissant le mouvement, et où  $\mathbf{F}$  est le vecteur des forces externes. Il est intéressant de remarquer que dans toute la suite, il n'y a pas d'hypothèses faites sur la

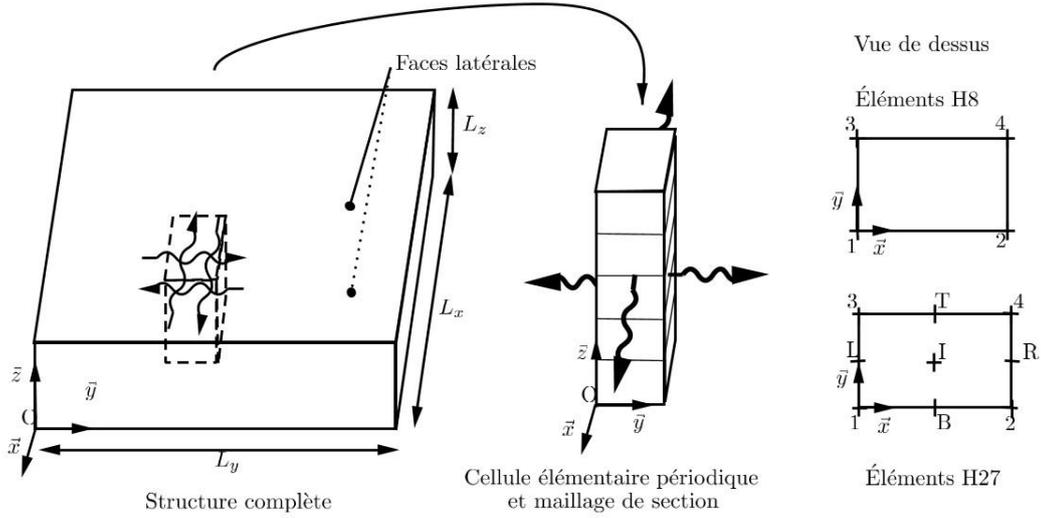


Figure 2.2 – Sous-structure utilisée pour la WFE2D

matrice  $\mathbf{D}$ . La méthode peut donc être utilisée aussi bien sur des panneaux élastiques que sur des panneaux viscoélastiques ou poroélastiques.

Si on utilise une colonne d'éléments linéaires H8 pour mailler la sous-structure périodique, on réorganise d'abord le vecteur des déplacements nodaux  $\mathbf{q}$  et le vecteur des forces nodales  $\mathbf{F}$  en isolant les degrés de liberté situés sur chaque ligne :

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T, \mathbf{q}_3^T, \mathbf{q}_4^T]^T, \text{ and } \mathbf{F} = [\mathbf{F}_1^T, \mathbf{F}_2^T, \mathbf{F}_3^T, \mathbf{F}_4^T]^T, \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{q}_j$  et  $\mathbf{F}_j$  pour  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  sont respectivement les vecteurs des degrés de liberté nodaux et le vecteur des forces nodales associées au noeud situé sur la ligne numéro  $j$  (voir Fig. 2.2).

Finalement, l'équilibre de la sous-structure peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{D}_{24} \\ \mathbf{D}_{31} & \mathbf{D}_{32} & \mathbf{D}_{33} & \mathbf{D}_{34} \\ \mathbf{D}_{41} & \mathbf{D}_{42} & \mathbf{D}_{43} & \mathbf{D}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Avec l'hypothèse d'ondes planes, la condition de périodicité s'écrit :

$$\mathbf{q}_2 = \lambda_x \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}_3 = \lambda_y \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}_4 = \lambda_x \lambda_y \mathbf{q}_1, \quad (2.14)$$

tandis que l'équilibre de la ligne 1 s'écrit :

$$\mathbf{F}_1 + \lambda_x^{-1} \mathbf{F}_2 + \lambda_y^{-1} \mathbf{F}_3 + \lambda_x^{-1} \lambda_y^{-1} \mathbf{F}_4 = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Les constantes de propagation dans les deux directions,  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$ , sont reliées aux nombres d'onde  $k_x$  et  $k_y$  par :

$$\lambda_x = \exp(-ik_x L_x) \quad \text{and} \quad \lambda_y = \exp(-ik_y L_y). \quad (2.16)$$

Remplacer Eq. (2.14) et Eq. (2.15) dans l'équation Eq. (2.13) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{22} + \mathbf{D}_{33} + \mathbf{D}_{44} + \lambda_x (\mathbf{D}_{12} + \mathbf{D}_{34}) + \lambda_y (\mathbf{D}_{13} + \mathbf{D}_{24}) + \right. \\ & \quad \lambda_x \lambda_y \mathbf{D}_{14} + \lambda_x^{-1} (\mathbf{D}_{21} + \mathbf{D}_{43}) + \lambda_y^{-1} (\mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{42}) + \\ & \quad \left. \lambda_x^{-1} \lambda_y^{-1} \mathbf{D}_{41} + \lambda_x^{-1} \lambda_y \mathbf{D}_{23} + \lambda_x \lambda_y^{-1} \mathbf{D}_{32} \right] \mathbf{q}_1 = \mathbf{0}. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Ce problème aux valeurs propres a trois inconnues : la pulsation  $\omega$  et les deux constantes de propagation  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$ . Ce problème peut être résolu numériquement en fixant 2 des 3 inconnues et en calculant la dernière.

En considérant tout d'abord que le chargement est imposé, les deux constantes de propagation sont imposées, et le problème Eq. (2.17) permet de calculer la pulsation. Dans le cas de matériaux dissipatifs, il n'est pas possible d'obtenir des valeurs purement réelles pour ces 3 variables. Fixer  $k_x$  et  $k_y$  réels résulte dans l'obtention d'une pulsation  $\omega$  complexe, signifiant que la dissipation porte sur la partie temporelle du signal. D'autre part, dans le cas de matériaux poroélastiques, les matrices de masse et de raideur dépendent de la fréquence, donc le problème à résoudre est un problème aux valeurs propres non-linéaire en fréquence.

Ici, on considère le régime harmonique, de sorte que la pulsation est imposée et réelle. Dans le cas de matériaux faiblement dissipatifs, on impose donc  $\omega$  et  $k_y$  réels, tandis qu'on calcule  $k_x$  complexe. La dissipation intervient donc seulement spatialement et dans la direction  $x$ . Une autre approche consiste à faire le changement de variable

$$k_x = k \cos \theta, \quad k_y = k \sin \theta. \quad (2.18)$$

Dans ce cas, les deux paramètres connus sont la pulsation  $\omega$  et la direction de la propagation  $\alpha$ . Ces deux paramètres sont réels, et permettent de calculer le nombre d'onde propagatif  $k$ , scalaire complexe dont la partie imaginaire traduit la dissipation spatiale de l'onde. Le problème aux valeurs propres Eq. (2.17) devient un problème aux valeurs propres transcendantal [108] :

$$\begin{aligned} & \left[ e^{-ik(L_x \cos \theta + L_y \sin \theta)} (\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{22} + \mathbf{D}_{33} + \mathbf{D}_{44}) + e^{-ik(2L_x \cos \theta + L_y \sin \theta)} (\mathbf{D}_{12} + \mathbf{D}_{34}) + \right. \\ & \quad e^{-ik(L_x \cos \theta + 2L_y \sin \theta)} (\mathbf{D}_{13} + \mathbf{D}_{24}) + e^{-ik(2L_x \cos \theta + 2L_y \sin \theta)} \mathbf{D}_{14} + e^{-ikL_y \sin \theta} (\mathbf{D}_{21} + \mathbf{D}_{43}) + \\ & \quad \left. e^{-ikL_x \cos \theta} (\mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{42}) + \mathbf{D}_{41} + e^{-ik2L_y \sin \theta} \mathbf{D}_{23} + e^{-ik2L_x \cos \theta} \mathbf{D}_{32} \right] \mathbf{q}_1 = \mathbf{0}. \quad (2.19) \end{aligned}$$

Ce problème non linéaire en  $k$  peut être résolu numériquement en utilisant des outils numériques adaptés, comme par exemple la fonction Matlab© *fsolve*. Cependant, des difficultés numériques apparaissent et des solutions robustes manquent. Une approche alternative a été utilisée dans la littérature traitant de la propagation bidirectionnelle des ondes dans des multicouches par l'approche SAFE (voir [94] par exemple). À un angle  $\theta$  imposé, la direction des ondes est unidirectionnelle. Il est possible de se placer dans le repère de la propagation des ondes  $(x_\theta, y_\theta)$ . Dans ce nouveau repère, la propagation se fait à  $\theta=0$ , c'est-à-dire  $\lambda_{x^\theta} = \exp(-ikL_x)$  et  $\lambda_{y^\theta} = 1$ . Le calcul de la matrice de rigidité dynamique  $\mathbf{D}^\theta$  se fait de façon classique en calculant les contraintes et les déformations dans la nouvelle base, c'est-à-dire en appliquant une matrice de rotation sur la matrice des constantes élastiques.

Finalement, à une fréquence donnée, à un angle donné, le problème aux valeurs propres est quadratique et peut être résolu par la fonction Matlab© *polyeig*.

$$\det(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \lambda_{x^\theta} + \mathbf{A}_2 \lambda_{x^\theta}^2) = 0. \quad (2.20)$$

Les matrices  $\mathbf{A}_k, k \in \{0, 1, 2\}$ , sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \mathbf{D}_{21}^\theta + \mathbf{D}_{43}^\theta + \mathbf{D}_{41}^\theta + \mathbf{D}_{23}^\theta, \\ \mathbf{A}_1 &= \mathbf{D}_{11}^\theta + \mathbf{D}_{22}^\theta + \mathbf{D}_{33}^\theta + \mathbf{D}_{44}^\theta + \mathbf{D}_{13}^\theta + \mathbf{D}_{24}^\theta + \mathbf{D}_{31}^\theta + \mathbf{D}_{42}^\theta, \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{D}_{12}^\theta + \mathbf{D}_{34}^\theta + \mathbf{D}_{14}^\theta + \mathbf{D}_{32}^\theta, \end{aligned} \quad (2.21)$$

et la matrice  $\mathbf{D}^\theta$  est la matrice de rigidité dynamique de la structure, comme si elle était tournée d'un angle  $\theta$  dans la direction opposée par rapport au repère initial. Cette rotation est effectuée en écrivant le tenseur des contraintes élastiques reliant les contraintes et les déformations exprimées dans la base orientée (see Ref. [94]).

Pour diminuer l'erreur numérique, il est possible d'utiliser des éléments finis d'ordre plus élevé, par exemple des éléments quadratiques H27. Cela provoque l'apparition de degrés de liberté sur les faces latérales et à l'intérieur de la sous-structure périodique (voir Fig. 2.2). Dans ce cas, deux approches peuvent être menées.

D'une part, il est possible de condenser les degrés de liberté internes  $\mathbf{q}_i, i \in \{L, R, B, T, I\}$  en les exprimant comme des fonctions des degrés de liberté situés sur les lignes 1 à 4. Cela permet de se ramener à l'équation Eq. (2.20). Cette approche est exacte car la structure est considérée comme libre, donc aucune force nodale n'agit sur les degrés de liberté internes. Cependant des erreurs numériques peuvent apparaître pendant le calcul de la matrice inverse. Cette source d'erreur sera discutée dans une section ultérieure.

Une autre possibilité est de procéder au changement de variable suivant [108] :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_B &= \sqrt{\lambda_x} \mathbf{q}_1, & \mathbf{q}_L &= \sqrt{\lambda_y} \mathbf{q}_1, & \mathbf{q}_R &= \sqrt{\lambda_y} \lambda_x \mathbf{q}_1, \\ \mathbf{q}_T &= \sqrt{\lambda_x} \lambda_y \mathbf{q}_1, & \mathbf{q}_I &= \sqrt{\lambda_x} \sqrt{\lambda_y} \mathbf{q}_1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ce changement de variable peut mener à des erreurs numériques, car des fonctions de forme polynômiales sont utilisées et non des fonctions de forme de type ondes planes.

Le problème aux valeurs propres résultant est polynômial d'ordre 4 :

$$\det(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \lambda_{x^\theta}^{1/2} + \mathbf{A}_2 \lambda_{x^\theta} + \mathbf{A}_3 \lambda_{x^\theta}^{3/2} + \mathbf{A}_4 \lambda_{x^\theta}^2) = 0, \quad (2.23)$$

où les matrices  $\mathbf{A}_i, i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \mathbf{D}_{41}^\theta + \mathbf{D}_{4L}^\theta + \mathbf{D}_{R1}^\theta + \mathbf{D}_{21}^\theta + \mathbf{D}_{43}^\theta + \mathbf{D}_{RL}^\theta + \mathbf{D}_{2L}^\theta + \mathbf{D}_{R3}^\theta + \mathbf{D}_{23}^\theta, \\ \mathbf{A}_1 &= \mathbf{D}_{4B}^\theta + \mathbf{D}_{T1}^\theta + \mathbf{D}_{TL}^\theta + \mathbf{D}_{RB}^\theta + \mathbf{D}_{4I}^\theta + \mathbf{D}_{11}^\theta + \mathbf{D}_{2B}^\theta + \mathbf{D}_{4T}^\theta + \mathbf{D}_{T3}^\theta \\ &\quad + \mathbf{D}_{B1}^\theta + \mathbf{D}_{RI}^\theta + \mathbf{D}_{IL}^\theta + \mathbf{D}_{BL}^\theta + \mathbf{D}_{RT}^\theta + \mathbf{D}_{2I}^\theta + \mathbf{D}_{I3}^\theta + \mathbf{D}_{2T}^\theta + \mathbf{D}_{B3}^\theta, \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{D}_{31}^\theta + \mathbf{D}_{42}^\theta + \mathbf{D}_{TB}^\theta + \mathbf{D}_{3L}^\theta + \mathbf{D}_{4R}^\theta + \mathbf{D}_{L1}^\theta + \mathbf{D}_{R2}^\theta + \mathbf{D}_{IB}^\theta + \mathbf{D}_{TI}^\theta \\ &\quad + \mathbf{D}_{11}^\theta + \mathbf{D}_{22}^\theta + \mathbf{D}_{33}^\theta + \mathbf{D}_{44}^\theta + \mathbf{D}_{LL}^\theta + \mathbf{D}_{RR}^\theta + \mathbf{D}_{BB}^\theta + \mathbf{D}_{TT}^\theta + \mathbf{D}_{II}^\theta \\ &\quad + \mathbf{D}_{1L}^\theta + \mathbf{D}_{2R}^\theta + \mathbf{D}_{L3}^\theta + \mathbf{D}_{R4}^\theta + \mathbf{D}_{BI}^\theta + \mathbf{D}_{IT}^\theta + \mathbf{D}_{13}^\theta + \mathbf{D}_{24}^\theta + \mathbf{D}_{BT}^\theta, \\ \mathbf{A}_3 &= \mathbf{D}_{3B}^\theta + \mathbf{D}_{T2}^\theta + \mathbf{D}_{LB}^\theta + \mathbf{D}_{TR}^\theta + \mathbf{D}_{3I}^\theta + \mathbf{D}_{12}^\theta + \mathbf{D}_{1B}^\theta + \mathbf{D}_{3T}^\theta + \mathbf{D}_{B2}^\theta \\ &\quad + \mathbf{D}_{T4}^\theta + \mathbf{D}_{LI}^\theta + \mathbf{D}_{IR}^\theta + \mathbf{D}_{LT}^\theta + \mathbf{D}_{BR}^\theta + \mathbf{D}_{1I}^\theta + \mathbf{D}_{14}^\theta + \mathbf{D}_{1T}^\theta + \mathbf{D}_{B4}^\theta, \\ \mathbf{A}_4 &= \mathbf{D}_{32}^\theta + \mathbf{D}_{3R}^\theta + \mathbf{D}_{L2}^\theta + \mathbf{D}_{12}^\theta + \mathbf{D}_{34}^\theta + \mathbf{D}_{LR}^\theta + \mathbf{D}_{1R}^\theta + \mathbf{D}_{L4}^\theta + \mathbf{D}_{14}^\theta. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ce problème aux valeurs propres peut être résolu par la fonction Matlab© *polyeig*.

### 2.2.3 Sources d'erreurs

Les erreurs commises lors l'utilisation de la méthode WFE concernant le cas de matériau élastiques ont été étudiées dans de nombreux articles, en particulier dans [101, 114] pour la WFE1D et dans [110] pour la WFE2D. On notera  $L$  la dimension caractéristique de la périodicité. L'amplitude des erreurs dépend du compromis qui est trouvé entre le choix d'une longueur  $L$  trop grande ou trop petite [101].

#### Erreurs de discrétisation

Choisir  $L$  trop grand conduit à des erreurs de discrétisation, car les courtes longueurs d'ondes ne seront pas convenablement représentées par le maillage éléments finis. Marburg [30] présente une analyse précise des critères de convergence de cette méthode dans le cas des éléments acoustiques. Il met en évidence que la valeur d'un critère de convergence n'a de sens que relativement à un niveau d'erreur imposé. En particulier, l'auteur observe que pour une erreur inférieure à 1%, il faut utiliser plus de 20 éléments linéaires par longueur d'ondes, tandis que 4 éléments quadratiques permettent d'obtenir la même précision. Habituellement, dans le cas de matériaux élastiques, on conseille d'utiliser 6 éléments par longueur d'onde pour des éléments linéaires. Manconi [110] a proposé d'utiliser 10 éléments par longueur d'onde, pour la plus courte des longueurs d'ondes propagatives, dans le cadre de l'approche WFE2D.

Concernant les matériaux poroélastiques, il a été montré que ces éléments convergent lentement, et que le critère de 6 éléments par longueur d'onde n'est pas suffisant dans le cas général [115]. Il a aussi été montré que les 3 ondes de Biot doivent être prises en compte dans le critère, et pas seulement les ondes de compression.

#### Erreurs de troncature

Choisir au contraire une longueur  $L$  trop petite conduit aussi à des erreurs numériques. La première source d'erreur de ce type provient du calcul des matrices élémentaires éléments finis. Dans le cas de matériaux élastiques, les valeurs de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  et celles de la matrice de masse peuvent être d'ordre de grandeur très différents quand la dimension  $L$  est petite. Waki *et al.* [101] ont montré que des erreurs de troncature apparaissent dans la méthode quand  $\|\mathbf{K}\| \gg \|\omega^2 \mathbf{M}\|$ . Ce phénomène est donc particulièrement visible dans le domaine des basses fréquences.

Une autre source d'erreur provient de la relation entre la constante de propagation obtenue par le problème aux valeurs propres  $\lambda$  et le nombre d'onde  $k$  :

$$k = \frac{\ln(\lambda)}{-iL}. \quad (2.25)$$

Cette relation devient en effet singulière quand  $L$  s'approche de 0. Plus précisément, si  $\Delta\lambda$  est l'erreur absolue commise sur la constante de propagation  $\lambda$ , l'erreur relative sur le nombre d'onde est donnée par :

$$\left| \frac{\Delta k}{k} \right| = \frac{\Delta\lambda/\lambda}{kL} \quad (2.26)$$

Le nombre d'onde  $k$  étant une grandeur caractéristique de la physique du matériau, cette relation signifie que l'erreur relative commise sur le nombre d'onde devient très supérieure à l'erreur relative sur la constante de propagation pour des faibles valeurs de  $L$ .

Ces deux types d'erreur sont d'autant plus importants que le conditionnement de la matrice de rigidité dynamique est mauvais. En effet, ce mauvais conditionnement conduit à des erreurs numériques sur la résolution du problème aux valeurs propres, ce qui implique des erreurs importantes sur le nombre d'onde.

Enfin, concernant le maillage de la section, il a été montré que son degré de raffinement conditionne la précision des modes de section, et en particulier de leurs fréquences de coupures. Zhou [114] a montré dans le cas de la WFE1D et de matériaux élastiques que des résultats optimaux peuvent être obtenus quand la longueur des éléments dans la direction de propagation est choisie égale à un cinquième de la longueur des éléments dans la section. Cela signifie que la convergence dans la direction de propagation est plus difficile à obtenir que dans la section, où on s'attend à ce que le critère de convergence des éléments finis s'applique.

#### 2.2.4 Post-traitement

Après avoir résolu à chaque fréquence le problème aux valeurs propres, une liste de modes avec leurs nombres d'ondes et leurs vecteurs propres est obtenue à chaque fréquence. Afin d'obtenir des visualisations pertinentes, un critère de sélection des modes doit être mis en place. Tout d'abord, on ne sélectionne ici que les ondes incidentes, c'est-à-dire telles que  $\text{Re}(k) \geq 0$  et  $\text{Im}(k) \leq 0$ .

Parmi ces modes, trois classes d'ondes peuvent être distinguées : les modes propagatifs, les modes évanescents et les modes dissipatifs.

##### **Modes propagatifs :**

Ces modes ne sont pas dissipatifs, c'est-à-dire que la partie imaginaire de leur nombre d'onde est nulle :  $\text{Im}(k) = 0$ .

##### **Modes évanescents :**

Ces modes ne sont pas visibles en champ lointain, leur amplitude décroît exponentiellement avec la distance de propagation :  $\text{Re}(k) = 0$ . Leur influence ne peut pas être négligée dans le champ proche, c'est-à-dire au voisinage des sources et des discontinuités.

##### **Modes dissipatifs :**

Dans le cas de matériaux dissipatifs, les deux catégories précédentes ne sont pas observées, puisque tous les nombres d'ondes sont complexes. On peut cependant redéfinir les catégories précédentes en considérant la valeur pour une fréquence proche de 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im}(k) = 0 &\rightarrow \text{onde progressive} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im}(k) \neq 0 &\rightarrow \text{onde évanescente.} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Dans un premier temps, si la réponse forcée n'est pas envisagée, il peut être considéré que les modes évanescents ne sont pas utiles à l'exploitation des résultats. Un tri peut alors

être mené sur le critère suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(k) = 0 &\rightarrow \text{onde progressive non dissipative;} \\ \operatorname{Re}(k) = 0 &\rightarrow \text{onde purement évanescence} \\ \operatorname{Re}(k) \neq 0, \operatorname{Im}(k) \neq 0 &\rightarrow \text{onde dissipative.} \end{aligned} \quad (2.28)$$

En présence d'amortissement, les nombres d'ondes sont toujours complexes, donc seules des ondes dissipatives existent. Cependant, dans le cas d'un faible taux d'amortissement, la partie imaginaire du nombre d'onde est très inférieure à sa partie réelle. On peut alors séparer les résultats WFE en deux types d'ondes : ondes progressives faiblement dissipatives telles que  $|\operatorname{Im}(k)| \ll |\operatorname{Re}(k)|$  et ondes évanescences telles que  $|\operatorname{Im}(k)| > |\operatorname{Re}(k)|$ .

Pour les matériaux poreux usuels, la partie réelle et la partie imaginaire des nombres d'ondes sont du même ordre de grandeur. En particulier, pour des matériaux à squelette rigide, le rapport de la partie imaginaire sur la partie réelle tend vers une valeur de 1 en basses fréquences [116, 5]. Par conséquent, le critère précédent ne peut pas être utilisé. On propose un premier critère de sélection (SC1) :

$$\text{SC1}(N) : \left| \frac{\operatorname{Im}(k)}{\operatorname{Re}(k)} \right| < N, \quad (2.29)$$

où la valeur de  $N$  est arbitraire. La valeur  $N = 1$  peut être choisie, menant à des bons résultats en général, mais des valeurs légèrement supérieures peuvent être observées en basses fréquences pour certains matériaux.

D'autre part, les modes évanescents ne sont pas sélectionnés en basses fréquences alors qu'ils le sont dans les hautes fréquences. Ainsi, les mêmes modes ne sont pas forcément sélectionnés à chaque fréquence.

Une deuxième possibilité, appelée SC2, consiste à organiser les ondes par partie imaginaire (négative) d'amplitude croissante, puis à sélectionner les  $N$  ondes les moins dissipatives. Toutefois, la valeur du nombre d'onde  $N$  n'est pas connue *a priori*, spécialement si un grand nombre de modes est présent dans la bande de fréquences. De plus, cette sélection est faite fréquence par fréquence, donc encore une fois, différentes ondes peuvent être sélectionnées à différentes fréquences. Cependant, on peut penser raisonnablement que les ondes progressives principales (ondes de compression, de cisaillement) sont les 4 premières ondes, parce qu'elles sont moins dissipatives que les ondes évanescences en basses fréquences.

Pour les deux critères de sélection, les ondes triées doivent être tracées pour s'assurer qu'elles correspondent bien aux ondes cherchées.

Finalement, une fois que les ondes ont été sélectionnées, il est utile de suivre l'évolution d'un mode d'onde en fonction de la fréquence. Cela est fait en calculant la corrélation de deux modes d'ondes calculés à deux fréquences proches. Houillon *et al.* [117] ont appelé le résultat « WAC » (Wave Assurance Correlation), par rapport au MAC qui est classiquement défini pour des modes d'ondes stationnaires.

$$\text{Correl}(\Phi, \Psi) = \text{WAC}(\Phi, \Psi) = \frac{(\Phi^H \Psi)(\Psi^H \Phi)}{(\Phi^H \Phi)(\Psi^H \Psi)}. \quad (2.30)$$

Deux vecteurs propres appartiennent à la même onde si le WAC est proche de 1. Cette hypothèse est basée sur l'approximation selon laquelle les déformées des modes d'ondes

sont très différentes les unes des autres ne varient pas beaucoup entre deux fréquences consécutives.

Ce critère s'applique pour les formulations déplacement–déplacement, puisque les amplitudes des déplacements des deux phases sont similaires. Cependant, dans le cas des formulations déplacement–pression, les amplitudes associées sont très différentes, avec une différence d'ordre de grandeur de l'ordre de  $10^5$ . La valeur du WAC traduit alors principalement la ressemblance entre les champs de pressions modaux.

Pour répondre à ce problème, on écrira les déformées d'ondes comme  $\Phi = [\Phi_u^T, \Phi_p^T]^T$ , où  $\Phi_u$  et  $\Phi_p$  sont les parties des modes d'ondes relatives au déplacement solide et à la pression respectivement, et sont telles que  $\|\Phi_u\| \ll \|\Phi_p\|$ . Pour classifier correctement les ondes, on normalisera donc les parties des modes d'ondes de la façon suivante :

$$\tilde{\Phi}_u = \frac{\Phi_u}{\|\Phi_u\|} \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}_p = \frac{\Phi_p}{\|\Phi_p\|}. \quad (2.31)$$

puis on calculera la corrélation entre deux modes par :

$$\text{Correl}(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}) = \frac{1}{2} (\text{WAC}(\tilde{\Phi}_u, \tilde{\Psi}_u) + \text{WAC}(\tilde{\Phi}_p, \tilde{\Psi}_p)). \quad (2.32)$$

Cette phase permet de trier les modes de manière cohérente sur l'ensemble des fréquences, mais quand un grand nombre de modes existe, cette phase peut être très longue. Cette phase n'est pas nécessaire quand un calcul de réponse forcée est envisagé.

### 2.2.5 Conclusion

La méthode WFE est une approche combinant l'utilisation des éléments finis et de la théorie de Floquet. Cette méthode semble ne pas dépendre du milieu considéré, mais pour le cas de matériaux poroélastiques, certaines différences avec le cas élastique justifient une grande prudence.

Tout d'abord, la théorie de Floquet n'est valide que pour des matrices réelles. Le modèle de Biot faisant intervenir des paramètres complexes, la matrice de rigidité dynamique obtenue avec un matériau poroélastique est complexe à symétrie réelle (non hermitienne). D'autre part, les deux phases présentes ont des comportements différents, en particulier l'onde de compression créée par la phase fluide est très dissipative, même dans les basses fréquences. Finalement, plusieurs formulations variationnelles peuvent être choisies, menant à différentes matrices de rigidité dynamique et différentes conditions aux limites naturelles.

La section suivante vise à répondre à plusieurs questions. La première concerne la validité de l'approche WFE aux matériaux dissipatifs comme les matériaux poroélastiques. Par souci de brièveté, la méthode ne sera pas appliquée dans cette section au cas du modèle de fluide équivalent, ni à toutes les formulations qui peuvent être utilisées dans le cadre du modèle de Biot-Allard. Nous nous intéresserons alors seulement au cas de la formulation déplacement–déplacement UUt et des formulations déplacement–pression. Nous validerons l'application de la méthode par le fait de pouvoir retrouver les ondes volumiques se propageant dans le matériau. Les aspects relatifs à la convergence des résultats seront discutés dans ce cadre.

Dans un second temps, on vérifiera que la méthode permet de prédire les ondes se propageant dans un milieu de dimensions latérales finies. L'influence des hypothèses concernant le chargement sur les faces latérales sera discutée, ainsi que le choix des paramètres de maillage.

### 2.3 Validation de la WFE dans le cas de conditions aux limites latérales infinies

Dans cette section, la méthode est appliquée à un milieu poroélastique de dimensions infinies dans toutes les directions. Bien que les courbes de dispersion peuvent être calculées à partir d'une extension de l'approche WFE2D à la propagation d'ondes tridirectionnelles (en repère sphérique), nous proposons ici de prédire ces ondes en prenant en compte les efforts exercés sur les faces latérales. Cette approche est valable aussi bien dans le cas 1D (on ne sélectionne qu'un guide d'onde 1D du milieu infini) ou dans le cas 2D (on ne sélectionnera alors qu'une couche bidirectionnelle).

Dans la section précédente, nous avons vu que les ondes prédites par WFE sont calculées à partir de la matrice de rigidité dynamique de la sous-structure périodique libre. Dans le cas général, si les inconnues sont notées  $q$ , l'équilibre de la sous-structure est écrit sous la forme :

$$\int_{\Omega} \text{Weak}(q, \delta q) d\Omega = \int_{\Gamma} \text{Contrib}(\delta q) d\Gamma, \quad (2.33)$$

et après discrétisation par éléments finis, l'équilibre de la structure s'écrit :

$$\mathbf{D}\mathbf{q}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (2.34)$$

où  $\mathbf{D}$  est la matrice de rigidité dynamique servant à calculer les ondes,  $\mathbf{q}$  est le vecteur des inconnues nodales et  $\mathbf{F}$  est le vecteur des efforts nodaux. Ce vecteur contient les efforts exercés de part et d'autre de la sous-structure dans la direction de propagation, mais contient l'hypothèse d'un chargement latéral nul. Cette hypothèse très souvent oubliée signifie que les ondes sont calculées à partir de la conditions aux limites sur les parois latérales :

$$\int_{\Gamma} \text{Contrib}(\delta q) d\Gamma = 0 \text{ pour tout } \delta q. \quad (2.35)$$

Dans le cas présent, le milieu étant infini, des efforts sont exercés par le milieu environnant au passage d'une onde. Le terme  $\text{Contrib}$  possède alors diverses expressions en fonction de la formulation (voir Chapitre 1 Section 1.2.4). Il est alors possible d'exprimer le terme  $\text{Contrib}$  comme fonction des inconnues nodales et des fonctions test :

$$\text{Contrib}(\delta q) = \text{Contrib}(q, \delta q). \quad (2.36)$$

Les efforts latéraux discrétisés sur les nœuds s'écrivent alors en fonction d'une matrice de rigidité dynamique complémentaire  $\mathbf{D}_b$  :

$$\int_{\Gamma} \text{Contrib}(q, \delta q) d\Gamma \approx \delta \mathbf{q}^T \mathbf{D}_b \mathbf{q}. \quad (2.37)$$

Après discrétisation par éléments finis, l'équilibre de la sous-structure soumise à son milieu environnant s'écrit alors :

$$(\mathbf{D} - \mathbf{D}_b) \mathbf{q}(\omega) = \mathbf{F}(\omega). \quad (2.38)$$

La méthode WFE sera donc appliquée à la matrice de rigidité dynamique corrigée par les conditions aux limites  $\mathbf{D} - \mathbf{D}_b$ .

Dans cette partie, nous validons la méthode sur les formulations UUt [26], UP-a [28] et UP-b [29].

### 2.3.1 Cas de la formulation déplacement-déplacement total UUt

Le matériau poreux est modélisé par la formulation UUt du modèle de Biot-Allard [26]. Le terme  $\text{Contrib}(q, \delta q)$  s'exprime :

$$\text{Contrib}(q, \delta q) = \hat{\sigma}^s(\mathbf{u}^s) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^s - p(\mathbf{u}^t) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^t. \quad (2.39)$$

La figure 2.3 présente les courbes de dispersion obtenues pour 1 élément dans l'épaisseur et  $L = 0.3\text{mm}$  pour la WFE avec conditions aux limites infinies en formulation UUt. Une superposition parfaite entre les valeurs analytiques et les valeurs prédites par WFE

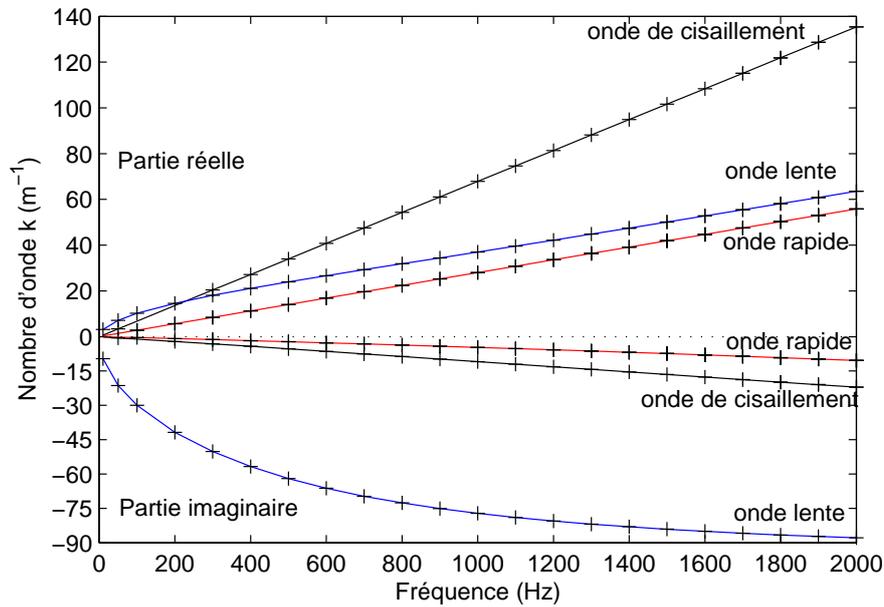


Figure 2.3 – Courbes de dispersion avec conditions aux limites infinies. (+) : WFE, (ligne) analytique (décomposition de Helmholtz ou formalisme de Stroh).

peut être observée pour l'ensemble des fréquences considérées, validant l'approche.

La figure 2.5 présente l'évolution des nombres d'ondes prédits par WFE à 2kHz en fonction du choix de la dimension de la sous-structure périodique  $L$  et

du nombre d'éléments dans l'épaisseur. L'erreur relative  $\varepsilon_i$  pour chaque onde  $i \in \{\text{Rapide,Lente,Cisaillement}\}$  est donnée par :

$$\varepsilon_i = \frac{|k_i^{\text{WFE}} - k_i^{\text{Biot}}|}{|k_i^{\text{Biot}}|} \quad \text{pour tout } i \in \{\text{Rapide,Lente,Cisaillement}\}, \quad (2.40)$$

et le nombre d'éléments par longueur d'onde est donné par :

$$n_i = \frac{2\pi}{L \operatorname{Re}(k_i^{\text{Biot}})} \quad \text{pour tout } i \in \{\text{Rapide,Lente,Cisaillement}\}. \quad (2.41)$$

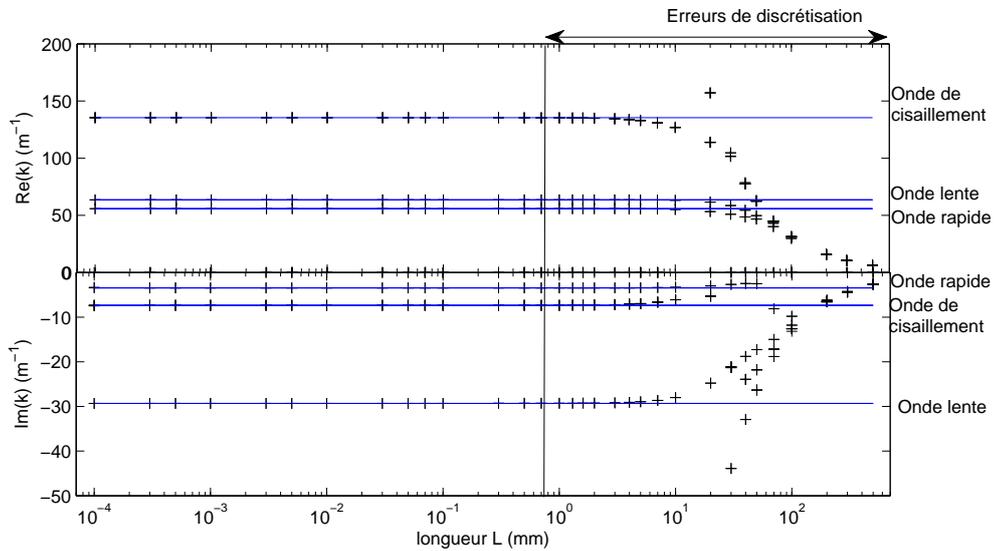


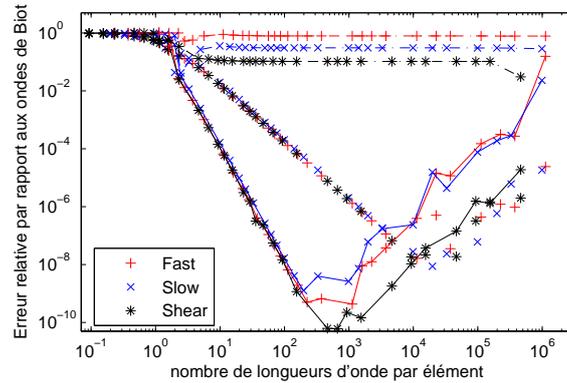
Figure 2.4 – Évolution des nombres d'ondes à 2 kHz en fonction de la longueur  $L$ . (+) WFE, éléments linéaires,  $n_z = 1$ , SC2(7); (—) valeur analytique.

Tout d'abord, la figure 2.5a montre que la condensation des degrés de liberté situés sur les faces ou les arêtes pour se ramener au problème linéaire induit des erreurs très importantes (de l'ordre de 10% à 100%).

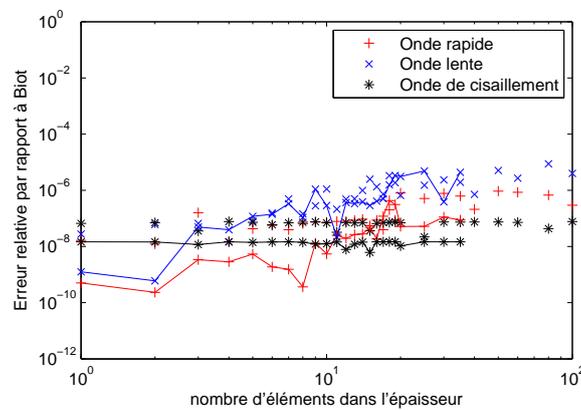
Ensuite, les courbes de convergence pour des éléments linéaires ou quadratiques (sans condensation) ont une allure « en V », comportement déjà montré par Waki et al [101].

La partie gauche de la courbe traduit la convergence des éléments. Quand les éléments sont trop grands par rapport à la longueur d'onde, ou quand le nombre d'éléments par longueur d'onde est trop faible, les éléments finis ne sont pas capable de capturer avec précision la dynamique du système. Cette source d'erreur correspond à l'erreur de discrétisation (voir figure 2.4). Augmenter le nombre d'éléments par longueur d'onde permet d'obtenir des résultats avec une erreur plus faible.

D'autre part, il est visible sur la figure 2.5a que les éléments quadratiques (sans condensation) exhibent une convergence plus rapide que pour les éléments linéaires. D'autre part, les trois ondes volumiques présentent les mêmes comportements. Il faut bien avoir à l'esprit



(a) Influence de la longueur  $L$ .



(b) Influence du nombre d'éléments dans l'épaisseur.

Figure 2.5 – Erreur relative par rapport à Biot. (ligne) éléments quadratiques ; (ligne discontinue) élément quadratiques avec condensation ; (pas de ligne) éléments linéaires.

que la convergence est tracée en fonction du nombre d'éléments périodiques par longueur d'onde, et que la longueur des trois ondes volumiques est différente.

Pour se mettre en rapport avec les autres critères présentés dans la littérature (voir Section 2.2.3), on peut voir que le choix de 6 éléments quadratiques par longueur d'onde permet d'obtenir une erreur de  $1.10^{-3}$  alors que l'erreur commise en utilisant des éléments linéaires est de l'ordre de 3%. Utiliser 10 éléments linéaires par longueur d'onde permet de diminuer l'erreur commise sur le nombre d'onde à 1%.

La seconde partie de la courbe en V est caractéristique d'erreurs numériques. Quand trop d'éléments par longueur d'ondes sont utilisés, c'est-à-dire quand la taille de la sous-structure est trop petite, les erreurs de troncature et les erreurs lors de la résolution du problème aux valeurs propres contaminent le résultat. À cause de la petite dimension de la sous-structure, les erreurs sur le nombre d'onde deviennent alors importantes.

Il est visible que les erreurs numériques surviennent plus vite pour les éléments quadratiques que pour les éléments linéaires. Cela est dû à la nécessité de résoudre un problème

aux valeurs propres plus complexe. La précision est alors similaire à celle obtenue avec des éléments linéaires, pour une même valeur du nombre d'éléments par longueur d'onde. Cependant, pour le cas de la formulation UUt, la figure 2.4 met en évidence que ses erreurs apparaissent pour des très petites dimensions qui ne sont jamais utilisées en pratique.

Concernant l'effet du nombre d'éléments dans l'épaisseur, il apparaît sur la figure 2.5b que l'erreur est la plus faible quand 1 élément est utilisé dans l'épaisseur. Ainsi, indépendamment du rapport de forme des éléments, comme le milieu est infini, la réponse doit être constante dans l'épaisseur, justifiant ainsi cette valeur.

Comme la longueur d'onde change avec la fréquence, il faudrait adapter la taille de la sous-structure à la fréquence. Cependant, comme l'erreur reste faible y compris pour de grande valeurs de nombre d'éléments par longueur d'onde, il est possible de fixer la dimension de la sous-structure par rapport à la fréquence maximale d'intérêt. Comme critère de dimensionnement, on conseillera donc de fixer la dimension de la sous-structure et le maillage de sorte d'observer 6 éléments quadratiques ou 10 éléments linéaires par longueur d'onde.

### 2.3.2 Cas des formulations déplacement-pressure UP-a et UP-b

Dans ce paragraphe, on s'intéresse maintenant à l'étude du cas des formulations dites mixtes déplacement-pressure. Dans le cas de milieux infinis, les conditions aux limites sont intégrées à la matrice de rigidité dynamique, donc les deux formulations sont équivalentes.

La figure 2.6 montre l'évolution des nombres d'ondes prédits par les formulations UP et des éléments linéaires (résolution de l'équation Eq. (2.20)) quand la longueur de la sous-structure périodique varie.

