



**HAL**  
open science

# Estimation a posteriori pour la simulation des grandes échelles en mécanique des fluides incompressibles

Ghina Nassreddine

► **To cite this version:**

Ghina Nassreddine. Estimation a posteriori pour la simulation des grandes échelles en mécanique des fluides incompressibles. Analyse numérique [math.NA]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2020. Français. NNT : 2020PA131037 . tel-03188260v2

**HAL Id: tel-03188260**

**<https://theses.hal.science/tel-03188260v2>**

Submitted on 7 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES, TECHNOLOGIES, SANTÉ "GALILÉE"

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Présentée par

Ghina NASSREDDINE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD

---

**ESTIMATION A POSTERIORI POUR LA SIMULATION DES  
GRANDES ECHELLES EN MECANIQUE DES FLUIDES  
INCOMPRESSIBLES**

---

**Directeur de thèse :** Pascal OMNES Prof. CEA et Université Sorbonne Paris Nord

**Co-directeur de thèse :** Toni SAYAH Prof. Université Saint-Joseph de Beyrouth

**Rapporteurs :** Franz CHOULY Prof. Université de Bourgogne

Emmanuel CREUSÉ Prof. Université polytechnique des Hauts-de-France

Soutenue publiquement le 15 décembre 2020 devant le jury composé de :

**Président du jury :** Marion DARBAS Prof. Université Sorbonne Paris Nord

**Rapporteurs :** Franz CHOULY Prof. Université de Bourgogne

Emmanuel CREUSÉ Prof. Université polytechnique des Hauts-de-France

**Examineurs :** Vanessa LLERAS Mcf Université de Montpellier

Patrick HILD Prof. Université de Toulouse

**Directeur de thèse :** Pascal OMNES Prof. CEA et Université Sorbonne Paris Nord

**Co-directeur de thèse :** Toni SAYAH Prof. Université Saint-Joseph de Beyrouth

# Résumé

La simulation numérique directe (DNS) à nombre de Reynolds élevé du comportement d'un fluide décrit par les équations de Navier-Stokes est particulièrement coûteuse, voire impossible, puisque les tailles de maille et de pas de temps doivent être adaptées aux plus petites échelles des fluctuations des champs de vitesse et de pression ayant un impact sur la solution. Pour cette raison, on utilise des techniques comme la méthode de simulation des grandes échelles (LES) où l'on n'a pas besoin de résoudre l'intégralité de toutes les échelles, mais où l'effet des plus petites échelles sur les échelles résolues sera modélisé.

Dans cette thèse, on s'intéresse au modèle de Smagorinsky, un des modèles les plus simples de LES et parmi les plus utilisés dans les codes de calcul. Il exprime l'effet des petites échelles par un terme de diffusion supplémentaire dont le coefficient de viscosité turbulente est une fonction des échelles résolues. Nous considérons ce modèle pour les équations instationnaires en dimension deux et stationnaires en dimensions deux et trois.

On analyse ces problèmes en introduisant les formulations variationnelles équivalentes. Ensuite on introduit les problèmes discrets correspondants en se basant sur la méthode des éléments finis pour la discrétisation en espace et sur le schéma d'Euler pour la discrétisation en temps. On établit une estimation d'erreur *a posteriori* entre la solution des équations de Navier-Stokes originelles et la solution discrète calculée. Cette estimation ne dépend que de la solution discrète calculée, de la géométrie du maillage et des données du problème ; elle fait apparaître trois types d'indicateurs d'erreur : de discrétisation en espace, de filtrage dû à la méthode LES et de discrétisation en temps dans la cas instationnaire ou de linéarisation dans le cas stationnaire. Enfin, on montre des résultats numériques de validation où l'ensemble est implémenté à l'aide du logiciel FreeFem++.

**Mots-clés :** Navier-Stokes, Simulation des grandes échelles, méthode des éléments finis, Estimation d'erreur *a posteriori*.

# Abstract

The direct numerical simulation (DNS) at high Reynolds number of fluid behavior described by the Navier-Stokes equations is particularly costly, if not impossible, since the mesh cells and time step sizes must be adapted to the smallest scales of fluctuations in the velocity and pressure fields that have an impact on the solution. For this reason, techniques such as the large eddy simulation method (LES) are used where the entire scale range is not solved, but the effect of the smallest scales on the resolved scales are modelled. In this thesis, we are interested in the Smagorinsky model, one of the simplest and most widely used among the LES models. This model expresses the effect of the small scales through an additional diffusion term, whose turbulent viscosity coefficient is a function of the resolved scales. We consider this model for the time dependent Navier-Stokes problem in dimension two and for the stationary Navier-Stokes problem in dimensions two and three.

These problems are analyzed by introducing the equivalent variational formulations. Then, the corresponding discrete problems based on the finite element method for space discretization and on Euler's scheme for time discretization are introduced. An a posteriori estimate that measures the error between the solution of the original Navier-Stokes system and the discrete computed solution is established. This estimate only depends on the calculated solution, the geometry of the mesh and the data of the problem; three types of error indicators are involved : the first is related to the space discretization, the second to the filtering of the LES method and the third to time discretization in the time dependent case and to linearization in the stationary case. Finally, numerical investigations are shown where the whole process is implemented with the FreeFem++ software.

**Keywords :** Large Eddy Simulation, Navier-Stokes, finite element method, *a posteriori* error estimation.

# Remerciements

La réalisation de cette thèse a été possible grâce à plusieurs personnes.

Je voudrais remercier mon directeur de thèse du côté Français, M. Pascal Omnes, qui m'a accueilli au sein du Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications et qui m'a dirigé tout au long de cette thèse. Il a toujours été disponible pour me guider et répondre à mes questions. Les nombreuses discussions que nous avons eues ainsi que ses conseils étaient très importants pour l'avancement de ce travail. Son esprit scientifique, sa capacité d'analyse et son enthousiasme m'ont montré que le monde de la recherche pouvait être un univers passionnant.

Je tiens à remercier l'université Sorbonne Paris Nord d'avoir m'aider pour avoir le contrat doctoral Paris13 (USPC) pour le financement de la thèse.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon co-directeur de thèse, M. Toni Sayah. Je le remercie de m'avoir accueilli au sein de l'Université Saint Joseph et pour m'avoir fait confiance et donné envie de réaliser mon stage de master poursuivi de cette thèse. Ses compétences scientifiques, la qualité de ses échanges, sa grande disponibilité, m'ont guidée et surtout ses judicieux conseils, ont contribué à alimenter ma réflexion. Enfin, je suis extrêmement sensible à ses qualités humaines de gentillesse, de patience et de compréhension qu'il a manifestés à mon égard durant mes travaux.

Mes pensées vont également vers mes chers parents Issam et Nada qui ont toujours été là pour moi et à aucun moment n'ont cessé de me couvrir de leur tendresse. Aussi un grand merci de tout mon cœur à ma chère sœur Racha et mes chers frères Jad et Tarek pour le soutien. Ils ont fait tout leur possible pour m'aider.

J'adresse aussi mes remerciements à mes amis et mes collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Finalement, je souhaite présenter mes remerciements aux membres du jury, Mesdames et Messieurs, qui ont accepté de participer à ma soutenance.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>8</b>
1.1	Équations de Navier-Stokes . . . . .	8
1.2	Présentation du problème . . . . .	9
1.2.1	Cas instationnaire : . . . . .	9
1.2.2	Cas stationnaire : . . . . .	10
1.3	Objectifs de la thèse . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Méthodes de Simulation des grandes échelles pour les équations de Navier-Stokes</b>	<b>12</b>
2.1	Problème continu (Navier-Stokes) . . . . .	12
2.1.1	Notations . . . . .	12
2.1.2	Formulation variationnnelle . . . . .	14
2.2	Problème continu filtré . . . . .	15
2.2.1	Présentation de la méthode de Simulation des grandes échelles . . . . .	15
2.2.2	Application de la LES aux équations de Navier-Stokes dépendant du temps . . . . .	16
2.2.3	Le modèle de Smagorinsky . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Problème filtré continu et discret</b>	<b>21</b>
3.1	Problème continu . . . . .	21
3.1.1	Rappels . . . . .	21
3.1.2	Formulation variationnelle . . . . .	23
3.2	Discrétisation . . . . .	24
3.2.1	Discrétisation en temps . . . . .	24
3.2.2	Discrétisation en espace . . . . .	25
3.2.3	Problème discret . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Estimation d'erreur a posteriori</b>	<b>28</b>
4.1	Construction des indicateurs d'erreurs . . . . .	28
4.2	Les majorations d'erreur <i>a posteriori</i> . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Estimation d'erreur a posteriori entre la solution filtrée et la solution filtrée discrète</b>	<b>58</b>
5.1	Estimation d'erreur <i>a posteriori</i> . . . . .	58
5.2	Conclusion . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Les majorations des indicateurs</b>	<b>68</b>
6.1	Majoration de $(\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2$ . . . . .	68
6.2	Majoration de $(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2$ . . . . .	79
6.3	Majoration de $(\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2$ . . . . .	80
6.4	Conclusion . . . . .	81

<b>7</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>82</b>
7.1	Résultats sur maillages uniformes . . . . .	83
7.1.1	Fonctions de courant . . . . .	83
7.1.2	Comparaison des indicateurs d'erreur pour des calculs avec ou sans LES . . . . .	88
7.2	Comparaisons d'erreurs . . . . .	92
7.3	Comparaisons entre LES uniforme et adaptatif . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Estimation d'erreur <i>a posteriori</i> pour la méthode LES appliquée au problème de Navier-Stokes stationnaire.</b>	<b>98</b>
8.1	Problème stationnaire continu (Navier-Stokes) . . . . .	98
8.2	Problème stationnaire continu filtré . . . . .	100
8.2.1	Discrétisation . . . . .	101
8.2.2	Convergence vers la solution continue . . . . .	103
8.3	Erreur <i>a posteriori</i> . . . . .	107
8.4	Majoration des indicateurs . . . . .	110
8.5	Équivalence entre erreurs et estimateurs . . . . .	117
8.6	Simulations numériques . . . . .	117

# Liste des figures

7.1	Domaine de calcul $\Omega$ . . . . .	82
7.2	Module de la vitesse et lignes de courant sans LES pour $Re=200$ et $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . . . . .	85
7.3	Module de la vitesse et lignes de courant avec LES pour $Re=200$ et $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . . . . .	85
7.4	Module de la vitesse et lignes de courant sans LES pour $Re=1000$ et $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . . . . .	86
7.5	Module de la vitesse et lignes de courant avec LES pour $Re=1000$ et $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . . . . .	86
7.6	Module de la vitesse et lignes de courant sans LES pour $Re=5000$ et $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . . . . .	87
7.7	Module de la vitesse et lignes de courant avec LES pour $Re=5000$ et $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . . . . .	87
7.8	Comparaison d'erreur en échelle logarithmique en fonction du nombre total du degrés de libertés. . . . .	97
8.1	Domaine de calcul $\Omega$ . . . . .	118
8.2	Uniforme NS . . . . .	120
8.3	Uniforme LES . . . . .	120
8.4	Comparaison entre un problème uniforme NS et LES en fonction du nombre de degré de liberté. . . . .	120
8.5	Maillage initial du domaine (11114 triangles) . . . . .	122
8.6	Premier niveau de raffinement (23238 triangles) . . . . .	122
8.7	Deuxième niveau de raffinement (37814 triangles) . . . . .	122
8.8	Troisième niveau de raffinement (67086 triangles) . . . . .	122
8.9	Comparaison entre indicateurs obtenus sur maillages uniformes et adaptatifs pour le modèle LES en fonction du nombre de degrés de liberté . . . . .	122
8.10	Module de la vitesse pour un maillage uniforme avec $N = 160$ . . . . .	123
8.11	Module de la vitesse pour le huitième niveau de raffinement . . . . .	123
8.12	Module de la vitesse : Coupe verticale passant par le centre du cercle de droite sur des maillages uniformes avec $N = 20, 40, 80$ et $160$ . . . . .	123
8.13	Module de la vitesse : Coupe verticale passant par le centre du cercle de droite sur des maillages adaptés avec le niveau 0 (uniforme avec $N = 20$ ), niveaux 2, 5 et 8. . . . .	123



# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 Équations de Navier-Stokes

Il y a près de deux siècles que le mathématicien anglais Sir George Gabriel Stokes [31] a clarifié la mise en équations des écoulements de fluides visqueux introduite par le mathématicien et ingénieur français Claude Louis Marie Henri Navier [27], faisant suite notamment aux travaux du Suisse Leonhard Euler qui n'avait pas pris en compte les effets de la viscosité.

L'étude et la classification des fluides reposent sur la loi choisie pour le tenseur  $\mathbb{S}$  des contraintes qui s'exercent sur le fluide. Ce tenseur s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbb{S}(\mathbf{v}, p)(t, \mathbf{x}) = \mathbb{F}(\mathbb{D}(\mathbf{v})(t, \mathbf{x})) - p(t, \mathbf{x})\mathbb{I},$$

où  $p$  est la pression,  $\mathbb{I}$  l'opérateur identité,  $\mathbb{F}$  une fonction tensorielle,  $\mathbb{D} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$  le tenseur des taux de déformation et  $\mathbf{u}$  la vitesse du fluide. Toutes les quantités sont évaluées en fonction de  $(t, \mathbf{x})$ , où  $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d$  désigne la position avec  $d = 2$  ou  $3$  et  $t \in [0, T]$  représente le temps.

Un fluide en écoulement est newtonien lorsque la relation contrainte-taux de déformation est linéaire. En terme mathématique, lorsque  $\mathbb{F}$  est une application linéaire de  $\mathbb{D}$ , le fluide est dit newtonien ; dans les autres cas, le fluide est dit non-newtonien.

En ne considérant que les fluides newtoniens isotropes, la loi de comportement du tenseur  $\mathbb{S}$  s'écrit :

$$\mathbb{S}(\mathbf{u}, p)(t, \mathbf{x}) = 2\mu\mathbb{D}(\mathbf{u})(t, \mathbf{x}) - p(t, \mathbf{x})\mathbb{I},$$

où  $\mu \geq 0$  est la viscosité dynamique du fluide.

L'équation de la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.1)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})(t, \mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbb{S}(\mathbf{u}, p)(t, \mathbf{x}) = \rho \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (1.2)$$

où  $\rho$  est la densité du fluide,  $\mathbf{f}$  une densité massique des forces extérieures agissant sur le fluide,  $\mathbf{u}$  vitesse eulérienne du fluide et  $p$  pression du fluide. Si  $\mu > 0$  (cas d'un fluide visqueux), le système (1.1)–(1.2) est appelé "équations de Navier-Stokes", ou "équations d'Euler" si  $\mu = 0$  (cas d'un fluide parfait).

Le fluide est incompressible si la densité  $\rho$  est constante. On a alors :

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, et en utilisant le fait que  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}$  et que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \right) - \nabla \cdot \mathbb{S}(\mathbf{u}, p)(t, \mathbf{x}) = \rho \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (1.3)$$

Un écoulement est laminaire lorsque le mouvement des particules du fluide se fait de façon régulière et ordonnée. Si le déplacement est irrégulier et des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement, l'écoulement est turbulent. On définit le nombre de Reynolds par :

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}$$

où  $U$  et  $D$  sont respectivement les échelles de vitesse et longueur de l'écoulement.

On constate que l'écoulement est laminaire si  $Re \leq 2000$ . Plus le nombre de Reynolds augmente, plus l'écoulement est probablement turbulent.

Un écoulement est stationnaire si toutes les variables décrivant le mouvement sont indépendantes du temps. Ainsi la pression  $p$ , la vitesse  $\mathbf{u}$ , la densité  $\rho$  d'un écoulement stationnaire sont des quantités indépendantes du temps. Si les variables décrivant le mouvement sont dépendantes du temps, l'écoulement est dit instationnaire. Cette thèse sera divisée en deux parties. Dans la première, on étudiera le problème instationnaire en dimension 2 et dans la deuxième, on étudiera le problème stationnaire mais en dimension 2 ou 3.

## 1.2 Présentation du problème

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , un ouvert borné connexe avec  $d = 2, 3$  de frontière correspondante  $\Gamma = \partial\Omega$ . On suppose que la densité du fluide est constante ( $\rho = 1$ ). On note  $\mathbf{f}$  la densité massique des forces extérieures et  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  la viscosité cinématique qui est une constante positive. Les inconnues sont la vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$  du fluide.

Dans ce qui suit, on utilisera les notations habituelles :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \quad \nabla \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2} \quad \text{si } \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Le terme  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  est le terme de transport (ou de convection) et le terme  $-\nu \Delta \mathbf{u}$  est celui de diffusion. Ce dernier est dû à l'existence des interactions au niveau moléculaire entre les particules et se traduit par une dissipation d'énergie.

Pour l'existence et l'unicité de la solution du problème continu, on peut se référer aux références [18,25,32] pour le cas instationnaire et à [18] au cas stationnaire où l'unicité sera conditionnée.

### 1.2.1 Cas instationnaire :

Dans le cas instationnaire, on choisit  $d = 2$ . Soit  $]0, T[$  un intervalle de temps. Le mouvement d'un fluide newtonien et incompressible dans  $\Omega \times [0, T]$  est décrit par les équations de Navier-Stokes instationnaires :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - \nu \Delta \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \nabla p(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega,$$

avec la condition d'incompressibilité

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ dans } [0, T] \times \Omega,$$

la condition au bord, du type Dirichlet homogène

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ sur } [0, T] \times \Gamma,$$

et la condition initiale d'un fluide au repos

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega.$$

### 1.2.2 Cas stationnaire :

Ici  $d = 2$  ou  $d = 3$ . Le mouvement d'un fluide newtonien et incompressible dans  $\Omega$  est décrit par les équations de Navier-Stokes stationnaires :

$$-\nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ dans } \Omega,$$

avec la condition d'incompressibilité

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \text{ dans } \Omega,$$

la condition au bord, du type Dirichlet homogène

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma.$$

## 1.3 Objectifs de la thèse

En général, il est difficile ou très souvent impossible de calculer la/une solution exacte du problème ; pour cette raison on a recours à une méthode numérique qui consiste à approcher cette solution recherchée à l'aide d'un nombre fini d'inconnues discrètes. L'approche idéale est de calculer cette approximation à l'aide d'une discrétisation des équations de Navier-Stokes (par exemple par la méthode des éléments finis) permettant de résoudre tous les détails de l'écoulement. Cette approche est nommée simulation numérique directe (DNS en anglais), dans laquelle tous les tourbillons persistants vont être considérés. L'inconvénient dans cette méthode est que lorsque le nombre de Reynolds devient de plus en plus grand, des tourbillons de plus en plus petits vont apparaître. La taille des tourbillons persistants, donnée par Kolmogorov, est de l'ordre de  $Re^{-1/2}$  en dimension 2 et  $Re^{-3/4}$  en dimension 3. Par conséquent, pour capturer tous les tourbillons persistants, on a besoin en dimension 3, d'un maillage de pas  $h$  qui est de l'ordre de  $Re^{-3/4}$ . Ainsi, le nombre total de mailles dans un maillage uniforme est de l'ordre de  $h^{-3} = Re^{9/4}$ . On peut conclure que cette méthode ne peut être applicable que pour des nombres de Reynolds limités.

Lorsque l'on veut simuler des écoulements à grands nombres de Reynolds, la méthode de simulation des grandes échelles (LES, pour Large Eddy Simulation en anglais) est bien adaptée. En effet, l'idée à l'origine de cette méthode est de ne retenir que les structures de plus grande taille dans l'écoulement, en ignorant volontairement les détails aux échelles les plus petites. Cela permet d'utiliser des maillages dont le pas n'a besoin de résoudre correctement que les grandes échelles. Pour cela, on applique à la solution du problème d'origine un filtre qui lisse les hautes fréquences spatiales ; mathématiquement, il s'agit d'une convolution avec une fonction dont la taille du support est inférieure ou égale à la taille des échelles que l'on souhaite simuler (et donc de fait de l'ordre de la taille des cellules du maillage utilisé). Diverses possibilités sont données dans la littérature pour le choix de ce filtre, mais l'expression finale du modèle utilisé dans cette thèse n'en dépend pas. Pour obtenir le modèle filtré, on applique le filtre aux équations de Navier-Stokes. Une première difficulté apparaît près de la frontière  $\Gamma$ , lorsque le support du filtre vient déborder sur l'extérieur de  $\Omega$ . Une seconde difficulté est liée à la convolution du terme non-linéaire  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ , qui n'est

pas identique au terme non-linéaire appliqué à la solution filtrée, alors que pour les termes linéaires, les dérivées commutent avec la convolution. Une discussion plus avancée sur ces difficultés est présentée au chapitre 2 ; ces difficultés ne constituent toutefois pas le cœur de cette thèse.

En effet, l'objectif principal de ce travail est l'obtention d'estimations *a posteriori* entre la solution discrète calculée, c'est-à-dire la solution issue d'une simulation éléments finis du modèle de Navier-Stokes auquel on a appliqué un filtre, et la solution exacte du modèle d'origine (Navier-Stokes sans filtre). Un second objectif est de se servir de ces estimateurs *a posteriori* pour réaliser des simulations adaptatives dans lesquelles un compromis aussi bon que possible entre précision et temps de calcul est recherché.

Plus en détail, dans cette thèse, on introduit le problème filtré basé sur la méthode LES et on établit une formulation variationnelle filtrée discrète basée sur le schéma d'Euler implicite pour la discrétisation en temps pour le cas instationnaire et sur la méthode des éléments finis pour la discrétisation en espace pour les 2 cas (stationnaire et instationnaire). On démontre l'existence et l'unicité de la solution filtrée du problème discret et on établit des inégalités de continuité correspondantes. Ensuite, on établit des estimations d'erreurs *a posteriori* optimales. Les estimateurs sont de trois types : un premier estimateur rend compte des erreurs de discrétisation spatiale, un deuxième des erreurs dues au changement de modèle, et un troisième de la discrétisation temporelle dans le cas d'un problème instationnaire ou de la linéarisation lors de l'utilisation d'une méthode de type point-fixe pour la résolution des équations non-linéaires dans le cas d'un problème stationnaire. Enfin, on montre des résultats numériques de validation obtenus à l'aide du logiciel FreeFem++ et des exemples de simulations dans lesquelles l'utilisation des estimateurs permet d'obtenir un meilleur rapport précision sur temps de calcul.

Le plan de ce travail est le suivant :

## 1. Cas instationnaire

- Le chapitre 2 est consacré à l'application de la méthode de simulation des grandes échelles pour les équations de Navier-Stokes.
- Le chapitre 3 est consacré à l'étude des problèmes continu et discret filtré.
- Dans le chapitre 4, on établit les estimations d'erreur *a posteriori* entre la solution exacte et la solution numérique.
- Dans le chapitre 5, on établit les estimations d'erreur *a posteriori* entre la solution filtrée et la solution numérique.
- Dans le chapitre 6, on établit les majorations des indicateurs.
- Dans le chapitre 7, on présente des expérimentations numériques.

## 2. Cas stationnaire :

- Dans le chapitre 8, on établit les estimations d'erreur *a posteriori* pour la méthode LES appliqué au problème de Navier-Stokes en dimension 2 ou 3 et on présente des simulations numériques.

## Chapitre 2

# Méthodes de Simulation des grandes échelles pour les équations de Navier-Stokes

Dans ce chapitre, on présente le problème de Navier-Stokes noté  $(P)$ . On commence par fixer les notations puis on établit la formulation variationnelle correspondante notée  $(FV)$ . D'autre part, on présente la méthode de Simulation des grandes échelles puis on l'applique sur le problème  $(P)$ . On clôture avec le modèle de Smagorinky.

### 2.1 Problème continu (Navier-Stokes)

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné connexe dans  $\mathbb{R}^2$ , de frontière lipschitzienne  $\Gamma = \partial\Omega$ , et on considère un intervalle  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$  où  $T$  est une constante positive.

Le problème de Navier-Stokes dépendant du temps  $(P)$  est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - \nu \Delta \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \nabla p(t, \mathbf{x}) & = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) & = \mathbf{0} \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) & = \mathbf{0} \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) & = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{f}$  représente la densité massique des forces extérieures, et  $\nu$  la viscosité qui est une constante positive. Les inconnues sont la vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$  du fluide. On choisit cette condition au bord pour simplifier les calculs.

#### 2.1.1 Notations

Dans cette section, on introduit les espaces fonctionnels nécessaires pour notre travail et les normes correspondantes.

1. Pour un entier  $p$  quelconque, on introduit l'espace suivant :

$$L^p(\Omega) = \left\{ q \text{ mesurable dans } \Omega, \text{ telle que } \int_{\Omega} |q(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|g\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

2. On introduit l'espace  $L^\infty(\Omega)$  suivant :

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ g \text{ mesurable dans } \Omega \text{ telle qu'il existe une constante } C \geq 0 \text{ vérifiant } |g(x)| \leq C \text{ pp sur } \Omega \right\},$$

muni de la norme

$$\|g\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ C; |g(x)| \leq C \text{ pp sur } \Omega \right\}.$$

3. Pour un entier  $m$  quelconque, on introduit les espaces de Sobolev suivants :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega), \partial^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \right\},$$

avec  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  vecteur d'entiers positifs où  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$  et la dérivée partielle  $\partial^\alpha$  est définie par :

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Ces espaces sont munis des semi-norme et norme suivantes :

$$|v|_{m,p,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v(x)|^p dx \right\}^{1/p} \quad \text{et} \quad \|v\|_{m,p,\Omega} = \left\{ \sum_{k \leq m} |v|_{k,p,\Omega}^p \right\}^{1/p}.$$

On note  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$  et

$$|v|_{H^m(\Omega)} = |v|_{m,2,\Omega} \quad \text{and} \quad \|v\|_{H^m(\Omega)} = \|v\|_{m,2,\Omega}.$$

4. Pour un espace de Sobolev  $Y$  de norme associée  $\|\cdot\|_Y$ , on définit les espaces suivants :

(a) pour  $r \in [1, \infty[$

$$L^r(a, b; Y) = \left\{ v \text{ mesurable dans } ]a, b[, \text{ telle que } \int_a^b \|v(t)\|_Y^r dt < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{L^r(a,b;Y)} = \left( \int_a^b \|v(t)\|_Y^r dt \right)^{\frac{1}{r}}.$$

(b) pour  $r = \infty$

$$L^\infty(a, b; Y) = \left\{ g \text{ mesurable dans } ]a, b[ \text{ telle qu'il existe une constante } C \geq 0 \text{ vérifiant } \|g(t)\|_Y \leq C \text{ pp sur } ]a, b[ \right\},$$

muni de la norme

$$\|g\|_{L^\infty(a,b;Y)} = \inf \left\{ C; \|g(t)\|_Y \leq C \text{ pp sur } ]a, b[ \right\}.$$

5. On introduit  $D(\Omega)$  l'ensemble des fonctions à support compact dans  $\Omega$  et indéfiniment dérivables sur  $\Omega$  et  $D'(\Omega)$  l'ensemble des distributions dans  $\Omega$ .

**Remarque 2.1.1** Si  $Y$  est un espace de Banach alors  $L^r(a, b, Y)$  l'est aussi.

On note  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ .

En tenant compte des conditions aux limites du système (P), on considère l'espace

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

pour lequel la semi-norme de  $H^1(\Omega)$  est une norme équivalente à la norme complète grâce à l'inégalité de Poincaré.

De plus, on considère l'espace des fonctions dans  $L^2(\Omega)$  à moyenne nulle sur  $\Omega$

$$L_0^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} v \, dx = 0\}.$$

On note  $X = H_0^1(\Omega)^2$  et  $M = L_0^2(\Omega)$ . On introduit l'espace :

$$V = \{\mathbf{v} \in X; \forall q \in M, \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0\},$$

qui est un sous-espace fermé de  $X$  et qui coïncide avec

$$V = \{\mathbf{v} \in X; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Omega\}.$$

## 2.1.2 Formulation variationnelle

**Définition 2.1.2** On introduit la forme trilinéaire  $c$  définie par :

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}.$$

On suppose que  $\mathbf{f}$  appartient à  $L^2(0, T; X')$ . On note  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t, \cdot)$ ,  $p(t) = p(t, \cdot)$  et on considère la formulation variationnelle dans  $]0, T[$  :

$$(FV) \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } \mathbf{u}(t) \in X \text{ et } p(t) \in M \text{ tels que :} \\ \forall \mathbf{v} \in X, \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p(t)) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle, \\ \forall q \in M, (\operatorname{div} \mathbf{u}(t), q) = 0, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}. \end{array} \right.$$

**Proposition 2.1.3** Toute solution du problème (FV) est une solution du problème (P) où les deux premières équations sont vérifiées au sens des distributions [32]. De plus, la solution de (FV) vérifie la relation suivante :

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)}^2 + \nu \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; X)}^2 \leq \frac{2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{L^2(0, T; X')}. \quad (2.1)$$

**Preuve de l'inégalité (2.1) :**

On prend  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  dans (FV), on aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \|\mathbf{u}(s)\|_X^2 &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle \\ &\leq \|\mathbf{f}\|_{X'} \|\mathbf{u}\|_X. \end{aligned} \quad (2.2)$$

En intégrant entre 0 et  $t$ , on obtient :

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 - \|\mathbf{u}(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_X^2 ds \leq 2 \int_0^t \|\mathbf{f}\|_{X'} \|\mathbf{u}\|_X ds.$$

Ayant  $\mathbf{u}(0)=\mathbf{0}$  et en appliquant Young, on obtient

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_X^2 ds \leq \int_0^t (\varepsilon \|\mathbf{f}\|_{X'}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{u}\|_X^2) ds.$$

Pour  $\varepsilon = \frac{1}{\nu}$ , on obtient :

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,t;X)}^2 \leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,t;X')}^2.$$

Donc on a :

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,t;X')}^2 \leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;X')}^2, \quad \forall t \in ]0, T[.$$

Alors

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 \leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;X')}^2. \quad (2.3)$$

De même

$$\nu \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;X')}^2. \quad (2.4)$$

En additionnant (2.3) et (2.4), on obtient le résultat.  $\square$

**Proposition 2.1.4** *Pour tout  $\mathbf{f} \in L^2(0, T; X')$ , le problème (FV) admet une unique solution  $(\mathbf{u}, p)$  (voir e.g. Ladyzenskaya [23] et Lions [25]).*

## 2.2 Problème continu filtré

### 2.2.1 Présentation de la méthode de Simulation des grandes échelles

La simulation des grandes échelles (LES en anglais) est une approche de la simulation des écoulements turbulents qui repose sur la décomposition des quantités du fluide (vitesse, pression, force,...) en deux parties :

1. Partie contenant les structures de grands débits (tourbillons de grandes tailles).
2. Partie contenant les structures de petits débits (tourbillons de petites tailles).

On prend les ouragans comme exemples, où on s'intéresse au comportement des grands tourbillons étant donné qu'ils sont plus dangereux. Il sera important de prévoir leur chemin afin de prendre des mesures pour protéger les êtres humains. De plus le comportement réel des petits tourbillons n'a pas d'intérêt mais il influence le comportement des grands tourbillons. Par conséquent, la prédiction du comportement des grands tourbillons n'est pas possible sans tenir compte des interactions venant des petits tourbillons.

L'idée de cette méthode repose sur la simulation des structures de grandes tailles et la modélisation des effets des petites structures supposées obéir aux hypothèses d'équilibre de la turbulence homogène isotrope. Alors elles peuvent être modélisées par un terme supplémentaire assurant la dissipation de l'énergie des structures de plus grandes tailles.

En LES, les structures de grands débits sont définies par une moyenne spatiale de la vitesse, la pression et la force. Une méthode habituelle consiste à définir cette moyenne spatiale par convolution de ces quantités



avec une fonction de filtre approprié de largeur notée  $\delta > 0$ .  
Le champ de vitesse  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  sera décomposé sous la forme :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}'(t, \mathbf{x}),$$

avec  $\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})$  la partie filtrée du champ de vitesse par le filtre  $\mathcal{F}$  et  $\mathbf{u}'(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})$ , le résidu destiné à être modélisé.

## 2.2.2 Application de la LES aux équations de Navier-Stokes dépendant du temps

La démarche commence par effectuer une convolution de la fonction filtre avec les équations de Navier-Stokes. La commutation entre la différentiation et le filtre n'est pas évidente comme le domaine  $\Omega$  est borné. Alors on étendra le problème sur  $\mathbb{R}^2$  où la commutation est applicable. Un terme supplémentaire apparaît, nommé *erreur de commutation*, qui va être négligé en pratique. D'autre part, la convolution du terme non linéaire  $\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}$  n'est pas égale au terme non linéaire appliqué à la convolution  $\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}$ . La différence entre ces deux termes conduit à un tenseur de contraintes de Reynolds dont les entrées vont être modélisées.

**Définition 2.2.1** *On définit un tenseur des contraintes de la façon suivante :*

$$\tilde{\mathbb{S}}(\mathbf{u}, p) = \nu \nabla \mathbf{u} - p \mathbb{I},$$

avec  $\mathbb{I}$  le tenseur unité.

On suppose que :

$$\mathbf{u}(t, \cdot) \in H^2(\Omega)^2 \cap H_0^1(\Omega)^2, p(t) \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad \forall t \in [0, T].$$

Avec ces conditions,  $\tilde{\mathbb{S}}(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} \in H^{1/2}(\Gamma)$  où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire sortante de  $\Omega$  sur sa frontière  $\Gamma$ . En particulier, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\tilde{\mathbb{S}}(\mathbf{u}, p)\mathbf{n} \in L^q(\Gamma)$  avec  $1 \leq q < \infty$  pour  $d = 2$  (voir [15, chapitre 2, théorème 3.1]).

**Remarque 2.2.2** *Pour pouvoir procéder à la convolution, on a besoin d'étendre les fonctions sur  $\mathbb{R}^2$ . On peut étendre  $\mathbf{u}$  par  $\mathbf{0}$  sur  $\mathbb{R}^2/\Omega$  comme  $\mathbf{u}$  est nulle sur  $\Gamma$ . Alors, on peut définir :*

$$\tilde{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}), \quad \tilde{\mathbf{u}}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(0, \mathbf{x}), \quad \tilde{p}(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}), \quad \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{u}}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \tilde{p}(\mathbf{x}) = 0, \quad \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2/\Omega.$$

**Propriété 2.2.3** [19, page 26]

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{presque partout dans } \mathbb{R}^2.$$

Mais on ne peut pas assurer que la solution  $\tilde{\mathbf{u}}$  soit dans  $H^2(\mathbb{R}^2)$ , ni que  $\tilde{p}$  soit dans  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . Les fonctions étendues possèdent les régularités suivantes :

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) \in H_0^1(\mathbb{R}^2), \tilde{p}(t) \in L_0^2(\mathbb{R}^2), \quad \forall t \in [0, T].$$

**Théorème 2.2.4** *Soit  $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)^2$ . Les fonctions  $\tilde{\mathbf{u}}$  et  $\tilde{p}$  vérifient :*

$$\left\langle \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} - \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} \right)(t), \Phi \right\rangle = \langle \tilde{\mathbf{f}}(t), \Phi \rangle + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbb{S}}(\mathbf{u}, p)(t, \mathbf{s}) \mathbf{n}(\mathbf{s}) \Phi(\mathbf{s}) ds. \quad (2.5)$$

Soit au sens des distributions :

$$\left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} - \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} \right)(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t) + (\tilde{\mathbb{S}}(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \delta_{\Gamma})(t). \quad (2.6)$$

**Preuve :** Comme  $\tilde{\mathbf{u}}$  et  $\tilde{p}$  ne sont pas nécessairement dans  $H^2(\mathbb{R}^2)^2$  et  $H^1(\mathbb{R}^2)^2$ , les termes  $\Delta\tilde{\mathbf{u}}$  et  $\nabla\tilde{p}$  doivent être définis au sens des distributions. Soit  $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)^2$ . Comme  $\tilde{p} = 0$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ , pour tout temps, on a :

$$\begin{aligned} \langle \nabla\tilde{p}(t), \Phi \rangle &= -\langle \tilde{p}(t), \nabla \cdot \Phi \rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{p}(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= -\int_{\Omega} p(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} p(t, \mathbf{s}) \Phi(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{s}) ds. \end{aligned} \quad (2.7)$$

De la même façon, on a :

$$\langle \Delta\tilde{\mathbf{u}}(t), \Phi \rangle = \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{s}) \cdot (\nabla(\mathbf{u})(t, \mathbf{s})\mathbf{n}(s)) ds. \quad (2.8)$$

En utilisant le problème (P) et les deux égalités (2.7) et (2.8), on obtient (2.5).  $\square$

On appliquera la convolution à l'équation (2.6) avec une fonction filtre  $\mathcal{F} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

**Définition 2.2.5** La convoluée  $H * \varphi$  d'une distribution  $H \in D'(\mathbb{R}^N)$  et d'une fonction test  $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$  est la fonction test  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^N$  définie par :

$$H * \varphi : \mathbf{x} \rightarrow \langle H, \varphi(\mathbf{x} - \cdot) \rangle.$$

On note  $\bar{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} * \mathcal{F}$  et  $\bar{p} = \tilde{p} * \mathcal{F}$ . Dans ce cas, la différentiation et la convolution commutent dans  $\mathbb{R}^2$ . Par application de la convolution, on a :

$$\left( \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} - \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} \right) (t) \right) * \mathcal{F} = \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} \right) (t).$$

et

$$\tilde{\mathbf{f}} * \mathcal{F} = \bar{\mathbf{f}}.$$

Donc, on a :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} = \bar{\mathbf{f}} + \int_{\Gamma} \mathcal{F}(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \tilde{\mathcal{S}}(\mathbf{u}, p)(t, \mathbf{s}) \mathbf{n}(\mathbf{s}) ds. \quad (2.9)$$

**Remarque 2.2.6** La forme exacte du filtre importe peu dans notre cas. En outre, dans d'autres modèles [1, 14, 16, 24], les auteurs utilisent une approximation de la transformation du Fourier de la fonction filtre. Pour cela ils se basent sur un filtre gaussien de largeur  $\delta$  où la fonction filtre est le produit de fonctions filtres unidimensionnelles de la façon suivante :

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^2 \mathcal{F}_i(x_i),$$

où

$$\mathcal{F}_i(x_i) = \sqrt{\frac{6}{\pi\delta^2}} \exp\left(-\frac{6}{\delta^2} x_i^2\right), \quad \forall i = \{1, 2\}.$$

Dans ces modèles, le filtre sera  $C^\infty(\Omega)^2$  et on convoluera une distribution à support compact avec une fonction  $C^\infty(\Omega)$ .

**Remarque 2.2.7** La moyenne en espace correcte des équations de Navier-Stokes dans un domaine borné nécessite une intégrale supplémentaire sur le bord,  $A_\delta(\tilde{\mathbb{S}}(\mathbf{u}, p))$ . Cette intégrale nécessiterait une modélisation puisque le tenseur de contraintes dépend de la solution inconnue et non de la solution filtrée. L'omission de cette intégrale provoque une erreur de commutation.

**Définition 2.2.8** L'erreur de commutation est définie de la forme suivante :

$$A_\delta(\tilde{\mathbb{S}}(\mathbf{u}, p))(t, \mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \mathcal{F}(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \tilde{\mathbb{S}}(\mathbf{u}, p)(t, \mathbf{s}) \mathbf{n}(\mathbf{s}) ds. \quad (2.10)$$

La référence [19, chap3] étudie la convergence de  $\int_{\Gamma} \mathcal{F}(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \Psi(\mathbf{s}) ds$  vers 0 pour  $\Psi \in L^p(\Gamma)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  lorsque la largeur du filtre  $\delta$  tend vers 0. Comme  $\tilde{\mathbb{S}}(\mathbf{u}, p)(t, \mathbf{s}) \mathbf{n}(\mathbf{s}) \in L^p(\Gamma)$  pour  $1 \leq p < \infty$ , alors  $A_\delta(\tilde{\mathbb{S}}(\mathbf{u}, p))(t, \mathbf{x})$  tend vers 0. Dans la suite, on néglige l'erreur de commutation et on considère le problème de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}} + \nabla \bar{p} = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \bar{\mathbf{u}}(0, \cdot) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Notre but maintenant est d'exprimer la moyenne filtrée du produit  $\overline{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}$  en fonction de la vitesse filtrée.

**Théorème 2.2.9** En utilisant le fait que  $\overline{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}} = \overline{\nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}^T)} = \nabla \cdot \overline{(\mathbf{u} \mathbf{u}^T)}$  puisque  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$ , le système (2.11) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T) + \nabla \cdot \mathbb{T} + \nabla \bar{p} = \bar{\mathbf{f}}, \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \bar{\mathbf{u}}(0, \cdot) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.12)$$

où le tenseur des contraintes de Reynolds est défini par :  $\mathbb{T} = \overline{\mathbf{u} \mathbf{u}^T} - \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}^T$ .

**Remarque 2.2.10** Ce tenseur  $\mathbb{T}$  doit être modélisé en l'exprimant en fonction de la vitesse résolue  $\bar{\mathbf{u}}$ . De très nombreux travaux de physiciens et de mathématiciens sont consacrés à cette question. On peut par exemple citer [20] et [26]). Nous retenons ici les approches qui permettent d'exprimer  $\mathbb{T}$  par la forme suivante :

$$\mathbb{T} - \frac{\operatorname{tr}(\mathbb{T})}{3} \mathbb{I} = -\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}), \quad (2.13)$$

avec  $\nu_t(\bar{\mathbf{u}})$  la viscosité turbulente qui dépend de l'inconnue  $\bar{\mathbf{u}}$  et dont l'expression diffère selon les modèles. Par ailleurs,  $\operatorname{tr}(\mathbb{T})$  désigne de façon standard la trace de  $\mathbb{T}$ .

**Remarque 2.2.11** la trace de  $\mathbb{T}$  est en général ajoutée à la pression filtrée. On définit une nouvelle pression  $\tilde{p}$  de la façon suivante :

$$\tilde{p} = \bar{p} + \frac{\operatorname{tr}(\mathbb{T})}{3}. \quad (2.14)$$

Pour la suite, on note à nouveau  $\tilde{p}$  par  $\bar{p}$ .

En remplaçant (2.13) et (2.14) dans la première équation du système (2.12), le système (2.12) peut être écrit sous la forme suivante :

$$(\bar{P}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \nabla \cdot (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla(\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \bar{p} = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \bar{\mathbf{u}}(0, \cdot) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

### 2.2.3 Le modèle de Smagorinsky

Le modèle de Smagorinsky est le plus simple modèle de LES qui utilise l'hypothèse d'équilibre local entre production et dissipation de l'énergie cinétique turbulente pour exprimer la viscosité turbulente en fonction des grandes échelles résolues de l'écoulement (voir [19]).

**Définition 2.2.12** *La viscosité turbulente dans le modèle de Smagorinsky est de la forme suivante :*

$$\nu_t = c \delta^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_F, \quad (2.15)$$

où  $\|A\|_F$  pour une matrice  $A$ , est donné par :

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

**Remarque 2.2.13** *la moyenne filtrée du produit des vitesses peut être décomposée en fonction du produit des vitesses filtrées d'une autre façon :*

$$\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}^T} = \overline{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}^T} + \overline{\bar{\mathbf{u}}\mathbf{u}'^T} + \overline{\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}^T} + \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'^T}. \quad (2.16)$$

le modèle est obtenu en 5 étapes :

1. Appliquer la transformation de Fourier  $\mathbb{F}$  à (2.16) où les termes  $\mathbb{F}(\bar{\mathbf{u}})$ ,  $\mathbb{F}(\mathbf{u}')$  et  $\mathbb{F}(\mathcal{F})$  vont apparaître.
2. Remplacer  $\mathbb{F}(\mathbf{u}')$  par une fonction de  $\mathbb{F}(\bar{\mathbf{u}})$  vu qu'on désire travailler avec la vitesse filtrée.
3. Approximer la transformation de Fourier de la fonction filtre par une fonction simple.
4. Négliger les termes qui sont d'ordres supérieures à  $\delta$ .
5. Appliquer la transformation de Fourier inverse.

