



**HAL**  
open science

# Simulation numérique d'écoulements gaz-particules sur maillage non structuré

Laure Combe

► **To cite this version:**

Laure Combe. Simulation numérique d'écoulements gaz-particules sur maillage non structuré. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Institut National Polytechnique de Toulouse, 1997. Français. NNT: . tel-03188498

**HAL Id: tel-03188498**

**<https://theses.hal.science/tel-03188498v1>**

Submitted on 10 Apr 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de l'Institut National Polytechnique de Toulouse

Spécialité : Mécanique des Fluides

**Simulation numérique d'écoulements gaz-particules sur maillage non structuré**

**Laure COMBE**

Soutenue le 27 octobre 1997

**Jury :**

Alain Bamberger, Institut Français du Pétrole	Examineur
Jean Fabre, Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse	Directeur de thèse
Thierry Gallouët, Université Aix-Marseille	Rapporteur
Sergey Gavriluk, Université Aix-Marseille	Examineur
Jean-Marc Hérard, EDF R&D	Examineur
Hervé Lemonnier, CEA Grenoble	Rapporteur
Olivier Simonin, Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse	Président du jury

Numéro d'ordre : 1347

SIMULATION NUMÉRIQUE D'ÉCOULEMENTS GAZ-PARTICULES SUR MAILLAGE  
NON STRUCTURÉ

## SYNTHÈSE

Dans de nombreuses applications industrielles, la prédiction d'écoulements diphasiques de type gaz-particules nécessite la mise en œuvre d'algorithmes appropriés aux écoulements instationnaires dans des géométries complexes. Dans ce but, on s'intéresse à la mise en œuvre de schémas volumes finis sur maillage non structuré utilisant des techniques décentrées. La modélisation par l'approche Eulérienne conduisant à des systèmes de convection non conservatifs pouvant générer des états non hyperboliques, les techniques classiques de résolution des systèmes hyperboliques issus de lois de conservation ne s'appliquent plus. A cette fin, des propositions basées sur une extension du schéma de Roe au cadre non conservatif, ont été récemment faites.

On s'intéresse à un modèle à deux fluides à quatre équations pour la simulation des écoulements gaz-particules. Le système de convection associé est non conservatif et conditionnellement hyperbolique. On ne sait pas résoudre le problème de Riemann unidimensionnel associé et l'on ne peut pas démontrer le respect du principe du maximum pour la variable fraction volumique. On propose alors une méthode à pas fractionnaires pour la résolution de ce système de sorte que le principe du maximum soit préservé dans chacun des sous-pas. Chaque sous-système est alors résolu par un solveur de type Godunov ou Roe avec une discrétisation appropriée des termes non conservatifs. Des tests bidimensionnels comprenant des ondes de détente et des ondes de choc sont présentés et montrent que l'algorithme traite correctement les chocs forts. On présente ensuite les résultats de la simulation d'un écoulement stationnaire dans une tuyère et des simulations fortement instationnaires de lits fluidisés denses. Ces simulations montrent la capacité de l'algorithme à gérer les écoulements pour lesquels le taux de compactage des particules peut avoisiner le maximum.

On étudie ensuite un modèle homogène à trois équations qui suppose la vitesse de glissement entre phases nulle. Le système de convection associé est alors inconditionnellement hyperbolique et conservatif. Ceci nous permet de résoudre le problème de Riemann monodimensionnel associé et l'on montre que le respect du principe du maximum est assuré si la modélisation de la pression intergranulaire est adéquate pour les régimes très denses. De ce fait, plusieurs méthodes de résolution basées sur des solveurs de Riemann exact ou approchés sont envisageables. On choisit de mettre en œuvre le schéma vRoe, récemment proposé pour la résolution des systèmes hyperboliques complexes. Des simulations bidimensionnelles de type tube à choc sont présentées et comparées avec les résultats obtenus avec le modèle à deux fluides à quatre équations. Les simulations de jets impactants vérifient le principe du maximum pour la variable fraction volumique. La simulation d'un écoulement diphasique dans une tuyère montre par contre que l'hypothèse de vitesse de glissement nulle est inadéquate dans de telles configurations.

**Mots clés :** ECOULEMENT DIPHASIQUE - MODÈLE À DEUX FLUIDES - EQUATIONS EULER ISENTROPIQUE - SYSTÈME HYPERBOLIQUE - SYSTÈME NON LINÉAIRE - SYSTÈME NON CONSERVATIF - MÉTHODE VOLUME FINI - SCHÉMA DÉCENTRÉ - SOLVEUR DE RIEMANN - PAS FRACTIONNAIRE - PRINCIPE DU MAXIMUM.

## COMPUTATION OF GAS-SOLID FLOWS ON UNSTRUCTURED MESHES

## EXECUTIVE SUMMARY

Accurate predictions of gas-solid flows in a wide range of industrial applications require defining suitable algorithms to cope with time-dependent evolutions in complex geometries. This motivates investigating the feasibility of finite-volume schemes on unstructured meshes, following recent trends and using upwinding techniques in order to prevent spurious oscillations. It is well known that troubles quickly occur when investigating two-phase flows, using the two-fluid approach, essentially due to the fact that such sets of partial differential equations involve non-conservative convective subsets, but also to the fact that the latter may become non-hyperbolic in some time-space regions. Quite recently, some proposals based on Roe's ideas arose to overcome these difficulties.

This work is devoted to the presentation of a finite-volume scheme which allows the computation of compressible two-phase flows on unstructured meshes. A four-equation two-fluid model is chosen in order to describe evolutions of gas-solid flows. The convective part of the resulting set of partial differential equations is a non-conservative conditionally hyperbolic set of equations. One can't solve the associated one-dimensional Riemann problem and can't prove that solutions of the latter system fulfill the maximum principle for the volumetric fraction. We propose to solve the system with a fractional step method such that the maximum principle for the volumetric fraction is fulfilled on the whole algorithm. The finite-volume scheme used is based on Godunov's and Roe's schemes and accounts for non-conservative contributions in a suitable way. Some two-dimensional test cases including shocks and rarefaction waves within both phases are described and show that the scheme enables to handle strong shock simulations. Computational results for the stationary state of a two-phase flow in a simple nozzle and simulations of dense fluidized beds are displayed.

Afterwards, a three-equation model is chosen in order to describe evolutions of gas-solid flows, assuming that there is no sliding velocity between the gas phase and the particle phase. As a consequence, the set of governing partial differential equations contains a conservative convective subset which is always hyperbolic. This is an interesting feature since it allows solving the associated one dimensional Riemann problem for almost arbitrary initial data. It is proved that solutions of the latter system fulfill the maximum principle for the volumetric fraction, provided that the granular pressure is suitable. As a result, several numerical techniques may be used, among which the vfRoe scheme which is a rough Godunov scheme recently proposed to deal with complex hyperbolic systems. Some basic two dimensional computational results are presented, which enable the comparison with results issuing from the two-fluid approach. Some computations of impinging jets confirm that the maximum principle holds. But computations of a two-phase flow in a nozzle show that the hypothesis of the relative velocity equal to zero is not suitable in such cases.

**Key words :** TWO-PHASE FLOW - TWO-FLUID MODEL - ISENTROPIC EULER EQUATIONS - HYPERBOLIC SYSTEM - NON-LINEAR SYSTEM - NON-CONSERVATIVE SYSTEM - FINITE-VOLUME METHOD - UPWIND SCHEME - RIEMANN SOLVER - FRACTIONAL STEP METHOD - MAXIMUM PRINCIPLE.

# Remerciements

Ce travail a été réalisé au Département Laboratoire National d'Hydraulique de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France en collaboration avec l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse.

Cette thèse a été effectuée sous la direction de Monsieur Jean Fabre, professeur à l'Institut National Polytechnique de Toulouse, que je tiens à remercier pour sa sympathie et pour ses conseils avisés.

Je remercie très chaleureusement Monsieur Jean-Marc Hérard, ingénieur chercheur à EDF, qui s'est investi dans l'encadrement de cette thèse avec attention et efficacité, et qui a su me faire partager son engouement pour la recherche.

Ce travail a mis en évidence, si cela était encore nécessaire, les intérêts communs qui pouvaient relier le monde des physiciens et celui des numériciens. Je suis très heureuse que ce travail ait suscité de l'intérêt chez les deux communautés et de la représentation qui en a résulté dans la composition du jury de cette thèse. J'exprime donc ma gratitude aux membres du jury :

- Monsieur Olivier Simonin, professeur à l'Institut National Polytechnique de Toulouse et ingénieur chercheur à EDF, qui a suivi les évolutions de ce travail et accepté de présider ce jury ;
- Messieurs Thierry Gallouët, professeur à l'Université de Provence, et Hervé Lemonnier, ingénieur de recherche au Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble, qui ont manifesté de l'intérêt pour ce travail et ont bien voulu en être les rapporteurs ;
- Messieurs Sergei Gavriluk, professeur à l'Université Aix Marseille III, et Alain Bamberger, directeur de la division Informatique et Mathématiques Appliquées à l'Institut Français du Pétrole, pour leurs conseils et critiques.

J'exprime enfin ma sympathie à toutes les personnes que j'ai pu rencontrer ou côtoyer au cours de ces années.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels sur la modélisation Eulérienne des écoulements diphasiques compressibles de type gaz-particules</b>	<b>5</b>
1.1 Rappels sur les distributions . . . . .	6
1.2 Modélisation des écoulements diphasiques par l'approche Eulérienne . . . . .	7
1.2.1 Equations de bilan Eulériennes monophasiques . . . . .	7
1.2.2 Extension des équations à tout le domaine . . . . .	8
1.2.3 Equations sur les grandeurs moyennes . . . . .	9
1.2.3.1 Approche statistique, définition des opérateurs de moyenne . . . . .	9
1.2.3.2 Définition des grandeurs moyennes pour chaque phase . . . . .	10
1.2.3.3 Equations sur les grandeurs moyennes . . . . .	11
1.3 Lois de fermetures pour les écoulements de type gaz-particules . . . . .	13
1.3.1 Termes d'échange de masse . . . . .	13
1.3.2 Pression moyenne de l'écoulement . . . . .	13
1.3.3 Prise en compte de la turbulence de la phase continue . . . . .	13
1.3.4 Prise en compte du mouvement aléatoire de la phase dispersée . . . . .	14
1.3.5 Modélisation des effets collisionnels dans un milieu granulaire . . . . .	15
1.3.6 Terme de transfert de quantité de mouvement interfacial . . . . .	17
1.3.7 Modélisation des effets de diffusion de la phase gazeuse et des effets de dispersion de la phase particulaire . . . . .	18

1.4	Quelques modèles à deux fluides simples issus de la littérature . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Quelques éléments sur les systèmes hyperboliques non linéaires issus de lois de conservation</b>	<b>21</b>
2.1	Hyperbolicité . . . . .	21
2.2	Invariants de Riemann et caractéristiques à une dimension d'espace . . . . .	23
2.3	Solutions faibles du problème de Cauchy . . . . .	24
2.4	Entropie Mathématique . . . . .	25
2.5	Solution faible entropique . . . . .	26
2.6	Résolution du problème de Riemann unidimensionnel . . . . .	27
2.6.1	Champs vraiment non linéaires et champs dégénérés . . . . .	28
2.6.2	Onde de détente ou onde de raréfaction . . . . .	28
2.6.3	Onde de choc et choc entropique . . . . .	29
2.6.4	Discontinuité de contact . . . . .	31
2.7	Résolution du problème de Riemann . . . . .	31
2.8	Etude d'un exemple : le système de la dynamique des gaz isentropique . . . . .	33
2.8.1	Le système et ses propriétés . . . . .	33
2.8.1.1	Le système de la dynamique des gaz isentropique . . . . .	33
2.8.1.2	Hyperbolicité du système . . . . .	35
2.8.1.3	Invariants de Riemann . . . . .	35
2.8.1.4	Entropie du système . . . . .	36
2.8.2	Résolution du problème de Riemann . . . . .	37
2.8.2.1	Paramétrisation des ondes de détente . . . . .	38
2.8.2.2	Paramétrisation des ondes de choc . . . . .	39
2.8.2.3	Résolution du problème de Riemann . . . . .	40
2.8.2.4	Traitement de l'apparition du vide . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Rappels et compléments sur les schémas numériques</b>	<b>45</b>
3.1	Une approche en maillage non structuré pour des formulations colocalisées de type volumes finis . . . . .	46



3.2	Formulation volumes finis sur maillage non structuré pour un système conservatif hyperbolique . . . . .	47
3.2.1	Schéma en temps . . . . .	48
3.2.2	Calcul des flux . . . . .	48
3.3	Schéma de Godunov . . . . .	49
3.4	Schémas de type Godunov . . . . .	54
3.5	Schéma de Roe . . . . .	55
3.6	Schéma vfRoe . . . . .	61
3.7	Schéma vfRoe en variables non conservatives . . . . .	65
3.8	Techniques de splitting . . . . .	69
3.8.1	Un exemple de splitting du système de la dynamique des gaz isentropique . . . . .	69
3.8.2	Un exemple de splitting du système de la dynamique des gaz . . . . .	77
3.9	Schémas de résolution de systèmes hyperboliques non conservatifs . . . . .	78
3.9.1	Le cadre non conservatif . . . . .	79
3.9.2	Schémas basés sur des matrices linéarisées généralisées de type Roe . . . . .	81
3.9.3	Schémas basés sur les solveurs de Godunov, Roe ou vfRoe . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Un modèle à deux fluides à quatre équations pour la simulation des écoulements diphasiques de type gaz-particules</b> . . . . .	<b>89</b>
4.1	Présentation du modèle . . . . .	90
4.2	Quelques propriétés du système global . . . . .	92
4.2.1	Entropie du système . . . . .	92
4.2.2	Principe du maximum et positivité . . . . .	93
4.3	Etude de l'hyperbolicité du système de convection . . . . .	96
4.4	Proposition d'un splitting du système de convection . . . . .	98
4.4.1	Principe de la méthode et proposition d'un splitting . . . . .	98
4.4.2	Etude du problème de Riemann monodimensionnel associé à l'étape 1 . . . . .	100
4.4.2.1	Etude du problème de Riemann associé à la phase continue . . . . .	101
4.4.2.2	Etude du problème de Riemann associé à la phase dispersée . . . . .	103
4.4.2.3	Récapitulatif, condition d'existence et d'unicité de solution et principe du maximum . . . . .	105

4.4.3	Etude du problème de Riemann associé à l'étape 2 . . . . .	106
4.5	Schéma de résolution par une méthode à pas fractionnaires . . . . .	112
4.5.1	Schéma associé à l'étape 1 . . . . .	113
4.5.1.1	Schéma associé à la phase continue . . . . .	113
4.5.1.2	Schéma associé à la phase dispersée . . . . .	114
4.5.2	Schéma associé à l'étape 2 . . . . .	118
4.5.2.1	Un schéma de type Roe associé au système non conservatif . . . . .	118
4.5.2.2	Un schéma de Roe associé à un système conservatif «équivalent» . . . . .	122
4.5.3	Traitement des termes sources . . . . .	125
4.5.4	Traitement des conditions aux limites . . . . .	126
4.5.4.1	Flux à la paroi . . . . .	126
4.5.4.2	Flux à la frontière fluide . . . . .	131
4.6	Tests numériques . . . . .	131
4.6.1	Comparaison de deux schémas de résolution numérique du sous-système non conservatif . . . . .	132
4.6.2	Tests de type tube à choc diphasique . . . . .	136
4.6.3	Tests de type tube à choc avec traînée . . . . .	147
4.6.4	Écoulement diphasique dans une tuyère . . . . .	147
4.6.5	Simulation de lits fluidisés denses . . . . .	152
<b>5</b>	<b>Un modèle homogène à trois équations pour les écoulements diphasiques de type gaz-particules</b> . . . . .	<b>183</b>
5.1	Présentation du modèle . . . . .	183
5.2	Quelques propriétés du système global . . . . .	186
5.2.1	Entropie du système . . . . .	186
5.2.2	Principe du maximum . . . . .	188
5.3	Etude de l'hyperbolicité du système de convection . . . . .	189
5.4	Résolution du problème de Riemann . . . . .	190
5.5	Résolution par un schéma vfRoe modifié . . . . .	196
5.6	Tests numériques . . . . .	201

5.6.1	Tests de type tube à choc et comparaison avec le modèle à deux fluides à quatre équations . . . . .	201
5.6.2	Écoulement dans une tuyère et comparaison avec le modèle à deux fluides à quatre équations . . . . .	203
<b>Conclusion</b>		<b>219</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>223</b>
<b>A Schéma de Godunov pour la résolution du système de la dynamique des gaz isentropique</b>		<b>229</b>
A.1	Mise en œuvre numérique du schéma de Godunov . . . . .	229
A.1.1	Schéma de Godunov . . . . .	229
A.1.2	Algorithme de résolution d'un problème de Riemann exact . . . . .	230
A.2	Tests . . . . .	233
A.2.1	Cas test du tube à choc . . . . .	233
A.2.2	Cas test de la double détente . . . . .	247
A.2.3	Cas test du double choc . . . . .	255
A.2.4	Convergence de la méthode de Newton . . . . .	258
<b>B Stabilité linéaire <math>L^2</math> du schéma associé au modèle à deux fluides à quatre équations</b>		<b>261</b>
B.1	Rappel du système . . . . .	261
B.2	Rappel du principe des méthodes à pas fractionnaires et de splitting de flux . . . . .	262
B.3	Rappels sur la stabilité linéaire $L^2$ . . . . .	263
B.4	Stabilité linéaire $L^2$ du schéma de Roe standard . . . . .	265
B.5	Stabilité linéaire $L^2$ du schéma associé à la phase gazeuse isolée . . . . .	266
B.5.1	Étude de stabilité du schéma associé au sous-système (B.5) . . . . .	266
B.5.2	Étude de stabilité du schéma associé au sous-système (B.6) . . . . .	267
B.5.3	Étude de stabilité du schéma associé à la méthode des pas fractionnaires . . . . .	271
B.5.4	Étude de stabilité du schéma associé à la méthode de splitting de flux . . . . .	276
B.6	Stabilité linéaire $L^2$ du schéma associé au système diphasique . . . . .	279
B.6.1	Étude de stabilité du schéma associé à l'étape (B.2) . . . . .	279

B.6.2	Etude de stabilité du schéma associé à l'étape (B.3) . . . . .	281
B.6.3	Etude de stabilité du schéma associé à la méthode des pas fractionnaires .	283
B.6.4	Etude de stabilité du schéma associé à la méthode de splitting de flux . .	283

# Introduction

De nombreuses applications industrielles font intervenir des écoulements diphasiques depuis l'étude des moteurs à combustion (gaz-liquide), des centrales à charbon (gaz-particules), jusqu'aux réacteurs nucléaires (eau-vapeur). La simulation de ces écoulements souvent complexes connaît actuellement un essor important par la connaissance croissante de la modélisation de tels écoulements et par la puissance de calculs désormais accessible qui commence à répondre aux exigences de simulation. La prédiction de ces écoulements dépend de trois facteurs : leur modélisation, le cadre mathématique dans lequel s'insèrent ces modèles et la possibilité de les simuler par l'outil numérique.

Si de nombreux modèles sont proposés dans la littérature, il n'y pas à l'heure actuelle de modèle consensuel. Il existe une grande variété d'écoulements diphasiques et les mécanismes qui régissent les interactions, les échanges, les réactions chimiques, les forces d'interface entre phases, les interactions au sein d'une même phase quand celle-ci est dispersée ou encore le transport d'une phase par un écoulement porteur, etc... sont autant de phénomènes complexes à modéliser. Notamment, dans le cadre des écoulements gaz-particules, les collisions inter-particulaires et l'influence du mouvement turbulent d'une phase sur l'autre sont encore mal connus et font l'objet de nombreuses propositions dans la littérature. Ces phénomènes sont d'autant plus importants que l'écoulement est constitué par les régimes denses, c'est à dire ceux où la fraction volumique des particules est très élevée, soit de 1 à 65 % du volume total. On s'attachera donc particulièrement au cours de ce travail à la prise en compte des interactions inter-particulaires qui est, comme on le verra, le garant du respect du principe du maximum de la variable fraction volumique dans le modèle continu :

$$0 < \alpha_2 < \alpha_{max} < 1$$

où  $\alpha_2$  désigne la fraction volumique de la phase particulaire. Pour la modélisation de tels écoulements, on a retenu l'approche Eulérienne dont l'originalité, par rapport à l'approche Lagrangienne, réside dans le fait qu'après avoir écrit les équations en moyenne statistique, les deux phases sont vues comme des milieux continus fictifs ; c'est à dire que, lors de l'établissement des équations d'évolution des variables macroscopiques moyennes, on suppose qu'en chaque point les deux phases peuvent cohabiter.

Outre les difficultés rencontrées pour la modélisation de tels écoulements, se rajoutent celles liées à l'absence de résultats théoriques associés à ces modèles mathématiques. En effet, la modélisation de ces écoulements conduit à des systèmes de convection non conservatifs et conditionnellement hyperboliques pour lesquels, il est en général impossible de construire la solution

du problème de Riemann. Ces modèles ne s'inscrivent donc pas dans le cadre théorique des systèmes hyperboliques et les méthodes de résolution classiques volumes finis des systèmes hyperboliques telles que les solveurs de Godunov ou de Roe sont inadaptées pour ces systèmes. Le solveur de Godunov, basé sur la résolution exacte de problèmes de Riemann locaux, nécessite, pour être mis en œuvre, de connaître la solution du problème de Riemann exact unidimensionnel associé ce qui est souvent impossible. Le schéma de Roe, quant à lui, est basé sur la résolution approchée de problèmes de Riemann locaux, mais nécessite de connaître les valeurs propres et les vecteurs propres analytiques de la matrice Jacobienne ou d'une matrice linéarisée au sens de Roe. En outre, la détermination du problème de Riemann linéarisé du problème initial, nécessite la vérification d'une propriété de consistance qui est souvent délicate. Or, il est indispensable de surmonter ces difficultés numériques, car la simulation précise des phénomènes mis en jeu constitue un des rares éléments de validation a posteriori des modèles mathématiques proposés. Dans [Gal96b] et [Mas96], les auteurs proposent un schéma, appelé vRoe, qui permet de résoudre le problème de Riemann associé à un système conservatif inconditionnellement hyperbolique notamment dans les cas où l'on ne peut pas mettre en œuvre les solveurs de Godunov ou de Roe, et qui ne nécessite pas la vérification d'une relation de type Roe. De plus, les systèmes hyperboliques ayant la particularité d'admettre des solutions avec des discontinuités, on cherche en fait des solutions faibles du système, i.e. des solutions au sens des distributions. Or, dans le cadre des systèmes hyperboliques non conservatifs, on ne peut plus donner un sens aux produits non conservatifs au sens des distributions et l'on ne dispose plus de relations de saut de type Rankine-Hugoniot qui caractérisent le comportement des quantités physiques à la traversée d'une discontinuité. Quelques auteurs (Cf. [Lef88], [Lef92b], [Dal95] et [Sai95b]) ont fait des propositions pour définir le cadre théorique associé aux problèmes hyperboliques non linéaires en forme non conservative. Quelques schémas ont été proposés récemment pour une résolution correcte des systèmes diphasiques à deux fluides modélisant les évolutions d'un gaz chargé en gouttelettes dans le cas dilué (Cf. [Sai95a]), et d'écoulements de type eau-vapeur ([Kum93] et [Tou96]). Ces derniers proposent de résoudre ce type de système par une linéarisation de type Roe associée à des relations de Rankine-Hugoniot approchées du système convectif non conservatif global. D'autre part, dans le cadre d'écoulements eau-vapeur, une décomposition particulière des termes de pression non conservatifs et une résolution du système au moyen d'un schéma cinétique de type volumes finis, ont été proposées dans [Coq96] et [EIA97]. On renvoie le lecteur à [Eco96] pour une revue de quelques techniques numériques récentes mises en œuvre dans le domaine des écoulements diphasiques.

La contribution qui est décrite dans ce mémoire est essentiellement numérique et concerne la modélisation des écoulements gaz-solide sur maillage non structuré, pour pouvoir à terme effectuer des simulations réalistes de lits fluidisés denses. Les schémas qui seront mis en œuvre seront spécifiques mais simples et ont trois objectifs privilégiés :

- (i) autoriser le calcul d'écoulements avec vitesses relatives élevées,
- (ii) traiter correctement les effets de compressibilité,
- (iii) permettre des calculs avec des taux de présence faibles à très élevés.

Ces écoulements ayant également la caractéristique de mettre en contact des régions très denses où les particules peuvent avoisiner le taux de compactage maximum, avec des régions très diluées ( $\simeq 10^{-4}$  %), on s'attachera particulièrement au traitement numérique de ces ondes de choc. Le dernier point nécessitera d'examiner en détail les propriétés de positivité de la masse volumique

du gaz et du taux de présence volumique de phase. C'est peut-être ici que se situe l'apport principal de ce travail, ce problème étant peu abordé dans la littérature dédiée.

Le présent document s'organise de la façon suivante. Un premier chapitre est consacré à la modélisation des écoulements diphasiques de type gaz-particules par une approche Eulérienne. On obtient un modèle à cinq équations d'évolution des variables macroscopiques (deux équations de conservation de masse, deux équations de quantité de mouvement et une équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente des particules). Ce système est non conservatif et provient des modèles de [Bal95] et [Boe97]. On ferme le système et l'on dérive de ce modèle un modèle à quatre équations, en intégrant l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente des particules, plus simple mais qui présente les mêmes pathologies mathématiques que le modèle initial. On compare ce modèle à ceux de la littérature.

Une deuxième partie est consacrée à des rappels sur la théorie associée aux systèmes hyperboliques non linéaires issus de lois de conservation (*Cf.* [Har83a], [Lax57], [Lax72], [Smo83], [Vil86], et [God92] pour le cas scalaire). On rappelle notamment la notion de solution faible entropique et l'on traite en exemple la résolution du problème de Riemann associé au système de la dynamique des gaz isentropique.

Le troisième chapitre traite des schémas numériques volumes finis, à l'ordre un en temps et en espace, sur maillage bidimensionnel non structuré de type INRIA, qui permettent naturellement d'effectuer des simulations de systèmes hyperboliques non linéaires issus de lois de conservation. Dans le cadre hyperbolique, les schémas numériques basés sur des techniques de décentrement sont décrits et analysés dans [God92], [Gal92], [Cha92], [Cha93] et [Eym97], dans le cadre linéaire et non linéaire. Dans le cadre mixte convection-diffusion, on dispose également de résultats de convergence d'un schéma volumes finis, sur maillage triangulaire régulier, pour une loi de conservation scalaire (voir [Her95b]). Les schémas de Godunov et de Roe, basés sur la résolution exacte ou approchée de problèmes de Riemann locaux, sont rappelés. On présente ensuite le schéma vfRoe pour les cas où les schémas sus-cités ne peuvent pas être mis en œuvre. On examine ensuite deux exemples de splitting dans le cadre hyperbolique monophasique, du système de la dynamique des gaz isentropique, d'une part, et du système de la dynamique des gaz, d'autre part (*Cf.* [Bar91], [Bar92], [Buf93a], [Buf93b] et [Buf97]). Ces techniques peuvent permettre de relaxer la contrainte CFL qui limite le pas de temps et de s'affranchir d'une correction entropique souvent nécessaire aux solveurs de type Roe ou Godunov. On présente enfin différentes extensions possibles de ces schémas au cadre non conservatif. On rappelle tout d'abord les travaux de [Lef88], [Lef92b], [Dal95] et [Sai95a] pour l'analyse théorique des systèmes hyperboliques non conservatifs puis on expose deux classes de schémas numériques : ceux basés sur la généralisation de la matrice linéarisée de Roe (*Cf.* [Sai95a], [Sai95b], [Tou89], [Tou92], [Kum93] et [Tou96]) et ceux de type Roe, Godunov ou vfRoe, consistants, avec une discrétisation spécifique des termes non conservatifs (*Cf.* [Her94c], [For95], [Lou95], [Her95a], [Bru96], [For97] et [Mas97]).

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à l'analyse continue et à la résolution numérique d'un modèle à deux fluides d'écoulements diphasiques compressibles gaz-particules à quatre équations (deux équations de conservation de masse et deux équations de quantité de mouvement). Ce modèle qui correspond au modèle A de Gidaspow [Gid93], est semblable à un des modèles examinés dans le cadre gaz-gouttelettes par Sainsaulieu [Sai95a] et [Sai95b]. On ne peut pas résoudre le problème de Riemann associé à ce système et on ne sait pas démontrer la préservation du principe du maximum pour la variable fraction volumique. On donne une caractérisation entropique du modèle, et l'on décrit les conditions d'hyperbolicité et le respect a priori des conditions de positivité des grandeurs ad hoc. La résolution numérique de ce système

sur maillage non structuré doit autoriser des vitesses relatives entre phases élevées, un fonctionnement en régime dilué ou dense, un traitement correct des discontinuités et une rigoureuse conservation des masses partielles et de la quantité de mouvement moyenne. On propose une méthode de résolution volumes finis basée sur une technique à pas fractionnaires qui décompose le système de convection en deux sous-systèmes inconditionnellement hyperboliques. On associe des relations de saut approchées au sous-système non conservatif. On résout le problème de Riemann dans chaque sous-système et l'on montre que le principe du maximum de la variable fraction volumique est préservé sur l'ensemble de la méthode à pas fractionnaires. On décrit ensuite les solveurs de type Roe ou Godunov mis en œuvre dans chaque étape. Le sous-système conservatif est résolu par les schémas classiques de Roe ou de Godunov et l'on propose deux schémas de résolution pour le second sous-système, un schéma traitant les termes non conservatifs et un schéma classique de Roe associé à un système conservatif équivalent dans les zones régulières et dans les zones de choc sous l'hypothèse du choix d'un chemin linéaire pour la définition des relations de saut approchées. On présente enfin des tests effectués sur des maillages bidimensionnels non structurés de type tube à choc, avec ou sans effets de traînée, une simulation d'écoulement diphasique dans une tuyère et quelques tests de faisabilité pour la simulation de lits fluidisés denses. On met en évidence la présence d'états non hyperboliques au cours de ces dernières simulations. Sur l'ensemble de ces tests, on montre le bon comportement de la méthode proposée ; en outre on n'a pas constaté de perte du principe du maximum sur l'ensemble de ces simulations.

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude d'un modèle homogène à trois équations (deux équations de conservation de masse et une équation de conservation de quantité de mouvement du mélange) qui ne suppose aucune vitesse de glissement entre les deux phases. Ce modèle est conservatif, inconditionnellement hyperbolique et admet une caractérisation entropique. On résout le problème de Riemann associé et l'on montre que le respect du principe du maximum de la variable fraction volumique est intimement lié au choix de la pression intergranulaire. On choisit de résoudre numériquement ce système par une variante du schéma vfRoe. On présente ensuite des tests numériques de type tube à choc que l'on compare avec des simulations du modèle à deux fluides à quatre équations étudié précédemment, et l'on regarde enfin la simulation d'un écoulement diphasique dans une tuyère.

Les traitements numériques bidimensionnels sur maillage non structuré ont été réalisés au sein de la structure de code N3S-MUSCL (*Cf.* [Cha95] et [Der92]) avec recouvrement volumes finis de type INRIA.

Le présent manuscrit comprend également deux annexes ; une qui porte sur la mise en œuvre du schéma de Godunov pour la résolution du système de la dynamique des gaz isentropique avec des tests de type tube à choc, et une sur l'analyse de stabilité linéaire des schémas associés au modèle à deux fluides à quatre équations dans les cas des méthodes à pas fractionnaires et de splitting de flux.



## Chapitre 1

# Rappels sur la modélisation Eulérienne des écoulements diphasiques compressibles de type gaz-particules

Il existe deux grandes classes de méthodes de modélisation des écoulements diphasiques : les méthodes Lagrangiennes et les méthodes Eulériennes. L'approche Lagrangienne consiste à suivre des trajectoires d'inclusions (particules, gouttes, bulles) portées par un écoulement ; elle mène à la résolution des équations de Navier-Stokes pour le fluide porteur et à la résolution d'une équation décrivant le mouvement d'une inclusion pour chaque inclusion injectée dans l'écoulement. Quant à la méthode Eulérienne, elle consiste à considérer les deux phases comme deux milieux continus distincts avec interpénétration et à résoudre des équations qui gouvernent les variables d'état moyennes de chacune des phases. Cette dernière approche est plus adaptée que l'approche Lagrangienne aux situations de fort couplage entre phases.

On s'intéresse dans ce chapitre à la modélisation des écoulements diphasiques par une approche Eulérienne à deux fluides. Un mélange diphasique peut être assimilé à un ensemble de régions purement monophasiques, séparées par des interfaces au travers desquelles s'opèrent des transferts (de masse, quantité de mouvement et énergie) entre les phases. On écrit tout d'abord les équations Eulériennes de bilan valables à l'intérieur de chaque région purement monophasique (chaque phase étant considérée comme un milieu continu), puis, par processus de moyennes, on étend les équations à tout le domaine et on modélise les transferts qui ont lieu aux interfaces entre les phases. On obtient un système ouvert pour lequel on recense quelques fermetures extraites de la littérature.

## 1.1 Rappels sur les distributions

Soient  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de  $\Omega$  infiniment dérivables, à support compact :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) ; \text{supp } \varphi \text{ compact}\}$$

où  $\text{supp } \varphi = \{\underline{x} \in \Omega ; \varphi(\underline{x}) \neq 0\}$

**Définition 1.1** On appelle distribution  $T$  une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace vectoriel  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ .

L'espace des distributions est noté  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Soit  $f$  une fonction localement sommable, i.e.  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ , c'est à dire, par définition,  $f|_K \in L^1(K) \forall K \subset \Omega$ ,  $K$  compact.

Soit  $T_f$  une distribution associée à  $f$ ,  $T_f$  est définie par :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}) \varphi(\underline{x}) d\underline{x}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Puisque la notion de distribution est une généralisation de fonction localement sommable, on peut identifier  $f$  et  $T_f$ , ce qui nous permet d'écrire  $\langle f, \varphi \rangle$  à la place de  $\langle T_f, \varphi \rangle$ .

La distribution de Dirac en un point  $a \in \Omega \subset \mathbb{R}$  est définie par :

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Dérivée d'une distribution :

Soit  $f$  une fonction continûment différentiable, on a :

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\langle \nabla f, \varphi \rangle = - \langle f, \nabla \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

La dérivée distribution permet également de dériver une fonction discontinue.

Considérons, par exemple, la fonction de type Heaviside :

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Evidemment,  $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  et par conséquent  $h \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , on calcule :

$$\begin{aligned} \langle h'_a, \varphi \rangle &= -\langle h_a, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} h_a(x) \varphi'(x) dx = -\int_a^{+\infty} \varphi'(x) dx \\ &= -[\varphi(x)]_a^{+\infty} = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{aligned}$$

On écrit donc formellement :  $h'_a = \delta_a$ .

On veut maintenant la dérivée distribution d'une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que sa dérivée selon une composante  $x_1 \in \mathbb{R}$  existe et soit continue partout sauf en un point  $a \in \mathbb{R}$ . On obtient :

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle = \int_S [f]_{a^-}^{a^+} \varphi(a) ds + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi d\underline{x}$$

où  $n_1$  est la première composante de la normale à la surface d'intégration  $S$ .

Si on note  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  la dérivée distribution de  $f$  et  $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}$  la distribution correspondant à la dérivée usuelle de  $f$  selon  $x_1$  pour tout  $x_1 \in \mathbb{R}$  sauf en  $a$ , alors l'équation ci-dessus s'écrit symboliquement :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1} + [f]_{a^-}^{a^+} n_1 \delta_s$$

## 1.2 Modélisation des écoulements diphasiques par l'approche Eulérienne

### 1.2.1 Equations de bilan Eulériennes monophasiques

Chaque phase est un milieu continu connexe (phase continue) ou multiplement connexe (phase dispersée). Tout mélange diphasique peut être assimilé à un ensemble de régions purement monophasiques, dans lesquelles les équations locales de la mécanique des fluides s'appliquent, ces régions étant séparées par des interfaces supposées infiniment minces et sans masse.

On rappelle les lois de conservation isentropiques usuelles en mécanique des fluides valides à l'intérieur de la phase  $k$  ; elles sont basées sur les principes de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_k + \nabla \cdot (\rho_k \underline{u}_k) = 0 \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \underline{u}_k) + \nabla \cdot (\rho_k \underline{u}_k \otimes \underline{u}_k + \underline{I} p_k - \underline{\tau}_k) = \rho_k \underline{f} \quad (1.1b)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique,  $\underline{U}$  le vecteur vitesse,  $p$  la pression,  $\underline{\tau}$  le tenseur des contraintes visqueuses,  $\underline{f}$  l'ensemble des forces extérieures et  $k$  l'indice de phase (=1 pour le gaz et 2 pour les particules).

### 1.2.2 Extension des équations à tout le domaine

Soit  $\Omega$ , un domaine de  $\mathbb{R}^n$ , le domaine spatial de l'écoulement observé indépendant du temps. Soit  $\Omega_k(t) \subset \Omega$  le domaine spatial occupé par la phase  $k$  dans le domaine de l'écoulement à l'instant  $t$ .  $\Omega_k(t)$  peut être non connexe. On définit  $\chi_k$  la fonction caractéristique de la phase  $k$  par :

$$\chi_k(\underline{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{x} \in \Omega_k(t), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction discontinue aux interfaces permet d'étendre les équations (1.1) valides à l'intérieur d'une phase, i.e.  $\forall \underline{x} \in \Omega_k(t)$ , à tout le domaine  $\Omega$  de l'écoulement.

$\chi_k$  vérifie au sens des distributions les égalités suivantes :

$$\nabla \chi_k = -\underline{n}_k \delta_s$$

$$\nabla (\chi_k g) = \chi_k \nabla g - g \underline{n}_k \delta_s \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot (\chi_k \underline{u}) = \chi_k \nabla \cdot \underline{u} - \underline{u} \cdot \underline{n}_k \delta_s$$

$$\nabla \cdot (\chi_k \underline{\sigma}) = \chi_k \nabla \cdot \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_k \delta_s$$

où  $\underline{n}_k$  est le vecteur normal à l'interface  $s$  ( $s = \partial\Omega_k(t)$ ) extérieur à  $\Omega_k(t)$ ,  $g$  une fonction scalaire,  $\underline{u}$  une fonction vectorielle,  $\underline{\sigma}$  un tenseur et  $\delta_s$  la fonction caractéristique de l'interface  $s$ .

Soit  $\underline{w}_s$  un vecteur vitesse de l'interface  $s$ , on a alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi_k = \underline{w}_s \cdot \underline{n}_k \delta_s$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(g \chi_k) = \chi_k \frac{\partial}{\partial t} g + g \underline{w}_s \cdot \underline{n}_k \delta_s$$

où  $g$  est une fonction scalaire ou vectorielle.

On prémultiplie chacune des équations du système (1.1) relatives à la phase  $k$  par la fonction caractéristique  $\chi_k$  ; on obtient donc, a priori, des équations valides dans tout le domaine de l'écoulement y compris aux interfaces (puisqu'elles sont supposées infiniment minces et sans masse) et quel que soit le temps :

$$\chi_k \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho_k + \nabla \cdot (\rho_k \underline{u}_k) \right) = 0 \quad (1.3a)$$

$$\chi_k \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \underline{u}_k) + \nabla \cdot (\rho_k \underline{u}_k \otimes \underline{u}_k + \underline{I} p_k - \underline{\tau}_k) \right) = \chi_k \rho_k \underline{f} \quad (1.3b)$$

La notion de dérivée au sens des distributions permet d'introduire la fonction caractéristique à l'intérieur des opérateurs différentiels, les équations (1.3) deviennent alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\chi_k \rho_k) + \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \underline{u}_k) + \rho_k (\underline{u}_k - \underline{w}_s) \cdot \underline{n}_k \delta_s = 0 \quad (1.4a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\chi_k \rho_k \underline{u}_k) + \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \underline{u}_k \otimes \underline{u}_k + \chi_k \underline{I} p_k - \chi_k \underline{\tau}_k) \\ & - \rho_k \underline{u}_k (\underline{w}_s \cdot \underline{n}_k) \delta_s + \rho_k (\underline{u}_k \otimes \underline{u}_k) \cdot \underline{n}_k \delta_s + (\underline{I} p_k - \underline{\tau}_k) \underline{n}_k \delta_s = \chi_k \rho_k \underline{f} \end{aligned} \quad (1.4b)$$

Les équations (1.4) sont une extension des équations (1.1) à tout le domaine de l'écoulement ; elles sont également valables aux interfaces entre les phases.

## 1.2.3 Equations sur les grandeurs moyennes

### 1.2.3.1 Approche statistique, définition des opérateurs de moyenne

Les équations des échanges locaux instantanés (1.3) à (1.4) ne peuvent être résolues car on ne connaît pas la position de l'interface qui est distribuée aléatoirement dans le temps et dans l'espace. On écrit donc les équations en moyenne statistique, ce qui permet de reconstituer deux milieux continus fictifs. On introduit donc cet opérateur  $\langle . \rangle$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- la linéarité :

$$\langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle \quad \text{et} \quad \langle \lambda a \rangle = \lambda \langle a \rangle$$

- l'idempotence :

$$\langle \langle a \rangle \rangle = \langle a \rangle$$

– la commutativité avec les opérateurs de dérivation et d'intégration :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} a \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle a \rangle \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t} a \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle a \rangle$$

On peut alors décomposer une variable locale instantanée quelconque  $a$  en une valeur moyenne  $\langle a \rangle$  et une fluctuation  $a'$  qui vérifient :

$$a = \langle a \rangle + a' \quad \text{et} \quad \langle a' \rangle = 0$$

L'opérateur  $\langle . \rangle$  peut être défini comme la limite de la moyenne arithmétique sur un nombre  $N$  de réalisations tendant vers l'infini du phénomène :

$$\langle a \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_N a$$

Par rapport à des moyennes spatiales, temporelles ou spatio-temporelles, la moyenne statistique est la seule valable pour les écoulements non homogènes instationnaires.

### 1.2.3.2 Définition des grandeurs moyennes pour chaque phase

On définit  $\alpha_k$  le taux de présence de la phase  $k$  comme la moyenne de la fonction caractéristique de cette phase :

$$\alpha_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle \chi_k \rangle$$

la variable  $\alpha_k$  est également appelée fraction volumique de la phase  $k$  ; elle peut se réécrire sous la forme :

$$\alpha_k = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\langle V_k \rangle}{V}$$

où  $V_k \subset V$  est le volume occupé par la phase  $k$  :

$$V_k = \int_V \chi_k dV \quad \text{et} \quad \langle V_k \rangle = \int_V \alpha_k dV$$

On définit la moyenne Eulérienne phasique classique, notée  $\langle . \rangle_k$ , d'une grandeur quelconque  $a$  par :

$$\langle a_k \rangle_k = \frac{1}{\alpha_k} \langle \chi_k a_k \rangle = \frac{\langle \chi_k a_k \rangle}{\langle \chi_k \rangle}$$

L'examen des équations de bilan montre cependant qu'il est plus pratique de définir, pour les écoulements compressibles, la moyenne de la vitesse comme une moyenne pondérée par la masse volumique qui s'écrit :

$$\langle \underline{u}_k \rangle_k = \frac{1}{\alpha_k \rho_k} \langle \chi_k \rho_k \underline{u}_k \rangle$$

en négligeant les fluctuations de  $\rho_k$ .