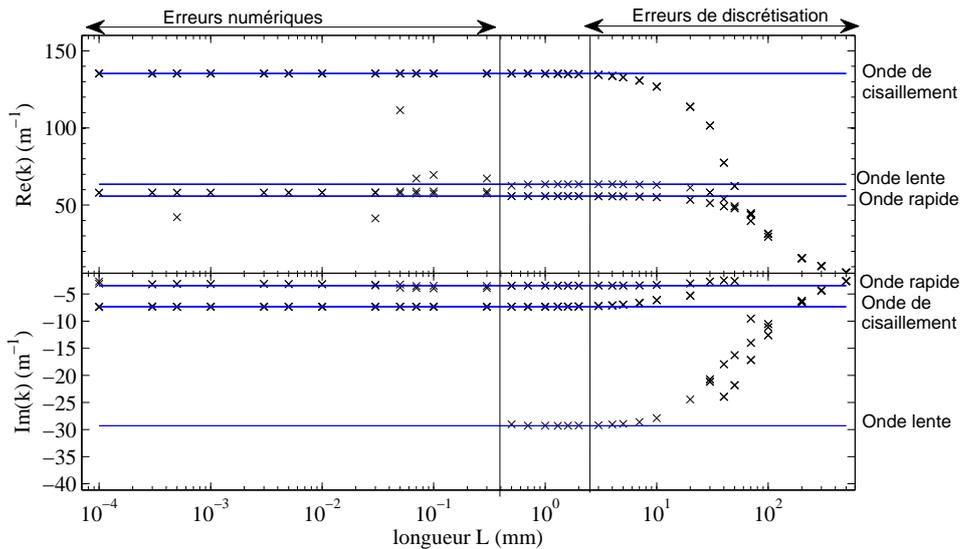


Figure 2.6 – Évolution des nombres d'ondes à 2 kHz en fonction de la dimension  $L$ . ( $\times$ ) WFE, éléments linéaires,  $n_z = 1$ , SC2(7); (—) valeur analytique.

On peut observer que l’approche présentée ici permet de retrouver les nombres d’ondes de Biot (lignes bleues sur la figure 2.6). Cependant, des erreurs numériques importantes existent, de sorte que la qualité des résultats est très sensible au choix des paramètres numériques de la sous-structure. En effet, il est difficile de concilier le besoin d’avoir une structure suffisamment petite par rapport aux longueurs d’ondes (critère hautes fréquences) tout en ayant une structure suffisamment large pour éviter les erreurs numériques (critère basses fréquences).

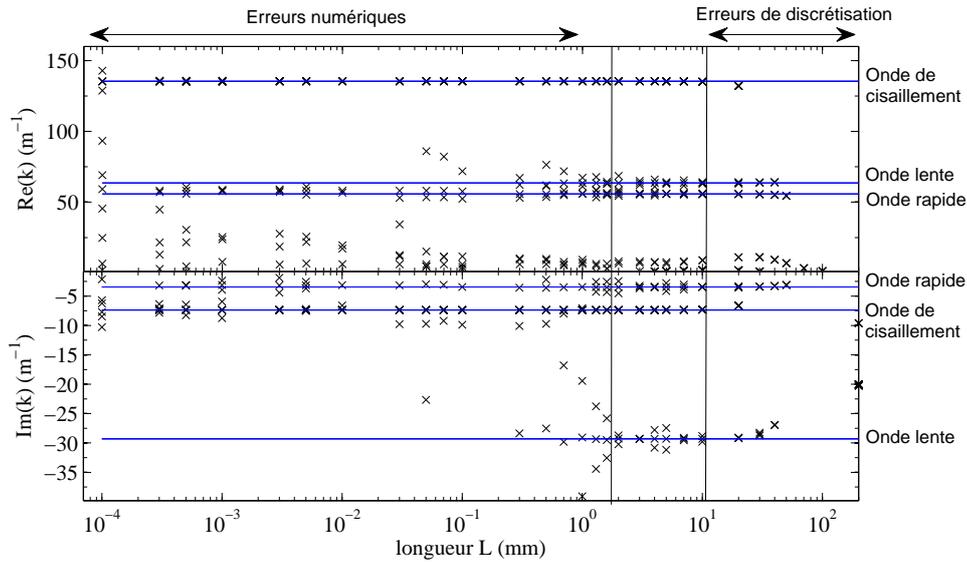


Figure 2.7 – Évolution des nombres d’ondes à 2kHz en fonction de la dimension  $L$ . (x) WFE, éléments quadratiques sans condensation,  $n_z = 1$ , SC2(20) ; (—) valeur analytique.

La figure 2.7 montre que l’usage d’éléments quadratiques (et la résolution de l’équation (2.23)) ne permet pas d’améliorer la sensibilité aux erreurs numériques. Toutefois, il semble possible d’obtenir des meilleurs résultats avec des sous-structures plus larges.

En fait, ces erreurs numériques sont dues au mauvais conditionnement de la matrice de rigidité dynamique. En effet, les formulations UP-a et UP-b sont écrites sous forme dimensionnelle, où l’équation de la phase solide est homogène au produit d’une masse volumique par une accélération, alors que l’équation de la phase fluide est homogène à un déplacement.

Plus précisément, en hautes fréquences, le conditionnement est donc mauvais à cause de la présence de termes en  $\omega^2$  dans l’équation solide et de termes en  $1/\omega^2$  dans l’équation fluide. Le conditionnement de la matrice peut être amélioré en multipliant l’équation de la phase fluide par  $\omega^2$ . Par exemple, dans le cas de la formulation UP-b, l’équation (1.53)

devient alors :

$$\begin{aligned}
& \text{Trouver } \mathbf{u}^s \in C^s \text{ et } p \in C^p \text{ tels que pour tous } \delta \mathbf{u}^s \in C^{s*} \text{ et } \delta p \in C^{p*}, \\
& \int_{\Omega} \left( \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^s : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^s) - \omega^2 \tilde{\rho} \mathbf{u}^s \cdot \delta \mathbf{u}^s \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \phi \left( 1 + \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \nabla p \cdot \delta \mathbf{u}^s + \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) p \nabla \cdot \delta \mathbf{u}^s \right] d\Omega = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^s d\Gamma, \\
& \int_{\Omega} \left( \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22}} \nabla p \cdot \nabla \delta p - \omega^2 \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p \delta p \right) d\Omega \\
& - \omega^2 \int_{\Omega} \left[ \phi \left( 1 + \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \nabla \delta p \cdot \mathbf{u}^s + \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \delta p \nabla \cdot \mathbf{u}^s \right] d\Omega = \omega^2 \int_{\Gamma} \phi (\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s) \cdot \mathbf{n} \delta p dS.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

On peut voir sur la figure 2.8 que cette formulation asymétrique permet de limiter les erreurs numériques et d'améliorer la robustesse de la méthode vis-à-vis des paramètres numériques choisis.

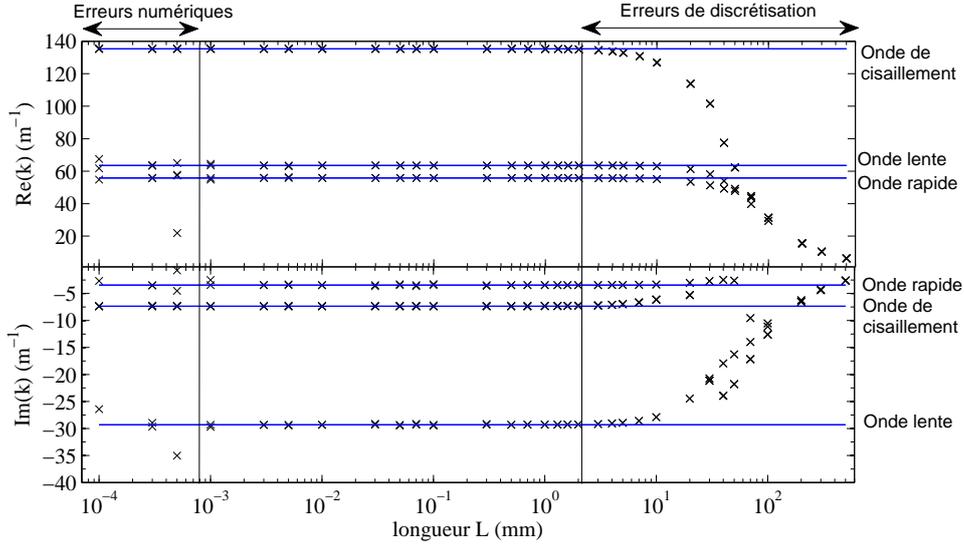
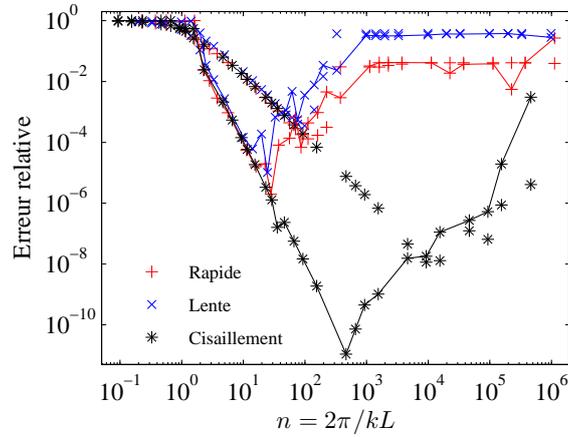


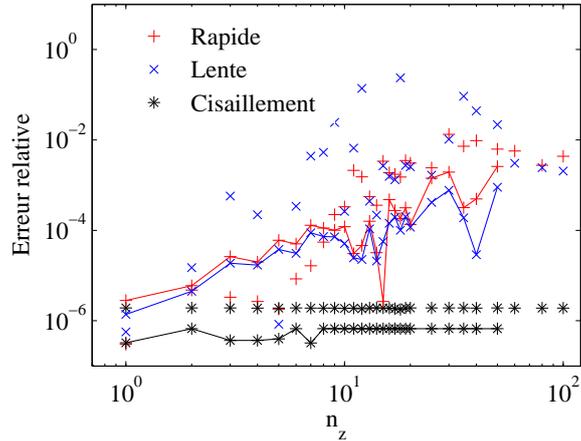
Figure 2.8 – Convergence avec conditions aux limites infinies et formulation asymétrique à 2kHz. (x) WFE, éléments linéaires,  $n_z = 1$ , SC2(7); (—) valeur analytique.

Il est maintenant possible de tracer les courbes de convergence adimensionnelles en traçant l'erreur relative entre la valeur prédite par WFE et la valeur analytique des nombres d'ondes par rapport au nombre d'éléments par longueur d'onde.

La figure 2.9a montre que les 3 ondes présentent le même comportement, comme pour la formulation UUt. La taille de la sous-structure devrait donc être choisie vis-à-vis de la plus petite longueur d'onde parmi les 3 ondes de Biot. Les éléments quadratiques convergent plus vite que les éléments linéaires, mais sont aussi plus sensibles aux erreurs numériques. Par rapport à la formulation UUt, le conditionnement des formulations UP est moins bon, donc les erreurs numériques apparaissent plus vite : l'erreur minimale est obtenue à 100 éléments H27 et 10000 éléments H8 par longueur d'onde pour la formulation



(a) Effet de la longueur  $L$  ( $n_z = 1$ ).



(b) Effet du maillage de la section  $n_z$  ( $L = 0.1\text{mm}$ ).

Figure 2.9 – Convergence pour des conditions de bords Infinies à 2kHz et les formulations asymétriques. (sans ligne) éléments linéaires ; (—) éléments quadratiques.

UUt, tandis qu'elle est obtenue à 12 éléments H27 et 100 éléments H8 par longueur d'onde pour les formulations UP.

Concernant l'effet du nombre d'éléments dans l'épaisseur, il apparait en figure 2.9b que la meilleure valeur est  $n_z = 1$ , à la fois pour les éléments linéaires et quadratiques, comme pour le cas de la formulation déplacement-déplacement.

Finalement, la figure 2.10 présente les courbes de dispersion obtenues avec l'approche proposée ici, pour des éléments linéaires avec ( $L = 1.3\text{mm}$ ,  $n_z = 1$ ) et les deux formulations UP. Cette longueur correspond à 35 éléments par longueur d'onde pour l'onde de cisaillement à 2kHz. L'erreur avec la valeur analytique est inférieure à 0.2% sur toute la gamme de fréquences.

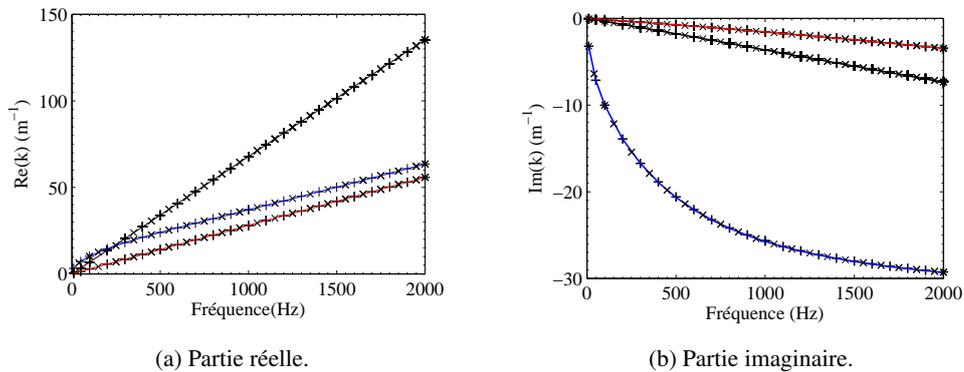


Figure 2.10 – Courbes de dispersion obtenues avec les formulations UP-a et UP-b, asymétriques, et des conditions de bord infinies. (—) Ondes de Biot ; (×) WFE (UP-a,  $L = 1.3\text{mm}$ ,  $n_z = 1$ , éléments linéaires, SC2(7)) ; (+) WFE (UP-b,  $L = 1.3\text{mm}$ ,  $n_z = 1$ , éléments linéaires).

### 2.3.3 Conclusion

Dans cette partie, la méthode WFE a été appliquée sur un milieu poroélastique de dimensions infinies. La méthode est validée par le fait de pouvoir prédire avec une erreur acceptable les nombres d'ondes volumiques. Les éléments quadratiques permettent de converger plus vite que les éléments linéaires, permettant d'obtenir des résultats convergés pour des sous-structures périodiques de dimensions importantes ou pour des fréquences supérieures à un maillage donné.

Les formulations en déplacement-déplacement et les formulations en déplacement-pression présentent le même comportement, avec les mêmes taux de convergence. Il est nécessaire toutefois de considérer la formulation asymétrique des formulations en déplacement-pression pour obtenir un bon conditionnement. Malgré cela, la formulation en déplacement-déplacement est moins soumise à des erreurs numériques, qui apparaissent pour des très grandes valeurs de nombre d'éléments par longueur d'onde. Pour calculer les courbes de dispersion du matériau infini par la méthode présente, on conseillera donc l'utilisation d'éléments linéaires en formulation UUt avec 1 élément dans l'épaisseur et une dimension de sous-structure plusieurs centaines de fois inférieure à la plus courte des longueurs d'ondes.

Dans la section suivante, on s'intéressera aux ondes se propageant dans un matériau poreux d'épaisseur finie.

## 2.4 Propagation d'ondes dans un milieu poreux d'épaisseur finie par la méthode WFE2D

Dans le cas d'un milieu d'épaisseur finie, la démarche précédente consistant à calculer les ondes à partir de la matrice de rigidité dynamique corrigée par les conditions aux limites

peut être appliquée. On considère ici une couche de 2 cm d'épaisseur du matériau D (voir Annexe A). Le matériau est plutôt rigide, mais sa résistivité assez importante fait que les phases solide et fluide sont couplées. Comme le matériau est isotrope, seuls les résultats des calculs à  $\theta = 0$  sont présentés.

Les conditions aux limites latérales sont dans ce cas :

$$\hat{\sigma}^s \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ et } p = p_{\text{ext}}, \quad (2.43)$$

tandis que les déplacements de la phase fluide, de la phase solide, les déplacements relatifs et le déplacement total sont libres.

Dans la section précédente, il a été montré que la WFE permet de prédire les ondes telles que les efforts virtuels exercés sur les faces latérales sont nuls. Cette condition s'exprime différemment dans le cas des différentes formulations.

Dans le cas de la formulation UUt, les efforts virtuels appliqués à la phase solide *in vacuo* s'écrivent :

$$W^* = \int_{\Gamma} \hat{\sigma}^s \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^s d\Gamma = 0, \quad (2.44)$$

tandis que les efforts virtuels appliqués sur la phase fluide sont :

$$W^* = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0 \text{ (hypothèse de pression nulle)} \\ \int_{\Gamma} -p(\mathbf{u}^t) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^t d\Gamma & \text{sans hypothèse de pression nulle.} \end{cases} \quad (2.45)$$

Utiliser la WFE à partir de la formulation UUt directement mène donc à des ondes calculées pour un matériau entouré de vide, tandis que le couplage avec l'air environnant peut être pris en compte en corrigeant la matrice de rigidité dynamique.

Dans le cas de la formulation UP-a, les efforts virtuels appliqués aux interfaces latérales sur la phase solide sont :

$$W^* = \int_{\Gamma} \hat{\sigma}^s \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^s d\Gamma = 0, \quad (2.46)$$

tandis que les efforts virtuels appliqués sur la phase fluide sont :

$$W^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{n} = 0 \\ - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{n} \delta p(\mathbf{u}^t) d\Gamma & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.47)$$

Enfin, dans le cas de la formulation UP-b, les efforts virtuels appliqués aux interfaces latérales sur la phase solide sont :

$$W^* = \int_{\Gamma} \sigma^t \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^s d\Gamma \quad (2.48)$$

Après application des conditions aux limites  $\hat{\sigma}^s \cdot \mathbf{n} = 0$ , ils s'expriment :

$$W^* = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0 \\ \int_{\Gamma} p \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^s d\Gamma & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.49)$$

Les efforts virtuels appliqués sur la phase fluide sont :

$$W^* = \begin{cases} 0 & \text{si } (\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s) \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{u}^f(\mathbf{u}^s, p) - \mathbf{u}^s) \cdot \mathbf{n} \delta p d\Gamma & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.50)$$

Formulation	Hypothèse sur le terme de bord	Effet
UUt	$\forall \delta \mathbf{u}^t, \int_{\Gamma} -p \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^t d\Gamma = 0$	Pression Nulle (PN).
UP-a	$\forall \delta p, \int_{\Gamma} \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{n} \delta p d\Gamma = 0$	Déplacement Total Nul (DTN).
UP-b	$\forall \delta p, \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s) \cdot \mathbf{n} \delta p d\Gamma = 0$ $\forall \delta \mathbf{u}^s, \int_{\Gamma} p \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^s d\Gamma = 0$	Déplacement Relatif Nul (DRN). Pression Nulle (PN).

Tableau 2.1 – Hypothèses sur les termes de bord à une interface poroélastique/acoustique en fonction de la formulation.

Ces différentes hypothèses sont reprises dans le tableau Tab. 2.1. Quand les termes d'interfaces ne sont pas supposés nuls, mais qu'ils sont ajoutés aux termes volumiques, nous dirons que l'hypothèse à l'interface a été relâchée, et nous le noterons avec une barre supérieure (par exemple,  $\overline{\text{PN}}$  correspond au cas où l'hypothèse de pression nulle PN est relâchée).

Il est classique (voir [118] par exemple) que des conditions aux limites libres d'efforts sur les faces latérales d'un matériau solide élastique provoquent un couplage entre l'onde longitudinale et l'onde de compression, de telle manière que les ondes qui se propagent dans le matériau de dimensions latérales finies sont une onde de cisaillement et une onde quasi-longitudinale se propageant avec un effet de Poisson dans la section. Une onde de flexion est aussi provoquée par ce couplage. Alors que l'onde quasi-longitudinale a une déformée symétrique par rapport à l'épaisseur, l'onde de flexion a une déformée antisymétrique. Par cette rapide analyse, on sait maintenant que les ondes prédites par la WFE devraient être différentes des ondes de Biot, qui sont des ondes volumiques. Les trois formulations font apparaître des conditions aux limites différentes, nous étudierons donc séparément chacune d'entre elles.

## 2.4.1 Formulation UUt

### 2.4.1.1 Hypothèse pressure release (PN)

Ce cas est obtenu en utilisant seulement la matrice de rigidité dynamique de la sous-structure périodique dans l'algorithme WFE.

La figure 2.11 présente les courbes de dispersion du matériau dans le repère fréquence-partie imaginaire-partie réelle. Les trois ondes avec la plus petite partie imaginaire sont les ondes solidiennes : compression, cisaillement et flexion. Leur déformées à 1300Hz sont données sur la figure 2.12. D'autre part, la méthode prédit l'existence d'un groupe d'ondes fortement dissipatives. Ces ondes présentent le même type de comportement que l'onde lente. Elles dépendent du maillage choisi dans l'épaisseur. Les déformées de la moins dissipative d'entre elles est donnée en exemple (figure 2.13). Ces ondes font apparaître des déformations faisant penser aux modes sablier observés en utilisant une formulation en déplacement pour un fluide acoustique. Cependant, alors que ces modes peuvent être suppri-

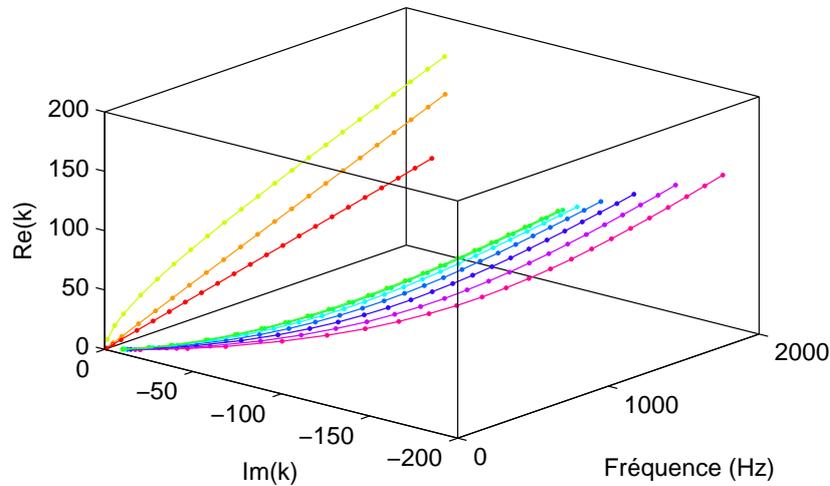


Figure 2.11 – Courbes de dispersion avec la formulation UUt (« pressure release »)

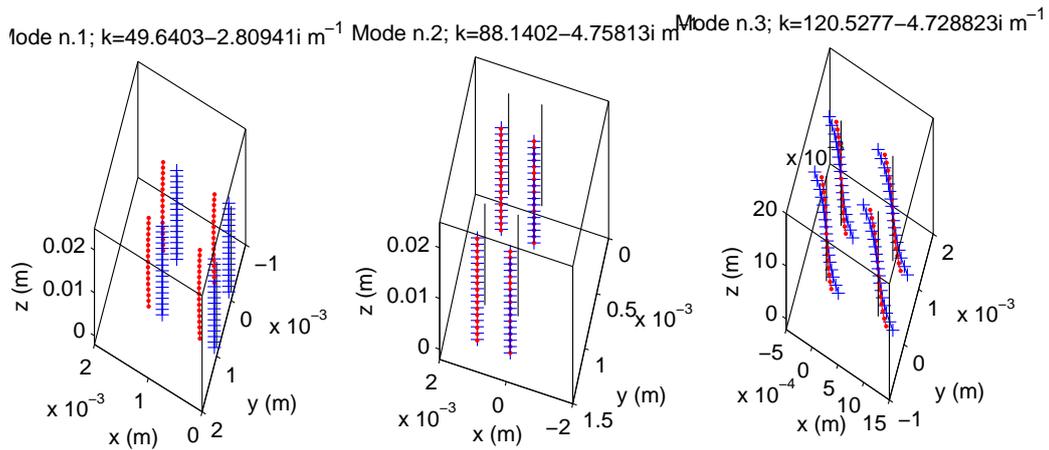


Figure 2.12 – Déformées propres des ondes solidiennes, formulation UUt, 1300Hz

més en choisissant correctement l'ordre d'intégration dans les éléments, les modes d'ondes obtenus ici ne dépendent pas de l'ordre d'intégration numérique. Un travail d'analyse numérique serait intéressant pour comprendre l'origine de ces modes numériques.

On s'attendrait à ce que l'onde lente soit prédite parmi ces ondes « numériques », cependant une observation attentive de toutes ces ondes montre qu'aucune de ces ondes ne ressemble à une onde de compression, c'est-à-dire qu'aucune ne possède un déplacement fluide quasi-constant dans l'épaisseur. La justification de ce phénomène est que les ondes prédites sont des ondes admissibles, c'est-à-dire qu'elles vérifient la condition aux limites imposée par l'algorithme. Ainsi, les ondes calculées doivent vérifier :  $\int_{\Gamma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^i d\Gamma = 0$ .

Or l'onde de compression fluide se propage avec un champ de pression uniforme sur la section du matériau. Sa valeur à l'interface est donc non nulle, de même signe sur les deux

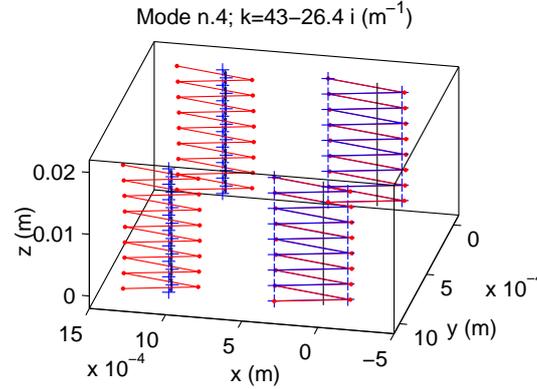


Figure 2.13 – Déformées propres de la première onde « sablier ».

interfaces libres.

Par ailleurs le déplacement fluide est couplé avec le déplacement de la phase solide. Un mouvement de compression de la phase fluide entraîne donc une compression de la phase solide, induisant un déplacement dans la direction de l'épaisseur par effet de Poisson. Par couplage entre la phase solide et la phase fluide, l'onde de compression fluide est donc marquée par un déplacement non nul dans l'épaisseur, symétrique par rapport au feuillet moyen. Le terme de bord associé à l'onde de compression fluide se propageant dans le matériau ne peut donc pas être nul.

La formulation UUt avec hypothèse de pression nulle aux interfaces permet donc de calculer des ondes solidiennes réalistes, mais ne permet pas de prédire d'onde de compression dominée par la phase fluide car l'hypothèse de bord libre est incompatible avec l'existence d'une telle onde. Pour obtenir l'onde de compression associée à la phase fluide, on ajoute la contribution du champ de pression à l'interface à la matrice de rigidité dynamique.

#### 2.4.1.2 Relaxation de l'hypothèse de pression nulle à l'interface ( $\overline{\text{PN}}$ )

La matrice de rigidité dynamique est corrigée par l'ajout d'une matrice de rigidité  $\mathbf{D}_b$  telle que :

$$\int_{\Gamma} p(\mathbf{u}^t) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^t d\Gamma \approx \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u}^s \\ \delta \mathbf{u}^t \end{pmatrix}^T \mathbf{D}_b \begin{pmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^t \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Si cette hypothèse PN aux interfaces est relâchée, on obtient alors une onde de compression solide, ainsi qu'une onde de compression fluide (voir figure 2.14). Cependant, l'onde de flexion et l'onde de cisaillement ne sont plus admissibles.

Une onde de compression fortement dissipative et une onde de compression faiblement dissipative sont prédites, on peut les appeler respectivement onde de compression solide et onde de compression fluide. Néanmoins, le relâchement de l'hypothèse  $p = 0$  sur l'interface ne permet pas d'obtenir les ondes de cisaillement et de flexion.

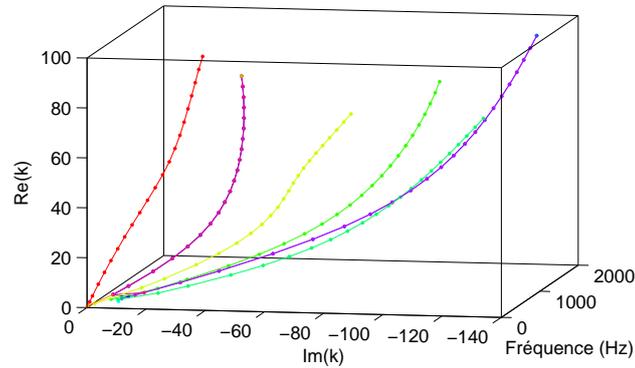


Figure 2.14 – Courbes de dispersion avec prise en compte du champ de pression ( $\overline{PN}$ ).

### 2.4.1.3 Conclusion

L'application de la WFE à une plaque poreuse modélisée par la formulation UUt du modèle de Biot-Allard a été décrite. Il a été montré que si les ondes solidiennes peuvent être décrites, l'hypothèse de pression nulle à l'interface induite par la méthode empêche la propagation d'une onde de compression fluide. Celle-ci est remplacée par un jeu d'ondes, solutions numériques mais n'ayant pas de réalité physique. Relâcher l'hypothèse sur la pression en prenant en compte l'effort virtuel associé permet de prédire l'onde de compression fluide, mais l'onde de flexion associée n'est alors pas physique, puisque une propagation avec amplitude exponentiellement croissante est observée dans les basses fréquences, rappelant un phénomène d'autoexcitation.

## 2.4.2 Formulation UP-a

Dans le cadre de cette formulation, les termes de bords peuvent vérifier la condition de déplacement total nul (DTN) ou relâcher cette hypothèse en intégrant la contribution correspondante dans la matrice de rigidité dynamique ( $\overline{DTN}$ ).

Les figures 2.15a et 2.15b présentent les courbes de dispersion obtenues pour les deux hypothèses.

Seule l'onde de cisaillement est insensible à ces hypothèses. L'onde de flexion notamment y est très sensible : avec hypothèse  $\overline{DTN}$ , cette onde possède une dissipation négative, c'est-à-dire qu'elle possède une amplitude exponentiellement croissante. Cette onde non physique peut être interprétée par un phénomène d'autoexcitation.

Avec l'hypothèse DTN, la partie imaginaire de l'onde de flexion présente un maximum local (en valeur absolue) dans les basses fréquences. Cette onde ne paraît donc pas réaliste. Physiquement, on remarquera que l'hypothèse  $\mathbf{u}^t \cdot \mathbf{n} = 0$  est difficilement réalisable quand on considère une plaque poreuse entourée d'air.

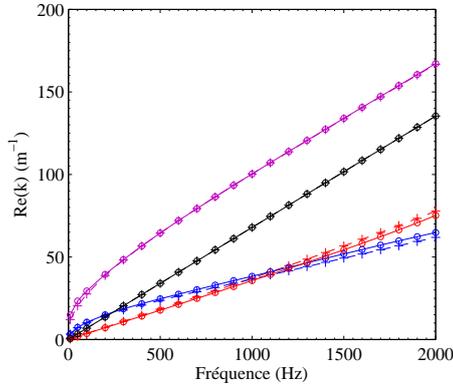
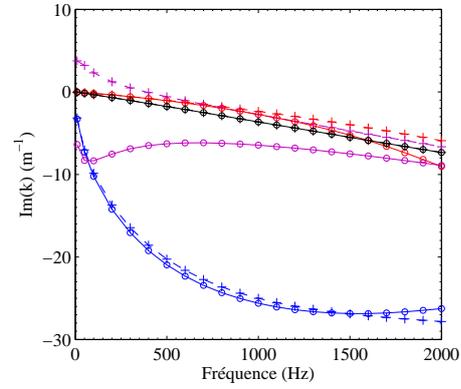
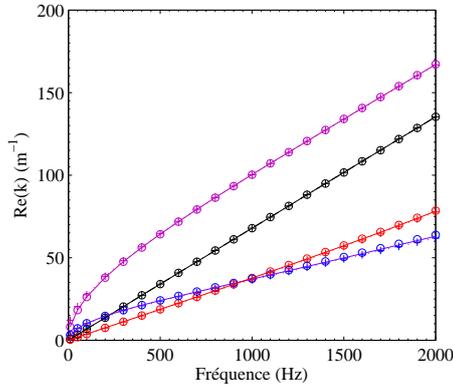
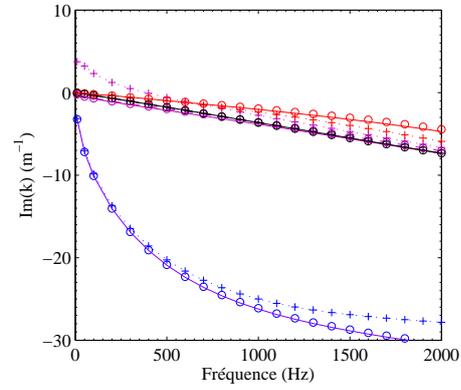
(a) UP-a. Partie réelle. (o—o) DTN; (—+—+—)  $\overline{\text{DTN}}$ .(b) UP-a. Partie imaginaire. (o—o) DTN; (—+—+—)  $\overline{\text{DTN}}$ .(c) UP-b. Partie réelle. (+...+)  $\overline{\text{PN}}$  et  $\overline{\text{DRN}}$ ; (o) PR et DRN; (—) PN et  $\overline{\text{DRN}}$ .(d) UP-b. Partie imaginaire. (+...+)  $\overline{\text{PN}}$  et  $\overline{\text{DRN}}$ ; (o) PR et DRN; (—) PN et  $\overline{\text{DRN}}$ .

Figure 2.15 – Courbes de dispersion avec la formulation UP à une interface poroélastique/air en  $z = L_z$  et  $z = 0$  (formulation asymétrique, éléments H8,  $L = 0.5\text{mm}$ ,  $n_z = 20$ ).

### 2.4.3 Formulation UP-b

Dans le cadre de la formulation UP-b, utiliser la matrice de rigidité dynamique revient à considérer que le terme de bord est nul pour tout chargement, ce qui signifie de se placer dans le cadre des hypothèses PN et DRN (voir Tab. 2.1). Si le travail virtuel des forces de pression sur l'interface est pris en compte, nous parlerons d'hypothèse  $\overline{\text{PN}}$ . Si celui des forces de déplacement relatif sur l'interface est intégré à la matrice du matériau libre, nous considérons le cas de l'hypothèse  $\overline{\text{DRN}}$ .

Les courbes de dispersion obtenues avec la formulation UP-a (DTN) sont présentées sur la figure 2.16 avec celles obtenues avec la formulation UP-b (PN et DRN). Cette figure montre que les deux formulations UP sans contributions latérales ne sont pas équivalentes.

Les différences entre les nombres d'ondes prédits pour les différentes hypothèses associées à la formulation UP-b peuvent être observées sur les figures 2.15c et 2.15d.

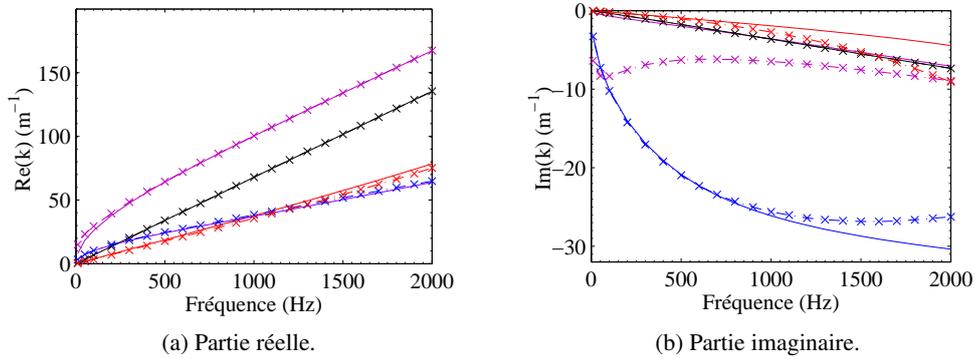


Figure 2.16 – Courbes de dispersion avec formulations UP (éléments H8,  $L = 0.2\text{mm}$ ,  $n_z = 20$ ). ( $\times\text{---}\times$ ) UP-a libre (DTN) ; (—) UP-b libre (PN et DRN).

L'hypothèse sur le déplacement relatif dans la formulation UP-b ne semble pas avoir d'effet sur les courbes de dispersion, puisqu'elles sont bien superposées avec ou sans relâchement de l'hypothèse sur la valeur du déplacement relatif (figure 2.15c et figure 2.15d).

Au contraire, l'hypothèse  $\overline{\text{PN}}$  conduit à une onde de flexion non physique, dont la courbe de dispersion est identique à celle obtenue avec l'hypothèse  $\overline{\text{DTN}}$  de la formulation UP-a.

Enfin, la figure 2.17 présente les ondes obtenues avec les formulations UP-b et UUt avec hypothèse de pression nulle aux interfaces (PN). Les courbes de dispersion des ondes

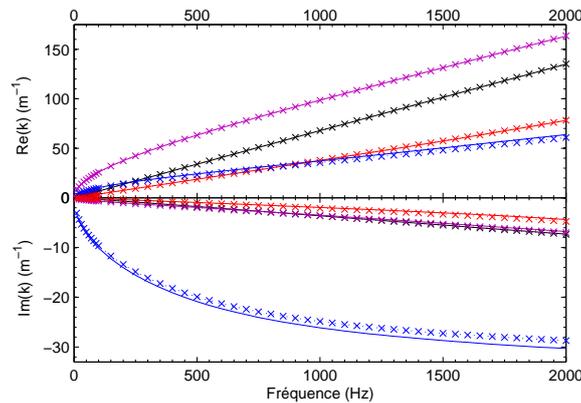


Figure 2.17 – Courbes de dispersion du matériau D, pour les formulations UP-b et UUt, avec hypothèse PN. (—) UP-b, ( $\times\text{---}\times$ ) UUt.

solidiennes sont très proches pour les deux formulations. Au contraire, et comme il a été montré précédemment, la formulation UUt ne permet pas de calculer l'onde de compression fluide à cause de la présence de la condition aux limites PN.

#### 2.4.4 Conclusion

Les conditions aux limites latérales induites par l'algorithme WFE possèdent une influence notable sur les résultats. Ces conditions aux limites dépendent de la formulation choisie. D'autres combinaisons de conditions aux limites auraient pu être choisies en considérant les formulations déplacement–déplacement UU ou déplacement–déplacement relatif.

Nous avons montré que la formulation UP-a ne permet pas de calculer les ondes se propageant dans une plaque poreuse entourée d'air. De même, la formulation UUt ne permet pas de calculer l'onde fluide, puisqu'elle est incompatible avec la condition de pression nulle.

Enfin, la formulation UP-b permet de prédire les ondes se propageant dans le milieu de dimensions finies, avec les hypothèses de pression nulle aux interfaces et de déplacement relatif nul aux interfaces.

#### 2.4.5 Paramètres numériques

Maintenant que la formulation UP-b (hypothèses de déplacement relatif nul, pression nulle) est sélectionnée pour ce cas d'étude, observons les effets des paramètres numériques.

Comme il a été dit précédemment, la condition de bords libres modifie le comportement des ondes se propageant dans le milieu. Par conséquent, aucune expression analytique des nombres d'ondes de flexion ou de quasi-compression est connue, même si l'onde de cisaillement possède le même comportement que l'onde volumique de cisaillement. A cause de la présence des erreurs numériques, il est possible de ne pas trouver de taille de sous-structure optimale pour toutes les ondes simultanément. Par conséquent, la valeur de référence pour calculer l'erreur relative entre la configuration courante et la configuration convergée a été choisi manuellement pour chaque onde.

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'effet de la dimension latérale de la structure  $L$ . Cette longueur est importante quant aux erreurs de discrétisation, donc ses effets sur la convergence des résultats ne dépendent pas des conditions aux limites latérales appliquées. Le même comportement que pour la condition d'épaisseur infinie est donc observé pour les deux formulations (voir figure 2.18). Les éléments quadratiques convergent plus rapidement, mais sont aussi plus sensibles aux erreurs numériques..

Cependant, les conditions aux limites latérales conduisent à des déformées non uniformes dans l'épaisseur, donc le nombre d'éléments utilisés pour mailler le milieu est important. Les résultats sont tracés en fonction du nombre d'éléments par longueur d'onde dans l'épaisseur. On peut observer sur la figure 2.19 que les résultats sont similaires pour les deux formulations UP.

L'utilisation d'éléments quadratiques conduit à des résultats plus précis dans le cas où peu d'éléments par longueur d'onde sont utilisés, ce qui est le cas dans le domaine des hautes fréquences pour un maillage donné. Cependant, les éléments linéaires permettent de limiter les erreurs numériques quand un grand nombre d'éléments par longueur d'onde est utilisé, en particulier pour le cas des basses fréquences.

Il est aussi intéressant de remarquer qu'à la différence d'une étude éléments finis stan-

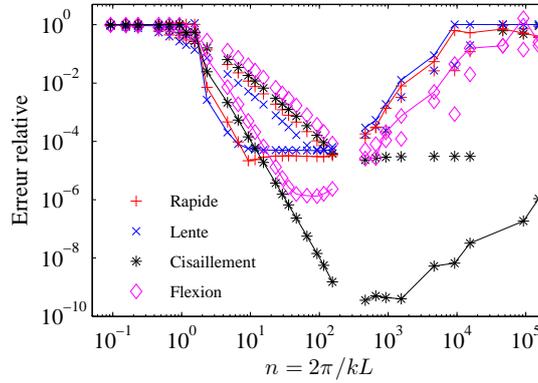


Figure 2.18 – Convergence à 2kHz avec la formulation UP-b asymétriques et conditions de bord libre : effet de la dimension size  $L$ . (—) éléments H27 ( $n_z = 8$ , référence  $L = 0.2$  mm), (no line) éléments H8 ( $n_z = 150$ , référence  $L = 0.2$  mm)).

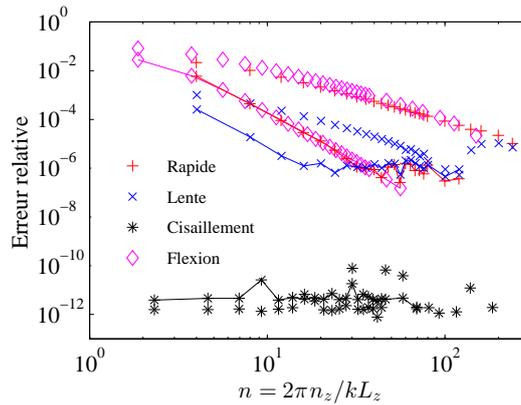


Figure 2.19 – Convergence à 2kHz avec la formulation UP-b asymétrique et condition de bord libre : effet de  $n_z$ . (—) éléments H27 ( $L = 0.2$  mm, référence  $n_z = 150$ ); (no line) éléments H8 ( $L = 0.2$  mm, référence  $n_z = 35$ )).

dard, où les éléments linéaires H8 conduisent à des erreurs importantes pour des problèmes mettant en œuvre des mouvements de flexion, ces éléments permettent tout à fait de prédire l'onde de flexion, son nombre d'onde et sa déformée dans l'épaisseur.

Comme dans le cas d'une épaisseur infinie, il faut remarquer que le nombre d'éléments par longueur d'onde est différent pour chaque onde à une longueur de sous-structure donnée. Ainsi, l'onde de flexion étant plus courte que les autres, il y aura moins d'éléments par longueur d'onde pour cette onde que pour les autres. Cette onde est donc principalement sujette aux erreurs de discrétisation, qui sont marquées dans le domaine des hautes fréquences.

Au contraire, l'onde lente a une grande longueur d'onde, il y aura beaucoup d'éléments par longueur d'onde pour la même taille de sous-structure périodique. Cette onde

risque d'être soumise à des erreurs numériques, en particulier dans le domaine des basses fréquences où les longueurs d'ondes sont encore plus grandes.

### 2.4.6 Conclusion

Pour conclure sur cette partie, les ondes se propageant dans un milieu poroélastique de dimensions latérales finies peuvent être calculées par la méthode WFE. Toutefois, il faut faire attention à trois aspects. Tout d'abord, les erreurs numériques dues au conditionnement de la matrice de rigidité doivent être contrôlées pour éviter de contaminer les résultats. Ensuite, la taille de la cellule élémentaire doit prendre en compte l'ensemble des longueurs d'ondes que l'on cherche à prédire. Enfin, il faut avoir conscience que la méthode ne permet pas d'obtenir une précision optimale pour l'ensemble des nombres d'ondes. Ainsi, plusieurs calculs sont nécessaires pour chaque onde pour pouvoir évaluer la taille de la cellule élémentaire optimale pour atteindre la convergence sans être pollué par des erreurs numériques.