De plus, il y a 2 points de vue différents dans le 3ème point. Dans le premier point de vue, Leonard [24], Clark [14] et al, Aldama [1] approximent  $\mathbb{F}(\mathcal{F})$  du filtre  $\mathcal{F}$  par un développement polynomial de Taylor qui repose sur :

$$\mathbb{F}(\mathcal{F}) = 1 - \frac{\|\mathbf{y}\|_2^2}{4\gamma} \delta^2 + \theta(\delta^4),$$

où on obtient :

$$\overline{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}^T} + \overline{\bar{\mathbf{u}}\mathbf{u}'^T} + \overline{\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}^T} = \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}^T + \frac{\delta^2}{2\gamma} \nabla \bar{\mathbf{u}} \nabla \bar{\mathbf{u}}^T$$

et

$$\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'^T} = \frac{\delta^4}{16\gamma^2} \Delta \bar{\mathbf{u}} \Delta \bar{\mathbf{u}}^T + \theta(\delta^6),$$

alors que dans le deuxième point de vue, Galdi and Layton [16], utilisent une approximation rationnelle qui repose sur :

$$\mathbb{F}(\mathcal{F}) = \frac{1}{1 + \frac{\|\mathbf{y}\|_2^2}{4\gamma}\delta^2} + \theta(\delta^4),$$

où on obtient :

$$\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}^T} + \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}'^T} + \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}^T} = \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}^T} + \frac{\delta^2}{2\gamma}(\mathbb{I} - \frac{\delta^2}{4\gamma}\Delta)^{-1}\nabla\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}^T$$

et

$$\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'^T} = \frac{\delta^4}{16\gamma^2}(\mathbb{I} - \frac{\delta^2}{4\gamma}\Delta)^{-1}(\Delta\overline{\mathbf{u}}\Delta\overline{\mathbf{u}}^T) + \theta(\delta^6).$$

Dans les 2 cas, en utilisant la 4ème étape, les approximations du terme  $\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'^T}$  vont être négligées. Mais numériquement, cela donne des résultats insatisfaisants. pour cela ils ont approximé ce terme par le modèle de Smagorinsky.

On peut résumer tous les cas possibles par la forme suivante :

$$\frac{\partial\overline{\mathbf{u}}}{\partial t} - \Delta\overline{\mathbf{u}} - \nabla \cdot (\nu_t(\overline{\mathbf{u}})\mathbb{D}(\overline{\mathbf{u}})) + \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla(\overline{\mathbf{u}}) + \nabla\overline{p} + \nabla \cdot A(\frac{\delta^2}{2\gamma}\nabla\overline{\mathbf{u}}\nabla\overline{\mathbf{u}}^T) = \overline{\mathbf{f}} \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega,$$

avec  $\nu_t$  et  $A$  changent selon le tableau suivant :

Navier-Stokes équations	$\nu_t = 0, A=0$
Modèle de Smagorinsky	$\nu_t = c\delta^2\ \mathbb{D}(\overline{\mathbf{u}})\ _F, A=0$
Modèle de Taylor LES	$\nu_t = c\delta^2\ \mathbb{D}(\overline{\mathbf{u}})\ _F, A = \mathbb{I}$
Modèle rationnel	$\nu_t = c\delta^2\ \mathbb{D}(\overline{\mathbf{u}})\ _F, A = (\mathbb{I} - \frac{\delta^2}{4\gamma}\Delta)^{-1}$

Il y a d'autres modèles qui se basent sur d'autres  $\nu_t$ , différentes de celle de Smagorinsky (voir [19]). Étant donné que la viscosité turbulente dépend de la solution, une difficulté supplémentaire apparaît dans notre travail. Le modèle de Smagorinsky est le plus simple parmi les modèles cités, on l'a choisi pour la suite de notre thèse.

# Chapitre 3

## Problème filtré continu et discret

Dans ce chapitre, on commence par donner un rappel de quelques théorèmes et propositions. Puis on établit la formulation variationnelle filtrée correspondante notée  $(\overline{FV})$ . Finalement, on introduit le problème variationnel discret  $(\overline{FV}_{n,h})$  et on montre l'existence et l'unicité de la solution correspondante.

### 3.1 Problème continu

Le problème de Navier-Stokes filtré dépendant du temps est :

$$(\bar{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \nabla \cdot (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla(\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \bar{p} & = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} & = \mathbf{0} \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \bar{\mathbf{u}} & = \mathbf{0} \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma, \\ \bar{\mathbf{u}}(0, \cdot) & = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

où  $\bar{\mathbf{f}}$  représente la densité des forces extérieures filtrée,  $\nu$  la viscosité qui est une constante positive et  $\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) = c\delta^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_F$  la viscosité turbulente. Les inconnues sont la vitesse  $\bar{\mathbf{u}}$  et la pression  $\bar{p}$  du fluide. On note  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ .

En tenant compte des conditions aux limites du système  $(\bar{P})$ , on considère l'espace

$$W_0^{1,3}(\Omega) = \{v \in W^{1,3}(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

On note  $Z = W_0^{1,3}(\Omega)^2$ .

#### 3.1.1 Rappels

Dans ce paragraphe, on va énoncer quelques théorèmes et propositions qui sont importants pour la suite. On considère les deux espaces de Hilbert définis dans le chapitre 2,  $X = H_0^1(\Omega)^2$  et  $M = L_0^2(\Omega)$  de normes respectivement  $\|\cdot\|_X$  et  $\|\cdot\|_M$ , de produits scalaires respectivement  $(\cdot, \cdot)_X$  et  $(\cdot, \cdot)_M$  et de duaux  $X'$  et  $M'$  avec le crochet de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

$$b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

On donne une forme bilinéaire continue :

$$(\mathbf{v}, q) \mapsto (\operatorname{div} \mathbf{v}, q)$$

et on associe l'opérateur  $B : X \mapsto M'$  et son dual  $B' : M \mapsto X'$ , tel que pour tout  $\mathbf{v} \in X$  et  $q \in M$ , on a :

$$b(\mathbf{v}, q) = \langle B\mathbf{v}, q \rangle_{M', M} = \langle B'q, \mathbf{v} \rangle_{X', X}.$$

$V$  étant défini par :

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in X; \forall q \in M; \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \right\},$$

on introduit les deux espaces suivants :

$$V^{\perp} = \{ \mathbf{v} \in X, \forall \mathbf{w} \in V, \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_X = 0 \}.$$

$$V^{\circ} = \{ \mathbf{v} \in X', \forall \mathbf{w} \in V, \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{X', X} = 0 \}.$$

**Théorème 3.1.1** *Théorème de Babuška-Brezzi [18]*

Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une constante  $\beta > 0$  telle que

$$\inf_{q \in M} \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{\int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|_X \|q\|_M} \geq \beta. \quad (3.1)$$

2. L'opérateur  $B'$  est un isomorphisme de  $M$  sur  $V^{\circ}$  et

$$\forall q \in M, \|B'q\|_{X'} \geq \beta \|q\|_M. \quad (3.2)$$

3. L'opérateur  $B$  est un isomorphisme de  $V^{\perp}$  sur  $M'$  et

$$\forall \mathbf{v} \in V^{\perp}, \|B\mathbf{v}\|_{M'} \geq \beta \|\mathbf{v}\|_X. \quad (3.3)$$

**Proposition 3.1.2** *Inégalité de Hölder*

Si  $h \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$  avec  $p$  et  $q$  conjugués ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ), alors  $hg \in L^1(\Omega)$  et de plus on a l'inégalité de Hölder suivante :

$$\int_{\Omega} |h(x)g(x)| dx \leq \|h\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad (3.4)$$

**Proposition 3.1.3** *Inégalité de Hölder généralisée*

Si  $h \in L^p(\Omega)$ ,  $g \in L^q(\Omega)$  et  $w \in L^r(\Omega)$  avec  $1 \leq p, q, r \leq \infty$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ , alors  $hgw \in L^1(\Omega)$  et de plus on a l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega} |h(x)g(x)w(x)| dx \leq \|h\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \|w\|_{L^r(\Omega)}. \quad (3.5)$$

**Proposition 3.1.4** *On a les inégalités suivantes :*

1. [29] Pour tout  $\Omega$  borné et connexe et  $p < \infty$  ( $d = 2$ ) ou  $p \leq 6$  ( $d = 3$ ), il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $\mathbf{v} \in X$  on a :

$$\|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)^d} \leq S_p \|\mathbf{v}\|_X. \quad (3.6)$$

2. Pour tout  $\Omega$  borné et connexe, il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $\mathbf{v} \in X$

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^2} \leq C \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^2}. \quad (3.7)$$

3. En dimension 2 et pour chaque  $\mathbf{v} \in X$

$$\|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^2} \leq 2^{1/4} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\mathbf{v}\|_X^{1/2}. \quad (3.8)$$

(Pour la preuve, voir [32, page 295] )

4. Pour tout  $\mathbf{w}, \mathbf{g} \in L^4(\Omega)^2$  et  $\forall \mathbf{h} \in L^2(\Omega)^2$  on a :

$$\int_{\Omega} \mathbf{wgh} \, dx \leq \|\mathbf{w}\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{g}\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{h}\|_{L^2(\Omega)^2}. \quad (3.9)$$

(Conséquence de (3.5) en prenant  $p = q = 4$  et  $r = 2$ )

5. Pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$ , on a

$$|c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq S_4^2 \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2} \|\mathbf{v}\|_X \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)^2}. \quad (3.10)$$

(Conséquence de (3.9) en se basant sur l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^4(\Omega)$ )

6. Pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$  tel que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ . Alors

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0. \quad (3.11)$$

### 3.1.2 Formulation variationnelle

On suppose que  $\bar{\mathbf{f}}$  appartient à  $L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$ . On note  $\bar{\mathbf{u}}(t) = \bar{\mathbf{u}}(t, \cdot)$ ,  $\bar{p}(t) = \bar{p}(t, \cdot)$  et on considère la formulation variationnelle :

$$(\overline{FV}) \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } \bar{\mathbf{u}}(t) \in Z \text{ et } \bar{p}(t) \in M \text{ tel que :} \\ \forall \bar{\mathbf{v}} \in Z, \left( \frac{d\bar{\mathbf{u}}(t)}{dt}, \bar{\mathbf{v}} \right) + \nu(\nabla \bar{\mathbf{u}}(t), \nabla \bar{\mathbf{v}}) + (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}})) + c(\bar{\mathbf{u}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t), \bar{\mathbf{v}}) \\ \quad \quad \quad -(\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}, \bar{p}(t)) = (\bar{\mathbf{f}}(t), \bar{\mathbf{v}}), \\ \forall \bar{q} \in M \text{ et } t \in [0, T], \quad (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}(t), \bar{q}) = \mathbf{0}, \\ \bar{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}. \end{array} \right.$$

**Proposition 3.1.5** (Voir [19], page 75)

En utilisant l'égalité  $(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \nabla \bar{\mathbf{v}}) = (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}))$ , toute solution du problème  $(\overline{FV})$  est une solution du problème  $(\bar{P})$  où les deux premières équations sont vérifiées au sens des distributions. De plus, elle vérifie les estimations suivantes pour  $T > 0$  :

$$\|\bar{\mathbf{u}}(T)\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \int_0^T \|\bar{\mathbf{f}}(t)\|_{L^2(\Omega)^2} dt, \quad (3.12)$$

$$\|\bar{\mathbf{u}}(T)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\nu \int_0^T (\nabla \bar{\mathbf{u}}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) dt + 2 \int_0^T (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})) dt \leq 2 \left( \int_0^T \|\bar{\mathbf{f}}(t)\|_{L^2(\Omega)^2} dt \right)^2. \quad (3.13)$$

**Preuve :**

1. Preuve de l'inégalité (3.12) :

On prend  $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}}$  dans  $(\overline{FV})$ , on aura :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}) + \nu(\nabla \bar{\mathbf{u}}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) + (c\delta^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_F \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})) = (\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{u}}). \quad (3.14)$$



En éliminant le deuxième et le troisième termes à gauche non négatifs, on obtient

$$\|\bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^2} \frac{d}{dt} \|\bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \|\bar{\mathbf{f}}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

En éliminant le terme  $\|\bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^2}$  et en intégrant sur  $[0, T]$ , on obtient (3.12).

2. Preuve de l'inégalité (3.13) :

On intègre sur  $[0, T]$ , l'égalité (3.14), on aura :

$$\|\bar{\mathbf{u}}(T)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\nu \int_0^T (\nabla \bar{\mathbf{u}}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) dt + 2 \int_0^T (c\delta^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_F) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}) dt = 2 \int_0^T (\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{u}}) dt. \quad (3.15)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (3.12), on majore le terme à droite par :

$$\begin{aligned} \int_0^T (\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{u}}) dt &\leq \int_0^T \|\bar{\mathbf{f}}(t)\|_{L^2(\Omega)} \left( \int_0^t \|\bar{\mathbf{f}}(t')\|_{L^2(\Omega)} dt' \right) dt \\ &\leq \left( \int_0^T \|\bar{\mathbf{f}}(t)\|_{L^2(\Omega)} dt \right)^2. \end{aligned}$$

En insérant la dernière inégalité dans (3.15), on obtient (3.13). □

**Proposition 3.1.6** Voir [19, page 89]. Pour tout  $\bar{\mathbf{f}} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , le problème  $(\overline{FV})$  admet une unique solution  $(\bar{\mathbf{u}}, p)$ .

## 3.2 Discrétisation

### 3.2.1 Discrétisation en temps

On suppose que  $\Omega$  est un polyèdre à frontière lipschitzienne et que  $\bar{\mathbf{f}}$  appartient à  $\mathcal{C}^0(0, T; X')$ . Pour décrire la discrétisation en temps avec un choix local de pas de temps adapté, on définit une partition de l'intervalle  $[0, T]$  en sous-intervalles  $[t_{n-1}, t_n]$ ,  $1 \leq n \leq N$ , tels que  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ . On note par  $\tau_n$  la longueur de  $[t_{n-1}, t_n]$ , par  $\tau$  le N-uplet  $(\tau_1, \dots, \tau_N)$ , par  $|\tau|$  le maximum de  $\tau_n$ ,  $1 \leq n \leq N$ , et finalement par  $\sigma_\tau$  le paramètre de régularité

$$\sigma_\tau = \max_{2 \leq n \leq N} \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}. \quad (3.16)$$

Dans ce qui suit, on travaille avec des familles de partitions régulières, c'est-à-dire, on suppose que  $\sigma_\tau$  est borné indépendamment de  $\tau$ .

On définit l'opérateur  $\pi_\tau$  (resp.  $\pi_{l,\tau}$ ) : pour tout espace de Banach  $Y$  et toute fonction  $g$  continue de  $]0, T[$  (resp.  $[0, T[$ ) dans  $Y$ , on note par  $\pi_\tau g$  (resp.  $\pi_{l,\tau} g$ ) la fonction escalier qui est constante et égale à  $g(t_n)$  (resp.  $g(t_{n-1})$ ) sur chaque intervalle  $]t_{n-1}, t_n]$ ,  $1 \leq n \leq N$ .

De la même manière, pour toute suite  $(\phi_n)_{0 \leq n \leq N}$  dans  $Y$ , on associe la fonction escalier  $\pi_\tau \phi_\tau$  (resp.  $\pi_{l,\tau} \phi_\tau$ ) qui est constante et égale à  $\phi_n$  (resp.  $\phi_{n-1}$ ) sur chaque intervalle  $]t_{n-1}, t_n]$ ,  $1 \leq n \leq N$ .

De plus, avec toute famille  $(\mathbf{v}^n)_{0 \leq n \leq N}$  dans  $Y^{N+1}$ , on associe la fonction  $\mathbf{v}_\tau$  sur  $[0, T]$  qui est affine sur chaque intervalle  $[t_{n-1}, t_n]$ ,  $1 \leq n \leq N$ , et égale à  $\mathbf{v}^n$  en  $t_n$ , pour  $0 \leq n \leq N$ . Plus précisément, cette fonction est égale dans  $[t_{n-1}, t_n]$  à :

$$\mathbf{v}_\tau(t) = \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} (\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}) + \mathbf{v}^{n-1} = -\frac{t_n - t}{\tau_n} (\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}) + \mathbf{v}^n.$$

### 3.2.2 Discrétisation en espace

Pour tout  $n$ ,  $0 \leq n \leq N$ , soit  $(\mathcal{T}_{nh})_h$  une famille régulière de triangulations de  $\Omega$  par des triangles, au sens usuel tels que :

- pour tout  $h$ ,  $\bar{\Omega}$  est la réunion de tous les éléments de  $\mathcal{T}_{nh}$  ;
- l'intersection de deux éléments distincts de  $\mathcal{T}_{nh}$  est soit vide, soit un sommet, soit un côté entier de ces 2 éléments.
- le quotient du diamètre d'un élément  $\kappa_n$  de  $\mathcal{T}_{nh}$  sur le diamètre du cercle inscrit dans  $\kappa_n$  est majoré par une constante qui ne dépend ni de  $n$  ni de  $h$ .

$h$  est le plus grand diamètre des éléments de  $\mathcal{T}_{nh}$ ,  $0 \leq n \leq N$ , tandis que pour tout  $n$ ,  $h_n$  est le plus grand diamètre des éléments de  $\mathcal{T}_{nh}$ . Pour tout  $\kappa_n$  dans  $\mathcal{T}_{nh}$  et tout entier  $k$  non négatif, on note  $P_k(\kappa_n)$  l'espace des restrictions sur  $\kappa_n$  des polynômes à 2 variables et de degré au plus  $k$ .

Dans ce qui suit  $c, c', C, C', C_s, c_1, \dots$  sont des constantes qui varient d'une ligne à l'autre mais qui sont toujours indépendantes de  $h_n$  et  $n$ .

À partir de maintenant, on appelle espace d'éléments finis associés à  $\mathcal{T}_{nh}$  un espace de fonctions, telles que leurs restrictions à tout élément  $\kappa_n$  de  $\mathcal{T}_{nh}$  appartiennent à un espace de polynômes de degré donné.

Pour tous  $n$  et  $h_n$ , on associe à  $\mathcal{T}_{nh}$  deux espaces d'éléments finis conformes  $X_{nh}$  et  $M_{nh}$  qui sont respectivement contenus dans  $Z$  et  $M$ , et tels que la condition inf-sup suivante soit vérifiée pour une constante  $\beta > 0$ , indépendante de  $n$  et  $h_n$ ,

$$\forall q_h \in M_{nh}, \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in X_{nh}} \frac{\int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|_{H_0^1(\Omega)^2}} \geq \beta \|q_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.17)$$

En effet, il existe plusieurs exemples d'espaces d'éléments finis vérifiant ces conditions. On donne un exemple dans ce mémoire traitant des pressions discrètes continues. La vitesse est discrétisée par des "mini éléments".

$$X_{nh} = \{\mathbf{v}_h \in C_0(\bar{\Omega}); \forall \kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}, \mathbf{v}_h|_{\kappa_n} \in P_b(\kappa_n)^2; \mathbf{v}_h|_{\Gamma} = \mathbf{0}\},$$

où l'espace  $P_b(\kappa_n)$  est défini par des fonctions  $P_1(\kappa_n)$  et des fonctions bulles sur  $\kappa_n$  (pour tout élément  $\kappa_n$ , la fonction bulle est égale au produit des coordonnées barycentriques associées aux sommets de  $\kappa_n$ ).

Les degrés de liberté de l'espace  $X_{nh}$  sont les valeurs sur les sommets et les centres des triangles.

La pression est discrétisée par les éléments finis continus classiques d'ordre 1.

$$M_{nh} = \{q_h \in M \cap C_0(\bar{\Omega}); \forall \kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}, q_h|_{\kappa_n} \in P_1(\kappa_n)\}.$$

Les degrés de liberté de l'espace  $M_{nh}$  sont les valeurs aux sommets des triangles. Comme d'habitude, on note  $V_{nh}$  le noyau suivant :

$$V_{nh} = \{\mathbf{v}_h \in X_{nh}; \forall q_h \in M_{nh}, \int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0\}.$$

### 3.2.3 Problème discret

Pour la suite de notre travail, on suppose que la largeur du filtre  $\delta$  varie d'un triangle à un autre de façon à ce qu'elle soit égale au diamètre du triangle considéré, noté  $h_{\kappa_n}$ . Comme la largeur n'est plus constante, la commutation du filtrage et de la différentiation ne commutent plus. Un terme supplémentaire s'ajoutera aux équations filtrées mais on le négligera pour simplifier nos calculs.

**Définition 3.2.1** On introduit la forme trilinéaire suivante :

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}.$$



Or  $(p_h^n, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = 0$ . On aura donc  $\bar{p}_h^n = 0$ .

D'autre part, on prend  $\mathbf{v}_h = \bar{\mathbf{u}}_h^n$  dans  $(F\bar{V}_{n,h})$ , on utilise le fait que

$$\frac{1}{\tau_n}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}, \bar{\mathbf{u}}_h^n) = \frac{1}{2\tau_n}(\|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 - \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2)$$

et on applique l'inégalité de Cauchy-schwarz et la formule de Young pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 - \frac{1}{2}\|\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu\tau_n\|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 + \tau_n(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), D(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) \\ \leq \frac{\tau_n\varepsilon}{2}\|\bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{\tau_n c^2}{2\varepsilon}\|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2. \end{aligned}$$

On choisit  $\varepsilon = \frac{c^2}{\nu}$  et on somme sur  $n$  allant de 1 jusqu' au  $m$ , pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\bar{\mathbf{u}}_h^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{\nu}{2}\sum_{n=1}^m\tau_n\|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 + \sum_{n=1}^m\tau_n(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) \\ \leq \sum_{n=1}^m\frac{\tau_n c^2}{2\nu}\|\bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\ \leq \frac{c^2}{2\nu}\|\bar{\mathbf{f}}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega)^2)}^2 \cdot \sum_{n=1}^m\tau_n \\ \leq \frac{c^2 T}{2\nu}\|\bar{\mathbf{f}}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega)^2)}^2. \end{aligned}$$

Ce qui implique l'inégalité de (3.18).

□

# Chapitre 4

## Estimation d'erreur a posteriori

Le but de ce chapitre est de démontrer une estimation d'erreur *a posteriori* entre la solution exacte  $(\mathbf{u}, p)$  du problème  $(FV)$  et la solution numérique du problème  $(\overline{FV}_{n,h})$ .

### 4.1 Construction des indicateurs d'erreurs

On définit l'espace :

$$Z_{nh}^\ell = \{\mathbf{g}_h \in L^2(\Omega)^2; \forall \kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}, \mathbf{g}_h|_{\kappa_n} \in P_\ell(\kappa_n)^2\},$$

où  $\ell$  est plus petit que le degré des polynômes dans  $X_{nh}$  et pour  $1 \leq n \leq N$ , on fixe une approximation  $\bar{\mathbf{f}}_h^n$  de  $\bar{\mathbf{f}}^n$  dans  $Z_{nh}$ . On prend  $\ell = 1$ .

Pour tout élément  $\kappa_n$  dans  $\mathcal{T}_{nh}$ , on note par :

- $\varepsilon_{\kappa_n}$  l'ensemble des arêtes de  $\kappa_n$  qui ne sont pas incluses dans  $\Gamma$ ,
- $\Delta_{\kappa_n}$  l'union des éléments de  $\mathcal{T}_{nh}$  qui ont un sommet commun avec  $\kappa_n$ ,
- $\Delta_{e_n}$  l'union des éléments de  $\mathcal{T}_{nh}$  qui ont  $e_n$  comme arête,
- $h_{\kappa_n}$  le diamètre de  $\kappa_n$  et  $h_{e_n}$  le diamètre de l'arête  $e_n$ ,
- $[\cdot]_{e_n}$  le saut sur chaque arête  $e_n$  dans  $\varepsilon_{\kappa_n}$  (ce n'est pas nécessaire de préciser son signe)
- et  $\mathbf{n}_{\kappa_n}$  le vecteur unitaire normal sortant de  $\kappa_n$  sur  $\partial\kappa_n$ .

Pour la démonstration des théorèmes suivants, on définit pour un élément  $\kappa_n$  de  $\mathcal{T}_{nh}$ , la fonction bulle  $\psi_{\kappa_n}$  (resp.  $\psi_{e_n}$  pour  $e_n$ ) qui est égale au produit des coordonnées barycentriques associées de  $\kappa_n$  (resp. des 2 coordonnées barycentriques associées aux sommets de  $e_n$ ).

De plus, on considère  $\mathcal{L}_{e_n}$  l'opérateur de relèvement définie sur les polynômes sur  $e_n$  s'annulant sur  $\partial e_n$  en des polynômes sur les deux éléments  $\kappa_n$  et  $\kappa'_n$  contenant  $e_n$  s'annulant sur  $\partial(\kappa_n \cup \kappa'_n) \setminus e_n$ . Cet opérateur est réalisé par transformation affine à partir d'un opérateur fixe sur l'élément de référence.

On rappelle les propriétés suivantes de ([33], lemme 3.3) :

**Propriété 4.1.1** *On note par  $P_r(\kappa_n)$  l'espace des polynômes de degré plus petit ou égal à  $r$  sur  $\kappa_n$ . On a :*

$$\forall v \in P_r(\kappa_n), \quad \begin{cases} c\|v\|_{L^2(\kappa_n)} \leq \|v\psi_{\kappa_n}^{1/2}\|_{L^2(\kappa_n)} \leq c'\|v\|_{L^2(\kappa_n)}, \\ \|v\|_{H^1(\kappa_n)} \leq ch_{\kappa_n}^{-1}\|v\|_{L^2(\kappa_n)}. \end{cases} \quad (4.1)$$

**Propriété 4.1.2** *On note par  $P_r(e_n)$  l'espace des polynômes de degré plus petit ou égal à  $r$  sur  $e_n$ . On a :*

$$\forall v \in P_r(e_n), \quad c\|v\|_{L^2(e_n)} \leq \|v\psi_{e_n}^{1/2}\|_{L^2(e_n)} \leq c'\|v\|_{L^2(e_n)}$$

*et pour tout polynôme  $v$  dans  $P_r(e_n)$  s'annulant sur  $\partial e_n$ , si  $\kappa_n$  est un élément qui contient  $e_n$ ,*

$$\|\mathcal{L}_{e_n}v\|_{L^2(\kappa_n)} + h_{e_n} \| \mathcal{L}_{e_n}v \|_{H^1(\kappa_n)} \leq ch_{e_n}^{1/2}\|v\|_{L^2(e_n)}.$$

**Proposition 4.1.3**

$$\forall h_n \leq 1, \forall \mathbf{v} \in H^s(\Omega)^2, \|\mathbf{v} - \mathcal{F}_{nh}\mathbf{v}\|_{H^t(\Omega)^2} \leq Ch_n^{s-t} |\mathbf{v}|_{H^s(\Omega)^2},$$

où  $\mathcal{F}_{nh}$  est l'opérateur de Scott-Zhang associé à  $\mathcal{T}_{nh}$ ,  $C$  est une constante indépendante de  $h_n$ ,  $s$  et  $t$  sont des entiers tels que :  $s \in ]\frac{1}{2}, 1[$  et  $t \in [0, s]$  (voir [7]).

**Proposition 4.1.4**

$$\forall \mathbf{v} \in H^\ell(\Omega)^2, |\mathbf{v} - \mathcal{F}_{nh}\mathbf{v}|_{H^m(\Omega)^2} \leq Ch_n^{\ell-m} |\mathbf{v}|_{H^\ell(\Omega)^2},$$

où  $\mathcal{F}_{nh}$  est l'opérateur de Scott-Zhang associé à  $\mathcal{T}_{nh}$ ,  $C$  est une constante indépendante de  $h_n$ ,  $d = 2, 3$   $m$  et  $\ell$  sont des entiers tels que :  $m=0, 1$  et  $0 \leq m \leq \ell \leq 2$  (voir [30]).

De plus, on introduit l'opérateur de régularisation de Clément  $\mathcal{C}_{nh}$  [8] qui a les propriétés suivantes : (voir [4] section IX.3 BMR) : pour toute fonction  $\mathbf{w}$  dans  $H^1(\Omega)^2$ ,  $\mathcal{C}_{nh}\mathbf{w}$  appartient à l'espace des éléments finis affines et continus, vérifiant pour tout  $\kappa_n$  dans  $\mathcal{T}_{nh}$  et  $e_n$  dans  $\varepsilon_{\kappa_n}$  :

$$\|\mathbf{w} - \mathcal{C}_{nh}\mathbf{w}\|_{L^2(\kappa_n)^2} \leq ch_{\kappa_n} |\mathbf{w}|_{H^1(\Delta_{\kappa_n})^2} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{w} - \mathcal{C}_{nh}\mathbf{w}\|_{L^2(e_n)^2} \leq ch_{e_n}^{1/2} |\mathbf{w}|_{H^1(\Delta_{e_n}^2)}. \quad (4.2)$$

De plus, on aura les mêmes inégalités (4.2) pour  $\mathbf{w}$  dans  $X = H_0^1(\Omega)^2$  (Voir [8] et [4], section IX.3) Pour l'étude de l'erreur *a posteriori*, on considère la fonction affine par morceau  $\bar{\mathbf{u}}_h$  qui prend dans l'intervalle  $[t_{n-1}, t_n]$ , les valeurs :

$$\bar{\mathbf{u}}_h(t) = \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) + \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}. \quad (4.3)$$

On a alors

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}_h(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}). \quad (4.4)$$

Et la fonction constante par morceaux  $\bar{p}_h$  qui est égale à  $\bar{p}_h^n$  sur l'intervalle  $[t_{n-1}, t_n]$ . On démontre une estimation d'erreur *a posteriori*, en utilisant la norme :

$$\begin{aligned} [|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h|](t_n) &= \left( \|\mathbf{u}(t_n) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_n)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \nu \max \left( \int_0^{t_n} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 dt, \sum_{m=1}^n \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\mathbf{u}(t) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 dt \right) \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

où  $\pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h$  est la fonction escalier qui est constante et égale à  $\bar{\mathbf{u}}_h^n$  sur chaque intervalle  $[t_{n-1}, t_n]$ ,  $1 \leq n \leq N$ .

Pour pouvoir majorer les indicateurs, on a besoin d'une approximation polynomiale de  $\nu_t(\bar{\mathbf{u}})$ . Pour cela on l'approche par une constante dans chaque  $\kappa_n$ , définie pour tout  $\bar{\mathbf{v}} \in Z$  par :

$$\nu_{th}(\bar{\mathbf{v}})|_{\kappa_n} = \frac{1}{|\kappa_n|} \int_{\kappa_n} \nu_t(\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (4.6)$$

Pour prouver la borne supérieure, on suit l'idée utilisée par Bernardi et Verfürth [6] ou Bernardi et Sayah [5] afin de découpler les erreurs de temps et d'espace. On introduit un problème auxiliaire correspondant à la discrétisation en temps et on calcule une majoration d'erreur entre la solution du problème auxiliaire et la solution exacte, puis une majoration entre la solution du problème auxiliaire et la solution discrète. Finalement, en combinant les erreurs obtenues, on obtient la majoration d'erreur *a posteriori* désirée.

On introduit le problème semi-discret en temps suivant :

$$(P_{aux}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Ayant } \mathbf{u}^{n-1} \in X, \text{ chercher } (\mathbf{u}^n, p^n) \in X \times M \text{ solution de :} \\ \forall \mathbf{v} \in X, \quad \frac{1}{\tau_n} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{v}) + \nu (\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{u}^{n-1} \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) - (\text{div } \mathbf{v}, p^n) \\ \qquad \qquad \qquad = \langle \mathbf{f}^n, \mathbf{v} \rangle, \\ \forall q \in M, \quad (\text{div } \mathbf{u}^n, q) = 0. \end{array} \right.$$

**Lemme 4.1.5** *En supposant que  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ , le problème  $(P_{aux})$  admet une unique solution. De plus, on a :*

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \leq \frac{c^2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;X')}^2. \quad (4.7)$$

**Preuve :** Même preuve que la proposition 2.1.3 mais on a  $\mathbf{u}^n$  au lieu  $\mathbf{u}$  et  $p^n$  au lieu de  $p$ .

□

On rappelle la définition de la fonction affine par morceaux  $\mathbf{u}_\tau$  qui prend ses valeurs dans l'intervalle  $[t_{n-1}, t_n]$

$$\mathbf{u}_\tau(t) = \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) + \mathbf{u}^{n-1} = -\frac{t_n - t}{\tau_n} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) + \mathbf{u}^n, \quad (4.8)$$

Alors  $\frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial t} = \frac{1}{\tau_n} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})$ .

On définit  $p_\tau$  égale à  $p^n$  dans l'intervalle  $]t_{n-1}, t_n]$ .

**Lemme 4.1.6** *En combinant les problèmes  $(FV)$  et  $(P_{aux})$ , on observe que le couple  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\tau, p - p_\tau)$  vérifie que  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\tau)(0) = \mathbf{0}$  dans  $\Omega$ , et que pour  $1 \leq n \leq N$ , pour  $t$  dans  $]t_{n-1}, t_n]$ ,  $\forall \mathbf{v} \in X$  et  $\forall q(t) \in M$ ,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\tau)(t), \mathbf{v} \right) + \nu (\nabla (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\tau)(t), \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau(t), \mathbf{v}) \\ -(\operatorname{div} \mathbf{v}(t), p(t) - p_\tau(t)) = (\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}^n, \mathbf{v}) + \langle R^\tau(\mathbf{u}_\tau)(t), \mathbf{v} \rangle, \\ \int_{\Omega} q(t, \mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{u}_\tau(t, \mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = 0, \end{array} \right. \quad (4.9)$$

avec  $R^\tau(\mathbf{u}_\tau)$  est dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$  et est défini par

$$\langle R^\tau(\mathbf{u}_\tau)(t), \mathbf{v} \rangle = -\nu (\nabla (\mathbf{u}_\tau - \pi_\tau \mathbf{u}_\tau)(t), \nabla \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_\tau(t) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau(t) - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_\tau(t) \cdot \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_\tau(t), \mathbf{v}). \quad (4.10)$$

**Preuve :** Soit  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$ ,  $\forall 1 \leq n \leq N$  et soit  $(\mathbf{v}, q) \in (X, M)$ . On part du problème  $(FV)$  et on intercale  $\mathbf{u}_\tau$  dans les trois premiers termes et  $p_\tau$  dans le dernier terme de la première équation et on intercale  $\mathbf{u}_\tau$  dans la deuxième équation, on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\tau)(t), \mathbf{v} \right) + \nu (\nabla (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\tau)(t), \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau(t), \mathbf{v}) \\ -(\operatorname{div} \mathbf{v}, p(t) - p_\tau(t)) \\ = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}) - \left( \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_\tau)(t), \mathbf{v} \right) - \nu (\nabla \mathbf{u}_\tau(t), \nabla \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_\tau(t) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau(t), \mathbf{v}) \\ + (\operatorname{div} \mathbf{v}, p_\tau(t)). \\ \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{u}_\tau(t, \mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}_\tau(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{array} \right.$$

En utilisant la définition de  $\mathbf{u}_\tau$  et  $p_\tau$  et le système  $(P_{aux})$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\tau)(t), \mathbf{v} \right) + \nu (\nabla (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\tau)(t), \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau(t), \mathbf{v}) \\ - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p(t) - p_\tau(t)) \\ = (\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}^n, \mathbf{v}) - \nu (\nabla (\mathbf{u}_\tau - \pi_\tau \mathbf{u}_\tau)(t), \nabla \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_\tau(t) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau(t) - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_\tau(t) \cdot \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_\tau(t), \mathbf{v}) \\ \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \operatorname{div} (\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{u}_\tau(t, \mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = 0. \end{array} \right.$$

En utilisant (4.10) on obtient (4.9). □

**Lemme 4.1.7** Pour  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$ , l'égalité(4.10) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \langle R^\tau(\bar{\mathbf{u}}_\tau)(t), \mathbf{v} \rangle &= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \nu \int_{\kappa_n} \frac{t_n - t}{\tau_n} \nabla (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})(\mathbf{x}) : \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\kappa_n} (\mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{u}^n(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\} \\ &= \frac{t_n - t}{\tau_n} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \nu \int_{\kappa_n} \nabla (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})(\mathbf{x}) : \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\kappa_n} (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \mathbf{v}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} \right\} \\ &\quad - \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

**Preuve :** On a pour  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$

$$\begin{aligned} \pi_\tau \mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_\tau &= \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_\tau \\ &= \mathbf{u}^n - \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) - \mathbf{u}^{n-1} \\ &= \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1} - \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \\ &= \frac{\tau_n + t_{n-1} - t}{\tau_n} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \\ &= \frac{t_n - t}{\tau_n} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

et on a  $\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_\tau = \mathbf{u}^{n-1}$ .

En remplaçant les égalités ci-dessus dans (4.10), on obtient

$$\begin{aligned} \langle R^\tau(\mathbf{u}_\tau)(t), \mathbf{v} \rangle &= \nu \left( \frac{t_n - t}{\tau_n} \nabla (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}), \nabla \mathbf{v} \right) - (\mathbf{u}_\tau(t) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau(t) - \mathbf{u}^{n-1}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}^n(t), \mathbf{v}) \\ &= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \nu \int_{\kappa_n} \frac{t_n - t}{\tau_n} \nabla (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})(\mathbf{x}) : \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\kappa_n} (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_\tau(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau(t, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\}. \end{aligned}$$



En utilisant le fait que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_\tau \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau &= \mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_\tau) + (\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau + (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_\tau) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau \\
&= \frac{t_n - t}{\tau_n} \mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) + (\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau \\
&\quad + \frac{t_n - t}{\tau_n} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau \\
&= \frac{t_n - t}{\tau_n} \mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) + (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \left( -\frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \right) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau,
\end{aligned}$$

on obtient le résultat.  $\square$

Pour trouver une estimation *a posteriori* entre la solution  $\mathbf{u}$  du problème (FV) et la solution  $\bar{\mathbf{u}}_h$  correspondante aux solutions  $\bar{\mathbf{u}}_h^n$  de  $(F\bar{V}_{n,h})$ , il est suffisant d'obtenir une estimation *a posteriori* entre la solution  $\mathbf{u}_\tau$  du problème  $(P_{aux})$  et la solution  $\bar{\mathbf{u}}_h$ , et on applique une inégalité triangulaire en utilisant le théorème précédent.

**Lemme 4.1.8** *Pour tout  $\mathbf{v} \in X$  et  $\mathbf{v}_h \in X_{nh}$ , on a :*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau_n} ((\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) - (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}), \mathbf{v}) + \nu (\nabla (\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n), \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}) \\
&- \frac{1}{2} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p^n - \bar{p}_h^n) \\
&= \langle \mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n + R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle + \langle R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n, \mathbf{v}_h \rangle
\end{aligned} \tag{4.13}$$

et

$$\int_{\Omega} q(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} (\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} q(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} (\bar{\mathbf{u}}_h^n)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

où  $\bar{\mathbf{f}}_h^n(t)$  est une approximation de  $\bar{\mathbf{f}}^n$  dans  $Z_{nh}$ , les résidus  $R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)$  et  $R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)$  sont dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$  et sont définis par :

$$\begin{aligned}
\langle R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle &= (\bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + (\operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h), \bar{p}_h^n) \\
&\quad - (\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}(t) \bar{\mathbf{u}}_h^n(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \\
&\quad - \nu (\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n, \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)) - (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)) \\
&\quad - ((\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\langle R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} \rangle = (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v})) \tag{4.15}$$

**Preuve :** On effectue la différence entre les premières équations des problèmes  $(P_{aux})$  et  $(F\bar{V}_{n,h})$  et on

intercale les termes  $\langle \bar{\mathbf{f}}_h^n, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle$  et  $\langle \mathbf{f}^n, \mathbf{v}_h \rangle$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle + \langle \mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n, \mathbf{v}_h \rangle \\
&= \frac{1}{\tau_n} ((\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}), \mathbf{v}) - \frac{1}{\tau_n} ((\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}), \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \mathbf{v}) \\
&\quad - \nu(\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n, \nabla \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) - (\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}_h) - \frac{1}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}_h) \\
&\quad - (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v}_h)) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p^n) + (\operatorname{div} \mathbf{v}_h, \bar{p}_h^n) - \langle \bar{\mathbf{f}}_h^n, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle.
\end{aligned}$$

On additionne cette équation avec (4.14) et (4.15) pour obtenir la première égalité de (4.13).

On intercale  $\bar{\mathbf{u}}_h^n$  dans la deuxième équation de  $(P_{aux})$  pour obtenir la deuxième équation.  $\square$

**Lemme 4.1.9** *L'égalité (4.14) peut être écrite sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned}
& \langle R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle \\
&= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (\bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n - \nabla \bar{p}_h^n)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_h(\mathbf{x})) dx \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \varepsilon_{\kappa_n}} \int_{e_n} [(\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) - \bar{p}_h^n \mathbb{I})(\sigma) \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{v}(t, \sigma) - \mathbf{v}_h(\sigma)) d\sigma \right\} \\
&\quad - \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) : \mathbb{D}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) dx.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

où  $\sigma$  désigne les coordonnées tangentielles sur  $e$ .

**Preuve :** En intégrant par parties le deuxième, le cinquième et le sixième termes du membre droit de

l'égalité (4.14), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \langle R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle \\
&= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (\bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}))(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_h(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right. \\
&\quad - \int_{\kappa_n} \nabla \bar{p}_h^n(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_h(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_{\partial\kappa_n} \bar{p}_h^n \mathbf{n}(\sigma) \cdot (\mathbf{v}(\sigma) - \mathbf{v}_h(\sigma)) d\sigma \\
&\quad - \int_{\kappa_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{v}_h(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\kappa_n} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_h(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\
&\quad + \nu \int_{\kappa_n} \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_h(\mathbf{x})) d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial\kappa_n} (\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n) \cdot \mathbf{n}(\sigma) \cdot (\mathbf{v}(\sigma) - \mathbf{v}_h(\sigma)) d\sigma \\
&\quad + \int_{\kappa_n} (\nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n))) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_h(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\
&\quad - \int_{\partial\kappa_n} ((\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) \cdot \mathbf{n})(\sigma) \cdot (\mathbf{v}(\sigma) - \mathbf{v}_h(\sigma)) d\sigma \\
&\quad \left. - \int_{\kappa_n} ((\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) \cdot \mathbb{D}(\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_h(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right\} \\
&= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (\bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \right. \\
&\quad \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n - \nabla \bar{p}_h^n)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_h(\mathbf{x})) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_\kappa} \int_{e_n} [(\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) - \bar{p}_h^n \mathbb{I}) \\
&\quad \cdot \mathbf{n}(\sigma)] \cdot (\mathbf{v}(\sigma) - \mathbf{v}_h(\sigma)) d\sigma - \int_{\kappa_n} ((\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) : \mathbb{D}(\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_h(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \left. \right\}.
\end{aligned}$$

□

**Lemme 4.1.10** *L'égalité (4.15) peut être écrite sous la forme suivante :*

$$\langle R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} \rangle = \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{\kappa_n} (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) : \mathbb{D}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))) d\mathbf{x}.$$

**Preuve :** L'égalité (4.15) est écrite sous forme d'intégrale. □ Tout ce travail aboutit à la définition des indicateurs d'erreurs suivants :

**Définition 4.1.11** *Pour chaque  $\kappa_n$  dans  $\mathcal{T}_{nh}$ ,*

$$(\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 = \tau_n |\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}|_{H^1(\kappa_n)}^2, \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
(\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 &= h_{\kappa_n}^2 \left\| \bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n - \nabla \bar{p}_h^n \right\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa_n}} h_{e_n} \left\| [(\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) \right. \\
&\quad \left. - \bar{p}_h^n \mathbb{I}) \cdot \mathbf{n}] \right\|_{L^2(e_n)}^2 + \left\| \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \left\| (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) \right\|_{L^2(\kappa_n)}^2.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 = \left\| \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) \right\|_{L^2(\kappa_n)}^2. \tag{4.19}$$

**Remarque 4.1.12**

- Même si ces indicateurs sont un peu compliqués, chaque terme est calculé facilement puisqu'il dépend uniquement de la solution discrète.
- Bien que le dernier terme de (4.18) est identique celui de (4.19), on préfère les garder tels qu'ils sont au lieu de les séparer en un troisième indicateur et ceci pour la facilité du calcul dans la suite.