### 1.2.3.3 Equations sur les grandeurs moyennes

On applique l'opérateur de moyenne  $\langle . \rangle$  aux équations (1.4), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_k \rho_k \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_k \rho_k \underline{u}_k \rangle + \langle \rho_k (\underline{u}_k - \underline{w}_s) \cdot \underline{n}_k \delta_s \rangle = 0 \quad (1.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_k \rho_k \underline{u}_k \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_k \rho_k \underline{u}_k \otimes \underline{u}_k \rangle + \nabla \cdot \langle \chi_k \underline{I} p_k - \chi_k \underline{\tau}_k \rangle \quad (1.5b)$$

$$- \langle \rho_k \underline{u}_k (\underline{w}_s \cdot \underline{n}_k) \delta_s \rangle + \langle \rho_k (\underline{u}_k \otimes \underline{u}_k) \cdot \underline{n}_k \delta_s \rangle + \langle (\underline{I} p_k - \underline{\tau}_k) \underline{n}_k \delta_s \rangle = \langle \chi_k \rho_k \underline{f} \rangle$$

On pose  $\Gamma_k$  la densité volumique des apports de masse à la phase  $k$  résultant des échanges aux interfaces et égale à :

$$\Gamma_k = \langle \rho_k (\underline{u}_k - \underline{w}_s) \cdot \underline{n}_k \delta_s \rangle$$

$\Gamma_k$  vérifie l'équation de bilan aux interfaces :

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_k = 0$$

$$\text{et } \underline{I} k : \sum_{k=1}^2 \underline{I} k = \underline{0}$$

$$\underline{I} k = - \langle \rho_k \underline{u}_k (\underline{w}_s \cdot \underline{n}_k) \delta_s \rangle + \langle \rho_k (\underline{u}_k \otimes \underline{u}_k) \cdot \underline{n}_k \delta_s \rangle - \langle \underline{\tau}_k \cdot \underline{n}_k \delta_s \rangle$$

on obtient donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \langle \underline{u}_k \rangle_k) + \Gamma_k = 0 \quad (1.6a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k \langle \underline{u}_k \rangle_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \langle \underline{u}_k \otimes \underline{u}_k \rangle_k) \\ & + \nabla \langle \chi_k p_k \rangle + \langle p_k \underline{n}_k \delta_s \rangle - \nabla \cdot (\alpha_k \langle \underline{\tau}_k \rangle_k) + \underline{L}_k = \alpha_k \rho_k \langle \underline{f} \rangle_k \end{aligned} \quad (1.6b)$$

Il est utile de remarquer qu'en appliquant l'équation (1.2) à une fonction  $g$  identiquement égale à 1 et en la moyennant, on obtient l'égalité suivante :

$$\nabla \alpha_k = - \langle \underline{n}_k \delta_s \rangle$$

En décomposant  $p_k$  en la somme d'une pression moyenne  $P_k$  et d'une fluctuation  $p'_k$  (de sorte que  $\langle P_k \rangle = P_k$  et  $\langle p'_k \rangle = 0$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla \langle \chi_k p_k \rangle + \langle p_k \underline{n}_k \delta_s \rangle &= \nabla (\langle \chi_k \rangle P_k) + P_k \langle \underline{n}_k \delta_s \rangle + \langle p'_k \underline{n}_k \delta_s \rangle \\ &= \nabla (\alpha_k P_k) - P_k \nabla \alpha_k + \langle p'_k \underline{n}_k \delta_s \rangle \\ &= \alpha_k \nabla P_k + \langle p'_k \underline{n}_k \delta_s \rangle \end{aligned}$$

De même, en décomposant  $\underline{u}_k$  en  $\underline{U}_k + \underline{u}'_k$ , on obtient :

$$\nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \langle \underline{u}_k \otimes \underline{u}_k \rangle_k) = \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \underline{U}_k \otimes \underline{U}_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \langle \underline{u}'_k \otimes \underline{u}'_k \rangle_k)$$

On définit alors la grandeur moyenne de la vitesse  $\underline{U}_k = \langle \underline{u}_k \rangle_k$ ,  $\underline{\tau}_k = \langle \underline{\tau}_k \rangle_k$  et  $\underline{F} = \langle \underline{f} \rangle_k$ . Finalement, le système ouvert associé à la phase  $k$  s'écrit (en considérant le terme  $\langle p'_k \underline{n}_k \delta_s \rangle$  dans le terme interfacial  $\underline{L}_k$ ) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \underline{U}_k) + \Gamma_k = 0 \quad (1.7a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k \underline{U}_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \underline{U}_k \otimes \underline{U}_k) \\ & + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \langle \underline{u}'_k \otimes \underline{u}'_k \rangle_k) + \alpha_k \nabla P_k - \nabla \cdot (\alpha_k \underline{\tau}_k) + \underline{L}_k = \alpha_k \rho_k \underline{F} \end{aligned} \quad (1.7b)$$

La classe des écoulements diphasiques qui nous intéresse est celle des écoulements constitués d'une phase gazeuse et de particules sphériques indéformables. On considère alors que la phase particulaire est à densité constante, i.e.  $\rho_2 = \text{constante}$ .

Il faut maintenant fermer le système.



### 1.3 Lois de fermetures pour les écoulements de type gaz-particules

Par définition, les variables fractions volumiques vérifient :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

#### 1.3.1 Termes d'échange de masse

La classe des écoulements diphasiques qui nous intéressent sont ceux de type gaz-particules où les phénomènes d'interactions entre particules peuvent être très importants. On suppose les particules sphériques, indéformables et toutes de même diamètre. On ne considère aucun échange de masse entre les deux phases. Ceci entraîne que  $\underline{u}_k$  et  $\underline{w}_s$  sont égaux à l'interface et que  $\Gamma_k = 0$  pour  $k = 1$  (gaz), 2 (particules).

#### 1.3.2 Pression moyenne de l'écoulement

On suppose que la pression phasique  $P_k$  n'est autre que la pression moyenne du mélange notée  $P$  :

$$P_1 = P_2 = P$$

Notons que  $\rho_1$  dépend de  $P_1$  à travers les effets thermodynamiques : équation d'état et transferts d'énergie. On supposera par la suite que la masse volumique est liée à la pression par une loi polytropicque :

$$P_1/\rho_1^n = K$$

$K$  est une constante de référence positive de la forme  $P(\rho_0)/\rho_0^n$ ,  $n$  l'exposant polytropicque,  $1 < n \leq \gamma$ ,  $\gamma$  l'indice adiabatique du gaz. L'utilisation d'une telle relation permet de ne pas avoir à résoudre explicitement l'équation de conservation de l'énergie. Elle ne permet pas par contre de rendre compte des transferts de chaleur et les effets de dissipation au sein de la phase gazeuse. Dans la suite du document, on considérera  $n = \gamma$ . Dans [Gid93], l'auteur retient, dans certaines configurations  $n = 1$  qui est la valeur pour un écoulement isotherme pour un gaz parfait.

#### 1.3.3 Prise en compte de la turbulence de la phase continue

Les composantes du tenseur de Reynolds de la phase gazeuse sont classiquement modélisées par :

$$\langle \underline{u}'_1 \otimes \underline{u}'_1 \rangle_1 = -\nu_1^t \left[ \nabla \underline{U}_1 + \nabla^t \underline{U}_1 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{U}_1) \underline{Id} \right] + \frac{2}{3} q_1^2 \underline{Id}$$

$\nu_1^t$  étant la viscosité turbulente et  $q_1^2$  l'énergie cinétique turbulente du gaz. On ne prend pas en compte dans les simulations numériques la turbulence de l'écoulement porteur, le tenseur turbulent de la phase gazeuse est donc supposé nul, soit  $\langle \underline{u}'_1 \otimes \underline{u}'_1 \rangle_1 = \underline{0}$ .

La moyenne du tenseur  $\underline{\tau}_2$  se décompose en  $\underline{\Sigma}_2$  la moyenne du tenseur des contraintes apparentes et  $\underline{\Theta}_2$  la prise en compte des termes collisionnels. On se place dans le cadre dilué pour modéliser le mouvement aléatoire associée à la phase dispersée.

### 1.3.4 Prise en compte du mouvement aléatoire de la phase dispersée

On veut donc modéliser le tenseur cinétique associé à la phase dispersée, dominant pour les écoulements à faible concentration de particules, i.e.  $\alpha_2 < 0.001$ . Par analogie avec la modélisation du tenseur de Reynolds associé au gaz, il s'écrit :

$$\langle \underline{u}'_2 \otimes \underline{u}'_2 \rangle_2 = -\nu_2^{cin} \left[ \nabla \underline{U}_2 + \nabla^t \underline{U}_2 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{U}_2) \underline{Id} \right] + \frac{2}{3} q_2^2 \underline{Id}$$

$\nu_2^{cin}$  désignant la viscosité cinétique tenant compte du transport de quantité de mouvement par le mouvement aléatoire des particules et  $q_2^2$  l'énergie cinétique turbulente des particules. Dans ce qui suit, on ne considère que les termes différentiels du premier ordre ; on obtient donc le terme sphérique suivant :

$$\langle \underline{u}'_2 \otimes \underline{u}'_2 \rangle = \frac{2}{3} q_2^2 \underline{Id}$$

Dans [Bal95], les auteurs calculent l'énergie cinétique turbulente des particules  $q_2^2$  solution de l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 q_2^2) + \nabla \cdot (\alpha_2 q_2^2 \underline{U}_2) + \frac{2}{3} \alpha_2 q_2^2 \nabla \cdot \underline{U}_2 = \underline{S} \quad (1.8)$$

En utilisant l'équation de bilan de masse des particules, on obtient  $q_2^2$  par intégration de l'équation (1.8), en considérant un équilibre des termes sources  $\underline{S}$  de production-dissipation, et en négligeant les effets visqueux ; on obtient alors :

$$q_2^2(\alpha_2) = \langle q_2^2 \rangle_0 \alpha_2^{2/3}$$

où  $\langle q_2^2 \rangle_0$  est une constante de dimension  $(m.s^{-1})^2$ .

### 1.3.5 Modélisation des effets collisionnels dans un milieu granulaire

Plaçons-nous maintenant dans le cadre dense, au niveau microscopique. On veut modéliser le terme  $\underline{\Theta}_2$  qui prend en compte le mécanisme collisionnel des particules. Dans [Gol96b], les auteurs présentent une modélisation des effets collisionnels entre particules en se plaçant dans un milieu granulaire, en l'absence de gaz porteur. Ils considèrent les équations de comportement du milieu granulaire par la représentation Lagrangienne unidimensionnelle suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} - \frac{\partial}{\partial h} U &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial h} P &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{E}{m} + P \frac{\partial}{\partial h} U &= I\end{aligned}$$

avec la notation  $\rho \equiv \rho_2 \alpha_2$ ,  $m$  la masse,  $E$  l'énergie totale,  $P$  la pression granulaire et  $I$  le terme source prenant en compte la perte d'énergie cinétique due aux collisions, et la convention  $\rho = \frac{\partial}{\partial x} h$ .

On note  $e = E/m$  l'énergie interne et l'on réécrit le système précédent en coordonnées Eulériennes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho U) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho U) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho U^2) + \frac{\partial}{\partial x} P &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho e U) + \frac{\partial}{\partial x} (P U) &= \rho I\end{aligned}$$

Le système est ensuite fermé par la donnée d'un terme source  $I$  et d'une équation d'état de  $P$ . Nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation dite des « sphères dures », qui suppose les particules sphériques et les collisions instantanées sans déformation. On suppose de plus que les chocs sont binaires, c'est à dire qu'ils ne font intervenir que deux particules à la fois. La vitesse angulaire des particules au moment de chocs n'est pas prise en compte. On considère que les transferts d'énergie entre les mouvements de rotation et de translation sont comptabilisés dans un coefficient d'élasticité ou de restitution des collisions entre particules  $e_c \in [0, 1]$ .

$$\frac{P}{\rho} = \frac{e}{2} \alpha_t (1 + 2 \alpha_2 (1 + e_c) g(\alpha_2)) \quad (1.9)$$

où  $e_c$  et  $\alpha_t$  sont des constantes absolues. Cette pression granulaire se compose d'une partie collisionnelle et d'une partie cinétique. La fonction  $g(\alpha_2)$  introduite est une fonction de distribution

indépendante des propriétés collisionnelles des particules ; elle représente l'augmentation de la probabilité de collisions binaires dues à l'encombrement. Elle doit avoir des valeurs supérieures à 1 et être croissante avec  $\alpha_2$ .

Dans un milieu élastique conservatif, les constantes  $e_c$  et  $\alpha_t$  valent respectivement 1 et  $4/3$  (Cf. [Gol96b]) et il n'y a pas de terme source ( $I = 0$ ). Dans ce cas, on va chercher une loi isentropique, i.e. une solution de l'équation d'évolution de  $\rho e$  du type  $e = e(\alpha_2)$  ; et l'on obtient :

$$P(\alpha_2) = \frac{\rho_2}{2} K_2 \alpha_t (\alpha_2)^{1+\alpha_t/2} \exp \left( \alpha_t (1 + e_c) \int_0^{\alpha_2} g(a) da \right) (1 + 2\alpha_2 (1 + e_c) g(\alpha_2))$$

où  $K_2$  est une constante d'intégration à déterminer. Pour plus de détails sur les calculs, on peut se reporter à [Com96c].

On retrouve formellement une loi d'état pour les écoulements dilués en considérant  $g(\alpha_2) = 0$  :

$$P(\alpha_2) = \frac{2}{3} \rho_2 K_2 (\alpha_2)^{5/3}$$

Cette loi est de la même forme que celle utilisée dans [Sai91] et [Sai95b] pour la modélisation des écoulements gaz-gouttelettes en régime dilué.

Pour les écoulements denses, plusieurs modèles sont envisageables, on considère une loi proposée par Lun et Savage (Cf. [Gol96b]) du type :

$$g(\alpha_2) = \left( 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{max}} \right)^{-\delta}$$

où  $\alpha_{max}$  désigne le taux de compactage maximum des particules, celles-ci étant supposées sphériques et de même diamètre. On obtient alors :

$$P(\alpha_2) = \frac{2}{3} \rho_2 K_2 (\alpha_2)^{5/3} (1 + 2\alpha_2 (1 + e_c) g(\alpha_2)) \exp \left\{ \frac{4}{3} (1 + e_c) \frac{\alpha_{max}}{\delta - 1} \left( 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{max}} \right)^{1-\delta} \right\}$$

Une valeur classiquement proposée pour  $\delta$  est (Cf. [Gol96b]) :

$$\delta = \frac{5}{2} \alpha_{max} > 1$$

Finalement, on considère un tenseur  $\underline{\underline{\Theta}}_2$  sphérique :

$$\underline{\underline{\Theta}}_2 = \Xi(\alpha_2) \underline{\underline{Id}}$$

avec, d'après les développements précédents :

$$\alpha_2 \Xi(\alpha_2) = P(\alpha_2) \quad (1.10)$$

Le modèle considéré par Sainsaulieu [Sai95a], [Sai95b] et [Rav95], pour les écoulements dilués gaz-liquide, est tel que  $g(\alpha_2) = 0$  et  $h(\alpha_2) = 1$ . Le modèle proposé par Saurel *et al.* [Sau94] ne prend pas en compte les collisions intergranulaires (formellement :  $g(\alpha_2) = 0$  et  $h(\alpha_2) = 0$ ).

### 1.3.6 Terme de transfert de quantité de mouvement interfacial

$\underline{I}_k$  désigne le terme de transfert de quantité de mouvement interfacial de la phase  $k$ . On ne considère que les effets de la traînée et pas les effets de masse ajoutée et d'histoire (hypothèse classique dans le cadre des écoulements gaz-particules).  $\underline{I}_k$  vérifie la relation suivante :

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_2 = \underline{I}$$

Les effets de traînée sont modélisés comme suit (Cf. [Bal95] et [Gid93]) :

$$\underline{I} = -\frac{3}{4} \alpha_2 C_d \frac{\rho_1}{d_2} \|\underline{U}_r\| \underline{U}_r$$

ou plus formellement :

$$\underline{I} = -\alpha_1 \alpha_2 K_T \underline{U}_r \quad (1.11)$$

$$\text{où } K_T = \begin{cases} \frac{3}{4} \frac{C_d}{d_2} \rho_1 \alpha_1^{-2.7} \|\underline{U}_r\| & \text{si } \alpha_2 < 0.2 \\ \frac{\rho_1}{\alpha_1 d_2} \left( \alpha_2 \frac{150}{Re} + 1.75 \right) \|\underline{U}_r\| & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{avec } Re = \alpha_1 \frac{d_2}{\nu_1} \|\underline{U}_r\|$$

$$\text{et } C_d = \begin{cases} \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.7}) & \text{si } Re < 1000 \\ 0.44 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\underline{U}_r = \underline{U}_2 - \underline{U}_1$  désigne la vitesse relative entre les deux phases, et  $C_d$  un coefficient de traînée. L'expression de  $K_T$  provient de la modélisation de la traînée d'une sphère isolée pour les

écoulements dilués (si  $\alpha_2 < 0.2$ ), de la loi d'Ergun pour les écoulements denses. Elle s'écrit en fonction du nombre de Reynolds moyen  $Re$  associé aux particules.  $\nu_1$  représente la viscosité du gaz et  $d_2$  le diamètre moyen des particules, tous les deux étant supposés constants. Cette modélisation du terme de traînée est équivalente à celle retenue dans [Gid93].

Dans [Bal95], [Bal93] et [Boe97], les auteurs ne considèrent pas, dans l'expression de la force de traînée, la vitesse relative  $\underline{U}_r$ , mais une vitesse  $\underline{V}_r$ , qui est la vitesse relative corrigée par une vitesse de dispersion  $\underline{V}_d$  prenant en compte la perturbation d'une particule due au transport par la turbulence du fluide :

$$\underline{V}_r = \underline{U}_r - \underline{V}_d$$

Pour modéliser la vitesse de dispersion, *Cf.* [Bal95], les auteurs introduisent un coefficient de dispersion fluide-particules  $D_{12}^t$  :

$$\underline{V}_d = -D_{12}^t \left( \frac{1}{\alpha_1} \nabla \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2} \nabla \alpha_2 \right)$$

### 1.3.7 Modélisation des effets de diffusion de la phase gazeuse et des effets de dispersion de la phase particulaire

La turbulence du gaz que l'on a précédemment négligée (*Cf.* le paragraphe 1.3.3) est un effet dominant par rapport à ceux de la diffusion du gaz ou de la dispersion des particules ; les tests numériques présentés dans les chapitres 4 et 5 tiennent logiquement compte de ces ordres de grandeur puisque les effets de la turbulence et de la diffusion du gaz ainsi que la dispersion des particules ne sont pas considérés. On a néanmoins besoin de connaître la modélisation des deux derniers termes pour l'établissement de l'inégalité d'entropie qui permet de choisir la solution physiquement admissible parmi un ensemble de solutions faibles du système (*Cf.* le paragraphe 2.5).

On modélise les tenseurs  $\underline{\underline{\Sigma}}_k$ ,  $k=1, 2$  ( $\underline{\underline{\Sigma}}_1 = \underline{\underline{\tau}}_1$  et  $\underline{\underline{\Sigma}}_2 = \underline{\underline{\tau}}_2 - \underline{\underline{\Theta}}_2$ ), de façon classique :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_k = -\eta_k \left( \nabla \underline{U}_k + \nabla^t \underline{U}_k - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{U}_k) \underline{Id} \right) \quad (1.12)$$

où les coefficients de viscosité du gaz  $\eta_1$  et de dispersion des particules  $\eta_2$  sont des constantes positives.

Avec les hypothèses décrites ci-dessus, le système se réécrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) = 0 \quad (1.13a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0 \quad (1.13b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) + \alpha_1 \nabla P(\rho_1) &= -\underline{I} - \alpha_1 \rho_1 \underline{g} \\ &\quad - \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{\underline{\Sigma}}_1) \end{aligned} \quad (1.13c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P(\rho_1) + \nabla(\alpha_2 \Xi(\alpha_2)) &= \frac{\underline{I}}{\rho_2} - \alpha_2 \underline{g} \\ &\quad - \nabla \cdot \left( \frac{\alpha_2}{\rho_2} \underline{\underline{\Sigma}}_2 \right) \end{aligned} \quad (1.13d)$$

Ce modèle fermé «simple» a, entre autres, l'intérêt de permettre le calcul d'écoulements dilués ou denses en particules.

## 1.4 Quelques modèles à deux fluides simples issus de la littérature

Certains auteurs privilégient la modélisation des écoulements dilués ( $\alpha_2 \simeq 0$ ); ainsi dans [Sau94], les auteurs retiennent le modèle suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1 \underline{U}_1) = 0 \quad (1.14a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0 \quad (1.14b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\rho_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) + \nabla P = -\underline{I} \quad (1.14c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) = \frac{1}{\rho_2} \underline{I} \quad (1.14d)$$

Ce modèle peut être déduit du modèle (1.13) en posant formellement  $\alpha_1 = 1$  dans les équations de la phase gazeuse et en ne prenant en compte ni pression ni interactions entre les particules dans les équations de la phase particulaire.

Dans [Gid93], l'auteur retient deux modèles, un modèle équivalent à (1.13) et un second présenté ci-dessous :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) = 0 \quad (1.15a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0 \quad (1.15b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) + \nabla P_1 &= -\underline{I} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + G(\alpha_2) \nabla \alpha_2 &= \frac{1}{\rho_2} \underline{I} \end{aligned} \quad (1.15c)$$

Ce modèle est censé pouvoir décrire les écoulements denses et ne suppose pas d'effets de pression sur la phase particulaire. Le terme  $G(\alpha_2) \nabla \alpha_2$  prend en compte les effets collisionnels entre particules.



## Chapitre 2

# Quelques éléments sur les systèmes hyperboliques non linéaires issus de lois de conservation

On expose dans ce chapitre les caractéristiques essentielles des systèmes hyperboliques non linéaires issus de lois de conservation. On rappelle tout d'abord les définitions de système hyperbolique, d'invariant de Riemann et d'entropie. Les systèmes hyperboliques ayant la particularité d'admettre des solutions discontinues, on introduit la notion de solution faible. Cette dernière ne s'accompagnant pas de l'unicité de la solution, on présente un critère basé sur la notion d'entropie qui permet de sélectionner la solution physique parmi l'ensemble des solutions faibles. On étudie ensuite la résolution du problème de Riemann monodimensionnel associé à un système hyperbolique de lois de conservation. Dans un cadre théorique, parmi les références portant sur les systèmes hyperboliques issus de lois de conservation, on s'appuiera notamment sur [Har83a], [Lax57], [Lax72], [Smo83], [Vil86], et [God92] pour le cas scalaire. On traite enfin un exemple : la résolution du problème de Riemann du système de la dynamique des gaz isentropique en coordonnées Eulériennes. On renvoie le lecteur intéressé à [Smo83] pour la résolution du problème de Riemann du système de la dynamique des gaz en coordonnées Eulériennes.

### 2.1 Hyperbolicité

Soient l'espace des états  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^p$  et  $\underline{W} = \underline{W}(\underline{x}, t) = (w_1, \dots, w_p)^t$  un vecteur de variables d'état à valeurs dans  $\Omega$  où  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)^t \in \mathbb{R}^d$  et  $t \in [0, +\infty[$ .

On considère le système suivant, constitué de  $p$  lois de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \underline{F}_j(\underline{W}) = \underline{0} \quad (2.1)$$

où  $\underline{F}_j(\underline{W})$ ,  $j = 1, \dots, d$ , désigne la fonction de flux suffisamment régulière de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^p$ , associée à la  $j^{\text{ième}}$  composante spatiale.

Formellement, le système (2.1) exprime la conservation des quantités  $w_1, \dots, w_p$ ; en intégrant celui-ci sur un domaine fixe arbitraire  $D$  de  $\mathbb{R}^d$  et en appliquant le théorème de la divergence, on obtient une équation de bilan des quantités  $w_1, \dots, w_p$ :

$$\frac{d}{dt} \int_D \underline{W} \, d\underline{x} + \sum_{j=1}^d \int_{\partial D} \underline{F}_j(\underline{W}) \cdot \underline{n}_j \, d\underline{s} = \underline{0} \quad (2.2)$$

avec  $\partial D$  la frontière du domaine  $D$ ,  $\underline{s} \in \mathbb{R}^{d-1}$  la variable d'intégration sur  $\partial D$  et  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d)^t$  le vecteur normal à  $\partial D$  extérieur à  $D$ . L'équation (2.2) exprime l'égalité entre la variation temporelle de  $\underline{W}$  dans le domaine  $D$  et le flux de  $\underline{W}$  à travers la surface  $\partial D$ .

Soit  $\underline{\underline{A}}_j(\underline{W})$  la matrice Jacobienne associée au flux  $\underline{F}_j(\underline{W})$ ,  $j = 1, \dots, d$ :

$$\underline{\underline{A}}_j(\underline{W}) = \nabla_{\underline{W}} \underline{F}_j(\underline{W})$$

Soit  $\underline{\underline{A}}(\underline{W}, \underline{n})$  la matrice Jacobienne associée à l'ensemble des flux  $\underline{F}_j(\underline{W})$ ,  $j = 1, \dots, d$ , définie, pour tout vecteur  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d)^t$  de  $\mathbb{R}^d$  non nul, par:

$$\underline{\underline{A}}(\underline{W}, \underline{n}) = \sum_{j=1}^d n_j \underline{\underline{A}}_j(\underline{W})$$

**Définition 2.1** *Le système (2.1) est hyperbolique si, pour tout  $\underline{W} \in \Omega$  et  $\underline{n} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\underline{\underline{A}}(\underline{W}, \underline{n})$  a :*

- $p$  valeurs propres réelles;
- $p$  vecteurs propres linéairement indépendants.

*De plus, si les valeurs propres sont deux à deux distinctes alors le système (2.1) est strictement hyperbolique.*

## 2.2 Invariants de Riemann et caractéristiques à une dimension d'espace

On se place dans un cadre unidimensionnel, i.e.  $d = 1$ . Considérons un système hyperbolique sur le modèle du système (2.1), de matrice Jacobienne  $\underline{A}_1(\underline{W})$ , de valeurs propres associées  $\lambda_1(\underline{W}), \dots, \lambda_p(\underline{W})$ ,  $\underline{W} \in \mathbb{R}^p$ , et de vecteurs propres à droite associés  $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_p$ .

**Définition 2.2** *Un  $j$ -invariant de Riemann est une fonction régulière  $\phi(\underline{W})$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :*

$$\langle \nabla_{\underline{W}} \phi(\underline{W}), \underline{r}_j(\underline{W}) \rangle = 0 \quad \forall \underline{W} \in \mathbb{R}^p$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire associé à  $\mathbb{R}^p$ .

Cette définition signifie que  $\phi$  est constant le long des trajectoires portées par le vecteur  $\underline{r}_j$ .

**Proposition 2.1** *Soit  $\underline{W}_0 \in \mathbb{R}^p$ . Il existe, dans un voisinage de  $\underline{W}_0$ ,  $(p - 1)$   $j$ -invariants de Riemann dont les gradients  $\nabla_{\underline{W}} \phi(\underline{W}_0)$  sont des formes linéaires indépendantes dans  $\mathbb{R}^p$ .*

*Démonstration.* Cf. [Smo83], page 321.

**Proposition 2.2** *Si  $\phi$  est un  $j$ -invariant de Riemann pour tout  $j \neq k_0$ , alors, pour toute solution  $\underline{W}$  régulière du système (2.1), on a :*

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\underline{W}) + \lambda_{k_0}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x} \phi(\underline{W}) = 0$$

*Démonstration.* Cf. [Smo83], page 392.

**Corollaire 2.1** *Si  $p = 2$ , soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  les 1- et 2-invariants de Riemann du système (2.1). Alors le système (2.1) peut se diagonaliser sous la forme :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(\underline{W}) + \lambda_2(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x} \phi_1(\underline{W}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi_2(\underline{W}) + \lambda_1(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x} \phi_2(\underline{W}) = 0 \end{cases}$$

**Définition 2.3** *Soit  $\underline{W}(x, t)$  une solution régulière du système (2.1). On définit la  $j$ -caractéristique  $x^j$  issue de  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (x^j(t; x_0, t_0)) = \lambda_j(\underline{W}(x^j(t; x_0, t_0), t)) \\ x^j(t_0; x_0, t_0) = x_0 \end{cases}$$

**Proposition 2.3** Si  $\phi$  est un  $j$ -invariant de Riemann pour tout  $j \neq k_0$ , alors, pour toute solution  $\underline{W}$  régulière du système (2.1),  $\phi$  est constant le long de la  $k_0$ -caractéristique, i.e. :

$$\frac{d}{dt}\phi(\underline{W}(x^{k_0}(t), t)) = 0$$

*Démonstration.* D'après la proposition 2.2.

## 2.3 Solutions faibles du problème de Cauchy

Considérons le problème de Cauchy suivant, pour un système basé sur le modèle du système (2.1) :

Trouver  $\underline{W} : (\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[ \rightarrow \underline{W}(\underline{x}, t) \in \Omega$ , solution de :

$$\frac{\partial}{\partial t}\underline{W} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} E_j(\underline{W}) = \underline{0} \quad (2.3a)$$

et satisfaisant la condition initiale :

$$\underline{W}(\underline{x}, t = 0) = \underline{W}_0(\underline{x}), \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^d \quad (2.3b)$$

avec  $\underline{W}_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \Omega$  une fonction donnée.

$\underline{W} : \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[ \rightarrow \Omega$  est une solution régulière du problème de Cauchy (2.3) si  $\underline{W}$  est une fonction  $C^1(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[)$  satisfaisant le système (2.3a) et la condition initiale (2.3b) associée.

La non linéarité du système (2.3a) a pour conséquence que des  $j$ -caractéristiques issues de points différents à  $t = t_0$ , peuvent se rencontrer, ce qui rend impossible l'existence de solutions régulières (d'après la proposition 2.3) (Cf. [Smo83], pages 241-245). On introduit alors la notion de solution faible :

**Définition 2.4** Soit  $\underline{W}_0$  une fonction  $(L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d))^p$ . Une fonction  $\underline{W} \in (L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[))^p$  est une solution faible du problème de Cauchy (2.3) si  $\underline{W}(\underline{x}, t) \in \Omega$  presque partout et si, pour toute fonction  $\underline{\phi} \in (C_0^1(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[))^p$ ,  $\underline{W}$  satisfait :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \langle \underline{W}, \frac{\partial}{\partial t} \underline{\phi} \rangle + \sum_{j=1}^d \langle E_j(\underline{W}), \frac{\partial}{\partial x_j} \underline{\phi} \rangle \right) d\underline{x} dt + \int_{\mathbb{R}^d} \langle \underline{W}_0(\underline{x}), \underline{\phi}(\underline{x}, 0) \rangle d\underline{x} = \underline{0}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire Euclidien de  $\mathbb{R}^p$ ,  $C_0^1(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[)$  l'espace des fonctions  $C^1$  à support compact dans  $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[$  et  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$  l'espace des fonctions mesurables localement bornées.

Par construction, une fonction régulière du problème de Cauchy (2.3) est aussi une solution faible. On caractérise maintenant les solutions faibles :

**Théorème 2.1** *Une fonction  $\underline{W}(\underline{x}, t)$ ,  $C^1$  par morceaux, est solution faible du problème de Cauchy (2.3) au sens des distributions sur  $\mathbb{R}^d \times ]0, +\infty[$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i)  $\underline{W}$  est une solution régulière de (2.3) dans les zones où  $\underline{W}$  est  $C^1$  ;
- (ii)  $\underline{W}$  satisfait la relation de saut

$$\sigma[\underline{W}] = \sum_{j=1}^d n_j [F_j(\underline{W})] \quad (2.4)$$

le long des surfaces de discontinuité  $\Sigma(\underline{x}, t)$ .

$\underline{\nu} = (\underline{n} = (n_1, \dots, n_d), -\sigma)^t$  désigne un vecteur normal unitaire à la surface  $\Sigma$  et la notation  $[\underline{W}]$  le saut de la variable  $\underline{W}$  de part et d'autre de la surface de discontinuité  $\Sigma$  :

$$[\underline{W}] = \underline{W}_+ - \underline{W}_-$$

avec

$$\underline{W}_\pm(\underline{x}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{W}(\underline{x}, t \pm \varepsilon \underline{n})$$

la normale  $\underline{n}$  étant dirigée de  $-$  vers  $+$ .

*Démonstration.* Cf. [God92], page 29.

La relation (2.4) est appelée relation de saut de Rankine-Hugoniot.  $\underline{n} \in \mathbb{R}^d$  et  $\sigma \in \mathbb{R}$  peuvent être respectivement interprétées comme la direction et la vitesse de propagation de la discontinuité  $\Sigma$ . Les discontinuités de  $\underline{W}$  sont appelées des chocs.

**Remarque 2.1** *Si la fonction  $\underline{W}$  est continue, la relation de saut de Rankine-Hugoniot (2.4) est automatiquement vérifiée.*

Il est aisé de vérifier qu'une solution faible du problème de Cauchy (2.3) n'est pas nécessairement unique. Nous avons donc besoin d'un critère qui nous permet de choisir la solution «physique» parmi l'ensemble des solutions faibles. Ce critère, introduit ci-dessous, est basé sur la notion d'entropie.

## 2.4 Entropie Mathématique

**Définition 2.5** *Une fonction régulière  $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une entropie du système de lois de conservation (2.1) s'il existe d fonctions régulières appelées flux d'entropie  $F_{\eta_j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :*

$$(\nabla_{\underline{W}} F_{\eta_j}(\underline{W}))^t = (\nabla_{\underline{W}} \eta(\underline{W}))^t \underline{A}_j(\underline{W}) \quad \text{pour } j = 1, \dots, d \quad (2.5)$$

**Corollaire 2.2** Les solutions régulières  $\underline{W}$  du système (2.1) vérifient une loi de conservation supplémentaire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(\underline{W}) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} F_{\eta_j}(\underline{W}) = 0 \quad (2.6)$$

*Démonstration.* Immédiate en multipliant le système (2.1) à gauche par  $(\nabla_{\underline{w}} \eta(\underline{W}))^t$ .

On ne peut, en général, prouver l'existence d'entropies de systèmes non linéaires de lois de conservation, sauf dans le cas d'une loi de conservation scalaire ( $p = 1$ ) pour laquelle toute fonction convexe est une entropie (Cf. [God92]) et dans le cas où  $d = 1$  et  $p = 2$ . On peut néanmoins caractériser les systèmes hyperboliques admettant une entropie mathématique (Cf. [God92] pages 36-48).

## 2.5 Solution faible entropique

Comme les solutions faibles du système (2.1) ne sont pas uniquement déterminées par leur condition initiale, on sélectionne la solution «physiquement» admissible, définie comme la solution limite, quand  $\varepsilon$  tend vers 0, de la solution  $\underline{W}_\varepsilon$  du système visqueux suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W}_\varepsilon + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \underline{F}_j(\underline{W}_\varepsilon) = \varepsilon \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \underline{D}_j(\underline{W}_\varepsilon) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \underline{W}_\varepsilon \right), \quad \forall \underline{W}_\varepsilon \in \mathbb{R}^p \text{ et } \varepsilon > 0 \quad (2.7)$$

où  $\underline{D}_j$  est la matrice de diffusion du système selon la  $j^{\text{ième}}$  composante spatiale,  $j = 1, \dots, d$ ,  $\underline{F}_j$  le flux convectif et  $\underline{A}_j$  la matrice Jacobienne de flux convectif.

Faisons l'hypothèse que la solution faible du système (2.1) que nous voulons sélectionner est la limite de solutions régulières de (2.7). Multiplions alors cette équation par  $(\nabla_{\underline{w}} \eta(\underline{W}_\varepsilon))^t$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \eta(\underline{W}_\varepsilon) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} F_{\eta_j}(\underline{W}_\varepsilon) &= \varepsilon \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nabla_{\underline{w}} \eta(\underline{W}_\varepsilon))^t \underline{D}_j(\underline{W}_\varepsilon) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \underline{W}_\varepsilon \right) \right) \\ &\quad - \varepsilon \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \underline{W}_\varepsilon \right)^t \cdot \left( \nabla_{\underline{w}\underline{w}} \eta(\underline{W}_\varepsilon) \cdot \underline{D}_j(\underline{W}_\varepsilon) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \underline{W}_\varepsilon \end{aligned}$$

Si on fait l'hypothèse suivante de «consistance» de l'entropie avec les termes de diffusion :

$$\underline{Z}^t (\nabla_{\underline{w}\underline{w}} \eta(\underline{W}_\varepsilon) \cdot \underline{D}_j(\underline{W}_\varepsilon)) \underline{Z} \geq 0, \quad \forall \underline{Z} \in \mathbb{R}^p, \quad (2.8)$$

on obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(\underline{W}_\varepsilon) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} F_{\eta_j}(\underline{W}_\varepsilon) \leq \varepsilon \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nabla_{\underline{W}} \eta(\underline{W}_\varepsilon))^t \underline{D}_j(\underline{W}_\varepsilon) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \underline{W}_\varepsilon \right) \right)$$

Si la fonction  $\underline{W}_\varepsilon$  est bornée, le terme de droite tend vers zéro au sens des distributions quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. On peut alors conclure, au sens des distributions :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(\underline{W}_\varepsilon) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} F_{\eta_j}(\underline{W}_\varepsilon) \leq 0 \quad (2.9)$$

On peut énoncer le théorème suivant :

**Théorème 2.2** *Si la fonction  $\eta(\underline{W})$  admet la propriété (2.8) et vérifie la loi de conservation (2.6), alors toute solution  $\underline{W}$  du système (2.1), qui est la limite bornée des solutions du système (2.7), satisfait l'inégalité (2.9) au sens des distributions.*

**Remarque 2.2** *Si on considère le système (2.1) avec la perturbation visqueuse  $\varepsilon \Delta \underline{W}$ , alors l'hypothèse de « consistance » de l'entropie avec la matrice de diffusion équivaut à une hypothèse de convexité de la fonction d'entropie  $\eta(\underline{W})$ .*

**Définition 2.6** *Une solution entropique du système (2.1) est une solution faible qui vérifie la condition (2.9) pour toute entropie mathématique qui vérifie (2.8).*

**Corollaire 2.3** *Sous les hypothèses du théorème 2.2, si  $\underline{W}$  est une fonction continue par morceaux alors, à travers chaque discontinuité,  $\underline{W}$  satisfait :*

$$\sigma[\eta(\underline{W})] - \sum_{j=1}^d n_j [F_{\eta_j}(\underline{W})] \geq 0 \quad (2.10)$$

où  $\sigma$  est la vitesse de propagation de la discontinuité et la notation  $[\underline{W}]$  représente le saut de la variable  $\underline{W}$  à la traversée de la discontinuité.

*Démonstration.* Par intégration de l'équation (2.9) sur un domaine traversé par la discontinuité.

## 2.6 Résolution du problème de Riemann unidimensionnel

Résoudre un problème de Riemann équivaut à résoudre un problème de Cauchy avec des conditions initiales constantes de part et d'autre d'une discontinuité :

Trouver  $\underline{W} : (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[ \rightarrow \underline{W}(x, t) \in \Omega$ , solution de :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}(\underline{W}) = \underline{0} \quad (2.11a)$$

et satisfaisant la condition initiale :

$$\underline{W}(x, t = 0) = \begin{cases} \underline{W}_L & \text{si } x \leq 0 \\ \underline{W}_R & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.11b)$$

avec  $\underline{W}_L, \underline{W}_R$  deux états constants de  $\Omega$ .

On suppose que le système (2.11a) est strictement hyperbolique de valeurs propres ordonnées  $\lambda_1(\underline{W}) < \dots < \lambda_p(\underline{W})$ ,  $\underline{W} \in \mathbb{R}^p$ , et de vecteurs propres à droite associés  $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_p$ .

### 2.6.1 Champs vraiment non linéaires et champs dégénérés

**Définition 2.7** *Le  $k^{\text{ième}}$  champ est linéairement dégénéré ou L.D. si :*

$$\langle \nabla_{\underline{W}} \lambda_k(\underline{W}), \underline{r}_k(\underline{W}) \rangle = 0 \quad \forall \underline{W} \in \mathbb{R}^p$$

**Définition 2.8** *Le  $k^{\text{ième}}$  champ est vraiment non linéaire ou V.N.L. si :*

$$\langle \nabla_{\underline{W}} \lambda_k(\underline{W}), \underline{r}_k(\underline{W}) \rangle \neq 0 \quad \forall \underline{W} \in \mathbb{R}^p$$

Dans la suite, on supposera que les champs sont soit V.N.L., soit L.D., et qu'à chaque famille de caractéristiques  $\lambda_k, k = 1, \dots, p$  (i.e. les droites  $dx/dt = \lambda_k(\underline{W}(x, t))$ ), correspondra une  $k$ -onde de choc, une  $k$ -onde de détente ou une  $k$ -discontinuité de contact.

### 2.6.2 Onde de détente ou onde de raréfaction

On suppose que le  $k^{\text{ième}}$  champ du système (2.11a) est V.N.L.

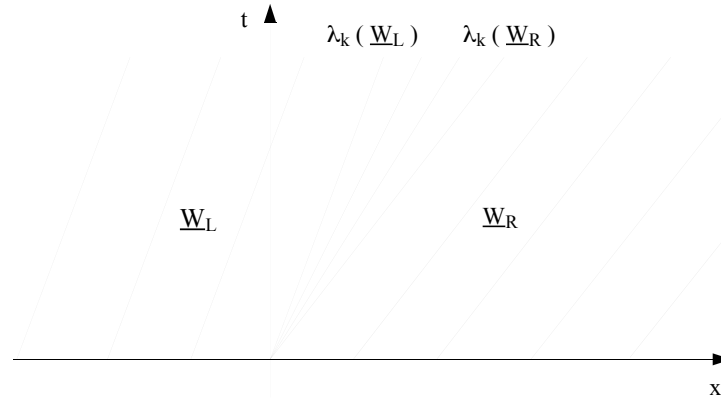
**Définition 2.9** *On appelle  $k$ -onde de détente ou  $k$ -onde de raréfaction, définie sur un domaine  $\xi_L < \xi = x/t < \xi_R$ , une fonction  $\underline{W}(\xi)$  continue telle que :*

$$\xi = \lambda_k(\underline{W}(\xi)) \quad (2.12)$$

$$\frac{d}{d\xi} \underline{W}(\xi) \text{ est colinéaire à } \underline{r}_k(\underline{W}(\xi)) \quad (2.13)$$

**Proposition 2.4** *La fonction  $\underline{W}(\xi)$ , définie en (2.12) et (2.13) sur un domaine  $\xi_L < \xi = x/t < \xi_R$ , est une solution régulière du système (2.11a) reliant l'état  $\underline{W}(\xi_L)$  à l'état  $\underline{W}(\xi_R)$ .*



FIG. 2.1 – Représentation d'une onde de détente dans le plan  $(x, t)$ .