## 2.5 Conclusion du chapitre

Dans cette section, nous avons présenté, justifié et appliqué la méthode WFE pour la prédiction des caractéristiques de dispersion des ondes se propageant dans un panneau poroélastique. Ce travail consiste en la première application de la WFE aux milieux poroélastiques. Il a permis de mettre en lumière des aspects de la WFE souvent passés sous silence, comme l'influence des conditions aux limites naturelles sur les ondes prédites.

En particulier, il a été montré que la méthode WFE s'applique aussi bien sur les formulations en déplacement-déplacement que sur les formulations déplacement-pression. Le conditionnement des matrices pour les formulations déplacement-pression doit être contrôlé pour éviter la propagation d'erreurs numériques. Les formulations en déplacement-déplacement sont moins sujettes aux erreurs numériques, mais font apparaître un jeu d'ondes « numériques » additionnelles. Leur origine reste à démontrer.

Ensuite, un critère général de construction de la sous-structure périodique a été proposé. La méthode étant basée sur les éléments finis, le critère standard des éléments finis est retrouvé. Afin d'obtenir une erreur inférieure à 1% sur l'ensemble des fréquences, on utilisera 10 éléments linéaires par longueur d'onde. S'il est possible d'utiliser ces dimensions dans les basses fréquences pour les formulations en déplacement-déplacement, il est préférable de modifier la taille de la cellule et du maillage en fonction de la fréquence considérée quand les formulations déplacement-pression sont utilisées.

Concernant la prédiction des ondes se propageant quand le panneau est entouré d'air, les différentes formulations ne sont pas équivalentes du fait des conditions aux limites naturelles. Ainsi, la formulation déplacement-pression (UP-b) proposée dans [29] semble la plus adaptée. Cette hypothèse doit toutefois être validée par comparaison avec des valeurs expérimentales.

Dans le chapitre 3, nous présentons l'application de la méthode WFE à l'analyse des ondes se propageant dans des structures planes multicouches. Nous nous intéresserons no-

tamment à la validation de modèles de plaque équivalente pour des matériaux poroélastiques.

Finalement, dans les chapitres 4 et 5, nous utiliserons les ondes calculées par la méthode WFE unidirectionnelle pour calculer la réponse forcée de problèmes vibroacoustiques couplés.



# Propagation d'ondes dans des plaques multicouches avec matériaux poroélastiques

---

## Sommaire

---

<b>3.1 Introduction</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>3.2 Modèles analytiques de plaques poroélastiques</b> . . . . .	<b>71</b>
3.2.1 Modèle d'ordre 0 [1] . . . . .	71
3.2.2 Modèle d'ordre 0 [2] . . . . .	72
3.2.3 Modèle d'ordre 1 sans phase fluide [3] . . . . .	73
<b>3.3 Structure monocouche</b> . . . . .	<b>75</b>
3.3.1 Modèle de solide équivalent . . . . .	75
3.3.2 Modèles de plaque équivalente . . . . .	76
<b>3.4 Composite bicouche</b> . . . . .	<b>77</b>
3.4.1 Ondes longitudinales et transversales . . . . .	78
3.4.2 Onde de flexion solide . . . . .	79
3.4.3 Effet de la phase fluide . . . . .	82
3.4.4 Paramètres de plaque équivalente en flexion . . . . .	83
<b>3.5 Composite tricouche</b> . . . . .	<b>86</b>
3.5.1 Courbes de dispersion . . . . .	87
3.5.2 Ondes dominées par les peaux . . . . .	88
3.5.3 Onde associée à la phase fluide du cœur . . . . .	92
<b>3.6 Conclusion du chapitre</b> . . . . .	<b>93</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons à la propagation d'ondes dans des plaques composites composées de couches poroélastiques et l'utilisation de leurs propriétés pour alimenter des modèles de plaque équivalente.

De tels modèles permettent à la fois de s'affranchir des problèmes de conditionnement des matrices éléments finis liés aux dimensions des éléments et de permettre une réduction importante des coûts de calcul en réduisant le nombre de degrés de liberté à prendre en compte dans l'épaisseur. Les configurations de type plaque vibrante étant courantes dans

l'industrie, ces approches sont donc particulièrement intéressante, notamment pour des approches d'optimisation.

Deux types d'approches peuvent être distingués concernant la modélisation de structures multicouches. Ces approches sont maintenant classiques dans le cas où seuls des matériaux élastiques composent la structure. La première approche consiste en la modélisation par matériau équivalent monocouche (Equivalent Single Layer). Des hypothèses *a priori* sur le champ de déplacements et de contraintes sont faites : la théorie CLPT (Classical Laminate Plate Theory) permet d'obtenir une plaque équivalent de type Kirchhoff-Love, quand les déformations en cisaillement transverse et les contraintes normales transverses sont négligées. La théorie FSDT initiée par Mindlin [119] puis développée par Whitney [55] permet de prendre en compte les rotations des sections droites. Finalement, des théories d'ordre plus élevé (HSDT High-order Shear Deformation Theory) ont été développées [54], permettant d'obtenir la réponse de la structure multicouche dans un domaine de fréquences plus large, au prix d'un coût numérique plus important.

Dans le cas de structures possédant de forts contrastes entre les couches, des théories dites couche-par-couche (Layer-Wise) ont été développées. Ce type d'approche permet d'obtenir la discontinuité des contraintes transverses aux interfaces entre les différentes couches, au prix d'un coût numérique important, puisque des inconnues sont utilisées pour chaque couche. Un bon compromis entre la richesse du contenu physique et le coût mathématique est généralement trouvé en introduisant des fonctions zigzag dans la cinématique du modèle [54, 120, 121, 122, 123].

Concernant le cas de structures multicouches composées de plaques élastiques et de couches poroélastiques, les études sont beaucoup moins courantes. Quelques modèles de plaque équivalente poroélastique ont été développés dans la littérature ([1, 3, 124, 2]). Une approche de type zigzag a été utilisée par Chazot *et al.* [56] pour simuler la réponse d'une structure cylindrique à cœur poroélastique. Une bonne corrélation avec les calculs éléments finis 3D est obtenue, néanmoins le coût de calcul reste important. De plus, les inconnues sont projetées sur une base de polynômes d'ordre arbitraire, pouvant mener à des erreurs dans le cas de matériaux trop souples.

Dans cette partie, nous ne cherchons pas à appliquer ce type d'approche au cas d'une structure multicouche avec matériaux poroélastiques. À la place, nous nous intéressons à la validation de ces modèles par approche k-space. Plus précisément, la technique WFE a montré qu'elle pouvait prédire les nombres d'ondes se propageant dans des structures multicouches arbitraires avec la même précision que les modèles d'ordre élevé. Nous considérons donc que les nombres d'ondes calculés par cette technique dans le cas de structures multicouches avec matériaux poroélastiques sont exacts. La comparaison de ces nombres d'ondes avec ceux issus de modèles analytiques permet alors de déterminer la validité et les limites de leurs hypothèses.

Ce chapitre sera divisé en quatre sections. Dans un premier temps, différents modèles de plaque équivalente poroélastique sont rappelés. Ces modèles sont ensuite comparés aux résultats WFE dans l'espace des nombres d'ondes. La pertinence des approximations faites est discutée. Ensuite, le cas d'une plaque élastique couverte d'une couche poreuse est traité. Une discussion est menée sur les paramètres de plaque équivalente. Enfin, dans le cas d'une structure sandwich à cœur poroélastique, des modèles analytiques exacts sont très diffi-

ciles à déterminer. En se basant sur l'analyse des courbes de dispersion et des déformées d'ondes, nous verrons que des choix pertinents peuvent être faits pour simplifier la physique du milieu. En particulier nous ciblerons l'influence de la phase fluide sur la réponse de la structure composite.

## 3.2 Modèles analytiques de plaques poroélastiques

Dans toute cette partie, l'épaisseur de la plaque est notée  $h$  et est portée par la direction  $z$ . Le plan moyen de la plaque est noté  $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

### 3.2.1 Modèle d'ordre 0 [1]

Le modèle de Theodorakopoulos et Beskos est issu de [1]. Les auteurs se placent dans le cadre des hypothèses de Kirchhoff-Love :

- Plaque mince élastique de masse volumique constante, les sections droites restent normales aux interfaces ;
- Petites déformations ;
- Contrainte normale nulle dans l'épaisseur :  $\sigma_{zz}^f(z) = 0$ .

Ils considèrent de plus l'hypothèse de déplacement relatif normal à l'interface.

Les champs de déplacement de la phase solide  $\mathbf{u}^s$  et de la phase fluide  $\mathbf{u}^f$  peuvent alors être approximés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{u}^f \cdot \mathbf{x} = -z \frac{\partial}{\partial x} w, \\ \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{u}^f \cdot \mathbf{y} = -z \frac{\partial}{\partial y} w, \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $w = \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{z}$ . Les équations de la plaque équivalente poroélastique sont alors données par [1] :

$$\begin{aligned} C_1 \nabla^4 w + C_2 \nabla^2 \tilde{I} + C_3 w + (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2) &= 0 \\ (C_4 \nabla^2 + C_5) \tilde{I} + \frac{h^3}{12} C_6 \nabla^2 w + \frac{h}{2} C_4 (\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1) - C_4 (\tilde{\tau}_2 - \tilde{\tau}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

où  $\tilde{\tau} = -\phi p$  est la contrainte fluide et  $\tilde{I} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau z dz$ . Les termes  $\tilde{p}_i$ ,  $\tilde{\tau}_i$  et  $\tilde{q}_i$  correspondent respectivement à la pression, à la contrainte fluide et au débit relatif, aux interfaces  $z = -h/2$  ( $i=1$ ) et  $z = +h/2$  ( $i=2$ ). Dans le chapitre 2, nous avons vu que la formulation UP-b conduit naturellement aux hypothèses « pression nulle » et « déplacement relatif nul » aux interfaces latérales. Nous pouvons donc considérer donc que les termes de bords dans l'équation (3.2) sont nuls.

Les coefficients  $C_1$  à  $C_6$  sont donnés par ([1]) :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\
C_2 &= \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left( \frac{\tilde{Q} + \tilde{R}}{\tilde{R}} - \frac{\rho_2}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \\
C_3 &= \omega^2 h \left( \tilde{\rho}_1 - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \\
C_4 &= \tilde{R} \\
C_5 &= \omega^2 \left( \tilde{\rho}_{22} - \frac{\tilde{\rho}_{12}\tilde{R} - \tilde{\rho}_{22}\tilde{Q}}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\tilde{Q} + \tilde{R}}{\tilde{R}} - \frac{\rho_2}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \right) \\
C_6 &= -2\mu\omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{12}\tilde{R} - \tilde{\rho}_{22}\tilde{Q}}{\lambda + 2\mu}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

L'équation de dispersion est alors obtenue par l'annulation du déterminant du système linéaire, soit :

$$C_1 C_4 k^6 - \left( C_1 C_5 + \frac{h^3}{12} C_2 C_6 \right) k^4 + C_3 C_4 k^2 - C_3 C_5 = 0. \tag{3.4}$$

Ce problème peut être résolu en utilisant la fonction Matlab© « root ».

### 3.2.2 Modèle d'ordre 0 [2]

Leclaire *et al.* ont proposé dans [2] un modèle de plaque équivalente d'ordre 0. Partant de la seconde formulation de Biot (déplacement-déplacement relatif), ils avancent les hypothèses suivantes :

- Le vecteur des contraintes du matériau équivalent doit être égal au vecteur des contraintes totales ;
- Hypothèse des contraintes planes  $\sigma_{zz} = 0$  ;
- Déplacement relatif purement normal ;
- Le champ de déplacements est approximé sous la forme :

$$\begin{aligned}
u_s &= \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{x} = -z \frac{\partial}{\partial x} w_s, \\
v_s &= \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{y} = -z \frac{\partial}{\partial y} w_s,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

où  $w_s$  est le déplacement normal de la phase solide :  $w_s = \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{z}$ .

L'équilibre des efforts et des moments permet alors d'exprimer les équations de la dynamique du milieu équivalent sous la forme :

$$\begin{aligned}
\left( D + \frac{\alpha^2 \tilde{K}_{\text{eq}} h^3}{12} \right) \nabla^4 w_s - h\omega^2 (\rho_t w_s + \rho_0 w) &= q \\
\alpha \tilde{K}_{\text{eq}} h \nabla^2 w_s + h\omega^2 (\rho_0 w_s + \tilde{\rho}_{\text{eq}} w) &= \Delta p
\end{aligned} \tag{3.6}$$

où  $w$  est le déplacement normal relatif, où  $\tilde{K}_{\text{eq}}$  et  $\tilde{\rho}_{\text{eq}}$  sont respectivement le module de compressibilité et la masse volumique du fluide équivalent à squelette « rigide », et où les

coefficients  $D$ ,  $\rho_t$  et  $\alpha$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\ \rho_t &= \rho_s + \phi\rho_0 \\ \alpha &= \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

L'équation de dispersion est donc donnée par :

$$\left( D + \frac{\alpha^2 \tilde{K}_{\text{eq}} h^3}{12} \right) h\omega^2 \tilde{\rho}_{\text{eq}} k^4 - \alpha \tilde{K}_{\text{eq}} h^2 \omega^2 \rho_0 k^2 + h^2 \omega^4 (\rho_0^2 - \rho_t \tilde{\rho}_{\text{eq}}) = 0. \quad (3.8)$$

Avec l'hypothèse d'un solide très rigide,  $E \gg \tilde{K}_{\text{eq}}$ , le modèle peut encore être simplifié en :

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w_s - \rho^* h\omega^2 w_s &= 0 \\ w &= -\frac{\tilde{\rho}_{\text{eq}}}{\rho_0} w_s \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\text{avec } \rho^* = \rho_t - \frac{\rho_0^2}{\tilde{\rho}_{\text{eq}}}.$$

### 3.2.3 Modèle d'ordre 1 sans phase fluide [3]

Dans [3], l'auteur présente une théorie d'ordre 1, semblable à la théorie de Reissner–Mindlin, pour prédire la vibration d'une structure bicouche plaque+poreux.

L'auteur propose de prendre en compte le cisaillement dans la phase solide sous la forme classique :

$$\begin{aligned} u_s(x, y, t) &= -z \frac{\partial w}{\partial y} - z\psi_x \\ v_s(x, y, t) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} - z\psi_y \\ w_s(x, y, t) &= w \end{aligned} \quad (3.10)$$

où  $w$  représente le déplacement normal du feuillet moyen,  $z$  la coordonnée de l'épaisseur et où  $\psi_x$  et  $\psi_y$  représentent les rotations des sections dans les plans  $(x, z)$  et  $(y, z)$  respectivement. Les relations contraintes–déformations sont écrites sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{\text{CP}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.11)$$

où la matrice des constantes élastiques dans l'hypothèse des contraintes planes est :

$$\mathbf{C}_{\text{CP}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & & & \\ \nu & 1 & & & & \\ & & (1-\nu)/2 & & & \\ & & & (1-\nu)/2 & & \\ & & & & (1-\nu)/2 & \\ & & & & & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

et où le vecteur des contraintes est noté  $\boldsymbol{\sigma} = \langle \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \rangle^T$

L'auteur choisit une approche hamiltonienne pour calculer les équations du mouvement. L'énergie cinétique  $T$  de la plaque est donnée par :

$$T = -\frac{1}{2} \int_S m\omega^2 w^2 dS \quad (3.13)$$

Remarquons ici que l'hypothèse de l'auteur conduit à négliger la contribution de la rotation de section à l'énergie cinétique. L'énergie élastique  $V$  est écrite comme la somme des énergies élastiques du mouvement de flexion et de celle associée au cisaillement :

$$V = \underbrace{\frac{1}{2} \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \langle \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy} \rangle \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz dx dy}_{\text{contribution de la flexion}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \langle 2\varepsilon_{xz}, 2\varepsilon_{yz} \rangle \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} dz dx dy}_{\text{contribution du cisaillement}}. \quad (3.14)$$

De plus, l'énergie dissipée par frottement visqueux et par dissipation thermique dans la phase fluide est négligée devant la dissipation ayant lieu dans le squelette. Cela consiste donc à considérer le matériau poreux *in vacuo*.

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations de la dynamique :

$$\begin{aligned} D_2 \nabla^4 w + D_4 \nabla^2 \theta - m\omega^2 w &= 0 \\ D_4 \nabla^4 w + D_3 \nabla^2 \theta - C_2 \theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

où  $\theta = \partial\psi/\partial x + \partial\psi_y/\partial y$  et où les termes  $D_i$  pour  $i \in \{2 : 4\}$  et  $C_2$  sont définis par (voir [3]) :

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \int_{z_1}^{z_2} z^2 dz \\ D_3 &= \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \int_{z_1}^{z_2} (z - z_1)^2 dz \\ D_4 &= \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \int_{z_1}^{z_2} z(z - z_1) dz \\ C_2 &= \kappa h_m \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} \quad \kappa = 5/6 \end{aligned} \quad (3.16)$$

où  $z_1$  et  $z_2$  sont respectivement les coordonnées selon  $\mathbf{z}$  des faces inférieure et supérieure et où  $m$  représente la masse surfacique du panneau.

L'équation de dispersion est donc donnée par l'équation :

$$(D_4^2 - D_2 D_3) k^6 - C_2 D_2 k^4 + m\omega^2 D_3 k^2 + m\omega^2 C_2 = 0. \quad (3.17)$$

**Structure multicouches** Une structure composée d'une plaque métallique d'épaisseur  $2z_1$  supporte une couche poroélastique d'épaisseur  $z_2 - z_1$ . Dans ce cas, le modèle précédent peut être complété en ajoutant l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la plaque métallique. Celle-ci est modélisée par la théorie de Kirchhoff-Love.

Finalement, l'équation de dispersion est obtenue sous la forme :

$$(D_4^2 - D_{\text{eq}}D_3)k^6 - C_2D_{\text{eq}}k^4 + m_{\text{eq}}\omega^2D_3k^2 + m_{\text{eq}}\omega^2C_2 = 0 \quad (3.18)$$

où  $m_{\text{eq}} = m_1 + m_2$  est la masse surfacique de la structure, définie comme la somme des masses surfaciques de chaque couche, et où  $D_{\text{eq}} = D_1 + D_2$  est la rigidité équivalente en flexion de la structure composite.

### 3.3 Structure monocouche

Dans cette section, nous montrons que l'analyse k-space est une technique pertinente et efficace pour juger de la validité d'un modèle. Nous nous intéressons au cas d'un matériau monocouche poroélastique (matériau D, 2 cm d'épaisseur).

Dans le matériau poroélastique, 4 ondes se propagent avec une faible dissipation : 3 ondes « solidiennes » et 1 onde « fluide ». Les 3 ondes « solidiennes » sont l'onde de compression « solide », l'onde de cisaillement et l'onde de flexion.

Nous cherchons à déterminer si les modèles simplifiés permettent de prendre en compte la dynamique du milieu, c'est-à-dire s'ils permettent de prédire les courbes de dispersion du milieu. N'ayant pas de modèle exact à disposition, nous considérerons que la méthode WFE, en dépit des difficultés liés aux erreurs numériques, permet d'obtenir la valeur exacte des nombres d'ondes. En effet, plusieurs travaux [109, 125] ont comparé les nombres d'ondes obtenus par la méthode WFE et par des théories de plaque, et ont montré que dans le cas de matériaux souples la WFE permet de retrouver les mêmes résultats que les théories d'ordre élevé.

#### 3.3.1 Modèle de solide équivalent

Dans un premier temps, nous simplifions le milieu poreux en le considérant comme un solide équivalent. Les paramètres équivalents de ce solide (coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , dissipation hystérétique  $\eta$ , masse volumique  $\rho$ ) sont choisis identiques à ceux du milieu poreux *in vacuo*, sauf pour sa densité qui est choisie en tenant compte de la présence du fluide à l'intérieur des pores :

$$\begin{aligned} \lambda &= \tilde{A} - \frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{R}} \\ \mu &= N \\ \eta &= \eta_p \\ \rho &= (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Les courbes de dispersion des ondes solidiennes obtenues sont présentées sur la figure 3.1. Une bonne ressemblance entre les courbes de dispersion obtenues par le modèle de Biot et par le modèle de solide équivalent peut être observée. Les parties réelles des nombres d'ondes sont très proches, signifiant que la phase fluide ne contribue pas à la rigidité du matériau. Au contraire, un décalage peut être observé entre les parties imaginaires des nombres d'ondes : le modèle de solide équivalent sous-estime la dissipation, cela signifie que la phase fluide est responsable d'une augmentation de la dissipation dans le matériau.

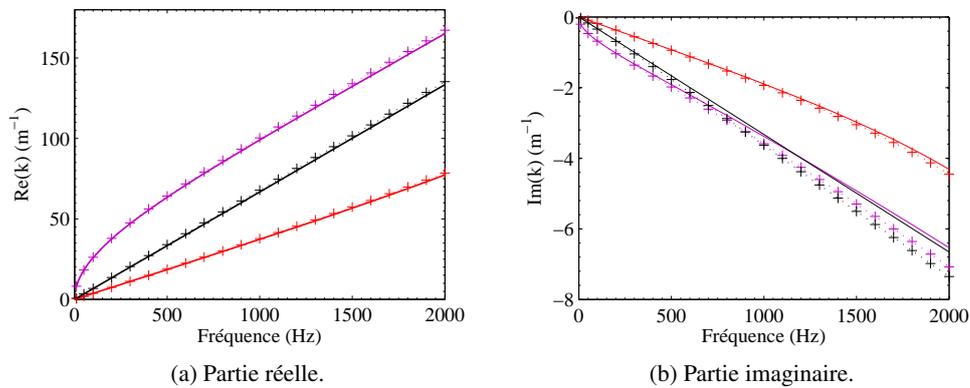


Figure 3.1 – Courbes de dispersion des ondes solidiennes. (+—+) WFE2D et (—) WFE2D sur solide *in vacuo*.

### 3.3.2 Modèles de plaque équivalente

La figure présente les courbes de dispersion de l'onde de flexion obtenues par la WFE et par les différents modèles simplifiés.

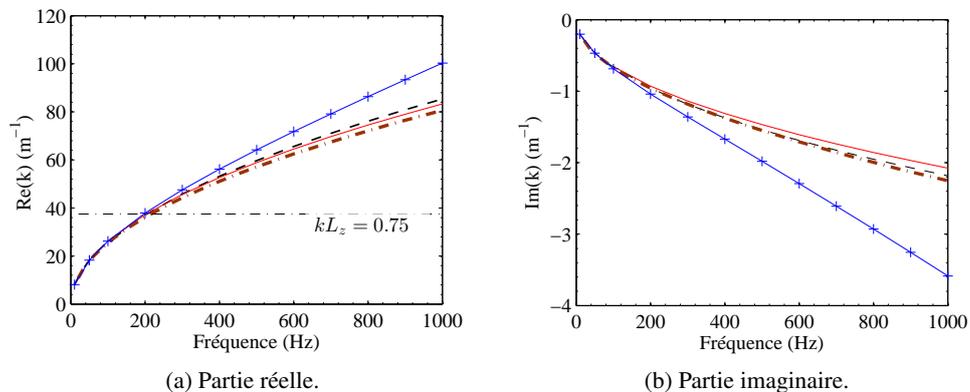


Figure 3.2 – Courbes de dispersion de l'onde de flexion pour les différents modèles. (+—+) WFE2D (UP-b, PN); (---) Plaque poroélastique d'ordre 1 (ref.[3]); (-·-) Plaque poroélastique d'ordre 0 [1]; (—) Plaque d'ordre 0 pour le solide équivalent.

Une bonne concordance des nombres d'ondes peut être observée dans le domaine des basses fréquences. Cette concordance est confirmée par l'allure de la déformée de l'onde de flexion à 200 Hz, pour laquelle les sections droites restent droites (figure 3.3a). Cependant, une différence apparaît pour des nombres d'ondes de flexion  $k$  tels que  $kL \geq 0.75$ , soit pour ce matériau au-delà de 200 Hz. Pour des fréquences supérieures à cette valeur, l'effet dans l'épaisseur de l'onde de cisaillement puis des ondes de compression devient visible sur le champ de déformation (figure 3.3b). L'onde de flexion présente alors une composante dans le plan transverse et la section droite est déformée. Ces effets sont donc parfois appelés

effets hautes fréquences. Les matériaux poreux étant très souples, la limite de validité des modèles simplifiés est donc située dès les basses fréquences acoustiques.

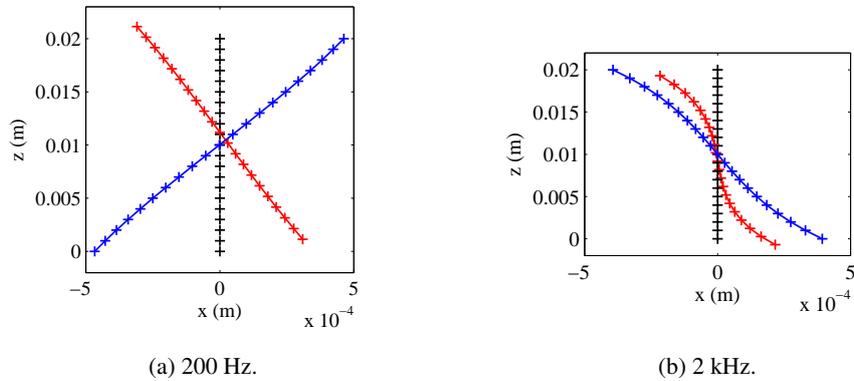


Figure 3.3 – Déformée de l'onde de flexion. (noir) : section droite non déformée ; (rouge) déplacement de la phase solide ; (bleu) pression (affichée selon  $x$ ). Échelles arbitraires indépendantes pour le déplacement et la pression.

### 3.4 Composite bicouche

Nous considérons ici une structure plane composée d'une couche métallique supportant une couche de matériau poreux (voir figure 3.4).

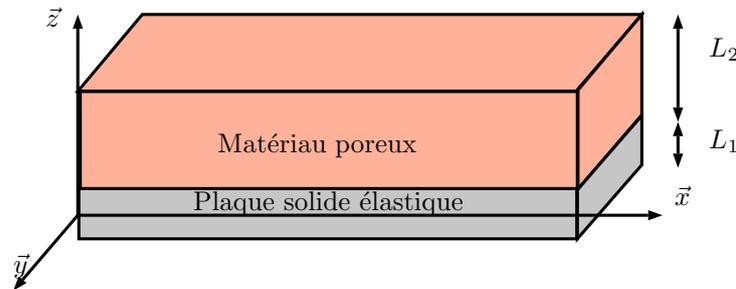


Figure 3.4 – Schéma de la géométrie bicouche considérée.

La problématique de cette partie est de savoir s'il est possible de modéliser une structure composite de ce type par un modèle de plaque équivalente homogène. En effet, si le modèle de plaque homogène est pertinent, il serait alors rapide de calculer la réponse de la plaque double couche à partir des paramètres équivalents identifiés sur les courbes de dispersion. Cependant, le deuxième aspect consiste à pouvoir déterminer les limites des paramètres (épaisseurs, matériaux) ne permettant pas l'application de ce modèle.

Les données géométriques et matériaux sont issues de [3]. Les épaisseurs sont  $L_1 = 1$  mm et  $L_2 = 5$  cm. Le matériau élastique est de l'aluminium ( $E = 69$  GPa,  $\nu = 0.33$ ,  $\eta = 0.01$  et  $\rho = 2778$  kg/m<sup>3</sup>). Le matériau poreux est donné en Annexe A.1 (matériau G).

Dans cette section, toutes les grandeurs référencées avec un indice « 1 » désigneront des grandeurs associées à la plaque métallique, tandis que les grandeurs concernant la couche poreuse sont notées avec un indice « 2 ».

Les courbes de dispersion de la structure composite sont présentées en figure 3.5.

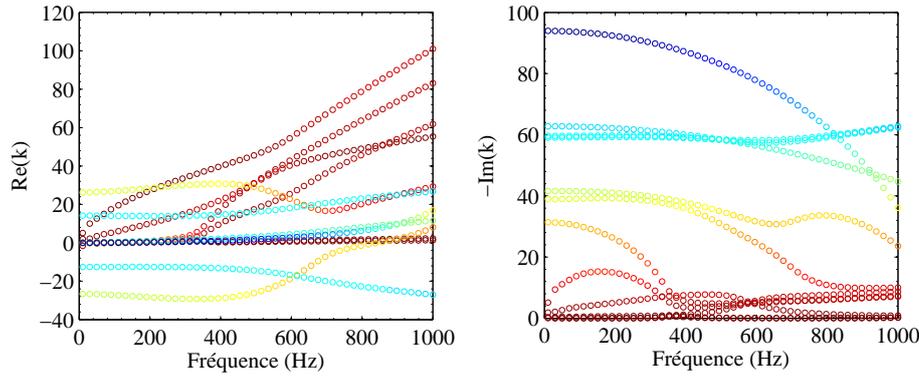


Figure 3.5 – Courbes de dispersion de la structure composite.

La partie réelle et l'opposé de la partie imaginaire des nombres d'ondes sont présentés ici. Ce choix est fait afin de pouvoir tracer plus tard l'axe y en échelle logarithmique. La couleur des courbes représente la partie imaginaire : la couleur rouge foncé désigne des ondes faiblement dissipées tandis que les ondes évanescentes sont colorées en bleu. Un grand nombre d'ondes est présenté, nous remarquons la présence de plusieurs ondes de section dont la fréquence de coupure est dans la plage de fréquence visée.

Dans les paragraphes suivants nous présenterons séparément les différents types d'ondes.

### 3.4.1 Ondes longitudinales et transversales

Ces ondes sont des ondes faiblement dissipées et non dispersives dans les basses fréquences. Elles correspondent aux ondes quasi-longitudinales et transversales se propageant dans le milieu homogène équivalent dont le module d'Young  $E_{eq}$ , le second coefficient de Lamé  $\mu_{eq}$ , la masse volumique équivalente  $\rho_{eq}$  et la masse surfacique équivalente  $m_{s,eq}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 E_{eq} &= (E_1 L_1 + E_2 L_2) / (L_1 + L_2) \\
 \mu_{eq} &= (\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2) / (L_1 + L_2) \\
 \nu_{eq} &= E_{eq} / 2 / \mu_{eq} - 1 \\
 \rho_{eq} &= (\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2) / (L_1 + L_2) \\
 m_{s,eq} &= (\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2).
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Les nombres d'ondes de l'onde quasi-longitudinale  $k_L$  et de l'onde transversale  $k_T$  peuvent donc être approchés par :

$$\begin{aligned} k_L &= \omega \sqrt{\frac{\rho_{\text{eq}}(1 - \nu_{\text{eq}}^2)}{E_{\text{eq}}}} \\ k_T &= \omega \sqrt{\frac{\rho_{\text{eq}}}{\mu_{\text{eq}}}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Les courbes de dispersion obtenues avec la méthode WFE (formulation UP-b pour la couche poroélastique) sont comparées avec le modèle homogène sur la figure 3.6. Un bon accord peut être observé dans les basses fréquences, mais au-delà de 200 Hz, un écart significatif est remarqué aussi bien sur la partie réelle que sur la partie imaginaire des nombres d'ondes. En effet, aux alentours de 350 Hz, on passe d'un mode où les deux faces latérales vibrent en phase, à un mode pour lequel les deux faces vibrent en opposition de phase (figure 3.7).

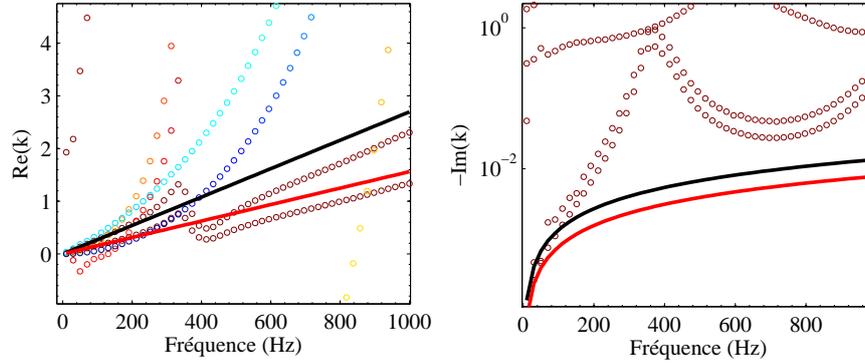


Figure 3.6 – Courbes de dispersions pour les ondes quasi-longitudinales et transversales. (o) WFE2D ; (—) Onde quasi-longitudinale ; (—) Onde transversale.

### 3.4.2 Onde de flexion solide

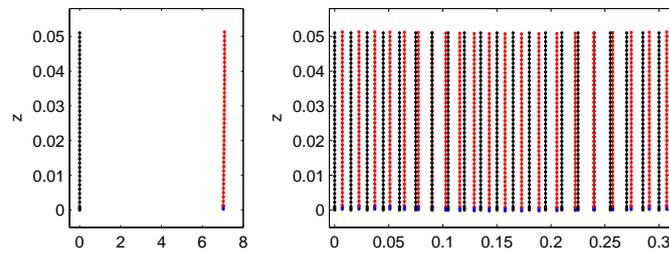
À ces deux ondes s'ajoute une troisième onde faiblement dissipée, et associée au mouvement du squelette. Cette onde est une onde dispersive correspondant à l'onde de flexion du matériau homogène. Elle présente un mouvement asymétrique, c'est-à-dire que les deux faces externes se déplacent en phase normalement au plan moyen.

Elle peut être retrouvée en considérant que la flexion est majoritairement située dans la plaque métallique. Le nombre d'onde de l'onde de flexion dans la plaque seule est donné par :

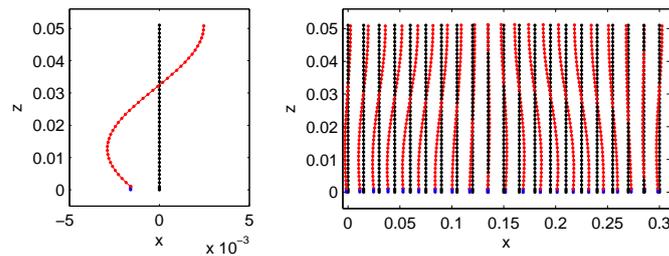
$$k_p = \left( \omega \sqrt{\frac{\rho_1 L_1}{D_1}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.22)$$

avec  $D_1 = E_1 L_1^3 / 12 / (1 - \nu_1^2)$ .

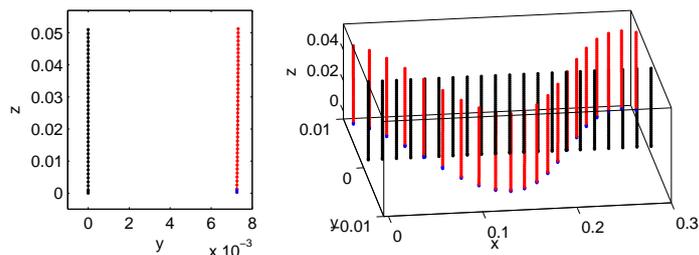
En ce qui concerne la partie réelle des nombres d'ondes, un très bon accord peut être observé entre les trois modèles jusqu'à 500 Hz, fréquence à laquelle survient un effet de



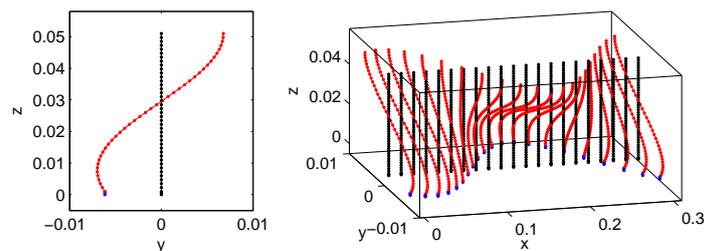
(a) Onde quasi-longitudinale à 30 Hz.



(b) Onde quasi-longitudinale à 797 Hz.



(c) Onde transversale à 30 Hz.



(d) Onde transversale à 797 Hz.

Figure 3.7 – Déformées des ondes quasi-longitudinales et transversales à 30 Hz et 797 Hz. Bleu : déplacement de la plaque élastique, rouge : déplacement de la phase solide de la couche poreuse.

*veering* avec la première onde de section couplant flexion et cisaillement. Au-delà, dans le domaine des hautes fréquences, les ondes de flexion se font avec cisaillement de la couche poreuse, leur vitesse est donc égale à la vitesse des ondes de cisaillement dans le matériau

poreux.

Au contraire, la partie imaginaire du nombre d'onde est largement sous-estimée en considérant la vibration de la plaque libre. Le modèle de plaque équivalente donne des résultats satisfaisants.

Finalement, les déformées de l'onde de flexion sont présentées en figure 3.8.

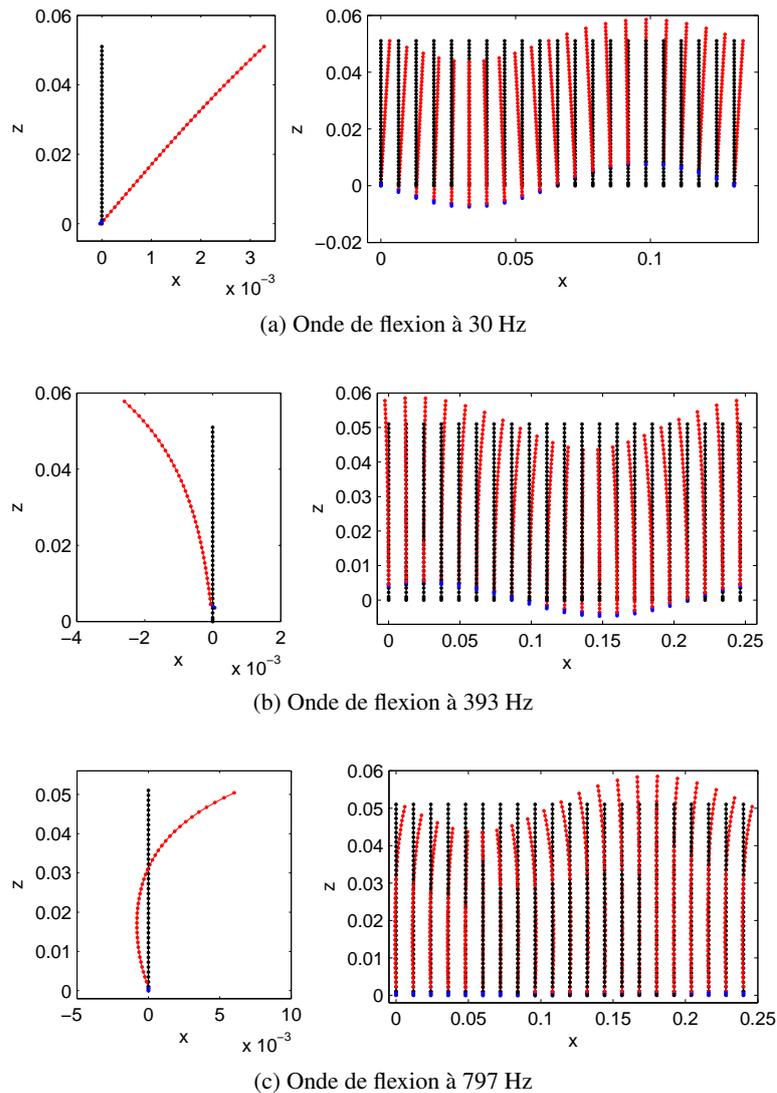


Figure 3.8 – Déformées de l'onde de flexion. Bleu : déplacement de la plaque élastique, rouge : déplacement de la phase solide de la couche poreuse.

Dans les basses fréquences, en-dessous de 500 Hz, la flexion se fait sans compression importante du matériau poroélastique. Le déplacement normal est approximativement constant dans l'épaisseur, les sections restent droites à 90 Hz (figure 3.8a), mais sont courbées à 393 Hz (figure 3.8b). Au-delà de 500 Hz, le matériau poreux subit l'essentiel de la compression dans l'épaisseur. La plaque élastique se déplace peu relativement à la couche

poroélastique (figure 3.8c). Le modèle de plaque équivalente d'ordre 1 n'est plus valide à ces fréquences, justifiant l'écart entre les nombres d'ondes calculés par WFE et par ce modèle.

### 3.4.3 Effet de la phase fluide

Une onde propagative mais dissipée est apportée par la présence de la phase fluide. Cette onde est une onde de compression, le couplage avec la plaque métallique se fait par effet de Poisson. Les courbes de dispersion obtenues par WFE2D et celles de l'onde lente sont présentées sur la figure 3.9.

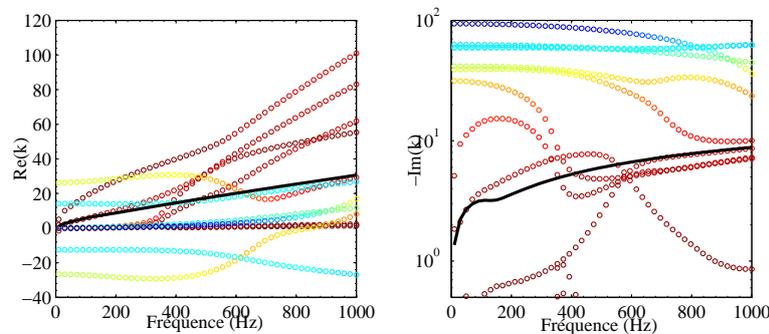


Figure 3.9 – Courbes de dispersion pour l'onde associée à la phase fluide. (o) WFE2D ; (—) onde lente.

Les déformées de cette onde sont présentées en figure 3.10.

Cette onde peut être interprétée de plusieurs manières en fonction de la fréquence. Dans les basses fréquences (figure 3.10a) cette onde présente l'aspect d'une onde de flexion asymétrique. Cependant quand les fréquences augmentent, à 393 Hz, la déformée de l'onde devient une déformée de flexion symétrique (figure 3.10a). Pour des fréquences encore supérieures, il est difficile de savoir quelle onde est réellement l'onde fluide puisque celle-ci se couple avec les ondes de section, notamment l'onde de flexion symétrique.

Finalement, pour déterminer si la phase fluide a d'autres effets majeurs, nous proposons de superposer les courbes de dispersion obtenues avec la formulation UP avec les courbes obtenues avec un modèle de solide équivalent *in vacuo*. Cette comparaison est présentée figure 3.11.

Afin de mieux visualiser les petits nombres d'ondes, ces mêmes courbes sont présentées en échelle semilog en nombre d'onde figure 3.12.

Les courbes de dispersion des ondes quasi-longitudinales (L) et transversales (T) sont parfaitement superposées pour les deux modèles. Le modèle solide *in vacuo* permet d'obtenir les mêmes courbes de dispersion de l'onde de flexion (Flex) en dessous de la fréquence de *veering*, en sous-estimant légèrement l'amortissement cependant.