**Lemme 4.1.13** On a les estimations suivantes pour tout  $1 \leq n \leq N$ ,

1. Pour tout  $\mathbf{v} \in X$  et  $\mathbf{v}_h = \mathcal{C}_{nh}\mathbf{v}$  :

$$|\langle R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle| \leq C \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_X. \quad (4.20)$$

2. Pour tout  $\mathbf{v} \in X$  :

$$|\langle R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h), \mathbf{v} \rangle| \leq C \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_X. \quad (4.21)$$

**Preuve :**

1. En appliquant Cauchy-Schwarz dans (4.16), on aura :

$$\begin{aligned} & |\langle R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle| \\ & \leq \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \left\| \bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \right. \\ & \quad - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n - \nabla \bar{p}_h^n \|_{L^2(\kappa_n)^2} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(\kappa_n)^2} \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa_n}} \left\| [(\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) - \bar{p}_h^n \mathbb{I}) \mathbf{n}] \right\|_{L^2(e_n)^2} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(e_n)^2} \\ & \quad \left. + \|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)^{2 \times 2}} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_h|_{H^1(\kappa_n)^2} \right\}. \end{aligned}$$

On choisit  $\mathbf{v}_h = \mathcal{C}_{nh}\mathbf{v}$  et on utilise (4.2), pour avoir :

$$\begin{aligned} & |\langle R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle| \\ & \leq \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ c_1 h_{\kappa_n} \left\| \bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \right. \\ & \quad - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n - \nabla \bar{p}_h^n \|_{L^2(\kappa_n)^2} |\mathbf{v}|_{H^1(\Delta \kappa_n)^2} \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa_n}} c_2 h_{e_n}^{1/2} \left\| [(\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) - \bar{p}_h^n \mathbb{I}) \cdot \mathbf{n}] \right\|_{L^2(e_n)^2} |\mathbf{v}|_{H^1(\Delta e_n)^2} \\ & \quad \left. + (1 + c_3) \|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)^{2 \times 2}} |\mathbf{v}|_{H^1(\kappa_n)^2} \right\}, \end{aligned}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes indépendantes de  $h$  et en utilisant le fait que :  $|\mathbf{v}|_{1,\Delta e_n} \leq |\mathbf{v}|_{1,\Delta \kappa_n}$  et  $|\mathbf{v}|_{1,\kappa_n} \leq |\mathbf{v}|_{1,\Delta e_n}$ . En utilisant l'inégalité :

$$\begin{aligned} \sum (a + c + e)(b) & \leq \left( (\sum a^2)^{1/2} + (\sum c^2)^{1/2} + (\sum e^2)^{1/2} \right) \left( \sum b^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C_1 \left( \sum (a^2 + c^2 + e^2) \right)^{1/2} \left( \sum b^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

et l'égalité (4.18), on obtient :

$$|\langle R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle| \leq \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} |\mathbf{v}|_{H^1(\Delta_{\kappa_n})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite

$$|\langle R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle| \leq C \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_X.$$

Alors, on obtient (4.20).

2. En appliquant Cauchy-Schwarz dans (4.15), on aura :

$$|\langle R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h), \mathbf{v} \rangle| \leq \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n))\|_{L^2(\kappa_n)^{2 \times 2}} \|\mathbb{D}(\mathbf{v})\|_{L^2(\kappa_n)}.$$

En utilisant la définition (4.19), on obtient :

$$|\langle R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h), \mathbf{v} \rangle| \leq \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} c_7 |\mathbf{v}|_{H^1(\kappa_n)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite

$$|\langle R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h), \mathbf{v} \rangle| \leq C \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_X.$$

□

## 4.2 Les majorations d'erreur *a posteriori*

**Lemme 4.2.1** (Lemme de Gronwall) [34, page 292] ou [9, page 252] Soit :

1.  $f, g$  et  $k$ , fonctions intégrables et définies de  $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ ,
2.  $g \geq 0, k \geq 0$ ,
3.  $g \in \mathcal{L}_\infty$ ,
4.  $gk$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

Si  $u : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$  satisfait

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_0^t k(\tau) u(\tau) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.22)$$

alors on a :

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_0^t k(\tau) f(\tau) \exp\left(\int_\tau^t k(s) g(s) ds\right) d\tau. \quad (4.23)$$

**Lemme 4.2.2** (Lemme de Gronwall discret) [9, page 254] Soit  $(y_n)_n, (f_n)_n$  et  $(g_n)_n$  trois suites positives qui vérifient :

$$\forall n \geq 0, \quad y_n \leq f_n + \sum_{k=0}^{n-1} g_k y_k.$$

Alors on a :

$$\forall n \geq 0, \quad y_n \leq f_n + \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_k \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 + g_j), \quad (4.24)$$

et

$$\forall n \geq 0, \quad y_n \leq f_n + \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_k \exp\left(\sum_{j=k}^{n-1} g_j\right). \quad (4.25)$$

**Preuve :** On va démontrer par récurrence (4.24) et déduire immédiatement (4.25) en utilisant l'inégalité suivante :

$$\prod_{j=k+1}^{n-1} (1 + g_j) \leq \exp \left( \sum_{j=k}^{n-1} g_j \right).$$

Pour  $n = 0$ , (4.24) est vérifiée. Supposons qu'elle reste vraie jusqu'au rang  $n$  et démontrons pour  $n + 1$ . En effet,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &\leq f_{n+1} + \sum_{k=0}^n g_k y_k \\ &\leq f_{n+1} + \sum_{k=0}^n g_k \left( f_k + \sum_{i=0}^{k-1} f_i g_i \prod_{j=i+1}^{k-1} (1 + g_j) \right) \\ &\leq f_{n+1} + \sum_{k=0}^n g_k f_k + \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{k-1} g_k f_i g_i \prod_{j=i+1}^{k-1} (1 + g_j) \\ &\leq f_{n+1} + \sum_{k=0}^n g_k f_k + \sum_{i=0}^n \sum_{k=i+1}^n g_k f_i g_i \prod_{j=i+1}^{k-1} (1 + g_j) \\ &\leq f_{n+1} + \sum_{k=0}^n g_k f_k + \sum_{k=0}^n f_k g_k \sum_{i=k+1}^n g_i \prod_{j=k+1}^{i-1} (1 + g_j) \\ &\leq f_{n+1} + \sum_{k=0}^n g_k f_k \left( 1 + \sum_{i=k+1}^n g_i \prod_{j=k+1}^{i-1} (1 + g_j) \right). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=k+1}^n g_i \prod_{j=k+1}^{i-1} (1 + g_j) &= 1 + g_{k+1} + g_{k+2}(1 + g_{k+1}) + \dots + g_n(1 + g_{k+1}) \dots (1 + g_{n-1}) \\ &= (1 + g_{k+1}) \left( 1 + g_{k+2} + \dots + g_n(1 + g_{k+2}) \dots (1 + g_{n-1}) \right) \\ &= \dots \\ &= \prod_{j=k+1}^n (1 + g_j). \end{aligned}$$

Donc on aura :

$$y_{n+1} \leq f_{n+1} + \sum_{k=0}^n g_k f_k \exp \left( \sum_{i=k}^n g_i \right).$$

□

**Théorème 4.2.3** *On suppose que  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^3(\Omega)^2)$ . Il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle qu'on ait la majoration d'erreur a posteriori suivante entre la vitesse  $\mathbf{u}$  du problème (FV) et la vitesse  $\mathbf{u}_\tau$  associée à la solution  $(\mathbf{u}^n)_{0 \leq n \leq N}$  du problème  $(P_{aux})$  : pour  $1 \leq m \leq N$ ,*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}(t_m) - \mathbf{u}_\tau(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\tau(s)\|_X^2 ds \\ &\leq C \left( \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0, t_m; X')}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{m, \kappa_n}^\tau)^2 \right). \end{aligned}$$

**Preuve :**

Soit  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$ ,  $\forall 1 \leq n \leq N$ . En prenant  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_\tau$  et  $q = p - p_\tau$  dans (4.9) et en effectuant la différence entre les deux équations du système, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \|\mathbf{v}(t)\|_X^2 &= (\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}^n, \mathbf{v}(t)) + \langle R^\tau(\mathbf{u}_\tau)(t), \mathbf{v}(t) \rangle \\ &\quad - (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) - (\mathbf{u}_\tau(t) \cdot \nabla \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t)). \end{aligned} \quad (4.26)$$

On va chercher à majorer le côté droit de l'équation (4.26). Le dernier terme est nul et le troisième peut être majoré en utilisant (3.9) et (3.8) par :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) &\leq \|\mathbf{u}(t)\|_X \|\mathbf{v}(t)\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \\ &\leq \sqrt{2} \|\mathbf{u}(t)\|_X \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{v}(t)\|_X. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité :  $(2ab) \leq a^2 + b^2$ , on a

$$(\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) \leq \frac{2}{\nu} \|\mathbf{u}(t)\|_X^2 \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{\nu}{4} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2.$$

On majore de la même façon le terme  $(\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}^n, \mathbf{v}(t))$  par :

$$(\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}^n, \mathbf{v}(t)) \leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{f}(t) - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{X'}^2 + \frac{\nu}{4} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2.$$

Par ailleurs, d'après l'équation (4.11), le terme résiduel dans la partie droite de l'équation (4.26) peut être délimité de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \langle R^\tau(\mathbf{u}_\tau)(t), \mathbf{v} \rangle &= \frac{t_n - t}{\tau_n} \left\{ \nu \int_\Omega \nabla(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})(\mathbf{x}) : \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_\Omega (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \, d\mathbf{x} \right\} \\ &\quad - \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \left\{ \int_\Omega (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_\tau(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\} \\ &= T_1 + T_2 + T_3, \end{aligned}$$

$$\text{Avec } T_1 = \frac{t_n - t}{\tau_n} \nu \int_\Omega \nabla(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})(\mathbf{x}) : \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$T_2 = \frac{t_n - t}{\tau_n} \int_\Omega \mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \, d\mathbf{x}$$

$$\text{et } T_3 = -\frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \int_\Omega (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_\tau(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

On multiplie et on divise par  $\tau_n^{1/2}$  pour majorer  $T_1$  de la forme suivante :

$$|T_1| \leq \frac{t_n - t}{\tau_n^{3/2}} \nu \tau_n^{1/2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X \|\mathbf{v}\|_X.$$

En utilisant le fait que  $ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$ , on obtient :

$$|T_1| \leq \left( \frac{t_n - t}{\tau_n^{3/2}} \right)^2 \nu^2 \frac{\varepsilon_1}{2} \tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\mathbf{v}\|_X^2.$$

Avant de majorer  $T_2$ , on intercale  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  de la forme suivante :

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{t_n - t}{\tau_n} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) \cdot \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \frac{t_n - t}{\tau_n} \int_{\Omega} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) d\mathbf{x} \\ &= T_{2,1} + T_{2,2}. \end{aligned}$$

En intercalant  $\mathbf{u}_\tau$ , on décompose  $T_{2,1}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} T_{2,1} &= \frac{t_n - t}{\tau_n} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}_\tau(t, \mathbf{x})) \cdot \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \frac{t_n - t}{\tau_n} \int_{\Omega} (\mathbf{u}_\tau(t, \mathbf{x}) - \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) \cdot \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) d\mathbf{x} \\ &= T_{2,1}^1 + T_{2,1}^2. \end{aligned}$$

En utilisant que  $\mathbf{u}_\tau = \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) + \mathbf{u}^{n-1}$ , et que  $|\frac{t - t_{n-1}}{\tau_n}| \leq 1$  et on multiplie et on divise par  $\tau_n^{1/2}$  alors, on a :

$$|T_{2,1}^1| \leq \left| \frac{t_n - t}{\tau_n} \right| \tau_n^{1/2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{v}\|_X \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2}.$$

En utilisant le fait que  $ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$ , on obtient :

$$|T_{2,1}^1| \leq \left| \frac{t_n - t}{\tau_n} \right|^2 \frac{\varepsilon_2}{2} \tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2}^4 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\mathbf{v}\|_X^2.$$

On utilise (3.6) pour  $p = 4$ , on obtient

$$|T_{2,1}^1| \leq \left| \frac{t_n - t}{\tau_n} \right|^2 \varepsilon_2 \tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\mathbf{v}\|_X^2.$$

Or

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq 2(\|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\mathbf{u}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2).$$

D'après le lemme 4.1.5, on a :

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq c.$$

Donc, on a :

$$|T_{2,1}^1| \leq \left| \frac{t_n - t}{\tau_n} \right|^2 c \varepsilon_2 \tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\mathbf{v}\|_X^2.$$

D'autre part :

$$|T_{2,1}^2| \leq \left| \frac{t_n - t}{\tau_n} \right| \tau_n^{1/2} \|\mathbf{u}_\tau(t) - \mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{v}\|_X \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2}.$$

En utilisant le fait que  $ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$ , on obtient :

$$|T_{2,1}^2| \leq \left| \frac{t_n - t}{\tau_n} \right|^2 \frac{\varepsilon_3}{2} \tau_n \|\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} \|\mathbf{v}\|_X^2.$$

Or,

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \\ &\leq 2\|\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}(t)\|_X \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X. \end{aligned}$$



En utilisant la proposition 2.1.3 et le lemme 4.1.5, on obtient :

$$\|\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \leq 2c_1 \|\mathbf{v}\|_X \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X.$$

En utilisant le fait que  $ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$  et en sommant sur  $\kappa_n$ , on obtient :

$$\|\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon_4} \|\mathbf{v}\|_X^2 + 2c_1^2 \varepsilon_4 \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2.$$

On déduit que :

$$|T_{2,1}^2| \leq \left| \frac{t_n - t}{\tau_n^{3/2}} \right|^2 \tau_n c_1^2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} \|\mathbf{v}\|_X^2 + \frac{\varepsilon_3}{4\varepsilon_4} \|\mathbf{v}\|_X^2.$$

D'où :

$$\begin{aligned} |T_{2,1}| &\leq \left| \frac{t_n - t}{\tau_n^{3/2}} \right|^2 (c\varepsilon_2 + c_1^2 \varepsilon_3 \varepsilon_4) \tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\mathbf{v}\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} \|\mathbf{v}\|_X^2 + \frac{\varepsilon_3}{4\varepsilon_4} \|\mathbf{v}\|_X^2. \end{aligned}$$

Maintenant on majore  $|T_{2,2}|$  en prenant en considération que  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T, L^3(\Omega))$

$$\begin{aligned} |T_{2,2}| &\leq \left| \frac{t_n - t}{\tau_n^{3/2}} \right| \tau_n^{1/2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^3(\Omega)^2} \|\mathbf{v}\|_X \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^6(\Omega)^2} \\ &\leq \left| \frac{t_n - t}{\tau_n^{3/2}} \right|^2 \frac{c_2 \varepsilon_5}{2} \tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_5} \|\mathbf{v}\|_X^2. \end{aligned}$$

D'où  $|T_2|$  est majoré de la façon suivante :

$$\begin{aligned} |T_2| &\leq \left| \frac{t_n - t}{\tau_n^{3/2}} \right|^2 (c\varepsilon_2 + c_1^2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 + \frac{c_2 \varepsilon_5}{2}) \tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\mathbf{v}\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} \|\mathbf{v}\|_X^2 + \frac{\varepsilon_3}{4\varepsilon_4} \|\mathbf{v}\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_5} \|\mathbf{v}\|_X^2. \end{aligned}$$

Avant de majorer  $|T_3|$ , on va le décomposer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} |T_3| &= \left| \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \right| \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}_\tau(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\leq \left| \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \right| \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) (\mathbf{u}_\tau(t, \mathbf{x}) - \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \left| \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \right| \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$  et en prenant en considération que  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T, L^3(\Omega))$  et on multiplie et on divise par  $\tau_n^{1/2}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |T_3| &\leq \left| \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \right| \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\leq c_4 \left| \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \right| \|\mathbf{u}\|_{L^3(\Omega)^2} \|\mathbf{v}\|_X \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^6(\Omega)^2} \\ &\leq c_5 \left| \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n^{3/2}} \right| \tau_n^{1/2} \|\mathbf{v}\|_X \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^6(\Omega)^2} \\ &\leq \left| \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n^{3/2}} \right|^2 \frac{c_5 \varepsilon_6}{2} \tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_6} \|\mathbf{v}\|_X^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\langle R^\tau(\mathbf{u}_\tau)(t), \mathbf{v}(t) \rangle &\leq \left| \frac{t_n - t}{\tau_n^{3/2}} \right|^2 \left( \nu^2 \frac{\varepsilon_1}{2} + c\varepsilon_2 + c_1^2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 + \frac{c_2 \varepsilon_5}{2} \right) \tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 \\
&+ \left| \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n^{3/2}} \right|^2 \frac{c_5 \varepsilon_6}{2} \tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 \\
&+ \left( \frac{1}{2\varepsilon_1} + \frac{1}{2\varepsilon_2} + \frac{1}{2\varepsilon_3} + \frac{\varepsilon_3}{4\varepsilon_4} + \frac{1}{2\varepsilon_5} + \frac{1}{2\varepsilon_6} \right) \|\mathbf{v}\|_X^2.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

On cherche les  $\varepsilon_i, i = \{1, \dots, 6\}$  de sorte qu'ils s'annulent avec le terme  $\frac{\nu}{8} \|\mathbf{v}\|_X^2$ .

Pour cela on prend :  $\varepsilon_i = \frac{24}{\nu}, i = \{1, 2, 3, 5, 6\}$  et  $\varepsilon_4 = \frac{288}{\nu^2}$ . Ainsi, on intègre l'équation (4.26) entre 0 et  $t$ , et on utilise les majorations précédentes pour obtenir

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|_X^2 ds &\leq C_1 \left( \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t;X')}^2 + \|\pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}\|_{L^2(0,t,X)}^2 \right) \\
&+ \int_0^t \frac{2}{\nu} \|\mathbf{u}(\tau)\|_X^2 \|\mathbf{v}(\tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall (4.2.1) avec les fonctions données de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
u(t) &= \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|_X^2 ds \\
f(t) &= C_1 \left( \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t;X')}^2 + \|\pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}\|_{L^2(0,t,X)}^2 \right) \\
g(t) &= 1 \\
K(\tau) &= \frac{2}{\nu} \|\mathbf{u}(\tau)\|_X^2.
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_\tau(\tau)\|_X^2 d\tau \\
\leq C_1 \left( \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t;X')}^2 + \|\pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}\|_{L^2(0,t,X)}^2 \right) \\
+ \int_0^t f(\tau) \frac{2}{\nu} \|\mathbf{u}\|_X^2 \exp \left( \int_\tau^t \frac{2}{\nu} \|\mathbf{u}(s)\|_X^2 ds \right) d\tau.
\end{aligned}$$

On utilise le fait que pour chaque  $\tau \leq t$ ,  $f(\tau) \leq f(t)$  et on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_\tau(\tau)\|_X^2 d\tau \\
\leq C_1 \left( \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t;X')}^2 + \|\pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}\|_{L^2(0,t,X)}^2 \right) \\
+ C_1' f(t) \exp \left( \int_0^T \|\mathbf{u}(s)\|_X^2 ds \right) \int_0^t \|\mathbf{u}\|_X^2 d\tau.
\end{aligned}$$

On utilise la proposition 2.1.3 pour majorer les termes  $\exp \int_0^T \|\mathbf{u}(s)\|_X^2 ds$  et  $\int_0^t \|\mathbf{u}\|_X^2 d\tau$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_\tau(\tau)\|_X^2 d\tau \\
\leq C_2 \left( \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t;X')}^2 + \|\pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}\|_{L^2(0,t,X)}^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

On applique (4.28) pour  $t = t_m$  et on obtient :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}(t_m) - \mathbf{u}_\tau(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_\tau(\tau)\|_X^2 d\tau \\ & \leq C_2 \left( \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X \leq \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X + \|\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X + \|\mathbf{u}^{n-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X.$$

En utilisant l'inégalité  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ , on a :

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 \leq 3(\|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 + \|\mathbf{u}^{n-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2).$$

On multiplie par  $\tau_n$  et en utilisant (4.17) et la propriété  $\tau_n \leq \sigma_\tau \tau_{n-1}$ , on obtient :

$$\tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 \leq 3(\tau_n \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 + \sigma_\tau \tau_{n-1} \|\mathbf{u}^{n-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2).$$

En sommant sur  $n = 1, \dots, m$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 & \leq 3 \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 + 3 \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 \\ & \quad + 3 \sum_{n=1}^m \sigma_\tau \tau_{n-1} \|\mathbf{u}^{n-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 \\ & \leq C_3 \left( \sum_{n=1}^m \tau_n (\|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2) \right), \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

Avant de trouver une estimation *a posteriori* entre la solution  $\mathbf{u}_\tau$  du problème  $(P_{aux})$  et la solution  $\bar{\mathbf{u}}_h$ , un lemme supplémentaire est nécessaire pour gérer le membre de droite de l'égalité (4.13). Soit  $\Pi$  l'opérateur de Stokes défini de  $X$  dans lui même comme suit :  $\forall \mathbf{v} \in X$ ,  $\Pi \mathbf{v}$  est la vitesse  $\mathbf{w}$  qui est la composante vitesse de l'unique solution faible  $(\mathbf{w}, r) \in X \times M$  du problème de Stokes.

$$\begin{cases} \forall \mathbf{t} \in X, & (\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{t}) - (\operatorname{div} \mathbf{t}, r) = 0, \\ \forall q \in M, & (\operatorname{div} \mathbf{w}, q) = (\operatorname{div} \mathbf{v}, q). \end{cases} \quad (4.30)$$

Le lemme suivant cite quelques propriétés de l'opérateur  $\Pi$ .

**Lemme 4.2.4** *L'opérateur  $\Pi$  a les propriétés suivantes :*

1.  $\forall \mathbf{v} \in V$ ,  $\Pi \mathbf{v}$  est nul,
2.  $\forall \mathbf{v} \in X$ , on a les estimations suivantes :

$$\|\mathbf{v} - \Pi \mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega)^2} \leq \|\mathbf{v}\|_X \quad \text{et} \quad \|\Pi \mathbf{v}\|_X \leq \frac{1}{\beta_*} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}.$$

3.  $\forall \mathbf{v}_h \in V_{nh}$  et  $1 \leq n \leq N$ , on a :

$$\|\Pi \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^2} \leq ch_n^{1/2} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Preuve :**

Les preuves de 1. et 2. se trouvent dans [6] ou [5].

Pour trouver la dernière estimation, pour tout  $\mathbf{v}_h \in V_{nh}$ , on introduit l'argument de dualité suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{z} + \nabla \rho = \Pi \mathbf{v}_h & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{z} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{z} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.31)$$

Ce problème admet une unique solution  $(\mathbf{z}, \rho) \in H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)^2 \times H^{1/2+\varepsilon}(\Omega)$  pour un certain  $\varepsilon$  où  $0 < \varepsilon < 1/2$ . De plus, cette solution vérifie la relation suivante :

$$\|\mathbf{z}\|_{H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)^2} + \|\rho\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\Omega)} \leq c \|\Pi \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^2}. \quad (4.32)$$

En combinant les deux derniers problèmes (4.30) et (4.31), on a :

$$\|\Pi \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^2}^2 = (\Pi \mathbf{v}_h, \Pi \mathbf{v}_h) = (\nabla \mathbf{z}, \nabla (\Pi \mathbf{v}_h)) - (\operatorname{div} \Pi \mathbf{v}_h, \rho) = (\operatorname{div} \mathbf{z}, r) - (\operatorname{div} \Pi \mathbf{v}_h, \rho).$$

Comme  $\operatorname{div} \mathbf{z}$  est nulle et  $\operatorname{div} \Pi \mathbf{v}_h$  est égale à  $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$ , on a donc :

$$\|\Pi \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^2}^2 = -(\operatorname{div} \mathbf{v}_h, \rho).$$

En utilisant la définition de  $V_{nh}$  et  $\forall \rho_h \in M_{nh}$ ,

$$\|\Pi \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^2}^2 = -(\operatorname{div} \mathbf{v}_h, \rho - \rho_h) \leq \|\operatorname{div} \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)} \|\rho - \rho_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Or, en prenant  $\rho_h = F_h \rho$ ,  $t = 0$  et  $s = \frac{1}{2} + \varepsilon$  dans la proposition 4.1.3, on aura :

$$\begin{aligned} \forall \rho \in H^{1/2+\varepsilon}(\Omega), \|\rho - \rho_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq C' h_n^{1/2+\varepsilon} |\rho|_{H^{1/2+\varepsilon}(\Omega)} \\ &\leq C h_n^{1/2} |\rho|_{H^{1/2+\varepsilon}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la relation (4.32) et l'inégalité 2., on aura le résultat.  $\square$

On est maintenant dans la position de prouver une estimation *a posteriori* entre la solution  $\mathbf{u}_\tau$  du problème  $(P_{aux})$  et la solution  $\mathbf{u}_h$  du problème  $(\overline{FV}_{n,h})$ .

**Théorème 4.2.5** *On suppose que  $h_n \leq C_s \tau_n$ ,  $\forall n = 1, \dots, m$  et  $m \in \{1, \dots, N\}$ . On a l'estimation d'erreur a posteriori entre les solutions  $\mathbf{u}^m$  et  $\bar{\mathbf{u}}_h^m$  du problème  $(P_{aux})$  et  $(\overline{FV}_{n,h})$*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}^m - \bar{\mathbf{u}}_h^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 \\ &\leq c \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2) \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

**Preuve :** Pour l'abréviation on note :

$$\mathbf{e}^n = \mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n, \quad 1 \leq n \leq m \quad \text{et} \quad \varepsilon^n = p^n - \bar{p}_h^n, \quad 1 \leq n \leq m.$$

Pour tout  $n, 1 \leq n \leq m$ , on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \\ & = (\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}, \mathbf{e}^n) + \nu \tau_n (\nabla \mathbf{e}^n, \nabla \mathbf{e}^n). \end{aligned} \quad (4.34)$$

En intercalant  $\Pi \mathbf{e}^n$  dans les deux termes du second membre de la dernière équation et en remarquant que  $\operatorname{div}(\mathbf{e}^n - \Pi \mathbf{e}^n) = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}, \mathbf{e}^n) + \nu \tau_n (\nabla \mathbf{e}^n, \nabla \mathbf{e}^n) = (\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}, \Pi \mathbf{e}^n) + \nu \tau_n (\nabla \mathbf{e}^n, \nabla (\Pi \mathbf{e}^n)) \\ & + (\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}, \mathbf{e}^n - \Pi \mathbf{e}^n) + \nu \tau_n (\nabla \mathbf{e}^n, \nabla (\mathbf{e}^n - \Pi \mathbf{e}^n)) - \tau_n (\operatorname{div}(\mathbf{e}^n - \Pi \mathbf{e}^n), \varepsilon^n). \end{aligned} \quad (4.35)$$

En remplaçant  $\mathbf{v}$  par  $\mathbf{e}^n - \Pi \mathbf{e}^n$  dans l'équation (4.13), on aura pour tout  $\mathbf{v}_h \in X_{nh}$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}, \mathbf{e}^n) + \nu \tau_n (\nabla \mathbf{e}^n, \nabla \mathbf{e}^n) = (\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}, \Pi \mathbf{e}^n) + \nu \tau_n (\nabla \mathbf{e}^n, \nabla (\Pi \mathbf{e}^n)) \\ & + \tau_n \langle \mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle + \tau_n \langle \mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n, \mathbf{v}_h \rangle + \tau_n \langle R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle + \tau_n \langle R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} \rangle \\ & - \tau_n (\mathbf{u}^{n-1} \nabla \mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \tau_n (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Maintenant, on majore tous les termes du second membre de (4.36) en utilisant l'inégalité  $ab \leq \frac{1}{4}a^2 + b^2$  et  $ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$ . En prenant en considération que  $\Pi \mathbf{e}^n = -\Pi \bar{\mathbf{u}}_h^n$  car  $\Pi \mathbf{u}^n = 0$  (Lemme 4.2.4),  $h_n \leq C_s \tau_n$  et en utilisant le lemme 4.2.4, le premier et le second termes peuvent être majorés comme suit :

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}, \Pi \mathbf{e}^n) & \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\Pi \mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\ & \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + c h_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + c C_s \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (4.37)$$

et

$$\begin{aligned} \nu \tau_n (\nabla \mathbf{e}^n, \nabla (\Pi \mathbf{e}^n)) & \leq \frac{\nu \tau_n}{16} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \tau_n \|\Pi \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 \\ & \leq \frac{\nu \tau_n}{16} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + c_1 \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Pour le troisième, quatrième et cinquième termes du membre du droite de (4.36), on prend  $\mathbf{v}_h = \mathcal{C}_{nh} \mathbf{v}$ , on utilise la définition de  $R^{h,1}$  et le lemme 4.2.4 pour  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^n - \Pi \mathbf{e}^n$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \tau_n \langle \mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n, \mathbf{v} - \mathcal{C}_{nh} \mathbf{v} \rangle + \tau_n \langle \mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n, \mathcal{C}_{nh} \mathbf{v} \rangle \\ & \leq c \tau_n \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (h_{\kappa_n} \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2} + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}) |\mathbf{v}|_{H^1(\Delta_{\kappa_n})^2} \\ & \leq c_2 \tau_n \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2) \right)^{1/2} |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)^2} \\ & \leq \frac{c_3 \tau_n}{\nu} \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2) \right) + \frac{\nu \tau_n}{16} \|\mathbf{e}^n\|_X^2, \end{aligned} \quad (4.39)$$

et (cf lemme 4.1.13)

$$\begin{aligned}
\tau_n \langle R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle &\leq C\tau_n \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_X. \\
&\leq \frac{C^2}{\nu} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \frac{\nu\tau_n}{16} \|\mathbf{e}^n\|_X^2.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Le sixième terme peut être majoré sous la forme suivante (cf lemme 4.1.13)

$$\begin{aligned}
\tau_n \langle R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} \rangle &\leq C\tau_n \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_X. \\
&\leq \frac{C^2}{\nu} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + \frac{\nu\tau_n}{16} \|\mathbf{e}^n\|_X^2.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Finalement, pour les deux derniers termes du second membre de (4.36), en intercalant  $\tau_n(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v})$ ,  $\frac{\tau_n}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \mathbf{u}^n, \mathbf{v})$ , et en ajoutant le terme nul  $-\frac{\tau_n}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v})$ , on a :

$$\begin{aligned}
&-\tau_n(\mathbf{u}^{n-1} \nabla \mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}) + \frac{\tau_n}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}) \\
&= -\tau_n(\mathbf{u}^{n-1} \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + \tau_n(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) - \tau_n(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + \tau_n(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}) \\
&+ \frac{\tau_n}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}) - \frac{\tau_n}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + \frac{\tau_n}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) - \frac{\tau_n}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}) \\
&= -\tau_n(\mathbf{e}^{n-1} \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) - \tau_n(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \mathbf{e}^n, \mathbf{v}) - \frac{\tau_n}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \mathbf{e}^n, \mathbf{v}) - \frac{\tau_n}{2}(\operatorname{div} \mathbf{e}^{n-1} \mathbf{u}^n, \mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Notons :

$A = A_1 + A_2$  avec  $A_1 = -\tau_n(\mathbf{e}^{n-1} \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v})$  et  $A_2 = -\frac{\tau_n}{2}(\operatorname{div} \mathbf{e}^{n-1} \mathbf{u}^n, \mathbf{v})$ , et

$B = -\tau_n(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \mathbf{e}^n, \mathbf{v}) - \frac{\tau_n}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \mathbf{e}^n, \mathbf{v})$ .

En utilisant l'inégalité (3.8), on a :

$$\begin{aligned}
|A_1| &\leq c_4 \tau_n \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n\|_X \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^2} \\
&\leq c_5 \tau_n \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^{1/2} \|\mathbf{u}^n\|_X (\|\mathbf{e}^n\|_{L^4(\Omega)^2} + \|\Pi \mathbf{e}^n\|_{L^4(\Omega)^2}) \\
&\leq c_5 \tau_n \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^{1/2} \|\mathbf{u}^n\|_X (c'_5 \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\mathbf{e}^n\|_X^{1/2} + c'_5 \|\Pi \mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\Pi \mathbf{e}^n\|_X^{1/2}).
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.2.4 et le fait que  $\Pi \mathbf{e}^n = -\Pi \bar{\mathbf{u}}_h^n$ , on obtient

$$\begin{aligned}
|A_1| &\leq c_5 \tau_n \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^{1/2} \|\mathbf{u}^n\|_X (c'_5 \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\mathbf{e}^n\|_X^{1/2} + c_6 (h_n^{1/2} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)})^{1/2} \\
&\quad \|\mathbf{e}^n\|_X^{1/2}).
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
& c_5 c'_5 \tau_n \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^{1/2} \|\mathbf{u}^n\|_X \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\mathbf{e}^n\|_X^{1/2} \\
& \leq c_7 \tau_n \|\mathbf{u}^n\|_X \left( \frac{\varepsilon_1}{2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^n\|_X \right) \\
& \leq c_7 \tau_n \frac{\varepsilon_1}{2} \left( \frac{\varepsilon_2}{2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \right) + c_7 \frac{\tau_n}{2\varepsilon_1} \left( \frac{\varepsilon_3}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \right) \\
& \leq c_7 \tau_n \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 + c_7 \tau_n \frac{\varepsilon_1}{4\varepsilon_2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 + c_7 \frac{\tau_n \varepsilon_3}{4\varepsilon_1} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \\
& \quad + c_7 \tau_n \frac{1}{4\varepsilon_1 \varepsilon_3} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 + c_7 \tau_n \frac{1}{4\varepsilon_1 \varepsilon_3} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2.
\end{aligned}$$

En prenant en considération que  $h_n \leq C_s \tau_n, \forall n = 1 \dots N$  et en utilisant (4.7), on a :

$$\begin{aligned}
& c_5 c_6 \tau_n \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^{1/2} \|\mathbf{u}^n\|_X (h_n^{1/2} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)})^{1/2} \|\mathbf{e}^n\|_X^{1/2} \\
& \leq \tau_n \frac{c_8}{2\varepsilon_4} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{e}^n\|_X + \tau_n \frac{\varepsilon_4}{2} h_n^{1/2} \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X \\
& \leq \tau_n \frac{c_8}{2\varepsilon_4} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{e}^n\|_X + \tau_n \frac{\varepsilon_4}{2} \left( \frac{\varepsilon_5}{2} h_n \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 + \frac{1}{\varepsilon_5} \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right) \\
& \leq \tau_n \frac{c_8}{2\varepsilon_4} \left( \frac{1}{2\varepsilon_6} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_6}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \right) + \tau_n^2 c_9 \frac{\varepsilon_4 \varepsilon_5}{4} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \\
& \quad + \tau_n \frac{\varepsilon_4}{2\varepsilon_5} \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2.
\end{aligned}$$

Maintenant en utilisant l'inégalité (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned}
|A_2| & \leq c_{10} \frac{\tau_n}{2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X \|\mathbf{u}^n\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^2} \\
& \leq c_{10} \frac{\tau_n}{2} \left( \frac{\varepsilon_7}{2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 + c_{11} \frac{1}{2\varepsilon_7} \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n\|_X (\|\mathbf{e}^n\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|\Pi \mathbf{e}^n\|_{L^4(\Omega)^2}^2) \right) \\
& \leq c_{10} \tau_n \frac{\varepsilon_7}{4} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 + c_{12} \frac{\tau_n}{4\varepsilon_7} \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n\|_X \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^n\|_X \\
& \quad + c'_{12} \frac{\tau_n}{4\varepsilon_7} \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n\|_X \|\Pi \mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)} \|\Pi \mathbf{e}^n\|_X.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.2.4 et le fait que  $\Pi \mathbf{e}^n = -\Pi \mathbf{u}_h^n$ , on obtient

$$\begin{aligned}
|A_2| & \leq c_{10} \tau_n \frac{\varepsilon_7}{4} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 + c_{12} \frac{\tau_n}{4\varepsilon_7} \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n\|_X \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^n\|_X \\
& \quad + c_{13} h_n^{1/2} \frac{\tau_n}{4\varepsilon_7} \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n\|_X \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{e}^n\|_X.
\end{aligned}$$

En utilisant que  $\|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq c$  d'après (4.7), on a :

$$\begin{aligned}
|A_2| &\leq c_{10}\tau_n \frac{\varepsilon_7}{4} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 + c_{14} \frac{\tau_n}{4\varepsilon_7} \left( \frac{\varepsilon_8}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_8} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\varepsilon_8} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \right) + c_{13} \frac{\tau_n}{4\varepsilon_7} \left( \frac{\varepsilon_9}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{h_n}{2\varepsilon_9} \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&\leq c_{10}\tau_n \frac{\varepsilon_7}{4} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 + c_{14} \frac{\tau_n}{4\varepsilon_7} \left( \frac{\varepsilon_8}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_8} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \right) \\
&\quad + c_{14}\tau_n \frac{1}{8\varepsilon_7\varepsilon_8} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 + c_{15} \frac{\tau_n}{4\varepsilon_7} \left( \frac{\varepsilon_9}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{\tau_n}{2\varepsilon_9} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \right).
\end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
|A| &\leq \tau_n \left( \frac{c_8}{4\varepsilon_4\varepsilon_6} + \frac{c_{15}\tau_n}{8\varepsilon_7\varepsilon_9} \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \right) \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau_n \left( \frac{c_7\varepsilon_3}{4\varepsilon_1} + \frac{c_8\varepsilon_6}{4\varepsilon_4} + \frac{c_{14}\varepsilon_8}{8\varepsilon_7} + \frac{c_{15}\varepsilon_9}{8\varepsilon_7} \right) \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \\
&\quad + \tau_n \left( \frac{c_7\varepsilon_1\varepsilon_2}{4} + \frac{c_9\varepsilon_4\varepsilon_5}{4} \tau_n \|\mathbf{u}^n\|_X^2 + \frac{c_{10}\varepsilon_7}{4} \right) \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 \\
&\quad + \tau_n \left( \frac{c_7}{4\varepsilon_1\varepsilon_3} + \frac{c_{14}}{8\varepsilon_7\varepsilon_8} \right) \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \\
&\quad + \tau_n \left( \frac{c_7\varepsilon_1}{4\varepsilon_2} + \frac{c_7}{4\varepsilon_1\varepsilon_3} + \frac{\varepsilon_4}{2\varepsilon_5} + \frac{c_{14}}{8\varepsilon_7\varepsilon_8} \right) \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Avant de majorer le terme B, on l'écrit de la manière suivante en utilisant le fait que  $d(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$  pour  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^n - \Pi\mathbf{e}^n$

$$\begin{aligned}
B &= -\tau_n (\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla (\mathbf{e}^n - \Pi\mathbf{e}^n + \Pi\mathbf{e}^n), \mathbf{e}^n - \Pi\mathbf{e}^n) - \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} (\mathbf{e}^n - \Pi\mathbf{e}^n + \Pi\mathbf{e}^n), \mathbf{e}^n - \Pi\mathbf{e}^n) \\
&= -\tau_n (\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \Pi\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^n - \Pi\mathbf{e}^n) - \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \Pi\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^n - \Pi\mathbf{e}^n) \\
&= -\tau_n (\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \Pi\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^n) - \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \Pi\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^n).
\end{aligned}$$

Or en utilisant l'inégalité (3.8) et le lemme 4.2.4, on a :

$$\begin{aligned}
&|\tau_n (\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \Pi\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^n)| \\
&\leq c_{16}\tau_n \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{e}^n\|_{L^4(\Omega)^2} \\
&\leq \frac{c_{16}^2}{2\varepsilon_{10}} \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_{10}}{2} \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \\
&\leq \frac{c_{16}^2}{2\varepsilon_{10}} \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_{17} \frac{\varepsilon_{10}}{2} \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^n\|_X \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X.
\end{aligned}$$

Or en majorant  $\|\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}$  par une constante d'après le théorème 3.2.3, on a :

$$\begin{aligned}
&|\tau_n (\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \Pi\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^n)| \\
&\leq \frac{c_{16}^2}{2\varepsilon_{10}} \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + c'_{17} \frac{\varepsilon_{10}}{2} \tau_n \left( \frac{\varepsilon_{11}}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_{11}} \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 \right) \\
&\leq \frac{c_{16}^2}{2\varepsilon_{10}} \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + c'_{17} \frac{\varepsilon_{10}}{2} \tau_n \left( \frac{\varepsilon_{11}}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_{11}} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 \right) \\
&\quad + c'_{17}\tau_n \frac{\varepsilon_{10}}{4\varepsilon_{11}} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2,
\end{aligned}$$



et comme précédemment, on a :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \Pi \mathbf{e}^n, \mathbf{e}^n) \right| \\
& \leq \frac{\tau_n}{2} \left( \frac{1}{2\varepsilon_{12}} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_{12}}{2} \|\Pi \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{e}^n\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \right) \\
& \leq \frac{\tau_n}{4\varepsilon_{12}} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_{18} \frac{\varepsilon_{12}}{4} \tau_n \|\Pi \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\Pi \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^n\|_X \\
& \leq \frac{\tau_n}{4\varepsilon_{12}} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_{19} h_n^{1/2} \frac{\varepsilon_{12}}{4} \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\Pi \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^n\|_X \\
& \leq \frac{\tau_n}{4\varepsilon_{12}} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_{20} \frac{\varepsilon_{12}}{4} \tau_n \left( \frac{\varepsilon_{13}}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{h_n}{2\varepsilon_{13}} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right) \\
& \leq \frac{\tau_n}{4\varepsilon_{12}} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_{20} \frac{\varepsilon_{12}}{4} \tau_n \left( \frac{\varepsilon_{13}}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{\tau_n}{2\varepsilon_{13}} \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^4 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right) \\
& + \frac{c_{20} \tau_n^2 \varepsilon_{12}}{8\varepsilon_{13}} \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^4 \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
|B| & \leq \frac{c_{16}^2}{2\varepsilon_{10}} \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau_n}{4\varepsilon_{12}} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \tau_n \left( c'_{17} \frac{\varepsilon_{10}}{4\varepsilon_{11}} + \frac{c_{20} \varepsilon_{12}}{8\varepsilon_{13}} \tau_n \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 \right) \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
& + \tau_n \left( \frac{c'_{17} \varepsilon_{10} \varepsilon_{11}}{4} + c_{20} \frac{\varepsilon_{12} \varepsilon_{13}}{8} \right) \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \tau_n^2 c_{20} \frac{\varepsilon_{12}}{8\varepsilon_{13}} \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^4 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
& + \tau_n c'_{17} \frac{\varepsilon_{10}}{4\varepsilon_{11}} \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