**Proposition 2.5** Les  $k$ -invariants de Riemann sont constants le long d'une  $k$ -onde de détente ; réciproquement une courbe le long de laquelle les  $(p-1)$   $j$ -invariants de Riemann sont constants est une  $k$ -onde de détente.

**Remarque 2.3** Les lignes formant l'« éventail » de la  $k$ -onde de raréfaction sur la figure [2.1] sont les droites caractéristiques le long desquelles la solution  $\underline{W}(\xi)$  définie en (2.12) et (2.13) est constante. La vitesse de la  $k$ -caractéristique de début de détente dépend de l'état  $\underline{W}_L$  et vaut  $\lambda_k(\underline{W}_L)$  alors que celle de la  $k$ -caractéristique de fin de détente dépend de l'état  $\underline{W}_R$  et vaut  $\lambda_k(\underline{W}_R)$ .

### 2.6.3 Onde de choc et choc entropique

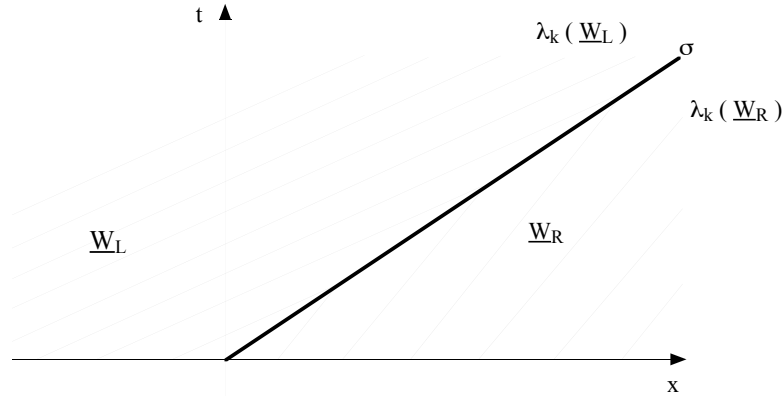
On suppose que le  $k^{\text{ième}}$  champ du système (2.11a) est V.N.L., et on cherche la solution discontinue qui relie deux états constants  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$ . Cette solution doit donc vérifier la condition de Rankine-Hugoniot (2.4) et est alors de la forme suivante :

$$\underline{W}(x, t) = \begin{cases} \underline{W}_L & \text{si } x < \sigma t \\ \underline{W}_R & \text{si } x \geq \sigma t \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $\sigma$  est la vitesse du choc.

On caractérise maintenant les chocs entropiques pouvant relier deux états :

**Proposition 2.6** Soit  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$  deux états constants de  $\Omega$  et  $(\eta, F_\eta)$  un couple entropie-flux d'entropie du système (2.11a) « consistant » avec les termes de diffusion. Si les états  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$  sont reliés par une  $k$ -onde de choc et si l'inégalité d'entropie (2.10), entre les états  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$ , est vérifiée alors le choc est dit entropique.

FIG. 2.2 – Représentation d'un choc dans le plan  $(x, t)$ .

Un autre moyen d'éliminer les chocs non physiques est de considérer un choc admissible s'il provient de la rencontre de deux  $k$ -caractéristiques (voir la figure [2.2]). Lax a proposé la formulation suivante (Cf. [Lax72]) :

**Définition 2.10** Soit  $\underline{W}(x, t)$  une solution faible du système (2.11a) discontinue le long d'une caractéristique  $\sigma = x/t$  et constante ailleurs. Soit  $\underline{W}_L$  (respectivement  $\underline{W}_R$ ) de  $\Omega$ , la valeur de  $\underline{W}$  à gauche (respectivement à droite) de la discontinuité. On dira que l'on a un choc admissible s'il existe  $k$ ,  $1 < k < p$ , tel que :

$$\lambda_k(\underline{W}_R) < \sigma < \lambda_k(\underline{W}_L) \quad (2.15)$$

et

$$\lambda_{k-1}(\underline{W}_L) < \sigma < \lambda_{k+1}(\underline{W}_R) \quad (2.16)$$

Les inégalités (2.15) et (2.16) sont appelées les conditions de choc de Lax. La proposition suivante permet de faire le lien entre les conditions de Lax et l'inégalité d'entropie :

**Proposition 2.7** Soit le choc, reliant les états constants  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$  de  $\Omega$ , supposé faible (i.e.  $\|\underline{W}_L - \underline{W}_R\|$  petit).

- Si ce choc vérifie les conditions de Lax (2.15) et (2.16), il vérifie alors l'inégalité d'entropie (2.10) pour toute entropie du système (2.11a) « consistante » avec les termes de diffusion.
- Si ce choc vérifie l'inégalité d'entropie (2.10) pour toute entropie du système (2.11a) « consistante » avec les termes de diffusion, il vérifie alors les conditions de Lax (2.15) et (2.16).

### 2.6.4 Discontinuité de contact

On suppose que le  $k^{\text{ième}}$  champ du système (2.11a) est linéairement dégénéré. Soient  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$  deux états constants de  $\Omega$  séparés par le  $k^{\text{ième}}$  champ. Par les définitions 2.7 et 2.2, on obtient que  $\lambda_k$  est un  $k$ -invariant de Riemann, i.e.  $\lambda_k(\underline{W}_L) = \lambda_k(\underline{W}_R)$ . La solution  $\underline{W}(x, t)$  du système (2.11a) qui relie les états  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$  est une discontinuité de contact qui vérifie :

$$\underline{W}(x, t) = \begin{cases} \underline{W}_L & \text{si } x < \sigma t \\ \underline{W}_R & \text{si } x \geq \sigma t \end{cases}$$

où la vitesse de propagation du choc  $\sigma$  est égale à la vitesse de la  $k$ -caractéristique en les états  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$ , i.e.  $\sigma = \lambda_k(\underline{W}_L) = \lambda_k(\underline{W}_R)$ . Au travers de cette discontinuité, la relation de saut de Rankine-Hugoniot (2.4) est valable :

$$\sigma(\underline{W}_R - \underline{W}_L) = \underline{F}(\underline{W}_R) - \underline{F}(\underline{W}_L)$$

On peut énoncer le théorème suivant :

**Théorème 2.3** *Soient  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$  deux états constants de  $\Omega$  séparés par un  $k$ -champ linéairement dégénéré du système (2.11a). Alors les états  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$  sont reliés l'un à l'autre par une discontinuité de contact de vitesse de propagation  $\sigma = \lambda_k(\underline{W}_L) = \lambda_k(\underline{W}_R)$ .*

*Démonstration.* Cf. [Smo83], page 334.

**Remarque 2.4** *Soit  $(\eta, F_\eta)$  un couple entropie-flux d'entropie du système (2.11a) « consistant » avec les termes de diffusion. Au travers d'une discontinuité de contact, on a :*

$$\sigma(\eta(\underline{W}_R) - \eta(\underline{W}_L)) = F_\eta(\underline{W}_R) - F_\eta(\underline{W}_L)$$

## 2.7 Résolution du problème de Riemann

La solution du problème de Riemann (2.11) notée  $\underline{W}(x/t; \underline{W}_L, \underline{W}_R)$ , avec  $t > 0$ , est composée de quatre types d'ondes élémentaires, précédemment définies et énumérées ci-dessous :

- des états constants ;
- des ondes de choc ;
- des ondes de détente ;
- des discontinuités de contact.

**Théorème 2.4** Soit  $\underline{W}_L \in \Omega$  un état constant. Supposons que le système (2.11a) est hyperbolique et que chaque champ caractéristique est soit vraiment non linéaire, soit linéairement dégénéré. Alors, il existe  $\underline{W}_R \in \Omega$  tel que le problème de Riemann (2.11) admet une solution. Cette solution se compose d'au plus  $(p + 1)$  états constants reliés par des ondes de choc, des ondes de détente ou des discontinuités de contact.

*Démonstration.* Cf. [Smo83], page 335.

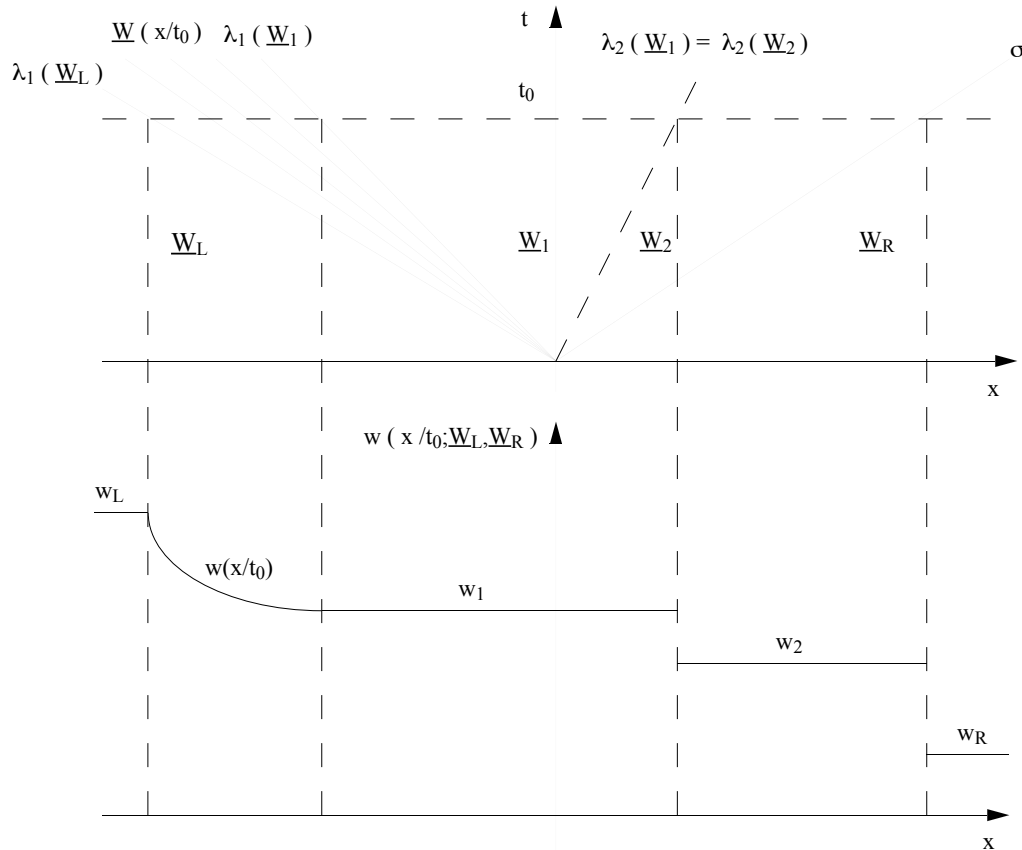


FIG. 2.3 – Représentation de la solution d'un problème de Riemann dans le plan  $(x, t)$  et projection sur l'axe  $x$  d'une variable  $w$  de  $\underline{W}$  à un temps  $t_0$  fixé.

Sur la figure [2.3], on donne un exemple de solution de problème de Riemann, de conditions initiales  $\underline{W}(x, 0) = \underline{W}_L$  si  $x < 0$  et  $\underline{W}_R$  si  $x \geq 0$ , pour un système hyperbolique admettant trois valeurs propres distinctes  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ .  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$  identifient deux champs vraiment non linéaires qui sont donc soit une onde de détente, soit une onde de choc, et  $\lambda_2$  est ici un champ linéairement dégénéré qui ne peut être qu'une discontinuité de contact. On a choisi de représenter une 1-onde de détente et une 3-onde de choc de vitesse  $\sigma$ . On donne tout d'abord une représentation de la solution dans le plan  $(x, t)$ ; on y dénombre quatre états constants  $\underline{W}_L$ ,  $\underline{W}_1$ ,  $\underline{W}_2$  et  $\underline{W}_R$  séparés par les trois ondes. Puis on projette la solution, sur l'axe  $x$  à un temps

$t_0$  fixé, d'une variable  $w$  de  $\underline{W}$  qui n'est pas un invariant de Riemann de la 1-onde de détente ni de la 2-discontinuité de contact (dans le cas contraire, la variable  $w$  resterait constante à la traversée de la 1- ou 2-onde). La fonction  $w(x/t_0; \underline{W}_L, \underline{W}_R)$  est régulière par morceaux, les discontinuités étant localisées aux traversées des 2- et 3-onde. Sur l'exemple de la figure [2.3], la fonction définie par :

$$\underline{W} \left( \frac{x}{t_0}; \underline{W}_L, \underline{W}_R \right) = \begin{cases} \underline{W}_L & \text{si } x/t_0 \leq \lambda_1(\underline{W}_L) \\ \underline{W}(x/t_0) & \text{si } \lambda_1(\underline{W}_L) \leq x/t_0 \leq \lambda_1(\underline{W}_1) \\ \underline{W}_1 & \text{si } \lambda_1(\underline{W}_1) \leq x/t_0 \leq \lambda_2(\underline{W}_1) \\ \underline{W}_2 & \text{si } \lambda_2(\underline{W}_1) \leq x/t_0 \leq \sigma \\ \underline{W}_R & \text{si } \sigma \leq x/t_0 \end{cases}$$

est solution du système (2.11a),  $\sigma$  étant donné par les relations de Rankine-Hugoniot (2.4) et  $\underline{W}(x/t_0)$  étant la paramétrisation de la 1-onde de détente.

Dans le paragraphe suivant, on étudie la résolution exacte du problème de Riemann du système de la dynamique des gaz isentropique.

## 2.8 Etude d'un exemple : le système de la dynamique des gaz isentropique

### 2.8.1 Le système et ses propriétés

#### 2.8.1.1 Le système de la dynamique des gaz isentropique

On rappelle les équations monodimensionnelles de la dynamique des gaz en variables conservatives, c'est à dire en masse volumique et densité de flux de masse  $(\rho, \rho u)(x, t)$ , en coordonnées Eulériennes :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + P) = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

On ferme le système en utilisant une relation entre la pression et la masse volumique :

$$P = P(\rho) \text{ telle que } P'(\rho) > 0 \text{ et } P''(\rho) > 0 \quad (2.18)$$

Si on néglige les effets dissipatifs, l'écoulement est isentropique et la relation devient :

$$P(\rho) = K\rho^\gamma \quad (2.19)$$

où  $K$  est une constante positive caractéristique du fluide et  $\gamma$ , l'exposant isentropique du gaz a les valeurs particulières de  $5/3$  pour un gaz monoatomique,  $7/5$  pour un gaz diatomique et diminue avec l'atomicité.

Soit  $\Omega$  l'espace des états admissibles. On écrit le système matriciel associé au système conservatif (2.17) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} F(\underline{W}) = \underline{0} \quad \forall \underline{W} \in \Omega$$

qui se réécrit de façon équivalente dans les zones régulières :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{A}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} = \underline{0} \quad \forall \underline{W} \in \Omega$$

où  $\underline{W}(x, t) \in \Omega$  est le vecteur d'état associé aux variables conservatives :

$$\underline{W} = (\rho, \rho u)^t$$

$\Omega$  s'écrit alors :

$$\Omega = \{(\rho, \rho u) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho > 0\}$$

avec le flux et la matrice Jacobienne :

$$\underline{F}(\underline{W}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P(\rho) \end{pmatrix} \quad \underline{A}(\underline{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}$$

où  $c$  est la célérité du système définie par :

$$c^2 = c^2(\rho) = P'(\rho)$$

La célérité ne dépend donc que de la masse volumique. Les fonctions  $\rho$  et  $c(\rho)$  évoluent de façon identique, i.e.  $c(\rho)$  est une fonction monotone croissante.

### 2.8.1.2 Hyperbolicité du système

Le système de la dynamique des gaz isentropique monodimensionnel admet deux valeurs propres  $\lambda_1(\underline{W})$  et  $\lambda_2(\underline{W})$  :

$$\lambda_1 = u - c \quad ; \quad \lambda_2 = u + c$$

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont donc réelles si la densité reste positive, i.e. si  $\underline{W} \in \Omega$ . Les vecteurs propres à droite associés  $\underline{r}_1(\underline{W})$  et  $\underline{r}_2(\underline{W})$  sont :

$$\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \end{pmatrix}$$

Si l'on n'est pas en présence du vide, alors  $\underline{r}_1$  et  $\underline{r}_2$  engendrent  $\mathbb{R}^2$ . Le système (2.17) est donc inconditionnellement hyperbolique si la densité reste positive. On note enfin que les champs associés aux vecteurs propres  $\underline{r}_1$  et  $\underline{r}_2$  sont vraiment non linéaires.

### 2.8.1.3 Invariants de Riemann

Pour le système de la dynamique des gaz isentropique monodimensionnel ( $p = 2$ ), chaque  $j$ -onde possède un seul  $j$ -invariant de Riemann (voir la proposition 2.1).

**Invariant de Riemann de la 1-onde :**

$$\phi^1(\underline{W}) = u + \int_0^\rho \frac{c(a)}{a} da$$

**Invariant de Riemann de la 2-onde :**

$$\phi^2(\underline{W}) = u - \int_0^\rho \frac{c(a)}{a} da$$

Dans le cas particulier de l'isentropique pour un gaz parfait, on obtient :

$$\phi^1(\underline{W}) = u + \frac{2c}{\gamma-1} \quad \text{et} \quad \phi^2(\underline{W}) = u - \frac{2c}{\gamma-1}$$

**Remarque 2.5** D'après le corollaire 2.1, on a :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left( u \pm \int_0^\rho \frac{c(a)}{a} da \right) = 0$$

### 2.8.1.4 Entropie du système

On associe au système (2.17) le tenseur de diffusion, issu de la physique, suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{A}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \underline{D}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} \right)$$

avec

$$\underline{D}(\underline{W}) = \frac{\nu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\nu$  est un coefficient positif de viscosité. Le système (2.17) admet alors le couple entropie-flux d'entropie  $(\eta, F_\eta)$ , «consistant» avec la matrice de diffusion (au sens de l'inégalité (2.8)), suivant :

$$\begin{cases} \eta(\underline{W}) = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho H(\rho) \\ F_\eta(\underline{W}) = (\eta + P)u \end{cases}$$

où la fonction  $H(\rho)$  est définie par :

$$H'(\rho) = \frac{P(\rho)}{\rho^2}$$

Appliqué à la relation isentropique (2.19), le couple entropie-flux d'entropie devient :

$$\begin{cases} \eta(\underline{W}) = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{\gamma-1} P \\ F_\eta(\underline{W}) = (\eta + P)u \end{cases}$$

Dans les zones non régulières (ondes de choc), l'inégalité d'entropie (2.10) doit être vérifiée. En utilisant les relations de Rankine-Hugoniot (2.4), on trouve que, dans le cas général, l'inégalité d'entropie est équivalente à :

$$[u] \bar{p} \left\{ -\frac{[\rho H(\rho)]}{[\rho]} + \frac{\overline{\rho H(\rho)} + \overline{P(\rho)}}{\bar{p}} \right\} < 0$$

Dans le cas particulier de l'isentropique pour un gaz parfait, elle s'écrit :



$$\frac{\bar{p}}{\gamma - 1} [u] \left\{ -\frac{[P(\rho)]}{[\rho]} + \gamma \frac{\overline{P(\rho)}}{\bar{p}} \right\} < 0$$

et, après étude de signe du terme entre accolades, est équivalente à :

$$[u] < 0$$

Cette expression simple caractérise donc le saut de la vitesse à la traversée du choc et nous permettra de choisir la solution faible du système (2.17) physiquement réalisable.

### 2.8.2 Résolution du problème de Riemann

Ce paragraphe est consacré à la construction explicite de la solution du problème de Riemann monodimensionnel pour les équations (2.17) de la dynamique des gaz isentropique sans aucune restriction sur l'amplitude des états initiaux. Nous ne considérons pas le cas du vide sur un des états initiaux. Le cas de l'apparition du vide sera traité à part.

Etant donnés deux états constants  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$  de  $\Omega$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{W} : \mathbb{R} \times [0, +\infty[ \rightarrow \Omega, \underline{W} = (\rho, \rho u)^t \\ \text{solution du système (2.17) et tel que :} \\ \underline{W}(x, t = 0) = \begin{cases} \underline{W}_L, & x < 0 \\ \underline{W}_R, & x \geq 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

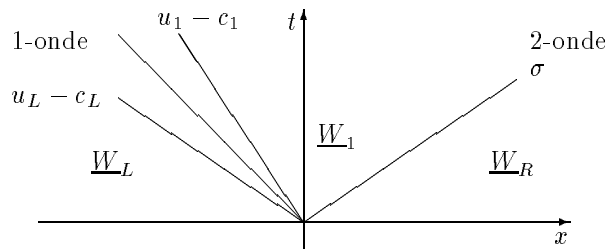


FIG. 2.4 – Représentation de la solution du problème de Riemann dans le cas du système de la dynamique des gaz isentropique. Les états constants  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$  sont connectés par une 1-onde de détente, un état intermédiaire  $\underline{W}_1$  constant et une 2-onde de choc.

La figure [2.4] représente la solution dans le plan  $(x, t)$  d'un problème de Riemann dans le cas du système de la dynamique des gaz isentropique. On observe que deux ondes, séparées par un

état intermédiaire constant  $\underline{W}_1$ , correspondant respectivement aux champs  $u - c$  et  $u + c$ , se développent dès que  $t > 0$ . Les deux champs étant vraiment non linéaires, les ondes développées sont donc soit des ondes de détente, soit des ondes de choc. Sur la figure [2.4], on a choisi de représenter une 1-onde de détente et une 2-onde de choc.

### 2.8.2.1 Paramétrisation des ondes de détente

On cherche tout d'abord la paramétrisation de la 1-onde de détente qui relie l'état constant  $\underline{W}_L$  à l'état constant intermédiaire  $\underline{W}_1$ . Comme  $\phi^1$ , le 1-invariant de Riemann, est constant par définition le long de la 1-onde de détente, on a :

$$\phi^1(\underline{W}_L) = \phi^1(\underline{W}_1)$$

On introduit la paramétrisation suivante :

$$\rho_1 = z_1 \rho_L, \quad z_1 \in \mathbb{R}^{+*}$$

et l'on obtient :

$$u_1 = u_L + \int_{z_1 \rho_L}^{\rho_L} \frac{c(a)}{a} da \quad (2.21)$$

On obtient le domaine de validité de la paramétrisation de la 1-onde de détente en vérifiant l'inégalité de Lax,  $u_L - c_L \leq u_1 - c_1$  ; soit  $z_1 \in ]0, 1]$ .

De manière identique, on cherche maintenant la paramétrisation de la 2-onde de détente qui relie l'état constant  $\underline{W}_R$  à l'état constant intermédiaire  $\underline{W}_1$ . Comme  $\phi^2$ , le 2-invariant de Riemann, est constant le long de la 2-onde de détente, on a :

$$\phi^2(\underline{W}_R) = \phi^2(\underline{W}_1)$$

En introduisant la paramétrisation

$$\rho_R = z_2 \rho_1, \quad z_2 \in \mathbb{R}^{+*}$$

on obtient :

$$u_R = u_1 + \int_{\rho_R/z_2}^{\rho_R} \frac{c(a)}{a} da \quad (2.22)$$

On obtient le domaine de validité de la paramétrisation de la 2-onde de détente en vérifiant l'inégalité de Lax,  $u_1 + c_1 \leq u_R + c_R$  ; soit  $z_2 \in [1, +\infty[$ .

**Remarque 2.6** *Pour obtenir la solution  $(\rho, u)$  dans une onde de détente, on écrit que  $(\rho, u)(x, t) = (\rho, u)(\xi = x/t)$  ; on obtient alors, pour le cas de l'isentropique pour les gaz parfaits :*

- (i) solution  $\underline{W}_{1-détente}(\xi)$  dans la 1-onde de détente :

$$\rho(\xi) = \left[ \frac{(\gamma K)^{-1/2}}{\gamma + 1} (-(\gamma - 1)\xi + (\gamma - 1)u_L + 2c_L) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$u(\xi) = \frac{1}{\gamma + 1} (2\xi + (\gamma - 1)u_L + 2c_L)$$

- (ii) solution  $\underline{W}_{2-détente}(\xi)$  dans la 2-onde de détente :

$$\rho(\xi) = \left[ \frac{(\gamma K)^{-1/2}}{\gamma + 1} ((\gamma - 1)\xi - (\gamma - 1)u_R + 2c_R) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$u(\xi) = \frac{1}{\gamma + 1} (2\xi + (\gamma - 1)u_R - 2c_R)$$

### 2.8.2.2 Paramétrisation des ondes de choc

Les équations de la dynamique des gaz isentropique, qui sont conservatives, admettent les conditions de saut de Rankine-Hugoniot suivantes :

$$\begin{cases} \sigma[\rho] &= [\rho u] \\ \sigma[\rho u] &= [\rho u^2] + [P] \end{cases} \quad (2.23)$$

En écrivant ces conditions entre l'état constant  $\underline{W}_L$  et l'état constant intermédiaire  $\underline{W}_1$ , on trouve la paramétrisation de la 1-onde de choc :

$$\rho_1 = z_1 \rho_L$$

$$u_1 = u_L - \left( \frac{z_1 - 1}{z_1} \frac{P(z_1 \rho_L) - P(\rho_L)}{\rho_L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.24)$$

On obtient le domaine de validité de la paramétrisation de la 1-onde de choc en vérifiant l'inégalité de Lax (2.15) (ou l'inégalité d'entropie (2.10)),  $u_L - c_L > \sigma > u_1 - c_1$  ; soit  $z_1 \in ]1, +\infty[$ .

On écrit maintenant les conditions de Rankine-Hugoniot entre l'état constant  $\underline{W}_R$  et l'état constant intermédiaire  $\underline{W}_1$ , on trouve alors la paramétrisation de la 2-onde de choc :

$$\begin{aligned} \rho_R &= z_2 \rho_1 \\ u_R &= u_1 - \left( (z_2 - 1) \frac{P(\rho_R) - P(\rho_R/z_2)}{\rho_R} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.25)$$

On obtient le domaine de validité de la paramétrisation de la 2-onde de choc en vérifiant l'inégalité de Lax,  $u_R + c_R < \sigma < u_1 + c_1$  ; soit  $z_2 \in ]0, 1[$ .

### 2.8.2.3 Résolution du problème de Riemann

On présente tout d'abord une synthèse des paramétrisations des 1- et 2-onde de choc et de détente, pour le cas d'un écoulement isentropique de gaz parfait :

$$\begin{aligned} \underline{1\text{-onde}} : \begin{cases} \rho_1 = z_1 \rho_L \\ u_1 = u_L + c_L h_1(z_1) \end{cases} & \quad \text{où } h_1(z_1) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma - 1} \left( 1 - z_1^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) & \text{si } z_1 \leq 1 \\ - \left\{ \frac{(z_1 - 1)(z_1^\gamma - 1)}{\gamma z_1} \right\}^{\frac{1}{2}} & \text{si } z_1 > 1 \end{cases} \\ \underline{2\text{-onde}} : \begin{cases} \rho_R = z_2 \rho_1 \\ u_R = u_1 + c_R h_2(z_2) \end{cases} & \quad \text{où } h_2(z_2) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma - 1} \left( 1 - z_2^{\frac{1-\gamma}{2}} \right) & \text{si } z_2 \geq 1 \\ - \left\{ \frac{(z_2 - 1)(1 - z_2^{-\gamma})}{\gamma} \right\}^{\frac{1}{2}} & \text{si } z_2 < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient alors le système non linéaire résolvant, à deux équations et deux inconnues  $(z_1, z_2)$ , suivant :

$$\rho_R = \rho_L z_2 z_1 \quad (2.26a)$$

$$u_R - u_L = c_R h_2(z_2) + c_L h_1(z_1) \quad (2.26b)$$

On peut éliminer  $z_2$  dans l'équation (2.26b) grâce à (2.26a), on obtient alors :

$$u_R - u_L = c_R h_2(z_2(z_1)) + c_L h_1(z_1) \quad (2.27)$$

Le problème revient donc à résoudre :

$$\Psi(z_1) = C^{ste} = c_R h_2(z_2(z_1)) + c_L h_1(z_1)$$

Or  $\Psi$  est décroissante monotone et :

$$\begin{aligned}\lim_{z_1 \rightarrow 0^+} \Psi(z_1) &= \frac{2}{\gamma - 1}(c_L + c_R) \\ \lim_{z_1 \rightarrow +\infty} \Psi(z_1) &= -\infty\end{aligned}$$

Donc, dans le cas d'une loi d'état des gaz parfaits, le problème (2.27) admet une solution unique si et seulement si  $u_R - u_L < \frac{2}{\gamma - 1}(c_R + c_L)$ .

Dans le cas plus général d'une loi d'état vérifiant (2.18), la fonction  $\Psi(z_1) = u_R - u_L$  est décroissante monotone avec les limites suivantes :

$$\begin{aligned}\lim_{z_1 \rightarrow 0^+} \Psi(z_1) &= \int_0^{\rho_L} \frac{c(a)}{a} da + \int_0^{\rho_R} \frac{c(a)}{a} da \\ \lim_{z_1 \rightarrow +\infty} \Psi(z_1) &= -\infty\end{aligned}$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

**Proposition 2.8** *Considérant le système de la dynamique des gaz isentropique (2.17), avec une loi d'état pour  $P$  vérifiant (2.18), soit  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$  deux états constants quelconques, différents du vide et conditions initiales du système; alors il existe une unique solution entropique du problème de Riemann (2.20) à densité strictement positive si et seulement si :*

$$u_R - u_L < \int_0^{\rho_L} \frac{c(a)}{a} da + \int_0^{\rho_R} \frac{c(a)}{a} da \quad (2.28)$$

Si (2.28) est violée alors il y a apparition du vide dans la solution (Cf. section 2.8.2.4).

Dans le cas où les invariants de Riemann sont primitivables, comme par exemple quand on considère la loi d'état des gaz parfaits, le problème (2.27) pourra être résolu numériquement par une méthode de Newton (Cf. annexe A section A.1.2).

#### 2.8.2.4 Traitement de l'apparition du vide

Si la condition (2.28) est violée par les conditions initiales alors le vide apparaît dans la solution à l'état intermédiaire.

On est en fait dans le cas d'une double détente où l'on "tire" sur le fluide jusqu'à ce que la densité de l'état constant intermédiaire  $\underline{W}_1$  devienne nulle (ainsi donc que la célérité  $c_1$ ). Le

problème vient du fait que la vitesse  $u_1$  est alors indéfinie. On se trouve donc dans le cas où les deux ondes de détente sont raccordées par l'état vide. On ne peut donc plus aborder le problème de manière classique car on est dans l'impossibilité de relier analytiquement les deux ondes de détente.

**Remarque 2.7** *Ce sont en fait les variables conservatives  $\underline{W}_1 = (\rho_1, (\rho u)_1)^t$  qui nous intéressent pour la résolution du système et elles restent toujours définies (la densité  $\rho_1$  et le débit  $(\rho u)_1$  sont nuls dans la zone de vide).*

On considère le cas d'un écoulement isentropique de gaz parfait (2.19). Le schéma de Godunov que l'on va mettre en pratique sur ce système (Cf. l'annexe A) nécessite la valeur du vecteur d'état  $\underline{W}$  sur la droite  $x = 0$  de la figure [2.5] représentée dans le plan  $(x, t)$ . On doit donc connaître la situation des ondes par rapport cette droite. Pour cela, on a besoin d'estimer les caractéristiques limites des ondes de détente qui délimitent le cône associé à l'état vide  $\underline{W}_1$ .

Dans les cas différents du vide, la caractéristique de la 1-onde de détente précédant l'état intermédiaire  $\underline{W}_1$  est  $\frac{x}{t} = u_1 - c_1$ . Mais dans le cas du vide,  $u_1$  est indéfinie et  $c_1(\rho_1 = 0) = 0$ . On veut néanmoins déterminer la caractéristique limite de la 1-onde qui précède l'état vide  $\underline{W}_1$  :  $\frac{x}{t} = u_1^* - c_1^* = u_1^*$  car  $c_1^* = \lim c_1(\rho_1) = 0$  quand  $\rho_1$  tend vers  $0^+$ . Pour cela, on écrit toujours la conservation de l'invariant de Riemann sur la 1-onde de détente :

$$u_1^* = u_1^* + \frac{2}{\gamma - 1} c_1^* = u_L + \frac{2}{\gamma - 1} c_L$$

On obtient ainsi la caractéristique limite de la 1-onde de détente avant l'état vide :

$$u_1^* = u_L + \frac{2}{\gamma - 1} c_L = \frac{x}{t}$$

Il en est de même pour la 2-onde de détente. Dans les cas différents du vide, la caractérisation de la 2-onde précédant l'état  $\underline{W}_1$  est  $\frac{x}{t} = u_1 + c_1$ . Dans le cas du vide, on détermine la caractéristique limite de la 2-onde de détente qui précède l'état vide  $\underline{W}_1$  :  $\frac{x}{t} = u_1^{**} - c_1^{**} = u_1^{**}$  car  $c_1^{**} = \lim c_1(\rho_1) = 0$  quand  $\rho_1$  tend vers  $0^+$ . On écrit la conservation de l'invariant de Riemann sur la 2-onde de détente :

$$u_1^{**} = u_1^{**} - \frac{2}{\gamma - 1} c_1^{**} = u_R - \frac{2}{\gamma - 1} c_R$$

On obtient ainsi la caractéristique limite de la 2-onde de détente avant l'état vide :

$$u_1^{**} = u_R - \frac{2}{\gamma - 1} c_R = \frac{x}{t}$$

La détermination de  $u_1^*$  et  $u_1^{**}$  permet de connaître la position des 1 et 2-ondes par rapport à la droite  $x = 0$  de la figure [2.5].

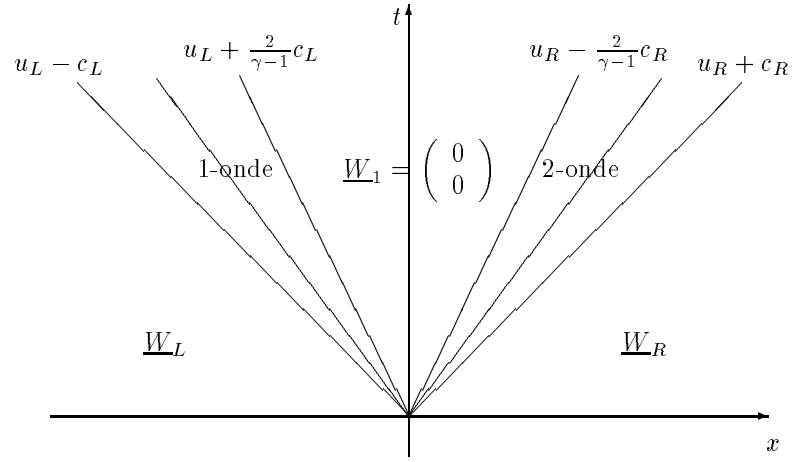


FIG. 2.5 – Représentation du problème de Riemann dans le cas de l'apparition du vide.

La solution  $\underline{W}(x, t)$  du problème de Riemann s'écrit alors :

$$\underline{W}(x, t) = \underline{W}\left(\frac{x}{t}; \underline{W}_L, \underline{W}_R\right) = \begin{cases} \underline{W}_L & \text{si } x/t \leq u_L - c_L \\ \underline{W}_{1\text{-détente}}(x/t) & \text{si } u_L - c_L \leq x/t \leq u_L + \frac{2}{\gamma-1}c_L \\ \underline{0} & \text{si } u_L + \frac{2}{\gamma-1}c_L \leq x/t \leq u_R - \frac{2}{\gamma-1}c_R \\ \underline{W}_{2\text{-détente}}(x/t) & \text{si } u_R - \frac{2}{\gamma-1}c_R \leq x/t \leq u_R + c_R \\ \underline{W}_R & \text{si } x/t \geq u_R + c_R \end{cases}$$

D'autre part, si on a l'égalité suivante :

$$u_R - u_L = \frac{2}{\gamma-1}(c_L + c_R)$$

alors les deux ondes de détente se rejoignent et le cône associé à  $\underline{W}_1$  est réduit à une caractéristique. On a alors  $u_1^* = u_L + \frac{2}{\gamma-1}c_L = u_R - \frac{2}{\gamma-1}c_R = u_1^{**}$ .





## Chapitre 3

# Rappels et compléments sur les schémas numériques

L'objectif de ce chapitre est de décrire les techniques volumes finis de résolution de systèmes conservatifs hyperboliques de type (2.1) puis de proposer une extension de ces dernières au cadre des systèmes non conservatifs et conditionnellement hyperboliques. A cette fin, on rappelle tout d'abord le principe de la discrétisation spatiale par des volumes finis de type INRIA (Cf. [Fez89]). Puis on présente des méthodes décentrées de type MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws) de résolution de systèmes conservatifs hyperboliques (Cf. [Van77] pour l'idée originale). Ces dernières sont basées sur la résolution exacte ou approchée de problèmes de Riemann locaux. Les solveurs de Godunov (Cf. [God59]) et de Roe (Cf. [Roe81]) sont rappelés. Le schéma de Godunov est basé sur la résolution exacte du problème de Riemann associé au système pour chaque interface entre deux cellules et nécessite de savoir résoudre analytiquement le problème de Riemann monodimensionnel associé au système. C'est le schéma de référence puisqu'il consiste en la projection de la solution exacte à l'interface, mais il est très pénalisant en coût calcul car il se ramène à la résolution à chaque interface d'un système non linéaire. De plus, comme il dépend du fait que l'on sache résoudre le problème de Riemann exact monodimensionnel associé au système, il est souvent difficile voire impossible à mettre en œuvre et est assez peu utilisé. Le schéma de Roe est, quant à lui, basé sur la résolution du problème de Riemann linéarisé localement et nécessite de trouver une moyenne permettant de satisfaire des critères de consistance ce qui peut être délicat. Ces solveurs se limitent au cadre des systèmes conservatifs inconditionnellement hyperboliques et sont, dans le cas général, difficiles voire impossibles à mettre en œuvre. On présente un schéma introduit dans [Gal96b] et [Mas96], appelé vfRoe, qui permet de résoudre le problème de Riemann associé à un système conservatif inconditionnellement hyperbolique notamment dans les cas où l'on ne peut pas mettre en œuvre les solveurs de Godunov ou de Roe. On décrit ensuite une variante du schéma vfRoe qui présente les mêmes avantages que ce dernier et permet en outre de résoudre le système considéré en conservant explicitement (par construction) des propriétés du système continu (Cf. [Buf96] et [Buf97a]). On regarde ensuite une méthode de résolution à pas fractionnaires ; on s'appuie sur les travaux décrits dans [Buf93a], [Buf93b] et [Buf97] qui consistent en l'étude d'un splitting de flux du système d'Euler. En vue du chapitre 4, on étudie, sur le même principe, un splitting de flux du système d'Euler isentropique. Des tests de type tubes à choc sont présentés, les résultats et la convergence en norme  $L^1$  sont comparés avec ceux du schéma

de Godunov (Cf. l'annexe A). Cette technique permet notamment, comme on le verra dans le chapitre 4, d'étendre les schémas précédemment présentés au cadre des systèmes conservatifs conditionnellement hyperboliques. Dans une dernière partie, on regarde plusieurs extensions possibles de ces différentes méthodes au cadre des systèmes non conservatifs. Plus précisément, on rappelle les travaux décrits dans [Lef88], [Lef92b], [Dal95] et [Sai95a] pour l'analyse théorique des systèmes hyperboliques non conservatifs puis on expose différentes méthodes pour leur résolution numérique, issues de la littérature (Cf. [EIA97], [Her95a], [Mas97], [Lou95], [Sai95b] et [Tou96]).

On se restreint à l'exposé de schémas à l'ordre 1 en temps et en espace. Les techniques les plus connues de construction de schémas à l'ordre 2 en espace sont notamment exposés dans [Swe84] et [Van77].

### 3.1 Une approche en maillage non structuré pour des formulations colocalisées de type volumes finis

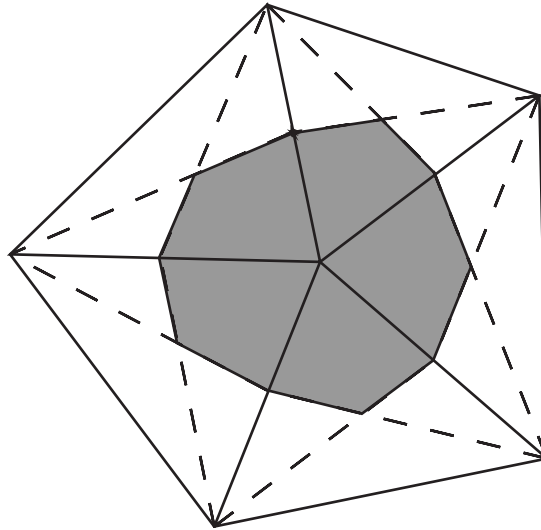


FIG. 3.1 – Cellule volume fini de type INRIA en 2D non structuré

On présente, dans le cas bidimensionnel, une discrétisation spatiale sur maillage non structuré, approche dite de type INRIA (Cf. [Fez89]).

Le domaine de l'écoulement  $D$  est supposé être un domaine borné polygonal de  $\mathbb{R}^2$ . On définit le maillage  $D_h$  approchant le domaine de calcul  $D$ . Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation standard de  $D$  avec  $h$  la longueur maximum des arêtes des triangles. L'ensemble des triangles  $T \in \mathcal{T}_h$  forme un recouvrement de  $D_h$  :

$$D_h = \cup_{j=1}^{N_T} T_j, \quad T_j \in \mathcal{T}_h$$

où  $N_T$  désigne le nombre d'éléments de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ .

Soit  $S_i$  un des sommets d'un triangle  $T$  de  $\mathcal{T}_h$  et  $K(i)$  l'ensemble des triangles admettant  $S_i$  comme sommet. La méthode consiste en la définition d'un maillage dual de  $D_h$ . Celui-ci est formé de cellules de contrôle  $C_i$ , construites pour chaque nœud de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . Chaque cellule  $C_i$  (en grisé sur la figure [3.1]) est définie en joignant successivement les centres de gravité des triangles  $T \in K(i)$  et les milieux des arêtes aboutissant en  $S_i$ . L'ensemble des cellules  $C_i$  forme un autre recouvrement de  $D_h$  :

$$D_h = \cup_{i=1}^{N_s} C_i$$

où  $N_s$  désigne le nombre de sommets  $S_i$  (qui est donc égal au nombre de cellules  $C_i$ ).