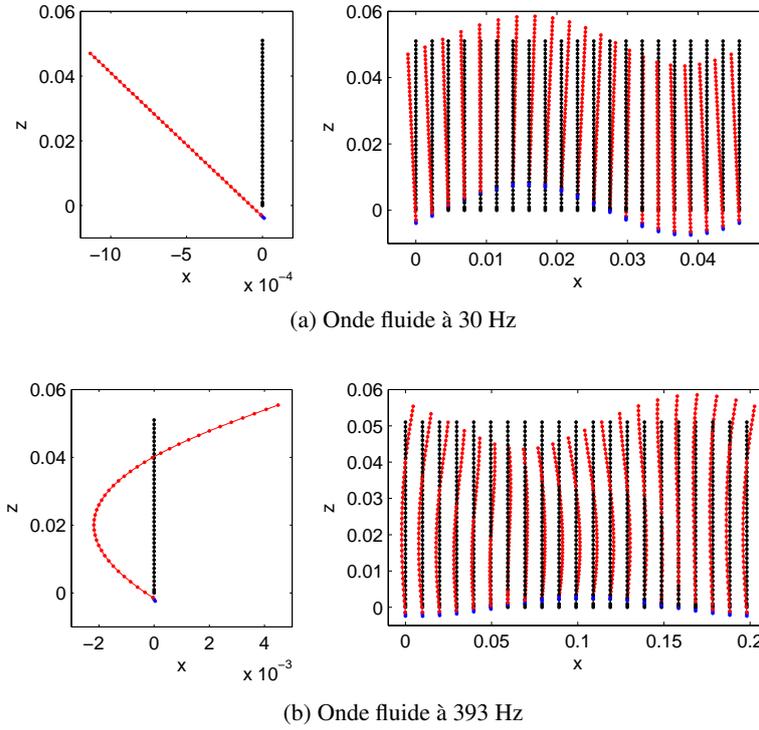


Figure 3.10 – Déformées de l’onde fluide. Bleu : déplacement de la plaque élastique, rouge : déplacement de la phase solide de la couche poreuse.

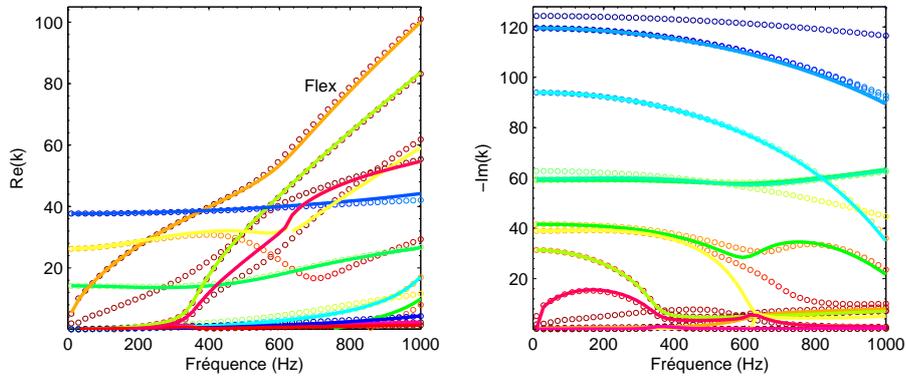


Figure 3.11 – Courbes de dispersion calculées par WFE2D. Couche poroélastique modélisée par : (o) formulation UP01, (—) Solide *in vacuo*.

### 3.4.4 Paramètres de plaque équivalente en flexion

Si la structure composite peut être considérée globalement comme une plaque d’ordre 0, les équations de la plaque équivalente sont alors :

$$D_{eq} \nabla^4 w - m_{eq} \omega^2 w = 0 \tag{3.23}$$

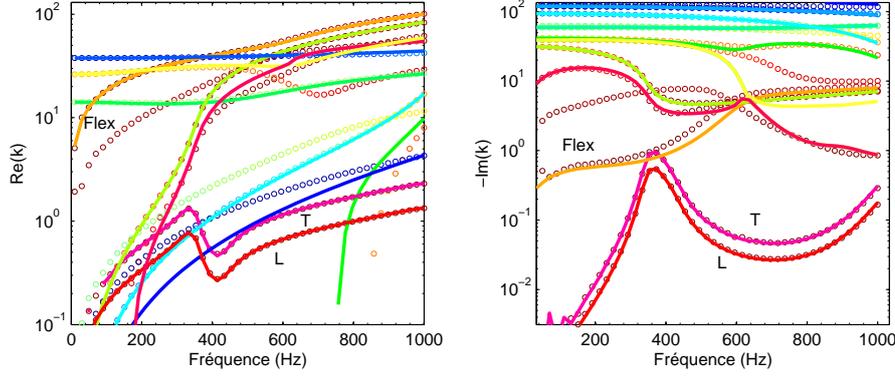


Figure 3.12 – Courbes de dispersion calculées par WFE2D. Couche poroélastique modélisée par : (o) formulation UP-b, (—) Solide *in vacuo*. Échelle log-log pour visualiser les petits nombres d'ondes.

où  $w$  est le déplacement normal de la plaque,  $D_{\text{eq}}$  son module de rigidité en flexion et  $m_{\text{eq}}$  sa masse surfacique. L'équation de dispersion s'écrit alors sous la forme :

$$k = \left( \omega^2 \frac{m_{\text{eq}}}{D_{\text{eq}}} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (3.24)$$

La masse surfacique de la plaque équivalente peut être calculée à partir des masses surfaciques des différentes couches  $m_1$  et  $m_2$  respectivement, sous la forme :

$$m_{\text{eq}} = m_1 + m_2 \quad (3.25)$$

tandis que le module de rigidité en flexion peut être évalué à partir du nombre d'onde de flexion :

$$D_{\text{eq}} = \frac{m_{\text{eq}} \omega^2}{k^4}. \quad (3.26)$$

Le modèle RKU (Ross, Kerwin et Ungar [126]) s'applique aux plaques multicouches élastiques dont les épaisseurs sont fines. Dans ce modèle, le module de rigidité en flexion est obtenu par la somme des contributions de chaque couche :

$$D_{\text{RKU}} = D_1 + D_2 \quad (3.27)$$

avec

$$D_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \int_{-L_1/2}^{L_1/2} z^2 dz, \quad D_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \int_{L_1/2}^{L_1/2 + L_2} z^2 dz. \quad (3.28)$$

Dans le cas où la dissipation dans le matériau est introduite sous la forme d'un amortissement hystérétique  $\eta_{\text{eq}}$ , le module de rigidité en flexion est alors complexe :  $D_{\text{eq}} = D_{\text{eq}}(1 + i\eta_{\text{eq}})$ .

Le coefficient d'amortissement hystérétique de la plaque équivalente peut être évalué dans les basses fréquences à partir de l'équation de dispersion :

$$k_{\text{Flex}} = \left( \frac{\rho h \omega^2}{D(1 + i\eta_{\text{eq}})} \right)^{1/4} \quad (3.29)$$

donc

$$\eta_{\text{eq}} = \tan\left(4\text{atan}\left(-\frac{\text{Im}(k)}{\text{Re}(k)}\right)\right). \quad (3.30)$$

Dans le cas d'un amortissement faible, si  $\eta_{\text{eq}} \ll 1$ , l'amortissement de la plaque multicouche peut être approximé en fonction du nombre d'onde  $k$  par :

$$\eta_{\text{eq}} \approx -4\frac{\text{Im}(k)}{\text{Re}(k)}. \quad (3.31)$$

L'évolution en fonction de la fréquence de la rigidité en flexion et de l'amortissement hystérétique est donnée en figure 3.13.

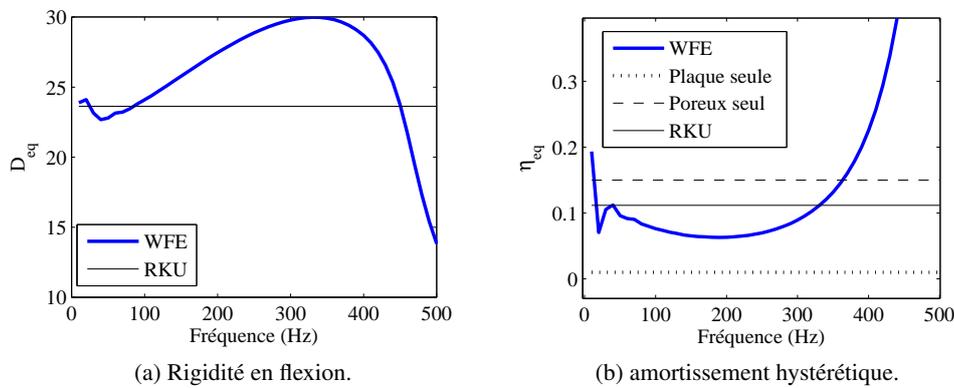


Figure 3.13 – Paramètres de la plaque équivalente.

Le coefficient d'amortissement de la plaque équivalente, dans son domaine de validité, est situé pour cette configuration entre les coefficients d'amortissements des deux couches prises indépendamment. À partir de 400 Hz, l'échange d'énergie avec le mode de section évanescence se traduit par une augmentation de la partie imaginaire du nombre d'onde de flexion, le coefficient d'amortissement équivalent augmente donc. Nous retrouvons par ailleurs le résultat classique de la surestimation du coefficient d'amortissement hystérétique et du module de rigidité en flexion par la théorie RKU.

Dans un second temps, nous testons un autre matériau pour la même configuration géométrique (matériau H). Ce matériau est beaucoup plus souple, et son amortissement hystérétique est plus faible. Les courbes de dispersion de l'onde de flexion sont alors présentées sur la figure 3.14.

Pour ce matériau, le couplage avec la première onde de section a lieu dans les fréquences plus basses puisque le matériau est plus souple. Si une bonne superposition entre les courbes de dispersion est observée en dessous de 200 Hz, les effets de cisaillement et de compressibilité deviennent prédominants au-delà de 200 Hz, invalidant les hypothèses du modèle simplifié.

Le coefficient d'amortissement est cette fois de l'ordre de celui du matériau poreux, mais la théorie RKU cette fois n'est plus valable pour ce matériau (figure 3.15).

Ces observations montrent que la comparaison des nombres d'ondes exacts calculés par WFE avec ceux issus de modèles simplifiés permet de déterminer la gamme de fréquences

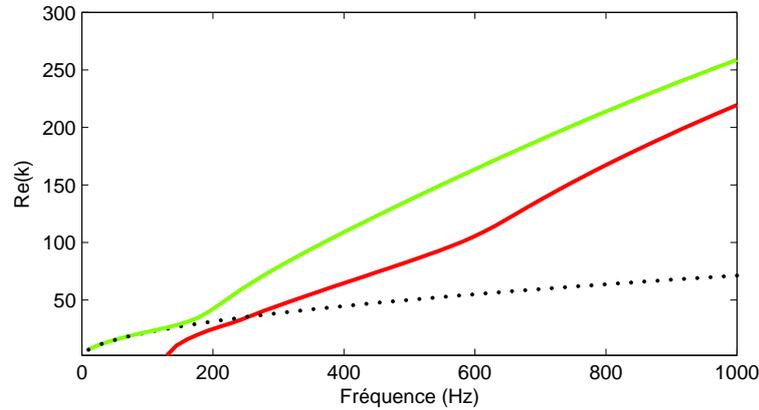


Figure 3.14 – Courbes de dispersion avec un matériau plus souple.

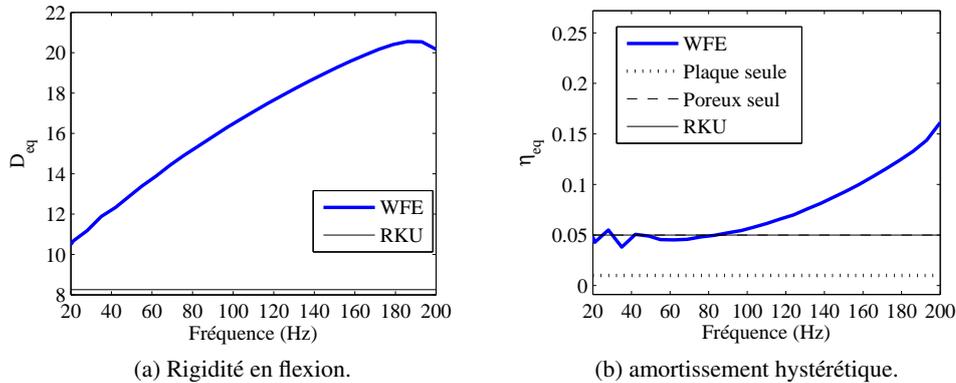


Figure 3.15 – Paramètres de la plaque équivalente avec un matériau plus souple (matériau H).

dans laquelle les approximations faites par ces modèles sont pertinentes. Ces domaines de validité sont susceptibles de changer avec le matériau poroélastique et son épaisseur. Un calcul initial par WFE permet donc d'estimer la valeur de la dissipation de la structure dans la configuration choisie.

### 3.5 Composite tricouche

Enfin, le dernier exemple traite ici celui d'un matériau composite à cœur poroélastique (voir figure 3.16).

Les dimensions sont  $L_1 = L_3 = L_p = 1$  mm et  $L_c = 2$  cm. Les deux plaques sont en aluminium ( $E_p = 69$  GPa,  $\nu_p = 0.33$ ,  $\rho_p = 2778$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta_p = 0.01$ ). Le matériau poroélastique est donné en Tab.A.1 (matériau I). Nous notons avec l'indice  $c$  toutes les grandeurs relatives au cœur. Les raideurs en cisaillement et en compression du cœur sont définies par :  $K_s = \mu_c/L_c$  et  $K_c = E_c/L_c$ .

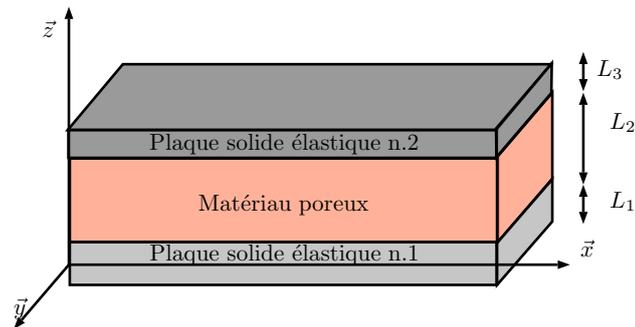


Figure 3.16 – Schema de la configuration sandwich.

Les résultats WFE ont été obtenus à partir d'un modèle éléments finis développé sous Matlab©. Le maillage dans l'épaisseur est constitué d'un élément pour chaque peau et de 30 éléments pour le cœur (éléments quadratiques H27). La dimension de la cellule périodique est  $L = 1$  cm, de manière à avoir au moins 6 éléments par longueur d'onde sans être sujet à des erreurs numériques trop larges.

### 3.5.1 Courbes de dispersion

Les courbes de dispersions de cette structure sont données en figure 3.17.

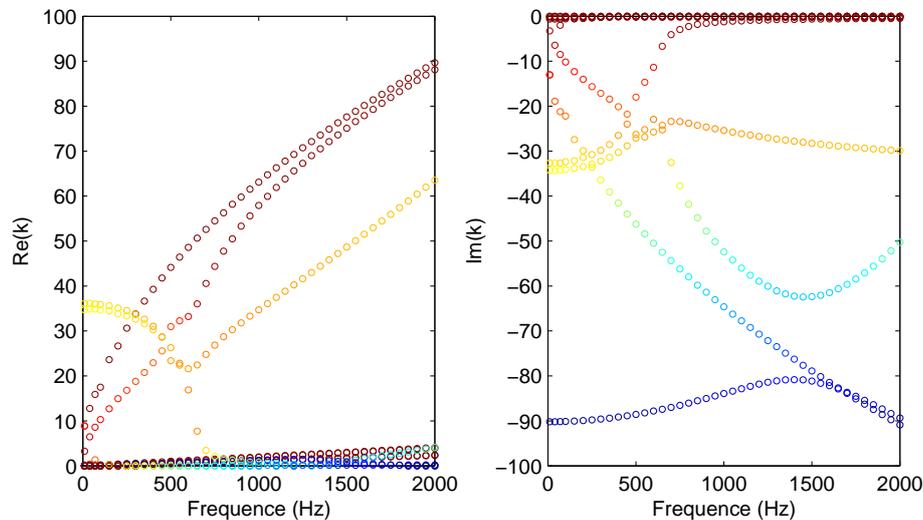


Figure 3.17 – Courbes de dispersion de la structure sandwich considérée, prédites par WFE2D.

Pour faciliter la lecture, les couleurs sont fonction de la partie imaginaire du nombre d'onde. Cela permet visuellement de distinguer les ondes évanescentes (en bleu) des ondes propagatives faiblement dissipées (en rouge).

La structure fait apparaître des comportements très différents. En effet, les longueurs d'ondes associées aux peaux sont typiquement grandes, tandis que celles se propageant

dans le cœur sont beaucoup plus petites. Ces différences de longueurs d'ondes sont visibles sur la figure 3.17. Un groupe d'ondes faiblement dissipées à petit nombre d'onde existe, ainsi qu'une onde très courte mais peu dissipée. Enfin, la structure présente des ondes à petites longueurs d'ondes mais très dissipées ainsi que des ondes évanescentes.

L'analyse des ondes se propageant dans la structure est basée sur les résultats développés dans divers travaux [127, 128] dans le cas de matériaux élastiques. On cherchera alors à comprendre plus particulièrement l'influence de la phase fluide sur le mouvement de la structure.

### 3.5.2 Ondes dominées par les peaux

Les ondes dominées par les peaux peuvent être classifiées en considérant les ondes faiblement dispersives (onde quasi-longitudinale et onde de cisaillement transverse), et les ondes dispersives (ondes de flexion).

#### 3.5.2.1 Ondes faiblement dispersives

Parmi les ondes à faible nombre d'onde se trouvent deux ondes longitudinales (L) et deux ondes transversales (T). Leur dynamique est dominée par les peaux (figure 3.18).

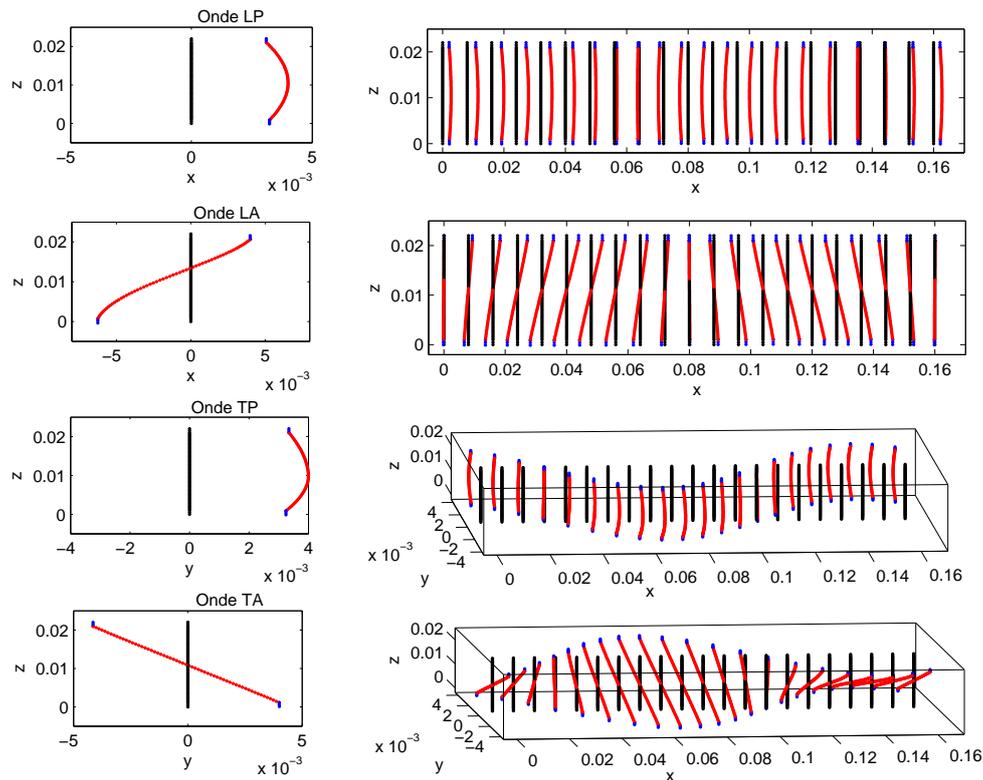


Figure 3.18 – Déformées de la plaque (avec amortissement nul) sur deux périodes. Modes à 1000 Hz. Bleu : déplacement des peaux, rouge : déplacement de la phase solide du cœur poreux.

**Ondes en phase** Les ondes longitudinales ou transversales en phase correspondent aux ondes se propageant dans le milieu homogène équivalent, dans le domaine des basses fréquences. Dans ce domaine, la masse surfacique équivalente, la raideur axiale équivalente et la raideur équivalente en cisaillement sont respectivement données par :

$$\begin{aligned} m_{\text{eq}} &= 2\rho_p L_p + \rho_c L_c \\ D_{\text{eq}} &= 2E_p L_p + E_c L_c \\ G_{\text{eq}} &= 2\mu_p L_p + \mu_c L_c. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Les équations de dispersion des ondes LP et TP sont alors :

$$\begin{aligned} k_{LP} &= \omega \sqrt{m_{\text{eq}}/D_{\text{eq}}} \\ k_{TP} &= \omega \sqrt{m_{\text{eq}}/G_{\text{eq}}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

**Ondes en opposition de phase** Les nombres d'ondes des ondes longitudinales et transversales en opposition de phase peuvent être retrouvés en interprétant la structure comme deux guides d'ondes parallèles (les peaux) couplés par une raideur (figure 3.19) [127, 128]. Comme les peaux se déplacent en opposition de phase, il n'y a pas d'effet de masse ajoutée par le cœur, contrairement aux ondes en phase.

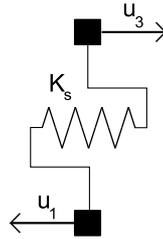


Figure 3.19 – Interprétation des ondes LA et TA.

Les équations du mouvement sont alors :

$$\begin{aligned} \frac{E_p L_p}{(1 - \nu_p^2)} u_3^{(2)} - \rho_p L_p \omega^2 u_3 + K_s (u_3 - u_1) &= 0 \\ \frac{E_p L_p}{(1 - \nu_p^2)} u_1^{(2)} - \rho_p L_p \omega^2 u_1 + K_s (u_1 - u_3) &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

En posant  $w(x) = W(k) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  et en appliquant la condition d'opposition de phase  $u_1 = -u_3$ , on obtient l'équation de dispersion des ondes LA et TA [127, 128] :

$$\begin{aligned} k_{LA} &= \left( \frac{(\omega^2 L_p \rho_p - 2K_s)(1 - \nu_p^2)}{E_p L_p} \right)^{\frac{1}{2}} \\ k_{TA} &= \left( \frac{\omega^2 L_p \rho_p - 2K_s}{\mu_p L_p} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

On peut observer sur la figure 3.20 un bon accord entre le modèle analytique et les résultats WFE. Les résultats divergent pour la partie imaginaire à partir de 1000 Hz, avec

une sous-estimation de la dissipation par le modèle analytique. Cela traduit à la fois les effets de la compression du squelette et de la dissipation survenant dans la phase fluide. Cela est dû au fait que dans les hautes fréquences, la section du cœur poroélastique est soumise à des courbures importantes. L'énergie est alors majoritairement située dans le cœur [128]. Le modèle simplifié, ne tenant pas compte de la présence de fluide et ne prenant pas en compte les effets de compressibilité, est donc très pertinent malgré des hypothèses très fortes sur la cinématique.

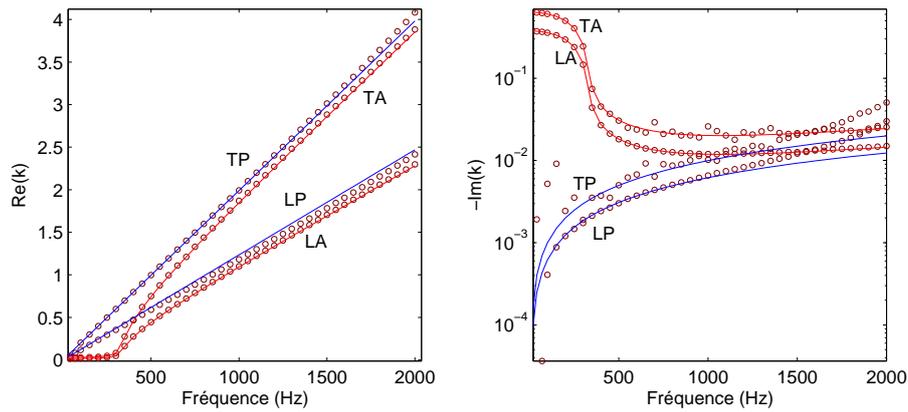


Figure 3.20 – Courbes de dispersions des ondes quasi-longitudinales et de cisaillement transverse. (o) WFE, (—) Modèles analytiques.

### 3.5.2.2 Ondes de flexion des peaux couplées par le cœur

À ces ondes s'ajoute trois ondes de flexion (F) avec mouvement des peaux en phase (P) ou en anti-phase (A) (figure 3.21). La première correspond à une onde de flexion de plaque homogène dans les basses fréquences. Les deux autres sont caractérisées par un mouvement de flexion des peaux en anti-phase. Cependant, l'une est évanescente sur toutes la gamme de fréquences (FAe) tandis que l'autre devient propagative au-delà de sa fréquence de coupure (FAp). Ces deux ondes se traduisent par un mode de respiration avec déplacement longitudinal du cœur. Ces modes sont donc couplés avec l'onde de compression longitudinale se propageant dans la phase solide.

**Onde de flexion avec peaux en phase** Nilsson [129] a proposé les limites hautes fréquences et basses fréquences du nombre d'onde de l'onde de flexion avec mouvement des peaux en phase :

$$\begin{aligned}
 k_{BF} &= \left( \omega \sqrt{\frac{L_c \rho_c + 2h_p \rho_p}{D_{comp}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 k_{HF} &= \left( \omega \sqrt{\frac{h_p \rho_p}{D_p}} \right)^{\frac{1}{2}} .
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

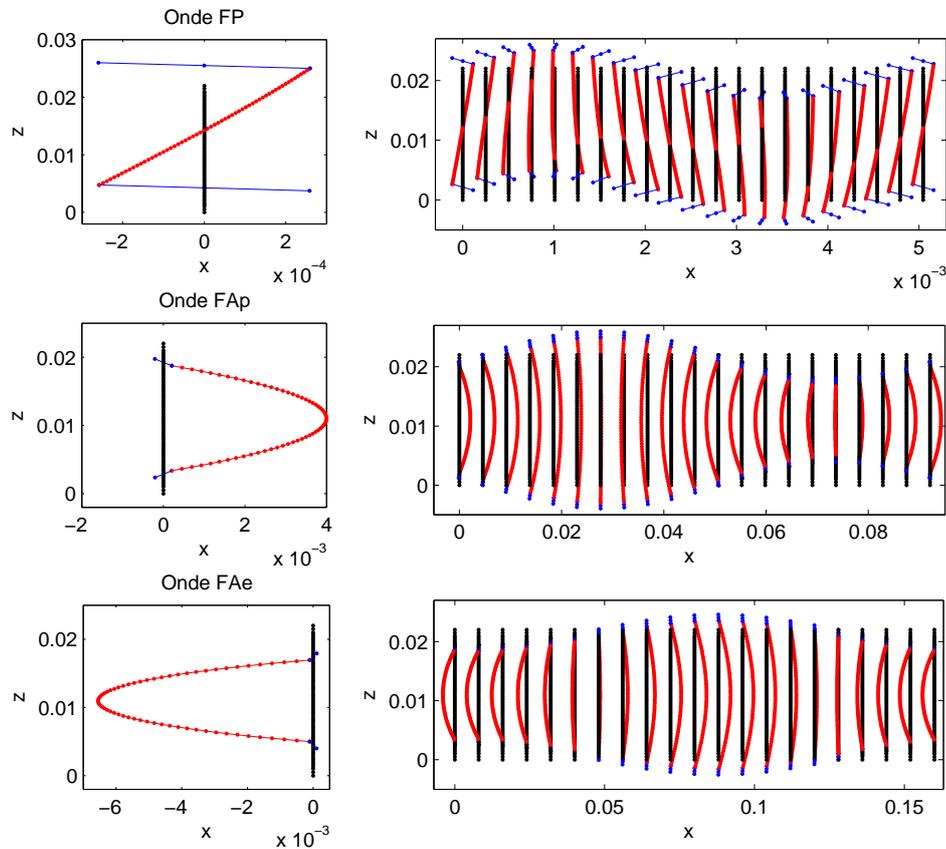


Figure 3.21 – Déformées des ondes de flexion FA et FP à 1000 Hz. Bleu : déplacement des peaux, rouge : déplacement de la phase solide du cœur poreux.

En basses fréquences, la structure sandwich se comporte comme une plaque équivalente de module de rigidité en flexion  $D_{\text{comp}}$ . En hautes fréquences, la flexion n'est portée que par les peaux. Le cœur étant très souple par rapport aux peaux, l'asymptote hautes fréquences est suffisante pour observer la réponse sur la gamme de fréquences d'intérêt. Cela est confirmé en figure 3.22 par la bonne superposition des nombres d'ondes de l'onde FP et de l'asymptote hautes fréquences  $k_{HF}$ .

**Ondes de flexion avec mouvement en opposition de phase** Deux ondes de flexion symétrique, avec mouvement de flexion des peaux en opposition de phase existent. Elles sont nommées ondes FAe et FAp par la suite, pour signifier que l'une est évanescence (FAe) tandis que l'autre est propagative en hautes fréquences (FAp). Ces ondes peuvent être prédites par le modèle suivant (voir figure 3.23).

Puisque les peaux sont fines, la théorie de Kirchhoff-Love peut être appliquée. La rigi-

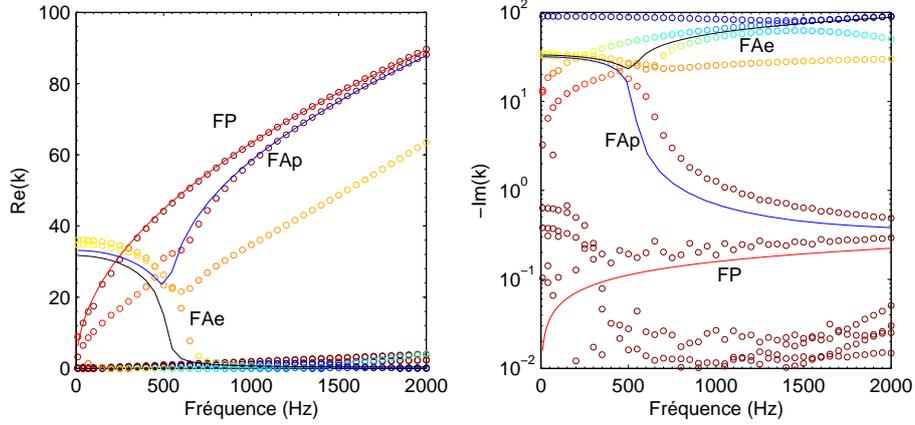


Figure 3.22 – Courbes de dispersion des ondes de flexion. (o) WFE, (—) modèles analytiques.

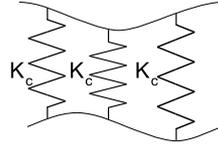


Figure 3.23 – Interprétation des modes de flexion.

dité en flexion de chacune des peaux est donnée par :

$$D_p = \frac{E_p h_p^3}{12(1 - \nu_p^2)}. \quad (3.37)$$

Les équations de la dynamique s'écrivent alors [127] :

$$\begin{aligned} D_p w_3^{(4)} - \rho_p h_p \omega^2 w_3 + K_c (w_3 - w_1) &= 0 \\ D_p w_1^{(4)} - \rho_p h_p \omega^2 w_1 + K_c (w_1 - w_3) &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dans le cas d'une structure symétrique et de mouvements en opposition de phase, la condition  $w_3 = -w_1$  permet d'obtenir l'équation de dispersion (convention  $w(x) = W(k) \exp(-ik \cdot x)$ ) :

$$D_p k^4 - \rho_p L_p \omega^2 + 2K_c = 0, \quad (3.39)$$

dont les 4 solutions permettent d'obtenir les ondes FAe et FAp, incidentes et réfléchies.

On remarque aussi l'existence de 3 ondes évanescentes fortement dissipées. Elles correspondent aux ondes de flexion en phase et en opposition de phase quand la longueur d'onde de compression du squelette devient plus petite que l'épaisseur du cœur.

### 3.5.3 Onde associée à la phase fluide du cœur

Enfin, il existe une onde associée à la présence de fluide dans le milieu poroélastique. Cette onde est une onde quasi-longitudinale qui se propage principalement dans le cœur

de la structure, mais aussi avec déplacements symétriques des peaux, celles-ci étant mises en mouvement par la contraction du cœur par effet de Poisson. Cet effet est lui-même dû au couplage entre le fluide et le squelette dans le milieu poreux. Par conséquent, en basses fréquences, il est raisonnable de modéliser cette onde de compression par l'onde lente :

$$k = k_{slow}. \quad (3.40)$$

La figure 3.24 montre que cette approximation est très bonne en basses fréquences, et qu'elle l'est aussi en hautes fréquences. Le domaine des moyennes fréquences de cette onde se trouve ici autour de 500 Hz, avec un fort couplage entre l'onde fluide et les ondes de flexion avec mouvement des peaux en opposition de phase.

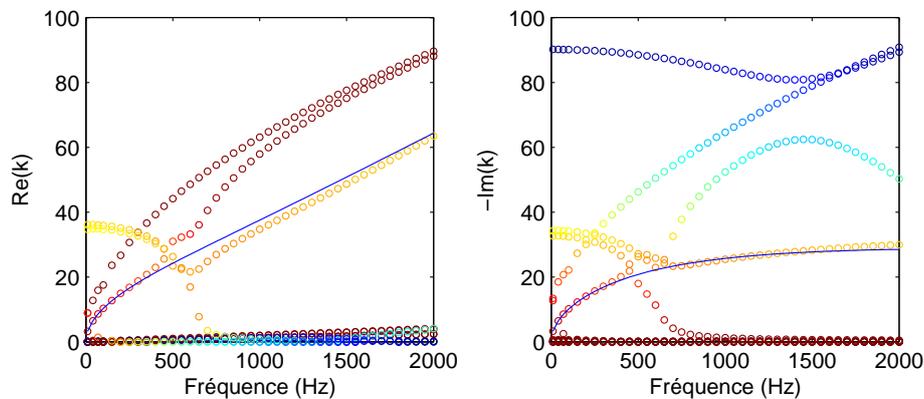


Figure 3.24 – Courbes de dispersion pour l'onde fluide. (o) WFE, (—) onde lente.

Cela est illustré en figure 3.25.

En basses fréquences et en hautes fréquences, l'onde se propage avec peaux presque immobiles dû fait de la discontinuité du déplacement fluide transverse aux interfaces et du couplage faible avec la phase solide. Au contraire, autour de 500 Hz, l'amplitude de la déformation normale est plus importante. Afin de mieux comprendre ces interactions, on présente en figure 3.26 les déformées des trois ondes symétriques (FAp, FAe et onde fluide). Les déformées modales sont très proches les unes des autres, traduisant des échanges possibles.

### 3.6 Conclusion du chapitre

Dans cette partie, nous avons vu que la WFE permet de calculer les nombres d'ondes existant dans des structures composites multicouches. La précision des modèles analytiques dépend des hypothèses faites *a priori*. Ainsi, la comparaison des courbes de dispersion prédites par WFE et obtenues par les modèles simplifiés permet de déterminer la plage de validité des hypothèses.

D'autre part, nous avons vu dans le cas d'un matériau monocouche et dans le cas du double couche que la phase solide est prépondérante. Modéliser la couche poroélastique

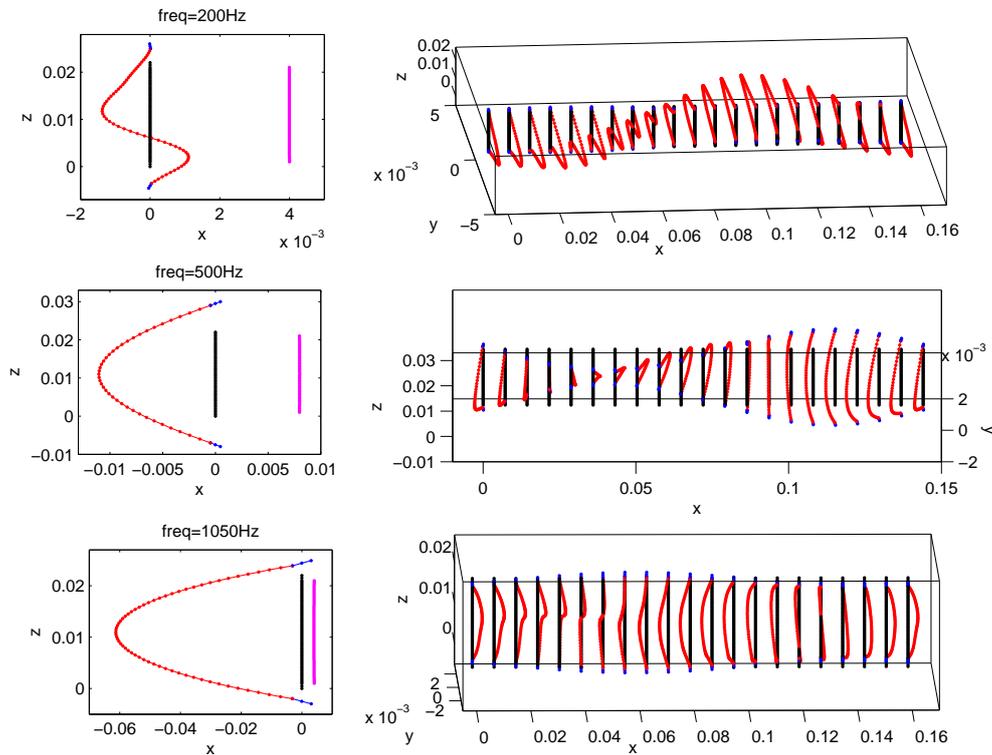


Figure 3.25 – Déformées de l'onde associée à la phase fluide. Bleu : déplacement des peaux, rouge : déplacement de la phase solide du cœur, magenta : champ de pression.

par un solide *in vacuo* permet de retrouver les courbes de dispersion et les modes propres. La phase fluide dans ce cas n'a que peu d'influence sur la dynamique du milieu.

Dans le cas d'une structure composite bicouche ou sandwich, l'influence de la phase fluide sur la dynamique du milieu reste faible. Les principales ondes, hormis l'onde de compression du fluide dans le cœur, sont bien approximées par les modèles analytiques développés pour les plaques multicouches à cœur élastique. Cependant, la présence de la phase fluide se traduit par une dissipation ajoutée. De plus, le mode quasi-longitudinal associé à la propagation d'une onde de compression dans le cœur peut se coupler avec les modes de flexion symétriques, menant à des déformations importantes dans l'épaisseur. Ce mode peut à ces fréquences contribuer au rayonnement acoustique de la structure composite, à l'instar des ondes de flexion associée au squelette.

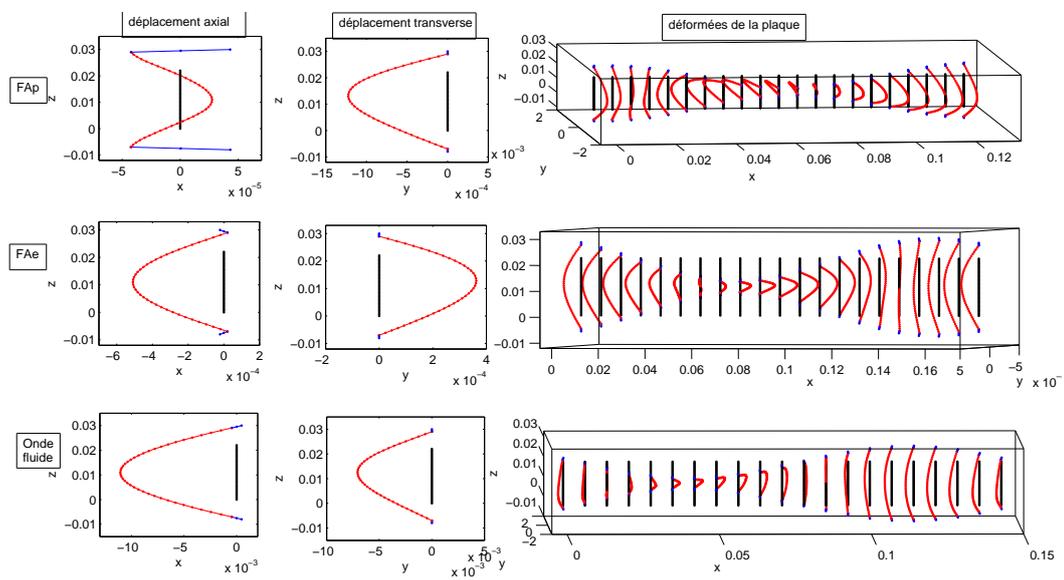


Figure 3.26 – Déformées à 500 Hz des ondes symétriques : FAP, Fae et onde fluide. Bleu : déplacement des peaux, rouge : déplacement de la phase solide du cœur.



# Réponse forcée par approche ondulatoire avec prise en compte des conditions aux limites latérales

---

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>97</b>
<b>4.2</b>	<b>Formulation exacte</b>	<b>99</b>
4.2.1	Cas d'un matériau linéaire élastique	100
4.2.2	Cas d'un fluide	102
4.2.3	Cas d'un matériau poroélastique	102
<b>4.3</b>	<b>Méthode des matrices de transfert (TMM)</b>	<b>104</b>
<b>4.4</b>	<b>Expression de la réponse forcée</b>	<b>106</b>
4.4.1	Réponse forcée par approche de transfert analytique	106
4.4.2	Réponse forcée dans le cadre WFE1D	109
4.4.3	Stabilité des différentes approches	110
<b>4.5</b>	<b>Influence des conditions aux limites latérales sur la propagation d'ondes et sur la réponse acoustique</b>	<b>111</b>
4.5.1	Matériau élastique	113
4.5.2	Cas d'un matériau à squelette rigide	116
4.5.3	Cas d'un matériau à squelette souple	117
<b>4.6</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>118</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons vu comment prédire les caractéristiques des ondes qui se propagent dans un milieu, par une approche numérique. Dans cette partie, nous nous intéressons à l'utilisation de ces ondes dans un formalisme de transfert pour simuler la réponse vibratoire du milieu, notamment l'impédance de surface du matériau poroélastique. Nous comparons cette méthode avec deux méthodes analytiques, une approche de transfert basée sur le formalisme de Stroh et la méthode des matrices de transfert (TMM).

Les formulations de transfert font appel à la notion de vecteur d'état. Ce vecteur, noté  $V$  contient les informations nécessaires permettant de connaître l'état d'un milieu en un

point donné ainsi que son énergie. On définit ici le vecteur d'état par le vecteur contenant les inconnues en déplacement  $\mathbf{q}$  et en effort  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Ainsi ce type d'approche est complémentaire des approches de type raideur dynamique, où les efforts  $\mathbf{F}$  en tout point sont exprimés en fonction des déplacements.

L'intérêt du formalisme de transfert est qu'il permet naturellement d'exprimer les échanges énergétiques existant au sein d'un milieu. Les relations générales présentées dans ce paragraphe sont explicitées dans les paragraphes suivants.

On considère par la suite une géométrie tridimensionnelle cartésienne, et on choisit la base orthonormale  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  telle que les sections du milieu sont parallèles au plan  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  et de normale  $\mathbf{z}$ . Le vecteur d'état vérifie la relation :

$$\mathbf{J} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{H} \mathbf{V}(x, y, z) \quad (4.2)$$

où la matrice  $\mathbf{J}$  est la matrice symplectique ( $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$ ) :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

et où  $\mathbf{H}$  est une matrice diagonale par blocs qui ne dépend pas de la coordonnée  $z$  dans le cas de structures de section et de paramètres matériaux constants dans la direction  $z$ . La solution de l'équation (4.2) s'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{V}(x, y, z_1) = \exp \left[ -\mathbf{J} \mathbf{H} (z_1 - z_0) \right] \mathbf{V}(x, y, z_0) \text{ pour tout } z_1. \quad (4.4)$$

quels que soient les points de coordonnées  $x$  et  $y$  du point considéré dans les sections  $z = z_0$  et  $z = z_1$ . La matrice  $\mathbf{T}(z) = \exp(-\mathbf{J} \mathbf{H} z)$  est appelée matrice de transfert reliant deux sections séparées d'une distance  $z$ .