En sommant les majorations (4.37), (4.38), (4.39), (4.40), (4.41), (4.42) et (4.43), on obtient une majoration du membre du droite de (4.36). Or le membre gauche de l'égalité (4.36) étant égale au membre

droite de (4.34), alors en sommant sur  $n$  de 1 à  $m$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \\
& \leq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^m \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \frac{c_7}{4\varepsilon_1\varepsilon_3} + \frac{c_{14}}{8\varepsilon_7\varepsilon_8} \right) \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \\
& \quad + \sum_{n=1}^m \tau_n \left( c'_{17} \frac{\varepsilon_{10}}{4\varepsilon_{11}} + \frac{c_{20}\varepsilon_{12}}{8\varepsilon_{13}} \tau_n \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 \right) \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
& \quad + \sum_{n=1}^m C_s \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^m c_1 \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^m \frac{c_{16}^2}{2\varepsilon_{10}} \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \sum_{n=1}^m \frac{\tau_n}{4\varepsilon_{12}} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \frac{c_8}{4\varepsilon_4\varepsilon_6} + \frac{c_{15}\tau_n}{8\varepsilon_7\varepsilon_9} \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \right) \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \sum_{n=1}^m \frac{c_3\tau_n}{\nu} \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2) \right) \\
& \quad + \sum_{n=1}^m \frac{C^2}{\nu} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \sum_{n=1}^m \frac{C^2}{\nu} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + \sum_{n=1}^m \frac{4\nu\tau_n}{16} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \\
& \quad + \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \frac{c_7\varepsilon_3}{4\varepsilon_1} + \frac{c_8\varepsilon_6}{4\varepsilon_4} + \frac{c_{14}\varepsilon_8}{8\varepsilon_7} + \frac{c_{15}\varepsilon_9}{8\varepsilon_7} \right) \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \frac{c'_{17}\varepsilon_{10}\varepsilon_{11}}{4} + c_{20} \frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}}{8} \right) \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \\
& \quad + \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \frac{c_7\varepsilon_1\varepsilon_2}{4} + \frac{c_9\varepsilon_4\varepsilon_5}{4} \tau_n \|\mathbf{u}^n\|_X^2 + \frac{c_{10}\varepsilon_7}{4} \right) \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 \\
& \quad + \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \frac{c_7\varepsilon_1}{4\varepsilon_2} + \frac{c_7}{4\varepsilon_1\varepsilon_3} + \frac{\varepsilon_4}{2\varepsilon_5} + \frac{c_{14}}{8\varepsilon_7\varepsilon_8} \right) \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
& \quad + \sum_{n=1}^m \tau_n^2 c_{20} \frac{\varepsilon_{12}}{8\varepsilon_{13}} \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^4 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n c'_{17} \frac{\varepsilon_{10}}{4\varepsilon_{11}} \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\sum_n a_n b_n \leq \sum_n a_n \sum_n b_n$  et  $\sum_n a_n^2 \leq (\sum_n a_n)^2$  et en se basant sur le théorème 3.2.3 et l'inégalité (4.7), on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^m \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \\
& \leq \sum_{n=1}^m c_{21} \left( \frac{c_7}{4\varepsilon_1\varepsilon_3} + \frac{c_{14}}{8\varepsilon_7\varepsilon_8} \right) \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
& + \sum_{n=1}^m c_{22} \left( c'_{17} \frac{\varepsilon_{10}}{4\varepsilon_{11}} + c_{22} \frac{c_{20}\varepsilon_{12}}{8\varepsilon_{13}} \right) \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
& + \sum_{n=1}^m C_s \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^m c_1 \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^m \frac{c_{16}^2}{2\varepsilon_{10}} \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \sum_{n=1}^m \frac{\tau_n}{4\varepsilon_{12}} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \frac{c_8}{4\varepsilon_4\varepsilon_6} + \frac{c_{15}c_{21}}{8\varepsilon_7\varepsilon_9} \right) \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \sum_{n=1}^m \frac{c_3 \tau_n}{\nu} \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2) \right) \\
& + \sum_{n=1}^m \frac{C^2}{\nu} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \sum_{n=1}^m \frac{C^2}{\nu} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + \sum_{n=1}^m \frac{4\nu\tau_n}{16} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \\
& + \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \frac{c_7\varepsilon_3}{4\varepsilon_1} + \frac{c_8\varepsilon_6}{4\varepsilon_4} + \frac{c_{14}\varepsilon_8}{8\varepsilon_7} + \frac{c_{15}\varepsilon_9}{8\varepsilon_7} \right) \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \frac{c'_{17}\varepsilon_{10}\varepsilon_{11}}{4} + c_{20} \frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}}{8} \right) \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \\
& + \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \frac{c_7\varepsilon_1\varepsilon_2}{4} + \frac{c_9\varepsilon_4\varepsilon_5}{4} c_{21} + \frac{c_{10}\varepsilon_7}{4} \right) \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 \\
& + \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \frac{c_7\varepsilon_1}{4\varepsilon_2} + \frac{c_7}{4\varepsilon_1\varepsilon_3} + \frac{\varepsilon_4}{2\varepsilon_5} + \frac{c_{14}}{8\varepsilon_7\varepsilon_8} \right) \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
& + \sum_{n=1}^m \tau_n^2 c_{20} \frac{\varepsilon_{12}}{8\varepsilon_{13}} \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^4 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n c'_{17} \frac{\varepsilon_{10}}{4\varepsilon_{11}} \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2.
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^m \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \\
& \leq + \sum_{n=1}^m \left[ c_{21} \left( \frac{c_7}{4\varepsilon_1\varepsilon_3} + \frac{c_{14}}{8\varepsilon_7\varepsilon_8} \right) + c_{22} \left( c'_{17} \frac{\varepsilon_{10}}{4\varepsilon_{11}} + c_{22} \frac{c_{20}\varepsilon_{12}}{8\varepsilon_{13}} \right) \right] \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
& + \sum_{n=1}^m \left[ C_s + c_1 + \frac{c_{16}^2}{2\varepsilon_{10}} + c_\sigma \frac{\tau_n}{4\varepsilon_{12}} + \frac{c_8}{4\varepsilon_4\varepsilon_6} + \frac{c_{15}c_{21}}{8\varepsilon_7\varepsilon_9} \right] \tau_n \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \sum_{n=1}^m \frac{c_3\tau_n}{\nu} \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2) \right) \\
& + \sum_{n=1}^m \frac{C^2}{\nu} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \sum_{n=1}^m \frac{C^2}{\nu} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \\
& + \sum_{n=1}^m \left[ \frac{\nu}{4} + \frac{c_7\varepsilon_3}{4\varepsilon_1} + \frac{c_8\varepsilon_6}{4\varepsilon_4} + \frac{c_{14}\varepsilon_8}{8\varepsilon_7} + \frac{c_{15}\varepsilon_9}{8\varepsilon_7} + \frac{c'_{17}\varepsilon_{10}\varepsilon_{11}}{4} + c_{20} \frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}}{8} + c_\sigma \left( \frac{c_7\varepsilon_1\varepsilon_2}{4} + \frac{c_9\varepsilon_4\varepsilon_5}{4} c_{21} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{c_{10}\varepsilon_7}{4} \right) \right] \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \sum_{n=0}^{m-1} c_\sigma \tau_{n+1} \left( \frac{c_7\varepsilon_1}{4\varepsilon_2} + \frac{c_7}{4\varepsilon_1\varepsilon_3} + \frac{\varepsilon_4}{2\varepsilon_5} + \frac{c_{14}}{8\varepsilon_7\varepsilon_8} \right) \|\mathbf{u}^{n+1}\|_X^2 \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
& + \sum_{n=0}^{m-1} \tau_{n+1}^2 c_\sigma c_{20} \frac{\varepsilon_{12}}{8\varepsilon_{13}} \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_X^4 \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \sum_{n=0}^{m-1} \tau_{n+1} c_\sigma c'_{17} \frac{\varepsilon_{10}}{4\varepsilon_{11}} \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2.
\end{aligned}$$

La relation  $\|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \leq (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2$  et en prenant  $\varepsilon_1 = 6c_7\sqrt{\frac{c_{21}}{\nu}}$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{\nu}{9\varepsilon_1c_7c_\sigma}$ ,  $\varepsilon_3 = \frac{\nu\varepsilon_1}{9c_7}$ ,  $\varepsilon_4$  est un nombre réel arbitraire,  $\varepsilon_5 = \frac{\nu}{9c_9c_\sigma c_{21}\varepsilon_4}$ ,  $\varepsilon_6 = \frac{\nu\varepsilon_4}{9c_8}$ ,  $\varepsilon_7 = \min(3c_{14}\sqrt{\frac{c_{21}}{\nu}}, \frac{\nu}{9c_\sigma c_{10}})$ ,  $\varepsilon_8 = \frac{2\nu\varepsilon_7}{9c_{14}}$ ,  $\varepsilon_9 = \frac{2\nu\varepsilon_7}{9c_{15}}$ ,  $\varepsilon_{10} = \frac{\sqrt{\nu}}{6c'_{17}\sqrt{c_{22}}}$ ,  $\varepsilon_{11} = \frac{2}{3}\sqrt{\nu c_{22}}$ ,  $\varepsilon_{12} = \frac{\sqrt{\nu}}{3c_{20}c_{22}}$ ,  $\varepsilon_{13} = \frac{2\nu}{9c_{20}\varepsilon_{12}}$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{\nu}{2} \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \\
& \leq C_5 \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2) \right) \\
& + C_6 \sum_{n=0}^{m-1} \tau_{n+1} \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 (C_2 \|\mathbf{u}^{n+1}\|_X^2 + C_3 \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 + C_4 \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_X^2).
\end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall 4.2.1 avec les fonctions données de la façon suivante :

$$y_m = \|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2,$$

$$f_m = C \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2) \right)$$

et

$$g_n = \tau_{n+1} (C_2 \|\mathbf{u}^{n+1}\|_X^2 + C_3 \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 + C_4 \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_X^2).$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \\
& \leq C_5 \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2) \right) \\
& \quad + C_6 \sum_{n=0}^{m-1} f_n \tau_{n+1} (C_2 \|\mathbf{u}^{n+1}\|_X^2 + C_3 \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 + C_4 \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_X^2) \exp \left( \sum_{j=n}^{m-1} \tau_{j+1} (C_2 \|\mathbf{u}^{j+1}\|_X^2 \right. \\
& \quad \left. + C_3 \|\bar{\mathbf{u}}_h^j\|_X^2 + C_4 \|\bar{\mathbf{u}}_h^{j+1}\|_X^2) \right).
\end{aligned}$$

On utilise le fait que pour chaque  $n \leq m$ ,  $f_n \leq f_m$  pour avoir :

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \\
& \leq C_5 \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2) \right) \\
& \quad + C_6 f_m \sum_{n=0}^{m-1} \tau_{n+1} (C_2 \|\mathbf{u}^{n+1}\|_X^2 + C_3 \|\bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 + C_4 \|\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_X^2) \exp \left( \sum_{j=0}^{m-1} \tau_{j+1} (C_2 \|\mathbf{u}^{j+1}\|_X^2 \right. \\
& \quad \left. + C_3 \|\bar{\mathbf{u}}_h^j\|_X^2 + C_4 \|\bar{\mathbf{u}}_h^{j+1}\|_X^2) \right).
\end{aligned}$$

En utilisant les théorèmes 3.2.3 et le lemme 4.1.5, on aura :

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \\
& \leq c \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2) \right).
\end{aligned}$$

Cela conclut la preuve du théorème 4.2.5 où on a prouvé une estimation *a posteriori* entre la solution  $\mathbf{u}_\tau$  du problème  $(P_{aux})$  et la solution  $\mathbf{u}_h$  du problème  $(\overline{FV}_{n,h})$ .  $\square$

**Remarque 4.2.6** La condition ajoutée  $h_n \leq C_s \tau_n, \forall n = 1 \dots m$  avec  $m \in \{1, \dots, N\}$  dans le théorème 4.2.5 est une condition technique. En effet certains termes dans nos équations sont accompagnés par  $h_n$  et pour pouvoir les majorer, nous avons utilisé cette condition. À noter que la constante  $C_s$  est une constante arbitraire indépendante de  $n$  et  $h$  (elle ne doit pas être nécessairement petite).

**Lemme 4.2.7** On a l'inégalité :

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 \leq \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}_\tau(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds \leq \frac{1 + \sigma_\tau}{2} \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2. \quad (4.44)$$

**Preuve :** Le fait que  $\mathbf{u}_\tau - \bar{\mathbf{u}}_h$  est affine par morceaux, égale à  $\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n$  en  $t^n$ , donne en utilisant la formule de Simpson :

$$\begin{aligned}
\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}_\tau(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds &= \frac{\tau_n}{3} \left( \|\mathbf{u}_\tau(t_n) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_n)\|_X^2 + \|\mathbf{u}_\tau(t_{n-1}) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_{n-1})\|_X^2 \right. \\
& \quad \left. + (\nabla(\mathbf{u}_\tau(t_{n-1}) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_{n-1})), \nabla(\mathbf{u}_\tau(t_n) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_n))) \right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité  $a.b \geq -\frac{1}{4}a^2 - b^2$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}_\tau(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds - \frac{\tau_n}{4} \|\mathbf{u}_\tau(t_n) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_n)\|_X^2 \\
& \geq \frac{\tau_n}{12} \|\mathbf{u}_\tau(t_n) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_n)\|_X^2 + \frac{\tau_n}{3} \|\mathbf{u}_\tau(t_{n-1}) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_{n-1})\|_X^2 \\
& \quad + \frac{\tau_n}{3} \left(\frac{-1}{4}\right) \|\nabla(\mathbf{u}_\tau(t_n) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_n))\|_{L^2(\Omega)^2}^2 - \frac{\tau_n}{3} \|\nabla(\mathbf{u}_\tau(t_{n-1}) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_{n-1}))\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
& \geq 0.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\tau_n}{4} \|\mathbf{u}_\tau(t_n) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_n)\|_X^2 \leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}_\tau(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds.$$

D'autre part, en partant de la formule de Simpson et en utilisant l'inégalité

$a.b \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}_\tau(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds \\
& \leq \frac{\tau_n}{3} \|\mathbf{u}_\tau(t_n) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_n)\|_X^2 + \frac{\tau_n}{3} \|\mathbf{u}_\tau(t_{n-1}) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_{n-1})\|_X^2 \\
& \quad + \frac{\tau_n}{3} \left(\frac{1}{2}\right) \|\nabla(\mathbf{u}_\tau(t_n) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_n))\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{\tau_n}{3} \left(\frac{1}{2}\right) \|\nabla(\mathbf{u}_\tau(t_{n-1}) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_{n-1}))\|_{L^2(\Omega)^2}^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_n}{4} \|\mathbf{u}_\tau(t_n) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_n)\|_X^2 & \leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}_\tau(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds \leq \frac{\tau_n}{2} \left( \|\mathbf{u}_\tau(t_n) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_n)\|_X^2 \right. \\
& \quad \left. + \|\mathbf{u}_\tau(t_{n-1}) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_{n-1})\|_X^2 \right).
\end{aligned}$$

En utilisant la relation  $\tau_n \leq \sigma_\tau \tau_{n-1}$ , et en sommant sur  $n$ , la dernière inégalité donne (4.44).  $\square$

**Corollaire 4.2.8** *On suppose que  $h_n \leq C_s \tau_n, \forall n = 1 \dots m$  avec  $m \in \{1, \dots, N\}$ . On a l'estimation a posteriori suivante entre la vitesse  $\mathbf{u}$  solution du problème (FV) et la vitesse  $\bar{\mathbf{u}}_h$  correspondante aux solutions  $\bar{\mathbf{u}}_h^n$  du problème  $(\overline{FV}_{n,h})$  :*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}_h^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds & \leq C \left( \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right. \\
& \quad \left. + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 \right) + \sum_{n=1}^m \tau_n \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2) + \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m,X')}^2.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

**Preuve :** La preuve est une conséquence directe des théorèmes 4.2.3 et 4.2.5. Premièrement, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}_h^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds \\
\leq 2 \|\mathbf{u}(t_m) - \mathbf{u}_\tau(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\tau(s)\|_X^2 ds \\
+ 2 \|\mathbf{u}_\tau(t_m) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}_\tau(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds.
\end{aligned}$$

Pour les deux premiers termes du second membre, on utilise le théorème 4.2.3 et on obtient :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}_h^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds \leq 2c \left( \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 \right) \\ & + \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m,X')}^2 + 2\|\mathbf{u}_\tau(t_m) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}_\tau(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds. \end{aligned}$$

D'autre part, on a  $\mathbf{u}_\tau - \bar{\mathbf{u}}_h$  est affine par morceaux et est égal à  $\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n$ , on en déduit, en utilisant le lemme 4.2.7 que :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}_h^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds \leq 2c \left( \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 \right) \\ & + \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m,X')}^2 + 2\|\mathbf{u}^m - \bar{\mathbf{u}}_h^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\nu \frac{1+\sigma_\tau}{2} \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2. \end{aligned}$$

Puis, on utilise le théorème 4.2.5 pour les deux derniers termes de cette inégalité et on obtient :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}_h^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds \leq 2c \left( \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 + \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m,X')}^2 \right) \\ & + 2c \left( \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right) \right). \end{aligned}$$

□

Pour déduire la majoration globale, il reste à majorer la quantité :

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(t) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 dt.$$

**Théorème 4.2.9** *On a l'estimation a posteriori suivante entre  $\mathbf{u}$  la solution du problème (FV) et la vitesse correspondante aux solutions  $\bar{\mathbf{u}}_h^n$  du problème  $(F\bar{V}_{n,h})$  :*

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(s) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds \leq c \left( \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 \right). \quad (4.46)$$

**Preuve :** On considère la vitesse  $\mathbf{u}$  solution du problème (FV) et la vitesse correspondante aux solutions  $\bar{\mathbf{u}}_h^n$  du problème  $(F\bar{V}_{n,h})$ . Pour  $s \in ]t_{n-1}, t_n]$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(s) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 & \leq (\|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X + \|\bar{\mathbf{u}}_h(s) - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X)^2 \\ & \leq \left( \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X + \left( \frac{s-t_{n-1}}{\tau_n} \right) \|\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X \right)^2. \end{aligned}$$

On utilise  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ ,

$$\|\mathbf{u}(s) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 \leq 2 \left( \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 + \left( \frac{s-t_{n-1}}{\tau_n} \right)^2 \|\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 \right).$$

En intégrant entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  et en sommant sur  $n$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(s) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds \\
& \leq c \left( \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds + \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \frac{s-t_n}{\tau_n} \right)^2 \|\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 ds \right) \\
& \leq c \left( \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n |\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}|_{H^1(\kappa_n)}^2 \right).
\end{aligned}$$

En utilisant (4.17) on obtient (4.46).  $\square$

Dans une nouvelle étape, on majore la norme de la fonction :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h - \frac{1}{2}(\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h + \nabla(p - \bar{p}_h).$$

**Théorème 4.2.10** *On a l'estimation a posteriori suivante entre la solution  $(\mathbf{u}, p)$  du problème (FV) et  $(\bar{\mathbf{u}}_h, \pi_\tau p_\tau)$  associée aux solutions du problème  $(\overline{FV}_{n,h})$ , pour  $1 \leq n \leq m$  avec  $m \in \{1, \dots, N\}$*

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h + \nabla(p - \bar{p}_h) \right\|_{L^2(0, t_m, X')} \\
& \leq C \left( \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2) + \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0, t_m, X')}^2 \right) \\
& \quad + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \tau_n \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2) \Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

**Preuve :** Les solutions des problèmes (FV) et  $(\overline{FV}_{n,h})$  vérifient pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$  et  $\forall \mathbf{v} \in X$ ,

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t, \mathbf{v}) + \nu(\nabla(\mathbf{u} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \nabla(\mathbf{v})) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p(t) - \bar{p}_h(t)) \right. \\
& \quad \left. + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \mathbf{v}) - \frac{1}{2}(\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \mathbf{v}) \right) \\
& \quad = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle - \frac{1}{\tau_n}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}, \mathbf{v}) - \nu(\nabla(\pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \nabla(\mathbf{v})) + (\operatorname{div} \mathbf{v}, \bar{p}_h(t)) \\
& \quad \quad - (\pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \mathbf{v}) - \frac{1}{2}(\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \mathbf{v}),
\end{aligned} \tag{4.48}$$

En effet on part de l'équation (FV) et on intercale  $\bar{\mathbf{u}}_h(t)$  dans le premier terme,  $\pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)$  dans le deuxième terme,  $\pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)$  dans le troisième terme et  $\bar{p}_h(t)$  dans le quatrième terme et on intercale le terme  $\frac{1}{2}(\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \mathbf{v})$ . On obtient (4.48) en utilisant la définition de  $\bar{\mathbf{u}}_h$ .

En intercalant ensuite  $(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v}))$ , et  $(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v}))$ , on peut démontrer facilement que :

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}(t) \rangle - \frac{1}{\tau_n}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}, \mathbf{v}) - \nu(\nabla(\pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \nabla \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{v}, \bar{p}_h(t)) \\
& \quad - (\pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \mathbf{v}) - \frac{1}{2}((\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \mathbf{v}), \\
& \quad = \langle \mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}_h^n + R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t) + R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} \rangle.
\end{aligned} \tag{4.49}$$



Donc, on a :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} \right) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \mathbf{v}) - \frac{1}{2} ((\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t)) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \mathbf{v}) \\
& - (\operatorname{div} \mathbf{v}, (p - \bar{p}_h)(t)) \\
& = -\nu (\nabla (\mathbf{u} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \nabla \mathbf{v}) + \langle \mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}_h^n + R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t) + R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} \rangle.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Or,

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t)) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t) + \nabla (p - \bar{p}_h)(t) \right\|_{X'} \\
& = \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{1}{\|\mathbf{v}\|_X} \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} \right) + (\mathbf{u}(t) \nabla \mathbf{u}(t) - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \mathbf{v}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \mathbf{v}) - (p(t) - \bar{p}_h(t), \operatorname{div} \mathbf{v}) \right) \\
& = \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{-\nu (\nabla (\mathbf{u} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \nabla (\mathbf{v})) + \langle \mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}_h^n + R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t) + R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_X}.
\end{aligned}$$

Pour le premier terme du second membre, on a :

$$\nu (\nabla (\mathbf{u} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \nabla (\mathbf{v})) \leq \nu \|\mathbf{u}(t) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X \|\mathbf{v}\|_X.$$

Avant de majorer le deuxième terme du second membre, on a

$$|\langle R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v}_h \rangle| \leq \langle \bar{\mathbf{f}}_h^n - \bar{\mathbf{f}}^n, \mathbf{v}_h \rangle.$$

Pour le deuxième terme, on intercale  $\mathbf{f}^n$  et  $\bar{\mathbf{f}}^n$ , on utilise Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}
& |\langle \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}^n + \mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n + R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t) + R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} \rangle| \\
& \leq |\langle \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}^n, \mathbf{v} \rangle| + |\langle \mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle| + |\langle \mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n, \mathbf{v}_h \rangle| + |\langle R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle| \\
& \quad + |\langle R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} \rangle|.
\end{aligned}$$

On prend  $\mathbf{v}_h = C_{nh} \mathbf{v}$  et on utilise (4.2) :

$$\begin{aligned}
& |\langle \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}^n + \mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n + R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t) + R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \mathbf{v} \rangle| \\
& \leq \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}^n\|_{X'} \|\mathbf{v}\|_X + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} ch_{\kappa_n} \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\kappa_n)} + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} c' \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\kappa_n)} \\
& \quad + C \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_X + C_1 \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_X.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t) + \mathbf{u}(t) \nabla \mathbf{u}(t) - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t) - \frac{1}{2} \operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t) + \nabla (p - \bar{p}_h)(t) \right\|_{X'} \\
& \leq \left( \nu \|(\mathbf{u} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t)\|_X^2 + \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}^n\|_{X'}^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (ch_\kappa^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + c' \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2) \right. \\
& \quad \left. + C_2 \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + C_3 \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

On intègre sur  $t$  entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$ , on somme sur  $n$  allant de 0 à  $m$ , pour  $\mathbf{f}^n = \pi_\tau \mathbf{f}$  et en utilisant le théorème 4.2.9 pour le premier terme du second membre, on obtient (4.47).  $\square$

**Corollaire 4.2.11** *On suppose que  $h_n \leq C_s \tau_n, \forall n = 1, \dots, m$  avec  $m \in \{1, \dots, N\}$ . On a que la pression et la vitesse vérifient la majoration d'erreur a posteriori globale désirée suivante :*

$$\begin{aligned}
& [[\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h]]^2(t_m) \\
& + \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h) + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h + \nabla (p - \bar{p}_h) \right\|_{L^2(0,t_m,X')} \\
& \leq C \left( \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2) + \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m,X')}^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \tau_n \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2) \right). \tag{4.51}
\end{aligned}$$

**Preuve :** On part de la définition de  $[[\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h]]^2(t_n)$  :

$$\begin{aligned}
[[\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h]]^2(t_m) &= \|\mathbf{u}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_m)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+ \nu \max \left( \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 dt, \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(t) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 dt \right).
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème 4.2.9, on obtient :

$$\begin{aligned}
[[\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h]]^2(t_m) &\leq \|\mathbf{u}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_m)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+ c\nu \max \left( \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 dt, \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 \right).
\end{aligned}$$

Or d'après la définition de  $\bar{\mathbf{u}}_h$ , le corollaire 4.2.8 et l'inégalité (4.47), on obtient le résultat.  $\square$

## Chapitre 5

# Estimation d'erreur a posteriori entre la solution filtrée et la solution filtrée discrète

Le but de cette section est de démontrer une estimation d'erreur *a posteriori* entre la solution exacte filtrée  $(\bar{\mathbf{u}}, p)$  du problème  $(\overline{FV})$  et la solution numérique  $\bar{\mathbf{u}}_h$  correspondante aux solutions  $\bar{\mathbf{u}}_h^n$  du problème  $(\overline{FV}_{n,h})$ . Dans le chapitre 4, on a démontré une estimation d'erreur *a posteriori* entre la solution exacte  $(\mathbf{u}, p)$  du problème  $(FV)$  et la solution numérique  $\bar{\mathbf{u}}_h$  correspondante aux solutions  $\bar{\mathbf{u}}_h^n$  du problème  $(\overline{FV}_{n,h})$ . Pour arriver à notre but, on va utiliser l'inégalité triangulaire. Pour cela, on va commencer par démontrer l'estimation *a posteriori* entre la vitesse  $\mathbf{u}$  solution du problème  $(FV)$  et la vitesse  $\bar{\mathbf{u}}$  du problème  $(\overline{FV})$ .

### 5.1 Estimation d'erreur *a posteriori*

**Théorème 5.1.1** *On suppose que  $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)$ ,  $\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}) \in L^\infty(0, T; \Omega)$ ,  $\mathbb{D}(\mathbf{u}) \in L^\infty(0, T; \Omega)$ ,  $h_n \leq c\tau_n$ ,  $c\tau_n^2 \leq \tau_n$ ,  $\forall n = 1, \dots, m$  avec  $m \in \{1, \dots, N\}$  et que  $h \leq h_0$  où  $h_0$  est un réel suffisamment petit lié à la viscosité  $\nu$ . On a l'estimation a posteriori suivante entre la vitesse  $\mathbf{u}$  solution du problème  $(FV)$  et la vitesse  $\bar{\mathbf{u}}$  du problème  $(\overline{FV})$  :*

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}(s)\|_X ds \\ & \leq C \left( \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2) + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (h_\kappa^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2) \right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

**Preuve :** En combinant les problèmes  $(\overline{FV})$  et  $(FV)$ , on remarque que le couple  $(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \bar{p} - p)$  vérifie que  $(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(0) = \mathbf{0}$  dans  $\Omega$ , et que pour  $1 \leq n \leq m$ , pour  $t$  dans  $]t_{n-1}, t_n]$ ,  $\forall \mathbf{v} \in Z$  et  $\forall q(t) \in M$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t), \mathbf{v} \right) + \nu (\nabla (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t), \nabla (\mathbf{v})) + (\bar{\mathbf{u}}(t) \nabla \bar{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t) \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ + \langle \nu_t (\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v}) \rangle - (\operatorname{div} \mathbf{v}, \bar{p}(t) - p(t)) = (\bar{\mathbf{f}}(t) - \mathbf{f}(t), \mathbf{v}), \\ \int_\Omega q(t, \mathbf{x}) \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = 0. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

En prenant  $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$  et  $q = \bar{p} - p$  dans (5.2), en effectuant la différence entre les deux équations du système et en utilisant le fait que  $(\bar{\mathbf{u}}(t)\nabla\bar{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t)\nabla\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) = (\mathbf{v}(t)\nabla\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) + (\bar{\mathbf{u}}(t)\nabla\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t))$ , on aura :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \|\mathbf{v}(t)\|_X^2 \\ & = (\bar{\mathbf{f}}(t) - \mathbf{f}(t), \mathbf{v}(t)) - (\mathbf{v}(t)\nabla\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) - \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t)\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v})(t) \rangle - (\bar{\mathbf{u}}(t)\nabla\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t)). \end{aligned} \quad (5.3)$$

On cherche à majorer le côté droit de l'équation (5.3). Le dernier terme est nul et le deuxième peut être majoré en utilisant (3.8) et (3.9) par :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}(t)\nabla\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) & \leq \|\mathbf{u}(t)\|_X \|\mathbf{v}(t)\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \\ & \leq \sqrt{2} \|\mathbf{u}(t)\|_X \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{v}(t)\|_X. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité :  $(2ab) \leq a^2 + b^2$ , on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}(t)\nabla\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) & \leq \frac{2}{\nu} \|\mathbf{u}(t)\|_X^2 \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{\nu}{4} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2. \\ (\bar{\mathbf{f}}(t) - \mathbf{f}(t), \mathbf{v}(t)) & \leq \frac{2}{\nu} \|\bar{\mathbf{f}}(t) - \mathbf{f}(t)\|_{X'}^2 + \frac{\nu}{4} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2. \end{aligned}$$

On intègre l'équation (5.3) entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$ . On utilise les majorations précédentes et on somme sur  $n$  allant de 0 à  $m$  pour obtenir

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{v}(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^{t_m} \|\mathbf{v}(s)\|_X^2 ds \\ & \leq C_1 \left( \|\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_{L^2(0, t_m; X')}^2 + \sum_{n=1}^m \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t)\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v})(t) \rangle dt \right| \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{t_m} \frac{2}{\nu} \|\mathbf{u}(s)\|_X^2 \|\mathbf{v}(s)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 ds \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Par ailleurs, en intercalant  $\langle \nu_t(\mathbf{u})(t)\mathbb{D}(\mathbf{u})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v})(t) \rangle$  au terme  $\langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t)\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v})(t) \rangle$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t)\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v})(t) \rangle \\ & = \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t)\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_t(\mathbf{u})(t)\mathbb{D}(\mathbf{u})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v})(t) \rangle + \langle \nu_t(\mathbf{u})(t)\mathbb{D}(\mathbf{u})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v})(t) \rangle. \\ & = \langle (\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_t(\mathbf{u})(t))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v})(t) \rangle + \langle \nu_t(\mathbf{u})(t)\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v})(t) \rangle \\ & \quad + \langle (\nu_t(\mathbf{u})(t) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}))\mathbb{D}(\mathbf{u})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v})(t) \rangle + \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v})(t) \rangle \\ & \quad + \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v})(t) \rangle. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}
& \left| \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_t(\mathbf{u})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v}(t)) \rangle \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} (\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_t(\mathbf{u})(t)) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) : \mathbb{D}(\mathbf{v}(t)) dx \right| \\
&= \left| c_s \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{\kappa_n} h_{\kappa_n}^2 (\|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t)\|_F - \|\mathbb{D}(\mathbf{u})(t)\|_F) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) : \mathbb{D}(\mathbf{v}(t)) dx \right| \\
&\leq c_s h_n^2 \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{\kappa_n} \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \mathbb{D}(\mathbf{u})(t)\|_F \left| \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) : \mathbb{D}(\mathbf{v}(t)) \right| dx \\
&\leq c_1 h^2 \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \int_{\kappa_n} \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t)\|_F \left| \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) : \mathbb{D}(\mathbf{v}(t)) \right| dx \\
&\leq c_1 h^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2.
\end{aligned}$$

De la même manière on a :

$$\langle \nu_t(\mathbf{u})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v}(t)) \rangle \leq c_1 h^2 \|\mathbb{D}(\mathbf{u}(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2.$$

$$\langle (\nu_t(\mathbf{u})(t) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\mathbf{u})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v}(t)) \rangle \leq c_1 h_n^2 \|\mathbb{D}(\mathbf{u}(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X \|\mathbf{v}(t)\|_X.$$

En utilisant l'équation (4.21), on a :

$$\langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v}(t)) \rangle \leq c_2 \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_X.$$

En utilisant l'inégalité inverse suivante :

$$\|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_{L^\infty(\kappa_n)} \leq c' h_{\kappa_n}^{-1} \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_{L^2(\kappa_n)},$$

On a :

$$\langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v}(t)) \rangle \leq c_3 h_n \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X \|\mathbf{v}(t)\|_X.$$

Comme  $\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}) \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ ,  $\mathbb{D}(\mathbf{u}) \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$  alors en intégrant entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  et en utilisant Cauchy-Schwarz, et que  $h_n \leq c\tau_n$ , on a :

$$\begin{aligned}
& \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v}(t)) \rangle \right| dt \\
&\leq c_1 h^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^\infty(0, t_m, \Omega)} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, X)}^2 + c_1 h^2 \|\mathbb{D}(\mathbf{u}(t))\|_{L^\infty(0, t_m, \Omega)} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, X)}^2 \\
&+ c_1 h_n^2 \|\mathbb{D}(\mathbf{u}(t))\|_{L^\infty(0, t_m, \Omega)} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2} \\
&+ c_2 \left( \tau_n \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right)^{1/2} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2} \\
&+ c_4 \tau_n^{1/2} \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)} h_n^{1/2} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

En sommant sur  $n$  et en appliquant de nouveau Cauchy-Schwarz et en utilisant (3.18) pour majorer le terme  $\tau_n^{1/2} \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v}(t)) \rangle \right| dt \\
& \leq c'_1 h^2 \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(0,t_m,X)}^2 + c''_1 h_n^2 \left( \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 dt \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2} \\
& + c_2 \left( \sum_{n=1}^m \tau_n \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2} \\
& + c_4 h_n^{1/2} \left( \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 dt \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

En utilisant que  $ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v}(t)) \rangle \right| dt \\
& \leq c'_1 h^2 \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(0,t_m,X)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} h_n^2 \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(0,t_m,X)}^2 + \frac{c_5 \varepsilon_1}{2} h^2 \|\mathbf{v}\|_{L^2(0,t_m,X)}^2 \\
& + \frac{1}{2\varepsilon_2} \sum_{n=1}^m \tau_n \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + \frac{c_6 \varepsilon_2}{2} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(0,t_m,X)}^2 \\
& + \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 + c_7 h_n \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(0,t_m,X)}^2.
\end{aligned}$$

En prenant  $h^2 \leq \frac{c_8}{c'_1} h$ ,  $\varepsilon_1 = \frac{c'_1 \max(c_7, c_8)}{c_5 c_8}$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{\nu}{16c_6}$  et  $h \leq \frac{\nu}{16 \max(c_7, c_8)}$  et en intercalant  $\bar{\mathbf{u}}_h^n$  dans le deuxième terme de l'inégalité précédente, on déduit que :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\mathbf{v}(t)) \rangle \right| dt \\
& \leq \frac{3\nu}{16} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(0,t_m,X)}^2 + c_9 \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(0,t_m,X)}^2 + c_{10} \sum_{n=1}^m \tau_n \|\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 \\
& + c_{10} \sum_{n=1}^m \tau_n \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2.
\end{aligned}$$

En combinant les résultats ci-dessus dans (5.4), on déduit que :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{v}(s)\|_X^2 ds & \leq C_2 \left( \|\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right. \\
& + \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s)\|_X^2 \|\mathbf{v}(s)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 ds \\
& \left. + \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \|\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 \right).
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème 4.2.9 pour majorer  $\|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(0,t_m,X)}^2$  et l'égalité (4.17) on a :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{v}(s)\|_X^2 ds &\leq C_3 \left( \|\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2) \right. \\ &\quad + \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s)\|_X^2 \|\mathbf{v}(s)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 ds \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h\|_X^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant le corollaire 4.2.8, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{v}(s)\|_X^2 ds &\leq C_4 \left( \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n(\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \tau_n(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2) \right. \\ &\quad + \|\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 + \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 \\ &\quad + \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s)\|_X^2 \|\mathbf{v}(s)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 ds \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 \right) \right). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall (4.2.1) avec les fonctions données dans chaque intervalle  $[t_{n-1}, t_n]$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u(t_m) &= \|\mathbf{v}(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{v}(s)\|_X^2 ds \\ k(s) &= C_4 \|\mathbf{u}(s)\|_X^2 \\ f(t_m) &= C_4 \left( \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n(\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \tau_n(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2) + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 \right) \right). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}(s)\|_X^2 ds &\leq +C_5 \left( \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n(\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \tau_n(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right. \\ &\quad \left. + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2) + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 + \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + \int_0^{t_m} f(s) \|\mathbf{u}(s)\|_X^2 \exp \left( \int_s^{t_m} \|\mathbf{u}(\tau)\|_X^2 d\tau \right) ds \right). \end{aligned}$$

On utilise le fait que pour chaque  $s \leq t_m$ ,  $f(s) \leq f(t_m)$ , et on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}(s)\|_X^2 ds &\leq C_6 \left[ f(t_m) \right. \\ &\quad \left. + f(t_m) \exp \left( \int_0^T \|\mathbf{u}(\tau)\|_X^2 d\tau \right) \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s)\|_X^2 ds \right). \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité (2.1), pour obtenir

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{u}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}(s)\|_X^2 ds \\
& \leq +C\tau \left( \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n(\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \tau_n(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2) + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 \right. \\
& \quad \left. + \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_\kappa^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 \right).
\end{aligned}$$

D'où on a l'inégalité (5.1).  $\square$

**Corollaire 5.1.2** *On se place sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 5.1.1. On a l'estimation a posteriori suivante entre la vitesse  $\bar{\mathbf{u}}$  solution du problème  $(\overline{FV})$  et la vitesse  $\bar{\mathbf{u}}_h$  correspondante aux solutions  $\bar{\mathbf{u}}_h^n$  du problème  $(\overline{FV}_{n,h})$  :*

$$\begin{aligned}
& \|\bar{\mathbf{u}}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}_h^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \int_0^{t_m} \|\bar{\mathbf{u}}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds \leq C \left( \sum_{n=1}^m \tau_n \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n(\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \tau_n(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2) \right) \right. \\
& \quad \left. + \|\mathbf{f} - \pi_\tau \mathbf{f}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{L^2(0,t_m;X')}^2 \right). \tag{5.6}
\end{aligned}$$

**Preuve :** D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}
& \|\bar{\mathbf{u}}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}_h^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \int_0^{t_m} \|\bar{\mathbf{u}}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds \leq \|\bar{\mathbf{u}}(t_m) - \mathbf{u}(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
& \quad + \|\mathbf{u}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}_h^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \int_0^{t_m} \|\bar{\mathbf{u}}(s) - \mathbf{u}(s)\|_X^2 ds + \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds. \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Or en utilisant le corollaire 4.2.8 et le théorème 5.1.1 on obtient le résultat.  $\square$

Pour déduire la majoration globale, il reste à majorer la quantité :

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 dt.$$

**Théorème 5.1.3** *On a l'estimation a posteriori suivante entre  $\bar{\mathbf{u}}$  la solution du problème  $(\overline{FV})$  et la vitesse correspondant aux solutions  $\bar{\mathbf{u}}_h^n$  du problème  $(\overline{FV}_{n,h})$  :*

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 ds \leq c \left( \int_0^{t_m} \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 ds + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa}^\tau)^2 \right). \tag{5.8}$$

**Preuve :** On considère la vitesse  $\bar{\mathbf{u}}$  solution du problème  $(\overline{FV})$  et la vitesse correspondant aux solutions  $\bar{\mathbf{u}}_h^n$  du problème  $(\overline{FV}_{n,h})$ . Pour  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$ ,

$$\begin{aligned}
& \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 \leq (\|\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X + \|\bar{\mathbf{u}}_h(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X)^2 \\
& \leq \left( \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X + \left| \frac{t - t_n}{\tau_n} \right| \|\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X \right)^2.
\end{aligned}$$



On utilise  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ ,

$$\|\bar{\mathbf{u}}(t) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 \leq 2 \left( \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 + \left(\frac{t - t_n}{\tau_n}\right)^2 \|\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 \right).$$

En intégrant entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  et en sommant sur  $n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 ds \\ & \leq c \left( \int_0^{t_m} \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 ds + \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\frac{t - t_n}{\tau_n}\right)^2 \|\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 ds \right) \\ & \leq c \left( \int_0^{t_m} \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 ds + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n \|\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{H^1(\kappa_n)}^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant (4.17) on obtient (5.8). □

Dans ce qui suit, on majore la norme du terme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h).$$

**Théorème 5.1.4** *Sous les mêmes hypothèses que dans le corollaire 5.1.2, on a l'estimation a posteriori suivante entre la solution  $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})$  du problème  $(\overline{FV})$  et  $(\bar{\mathbf{u}}_h, \bar{p}_h)$  associée aux solutions du problème  $(\overline{FV}_{n,h})$ , pour  $1 \leq n \leq m$ , avec  $m \in \{1, \dots, N\}$*

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h) \right\|_{L^2(0,t_m,X')} \\ & \leq C \left( \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2) + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \right. \\ & \left. + \tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 p + \tau_n \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2) + \|\mathbf{f} - \pi_\tau \bar{\mathbf{f}}\|_{L^2(0,t_m,X')}^2 + \|\bar{\mathbf{f}} - \pi_\tau \bar{\mathbf{f}}\|_{L^2(0,t_m,X')}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

**Preuve :** Les solutions des problèmes  $(\overline{FV})$  et  $(\overline{FV}_{n,h})$  vérifient pour tout  $t \in ]t_{n-1}, t_n]$  et  $\forall \bar{\mathbf{v}}(t) \in Z$ ,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \bar{\mathbf{v}} \right) + \nu(\nabla(\bar{\mathbf{u}} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \nabla(\bar{\mathbf{v}})) - (\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}, \bar{p}(t) - \bar{p}_h(t)) \\ & + (\bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}(t) - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \bar{\mathbf{v}}) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \bar{\mathbf{v}}) + (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}})) \\ & = \langle \bar{\mathbf{f}}(t), \bar{\mathbf{v}} \rangle - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}, \bar{\mathbf{v}}) - \nu(\nabla(\pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \nabla(\bar{\mathbf{v}})) + (\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}, \bar{p}_h(t)) \\ & \quad - (\pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \bar{\mathbf{v}}) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \bar{\mathbf{v}}). \end{aligned} \quad (5.10)$$

En effet on part de l'équation  $(\overline{FV})$  et on intercale  $\bar{\mathbf{u}}_h(t)$  dans le premier terme,  $\pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)$  dans le deuxième terme,  $\pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)$  dans le troisième terme et  $\bar{p}_h(t)$  dans le quatrième terme et on intercale le terme  $\frac{1}{2} (\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \bar{\mathbf{v}})$ . On obtient (5.10) en utilisant la définition de  $\bar{\mathbf{u}}_h$ . En intercalant  $(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}))$  et  $(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}))$  on peut démontrer facilement que :

$$\begin{aligned} & \langle \bar{\mathbf{f}}(t), \bar{\mathbf{v}} \rangle - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}, \bar{\mathbf{v}}) - \nu(\nabla(\pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \nabla(\bar{\mathbf{v}})) + (\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}, \bar{p}_h(t)) \\ & - (\pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \bar{\mathbf{v}}) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \bar{\mathbf{v}}) \\ & = \langle \bar{\mathbf{f}}(t) - \bar{\mathbf{f}}_h^n + R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t) + R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \bar{\mathbf{v}} \rangle. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \bar{\mathbf{v}} \right) + (\bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}(t) - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \bar{\mathbf{v}}) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \bar{\mathbf{v}}) \\
& - (\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}, \bar{p}(t) - \bar{p}_h(t)) \\
& = -\nu (\nabla (\bar{\mathbf{u}} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \nabla (\bar{\mathbf{v}})) + \langle \bar{\mathbf{f}}(t) - \bar{\mathbf{f}}_h^n + R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t) + R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \bar{\mathbf{v}} \rangle \\
& - (\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}})).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Or,