### 3.2 Formulation volumes finis sur maillage non structuré pour un système conservatif hyperbolique

On effectue ici la présentation de la méthode volumes finis pour un système conservatif hyperbolique possédant la propriété d'invariance par rotation.

On cherche  $\underline{W}(\underline{x}, t)$  solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}_x(\underline{W}) + \frac{\partial}{\partial y} \underline{F}_y(\underline{W}) = \underline{0} & \forall (\underline{x} = (x, y), t) \in D \times \mathbb{R}^+ \\ \underline{W}((x, y), 0) = \underline{W}_0(x, y) & \forall (x, y) \in D \end{cases} \quad (3.1)$$

$\underline{F}_x$  et  $\underline{F}_y$  désignant respectivement les flux suivant les directions spatiales  $x$  et  $y$ .

Soit  $C_i$  une cellule du maillage  $D_h$ . On note  $\partial C_i$  la frontière de la cellule  $C_i$  et  $\underline{n}^t = (n_x, n_y)$  le vecteur normal extérieur unitaire à  $C_i$ .

Soit  $\underline{W}_h$  la solution approchée du problème (3.1). Sur chaque cellule  $C_i$ , on intègre le système (3.1) :

$$\int_{C_i} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \underline{W}_h + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}_x(\underline{W}_h) + \frac{\partial}{\partial y} \underline{F}_y(\underline{W}_h) \right\} dx dy = \underline{0}$$

On applique la formule de Green :

$$\int_{C_i} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W}_h dx dy + \int_{\partial C_i} \{ n_x \underline{F}_x(\underline{W}_h) + n_y \underline{F}_y(\underline{W}_h) \} d\sigma = \underline{0}$$

Ce qui revient à :

$$\int_{C_i} \frac{\partial}{\partial t} W_h \, dx \, dy + \int_{\partial C_i} \mathcal{F}(W_h, \underline{n}) \, d\sigma = \underline{0} \quad (3.2)$$

avec la notation  $\mathcal{F}(W, \underline{n}) = n_x F_x(W) + n_y F_y(W)$ .

### 3.2.1 Schéma en temps

On réécrit l'équation (3.2) sous la forme :

$$\int_{C_i} \frac{\partial}{\partial t} W_h \, dx \, dy = - \int_{\partial C_i} \mathcal{F}(W_h, \underline{n}) \, d\sigma$$

Or, pour un maillage fixe en temps, on a l'égalité suivante :

$$\int_{C_i} \frac{\partial}{\partial t} W_h \, dx \, dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_{C_i} W_h \, dx \, dy$$

On définit la valeur moyenne par élément  $C_i$  à tout instant  $t$  par :

$$\underline{W}(C_i, t) = \frac{1}{|C_i|} \int_{C_i} W_h(x, t) \, dx \, dy$$

où  $|C_i|$  désigne le volume de la cellule  $C_i$ . Ce qui implique, lorsqu'on applique un schéma en temps d'ordre 1 de type Euler explicite :

$$\underline{W}_i^{n+1} = \underline{W}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left( \int_{\partial C_i} \mathcal{F}(W_h, \underline{n}) \, d\sigma \right)^n \quad (3.3)$$

$\Delta t$  désignant le pas de temps à la  $n^{\text{ième}}$  itération, l'exposant  $n$  indiquant que le terme est calculé à l'instant  $t^n$ ,  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  et  $\underline{W}_i^n$  désignant la valeur approchée de  $\underline{W}(C_i, t^n)$ , c'est à dire une moyenne de  $\underline{W}_h$  sur la cellule  $C_i$  au temps  $t^n$ .

### 3.2.2 Calcul des flux

Soit  $C_i$  la cellule centrée sur le sommet  $S_i$ , et  $K(i)$  l'ensemble des sommets voisins de  $S_i$ . On définit alors  $\partial C_{ij} = \partial C_i \cap \partial C_j$  ; par définition du maillage, on a l'équivalence suivante :

$$\partial C_{ij} \neq \emptyset, \, i \neq j \iff S_j \in K(i)$$

On définit également la frontière du domaine  $D_h$  :

$$\Gamma_h = \partial D_h = \Gamma_{paroi} \cup \Gamma_\infty$$

où  $\Gamma_{paroi}$  désigne la paroi solide et  $\Gamma_\infty$  la frontière fluide du domaine.

Le flux  $\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_h, \underline{n})$  se décompose respectivement en un flux interne, un flux à la paroi et un flux à la frontière entrée-sortie :

$$\begin{aligned} \int_{\partial C_i} \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_h, \underline{n}) d\sigma &= \sum_{j \in K(i)} \int_{\partial C_{ij}} \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_h, \underline{n}) d\sigma \\ &+ \int_{\partial C_i \cap \Gamma_{paroi}} \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_h, \underline{n}) d\sigma + \int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_h, \underline{n}) d\sigma \end{aligned}$$

Dans un premier temps, on s'intéressera uniquement au traitement du terme de flux interne.

### 3.3 Schéma de Godunov

Ce schéma, introduit par Godunov dans [God59], s'appuie sur la résolution exacte de problèmes de Riemann locaux. On se place tout d'abord dans le cadre monodimensionnel en espace. On veut résoudre le système de lois de conservation hyperbolique non linéaire suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}(\underline{W}) = \underline{0}, \quad \underline{W} = \underline{W}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^{+*} \quad (3.4)$$

où  $\underline{F}$  est un vecteur de fonctions continues dans l'espace des états physiquement admissibles, avec les conditions initiales :

$$\underline{W}(x, 0) = \begin{cases} \underline{W}_L & \text{si } x < 0 \\ \underline{W}_R & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.5)$$

La solution du problème de Riemann (3.4,3.5) dépend des états  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$  et du rapport  $x/t$  (Cf. chapitre 2) ; on la note  $\underline{W}(x/t; \underline{W}_L, \underline{W}_R)$ .

On considère un maillage régulier 1D de pas de discrétisation  $h$ , chaque cellule  $C_j$  étant définie par l'intervalle  $[j h, (j + 1) h]$  et centrée sur le point  $x_j$  de coordonnée  $(j + 1/2)h$ . Le schéma de Godunov est construit en approximant  $\underline{W}$  par une fonction  $\underline{W}_h$  constante par morceaux sur chaque maille  $C_j$  à des valeurs discrètes du temps physique  $t^n$ ,  $n=0,1,\dots$  :

$$\underline{W}_h(x, t^n) = \underline{W}_j^n \quad \forall x \in C_j$$

Pour calculer l'approximation de  $\underline{W}$  au temps  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ , on doit donc résoudre le problème aux valeurs initiales suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} F(\underline{W}) = \underline{0}, & x \in \mathbb{R}, \quad t^n \leq t \leq t^n + \Delta t \\ \underline{W}(x, t^n) = \underline{W}_h(x, t^n), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.6)$$

On note  $\underline{W}_e(x, t)$  la solution de (3.6). Chaque discontinuité de  $\underline{W}_h(x, t^n)$  nécessite la résolution d'un problème de Riemann local.

Si  $\Delta t$  est déterminé par la condition de Courant-Friedrich-Levy (CFL) :

$$\frac{\Delta t}{h} |a| < \frac{1}{2} \quad (3.7)$$

où  $a$  désigne la vitesse maximum du signal, alors il n'y a aucune interaction entre deux problèmes de Riemann voisins et  $\underline{W}_e(x, t)$  s'exprime exactement en termes de solutions de problèmes de Riemann locaux :

$$\underline{W}_e(x, t) = \underline{W} \left( \frac{x - (x_j + h/2)}{t - t^n}; \underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n \right) \quad \text{pour } x_j < x < x_{j+1} \text{ et } t^n \leq t \leq t^{n+1}$$

On obtient une approximation  $\underline{W}_h(x, t^{n+1})$  constante par morceaux en moyennant  $\underline{W}_e(x, t^{n+1})$  sur chaque cellule  $C_j$  par une projection  $L_2$  dans l'espace des fonctions constantes par morceaux :

$$\underline{W}_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{C_j} \underline{W}_e(x, t^{n+1}) dx$$

Ce qui peut se réécrire comme la somme de solutions de problèmes de Riemann locaux :

$$\begin{aligned} \underline{W}_j^{n+1} &= \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_j+h/2} \underline{W} \left( \frac{x - (x_j + h/2)}{\Delta t}; \underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n \right) dx \\ &+ \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j} \underline{W} \left( \frac{x - (x_j - h/2)}{\Delta t}; \underline{W}_{j-1}^n, \underline{W}_j^n \right) dx \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $\underline{W}(\frac{x-(x_j+h/2)}{\Delta t}; \underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$  représente la solution exacte du problème de Riemann à l'interface (de coordonnée  $x_j + h/2$ ) entre les cellules  $C_j$  et  $C_{j+1}$  au temps physique  $t^{n+1}$ .

La forme conservative du schéma (3.8) s'obtient en intégrant la solution exacte sur chaque volume  $C_j \times [t^n, t^{n+1}]$ :

$$\underline{W}_j^{n+1} = \underline{W}_j^n - \frac{\Delta t}{h} \{ \underline{F}(\underline{W}(0; \underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)) - \underline{F}(\underline{W}(0; \underline{W}_{j-1}^n, \underline{W}_j^n)) \} \quad (3.9)$$

On considère donc le flux analytique  $\underline{F}$  pris en les valeurs de  $\underline{W}$  aux interfaces entre la cellule  $C_j$  et les cellules voisines  $C_{j-1}$  et  $C_{j+1}$ ; ces valeurs s'obtiennent en résolvant exactement (Cf. le chapitre 2) le problème de Riemann associé à chaque interface (Cf. figure [3.2]).

Le schéma de Godunov satisfait la condition d'entropie :

$$\int_{C_j} \eta(\underline{W}_e(x, t^{n+1})) dx \leq h \eta(\underline{W}_j^n) - \Delta t F_\eta(\underline{W}(0; \underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)) + \Delta t F_\eta(\underline{W}(0; \underline{W}_{j-1}^n, \underline{W}_j^n)) \quad (3.10)$$

où  $(\eta(\underline{W}), F_\eta(\underline{W}))$  désigne un couple entropie-flux d'entropie du système (3.4). Ceci implique (Cf. [Dip83]) que, pour des conditions initiales données, le schéma de Godunov converge vers une solution physiquement admissible du système (3.4).

**Proposition 3.1** *Etant donné un état initial  $\underline{W}_j^n$  faisant partie des états physiquement admissibles. Si le vide n'apparaît pas dans la solution exacte du problème de Riemann aux interfaces avec les cellules  $C_{j-1}$  et  $C_{j+1}$ , alors la valeur de  $\underline{W}_j^{n+1}$  calculée par le schéma (3.9) reste dans l'espace des états admissibles. On dit que le schéma de Godunov conserve la positivité.*

*Démonstration.* Cf. [Ein91].

**Remarque 3.1** *Cette propriété du schéma de Godunov n'est valable qu'en dimension un d'espace.*

**Remarque 3.2** *Cette propriété n'est pas vérifiée, en une dimension d'espace, par les schémas linéarisés présentés ultérieurement.*

On considère par exemple le système de la dynamique des gaz avec une loi d'état de gaz parfait. La variable d'état conservative du système est  $\underline{W}^t = (\rho, \rho u, e)$  où  $\rho$  désigne la densité,  $u$  la vitesse et  $e$  l'énergie totale. On définit l'espace des états physiquement admissibles  $\Omega = \{ \underline{W} \mid \rho > 0 \text{ et } \epsilon > 0 \}$  avec  $\epsilon = 2\rho e - (\rho u)^2$  l'énergie interne. Le schéma de Godunov assure que l'état calculé  $\underline{W}_j^{n+1}$ , à partir d'un état initial  $\underline{W}_j^n$  de  $\Omega$ , reste lui-même dans  $\Omega$  (sous réserve que le vide n'apparaisse pas dans la solution exacte des problèmes de Riemann  $\underline{W}(\frac{x-(x_j+h/2)}{t-t^n}; \underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$  et  $\underline{W}(\frac{x-(x_j-h/2)}{t-t^n}; \underline{W}_{j-1}^n, \underline{W}_j^n)$ ).

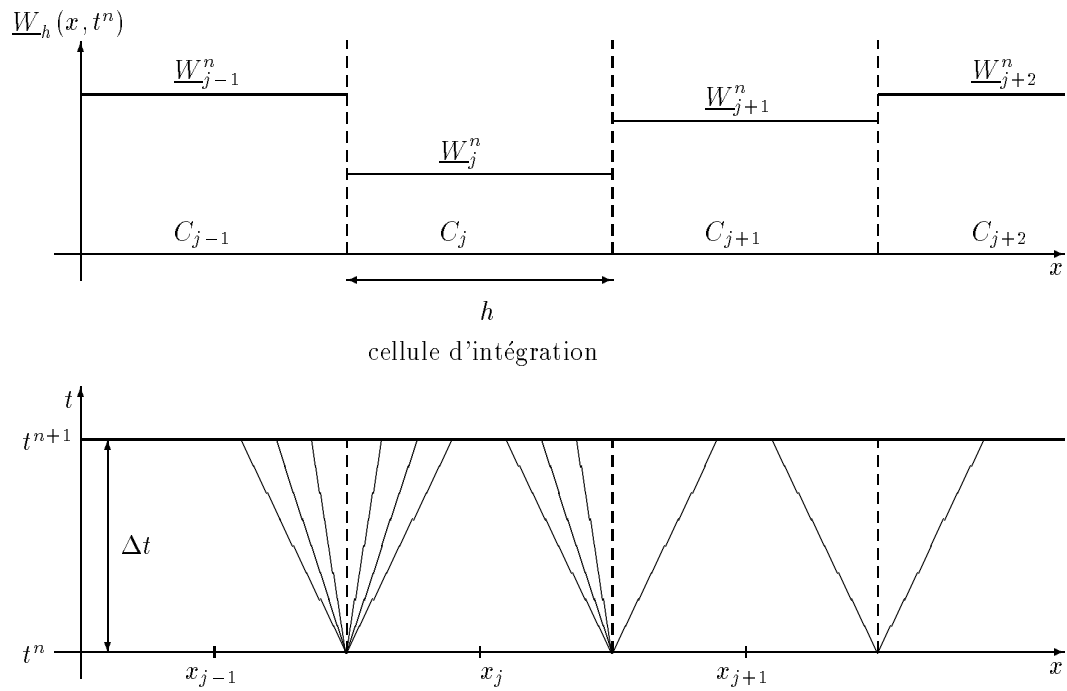


FIG. 3.2 – Représentation du schéma de Godunov en termes de résolution de problèmes de Riemann locaux : conditions initiales au temps  $t^n$  et développement des ondes à chaque interface entre les cellules (et sans interaction) jusqu'au temps  $t^{n+1}$ .



On présente maintenant une extension du schéma de Godunov au cadre bidimensionnel. On considère le système suivant invariant par rotation, constitué de  $p$  lois de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}_x(\underline{W}) + \frac{\partial}{\partial y} \underline{F}_y(\underline{W}) = \underline{0}, \quad \underline{W} = \underline{W}((x, y), t), \quad (x, y) \in D, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

où  $\underline{F}_x(\underline{W})$  et  $\underline{F}_y(\underline{W})$  désignent les fonctions de flux, suffisamment régulières, associées aux directions spatiales  $x$  et  $y$ . On résout le problème de Riemann à l'interface entre deux cellules adjacentes  $C_i$  et  $C_j$  séparant deux états constants  $\underline{W}_i^n$  et  $\underline{W}_j^n$  de  $\Omega$ ; on note  $\underline{n}_{ji} = (n_x, n_y)^t$  le vecteur normal unitaire à la discontinuité et extérieur à  $C_j$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial \xi} \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}_{ji}) = \underline{0} \\ \underline{W}(\xi, t^n) = \begin{cases} \underline{W}_j^n & \text{si } \xi < 0 \\ \underline{W}_i^n & \text{si } \xi \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

où  $\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}_{ji}) = n_x \underline{F}_x(\underline{W}) + n_y \underline{F}_y(\underline{W})$  désigne le flux physique dans la direction  $\underline{n}_{ji}$  (la contribution dans la direction tangente à l'interface étant supposée nulle) et  $\xi$  la variable spatiale dont la direction est portée par la normale  $\underline{n}_{ji}$  à l'interface. Le schéma de Godunov s'écrit :

$$\underline{W}_j^{n+1} = \underline{W}_j^n - \sum_{i \in V(j)} \frac{\Delta t}{|C_j|} \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}(0; \underline{W}_j^n, \underline{W}_i^n), \underline{n}_{ji}) \quad (3.11)$$

où  $V(j)$  caractérise l'ensemble des cellules  $C_i$  adjacentes à  $C_j$ .

**Remarque 3.3** Dans le cadre multidimensionnel, on perd la convergence du schéma de Godunov. On ne peut pas prouver que, pour une même cellule, la résolution de deux problèmes de Riemann, situés à des interfaces ayant un sommet en commun, n'interagissent pas. La condition CFL (3.7) ne s'étend pas au cadre multidimensionnel.

On trouve dans l'annexe A un exemple de mise en œuvre du solveur de Godunov pour la résolution du système de la dynamique des gaz isentropique dans un cadre purement monodimensionnel avec un traitement à part des configurations où le vide apparaît. Plusieurs cas tests sont présentés : tests de tube à choc avec forts rapports de pression, tests de double détente sans apparition du vide dans la solution et tests de double choc forts. Les courbes de comparaison des simulations avec la solution exacte sont bonnes mais deux problèmes non résolus sont mis en évidence :

- Le comportement de l'algorithme dans la configuration de double détente proche du vide. Le vide apparaît dans la solution alors qu'il ne le devrait pas au vu des conditions initiales. Les problèmes semblent donc apparaître au voisinage du vide, i.e. quand la densité intermédiaire tend vers zéro. On dispose de peu de références dans ce domaine, néanmoins, le lecteur intéressé pourra se reporter aux articles [Ein91] et [Mun94].

- On constate d'autre part la présence d'oscillations «stables» dans les doubles chocs importants.

Le principal inconvénient du schéma de Godunov réside dans le fait qu'il nécessite la construction de la solution exacte du problème de Riemann, ce qui est en pratique très difficile voire impossible. De plus, du fait que la solution est moyennée sur chaque cellule, on n'utilise pas toute l'information contenue dans la solution exacte du problème de Riemann ; seule la solution aux interfaces est retenue. Enfin, quand on peut le mettre en œuvre, il conduit souvent à l'utilisation de techniques de type Newton pour inverser la fonction résolvente non linéaire, ce qui pénalise fortement le coût calcul. Ceci a incité plusieurs auteurs à développer des schémas basés sur des solveurs de Riemann approchés. Ces schémas sont appelés schémas de type Godunov et sont présentés ci-dessous.

### 3.4 Schémas de type Godunov

Ces schémas ont été introduits dans [Osh84] et [Har83b]. On considère un maillage régulier 1D de pas de discrétisation  $h$ , chaque cellule  $C_j$  est définie par l'intervalle  $[j h, (j + 1) h]$  et centrée sur le point  $x_j$  de coordonnée  $(j + 1/2)h$ .

On considère le problème de Riemann suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} F(\underline{W}) = \underline{0}, \quad \underline{W} = \underline{W}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t^n \leq t \leq t^{n+1} \quad (3.12a)$$

$$\underline{W}(x, t^n) = \underline{W}_j^n, \quad x \in C_j \quad (3.12b)$$

où  $F(\underline{W})$  est un vecteur de fonctions continues dans l'espace des états physiquement admissibles et  $\underline{W}_j^n$  la moyenne de la variable  $\underline{W}$  sur la cellule  $C_j$  au temps  $t^n$ . Un schéma de type Godunov s'obtient par une projection  $L_2$  d'une solution approchée  $\underline{W}_{app}$  de (3.12) dans l'espace des fonctions constantes par cellules et s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \underline{W}_j^{n+1} &= \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_j+h/2} \underline{W}_{app} \left( \frac{x - (x_j + h/2)}{\Delta t}; \underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n \right) dx \\ &+ \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j} \underline{W}_{app} \left( \frac{x - (x_j - h/2)}{\Delta t}; \underline{W}_{j-1}^n, \underline{W}_j^n \right) dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

Cette approche ne nous donne pas de façon immédiate une forme conservative telle que celle que l'on obtient par un schéma de Godunov (voir l'équation (3.9)). En effet, du fait que l'on considère une solution approchée  $\underline{W}_{app}$ , on ne peut plus intégrer les lois de conservation du système (3.12a) sur chaque cellule. Pour obtenir une formulation conservative, on a besoin de satisfaire une relation de consistance avec la forme intégrale des lois de conservation (3.12a) :

$$\begin{aligned}
& \int_{x_j}^{x_{j+1}} W_{app} \left( \frac{x - (x_j + h/2)}{\Delta t}; W_j^n, W_{j+1}^n \right) dx \\
&= \frac{h}{2} (W_j^n + W_{j+1}^n) - \Delta t (F(W_{j+1}^n) - F(W_j^n))
\end{aligned} \tag{3.14}$$

si la condition CFL (3.7) est respectée ; ce qui permet de définir le flux numérique que l'on va associer au schéma. On obtient de plus un résultat de convergence vers la solution physique si le schéma est consistant avec la forme intégrale de la condition d'entropie, qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \int_{x_j}^{x_{j+1}} \eta \left( W_{app} \left( \frac{x - (x_j + h/2)}{\Delta t}; W_j^n, W_{j+1}^n \right) \right) dx \\
& \leq \frac{h}{2} (\eta(W_j^n) + \eta(W_{j+1}^n)) - \Delta t (F_\eta(W_{j+1}^n) - F_\eta(W_j^n))
\end{aligned} \tag{3.15}$$

où  $(\eta, F_\eta)$  désigne un couple entropie-flux d'entropie associé au système (3.12a). Ces principes sont détaillés dans [Har83b]. Le schéma est alors de la forme :

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{h} \{ \mathbb{F}(W_j^n, W_{j+1}^n) - \mathbb{F}(W_{j-1}^n, W_j^n) \}$$

avec le flux numérique :

$$\mathbb{F}(W_j^n, W_{j+1}^n) = \begin{cases} \frac{F(W_j^n) - \frac{1}{\Delta t} \int_{x_j}^{x_j+h/2} W_{app} \left( \frac{x - (x_j + h/2)}{\Delta t}; W_j^n, W_{j+1}^n \right) dx}{\frac{h}{2\Delta t}} W_j^n \\ \frac{F(W_{j+1}^n) + \frac{1}{\Delta t} \int_{x_j+h/2}^{x_{j+1}} W_{app} \left( \frac{x - (x_j + h/2)}{\Delta t}; W_j^n, W_{j+1}^n \right) dx}{\frac{h}{2\Delta t}} W_{j+1}^n \end{cases}$$

### 3.5 Schéma de Roe

Le solveur de Riemann le plus populaire est le schéma de Roe. La présentation originale de Roe, Cf. [Roe81], concerne le système inconditionnellement hyperbolique de la dynamique des gaz parfaits et l'on doit l'extension de ce schéma au cadre de systèmes hyperboliques quelconques à Harten (Cf. [Har83a]). Ce n'est pas un schéma de type Godunov car il n'est pas consistant avec l'inégalité d'entropie (3.15). On se place tout d'abord dans le cadre monodimensionnel en espace. On considère un maillage régulier de pas de discrétisation  $h$ , chaque cellule  $C_j$  étant représentée par l'intervalle  $[jh, (j+1)h]$  et centrée sur le point  $x_j$  de coordonnée  $(j+1/2)h$ . On veut résoudre, à l'interface entre deux cellules  $C_j$  et  $C_{j+1}$ , le problème de Riemann suivant d'un système de  $p$  lois de conservation hyperbolique non linéaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}(\underline{W}) = \underline{0} \\ \underline{W}(x, t^n) = \begin{cases} \underline{W}_j^n & \text{si } x \in C_j \\ \underline{W}_{j+1}^n & \text{si } x \in C_{j+1} \end{cases} \end{cases} \quad (3.16)$$

où  $\underline{F}$  est un vecteur de fonctions continues dans l'espace des états physiquement admissibles et  $\underline{W}_j^n$  la moyenne de la variable  $\underline{W}$  sur la cellule  $C_j$  au temps  $t^n$ . Le principe du solveur de Roe est de remplacer la résolution du problème de Riemann (3.16) du système non linéaire par la résolution d'un problème de Riemann d'un système linéarisé :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{\tilde{A}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} = \underline{0} \\ \underline{W}(x, t^n) = \begin{cases} \underline{W}_j^n & \text{si } x \in C_j \\ \underline{W}_{j+1}^n & \text{si } x \in C_{j+1} \end{cases} \end{cases} \quad (3.17)$$

La matrice  $\underline{\tilde{A}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$ , à déterminer, représente localement une matrice linéarisée de la Jacobienne du flux  $\underline{\tilde{A}}(\underline{W}) = \nabla_{\underline{W}} \underline{F}(\underline{W})$ . Harten dans [Har83a] définit les critères à respecter pour le choix de cette dernière :

**Définition 3.1** *Le système (3.16) peut être linéarisé au sens de Roe si, pour tout  $\underline{W}_j^n$  et  $\underline{W}_{j+1}^n$  de l'espace des états admissibles, il existe  $\underline{\tilde{A}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$  telle que :*

- (i)  $[\underline{F}(\underline{W})]_{j,j+1}^n = \underline{\tilde{A}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) \cdot [\underline{W}]_{j,j+1}^n$
- (ii)  $\underline{\tilde{A}}(\underline{W}, \underline{W}) = \nabla_{\underline{W}} \underline{F}(\underline{W})$
- (iii)  $\underline{\tilde{A}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$  a des valeurs propres réelles et les vecteurs propres associés engendrent  $\mathbb{R}^p$ .

avec la notation  $[\underline{W}]_{j,j+1}^n = \underline{W}_{j+1}^n - \underline{W}_j^n$ .

La condition (i) correspond au respect de la consistance du système (3.17) avec la forme intégrale du système (3.16). En effet, la forme intégrale associée au problème non linéaire (3.16) s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}(\underline{W}) \right\} dx dt \\ &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \{ \underline{W}(x, t^{n+1}) - \underline{W}(x, t^n) \} dx + \Delta t (\underline{F}(\underline{W}_{j+1}^n) - \underline{F}(\underline{W}_j^n)) \end{aligned}$$

et celle associée au problème linéarisé (3.17) :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left\{ \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{\tilde{A}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} \right\} dx dt \\ &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \{ \underline{W}_{Roe}(x, t^{n+1}) - \underline{W}(x, t^n) \} dx + \Delta t \underline{\tilde{A}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) (\underline{W}_{j+1}^n - \underline{W}_j^n) \end{aligned}$$

où  $\underline{W}_{Roe}$  désigne la solution approchée par le solveur de Roe du problème linéarisé (3.17) et  $\Delta t$  le pas de temps tel que  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ . La consistance entre ces deux formes intégrales se traduit par la condition (i). La condition (iii) entraîne que tout vecteur d'état  $\underline{W}$  peut se décomposer dans la base des vecteurs propres de la matrice de Roe  $\underline{\tilde{A}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$ .

On peut alors résoudre exactement le problème linéarisé (3.17). Soient  $\lambda_1 = \lambda_1(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) < \dots < \lambda_p = \lambda_p(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$  les valeurs propres ordonnées de la matrice  $\underline{\tilde{A}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$  et  $\underline{r}_k = \underline{r}_k(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$ ,  $k = 1, \dots, p$  les vecteurs propres à droite associés. La solution exacte du problème de Riemann (3.17) est composée d'une succession d'états  $\underline{W}_k = \underline{W}_k(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$ ,  $k = 0, \dots, p$  constants séparés par des discontinuités de contact (Cf. la figure [3.3]), elle est donnée par :

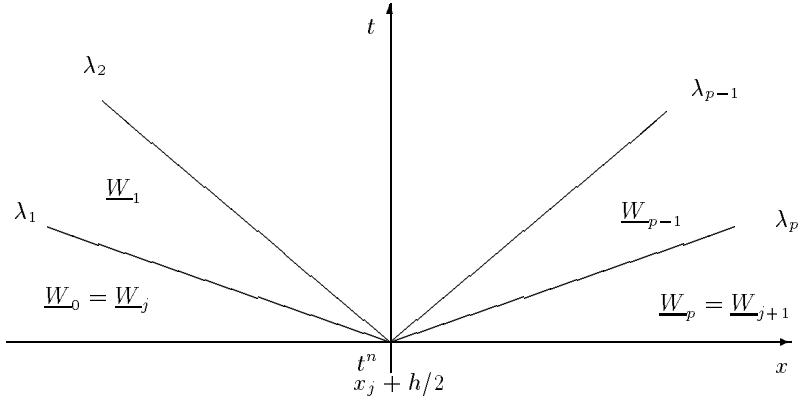
$$\underline{W}_{Roe}(x, t) = \begin{cases} \underline{W}_0 = \underline{W}_j^n & \text{si } x/t < \lambda_1 \\ \underline{W}_1 & \text{si } \lambda_1 < x/t < \lambda_2 \\ \dots & \\ \underline{W}_{p-1} & \text{si } \lambda_{p-1} < x/t < \lambda_p \\ \underline{W}_p = \underline{W}_{j+1}^n & \text{si } \lambda_p < x/t \end{cases} \begin{array}{l} \text{pour} \\ x_j < x < x_{j+1} \\ \text{et} \\ t^n \leq t \leq t^{n+1} \end{array}$$

On déduit des relations de Rankine-Hugoniot, valables à chaque discontinuité de contact, que  $[\underline{W}]_{k-1, k}$ ,  $k = 1, \dots, p$ , est vecteur propre à droite de la matrice  $\underline{\tilde{A}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$ . Le calcul des états intermédiaires est donc immédiat :

$$\underline{W}_k = \underline{W}_j^n + \sum_{l=1}^k \alpha_l \underline{r}_l \quad k = 1, \dots, p$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  sont des réels entièrement déterminés par la relation :

$$\underline{W}_{j+1}^n - \underline{W}_j^n = \sum_{l=1}^p \alpha_l \underline{r}_l$$

FIG. 3.3 – Représentation dans le plan  $(x, t)$  de la solution d'un problème de Riemann linéarisé.

Le problème consiste alors en la détermination de la linéarisée de Roe, en la résolution du système approché linéaire (3.17) et enfin en la construction du flux et du schéma de Roe.

On rappelle tout d'abord un résultat dû à Harten :

**Proposition 3.2** *Si le système associé à (3.16) admet une entropie, alors il admet une linéarisée de Roe.*

*Démonstration Cf. [Har83a].*

Ce résultat assure l'existence mais ne fournit pas un moyen de détermination de la matrice de Roe, en outre, il n'y a pas unicité de la matrice de Roe. Une technique de construction de la linéarisée de Roe  $\underline{\tilde{A}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$  est de l'assimiler à la Jacobienne  $\underline{A}(\underline{W}) = \nabla_{\underline{W}} \underline{F}(\underline{W})$  du système prise en un état moyen  $\underline{\tilde{W}}$  dépendant des états  $\underline{W}_j^n$  et  $\underline{W}_{j+1}^n$ , de sorte que :

$$\underline{\tilde{A}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) = \underline{A}(\underline{\tilde{W}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n))$$

Dans ce cas (ii) et (iii) sont automatiquement vérifiées. On introduit, pour simplifier, la notation  $\underline{\tilde{W}}_{j,j+1}^n = \underline{\tilde{W}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$ .

En se plaçant sur la cellule  $C_j$  délimitée à droite et à gauche par les interfaces avec les cellules  $C_{j-1}$  et  $C_{j+1}$ , on peut projeter la juxtaposition des deux solutions  $\underline{W}_{Roe}$  du problème (3.17) aux deux interfaces, sous le respect de la condition CFL qui assure la non interaction des ondes :

$$\begin{aligned} \underline{W}_j^{n+1} &= \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_j+h/2} \underline{W}_{Roe} \left( \frac{x - (x_j + h/2)}{\Delta t}; \underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n \right) dx \\ &+ \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j} \underline{W}_{Roe} \left( \frac{x - (x_j - h/2)}{\Delta t}; \underline{W}_{j-1}^n, \underline{W}_j^n \right) dx \end{aligned} \quad (3.18)$$

qui peut encore s'écrire :

$$\underline{W}_j^{n+1} = \underline{W}_j^n - \frac{\Delta t}{h} \{ \underline{\mathbb{F}}_{Roe}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) - \underline{\mathbb{F}}_{Roe}(\underline{W}_{j-1}^n, \underline{W}_j^n) \} \quad (3.19)$$

Le flux numérique  $\underline{\mathbb{F}}_{Roe}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$  de Roe est consistant et défini par :

$$\underline{\mathbb{F}}_{Roe}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) = \underline{F}(\underline{W}_j^n) - \frac{1}{\Delta t} \int_{x_j}^{x_j+h/2} \underline{W}_{Roe} \left( \frac{x - (x_j + h/2)}{\Delta t}; \underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n \right) + \frac{h}{2 \Delta t} \underline{W}_j^n$$

En décomposant la solution  $\underline{W}_{Roe} \left( \frac{x - (x_j + h/2)}{\Delta t}; \underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n \right)$  sur chacun des états intermédiaires, on peut écrire le flux de Roe des trois manières différentes équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{F}}_{Roe}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) &= \underline{F}(\underline{W}_j^n) + \underline{A}^- (\tilde{\underline{W}}_{j,j+1}^n) \cdot [\underline{W}]_{j,j+1}^n \\ &= \underline{F}(\underline{W}_{j+1}^n) - \underline{A}^+ (\tilde{\underline{W}}_{j,j+1}^n) \cdot [\underline{W}]_{j,j+1}^n \\ &= \frac{1}{2} \{ \underline{F}(\underline{W}_j^n) + \underline{F}(\underline{W}_{j+1}^n) \} - \frac{1}{2} \left| \underline{A}(\tilde{\underline{W}}_{j,j+1}^n) \right| \cdot [\underline{W}]_{j,j+1}^n \end{aligned}$$

avec les notations  $\underline{A} = \underline{P} \underline{D} \underline{P}^{-1}$ ,  $\underline{A}^+ = \frac{1}{2} \{ \underline{A} + |\underline{A}| \}$ ,  $\underline{A}^- = \frac{1}{2} \{ \underline{A} - |\underline{A}| \}$  et  $|\underline{A}| = \underline{P} |\underline{D}| \underline{P}^{-1}$  où  $\underline{P}$  désigne la matrice des vecteurs propres à droite et  $\underline{D}$  la matrice diagonale des valeurs propres de  $\underline{A}$ .

**Remarque 3.4** *Le schéma de Roe, comme d'autres schémas basés sur la résolution de problèmes de Riemann locaux, nécessite une correction entropique du fait de l'apparition d'une solution non entropique dans les champs vraiment non linéaires.*

Sous l'hypothèse d'invariance par rotation du système non linéaire, le schéma de Roe s'étend naturellement au cadre bidimensionnel non structuré. Supposons que l'on veuille résoudre le problème de Cauchy bidimensionnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}_x(\underline{W}) + \frac{\partial}{\partial y} \underline{F}_y(\underline{W}) = \underline{0} \\ \underline{W}((x, y), t^n) = \begin{cases} \underline{W}_i^n & \text{si } (x, y) \in C_i \\ \underline{W}_j^n & \text{si } (x, y) \in C_j \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

où  $\underline{F}_x$  et  $\underline{F}_y$  désignent les fonctions de flux associées aux directions  $x$  et  $y$ , suffisamment régulières de l'espace des états dans  $\mathbb{R}^p$ ,  $C_i$  et  $C_j$  deux cellules adjacentes et  $\underline{W}_i^n$  la valeur

moyenne de la variable  $\underline{W}$  sur la cellule  $C_i$  au temps  $t^n$ . Soit  $\underline{n}_{ij} = (n_x, n_y)^t$  le vecteur normal à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ , extérieur à  $C_i$ . Sous l'hypothèse d'invariance par rotation, on projette le système dans la direction portée par  $\underline{n}_{ij} = (n_x, n_y)^t$ , et résoudre le problème de Riemann (3.20) revient à résoudre le problème de Riemann monodimensionnel suivant, écrit dans le repère local  $(\xi, \underline{n}_{ij})$  orthogonal à l'interface :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(\underline{W}, \underline{n}_{ij}) = \underline{0} \\ \underline{W}(\xi, t^n) = \begin{cases} \underline{W}_i^n & \text{si } \xi < 0 \\ \underline{W}_j^n & \text{si } \xi \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

avec le flux associé à la direction  $\underline{n}_{ij}$ ,  $\mathcal{F}(\underline{W}, \underline{n}_{ij}) = n_x \underline{F}_x(\underline{W}) + n_y \underline{F}_y(\underline{W})$ . Le solveur de Roe remplace la résolution de ce problème de Riemann monodimensionnel non linéaire par le problème linéarisé suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{\tilde{A}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) \frac{\partial}{\partial \xi} \underline{W} = \underline{0} \\ \underline{W}(\xi, t^n) = \begin{cases} \underline{W}_i^n & \text{si } \xi < 0 \\ \underline{W}_j^n & \text{si } \xi \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

avec la matrice linéarisée de Roe  $\underline{\tilde{A}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij})$  qu'il faut déterminer. On la définit par (Cf. [Har83a]) :

**Définition 3.2** *Le système (3.20) peut être linéarisé au sens de Roe si, pour tout  $(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n)$  de l'espace des états admissibles, il existe  $\underline{\tilde{A}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) = n_x \underline{\tilde{A}}_x(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n) + n_y \underline{\tilde{A}}_y(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n)$  telle que :*

- (i)  $[\underline{F}_x(\underline{W})]_{ij}^n = \underline{\tilde{A}}_x(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n) \cdot [\underline{W}]_{ij}^n$   
 $[\underline{F}_y(\underline{W})]_{ij}^n = \underline{\tilde{A}}_y(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n) \cdot [\underline{W}]_{ij}^n$
- (ii)  $\underline{\tilde{A}}_x(\underline{W}, \underline{W}) = \nabla_{\underline{W}} \underline{F}_x(\underline{W})$   
 $\underline{\tilde{A}}_y(\underline{W}, \underline{W}) = \nabla_{\underline{W}} \underline{F}_y(\underline{W})$
- (iii)  $n_x \underline{\tilde{A}}_x(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n) + n_y \underline{\tilde{A}}_y(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n)$  a des valeurs propres réelles et les vecteurs propres associés engendrent  $\mathbb{R}^p$ .



En pratique, on prend la matrice linéarisée de Roe  $\tilde{\underline{\mathcal{A}}}(W_i^n, W_j^n, \mathbf{n}_{ij})$  égale à la Jacobienne  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}(W, \mathbf{n}_{ij}) = n_x \underline{\underline{\mathcal{A}}}_x(W) + n_y \underline{\underline{\mathcal{A}}}_y(W)$  prise en un état moyen  $\tilde{W}(W_i^n, W_j^n)$ ,  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_x$  et  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_y$  désignant les matrices Jacobiennes  $\nabla_{\underline{W}} F_x(W)$  et  $\nabla_{\underline{W}} F_y(W)$  du système (3.20) :

$$\tilde{\underline{\underline{\mathcal{A}}}}(W_i^n, W_j^n, \mathbf{n}_{ij}) = \underline{\underline{\mathcal{A}}}(\tilde{W}(W_i^n, W_j^n), \mathbf{n}_{ij})$$

Dans ce cas (ii) et (iii) sont automatiquement vérifiées. On introduit, pour simplifier, la notation  $\tilde{W}_{ij}^n = \tilde{W}(W_i^n, W_j^n)$ .

Le flux étant défini sur le problème quasi-unidimensionnel, le bilan sur une cellule  $C_i$  nécessite le retour aux coordonnées  $(x, y)$  par rotation. On obtient alors l'expression suivante du flux de Roe à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$  :

$$\mathbb{F}_{Roe}(W_i^n, W_j^n, \mathbf{n}_{ij}) = \mathcal{F}(W_i^n, \mathbf{n}_{ij}) + \underline{\underline{\mathcal{A}}}^-(\tilde{W}_{ij}^n, \mathbf{n}_{ij}) \cdot [W]_{ij}^n$$

où encore de façon équivalente :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{Roe}(W_i^n, W_j^n, \mathbf{n}_{ij}) &= \mathcal{F}(W_j^n, \mathbf{n}_{ij}) - \underline{\underline{\mathcal{A}}}^+(\tilde{W}_{ij}^n, \mathbf{n}_{ij}) \cdot [W]_{ij}^n \\ &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{F}(W_i^n, \mathbf{n}_{ij}) + \mathcal{F}(W_j^n, \mathbf{n}_{ij}) \} - \frac{1}{2} \left| \underline{\underline{\mathcal{A}}}(\tilde{W}_{ij}^n, \mathbf{n}_{ij}) \right| \cdot [W]_{ij}^n \end{aligned}$$

Avec les notations  $\underline{\underline{\mathcal{A}}} = \underline{\underline{\mathcal{P}}} \underline{\underline{\mathcal{D}}} \underline{\underline{\mathcal{P}}}^{-1}$ , où  $\underline{\underline{\mathcal{P}}}$  désigne la matrice des vecteurs propres à droite et  $\underline{\underline{\mathcal{D}}}$  la matrice diagonale des valeurs propres de  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$ , et  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}^+ = \frac{1}{2} \{ \underline{\underline{\mathcal{A}}} + |\underline{\underline{\mathcal{A}}}| \}$ ,  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}^- = \frac{1}{2} \{ \underline{\underline{\mathcal{A}}} - |\underline{\underline{\mathcal{A}}}| \}$  et  $|\underline{\underline{\mathcal{A}}}| = \underline{\underline{\mathcal{P}}} |\underline{\underline{\mathcal{D}}}| \underline{\underline{\mathcal{P}}}^{-1}$ .