Ce formalisme mène directement à la notion d'onde, complémentaire de la notion de mode stationnaire. Les modes d'ondes sont définis par les couples  $(\Phi, \lambda)$  tels que :

$$\mathbf{T}(z) \Phi = \lambda(z) \Phi. \quad (4.5)$$

Les modes  $\Phi$  sont appelés modes de section ou modes d'ondes et caractérisent la déformée de l'onde dans la section du guide d'ondes, tandis que  $\lambda(z)$  est la constante de propagation, reliée au nombre d'onde  $k$  par :

$$\lambda(z) = \exp(-ikz). \quad (4.6)$$

Alors que les modes stationnaires dépendent des caractéristiques du matériau et des conditions aux limites cinématiques, les modes d'ondes sont indépendants des conditions aux limites dans leur direction de propagation. Ils peuvent donc être calculés en supposant le milieu infini dans la direction de propagation. Cependant, le vecteur d'état en une section donnée résulte de la somme des ondes incidentes, c'est-à-dire se propageant dans la direction  $z > 0$ , et des ondes réfléchies, c'est-à-dire se propageant dans la direction  $z < 0$ . Dans

le cas de guide d'ondes unidirectionnels de taille finie, ces deux types d'ondes se superposent de telle façon que le champ des déplacement prend la forme d'un mode stationnaire quand la fréquence est égale à sa fréquence propre.

Ces ondes se propagent avec des caractéristiques propres à chacune. Pour les analyser, il est utile d'observer la vitesse de phase  $c$ , la vitesse de groupe  $c_g$  et le nombre d'onde. Ces grandeurs sont définies entre elles, par rapport à la pulsation  $\omega$  et à leur longueur d'onde  $\lambda$  par :

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad c_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}. \quad (4.7)$$

L'analyse *k-space* consiste en l'étude de ces caractéristiques, en vue de déterminer par exemple les mécanismes prépondérants de propagation de l'énergie ou de rayonnement.

Dans le cas de structures périodiques de période spatiale  $d$ , le terme de transfert  $\mathbf{A} = -\mathbf{J}\mathbf{H}$  dépend de  $z$ , mais est aussi périodique. Le théorème de Floquet permet alors d'écrire le vecteur d'état sous la forme de la combinaison linéaire de fonctions d'onde périodiques de période  $d$ . Ces fonctions correspondent aux modes propres de la matrice de transfert. Ainsi ce formalisme est particulièrement bien adapté pour résoudre des problèmes périodiques dans une direction donnée. Cela a mené à un grand nombre de travaux, notamment par Mead [82, 83, 84, 85], dans lequel ces approches permettent de prédire le comportement de structures de très grandes dimensions, comme souvent observées dans l'industrie, et permettent des développements analytiques. Dans la suite nous considérons le cas d'une représentation cartésienne, cependant l'approche peut être adaptée sans difficulté au cas de géométries cylindriques, comme ce qui a été fait par Larbi et Deü pour le calcul des fréquences propres de cylindres multicouches élastiques/piezoelectriques à partir de la relation de transfert entre les parois internes et externes ([130]).

Dans les paragraphes suivants, nous proposons d'analyser différentes approches de transfert. Dans un premier temps, l'expression exacte de la matrice de transfert est calculée dans le cas d'un matériau élastique, d'un fluide acoustique et d'un matériau poroélastique utilisant le modèle de Biot-Allard tel que décrit dans le chapitre 1. Ensuite, la méthode des matrices de transfert (*Transfer Matrix Method* – TMM) est rappelée et comparée à l'approche exacte. Finalement, nous montrons que ces deux méthodes sont équivalentes dans le cadre de l'hypothèse d'ondes planes. La théorie exacte permet de prendre en compte l'influence des conditions aux limites latérales sur la réponse acoustique mais est limitée par les expressions analytiques. La méthode WFE est une forme discrétisée par éléments finis de la formulation de transfert, cette approche permet donc de calculer la réponse forcée de structures de type guide d'ondes, tout en tenant compte des conditions aux limites.

## 4.2 Formulation exacte

Dans cette section, les étapes permettant de construire la matrice  $\mathbf{H}$  sont détaillées. Cette matrice permet de calculer la matrice de transfert  $\mathbf{T}$ , les valeurs propres et les vecteurs propres. À ce stade cependant, la matrice est exprimée comme une fonctionnelle, dépendant des dérivées partielles spatiales du vecteur d'état. De manière générale l'opérateur  $\mathbf{H}$  est

diagonal par bloc, on l'écrira sous la forme :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

#### 4.2.1 Cas d'un matériau linéaire élastique

Les relations de comportement de la structure s'écrivent dans le domaine fréquentiel sous la forme :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= -\rho\omega\mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.9)$$

où  $\boldsymbol{\sigma} = \langle \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy} \rangle^T$  et  $\mathbf{u} = \langle u, v, w \rangle^T$  sont respectivement le champ des contraintes et le champ des déplacements dans la structure, et où  $\rho$  et  $\mathbf{C}$  sont respectivement la masse volumique et le tenseur des constantes élastiques. Le vecteur  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est donné par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \langle \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{xz}, 2\varepsilon_{xy} \rangle^T \quad (4.10)$$

$$= \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\rangle^T \quad (4.11)$$

et la matrice des constantes élastiques est donnée pour le cas d'un matériau orthotrope par :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Supposons une propagation dans la direction  $z$ , on définit alors le vecteur d'état  $\mathbf{V}$  par :

$$\mathbf{V} = \langle u, v, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, w \rangle^T. \quad (4.13)$$

Les termes restants ne sont pas nécessaires puisqu'ils peuvent être déterminés à partir du vecteur propre  $\mathbf{V}$ .

Pour exprimer l'équilibre dynamique sous forme de transfert, il faut exprimer les dérivées partielles par rapport à  $z$  en fonction de termes indépendants de  $z$ . Les relations de comportement entre contraintes et déplacements permettent de calculer les variations selon  $z$  des déplacements. En particulier, les 2 déplacements transverses vérifient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\sigma_{yz}}{C_{44}} - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\sigma_{xz}}{C_{55}} - \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.14)$$

tandis que le déplacement normal vérifie :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_{zz}}{C_{33}} - \frac{C_{13}}{C_{33}}\sigma_{xz} - \frac{C_{23}}{C_{33}}\sigma_{yz}. \quad (4.15)$$

Les variations selon  $z$  du vecteur d'état sont obtenues à partir des trois équations de l'équilibre dynamique. La projection sur  $z$  donne :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\omega^2 \rho w - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}. \quad (4.16)$$

Les variations selon  $z$  des contraintes transverses  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  sont obtenues après plus de calculs à partir des projections de l'équilibre dynamique sur les directions  $x$  et  $y$  respectivement. Celles-ci s'écrivent en effet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= -\omega^2 \rho u - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= -\omega^2 \rho v - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.17)$$

alors que les termes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  n'appartiennent pas au vecteur d'état. Il faut alors exprimer ces termes en fonction du vecteur d'état. On commence par donner leur expression en fonction des déplacements :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_{yy} &= C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{23} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_{xy} &= C_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Le terme  $\partial w / \partial z$  est alors remplacé par son expression en fonction du vecteur d'état. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= -\omega^2 \rho u - C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - C_{11}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (C_{12}^* + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{C_{13}}{C_{33}} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= -\omega^2 \rho v - C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - C_{22}^* \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (C_{12}^* + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{C_{23}}{C_{33}} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.19)$$

où  $C_{11}^* = C_{11} - C_{13}^2 / C_{33}$ ,  $C_{22}^* = C_{22} - C_{23}^2 / C_{33}$  et  $C_{12}^* = C_{12} - C_{13} C_{23} / C_{33}$ .

Finalement, en organisant le vecteur d'état sous la forme :

$$\mathbf{V} = \left\langle u, v, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, w \right\rangle^T, \quad (4.20)$$

les matrices  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  sont données par :

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} -\rho \omega^2 - C_{11}^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} - C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -(C_{12}^* + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{C_{13}}{C_{33}} \frac{\partial}{\partial x} & & & & \\ -(C_{12}^* + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -\rho \omega^2 - C_{22}^* \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & & & -\frac{C_{23}}{C_{33}} \frac{\partial}{\partial y} & \\ & & & & & & \frac{1}{C_{33}} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

et

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_{55}} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\frac{1}{C_{44}} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \rho \omega^2 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

### 4.2.2 Cas d'un fluide

La masse volumique du fluide est notée  $\rho$ , sa célérité  $c$ , sa compressibilité  $K = \rho c^2$ . La pression est notée  $p$ , le déplacement  $\mathbf{q} = (u, v, w)^T$ . Le fluide vérifie donc :

$$\begin{aligned}\rho\omega^2\mathbf{q} &= \nabla p \\ p &= -K\nabla \cdot \mathbf{q}.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Le vecteur d'état est écrit comme :  $\mathbf{V} = \langle p, w \rangle^T$ . Les variations selon  $z$  du vecteur d'état sont donc données par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho\omega^2 w \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{p}{K} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}\quad (4.24)$$

Les déplacements transverses doivent ensuite être exprimés en fonction du vecteur d'état. Cela est fait en utilisant les projections sur  $x$  et  $y$  de l'équilibre dynamique. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho\omega^2 w \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{p}{K} - \frac{1}{\rho\omega^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right).\end{aligned}\quad (4.25)$$

Finalement, les matrices  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  sont données dans le cas d'un fluide par :

$$\mathbf{H}_1 = \left[ -\frac{1}{K} - \frac{1}{\rho\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \quad (4.26)$$

et

$$\mathbf{H}_2 = [-\rho\omega^2]. \quad (4.27)$$

### 4.2.3 Cas d'un matériau poroélastique

La même démarche que précédemment est entreprise dans le cas d'un matériau poroélastique. On choisit la formulation UUt, car elle permet de définir un vecteur d'état continu entre deux milieux poroélastiques et facilite la gestion des interfaces entre différents milieux :

$$\mathbf{V} = \langle u, v, \hat{\sigma}_{zz}^s, -p, \hat{\sigma}_{xz}^s, \hat{\sigma}_{yz}^s, w, w^t \rangle^T. \quad (4.28)$$

La convention du signe « - » pour la pression permet d'obtenir des matrices symétriques et de pouvoir facilement calculer la valeur de la pression totale (on rappelle que  $\boldsymbol{\sigma}^t = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s - p\mathbf{I}$ ).

On rappelle les quatre équations du milieu :

- Équilibre de la phase solide :

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s = -\omega^2 \tilde{\rho}_s \mathbf{u}^s - \omega^2 \tilde{\gamma} \tilde{\rho}_{\text{eq}} \mathbf{u}^t \quad (4.29)$$

- Équilibre de la phase fluide :

$$-\nabla p = \tilde{K}_{\text{eq}} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^t = -\omega^2 \tilde{\gamma} \tilde{\rho}_{\text{eq}} \mathbf{u}^s - \omega^2 \tilde{\rho}_{\text{eq}} \mathbf{u}^t \quad (4.30)$$

- Relations contraintes déformations pour la phase solide *in vacuo* :

$$\hat{\sigma}^s = \hat{\mathbf{C}}\varepsilon(\mathbf{u}^s) \quad (4.31)$$

- Relations contraintes déformations pour la phase fluide :

$$p = -\tilde{K}_{\text{eq}} \nabla \cdot \mathbf{u}^t \quad (4.32)$$

où les relations contraintes–déformations dans la phase solide sont écrites comme dans le cas d'un matériau élastique (Eq. (4.12)). La matrice  $\hat{\mathbf{C}}$  désigne ici la matrice des constantes élastiques du squelette *in vacuo*.

Les relations de comportement donnent les variations selon  $z$  des déplacements de la phase solide :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\sigma_{xz}}{C_{55}} - \frac{\partial w}{\partial u} \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\sigma_{yz}}{C_{44}} - \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\sigma_{zz}}{C_{33}} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Le déplacement total normal vérifie :

$$\frac{\partial w^t}{\partial z} = -\frac{p}{\tilde{K}_{\text{eq}}} - \frac{1}{\rho_{\text{eq}}\omega^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \tilde{\gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (4.34)$$

La pression vérifie :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \omega^2 \tilde{\gamma} \tilde{\rho}_{\text{eq}} w + \omega^2 \tilde{\rho}_{\text{eq}} w^t. \quad (4.35)$$

La contrainte normale  $\hat{\sigma}_{zz}$  vérifie :

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{zz}}{\partial z} = -\omega^2 \tilde{\rho}_s w - \omega^2 \tilde{\gamma} \tilde{\rho}_{\text{eq}} w^t - \frac{\partial \hat{\sigma}_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\sigma}_{yy}}{\partial y}. \quad (4.36)$$

Finalement, comme pour le cas élastique, les variations des contraintes transverses selon  $z$  font intervenir les contraintes  $\hat{\sigma}_{xx}$ ,  $\hat{\sigma}_{xy}$  et  $\hat{\sigma}_{yy}$ , ainsi que les déplacements totaux transverses  $u^t$  et  $v^t$ . Après des développements similaires au cas élastique, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}_{xz}}{\partial z} &= -\omega^2 \tilde{\rho} u - \hat{C}_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \hat{C}_{11}^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (\hat{C}_{12}^* + \hat{C}_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\hat{C}_{13}}{\hat{C}_{33}} \frac{\partial \hat{\sigma}_{zz}}{\partial x} - \tilde{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_{yz}}{\partial z} &= -\omega^2 \tilde{\rho} v - \hat{C}_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \hat{C}_{22}^* \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (\hat{C}_{12}^* + \hat{C}_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\hat{C}_{23}}{\hat{C}_{33}} \frac{\partial \hat{\sigma}_{zz}}{\partial y} - \tilde{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.37)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{C}_{11}^* &= \hat{C}_{11} - \hat{C}_{13}^2 / \hat{C}_{33}, \\ \hat{C}_{22}^* &= \hat{C}_{22} - \hat{C}_{23}^2 / \hat{C}_{33}, \\ \hat{C}_{12}^* &= \hat{C}_{12} - \hat{C}_{13} \hat{C}_{23} / \hat{C}_{33}, \\ \tilde{\rho} &= \tilde{\rho}_{11} - \tilde{\rho}_{12}^2 / \tilde{\rho}_{22} = \tilde{\rho}_s - \tilde{\gamma}^2 \tilde{\rho}_{\text{eq}}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Les matrices  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  s'écrivent donc :

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & -(\hat{C}'_{12} + \hat{C}_{66})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -\frac{\hat{C}_{13}}{\hat{C}_{33}}\frac{\partial}{\partial x} & \tilde{\gamma}\frac{\partial}{\partial x} \\ -(\hat{C}'_{12} + \hat{C}_{66})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \Gamma_2 & -\frac{\hat{C}_{23}}{\hat{C}_{33}}\frac{\partial}{\partial y} & \tilde{\gamma}\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\hat{C}_{13}}{\hat{C}_{33}}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\hat{C}_{23}}{\hat{C}_{33}}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{\hat{C}_{33}} & 0 \\ \tilde{\gamma}\frac{\partial}{\partial x} & \tilde{\gamma}\frac{\partial}{\partial y} & 0 & \Gamma_3 \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

et

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\hat{C}_{55}} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\hat{C}_{44}} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \tilde{\rho}_s \omega^2 & \tilde{\rho}_{eq} \tilde{\gamma} \omega^2 \\ 0 & 0 & \tilde{\rho}_{eq} \tilde{\gamma} \omega^2 & \tilde{\rho}_{eq} \omega^2 \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

où  $\hat{C}'_{11} = \hat{C}_{11} - \hat{C}_{13}^2/\hat{C}_{33}$ ,  $\hat{C}'_{22} = \hat{C}_{22} - \hat{C}_{23}^2/\hat{C}_{33}$  et  $\hat{C}'_{12} = \hat{C}_{12} - \hat{C}_{13}\hat{C}_{23}/\hat{C}_{33}$ , et où :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -\omega^2 (\tilde{\rho}_s - \tilde{\gamma}^2 \tilde{\rho}_{eq}) - \hat{C}'_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hat{C}_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ \Gamma_2 &= -\omega^2 (\tilde{\rho}_s - \tilde{\gamma}^2 \tilde{\rho}_{eq}) - \hat{C}'_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hat{C}_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ \Gamma_3 &= \frac{1}{\tilde{K}_{eq}} + \frac{1}{\tilde{\rho}_{eq} \omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

### 4.3 Méthode des matrices de transfert (TMM)

On considère un milieu bidimensionnel plan de dimensions latérales infinies. Le milieu est excité par des ondes planes se propageant dans le milieu fluide environnant :

$$p_i(x, z, t) = p_i \exp(i(\omega t - k \sin \theta x - k \cos \theta z)) \quad (4.42)$$

où  $k = \omega/c_0$  et où  $\theta$  est l'angle d'incidence défini par rapport à la normale à l'interface.

La considération d'un problème bidirectionnel n'est pas une hypothèse restrictive dans le cas de matériaux isotropes, comme ce qui est le cas le plus souvent, car on se place alors dans le plan d'incidence de l'onde source.

Soumis à cette excitation, le vecteur d'état du milieu peut s'écrire sous la forme d'une somme d'ondes planes, où le nombre d'ondes progressives est égal au nombre d'ondes volumiques se propageant dans le milieu. Dans le cas d'un matériau poroélastique, nous avons vu que 3 ondes se propagent : 2 ondes de compression et 1 onde de cisaillement.

La méthode est décrite dans le livre de référence de Allard et Atalla [16]. Les auteurs font le choix de prendre la formulation UsUf. Ce choix ne permet pas d'obtenir une continuité entre les matériaux poroélastiques à cause de la discontinuité du déplacement normal

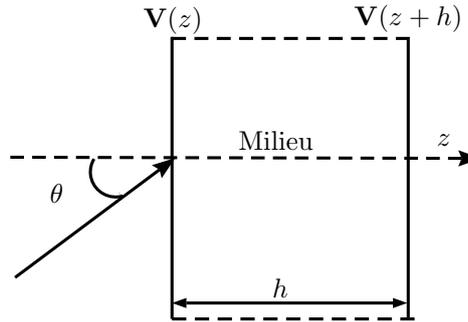


Figure 4.1 – Schéma du système considéré par la TMM.

fluide aux interfaces. La méthode peut toutefois très bien être utilisée à partir de la formulation UUt, permettant alors de simplifier le traitement des matériaux multicouches.

Chacun des termes du vecteur d'état est exprimé comme la somme des trois ondes progressives incidentes ( $z$  croissants) et réfléchies ( $z$  décroissant). D'autre part, la connaissance de la forme des modes propres grâce aux coefficients  $\mu$  (voir Chapitre 1) permet d'exprimer de manière exacte la relation entre le vecteur d'état en une section donnée  $\mathbf{V}(z)$  et l'amplitude des ondes progressives  $A_i^\pm$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  :

$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{H} \begin{pmatrix} A_1^+ \\ A_1^- \\ A_2^+ \\ A_2^- \\ A_3^+ \\ A_3^- \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} A_1^+ + A_1^- \\ A_1^+ - A_1^- \\ A_2^+ + A_2^- \\ A_2^+ - A_2^- \\ A_3^+ + A_3^- \\ A_3^+ - A_3^- \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

La matrice  $\mathbf{H}$  est déterminée analytiquement en fonction des nombres d'ondes  $k$  et des coefficients  $\mu$  associés aux ondes volumiques se propageant dans le matériau.

Alors que cette matrice fait intervenir des exponentielles, la matrice  $\mathbf{\Gamma}$  ne fait intervenir que des cosinus et des sinus, permettant d'obtenir de meilleurs conditionnements.

L'écriture de cette relation sur la surface d'excitation  $z = -d$  et sur l'autre extrémité du milieu  $z = 0$  permet d'expliciter la relation de transfert entre les deux vecteurs d'état :

$$\mathbf{V}(-d) = \mathbf{\Gamma}(-d)\mathbf{\Gamma}(0)^{-1}\mathbf{V}(0). \quad (4.44)$$

Ainsi, la matrice de transfert associée à la distance  $d$  s'écrit :

$$\mathbf{T}(d) = \mathbf{\Gamma}(-d)\mathbf{\Gamma}(0)^{-1} \quad (4.45)$$

où la matrice  $\mathbf{\Gamma}(0)^{-1}$  peut être calculée une fois pour toutes, alors que la matrice  $\mathbf{\Gamma}(-d)$  est évaluée pour chaque étude.

La méthode des matrices de transfert prend donc le contrepied du formalisme de Stroh. Alors que celui-ci utilise les équations du milieu pour calculer la matrice de transfert, et en dériver les ondes progressives, la méthode des matrices de transfert part de l'expression des nombres d'ondes et des modes d'ondes analytiques obtenus par la décomposition de Helmholtz, pour calculer la matrice de transfert à partir de ces ondes.

## 4.4 Expression de la réponse forcée

On développe dans cette partie les différentes méthodes permettant de prédire le comportement acoustique de l'interface dissipative en fonction de la méthode de transfert envisagée.

### 4.4.1 Réponse forcée par approche de transfert analytique

Dans le chapitre précédent, nous avons détaillé deux méthodes analytiques basées sur le formalisme de transfert. La méthode TMM est parfaitement équivalente au formalisme de Stroh dans le cas de l'hypothèse d'ondes planes. Ce dernier permet de relier la matrice de transfert aux équations locales de la dynamique du matériau de manière plus évidente que la TMM, en particulier pour des cas anisotropes. Ce formalisme permet d'étendre l'hypothèse d'ondes planes dans des cas différents, par exemple quand le matériau est soumis à une excitation modale.

On se place par la suite dans le cas tridimensionnel, permettant de prendre en compte l'anisotropie éventuelle du milieu. Nous rappelons l'expression des vecteurs d'état dans les différents types de milieu :

- Milieu solide :

$$\mathbf{V} = \langle u, v, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, w \rangle^T. \quad (4.46)$$

- Milieu poroélastique :

$$\mathbf{V} = \langle u, v, \hat{\sigma}_{zz}, -p, \hat{\sigma}_{xz}, \hat{\sigma}_{yz}, w, w^t \rangle^T. \quad (4.47)$$

- Milieu fluide :

$$\mathbf{V} = \langle p, w \rangle^T. \quad (4.48)$$

Nous reprenons dans cette partie la démarche usuelle pour calculer la réponse du système.

#### 4.4.1.1 Cas d'un monocouche

Nous considérons ici un milieu monocouche de longueur finie. On note + et - les deux sections extrémales. Les équations de la dynamique projetées dans l'espace d'état sont :

$$\mathbf{V}^+ = \mathbf{T}\mathbf{V}^-. \quad (4.49)$$

où  $\mathbf{V}^+$  et  $\mathbf{V}^-$  sont respectivement les vecteurs d'état du matériau à ses deux extrémités. La matrice  $\mathbf{T}$  est la matrice de transfert dans l'épaisseur du matériau.

Les conditions aux limites appliquées aux deux extrémités peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\mathbf{V}^+(C^+) = \mathbf{V}_{\text{imp}}^+, \quad \mathbf{V}^-(C^-) = \mathbf{V}_{\text{imp}}^-, \quad \text{et } \mathbf{V}^-(I^-) \neq \mathbf{0}. \quad (4.50)$$

où  $C^+$ ,  $C^-$ ,  $I^+$  et  $I^-$  sont les positions des lignes respectivement connues et inconnues des vecteurs d'état  $\mathbf{V}^+$  et  $\mathbf{V}^-$ , et où  $\mathbf{V}_{\text{imp}}^+$  et  $\mathbf{V}_{\text{imp}}^-$  contiennent les valeurs connues des vecteurs

propres dans les section + et -. Les composantes inconnues du vecteur d'état  $\mathbf{V}^-(I^-)$  sont alors données par :

$$\mathbf{V}^-(I^-) = \mathbf{T}(C^+, I^-)^{-1} (\mathbf{V}_{\text{imp}}^+ - \mathbf{T}(C^+, C^-) \mathbf{V}_{\text{imp}}^-). \quad (4.51)$$

Enfin, les composantes inconnues du vecteur d'état  $\mathbf{V}^+(I^+)$  sont obtenues grâce à :

$$\mathbf{V}^+(I^+) = \mathbf{T}(I^+, C^-) \mathbf{V}_{\text{imp}}^- + \mathbf{T}(I^+, I^-) \mathbf{V}^-(I^-). \quad (4.52)$$

À partir de la valeur du vecteur d'état, la valeur de l'impédance de surface, du coefficient d'absorption et du coefficient de transmission peuvent donc être calculées.

**Exemple :** Considérons un échantillon poreux collé en  $z = 0$  et soumis à une pression uniforme et  $p_{\text{imp}}$  en  $z = L$ . Les composantes connues sont :

$$\begin{aligned} C^+ &= \langle 3, 4, 5, 6 \rangle \quad \text{et} \quad C^- = \langle 1, 2, 7, 8 \rangle \\ \mathbf{V}^+(C^+) &= \langle 0, 0, -p_{\text{imp}}, 0 \rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{V}^-(C^-) = \langle 0, 0, 0, 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Le vecteur d'état en  $z = L$  est donc donné par :

$$\mathbf{V}^+(C^+) = \langle 0, 0, -p_{\text{imp}}, 0 \rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{V}^+(I^+) = \mathbf{T}(I^+, I^-) \mathbf{T}(C^+, I^-)^{-1} \mathbf{V}^+(C^+) \quad (4.54)$$

et l'impédance de surface est donnée par :

$$Z_s = \frac{-p_{\text{imp}}}{i\omega \mathbf{V}^+(8)}. \quad (4.55)$$

#### 4.4.1.2 Cas d'une structure multicouche

Dans le cas d'une structure multicouche, la réponse dynamique peut être déterminée à partir des équations suivantes :

- Dans chaque couche  $i$  :

$$\mathbf{V}_i^+ = \mathbf{T}_i \mathbf{V}_i^-. \quad (4.56)$$

- À l'interface  $i$  séparant la couche  $i - 1$  et la couche  $i$ , les champs peuvent être discontinus. Il faut donc écrire les conditions de continuité des déplacements et des efforts par l'intermédiaire de matrices d'interfaces (rectangulaires) telles que :

$$\mathbf{I}_{i-1,i} \mathbf{V}_{i-1}^- + \mathbf{J}_{i-1,i} \mathbf{V}_i^+ = \mathbf{0}. \quad (4.57)$$

Dans le cadre de la formulation  $(\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^t)$ , ces matrices sont données par :

- Interface poroélastique/poroélastique :

$$\mathbf{I}_{i-1,i} = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_{i-1,i} = -\mathbf{I}. \quad (4.58)$$

- Interface poroélastique/solide (collé)

$$\mathbf{I}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{J}_{i-1,i} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

- Interface poroélastique/fluide acoustique

$$\mathbf{I}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{J}_{i-1,i} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

- Interface solide/fluide acoustique

$$\mathbf{I}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{J}_{i-1,i} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Un système global peut alors être assemblé en prenant en compte toutes les relations de transfert d'une interface à l'autre ainsi que les relations de continuité aux interfaces. On construit alors la matrice rectangulaire  $\mathbf{D}_0$  traduisant l'équilibre de toutes les sections internes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{01} & \mathbf{J}_{01}\mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{12} & \mathbf{J}_{12}\mathbf{T}_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_{n-1,n} & \mathbf{J}_{n-1,n}\mathbf{T}_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}_0} = \mathbf{0}. \quad (4.62)$$

Ajouter la condition d'excitation :

$$p - Z_s i \omega w = 0 \quad (4.63)$$

ainsi que la condition de terminaison (encastrement ou couche fluide infinie) permet alors de calculer les caractéristiques acoustiques de la structure multicouche ([16]).

#### 4.4.2 Réponse forcée dans le cadre WFE1D

La méthode WFE présentée dans la section précédente (version unidirectionnelle) permet de calculer un ensemble de modes propres de section  $\Phi$  et de constantes de propagation  $\Lambda$ . La matrices des déformées propres  $\Phi$  est décomposée sur ses composantes de déplacement  $\Phi_q$  et sur ses composantes d'effort  $\Phi_F$  :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_q^+ & \Phi_q^- \\ \Phi_F^+ & \Phi_F^- \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

Les exposants + et - sont déterminés par le module de la constante de propagation. On note + les ondes progressives incidentes (exponentiellement décroissantes dans la direction +z), ces ondes vérifient donc  $|\lambda^+| \leq 1$ . Au contraire les ondes réfléchies sont telles que  $\lambda^- = 1/\lambda^+$ , d'où  $|\lambda^-| \geq 1$ . On définit alors la matrice  $\mu$  par :

$$\mu = (\text{diag}(\mu_i))_i \text{ avec } \mu_i = (\lambda_i^+)^{L/d} = \exp(-ik_i^+ L). \quad (4.65)$$

où  $d$  est la taille de la cellule utilisée pour le calcul WFE et  $L$  la longueur du guide d'ondes. Cette matrice est donc telle que :  $\|\mu\| < 1$ .

Il est possible de déterminer la réponse du système à partir du moment où des conditions cinématiques et/ou statiques sont imposées en deux sections. On se placera dans le cadre de la formulation UUt.

##### 4.4.2.1 Cas du problème d'absorption

Le matériau est soumis à une force imposée  $\mathbf{F}_{\text{imp}}$  en  $z = L$  et est parfaitement fixé en  $z = 0$ . Si  $c$  désigne les composantes bloquées du déplacement (c'est-à-dire le déplacement solide et le déplacement total normal à l'interface), les conditions aux limites s'expriment :

$$\begin{aligned} \Phi_{q_c}^+ \mathbf{Q}^+(0) + \Phi_{q_c}^- \mathbf{Q}^-(0) &= \mathbf{0} \\ \Phi_F^+ \mathbf{Q}^+(L) + \Phi_F^- \mathbf{Q}^-(L) &= \mathbf{F}_{\text{imp}}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

À ces équations s'ajoutent les conditions de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^+(L) &= \mu \mathbf{Q}^+(0) \\ \mathbf{Q}^-(0) &= \mu \mathbf{Q}^-(L). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Finalement, on essaiera de s'affranchir des ondes récessives, se traduisant par des coefficients exponentiellement croissants dans la direction  $z$ , de telle sorte qu'on choisira comme inconnues les amplitudes  $\mathbf{Q}^+(0)$  et  $\mathbf{Q}^-(L)$ . Celles-ci vérifient donc :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{q_c}^+ & \Phi_{q_c}^- \mu \\ \Phi_F^+ \mu & \Phi_F^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^+(0) \\ \mathbf{Q}^-(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{\text{imp}} \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Afin d'améliorer le conditionnement du système, en particulier quand les ordres de grandeur des efforts et des déplacements sont très différents, il est préférable d'utiliser la forme normalisée suivante [97] :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & (\Phi_{q_c}^+)^{-1} \Phi_{q_c}^- \mu \\ (\Phi_F^-)^{-1} \Phi_F^+ \mu & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^+(0) \\ \mathbf{Q}^-(L) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_F^{-1} \mathbf{F}_{\text{imp}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}}. \quad (4.69)$$

Le vecteur des amplitudes des ondes dans la section  $z = L$  est donc donné par :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}^+(0) \\ \mathbf{Q}^-(0) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_L} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^+(L) \\ \mathbf{Q}^-(L) \end{pmatrix}. \quad (4.70)$$

Finalement, les déplacements et les efforts en  $z = L$  sont déterminés en fonction de la force appliquée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_p(L) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_q^+ & \boldsymbol{\Phi}_q^- \end{bmatrix} \mathbf{I}_L \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \\ \mathbf{F}(L) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_F^+ & \boldsymbol{\Phi}_F^- \end{bmatrix} \mathbf{I}_L \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

#### 4.4.2.2 Cas du problème de transmission

Pour le cas d'un problème de transmission acoustique à travers une interface, les déplacements sont inconnus de part et d'autres du matériau, mais les efforts exercés par la pression externe sont connus. La même expression que précédemment peut être obtenue en remplaçant la matrice  $\mathbf{B}$  par la matrice :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & (\boldsymbol{\Phi}_{Fc}^+)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{Fc}^- \boldsymbol{\mu} \\ (\boldsymbol{\Phi}_F^-)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_F^- \boldsymbol{\mu} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

et le vecteur  $\mathbf{F}_{\text{imp}}$  par :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_F^{+1} \mathbf{F}_{\text{imp},1} \\ \boldsymbol{\Phi}_F^{-1} \mathbf{F}_{\text{imp},2} \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

où  $\mathbf{F}_{\text{imp},1}$  et  $\mathbf{F}_{\text{imp},2}$  sont respectivement les vecteurs des efforts appliqués sur l'interface par les deux cavités environnantes 1 et 2.

#### 4.4.3 Stabilité des différentes approches

La méthode analytique ne permet pas de séparer les ondes progressives des ondes récessives. Cela peut causer des instabilités, dues à la multiplication des erreurs par un facteur exponentiellement croissant selon l'épaisseur et la fréquence. Cela se traduit par des oscillations parasites dans les hautes fréquences. Une méthode permettant de stabiliser la méthode a été proposée récemment par Dazel [66].

Dans un premier temps, pour un matériau monocouche d'épaisseur égale à 5 cm, excité à incidence normale et encastré sur une paroi fixe à son autre extrémité, on compare les coefficients d'absorption calculés par les 3 méthodes : (i) TMM, (ii) approche exacte + résolution directe (voir section 4.4.1.1) et (iii) approche exacte + résolution sur base d'ondes (voir section 4.4.2). Les deux dernières méthodes utilisent la même matrice de transfert. Cependant, la deuxième calcule directement les caractéristiques acoustiques à partir de cette matrice, tandis que dans la méthode (iii), la réponse du matériau est projetée sur les ondes progressives, permettant ainsi de séparer les ondes incidentes et réfléchies.

La figure 4.2 montre que les 3 méthodes donnent des résultats similaires dans les basses fréquences. Cependant, les deux premières méthodes, qui utilisent la matrice de transfert, ne sont pas stables dans les hautes fréquences. Au contraire, la projection sur base d'ondes

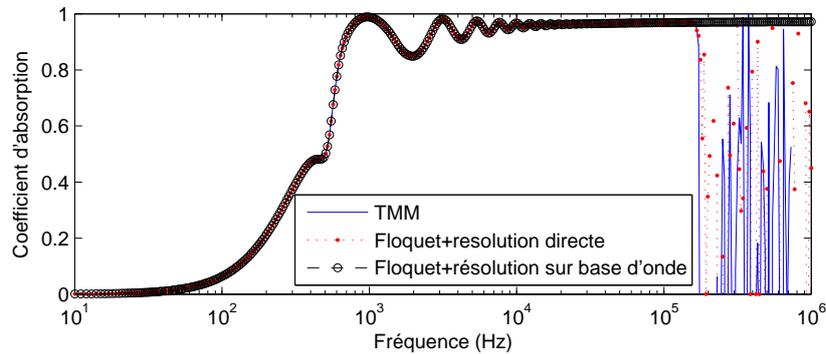


Figure 4.2 – Coefficient d'absorption à incidence normale pour le matériau E et pour les 3 méthodes.

et séparation des ondes incidentes et réfléchies permet de prédire correctement le coefficient d'absorption dans les très hautes fréquences.

On observe le même comportement à incidence oblique ( $45^\circ$ ) (voir figure 4.3).

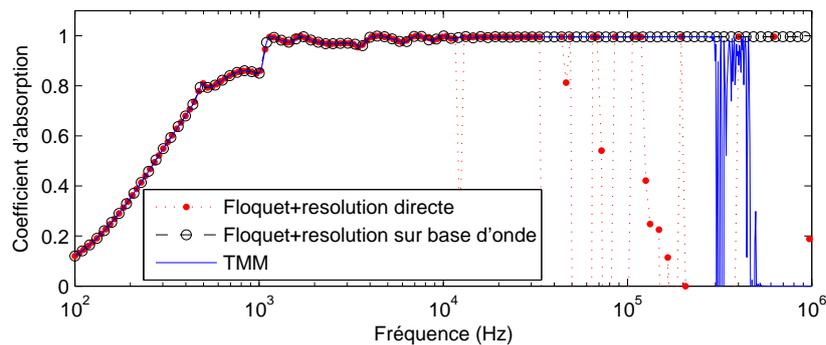


Figure 4.3 – Coefficient d'absorption à incidence oblique pour le matériau E et pour les 3 méthodes.

L'élimination des ondes récessives est donc nécessaire pour prédire les paramètres acoustiques d'un échantillon dans le domaine des très hautes fréquences. Cependant, le calcul par cette méthode de la réponse de matériaux multicouches est aussi sensiblement plus difficile à programmer, la méthode TMM reste alors plus intéressante, d'autant plus que dans la plupart des études de vibroacoustique, la TMM reste dans son domaine de stabilité.

## 4.5 Influence des conditions aux limites latérales sur la propagation d'ondes et sur la réponse acoustique

Dans cette partie, on s'intéresse à l'influence des conditions aux limites latérales sur la propagation d'ondes et sur la réponse vibratoire d'un échantillon poroélastique. La confi-

guration envisagée est celle d'un tube d'impédance ou de transmission, de section réduite, de telle sorte que les conditions aux limites appliquées sur les faces latérales peuvent avoir un effet sur la réponse acoustique. Des études expérimentales et numériques (FEM) ([131, 21, 132, 133] par exemple) ont déjà été menées pour étudier l'influence sur la réponse acoustique des conditions aux limites entre le bâti et l'interface dissipative. Dans cette section, nous ne cherchons pas à observer les différences éventuelles de comportement acoustique pour différentes conditions aux limites, mais bien à interpréter ces différences en termes d'ondes progressant dans le matériau et de couplages entre ces ondes.

Trois classes de matériaux poreux sont envisagées : un matériau élastique (matériau E), un matériau rigide (matériau B) et un matériau souple (matériau F). Leurs paramètres sont donnés en annexe A (tableau A.1). Alors que les deux phases solide et fluide sont bien découplées pour les deux derniers matériaux, le premier exhibe de forts couplages entre le squelette et la phase fluide, à cause de la rigidité plutôt faible et de la résistivité plutôt grande du squelette. La taille de l'échantillon considéré est  $(L_x, L_y) = (10 \text{ cm} \times 8 \text{ cm})$  et son épaisseur est égale à  $L_z = 5 \text{ cm}$ . Nous considérons une propagation des ondes selon l'axe  $z$  dirigé dans la direction de l'épaisseur. La face  $z = 0$  est encastrée et l'échantillon est soumis à un champ de pression uniforme unitaire en  $z = L_z$ .

Nous observerons les réponses acoustiques (coefficient d'absorption) des différents matériaux testés soumis à différentes conditions aux limites (glissante ou encastrée), et nous montrerons que ces comportements peuvent être interprétés en termes d'échanges d'énergie entre les ondes progressives dans le milieu.

Concernant l'implémentation numérique, tous les résultats ont été obtenus sur un programme développé sur Matlab©. Les ondes ont été calculées en utilisant  $(10 \times 8)$  éléments pour la section de l'échantillon (éléments H8 linéaires), ainsi qu'une taille de la sous-structure périodique égale à  $d = 0.1 \text{ mm}$ . Ceci permet d'être certain de la convergence des résultats WFE sur tout le domaine fréquentiel considéré. Pour les calculs éléments finis de référence, 10 éléments ont été utilisés pour mailler l'épaisseur.

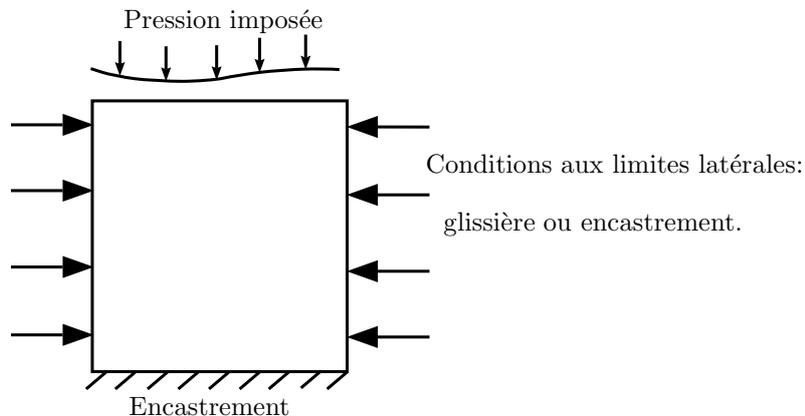


Figure 4.4 – Schéma de l'expérience numérique.

### 4.5.1 Matériau élastique

On considère ici un matériau élastique et assez résistif (matériau E). Dans le cas de conditions aux limites latérales glissantes, les premières ondes progressives sont les ondes longitudinales (solide et fluide), dont la déformée est uniforme sur la section. Par conséquent le maillage de la section n'a aucun effet sur leurs courbes de dispersion. La figure 4.5a montre que les conditions aux limites empêchent la propagation de l'onde de cisaillement.

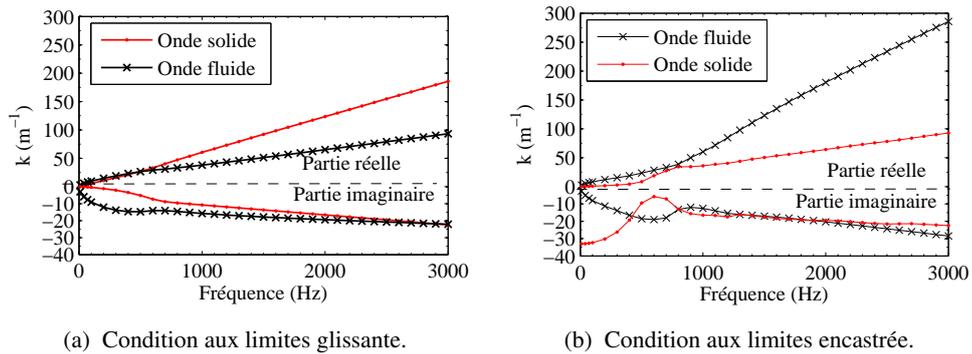


Figure 4.5 – Courbes de dispersion pour le matériau E.

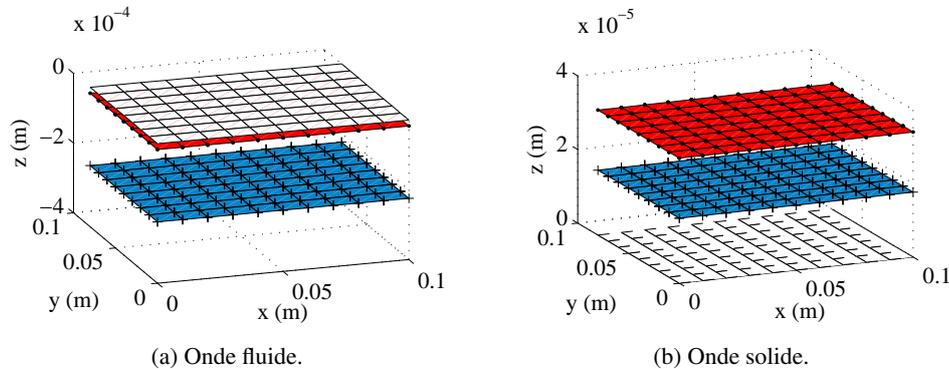


Figure 4.6 – Partie réelle des déformées d'ondes avec condition latérale glissante à 1000 Hz et le matériau E (configurations déformée et non déformée). Pointillé rouge : déplacement de la phase solide ; + bleu : déplacement de la phase fluide ; blanc : non déformé.

Quand une condition d'encastrement latéral est appliqué, la branche correspondant à l'onde solide disparaît (figure 4.5b). Cela signifie que les conditions aux limites ont empêché la propagation de cette onde, progressive même dans les basses fréquences. Cependant, une onde longitudinale  $L_0$  existe encore, à cause de la présence de la phase fluide. Cette onde est en effet le résultat du couplage entre l'onde de compression se propageant dans l'air, et de la première onde de section du squelette *in vacuo*. Quand une onde acoustique se déplace dans le milieu, elle met en mouvement la phase solide sur sa déformée privilé-

giée. Il en résulte une onde dont la déformée n'est pas uniforme sur la section, qui peut être appelée onde fluide (figure 4.7).