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}(t) - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t) - \frac{1}{2} \operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t) + \nabla (\bar{p} - \bar{p}_h)(t) \right\|_{X'} \\
& = \sup_{\bar{\mathbf{v}} \in X} \frac{1}{\|\bar{\mathbf{v}}\|_X} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \bar{\mathbf{v}} \right) + (\bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}(t) - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \bar{\mathbf{v}}) \\
& \quad - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t), \bar{\mathbf{v}}) - (\bar{p}(t) - \bar{p}_h(t), \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}) \\
& = \sup_{\bar{\mathbf{v}} \in X} \frac{1}{\|\bar{\mathbf{v}}\|_X} \left( -\nu (\nabla (\bar{\mathbf{u}} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \nabla (\bar{\mathbf{v}})) + \langle \bar{\mathbf{f}}(t) - \bar{\mathbf{f}}_h^n + R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t) \right. \\
& \quad \left. + R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \bar{\mathbf{v}} \rangle - (\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}})) \right).
\end{aligned}$$

Pour le premier terme du second membre, on a :

$$\nu ((\nabla \bar{\mathbf{u}}(t) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)), \nabla \bar{\mathbf{v}}) \leq \nu \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X \|\bar{\mathbf{v}}\|_X.$$

Par ailleurs, en intercalant  $\langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)(t), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}(t)) \rangle$  dans le troisième terme  $(\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}))$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}(t)) \rangle \\
& = \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)(t), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}(t)) \rangle + \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)(t), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}(t)) \rangle. \\
& = \langle (\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}(t)) \rangle + \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}(t)) \rangle \\
& \quad + \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}(t)) \rangle.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

En prenant  $\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}) \in L^\infty(0, T, L^\infty(\Omega))$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}) \rangle & \leq C'_1 h^2 \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X \|\bar{\mathbf{v}}\|_X \\
& \quad + C'_2 \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{\mathbf{v}}\|_X \\
& \quad + C'_3 h \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X \|\bar{\mathbf{v}}\|_X.
\end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, on intercale  $\bar{\mathbf{f}}^n$ , on utilise Cauchy-Schwarz, on prend  $\bar{\mathbf{v}}_h = C_{nh}\bar{\mathbf{v}}$  et on utilise (4.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
& |\langle \bar{\mathbf{f}}(t) - \bar{\mathbf{f}}^n + \bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n + R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t) + R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \bar{\mathbf{v}} \rangle| \\
& \leq |\langle \bar{\mathbf{f}}(t) - \bar{\mathbf{f}}^n, \bar{\mathbf{v}} \rangle| + |\langle \bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n, \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_h \rangle| + |\langle R^{h,1}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_h \rangle| \\
& \quad + |\langle R^{h,2}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t), \bar{\mathbf{v}} \rangle| \\
& \leq \|\bar{\mathbf{f}}(t) - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{X'} \|\bar{\mathbf{v}}\|_X + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} ch_{\kappa_n} \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\bar{\mathbf{v}}\|_{L^2(\kappa_n)^2} \\
& \quad + C'_5 \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 \right)^{1/2} \|\bar{\mathbf{v}}\|_X + C'_6 \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right)^{1/2} \|\bar{\mathbf{v}}\|_X.
\end{aligned}$$

D'où en prenant  $h^2 \leq ch$  et  $h \leq \min(\frac{1}{C'_1}, \frac{1}{C'_3})$ , on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) \nabla \bar{\mathbf{u}} - \pi_{l,\tau}(\bar{\mathbf{u}}_h)(t) \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t) - \frac{1}{2} \operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t) + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h)(t) \right\|_{X'} \\
& \leq C'_9 \left( \|(\bar{\mathbf{u}} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t)\|_X^2 + \|\bar{\mathbf{f}}(t) - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{X'}^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} ch_{\kappa_n}^2 \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_X^2 + \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_X^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

On intègre sur  $t$  entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$ , on somme sur  $n$  allant de 1 à  $m$ , pour  $\bar{\mathbf{f}}^n = \pi_\tau \bar{\mathbf{f}}$  et en utilisant le théorème 5.1.3 pour le premier terme du second membre et en intercalant  $\bar{\mathbf{u}}_h^n$  au niveau du sixième terme et en utilisant 5.1.2, on obtient (5.9). □

## 5.2 Conclusion

**Corollaire 5.2.1** *Sous les mêmes hypothèses que dans le corollaire 5.1.2, on a que la pression et la vitesse filtrées vérifient la majoration d'erreur a posteriori globale désirée suivante :*

$$\begin{aligned}
& [(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)]^2(t_m) \\
& + \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h) + \bar{\mathbf{u}} \nabla \bar{\mathbf{u}} - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h) \right\|_{L^2(0,t_m,X')} \\
& \leq C \left( \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2) + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 \right. \\
& \quad \left. + \tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + \|\bar{\mathbf{f}} - \pi_\tau \bar{\mathbf{f}}\|_{L^2(0,t_m,X')}^2 + \|\bar{\mathbf{f}} - \pi_\tau \bar{\mathbf{f}}\|_{L^2(0,t_m,X')}^2 \right).
\end{aligned} \tag{5.14}$$

**Preuve :** On part de la définition de  $[(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)]^2(t_n)$  :

$$\begin{aligned}
[(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)]^2(t_m) & \leq \|\bar{\mathbf{u}}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
& \quad + \nu \max \left( \int_0^{t_m} \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 dt, \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 dt \right).
\end{aligned}$$

On utilise (5.8) et la définition de  $\bar{\mathbf{u}}_h$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & [[\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h]]^2(t_m) \\ & \leq \|\bar{\mathbf{u}}(t_m) - \bar{\mathbf{u}}_h(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu \max \left( \int_0^{t_m} \|\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h(t)\|_X^2 dt, \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 \right). \end{aligned}$$

Or d'après le corollaire 5.1.2 et l'équation (5.9), on obtient le résultat. □

## Chapitre 6

# Les majorations des indicateurs

Dans ce chapitre, on démontre une majoration des indicateurs.

### 6.1 Majoration de $(\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2$

Dans la suite, pour pouvoir estimer l'indicateur  $(\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2$ , on vérifie la propriété suivante pour l'opérateur défini dans (4.6) : Pour tout  $\bar{\mathbf{v}}_1$  et  $\bar{\mathbf{v}}_2$  appartenant à  $Z$ , on a :

$$\|\nu_{th}(\bar{\mathbf{v}}_1) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{v}}_2)\|_{L^2(\kappa_n)} \leq ch_{\kappa_n}^2 \|\mathbb{D}((\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2)(\mathbf{x}))\|_{L^2(\kappa_n)}. \quad (6.1)$$

En effet :

$$\|\nu_{th}(\bar{\mathbf{v}}_1) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{v}}_2)\|_{L^2(\kappa_n)} = \left( \int_{\kappa_n} |\nu_{th}(\bar{\mathbf{v}}_1) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{v}}_2)|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or,

$$\begin{aligned} |\nu_{th}(\bar{\mathbf{v}}_1) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{v}}_2)| &\leq \frac{1}{|\kappa_n|} \int_{\kappa_n} |\nu_t(\bar{\mathbf{v}}_1)(\mathbf{x}) - \nu_t(\bar{\mathbf{v}}_2)(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{1}{|\kappa_n|} \int_{\kappa_n} ch_{\kappa_n}^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2)(\mathbf{x})\|_F d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\|\nu_{th}(\bar{\mathbf{v}}_1) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{v}}_2)\|_{L^2(\kappa_n)} \leq \frac{|\kappa_n|^{1/2}}{|\kappa_n|} ch_{\kappa_n}^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2)(\mathbf{x})\|_{L^2(\kappa_n)} |\kappa_n|^{1/2}.$$

**Théorème 6.1.1** Soit  $\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}) \in L^\infty(0, T, \Omega)$ ,  $h_{\kappa_n} \leq c\tau_n$ . On a l'estimation suivante :

$$\tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 \leq C_3 L(w_{\kappa_n}) \quad (6.2)$$

où

$$\begin{aligned} &L(W) \\ &= \left( |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(W)^2)}^2 + \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(W))^2}^2 + \tau_n \sum_{\kappa'_n \in W} h_{\kappa'_n}^2 \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa'_n)^2}^2 \right. \\ &+ \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(W)^2)}^2 \\ &\left. + |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(W)^2)}^2 + \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(W))}^2 \right), \end{aligned} \quad (6.3)$$

et  $w_{\kappa_n}$  désigne la réunion des éléments de  $\mathcal{T}_{nh}$  qui ont au moins une arête commune avec  $\kappa_n$ .

**Preuve :** On procède en 4 étapes :

1. On considère  $t \in ]t_{n-1}, t_n[$  et on ajoute et on retranche les deux termes  $\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))$  et  $\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))$  au quatrième membre de  $(\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2$  et on obtient :

$$\begin{aligned} \|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)}^2 &\leq 2\|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \\ &\quad + 2\|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^2(\kappa_n)}^2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

On intercale  $\nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))$  et  $\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}(t))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))$  au niveau du dernier terme du membre de droite (6.4) et on obtient :

$$\begin{aligned} \|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)}^2 &\leq 2\|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \\ &\quad + 4\|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t)))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + 8\|(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}(t)) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \\ &\quad + 8\|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t)) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}(t)))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^2(\kappa_n)}^2. \end{aligned} \quad (6.5)$$

En intégrant entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$ , on majore le premier terme du membre droit de (6.5) par :

$$\begin{aligned} &\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt \\ &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \int_{\kappa_n} \left[ \left( ch_{\kappa_n}^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_F - \frac{1}{|\kappa_n|} \int_{\kappa_n} ch_{\kappa_n}^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_F d\mathbf{x} \right) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}(t)) \right]^2 d\mathbf{x} \right) dt \\ &\leq c^2 h_{\kappa_n}^4 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_{L^\infty(\kappa_n)}^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité inverse, le fait que  $h_{\kappa_n} \leq c\tau_n$  et l'équation (3.18), on a :

$$\begin{aligned} &\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt \\ &\leq c' h_{\kappa_n} \tau_n \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt \\ &\leq c_1 h_{\kappa_n} |\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^\infty(0,T,\Omega)}$  est bornée, on majore le deuxième terme du membre droit du (6.5) par :

$$\begin{aligned} &\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t)))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt \\ &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \int_{\kappa_n} \left[ ch_{\kappa_n}^2 (\|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_F - \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))\|_F) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t)) \right]^2 d\mathbf{x} \right) dt \\ &\leq c^2 h_{\kappa_n}^4 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^\infty(0,T,\Omega)}^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt \\ &\leq c_2 h_{\kappa_n}^4 |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2. \end{aligned}$$

De la même manière et en utilisant (6.1), on majore le troisième terme du membre de droite de (6.5) par :

$$\begin{aligned} & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}(t)) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt \\ & \leq \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^\infty(0,T,\Omega)}^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}(t)) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt \\ & \leq c_3 h_{\kappa_n}^4 |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t)) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}(t)))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt \leq c_4 \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))}^2.$$

En regroupant tous les inégalités précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt \leq c_1 h_{\kappa_n} |\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2 \\ & + c_5 h_{\kappa_n}^4 |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2 + c_4 \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))}^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

2. En utilisant l'équation (4.14), la solution  $\bar{\mathbf{u}}$  du problème  $(\overline{FV})$  et la solution  $\bar{\mathbf{u}}_h$  associée à la solution  $(\bar{\mathbf{u}}_h^n)_{0 \leq n \leq m}$  du problème  $(\overline{FV}_{n,h})$  vérifient :  $\forall \bar{\mathbf{v}} \in Z, \mathbf{v}_h = 0 \in X_{nh}$  et  $t \in ]t_{n-1}, t_n], 1 \leq n \leq m$ ,

$$\begin{aligned} & (\bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}), \bar{\mathbf{v}}) + (\operatorname{div}(\bar{\mathbf{v}}), \bar{p}_h^n) - (\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n, \bar{\mathbf{v}}) \\ & - \frac{1}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n, \bar{\mathbf{v}}) - \nu(\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \nabla(\bar{\mathbf{v}}) - (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}})) \\ & = (\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t), \bar{\mathbf{v}}) + \nu(\nabla(\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n), \nabla(\bar{\mathbf{v}})) + (\bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n, \bar{\mathbf{v}}) \\ & - \frac{1}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n, \bar{\mathbf{v}}) - (\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}, \bar{p}(t) - \bar{p}_h(t)) - \langle \bar{\mathbf{f}}(t) - \bar{\mathbf{f}}^n, \bar{\mathbf{v}} \rangle - \langle \bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n, \bar{\mathbf{v}} \rangle \\ & + \langle \nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}) \rangle. \end{aligned} \quad (6.7)$$

(1) Premièrement, on prend :

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n} = \begin{cases} (\bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nabla \bar{p}_h^n + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \\ \quad - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n) \psi_{\kappa_n} & \text{sur } \kappa_n, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \kappa_n, \end{cases}$$

avec  $\psi_{\kappa_n}$  la fonction bulle qui est égale au produit des coordonnées barycentriques associées de  $\kappa_n$ .  
En intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}
& \int_{\kappa_n} \left( \bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n - \nabla \bar{p}_h^n \right) (\mathbf{x}) \bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \int_{\kappa_n} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h)(t) \right) \bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n} d\mathbf{x} \quad (6.8) \\
& \quad + \int_{\kappa_n} \nu \nabla(\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n) \nabla(\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}) d\mathbf{x} - \int_{\kappa_n} (\bar{\mathbf{f}}(t) - \bar{\mathbf{f}}^n) \bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n} d\mathbf{x} - \int_{\kappa_n} (\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n) \bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n} d\mathbf{x} \\
& \quad + \int_{\kappa_n} (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t)) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

En remplaçant  $\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}$  par sa valeur et en intégrant entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$ , on aboutit à :

$$\begin{aligned}
& \tau_n \left\| \left( \bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nabla \bar{p}_h^n + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right) \psi_{\kappa_n}^{1/2} \right\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \\
& \leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t) + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}})(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h)(t) \right\|_{H^{-1}(\kappa_n)} \right. \\
& \quad \left. \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{H^1(\kappa_n)} + \nu \|\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{H^1(\kappa_n)} \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{H^1(\kappa_n)} + \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{H^{-1}(\kappa_n)} \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{H^1(\kappa_n)} + \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)} \right. \\
& \quad \left. \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{L^2(\kappa_n)} \right) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)} \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n})\|_{L^2(\kappa_n)} dt. \quad (6.9)
\end{aligned}$$



La relation de Cauchy-Schwarz permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
& \tau_n \left\| \left( \bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nabla \bar{p}_h^n + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right) \psi_{\kappa_n}^{1/2} \right\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \\
& \leq \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n)^2)} \\
& \quad \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} (|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}|_{H^1(\kappa_n)}^2) dt \right)^{1/2} + \nu \|\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} (|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}|_{H^1(\kappa_n)}^2) dt \right)^{1/2} \\
& \quad + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)} \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{L^2(\kappa_n)} dt + \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n)^2)} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} (|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}|_{H^1(\kappa_n)}^2) dt \right)^{1/2} \\
& \quad + \left\| (\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}|_{H^1(\kappa_n)}^2 dt \right)^{1/2} \\
& \leq c_6 \left( \tau_n^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n)^2)} |\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}|_{H^1(\kappa_n)}^2 + \nu \tau_n^{\frac{1}{2}} \|\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)} \cdot |\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}|_{H^1(\kappa_n)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \tau_n \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)} \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{L^2(\kappa_n)} + \tau_n^{\frac{1}{2}} \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n)^2)} |\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}|_{H^1(\kappa_n)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \tau_n^{\frac{1}{2}} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))} \cdot |\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}|_{H^1(\kappa_n)}^2 \right).
\end{aligned}$$

En multipliant par  $h_{\kappa_n}^2$  et en utilisant (4.1.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \tau_n h_{\kappa_n}^2 \left\| \left( \bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nabla \bar{p}_h^n + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right) \psi_{\kappa_n}^{1/2} \right\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \\
& \leq c_7 \left( \tau_n^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n)^2)} h_{\kappa_n} \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \nu \tau_n^{\frac{1}{2}} \|\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)} \cdot h_{\kappa_n} \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \tau_n h_{\kappa_n} \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)} h_{\kappa_n} \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \tau_n^{\frac{1}{2}} \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n)^2)} h_{\kappa_n} \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \tau_n^{\frac{1}{2}} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))} h_{\kappa_n} \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \right).
\end{aligned}$$

La relation  $a.b \leq \frac{1}{2\varepsilon}a^2 + \frac{\varepsilon}{2}b^2$  permet d'avoir :

$$\begin{aligned}
& \tau_n h_{\kappa_n}^2 \left\| \left( \bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nabla \bar{p}_h^n + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right) \psi_{\kappa_n}^{1/2} \right\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \\
& \leq c_8 \left( \frac{1}{2\varepsilon_1} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \right. \\
& \left. \left. + \nabla (\bar{p} - \bar{p}_h) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n))}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \nu \|\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n))}^2 \right) \quad (6.10) \\
& + \frac{\varepsilon_2}{2} \tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} \tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \frac{\varepsilon_3}{2} \tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \\
& + \frac{1}{2\varepsilon_4} \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n))}^2 + \frac{\varepsilon_4}{2} \tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \\
& + \frac{1}{2\varepsilon_5} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))}^2 + \frac{\varepsilon_5}{2} \tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}\|_{L^2(\kappa_n)}^2).
\end{aligned}$$

On intercale  $\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)$  et  $\nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t)) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)$  dans  $\|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)}^2$  :

$$\begin{aligned}
& \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t)) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t)) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \leq C_1 \left( \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t)) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_{L^2(\kappa_n)} \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)} \right. \\
& \left. + \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t)) (\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t)) - \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n))\|_{L^2(\kappa_n)} + \|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)} \right). \quad (6.11)
\end{aligned}$$

Or en intégrant entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  et en utilisant l'inégalité inverse, l'inégalité (3.18) et le fait que  $h_{\kappa_n} \leq c\tau_n$ , on majore le premier terme du membre droit du (6.11) par :

$$\begin{aligned}
& \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t)) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt \\
& = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \int_{\kappa_n} \left[ ch_{\kappa_n}^2 (\|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))\|_F - \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_F \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|)^2 d\mathbf{x} \right] dt \\
& \leq c^2 h_{\kappa_n}^4 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \int_{\kappa_n} \left[ \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_F \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\| \right]^2 d\mathbf{x} \right) dt \\
& \leq c^2 h_{\kappa_n}^4 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^\infty(\kappa_n)}^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt \\
& \leq c^2 h_{\kappa_n} \|\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n))}^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant que  $\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}) \in L^\infty(0, T, \Omega)$ , le deuxième terme du membre droit du (6.11) peut être majoré de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
& \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t)) - \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n))\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt \\
&= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \int_{\kappa_n} \left[ ch_{\kappa_n}^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t))\|_F \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n) \right]^2 d\mathbf{x} \right) dt \\
&\leq c^2 h_{\kappa_n}^4 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^\infty(0, T, \Omega)}^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt \\
&\leq c^2 h_{\kappa_n}^4 |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2.
\end{aligned}$$

En utilisant (6.6) et en regroupant tous les inégalités précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}(t)) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt \leq C_2 \left( |\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2 \right. \\
& \left. + |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2 + \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))}^2 \right). \tag{6.12}
\end{aligned}$$

En remplaçant  $\bar{\mathbf{v}}_{\kappa_n}$  par sa valeur et en utilisant la propriété (4.1.1) et (6.12), l'inégalité (6.10) sera de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& c\tau_n h_{\kappa_n}^2 \left\| \left( \bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nabla \bar{p}_h^n + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right) \right\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 \\
& \leq c_9 \left( \frac{1}{2\varepsilon_1} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \right. \\
& \left. \left. + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n)^2)}^2 + \frac{1}{2(\varepsilon_2 + \varepsilon_5)} |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} \tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2\varepsilon_4} \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n)^2)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_5} |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5}{2} \right. \\
& \left. c'^2 \tau_n h_{\kappa_n}^2 \left\| \left( \bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nabla \bar{p}_h^n + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right) \right\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_5} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))}^2 \right).
\end{aligned}$$

Et en choisissant  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \frac{c}{50c'^2 c_9}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \tau_n h_{\kappa_n}^2 \left\| \left( \bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nabla \bar{p}_h^n + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right) \right\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 \leq L(\kappa_n). \tag{6.13}
\end{aligned}$$

où la définition de  $L(W)$  est donnée par (6.3).

(2) Deuxièmement : Pour tout  $e_n \in \varepsilon_{\kappa_n}$ , on note par  $\kappa'_n$  l'autre élément contenant  $e_n$ . On introduit la fonction :

$$R_{n, e_n}^{h, 1} = [(\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n))\mathbf{n} - \bar{p}_h^n \mathbf{n}]_{e_n}. \tag{6.14}$$

On prend  $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_{e_n} = \mathcal{L}_{e_n}(R_{n,e_n}^{h,1} \psi_{e_n})$  qui se prolonge par 0 à  $\Omega$  dans (6.7). Par définition  $\bar{\mathbf{v}}_{e_n} = \mathcal{L}_{e_n}(R_{n,e_n}^{h,1} \psi_{e_n})$  est l'opérateur de relèvement qui est à support sur au plus de deux éléments de  $\tau_{nh}$  qui contiennent  $e_n$ . Par suite :

$$\begin{aligned}
& \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} \left( \bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n - \nabla \bar{p}_h^n \right) (\mathbf{x}) \bar{\mathbf{v}}_{e_n}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{e_n} R_{n,e_n}^{h,1} (R_{n,e_n}^{h,1} \psi_{e_n}) \\
& = \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h)(t) \right) \bar{\mathbf{v}}_{e_n} d\mathbf{x} \\
& \quad + \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} \nu \nabla(\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n) : \nabla(\bar{\mathbf{v}}_{e_n}) d\mathbf{x} - \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} (\bar{\mathbf{f}}(t) - \bar{\mathbf{f}}^n) \bar{\mathbf{v}}_{e_n} d\mathbf{x} - \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} (\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n) \bar{\mathbf{v}}_{e_n} d\mathbf{x} \\
& \quad + \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) : \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}_{e_n}) d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
& - \int_{e_n} R_{n,e_n}^{h,1} (R_{n,e_n}^{h,1} \psi_{e_n}) \\
& = \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t) + \bar{\mathbf{u}}(t) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h)(t) \right) \bar{\mathbf{v}}_{e_n} d\mathbf{x} \\
& \quad + \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} \nu \nabla(\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}_h^n) : \nabla(\bar{\mathbf{v}}_{e_n}) d\mathbf{x} - \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} (\bar{\mathbf{f}}(t) - \bar{\mathbf{f}}^n) \bar{\mathbf{v}}_{e_n} d\mathbf{x} - \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} (\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n) \bar{\mathbf{v}}_{e_n} d\mathbf{x} \\
& \quad + \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) : \mathbb{D}(\bar{\mathbf{v}}_{e_n}) d\mathbf{x} \\
& \quad - \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} \left( \bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n - \nabla \bar{p}_h^n \right) (\mathbf{x}) \bar{\mathbf{v}}_{e_n}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Or, en intègrant (6.16) entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  et en appliquant Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \tau_n \|R_{n,e_n}^{h,1}(\psi_{e_n})\|_{L^2(e_n)}^2 \\
& \leq \left\| \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h) + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2)} \\
& \quad \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\bar{\mathbf{v}}_{e_n}|_{H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \nu \|\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2)} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\bar{\mathbf{v}}_{e_n}|_{H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2)} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\bar{\mathbf{v}}_{e_n}|_{H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2} \|\bar{\mathbf{v}}_{e_n}\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2} dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \\
& \quad + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n - \nabla \bar{p}_h^n \|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2} \\
& \quad \|\bar{\mathbf{v}}_{e_n}\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2} dt \\
& \quad + \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n))} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\bar{\mathbf{v}}_{e_n}|_{H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2}^2 dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

En multipliant par  $h_{e_n}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \tau_n h_{e_n} \|R_{n,e_n}^{h,1}(\psi_{e_n})\|_{L^2(e_n)}^2 \\
& \leq c_{10} \left( \left\| \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h) + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2)} \right. \\
& \quad \tau_n^{\frac{1}{2}} h_{e_n} |\bar{\mathbf{v}}_{e_n}|_{H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2} + \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2)} \tau_n^{\frac{1}{2}} h_{e_n} |\bar{\mathbf{v}}_{e_n}|_{H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2} \\
& \quad + \tau_n^{\frac{1}{2}} h_{e_n} \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2} \tau_n^{\frac{1}{2}} \|\bar{\mathbf{v}}_{e_n}\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2} \\
& \quad + \tau_n^{\frac{1}{2}} h_{e_n} \|\bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \\
& \quad - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n - \nabla \bar{p}_h^n \|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2} \tau_n^{\frac{1}{2}} \|\bar{\mathbf{v}}_{e_n}\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2} \\
& \quad + \nu \|\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2)} \tau_n^{\frac{1}{2}} h_{e_n} \|\bar{\mathbf{v}}_{e_n}\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2} \\
& \quad \left. \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n))} \tau_n^{\frac{1}{2}} h_{e_n} \|\bar{\mathbf{v}}_{e_n}\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2} \right).
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité  $a.b \leq \frac{1}{2\varepsilon}a^2 + \frac{\varepsilon}{2}b^2$ , pour le second membre, et on utilise l'inégalité (6.12), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \tau_n h_{e_n} \|R_{n,e_n}^{h,1}(\psi_{e_n})^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e_n)}^2 \\
& \leq c_{11} \left( \frac{1}{2\varepsilon_6} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h) + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n \cup \kappa'_n))^2} \right. \\
& \quad + \frac{\varepsilon_6}{2} \tau_n h_{e_n}^2 |\bar{\mathbf{v}}_{e_n}|_{H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_7} \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n \cup \kappa'_n))^2}^2 + \frac{\varepsilon_7}{2} \tau_n h_{e_n}^2 |\bar{\mathbf{v}}_{e_n}|_{H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)}^2 \\
& \quad + \frac{1}{2\varepsilon_8} \tau_n h_{e_n}^2 \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)}^2 + \frac{\varepsilon_8}{2} \tau_n \|\bar{\mathbf{v}}_{e_n}\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_9} \tau_n h_{e_n}^2 \|\bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \\
& \quad + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n - \nabla \bar{p}_h^n \|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)}^2 \\
& \quad + \frac{\varepsilon_9}{2} \tau_n \|\bar{\mathbf{v}}_{e_n}\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)}^2 + \frac{1}{2(\varepsilon_{10} + \varepsilon_{11})} |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n))^2}^2 + \frac{\varepsilon_{10}}{2} \tau_n h_{e_n}^2 |\bar{\mathbf{v}}_{e_n}|_{H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)}^2 \\
& \quad + \frac{1}{2\varepsilon_{11}} |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n))^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_{11}} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))}^2 \\
& \quad \left. + \frac{\varepsilon_{11}}{2} \tau_n h_{e_n} |\bar{\mathbf{v}}_{e_n}|_{H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)}^2 \right) \\
& \leq c_{12} \left( \frac{1}{2\varepsilon_6} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h) + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n \cup \kappa'_n))^2} \right. \\
& \quad + \frac{1}{2\varepsilon_7} \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n \cup \kappa'_n))^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_8} \tau_n h_{e_n}^2 \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)}^2 \\
& \quad + \frac{1}{2\varepsilon_9} \tau_n h_{e_n}^2 \|\bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \\
& \quad - \nabla \bar{p}_h^n \|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)}^2 + \frac{1}{2(\varepsilon_{10} + \varepsilon_{11})} |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n))^2}^2 + \frac{\varepsilon_8 + \varepsilon_9}{2} \tau_n \|\bar{\mathbf{v}}_{e_n}\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)}^2 \\
& \quad + \frac{\varepsilon_6 + \varepsilon_7 + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{11}}{2} \tau_n h_{e_n}^2 |\bar{\mathbf{v}}_{e_n}|_{H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_{11}} |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n))^2}^2 \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\varepsilon_{11}} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n))}^2 \right).
\end{aligned}$$

Or d'après la propriété  $\|\mathcal{L}_{e_n} \mathbf{v}\|_{L^2(\kappa_n)} + h_{e_n} \|\mathcal{L}_{e_n} \mathbf{v}\|_{H^1(\kappa_n)} \leq ch_{e_n}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{L^2(e_n)}$ , on aura :

$$\begin{aligned}
& \tau_n h_{e_n} \|R_{n,e_n}^{h,1}(\psi_{e_n})^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e_n)}^2 \\
& \leq c_{13} \left( \frac{1}{2\varepsilon_6} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h) + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n \cup \kappa'_n))^2} \right. \\
& \quad + \frac{1}{2\varepsilon_7} \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^{-1}(\kappa_n \cup \kappa'_n))^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_8} \tau_n h_{e_n}^2 \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2}^2 \\
& \quad + \frac{1}{2\varepsilon_9} \tau_n h_{e_n}^2 \|\bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nabla \cdot (\nu_{th} (\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \\
& \quad - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n - \nabla \bar{p}_h^n\|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)^2}^2 + \frac{1}{2(\varepsilon_{10} + \varepsilon_{11})} \|\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n))^2}^2 \\
& \quad + \frac{\varepsilon_6 + \varepsilon_7 + \varepsilon_8 + \varepsilon_9 + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{11}}{2} c^2 \tau_n h_{e_n} \|R_{n,e_n}^{h,1}(\psi_{e_n})\|_{L^2(e_n)}^2 \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\varepsilon_{11}} \|\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n))^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_{11}} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n))}^2 \right).
\end{aligned}$$

En utilisant la première propriété (4.1.2) et en remplaçant  $R_{n,e_n}^{h,1}$  par sa valeur, en prenant  $\varepsilon_6 = \varepsilon_7 = \varepsilon_8 = \varepsilon_9 = \varepsilon_{10} = \varepsilon_{11} = \frac{1}{28 c'^4 c_{13}}$  et en sommant sur  $\partial\kappa_n$ , on obtient :

$$\tau_n \left( \sum_{e_n \in \varepsilon_{\kappa_n}} h_{e_n} \|(\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n + \nu_{th} (\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) \mathbf{n} - \bar{p}_h^n \mathbf{n}\|_{L^2(e_n)}^2 \right) \leq L(w_{\kappa_n}). \quad (6.17)$$

(3) Finalement comme  $\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0$ , on a :

$$\int_{\Omega} q(t, \mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} q(t, \mathbf{x}) \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (6.18)$$

On prend

$$q(t) = q_{\kappa_n}(t) = \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h(t) \xi_{\kappa_n}.$$

où  $\xi_{\kappa_n}$  est la fonction caractéristique de  $\kappa_n$ , on aura :

$$\int_{\kappa_n} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x}) (\operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x}))) d\mathbf{x} = - \int_{\kappa_n} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}.$$

D'après Cauchy-Schwarz, on aura :

$$\|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x})\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \leq \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x})\|_{L^2(\kappa_n)} \|\operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x}))\|_{L^2(\kappa_n)}$$

et par suite

$$\|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x})\|_{L^2(\kappa_n)} \leq \|\operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x}))\|_{L^2(\kappa_n)}.$$

On intègre entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$ ,

$$\|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x})\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))} \leq \|\operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x}))\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))}.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_n}{4} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n(t, \mathbf{x})\|_{L^2(\kappa_n)} & \leq \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x})\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))} \\
& \leq \|\operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x}))\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))} \\
& \leq \sqrt{2} \|(\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}_h(t, \mathbf{x}))\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}.
\end{aligned} \quad (6.19)$$

En combinant (6.6), (6.13), (6.17) et (6.19), on obtient les résultats désirées.  $\square$

On estime maintenant le terme  $(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2$ .

## 6.2 Majoration de $(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2$

**Théorème 6.2.1** Soit  $\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}) \in L^\infty(0, T, \Omega)$ . On a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \tau_n(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 &\leq C_4 \left( h_{\kappa_n} |\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} - \bar{\mathbf{u}}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2 \right. \\ &\quad \left. + h_{\kappa_n}^4 |\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2 + \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))}^2 \right). \end{aligned} \quad (6.20)$$

**Preuve :** On intercale  $\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t)\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t)$  dans  $(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2$  et on utilise le fait que  $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ , on obtient :

$$\|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \leq 2\|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t)\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t)\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + 2\|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t)\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t)\|_{L^2(\kappa_n)}^2.$$

On intercale  $\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t)\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t)$  dans le premier terme à droite

$$\begin{aligned} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)}^2 &\leq 4\|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + 4\|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t)\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \\ &\quad + 2\|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t)\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t)\|_{L^2(\kappa_n)}^2. \end{aligned}$$

Or, en utilisant l'inégalité inverse :

$$\begin{aligned} \|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t))\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)}^2 &= \int_{\kappa_n} \left( ch_{\kappa_n}^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} - \bar{\mathbf{u}}(t))\|_F |\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)| \right)^2 dx \\ &\leq c^2 h_{\kappa_n}^4 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^\infty(\kappa_n)^2}^2 \int_{\kappa_n} \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} - \bar{\mathbf{u}}(t))\|_F^2 dx \\ &\leq c' h_{\kappa_n}^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 |\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} - \bar{\mathbf{u}}(t)|_{H^1(\kappa_n)^2}^2. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le fait que  $\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}) \in L^\infty(0, T, \Omega)$

$$\begin{aligned} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}(t))\|_{L^2(\kappa_n)}^2 &\leq \int_{\kappa_n} \left( ch_{\kappa_n}^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_F |\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}(t))| \right)^2 dx \\ &\leq c^2 h_{\kappa_n}^4 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^\infty(\kappa_n)^2}^2 \int_{\kappa_n} |\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}(t))|^2 dx \\ &\leq c^2 h_{\kappa_n}^4 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^\infty(\kappa_n)^2}^2 |\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}(t)|_{H^1(\kappa_n)^2}^2. \end{aligned}$$

Enfin en regroupant tous les inégalités précédentes, on a :

$$\begin{aligned} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)}^2 &\leq 4c'h_{\kappa_n}^2 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 |\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} - \bar{\mathbf{u}}|_{H^1(\kappa_n)^2}^2 \\ &\quad + 4c^2 h_{\kappa_n}^4 \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t)\|_{L^\infty(\kappa_n)^2}^2 |\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}(t)|_{H^1(\kappa_n)^2}^2 \\ &\quad + 2\|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})(t)\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})(t)\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2. \end{aligned}$$

En intégrant entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  et en utilisant que  $h_n \leq c\tau_n$ , on a :

$$\begin{aligned} \tau_n(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 &\leq \tau_n \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)\|_{L^2(\kappa_n)^2}^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} 4c'' h_{\kappa_n} |\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} - \bar{\mathbf{u}}|_{H^1(\kappa_n)^2}^2 dt \\ &\quad + \|\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^\infty(0, T, \kappa_n)}^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} 4c^2 h_{\kappa_n}^4 |\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}|_{H^1(\kappa_n)^2}^2 + 2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(\kappa_n)}^2 dt. \end{aligned}$$



En utilisant (3.18) et que  $\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}) \in L^\infty(0, T, \Omega)$

$$\begin{aligned} \tau_n(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 &\leq C_1 \left( h_{\kappa_n} |\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} - \bar{\mathbf{u}}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2 + \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))}^2 \right. \\ &\quad \left. + h_{\kappa_n}^4 |\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2 \right). \end{aligned}$$

□

**Remarque 6.2.2** Dans le théorème 6.2.1, le terme  $\|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})\mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(t_{n-1}, t_n, L^2(\kappa_n))}^2$  est une erreur provenant du filtrage effectué au système de Navier-Stokes de départ. Il est de l'ordre de  $h_\kappa^4$  (car il est au carré) et on remarque qu'il est d'ordre plus grand que celui qui le précède ( $h_{\kappa_n} |\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} - \bar{\mathbf{u}}|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2$ ). On peut le considérer comme une erreur de source provenant du filtrage du type Smagorinsky.

Pour finir les estimations des indicateurs, il nous reste à estimer le terme  $\eta_{n,\kappa_n}^\tau$ .

### 6.3 Majoration de $(\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2$

**Théorème 6.3.1** Pour  $t \in [t_{n-1}, t_n]$ , on a l'estimation suivante :

$$(\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 \leq C_5 \left( |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2 + |\bar{\mathbf{u}} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2 \right). \quad (6.21)$$

**Preuve :** En utilisant la définition de  $\bar{\mathbf{u}}_h(t)$ , on obtient  $\forall t \in [t_{n-1}, t_n]$  :

$$\bar{\mathbf{u}}_h(t) - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h(t) = \frac{t - t_n}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}).$$

Alors :

$$\left| \frac{t - t_n}{\tau_n} \|\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})(\mathbf{x})\| \leq \|\nabla(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t, \mathbf{x})\| + \|\nabla(\bar{\mathbf{u}} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t, \mathbf{x})\|.$$

En utilisant la relation  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  et en intégrant sur  $\kappa_n$ , on obtient :

$$\left| \frac{t - t_n}{\tau_n} \right|^2 \|\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})(\mathbf{x})\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \leq 2(\|\nabla(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h)(t, \mathbf{x})\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \|\nabla(\bar{\mathbf{u}} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h)(t, \mathbf{x})\|_{L^2(\kappa_n)}^2).$$

En intégrant entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$  :

$$(\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 \leq 6 \left( |\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2 + |\bar{\mathbf{u}} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h|_{L^2(t_{n-1}, t_n, H^1(\kappa_n)^2)}^2 \right).$$

□

## 6.4 Conclusion

Sous les mêmes hypothèses du théorème 5.1.1, la pression et la vitesse exactes et filtrées vérifient la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h\|_{L^\infty(0,t_m, L^2(\Omega)^2)}^2 + \int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds + \int_0^{t_m} \|\mathbf{u} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h\|_X^2 ds \\
& + \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h + \nabla(p - \bar{p}_h) \right\|_{L^2(0,t_m, X')} \\
& + \|\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h\|_{L^\infty(0,t_m, L^2(\Omega)^2)}^2 + \int_0^{t_m} \|\bar{\mathbf{u}}(s) - \bar{\mathbf{u}}_h(s)\|_X^2 ds + \int_0^{t_m} \|\bar{\mathbf{u}} - \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h\|_X^2 ds \\
& + \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_h) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \cdot \nabla \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} \pi_{l,\tau} \bar{\mathbf{u}}_h \pi_\tau \bar{\mathbf{u}}_h + \nabla(\bar{p} - \bar{p}_h) \right\|_{L^2(0,t_m, X')}^2 \\
& \leq C \left( \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \tau_{nh}} (\tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2) + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \tau_{nh}} (\tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \tau_n h_{\kappa_n}^2 \|\bar{\mathbf{f}}^n - \bar{\mathbf{f}}_h^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \tau_n \|\mathbf{f}^n - \bar{\mathbf{f}}^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2) + \|\mathbf{f} - \pi_\tau \bar{\mathbf{f}}\|_{L^2(0,t_m, X')}^2 + \|\bar{\mathbf{f}} - \pi_\tau \bar{\mathbf{f}}\|_{L^2(0,t_m, X')}^2 \right), \tag{6.22}
\end{aligned}$$

où C est une constante positive. Avec, les majorations (6.2), (6.20) et (6.21). Ce qui prouve l'équivalence entre les indicateurs et l'erreur augmentée.

## Chapitre 7

# Résultats numériques

Pour valider les résultats théoriques, on établit plusieurs simulations numériques en utilisant le logiciel FreeFem++.

On considère le rectangle suivant :

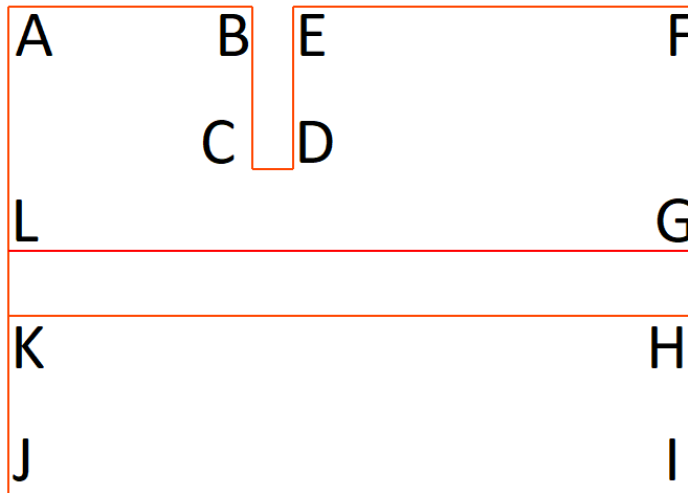


FIGURE 7.1 – Domaine de calcul  $\Omega$

où  $AB = 1.5$ ,  $BC = DE = 1$ ,  $CD = 0.25$ ,  $EF = 2.45$ ,  $FG = AL = 1.5$ ,  $GH = LK = 0.4$ ,  $HI = KJ = 1.1$ ,  $LG = KH = JI = 4.2$ .

On prend  $\Gamma = \partial\Omega$ , et  $\nu = \frac{1}{Re}$  avec  $Re$  le nombre de Reynolds donné. On choisit la densité des forces  $\mathbf{f}$  égale à  $(-2, 0)$  dans le rectangle  $LGHK$  and to  $(0, 0)$  d'autre part. On implémente le schéma itératif

suisant :

$$(\overline{FV}_{n,h}) \left\{ \begin{array}{l} \text{ayant } \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \in X_{n-1h}, \text{ chercher } (\bar{\mathbf{u}}_h^n, \bar{p}_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh} \text{ solution de :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_{nh}, \quad \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h) + \nu (\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n, \nabla \mathbf{v}_h) + (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v}_h)) \\ \quad \quad \quad + d(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}, \bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}_h) - (\bar{p}_h^n, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = \langle \bar{\mathbf{f}}^n, \mathbf{v}_h \rangle, \\ \forall q_h \in M_{nh}, \quad (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n, q_h) = 0, \end{array} \right.$$

On définit l'indicateur d'erreur global de discrétisation  $\eta_n^h$  comme suit :

$$\eta_n^h = \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.1)$$

où

$$\begin{aligned} (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 &= h_{\kappa_n}^2 \left\| \bar{\mathbf{f}}_h^n - \frac{1}{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) + \nabla \cdot ((2\nu + \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n)) - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^n \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_h^n - \nabla \bar{p}_h^n \right\|_{L^2(\kappa_n)}^2 + \left\| \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^n \right\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \varepsilon_{\kappa_n}} h_{e_n} \left\| [(2\nu + \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1})) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) - \bar{p}_h^n \mathbb{I}] \cdot \mathbf{n} \right\|_{L^2(e_n)}^2. \end{aligned}$$

et

$$(\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 = \left\| \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{n-1}) \mathbb{D}(\bar{\mathbf{u}}_h^n) \right\|_{L^2(\kappa_n)}^2.$$

De même on définit l'indicateur du temps  $\eta_n^\tau$  suivant :

$$\eta_n^\tau = \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.2)$$

avec

$$(\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 = \tau_n \left\| \bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_h^{n-1} \right\|_{H^1(\kappa_n)}^2.$$

## 7.1 Résultats sur maillages uniformes

### 7.1.1 Fonctions de courant

Dans cette section, le maillage uniforme est construit tel que les arêtes du bord  $\partial\Omega$  sont découpées en  $M$  segments par unité de longueur. De plus on choisit pour le calcul non-adaptatif un pas du temps fixe  $\tau = \frac{1}{M}$ . On prend  $T = 5$ ,  $M = 30$  et  $Re = \{200, 1000, 5000\}$  où  $Re$  est le nombre de Reynolds. On va tracer des comparaisons des fonctions de courant  $\psi$  pour le problème de Navier-Stokes uniforme sans et avec LES aux instants  $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . En partant de la relation  $\mathbf{u} = \operatorname{curl} \psi$ , on résout le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } \psi \in X \text{ tel que } \forall \rho \in X, \\ (\nabla \psi, \nabla \rho) = (\nabla \times \mathbf{u}, \rho). \end{array} \right.$$

On a choisi l'élément fini P1 bulle pour la vitesse et la fonction de courant, P1 pour la pression. Les comparaisons sont dans les figures 7.2-7.7.