Le solveur de Roe s'écrit alors avec un schéma en temps de type Euler :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left\{ \sum_{j \in V(i)} \mathbb{F}_{Roe}(W_i^n, W_j^n, \mathbf{n}_{ij}) \right\} \quad (3.21)$$

### 3.6 Schéma vfRoe

On présente maintenant un solveur de Riemann linéarisé, le schéma vfRoe, introduit dans [Gal96b] et [Mas96]. Ce schéma ne nécessite pas la vérification de conditions de type Roe. On veut résoudre, à l'interface entre deux cellules  $C_j$  et  $C_{j+1}$ , le problème de Riemann suivant d'un système hyperbolique non linéaire de  $p$  lois de conservation :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}(\underline{W}) = \underline{0} \\ \underline{W}(x, t^n) = \begin{cases} \underline{W}_j^n & \text{si } x \in C_j \\ \underline{W}_{j+1}^n & \text{si } x \in C_{j+1} \end{cases} \end{cases} \quad (3.22)$$

où  $\underline{F}$  est un vecteur de fonctions continues dans l'espace des états physiquement admissibles et  $\underline{W}_j^n$  la valeur moyenne de la variable  $\underline{W}$  sur la cellule  $C_j$  au temps  $t^n$ . Le principe du solveur vFRoe est de prendre comme flux numérique  $\underline{F}_{vFRoe}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$ , pour la résolution numérique du problème de Riemann (3.22) à l'interface entre les cellules  $C_j$  et  $C_{j+1}$ , le flux physique  $\underline{F}(\underline{W})$  en la solution exacte à l'interface du problème de Riemann linéarisé suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{A}(\hat{\underline{W}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} = \underline{0} \\ \underline{W}(x, t^n) = \begin{cases} \underline{W}_j^n & \text{si } x \in C_j \\ \underline{W}_{j+1}^n & \text{si } x \in C_{j+1} \end{cases} \end{cases} \quad (3.23)$$

La matrice  $\underline{A}(\hat{\underline{W}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n))$  est la matrice Jacobienne du flux  $\underline{A}(\underline{W}) = \nabla_{\underline{W}} \underline{F}(\underline{W})$  prise en l'état moyen  $\hat{\underline{W}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$  qui doit appartenir au domaine d'hyperbolicité du système non linéaire pour que  $\underline{A}(\hat{\underline{W}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n))$  soit diagonalisable. Le choix de l'état moyen  $\hat{\underline{W}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$  conditionne la stabilité et la convergence du schéma vFRoe. Dans la pratique (Cf. [Mas97]), le choix de la moyenne arithmétique s'est souvent avéré pertinent :

$$\hat{\underline{W}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) = \overline{(\underline{W})}_{j,j+1}^n = \frac{1}{2}(\underline{W}_j^n + \underline{W}_{j+1}^n)$$

**Remarque 3.5** Les conditions (ii) et (iii) de la linéarisée de Roe sont automatiquement vérifiées par la matrice  $\underline{A}(\hat{\underline{W}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n))$ .

On peut alors résoudre exactement le problème linéarisé (3.23). Soient  $\lambda_1 = \lambda_1(\hat{\underline{W}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)) < \dots < \lambda_p = \lambda_p(\hat{\underline{W}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n))$  les valeurs propres ordonnées de la matrice  $\underline{A}(\hat{\underline{W}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n))$  et  $\underline{r}_k = \underline{r}_k(\hat{\underline{W}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n))$ ,  $k = 1, \dots, p$  les vecteurs propres à droite associés. La solution exacte du problème de Riemann (3.23) est composée d'une succession d'états  $\underline{W}_k = \underline{W}_k(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$ ,  $k = 1, \dots, p$  constants séparés par des discontinuités de contact (Cf. la figure [3.3]), elle est donnée par :

$$\begin{aligned}
 (\underline{W}_{v f R o e})_{j,j+1} = & \\
 \underline{W} \left( \frac{x - (x_j + h/2)}{t - t^n}; \underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n \right) = & \begin{cases} \underline{W}_0 = \underline{W}_j^n & \text{si } x/t < \lambda_1 \\ \underline{W}_1 & \text{si } \lambda_1 < x/t < \lambda_2 \\ \dots & \\ \underline{W}_{p-1} & \text{si } \lambda_{p-1} < x/t < \lambda_p \\ \underline{W}_p = \underline{W}_{j+1}^n & \text{si } \lambda_p < x/t \end{cases} \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

pour  $x_j < x < x_{j+1}$   
et  $t^n \leq t \leq t^{n+1}$

On déduit des relations de Rankine-Hugoniot, valables à chaque discontinuité de contact, que  $[\underline{W}]_{k-1,k}$ ,  $k = 1, \dots, p$ , est vecteur propre à droite de la matrice  $\underline{A}(\underline{W}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n))$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$ . Le calcul des états intermédiaires est donc immédiat :

$$\underline{W}_k = \underline{W}_j^n + \sum_{l=1}^k \alpha_l \underline{r}_l \quad k = 1, \dots, p$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  sont des réels entièrement déterminés par la relation :

$$\underline{W}_{j+1}^n - \underline{W}_j^n = \sum_{l=1}^p \alpha_l \underline{r}_l$$

Le schéma s'écrit :

$$\underline{W}_j^{n+1} = \underline{W}_j^n - \frac{\Delta t}{h} \{ \underline{\mathbb{F}}_{v f R o e}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) - \underline{\mathbb{F}}_{v f R o e}(\underline{W}_{j-1}^n, \underline{W}_j^n) \} \quad (3.25)$$

avec le flux :

$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) = \underline{F}((\underline{W}_{v f R o e})_{j,j+1})$$

où  $(\underline{W}_{v f R o e})_{j,j+1}$  désigne la solution exacte (3.24) du problème de Riemann linéarisé (3.23) à l'interface  $x = x_j + h/2$ . Le schéma (3.25) est donc conservatif et consistant par construction.

Sous l'hypothèse d'invariance par rotation du système non linéaire, le schéma v f Roe s'étend naturellement au cadre bidimensionnel non structuré. Supposons que l'on veuille résoudre le problème de Riemann bidimensionnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}_x(\underline{W}) + \frac{\partial}{\partial y} \underline{F}_y(\underline{W}) = \underline{0} \\ \underline{W}((x, y), t^n) = \begin{cases} \underline{W}_i^n & \text{si } (x, y) \in C_i \\ \underline{W}_j^n & \text{si } (x, y) \in C_j \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.26)$$

où  $\underline{F}_x$  et  $\underline{F}_y$  désignent les fonctions de flux associées aux directions  $x$  et  $y$ , suffisamment régulières de l'espace des états dans  $\mathbb{R}^p$ ,  $C_i$  et  $C_j$  deux cellules adjacentes et  $\underline{W}_i^n$  la valeur moyenne de la variable  $\underline{W}$  sur la cellule  $C_i$  au temps  $t^n$ . Soit  $\underline{n}_{ij} = (n_x, n_y)^t$  le vecteur normal à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ , extérieur à  $C_i$ . Sous l'hypothèse d'invariance par rotation, on projette le système dans la direction portée par  $\underline{n}_{ij} = (n_x, n_y)^t$ , et résoudre le problème de Riemann (3.26) revient à résoudre le problème de Riemann monodimensionnel suivant, écrit dans le repère local  $(\xi, \underline{n}_{ij})$  orthogonal à l'interface :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial \xi} \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}_{ij}) = \underline{0} \\ \underline{W}(\xi, t^n) = \begin{cases} \underline{W}_i^n & \text{si } \xi < 0 \\ \underline{W}_j^n & \text{si } \xi \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

avec le flux associé à la direction  $\underline{n}_{ij}$ ,  $\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}_{ij}) = n_x \underline{F}_x(\underline{W}) + n_y \underline{F}_y(\underline{W})$ . Le principe du schéma vFRoe est de prendre comme flux numérique  $\underline{\mathbb{F}}_{vFRoe}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij})$ , pour la résolution numérique du problème de Riemann (3.26), le flux physique  $\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}_{ij})$  en la solution exacte  $\underline{W}(0; \underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n)$  à l'interface du problème de Riemann linéarisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{\underline{A}}(\hat{\underline{W}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n), \underline{n}_{ij}) \frac{\partial}{\partial \xi} \underline{W} = \underline{0} \\ \underline{W}(\xi, t^n) = \begin{cases} \underline{W}_i^n & \text{si } \xi < 0 \\ \underline{W}_j^n & \text{si } \xi \geq 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

où la matrice  $\underline{\underline{A}}(\hat{\underline{W}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n), \underline{n}_{ij}) = \sum_{m=1}^d \underline{\underline{A}}_m(\hat{\underline{W}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n))$  est la matrice Jacobienne du flux  $\underline{\underline{A}}_m(\underline{W}) = \nabla_{\underline{W}} \underline{F}_m(\underline{W})$ ,  $m = 1, \dots, d$ , prise en l'état moyen  $\hat{\underline{W}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n)$ .

Le schéma s'écrit :

$$\underline{W}_i^{n+1} = \underline{W}_i^n - \frac{\Delta t}{h} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \underline{\mathbb{F}}_{vFRoe}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) \right\} \quad (3.28)$$

avec le flux :

$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n) = \underline{\mathcal{F}}((\underline{W}_{vfRoe})_{ij}, \underline{n}_{ij})$$

où  $(\underline{W}_{vfRoe})_{ij}$  désigne la solution exacte du problème de Riemann linéarisé (3.27) à l'interface entre les deux cellules,  $\underline{W}(0; \underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$ .

### 3.7 Schéma vfRoe en variables non conservatives

Une variante du schéma vfRoe est présentée et appliquée au cadre des gaz réels dans [Buf96]. L'idée est toujours de prendre le flux numérique comme le flux physique en un état solution d'un problème linéarisé mais en effectuant préalablement un changement de variables. Supposons donc que l'on veuille résoudre, à l'interface entre deux cellules  $C_j$  et  $C_{j+1}$ , le problème de Riemann suivant d'un système hyperbolique non linéaire de  $p$  lois de conservation :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}(\underline{W}) = \underline{0} \\ \underline{W}(x, t^n) = \begin{cases} \underline{W}_j^n & \text{si } x \in C_j \\ \underline{W}_{j+1}^n & \text{si } x \in C_{j+1} \end{cases} \end{cases} \quad (3.29)$$

où  $\underline{F}$  est un vecteur de fonctions continues dans l'espace des états physiquement admissibles et  $\underline{W}_j^n$  la moyenne de la variable  $\underline{W}$  sur la cellule  $C_j$  au temps  $t^n$ . On effectue le changement de variable suivant :

$$\underline{W} \longrightarrow \underline{Z}(\underline{W})$$

et l'on réécrit, pour des solutions régulières, le système sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{Z} + \underline{B}(\underline{Z}) \frac{\partial}{\partial x} \underline{Z} = \underline{0} \quad (3.30)$$

où  $\underline{B}(\underline{Z}) = (\nabla_{\underline{Z}} \underline{W}(\underline{Z}))^{-1} \nabla_{\underline{W}} \underline{F}(\underline{W}(\underline{Z})) \nabla_{\underline{Z}} \underline{W}(\underline{Z})$ . On associe alors, au système (3.30), le problème hyperbolique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \underline{Z} + \underline{B}(\hat{\underline{Z}}(\underline{Z}_j^n, \underline{Z}_{j+1}^n)) \frac{\partial}{\partial x} \underline{Z} = \underline{0} \\ \underline{Z}(x, t^n) = \begin{cases} \underline{Z}_j^n & \text{si } x \in C_j \\ \underline{Z}_{j+1}^n & \text{si } x \in C_{j+1} \end{cases} \end{cases} \quad (3.31)$$

où les états  $\underline{Z}_j^n$  se déduisent de  $\underline{Z}(\underline{W}_j^n)$ . La matrice  $\underline{B}(\hat{\underline{Z}}(\underline{Z}_j^n, \underline{Z}_{j+1}^n))$  est considérée en l'état moyen  $\hat{\underline{Z}}(\underline{Z}_j^n, \underline{Z}_{j+1}^n)$  qui est pris en pratique égal à la moyenne arithmétique :

$$\hat{\underline{Z}}(\underline{Z}_j^n, \underline{Z}_{j+1}^n) = \overline{(\underline{Z})}_{j,j+1}^n = \frac{1}{2}(\underline{Z}_j^n + \underline{Z}_{j+1}^n)$$

Le problème linéarisé (3.31) se résout très simplement. Le schéma conservatif s'écrit toujours :

$$\underline{W}_j^{n+1} = \underline{W}_j^n - \frac{\Delta t}{h} \{ \underline{\mathbb{F}}_{vfRoe-modif}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) - \underline{\mathbb{F}}_{vfRoe-modif}(\underline{W}_{j-1}^n, \underline{W}_j^n) \} \quad (3.32)$$

où le flux numérique  $\underline{\mathbb{F}}_{vfRoe-modif}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$  est le flux physique  $\underline{F}(\underline{W})$  considéré en la solution exacte  $\underline{Z}(0; \underline{Z}_j^n, \underline{Z}_{j+1}^n)$  à l'interface du problème de Riemann linéarisé (3.31).

$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) = \underline{F}(\underline{W}(\underline{Z}(0; \underline{Z}_j^n, \underline{Z}_{j+1}^n)))$$

Cette définition du flux est consistante. L'intérêt de cette variante est dans le choix possible du changement de variables. Dans [Buf96], les auteurs proposent deux principes :

**Principe 1 :** *La variable  $\underline{Z}$  est choisie de sorte que les invariants de Riemann des champs linéairement dégénérés du système associé au problème (3.29) non linéaire soient préservés par le solveur linéarisé.*

En effet, soit  $z$  une composante du vecteur  $\underline{Z}$ , si  $z$  est invariant de Riemann d'un champ linéairement dégénéré du système associé au problème (3.29), alors  $z$  est invariant de Riemann du problème linéarisé (3.31), et est discrètement préservé par construction puisque le problème linéarisé (3.31) est résolu exactement.

**Principe 2 :** *La variable  $\underline{Z}$  est choisie de sorte que les relations de saut exactes associées au système non linéaire du problème (3.29) :*

$$-\sigma[\underline{W}]_{j,j+1}^n + [\underline{F}(\underline{W})]_{j,j+1}^n = \underline{0}$$

*et les relations de saut associées au système linéarisé du problème (3.31) :*

$$-\sigma[\underline{Z}]_{j,j+1}^n + \underline{B}(\overline{(\underline{Z})}_{j,j+1}^n) [\underline{Z}]_{j,j+1}^n = \underline{0}$$

*soient équivalentes.*

Dans le cadre de la dynamique des gaz isentropique, Cf. [Buf97a], l'auteur base son changement de variable sur la conservation de la positivité de la variable densité intermédiaire,  $\underline{W} = (\rho, \rho u)^t$  et  $\underline{Z} = (u, c)^t$ .

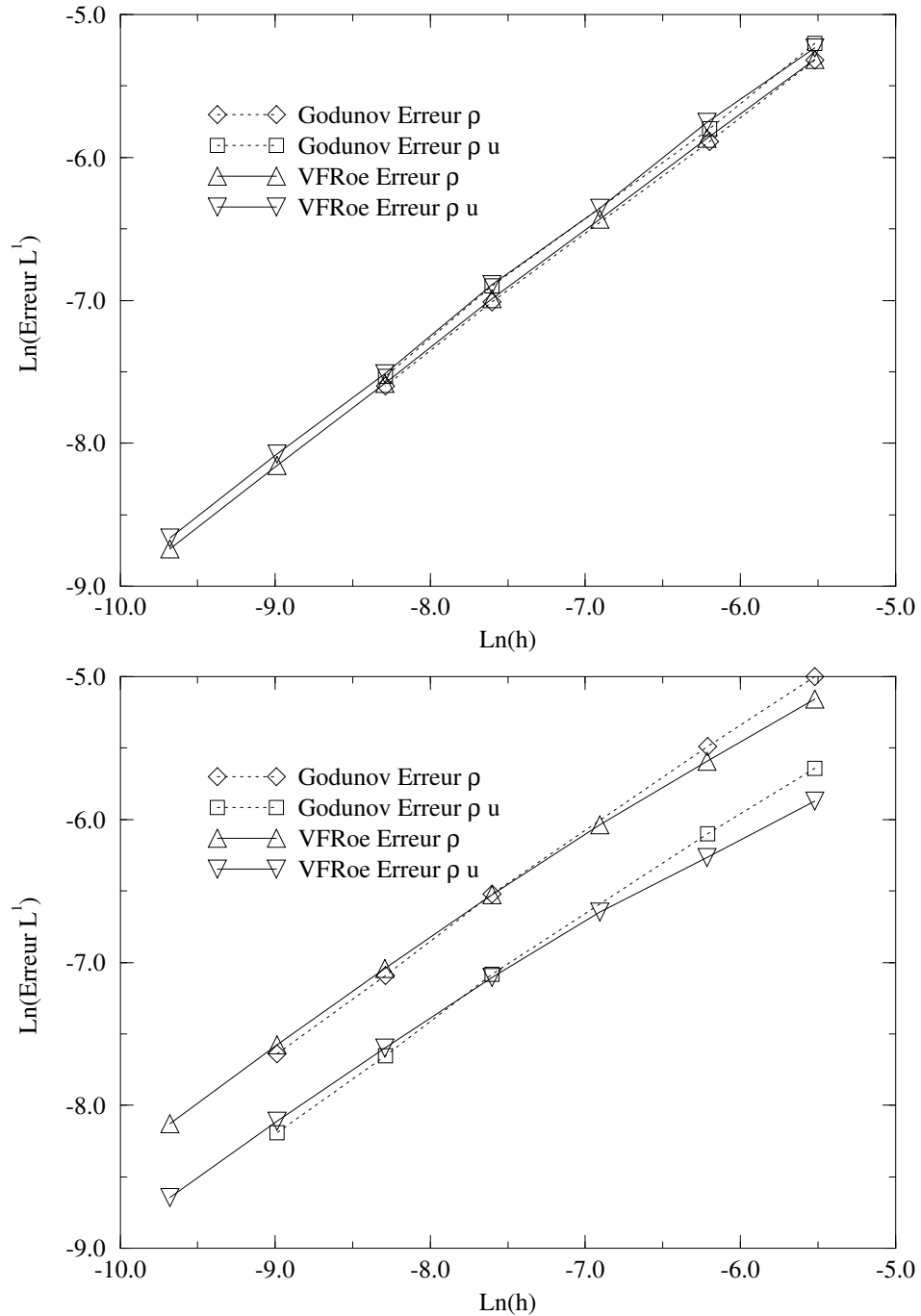


FIG. 3.4 – D'après des simulations du système de la dynamique des gaz isentropique par un schéma de *vfRoe* dans les variables  $(u, c)$ , étude de la convergence  $L^1$  dans le cas du tube à choc de Sod (en haut) et d'un tube à choc supersonique; comparaison avec le schéma de Godunov.

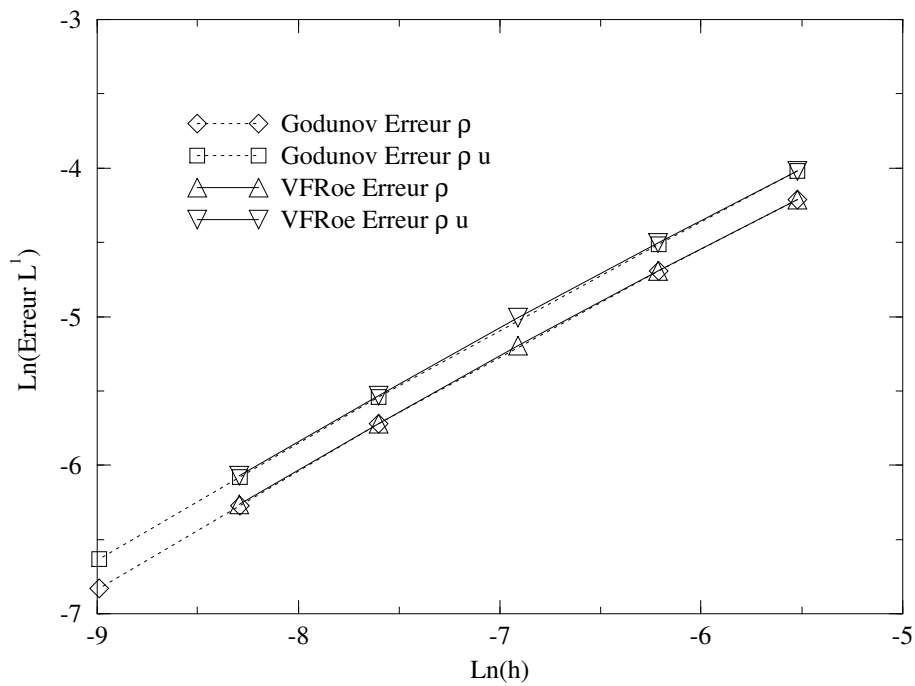


FIG. 3.5 – D'après des simulations du système de la dynamique des gaz isentropique par un schéma de vFRoe dans les variables  $(u, c)$ , étude de la convergence  $L^1$  dans le cas d'une double détente symétrique ; comparaison avec le schéma de Godunov.



Les figures [3.4] et [3.5] donnent la courbe de convergence en norme  $L^1$  de ce schéma dans le cas du tube à choc de Sod ( $u_L = u_R = 0$ ,  $\rho_L = 1$  et  $\rho_R = 0.3 \text{ kg.m}^{-3}$  pour  $\gamma = 2$  et  $K = 1$ ), d'un tube à choc supersonique ( $\rho_R = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-3}$ ) et d'une double détente symétrique ( $u_R = -u_L = 5 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\rho_L = \rho_R = 10 \text{ kg.m}^{-3}$ ). Les maillages considérés ont 250, 500, 1000, 2000, 4000 et 8000 cellules. Les courbes représentent l'erreur normalisée  $E$  en norme  $L^1$  associée aux variables  $\rho$  et  $\rho u$  en fonction du logarithme du pas de discrétisation spatiale,  $h = 1/\text{nombre de cellules}$ , du maillage considéré. On observe que, dans les cas du tube à choc de Sod et de la double détente symétrique, l'ordre de convergence du schéma vFRoe est similaire à celui du schéma de Godunov (Cf. l'annexe A). On note que, dans le cas du tube à choc supersonique (avec un rapport de pression égal à  $10^6$ ), l'ordre de convergence du schéma vFRoe est légèrement inférieur à celui du schéma de Godunov (Cf. la figure [A.7] de l'annexe A).

**Remarque 3.6** *L'extension au cadre multidimensionnel est naturelle sous l'hypothèse d'invariance par rotation du système non linéaire.*

## 3.8 Techniques de splitting

Les techniques de splitting d'opérateurs d'un système hyperbolique sont fréquemment utilisées et visent à relaxer la contrainte de type CFL sur le pas de temps ou à se ramener à la résolution de sous-systèmes physiques plus simples. On verra également, dans le cadre de la résolution numérique de modèles à deux fluides pour les écoulements diphasiques dont la partie de convective est conditionnellement hyperbolique (Cf. le chapitre 4), que la technique à pas fractionnaires peut nous ramener à la résolution numérique de sous-systèmes inconditionnellement hyperboliques.

### 3.8.1 Un exemple de splitting du système de la dynamique des gaz isentropique

On s'intéresse au système de la dynamique des gaz isentropique, soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + P(\rho)) = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

avec

$$P(\rho) = K\rho^\gamma$$

On considère la décomposition de flux suivante (Cf. le chapitre 4-section 4.4 pour une extension de cette décomposition à un modèle à deux fluides à quatre équations pour des écoulements diphasiques gaz-particules) :

sous-système 1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

sous-système 2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} P(\rho) = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

On reconnaît ici la méthode qui décompose les «ondes de pression» (deuxième étape) et les «ondes de convection pure» (première étape), très usitée dans les codes de mécanique des fluides monophasiques compressibles. Le schéma associé, dont on fait l'analyse de stabilité linéaire  $L^2$  dans l'annexe B, paragraphe B.5, est rappelé en (B.7) et (B.8) ; il s'agit d'un schéma de Godunov dans la première étape et d'un schéma de Roe dans la deuxième. Les tests numériques considérés, par une méthode à pas fractionnaires ou par une méthode de splitting de flux, sont extraits de l'annexe A et comportent le tube à choc de Sod, un tube à choc supersonique et une double détente symétrique. Les conditions initiales sont les suivantes :

	Sod		supersonique		double détente	
	L	R	L	R	L	R
$\rho [kg.m^{-3}]$	1	0.3	1	$10^{-3}$	10	10
$U [m.s^{-1}]$	0	0	0	0	-5	5

où les états «L» et «R» représentent les valeurs à gauche et à droite d'une variable de part et d'autre de la discontinuité initiale qui est centrée par rapport au domaine. Les simulations ont été réalisées avec  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ .

On compare les résultats numériques obtenus par la méthode à pas fractionnaires, la méthode de splitting de flux, le schéma de Godunov du système sans décomposition de flux (*Cf.* l'annexe A) et la solution exacte (*Cf.* les figures [3.6], [3.8] et [3.9]). On remarque que les trois schémas se comportent de façon à peu près équivalente. Les états intermédiaires et les vitesses de choc du tube à choc de Sod sont bien prédites (*Cf.* la figure [3.6]). Sur la figure [3.8] de la simulation du tube à choc supersonique, on retrouve le problème de la relative mauvaise prédiction de la vitesse de choc avec la méthode à pas fractionnaires (problème déjà évoqué dans le cadre du solveur de Godunov, *Cf.* l'annexe A) ; mais des tests sur des maillages raffinés montrent que l'algorithme converge bien vers la solution exacte. On remarque que, contrairement aux schémas de Godunov et de Roe du système (3.33) non décomposé (*Cf.* l'annexe A), la méthode à pas fractionnaires ne présente pas de choc non entropique au point de Mach égal à 1 (ce résultat a déjà été signalé dans [Buf93a] dans le cadre d'une méthode à pas fractionnaires du système de la dynamique des gaz). Dans le cas de la double détente symétrique (*Cf.* la figure [3.9]), les trois algorithmes présentent la caractéristique de converger vers l'état constant de densité intermédiaire par valeurs inférieures. On note également que les méthodes à pas fractionnaires et

de splitting de flux diffusent un peu plus que le schéma de Godunov. On a remarqué cependant que la méthode de splitting de flux se comportait moins bien que la méthode à pas fractionnaires dans les cas sévères de tube à choc, de double détente et de double choc (notamment le test de la double détente symétrique qui explose pour une vitesse au-delà de  $5 \text{ m.s}^{-1}$  et le test du tube à choc supersonique qui affiche des problèmes au niveau du raccordement des ondes).

Il est important de noter, dans le cadre de l'étude du problème continu, que la condition de non apparition du vide du système de la dynamique des gaz isentropique (3.33) (sans décomposition de flux), qui s'écrit, pour une double détente symétrique ( $\rho_L = \rho_R$ ,  $u_R = -u_L > 0$ ) (Cf. le paragraphe 2.8) :

$$|u_R| < \frac{2}{\gamma - 1} c_R$$

est différente de celle associée à la décomposition (3.34,3.35) (Cf. le paragraphe 4.4.3 pour la condition d'existence de solution associée à l'étape (3.35), il n'y a pas de condition d'existence de solution associée à l'étape (3.34)) :

$$|u_R| < \frac{2}{\gamma + 1} c_R$$

Ceci se traduit, pour une densité  $\rho_R$  fixée, par une apparition du vide pour des modules de vitesses  $|u_R|$  plus faibles avec les méthodes associées à la décomposition (3.34,3.35) qu'avec le système (3.33) non décomposé. Ainsi, avec  $\rho_R = 10 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\gamma = 2$  et  $K = 1$ , la vitesse limite initiale avant l'apparition du vide est  $u_R \sim 8.94 \text{ m.s}^{-1}$  dans le cas du système non décomposé, alors qu'elle vaut  $u_R \sim 2.98 \text{ m.s}^{-1}$  dans le cas des méthodes à pas fractionnaires ou de décomposition de flux (3.35). Ainsi la condition initiale  $u_R = 4 \text{ m.s}^{-1}$  est non admissible pour l'étape (3.35) (on ne sait par contre pas conclure pour la séquence des deux étapes).

Le solveur de Roe, contrairement à un solveur exact (tel que celui de Godunov), peut introduire des états intermédiaires qui peuvent être non physiques (i.e. ici à densité négative). Dans le cas d'une double détente symétrique, la valeur de la densité  $\rho^*$  à l'état intermédiaire constant, calculée par le solveur de Roe associé au système (3.33) non décomposé tout comme celui associé à l'étape (3.35), s'écrit :

$$\rho^* = \rho_R \left( 1 - \frac{|u_R|}{c_R} \right)$$

Ainsi, le solveur de Roe génère une densité  $\rho^*$  admissible tant que le nombre de Mach est inférieur à 1. En considérant l'exemple de la double détente symétrique,  $u_R \sim 4.47 \text{ m.s}^{-1}$  est donc la valeur limite supérieure pour laquelle le solveur de Roe rend une solution admissible.

Les figures [3.7] et [3.10] donnent la courbe de convergence en norme  $L^1$  des méthodes à pas fractionnaires et de splitting de flux dans le cas du tube à choc de Sod et du tube à choc supersonique. Les maillages considérés ont 250, 500, 2000, 4000, 8000 ou 16000 cellules et les simulations ont été réalisées avec une CFL de 0.5. Les courbes représentent l'erreur normalisée  $E$

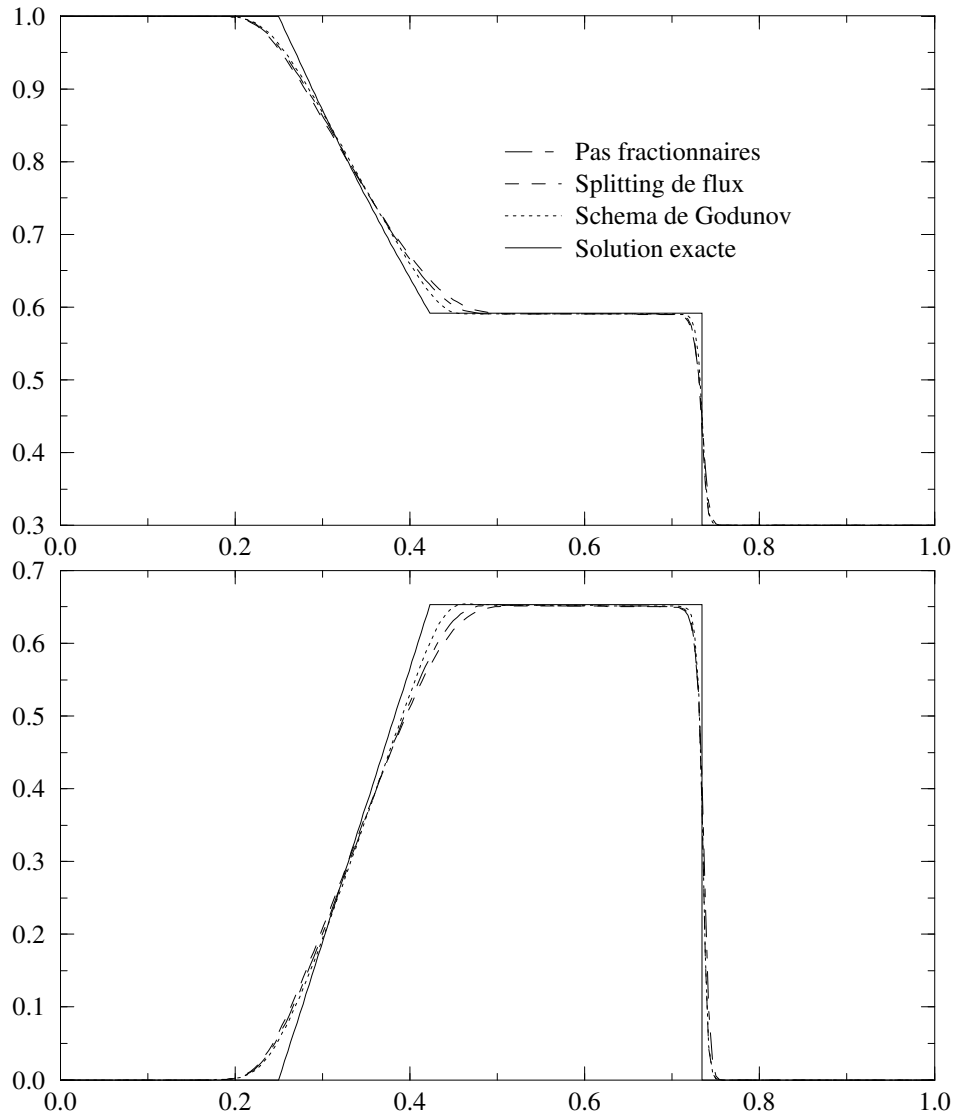


FIG. 3.6 – Simulation du système de la dynamique des gaz isentropique, test de tube à choc de Sod avec les conditions initiales:  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 0.3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $u_R = u_L = 0 \text{ m.s}^{-1}$ , avec un maillage de 250 éléments, une CFL égale à 0.5, au temps final  $t = 0.176 \text{ s}$ . Comparaison entre les méthodes à pas fractionnaires, de splitting de flux, le schéma de Godunov et la solution exacte. On observe les variables  $\rho$  (en haut) et  $u$ .

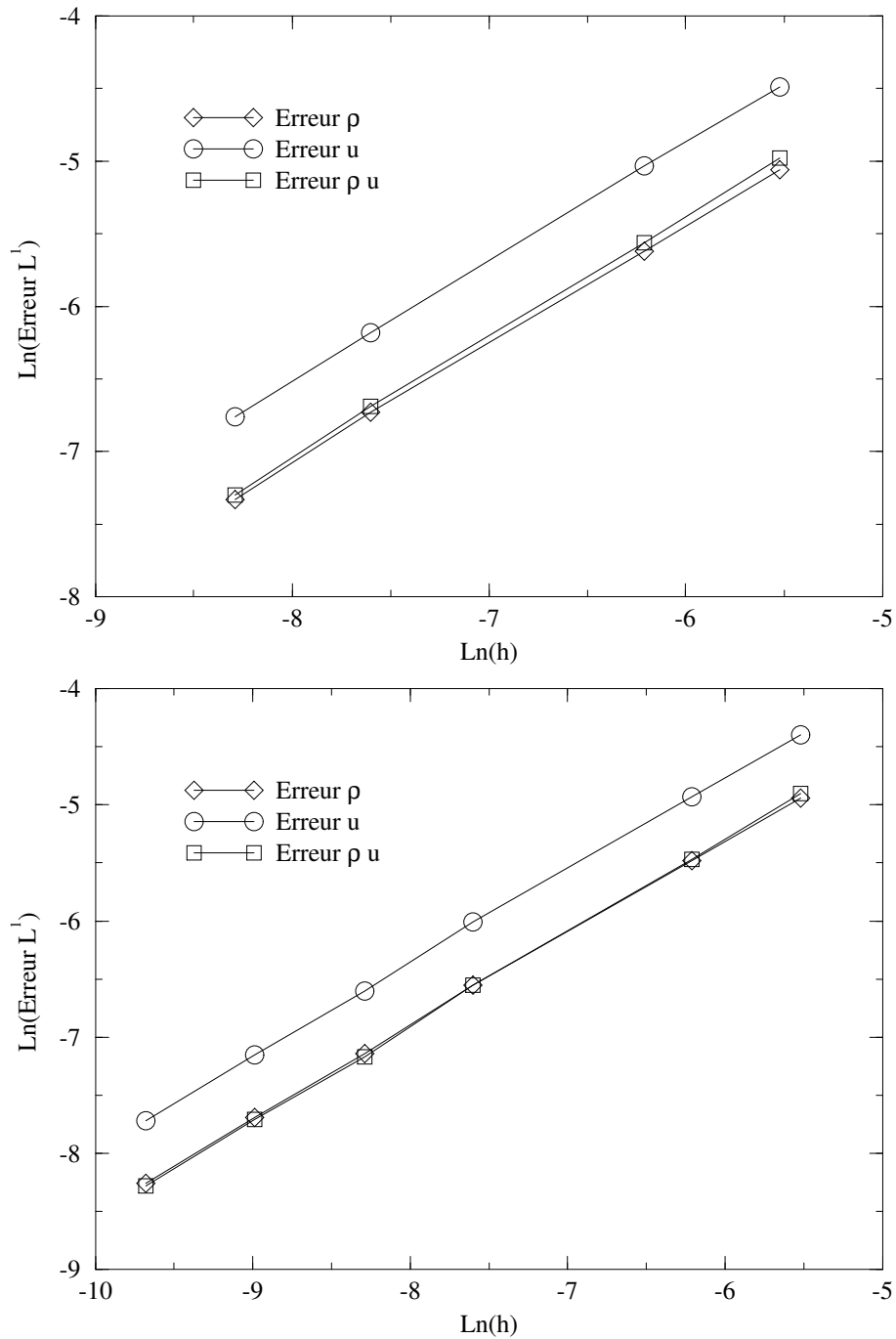


FIG. 3.7 – D'après des simulations du système de la dynamique des gaz isentropique, étude de la convergence  $L^1$  des méthodes à pas fractionnaires (en haut) et de splitting de flux dans le cas du tube à choc de Sod.

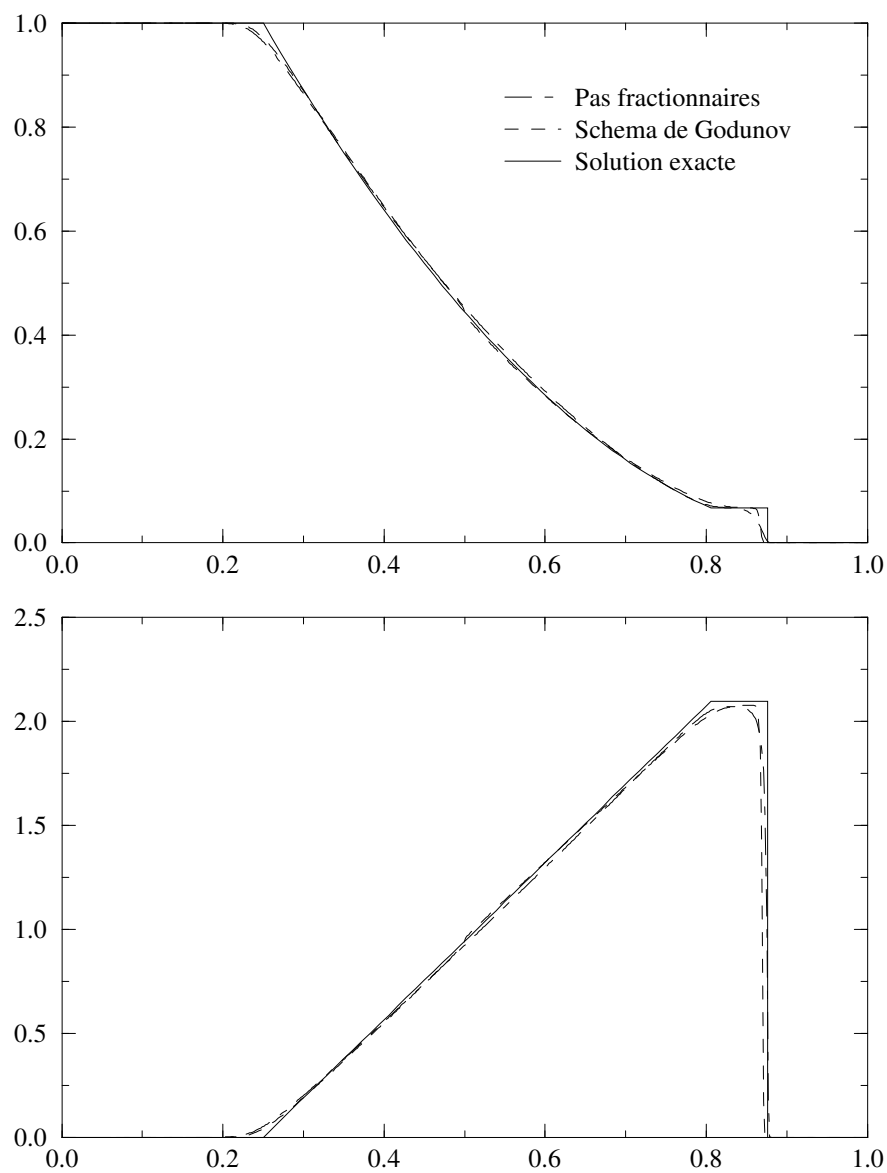


FIG. 3.8 – Simulation du système de la dynamique des gaz isentropique, test de tube à choc supersonique avec les conditions initiales :  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $u_R = u_L = 0 \text{ m.s}^{-1}$ , avec un maillage de 500 éléments, une CFL égale à 0.5, au temps final  $t = 0.176 \text{ s}$ . Comparaison entre la méthode à pas fractionnaires, le schéma de Godunov et la solution exacte. On observe les variables  $\rho$  (en haut) et  $u$ .

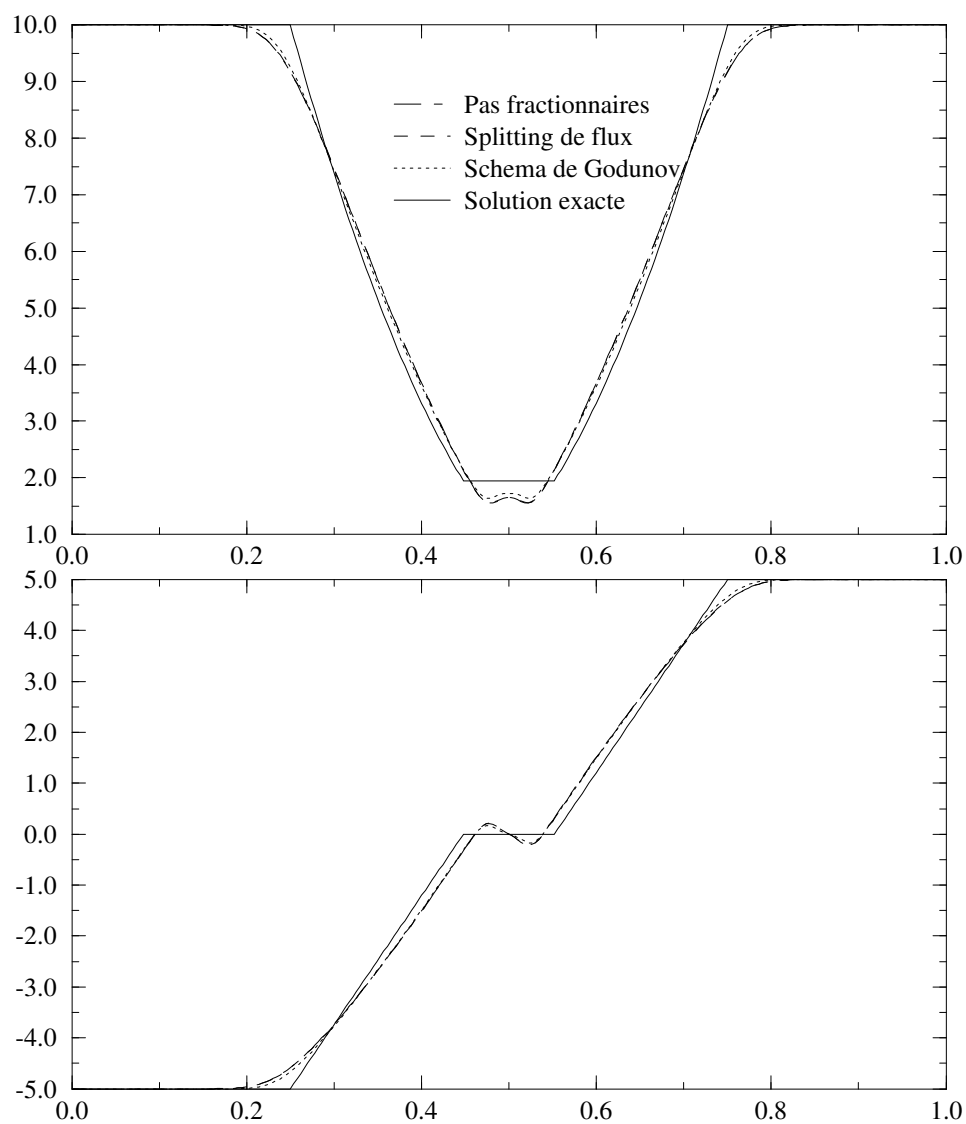


FIG. 3.9 – Simulation du système de la dynamique des gaz isentropique, test de double détente avec les conditions initiales :  $\rho_L = \rho_R = 10 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $u_R = -u_L = 5 \text{ m.s}^{-1}$ , avec un maillage de 500 éléments, une CFL égale à 0.5, au temps final  $t = 0.026 \text{ s}$ . Comparaison entre les méthodes à pas fractionnaires, de splitting de flux, le schéma de Godunov et la solution exacte. On observe les variables  $\rho$  (en haut) et  $u$ .