De plus, la première onde de section du squelette, si elle est excitée, met en mouvement la phase fluide. Il en résulte une onde  $L_1$ , qu'on appellera onde solide. Cette onde est évanesccente dans les basses fréquences, mais devient progressive mais dissipée au-delà de 300 Hz.

L'existence de ces deux ondes possédant des déformées et des nombres d'ondes similaires est due au fort couplage entre les deux phases. Ce couplage est visible notamment autour de 600 Hz, où une bifurcation entre les deux ondes peut être observée. Ce couplage peut être vu sur le déplacement de l'onde fluide (voir figure 4.7b).

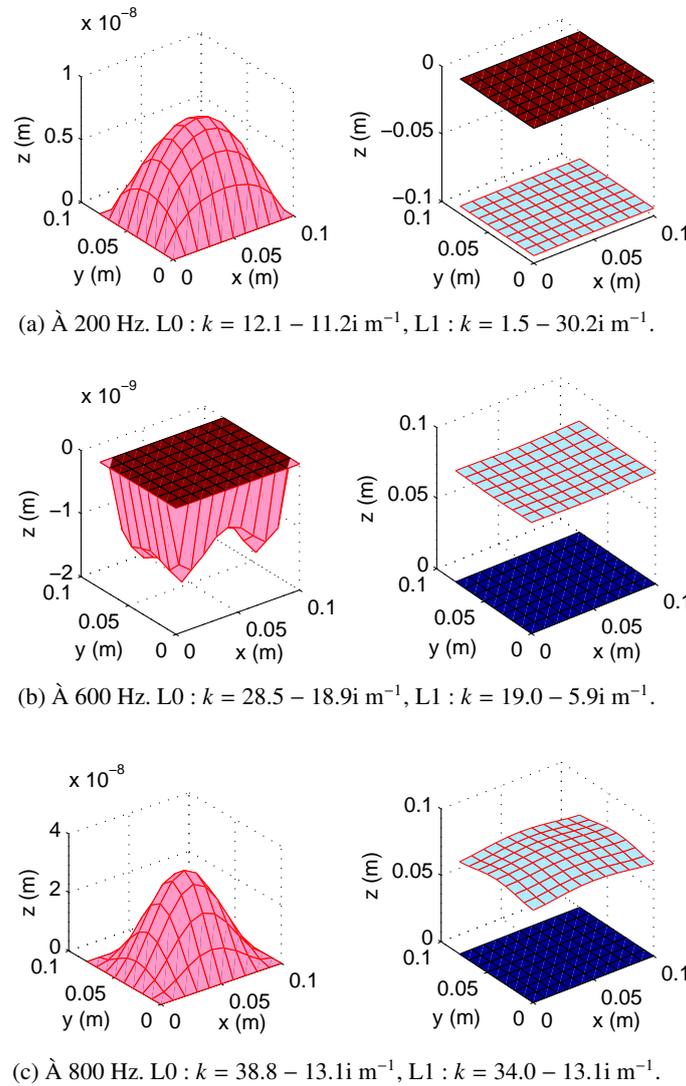


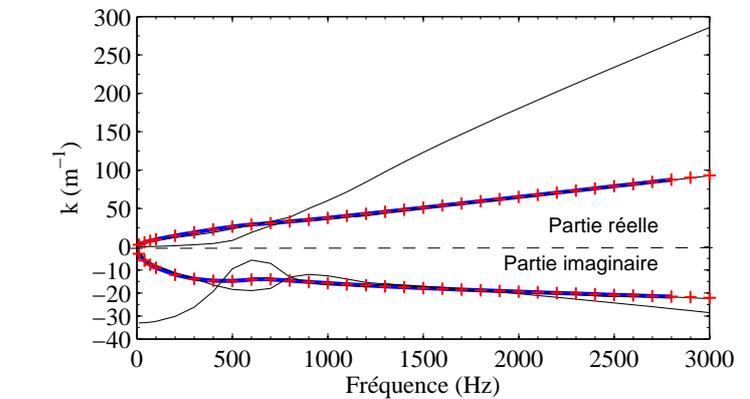
Figure 4.7 – Partie réelle des déformées modales avec encastrement latéral (configurations déformées et non déformées). Figures de gauche (rouge) : déplacement solide ; figures de droite (bleu) : champ de pression.

#### 4.5. Influence des conditions aux limites latérales sur la propagation d'ondes et sur la réponse acoustique 115

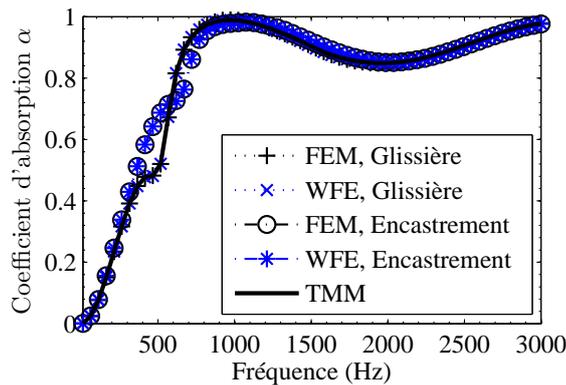
Finalement, les nombres d'ondes des ondes longitudinales obtenues avec des conditions aux limites glissantes ou encastées sont comparés en figure 4.8a. La condition aux limites glissante permet de retrouver les ondes de compression de Biot. Cela signifie que les ondes longitudinales prédites avec conditions aux limites glissantes ont le même comportement que les ondes de Biot à incidence normale. Ce type de conditions aux limites permet en effet de simuler des conditions aux limites infinies pour une incidence normale.

Au contraire, un encastrement latéral modifie fortement les vitesses et déformées des ondes progressives. Le couplage entre la phase solide et la phase fluide est donc fort ; les conditions aux limites ont une influence importante sur la réponse dynamique du matériau.

La figure 4.8b présente les coefficients d'absorption prédits par la WFE, la FEM et la TMM (incidence normale) pour les différentes conditions aux limites testées ici.



(a) Courbes de dispersion pour l'onde fluide. (—) : expression analytique ; (+) : WFE, glissière ; (—) : WFE, encastrement, ondes L0 et L1.



(b) Coefficient d'absorption à incidence normale.

Figure 4.8 – Effets des conditions aux limites latérales sur le matériau E.

Une superposition parfaite peut être observée entre FEM et réponse forcée sur base d'ondes WFE pour les deux conditions aux limites. Un effet rigidifiant est obtenu avec l'encastrement entre 500 Hz et 1000 Hz, l'encastrement supprime la première résonance du

squelette menant à un minimum local. Cela est dû à la suppression de l'onde longitudinale solide. Cet effet se manifeste aussi dans la partie imaginaire des nombres d'ondes.

La partie réelle de l'onde lente est proche des ondes  $L_0$  et  $L_1$  obtenues avec un encastrement latéral. La plage de fréquence sur laquelle le nombre d'onde est différent en fonction des conditions aux limites coïncide avec celle observée sur le coefficient d'absorption.

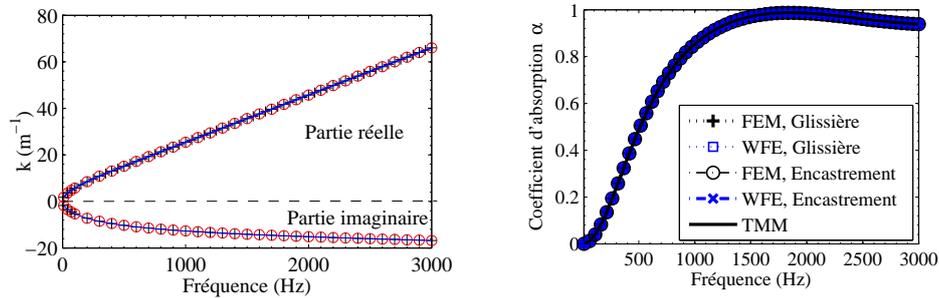
Plus précisément, trois domaines peuvent être distingués. Dans les basses fréquences, l'onde  $L_0$  est l'onde progressive fluide. Elle se propage avec le même nombre d'onde avec une liaison latérale glissante ou encastree, conduisant au même coefficient d'absorption. L'onde solide évanescence n'est pas très excitée par la structure, son influence est limitée au champ proche. Entre 500 Hz et 1000 Hz les deux modes  $L_0$  et  $L_1$  obtenus avec la condition encastree sont couplés par des échanges d'énergie, donc les nombres d'ondes et le coefficient d'absorption sont différents du cas glissant. Cet échange d'énergie peut être vu dans l'effet de *veering* survenant à 800 Hz. Finalement, au-delà de 1000 Hz, l'onde fluide se propageant avec glissière latérale a le même comportement que l'onde  $L_1$ . L'onde progressive fluide se propageant avec glissière latérale a le même nombre d'onde que l'onde  $L_1$ . Mace et Manconi [134] ont montré que l'effet *veering* correspond à un changement de comportement des modes, de telle sorte qu'au-delà de cette fréquence la réponse acoustique est caractérisée par l'onde  $L_1$ . Cette onde possède le même nombre d'onde que l'onde fluide obtenue avec glissière latérale, menant au même coefficient d'absorption.

La TMM à incidence normale permet de prédire correctement le cas avec glissière, car pour cette incidence et cette condition aux limites, la dynamique est la même que dans le cas infini. Au contraire, avec un encastrement latéral, les ondes n'ont plus les mêmes comportements. Le milieu n'a plus la même dynamique que dans le cas infini, la TMM ne permet donc pas de prédire ce cas.

#### 4.5.2 Cas d'un matériau à squelette rigide

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas du matériau B, qui possède un grand module d'Young et une faible résistivité. Avec condition de glissière latérale, deux ondes longitudinales se propagent dans le matériau modélisé avec le modèle de Biot, tandis qu'une seule onde est permise par un encastrement latéral. Ces ondes sont similaires à celles obtenues avec le matériau E. Les modes d'ondes obtenus sont très proches de ceux obtenus pour le matériau E, sauf que l'amplitude des déplacements de la phase solide est beaucoup plus faible. L'onde solide qui se propage avec un encastrement latéral n'est pas tracée ici, car très dissipée. Elle ne se couple pas avec l'onde  $L_0$ , donc ce mode n'a pas d'influence sur la réponse acoustique du système dans cette gamme de fréquences.

La figure 4.9a présente les nombres d'onde de l'onde fluide pour les trois conditions aux limites. Les trois courbes sont superposées, signifiant que les liaisons latérales n'ont pas d'effet sur la dynamique du matériau. Les coefficients d'absorption prédits par les éléments finis (Biot-Allard), par projection sur base d'ondes (WFE) et par TMM sont tracés en figure 4.9b. La superposition parfaite des trois courbes est en accord avec la pertinence du modèle de fluide équivalent (modèle rigide) pour ce matériau.

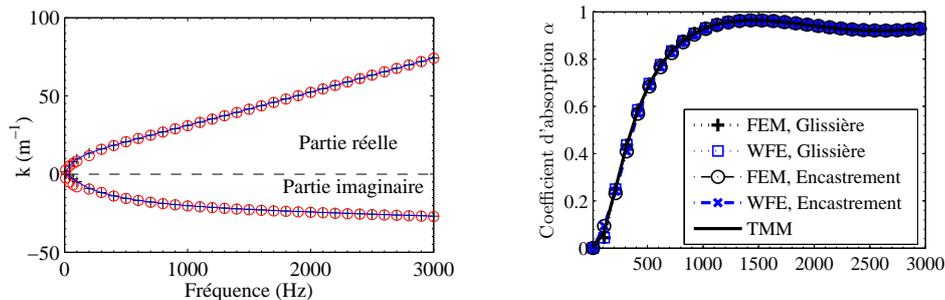


(a) Courbes de dispersion de l'onde lente. (—) : expression analytique ; (+) : WFE, glissière ; (o) : WFE encastré. (b) Coefficient d'absorption à incidence normale.

Figure 4.9 – Effets des conditions aux limites sur un matériau à squelette immobile (matériau B).

### 4.5.3 Cas d'un matériau à squelette souple

L'échantillon est maintenant fabriqué en matériau F. Ce matériau possède un faible module d'Young, un coefficient FSI (Frame Stiffness Influence, [61]) tel que  $\text{FSI} \leq 0.1$ , indiquant que le matériau peut être modélisé par un fluide équivalent avec hypothèse de squelette souple (limp). La différence avec les autres matériaux est que, du fait de la très faible rigidité du squelette, les ondes se propagent très lentement, c'est-à-dire avec de grands nombres d'ondes et de petites longueurs d'ondes.



(a) Courbes de dispersion de l'onde lente. (—) : expression analytique ; (+) : WFE, glissière ; (o) : WFE encastré. (b) Coefficient d'absorption à incidence normale.

Figure 4.10 – Effets des conditions aux limites pour un matériau « limp » (matériau F).

Pour de tels matériaux, le vecteur des contraintes normales dans la phase solide vaut zéro, donc les efforts exercés dans la partie solide sont négligeables devant ceux exercés dans la phase fluide. Les conditions aux limites de type glissière et d'encastrement conduisent donc aux mêmes résultats, sauf pour les très basses fréquences où une résonance du squelette peut être observée.

## 4.6 Conclusion du chapitre

Dans cette partie, nous avons montré que la TMM ne permet pas de prédire précisément dans le cas général la réponse acoustique d'échantillons poreux de taille finie et soumis à des conditions aux limites latérales imposées. Au contraire, une approche numérique, comme la WFE, permet retrouver les résultats des éléments finis à partir de la connaissance des ondes se propageant en présence de ces conditions aux limites.

Nous avons montré que les conditions aux limites latérales peuvent avoir un rôle sur la dynamique du système. Leur influence est d'autant plus grande que les dimensions de l'échantillon sont petites. De plus, elle dépend des matériaux. Suivant leurs paramètres élastiques et poroacoustiques, le couplage entre la phase fluide et la phase solide est plus ou moins fort. La différence entre les deux conditions aux limites testées ne concernant que la phase solide, et l'échantillon étant soumis à une excitation acoustique, les conditions aux limites n'ont une influence que dans le cas d'un couplage fort entre les deux phases, c'est-à-dire dans le cas d'un matériau « élastique ». Les ondes se propageant dans ce milieu traduisent ce couplage et peuvent servir d'indicateur permettant de déterminer *a priori* l'importance du rôle des conditions aux limites sur la réponse acoustique du système.

# Condensation sur base d'ondes progressives

---

## Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>119</b>
<b>5.2</b>	<b>Condensation aux interfaces</b>	<b>120</b>
5.2.1	Problème éléments finis vibroacoustique couplé	120
5.2.2	Modèle avec impédance localisée	121
5.2.3	Problème d'absorption	122
5.2.4	Problème de transmission	123
5.2.5	Cas de matériaux composites	124
5.2.6	Couplage avec une approche modale pour les domaines maîtres	125
<b>5.3</b>	<b>Exemples de validation</b>	<b>127</b>
5.3.1	Problème d'absorption	127
5.3.2	Problème d'absorption par interface multi-matériaux	129
5.3.3	Problème de transmission	129
<b>5.4</b>	<b>Performance de la méthode présentée</b>	<b>131</b>
<b>5.5</b>	<b>Réduction du nombre d'ondes à prendre en compte</b>	<b>132</b>
5.5.1	Exemple	133
5.5.2	Algorithme de sélection des ondes	135
5.5.3	Résultats	136
<b>5.6</b>	<b>Application à une cavité non parallélépipédique</b>	<b>138</b>
5.6.1	Modèle de fluide équivalent	138
5.6.2	Formulation UUt	140
<b>5.7</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>142</b>

---

## 5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons vu comment calculer les modes d'ondes se propageant dans un guide d'ondes unidirectionnel. Nous avons montré dans le chapitre 4 que ces ondes peuvent être utilisées pour calculer la réponse forcée du milieu soumis à une excitation donnée.

L'utilisation des éléments finis dans le cadre de la méthode WFE permet de prendre en compte les conditions aux limites latérales imposées sur le guide d'onde, comme une

condition de glissière ou un encastrement. L'influence de ces conditions aux limites est visible sur les courbes de dispersion du matériau ainsi que sur les déformées de section des ondes.

L'écriture des conditions aux limites en déplacement et en effort dans les deux sections finales du guide d'onde permet d'obtenir un système d'équations bien conditionné dont la résolution permet de calculer les amplitudes des ondes, puis les valeurs des déplacements et des efforts en toute section.

Dans ce chapitre, nous montrons que la démarche précédente peut être généralisée au cas d'un système couplé cavité acoustique – interface dissipative. Cette approche se traduit par la condensation des degrés de liberté du milieu dissipatif sur ceux de la cavité acoustique. Cette condensation de type maître–esclave permet de réduire la taille du problème. Cependant, nous verrons que le temps de calcul n'en est pas amélioré vraiment de manière significative. Pour améliorer ce point, nous envisageons le couplage de l'approche en ondes progressives pour l'interface avec la méthode de synthèse modale pour la cavité acoustique. Enfin, nous présentons deux approches permettant d'obtenir une réduction significative des temps de calcul. La première est fondée sur la sélection des ondes progressives contribuant à la dynamique de l'interface. La seconde est une approche de type interpolation en fréquences.

## 5.2 Condensation aux interfaces

Dans le chapitre précédent, nous avons montré qu'il est possible de prédire la réponse dynamique d'un système en projetant les variables sur ses ondes progressives. Ici, nous verrons qu'il est possible d'utiliser ces résultats pour exprimer la réponse d'un système vibroacoustique avec interface dissipative, sans utiliser d'inconnues pour l'interface. Ce modèle condensé est très proche d'un modèle d'impédance localisée, sauf qu'il permet d'utiliser la valeur exacte de l'impédance au lieu d'une valeur fixée arbitrairement.

### 5.2.1 Problème éléments finis vibroacoustique couplé

Commençons par rappeler la forme du problème éléments finis. Nous considérons ici un système composé d'une cavité acoustique à bords rigides, dans laquelle une couche de matériau poroélastique est collée fermement sur un des murs (voir figure 5.1). Aucun effort n'excite le squelette du matériau dissipatif. Le domaine acoustique est noté  $\Omega_A$ , la pression dans la cavité  $p_A$ . Le domaine poroélastique est noté  $\Omega_P$  et est modélisé par la formulation UUt [26]. L'interface poroélastique/acoustique est notée  $\Gamma$ .  $\mathbf{n}_A$  et  $\mathbf{n}_P$  sont les normales à  $\Gamma$ , sortantes respectivement des domaines  $\Omega_A$  et  $\Omega_P$ . La formulation variationnelle du système s'écrit dans le domaine fréquentiel :

- Pour la cavité acoustique :

$$\text{Trouver } p_A \text{ tel que pour tout } \delta p_A : \int_{\Omega_A} \left( \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \nabla p_A \nabla \delta p_A - \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p_A \delta p_A \right) d\Omega_A = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{n}_A \delta p_A d\Gamma. \quad (5.1)$$

- pour le domaine poroélastique :

Trouver  $\mathbf{u}^s$  et  $\mathbf{u}^t$  tels que pour tout  $\delta\mathbf{u}^s$  et  $\delta\mathbf{u}^t$  :

$$\int_{\Omega_P} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}^s) - \omega^2 \tilde{\rho}_s \mathbf{u}^s \cdot \delta\mathbf{u}^s - \omega^2 \tilde{\gamma} \tilde{\rho}_{\text{eq}} \mathbf{u}^t \cdot \delta\mathbf{u}^s \right) d\Omega_P + \int_{\Omega_P} \left( -p\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}^t) - \omega^2 \tilde{\gamma} \tilde{\rho}_{\text{eq}} \mathbf{u}^s \cdot \delta\mathbf{u}^t - \omega^2 \tilde{\rho}_{\text{eq}} \mathbf{u}^t \cdot \delta\mathbf{u}^t \right) d\Omega_P = \int_{\Gamma} -p_A \mathbf{n}_P \cdot \delta\mathbf{u}^t d\Gamma. \quad (5.2)$$

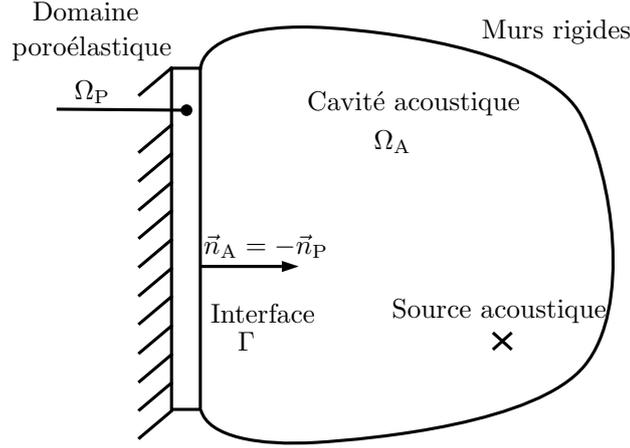


Figure 5.1 – Géométrie du problème poroacoustique.

Après discrétisation par éléments finis, l'équilibre dynamique est obtenu sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{AA}(\omega) & \mathbf{D}_{AP} \\ \mathbf{D}_{AP}^T & \mathbf{D}_{PP}(\omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_A(\omega) \\ \mathbf{q}_P(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_A(\omega) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

où  $\mathbf{p}_A$  et  $\mathbf{q}_P$  sont respectivement les vecteurs des pressions nodales dans la cavité et des inconnues de déplacement dans le domaine poroélastique, où les blocs  $\mathbf{D}_{ii}$  pour  $i=A,P$  sont les matrices de rigidité dynamique des domaines acoustique et poroélastique, et où  $\mathbf{D}_{AP}$  est la matrice de couplage entre les deux domaines. Le problème possède  $n_A$  degrés de liberté pour la partie fluide et  $n_P$  degrés de liberté pour le domaine poroélastique.

Rumpler et coauteurs [31] ont montré que le coût de calcul associé à la partie acoustique peut être réduit par condensation aux interfaces, mais que le coût reste important du fait du grand nombre de degrés de liberté associés au domaine poroélastique.

Pour simuler la réponse du problème couplé, l'approche la plus efficace est d'utiliser le modèle d'impédance dans le cadre de la méthode des éléments finis. Ainsi, aucune inconnue n'est nécessaire pour modéliser le domaine poroélastique, de sorte que des approches modales sont très performantes. Cependant, comme nous l'avons vu dans la section précédente, le modèle d'impédance est basé sur la valeur de l'impédance calculée par TMM, qui suppose que le domaine poroélastique est plat et de dimensions infinies.

### 5.2.2 Modèle avec impédance localisée

Le terme source de l'équation (5.1) peut être remplacé en fonction de l'impédance  $Z_s(\omega, k_x^0, k_y^0)$  de l'interface, calculée pour des angles d'incidences  $k_x^0$  et  $k_y^0$  à la pulsation  $\omega$ ,

en utilisant la relation (1.7) (Chapitre 1) sous la forme :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F \delta p d\Gamma = \frac{1}{i\omega Z_s(\omega, k_x^0, k_y^0)} \int_{\Gamma} p \delta p d\Gamma. \quad (5.4)$$

On définit alors la matrice de couplage  $\mathbf{D}_{\text{coupl}}$  telle que :

$$\frac{1}{i\omega Z_s(k_x^0, k_y^0)} \int_{\Gamma} p \delta p d\Gamma \approx -\mathbf{p}_A^T \mathbf{D}_{\text{coupl}}(\omega) \mathbf{p}_A. \quad (5.5)$$

Le problème couplé éléments finis (5.3) devient donc :

$$(\mathbf{D}_{AA} + \mathbf{D}_{\text{coupl}}) \mathbf{p}_A = \mathbf{F}_A. \quad (5.6)$$

Ce système ne possède comme inconnues que les pressions nodales dans la cavité, ce qui conduit à une grande efficacité des calculs. De plus, la matrice de couplage  $\mathbf{D}_{\text{coupl}}$  est proportionnelle à une matrice constante en fonction de la fréquence. L'assemblage de cette matrice est donc fait une fois pour toutes les fréquences.

Dans les paragraphes suivants, nous montrerons que pour des géométries planes, le modèle d'impédance localisée peut être étendu à des cas où la réponse n'est plus non-localisée, en particulier dans le cas d'encastresments sur les faces latérales. Pour cela, nous utiliserons les ondes calculées par WFE, prenant en compte les différents effets dans la section, à la place des ondes volumiques utilisées par la TMM.

### 5.2.3 Problème d'absorption

La procédure de condensation est d'abord présentée dans le cas d'un problème d'absorption. Le milieu poroélastique est soumis à une pression  $p_{A\Gamma}$  en  $z = L$  et est parfaitement collé sur la face  $z = 0$ . Les conditions aux limites s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_P(z = L) &= \mathbf{F}_{A \rightarrow P} \\ \mathbf{q}_P(z = 0) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.7)$$

où la force exercée par le fluide acoustique sur le matériau poreux est notée  $\mathbf{F}_{A \rightarrow P}$  et vérifie :

$$\int_{\Gamma} -p_{A\Gamma} \mathbf{n}_P \cdot \delta \mathbf{u}^t d\Gamma \approx \langle \delta \mathbf{u}^{sT} \delta \mathbf{u}^{tT} \rangle \mathbf{F}_{A \rightarrow P}. \quad (5.8)$$

Finalement, le vecteur des forces nodales agissant sur le domaine poroélastique est :

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow P} = -\mathbf{D}_{AP}^T \mathbf{p}_A. \quad (5.9)$$

De même que dans le chapitre précédent, les déplacements et les efforts dans les deux sections extrêmes sont projetés sur l'ensemble des modes progressifs :

$$\begin{aligned} \Phi_q^+ \mathbf{Q}^+(0) + \Phi_q^- \mathbf{Q}^-(0) &= \mathbf{0} \\ \Phi_F^+ \mathbf{Q}^+(L) + \Phi_F^- \mathbf{Q}^-(L) &= -\mathbf{D}_{AP}^T \mathbf{p}_A \end{aligned} \quad (5.10)$$

de telle sorte que les amplitudes dans la section  $z = L$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}^+(L) \\ \mathbf{Q}^-(L) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_L} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & (\boldsymbol{\Phi}_q^+)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_q^- \boldsymbol{\mu} \\ (\boldsymbol{\Phi}_F^-)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_F^- \boldsymbol{\mu} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathbf{B}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\boldsymbol{\Phi}_F^-)^{-1} \mathbf{D}_{AP}^T \mathbf{p}_A \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{\text{imp}}}. \quad (5.11)$$

La matrice  $\boldsymbol{\mu}$  est définie par :

$$\boldsymbol{\mu} = (\text{diag}(\mu_i))_i \text{ avec } \mu_i = (\lambda_i^+)^{L/d} = \exp(-ik_i L) \quad (5.12)$$

où  $d$  désigne la taille de la cellule élémentaire WFE permettant le calcul des modes d'onde. Cette matrice est telle que  $\|\boldsymbol{\mu}\| \leq 1$ .

En se référant aux équations Eq. (5.1) et Eq. (5.3), on peut remarquer que seuls les degrés de liberté poroélastiques présents à l'interface contribuent à exciter la cavité acoustique. Ainsi, l'équilibre du fluide s'écrit :

$$\mathbf{D}_{AA} \mathbf{p}_A(\omega) + \mathbf{D}_{AP}^* \mathbf{q}_{P\Gamma}(\omega) = \mathbf{F}_A(\omega) \quad (5.13)$$

où  $\mathbf{D}_{AP}^*$  est la restriction de la matrice  $\mathbf{D}_{AP}$  aux degrés de liberté  $\mathbf{q}_{P\Gamma}$  situés sur l'interface poroélastique–acoustique  $\Gamma$ . Ces degrés de liberté étant placés dans la section  $z = L_P$  du matériau poroélastique :

$$\mathbf{q}_{P\Gamma} = \mathbf{q}_{Pz=L_P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_q^+ & \boldsymbol{\Phi}_q^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^+(L) \\ \mathbf{Q}^-(L) \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

il est possible de voir que le vecteur des efforts imposés  $\mathbf{F}_{\text{imp}}$  peut être écrit en fonction du vecteur des pressions nodales de la cavité acoustique :

$$\mathbf{F}_{\text{imp}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\boldsymbol{\Phi}_F^-)^{-1} \mathbf{D}_{AP}^T \mathbf{p}_A \end{pmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{p}_A \quad (5.15)$$

de sorte que l'équilibre dynamique de la cavité acoustique s'écrit :

$$(\mathbf{D}_{AA} + \mathbf{D}_{\text{coupl}}) \mathbf{p}_A(\omega) = \mathbf{F}_A(\omega) \quad (5.16)$$

avec

$$\mathbf{D}_{\text{coupl}} = \mathbf{D}_{AP}^* \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_q^+ & \boldsymbol{\Phi}_q^- \end{bmatrix} \mathbf{I}_L \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}. \quad (5.17)$$

La démarche adoptée dans cette partie dans le cas de la formulation UUt peut facilement être transposée au cas des autres formulations, notamment au cas du modèle de fluide équivalent.

### 5.2.4 Problème de transmission

Ce travail peut aussi être fait pour exprimer la matrice de couplage dans un problème de transmission acoustique, quand deux champs de pression sont appliqués de part et d'autre

de l'interface. Les domaines acoustiques sont notés respectivement 1 (cavité émettrice) et 2 (cavité réceptrice). Le système d'équations issu d'une analyse éléments finis s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{1P} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{2P} \\ \mathbf{D}_{P1} & \mathbf{D}_{P2} & \mathbf{D}_{PP} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{A1} \\ \mathbf{p}_{A2} \\ \mathbf{q}_P \end{pmatrix}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}(\omega) \quad (5.18)$$

où les matrices  $\mathbf{D}_{11}$  et  $\mathbf{D}_{22}$  sont respectivement les matrices acoustiques des domaines 1 et 2, et où  $\mathbf{D}_{PP}$  est la matrice de rigidité dynamique de l'échantillon poroélastique. Les blocs antidiagonaux  $\mathbf{D}_{iP}$  pour  $i \in \{1, 2\}$  sont les matrices de couplage telles que  $\mathbf{D}_{P1} = \mathbf{D}_{1P}^T$ . La même forme que pour le cas du problème d'absorption peut être obtenue :

$$\left[ \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix} + \mathbf{D}_{\text{coupl}} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{A1} \\ \mathbf{p}_{A2} \end{pmatrix}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{pmatrix}(\omega) \quad (5.19)$$

où la matrice de couplage  $\mathbf{D}_{\text{coupl}}$  est donnée par :

$$\mathbf{D}_{\text{coupl}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{1P}^* \begin{bmatrix} \Phi_q^+ & \Phi_q^- \end{bmatrix} \mathbf{I}_1 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \\ \mathbf{D}_{2P}^* \begin{bmatrix} \Phi_q^+ & \Phi_q^- \end{bmatrix} \mathbf{I}_2 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Les matrices  $\mathbf{D}_{iP}^*$  pour  $i \in \{1, 2\}$  désignent respectivement la partie des matrices de couplage  $\mathbf{D}_{iP}$  relative aux degrés de liberté poroélastiques situés sur l'interface entre le domaine  $i$  et le domaine poroélastique. La matrice  $\mathbf{C}$  permet de calculer l'effort exercé par chaque onde en réponse à un champ de pression imposé sur chaque partie du domaine poreux. Elle est donnée par :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (\Phi_F^+)^{-1} \mathbf{D}_{P1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(\Phi_F^-)^{-1} \mathbf{D}_{P2} \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

La matrice  $\mathbf{B}$  est calculée par :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & (\Phi_F^+)^{-1} \Phi_F^- \boldsymbol{\mu} \\ (\Phi_F^-)^{-1} \Phi_F^+ \boldsymbol{\mu} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

où  $\boldsymbol{\mu} = \text{diag}(\mu_i)$  avec  $\mu_i = (\lambda_i^+)^{L/d}$ .

Finalement les matrices  $\mathbf{I}_1$  et  $\mathbf{I}_2$  sont données par :

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

### 5.2.5 Cas de matériaux composites

Dans le cas de matériaux composites où différents matériaux sont utilisés dans la section mais que leur arrangement ne varie pas dans l'épaisseur, les équations précédentes restent valides, puisque l'aspect multimatériaux est pris en compte dans les modes d'onde.

Cependant, quand plusieurs couches de différents matériaux sont utilisées dans l'épaisseur, il faut ajouter aux équations précédentes les équations de continuité entre les différentes couches.

Tout d'abord, les modes d'onde de chaque couche sont évalués indépendamment. Ensuite, les équations de continuité des déplacements et des efforts normaux sont écrites aux interfaces entre chaque couche  $i - 1$  et  $i$ , dont la position est  $z = L_i$ .

Ces équations peuvent être écrites en utilisant des matrices  $\mathcal{B}_q$ ,  $\mathcal{B}_F$ ,  $C_q$  et  $C_F$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_q \Phi_{q,i-1} \mathbf{Q}_{i-1}(L_i) - C_q \Phi_{q,i} \mathbf{Q}_i(L_i) &= \mathbf{0} \\ \mathcal{B}_F \Phi_{F,i-1} \mathbf{Q}_{i-1}(L_i) + C_F \Phi_{F,i} \mathbf{Q}_i(L_i) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Par exemple, dans le case de la transmission à travers un bicouche poroélastique (formulation UUt), les modes d'onde dans les deux domaines sont respectivement donnés par  $(\Phi_1, \mu_1)$  et  $(\Phi_2, \mu_2)$ , avec  $\|\mu_1\| < 1$  et  $\|\mu_2\| < 1$ . La matrice de couplage  $\mathbf{D}_{\text{coupl}}$  est alors donnée par l'équation (5.20) en utilisant les expressions suivantes :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & (\Phi_{F_1}^+)^{-1} \Phi_{F_1}^- \mu_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\mathcal{B}_q \Phi_{q_1}^-)^{-1} (\mathcal{B}_q \Phi_{q_1}^+) \mu_1 & \mathbf{I} & -(\mathcal{B}_q \Phi_{q_1}^-)^{-1} (C_q \Phi_{q_2}^+) & -(\mathcal{B}_q \Phi_{q_1}^-)^{-1} (C_q \Phi_{q_2}^-) \mu_2 \\ (C_F \Phi_{F_2}^+)^{-1} (\mathcal{B}_F \Phi_{F_1}^+) \mu_1 & (C_F \Phi_{F_2}^+)^{-1} (\mathcal{B}_F \Phi_{F_1}^-) & \mathbf{I} & (C_F \Phi_{F_2}^+)^{-1} (C_F \Phi_{F_2}^-) \mu_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\Phi_{F_2}^-)^{-1} \Phi_{F_2}^+ \mu_2 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (\Phi_{F_1}^+)^{-1} \mathbf{D}_{P1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(\Phi_{F_2}^-)^{-1} \mathbf{D}_{P2} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mu_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Les matrices booléennes  $\mathcal{B}_q$ ,  $\mathcal{B}_F$ ,  $C_q$ ,  $C_F$  sont utilisées pour sélectionner les composantes des modes d'onde sur lesquelles s'applique la condition aux limites. Par exemple, dans le cas d'un couplage entre deux matériaux poroélastiques modélisés par la formulation UUt, la composante d'effort des modes d'onde  $\Phi_F$  est continue, conduisant à  $\mathcal{B}_F = C_F = \mathbf{I}$ . Au contraire, les déplacements totaux transverses ne sont pas continus. Si la normale est portée par  $\mathbf{z}$ , et si les degrés de liberté nodaux sont organisés de la façon suivante :

$$\mathbf{q} = \langle u^t, u^s, v^t, v^s, w^t, w^s \rangle, \quad (5.27)$$

les matrices  $\mathbf{B}_q$  et  $\mathbf{C}_q$  sont égales et sont telles que :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_q &= \langle \mathbf{B}_1 \cdots \mathbf{B}_i \cdots \mathbf{B}_n \rangle, \\ \text{où } \mathbf{B}_i &= \mathbf{0} \text{ si } i \equiv 0[4] \text{ ou } i \equiv 0[1], \\ \text{et où } \mathbf{B}_i(j) &= \delta_{ij} \text{ sinon.} \end{aligned} \quad (5.28)$$

### 5.2.6 Couplage avec une approche modale pour les domaines maîtres

Nous avons vu qu'il est possible de prendre en compte l'effet de l'interface sur les domaines environnants en projetant sa dynamique sur les ondes s'y propageant. Cette méthode permet de réduire le nombre de degrés de liberté dans l'interface acoustique, puisque

cette contribution se traduit par une matrice de rigidité dynamique additionnelle. Pour calculer celle-ci, il est toutefois nécessaire de résoudre un système dont le nombre d'inconnues, égal au nombre d'ondes se propageant dans les deux sens dans le guide d'ondes, est deux fois le nombre de degrés de liberté dans la section de l'interface.

Le domaine extérieur, domaine maître, est typiquement une cavité acoustique ou une structure élastique. Pour réduire les coûts associés à la résolution par éléments finis, des approches modales sont classiquement employées. On se référera par exemple à [135] pour une description détaillée de ces approches. Au lieu de prendre en compte comme inconnues les degrés de liberté nodaux maîtres, les inconnues sont les amplitudes des modes stationnaires.

Dans ce manuscrit, la technique de synthèse modale avec utilisation des modes à interface fixe et des modes de frontière est utilisée, cette méthode est rappelée en Annexe B.

Le problème initial éléments finis correspondant au problème d'absorption par une couche poroélastique insérée sur une face d'un volume fermé acoustique (figure 5.1) est rappelé en Eq. (5.29)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{AA}(\omega) & \mathbf{D}_{AP} \\ \mathbf{D}_{AP}^T & \mathbf{D}_{PP}(\omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_A(\omega) \\ \mathbf{q}_P(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_A(\omega) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

L'utilisation des modes de la cavité acoustique maîtresse permet de réduire le nombre d'inconnues en utilisant la transformation :

$$\mathbf{p}_A = \Phi_A \mathbf{Q}_A \quad (5.30)$$

où  $\Phi_A$  est la matrice des modes de la cavité et  $\mathbf{Q}_A$  le vecteur de leurs amplitudes.

Le système d'équations Eq. (5.29) peut alors être transformé en :

$$\begin{bmatrix} \Phi_A^T \mathbf{D}_{AA}(\omega) \Phi_A & \Phi_A^T \mathbf{D}_{AP} \\ \mathbf{D}_{AP}^T \Phi_A & \mathbf{D}_{PP}(\omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_A(\omega) \\ \mathbf{q}_P(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_A^T \mathbf{F}_A(\omega) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

La complexité de ce problème est alors principalement due à l'existence de l'interface dissipative. Cela signifie que cette méthode de réduction est efficace dans le cas où le nombre de degrés de liberté associés à l'interface dissipative est faible.

Il est alors intéressant de coupler l'approche de condensation aux interfaces sur base d'ondes et l'approche de synthèse modale pour la partie maîtresse. Ce couplage peut être fait naturellement en remplaçant les matrices  $\mathbf{D}_{AA}$ ,  $\mathbf{D}_{AP}$ ,  $\mathbf{D}_{PA}$  par les matrices correspondantes après utilisation de la base modale, respectivement  $\Phi_A^T \mathbf{D}_{AA} \Phi_A$ ,  $\Phi_A^T \mathbf{D}_{AP}$ ,  $\mathbf{D}_{PA} \Phi_A$ . Finalement, le système à résoudre s'écrit :

$$\left[ \Phi_A^T \mathbf{D}_{AA}(\omega) \Phi_A + \mathbf{D}_{\text{coupl}}(\omega) \right] \mathbf{Q}_A(\omega) = \Phi_A^T \mathbf{F}_A(\omega). \quad (5.32)$$

Ce problème est de taille réduite par rapport au problème initial, puisque le nombre d'inconnues est égal au nombre de modes propres de la cavité acoustique.

## 5.3 Exemples de validation

Dans cette section, nous validons la méthode présentée précédemment par la comparaison avec un calcul éléments finis, dans deux cas : (i) la réponse acoustique d'une cavité couplée à un domaine poroélastique sur une de ces faces (problème d'absorption), et (ii) la réponse acoustique d'un système de type « tube de transmission », dans lequel deux cavités acoustiques sont séparées par une interface dissipative composée de deux matériaux poroélastiques différents. Dans les deux cas, l'influence des conditions aux limites sera observée.

Pour différencier l'approche standard de l'approche présentée ici, nous proposons de décrire la méthode utilisée pour modéliser chacun des domaines. L'approche standard consiste à modéliser par éléments finis les deux domaines, cavité et traitement acoustique, on la notera donc « FEM+FEM ». La méthode de réduction présentée dans la section précédente est une condensation sur base d'onde, ne s'appliquant qu'au traitement acoustique ; nous noterons donc cette approche « FEM+C.B.O. ».

### 5.3.1 Problème d'absorption

On considère ici un système composé d'une cavité acoustique excitée par un déplacement source, dans laquelle une face plane est recouverte d'une couche de matériau poroélastique (figure 5.2).

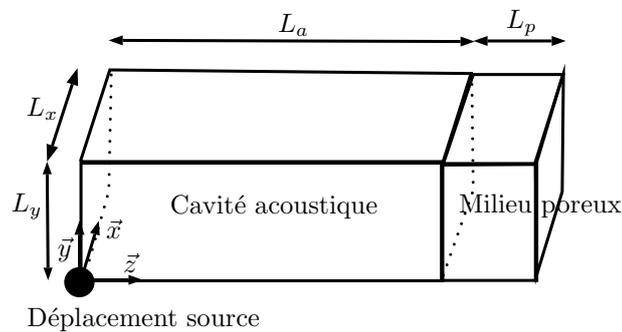


Figure 5.2 – Schéma du problème d'absorption.

La cavité acoustique a pour dimensions :

$$L_x = 10 \text{ cm}, L_y = 8 \text{ cm}, L_z = 100 \text{ cm}.$$

Une couche de 5 cm d'épaisseur de matériau E est appliquée sur la face  $z = 0$ .

La courbe du niveau de pression acoustique en fonction de la fréquence obtenue avec la méthode condensée (FEM+C.B.O.) est parfaitement superposée avec la courbe obtenue à partir de la résolution du système éléments finis complet (FEM+FEM), pour les deux types de conditions aux limites appliquées (figure 5.3).