On voit que les fonctions de courant sont très proches sans et avec LES pour  $Re = 200$ . La différence n'apparaît que pour des nombres de Reynolds élevés.

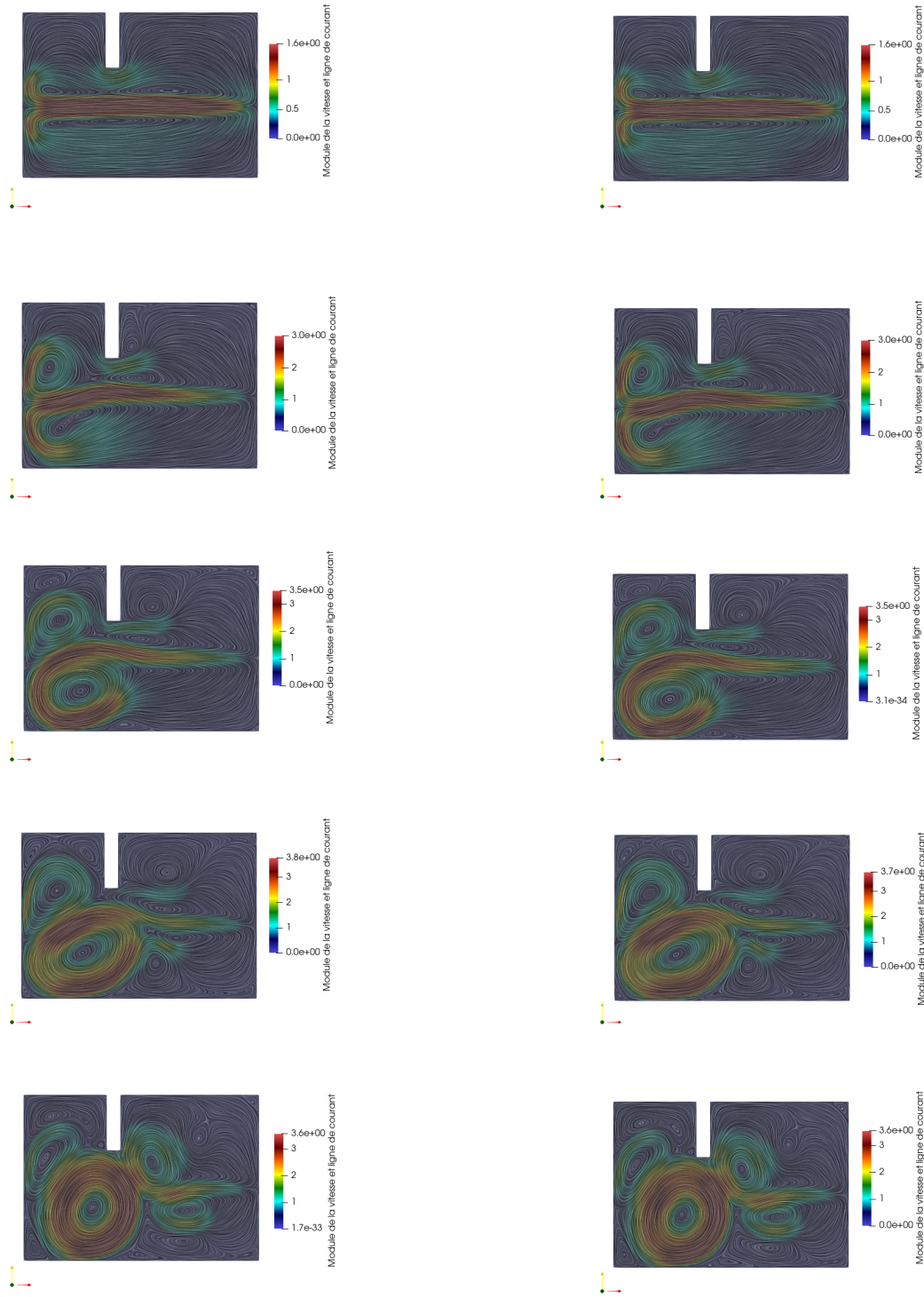


FIGURE 7.2 – Module de la vitesse et lignes de courant sans LES pour  $Re=200$  et  $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

FIGURE 7.3 – Module de la vitesse et lignes de courant avec LES pour  $Re=200$  et  $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

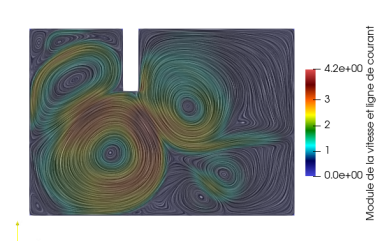
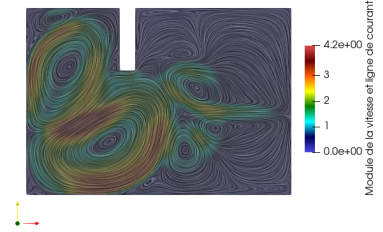
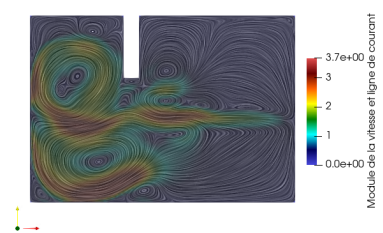
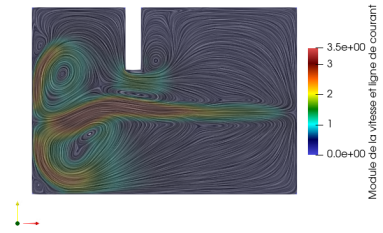
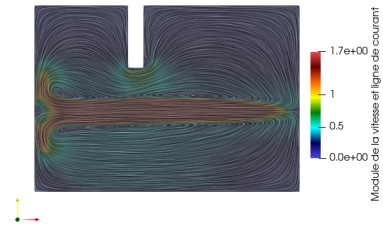
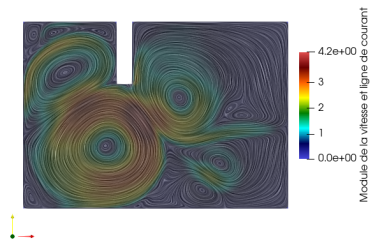
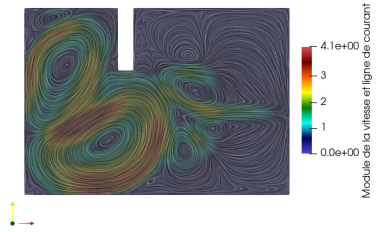
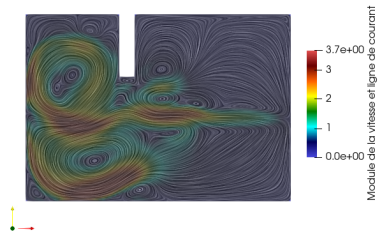
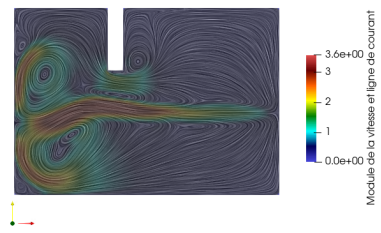
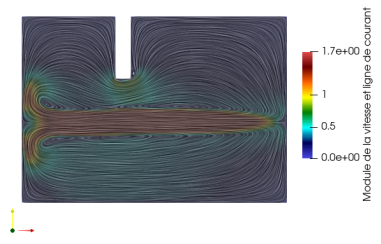


FIGURE 7.4 – Module de la vitesse et lignes de courant sans LES pour  $Re=1000$  et  $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

FIGURE 7.5 – Module de la vitesse et lignes de courant avec LES pour  $Re=1000$  et  $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

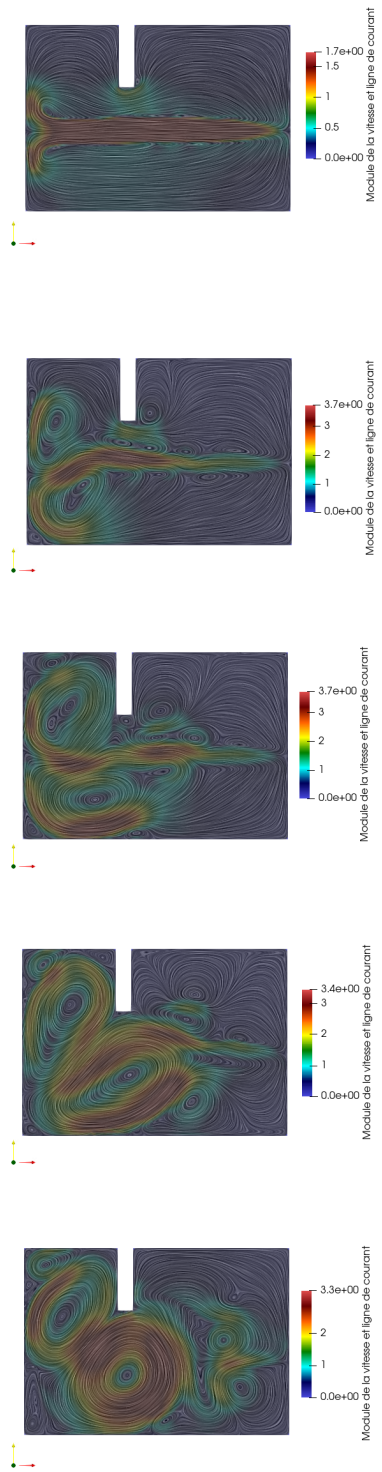


FIGURE 7.6 – Module de la vitesse et lignes de courant sans LES pour  $Re=5000$  et  $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

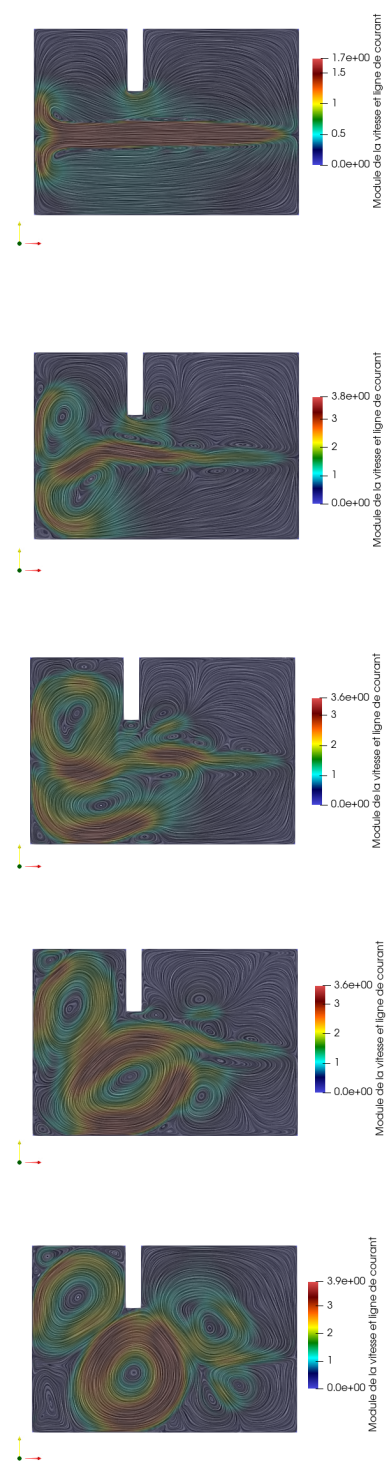


FIGURE 7.7 – Module de la vitesse et lignes de courant avec LES pour  $Re=5000$  et  $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .



### 7.1.2 Comparaison des indicateurs d'erreur pour des calculs avec ou sans LES

On définit l'indicateur :

$$\eta_n = \left( \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2 + \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour étudier ce qu'apporte l'ajout du terme de diffusion turbulente dans la méthode LES on compare les indicateurs d'erreur en temps et en espace pour des simulations avec ou sans LES pour différents  $Re \in \{200, 1000, 5000\}$ ,  $M \in \{8, 16, 32, 64\}$  et  $T \in \{1, 2, 3\}$ . On choisit un pas de temps  $\Delta t = 0.25/M$ . On définit :

$$\eta_{h,1} = \sqrt{\frac{\sum_n \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,1})^2}{\sum_n \tau_n |\bar{\mathbf{u}}_h^n|_{H^1(\Omega)}^2}} \quad \eta_{h,2} = \sqrt{\frac{\sum_n \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{n,\kappa_n}^{h,2})^2}{\sum_n \tau_n |\bar{\mathbf{u}}_h^n|_{H^1(\Omega)}^2}} \quad \eta_\tau = \sqrt{\frac{\sum_n \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2}{\sum_n \tau_n |\bar{\mathbf{u}}_h^n|_{H^1(\Omega)}^2}} \quad \text{et} \quad \eta = \sqrt{\frac{\sum_n (\eta_n)^2}{\sum_n \tau_n |\bar{\mathbf{u}}_h^n|_{H^1(\Omega)}^2}}.$$

$\eta_{h,1}$  traduit l'erreur de discrétisation en espace provenant du schéma numérique au temps  $t_n$ ,  $\eta_{h,2}$  est notre deuxième indicateur lié à la diffusion turbulente qui provient de la transformation de Navier-Stokes à Navier-Stokes filtré. Le dernier indicateur  $\eta_\tau$  est lié à la discrétisation temporelle qui représente la différence de la solution numérique au temps  $t_{n-1}$  et  $t_n$ .

Les résultats figurent dans les tableaux 7.1, 7.2 et 7.3 pour  $T = 1$ , dans les tableaux 7.4, 7.5 et 7.6 pour  $T = 2$  et dans les tableaux 7.7, 7.9 et 7.8 pour  $T = 3$ .

On voit bien que les estimateurs en espace et en temps du problème en utilisant la méthode LES sont plus petits que ceux du problème Navier-Stokes sans LES. De plus, l'amélioration est plus importante pour des nombres de Reynolds élevés et pour des maillages grossiers, ce qui est une indication que la méthode LES joue exactement le rôle qu'on attend d'elle. Toutefois, ces conclusions ne sont fondées que sur l'observation des indicateurs ; pour confirmer cette tendance, nous allons mesurer directement l'écart entre les solutions numériques sur les différents maillages et des solutions de référence obtenues sur des maillages les plus fins qu'il nous était possible d'utiliser étant donné les ressources informatiques à notre disposition. Ceci fait l'objet de la section suivante.

	NS sans LES					NS avec LES				
	estimateurs				temps (s)	estimateurs				temps(s)
M	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU
8	0.206	0	0.041	0.209	8.13225	0.188	0.0004	0.04	0.193	14.1472
16	0.105	0	0.0204	0.107	74.6725	0.102	0.00013	0.0204	0.104	111.864
32	0.052	0	0.0103	0.0532	582.173	0.0518	$3.627e - 05$	0.01	0.053	819.992
64	0.0283	0	0.0052	0.0288	4884.11	0.028	$9.494e - 06$	0.0052	0.028	6543.35

TABLE 7.1 – Comparaison entre les estimateurs sans LES et avec LES pour Re=200 et T=1.

	NS sans LES					NS avec LES				
	estimateurs				temps (s)	estimateurs				temps(s)
M	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU
8	0.389	0	0.0484	0.392	9.8823	0.293	0.0005	0.046	0.296	13.089
16	0.248	0	0.0248	0.2498	71.7714	0.203	0.0002	0.0241	0.203	100.23
32	0.1203	0	0.0122	0.1209	597.41	0.11	$6.685e - 05$	0.0122	0.111	813.166
64	0.0588	0	0.0062	0.0059	4835.79	0.057	$1.956e - 05$	0.0062	0.0574	6717.37

TABLE 7.2 – Comparaison entre les estimateurs sans LES et avec LES pour Re=1000 et T=1.

	NS sans LES					NS avec LES				
	estimateurs				temps (s)	estimateurs				temps(s)
M	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU
8	0.468	0	0.0596	0.472	8.89518	0.33	0.0005	0.049	0.336	14.799
16	0.423	0	0.0353	0.424	71.3332	0.283	0.00023	0.0298	0.285	108.033
32	0.292	0	0.0176	0.2924	582.989	0.204	$9.152e - 05$	0.016	0.204	826.214
64	0.168	0	0.0102	0.16867	4778.42	0.133	$3.21e - 05$	0.009	0.134	6561.46

TABLE 7.3 – Comparaison entre les estimateurs sans LES et avec LES pour Re=5000 et T=1.

	NS sans LES					NS avec LES				
	estimateurs				temps (s)	estimateurs				temps(s)
M	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU
8	0.27	0	0.027	0.272	17.7876	0.22	0.0006	0.026	0.22	28.1919
16	0.127	0	0.0138	0.128	144.074	0.117	0.0002	0.0136	0.1186	211.396
32	0.059	0	0.007	0.059	1127.75	0.0578	$6.64e - 05$	0.007	0.058	1573.67
64	0.029	0	0.0035	0.029	9368.36	0.029	$1.728e - 05$	0.0036	0.029	13128

TABLE 7.4 – Comparaison entre les estimateurs sans LES et avec LES pour Re=200 et T=2.

	NS sans LES					NS avec LES				
	estimateurs				temps (s)	estimateurs				temps(s)
M	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU
8	0.48	0	0.042	0.480	18.1907	0.33	0.00076	0.0342	0.333	26.0292
16	0.338	0	0.028	0.34	142.508	0.25	0.00029	0.0241	0.2514	199.113
32	0.188	0	0.015	0.188	1167.17	0.15	0.00012	0.0145	0.156	1593.77
64	0.088	0	0.008	0.089	9604.63	0.082	$3.557e - 05$	0.008	0.082	13112.6

TABLE 7.5 – Comparaison entre les estimateurs sans LES et avec LES pour Re=1000 et T=2.

	NS sans LES					NS avec LES				
	estimateurs				temps (s)	estimateurs				temps(s)
M	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU
8	0.54	0	0.057	0.546	19.0559	0.36	0.0007	0.038	0.364	27.1749
16	0.483	0	0.045	0.486	142.027	0.327	0.0003	0.0365	0.329	206.831
32	0.422	0	0.035	0.424	1153.93	0.284	0.00012	0.031	0.286	1624.97
64	0.279	0	0.0238	0.28	9404.52	0.22	$4.68e - 05$	0.022	0.21	12560.8

TABLE 7.6 – Comparaison entre les estimateurs sans LES et avec LES pour Re=5000 et T=2.

	NS sans LES					NS avec LES				
	estimateurs				temps (s)	estimateurs				temps(s)
M	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU
8	0.324	0	0.028	0.325	28.5273	0.26	0.00075	0.0256	0.2617	42.2255
16	0.149	0	0.014	0.15	210.552	0.139	0.00026	0.014	0.1377	311.992
32	0.063	0	0.0078	0.0639	1701.84	0.0618	$8.06e - 05$	0.0078	0.0623	2333.48
64	0.0296	0	0.0041	0.0299	14858	0.0295	$2.09e - 05$	0.0041	0.0298	19350.1

TABLE 7.7 – Comparaison entre les estimateurs sans LES et avec LES pour Re=200 et T=3.

	NS sans LES					NS avec LES				
	estimateurs				temps (s)	estimateurs				temps(s)
M	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU
8	0.5107	0	0.041	0.512	26.9692	0.369	0.00081	0.035	0.371	39.589
16	0.393	0	0.038	0.395	215.8	0.289	0.00035	0.035	0.291	300.839
32	0.215	0	0.0247	0.2167	1704.74	0.176	0.00013	0.024	0.178	2362.72
64	0.091	0	0.0134	0.0915	15069.2	0.0838	$3.89e - 05$	0.0134	0.0848	19630.4

TABLE 7.8 – Comparaison entre les estimateurs sans LES et avec LES pour Re=1000 et T=3.

	NS sans LES					NS avec LES				
	estimateurs				temps (s)	estimateurs				temps(s)
M	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU	$\eta_{h,1}$	$\eta_{h,2}$	$\eta_\tau$	$\eta$	CPU
8	0.552	0	0.0598	0.5548	26.488	0.396	0.00082	0.039	0.398	39.3604
16	0.496	0	0.0466	0.498	216.863	0.357	0.00036	0.044	0.359	306.874
32	0.444	0	0.036	0.445	1702.46	0.306	0.00016	0.035	0.308	2409.74
64	0.292	0	0.024	0.293	14688.4	0.226	$6.44e - 05$	0.023	0.2276	18880.3

TABLE 7.9 – Comparaison entre les estimateurs sans LES et avec LES pour Re=5000 et T=3.

## 7.2 Comparaisons d'erreurs

Dans cette section, on va comparer les écarts entre une solution de référence obtenue par une simulation sans LES sur maillage fin ( $M = 256$  et  $\Delta t = 0.25/M$ ) et des simulations sur des maillages grossiers sans LES d'une part et avec LES d'autre part pour différents nombres de Reynolds  $Re$ . Les résultats sont dans les tableaux 7.10-7.18 pour  $Re \in \{200, 1000, 5000\}$  et  $T \in \{1, 2, 3\}$ . On note  $M_F = 256$  le nombre de segments par unité de longueur utilisés pour découper les arêtes de  $\partial\Omega$  dans le maillage fin et  $M_G \in \{8, 16, 32, 64\}$  dans les maillages grossiers. Par ailleurs, on calcule également l'écart entre les solutions avec et sans LES sur le maillage fin (ceci est noté  $M_F = 256$  et  $M_G = 256$  dans les tableaux ci-dessous).

Les tableaux montrent une tendance générale indiquant que les écarts entre les simulations avec LES et la solution de référence sont plus faibles que ceux observés avec les simulations sans LES. Cette tendance est particulièrement remarquable pour les Reynolds élevés et les maillages grossiers. Sur les maillages les plus fins, il semble que la tendance s'inverse lorsque  $T$  augmente. Ceci confirme globalement les observations faites à partir des estimateurs d'erreur dans la section précédente.

	NS-Fin et NS-Grossier	NS-Fin et LES Grossier
$M_F = 256$ et $M_G = 8$	0.58364	0.56753
$M_F = 256$ et $M_G = 16$	0.33197	0.33015
$M_F = 256$ et $M_G = 32$	0.16778	0.16771
$M_F = 256$ et $M_G = 64$	0.08661	0.08656
$M_F = 256$ et $M_G = 256$	–	$1.772e - 04$

TABLE 7.10 – Comparaison des écarts entre la solution du problème NS fin et NS sans LES d’une part et avec LES d’autre part pour  $Re=200$  et  $T=1$ .

	NS-Fin et NS-Grossier	NS-Fin et LES Grossier
$M_F = 256$ et $M_G = 8$	0.97082	0.79237
$M_F = 256$ et $M_G = 16$	0.65072	0.59706
$M_F = 256$ et $M_G = 32$	0.3576	0.34949
$M_F = 256$ et $M_G = 64$	0.18616	0.18538
$M_F = 256$ et $M_G = 256$	–	$1.98e - 03$

TABLE 7.11 – Comparaison des écarts entre la solution du problème NS fin et NS sans LES d’une part et avec LES d’autre part pour  $Re=1000$  et  $T=1$ .

	NS-Fin et NS-Grossier	NS-Fin et LES Grossier
$M_F = 256$ et $M_G = 8$	1.29124	0.89235
$M_F = 256$ et $M_G = 16$	1.10653	0.80056
$M_F = 256$ et $M_G = 32$	0.74082	0.61767
$M_F = 256$ et $M_G = 64$	0.43194	0.40176
$M_F = 256$ et $M_G = 256$	–	$1.975e - 02$

TABLE 7.12 – Comparaison des écarts entre la solution du problème NS fin et NS sans LES d’une part et avec LES d’autre part pour  $Re=5000$  et  $T=1$ .

	NS-Fin et NS-Grossier	NS-Fin et LES Grossier
$M_F = 256$ et $M_G = 8$	0.64752	0.55673
$M_F = 256$ et $M_G = 16$	0.32659	0.3149
$M_F = 256$ et $M_G = 32$	0.15812	0.15741
$M_F = 256$ et $M_G = 64$	0.07864	0.078667
$M_F = 256$ et $M_G = 256$	–	$3.5475e - 04$

TABLE 7.13 – Comparaison des écarts entre la solution du problème NS fin et NS sans LES d’une part et avec LES d’autre part pour  $Re=200$  et  $T=2$ .

	NS-Fin et NS-Grossier	NS-Fin et LES Grossier
$M_F = 256$ et $M_G = 8$	1.4351	0.81782
$M_F = 256$ et $M_G = 16$	0.87455	0.63058
$M_F = 256$ et $M_G = 32$	0.45151	0.39638
$M_F = 256$ et $M_G = 64$	0.21619	0.20889
$M_F = 256$ et $M_G = 256$	–	$4.697e - 03$

TABLE 7.14 – Comparaison des écarts entre la solution du problème NS fin et NS sans LES d’une part et avec LES d’autre part pour  $Re=1000$  et  $T=2$ .

	NS-Fin et NS-Grossier	NS-Fin et LES Grossier
$M_F = 256$ et $M_G = 8$	2.30648	0.92682
$M_F = 256$ et $M_G = 16$	2.14681	0.85235
$M_F = 256$ et $M_G = 32$	1.38563	0.72945
$M_F = 256$ et $M_G = 64$	0.73238	0.56262
$M_F = 256$ et $M_G = 256$	–	0.10534

TABLE 7.15 – Comparaison des écarts entre la solution du problème NS fin et NS sans LES d’une part et avec LES d’autre part pour  $Re=5000$  et  $T=2$ .

	NS-Fin et NS-Grossier	NS-Fin et LES Grossier
$M_F = 256$ et $M_G = 8$	0.74321	0.62851
$M_F = 256$ et $M_G = 16$	0.35914	0.34885
$M_F = 256$ et $M_G = 32$	0.16411	0.16642
$M_F = 256$ et $M_G = 64$	0.07842	0.079138
$M_F = 256$ et $M_G = 256$	–	$5.192e - 04$

TABLE 7.16 – Comparaison des écarts entre la solution du problème NS fin et NS sans LES d’une part et avec LES d’autre part pour  $Re=200$  et  $T=3$ .

	NS-Fin et NS-Grossier	NS-Fin et LES Grossier
$M_F = 256$ et $M_G = 8$	1.76676	0.91134
$M_F = 256$ et $M_G = 16$	1.15459	0.79498
$M_F = 256$ et $M_G = 32$	0.5777	0.52928
$M_F = 256$ et $M_G = 64$	0.24551	0.2643
$M_F = 256$ et $M_G = 256$	–	$9.659e - 03$

TABLE 7.17 – Comparaison des écarts entre la solution du problème NS fin et NS sans LES d’une part et avec LES d’autre part pour  $Re=1000$  et  $T=3$ .

	NS-Fin et NS-Grossier	NS-Fin et LES Grossier
$M_F = 256$ et $M_G = 8$	3.05157	0.98355
$M_F = 256$ et $M_G = 16$	2.61722	0.96305
$M_F = 256$ et $M_G = 32$	1.61169	0.84025
$M_F = 256$ et $M_G = 64$	0.97493	0.69377
$M_F = 256$ et $M_G = 256$	–	0.24583

TABLE 7.18 – Comparaison des écarts entre la solution du problème NS fin et NS sans LES d’une part et avec LES d’autre part pour  $Re=5000$  et  $T=3$ .



### 7.3 Comparaisons entre LES uniforme et adaptatif

Dans les sections précédentes, nous nous sommes assurés que les simulations avec LES sont plus précises que les simulations sans LES. Par conséquent, nous utilisons uniquement des simulations avec LES dans section. Nous cherchons à présent à rendre les simulations plus précises en utilisant un algorithme d'adaptation du maillage et du pas de temps à l'aide des estimateurs associés, en cherchant à équilibrer estimateur en temps et estimateur en espace. Nous proposons un algorithme d'adaptation décrit ci-dessous ; nous en mesurons l'efficacité en comparant les estimateurs calculés d'une part sur des maillages uniformes et avec des pas de temps constants et d'autre part sur des maillages et avec des pas de temps adaptés à l'aide de notre algorithme. Celui-ci est piloté par une tolérance notée  $\varepsilon$  et fixée par l'utilisateur, qui sera d'autant plus petite que la précision souhaitée est élevée.

À chaque pas de temps, connaissant  $\mathbf{u}_h^n$ , les opérations suivantes sont effectuées

1. on calcule  $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1})$ ,
2. on calcule  $\eta_n^h$  et  $\eta_n^\tau$  définies dans (7.1) et (7.2),
3. Si la somme de  $\eta_n^h$  et  $\eta_n^\tau$  est supérieure à la tolérance  $\varepsilon$ , on adapte en temps ou en espace :
  - (a) Si  $\eta_n^h < \eta_n^\tau$  et si le pas de temps  $\tau_n$  est supérieur à un pas de temps minimum  $(\Delta t)_{\min}$ , on adapte en temps de telle sorte que le prochain estimateur en temps soit légèrement inférieur à l'estimateur en espace
  - (b) Si  $\eta_n^h < \eta_n^\tau$  et  $\tau_n = (\Delta t)_{\min}$  alors
    - i. Si  $\eta_n^h > \frac{\varepsilon}{2}$ , on adapte en espace.
    - ii. Sinon, l'adaptation en temps est impossible et l'adaptation en espace inutile. On ne fait rien.
  - (c) Si  $\eta_n^h > \eta_n^\tau$ 
    - i. Si le nombre de raffinements de maillage maximal n'est pas atteint, on adapte en espace
    - ii. Sinon on garde le calcul
4. Si  $\eta_n^h + \eta_n^\tau < 0.9\varepsilon$  on peut augmenter le pas de temps, en cherchant à équilibrer les estimateurs
5. Sinon on s'assure que les estimateurs sont équilibrés
  - (a) Si  $\eta_n^\tau \ll \eta_n^h$ , on augmente le pas de temps pour équilibrer les estimateurs, quitte à devoir raffiner en espace à l'itération suivante.
  - (b) Si les estimateurs sont équilibrés, on ne fait rien.

Sur la figure 7.8, on compare les estimateurs en échelle logarithmique en fonction du nombre total de degrés de liberté pour  $Re = 1000$ . La courbe uniforme a été obtenue par des simulations sur plusieurs maillages uniformes avec des pas de temps constants. Pour chacun de ces maillages le nombre de degrés de liberté est donc le produit du nombre de pas de temps par le nombre d'inconnues discrétisant le problème sur le maillage considéré. La courbe adaptative a été obtenue en choisissant plusieurs valeurs différentes de  $\varepsilon$  (voir algorithme ci-dessus) et pour chacune de ces valeurs, on a additionné le nombre de degrés de liberté à chaque pas de temps, celui-ci pouvant varier au cours du calcul lorsque l'algorithme décide qu'une adaptation de maillage est nécessaire.

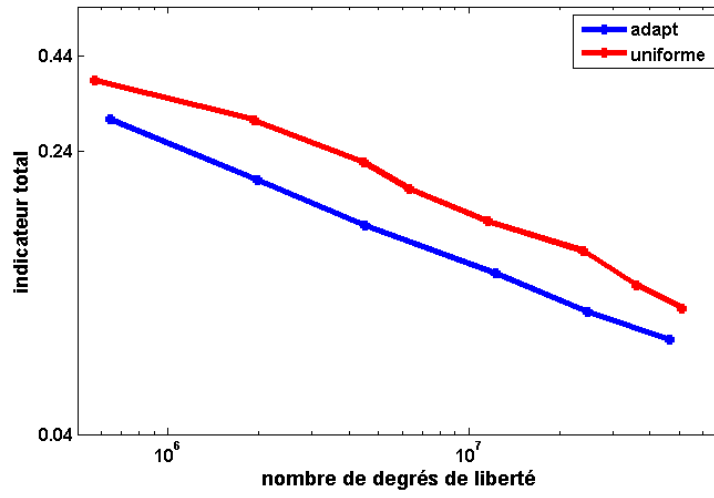


FIGURE 7.8 – Comparaison d'erreur en échelle logarithmique en fonction du nombre total du degrés de libertés.

## Chapitre 8

# Estimation d'erreur *a posteriori* pour la méthode LES appliquée au problème de Navier-Stokes stationnaire.

Le but de cette section est d'établir une estimation d'erreur *a posteriori* entre la solution exacte  $(\mathbf{u}, p)$  du problème de Navier-Stokes stationnaire et la solution approchée  $\bar{\mathbf{u}}_h^i$  du problème filtré discret et linéarisé en dimension  $d = 2, 3$ . On commence par établir la formulation variationnelle correspondante au problème de Navier-Stokes. Ensuite on discrétise le problème filtré correspondant en utilisant la méthode des éléments finis. Enfin, on se base sur le théorème de Pousin Rappaz pour établir l'estimation d'erreur *a posteriori* désirée.

### 8.1 Problème stationnaire continu (Navier-Stokes)

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné connexe dans  $\mathbb{R}^d$ , de frontière lipschitzienne  $\Gamma = \partial\Omega$ . Le problème de Navier-Stokes stationnaire est :

$$(PS) \left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) & = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) & = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) & = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{f}$  représente la densité massique des forces extérieures, et  $\nu$  la viscosité supposée être une constante positive. Les inconnues sont la vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$  du fluide.

On suppose que  $\mathbf{f}$  appartient à  $X' = H^{-1}(\Omega)^d$  qui est le dual de  $X = H_0^1(\Omega)^d$ . On garde la même notation de l'espace  $M = L_0^2(\Omega)$  et on note que son dual est lui-même. La formulation variationnelle associée au problème (PS) est donnée par :

$$(FVS) \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } \mathbf{u} \in X \text{ et } p \in M \text{ tels que :} \\ \forall \mathbf{v} \in X, \quad \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \\ \forall q \in M, \quad b(\mathbf{u}, q) = 0. \end{array} \right.$$

L'existence et l'unicité conditionnée de la solution du problème (*FVS*) sont prouvées dans [18, chapitre 4, section 2]. De plus, la solution vérifie la relation suivante :

$$\|\mathbf{u}\|_X \leq \frac{c}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{X'}. \quad (8.1)$$

Dans l'objectif d'établir une estimation d'erreur *a posteriori*, on introduit le système de Stokes défini de la manière suivante : Pour  $(f, g) \in X' \times M$ , on a :

$$(S) \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla p(\mathbf{x}) & = \mathbf{f}(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) & = g & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) & = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Le problème (*S*) admet la formulation variationnelle suivante :

$$(FVSS) \begin{cases} \text{chercher } \mathbf{u} \in X \text{ et } p \in M \text{ tels que :} \\ \forall \mathbf{v} \in X, \quad \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \\ \forall q \in M, \quad b(\mathbf{u}, q) = (g, q). \end{cases}$$

On peut se référer à [18, Chapitre I, §4] pour l'existence et l'unicité de la solution  $(\mathbf{u}, p) \in X \times M$  du problème (*FVSS*).

On introduit l'opérateur de Stokes  $\mathcal{S}$  défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &: X' \times M \rightarrow X \times M \\ (\mathbf{f}, g) &\mapsto \mathcal{S}(\mathbf{f}, g) = (\mathbf{w}, \xi) \end{aligned}$$

où  $(\mathbf{w}, \xi)$  est la solution du problème (*FVSS*). On a la majoration suivante (voir [18, chapitre1, section 5.1]) :

$$\|\mathcal{S}(\mathbf{f}, g)\|_{X \times M} \leq \frac{c}{\nu} \|(\mathbf{f}, g)\|_{X' \times M}. \quad (8.2)$$

où  $c$  est une constante positive indépendante de  $\mathbf{f}$ .

On définit aussi la fonction  $G$  donnée par

$$\begin{aligned} G &: X \rightarrow X' \\ \mathbf{w} &\mapsto G(\mathbf{w}) = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{w}) \mathbf{w} - \mathbf{f}, \end{aligned}$$

et on introduit l'application  $F$  dans  $X \times M$  telle que pour tout  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}, q) \in X \times M$ , on a :

$$F(\mathbf{V}) = \mathbf{V} + \mathcal{S}(G(\mathbf{v}), 0).$$

Ainsi, le problème (*FVS*) est équivalent à :

$$F(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad (8.3)$$

où  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, p)$ .

**Définition 8.1.1** On définit une solution non singulière  $\mathbf{U}$  du problème (FVS) :

1.  $F(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$ .
2.  $DF(\mathbf{U})$  est un isomorphisme de  $X \times M$ ,

où  $DF(\mathbf{U})$  est la différentielle au sens de fréchet de  $F$  au point  $U$ .

**Proposition 8.1.2** Il existe un réel  $L > 0$  tel que l'application  $DF(\mathbf{U}) = Id + S(DG(\mathbf{u}), 0)$  est  $L$ -lipschitzienne continue :

$$\|DF(\mathbf{U}) - DF(\mathbf{V})\|_{\mathcal{L}(X \times M)} \leq L \|\mathbf{U} - \mathbf{V}\|_{X \times M}. \quad (8.4)$$

**Preuve :** Soit  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, p)$ ,  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}, q) \in X \times M$ , on a :

$$\|DF(\mathbf{U}) - DF(\mathbf{V})\|_{\mathcal{L}(X \times M)} \leq \|S(DG(\mathbf{u}), 0) - S(DG(\mathbf{v}), 0)\|_{\mathcal{L}(X \times M)}.$$

En utilisant (8.2) et pour  $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}, \xi) \in X \times M$ , on a :

$$\|S((DG(\mathbf{u}), 0) \cdot \mathbf{Z}) - S((DG(\mathbf{v}), 0) \cdot \mathbf{Z})\|_{(X \times M)} \leq \frac{c}{\nu} \|DG(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{z} - DG(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{z}\|_{X'}.$$

Or,

$$DG(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{z} - DG(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{z} \cdot \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{z} + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \mathbf{z} + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{z})(\mathbf{u} - \mathbf{v}).$$

Alors

$$\|DG(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{z} - DG(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{z}\|_{X'} \leq 4S_4^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_X \|\mathbf{z}\|_X.$$

En combinant les équations précédentes, on obtient (8.4) avec  $L = 4S_4^2$ .  $\square$

## 8.2 Problème stationnaire continu filtré

Comme en dimension deux, le but est de capturer toutes les fluctuations des champs de vitesse et de pression ayant un impact sur la solution, mais le coût de cette méthode devient très cher lorsque le nombre de Reynolds est très grand. Pour cela on utilise la méthode de simulation des grandes échelles qui repose sur le fait de décomposer le fluide en 2 parties : grandes et petites structures. La vitesse associée aux grandes structures sera notée  $\bar{\mathbf{u}}$  et elle est obtenue par convolution avec un filtre. On note  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$  qui est le résidu dont l'effet est modélisé par une diffusion de viscosité  $\nu_t(\bar{\mathbf{u}})$ . Le système de Navier-Stokes filtré sera le suivant :

$$(PLS) \left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}((\nu + \nu_t(\bar{\mathbf{u}})) \nabla \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) + \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \nabla \bar{p}(\mathbf{x}) & = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) & = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \\ \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) & = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

où  $\nu_t(\bar{\mathbf{u}}) = c\delta^2 \|\nabla \bar{\mathbf{u}}\|_F$  avec  $\|\nabla \bar{\mathbf{u}}\|_F = \left[ \sum_{i,j=1}^d (\partial_i \bar{u}_j)^2 \right]^{1/2}$ . Dans la suite, pour le problème discrétisé, on

prendra  $\delta = h_\kappa$  pour tout élément  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ . On suppose que  $\bar{\mathbf{f}}$  appartient à  $X'$  et on note  $Z = W_0^{1,3}(\Omega)^d$ ,  $V = \{\mathbf{v} \in X / \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$  et  $V_3 = \{\mathbf{v} \in Z / \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$ . La formulation variationnelle associée au problème (PLS) est donnée par :

$$(FVLS) \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } \bar{\mathbf{u}} \in Z \text{ et } \bar{p} \in M \text{ tels que :} \\ \forall \bar{\mathbf{v}} \in Z, \quad ((\nu + \nu_t(\bar{\mathbf{u}})) \nabla \bar{\mathbf{u}}, \nabla \bar{\mathbf{v}}) + c(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) + b(\bar{\mathbf{v}}, \bar{p}) = \langle \bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle, \\ \forall \bar{q} \in M, \quad b(\bar{\mathbf{u}}, \bar{q}) = \mathbf{0}. \end{array} \right.$$

L'existence d'une solution du problème (FVLS) est prouvée dans [21] et [22]. En remarquant que  $c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, w)$  est  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  de [10] défini par (1.15), l'unicité a été établie dans [10] et [11] sous la condition suivante :

$$N\Psi_3(C_f) \leq \nu,$$

où  $\Psi_3$  est la fonction inverse de la fonction  $\Phi_3$  donnée par

$$\begin{aligned} \Phi_3 &: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \Phi_3(x) = \nu x + c_s \delta^2 \gamma_3^{-3} x^2, \end{aligned} \tag{8.5}$$

et

$$N := \sup_{\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \in V} \frac{|c(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})|}{\|\bar{\mathbf{u}}\|_X^2 \|\bar{\mathbf{v}}\|_X}, C_f = \sup_{\bar{\mathbf{v}} \in V} \frac{|\langle \bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle|}{\|\bar{\mathbf{v}}\|_X} \text{ et } \gamma_3 = \sup_{\bar{\mathbf{v}} \in V_3} \frac{\|\bar{\mathbf{v}}\|_X}{\|\bar{\mathbf{v}}\|_{1,3,\Omega}}.$$

De plus, Cette solution vérifie la relation suivante :

$$\|\bar{\mathbf{u}}\|_X \leq \Psi_3(C_f). \tag{8.6}$$

### 8.2.1 Discrétisation

Pour la discrétisation, on découpe  $\bar{\Omega}$  en un nombre fini d'éléments qui sont des triangles si  $d = 2$  ou tétraèdres si  $d = 3$ , notés  $\kappa$  fermés et on note  $\mathcal{T}_h = \bigcup \{\kappa\}$  l'ensemble de ces éléments couvrant  $\bar{\Omega}$  tel que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \kappa.$$

Pour tout  $h$ , on associe à  $\mathcal{T}_h$  deux espaces d'éléments finis conformes  $X_h$  et  $M_h$  qui sont respectivement contenus dans  $Z$  et  $M$ , et qui satisfont la condition inf-sup uniforme suivante [2] :

$$\forall q_h \in M_h, \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h} \frac{\int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|_{H_0^1(\Omega)^d}} \geq \beta \|q_h\|_{L^2(\Omega)}, \tag{8.7}$$

où  $\beta > 0$  est une constante indépendante de  $h$ .