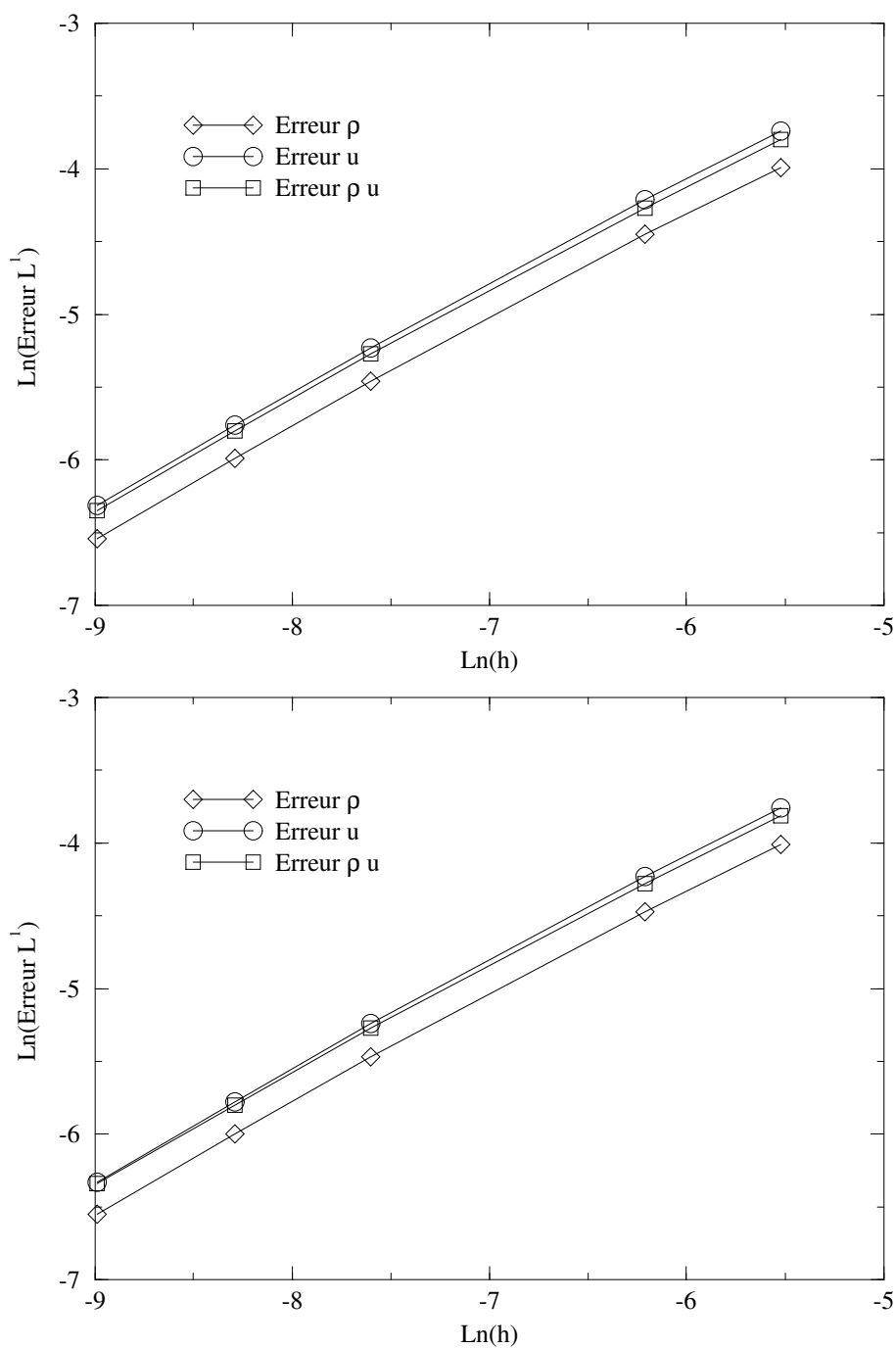


FIG. 3.10 – D'après des simulations du système de la dynamique des gaz isentropique, étude de la convergence  $L^1$  des méthodes à pas fractionnaires (en haut) et de splitting de flux dans le cas d'une double détente symétrique.



en norme  $L^1$  associée aux variables  $\rho$ ,  $u$  et  $\rho u$  en fonction du logarithme du pas de discrétisation spatiale,  $h = 1/\text{nombre de cellules}$ , du maillage considéré. Pour le tube à choc de Sod, par la méthode à pas fractionnaires comme par la méthode de splitting de flux, on trouve que l'ordre de convergence atteint 0.89 pour la variable débit et 0.85 pour les variables  $\rho$  et  $u$  (on rappelle que l'erreur du schéma de Godunov du système (3.33) non décomposé présenté dans l'annexe A est en  $O(h^{0.9})$  pour la variable débit et en  $O(h^{0.86})$  pour les variables  $\rho$  et  $u$ ). Dans le cas de la double détente symétrique, on obtient que l'erreur est en  $O(h^{0.79})$  pour les variables  $\rho$ ,  $u$  et  $\rho u$  (elle est en  $O(h^{0.8})$  pour le schéma de Godunov associé au système (3.33)). On note que l'ordre de convergence des méthodes à pas fractionnaires et de splitting de flux (avec un schéma de Godunov dans la première étape et un schéma de Roe dans la deuxième) est comparable à celui des schémas vRoe ou Godunov du système non décomposé.

### 3.8.2 Un exemple de splitting du système de la dynamique des gaz

La résolution numérique des équations d'Euler par le schéma de Roe pose des problèmes du fait de la correction entropique nécessaire dans les champs vraiment non linéaires et des problèmes de mauvais conditionnement du problème aux valeurs propres pour les écoulements à faible nombre de Mach. Dans [Buf93a], [Buf93b] et [Buf97], les auteurs s'intéressent à la mise en œuvre d'une technique à pas fractionnaires pour la résolution de ce système que l'on rappelle ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + P) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} E + \frac{\partial}{\partial x} (u(E + P)) = 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

avec la loi d'état :

$$P = (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right)$$

$\gamma$  désigne l'indice adiabatique du gaz,  $\rho$  la densité,  $u$  la vitesse,  $P$  la pression et  $E$  l'énergie totale volumique. Les valeurs propres de la matrice Jacobienne associée sont :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c$$

où  $c$  désigne la célérité,  $c^2 = \gamma P / \rho$ . La matrice Jacobienne est diagonalisable mais, à faible nombre de Mach, la condition CFL qui limite le pas de temps est fortement dominée par le module des célérités des ondes acoustiques  $|u \pm c|$ ,  $|\lambda_2| \ll |\lambda_{1,3}|$ . Si les champs vraiment non linéaires associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$  sont bien prédits par les schémas de type Roe, on sait que, par

contre, la diffusion de ces méthodes entraîne une mauvaise prédiction de l'onde lente associée à  $\lambda_2$ . Dans [Buf93a], [Buf93b] et [Buf97], les auteurs proposent une décomposition en deux sous-systèmes qui résout séparément la partie convection pure et la partie propagation :

**sous-système 1 :**

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} E + \frac{\partial}{\partial x} (u E) = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

**sous-système 2 :**

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} P = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} E + \frac{\partial}{\partial x} (u P) = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

Le sous-système (3.37) est dégénéré, la vitesse  $u$  est valeur propre d'ordre 3 et la matrice Jacobienne du flux n'est pas diagonalisable. Le sous-système (3.38) est hyperbolique de valeurs propres :

$$\mu_1 = -\sqrt{\frac{(\gamma - 1)c^2}{\gamma}}, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)c^2}{\gamma}}$$

Le sous-système (3.37) est résolu par une méthode de type Roe (*Cf.* [Buf93a]) et le sous-système (3.38) par un solveur classique de Roe. Comparé à un solveur de Roe du système complet (3.36), les auteurs ont constaté la bonne qualité des résultats de la méthode à pas fractionnaires (vitesse de convergence quasiment identique) et la disparition du choc non entropique dans les champs vraiment non linéaires. La méthode à pas fractionnaires permet donc ici de s'affranchir de la correction entropique nécessaire à la résolution du système complet par un schéma de Roe.

### 3.9 Schémas de résolution de systèmes hyperboliques non conservatifs

On présente maintenant quelques techniques de résolution de systèmes hyperboliques non conservatifs qui s'inspirent des schémas présentés précédemment dans le cadre conservatif. On introduit tout d'abord le cadre théorique associé aux systèmes hyperboliques non conservatifs (*Cf.* [Lef88], [Lef92b], [Da195] et [Sai95a]).

### 3.9.1 Le cadre non conservatif

La modélisation de phénomènes issus de la physique peut conduire naturellement à des systèmes hyperboliques écrits sous forme non conservative (comme la modélisation des écoulements diphasiques par des modèles à deux fluides). Considérons, par exemple, un système instationnaire de dimension  $p$  qui ne prend en compte que les effets convectifs (i.e. qui ne comprend que des termes différentiels d'ordre 1) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{\underline{B}}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} = \underline{0} \quad (3.39)$$

où  $\underline{W}(x, t)$  est une fonction vectorielle de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  dans l'espace des états  $\Omega$  inclus dans  $\mathbb{R}^p$  et  $\underline{\underline{B}}(\underline{W})$  une fonction régulière de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^{2p}$ . On dit alors que le système (3.39) est non conservatif si on ne peut l'écrire, dans les zones régulières, sous la forme d'une divergence d'un flux :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}(\underline{W}) = \underline{0}$$

c'est à dire si il n'existe pas une fonction suffisamment régulière  $\underline{F}(\underline{W})$  de l'espace des états  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^p$  telle que :

$$\underline{\underline{B}}(\underline{W}) = \nabla_{\underline{W}} \underline{F}(\underline{W})$$

Le système (3.39) est hyperbolique si la matrice  $\underline{\underline{B}}(\underline{W})$  a des valeurs propres réelles et si les vecteurs propres associés engendrent  $\mathbb{R}^p$ . Mais ce caractère hyperbolique du système fait que les solutions peuvent aussi posséder des points de discontinuité. Le problème mathématique lié à ces systèmes vient donc de la difficulté pour définir les solutions non régulières, le produit d'une fonction discontinue par la dérivée d'une fonction discontinue n'étant pas défini au sens usuel des distributions. On ne peut donc plus connecter les états de part et d'autre d'une discontinuité par des relations de saut de type Rankine-Hugoniot.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à donner un sens au produit non conservatif suivant :

$$\underline{\underline{B}}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W}$$

Soit  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$ , les états dans  $\mathbb{R}^p$  de la variable  $\underline{W}$  de part et d'autre d'une discontinuité. Dans [Dal95], les auteurs proposent une définition du produit non conservatif au sens des mesures boréliennes suivant une famille de chemin  $\underline{\phi}$  localement lipschitziens, c'est à dire une famille d'applications localement lipschitziennes  $\underline{\phi}(\cdot; \underline{W}_L, \underline{W}_R)$  de  $[0, 1] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^p$ , satisfaisant les propriétés de consistance et de régularité suivantes :

$$\begin{aligned}
\underline{\phi}(0; \underline{W}_L, \underline{W}_R) &= \underline{W}_L, \quad \underline{\phi}(1; \underline{W}_L, \underline{W}_R) = \underline{W}_R \text{ pour tout } \underline{W}_L \text{ et } \underline{W}_R \text{ dans } \mathbb{R}^p, \\
\underline{\phi}(s; \underline{W}, \underline{W}) &= \underline{W} \text{ pour tout } \underline{W} \text{ dans } \mathbb{R}^p \text{ et } s \text{ dans } [0, 1], \\
\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout ensemble borné } V \text{ de } \mathbb{R}^p, \text{ il existe une constante } k > 0 \text{ telle que :} \\ \left| \frac{\partial}{\partial s} \underline{\phi}(s; \underline{W}_L, \underline{W}_R) - \frac{\partial}{\partial s} \underline{\phi}(s; \underline{W}'_L, \underline{W}'_R) \right| \leq k \left| (\underline{W}_L - \underline{W}'_L) - (\underline{W}_R - \underline{W}'_R) \right| \\ \text{pour tout } \underline{W}_L, \underline{W}_R, \underline{W}'_L, \underline{W}'_R \text{ dans } V \text{ et presque pour tout } s \text{ dans } [0, 1]. \end{array} \right. & \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Le produit non conservatif défini à partir d'une famille de chemin  $\underline{\phi}$  est noté :

$$\left[ \underline{B}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} \right]_{\underline{\phi}}$$

A partir de cette définition de chemin, les auteurs de [Dal95] définissent la notion de solution faible du système (3.39) hyperbolique non linéaire non conservatif :

**Définition 3.3** Soit  $\underline{\phi}$  une famille de chemins lipschitziens dans  $\mathbb{R}^p$  satisfaisant (3.40). Une fonction  $\underline{W}$  de  $L^\infty(]a, b[ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^p) \cap BV(]a, b[ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^p)$  est une solution faible du système (3.39) par rapport au chemin  $\underline{\phi}$  si elle vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \left[ \underline{B}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} \right]_{\underline{\phi}} = \underline{0}$$

au sens des mesures boréliennes bornées sur  $]a, b[ \times \mathbb{R}^+$ .

L'espace  $BV(]a, b[, \mathbb{R}^p)$  désigne l'espace des fonctions  $\underline{W}$  de  $L^1(]a, b[, \mathbb{R}^p)$  dont la dérivée première  $\frac{\partial}{\partial x} \underline{W}$  coïncide au sens des distributions avec une mesure borélienne bornée  $\lambda$  sur  $]a, b[$ , c'est à dire :

$$\int_{]a, b[} \theta'(x) \underline{W}(x) dx = - \int_{]a, b[} \theta(x) d\lambda(x) \quad \text{pour tout } \theta \in C_0^1(]a, b[, \mathbb{R}^p)$$

Le membre de gauche est vu comme une intégrale de Lebesgue, tandis que le membre de droite est une intégrale par rapport à la mesure borélienne  $\lambda$ .

On définit alors des relations de saut de Rankine-Hugoniot généralisées. Soit  $\Sigma$  une ligne de discontinuité paramétrée par  $x(t) = x_0 + \sigma(t) t$  ( $\sigma(t)$  désigne donc la vitesse de propagation de la discontinuité). Soit  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$  les limites de  $\underline{W}$  à gauche et à droite de la discontinuité  $\Sigma$

en un point  $(x_0, t_0)$ . La définition du produit non conservatif au point de discontinuité  $(x_0, t_0)$  de  $\underline{W}$  et de la paramétrisation de  $\Sigma$ , conduit à la définition des relations de saut généralisées suivante :

$$-\sigma(t_0)(\underline{W}_R - \underline{W}_L) + \int_0^1 \underline{B}(\underline{\phi}(s; \underline{W}_L, \underline{W}_R)) \frac{\partial}{\partial s} \underline{\phi}(s; \underline{W}_L, \underline{W}_R) ds = \underline{0} \quad (3.41)$$

Ainsi  $\underline{W}(x, t)$  est solution du système non conservatif (3.39) si elle vérifie la relation de saut (3.41) à chaque point de discontinuité  $(x_0, t_0)$  et si elle est solution faible de (3.39) dans les zones régulières. Par extension du cas des systèmes conservatifs, la solution du système non conservatif (3.39) auquel on associe un chemin de régularisation  $\underline{\phi}$  qui vérifie les propriétés (3.40), est dans la classe des solutions formées d'états constants séparés par des discontinuités de contact, des chocs (dont on vient de définir le sens) ou des ondes de détente.

Un choix naturel de famille de chemin  $\underline{\phi}$  est celui des lignes droite qui est défini par :

$$\underline{\phi}_S(s; \underline{W}_L, \underline{W}_R) = \underline{W}_L + s(\underline{W}_R - \underline{W}_L)$$

Le produit non conservatif associé au chemin  $\underline{\phi}_S$  coïncide avec avec le produit de Volpert :

$$-\sigma(\underline{W}_R - \underline{W}_L) + \frac{1}{2}(\underline{B}(\underline{W}_L) + \underline{B}(\underline{W}_R))(\underline{W}_R - \underline{W}_L) = \underline{0}$$

On présente maintenant quelques méthodes numériques pour la résolution de systèmes hyperboliques non conservatifs. On retient deux catégories de méthodes : une première qui définit un schéma de Roe généralisé pour les systèmes non conservatifs et une seconde qui se base sur les schémas de Godunov, Roe ou vfRoe avec un traitement adéquat des termes non conservatifs.

### 3.9.2 Schémas basés sur des matrices linéarisées généralisées de type Roe

Dans [Tou89], [Tou92], [Kum93] et [Tou96], les auteurs proposent une extension de la notion de matrice linéarisée de Roe à des systèmes hyperboliques non conservatifs qu'ils appliquent au cadre des modèles à deux fluides d'écoulements diphasiques. Soit le système non conservatif inconditionnellement hyperbolique de dimension  $p$  suivant, écrit en une dimension d'espace :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{B}(\underline{W}) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} = \underline{0} \quad (3.42)$$

où  $\underline{B}(\underline{W})$  est une fonction régulière de l'espace des états dans  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ . Soit  $C_j$  une cellule du domaine. On veut résoudre le problème de Riemann associé au système (3.42) et aux conditions initiales suivantes :

$$\underline{W}(x, t^n) = \begin{cases} \underline{W}_j^n & \text{si } x \in C_j \\ \underline{W}_{j+1}^n & \text{si } x \in C_{j+1} \end{cases}$$

où  $\underline{W}_j^n$  désigne la moyenne de la variable  $\underline{W}$  sur la cellule  $C_j$  au temps  $t^n$ . Par extension du schéma de Roe au cadre non conservatif, les auteurs proposent de résoudre à l'interface entre les cellules  $C_j$  et  $C_{j+1}$ , le système linéarisé suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{\tilde{B}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} = \underline{0} \quad (3.43)$$

où  $\underline{\tilde{B}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$  est la matrice linéarisée de Roe généralisée qui est définie par :

**Définition 3.4** La matrice  $\underline{\tilde{B}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$  est appelée linéarisée de Roe généralisée si :

- (i) Elle est diagonalisable avec des valeurs propres réelles et les vecteurs propres associés engendrent  $\mathbb{R}^p$ .
- (ii) Elle possède la propriété de consistance suivante :

$$\underline{\tilde{B}}(\underline{W}, \underline{W}) = \underline{B}(\underline{W})$$

- (iii) Pour tout  $\underline{W}_j^n$  et  $\underline{W}_{j+1}^n$  dans l'espace des états, tels que  $\underline{W}_j^n \neq \underline{W}_{j+1}^n$ , elle satisfait la propriété :

$$\int_0^1 \underline{B}(\underline{\phi}(s; \underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)) \frac{\partial}{\partial s} \underline{\phi}(s; \underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) ds = \underline{\tilde{B}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) (\underline{W}_{j+1}^n - \underline{W}_j^n)$$

La propriété (iii) traduit la consistance des relations de saut du problème linéarisé avec les relations de saut généralisées du système non linéaire non conservatif. C'est une généralisation de la condition de Roe pour un système hyperbolique conservatif de flux  $\underline{F}(\underline{W})$  et de Jacobienne  $\underline{A}(\underline{W}) = \nabla_{\underline{W}} \underline{F}(\underline{W})$  :

$$\underline{F}(\underline{W}_{j+1}^n) - \underline{F}(\underline{W}_j^n) = \underline{\tilde{A}}(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) \cdot (\underline{W}_{j+1}^n - \underline{W}_j^n)$$

La matrice linéarisée de Roe généralisée dépend donc du chemin de régularisation  $\underline{\phi}$ . Pour la construction de cette dernière, les auteurs utilisent le chemin des lignes droite qui est défini par :

$$\underline{\phi}_S(s; \underline{W}_L, \underline{W}_R) = \underline{W}_L + s(\underline{W}_R - \underline{W}_L)$$

Le schéma est basé sur la forme non conservative du schéma de Roe et s'écrit alors :

$$\underline{W}_j^{n+1} = \underline{W}_j^n - \frac{\Delta t}{h} \{ \underline{\mathbb{F}}_{Roe-Gen}^-(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) + \underline{\mathbb{F}}_{Roe-Gen}^+(\underline{W}_{j-1}^n, \underline{W}_j^n) \} \quad (3.44)$$

Le flux numérique  $\underline{\mathbb{F}}_{Roe-Gen}^\pm(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n)$ , écrit sous forme non conservative, est défini par :

$$\underline{\mathbb{F}}_{Roe-Gen}^\pm(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) = \underline{\tilde{B}}^\pm(\underline{W}_j^n, \underline{W}_{j+1}^n) (\underline{W}_{j+1}^n - \underline{W}_j^n)$$

avec les notations  $\underline{\tilde{B}} = \underline{P} \underline{D} \underline{P}^{-1}$ ,  $\underline{\tilde{B}}^+ = \frac{1}{2} \{ \underline{\tilde{B}} + |\underline{\tilde{B}}| \}$ ,  $\underline{\tilde{B}}^- = \frac{1}{2} \{ \underline{\tilde{B}} - |\underline{\tilde{B}}| \}$  et  $|\underline{\tilde{B}}| = \underline{P} |\underline{D}| \underline{P}^{-1}$  où  $\underline{P}$  désigne la matrice des vecteurs propres à droite et  $\underline{D}$  la matrice diagonale des valeurs propres de  $\underline{\tilde{B}}$ . Ce schéma est, par construction, limité à l'ordre 1 en espace.

### 3.9.3 Schémas basés sur les solveurs de Godunov, Roe ou vfRoe

Soient  $\underline{W}$  le vecteur des variables d'état et  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)^t$  un vecteur quelconque de l'espace  $\mathbb{R}^d$ . Soit le système non conservatif inconditionnellement hyperbolique suivant, écrit en dimension  $d$  d'espace :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \sum_{m=1}^d \left\{ \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{F}_m(\underline{W}) + \underline{A}_m^{NC}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{G}_m(\underline{W}) \right\} = \underline{0} \quad (3.45)$$

avec  $\underline{F}_m(\underline{W})$  les fonctions de flux suffisamment régulières associées aux directions spatiales  $m$ , et  $\underline{A}_m^{NC}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{G}_m(\underline{W})$  les vecteurs des termes non conservatifs. Le système s'écrit de façon équivalente dans les zones régulières :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \sum_{m=1}^d \underline{B}_m(\underline{W}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{W} = \underline{0}$$

où  $\underline{B}_m(\underline{W}) = \nabla_{\underline{W}} \underline{F}_m(\underline{W}) + \underline{A}_m^{NC}(\underline{W}) \nabla_{\underline{W}} \underline{G}_m(\underline{W})$ .

Soient  $C_i$  une cellule du domaine,  $V(i)$  l'ensemble des cellules adjacentes à  $C_i$  et  $\underline{n}_{ij} = (n_1, \dots, n_d)^t$  le vecteur normal à l'interface entre deux cellules  $C_i$  et  $C_j$ , extérieur à  $C_i$ . On veut résoudre le problème de Riemann associé au système (3.45) et aux conditions initiales suivantes :

$$\underline{W}(\underline{x}, t^n) = \begin{cases} \underline{W}_i^n & \text{si } \underline{x} \in C_i \\ \underline{W}_j^n & \text{si } \underline{x} \in C_j \end{cases}$$

où  $\underline{W}_i^n$  désigne la moyenne de la variable  $\underline{W}$  sur la cellule  $C_i$  au temps  $t^n$ .

Soit le flux physique selon la direction portée par  $\underline{n}_{ij}$  :

$$\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}_{ij}) = \sum_{m=1}^d n_m \underline{F}_m(\underline{W})$$

On réécrit localement le système (3.45) selon la direction normale à l'interface :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial \xi} \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}_{ij}) + \sum_{m=1}^d n_m \underline{A}_m^{NC}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial \xi} \underline{G}_m(\underline{W}) = \underline{0} \quad (3.46)$$

On considère alors le schéma suivant qui se compose d'un terme de flux  $\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij})$  à chaque interface entre deux cellules  $C_i$  et  $C_j$  et d'un terme pour la discrétisation des termes non conservatifs :

$$\begin{aligned} \underline{W}_i^{n+1} = \underline{W}_i^n & - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{j \in V(i)} \underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) \\ & - \frac{\Delta t}{|C_i|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_i} \sum_{m=1}^d n_m \underline{A}_m^{NC}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{G}_m(\underline{W}) \, d\underline{x} \, dt \end{aligned} \quad (3.47)$$

où  $V(i)$  désigne l'ensemble des cellules  $C_j$  adjacentes à  $C_i$ . Les différentes méthodes exposées ci-dessous sont basées sur le choix d'un chemin linéaire pour connecter les termes non conservatifs de part et d'autre d'une discontinuité ; ils trouvent leur source dans les solveurs de Godunov et de Roe et proposent un traitement spécifique des termes non conservatifs. Le problème, outre le fait de définir un flux consistant, est de calculer l'intégrale des termes non conservatifs.

### Une proposition basée sur le schéma de Godunov

Dans le cadre de la modélisation numérique de la turbulence compressible, il a été proposé un schéma basé sur le solveur de Godunov pour la résolution de systèmes hyperboliques non conservatifs (Cf. [Her94c], [For95], [Lou95] et [For97]).

Soit  $(\underline{W}_{ex})_{ij} = \underline{W}(0; \underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n)$  la solution exacte du problème de Riemann à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$  que l'on obtient en définissant des relations de saut approchées basées sur le chemin linéaire pour connecter les états de part et d'autre d'une discontinuité :

$$-\sigma [\underline{W}]_{ij}^n + [\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}_{ij})]_{ij}^n + \sum_{m=1}^d \underline{A}_m^{NC}(\underline{W}_{ij}^n) [n_m \underline{G}_m(\underline{W})]_{ij}^n = \underline{0}$$

Le flux numérique  $\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij})$  considéré est le flux physique  $\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}_{ij})$  pris en la solution exacte  $(\underline{W}_{ex})_{ij}$  à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$  :



$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) = \underline{\mathcal{F}}((\underline{W}_{ex})_{ij}, \underline{n}_{ij}) \quad (3.48)$$

L'intégrale des termes non conservatifs est discrétisée en gelant les matrices  $\underline{\underline{A}}_m^{NC}(\underline{W})$  sur la cellule  $C_i$  et en considérant les vecteurs  $\underline{\underline{G}}_m(\underline{W})$  en la solution exacte  $(\underline{W}_{ex})_{ij}$  à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$  :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_i} \sum_{m=1}^d n_m \underline{\underline{A}}_m^{NC}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{\underline{G}}_m(\underline{W}) d\underline{x} dt = \sum_{m=1}^d \left\{ n_m \overline{(\underline{\underline{A}}_m^{NC})}^i \underline{\underline{G}}_m((\underline{W}_{ex})_{ij}) \right\} \quad (3.49)$$

avec la moyenne des termes non conservatifs sur la cellule  $C_i$  prise comme la moyenne des solutions exactes des problèmes de Riemann de chaque interface :

$$\overline{(\underline{\underline{A}}_m^{NC})}^i = \frac{1}{\text{card}\{V(i)\}} \sum_{j \in V(i)} \underline{\underline{A}}_m^{NC}((\underline{W}_{ex})_{ij}) \quad (3.50)$$

### Une proposition basée sur le schéma vfRoe

On présente maintenant une autre technique, appliquée dans le cadre des écoulement diphasiques (*Cf.* [Mas97]), identique à la précédente sauf qu'elle considère la solution d'un problème linéarisé. Cette technique s'appuie sur le schéma vfRoe. Le principe est donc de prendre comme flux numérique  $\underline{\mathbb{F}}_{vfRoe}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij})$ , pour la résolution numérique du problème de Riemann non linéaire, le flux physique  $\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}_{ij})$  en la solution à l'interface du problème de Riemann linéarisé suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \sum_{m=1}^d \underline{\underline{B}}_m(\hat{\underline{W}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n), \underline{n}_{ij}) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} = \underline{0} \\ \underline{W}(\underline{x}, t^n) = \begin{cases} \underline{W}_i^n & \text{si } \underline{x} \in C_i \\ \underline{W}_j^n & \text{si } \underline{x} \in C_j \end{cases} \end{cases} \quad (3.51)$$

Les matrices  $\underline{\underline{B}}_m(\hat{\underline{W}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n))$  sont les matrices de tous les termes de convection  $\underline{\underline{B}}_m(\underline{W})$  prises en l'état moyen  $\hat{\underline{W}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n)$  qui doit appartenir au domaine d'hyperbolicité du système non linéaire pour que  $\underline{\underline{B}}_m(\hat{\underline{W}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n))$  soit diagonalisable. Dans la pratique, on considère la moyenne arithmétique  $\hat{\underline{W}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n) = \frac{1}{2}(\underline{W}_i^n + \underline{W}_j^n)$ .

Soit  $(\underline{W}_{vfRoe})_{ij}$  la solution exacte à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$  du problème de Riemann linéarisé (3.51) :

$$(\underline{W}_{vfRoe})_{ij} = \underline{W}(0; \underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n)$$

Le flux numérique  $\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij})$  que l'on considère est le flux physique  $\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}_{ij})$  pris en la solution exacte  $(\underline{W}_{v f R o e})_{ij}$  du problème de Riemann linéarisé :

$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) = \underline{\mathcal{F}}((\underline{W}_{v f R o e})_{ij}, \underline{n}_{ij}) \quad (3.52)$$

L'intégrale des termes non conservatifs est discrétisée en gelant les matrices  $\underline{A}_m^{NC}(\underline{W})$  sur la cellule  $C_i$  et en considérant les vecteurs  $\underline{G}_m(\underline{W})$  en la solution exacte  $(\underline{W}_{v f R o e})_{ij}$  du problème de Riemann linéarisé :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_i} \sum_{m=1}^d n_m \underline{A}_m^{NC}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{G}_m(\underline{W}) \, dx \, dt = \sum_{m=1}^d \left\{ n_m \overline{(\underline{A}_m^{NC})}^i \underline{G}_m((\underline{W}_{v f R o e})_{ij}) \right\} \quad (3.53)$$

avec la moyenne des termes non conservatifs sur la cellule  $C_i$  prise comme la moyenne des solutions exactes à chaque interface des problèmes de Riemann linéarisés :

$$\overline{(\underline{A}_m^{NC})}^i = \frac{1}{\text{card}\{V(i)\}} \sum_{j \in V(i)} \underline{A}_m^{NC}((\underline{W}_{v f R o e})_{ij}) \quad (3.54)$$

### Une proposition basée sur le schéma de Roe

On propose enfin un schéma s'inspirant du schéma de Roe. Ce schéma que l'on met en œuvre dans le chapitre 4 dans le cadre de la résolution numérique d'un modèle à deux fluides a également été testé dans le cadre des systèmes hyperboliques non conservatifs issus de la turbulence compressible (Cf. [Her95a] et [Bru96]).

Le flux numérique  $\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij})$  s'inspire du flux de Roe; il comprend le flux physique  $\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}_{ij})$  centré plus un terme de correction  $\left| \underline{\tilde{\mathcal{B}}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) \right| [\underline{W}]_{ij}^n$  qui prend en compte tous les termes de convection :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) &= \frac{1}{2} (\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i^n, \underline{n}_{ij}) + \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij})) \\ &- \frac{1}{2} \left| \underline{\tilde{\mathcal{B}}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) \right| [\underline{W}]_{ij}^n \end{aligned} \quad (3.55)$$

avec  $\underline{\tilde{\mathcal{B}}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij})$  la matrice linéarisée de Roe du système (3.45) qui respecte le critère de Roe suivant, basé sur la théorie des chemins linéaires pour la définition des relations de saut approchées :

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{\mathcal{B}}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) &= \sum_{m=1}^d n_m \underline{\tilde{\mathcal{B}}}_m(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n) \\ &\underline{\tilde{\mathcal{B}}}_m(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n) [\underline{W}]_{ij}^n = [\underline{E}_m(\underline{W})]_{ij}^n + \underline{A}_m^{NC}(\underline{W}_{ij}^n) [\underline{G}_m(\underline{W})]_{ij}^n \end{aligned} \quad m = 1, \dots, d \quad (3.56)$$

et  $\overline{W}_{ij}^n = \frac{1}{2}(W_i^n + W_j^n)$ .

On prend  $\underline{\underline{B}}_m(W_i^n, W_j^n) = \underline{\underline{B}}_m(\tilde{W}(W_i^n, W_j^n))$  où la moyenne  $\tilde{W}(W_i^n, W_j^n)$  est déterminée par la relation (3.56).

Les termes non conservatifs sont discrétisés en gelant les matrices  $\underline{\underline{A}}_m^{NC}(W)$  sur la cellule  $C_i$  puis en considérant la valeur centrée des vecteurs  $\underline{G}_m(W)$  :

$$\begin{aligned} & \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_i} \sum_{m=1}^d n_m \underline{\underline{A}}_m^{NC}(W) \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{G}_m(W) d\underline{x} dt \\ & = \sum_{m=1}^d \left\{ n_m \underline{\underline{A}}_m^{NC}(W_i^n) \frac{1}{2} (\underline{G}_m(W_i^n) + \underline{G}_m(W_j^n)) \right\} \end{aligned} \quad (3.57)$$

On note que la stabilité des termes non conservatifs est prise en compte dans le terme de correction de flux.

Les trois méthodes présentées ci-dessus donnent des résultats très satisfaisants. Une autre technique, pas décrite ici, consiste à appliquer un schéma classique au système non conservatif réécrit sous forme conservative (Cf. [Kum93] et [Sai95b]). On envisagera cette solution alternative dans le chapitre 4.



## Chapitre 4

# Un modèle à deux fluides à quatre équations pour la simulation des écoulements diphasiques de type gaz-particules

On s'intéresse dans ce chapitre à l'analyse et la résolution numérique d'un modèle à deux fluides à quatre équations (deux équations de conservation de masse et deux équations de quantité de mouvement) modélisant les évolutions d'écoulements diphasiques compressibles de type gaz-particules. Le système de convection associé est non conservatif, conditionnellement hyperbolique et admet une caractérisation entropique. On ne peut pas résoudre le problème de Riemann associé et on ne sait pas démontrer la préservation du principe du maximum pour la variable fraction volumique. Pour la résolution numérique de ce système, on propose alors une méthode à pas fractionnaires qui décompose le système de convection en deux sous-systèmes inconditionnellement hyperboliques. On associe des relations de saut approchées au deuxième sous-système qui est non conservatif. On résout le problème de Riemann dans chaque sous-système et l'on montre que le principe du maximum de la variable fraction volumique est préservé sur l'ensemble de la méthode à pas fractionnaires. On propose ensuite une discrétisation spatiale par volumes finis. Le premier sous-système est résolu par les schémas classiques de Roe ou de Godunov et l'on propose un schéma de résolution pour le second prenant en compte les termes non conservatifs. On présente enfin des tests effectués sur des maillages bidimensionnels non structurés de type tube à choc, une simulation d'écoulement diphasique dans une tuyère et quelques tests de faisabilité pour la simulation de lits fluidisés denses.

## 4.1 Présentation du modèle

On considère ci-dessous un modèle à quatre équations pour la modélisation des écoulements compressibles diphasiques de type gaz-solide en régime dilué comme chargé. Ce modèle à deux fluides Eulérien (modèle A proposé par Gidaspow *Cf.* [Gid93], pages 150-151) comprend deux équations de conservation de masse et deux équations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) = 0 \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0 \quad (4.1b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) + \alpha_1 \nabla P(\rho_1) &= -\underline{I} - \alpha_1 \rho_1 \underline{g} \\ &\quad - \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{\underline{\Sigma}}_1) \end{aligned} \quad (4.1c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P(\rho_1) + \nabla(\alpha_2 \Xi(\alpha_2)) &= \frac{\underline{I}}{\rho_2} - \alpha_2 \underline{g} \\ &\quad - \nabla \cdot \left( \frac{\alpha_2}{\rho_2} \underline{\underline{\Sigma}}_2 \right) \end{aligned} \quad (4.1d)$$

L'indice 1 représente la phase gazeuse et l'indice 2 la phase des particules. Les variables  $\alpha_k$ ,  $\rho_k$  et  $\underline{U}_k$  désignent respectivement les moyennes statistiques locales de la fraction volumique, de la densité et du vecteur vitesse de la phase  $k$ . La phase particulaire est supposée incompressible ( $\rho_2$  constant) contrairement à la phase gazeuse. Les fractions volumiques vérifient :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (4.2)$$

La pression moyenne de l'écoulement est supposée indépendante de l'écoulement des particules. Elle est définie par une loi de pression de gaz :

$$P(\rho_1) = K \rho_1^\gamma \quad (4.3)$$

$K$  est une constante de référence positive de la forme  $P(\rho_0)/\rho_0^\gamma$ ,  $\gamma$  l'exposant isentropique du gaz.  $\underline{g}$  désigne le vecteur accélération de la pesanteur. Si on ne prend pas en compte l'éventuel caractère turbulent de l'écoulement porteur, on considère par contre les effets collisionnels au sein de la phase particulaire :

$$\Xi(\alpha_2) = \frac{2}{3} \langle q_2^2 \rangle_0 \alpha_2^{2/3} (1 + g(\alpha_2)) h(\alpha_2) \quad (4.4)$$

$$\text{avec } \log h(\alpha_2) = \frac{4}{3} (1 + e_c) \frac{2 \alpha_{max}}{5 \alpha_{max} - 2} \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{max}}\right)^{1 - \frac{5}{2} \alpha_{max}} \quad (4.5a)$$

$$\text{et } g(\alpha_2) = 2 \alpha_2 \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{max}}\right)^{-\frac{5}{2} \alpha_{max}} (1 + e_c) \quad (4.5b)$$

$e_c$  est une constante pour la prise en compte des collisions interparticulaires non élastiques ( $0 < e_c < 1$ ),  $\alpha_{max}$  est le taux de compactage maximum des particules supposées sphériques (que l'on prend en pratique égal à 0.64) et  $\langle q_2^2 \rangle_0$  est une constante de dimension  $(m.s^{-1})^2$ . On note que le cas limite  $\alpha_2 = \alpha_{max}$  n'est pas une solution admissible du système (4.1) car dans ce cas  $\Xi(\alpha_2 = \alpha_{max}) = +\infty$ . On renvoie à [Bal95] et [Gol96b] pour une analyse fine de ces phénomènes de pression intergranulaire; on détaille dans le chapitre 1 plusieurs lois pour  $g$  ( $h$  étant déduite explicitement de  $g$ , en considérant une forme intégrale de l'équation d'énergie interparticulaire) associées à différentes propositions issues de la littérature (voir [Gol96b]). Ces lois sont telles que  $\Xi(\alpha_2)$  est monotone croissante,  $\Xi(\alpha_2 = \alpha_{max}) = +\infty$  et  $\Xi(\alpha_2 = 0) = 0$ .

$\underline{I}$  désigne le terme de transfert de quantité de mouvement interfacial; on ne considère pas les effets de masse ajoutée et d'histoire (hypothèse classique dans le cadre des écoulements gaz-particules) et les effets de traînée statique sont modélisés comme suit (Cf. [Bal95] et [Gid93]):

$$\underline{I} = -\alpha_1 \alpha_2 K_T \underline{U}_r \quad (4.6a)$$

$$K_T = \begin{cases} \frac{3}{4} \frac{C_d}{d_2} \rho_1 \alpha_1^{-2.7} \|\underline{U}_r\| & \text{si } \alpha_2 < 0.2 \\ \frac{\rho_1}{\alpha_1 d_2} \left( \alpha_2 \frac{150}{Re} + 1.75 \right) \|\underline{U}_r\| & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.6b)$$

$$\text{avec } Re = \alpha_1 \frac{d_2}{\nu_1} \|\underline{U}_r\| \quad (4.6c)$$

$$\text{et } C_d = \begin{cases} \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.7}) & \text{si } Re < 1000 \\ 0.44 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.6d)$$

$\underline{U}_r = \underline{U}_2 - \underline{U}_1$  désigne la vitesse relative entre les deux phases.  $\nu_1$  représente la viscosité du gaz et  $d_2$  le diamètre moyen des particules, tous les deux étant supposés constants.

Les tenseurs visqueux  $\underline{\underline{\Sigma}}_k$ ,  $k=1, 2$ , sont modélisés de façon classique, les coefficients de viscosité  $\eta_k$  étant des constantes positives:

$$\underline{\underline{\Sigma}}_k = -\eta_k \left( \nabla \underline{U}_k + \nabla^t \underline{U}_k - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{U}_k) \underline{\underline{Id}} \right) \quad (4.7)$$

Ce modèle fermé «simple» a, entre autres, l'intérêt de permettre le calcul d'écoulements dilués ou denses en particules.