La figure 5.4 présente le module du terme  $D_{ij}$  de la matrice de couplage. La diagonale  $i = j$  correspond aux termes localisés, tandis que les autres termes correspondent à un couplage non localisé. D'après la méthode des éléments finis, dans le cadre du modèle

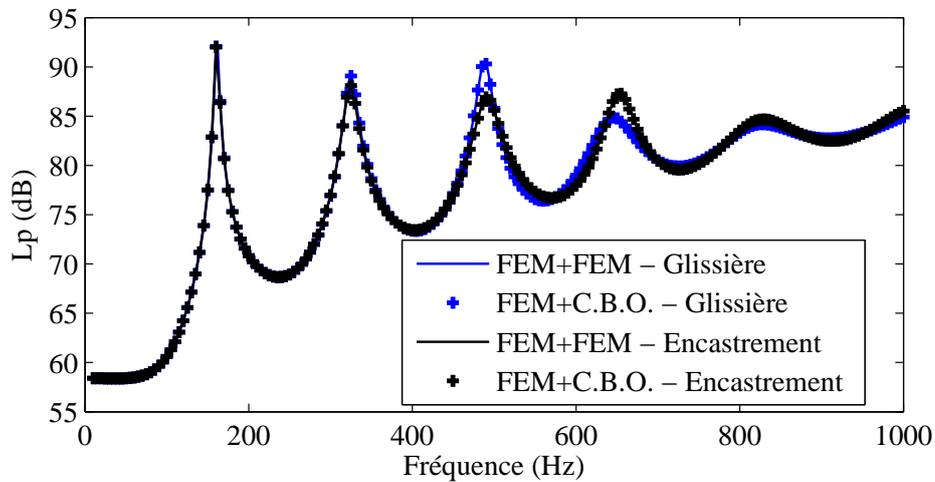
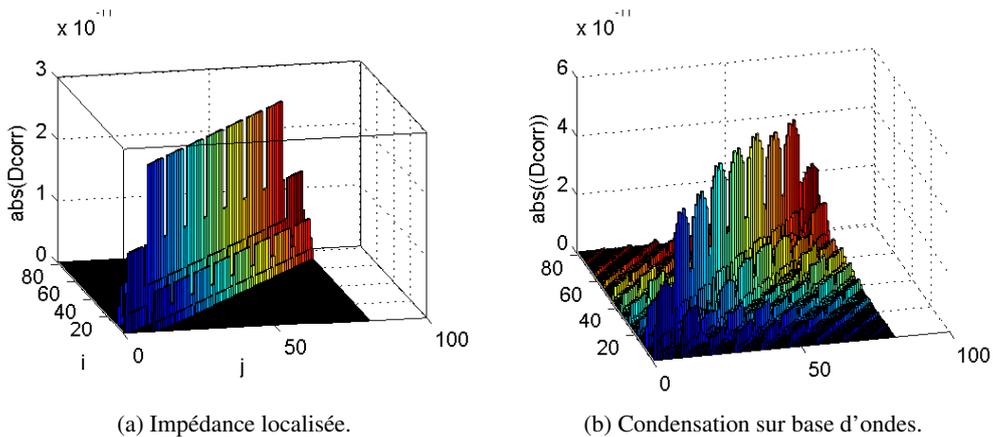


Figure 5.3 – Niveaux de pression moyen dans la cavité acoustique.

d'impédance, la matrice de couplage est calculée comme somme d'intégrales sur les éléments. Il y a donc naturellement des termes non localisés entre deux points appartenant au même élément (figure 5.4a). De plus, le nombre de valeurs non nulles pour chaque ligne est égal au nombre de voisins du nœud considéré.



(a) Impédance localisée.

(b) Condensation sur base d'ondes.

Figure 5.4 – Matrice de couplage traduisant l'effet de l'interface sur la cavité acoustique, dans le cas de conditions limites latérales de type encastrement.

Dans le cas d'un encastrement latéral, des phénomènes non localisés apparaissent. Il y a couplage entre des nœuds qui n'appartiennent pas au même élément.

### 5.3.2 Problème d'absorption par interface multi-matériaux

On considère maintenant une interface dissipative constituée de deux matériaux poroélastiques différents. Les deux matériaux sont modélisés par des fluides équivalents à squelette rigide, on négligera donc l'influence du squelette sur la dynamique du milieu. La géométrie est donnée en figure 5.5. La cavité mesure  $(30 \times 40 \times 30) \text{ cm}^3$ , l'interface dissipative mesure 5 cm d'épaisseur, l'échantillon placé au centre de la face mesure  $(15 \times 20) \text{ cm}^2$ .

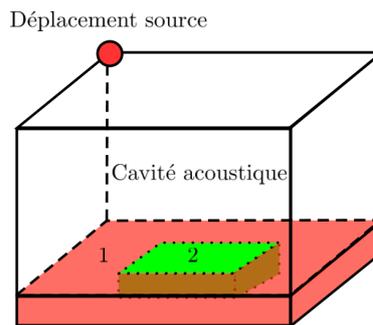


Figure 5.5 – Problème d'absorption avec interface multimatériaux.

Le modèle éléments finis associé comprend 14739 degrés de liberté acoustiques (éléments linéaires H8) et 4624 degrés de liberté poroélastiques (fluide équivalent, éléments linéaires H8). Le maillage dans la section du matériau induit la prédiction de 289 ondes se propageant selon  $z > 0$  et autant se propageant selon  $z < 0$ .

La figure 5.6 permet de constater une bonne concordance entre les résultats obtenus par résolution du problème éléments finis initial et les résultats obtenus avec condensation de l'interface.

### 5.3.3 Problème de transmission

On considère ici un problème de transmission acoustique à travers une interface composée de 5 cm de matériau J et de 3 cm de matériau K (voir figure 5.7).

Les dimensions du tube d'onde sont  $L_x = 10 \text{ cm}$ ,  $L_y = 8 \text{ cm}$ ,  $L_1 = 5 \text{ cm}$ ,  $L_2 = 3 \text{ cm}$ ,  $L_e = 45 \text{ cm}$  et  $L_r = 45 \text{ cm}$ . Toutes les faces des deux domaines acoustiques sont supposées rigides. Les niveaux de pression moyens mesurés dans chaque cavité acoustique sont tracés en fonction de la fréquence sur la figure 5.8. Dans le cas de la condition aux limites de type glissière, on observe une parfaite superposition entre les 3 méthodes. Au contraire, dans le cas d'une liaison latérale de type encastrement, la TMM n'est pas capable de prédire correctement les ondes qui se propagent avec cette condition aux limites. L'algorithme FEM+TMM ne permet pas de retrouver ce type de conditions aux limites, à la différence des éléments finis et de l'algorithme présenté ici utilisant les ondes WFE.

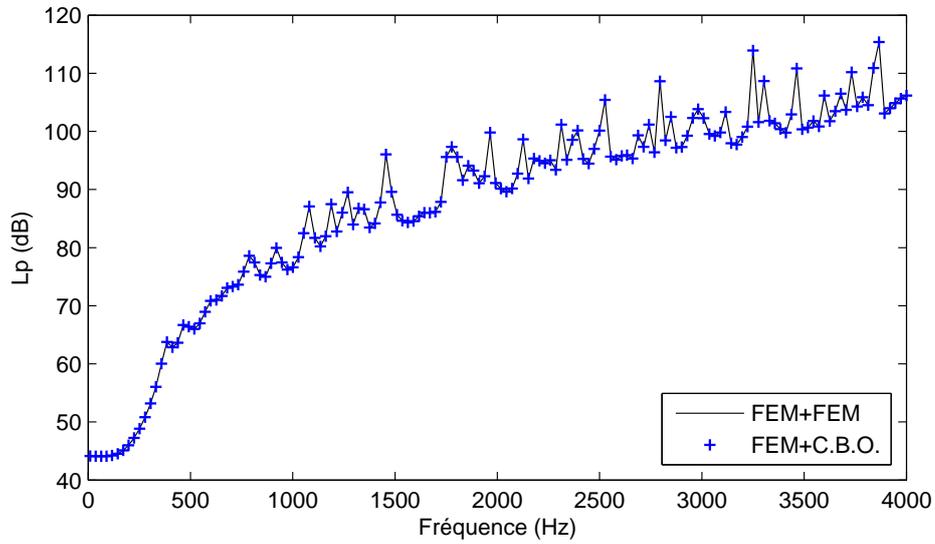


Figure 5.6 – Niveau de pression dans la cavité acoustique.

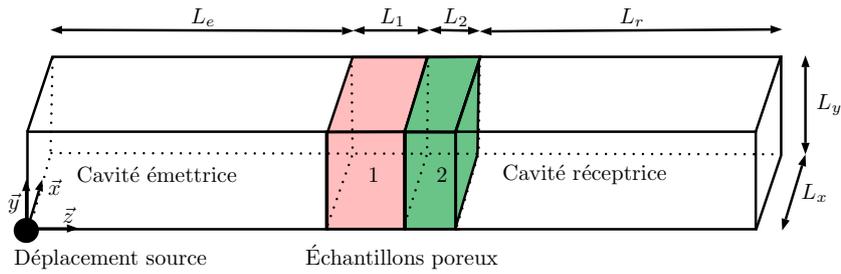
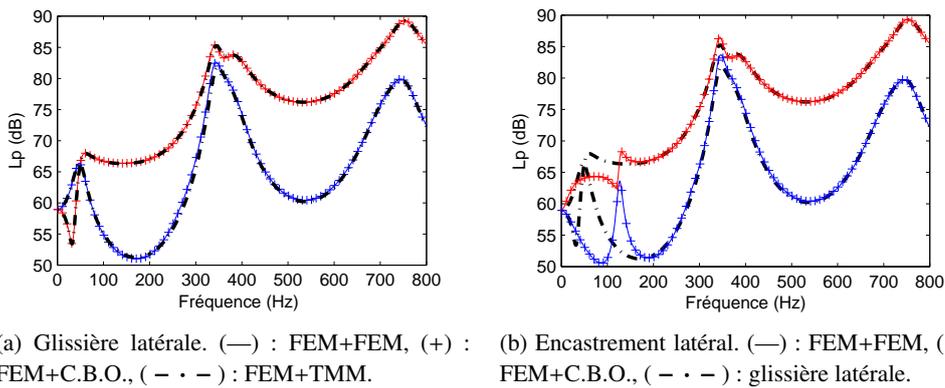


Figure 5.7 – Schéma du problème de transmission



(a) Glissière latérale. (—) : FEM+FEM, (+) : FEM+C.B.O., (---) : FEM+TMM. (b) Encastrement latéral. (—) : FEM+FEM, (+) : FEM+C.B.O., (- · -) : glissière latérale.

Figure 5.8 – Niveaux de pression moyens dans les deux cavités acoustiques. Rouge : cavité émettrice et bleu : cavité réceptrice.

## 5.4 Performance de la méthode présentée

On s'intéresse dans cette section aux temps de calcul nécessaires pour résoudre le problème par les approches présentées dans ce manuscrit, dans le cas d'un problème d'absorption. Plutôt que les temps de calcul CPU réels, qui dépendent entre autres de la machine utilisée, de l'architecture du programme, de la parallélisation éventuelle des tâches, on présente ici une comparaison qualitative des gains obtenus par la méthode condensée expliquée précédemment. Bien que ces gains peuvent être améliorés par une meilleure programmation des algorithmes numériques, la comparaison des temps est ici pertinente puisque les mêmes algorithmes sont utilisés. Ainsi, même si une programmation plus efficace de la résolution du problème éléments finis est programmée, des gains du même ordre de grandeur peuvent être attendus pour la méthode condensée.

La figure 5.9 présente les temps de calcul observés pour résoudre le problème d'absorption précédent. La méthode de condensation est en trois temps :

- Calcul des modes d'onde (WFE) :  
Cette phase permet de calculer les modes d'onde se propageant dans une direction du guide d'ondes. Elle devient numériquement onéreuse quand le maillage de la section est très riche et quand beaucoup de fréquences sont considérées. Ce calcul cependant ne dépend pas de l'épaisseur.
- Calcul de la matrice de couplage :  
Une fois que les modes d'onde à une fréquence donnée sont connus, la matrice de couplage est calculée. Cette étape nécessite la résolution d'un système linéaire pour calculer les amplitudes, et éventuellement certaines inverses de matrices afin de normaliser correctement le problème. Le coût numérique de cette étape augmente donc avec le nombre d'ondes calculées, donc avec le maillage de la section. Le coût est cependant indépendant de l'épaisseur.
- Résolution du problème :  
Finalement, les pressions acoustiques sont obtenues par résolution d'un système linéaire, où la contribution de l'interface est présente sous la forme d'un bloc potentiellement plein.

Pour les trois étapes, le coût est indépendant de l'épaisseur. Cela signifie que la méthode est adaptée à des épaisseurs importantes et à des calculs répétés, par exemple pour optimiser le placement du traitement acoustique, les épaisseurs ou l'arrangement des matériaux dans un multicouche. La précision de l'approche ne dépendant pas du maillage utilisé pour l'épaisseur, le calcul est convergé même dans les hautes fréquences, si le maillage de la section est suffisamment fin.

Au contraire, le coût des deux premières phases augmente avec la richesse du maillage de la section, qui induit l'existence d'un nombre plus important d'ondes.

Ces différents points peuvent être observés sur la figure 5.9. La condensation sur base d'ondes permet d'obtenir des temps de calcul réduits quand le nombre de degrés de liberté dans l'épaisseur est grand et/ou quand le nombre de degrés de liberté dans la section est petit. L'efficacité des différentes techniques est expliquée en terme de taille du système matriciel et de type de matrices sur les schémas présentés en figure 5.10.

L'utilisation de modes à interface fixe permet de réduire le temps de calcul par rapport

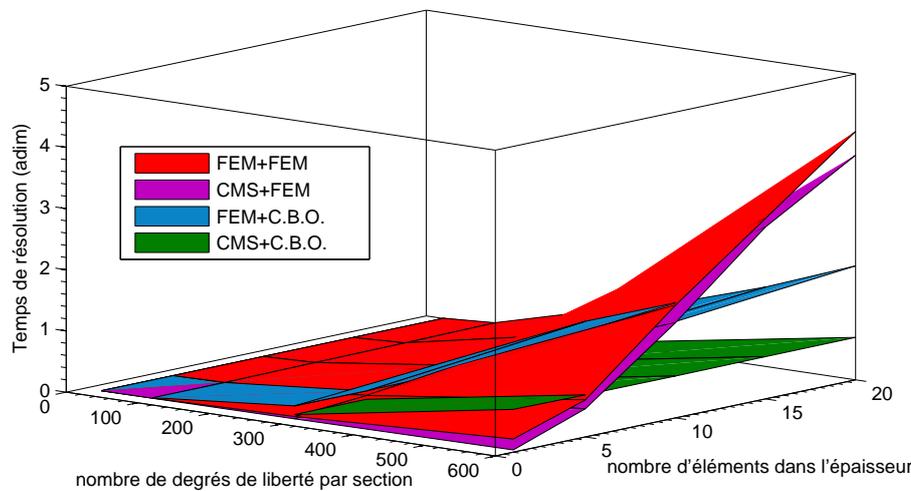


Figure 5.9 – Temps de calcul (adimensionnels) obtenus par les différentes techniques, pour 19 itérations en fréquences et 50 modes internes sélectionnés pour la CMS.

au problème couplé initial (figure 5.9). Cette technique est d'autant plus efficace qu'un grand nombre de degrés de liberté internes existent et qu'un petit nombre de modes est sélectionné. Elle est limitée dans le cas de sections de grandes dimensions par le grand nombre de modes d'attache. Enfin, ces modes étant calculés indépendamment de la fréquence, le gain de temps par rapport au problème complet augmente avec le nombre d'itérations fréquentielles.

Cette réduction est cependant assez limitée par le grand nombre de degrés de liberté associés au domaine poroélastique. Celui-ci concentre l'essentiel de la complexité numérique, limitant la performance de la réduction CMS sur la cavité acoustique (figure 5.10b).

La condensation de l'interface sur les degrés de liberté maîtres par approche ondulatoire se traduit par l'ajout d'une matrice de couplage (figure 5.10c). La méthode n'est pas nécessairement très efficace, car le nombre de degrés de liberté reste important et la matrice à inverser est potentiellement pleine, quand les effets non-localisés sont importants.

Il est donc intéressant de coupler les deux approches (figure 5.10d). La réduction du nombre de degrés de liberté acoustiques par CMS est alors très efficace. On observe des facteurs de réduction des temps de calcul beaucoup plus importants (figure 5.9). Cette réduction est d'autant plus grande que le nombre d'éléments dans l'épaisseur est important. Nous reviendrons sur les performances de la méthode dans les sections suivantes.

## 5.5 Réduction du nombre d'ondes à prendre en compte

Les coûts de calcul peuvent être encore améliorés en réduisant le nombre d'ondes sélectionnées pour calculer la matrice de couplage (voir Eq. (5.17) dans le cas d'un problème d'absorption). Nous avons vu précédemment qu'un type d'onde donné se propage dans les

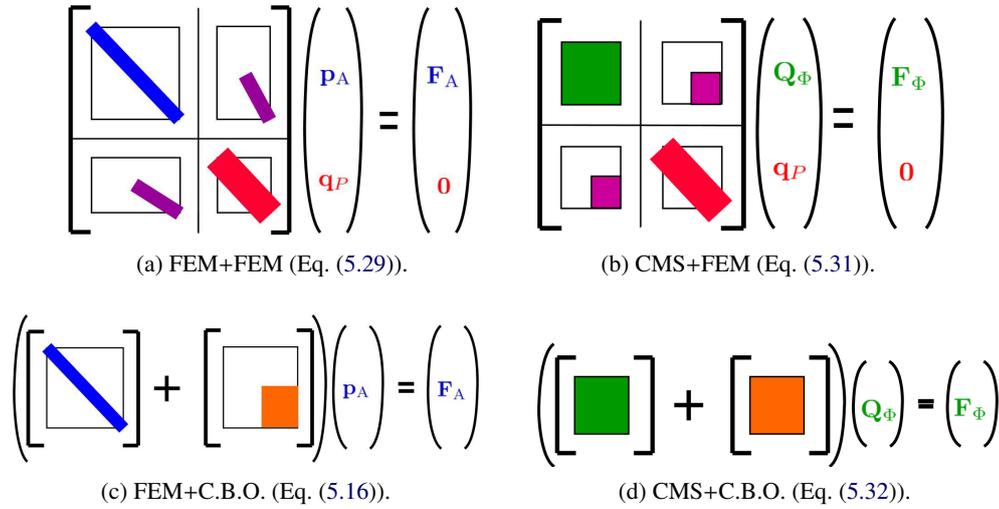


Figure 5.10 – Schéma illustrant le principe de réduction de la méthode de condensation sur base d'ondes.

deux directions, l'une est l'onde incidente et l'autre l'onde réfléchie. Les déformées et les nombres d'onde de ces deux types d'ondes sont identiques, la seule différence est le sens de propagation. Dans ce qui suit, le nombre d'ondes sélectionnées indiqué désigne le nombre d'ondes incidentes sélectionnées. Il est sous-entendu que les ondes réfléchies correspondant aux ondes incidentes sélectionnées sont aussi prises en compte dans le calcul.

### 5.5.1 Exemple

On considère ici le problème d'absorption acoustique à travers un matériau monocouche (voir figure 5.2), modélisé par le modèle de fluide équivalent «limp». La cavité acoustique a pour dimensions  $40 \times 30 \times 50 \text{ cm}^3$ , et est recouverte par une épaisseur de 5 cm de mousse poroélastique (matériau J). Le maillage utilisé pour la référence consiste en  $15 \times 10 \times 40$  éléments hexaédriques pour la cavité acoustique. Dans le calcul FEM de référence, 10 éléments sont utilisés dans l'épaisseur du revêtement poreux.

La méthode WFE permet alors de prédire 176 modes d'onde incidents et autant de modes d'onde réfléchis.

Les résultats ont été obtenus en utilisant une condensation sur les modes internes de la cavité acoustique, à interface fixe, à la fois pour l'approche condensée et l'approche FEM directe. Au lieu des 7216 degrés de liberté nodaux associés à ce maillage, 180 modes internes sont retenus ainsi que 176 modes d'attache. Le mode dont la fréquence propre est la plus élevée est situé à 2993 Hz, soit bien au-delà de la fréquence maximale d'étude (1000 Hz). Le tableau 5.1 permet de comparer les temps de calcul obtenus par la méthode présentée ici, en fonction du nombre d'ondes sélectionnées.

Il apparaît sensiblement en figure 5.11 que toutes les ondes ne sont pas nécessaires à prédire correctement la réponse vibroacoustique du système dans l'ensemble de la gamme de fréquences. La question venant naturellement est la question du choix des ondes. En

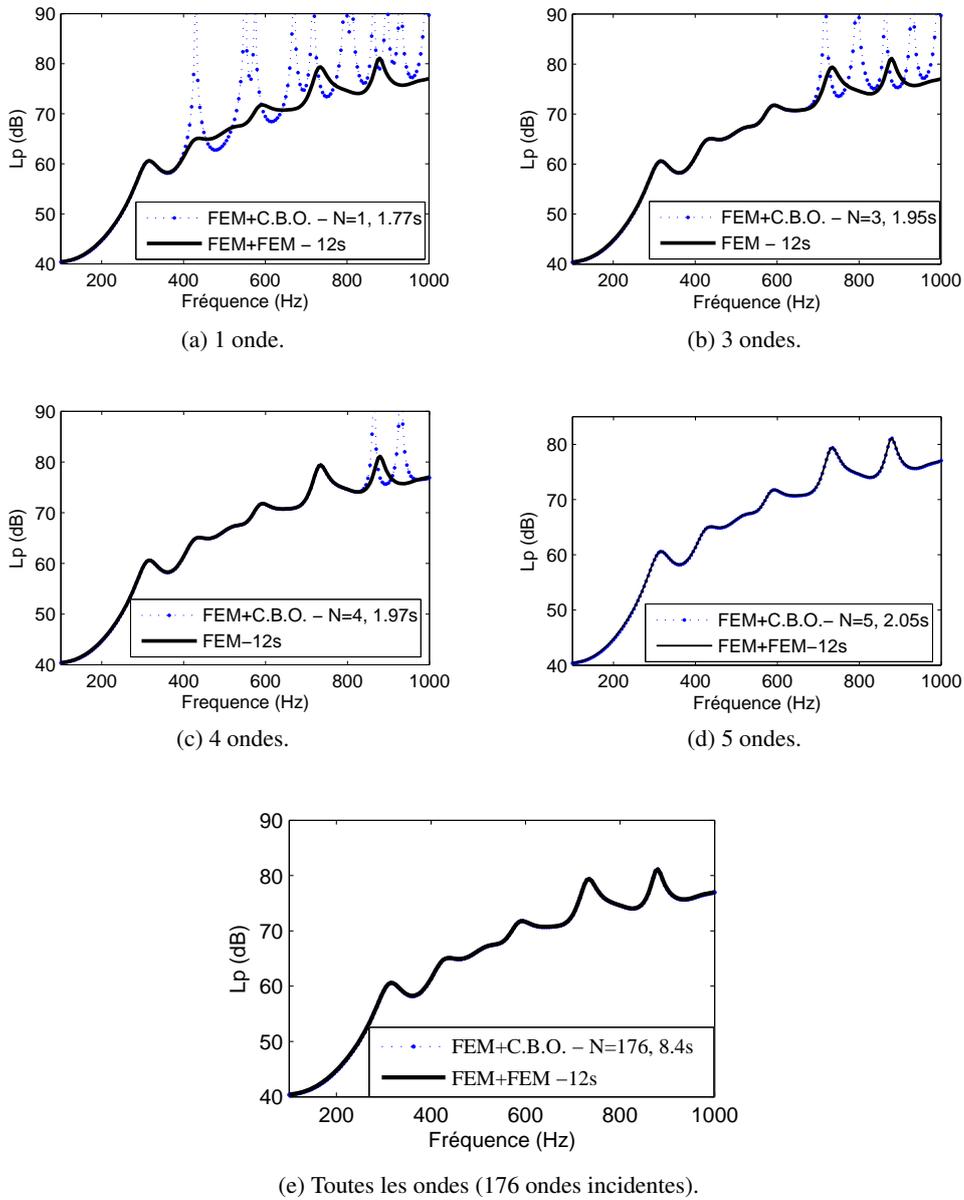


Figure 5.11 – Niveau de pression moyen dans la cavité en fonction du nombre d'ondes sélectionnées.

effet, les amplitudes des ondes excitées par une source dépendent de la forme de la source, et leur influence sur la réponse vibratoire dépend de leurs caractéristiques de propagation, et donc de la longueur du guide d'onde. Loin de l'excitation, une onde évanescente faiblement excitée n'aura *a priori* pas d'influence sur la réponse dynamique. Au contraire, il est difficile de prédire si une onde évanescente mais fortement excitée, ou au contraire qu'une onde progressive faiblement atténuée mais faiblement excitée, influe de façon importante sur le système. À proximité de l'excitation, la réponse du système sera composée à la fois

Méthode	Nombre d'ondes sélectionnées	Facteur de réduction $t_{FEM}/t_{FEM+C.B.O.}$
FEM		1
FEM+C.B.O.	176 (toutes)	1.44
FEM+C.B.O.	5	5.8
FEM+C.B.O.	4	6.0
FEM+C.B.O.	3	6.2
FEM+C.B.O.	1	6.8

Tableau 5.1 – Temps de calcul en fonction du nombre d'ondes sélectionnées.

des contributions des ondes évanescentes et des ondes progressives, sans qu'il soit aisé de discriminer la contribution de chacune. Par ailleurs, la contribution des ondes varie avec la fréquence, il est donc probable qu'il faille une sélection à chaque fréquence.

### 5.5.2 Algorithme de sélection des ondes

Dans [97], l'auteur se base sur un critère d'erreur qu'il construit. La méthode proposée consiste à évaluer un nombre d'allers-retours caractéristique  $N$  et de calculer l'amplitude de chaque onde résultant de la sommation de ces amplitudes pour tout nombre d'allers-retours de 0 à  $N$ . Les ondes sont alors classées par amplitude décroissante, et sélectionnées en choisissant le nombre minimal permettant d'obtenir une erreur donnée. Si cet algorithme peut être facilement programmé, il est limité par le temps de calcul, en particulier dans les basses fréquences, où les faibles amortissements induisent une grande valeur de  $N$ .

Deux critères de classement des ondes apparaissent naturellement :

- Aspect progressif/évanescent :

On commence par ordonner les ondes par partie imaginaire d'amplitude croissante :

$$0 < |\text{Im}(k_1)| < |\text{Im}(k_2)| < \dots < |\text{Im}(k_n)| \quad (5.33)$$

où  $n$  est le nombre total d'ondes prédites par WFE. Le critère de sélection peut donc être écrit de plusieurs manières équivalentes :

$$\begin{aligned} & |\text{Im}(k)| < \alpha \\ \text{ou } & |\exp(\text{Im}(k)L)| > \beta \\ \text{ou } & \text{Sélection des } N \text{ premières ondes } (N < n). \end{aligned} \quad (5.34)$$

- Amplitude des ondes :

L'amplitude des ondes soumises à deux conditions aux limites appliquées aux extrémités peut être calculée à partir de l'expression de la continuité des déplacements et des efforts (par exemple Eq. (4.71)). Le problème est alors de connaître les conditions aux limites appliquées.

En observant la figure 5.11, il est visible que le nombre d'ondes nécessaires est lié au nombre de modes de la structure maîtresse. Les sections des deux milieux étant les mêmes,

les modes de section se propageant dans la mousse poroélastique (fluide équivalent) doivent correspondre aux modes excités de la cavité. Par conséquent on observe que le nombre d'ondes nécessaire est égal au nombre de modes de la structure maîtresse. On propose donc d'évaluer à la fréquence maximale d'intérêt le nombre d'ondes qui contribuent à la dynamique de l'interface. L'algorithme de résolution est donc le suivant :

1. Calcul des modes d'onde à toutes les fréquences.
2. Organisation des modes par dissipation croissante.
3. Résolution avec toutes les ondes à la fréquence maximale d'intérêt.
4. Sélection des ondes par leur amplitude. On définit alors le critère de sélection en amplitude par :

$$\frac{Q_i}{Q_{\max}} < \text{Crit pour toutes les ondes } i \text{ sélectionnées.} \quad (5.35)$$

où  $Q_{\max}$  est l'amplitude la plus forte mesurée, et où les amplitudes sont données par exemple par l'équation Eq. (4.71) pour le problème d'absorption avec la formulation UUt.

5. Résolution à toutes les autres fréquences sur la base d'ondes sélectionnées.

### 5.5.3 Résultats

La figure 5.12 présente l'évolution de l'erreur  $\varepsilon$  commise sur le niveau sonore à 2 kHz en fonction du critère de sélection (Eq.(5.35)). Cette erreur correspond à l'erreur relative entre la pression calculée avec tous les modes  $\mathbf{p}_{\text{ex}}$  et celle calculée après sélection  $\tilde{\mathbf{p}}$  :

$$\varepsilon = \frac{\|\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_{\text{ex}}\|}{\|\mathbf{p}_{\text{ex}}\|}. \quad (5.36)$$

Il apparait que l'erreur ne décroît pas linéairement avec le critère de sélection. Ajouter des ondes, c'est-à-dire diminuer la valeur du critère de sélection, permet de diminuer l'erreur, mais cette diminution n'est pas forcément intéressante en termes de coût de calcul. Pour définir la valeur du critère Crit permettant de sélectionner le nombre minimal d'ondes, on le fera varier de manière à avoir une erreur inférieure à une valeur imposée par rapport au calcul avec tous les modes d'onde. La tolérance est fixée à 0.2%, conduisant à choisir dans le cas précédent Crit = 0.2.

Quand les fréquences augmentent, le champ de pression environnant se complexifie, excitant de plus en plus d'ondes. La figure 5.13 présente l'évolution de l'erreur commise sur le champ de pression dans la cavité à 3500 Hz. La valeur du critère optimal pour la même erreur acceptable (0.2%) est dans ce cas : Crit = 0.1.

La figure 5.14 montre une bonne superposition des résultats FEM+FEM, CMS+FEM et CMS+C.B.O., entre 2500 et 3000 Hz. 5 éléments sont utilisés pour mailler l'épaisseur du matériau poreux. Le maillage initial est constitué de 15x10 éléments linéaires H8 dans la section, ce qui induit la présence de 7216 degrés de liberté pour la cavité acoustique et 1056 degrés de liberté pour le milieu poreux (fluide équivalent « limp », matériau J).

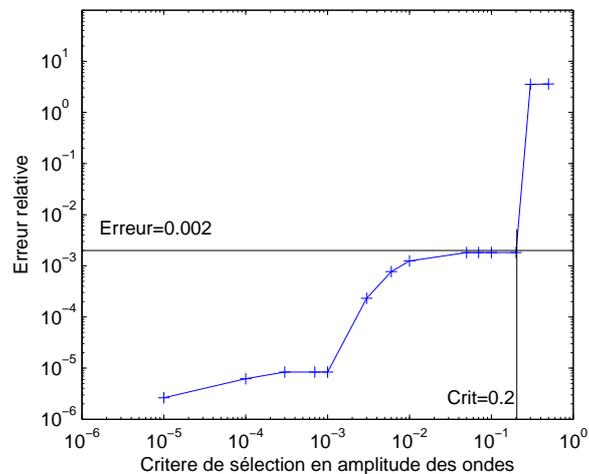


Figure 5.12 – Évolution de l'erreur commise sur le champ de pression en fonction du critère de sélection, à 2 kHz.

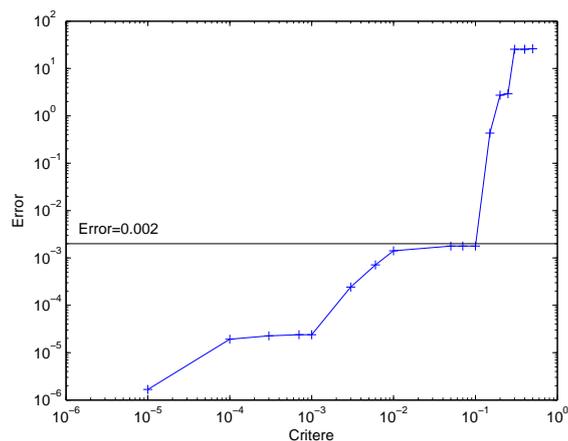


Figure 5.13 – Évolution de l'erreur commise sur le champ de pression en fonction du critère de sélection, à 3500 Hz.

Pour la CMS, 800 modes internes sont retenus pour la CMS, permettant d'obtenir des résultats convergés sur la gamme de fréquences étudiée. Le problème à résoudre contient alors 976 modes pour la cavité acoustique et 1056 degrés de liberté pour le milieu poreux. La CMS permet de réduire les coûts de calcul par rapport aux éléments finis, avec un gain faible, de l'ordre de  $\times 1,1$ . Ce gain est très faible car beaucoup de degrés de liberté restent associés au milieu poreux et car les matrices projetées sur base modale sont des matrices pleines.

La condensation sur base d'ondes permet d'éliminer les 1056 degrés de liberté associés à la partie poreuse. Cependant, à chaque fréquence, la matrice de couplage doit être calculée, ce qui nécessite la résolution d'un système possédant au plus  $2 \times 176 = 352$  incon-

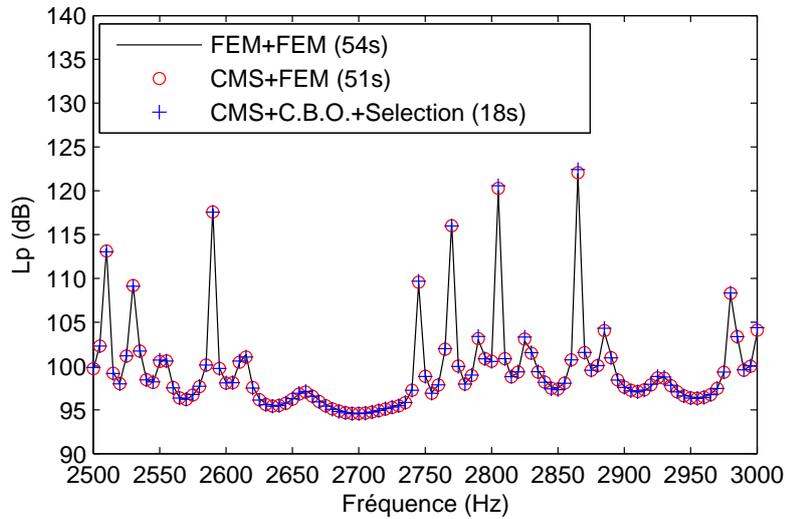


Figure 5.14 – Niveaux sonores moyens dans la cavité pour les 3 méthodes numériques.

nues, nombre total d'ondes. Réduire le nombre d'ondes sélectionnées permet de réduire de manière importante le temps de calcul de cette matrice (ici, 32 ondes ont été sélectionnées). Finalement, au lieu des 7216+1056 inconnues initiales, les inconnues du système à résoudre pour connaître le champ de pression à chaque fréquence sont seulement les amplitudes des modes de la cavité acoustique (976 modes). Le facteur de réduction des temps de calcul est de l'ordre de  $\times 3$ . Ce facteur serait beaucoup plus important si plus d'éléments avaient été utilisés pour mailler l'épaisseur. Il est important de remarquer que la technique de condensation permet de donner à la méthode CMS toute son efficacité.

## 5.6 Application à une cavité non parallélépipédique

Dans les paragraphes précédents, un algorithme de sélection des modes a été proposé et validé dans le cas d'une cavité parallélépipédique. Une relation directe entre le nombre de modes dans la cavité et le nombre de modes d'onde qui contribuent a été observé. Pour valider l'approche dans un cas où les modes d'onde n'ont pas nécessairement la même allure que les modes propres de la cavité on présente ici les résultats obtenus pour une cavité à murs non parallèles recouverte sur une face par une couche d'un matériau poroélastique.

La géométrie et le maillage associé sont présentés en figure 5.15. La couche poroélastique est maillée de manière à assurer la conformité des éléments à l'interface, 10 éléments sont utilisés dans l'épaisseur.

### 5.6.1 Modèle de fluide équivalent

Le matériau poreux est modélisé dans un premier temps par le modèle de fluide équivalent limp. Le modèle éléments finis consiste donc en 20812 degrés de liberté pour la

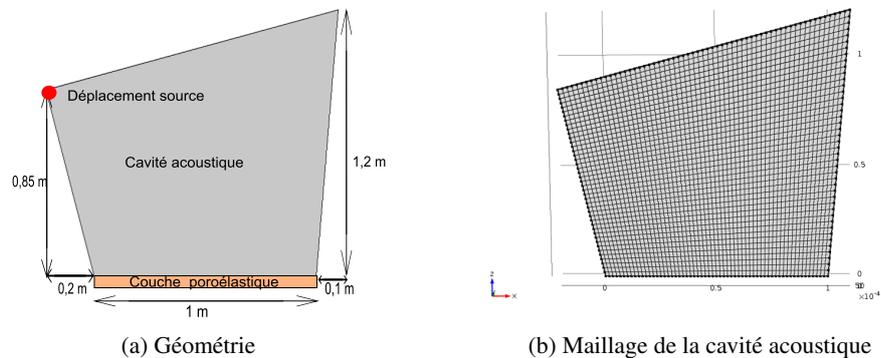


Figure 5.15 – Géométrie et maillage.

cavité acoustique et 2662 degrés de liberté pour la couche poroélastique. 800 modes à pression nulle sur les bords sont utilisés pour la CMS afin de réduire la taille du système éléments finis initial.

La figure 5.16 présente le niveau sonore moyen dans la cavité obtenu par résolution du problème éléments finis (CMS+FEM) ou par résolution du problème avec condensation et choix des modes (CMS+Condensation base d'ondes sélection des modes).

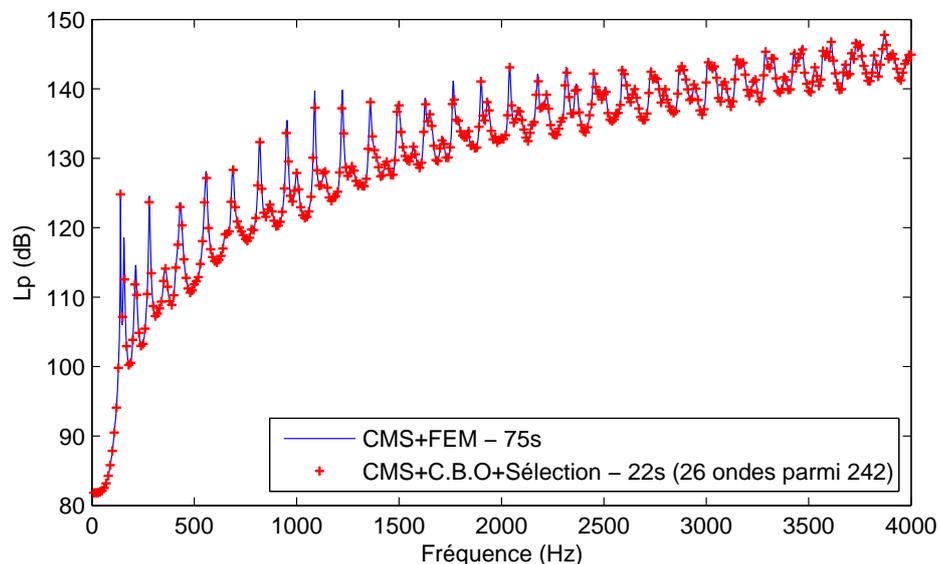


Figure 5.16 – Niveau de pression moyen dans la cavité.

Le critère de choix présenté permet de sélectionner 26 ondes parmi les 242 ondes prédites par WFE. Une parfaite superposition entre le modèle numérique sans condensation et le modèle avec condensation sur base d'ondes peut être observée sur toute la gamme de fréquences, pour un temps de calcul (sans calcul des modes) divisé par un facteur 3.

Afin d'améliorer encore les temps de calcul, il faut encore travailler à la réduction du nombre d'itérations fréquentielles. Il serait envisageable de réduire ce nombre, par exemple avec des approximants de Padé. Ici, nous faisons l'hypothèse que la matrice de couplage assemblée sur base modale varie peu entre deux fréquences voisines. Puisque les formes modales sont indépendantes de la fréquence, l'effet de l'interface dissipative sur leurs amplitudes ne dépend que des ondes se propageant dans l'interface. Leurs propriétés varient en fonction de la fréquence. Cependant, il a été vu que cette dépendance est faible pour deux fréquences suffisamment proches. L'idée est alors de calculer les modes d'onde pour un nombre restreint de fréquences et de calculer la réponse du système en toutes les fréquences en interpolant (plus proche voisin) la valeur de la matrice de couplage.

La figure 5.17 présente le niveau sonore moyen dans la cavité avec l'approche éléments finis avec CMS et avec l'approche présentée ici, combinant CMS, condensation sur base réduite d'ondes progressives et réduction du nombre de fréquences de calcul des modes d'onde. Une bonne superposition peut être observée sur l'ensemble de fréquences, pour un coût de calcul encore amélioré. Cette amélioration est peu efficace pour le calcul proprement dit de la réponse forcée, car le calcul de la matrice de couplage est fait à partir d'une base d'ondes fortement réduite. Dans le cas où beaucoup d'ondes contribuent à la dynamique du milieu, cette approche serait beaucoup plus intéressante.

Toutefois, cette approche permet de réduire de manière importante le temps de calcul des modes et la quantité de mémoire nécessaire au stockage des modes d'onde (phase WFE).

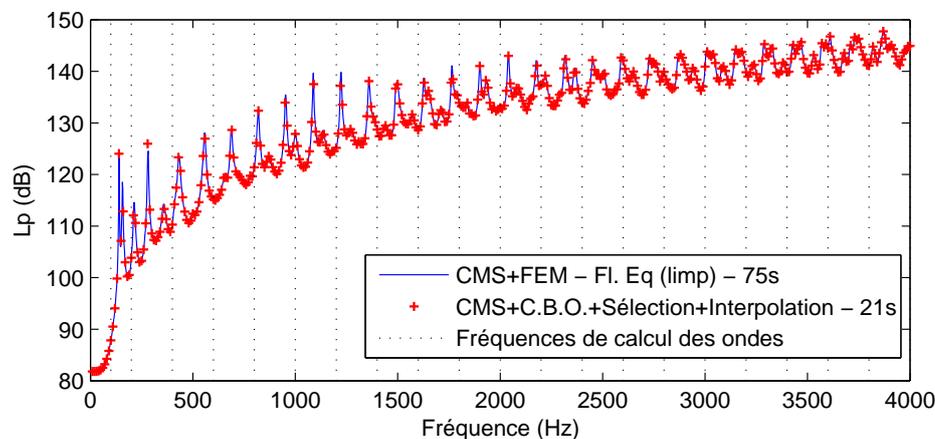


Figure 5.17 – Niveau de pression moyen dans la cavité avec réduction du nombre d'ondes progressives et réduction du nombre d'itérations en fréquence.

### 5.6.2 Formulation UUt

Dans ce paragraphe, on modélise la couche poroélastique avec la formulation UUt. Le modèle éléments finis consiste en 5368 degrés de liberté pour la cavité acoustique et 8052 degrés de liberté pour le domaine poroélastique (10 éléments dans l'épaisseur). Une

Méthode	Phase	Temps
FEM+FEM	Résolution	960 s
CMS+FEM	CMS	8 s
	Résolution	955 s
CMS+C.B.O.	CMS	7.5 s
	Calcul des ondes (WFE)	29450 s
	Résolution	1955 s
CMS+C.B.O. avec sélection (56 ondes)	CMS	7.5 s
	Calcul des ondes (WFE)	29450 s
	Choix des ondes	≈ 15 s
	Résolution	155 s
CMS+C.B.O. avec sélection et interpolation (11 fréquences) : avec sélection (56 ondes) sans sélection (480 ondes)	CMS	7.5 s
	Calcul des ondes (WFE)	159 s
	Choix des ondes	≈ 15 s
	Résolution	29 s
	Résolution	36 s

Tableau 5.2 – Temps de calcul des différentes phases.

condition glissante est appliquée sur les faces latérales du matériau. Le maillage de la section induit donc la prédiction de 480 ondes progressives dans le matériau. Afin d'obtenir une bonne convergence des résultats, 250 modes à interface fixe sont sélectionnés. Le calcul est réalisé pour 2000 itérations fréquentielles, 11 fréquences centrales sont choisies pour l'interpolation.

Les temps de calcul nécessaires pour les différentes phases des différentes méthodes sont indiqués dans le tableau 5.2. Le temps associé au choix des ondes est indiqué pour avoir un ordre de grandeur, mais il faut avoir conscience que ce temps varie en fonction du nombre d'ondes nécessaires à résoudre le problème.

La figure 5.18 présente le niveau sonore dans la cavité pour les différentes approches. Une très bonne superposition des résultats peut être observée sur l'ensemble des fréquences. Quelques erreurs existent notamment au voisinage de 500 et 650 Hz, c'est-à-dire dans le voisinage de la fréquence de résonance du matériau poroélastique. Les valeurs de la matrice de couplage  $y$  sont mal approximées. Pour corriger ces erreurs il suffirait de calculer les modes d'onde se propageant à ces fréquences et de les utiliser pour calculer la matrice de couplage.