On choisit les mêmes espaces discrets considérés dans le cas instationnaire :

$$\begin{aligned} X_h &= \{ \mathbf{v}_h \in C_0(\bar{\Omega}); \forall \kappa \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_{\kappa} \in P_b(\kappa)^d; \mathbf{v}_h|_{\Gamma} = \mathbf{0} \}, \\ V_h &= \{ \mathbf{v}_h \in X_h; \forall q_h \in M_h, (\operatorname{div} \mathbf{v}_h, q_h) = 0 \}, \\ M_h &= \{ q_h \in M \cap C_0(\bar{\Omega}); \forall \kappa \in \mathcal{T}_h, q_h|_{\kappa} \in P_1(\kappa) \}. \end{aligned}$$

**Proposition 8.2.1** *Pour tout  $\mathbf{v} \in H^s(\Omega)^d$ , on a*

$$|\mathbf{v} - P_h \mathbf{v}|_{H^1(\Omega)^d} \leq C_P h^{s-1} |\mathbf{v}|_{H^s(\Omega)^d},$$

où  $P_h$  est un opérateur dans  $\mathcal{L}(V, V_h)$ ,  $C_P$  est une constante indépendante de  $h$ ,  $s$  est un réel tel que :  $s \in [1, 2]$  (voir [17, page 35]).

**Proposition 8.2.2** *Pour toute dimension  $d$  et pour tout entier non négatif  $r$ , il existe une constante  $\tilde{c}$  telle que pour tout fonction polynomiale  $\mathbf{v}_h$  de degré  $r$  sur  $\kappa$*

$$\|\mathbf{v}_h\|_{L^\infty(\kappa)} \leq \tilde{c} h_\kappa^{-d/2} \|\mathbf{v}_h\|_{L^2(\kappa)}. \tag{8.8}$$

**Proposition 8.2.3** *Pour tout  $h \leq 1$  et  $p \in H^s(\Omega)^d$ , on a :*

$$\|p - \mathcal{F}_h p\|_{H^t(\Omega)^d} \leq C_z h^{s-t} \|p\|_{H^s(\Omega)^d},$$

où  $\mathcal{F}_h$  est l'opérateur de Scott-Zhang associé à  $\mathcal{T}_h$ ,  $C_z$  est une constante indépendante de  $h_n$ ,  $s$  et  $t$  sont des entiers tels que :  $s \in [\frac{1}{2}, 1[$  et  $t \in [0, s]$  (voir [30]).

Cependant,  $\mathcal{F}_h p$  n'est pas nécessairement à moyenne nulle, mais une modification simple de  $\mathcal{F}_h$  donne un opérateur (On le note a nouveau par  $\mathcal{F}_h$ ) qui appartient à  $\mathcal{L}(H^s(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), M_h)$ .

On introduit la formulation variationnelle discrète suivante associée au problème (FVLS) :

$$(FVLS_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } (\bar{\mathbf{u}}_h, \bar{p}_h) \in X_h \times M_h \text{ solution de :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \nu(\nabla \bar{\mathbf{u}}_h, \nabla \mathbf{v}_h) + (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h, \nabla \mathbf{v}_h) + d(\bar{\mathbf{u}}_h, \bar{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) \\ \qquad \qquad \qquad + b(\mathbf{v}_h, \bar{p}_h) = \langle \bar{\mathbf{f}}, \mathbf{v}_h \rangle, \\ \forall q_h \in M_h, \quad b(\bar{\mathbf{u}}_h, q_h) = 0. \end{array} \right.$$

$$\text{où } d(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

En remarquant que le  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  dans notre cas, est égale à  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  de [10] défini par (2.3), l'existence d'une solution du problème (FVLS<sub>h</sub>) est prouvée dans [10, page 6]. L'unicité a été établie aussi dans [10] sous la condition suivante :

$$N_h \Psi_3(C_{fh}) \leq \nu,$$

où  $\Psi_3$  est déjà définie par (8.5), et :

$$N_h := \sup_{\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}} \in V_h} \frac{|d(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}})|}{\|\bar{\mathbf{u}}\|_X \|\bar{\mathbf{v}}\|_X \|\bar{\mathbf{w}}\|_X} \quad \text{et } C_{fh} = \sup_{\bar{\mathbf{v}} \in V_h} \frac{|\langle \bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle|}{\|\bar{\mathbf{v}}\|_X}.$$

Le problème (FVLS<sub>h</sub>) est non-linéaire. Dans l'objectif de calculer sa solution, on introduit le problème discret linéarisé associé à (FVLS<sub>h</sub>) suivant : ( $\bar{\mathbf{u}}_h^0$  est une valeur arbitraire donnée)

$$(FVLS_{i,h}) \left\{ \begin{array}{l} \text{ayant } \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \in X_h, \text{ chercher } (\bar{\mathbf{u}}_h^i, \bar{p}_h^i) \in X_h \times M_h \text{ solution de :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \nu(\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i, \nabla \mathbf{v}_h) + (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i, \nabla \mathbf{v}_h) \\ \qquad \qquad \qquad + d(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}, \bar{\mathbf{u}}_h^i, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, \bar{p}_h^i) = \langle \bar{\mathbf{f}}, \mathbf{v}_h \rangle, \\ \forall q_h \in M_h, \quad b(\bar{\mathbf{u}}_h^i, q_h) = 0. \end{array} \right.$$

**Théorème 8.2.4** *Pour une itération donnée  $i$ , ayant  $\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \in X_h$ , le problème (FVLS<sub>i,h</sub>) admet une unique solution  $(\bar{\mathbf{u}}_h^i, \bar{p}_h^i) \in X_h \times M_h$  qui vérifie la majoration suivante :*

$$\|\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X \leq \frac{1}{\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}. \quad (8.9)$$

**Preuve :**

En dimension finie, pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution  $(\bar{\mathbf{u}}_h^i, \bar{p}_h^i)$  du problème linéaire (FVLS<sub>i,h</sub>), il suffit de démontrer l'unicité. Pour cela, on considère le système (FVLS<sub>i,h</sub>) avec un second membre nul (c'est à dire pour  $\bar{\mathbf{f}} = 0$ ) et on choisit  $\mathbf{v}_h = \bar{\mathbf{u}}_h^i$ , on aura en utilisant la remarque 3.2.2 :

$$\nu \|\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i, \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) = 0.$$

Comme  $(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i, \nabla\mathbf{v}_h) \geq 0$ , on déduit que  $\nu\|\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\Omega)^d}^2 = 0$  et donc  $\bar{\mathbf{u}}_h^i = 0$ . et ensuite l'unicité de la solution. Pour démontrer l'unicité de la pression, on utilise le théorème de Babuška-Brezzi (théorème 3.1.1).

Pour démontrer l'inégalité (8.9), on choisit  $\bar{\mathbf{v}}_h = \bar{\mathbf{u}}_h^i$  dans  $(FVLS_{i,h})$  et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir :

$$\begin{aligned} \nu\|\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X^2 + (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i, \nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i) &= \langle \bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{u}}_h^i \rangle \\ &\leq \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}\|\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X^2. \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon = \frac{1}{\nu}$ , on obtient (8.9) en remarquant que  $(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i, \nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i) \geq 0$ . □

### 8.2.2 Convergence vers la solution continue

Dans cette section, on va démontrer que la solution  $\bar{\mathbf{u}}_h^i$  du problème itératif  $(FVLS_{i,h})$  converge vers la solution exacte  $\mathbf{u}$  du problème  $(FVS)$ . On suppose que  $\bar{\mathbf{f}}$  tend vers  $\mathbf{f}$  lorsque la largeur du filtre  $\delta$  tend vers 0.

**Théorème 8.2.5** *On suppose que la solution  $\mathbf{u}$  de  $(FVS)$  est dans  $H^{1+\varepsilon_*}(\Omega)^d$ , la pression  $p$  dans  $H^{1/2+\varepsilon_*}(\Omega)^d$  pour un epsilon donné  $\varepsilon_*$  et que les données  $\mathbf{f}$  et  $\bar{\mathbf{f}}$  vérifient la condition suivante :*

$$\frac{cS_4^2}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{X'} + \frac{(4+\sqrt{d})S_4^2}{2\nu}\|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'} < \nu. \quad (8.10)$$

où  $c$  est la constante de (8.1) et  $S_4$  est la constante de (3.6). Dans ce cas, la solution  $\bar{\mathbf{u}}_h^i$  du problème  $(FVLS_{i,h})$  converge vers la solution  $\mathbf{u}$  du problème  $(FVS)$  de la manière suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h_\varepsilon > 0 \forall (\mathcal{T}_h) \text{ avec } h \leq h_\varepsilon, \exists I_h \text{ tel que } \forall i \geq I_h, \text{ on a } \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X \leq \varepsilon,$$

**Preuve :** Notons :

$$D = \left( \nu - \frac{cS_4^2}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{X'} - \frac{(4+\sqrt{d})S_4^2}{2\nu}\|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'} \right)$$

et

$$\begin{aligned} g(h) &= \frac{1}{D} \left( C_P h^{\varepsilon_*} \left( 2\nu + \frac{2cS_4^2}{\nu}\|\mathbf{f}\|_{X'} + \frac{(1+\sqrt{d})S_4^2}{\nu}\|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'} \right) \|\mathbf{u}\|_{H^{1+\varepsilon_*}(\Omega)^d} \right. \\ &\quad \left. + h^{2-d/2} \frac{c_s \tilde{c}}{\nu^2} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}^2 + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{X'} + C_z \sqrt{dh}^{1/2+\varepsilon_*} \|p\|_{H^{1/2+\varepsilon_*}(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

où  $S_4$  est la constante de (3.6),  $c$  constante de (8.1),  $C_P$  constante de (8.2.1),  $C_z$  constante de (8.2.3),  $\tilde{c}$  constante de (8.2.2) et  $c_s$  la constante de Smagorinsky.

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé, alors  $\exists h_\varepsilon$  tel que  $\forall h \leq h_\varepsilon$ ,  $g(h) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  en utilisant le fait que  $\bar{\mathbf{f}}$  tend vers  $\mathbf{f}$  lorsque la largeur du filtre  $\delta$  tend vers 0. Considérons un maillage  $\mathcal{T}_h$  tel que  $h \leq h_\varepsilon$

En prenant  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h \in V_h$  et la différence entre  $(FVS)$  et  $(FVLS_{i,h})$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \nu(\nabla(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i), \nabla\mathbf{v}_h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i, \mathbf{v}_h) - (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i, \nabla\mathbf{v}_h) \\ - \frac{1}{2}(\text{div } \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_h^i, \mathbf{v}_h) - (p, \text{div } \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}, \mathbf{v}_h \rangle. \end{aligned} \quad (8.11)$$



On intercale  $\nabla P_h \mathbf{u}$  dans le premier terme,  $\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \nabla \mathbf{u}$  dans le deuxième terme de (8.11),  $F_h p$  dans le dernier terme où  $P_h$  est l'opérateur défini dans (8.2.1) et  $F_h$  est l'opérateur de Scott-Zhang défini dans 4.1.3. On aura :

$$\begin{aligned} & \nu(\nabla(P_h \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i), \nabla \mathbf{v}_h) - ((\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}), \mathbf{v}_h) - (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i, \nabla \mathbf{v}_h) \\ & - \frac{1}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_h^i, \mathbf{v}_h) - (p - F_h p, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}, \mathbf{v}_h \rangle + \nu(\nabla(P_h \mathbf{u} - \mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}_h). \end{aligned} \quad (8.12)$$

On intercale  $P_h \mathbf{u}$  dans le deuxième et le troisième termes de (8.12) et on ajoute  $-\frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u} \bar{\mathbf{u}}_h^i, \mathbf{v}_h)$  qui est un terme nul, puis on intercale le terme  $\operatorname{div} P_h \mathbf{u}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \nu(\nabla(P_h \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i), \nabla \mathbf{v}_h) - ((\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - P_h \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - ((P_h \mathbf{u} - \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \\ & - (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - P_h \mathbf{u}), \mathbf{v}_h) - (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla(P_h \mathbf{u} - \mathbf{u}), \mathbf{v}_h) - (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i, \nabla \mathbf{v}_h) \\ & - \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - P_h \mathbf{u}) \bar{\mathbf{u}}_h^i, \mathbf{v}_h) - \frac{1}{2}(\operatorname{div}(P_h \mathbf{u} - \mathbf{u}) \bar{\mathbf{u}}_h^i, \mathbf{v}_h) - (p - F_h p, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) \\ & = \langle \mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}, \mathbf{v}_h \rangle + \nu(\nabla(P_h \mathbf{u} - \mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}_h). \end{aligned} \quad (8.13)$$

On prend  $\mathbf{v}_h = P_h \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i$  dans (8.13), on obtient

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{v}_h\|_X^2 & \leq \|P_h \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{L^4(\Omega)^d} \|\mathbf{u}\|_X \|\mathbf{v}_h\|_{L^4(\Omega)^d} + \|P_h \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^d} \|\mathbf{u}\|_X \|\mathbf{v}_h\|_{L^4(\Omega)^d} \\ & + \|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{L^4(\Omega)^d} \|\bar{\mathbf{u}}_h^i - P_h \mathbf{u}\|_X \|\mathbf{v}_h\|_{L^4(\Omega)^d} \\ & + \|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{L^4(\Omega)^d} \|P_h \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_X \|\mathbf{v}_h\|_{L^4(\Omega)^d} \\ & + \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \|\mathbf{v}_h\|_X + \frac{1}{2} \|\operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - P_h \mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{v}_h\|_{L^4(\Omega)^d} \\ & + \frac{1}{2} \|\operatorname{div}(P_h \mathbf{u} - \mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{v}_h\|_{L^4(\Omega)^d} + \sqrt{d} \|p - F_h p\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_h\|_X \\ & + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{X'(\Omega)} \|\mathbf{v}_h\|_X + \nu \|P_h \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_X \|\mathbf{v}_h\|_X. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Or, en appliquant l'inégalité inverse (8.8), on a :

$$\begin{aligned} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} & \leq c_s \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^2 \|\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{L^\infty(\kappa)^d} \|\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)} \\ & \leq c_s \tilde{c} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^{2-d/2} \|\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{L^2(\kappa)} \|\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)} \\ & \leq c_s \tilde{c} h^{2-d/2} \|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_X \|\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X. \end{aligned} \quad (8.15)$$

En utilisant (3.6), (8.9) et (8.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\nu - \frac{S_4^2}{\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}\right) \|P_h \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X & \leq \left(\nu + \frac{c S_4^2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{X'} + \frac{(2 + \sqrt{d}) S_4^2}{2\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}\right) \|P_h \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_X \\ & + \left(\frac{c S_4^2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{X'} + \frac{(2 + \sqrt{d}) S_4^2}{2\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}\right) \|P_h \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_X \\ & + \frac{c_s \tilde{c}}{\nu^2} h^{2-d/2} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}^2 + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{X'} + \sqrt{d} \|p - F_h p\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

D'après (8.10), le terme  $C_{\mathbf{f}} = \nu - \frac{S_4^2}{\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}$  est strictement positif. Donc on aura en utilisant une inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{f}} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X &\leq (2\nu + \frac{cS_4^2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{X'} + \frac{\sqrt{d}S_4^2}{2\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}) \|P_h \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_X \\ &\quad + (\frac{cS_4^2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{X'} + \frac{(2 + \sqrt{d})S_4^2}{2\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}) \|P_h \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_X \\ &\quad + \frac{c_s \tilde{c}}{\nu^2} h^{2-d/2} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}^2 + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{X'} + \sqrt{d} \|p - F_h p\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

En utilisant une deuxième fois une inégalité triangulaire sur  $\|P_h \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_X$ , on aura :

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{f}} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X &\leq (2\nu + \frac{2cS_4^2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{X'} + \frac{(1 + \sqrt{d})S_4^2}{\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}) \|P_h \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_X \\ &\quad + (\frac{cS_4^2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{X'} + \frac{(2 + \sqrt{d})S_4^2}{2\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}) \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_X \\ &\quad + \frac{c_s \tilde{c}}{\nu^2} h^{2-d/2} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}^2 + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{X'} + \sqrt{d} \|p - F_h p\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (8.18)$$

On étudie alors deux cas :

1. S'il existe  $i_0$  tel que :

$$\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i_0-1}\|_X \leq \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i_0}\|_X,$$

alors

$$\begin{aligned} \sup_{i \geq i_0} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_X &= \max \left( \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i_0-1}\|_X, \sup_{i \geq i_0+1} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_X \right) \\ &\leq \sup_{i \geq i_0+1} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_X. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité (8.18) pour  $i \geq i_0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{f}} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X &\leq (2\nu + \frac{2cS_4^2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{X'} + \frac{(1 + \sqrt{d})S_4^2}{\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}) \|P_h \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_X \\ &\quad + (\frac{cS_4^2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{X'} + \frac{(2 + \sqrt{d})S_4^2}{2\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}) \sup_{i \geq i_0+1} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_X \\ &\quad + \frac{c_s \tilde{c}}{\nu^2} h^{2-d/2} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}^2 + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{X'} + \sqrt{d} \|p - F_h p\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

En passant au sup de (8.19) pour  $i \geq i_0$ , on aura :

$$\begin{aligned} (\nu - \frac{cS_4^2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{X'} - \frac{(4 + \sqrt{d})S_4^2}{2\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}) \sup_{i \geq i_0} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X \\ \leq (2\nu + \frac{2cS_4^2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{X'} + \frac{(1 + \sqrt{d})S_4^2}{\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}) \|P_h \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_X \\ + \frac{c_s \tilde{c}}{\nu^2} h^{2-d/2} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}^2 + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{X'} + \sqrt{d} \|p - F_h p\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Alors, en appliquant les propriétés de l'opérateur  $P_h$  au premier terme et l'opérateur de Scott-Zhang au dernier terme de (8.20), on obtient :

$$\sup_{i \geq i_0} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X \leq g(h).$$

Et donc, on a :

$$\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i \geq i_0.$$

2. Si un tel  $i_0$  n'existe pas, alors pour tout  $i$ ,

$$\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_X > \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X,$$

Dans ce cas,  $(\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_X)_{i \geq 1}$  est une suite strictement décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente et on a :

$$\begin{aligned} & \left( \nu - \frac{cS_4^2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{X'} - \frac{(4 + \sqrt{d})S_4^2}{2\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'} \right) \lim_{i \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X \\ & \leq \left( 2\nu + \frac{2cS_4^2}{\nu} \|\mathbf{f}\|_{X'} + \frac{(1 + \sqrt{d})S_4^2}{\nu} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'} \right) \|P_h \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_X \\ & \quad + \frac{c_s \tilde{c}}{\nu^2} h^{2-d/2} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}^2 + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{X'} + \sqrt{d} \|p - F_h p\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Et donc en appliquant les propriétés de l'opérateur  $P_h$  au premier terme et celle de l'opérateur de Scott-Zhang au dernier terme du membre de droite de (8.21), on a

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X & \leq g(h) \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Donc il existe  $i_1$  tel que  $\forall i \geq i_1$

$$\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X - \lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et alors

$$\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

En prenant  $I = i_0$  ou  $I = i_1$  selon le cas, on obtient le résultat désiré.  $\square$

**Théorème 8.2.6** *Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 8.2.5, on a la majoration suivante entre la pression numérique  $\bar{p}_h^i$  solution du Problème (FVLS $_{i,h}$ ) et la pression exacte  $p$  solution du Problème (FVS) :*

$$\begin{aligned} \|\bar{p}_h^i - p\|_{L^2(\Omega)} & \leq 2C_z h^{1/2+\varepsilon_*} \|p\|_{H^{1/2+\varepsilon_*}(\Omega)} + C_1(\mathbf{f}, \bar{\mathbf{f}}) (\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X + \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_X) \\ & \quad + C_2 h^{2-d/2} \|\bar{\mathbf{f}}\|_{X'}^2 + C_3 \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{X'}, \end{aligned} \quad (8.22)$$

où  $C_z$  est la constante de (8.2.3),  $C_1$  est une constante positive dépendant de  $\mathbf{f}$  et  $\bar{\mathbf{f}}$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont des constantes positives.

**Preuve :** On considère la différence entre (FVS) et (FVLS $_{i,h}$ ), et on prend  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h \in X_h$  pour obtenir

$$\begin{aligned} (\bar{p}_h^i - p, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) & = \nu (\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}_h) + (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i, \nabla \mathbf{v}_h) \\ & \quad + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_h^i, \mathbf{v}_h) + \langle \mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}, \mathbf{v}_h \rangle. \end{aligned} \quad (8.23)$$

On intercale  $\mathcal{F}_h p$  dans le membre gauche et  $\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}$  dans le membre de droite, et on ajoute le terme

nul  $-\frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}\bar{\mathbf{u}}_h^i, \mathbf{v}_h) = 0$  dans (8.23) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
(\bar{p}_h^i - \mathcal{F}_h p, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) &= (p - \mathcal{F}_h p, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}_h) + (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}), \mathbf{v}_h) \\
&+ ((\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i, \nabla \mathbf{v}_h) + \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}) \bar{\mathbf{u}}_h^i, \mathbf{v}_h) \\
&+ \langle \mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}, \mathbf{v}_h \rangle.
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Grâce à la condition inf-sup (3.17) et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le membre de droite de (8.24), on a

$$\begin{aligned}
\|\bar{p}_h^i - \mathcal{F}_h p\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|p - \mathcal{F}_h p\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{\beta} \|\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}\|_X + \frac{S_4^2}{\beta} \|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_X \|\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}\|_X \\
&+ \frac{S_4^2}{\beta} \|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}\|_X \|\mathbf{u}\|_X + \frac{1}{\beta} \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\sqrt{d} S_4^2}{2\beta} \|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}\|_X \|\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X \\
&+ \frac{1}{\beta} \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{X'}.
\end{aligned}$$

En utilisant (8.1), (8.9), (8.15), l'inégalité triangulaire  $\|p - \bar{p}_h^i\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\bar{p}_h^i - \mathcal{F}_h p\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{F}_h p - p\|_{L^2(\Omega)}$  et la Proposition 4.1.3, on obtient le résultat désiré.  $\square$

**Remarque 8.2.7** *Le théorème 8.2.5 montre la convergence de la vitesse numérique  $\bar{\mathbf{u}}_h^i$  solution du Problème (FVLS $_{i,h}$ ) vers la vitesse exacte  $\mathbf{u}$  solution du Problème (FVS) dans le sens où il suffit tout d'abord de prendre  $h$  suffisamment petit, puis, pour un maillage vérifiant ce critère sur le pas d'espace, de prendre l'indice  $i$  suffisamment grand. De plus, le Théorème 8.2.6 montre la convergence de la pression numérique  $\bar{p}_h^i$  solution du Problème (FVLS $_{i,h}$ ) vers la pression exacte  $p$  solution du Problème (FVS).*

### 8.3 Erreur *a posteriori*

Dans cette section, on désire établir une estimation d'erreur *a posteriori* entre la solution  $\mathbf{u}$  du problème (FVS) et la solution  $\bar{\mathbf{u}}_h^i$  de (FVLS $_{i,h}$ ). On commence par définir quelques notations supplémentaires afin de pouvoir construire les indicateurs d'erreur.

Pour tout élément  $\kappa$  dans  $\mathcal{T}_h$ , on note par :

- $\varepsilon_\kappa$  l'ensemble des arêtes si  $d = 2$  ou des faces de  $\kappa$  si  $d = 3$  qui ne sont pas incluses dans  $\Gamma$ ,
- $h_\kappa$  le diamètre de  $\kappa$  et  $h_e$  le diamètre de l'arête (ou la face)  $e$ ,
- $[\cdot]_e$  le saut sur chaque arête (ou face)  $e$ ,
- $\mathbf{n}_\kappa$  le vecteur unitaire normal sortant de  $\kappa$  sur  $\partial\kappa$ .

On commence par établir les indicateurs. Pour cela, on effectue la différence entre (FVS) et (FVLS $_{i,h}$ )

pour obtenir pour tout  $\mathbf{v} \in X$  et  $\mathbf{v}_h \in X_h$  les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
& \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx - \nu \int_{\Omega} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i : \nabla \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) \cdot \mathbf{v} dx \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \bar{\mathbf{u}}_h^i \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} \nu_t (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i : \nabla \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \bar{p}_h^i \operatorname{div} \mathbf{v} dx \\
& = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - \langle \bar{\mathbf{f}}, \mathbf{v}_h \rangle - \nu \int_{\Omega} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i : \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) dx - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) dx + \int_{\Omega} \bar{p}_h^i \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) dx \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \bar{\mathbf{u}}_h^i \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) dx - \int_{\Omega} \nu_t (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i : \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) dx
\end{aligned} \tag{8.25}$$

et

$$b(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i, q) = \int_{\Omega} q \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^i dx. \tag{8.26}$$

En intercalant  $\int_{\Omega} (\bar{\mathbf{u}}_h^i \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) \cdot \mathbf{v} dx$ ,  $\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^i) \bar{\mathbf{u}}_h^i \cdot \mathbf{v} dx$  et  $\nu_{th} (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i$  dans (8.25) et en utilisant la formule de Green, on obtient pour tout  $\mathbf{v} \in X$  et  $\mathbf{v}_h \in X_h$

$$\begin{aligned}
& \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx - \nu \int_{\Omega} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i : \nabla \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{u}}_h^i \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) \cdot \mathbf{v} dx \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^i) \bar{\mathbf{u}}_h^i \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \bar{p}_h^i \operatorname{div} \mathbf{v} dx \\
& = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} (\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}) \mathbf{v} dx + \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} (\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}_h) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) dx + \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_{\kappa} (\bar{\mathbf{f}}_h + \operatorname{div}((\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) \right. \\
& - (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}_h^i - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_h^i - \nabla \bar{p}_h^i) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) dx - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{\kappa}} \int_e [(\nu \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \bar{p}_h^i \mathbb{I})(\sigma) \cdot \mathbf{n}] \\
& \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) d\sigma \left. \right\} - \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} (\nu_t (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i : \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) dx + \int_{\Omega} ((\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^i) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) \cdot \mathbf{v} dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^i) \bar{\mathbf{u}}_h^i \cdot \mathbf{v} dx + \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} \nu_t (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i : \nabla \mathbf{v} dx.
\end{aligned} \tag{8.27}$$

On définit l'indicateur de linéarisation  $(\eta_{i,\kappa}^L)$ , l'indicateur de discrétisation  $(\eta_{i,\kappa}^D)$  et l'indicateur de filtrage  $(\eta_{i,\kappa}^F)$  de la manière suivante : pour tout  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ ,

$$(\eta_{i,\kappa}^L) = |\bar{\mathbf{u}}_h^i - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}|_{H^1(\kappa)^d}, \tag{8.28}$$

$$\begin{aligned}
(\eta_{i,\kappa}^D) &= h_{\kappa} \| \bar{\mathbf{f}}_h + \operatorname{div}((\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \bar{\mathbf{u}}_h^i - \nabla \bar{p}_h^i \|_{L^2 \kappa}^d \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{\kappa}} h_e^{1/2} \| [(\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \bar{p}_h^i \mathbb{I}] \cdot \mathbf{n} \|_{L^2(e)^d} + \| \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^i \|_{L^2(\kappa)} \\
&+ \| (\nu_t (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) \|_{L^2(\kappa)^{d \times d}},
\end{aligned} \tag{8.29}$$

et

$$(\eta_{i,\kappa}^F) = \| \nu_t (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i \|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}. \tag{8.30}$$

□

**Théorème 8.3.1** Soit  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, p)$  une solution non singulière du problème (FVS). Alors, il existe un voisinage  $\theta$  de  $\mathbf{U}$  dans  $X \times M$  tel que toute solution  $\bar{\mathbf{U}}_h^i = (\bar{\mathbf{u}}_h^i, \bar{p}_h^i) \in X_h \times M_h$  du problème itératif (FVS $_{i,h}$ ) dans  $\theta$  satisfait la majoration d'erreur a posteriori suivante :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X + \|p - \bar{p}_h^i\|_M \\ & \leq C \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^2 \|\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\kappa)^d}^2 + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{L^2(\kappa)^d}^2 + (\eta_{i,\kappa}^D)^2 + (\eta_{i,\kappa}^F)^2 + (\eta_{i,\kappa}^L)^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $\mathbf{U}$  mais indépendante de  $h$ .

**Preuve :** Soit  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, p)$  une solution non singulière du problème (FVS) et  $\bar{\mathbf{U}}_h^i = (\bar{\mathbf{u}}_h^i, \bar{p}_h^i) \in X_h \times M_h$  la solution du problème (FVLS $_{i,h}$ ). Ayant la proposition 8.1.2, alors d'après [28] et [33, Prop. 2.2], il existe un voisinage  $\theta$  de  $\mathbf{U}$  tel que pour toute solution  $\bar{\mathbf{U}}_h^i$  dans ce voisinage, on a :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}_h^i\|_{X \times M} & \leq c \|\bar{\mathbf{U}}_h^i + \mathcal{S}(G(\bar{\mathbf{u}}_h^i), 0)\|_{X \times M} \\ & \leq c \|\bar{\mathbf{U}}_h^i + \mathcal{S}(G(\bar{\mathbf{u}}_h^i), 0) - \mathbf{U} - \mathcal{S}(G(\mathbf{u}), 0)\|_{X \times M} \\ & \leq c \|\mathcal{S}(\mathcal{S}^{-1}(\bar{\mathbf{U}}_h^i) + (G(\bar{\mathbf{u}}_h^i), 0) - \mathcal{S}^{-1}(\mathbf{U}) - (G(\mathbf{u}), 0))\|_{X \times M}. \end{aligned}$$

En utilisant (8.2), on a :

$$\|\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}_h^i\|_{X \times M} \leq c' \|\mathcal{S}^{-1}(\bar{\mathbf{U}}_h^i) + (G(\bar{\mathbf{u}}_h^i), 0) - \mathcal{S}^{-1}(\mathbf{U}) - (G(\mathbf{u}), 0)\|_{X' \times M'}$$

En utilisant (8.27) et (8.26), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}_h^i\|_{X \times M} & \leq C_1 \left( \sup_{\substack{\mathbf{v} \in X \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}, \mathbf{v} \rangle + \langle \bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle + \langle \mathcal{R}_h^1, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle + \langle \mathcal{R}_h^2, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_X} \right. \\ & \quad + \sup_{\substack{\mathbf{v} \in X \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} ((\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^i) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|_X} + \sup_{\substack{q \in M \\ q \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^i \, d\mathbf{x}}{\|q\|_{L^2(\Omega)}} \\ & \quad \left. + \sup_{\substack{\mathbf{v} \in X \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^i) \bar{\mathbf{u}}_h^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|_X} \right), \end{aligned} \tag{8.31}$$

où

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_h^1, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle & = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_{\kappa} (\bar{\mathbf{f}}_h + \operatorname{div}((\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^i)) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \bar{\mathbf{u}}_h^i - \nabla \bar{p}_h^i) \right. \\ & \quad (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \sum_{e \in \varepsilon_\kappa} \int_e [(\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \bar{p}_h^i \mathbb{I}](\sigma) \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\sigma \\ & \quad \left. \int_{\kappa} (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i : \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \right\}, \end{aligned}$$

et pour tout  $q \in M$ ,

$$\langle \mathcal{R}_h^2, \mathbf{v} \rangle = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

Le deuxième terme du membre de droite de (8.31) peut être majoré de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^i) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &\leq \| \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^i \|_{L^4(\Omega)} \| \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i \|_{L^2(\Omega)} \| \mathbf{v} \|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq S_4^2 \| \bar{\mathbf{u}}_h^i \|_X \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} | \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^i |_{H^1(\kappa)^d}^2 \right)^{1/2} \| \mathbf{v} \|_X. \end{aligned}$$

En utilisant (8.9), on obtient

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in X \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} ((\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^i) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}}{\| \mathbf{v} \|_X} \leq C_2 \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\eta_{i,\kappa}^L)^2 \right)^{1/2}.$$

Après application de Cauchy-Schwarz, Le troisième terme est majoré par l'indicateur de linéarisation. De la même manière, le dernier terme du membre droite de (8.31) sera majoré par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^i) \bar{\mathbf{u}}_h^i \, d\mathbf{x} &\leq \frac{1}{2} \| \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^i) \|_{L^2(\Omega)} \| \bar{\mathbf{u}}_h^i \|_{L^4(\Omega)} \| \mathbf{v} \|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \frac{\sqrt{d} S_4^2}{2} \| \bar{\mathbf{u}}_h^i \|_X \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} | \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^i |_{H^1(\kappa)^d}^2 \right)^{1/2} \| \mathbf{v} \|_X. \end{aligned}$$

D'où on obtient

$$\sup_{\substack{\mathbf{v} \in X \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \bar{\mathbf{u}}_h^i) \bar{\mathbf{u}}_h^i \, d\mathbf{x}}{\| \mathbf{v} \|_X} \leq C_3 \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\eta_{i,\kappa}^L)^2 \right)^{1/2}.$$

Pour le premier terme de (8.31), on choisit  $\mathbf{v}_h = \mathcal{C}_h \mathbf{v}$  et on utilise (4.2), pour avoir l'estimation désirée.  $\square$

**Remarque 8.3.2** *Le théorème 8.3.1 énonce une estimation a posteriori lorsque la solution  $\bar{\mathbf{U}}_h^i = (\bar{\mathbf{u}}_h^i, \bar{p}_h^i)$  est dans un voisinage de  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, p)$ . Or le théorème de convergence 8.2.5 permet de garantir cette hypothèse dans un cas particulier.*

## 8.4 Majoration des indicateurs

On commence par majorer  $(\eta_{i,\kappa}^F)^2$ , l'indicateur provenant du filtrage qui sera utile pour pouvoir majorer l'indicateur de discrétisation  $(\eta_{i,\kappa}^D)^2$ .

**Théorème 8.4.1** *On suppose que la solution  $\mathbf{u}$  du problème (FVS) est telle que  $\nabla \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega)$ . On aura l'estimation suivante :*

$$(\eta_{i,\kappa}^F)^2 \leq C \left( h_\kappa^{4-d} | \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u} |_{H^1(\kappa)^d}^2 + h_\kappa^4 | \bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u} |_{H^1(\kappa)^d}^2 + \| \nu_t(\mathbf{u}) \nabla \mathbf{u} \|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}^2 \right). \quad (8.32)$$

où  $C$  est une constante positive.

**Preuve :** On intercale  $\nu_t(\mathbf{u}) \nabla \mathbf{u}$  dans  $(\eta_{i,\kappa}^F)^2$  et on utilise le fait que  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ . On obtient :

$$\| \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i \|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}^2 \leq 2 \| \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \nu_t(\mathbf{u}) \nabla \mathbf{u} \|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}^2 + 2 \| \nu_t(\mathbf{u}) \nabla \mathbf{u} \|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}^2. \quad (8.33)$$

On intercale  $\nu_t(\mathbf{u}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i$  dans le premier terme du membre de droite de (8.33) :

$$\begin{aligned} \| \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i \|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}^2 &\leq 4 \| (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_t(\mathbf{u})) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i \|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}^2 + 4 \| \nu_t(\mathbf{u}) \nabla (\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}) \|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}^2 \\ &\quad + 2 \| \nu_t(\mathbf{u}) \nabla \mathbf{u} \|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}^2. \end{aligned}$$

Or, en utilisant l'inégalité inverse :

$$\begin{aligned}
\|(\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_t(\mathbf{u}))\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)^{d\times d}}^2 &\leq \int_{\kappa} \left( c_s h_{\kappa}^2 \|\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u})\|_F |\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i| \right)^2 d\mathbf{x} \\
&\leq c_s^2 h_{\kappa}^4 \|\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^{\infty}(\kappa)^{d\times d}}^2 \int_{\kappa} \|\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u})\|_F^2 d\mathbf{x} \\
&\leq c_s^2 \tilde{c} h_{\kappa}^{4-d} \|\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)^d}^2 \|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}\|_{H^1(\kappa)^d}^2.
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant le fait que la solution  $\mathbf{u}$  du problème (FVS) est telle que  $\nabla\mathbf{u} \in L^{\infty}(\Omega)$  on obtient

$$\begin{aligned}
\|\nu_t(\mathbf{u})\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u})\|_{L^2(\kappa)^{d\times d}}^2 &\leq \int_{\kappa} \left( c h_{\kappa}^2 \|\nabla\mathbf{u}\|_F |\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u})| \right)^2 d\mathbf{x} \\
&\leq c^2 h_{\kappa}^4 \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^{\infty}(\kappa)^{d\times d}}^2 \int_{\kappa} |\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u})|^2 d\mathbf{x} \\
&\leq c^2 h_{\kappa}^4 \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^{\infty}(\kappa)^{d\times d}}^2 \|\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}\|_{H^1(\kappa)^d}^2.
\end{aligned}$$

Enfin en regroupant toutes les inégalités précédentes, on aura :

$$\begin{aligned}
\|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)^{d\times d}}^2 &\leq 4c^2 h_{\kappa}^{4-d} \|\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)^{d\times d}}^2 \|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}\|_{H^1(\kappa)^d}^2 \\
&\quad + 4c^2 h_{\kappa}^4 \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^{\infty}(\kappa)^{d\times d}}^2 \|\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}\|_{H^1(\kappa)^d}^2 + 2\|\nu_t(\mathbf{u})\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d\times d}}^2.
\end{aligned}$$

En utilisant (8.9) et que  $\nabla(\mathbf{u}) \in L^{\infty}(\Omega)$ , on obtient l'estimation désirée (8.32).  $\square$

**Remarque 8.4.2** Le terme  $\|\nu_t(\mathbf{u})\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d\times d}}^2$  qui apparaît dans (8.32), peut être écrit de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\|\nu_t(\mathbf{u})\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d\times d}}^2 &\leq 2\|\nu_t(\mathbf{u})\nabla(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(\kappa)^{d\times d}}^2 + 2\|\nu_t(\mathbf{u})\nabla\bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(\kappa)^{d\times d}}^2 \\
&\leq 2\|\nu_t(\mathbf{u})\nabla(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(\kappa)^{d\times d}}^2 + 4\|\nu_t(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\nabla\bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(\kappa)^{d\times d}}^2 + 4\|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})\nabla\bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(\kappa)^{d\times d}}^2 \\
&\leq 2c^2 h_{\kappa}^4 \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^{\infty}(\kappa)^{d\times d}}^2 \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_{H^1(\kappa)^d}^2 + 4c^2 h_{\kappa}^4 \|\nabla\bar{\mathbf{u}}\|_{L^{\infty}(\kappa)^{d\times d}}^2 \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_{H^1(\kappa)^d}^2 \\
&\quad + 4\|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})\nabla\bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(\kappa)^{d\times d}}^2.
\end{aligned}$$

En prenant  $\nabla\mathbf{u}, \nabla\bar{\mathbf{u}} \in L^{\infty}(\kappa)$ , alors la quantité  $\|\nu_t(\mathbf{u})\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)}^2$  sera majorée par l'erreur entre  $\mathbf{u}$  et  $\bar{\mathbf{u}}$  et le terme  $\|\nu_t(\bar{\mathbf{u}})\nabla\bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(\kappa)^{d\times d}}^2$  provenant du filtrage.

Dans le théorème suivant, on va majorer l'indicateur de linéarisation  $(\eta_{i,\kappa}^L)^2$  et l'indicateur de discrétisation  $(\eta_{i,\kappa}^D)^2$ .

**Théorème 8.4.3** On suppose que la solution  $\mathbf{u}$  du problème (FVS) est telle que  $\nabla\mathbf{u} \in L^{\infty}(\Omega)$ . Pour tout  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ , on a les estimations suivantes :

$$(\eta_{i,\kappa}^L)^2 \leq 2\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{H^1(\kappa)^d}^2 + 2\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{H^1(\kappa)^d}^2. \quad (8.34)$$

$$(\eta_{i,\kappa}^D)^2 \leq L(w_{\kappa}). \quad (8.35)$$

où

$$\begin{aligned}
L(W) &\leq C' \left( \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{H^1(W)}^2 + \sum_{\kappa' \in W} h_{\kappa'}^2 \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}_h\|_{L^2(\kappa')^d}^2 + \|p - \bar{p}_h^i\|_{L^2(W)}^2 + \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{H^1(W)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|(\nu_{th}(\mathbf{u}) - \nu_t(\mathbf{u}))\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(W)^{d\times d}}^2 + \|\nu_t(\mathbf{u})\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(W)^{d\times d}}^2 \right),
\end{aligned} \quad (8.36)$$



et  $w_\kappa$  désigne la réunion des éléments de  $\mathcal{T}_h$  qui ont au moins une arête (ou face pour  $d = 3$ ) commune avec  $\kappa$ .

**Preuve :** On considère une cellule  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ . En utilisant l'inégalité triangulaire après avoir intercalé  $\mathbf{u}$  dans  $(\eta_{i,\kappa}^L)^2$ , on obtient l'estimation (8.34).