## 4.2 Quelques propriétés du système global

### 4.2.1 Entropie du système

On trouvera la définition de l'entropie mathématique dans le paragraphe 2.4. On donne ici un résultat analogue à celui publié par Sainsaulieu dans le cas d'écoulements gaz-liquide dilués (Cf. [Sai91]). On pose :

$$\eta = \frac{1}{2} \alpha_1 \rho_1 \|\underline{U}_1\|^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \rho_2 \|\underline{U}_2\|^2 + \alpha_2 \rho_2 H_2(\alpha_2) + \alpha_1 \rho_1 H_1(\rho_1) \quad (4.8a)$$

$$\begin{aligned} \underline{E}_\eta = & \frac{1}{2} \alpha_1 \rho_1 \|\underline{U}_1\|^2 \underline{U}_1 + \frac{1}{2} \alpha_2 \rho_2 \|\underline{U}_2\|^2 \underline{U}_2 + P(\rho_1) (\alpha_1 \underline{U}_1 + \alpha_2 \underline{U}_2) \\ & + \alpha_1 \rho_1 H_1(\rho_1) \underline{U}_1 + \alpha_2 \rho_2 (H_2(\alpha_2) + \Xi(\alpha_2)) \underline{U}_2 \end{aligned} \quad (4.8b)$$

où les fonctions  $H_1(\rho_1)$  et  $H_2(\alpha_2)$  sont telles que :

$$\rho_1^2 H_1'(\rho_1) = P(\rho_1) \quad \text{et} \quad \alpha_2 H_2'(\alpha_2) = \Xi(\alpha_2) \quad (4.9)$$

Soit le vecteur d'état  $\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_2, \alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1, \alpha_2 \underline{U}_2)$ . On peut vérifier que le couple  $(\eta(\underline{W}), \underline{E}_\eta(\underline{W}))$  définit un couple entropie-flux d'entropie pour le système (4.1). L'entropie  $\eta(\underline{W})$  d'une solution régulière  $\underline{W}$  du système (4.1), avec les lois de fermeture (4.2, 4.3, 4.5b, 4.4, 4.6, 4.7), vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta + \nabla \cdot \underline{E}_\eta + \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{U}_1 \underline{\Sigma}_1 + \alpha_2 \underline{U}_2 \underline{\Sigma}_2) = \underline{S}_\eta(\underline{W})$$

Le terme source  $\underline{S}_\eta(\underline{W})$  s'écrit :

$$\underline{S}_\eta(\underline{W}) = \frac{\alpha_1}{2} \underline{\Sigma}_1 : (\nabla \underline{U}_1 + \nabla^t \underline{U}_1) + \frac{\alpha_2}{2} \underline{\Sigma}_2 : (\nabla \underline{U}_2 + \nabla^t \underline{U}_2) + \underline{I} \cdot (\underline{U}_2 - \underline{U}_1)$$

On vérifie simplement l'inégalité d'entropie (2.10)  $\underline{S}_\eta(\underline{W}) \leq 0$  dès lors que  $\alpha_2 \in [0, 1]$ . On lui associe la limite non visqueuse suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta + \nabla \cdot \underline{E}_\eta \leq 0$$

On peut noter que l'inégalité d'entropie, ne nous fournit pas, dans ce cas, un critère simple de sélection de solution admissible à la traversée des ondes de choc (on rappelle que dans le cas de la dynamique des gaz isentropique, l'inégalité d'entropie est équivalente à  $[\underline{U} \cdot \underline{n}] \leq 0$  où  $\underline{n}$  désigne le vecteur normal à la discontinuité, Cf. le paragraphe 2.8.1.4). On observera le comportement numérique de l'inégalité d'entropie dans les zones de choc sur une simulation numérique bidimensionnelle.



### 4.2.2 Principe du maximum et positivité

Les systèmes à deux fluides à quatre équations en général imposent les conditions de réalisabilité suivantes :

- (i) respect du principe du maximum pour la variable fraction volumique :

$$0 \leq \alpha_2 < \alpha_{max} \leq 1 \quad (4.10)$$

$\alpha_{max}$  désigne le taux de compactage maximum des particules supposées sphériques et de même diamètre. Dans les applications, on considérera  $\alpha_{max} = 0.64$ .

- (ii) respect de la positivité des densités :

$$\rho_1 \geq 0 \text{ et } \rho_2 \geq 0$$

Dans la condition (i), on considère que l'on ne peut pas atteindre le taux de compactage maximum car  $\alpha_2 = \alpha_{max}$  n'est pas une solution du système (4.1). Dans le cas limite où  $\alpha_2$  tend vers  $\alpha_{max}$ ,  $g(\alpha_2)$  tend vers l'infini et l'énergie turbulente des particules devient infinie. Dans le cas qui nous intéresse la condition (ii) se restreint à la positivité de la densité du gaz puisque l'on suppose incompressible la phase des particules.

On peut démontrer le respect du principe du maximum (4.10) dans le cas où les deux phases sont incompressibles,  $\alpha_{max}$  égal à 1 et avec une hypothèse de régularité correcte des champs de vitesse. En effet, dans ce cas, la matrice en temps n'est plus inversible, on réécrit les équations de conservation de masse sous la forme :

$$\underline{Z} = (1 - \alpha_2) \underline{U}_1 + \alpha_2 \underline{U}_2 \quad (4.11a)$$

$$\nabla \cdot \underline{Z} = 0 \quad (4.11b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0 \quad (4.11c)$$

On a alors le résultat suivant :

**Proposition 4.1** *On suppose que  $\underline{U}_k \in (L^\infty(D \times [0, T]))^d$  et que  $(\nabla \cdot \underline{U}_k) \in L^\infty(D \times [0, T])$  pour  $k = 1, 2$ ,  $d$  la dimension spatiale du problème,  $D$  le domaine de l'écoulement et  $T$  un temps positif. Si les conditions initiales et aux limites pour la variable fraction volumique sont telles que :*

$$\alpha_2(\underline{x}, t = 0) \geq 0 \quad ; \quad \alpha_2(\underline{x}, t = 0) \leq 1$$

$$\alpha_2(\underline{x} \in \Gamma_2, t > 0) \geq 0 \quad ; \quad \alpha_2(\underline{x} \in \Gamma_1, t > 0) \leq 1$$

où

$$\Gamma_1 = \{\underline{x} \in \partial D \mid \underline{U}_1 \cdot \underline{n} < 0\} \quad ; \quad \Gamma_2 = \{\underline{x} \in \partial D \mid \underline{U}_2 \cdot \underline{n} < 0\}$$

alors la fraction volumique reste réalisable.

*Démonstration.* On pose  $\beta = 1 - \alpha_2$ , ce qui entraîne, d'après les équations (4.11) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta = -\frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 = \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = \nabla \cdot (\underline{Z} - \beta \underline{U}_1) = -\nabla \cdot (\beta \underline{U}_1)$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta + \beta \nabla \cdot \underline{U}_1 + \underline{U}_1 \cdot \nabla \beta = 0$$

On obtient le résultat voulu par le lemme suivant :

**Lemme 4.1** *On considère la loi de conservation suivante sur un domaine  $D$  de dimension  $d$  et de frontière  $\partial D = \Gamma_- \cup \Gamma_+$  :*

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi + \underline{U} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \underline{U} = 0 \tag{4.12}$$

où  $\phi(\underline{x}, t)$  est une fonction scalaire telle que  $\phi(\underline{x} \in D, t = 0) > 0$  et  $\phi(\underline{x} \in \Gamma_-, t \geq 0) > 0$ .

Si la vitesse  $\underline{U}$  est telle que  $|\nabla \cdot \underline{U}|(\underline{x} \in D, t \geq 0) < +\infty$ , alors  $\phi(\underline{x} \in D, t > 0) > 0$ .

*Démonstration.* On pose  $\phi = \phi^+ - \phi^-$  où les fonctions  $\phi^+$  et  $\phi^-$  sont définies par  $\phi^+(\underline{x}, t) = \sup(\phi(\underline{x}, t), 0)$  et  $\phi^-(\underline{x}, t) = |\inf(0, \phi(\underline{x}, t))|$ . En multipliant l'équation de conservation (4.12) par  $\phi^-$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi^-)^2 + \underline{U} \cdot \nabla (\phi^-)^2 + 2 (\phi^-)^2 \nabla \cdot \underline{U} = 0$$

On pose  $X(t) = \int_D (\phi^-)^2 dD$ ,  $\Gamma^- = \{\underline{x} \in D \mid \underline{U} \cdot \underline{n} < 0\}$  et  $\Gamma^+ = \{\underline{x} \in D \mid \underline{U} \cdot \underline{n} \geq 0\}$ ; on a donc :

$$\frac{d}{dt} X = - \int_{\Gamma^-} \underline{U} \cdot \underline{n} (\phi^-)^2 d\Gamma - \int_{\Gamma^+} \underline{U} \cdot \underline{n} (\phi^-)^2 d\Gamma - \int_D (\phi^-)^2 \nabla \cdot \underline{U} dD$$

Or, par hypothèse  $\phi(\underline{x} \in \Gamma_-, t) > 0$ , ce qui entraîne  $\phi^-(\underline{x} \in \Gamma_-, t) = 0$ , et donc :

$$\frac{d}{dt}X = - \int_{\Gamma_+} \underline{U} \cdot \underline{n} (\phi^-)^2 d\Gamma_- - \int_D (\phi^-)^2 \nabla \cdot \underline{U} dD$$

Par définition de  $\Gamma^+$ , on obtient alors :

$$\frac{d}{dt}X \leq - \int_D (\phi^-)^2 \nabla \cdot \underline{U} dD \leq \|\underline{U}\|_{L^\infty(D \times [0, T])} \int_D (\phi^-)^2 dD$$

et par intégration :

$$0 \leq X(t) \leq X(0) \exp(t \|\underline{U}\|_{L^\infty(D \times [0, T])})$$

Dès lors,  $X(0) = 0$  entraîne que  $X(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ , d'où le lemme.

On s'intéresse maintenant au cas où la phase continue est compressible. On ne peut pas démontrer que l'on a préservation du principe du maximum pour le système (4.1). Pour des solutions suffisamment régulières du système (4.1), on peut néanmoins établir le résultat suivant :

**Proposition 4.2** *On suppose que  $\underline{U}_k \in (L^\infty(D \times [0, T]))^d$  et que  $(\nabla \cdot \underline{U}_k) \in L^\infty(D \times [0, T])$  pour  $k = 1, 2$ ,  $d$  la dimension spatiale du problème,  $D$  le domaine de l'écoulement et  $T$  un temps positif. Si les conditions initiales et aux limites pour les variables fraction volumique et fraction massique sont telles que :*

$$\begin{aligned} \alpha_2(\underline{x}, t = 0) &\geq 0 \quad ; \quad \alpha_1 \rho_1(\underline{x}, t = 0) \geq 0 \\ \alpha_2(\underline{x} \in \Gamma_2, t > 0) &\geq 0 \quad ; \quad \alpha_1 \rho_1(\underline{x} \in \Gamma_1, t > 0) \geq 0 \end{aligned}$$

où

$$\Gamma_1 = \{\underline{x} \in \partial D \mid \underline{U}_1 \cdot \underline{n} < 0\} \quad ; \quad \Gamma_2 = \{\underline{x} \in \partial D \mid \underline{U}_2 \cdot \underline{n} < 0\}$$

alors la solution sera telle que :

$$\alpha_2(\underline{x}, t \geq 0) \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha_1 \rho_1(\underline{x}, t \geq 0) \geq 0 \quad (4.13)$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le lemme 4.1 aux équations de conservation de masse (4.1a) et (4.1b).

On n'a donc pas démontré que le système (4.1) respecte le principe du maximum (4.10); ce qui peut poser un problème dans les cas denses en particules (i.e. quand  $\alpha_2$  tend vers 1), dans la mesure où le terme de gradient de pression  $\alpha_k \nabla P(\rho_1)$  nécessite le calcul des variables intermédiaires  $\alpha_1$  et  $\rho_1$ , définies par :

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_2 \text{ et } \rho_1 = \frac{\alpha_1 \rho_1}{1 - \alpha_2},$$

le non respect du principe du maximum (4.10) peut entraîner des états  $\alpha_1$  et  $\rho_1$  négatifs. On revient sur ce point fondamental dans les propositions 4.4 et 4.5.

### 4.3 Etude de l'hyperbolicité du système de convection

Le système de convection associé à (4.1), avec les lois de fermeture (4.2, 4.3, 4.5b, 4.4) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) = 0 \quad (4.14a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0 \quad (4.14b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) + \alpha_1 \nabla P(\rho_1) = \underline{0} \quad (4.14c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P(\rho_1) + \nabla(\alpha_2 \Xi(\alpha_2)) = \underline{0} \quad (4.14d)$$

Ce système est donc non conservatif du fait de la présence du terme  $\alpha_k \nabla P(\rho_1)$  dans les équations de quantité de mouvement. Par contre, l'équation de quantité de mouvement du mélange ( $\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 + \alpha_2 \rho_2 \underline{U}_2$ ) est, quant à elle, conservative. Rappelons que les modèles proposés par Saurel *et al* [Sau94] et Gidaspow [Gid93] (modèle B, pages 150-151) sont conservatifs. Un inconvénient du modèle B de Gidaspow est que les particules ne sont pas sensibles au gradient de pression du gaz, ce qui conduit à des configurations non physiques lorsque la densité des particules est relativement faible. Soit  $\Omega$  l'espace des états physiquement admissibles et  $d$  la dimension spatiale du problème :

$$\Omega = \left\{ \underline{W} \in \mathbb{R}^{2(d+1)}, \rho_1 \geq 0, 0 \leq \alpha_2 < \alpha_{max} \right\}$$

On définit le vecteur unitaire  $\underline{n} \in \mathbb{R}^d$ . On introduit les deux célérités suivantes définies tant que  $\underline{W} \in \Omega$  :

$$c_1^2 = (P(\rho_1))' \text{ et } c_2^2 = (\alpha_2 \Xi(\alpha_2))' \quad (4.15)$$

Il est important de noter que tant que le principe du maximum (4.10) est vérifié, la célérité  $c_2$  est définie dans  $\mathbb{R}$  car la fonction  $\Xi(\alpha_2)$  issue de l'équation (4.4) est telle que  $(\alpha_2 \Xi(\alpha_2))' > 0$ .

On introduit la notation  $\mathcal{U}_k = \underline{U} \cdot \underline{n}$ ,  $k = 1, 2$ , pour tout  $\underline{n}$ . Dans le cadre bidimensionnel, le polynôme caractéristique de la matrice Jacobienne associée au système (4.14) s'écrit :

$$P_6(\underline{W}, \underline{n}, \lambda) = (\mathcal{U}_2 - \lambda)(\mathcal{U}_1 - \lambda) \left[ ((\mathcal{U}_2 - \lambda)^2 - c_2^2) ((\mathcal{U}_1 - \lambda)^2 - c_1^2) - \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} c_1^2 (\mathcal{U}_1 - \lambda)^2 \right]$$

Le polynôme  $P_6(\underline{W}, \underline{n}, \lambda)$  admet deux solutions immédiates :

$$\lambda_1 = \mathcal{U}_1 \text{ et } \lambda_2 = \mathcal{U}_2$$

On ne peut obtenir l'expression analytique des quatre autres valeurs propres. Cependant, en étudiant le polynôme caractéristique  $P_4(\underline{W}, \underline{n}, \lambda)$  défini par  $P_6(\underline{W}, \underline{n}, \lambda) = (\mathcal{U}_2 - \lambda)(\mathcal{U}_1 - \lambda)P_4(\underline{W}, \underline{n}, \lambda)$ , on obtient les conditions suffisantes d'hyperbolicité suivantes (en définissant la vitesse relative  $\mathcal{U}_r = \underline{U}_r \cdot \underline{n}$ ) :

$$\mu_1(\underline{W}) = \frac{1}{2} - \frac{|\mathcal{U}_r|}{c_1} > 0 \quad (4.16a)$$

$$\mu_2(\underline{W}) = \frac{1}{4} - \left( \frac{c_2^2}{c_1^2} + \frac{\alpha_2 \rho_1}{\alpha_1 \rho_2} \right) > 0 \quad (4.16b)$$

$$\mu_3(\underline{W}) = \left( \frac{\alpha_1 \rho_2 c_2^2}{\alpha_2 \rho_1 c_1^2} + 1 \right) \left( 1 - \left( \frac{\mathcal{U}_r}{c_1} \right)^2 \right) - 1 > 0 \quad (4.16c)$$

Chacune de ces conditions peut être plus ou moins contraignante suivant le type d'écoulement choisi, ici gaz-solide, suivant que l'on est dans un cadre d'écoulement dense ( $c_1 \ll c_2$ ) ou dilué ( $c_2 \ll c_1$ ), avec des particules très lourdes ( $\rho_2 \gg \rho_1$ ) et une vitesse relative entre phases plus ou moins importante. On ne peut, en outre, pas démontrer que la solution  $\underline{W}(\underline{x}, t)$  du système (4.14) vérifie  $\mu_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , pour tout  $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$  et à tout instant  $t > 0$ .

Au voisinage des états physiques caractérisés par une vitesse relative nulle, et dans un cadre bi-dimensionnel, on peut écrire la forme approchée suivante des valeurs propres du système (4.14) :

$$\lambda_1 = \mathcal{U}_1 \quad , \quad \lambda_2 = \mathcal{U}_2$$

$$\lambda_{3,4} = \mathcal{U}_M \pm c_1 \sqrt{X^+} + \mathcal{O}(\mathcal{U}_r)$$

$$\lambda_{5,6} = \mathcal{U}_M \pm c_1 \sqrt{X^-} + \mathcal{O}(\mathcal{U}_r)$$

avec la vitesse du mélange  $\mathcal{U}_M = \underline{U}_M \cdot \underline{n} = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{U}_2) \cdot \underline{n}$  et,  $X^+$  et  $X^-$  les racines du polynôme bi-carré suivant issu du polynôme  $P_4$  :

$$P(X) = X^2 - \left( \frac{c_2^2}{c_1^2} + \frac{\rho_2 \alpha_1 + \rho_1 \alpha_2}{\rho_2 \alpha_1} \right) X + \frac{c_2^2}{c_1^2}$$

Du fait que l'on n'a pas l'expression analytique des valeurs propres, le système (4.14) est conditionnellement hyperbolique et le problème de Riemann unidimensionnel associé ne peut être résolu pour des conditions initiales arbitraires.

**Remarque 4.1** *Si l'on se place dans un cadre de particules infiniment denses, i.e.  $\rho_2$  tend vers l'infini, alors le terme  $\frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P(\rho_1)$  peut être négligé, le système associé à la phase 2 pouvant s'identifier exactement au système d'Euler isentropique. On se retrouve de plus dans un cadre inconditionnellement hyperbolique (dès lors que  $P'(\rho_1)$  et  $(\alpha_2 \Xi(\alpha_2))'$  restent positifs) et le système admet en dimension 2 les valeurs propres suivantes :*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= U_1 & \lambda_2 &= U_2 \\ \lambda_{3,4} &= U_1 \pm c_1 & \lambda_{5,6} &= U_2 \pm c_2 \end{aligned}$$

**Remarque 4.2** *Le problème aux valeurs propres est mal conditionné tant dans le cadre d'écoulements dilués, où l'on a  $c_2 \ll c_1$ , que dans le cadre d'écoulements denses,  $c_1 \ll c_2$ .*

**Remarque 4.3** *Le modèle proposé dans [Sau94], réservé à un cadre d'écoulement très dilué sans prise en compte des interactions particulières ni des effets de la pression moyenne de l'écoulement sur la phase dispersée, est un système conservatif inconditionnellement hyperbolique. Le modèle B proposé par Gidaspow [Gid93], pour les écoulements denses ou dilués avec prise en compte des interactions entre particules, est également un système conservatif inconditionnellement hyperbolique.*

## 4.4 Proposition d'un splitting du système de convection

Dans ce paragraphe, on propose un splitting du système de convection (4.1) en justifiant ce choix. Puis l'on construit la solution exacte du problème de Riemann pour chaque sous-système. Pour cela, on définit des relations de saut approchées pour connecter les états des termes non conservatifs de part et d'autre d'une discontinuité. Sous cette hypothèse, on introduit un système conservatif équivalent au système non conservatif. On donne un théorème d'existence et d'unicité de solution du problème de Riemann pour chaque sous-système et l'on examine le respect du principe du maximum (4.10).

### 4.4.1 Principe de la méthode et proposition d'un splitting

On ne considère ici que les effets dominants et on néglige les effets de diffusion. On réécrit le système (4.1), avec les lois de fermeture (4.2, 4.3, 4.5b, 4.4, 4.6), sous forme matricielle en dimension  $d$  d'espace :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \sum_{m=1}^d \left\{ \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{F}_1^m(\underline{W}) + \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{F}_2^m(\underline{W}) + \underline{A}_{NC}^m(\underline{W}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{F}_3^m(\underline{W}) \right\} = \underline{S}(\underline{W}) \quad (4.17)$$

On rappelle le vecteur d'état :

$$\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_2, \alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1, \alpha_2 \underline{U}_2)$$

$(\underline{F}_1 + \underline{F}_2)^m(\underline{W})$  désigne le flux convectif selon la  $m^{\text{ième}}$  direction,  $\underline{A}_{NC}^m(\underline{W})$  la matrice des termes non conservatifs associés à la  $m^{\text{ième}}$  direction et  $\underline{S}(\underline{W})$  les termes source (traînée statique  $\underline{I}$  et gravité).

Du fait de l'hyperbolicité conditionnelle et de la non conservativité du système de convection associé, le cadre théorique des systèmes hyperboliques ne s'applique pas à ce dernier. Diverses propositions, s'appuyant sur la théorie de résolution des systèmes hyperboliques, ont été faites pour résoudre ce type de système dans [Sai95a], [Tou96] et [Kum93] notamment. On souhaite ici développer une méthode numérique instationnaire qui autorise les simulations comportant de fortes vitesses relatives, de forts ou de faibles taux de présence volumiques sur des maillages non structurés. Pour cela, on choisit de mettre en œuvre une méthode à pas fractionnaires qui résout séparément d'une part le système convectif et les termes sources, mais qui décompose également la partie convective en deux étapes :

– Convection :

$$\text{Etape 1} \quad \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \sum_{m=1}^d \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{F}_1^m(\underline{W}) = \underline{0}$$

$$\text{Etape 2} \quad \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \sum_{m=1}^d \left\{ \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{F}_2^m(\underline{W}) + \underline{A}_{NC}^m(\underline{W}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{F}_3^m(\underline{W}) \right\} = \underline{0}$$

– Prise en compte des termes sources :

$$\text{Etape 3} \quad \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} = \underline{S}(\underline{W})$$

Pour la détermination de  $\underline{F}_1^m(\underline{W})$  et de  $\underline{F}_2^m(\underline{W})$ , on impose le respect des critères suivants :

- préserver la forme «conservative»,
- préserver l'hyperbolicité, i.e. que les deux sous-systèmes associés aux étapes 1 et 2 n'aient pas des domaines d'hyperbolicité plus restreints que celui associé au système (4.14),
- préserver l'invariance par rotation,
- préserver la positivité des fractions massiques, et éventuellement, s'il y a lieu, le principe du maximum (4.10).

Pour répondre à ce dernier critère, on examinera la solution du problème de Riemann unidimensionnel associé à chaque étape de convection.

Au vu de ces critères, la décomposition que l'on propose est la suivante :

- Etape 1, avec les lois de fermeture (4.5b, 4.4) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) = 0 \quad (4.18a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_2 + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0 \quad (4.18b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) = \underline{0} \quad (4.18c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + \nabla(\alpha_2 \Xi(\alpha_2)) = \underline{0} \quad (4.18d)$$

- Etape 2, avec les lois de fermeture (4.2, 4.3) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) = 0 \quad (4.19a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_2 = 0 \quad (4.19b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) + \alpha_1 \nabla P(\rho_1) = \underline{0} \quad (4.19c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 \underline{U}_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P(\rho_1) = \underline{0} \quad (4.19d)$$

Les termes non conservatifs sont regroupés dans l'étape 2. Dans l'étape 1, les deux phases sont découplées, les équations sur la phase 2 pouvant être exactement identifiées aux équations d'Euler isentropique. Le sous-système associé à la deuxième étape est partiellement découplé : on résout le système (4.19a-4.19c) qui détermine la solution pour  $\alpha_2 \underline{U}_2$  via l'équation (4.19d). On reconnaît dans (4.19a,4.19c), lorsque  $\alpha_1 = 1$ , le sous-système de propagation acoustique classique dans le cadre monophasique compressible.

**Remarque 4.4** *On peut noter que le splitting proposé (4.18,4.19) n'est pas admissible (ou consistant) au sens de Chalabi et Vila [Cha91] car l'entropie (4.8a) du système complet (4.1) ne caractérise pas une entropie du sous-système (4.18) ni du sous-système (4.19).*

#### 4.4.2 Etude du problème de Riemann monodimensionnel associé à l'étape 1

Dans le système (4.18), les deux phases sont découplées. En effet, soient, en une dimension d'espace :



$$\underline{W} = \begin{pmatrix} \underline{W}_1 \\ \underline{W}_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \underline{W}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_1 \rho_1 U_1 \end{pmatrix} \text{ et } \underline{W}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 U_2 \end{pmatrix}$$

Le système (4.18) s'écrit sous forme non conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{A}(\underline{W}) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} = \underline{0}$$

et de façon équivalente :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \underline{W}_1 \\ \underline{W}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{A}_1(\underline{W}_1) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_2(\underline{W}_2) \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \underline{W}_1 \\ \underline{W}_2 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

où

$$\underline{A}_1(\underline{W}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -U_1^2 & 2U_1 \end{pmatrix} \text{ et } \underline{A}_2(\underline{W}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U_2^2 + c_2^2 & 2U_2 \end{pmatrix}$$

On peut donc étudier séparément le problème de Riemann associé au sous-système (4.18a,4.18c) et celui associé au sous-système (4.18b,4.18d).

#### 4.4.2.1 Etude du problème de Riemann associé à la phase continue

On étudie le problème de Riemann associé au sous-système (4.18a,4.18c). Soit  $\underline{W}_1^t = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 U_1)$  le vecteur des variables d'état conservatives. On veut résoudre le problème suivant :

Trouver  $\underline{W}_1(x, t)$  solution de (4.18a,4.18c) et tel que :

$$\underline{W}_1(x, t = 0) = \begin{cases} (\underline{W}_1)_L & \text{si } x \leq 0 \\ (\underline{W}_1)_R & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $(\underline{W}_1)_L, (\underline{W}_1)_R$  deux états constants admissibles.

Le système est (4.18a,4.18c) inconditionnellement hyperbolique et la Jacobienne associée  $\underline{A}_1(\underline{W})$  admet en dimension 1 les valeurs propres suivantes :

$$\lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 2 U_1$$

Le champ associé à  $\lambda_1$  est linéairement dégénéré et celui associé à  $\lambda_2$  est vraiment non linéaire.

Les invariants de Riemann sont donnés par :

$$\text{1-onde : } \phi_1 = \alpha_1 \rho_1 U_1^2$$

$$\text{2-onde : } \phi_2 = \alpha_1 \rho_1$$

et les relations de Rankine-Hugoniot associées au système sont :

$$\sigma [\alpha_1 \rho_1] = 0$$

$$\sigma [\alpha_1 \rho_1 U_1] = [\alpha_1 \rho_1 U_1^2]$$

La paramétrisation des ondes en présence de discontinuités conduit à :

$$\text{1-onde : } [\alpha_1 \rho_1 U_1^2] = 0$$

$$\text{2-onde : } [\alpha_1 \rho_1] = 0$$

$$\sigma = 2 \overline{U_1}$$

La fraction massique  $\alpha_1 \rho_1$  est stationnaire (Cf. l'équation (4.18a)).

Le système admet le couple entropie-flux d'entropie suivant :

$$\eta(\underline{W}_1) = (\alpha_1 \rho_1)^{3/2} U_1^2 ,$$

$$F_\eta(\underline{W}_1) = \frac{4}{3} \eta U_1$$

Soit  $\underline{Z}_1^t = (\alpha_1 \rho_1, U_1)$  un vecteur de variables d'état et  $\underline{Z}_1^*$  l'état intermédiaire constant reliant la 1-onde à la 2-onde. La paramétrisation globale des ondes s'écrit alors :

- Si  $(U_1)_L < 0$  et  $(U_1)_R > 0$  alors on est en présence d'une 2-onde de détente qui englobe l'axe  $x/t = 0$  (et donc la discontinuité de contact). Il n'y a alors pas d'état intermédiaire  $\underline{Z}_1^*$  et la solution est :

$$\underline{Z}_1(x/t; \underline{W}_L, \underline{W}_R) = \begin{cases} (\underline{Z}_1)_L & \text{si } x/t < 2(U_1)_L < 0 \\ (\underline{Z}_1)_{\text{détente}}(x/t) & \text{si } 2(U_1)_L < x/t < 2(U_1)_R \\ (\underline{Z}_1)_R & \text{si } x/t > 2(U_1)_R > 0 \end{cases}$$

$$\text{où } \underline{Z}_1(x/t) = \begin{cases} (\alpha_1 \rho_1)(x/t) = \begin{cases} (\alpha_1 \rho_1)_L & \text{si } x/t < 0 \\ (\alpha_1 \rho_1)_R & \text{si } x/t \geq 0 \end{cases} \\ (U_1)(x/t) = x/2t & \text{si } 2(U_1)_L < x/t < 2(U_1)_R \end{cases}$$

On définit la vitesse  $(\hat{U}_1)_{L,R}$  suivante :

$$(\hat{U}_1)_{L,R} \equiv \sqrt{\frac{(\alpha_1 \rho_1)_L}{(\alpha_1 \rho_1)_R}} (U_1)_L + (U_1)_R$$

$$\text{- Si } (\hat{U}_1)_{L,R} < 0 \text{ alors } \underline{Z}_1^* = \begin{cases} (\alpha_1 \rho_1)^* = (\alpha_1 \rho_1)_R \\ (U_1)^* = \sqrt{\frac{(\alpha_1 \rho_1)_L}{(\alpha_1 \rho_1)_R}} (U_1)_L \end{cases}$$

$$\text{- Si } (\hat{U}_1)_{L,R} > 0 \text{ alors } \underline{Z}_1^* = \begin{cases} (\alpha_1 \rho_1)^* = (\alpha_1 \rho_1)_L \\ (U_1)^* = \sqrt{\frac{(\alpha_1 \rho_1)_R}{(\alpha_1 \rho_1)_L}} (U_1)_R \end{cases}$$

A la traversée d'une 2-détente  $U_1(x/t) = x/2t$  et la vitesse associée à un 2-choc est  $\sigma = 2\overline{U}_1$ .

#### 4.4.2.2 Etude du problème de Riemann associé à la phase dispersée

On étudie le problème de Riemann associé au sous-système (4.18b,4.18d). Soit  $\underline{W}_2^t = (\alpha_2, \alpha_2 U_2)$  le vecteur des variables d'état. On veut résoudre le problème suivant :

Trouver  $\underline{W}_2(x, t)$  solution de (4.18b,4.18d) et tel que :

$$\underline{W}_2(x, t = 0) = \begin{cases} (\underline{W}_2)_L & \text{si } x \leq 0 \\ (\underline{W}_2)_R & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $(\underline{W}_2)_L, (\underline{W}_2)_R$  deux états constants admissibles.

En identifiant terme à terme, on reconnaît dans le système (4.18b,4.18d), le système de la dynamique des gaz isentropique :

$$(4.18b) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{U}) = 0$$

$$(4.18d) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{U}) + \nabla \cdot (\rho \underline{U} \otimes \underline{U}) + \nabla P(\rho) = 0$$

où

$$(\alpha_2, \underline{U}_2, \alpha_2 \Xi(\alpha_2)) \Longleftrightarrow (\rho, \underline{U}, P(\rho))$$

Dans la section 2.8 du chapitre 2, on a étudié la résolution du problème de Riemann exact du système de la dynamique des gaz isentropique auquel on a associé une loi d'état qui vérifie :

$$P(\rho) \text{ telle que } P'(\rho) > 0 \text{ et } P''(\rho) > 0$$

On vérifie que la fonction  $\alpha_2 \Xi(\alpha_2)$  telle qu'elle est définie en (4.4) a bien ces propriétés. On a démontré alors le résultat suivant :

**Proposition 4.3** *Le problème de Riemann unidimensionnel, selon la direction portée par le vecteur  $\underline{n}$ , associé au système (4.18b,4.18d) admet une solution entropique unique si et seulement si :*

$$(\mathcal{U}_2)_R - (\mathcal{U}_2)_L < (X(\alpha_2))_L + (X(\alpha_2))_R \quad (4.22)$$

$$\text{avec } (X(\alpha_2))_i = \int_0^{(\alpha_2)_i} \frac{\sqrt{(x \Xi(x))'}}{x} dx, \quad i = L, R$$

où  $\mathcal{U}_2 = \underline{U}_2 \cdot \underline{n}$  et  $(\cdot)_L$  et  $(\cdot)_R$  désignent respectivement l'état de la variable  $(\cdot)$  à gauche et à droite de la discontinuité initiale.

Si l'inégalité (4.22) n'est pas vérifiée, le vide de particules ( $\alpha_2 = 0$ ) apparaît.

**Remarque 4.5** *Les invariants de Riemann associés au système (4.18b,4.18d) avec la loi d'état définie en (4.4) ne sont pas intégrables analytiquement. On ne peut donc pas résoudre analytiquement le problème de Riemann associé et mettre en œuvre de schéma de Godunov pour la résolution de ce système. On choisira donc de résoudre ce système par un schéma de Roe (Cf. la section 4.5.1.2). On trouvera néanmoins, dans l'annexe A, des simulations du système (4.18b,4.18d) résolu par un schéma de Godunov pour une loi réservée aux écoulements dilués  $\alpha_2 \Xi(\alpha_2) = \frac{2}{3} < q_2^2 >_0 \alpha_2^{5/3}$  (que l'on peut identifier terme à terme avec une loi d'état de type gaz parfait  $P(\rho) = K \rho^\gamma$ ).*

#### 4.4.2.3 Récapitulatif, condition d'existence et d'unicité de solution et principe du maximum

Le système (4.18) associé à l'étape 1 est inconditionnellement hyperbolique car  $(\alpha_2 \Xi(\alpha_2))'$  est positif (tant que le principe du maximum (4.10) est respecté) et admet en dimension 2 les valeurs propres suivantes (en notant  $\mathcal{U}_k = \underline{U}_k \cdot \underline{n}$ ) :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0 & \mu_1 &= \mathcal{U}_2 - c_2 \\ \lambda_2 &= \mathcal{U}_1 & \mu_2 &= \mathcal{U}_2 \\ \lambda_3 &= 2\mathcal{U}_1 & \mu_3 &= \mathcal{U}_2 + c_2\end{aligned}$$

On a le résultat suivant :

**Proposition 4.4** *Le problème de Riemann unidimensionnel (selon la direction associée à  $\underline{n}$ ) associé au système (4.18) admet une solution unique si :*

$$(\mathcal{U}_2)_R - (\mathcal{U}_2)_L < (X(\alpha_2))_L + (X(\alpha_2))_R \quad (4.23)$$

$$\text{avec } (X(\alpha_2))_i = \int_0^{(\alpha_2)_i} \frac{\sqrt{(x\Xi(x))'}}{x} dx, \quad i = L, R$$

où  $(\cdot)_L$  et  $(\cdot)_R$  désignent respectivement l'état de la variable  $(\cdot)$  à gauche et à droite de la discontinuité initiale.

On a les résultats suivants :

- (i) les variables  $\alpha_1 \rho_1$  et  $\alpha_2$  restent positives,
- (ii) la positivité de  $(1 - \alpha_2)$  est assurée si  $g(\alpha_2)$  est définie par l'expression (4.5b) ou une expression de même type (Cf. [Gol96b]) qui est telle que  $g(\alpha_2 = \alpha_{max}) = +\infty$ .

Si l'inégalité (4.23) n'est pas vérifiée, le vide de particules ( $\alpha_2 = 0$ ) apparaît.

*Démonstration.* L'existence et l'unicité d'une solution entropique pour les variables de la phase gazeuse  $\underline{W}_1$  est inconditionnelle alors que pour les variables de la phase dispersée, elle dépend du respect de l'inégalité (4.23) par les conditions initiales. Ceci est démontré dans la construction de la solution du problème de Riemann associé au sous-système de la phase dispersée. La positivité de la variable  $\alpha_1 \rho_1$  est immédiate puisque, d'après l'équation (4.18a), elle est stationnaire sur cette étape. Pour montrer que la variable  $\alpha_2$  reste positive, il suffit d'appliquer le lemme 4.1 à l'équation de conservation de la masse (4.18b).

Pour montrer, le respect du principe du maximum (4.10) pour la variable  $\alpha_2$ , considérons les relations de saut associées au sous-système (4.18b,4.18d) ; on obtient la relation suivante :

$$(\alpha_2)^* (\alpha_2)_L \frac{[\mathcal{U}_2]_{L,*}^2}{[\alpha_2]_{L,*}} = [\alpha_2 \Xi(\alpha_2)]_{L,*} \quad (4.24)$$

valable à la traversée d'une discontinuité associée à la 1-onde entre l'état initial  $(\underline{W}_2)_L$  et l'état intermédiaire  $(\underline{W}_2)^*$ . Pour simplifier, plaçons-nous dans le cas d'un double choc symétrique ( $(\mathcal{U}_2)_L = -(\mathcal{U}_2)_R$ ,  $(\alpha_2)_L = (\alpha_2)_R$  et  $\mathcal{U}_2^* = 0$ ) ; la relation (4.24) devient alors :

$$(\alpha_2)^* (\alpha_2)_L \frac{(\mathcal{U}_2)_L^2}{[\alpha_2]_{L,*}} = [\alpha_2 \Xi(\alpha_2)]_{L,*}$$

et l'on a :

$$\min((\alpha_2)^* (\alpha_2)_L) \geq (\alpha_2)_L^2 \quad \text{et} \quad \max((\alpha_2)^* - (\alpha_2)_L) = \alpha_{max}$$

Supposons que l'énergie cinétique initiale des particules est infinie, alors  $(\alpha_2)^* \Xi((\alpha_2)^*)$  devra absorber cette énergie infinie et comme, d'après la modélisation de la pression intergranulaire (4.4,4.5a,4.5b),  $\alpha_2 \Xi(\alpha_2)$  tend vers l'infini quand  $\alpha_2$  tend vers  $\alpha_{max}$ , on aura donc :

$$\max((\alpha_2)^*) = \alpha_{max}$$

On a donc montré que le principe du maximum (4.10) est préservé par le système (4.18b,4.18d) si la pression intergranulaire est infinie au voisinage du taux de compactage maximum des particules.

### 4.4.3 Etude du problème de Riemann associé à l'étape 2

On rappelle les équations associées à l'étape 2 :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1 U_1) = 0 \quad (4.25a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 = 0 \quad (4.25b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 U_1) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} P(\rho_1) = 0 \quad (4.25c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 U_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x} P(\rho_1) = 0 \quad (4.25d)$$

Soit  $\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_2, \alpha_1 \rho_1 U_1, \alpha_2 U_2)$  le vecteur des variables d'état. On veut résoudre le problème de Riemann suivant :

Trouver  $\underline{W} : (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[ \rightarrow \underline{W}(x, t) \in \Omega$ , solution de (4.25)

tel que :

$$\underline{W}(x, t = 0) = \begin{cases} \underline{W}_L & \text{si } x \leq 0 \\ \underline{W}_R & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.26a)$$

avec  $\underline{W}_L, \underline{W}_R$  deux états constants de  $\Omega$ .

Le système (4.25) associé à l'étape 2 est inconditionnellement hyperbolique (non strict) et admet, en dimension 1, les valeurs propres suivantes :

$$\lambda_1 = -c_1, \quad \lambda_{2,3} = 0 \quad \lambda_4 = c_1$$

Les 1- et 4-champs sont vraiment non linéaires et le champ associé à la 2-3 onde est linéairement dégénérée. Les invariants de Riemann sont donnés par :

$$\text{1-onde : } \phi^1 = \left( \alpha_1, \rho_1 U_1 + \int_0^{\rho_1} c_1(a) da, \rho_2 U_2 - \rho_1 U_1 \right)$$

$$\text{2-onde : } \phi^2 = (\rho_1, \alpha_1 \rho_1 U_1, \rho_2 U_2)$$

$$\text{3-onde : } \phi^3 = (\rho_1, \alpha_1, \alpha_1 \rho_1 U_1)$$

$$\text{4-onde : } \phi^4 = \left( \alpha_1, \rho_1 U_1 - \int_0^{\rho_1} c_1(a) da, \rho_2 U_2 - \rho_1 U_1 \right)$$

Le système (4.25) est non conservatif ; on lui associe les relations de saut approchées suivantes pour connecter les états de part et d'autre d'une discontinuité (Cf. la section 3.9.1 pour le cadre théorique) :

$$\sigma [\alpha_1 \rho_1] = [\alpha_1 \rho_1 U_1] \quad (4.27a)$$

$$\sigma [\alpha_1] = 0 \quad (4.27b)$$

$$\sigma [\alpha_1 \rho_1 U_1] = \overline{\alpha_1} [P(\rho_1)] \quad (4.27c)$$

$$\sigma [\alpha_2 U_2] = \frac{\overline{\alpha_2}}{\rho_2} [P(\rho_1)] \quad (4.27d)$$

où  $\bar{\cdot}$  désigne la moyenne arithmétique,  $[\cdot]$  le saut d'une variable à la traversée d'une discontinuité.

La paramétrisation des ondes en présence de discontinuités conduit à :

$$\begin{aligned} \text{1-onde :} \quad & [\alpha_1] = 0 \\ & [P(\rho_1)] = \sigma [\rho_1 U_1] \\ & [\rho_1 U_1 - \rho_2 U_2] = 0 \\ & \sigma = -\sqrt{\frac{[P(\rho_1)]}{[\rho_1]}} \quad \text{et} \quad [\rho_1] > 0 \end{aligned}$$

$$\text{2-3-onde :} \quad [\rho_1] = [\alpha_1 \rho_1 U_1] = 0$$

$$\begin{aligned} \text{4-onde :} \quad & [\alpha_1] = 0 \\ & [P(\rho_1)] = \sigma [\rho_1 U_1] \\ & [\rho_1 U_1 - \rho_2 U_2] = 0 \\ & \sigma = +\sqrt{\frac{[P(\rho_1)]}{[\rho_1]}} \quad \text{et} \quad [\rho_1] < 0 \end{aligned}$$

Le système admet le couple entropie-flux d'entropie suivant :

$$\begin{cases} \eta = \alpha_1 \rho_1 \left( \frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 + \frac{1}{\gamma + 1} P(\rho_1) \right) \\ F_\eta = \alpha_1 \rho_1 P(\rho_1) U_1 \end{cases}$$

Et l'inégalité d'entropie (2.10) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{\alpha_1 \bar{\rho}_1}{\gamma + 1} \sigma [\rho_1] \left\{ -\frac{[P(\rho_1)]}{[\rho_1]} + \gamma \frac{\overline{P(\rho_1)}}{\bar{\rho}_1} \right\} < 0$$

ce qui est équivalent à (Cf. l'inégalité d'entropie associée au système de la dynamique des gaz isentropique, section 2.8) :

$$[\rho_1 U_1] = \sigma [\rho_1] < 0$$



Notons que, pour être consistante, cette entropie nécessite de considérer une perturbation visqueuse du système de la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 \rho_1 U_1) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 U_1) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} P(\rho_1) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 U_1) \right)\end{aligned}$$

et non

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 \rho_1 U_1) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 U_1) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} P(\rho_1) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \alpha_1 \rho_1 \frac{\partial}{\partial x} U_1 \right)\end{aligned}$$

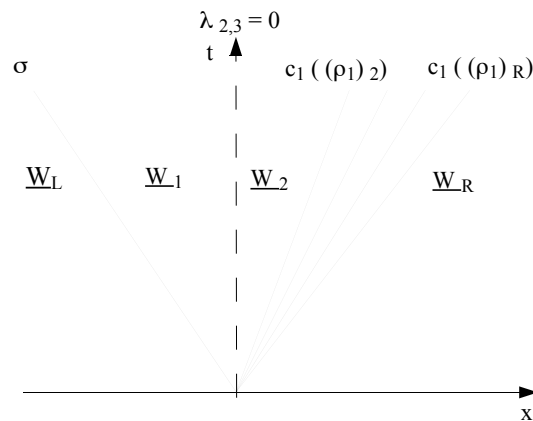


FIG. 4.1 – Représentation de la solution d'un problème de Riemann associé à l'étape 2 dans le plan  $(x, t)$  dans la configuration d'une 1-onde de choc et d'une 4-onde de détente.