Par ailleurs, il est moins évident de définir une valeur optimale pour le critère d'erreur avec la formulation UUt car des modes d'onde fortement évanescents pour la phase fluide peuvent se coupler aux modes d'onde peu dissipés se propageant dans la phase solide et réciproquement. La démarche consistant à sélectionner les  $N$  modes d'onde les moins dissipés ne s'applique pas aussi bien que pour un fluide équivalent du fait de ce couplage entre les deux phases.

Ici, pour cet exemple, la valeur autorisée de l'écart absolu entre le vecteur des pressions acoustiques calculées avec l'ensemble des ondes et celui calculées avec une sélection ré-

duite est fixée à 20 dB. Cela conduit à la sélection de 56 ondes. Ce faible nombre d'ondes sélectionnées conduit à des erreurs importantes dans le domaine des hautes fréquences considérées (au-delà de 1200 Hz), mais de très bons résultats sont obtenus pour des fréquences inférieures à 1200 Hz.

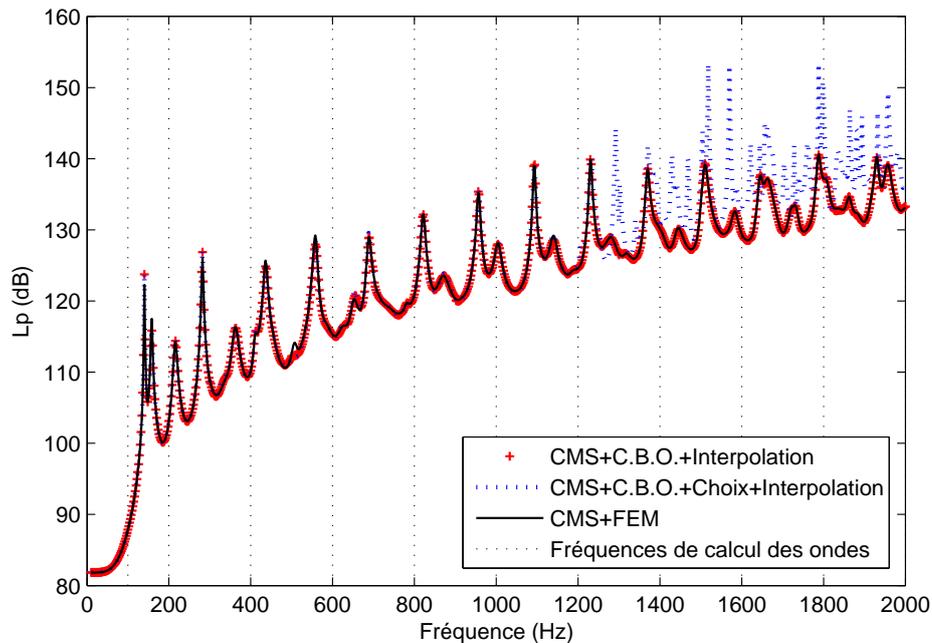


Figure 5.18 – Niveau de pression moyen obtenu avec la formulation UUt, condition latérale glissante, pour les différentes approches numériques. La base d'ondes réduite est constituée de 56 ondes parmi les 480 modes d'onde existants.

L'interpolation des modes d'onde pour le calcul de la matrice de couplage permet d'accélérer de manière importante les calculs. Comme le nombre de fréquences utilisé est 200 fois inférieur au nombre total de fréquences, le calcul WFE est accéléré d'un facteur 200. Le temps de résolution est lui aussi amélioré car la matrice de couplage n'est calculée que pour un nombre réduit de fréquences.

Un dernier aspect intéressant dans la technique est que les modes d'onde ne dépendent pas de l'épaisseur. Si plusieurs calculs sont envisagés pour différentes épaisseurs de couche poroélastique, un unique calcul WFE est nécessaire. La démarche est donc particulièrement intéressante dans une logique d'optimisation de l'épaisseur.

## 5.7 Conclusion du chapitre

Dans cette partie, nous avons développé une méthode originale pour condenser un problème poro-acoustique couplé. La méthode, basée sur l'utilisation des modes d'onde se propageant dans l'épaisseur du matériau, permet d'obtenir un système similaire au système

obtenu avec le modèle d'impédance localisée, sauf qu'il permet de prendre en compte les conditions aux limites latérales et les effets non localisés.

La méthode permet un gain important en temps de calcul, notamment quand le traitement dissipatif nécessite beaucoup d'éléments dans l'épaisseur et peu d'éléments dans la section. Elle peut être aisément couplée à des techniques de synthèse modale pour les structures maîtres, et permettant ainsi de maximiser leur efficacité en supprimant la complexité numérique liée au milieu poroélastique.

Cependant, la technique reste limitée par le coût numérique (temps et mémoire) nécessaire au calcul des modes à chaque fréquence. Ce coût est proportionnel au nombre d'itérations et devient très important quand le maillage de la section considérée comporte un grand nombre de degrés de liberté.

La réduction du nombre d'ondes permet une réduction du système matriciel à résoudre pour calculer la matrice de couplage. Une démarche de sélection des modes a été proposée. Cette démarche est bien adaptée au modèle de fluide équivalent, mais atteint ses limites avec la formulation UUt. De bons résultats peuvent néanmoins être observés pour les basses fréquences.

L'évaluation des modes d'onde et de la matrice de couplage en un nombre restreint de fréquences permet une diminution très importante des coûts de calcul. Il faut alors trouver un compromis entre un grand nombre de fréquences de calcul pour réduire les erreurs et un petit nombre de fréquences de calcul pour minimiser le temps de calcul. Une perspective intéressante à ce travail consisterait au développement d'un critère de choix robuste des fréquences d'évaluation des modes d'onde.



# Conclusion générale

---

Dans ce travail, nous avons plusieurs objectifs : (1) discuter l'importance des mécanismes physiques survenant dans un matériau poroélastique, (2) permettre de choisir un modèle adapté au matériau, et (3) proposer une méthode numérique efficace pour traiter des problèmes de vibroacoustique avec interface dissipative.

Les deux premiers points ont été discutés dans les chapitres 1, 3 et 4. Nous avons montré que les phases fluide et solide dans le matériau poroélastique peuvent se coupler de manière importante pour certaines valeurs de paramètres, et que dans ce cas les modèles de fluide équivalent ne permettent pas de prendre en compte la dynamique associée à la phase solide et son influence sur la phase fluide. Le modèle de fluide équivalent convient quand les courbes de dispersion prédites par le modèle sont superposées aux courbes de l'onde fluide de Biot, et quand il n'y a pas d'excitation de la phase solide. Les modèles de plaque équivalente sont limités aux basses fréquences. Il est possible d'étendre leur limite de validité en utilisant des modèles d'ordre plus élevé, limitant alors l'intérêt de l'approche. Cette limite est due à l'influence des ondes de cisaillement et de compression, qui se propagent également dans l'épaisseur du matériau à des fréquences élevées. Les déformées propres font alors intervenir des effets de rotation des sections et de compressibilité du matériau.

Les observations précédentes ont été obtenues par l'utilisation d'un modèle numérique basé sur des éléments finis. Ceux-ci ont été d'abord développés avec le logiciel Comsol®, puis à l'aide d'un code personnel sur Matlab®. Le chapitre 2 a permis de valider l'utilisation de cette technique pour étudier la propagation d'ondes dans les matériaux poroélastiques. La question des conditions aux limites latérales a été discutée, et nous avons montré que les diverses formulations permettant de modéliser un matériau poroélastique ne sont pas équivalentes pour la WFE car les conditions aux limites naturelles qu'elles induisent ne sont pas les mêmes. Les ondes prédites n'ont alors pas forcément de caractère physique. Dans le cas de structures poroélastiques couplées avec un milieu acoustique extérieur la formulation UP-b semble adaptée. La question de la convergence de la méthode et de la sensibilité aux erreurs numériques a également été discutée.

Le chapitre 4 a posé les bases de la réponse forcée d'une structure poroélastique par projection sur base d'ondes se propageant dans une direction. La démarche a été étendue dans le cadre de systèmes vibroacoustiques couplés dans le chapitre 5. La projection sur base d'ondes a fait apparaître une condensation de type maître-esclave, permettant d'éliminer les degrés de liberté associés à l'interface. Les performances de la méthode ont été discutées. De plus, dans le cadre du modèle de fluide équivalent, un algorithme efficace de sélection des ondes a été proposé, permettant de réduire de façon importante les coûts de calcul.

Le coût numérique associé au calcul des modes d'ondes est la principale limitation

de la méthode. Pour le réduire, nous avons proposé une approche de type interpolation en fréquences de la matrice de couplage résultant de la condensation sur base d'ondes. L'utilisation de cette technique permet d'obtenir des résultats très proches du calcul exact pour des coûts de calcul très réduits.

Les travaux de cette thèse ont fait l'objet d'un article accepté au *Journal of Sound and Vibration* et d'un second article soumis au même journal, de trois présentations à des congrès internationaux (MEDYNA, Marrakech, avril 2013 ; ISMA, Leuven 2013 ; SAPEM 2014 Stockholm à venir), et de deux présentations à des congrès nationaux (JJCAB, Le Mans novembre 2012 et VISHNO 2014, Aix en Provence).

Afin de continuer à progresser sur le domaine de la propagation d'ondes, différents travaux peuvent être menés par la suite.

Tout d'abord, la question du choix des modes et des fréquences centrales pour le calcul des modes doit être approfondie.

Ensuite, il reste à tester la méthode de condensation sur base d'ondes dans le cas d'interfaces multicouches et multimatériaux. En particulier, concernant le cas de structures multicouches composées d'une structure élastique et de matériaux poreux, l'approche développée ici permettrait de condenser le domaine poroélastique sur la structure élastique qui la supporte. Il serait intéressant de poursuivre et d'étudier la validité de l'approche. Cette démarche permettrait alors de développer des modèles de structure équivalente, permettant d'obtenir des coûts de simulation réduits. Ce travail peut être envisagé de manière purement numérique, dans le cadre de la méthode des éléments finis, ou de manière purement analytique. Enfin, la généralisation de la méthode dans le cas d'interfaces courbes reste à étudier.

Enfin, les résultats de la WFE2D n'ont été utilisés ici que de manière qualitative, afin de discuter la validité de modèles analytiques. Il serait intéressant d'essayer de calculer la réponse forcée d'une plaque par projection sur modes d'ondes 2D. Ainsi, la dynamique dans l'épaisseur serait contenue dans les déformées des modes d'ondes tandis que la propagation d'ondes donnerait l'amplitude en tout point de la surface de la plaque. Ceci pourrait se faire par transformation des équations dans l'espace des nombres d'ondes (transformée de Fourier bidimensionnelle) puis transformée inverse. La difficulté de l'approche réside dans le traitement des intégrations numériques. Une seconde possibilité serait d'utiliser une approche de type source-image avec la fonction de Green de chaque onde.

Outre les difficultés numériques et de conditionnement, une difficulté majeure réside dans le couplage avec le milieu extérieur. Ainsi, il a été constaté que la réponse de l'interface dissipative dépend du champ de pression extérieur. Si une démarche en deux temps (1/ calcul de vibrations pour l'interface dissipative seule, 2/ calcul par éléments finis ou de frontière du champ de pression acoustique) est envisageable, le couplage de fluide extérieur sur l'interface dissipative peut avoir de l'influence sur la réponse des deux systèmes, notamment quand le traitement acoustique possède une couche poreuse à l'interface avec l'air extérieur.

Ce genre d'approche serait alors adaptée pour prédire la réponse vibratoire d'une structure multicouche plane à cœur poroélastique, soumise à des efforts structuraux ponctuels.

Cela permettrait de réduire la géométrie à une direction d'espace, d'où des coûts de calculs des modes et de la réponse forcée très faibles. Les indicateurs acoustiques comme l'efficacité de rayonnement et les pertes par transmission pourraient être calculées rapidement, et en tenant compte d'éventuelles conditions aux limites exercées aux bords de l'interface.



# Bibliographie

- [1] D. Theodorakopoulos, D. Beskos, Flexural vibrations of poroelastic plates, *Acta Mechanica* 103 (1) (1994) 191–203.
- [2] P. Leclaire, K. Horoshenkov, A. Cummings, Transverse vibrations of a thin rectangular porous plate saturated by a fluid, *Journal of Sound and Vibration* 247 (1) (2001) 1–18.
- [3] N. Dauchez, S. Sahraoui, N. Atalla, Investigation and modelling of damping in a plate with a bonded porous layer, *Journal of Sound and Vibration* 265 (2) (2003) 437–449.
- [4] C. Kosten, C. Zwikker, *Sound absorbing materials*, Elsevier, 1949.
- [5] K. Attenborough, Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbents and granular materials, *The Journal of the Acoustical Society of America* 73 (3) (1983) 785–799.
- [6] M. Delany, E. Bazley, Acoustical properties of fibrous absorbent materials, *Applied acoustics* 3 (2) (1970) 105–116.
- [7] Y. Miki, Acoustical properties of porous materials-Modifications of Delany-Bazley models, *The Journal of the Acoustical Society of Japan(E)* 11 (1) (1990) 19–24.
- [8] M. Garai, F. Pompoli, A simple empirical model of polyester fibre materials for acoustical applications, *Applied Acoustics* 66 (12) (2005) 1383–1398.
- [9] T. Komatsu, Improvement of the Delany-Bazley and Miki models for fibrous sound-absorbing materials, *Acoustical science and technology* 29 (2) (2008) 121–129.
- [10] M. Biot, Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. Part I and II, *The Journal of the Acoustical Society of America* 28 (2) (1956) 168–191.
- [11] M. Biot, General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material, *Journal of Applied Mechanics* 23 (1) (1956) 91–96.
- [12] M. Biot, Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *Journal of Applied Physics* 33 (4) (1962) 1482–1498.
- [13] D. Johnson, J. Koplik, R. Dashen, Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media, *Journal of Fluid Mechanics* 176 (1) (1987) 379–402.
- [14] D. Lafarge, P. Lemarinier, J.-F. Allard, V. Tarnow, Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies, *The Journal of the Acoustical Society of America* 102 (4) (1997) 1995–2006.
- [15] Y. Champoux, J.-F. Allard, Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media, *Journal of Applied Physics* 70 (4) (1991) 1975–1979.
- [16] J.-F. Allard, N. Atalla, *Propagation of Sound in Porous Media : Modelling Sound Absorbing Materials* Second edition, Wiley, 2009.
- [17] W. Thomson, Transmission of Elastic Waves through a Stratified Solid Medium, *Journal of Applied Physics* 21 (2) (1950) 89–93.

- [18] B. Brouard, D. Lafarge, J.-F. Allard, A general method of modelling sound propagation in layered media, *Journal of Sound and Vibration* 183 (1) (1995) 129–142.
- [19] O. Zienkiewicz, R. Taylor, *The Finite Element Method for solid and structural mechanics*, Butterworth-Heinemann, 2005.
- [20] R. Panneton, N. Atalla, An efficient finite element scheme for solving the three-dimensional poroelasticity problem in acoustics, *The Journal of the Acoustical Society of America* 101 (6) (1997) 3287–3298.
- [21] Y. Kang, J. Bolton, A finite element model for sound transmission through foam-lined double-panel structures, *The Journal of the Acoustical Society of America* 99 (5) (1996) 2755–2765.
- [22] V. Easwaran, W. Lauriks, J.-P. Coyette, Displacement-based finite element method for guided wave propagation problems : Application to poroelastic media, *The Journal of the Acoustical Society of America* 100 (5) (1996) 2989–3002.
- [23] P. Göransson, A 3-D, symmetric, finite element formulation of the Biot equations with application to acoustic wave propagation through an elastic porous medium, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 41 (1) (1998) 167–192.
- [24] R. Ohayon, Reduced models for fluid–structure interaction problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 60 (1) (2004) 139–152.
- [25] M. Biot, Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media, *The Journal of the Acoustical Society of America* 34 (9A) (1962) 1254–1264.
- [26] O. Dazel, B. Brouard, C. Depollier, S. Griffiths, An alternative Biot’s displacement formulation for porous materials, *The Journal of the Acoustical Society of America* 121 (6) (2007) 3509–3516.
- [27] N.-E. Hörlin, Hierarchical finite element modelling of Biot’s equations for vibro-acoustic modelling of layered poroelastic media, Ph.D. thesis, KTH Kungliga Tekniska Högskolan (2004).
- [28] N. Atalla, R. Panneton, P. Debergue, A mixed displacement-pressure Formulation for poroelastic materials, *The Journal of the Acoustical Society of America* 104 (3) (1998) 1444–1452.
- [29] N. Atalla, M. Hamdi, R. Panneton, Enhanced weak integral formulation for the mixed (u,p) poroelastic equations, *The Journal of the Acoustical Society of America* 109 (6) (2001) 3065–3068.
- [30] S. Marburg, Six boundary elements per wavelength : is that enough ?, *Journal of Computational Acoustics* 10 (01) (2002) 25–51.
- [31] R. Rumlper, A. Legay, J.-F. Deü, Performance of a restrained-interface substructuring FE model for reduction of structural-acoustic problems with poroelastic damping, *Computers & Structures* 89 (23) (2011) 2233–2248.
- [32] A. Craggs, A finite element method for damped acoustic systems : an application to evaluate the performance of reactive mufflers, *Journal of Sound and Vibration* 48 (3) (1976) 377–392.

- [33] A. Craggs, A finite element method for modelling dissipative mufflers with a locally reactive lining, *Journal of Sound and Vibration* 54 (2) (1977) 285–296.
- [34] A. Craggs, A finite element model for rigid porous absorbing materials, *Journal of Sound and Vibration* 61 (1) (1978) 101–111.
- [35] F. Chevillotte, R. Panneton, Coupling transfer matrix method to finite element method for analyzing the acoustics of complex hollow body networks, *Applied Acoustics* 72 (12) (2011) 962–968.
- [36] L. Alimonti, N. Atalla, A. Berry, F. Sgard, A hybrid modeling approach for vibroacoustic systems with attached sound packages, in : *Proceedings of Meetings on Acoustics*, Vol. 19, 2013, pp. 1–9.
- [37] J. Magniez, M. Hamdi, J.-D. Chazot, B. Troclet, Modèle analytique pour le calcul de la transmission sonore à travers un cylindre poro-élastique, in : *Proceedings of Congrès Français d’Acoustique, CFA 2014 Poitiers, Congrès Français d’Acoustique, 2014*, pp. 1393–1399.
- [38] J. Magniez, J.-D. Chazot, M. Hamdi, B. Troclet, A mixed 3D-Shell analytical model for the prediction of sound transmission through sandwich cylinders, *Journal of Sound and Vibration* 33 (19) (2014) 4750—4770.
- [39] C. Fernandez, C. Soize, L. Gagliardini, et al., Modeling sound-insulation layers in vibroacoustic systems, in : *Proceedings of the USD conference, 2007.*, 2007, pp. 1–10.
- [40] C. Fernandez, C. Soize, L. Gagliardini, Fuzzy structure theory modeling of sound-insulation layers in complex vibroacoustic uncertain systems : Theory and experimental validation, *The Journal of the Acoustical Society of America* 125 (1) (2009) 138–153.
- [41] C. Fernandez, C. Soize, L. Gagliardini, Sound-insulation layer modelling in car computational vibroacoustics in the medium-frequency range, *Acta Acustica united with Acustica* 96 (3) (2010) 437–444.
- [42] W. Larbi, J.-F. Deü, R. Ohayon, A new finite element formulation for internal acoustic problems with dissipative walls, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 68 (3) (2006) 381–399.
- [43] C.-H. Jeong, J. Brunskog, The equivalent incidence angle for porous absorbers backed by a hard surface, *The Journal of the Acoustical Society of America* 134 (6) (2013) 4590–4598.
- [44] D. Johnson, J. Koplik, L. Schwartz, New pore-size parameter characterizing transport in porous media, *Physical review letters* 57 (20) (1986) 2564–2567.
- [45] A. Bermudez, J. Ferrín, A. Prieto, Finite element solution of new displacement/pressure poroelastic models in acoustics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (17-18) (2006) 1914–1932.
- [46] F. Mechel, Extension to Low Frequencies of the Formulae of Delany and Bazley for Absorbing Materials, *Acta Acustica united with Acustica* 35 (3) (1976) 210–213.

- [47] T. Dupont, *Transparence et absorption acoustiques des structures microperforées*, Ph.D. thesis, INSA de Lyon (2002).
- [48] X. Olny, R. Panneton, Acoustical determination of the parameters governing thermal dissipation in porous media, *The Journal of the Acoustical Society of America* 123 (2) (2008) 814–824.
- [49] R. Panneton, X. Olny, Acoustical determination of the parameters governing viscous dissipation in porous media, *The Journal of the Acoustical Society of America* 119 (4) (2006) 2027–2040.
- [50] C. Boutin, C. Geindreau, Estimates and bounds of dynamic permeability of granular media, *The Journal of the Acoustical Society of America* 124 (6) (2008) 3576–3593.
- [51] J.-L. Auriault, C. Boutin, C. Geindreau, *Homogenization of coupled phenomena in heterogeneous media*, Vol. 149, John Wiley & Sons, 2010.
- [52] E. Gourdon, M. Seppi, On the use of porous inclusions to improve the acoustical response of porous materials : Analytical model and experimental verification, *Applied Acoustics* 71 (2010) 283–298.
- [53] C. Lagarrigue, J.-P. Groby, V. Tournat, O. Dazel, Absorption of sound by porous layers with embedded periodic arrays of resonant inclusions, *The Journal of the Acoustical Society of America* 134 (6) (2013) 4670–4680.
- [54] J. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells : theory and analysis*, CRC press, 2003.
- [55] J. Whitney, N. Pagano, Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates, *Journal of Applied Mechanics* 37 (4) (1970) 1031–1036.
- [56] J.-D. Chazot, B. Nennig, E. Perrey-Debain, Harmonic response computation of poroelastic multilayered structures using ZPST shell elements, *Computers & Structures* 121 (2013) 99–107.
- [57] N.-E. Hörlin, P. Göransson, Weak, anisotropic symmetric formulations of Biot's equations for vibro-acoustic modelling of porous elastic materials, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 84 (12) (2010) 1519–1540.
- [58] M. Barbagallo, S. Finnveden, A self-adjoint variational principle for anisotropic viscoelastic Biot's equations, *International Journal of Engineering Science* 63 (63) (2012) 71–83.
- [59] E. L. Nordgren, P. Göransson, J.-F. Deü, O. Dazel, Vibracoustic response sensitivity due to relative alignment of two anisotropic poro-elastic layers, *The Journal of the Acoustical Society of America* 133 (5) (2013) EL426–EL430.
- [60] M. Biot, D. Willis, The elastic coefficients of the theory of consolidation, *Journal of Applied Mechanics* 24 (1957) 594–601.
- [61] O. Doutres, N. Dauchez, J.-M. Génevaux, O. Dazel, Validity of the limp model for porous materials : A criterion based on the Biot theory, *The Journal of the Acoustical Society of America* 122 (4) (2007) 2038–2048.
- [62] R. Panneton, Comments on the limp frame equivalent fluid model for porous media, *The Journal of the Acoustical Society of America* 122 (6) (2007) EL217–EL222.

- [63] J.-D. Chazot, B. Nennig, E. Perrey-Debain, Performances of the Partition of Unity Finite Element Method for the analysis of two-dimensional interior sound fields with absorbing materials, *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013) 1928–1929.
- [64] N. Haskell, The dispersion of surface waves on multilayered media, *Bulletin of the Seismological Society of America* 43 (1) (1953) 17–34.
- [65] T. Liu, C. Zhao, Dynamic analyses of multilayered poroelastic media using the generalized transfer matrix method, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 48 (2013) 15–24.
- [66] O. Dazel, J.-P. Groby, B. Brouard, C. Potel, A stable method to model the acoustic response of multilayered structures, *Journal of Applied Physics* 113 (08) (2013) 083506.
- [67] W. Desmet, A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis, Ph.D. thesis, Katholieke Universiteit Leuven (1998).
- [68] W. Desmet, B. van Hal, P. Sas, D. Vandepitte, A computationally efficient prediction technique for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustic systems, *Advances in Engineering Software* 33 (7) (2002) 527–540.
- [69] B. Pluymers, W. Desmet, D. Vandepitte, P. Sas, Application of the wave based prediction technique for the analysis of the coupled vibro-acoustic behaviour of a 3D cavity, in : *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA2002*, 2002, pp. 891–900.
- [70] K. Vergote, D. Vandepitte, W. Desmet, On the use of a hybrid wave based-statistical energy approach for the analysis of vibroacoustic systems in the mid-frequency range, in : *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA2010)*, 2010, pp. 2437–2450.
- [71] B. Van Hal, W. Desmet, D. Vandepitte, Hybrid finite element—wave-based method for steady-state interior structural—acoustic problems, *Computers & Structures* 83 (2) (2005) 167–180.
- [72] B. Van Genechten, D. Vandepitte, W. Desmet, A direct hybrid finite element—wave based modelling technique for efficient coupled vibro-acoustic analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (5) (2011) 742–764.
- [73] O. Dazel, F. Sgard, C. Lamarque, N. Atalla, An extension of complex modes for the resolution of finite-element poroelastic problems, *Journal of Sound and Vibration* 253 (2) (2002) 421–445.
- [74] O. Dazel, F. Sgard, C. Lamarque, Application of generalized complex modes to the calculation of the forced response of three-dimensional poroelastic materials, *Journal of Sound and Vibration* 268 (3) (2003) 555–580.
- [75] R. Rumpler, J.-F. Deü, P. Göransson, A modal-based reduction method for sound absorbing porous materials in poro-acoustic finite element models, *The Journal of the Acoustical Society of America* 132 (5) (2012) 3162–3179.
- [76] O. Dazel, B. Brouard, N. Dauchez, A. Geslain, Enhanced Biot’s finite element displacement formulation for porous materials and original resolution methods based on normal modes, *Acta Acustica United with Acustica* 95 (3) (2009) 527–538.

- [77] O. Dazel, B. Brouard, J.-P. Groby, P. Göransson, A normal modes technique to reduce the order of poroelastic models : application to 2D and coupled 3D models, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 96 (2) (2013) 110–128.
- [78] F. Sgard, N. Atalla, R. Panneton, A modal reduction technique for the finite-element formulation of Biot's poroelasticity equations in acoustics, *The Journal of the Acoustical Society of America* 102 (5) (1997) 3112–3112.
- [79] F. Sgard, N. Atalla, R. Panneton, A mixed wave finite-element approach for solving Biot's poroelasticity equations in acoustics, *The Journal of the Acoustical Society of America* 105 (2) (1999) 1195–1195.
- [80] R. Rumpler, P. Göransson, A finite element solution strategy based on padé approximants for fast multiple frequency sweeps of multivariate problems, in : *Proceedings of Meetings on Acoustics*, Vol. 19, Acoustical Society of America, 2013, p. 065003.
- [81] R. Rumpler, P. Göransson, J.-F. Deü, A finite element approach combining a reduced-order system, Padé approximants, and an adaptive frequency windowing for fast multi-frequency solution of poro-acoustic problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 97 (10) (2014) 759–784.
- [82] D. Mead, A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling, *Journal of Sound and Vibration* 27 (2) (1973) 235–260.
- [83] D. Mead, Wave propagation and natural modes in periodic systems : I. Mono-coupled systems, *Journal of Sound and Vibration* 40 (1) (1975) 1–18.
- [84] D. Mead, Wave propagation and natural modes in periodic systems : II. Multi-coupled systems, with and without damping, *Journal of Sound and Vibration* 40 (1) (1975) 19–39.
- [85] D. Mead, Wave propagation in continuous periodic structures : research contributions from Southampton, 1964-1995, *Journal of Sound and Vibration* 190 (3) (1996) 495–524.
- [86] S. Dong, R. Nelson, On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates, *Journal of Applied Mechanics* 39 (3) (1972) 739–745.
- [87] A. Shah, S. Datta, Harmonic waves in a periodically laminated medium, *International Journal of Solids and Structures* 18 (5) (1982) 397–410.
- [88] T. Hayashi, W.-J. Song, J. L. Rose, Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example, *Ultrasonics* 41 (3) (2003) 175–183.
- [89] G. Liu, T. Ohyoshi, K. Watanabe, J. Tani, Characteristic wave surfaces in anisotropic laminated plates, *Journal of Vibration and Acoustics* 113 (3) (1991) 279–285.
- [90] G. Liu, J.-D. Achenbach, A strip element method for stress analysis of anisotropic linearly elastic solids, *Journal of applied mechanics* 61 (2) (1994) 270–277.
- [91] U. Orrenius, S. Finnveden, Calculation of wave propagation in rib-stiffened plate structures, *Journal of Sound and Vibration* 198 (2) (1996) 203–224.
- [92] S. Finnveden, M. Fraggstedt, Waveguide finite elements for curved structures, *Journal of Sound and Vibration* 312 (4) (2008) 644–671.

- [93] O. Mukdadi, S. Datta, Transient ultrasonic guided waves in layered plates with rectangular cross section, *Journal of Applied Physics* 93 (11) (2003) 9360–9370.
- [94] I. Bartoli, A. Marzani, F. Lanza di Scalea, E. Viola, Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section, *Journal of Sound and Vibration* 295 (3) (2006) 685–707.
- [95] D. Chronopoulos, M. Ichchou, B. Troclet, O. Bareille, Computing the broadband vibroacoustic response of arbitrarily thick layered panels by a wave finite element approach, *Applied Acoustics* 77 (2014) 89–98.
- [96] D. Chronopoulos, B. Troclet, M. Ichchou, J.-P. Lainé, A unified approach for the broadband vibroacoustic response of composite shells, *Composites Part B : Engineering* 43 (4) (2012) 1837–1846.
- [97] J.-M. Mencik, On the low- and mid-frequency forced response of elastic structures using wave finite elements with one-dimensional propagation, *Computers & Structures* 88 (11) (2010) 674–689.
- [98] J.-M. Mencik, M. Ichchou, Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements, *European Journal of Mechanics -A/Solids* 24 (5) (2005) 877–898.
- [99] M. Ichchou, S. Akrouf, J.-M. Mencik, Guided waves group and energy velocities via finite elements, *Journal of Sound and Vibration* 305 (4) (2007) 931–944.
- [100] B. Mace, D. Duhamel, M. Brennan, L. Hinke, Finite element prediction of wave motion in structural waveguides, *The Journal of the Acoustical Society of America* 117 (5) (2005) 2835–2843.
- [101] Y. Waki, B. Mace, M. Brennan, Numerical issues concerning the wave and finite element method for free and forced vibrations of waveguides, *Journal of Sound and Vibration* 327 (1) (2009) 92–108.
- [102] J. Renno, B. Mace, On the forced response of waveguides using the wave and finite element method, *Journal of Sound and Vibration* 329 (26) (2010) 5474–5488.
- [103] J. Renno, B. Mace, Calculating the forced response of two-dimensional homogeneous media using the wave and finite element method, *Journal of Sound and Vibration* 330 (24) (2011) 5913–5927.
- [104] M. Ben Souf, O. Bareille, M. Ichchou, F. Bouchoucha, M. Haddar, Waves and energy in random elastic guided media through the stochastic wave finite element method, *Physics Letters A* 377 (37) (2013) 2255–2264.
- [105] W. Zhong, F. Williams, On the direct solution of wave propagation for repetitive structures, *Journal of Sound and Vibration* 181 (3) (1995) 485–501.
- [106] S. Akrouf, Comportement dynamique déterministe et large bande des structures guidées, Ph.D. thesis, École Centrale de Lyon (2005).
- [107] E. Manconi, B. Mace, Wave characterization of cylindrical and curved panels using a finite element method, *The Journal of the Acoustical Society of America* 125 (1) (2009) 154–163.

- [108] B. Mace, E. Manconi, Modelling wave propagation in two-dimensional structures using finite element analysis, *Journal of Sound and Vibration* 318 (4) (2008) 884–902.
- [109] G. Inquiere, Simulation numérique de la propagation des ondes dans les structures composites stratifiées, Ph.D. thesis, École Centrale de Lyon (2008).
- [110] E. Manconi, B. Mace, Modelling wave propagation in two-dimensional structures using a wave/finite element technique, Tech. rep., Institute of Sound & Vibration Research (2007).
- [111] D. Chronopoulos, M. Ichchou, B. Troclet, O. Bareille, Efficient prediction of the response of layered shells by a dynamic stiffness approach, *Composite Structures* 97 (2013) 401–404.
- [112] D. Chronopoulos, M. Ichchou, B. Troclet, O. Bareille, Thermal effects on the sound transmission through aerospace composite structures, *Aerospace Science and Technology* 30 (1) (2013) 192–199.
- [113] D. Chronopoulos, B. Troclet, O. Bareille, M. Ichchou, Modeling the response of composite panels by a dynamic stiffness approach, *Composite Structures* 96 (2013) 111–120.
- [114] W. Zhou, M. Ichchou, O. Bareille, Finite element techniques for calculations of wave modes in one-dimensional structural waveguides, *Structural Control and Health Monitoring* 18 (7) (2011) 737–751.
- [115] N. Dauchez, S. Sahraoui, N. Atalla, et al., Convergence of poroelastic finite elements based on Biot displacement formulation, *The Journal of the Acoustical Society of America* 109 (1) (2001) 33–40.
- [116] M. Brennan, W. To, Acoustic properties of rigid-frame porous materials—an engineering perspective, *Applied Acoustics* 62 (7) (2001) 793–811.
- [117] L. Houillon, M. Ichchou, L. Jezequel, Wave motion in thin-walled structures, *Journal of Sound and Vibration* 281 (3) (2005) 483–507.
- [118] Y. Yu, *Vibrations of elastic plates : Linear and nonlinear dynamical modeling of sandwiches, laminated composites, and piezoelectric layers*, Springer (New York), 1996.
- [119] R. Mindlin, Influence of the rotary inertia and shear on flexural vibrations of isotropic elastic plates, *Journal of Applied Mechanics* 18 (1951) 31–38.
- [120] E. Carrera, Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells., *Applied Mechanics Review* 56 (2003) 287–308.
- [121] K. Lee, N. Senthilnathan, S. Lim, S. Chow, An improved zig-zag model for the bending of laminated composite plates, *Composite Structures* 15 (2) (1990) 137–148.
- [122] V. Aitharaju, R. Averill, C 0 zig-zag finite element for analysis of laminated composite beams, *Journal of Engineering Mechanics* 125 (3) (1999) 323–330.

- [123] M. Sulmoni, T. Gmür, J. Cugnoni, M. Matter, Modal validation of sandwich shell finite elements based on ap-order shear deformation theory including zigzag terms, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 75 (11) (2008) 1301–1319.
- [124] L. Jaouen, B. Brouard, N. Atalla, C. Langlois, A simplified numerical model for a plate backed by a thin foam layer in the low frequency range, *Journal of Sound and Vibration* 280 (3-5) (2005) 681–698.
- [125] E. Manconi, Modelling wave propagation in two-dimensional structures using a wave/finite element technique, Ph.D. thesis, University of Parma (2008).
- [126] D. Ross, E. Ungar, E. Kerwin, Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminates, in : *Structural damping*, ASME annual meeting, Atlantic City, NJ, 1959, pp. 49–88.
- [127] S. Sorokin, Analysis of wave propagation in sandwich plates with and without heavy fluid loading, *Journal of Sound and Vibration* 271 (3) (2004) 1039–1062.
- [128] H. Liu, S. Finnveden, M. Barbagallo, I. Arteaga, Wave propagation in sandwich panels with a poroelastic core, *The Journal of the Acoustical Society of America* 135 (5) (2014) 2683–2693.
- [129] A. Nilsson, Wave propagation in and sound transmission through sandwich plates, *Journal of Sound and Vibration* 138 (1) (1990) 73–94.
- [130] W. Larbi, J.-F. Deü, A 3d state-space solution for free vibration analysis of a radially polarized laminated piezoelectric cylinder filled with fluid, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2) (2011) 162–181.
- [131] R. Panneton, N. Atalla, Numerical prediction of sound transmission through finite multilayer systems with poroelastic materials, *The Journal of the Acoustical Society of America* 100 (1) (1996) 346–354.
- [132] B. Song, J. Bolton, Y. Kang, Effect of circumferential edge constraint on the acoustical properties of glass fiber materials, *The Journal of the Acoustical Society of America* 110 (6) (2001) 2902–2916.
- [133] F. Xin, T. Lu, Analytical and experimental investigation on transmission loss of clamped double panels : Implication of boundary effects, *The Journal of the Acoustical Society of America* 125 (2009) 1506–1517.
- [134] B. Mace, E. Manconi, Wave motion and dispersion phenomena : Veering, locking and strong coupling effects, *The Journal of the Acoustical Society of America* 131 (2) (2012) 1015–1028.
- [135] J.-P. Lombard, Contribution à la réduction des modèles éléments finis par synthèse modale, Ph.D. thesis, Université de Franche-Comté (1999).
- [136] C.-N. Wang, Y.-M. Kuo, S.-K. Chen, Effects of compression on the sound absorption of porous materials with an elastic frame, *Applied Acoustics* 69 (1) (2008) 31–39.
- [137] R. Rumpler, Efficient Finite Element Approach for Structural–Acoustic Applications including 3D Modelling of Sound Absorbing Porous Materials, Ph.D. thesis,

- Conservatoire National des Arts et Métiers Cnam, Royal Institute of Technology KTH (2011).
- [138] D. Rhazi, N. Atalla, Transfer matrix modeling of the vibroacoustic response of multi-materials structures under mechanical excitation, *Journal of Sound and Vibration* 329 (13) (2010) 2532–2546.
- [139] O. Dazel, F. Sgard, F.-X. Becot, N. Atalla, Expressions of dissipated powers and stored energies in poroelastic media modeled by UU and UP formulations, *The Journal of the Acoustical Society of America* 123 (4) (2008) 2054–2063.
- [140] R. MacNeal, A hybrid method of component mode synthesis, *Computers & Structures* 1 (4) (1971) 581–601.
- [141] O. E. Hansteen, K. Bell, On the accuracy of mode superposition analysis in structural dynamics, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 7 (5) (1979) 405–411.

# Paramètres matériaux

Le modèle de Biot-Allard, dans le cadre de l'approximation de Johnson-Champoux-Allard [13, 15], neuf coefficients sont nécessaires pour déterminer la réponse d'un matériau poroélastique linéaire isotrope saturé d'air. Les valeurs de ces paramètres sont donnés dans le Tableau A.1.

Matériau	Paramètres acoustiques					Paramètres élastiques			
	Symbole	$\phi$	$\sigma$	$\alpha_\infty$	$\Lambda$	$\Lambda'$	$\lambda$	$\mu$	$\eta$
Unité	[]	kN.s.m <sup>-4</sup>	[]	$\mu\text{m}$	$\mu\text{m}$	Pa	Pa	[]	kg.m <sup>-3</sup>
A [80]	0.98	13.5	1.7	80	160	155769	103846	0.04	30
B [18]	0.99	10	1.0	120	120	0	50.10 <sup>6</sup>	0.02	100
C [136]	0.93	55	3.2	28.5	323.4	720000	180000	0.1	30
D [137]	0.96	32	1.7	90	165	905357	264062	0.1	30
E [138]	0.98	22	1.9	87	146	80556	120830	0.18	30
F [61]	0.95	23	1.0	54.1	162.3	0	8500	0.1	58
G [3]	0.98	5,0	1.3	80	200	0	200000	0.15	40
H [28]	0.95	25	1.4	93	93	0	21000	0.05	30
I [56]	0.96	32	1.7	90	165	905357	264062	0.1	30
J [139]	0.937	50,485	2.57	57.41	61.62	57037	24444	0.105	95.66
K [139]	0.952	21,300	1.6	100	300	34420	10870	0.04	38.4

Tableau A.1 – Paramètres des matériaux poreux utilisés.



# Condensation aux interfaces pour une cavité acoustique

Soit un domaine acoustique dont les équations éléments finis sont obtenues sous la forme :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{p}_A = \mathbf{F}_A. \quad (\text{B.1})$$

On cherche à condenser la dynamique du domaine sur les modes internes à interface fixe et sur ses modes d'attache. On définit alors  $I$  les surfaces maîtresses du domaine acoustique  $A$ . Celles-ci sont composées des interfaces sur lesquelles sont situées les sources. On définit de même  $\bar{I} = \Omega_A \setminus I$  le domaine contenant les nœuds internes.

Les équations se mettent alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} - \omega^2 \mathbf{M}_{II} & \mathbf{K}_{I\bar{I}} - \omega^2 \mathbf{M}_{I\bar{I}} \\ \mathbf{K}_{\bar{I}I} - \omega^2 \mathbf{M}_{\bar{I}I} & \mathbf{K}_{\bar{I}\bar{I}} - \omega^2 \mathbf{M}_{\bar{I}\bar{I}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{AI} \\ \mathbf{p}_{A\bar{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Les modes à interfaces fixes ( $\omega_i, \Phi_{\bar{I}} = (\Phi_{\bar{I}})_i$ ) sont définis comme les solutions du problème aux valeurs propres obtenu avec la condition  $\mathbf{p}_{AI} = 0$  :

$$\mathbf{K}_{\bar{I}\bar{I}} \Phi_{\bar{I}i} = \omega_i^2 \mathbf{M}_{\bar{I}\bar{I}} \Phi_{\bar{I}i}. \quad (\text{B.3})$$

Ces modes ne permettent pas de prendre en compte des déplacements des interfaces. Pour cela, on définit alors la matrice des modes d'attache  $\Psi_{\bar{I}}$  définis à  $\omega = 0$  par la réponse de la cavité quand seul le déplacement du degré de liberté du nœud  $j$  de l'interface vaut 1 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{I\bar{I}} \\ \mathbf{K}_{\bar{I}I} & \mathbf{K}_{\bar{I}\bar{I}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_I \Psi_{II} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \Psi_{II} = -\mathbf{K}_{II}^{-1} \mathbf{K}_{I\bar{I}}. \quad (\text{B.4})$$

Le vecteur des inconnues nodales peut être alors remplacé par le vecteur des amplitudes modales en utilisant les relations :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_{\bar{I}} \\ \mathbf{p}_I \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{II} & \Phi_{\bar{I}} \\ \mathbf{I}_I & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{p}_j \end{pmatrix} = \Phi \mathbf{Q} \quad (\text{B.5})$$

où  $\alpha$  est le vecteur des amplitudes des modes à interface fixe. Dans le cas où tous les modes à interface fixe ne sont pas retenus, cette décomposition modale est une expression approchée du vecteur exact.

Cette approche permet de réduire le nombre de degrés de liberté si le nombre de modes sélectionnés est inférieur au nombre de degrés de liberté éléments finis, c'est-à-dire si la taille du vecteur des amplitudes  $\mathbf{Q}$  est très inférieure à la taille du vecteur des inconnues nodales initiales.

Le nombre de modes stationnaires  $\Phi$  peut être réduit en considérant le critère classique de troncature modale :

$$f_{\Phi} \leq 2f_{\max}. \quad (\text{B.6})$$

Ainsi, il est possible de parvenir à la convergence si les modes dont la fréquence propre  $f_{\Phi}$  est supérieure à deux fois la fréquence maximale de la bande d'intérêt  $f_{\max}$  ne sont pas sélectionnés.

Plutôt que d'utiliser ce critère dont le sens physique est parfois discuté, il est aussi possible de prendre en compte une correction statique [140, 141].

## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur M. ICHCHOU

et les rapports de

Monsieur O. DAZEL

Professeur - Université du Maine - Laboratoire d'Acoustique - Avenue Olivier Messiaen - 72085 LEMANS

Et de

Monsieur N. ATALLA

Professeur - Université de Sherbrooke - Département Génie Mécanique - 2500 bd de l'Université - Sherbrooke (Québec) - CANADA J1K 2R1

**Monsieur SERRA Quentin**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE , ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE**

Fait à Ecully, le 24 novembre 2014

P/Le directeur de l'E.C.L.  
La directrice des Etudes