Maintenant, on désire majorer  $(\eta_{i,\kappa}^D)^2$  dont l'expression est donnée par (8.29). On procède en 4 étapes :

1. On ajoute et on retranche le terme  $(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\mathbf{u}$  au dernier terme de  $\eta_{i,\kappa}^D$  :

$$\begin{aligned} \|(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} &\leq \|(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u})\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} \\ &\quad + \|(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}. \end{aligned} \quad (8.37)$$

On intercale  $\nu_t(\mathbf{u})\nabla\mathbf{u}$  et  $\nu_{th}(\mathbf{u})\nabla\mathbf{u}$  dans le deuxième terme de (8.37), on obtient :

$$\begin{aligned} \|(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} &\leq \|(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u})\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} \\ &\quad + \|(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_{th}(\mathbf{u}))\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} \\ &\quad + \|(\nu_t(\mathbf{u}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} \\ &\quad + \|(\nu_{th}(\mathbf{u}) - \nu_t(\mathbf{u}))\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

On majore le premier terme de (8.38) par :

$$\begin{aligned} &\|(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u})\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} \\ &= \left\{ \int_\kappa \left[ \left( \frac{1}{|\kappa|} \int_\kappa c_s h_\kappa^2 \|\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_F d\mathbf{x} - c_s h_\kappa^2 \|\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_F \right) \nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}) \right]^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \\ &\leq 2c h_\kappa^2 \|\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\|_{L^\infty(\kappa)^{d \times d}} |\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}|_{H^1(\kappa)^d}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité inverse, on a :

$$\|(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u})\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} \leq 2c_s \tilde{c} h_\kappa^{2-d/2} |\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}|_{H^1(\kappa)^d} |\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}|_{H^1(\kappa)^d}.$$

En utilisant le fait que  $\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)}$  est bornée, on majore le deuxième terme de (8.38) par :

$$\|(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_{th}(\mathbf{u}))\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} \leq c' h_\kappa^2 \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} |\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}|_{H^1(\kappa)^d}.$$

De même

$$\|(\nu_t(\mathbf{u}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} \leq c' h_\kappa^2 \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}} |\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}|_{H^1(\kappa)^d}.$$

En regroupant les trois précédentes inégalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} &\leq c'h_\kappa^{2-d/2}|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}|_{H^1(\kappa)^d}|\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}|_{H^1(\kappa)^d} \\
&+ 2c'h_\kappa^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}}|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}|_{H^1(\kappa)^d} \\
&+ c'h_\kappa^2\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}}|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}|_{H^1(\kappa)^d} \\
&+ \|(\nu_{th}(\mathbf{u}) - \nu_t(\mathbf{u}))\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}.
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (8.9) et le fait que  $\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)^{d \times d}}$  est bornée, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|(\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} &\leq C_4\left(h_\kappa^{2-d/2}|\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}|_{H^1(\kappa)^d} + h_\kappa^2|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}|_{H^1(\kappa)^d}\right. \\
&\left. + \|(\nu_{th}(\mathbf{u}) - \nu_t(\mathbf{u}))\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}\right).
\end{aligned} \tag{8.39}$$

2. On prend  $\mathbf{v}_h = \mathbf{0}$  et on intercale  $\int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) \cdot \mathbf{v} dx$  et le terme nul  $\frac{1}{2} \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u}) \bar{\mathbf{u}}_h^i \cdot \mathbf{v} dx$  dans (8.27), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\kappa' \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa'} \bar{\mathbf{f}}_h + \operatorname{div}((\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i) - (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}}_h^i - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_h^i - \nabla \bar{p}_h^i \mathbf{v} dx \\
&= \nu \int_\Omega \nabla(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i) \nabla \mathbf{v} dx + \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i) \mathbf{v} dx - \int_\Omega (p - \bar{p}_h^i) \operatorname{div} \mathbf{v} dx \\
&+ \int_\Omega ((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}_h^i \mathbf{v} dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \bar{\mathbf{u}}_h^i \mathbf{v} dx - \sum_{\kappa' \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa'} (\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}_h) \mathbf{v} dx \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{e \in \varepsilon_{\kappa'}} \int_e [(\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i - \bar{p}_h^i \mathbb{I}(\sigma) \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} d\sigma - \int_\Omega \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i \nabla \mathbf{v} dx.
\end{aligned} \tag{8.40}$$

On intercale  $\int_\Omega ((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx$  dans le quatrième terme du membre de droite de (8.40)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\kappa_1 \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa_1} \left( \bar{\mathbf{f}}_h + \operatorname{div}((\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i) - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \bar{\mathbf{u}}_h^i - \nabla \bar{p}_h^i \right) \mathbf{v} dx \\
&= \nu \int_\Omega \nabla(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i) : \nabla \mathbf{v} dx + \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i)) \cdot \mathbf{v} dx - \int_\Omega (p - \bar{p}_h^i) \operatorname{div} \mathbf{v} dx \\
&+ \int_\Omega ((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \cdot \nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} dx + \int_\Omega ((\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_\Omega (\operatorname{div}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})) \bar{\mathbf{u}}_h^i \cdot \mathbf{v} dx \\
&- \sum_{\kappa_1 \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa_1} (\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}_h) \mathbf{v} dx + \frac{1}{2} \sum_{\kappa_1 \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \varepsilon_{\kappa_1}} \int_e [(\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i - \bar{p}_h^i \mathbb{I}(\sigma) \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} d\sigma \\
&- \int_\Omega \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i : \nabla \mathbf{v} dx.
\end{aligned} \tag{8.41}$$

On prend :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\kappa = \begin{cases} (\bar{\mathbf{f}}_h - \nabla \bar{p}_h^i + \operatorname{div}((\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i \\ \quad - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_h^i) \psi_\kappa & \text{sur } \kappa, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \kappa, \end{cases}$$

avec  $\psi_\kappa$  la fonction bulle qui est égale au produit des coordonnées barycentriques associées de  $\kappa$ . En remplaçant  $\mathbf{v}_\kappa$  dans (8.41) par sa valeur et en utilisant la relation de Cauchy-Schwarz et le fait que  $\nabla \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega)^{d \times d}$ , on aboutit à :

$$\begin{aligned} & \|(\bar{\mathbf{f}}_h - \nabla \bar{p}_h^i + \operatorname{div}((\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \frac{1}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\bar{\mathbf{u}}_h^i) \psi_\kappa^{1/2}\|_{L^2(\kappa)}^2 \\ & \leq C_5 \left( \nu |\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i|_{H^1(\kappa)} |\mathbf{v}_\kappa|_{H^1(\kappa)} + \|\mathbf{u}\|_{L^4(\kappa)} |\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i|_{H^1(\kappa)} \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^4(\kappa)} + \|p - \bar{p}_h^i\|_{L^2(\kappa)} \right. \\ & \quad \|\mathbf{v}_\kappa\|_{H^1(\kappa)} + \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{L^4(\kappa)} \|\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}\|_{H^1(\kappa)} \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^4(\kappa)} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{L^2(\kappa)} \\ & \quad \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^2(\kappa)} + \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{H^1(\kappa)} \|\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^4(\kappa)} \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^4(\kappa)} + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}_h\|_{L^2(\kappa)} \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^2(\kappa)} \\ & \quad \left. + \|\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} |\mathbf{v}_\kappa|_{H^1(\kappa)} \right). \end{aligned} \tag{8.42}$$

En intercalant  $\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i$  dans le dernier terme du membre droite de (8.42) on obtient

$$\|\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} \leq \|\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} + \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}.$$

En utilisant (8.39), la relation (8.32) et le fait que  $h_\kappa$  est majoré par le diamètre de  $\Omega$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \|\nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} & \leq C_6 \left( |\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}|_{H^1(\kappa)} + |\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}|_{H^1(\kappa)} \right. \\ & \quad \left. + \|(\nu_{th}(\mathbf{u}) - \nu_t(\mathbf{u}))\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} + \|\nu_t(\mathbf{u})\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} \right). \end{aligned} \tag{8.43}$$

L'inégalité (8.42) sera de la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \|(\bar{\mathbf{f}}_h - \nabla \bar{p}_h^i + \operatorname{div}((\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \frac{1}{2}(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})\bar{\mathbf{u}}_h^i) \psi_\kappa^{1/2}\|_{L^2(\kappa)}^2 \\ & \leq C_7 \left( \nu |\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i|_{H^1(\kappa)} |\mathbf{v}_\kappa|_{H^1(\kappa)} + \|\mathbf{u}\|_{L^4(\kappa)} |\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i|_{H^1(\kappa)} \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^4(\kappa)} \right. \\ & \quad + \|p - \bar{p}_h^i\|_{L^2(\kappa)} \|\mathbf{v}_\kappa\|_{H^1(\kappa)} + \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{L^4(\kappa)} \|\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}\|_{H^1(\kappa)} \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^4(\kappa)} + \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{L^2(\kappa)} \\ & \quad \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^2(\kappa)} + \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{H^1(\kappa)} \|\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^4(\kappa)} \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^4(\kappa)} \\ & \quad + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}_h\|_{L^2(\kappa)} \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^2(\kappa)} + C_6 \left( |\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}|_{H^1(\kappa)} + |\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}|_{H^1(\kappa)} \right. \\ & \quad \left. + \|(\nu_{th}(\mathbf{u}) - \nu_t(\mathbf{u}))\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} + \|\nu_t(\mathbf{u})\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} \right) |\mathbf{v}_\kappa|_{H^1(\kappa)} \right). \end{aligned} \tag{8.44}$$

On multiplie cette inégalité par  $h_\kappa^2$ ; on utilise la deuxième inégalité de (4.1.1) pour majorer  $h_\kappa |\mathbf{v}_\kappa|_{H^1(\kappa)}$ . De plus, on utilise le fait que  $\mathbf{v}_\kappa$  est dans  $H_0^1(\Omega)$  et que son support est  $\kappa$  pour montrer que  $\|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^4(\kappa)} = \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^4(\Omega)} \leq S_4 |\mathbf{v}_\kappa|_{H^1(\Omega)} = S_4 |\mathbf{v}_\kappa|_{H^1(\kappa)}$ . On utilise (3.6), (8.1) et le

Théoreme 8.2.4 pour obtenir :

$$\begin{aligned}
& h_\kappa^2 \|(\bar{\mathbf{f}}_h - \nabla \bar{p}_h^i + \operatorname{div}((\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_h^i) \psi_\kappa^{1/2}\|_{L^2(\kappa)^d}^2 \\
& \leq C_8 \left( \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{H^1(\kappa)^d} h_\kappa \|\bar{\mathbf{v}}_\kappa\|_{L^2(\kappa)^d} + h_\kappa \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}_h\|_{L^2(\kappa)^d} h_\kappa \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^2(\kappa)^d} \right. \\
& \quad + \|p - \bar{p}_h^i\|_{L^2(\kappa)} h_\kappa \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^2(\kappa)^d} \\
& \quad + \|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}\|_{H^1(\kappa)^d} h_\kappa \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^2(\kappa)^d} + \|(\nu_{th}(\mathbf{u}) - \nu_t(\mathbf{u}))\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} h_\kappa \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^2(\kappa)^d} \\
& \quad \left. + \|\nu_t(\mathbf{u})\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}} h_\kappa \|\mathbf{v}_\kappa\|_{L^2(\kappa)^d} \right).
\end{aligned}$$

En remplaçant  $\mathbf{v}_\kappa$  par sa valeur et en utilisant la propriété (4.1.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
& h_\kappa^2 \|(\bar{\mathbf{f}}_h - \nabla \bar{p}_h^i + \operatorname{div}((\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_h^i) \psi_\kappa^{1/2}\|_{L^2(\kappa)^2}^2 \\
& \leq C_9 \left( \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{H^1(\kappa)^d}^2 + h_\kappa^2 \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}_h\|_{L^2(\kappa)^d}^2 + \|p - \bar{p}_h^i\|_{L^2(\kappa)}^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}\|_{H^1(\kappa)^d}^2 \right. \\
& \quad \left. + \|(\nu_{th}(\mathbf{u}) - \nu_t(\mathbf{u}))\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}^2 + \|\nu_t(\mathbf{u})\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\kappa)^{d \times d}}^2 \right).
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$h_\kappa^2 \|(\bar{\mathbf{f}}_h - \nabla \bar{p}_h^i + \operatorname{div}((\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_h^i) \psi_\kappa^{1/2}\|_{L^2(\kappa)^2} \leq L(\kappa). \tag{8.45}$$

où la définition de  $L(W)$  est donnée par (8.36)

3. On majore le deuxième terme de  $(\eta_{i,\kappa}^D)^2$ . On réécrit (8.41) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{\kappa' \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \varepsilon_{\kappa'}} \int_e [(\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \bar{p}_h^i \mathbb{I}](\sigma) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = \\
& \sum_{\kappa' \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa'} \bar{\mathbf{f}}_h + \operatorname{div}((\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) - (\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}_h^i - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_h^i - \nabla \bar{p}_h^i) \mathbf{v} \, dx \\
& + \nu \int_\Omega \nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} \, dx + \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}) \mathbf{v} \, dx + \int_\Omega (p - \bar{p}_h^i) \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \\
& + \int_\Omega ((\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla(\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_\Omega ((\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, dx \\
& + \frac{1}{2} \int_\Omega \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}) \bar{\mathbf{u}}_h^i \mathbf{v} \, dx + \sum_{\kappa' \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa'} (\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}_h) \mathbf{v} \, dx + \int_\Omega \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i : \nabla \mathbf{v} \, dx.
\end{aligned} \tag{8.46}$$

On prend :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e = \begin{cases} \mathcal{L}_{e,\kappa} \left( [(\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \bar{p}_h^i \mathbb{I}](\sigma) \mathbf{n} \right) \psi_e & \text{sur } \{\kappa, \tilde{\kappa}\}, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \{\kappa \cup \tilde{\kappa}\}, \end{cases}$$

où  $\psi_e$  désigne la fonction bulle sur l'arrête  $e$  et  $\mathcal{L}_{e,\kappa}$  est l'opérateur de relèvement des polynômes s'annulant sur  $\partial e$  en des polynômes sur  $\kappa$  s'annulant sur  $\partial \kappa \setminus e$ . En utilisant (8.43) et en remplaçant

$\mathbf{v}_e$  par sa valeur et en utilisant la relation de Cauchy-Schwarz et (8.43) pour le dernier terme, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
& \left\| [(\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i - \bar{p}_h^i\mathbb{I}](\sigma)\mathbf{n}] \psi_e^{1/2} \right\|_{L^2(e)^d}^2 \\
& \leq C_{10} \left( \|\bar{\mathbf{f}}_h - \nabla\bar{p}_h^i + \operatorname{div}((\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i) - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i - \frac{1}{2} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_h^i \|_{L^2(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} \right. \\
& \quad \|\mathbf{v}_e\|_{L^2(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} + \nu \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{H^1(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} \|\mathbf{v}_e\|_{H^1(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} + \|\mathbf{u}\|_{L^4(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{H^1(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} \\
& \quad \|\mathbf{v}_e\|_{L^4(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} + \|p - \bar{p}_h^i\|_{L^2(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} \|\mathbf{v}_e\|_{H^1(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} + \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{L^4(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} \|\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}\|_{H^1(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} \\
& \quad \|\mathbf{v}_e\|_{L^4(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} + \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{L^2(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{v}_e\|_{L^2(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} \\
& \quad + \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{H^1(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} \|\bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^4(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} \|\mathbf{v}_e\|_{L^4(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}_h\|_{L^2(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} \|\mathbf{v}_e\|_{L^2(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} \\
& \quad + C_6 \left( \|\bar{\mathbf{u}}_h^i - \mathbf{u}\|_{H^1(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} + \|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}\|_{H^1(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} + \|(\nu_{th}(\mathbf{u}) - \nu_t(\mathbf{u}))\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa \cup \bar{\kappa})^{d \times d}} \right. \\
& \quad \left. + \|\nu_t(\mathbf{u})\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa \cup \bar{\kappa})^{d \times d}} \right) \|\mathbf{v}_e\|_{H^1(\kappa \cup \bar{\kappa})^d} \Big).
\end{aligned}$$

En multipliant par  $h_e$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& h_e \left\| [(\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i - \bar{p}_h^i\mathbb{I}](\sigma)\mathbf{n}] \psi_e^{1/2} \right\|_{L^2(e)^d}^2 \\
& \leq C_5 \left( h_e \|\bar{\mathbf{f}}_h - \nabla\bar{p}_h^i + \operatorname{div}((\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i) - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} \cdot \nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i - \frac{1}{2} (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \bar{\mathbf{u}}_h^i \|_{L^2(\kappa \cup \kappa')^d} \right. \\
& \quad \|\mathbf{v}_e\|_{L^2(\kappa \cup \kappa')^d} + \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{H^1(\kappa \cup \kappa')^d} h_e \|\mathbf{v}_e\|_{H^1(\kappa \cup \kappa')^d} \\
& \quad + (\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{H^1(\kappa \cup \kappa')^d} + \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}\|_{H^1(\kappa \cup \kappa')^d}) h_e \|\mathbf{v}_e\|_{L^4(\kappa \cup \kappa')^d} \\
& \quad + \|p - \bar{p}_h^i\|_{L^2(\kappa \cup \kappa')^d} h_e \|\mathbf{v}_e\|_{H^1(\kappa \cup \kappa')^d} + \|\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} - \mathbf{u}\|_{H^1(\kappa \cup \kappa')^d} h_e \|\mathbf{v}_e\|_{L^2(\kappa \cup \kappa')^d} \\
& \quad + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}_h\|_{L^2(\kappa \cup \kappa')^d} h_e \|\mathbf{v}_e\|_{L^2(\kappa \cup \kappa')^d} + \|(\nu_{th}(\mathbf{u}) - \nu_t(\mathbf{u}))\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa \cup \kappa')^{d \times d}} h_e \|\mathbf{v}_e\|_{H^1(\kappa \cup \kappa')^d} \\
& \quad \left. + \|\nu_t(\mathbf{u})\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\kappa \cup \kappa')^{d \times d}} h_e \|\mathbf{v}_e\|_{H^1(\kappa \cup \kappa')^d} \right).
\end{aligned}$$

De la même manière faite ci-dessus pour  $\mathbf{v}_\kappa$ , on a la majoration suivante :  $\|\mathbf{v}_e\|_{L^4(\kappa \cup \kappa')^d} \leq S_4 \|\mathbf{v}_e\|_{H^1(\kappa \cup \kappa')^d}$ . Ensuite, on utilise les deux inégalités de la propriété 4.1.2, l'inégalité (8.45), on simplifie par  $h_e^{1/2} \|\mathbf{v}_e\|_{L^2(\kappa \cup \kappa')^d}$ , on élève au carré le résultat, et pour un  $\kappa$  donné, on somme sur  $e \in \partial\kappa$ ; pour obtenir :

$$\sum_{e \in \varepsilon_\kappa} h_e \left\| [(\nu + \nu_{th}(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}))\nabla\bar{\mathbf{u}}_h^i - \bar{p}_h^i\mathbb{I}](\sigma)\mathbf{n}] \right\|_{L^2(e)^d}^2 \leq L(w_\kappa). \quad (8.47)$$

4. Finalement comme  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , on a :

$$\int_\Omega q(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}_h^i(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = - \int_\Omega q(\mathbf{x}) \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (8.48)$$

On prend

$$q = q_\kappa = \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^i \xi_\kappa.$$

où  $\xi_\kappa$  est la fonction caractéristique de  $\kappa$ , on aura :

$$\int_\kappa \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^i (\operatorname{div}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i)) d\mathbf{x} = - \int_\kappa (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^i)^2 d\mathbf{x}.$$

D'après Cauchy-Schwarz, on aura :

$$\|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)}^2 \leq \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)} \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i)\|_{L^2(\kappa)}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)} &\leq \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i)\|_{L^2(\kappa)} \\ &\leq \sqrt{d} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{H^1(\kappa)^d}. \end{aligned} \quad (8.49)$$

En regroupant (8.39), (8.45), (8.47) et (8.49), on obtient l'estimation désirée.  $\square$

## 8.5 Équivalence entre erreurs et estimateurs

Nous avons donc prouvé dans les sections précédentes que, sous les hypothèses du théorème 8.4.3, la pression et la vitesse exactes vérifient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_X^2 + \|p - \bar{p}_h^i\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\eta_{i,\kappa}^D)^2 + (\eta_{i,\kappa}^F)^2 + (\eta_{i,\kappa}^L)^2 + h_\kappa^2 \|\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{f}}_h\|_{L^2(\kappa)^d}^2 + \|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{X'(\kappa)}^2 \right), \end{aligned} \quad (8.50)$$

où  $C$  est une constante positive et que, d'autre part, on a aussi les majorations inverses (8.32), (8.34) et (8.35). Ceci prouve l'équivalence entre les indicateurs et l'erreur.

## 8.6 Simulations numériques

Dans cette section, on établit des simulations numériques en utilisant le logiciel FreeFem++.

On va utiliser le même exemple que dans le cas instationnaire. On considère le rectangle suivant :

où  $AB = 1.5$ ,  $BC = DE = 1$ ,  $CD = 0.25$ ,  $EF = 2.45$ ,  $FG = AL = 1.5$ ,  $GH = LK = 0.4$ ,  $HI = KJ = 1.1$ ,  $LG = KH = JI = 4.2$ .

On prend  $\Gamma = \partial\Omega$  et on choisit  $\nu = \frac{1}{Re}$  avec  $Re$  le nombre de Reynolds donné.

On divise chaque segment de  $\Omega$  en  $N$  segments. Dans nos expériences numériques, on choisit la densité des forces  $\mathbf{f}$  égale à  $(-1, 0)$  dans le rectangle  $LGHK$  et à  $(0, 0)$  d'autre part. Durant cette section, on considère  $\mathbf{u}_h^0$  solution du problème de Stokes avec conditions de Dirichlet homogènes. Pour résoudre le problème de Navier-Stokes, on implémente le schéma itératif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ayant } \mathbf{u}_h^{i-1} \in X_h, \text{ chercher } (\mathbf{u}_h^i, p_h^i) \in X_h \times M_h \text{ solution de :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \nu(\nabla \mathbf{u}_h^i, \nabla \mathbf{v}_h) + d(\mathbf{u}_h^{i-1}, \mathbf{u}_h^i, \mathbf{v}_h) - (\bar{p}_h^i, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle, \\ \forall q_h \in M_h, \quad (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^i, q_h) = 0. \end{array} \right. \quad (8.51)$$

On définit l'indicateur de linéarisation  $\tilde{\eta}^i$  suivant :

$$\tilde{\eta}_i^L = \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\eta_{i,\kappa}^L)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (8.52)$$

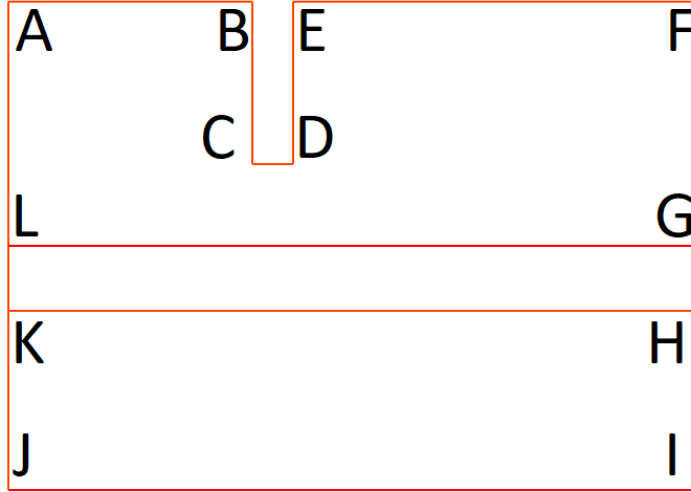


FIGURE 8.1 – Domaine de calcul  $\Omega$

avec

$$(\eta_{i,\kappa}^L) = |\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}|_{H^1(\kappa)^d}.$$

On définit le critères d'arrêt suivant :

$$\tilde{\eta}_i^L \leq 10^{-6}. \quad (8.53)$$

On remarque que le schéma itératif (8.51) pour un maillage uniforme ( $N = 5, 10, 20, 30$ ) converge pour  $Re \leq 135$ . Dans [3], les auteurs ont proposé une légère modification du schéma numérique ( $FVSi_h$ ) qui a amélioré la convergence. Ils ont utilisé une méthode de relaxation dont le schéma itératif correspondant est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ayant } \tilde{\mathbf{u}}_h^{i-1} \in X_h, \text{ chercher } (\mathbf{u}_h^i, p_h^i) \in X_h \times M_h \text{ solution de :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \nu(\nabla \mathbf{u}_h^i, \nabla \mathbf{v}_h) + d(\tilde{\mathbf{u}}_h^{i-1}, \mathbf{u}_h^i, \mathbf{v}_h) - (p_h^i, \text{div } \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle, \\ \forall q_h \in M_h, \quad (\text{div } \mathbf{u}_h^i, q_h) = 0, \end{array} \right. \quad (8.54)$$

et on pose ensuite

$$\tilde{\mathbf{u}}_h^i = \frac{\mathbf{u}_h^i + \tilde{\mathbf{u}}_h^{i-1}}{2}.$$

En se basant sur ce nouveau problème itératif et pour un maillage uniforme avec  $N = (10, 20, 30)$ , il y a convergence pour  $Re \leq 2000$ .

Dans la suite, on considère cette moyenne dans tout le reste des tests numériques effectués, y compris pour le problème itératif correspondant à la méthode LES, qui sera le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ayant } \tilde{\mathbf{u}}_h^{i-1} \in X_h, \text{ chercher } (\bar{\mathbf{u}}_h^i, \bar{p}_h^i) \in X_h \times M_h \text{ solution de :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \nu(\nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i, \nabla \mathbf{v}_h) + (\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i, \nabla \mathbf{v}_h) + d(\tilde{\mathbf{u}}_h^{i-1}, \bar{\mathbf{u}}_h^i, \mathbf{v}_h) \\ \quad - (\bar{p}_h^i, \text{div } \mathbf{v}_h) = \langle \bar{\mathbf{f}}, \mathbf{v}_h \rangle, \\ \forall q_h \in M_h, \quad (\text{div } \bar{\mathbf{u}}_h^i, q_h) = 0, \end{array} \right. \quad (8.55)$$

et l'on pose ensuite

$$\tilde{\mathbf{u}}_h^i = \frac{\bar{\mathbf{u}}_h^i + \tilde{\mathbf{u}}_h^{i-1}}{2}.$$

On introduit l'indicateur global de linéarisation  $\bar{\eta}_i^L$  correspondant à (8.55) de la forme suivante :

$$\bar{\eta}_i^L = \left( \sum_{\kappa \in \tau_h} (\bar{\eta}_{i,\kappa}^L)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (8.56)$$

où

$$(\bar{\eta}_{i,\kappa}^L) = |\bar{\mathbf{u}}_h^i - \tilde{\mathbf{u}}_h^{i-1}|_{H^1(\kappa)^d}.$$

En testant le schéma correspondant à (8.55) pour  $N = 20$  et avec le critère d'arrêt  $\bar{\eta}_i^L \leq 10^{-6}$ , il converge pour des grands valeurs de  $Re$  (on a testé jusqu'à  $Re = 50000$ ).

Pour comparer les schémas (8.54) et (8.55), on introduit l'indicateur global de discrétisation :

1. Problème (8.54) :

$$\tilde{\eta}_i^D = \left( \sum_{\kappa \in \tau_h} (\tilde{\eta}_{i,\kappa}^D)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (8.57)$$

où

$$\begin{aligned} (\tilde{\eta}_{i,\kappa}^D) &= h_\kappa \|\mathbf{f}_h + \operatorname{div}(\nu \nabla \mathbf{u}_h^i) - \tilde{\mathbf{u}}_h^{i-1} \nabla \mathbf{u}_h^i - \frac{1}{2} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h^{i-1} \mathbf{u}_h^i - \nabla p_h^i\|_{L^2(\kappa)^d} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e \in \varepsilon_\kappa} h_e^{1/2} \|[(\nu \nabla \mathbf{u}_h^i - p_h^i \mathbb{I}) \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(e)^d} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^i\|_{L^2(\kappa)}. \end{aligned}$$

2. Problème (8.55) :

$$\bar{\eta}_i^D = \left( \sum_{\kappa \in \tau_h} ((\bar{\eta}_{i,\kappa}^D)^2 + (\bar{\eta}_{i,\kappa}^F)^2) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8.58)$$

où

$$\begin{aligned} (\bar{\eta}_{i,\kappa}^D) &= h_\kappa \|\bar{\mathbf{f}}_h + \operatorname{div}((\nu + \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i) - \tilde{\mathbf{u}}_h^{i-1} \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \frac{1}{2} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h^{i-1} \bar{\mathbf{u}}_h^i - \nabla \bar{p}_h^i\|_{L^2(\kappa)^d} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e \in \varepsilon_\kappa} h_e^{1/2} \|((\nu + \nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1})) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i - \bar{p}_h^i \mathbb{I}) \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(e)^d} + \|\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)} \end{aligned}$$

et

$$(\bar{\eta}_{i,\kappa}^F) = \|\nu_t(\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1}) \nabla \bar{\mathbf{u}}_h^i\|_{L^2(\kappa)^d}.$$

Les figures 8.2 et 8.3 montrent en échelle logarithmique les indicateurs d'erreur entre un problème uniforme (8.54) et uniforme LES (8.55) pour  $Re = 1000$  et  $N = 20$  en fonction des itérations. On remarque que le schéma LES (8.55) converge pour un nombre d'itération plus faible et on attribue ceci à la viscosité turbulente ajoutée dans le second cas.

Sur la figure 8.4, on compare en échelle logarithmique les estimateurs d'erreur globaux entre un problème uniforme LES et uniforme NS pour  $Re = 1000$  en fonction du nombre de degrés de liberté pour plusieurs valeurs de  $N$ , multiplié par le nombre des itérations nécessaire pour atteindre la convergence. Suite à ces figures, on conclut que le schéma LES (8.55) produit des résultats plus précis que le schéma NS (8.54). Cependant, nous devons être très prudents puisque les indicateurs sont équivalents, mais ne sont pas les erreurs réelles, et puisque des constantes inconnues sont impliquées dans les inégalités d'équivalence. Le fait que les deux courbes ont la même allure finale était prévu, puisque le raffinement dans le modèle LES implique que la viscosité turbulente tend vers 0, et donc la viscosité totale sera proche de la viscosité physique NS standard.



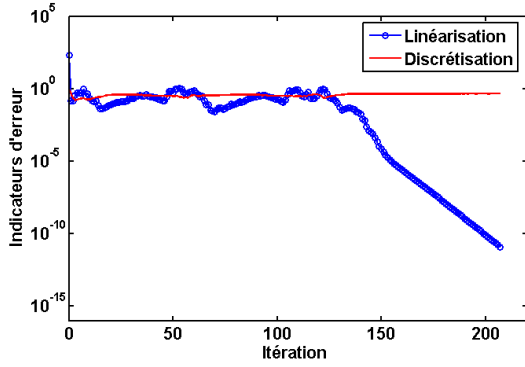


FIGURE 8.2 – Uniforme NS

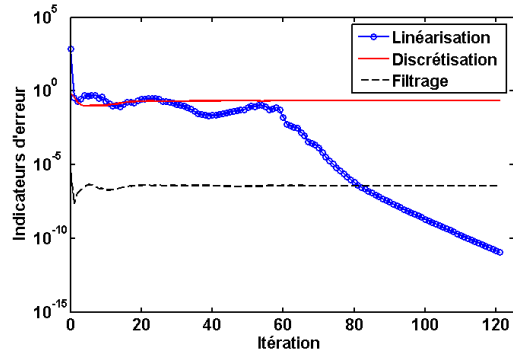


FIGURE 8.3 – Uniforme LES

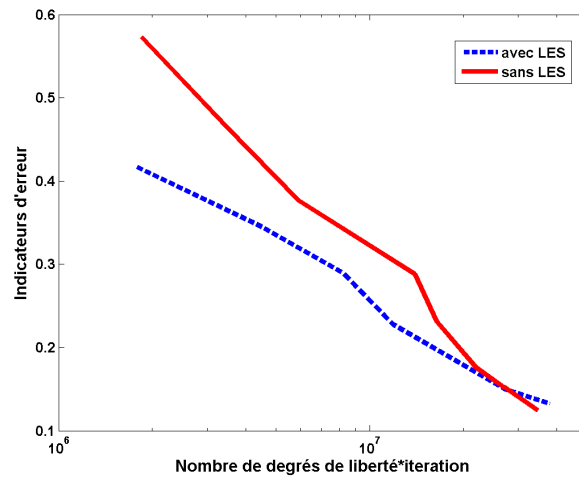


FIGURE 8.4 – Comparaison entre un problème uniforme NS et LES en fonction du nombre de degré de liberté.

Maintenant, on désire comparer le problème LES uniforme et adaptatif en se basant sur les indicateurs (8.58) et (8.56). On se réfère à l'algorithme proposé dans [3] pour la stratégie de la méthode adaptative. Les auteurs dans [3] utilise un nouveau critère d'arrêt :

$$\bar{\eta}_i^L \leq \gamma \bar{\eta}_i^D \quad (8.59)$$

où  $\gamma$  est un paramètre positif pour équilibrer entre l'erreur de discrétisation et de linéarisation. Ils ont choisi  $\gamma = 0.01$  dans leurs simulations numériques. Ce nouveau critère d'arrêt a été introduit dans [12,13] où les auteurs ont pris  $\gamma = 0.1$  dans leurs simulations numériques. Dans notre travail, on va prendre  $\gamma = 0.01$  (même valeur que dans [3]).

On introduit l'algorithme itératif suivant : Connaissant  $\bar{\mathbf{u}}_h^0$  pour tout  $i \geq 1$

1. (a) On résout (8.55) pour trouver  $\bar{\mathbf{u}}_h^i$   
 (b) On calcule  $\bar{\eta}_i^L$  et  $\bar{\eta}_i^D$
2. Si (8.59) est satisfait, on arrête la boucle et on passe à l'étape (3). Sinon, on prend  $\bar{\mathbf{u}}_h^{i-1} = \bar{\mathbf{u}}_h^i$ ,  $i = i + 1$  et on recommence l'étape (1).
3. (a) Si  $\bar{\eta}_i^D$  est inférieur à une tolérance fixée  $\varepsilon$ , on arrête les itérations et l'algorithme  
 (b) Sinon on effectue l'adaptation du maillage de la façon suivante :
  - i. Si  $\bar{\eta}_{i,\kappa}^D + \bar{\eta}_{i,\kappa}^F$  est très petite, on déraffine le maillage sur  $\kappa$
  - ii. Si  $\bar{\eta}_{i,\kappa}^D + \bar{\eta}_{i,\kappa}^F$  est très grande, on raffine le maillage autour de  $\kappa$
4. On prend  $i = i + 1$  et on recommence l'étape (1).

Les figures 8.5-8.8 montrent l'évolution du maillage pour différents niveaux de raffinement pour  $Re = 1000$  et  $N = 20$ . On remarque que d'une itération à l'autre, le raffinement est beaucoup plus concentré dans la région où la vitesse présente un profil complexe.

Pour  $Re = 1000$ , la figure 8.9 montre en échelle logarithmique les indicateurs d'erreur pour le problème sur maillage uniforme avec le critère d'arrêt classique (8.53) et celui avec le nouveau critère (8.59) et le problème LES sur maillage adaptatif en fonction de nombre de degrés de liberté. Cette figure montre l'efficacité de la méthode adaptative. Une autre façon pour prouver l'amélioration avec les calculs adaptatifs est de regarder les résultats obtenus pour un maillage uniforme et un autre adaptatif avec environ le même nombre de triangles. C'est ce qui est fait dans les figures 8.10 et 8.11 d'un côté, où le module de la vitesse est tracé et dans les figures 8.12 et 8.13 d'un autre côté, où une coupe verticale du module de vitesse est tracée. Les deux comparaisons montrent une meilleure précision des résultats avec les maillages adaptatifs.

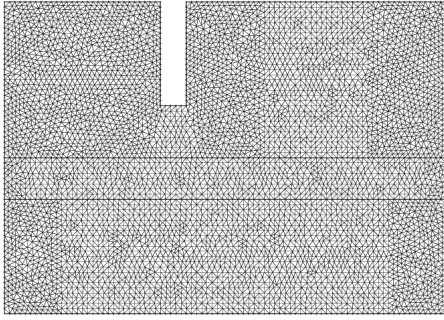


FIGURE 8.5 – Maillage initial du domaine (11114 triangles)

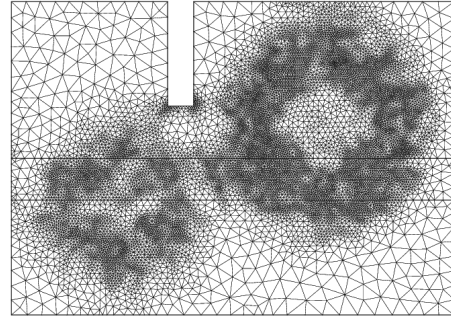


FIGURE 8.6 – Premier niveau de raffinement (23238 triangles)

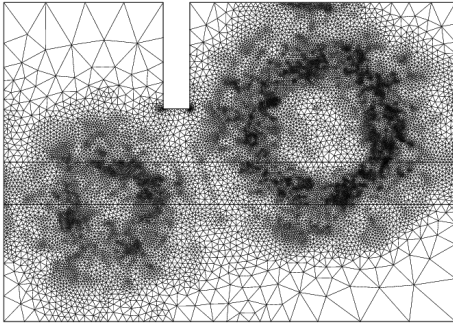


FIGURE 8.7 – Deuxième niveau de raffinement (37814 triangles)

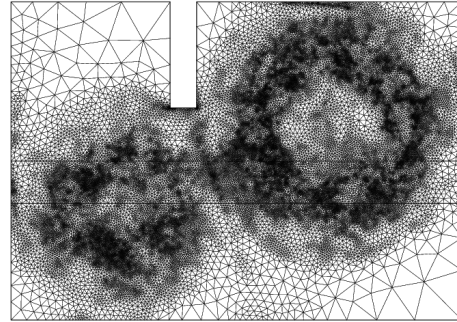


FIGURE 8.8 – Troisième niveau de raffinement (67086 triangles)

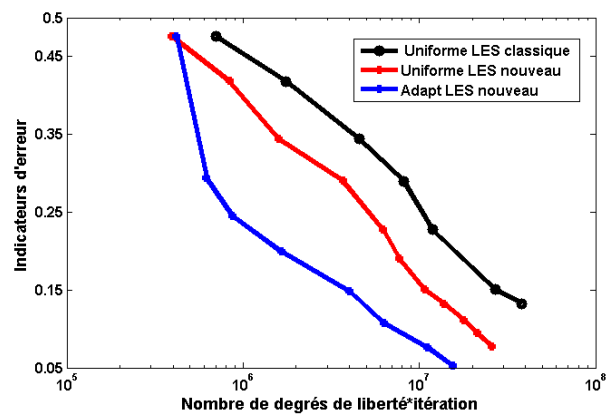


FIGURE 8.9 – Comparaison entre indicateurs obtenus sur maillages uniformes et adaptatifs pour le modèle LES en fonction du nombre de degrés de liberté

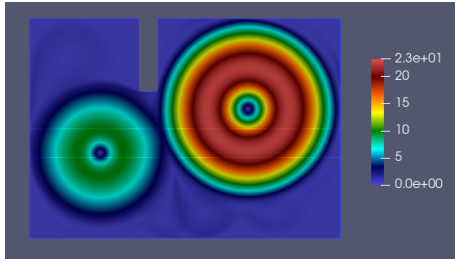


FIGURE 8.10 – Module de la vitesse pour un maillage uniforme avec  $N = 160$

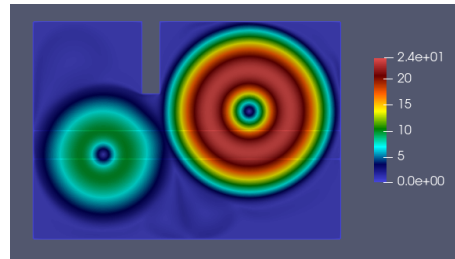


FIGURE 8.11 – Module de la vitesse pour le huitième niveau de raffinement

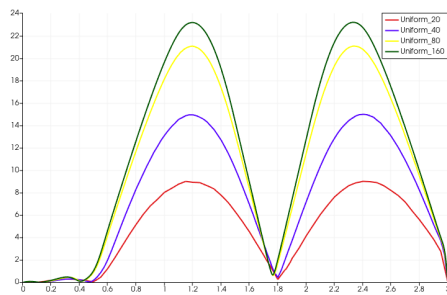


FIGURE 8.12 – Module de la vitesse : Coupe verticale passant par le centre du cercle de droite sur des maillages uniformes avec  $N = 20, 40, 80$  et  $160$ .

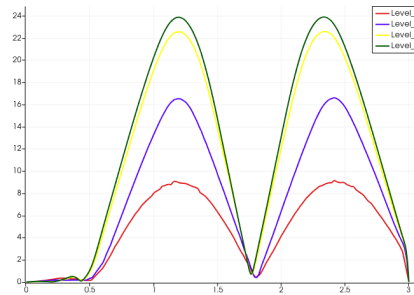


FIGURE 8.13 – Module de la vitesse : Coupe verticale passant par le centre du cercle de droite sur des maillages adaptés avec le niveau 0 (uniforme avec  $N = 20$ ), niveaux 2, 5 et 8.

# Conclusion et perspectives

Cette thèse a porté d'une part, sur la simulation des grandes échelles dans le cas instationnaire en dimension 2 où un terme de diffusion supplémentaire avec une viscosité non-linéaire dépendante de la solution est ajouté aux équations de Navier-Stokes ; d'autre part, dans le cas stationnaire en dimensions 2 et 3. Une validation numérique des résultats théoriques obtenus à travers des exemples académiques est effectuée dans les deux cas.

Un schéma numérique a été proposé en utilisant la méthode d'Euler pour la discrétisation en temps et la méthode des éléments finis pour la discrétisation en espace. On a établi l'estimation d'erreur *a posteriori* entre la solution exacte et la solution approchée. L'efficacité de ces estimateurs a été démontrée. Ensuite, on a validé les résultats obtenus par des simulations numériques académiques. Les essais numériques ont montré un gain en précision apporté par la méthode LES, en particulier sur des maillages grossiers et des nombres de Reynolds élevés.

Une perspective naturelle de ce travail de recherche serait l'estimation d'erreur *a posteriori* pour la simulation des grandes échelles au cas instationnaire en dimension 3, l'estimation d'erreur *a posteriori* pour le couplage des équations de Navier-Stokes (avec ou sans modèle de LES) avec une équation décrivant la thermique des écoulements.

# Bibliographie

- [1] A.A. Aldama. *Filtering Techniques for Turbulent Flow Simulation*, volume 56 of *Lecture Notes in Engineering*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [2] D.N. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin. A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, 21 :337–344, 1984.
- [3] C. Bernardi, J. Dakroub, G. Mansour, and T. Sayah. A posteriori analysis of iterative algorithms for Navier-Stokes problem. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 50(4) :1035–1055, 2016.
- [4] C. Bernardi, Y. Maday, and F. Rapetti. *Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, volume 45. Springer, Berlin, 2004.
- [5] C. Bernardi and T. Sayah. A posteriori error analysis of the time-dependent Stokes equations with mixed boundary conditions. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 35(1) :179–198, 2015.
- [6] C. Bernardi and R. Verfürth. A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent Stokes equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 38(3) :437–455, 2004.
- [7] P. Ciarlet. Analysis of the Scott–Zhang interpolation in the fractional order Sobolev spaces. *Journal of Numerical Mathematics*, 21(3) :173–180, 2013.
- [8] Ph. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *Revue française d’automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, 9(R2) :77–84, 1975.
- [9] C.A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback systems : input-output properties*. Academic Press, New York, 1975.
- [10] Q. Du and D. Gunzburger. Finite-element approximations of a Ladyzhenskaya model for stationary incompressible viscous flow. *SIAM journal on numerical analysis*, 27(1) :1–19, 1990.
- [11] Q. Du and D. Gunzburger. Analysis of a Ladyzhenskaya model for incompressible viscous flow. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 155(1) :21–45, 1991.
- [12] L. El Alaoui, A. Ern, and M. Vohralík. Guaranteed and robust a posteriori error estimates and balancing discretization and linearization errors for monotone nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(37-40) :2782–2795, 2011.
- [13] A. Ern and M. Vohralík. Adaptive inexact newton methods with a posteriori stopping criteria for nonlinear diffusion pdes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(4) :A1761–A1791, 2013.
- [14] RA Ferziger, Clark J.H., and W.C. Reynolds. Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow. *J. Fluid Mech*, 91 :1–16, 1979.
- [15] G.P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. I*. Volume 38 of Springer Tracts in Natural Philosophy, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [16] G.P. Galdi and W.J. Layton. Approximation of the larger eddies in fluid motions ii : A model for space-filtered flow. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 10(03) :343–350, 2000.
- [17] V. Girault and J.L. Lions. Two-grid finite-element schemes for the steady Navier-Stokes problem in polyhedra. *Portugaliae Mathematica*, 58(1) :25–58, 2001.

- [18] V. Girault and P.A Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Springer, 1986.
- [19] V. John. *Large eddy simulation of turbulent incompressible flows*. Springer, 2004.
- [20] B. Kosović. Subgrid-scale modelling for the large-eddy simulation of high-Reynolds-number boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 336 :151–182, 1997.
- [21] O.A. Ladyzhenskaya. New equations for the description of motion of viscous incompressible fluids and solvability in the large of boundary value problems for them. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 102 :85–104, 1967.
- [22] O.A. Ladyzhenskaya. Modification of the Navier-Stokes equations for large velocity gradients. *Semin. Math., V. A. Steklov Math. Inst., Leningrad* 7, 57–69, 1968.
- [23] O.A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969.
- [24] A. Leonhard. Energy cascade in large eddy simulation of turbulent fluid flow. *Advances in Geophysics A*, 18 :237–248, 1974.
- [25] J.L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.
- [26] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Analysis of the K-epsilon turbulence model*. John Wiley, 1994.
- [27] C.L.M.H. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Acad. Sci. Inst. France*, 6 :389–440, 1822.
- [28] J. Pousin and J. Rappaz. Consistency, stability, a priori and a posteriori errors for Petrov-Galerkin methods applied to nonlinear problems. *Numerische Mathematik*, 69(2) :213–231, 1994.
- [29] Adams R.A. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1978.
- [30] L.R. Scott and S. Zhang. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Mathematics of Computation*, 54(190) :483–493, 1990.
- [31] G.Gl. Stokes. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8, 1880.
- [32] R. Tenam. *Theory and numerical analysis of the Navier-Stokes equations*. North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [33] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Wiley & Teubner, Stuttgart, 1996.
- [34] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*. Prentice-Hall, Inc., 1993.