Soit  $\underline{W}_1$  l'état intermédiaire constant reliant la 1-onde à la 2-3-onde et  $\underline{W}_2$  l'état intermédiaire constant reliant la 2-3-onde à la 4-onde (Cf. figure [4.1]). La paramétrisation globale des ondes s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\text{1-onde : } \quad & (\rho_1)_1 = z_1 (\rho_1)_L \\
& (\rho_1 U_1)_1 = (\rho_1 U_1)_L + (\rho_1 c_1)_L h_1(z_1) \\
& [\alpha_1]_{L,1} = 0 \\
& [\rho_2 U_2]_{L,1} = [\rho_1 U_1]_{L,1} \\
\\
\text{2-3-onde : } \quad & [\rho_1]_{1,2} = [\alpha_1 \rho_1 U_1]_{1,2} = 0 \\
\\
\text{4-onde : } \quad & (\rho_1)_R = z_2 (\rho_1)_2 \\
& (\rho_1 U_1)_R = (\rho_1 U_1)_2 + (\rho_1 c_1)_R h_2(z_2) \\
& [\alpha_1]_{2,R} = 0 \\
& [\rho_2 U_2]_{2,R} = [\rho_1 U_1]_{2,R}
\end{aligned}$$

où les fonctions  $h_1(z_1)$  et  $h_2(z_2)$  sont définies par :

$$h_1(z_1) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - z_1^{\frac{\gamma+1}{2}}\right) & \text{si détente, i.e. } z_1 \leq 1 \\ -\sqrt{\frac{1}{\gamma}(z_1-1)(z_1^\gamma-1)} & \text{si choc, i.e. } z_1 > 1 \end{cases}$$

$$h_2(z_2) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - z_2^{-\frac{\gamma+1}{2}}\right) & \text{si détente, i.e. } z_2 \geq 1 \\ -z_2^{-\frac{\gamma+1}{2}} \sqrt{\frac{1}{\gamma}(z_2^\gamma-1)(z_2-1)} & \text{si choc, i.e. } z_2 < 1 \end{cases}$$

On connecte les états  $\underline{W}_1$  et  $\underline{W}_2$  et l'on obtient le système résolvant à deux équations et deux inconnues  $z_1$  et  $z_2$  suivant :

$$\begin{cases} (\rho_1)_R = z_1 z_2 (\rho_1)_L \\ (\alpha_1 \rho_1 U_1)_R - (\alpha_1 \rho_1 U_1)_L = (\alpha_1 \rho_1 c_1)_R h_2(z_2) + (\alpha_1 \rho_1 c_1)_L h_1(z_1) \end{cases} \quad (4.28)$$

Le système (4.28) peut se ramener à un système à une équation et une inconnue en éliminant  $z_2$  :

$$(\alpha_1 \rho_1 U_1)_R - (\alpha_1 \rho_1 U_1)_L = (\alpha_1 \rho_1 c_1)_R h_2 \left( \frac{(\rho_1)_R}{(\rho_1)_L} \frac{1}{z_1} \right) + (\alpha_1 \rho_1 c_1)_L h_1(z_1)$$

Soit la fonction  $\Psi(z_1) = (\alpha_1 \rho_1 U_1)_R - (\alpha_1 \rho_1 U_1)_L$ , l'étude des variations de cette dernière nous montre qu'elle est monotone décroissante et qu'elle admet les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{z_1 \rightarrow 0^+} \Psi(z_1) &= \frac{2}{\gamma + 1} ((\alpha_1 \rho_1 c_1)_R + (\alpha_1 \rho_1 c_1)_L) \\ \lim_{z_1 \rightarrow +\infty} \Psi(z_1) &= -\infty \end{aligned}$$

On a donc unicité de la solution du problème de Riemann dès lors que les conditions initiales vérifient :

$$(\alpha_1 \rho_1 U_1)_R - (\alpha_1 \rho_1 U_1)_L < \frac{2}{\gamma + 1} ((\alpha_1 \rho_1 c_1)_L + (\alpha_1 \rho_1 c_1)_R)$$

On peut alors énoncer le résultat suivant :

**Proposition 4.5** *Avec les relations de saut (4.27), le problème de Riemann unidimensionnel (selon la direction associée à  $\underline{n}$ ) associé au système (4.25) admet une solution unique si :*

$$(\alpha_1 \rho_1 U_1)_R - (\alpha_1 \rho_1 U_1)_L < \frac{2}{\gamma + 1} ((\alpha_1 \rho_1 c_1)_L + (\alpha_1 \rho_1 c_1)_R) \quad (4.29)$$

avec la notation  $U_1 = \underline{U}_1 \cdot \underline{n}$ . On a de plus la préservation de la positivité de  $\alpha_1 \rho_1$ .

Si l'inégalité (4.29) n'est pas vérifiée, le vide de gaz ( $\rho_1 = 0$ ) apparaît.

*Démonstration.* Pour montrer que la variable  $\alpha_1 \rho_1$  reste positive, il suffit d'appliquer le lemme 4.1 à l'équation de conservation de la masse.

On note, que dans ce système, la variable  $\alpha_2 U_2$  n'intervient pas dans la condition d'existence d'une solution du problème de Riemann.

Il est évident que le principe du maximum (4.10) pour la fraction volumique est satisfait puisque  $\alpha_2$  est stationnaire dans cette étape. Sous l'hypothèse de la décomposition en (4.18,4.19), des relations de saut (4.27) associées à (4.19) et si  $g(\alpha_2)$  est telle que  $g(\alpha_2 = \alpha_{max}) = +\infty$ , on a alors préservation du principe du maximum (4.10) pour  $\alpha_2$  et de la positivité de  $\rho_1$  sur l'ensemble des pas fractionnaires. Ceci ne permet toutefois pas d'affirmer que le principe du maximum (4.10) est vérifié pour le système continu complet (4.17) (il faudrait pour cela démontrer que l'algorithme global est convergent).

Avant de détailler l'algorithme, il faut remarquer que le système conservatif suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \nabla(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) = 0 \quad (4.30a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_1 = 0 \quad (4.30b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 \underline{U}_1) + \nabla P(\rho_1) = \underline{0} \quad (4.30c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2 \underline{U}_2 - \rho_1 \underline{U}_1) = \underline{0} \quad (4.30d)$$

est équivalent au système (4.25) dans les zones régulières et admet les relations de saut équivalentes à (4.27). On pourra donc, dans le cas unidimensionnel et sous réserve que les conditions initiales vérifient (4.23), et (4.29), préserver numériquement les propriétés de positivité ( $\rho_1 > 0$  et  $0 < \alpha_2 < \alpha_{max}$ ), en utilisant un solveur de Godunov dans chaque pas étape, le système (4.25) étant réécrit sous la forme (4.30).

## 4.5 Schéma de résolution par une méthode à pas fractionnaires

Pour mettre en œuvre cet algorithme de résolution en dimension 2 d'espace (l'extension au cas tridimensionnel étant naturelle), on choisit un maillage bidimensionnel non structuré composé de cellules de type INRIA construites à partir d'une triangulation du domaine de l'écoulement (Cf. figure [3.1], paragraphe 3.1). On décrit ci-dessous une formulation volumes finis des deux étapes de convection et de l'étape de prise en compte des termes source de la méthode à pas fractionnaires à partir de solveurs de Godunov, de Roe et de type Roe, et on applique un schéma en temps d'ordre 1 de type Euler explicite de pas de temps  $\Delta t$ . Le choix de la méthode à pas fractionnaires par rapport à la méthode de splitting de flux vient du fait que : d'une part, dans un cadre monophasique pur ( $\alpha_1 = 1$ ) (Cf. le paragraphe 3.8.1), le schéma associé à la décomposition considérée semble mieux se comporter avec une méthode à pas fractionnaires et, d'autre part, dans le cadre diphasique, l'étude de stabilité linéaire  $L^2$  (Cf. annexe B) du schéma associé à la décomposition (4.18,4.19) met en évidence le comportement singulier d'une des valeurs propres de la matrice de gain associée à la méthode de splitting de flux.

Soient  $C_i$  une cellule du maillage, de volume  $|C_i|$ ,  $V(i)$  l'ensemble des cellules ayant une frontière commune avec  $C_i$  et  $\underline{n}_{ij}$  le vecteur normal à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ , extérieur à  $C_i$  ( $\underline{n}_{ij} = -\underline{n}_{ji}$ ). Le vecteur  $\underline{n}_{ji}$  est tel que :

$$\underline{n}_{ij} = \frac{\int_{\partial C_{ij}} \underline{n} d\Gamma}{\int_{\partial C_{ij}} d\Gamma},$$

l'interface  $\partial C_{ij}$  entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$  étant un bi-segment (Cf. figure [3.1]).

On calcule la valeur moyenne de  $\underline{W}$  par cellule  $C_i$  à la  $n^{\text{ième}}$  itération, c'est à dire au temps physique  $t^n$  tel que  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ , et l'on pose :  $\underline{W}(\underline{x} \in C_i, t^n) = \underline{W}_i^n$ .

On a également besoin de certaines valeurs de  $\underline{W}$  à l'interface  $\partial C_{ij}$  entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ , on introduit alors les notations suivantes :  $[\underline{W}]_{ij} = \underline{W}_j - \underline{W}_i$  le saut de  $\underline{W}$  à l'interface,  $\tilde{\underline{W}}_{ij} = \tilde{\underline{W}}(\underline{W}_i, \underline{W}_j)$  la moyenne au sens de Roe et  $\overline{\underline{W}}_{ij} = (\underline{W}_i + \underline{W}_j)/2$  la moyenne arithmétique.

### 4.5.1 Schéma associé à l'étape 1

Soit  $\underline{U}$  le vecteur vitesse de composante  $U$  sur l'axe  $x$  et  $V$  sur l'axe  $y$ . Comme les systèmes (4.18a,4.18c) et (4.18b,4.18d) sont découplés, on résout séparément les deux phases :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) = 0 \quad (4.31a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 U_1) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1 U_1^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_1 \rho_1 U_1 V_1) = 0 \quad (4.31b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 V_1) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1 U_1 V_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_1 \rho_1 V_1^2) = 0 \quad (4.31c)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_2 + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2 U_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_2 V_2) = 0 \quad (4.32a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 U_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2 U_2^2 + \alpha_2 \Xi(\alpha_2)) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_2 U_2 V_2) = 0 \quad (4.32b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 V_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2 U_2 V_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_2 V_2^2 + \alpha_2 \Xi(\alpha_2)) = 0 \quad (4.32c)$$

#### 4.5.1.1 Schéma associé à la phase continue

On choisit de mettre en œuvre un schéma de Godunov (Cf. paragraphe 3.3) pour résoudre le système (4.31) associé à la phase gazeuse. On pose  $\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 U_1, \alpha_1 \rho_1 V_1)$  le vecteur des variables d'état. On réécrit le système (4.31) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\underline{W} + \frac{\partial}{\partial x}F_x(\underline{W}) + \frac{\partial}{\partial y}F_y(\underline{W}) = \underline{0}$$

où  $F_x$  et  $F_y$  désignent les flux suivant les directions  $x$  et  $y$ . Le schéma s'écrit avec  $\underline{W}_i^*$  la valeur de  $\underline{W}_i$  calculée au temps intermédiaire  $t^*$  :

$$\underline{W}_i^* = \underline{W}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left\{ \sum_{j \in V(i)} \underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) \right\}^n$$

où  $\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij})$  désigne le flux de Godunov à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ . Il est égal au flux analytique  $\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}) = n_x \underline{F}_x(\underline{W}) + n_y \underline{F}_y(\underline{W})$  pris en la solution exacte  $\underline{W}(x/t^* = 0; \underline{W}_i, \underline{W}_j)$  du problème de Riemann à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ . On obtient alors l'expression de  $\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij})$  d'après la résolution du problème de Riemann effectuée dans le paragraphe 4.4.2.1; c'est un flux décentré suivant le signe de  $(\hat{U}_1)_{ij}$  :

$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) = \begin{cases} \underline{0} & \text{si } (\underline{U}_1)_i \cdot \underline{n}_{ij} < 0 \text{ et } (\underline{U}_1)_j \cdot \underline{n}_{ij} > 0 \\ \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) & \text{si } (\hat{U}_1)_{ij} > 0 \\ \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) & \text{si } (\hat{U}_1)_{ij} < 0 \end{cases}$$

où  $\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n})$  a pour expression :

$$\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) = (\underline{U}_1)_i \cdot \underline{n}_{ij} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \rho_1 U_1 \\ \alpha_1 \rho_1 V_1 \end{pmatrix}_i$$

avec  $(\hat{U}_1)_{ij} = (\hat{\underline{U}}_1)_{ij} \cdot \underline{n}_{ij}$  la vitesse définie par :

$$(\hat{\underline{U}}_1)_{ij} = \frac{(\sqrt{\alpha_1 \rho_1} U_1)_i + (\sqrt{\alpha_1 \rho_1} U_1)_j}{\sqrt{(\alpha_1 \rho_1)_j}}$$

**Remarque 4.6** *Il est intéressant de noter que les schémas de Godunov et de Roe conduisent dans ce cas précis au même flux numérique sauf dans le cas d'une double détente englobant la caractéristique  $x/t = 0$  (i.e.  $(\underline{U}_1)_i \cdot \underline{n}_{ij} < 0$  et  $(\underline{U}_1)_j \cdot \underline{n}_{ij} > 0$ ), pour lequel le schéma de Godunov impose un flux nul, contrairement au schéma de Roe, ce qui peut poser des problèmes de positivité de la variable  $\alpha_1 \rho_1$  si l'on ne fait pas de correction entropique.*

#### 4.5.1.2 Schéma associé à la phase dispersée

On décrit maintenant le schéma associé au système (4.32) de la phase dispersée. On travaille avec les variables  $\underline{W}^t = (\alpha_2, \alpha_2 U_2, \alpha_2 V_2)$ ; on peut identifier le système (4.32) au système de la dynamique des gaz isentropique. La simulation de ce dernier à l'aide d'un schéma de

Godunov est présentée dans l'annexe A (pour un cadre dilué avec  $g(\alpha_2) = 0$ ). On présente ici la formulation utilisant un schéma de Roe. On écrit, tout d'abord, le système (4.32) sous forme conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}_x(\underline{W}) + \frac{\partial}{\partial y} \underline{F}_y(\underline{W}) = \underline{0}$$

mais aussi sous forme non conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{A}_x(\underline{W}) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} + \underline{A}_y(\underline{W}) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \underline{W} = \underline{0}$$

où  $\underline{F}_x$  désigne le flux convectif dans la direction  $x$  et  $\underline{A}_x$  la matrice Jacobienne associée (idem dans la direction  $y$ ).

Soient  $\underline{U} = \underline{U} \cdot \underline{n}$ ,  $\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}) = n_x \underline{F}_x(\underline{W}) + n_y \underline{F}_y(\underline{W})$  et  $\underline{A}(\underline{W}, \underline{n}) = n_x \underline{A}_x(\underline{W}) + n_y \underline{A}_y(\underline{W})$ . La matrice  $\underline{A}(\underline{W}, \underline{n})$  s'écrit :

$$\underline{A}(\underline{W}, \underline{n}) = \underline{A}((\underline{U}_2, c_2), \underline{n}) = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y \\ n_x c_2^2 - U_2 \mathcal{U}_2 & n_x U_2 + \mathcal{U}_2 & n_y U_2 \\ n_y c_2^2 - V_2 \mathcal{U}_2 & n_x V_2 & n_y V_2 + \mathcal{U}_2 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\underline{A}$  est diagonalisable, elle admet les valeurs propres :

$$\mu_1 = U_2 - c_2, \quad \mu_2 = U_2, \quad \mu_3 = U_2 + c_2$$

et les vecteurs propres à droite associés sont :

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ U_2 - n_x c_2 \\ V_2 - n_y c_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ n_y \\ -n_x \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ U_2 + n_x c_2 \\ V_2 + n_y c_2 \end{pmatrix}$$

Le schéma de Roe s'écrit :

$$\underline{W}_i^* = \underline{W}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left\{ \sum_{j \in V(i)} \underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) \right\}^n$$

où  $\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij})$  désigne le flux numérique, à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ , qu'il faut déterminer.

On cherche maintenant une matrice satisfaisant les critères de Roe (Cf. le paragraphe 3.5). Pour cela, on considère la matrice Jacobienne  $\mathcal{A}((\underline{U}_2, c_2), \underline{n})$  du système prise en un état moyen  $((\tilde{U}_2)_{ij}, (\tilde{c}_2)_{ij})$  que l'on va déterminer. L'expression de ces états moyens aux interfaces est un résultat connu de la dynamique des gaz isentropique :

$$(\tilde{U}_2)_{ij} = (\tilde{U}_2)_{ij} \cdot \underline{n}_{ij} \text{ avec } (\tilde{U}_2)_{ij} = \frac{(\sqrt{\alpha_2} U_2)_i + (\sqrt{\alpha_2} U_2)_j}{\sqrt{(\alpha_2)_i} + \sqrt{(\alpha_2)_j}}$$

$$(\tilde{c}_2)_{ij}^2 = \begin{cases} \frac{[\alpha_2 \Xi(\alpha_2)]_{ij}}{[\alpha_2]_{ij}} & \text{si } [\alpha_2]_{ij} \neq 0 \\ ((\alpha_2 \Xi(\alpha_2))'_i) & \text{sinon} \end{cases}$$

Quatre configurations d'écoulement sont envisageables, à savoir deux configurations supersoniques et deux subsoniques (Cf. figure [4.2]); cependant en pratique on aura fréquemment un comportement supersonique. On choisit donc un flux de Roe décentré à gauche ou à droite suivant le signe de  $\tilde{U}_2$ , à l'interface  $\partial C_{ij}$ , auquel on rajoute un terme de correction de flux dans les cas subsoniques. Soient  $(\tilde{\mu}_1)_{ij}$ ,  $(\tilde{\mu}_2)_{ij}$  et  $(\tilde{\mu}_3)_{ij}$ , les valeurs propres prises en l'état moyen  $((\tilde{U}_2)_{ij}, (\tilde{c}_2)_{ij})$ , on décentre alors le flux suivant la configuration dans laquelle on se trouve :

$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) = \begin{cases} \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) & \text{si } (\tilde{\mu}_1)_{ij} > 0 \\ \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) + \underline{\mathcal{A}}^-((\tilde{U}_2)_{ij}, (\tilde{c}_2)_{ij}, \underline{n}_{ij}) \cdot [\underline{W}]_{ij} & \text{si } (\tilde{\mu}_1)_{ij} < 0 \text{ et } (\tilde{\mu}_2)_{ij} > 0 \\ \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) - \underline{\mathcal{A}}^+((\tilde{U}_2)_{ij}, (\tilde{c}_2)_{ij}, \underline{n}_{ij}) \cdot [\underline{W}]_{ij} & \text{si } (\tilde{\mu}_2)_{ij} < 0 \text{ et } (\tilde{\mu}_3)_{ij} > 0 \\ \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) & \text{si } (\tilde{\mu}_3)_{ij} < 0 \end{cases}$$

où

$$\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) = (\underline{U}_2)_i \cdot \underline{n}_{ij} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 U_2 \\ \alpha_2 V_2 \end{pmatrix}_i + (\alpha_2 \Xi(\alpha_2))_i \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \end{pmatrix}_{ij}$$

et les matrices  $\underline{\mathcal{A}}^+$  et  $\underline{\mathcal{A}}^-$  sont définies à partir de  $\underline{\mathcal{A}} = \underline{\mathcal{P}} \underline{\mathcal{D}} \underline{\mathcal{P}}^{-1}$  (avec  $\underline{\mathcal{P}}$  la matrice des vecteurs propres à droite et  $\underline{\mathcal{D}}$  la matrice diagonale des valeurs propres de  $\underline{\mathcal{A}}$ ) de la façon suivante :

$$\underline{\mathcal{A}}^+ = \frac{1}{2} \{ \underline{\mathcal{A}} + |\underline{\mathcal{A}}| \} , \underline{\mathcal{A}}^- = \frac{1}{2} \{ \underline{\mathcal{A}} - |\underline{\mathcal{A}}| \} , |\underline{\mathcal{A}}| = \underline{\mathcal{P}} |\underline{\mathcal{D}}| \underline{\mathcal{P}}^{-1}$$



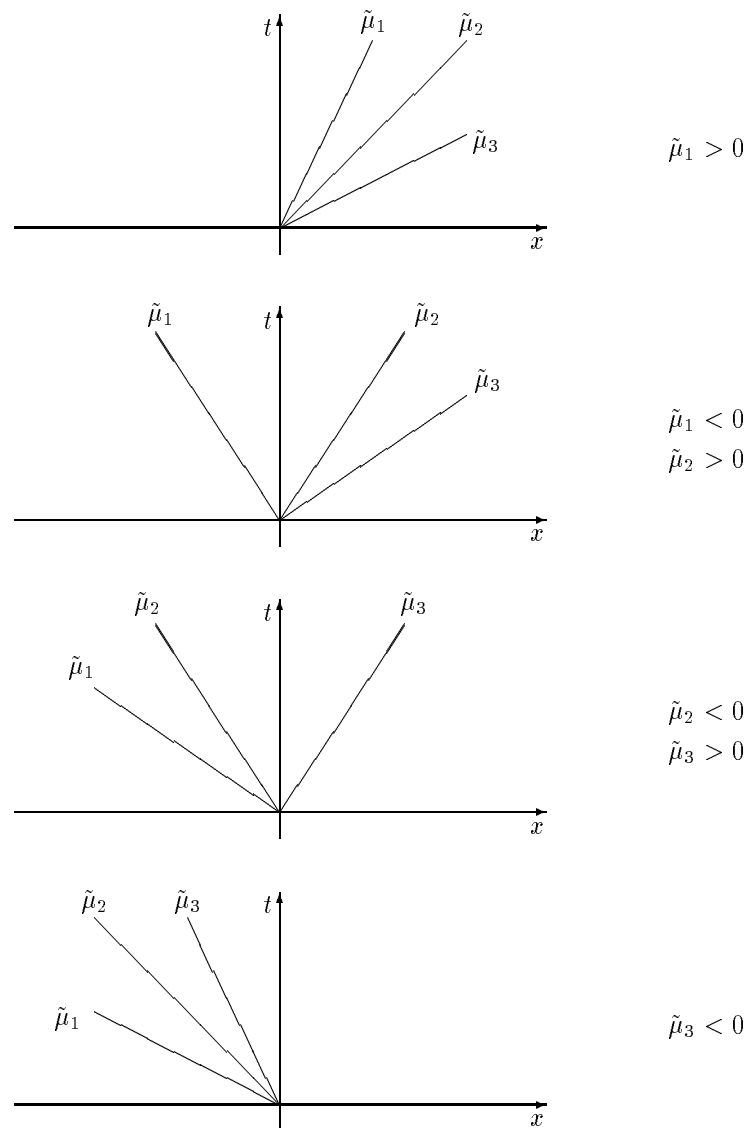


FIG. 4.2 – Les différentes configurations possibles de l'écoulement de la phase dispersée dans le premier pas fractionnaire.

et l'on obtient :

$$\underline{\underline{A}}^-(((\tilde{U}_2)_{ij}, (\tilde{c}_2)_{ij}), \underline{n}_{ij}) \cdot [W]_{ij} = \frac{(\tilde{\mu}_1)_{ij}}{2(\tilde{c}_2)_{ij}} \left( (\tilde{U}_2 + \tilde{c}_2, -n_x, -n_y)_{ij} \cdot [W]_{ij} \right) (\tilde{\epsilon}_1)_{ij}$$

$$\underline{\underline{A}}^+(((\tilde{U}_2)_{ij}, (\tilde{c}_2)_{ij}), \underline{n}_{ij}) \cdot [W]_{ij} = \frac{(\tilde{\mu}_3)_{ij}}{2(\tilde{c}_2)_{ij}} \left( (\tilde{c}_2 - \tilde{U}_2, n_x, n_y)_{ij} \cdot [W]_{ij} \right) (\tilde{\epsilon}_3)_{ij}$$

## 4.5.2 Schéma associé à l'étape 2

### 4.5.2.1 Un schéma de type Roe associé au système non conservatif

On rappelle le système associé à l'étape 2 :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_1 = 0 \quad (4.33a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) = 0 \quad (4.33b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) + \alpha_1 \nabla P(\rho_1) = \underline{0} \quad (4.33c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \underline{U}_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P(\rho_1) = \underline{0} \quad (4.33d)$$

Il est non conservatif en raison de la présence de la fraction volumique devant le gradient de pression dans les équations de la dynamique. On propose, pour résoudre celui-ci, un solveur de type Roe à flux discontinu. Un schéma analogue a également été testé dans un cadre de systèmes hyperboliques non conservatifs issus de la turbulence compressible (Cf. [Her95a] et [Bru96]).

Soit le vecteur des variables d'état :  $\underline{W}^t = (\alpha_1, \alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1, \alpha_2 \underline{U}_2)$ . On réécrit le système (4.33) sous forme matricielle en dimension 2 :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} F_x(\underline{W}) + \frac{\partial}{\partial y} F_y(\underline{W}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \nabla P(\rho_1) \\ \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P(\rho_1) \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (4.34)$$

ou, dans les zones régulières :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{B}_x(\underline{W}) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} + \underline{B}_y(\underline{W}) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \underline{W} = \underline{0}$$

où  $\underline{F}_x$  et  $\underline{F}_y$  désignent les flux suivant les directions  $x$  et  $y$ . On note que les matrices  $\underline{B}_x$  et  $\underline{B}_y$  comprennent les Jacobiennes des flux  $\underline{F}_x$  et  $\underline{F}_y$  et les termes non conservatifs.

On propose, à chaque interface entre deux cellules  $C_i$  et  $C_j$ , de résoudre, à la place de (4.34), le système localement linéarisé suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{B}_x(\tilde{W}(\underline{W}_i, \underline{W}_j)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} + \underline{B}_y(\tilde{W}(\underline{W}_i, \underline{W}_j)) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \underline{W} = \underline{0}$$

où les matrices  $\underline{B}_x$  et  $\underline{B}_y$  sont considérées en un état moyen  $\tilde{W}$  qui ne dépend que des états  $\underline{W}_i$  et  $\underline{W}_j$ . Soit la matrice  $\underline{B}(\underline{W}, \underline{n}) = n_x \underline{B}_x(\underline{W}) + n_y \underline{B}_y(\underline{W})$ . L'état moyen est déterminé de sorte la matrice  $\underline{B}(\underline{W}, \underline{n}) = \underline{B}((c_1, \rho_1, \alpha_1), \underline{n})$  satisfait, pour tout vecteur  $\underline{n}$ , le critère de Roe suivant :

$$[\underline{F}(\underline{W}, \underline{n})]_{ij} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{\alpha_1} [P(\rho_1)] \underline{n} \\ \overline{\alpha_2} [P(\rho_1)] \underline{n} \\ \rho_2 \end{pmatrix}_{ij} = \underline{B}(\tilde{W}(\underline{W}_i, \underline{W}_j), \underline{n}_{ij}) \cdot [\underline{W}]_{ij}$$

On trouve alors que  $\underline{B}(\tilde{W}, \underline{n}) = \underline{B}((\tilde{c}_1, \tilde{\rho}_1, \tilde{\alpha}_1), \underline{n})$ , les états moyens des variables  $\rho_1$  et  $\alpha_1$  étant équivalents à la moyenne arithmétique (i.e.  $(\cdot)_{ij} = \frac{1}{2}((\cdot)_i + (\cdot)_j)$ ) et :

$$(\tilde{c}_1)_{ij} = \begin{cases} \frac{[P(\rho_1)]_{ij}}{[\rho_1]_{ij}} & \text{si } [\rho_1]_{ij} \neq 0 \\ (P'(\rho_1))_i & \text{si } (\rho_1)_i = (\rho_1)_j \end{cases}$$

On propose alors le schéma explicite centré suivant :

$$\underline{W}_i^{**} = \underline{W}_i^* - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left\{ \sum_{j \in V(i)} \mathbb{F}(\underline{W}_i^*, \underline{W}_j^*, \underline{n}_{ij}) \right\} - \Delta t \int_{C_i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \nabla P(\rho_1) \\ \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P(\rho_1) \end{pmatrix}^* d\mathbf{x}$$

avec le flux numérique :

$$\mathbb{F}(\underline{W}_i^*, \underline{W}_j^*, \underline{n}_{ij}) = \frac{1}{2} (\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i^*, \underline{n}_{ij}) + \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_j^*, \underline{n}_{ij})) - \frac{1}{2} \left| \underline{\mathcal{B}}(\tilde{W}(\underline{W}_i^*, \underline{W}_j^*), \underline{n}_{ij}) \right| \cdot [\underline{W}]_{ij}^*$$

où  $\underline{W}^*$  désigne la valeur du vecteur d'état  $\underline{W}$  au temps intermédiaire  $t^*$ , obtenu après la résolution de la première étape. Le flux  $\underline{\mathcal{F}}$  est défini par  $n_x \underline{F}_x(\underline{W}) + n_y \underline{F}_y(\underline{W})$ , soit :

$$\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1)_i \cdot \underline{n}_{ij} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$$

Au temps  $t^*$ , on gèle le terme non conservatif  $\alpha_k$  sur la cellule  $C_i$  et on prend la moyenne centrée de  $P(\rho_1)$  à l'interface  $\partial C_{ij}$  :

$$\begin{aligned} \int_{C_i} \alpha_k \nabla P(\rho_1) d\mathbf{x} &= (\alpha_k)_i \int_{C_i} \nabla P(\rho_1) d\mathbf{x} = (\alpha_k)_i \int_{\partial C_i} P(\rho_1) \underline{n} d\sigma \\ &= (\alpha_k)_i \sum_{j \in V(i)} \int_{\partial C_{ij}} P(\rho_1) \underline{n} d\sigma = (\alpha_k)_i \sum_{j \in V(i)} \overline{(P(\rho_1))}_{ij} \underline{n}_{ij} \end{aligned}$$

Cette prise en compte des termes non conservatifs fait que la contribution due à la résolution du problème de Riemann à l'interface  $\partial C_{ij}$  sera différente suivant que l'on itère sur la cellule  $C_i$  ( $\alpha_k$  est gelé sur la cellule  $C_i$ ) ou sur la cellule  $C_j$  ( $\alpha_k$  est gelé sur la cellule  $C_j$ ).

**Remarque 4.7** *Un schéma de résolution prenant en compte les termes non conservatifs a été présenté dans [Her94a], mais dont les déficiences dans le cadre de solutions avec chocs ont été exhibées dans [Her95a]. Cette méthode est identique à celle qui est présentée ici à la différence près que l'on gèle le terme non conservatif  $\alpha_k$ , non plus sur la cellule  $C_i$ , mais en la moyenne centrée  $\overline{(\alpha_k)}_{ij} = \frac{1}{2}((\alpha_k)_i + (\alpha_k)_j)$  ; c'est à dire :*

$$\int_{C_i} \alpha_k \nabla P(\rho_1) d\underline{x} = \sum_{j \in V(i)} \overline{(\alpha_k)_{ij}} \int_{\partial C_{ij}} P(\rho_1) \underline{n} d\sigma = \sum_{j \in V(i)} \overline{(\alpha_k)_{ij}} \overline{(P(\rho_1))_{ij}} \underline{n}_{ij}$$

Il est clair que dans ce cas, la contribution numérique due à la résolution du problème de Riemann à l'interface  $\partial C_{ij}$  affectée à la cellule  $C_i$  est la même que celle affectée à la cellule  $C_j$ .

La matrice  $\underline{\underline{B}}$  est diagonalisable  $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{P}}^{-1}$  (avec  $\underline{\underline{P}}$  la matrice des vecteurs propres à droite et  $\underline{\underline{D}}$  la matrice diagonale des valeurs propres de  $\underline{\underline{B}}$ ) et l'on obtient la matrice  $|\underline{\underline{B}}|$  par l'expression  $|\underline{\underline{B}}| = \underline{\underline{P}} |\underline{\underline{D}}| \underline{\underline{P}}^{-1}$ , soit :

$$|\underline{\underline{B}}(\tilde{c}_1, \bar{\rho}_1, \bar{\alpha}_1), \underline{n}| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\rho}_1 \tilde{c}_1 & \tilde{c}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_1 n_x^2 & \tilde{c}_1 n_x n_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_1 n_x n_y & \tilde{c}_1 n_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_1 \frac{1 - \bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_1 \rho_2} n_x^2 & \tilde{c}_1 \frac{1 - \bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_1 \rho_2} n_x n_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_1 \frac{1 - \bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_1 \rho_2} n_x n_y & \tilde{c}_1 \frac{1 - \bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_1 \rho_2} n_y^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\underline{\underline{B}}$  prend ainsi en compte les termes conservatifs et non conservatifs pour stabiliser le schéma. Le flux complet (flux centré plus correction), au temps  $t^*$ , s'écrit alors :

$$\underline{\underline{F}}(W_i, W_j, \underline{n}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1)_{ij}} \cdot \underline{n}_{ij} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (\tilde{c}_1)_{ij} \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{(\alpha_1)_{ij}} [\rho_1]_{ij} \\ ([\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1]_{ij} \cdot \underline{n}_{ij}) \underline{n}_{ij} \\ \frac{1 - \overline{(\alpha_1)_{ij}}}{\overline{(\alpha_1)_{ij}} \rho_2} ([\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1]_{ij} \cdot \underline{n}_{ij}) \underline{n}_{ij} \end{pmatrix}$$

auquel il faut rajouter le terme suivant, pour obtenir la contribution totale de la résolution du problème de Riemann à l'interface  $\partial C_{ij}$  sur le vecteur d'état  $\underline{W}_i$  associé à la cellule  $C_i$  :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\alpha_1)_i \overline{(P(\rho_1))_{ij}} \underline{n}_{ij} \\ \frac{1 - (\alpha_1)_i}{\rho_2} \overline{(P(\rho_1))_{ij}} \underline{n}_{ij} \end{pmatrix}$$

#### 4.5.2.2 Un schéma de Roe associé à un système conservatif «équivalent»

On propose maintenant une autre méthode de résolution de ce système en considérant le système «conservatif» (4.30) que l'on résout avec un solveur de Roe classique. Ces deux algorithmes donnent des résultats identiques (Cf. le paragraphe 4.6.1). On rappelle que ce système conservatif est équivalent au système (4.33) dans les zones régulières comme dans les chocs :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \nabla(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) = 0 \quad (4.35a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 \underline{U}_1) + \nabla P(\rho_1) = \underline{0} \quad (4.35b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_1 = 0 \quad (4.35c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2 \underline{U}_2 - \rho_1 \underline{U}_1) = \underline{0} \quad (4.35d)$$

sous l'hypothèse du choix d'un chemin linéaire équipondéré pour connecter, dans les relations de saut (4.27), les états de la fraction volumique de part et d'autre de la discontinuité.

Soit  $\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \rho_1 U_1, \rho_1 V_1, \alpha_1)$  le vecteur des variables d'état. On réécrit le système (4.35) sous forme matricielle privée de l'équation (4.35d) qui sera résolue séparément à partir de la valeur précédemment calculée de  $\rho_1 \underline{U}_1$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{A}_x(\underline{W}) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} + \underline{A}_y(\underline{W}) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \underline{W} = \underline{0}$$

Soient  $\underline{U}_k = \underline{U}_k \cdot \underline{n}$ ,  $k = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\underline{W}, \underline{n}) &= n_x \underline{F}_x(\underline{W}) + n_y \underline{F}_y(\underline{W}) \\ \text{et } \underline{A}(\underline{W}, \underline{n}) &= n_x \underline{A}_x(\underline{W}) + n_y \underline{A}_y(\underline{W}) \end{aligned}$$

Alors

$$\underline{\underline{A}}(\underline{W}, \underline{n}) = \underline{\underline{A}}((c_1, \rho_1, \alpha_1, \rho_1 \mathcal{U}_1), \underline{n}) = \begin{pmatrix} 0 & n_x \alpha_1 & n_y \alpha_1 & \rho_1 \mathcal{U}_1 \\ n_x \frac{c_1^2}{\alpha_1} & 0 & 0 & -n_x \frac{c_1^2 \rho_1}{\alpha_1} \\ n_y \frac{c_1^2}{\alpha_1} & 0 & 0 & -n_y \frac{c_1^2 \rho_1}{\alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\underline{\underline{A}}$  admet les valeurs propres suivantes :

$$\lambda_1 = -c_1, \lambda_{2,3} = 0, \lambda_4 = c_1$$

et les vecteurs propres à droite associés sont :

$$\underline{\underline{e}}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -n_x c_1 \\ -n_y c_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -n_y \\ n_x \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{e}}_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ -\rho_1 U_1 \\ -\rho_1 V_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \underline{\underline{e}}_4 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ n_x c_1 \\ n_y c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\underline{\underline{A}}$  est diagonalisable,  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{P}}^{-1}$ , avec  $\underline{\underline{D}}$  la matrice diagonale des valeurs propres et  $\underline{\underline{P}}$  la matrice des vecteurs propres à droite.

On va construire un schéma de Roe. Pour cela, on va chercher la matrice de Roe sous la forme de la matrice Jacobienne  $\underline{\underline{A}}$  prise en un certain état moyen des variables  $c_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\alpha_1$  et  $\rho_1 \mathcal{U}_1$ . On trouve l'expression des l'états moyens suivante :

$$(\tilde{c}_1^2)_{ij} = \begin{cases} \frac{[P(\rho_1)]_{ij}}{[\rho_1]_{ij}} & \text{si } [\rho_1]_{ij} \neq 0 \\ (P'(\rho_1))_i & \text{sinon} \end{cases}$$

et les moyennes des variables  $\rho_1$ ,  $\alpha_1$  et  $\rho_1 \mathcal{U}_1$  correspondant à la moyenne arithmétique entre les états  $\underline{W}_i$  et  $\underline{W}_j$ .

Pour calculer le flux du schéma de Roe, on a besoin de l'expression de la matrice correction  $|\underline{\underline{A}}| = \underline{\underline{P}} |\underline{\underline{D}}| \underline{\underline{P}}^{-1}$  :

$$|\underline{\underline{A}}((\tilde{c}_1, \overline{\rho_1}, \overline{\alpha_1}, \overline{\rho_1 \mathcal{U}_1}), \underline{n})| = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\rho_1 \\ 0 & n_x^2 & n_x n_y & n_x \frac{\rho_1 \mathcal{U}_1}{\alpha_1} \\ 0 & n_x n_y & n_y^2 & n_y \frac{\rho_1 \mathcal{U}_1}{\alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le terme de correction dans le solveur de Roe  $|\underline{\underline{A}}|$  s'écrit alors :

$$|\underline{\underline{A}}((\tilde{c}_1, \overline{\rho_1}, \overline{\alpha_1}, \overline{\rho_1 \mathcal{U}_1}), \underline{n})| \cdot [W] = \tilde{c}_1 \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} [\rho_1] \\ \frac{1}{\overline{\alpha_1}} [\alpha_1 \rho_1 \mathcal{U}_1] \underline{n} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On écrit donc le schéma de Roe pour le vecteur  $\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \rho_1 \underline{U}_1, \alpha_1)$  :

$$\underline{W}_i^{**} = \underline{W}_i^* - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left\{ \sum_{j \in V(i)} \underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i^*, \underline{W}_j^*, \underline{n}_{ij}) \right\}$$

le flux de Roe, au temps \*, s'écrivant :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) &= \frac{1}{2} (\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) + \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_j, \underline{n}_{ij})) \\ &\quad - \frac{1}{2} |\underline{\underline{A}}((\tilde{c}_1)_{ij}, (\overline{\rho_1})_{ij}, (\overline{\alpha_1})_{ij}, (\overline{\rho_1 \mathcal{U}_1})_{ij}), \underline{n}_{ij})| \cdot [\underline{W}]_{ij} \end{aligned}$$

soit :

$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) = \begin{pmatrix} \overline{(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1)}_{ij} \cdot \underline{n}_{ij} \\ \overline{(P(\rho_1))}_{ij} \underline{n}_{ij} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (\tilde{c}_1)_{ij} \begin{pmatrix} \overline{(\alpha_1)}_{ij} [\rho_1]_{ij} \\ \frac{1}{\overline{(\alpha_1)}_{ij}} ([\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1]_{ij} \cdot \underline{n}_{ij}) \underline{n}_{ij} \\ 0 \end{pmatrix}$$



Puis on résout l'équation (4.35d) qui exprime la conservation dans le temps de la quantité  $\rho_2 \underline{U}_2 - \rho_1 \underline{U}_1$ . L'équation est discrétisée de la façon suivante :

$$(\rho_2 \underline{U}_2)_i^{**} = (\rho_1 \underline{U}_1)_i^{**} + (\rho_2 \underline{U}_2 - \rho_1 \underline{U}_1)_i^*$$

Du fait que  $(\alpha_2)_{,t} = (\alpha_1)_{,t} = 0$ , et en décomposant les vitesses, on peut réécrire l'équation sous la forme :

$$(\alpha_2 \rho_2 \underline{U}_2)_i^{**} = \frac{(\alpha_2)_i^*}{(\alpha_1)_i^*} (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1)_i^{**} + (\alpha_2 \rho_2 \underline{U}_2)_i^* - \frac{(\alpha_2)_i^*}{(\alpha_1)_i^*} (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1)_i^*$$

Dans la section 4.6.1, sont présentées des simulations numériques de ce schéma qui sont comparées avec les simulations issues du schéma associé au système non conservatif (4.33).

### 4.5.3 Traitement des termes sources

On s'intéresse maintenant, dans une troisième étape de la méthode à pas fractionnaires, à la prise en compte des termes sources (effets de traînée et gravité) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) = 0 \quad (4.36a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_2 = 0 \quad (4.36b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) = -\underline{I} - \alpha_1 \rho_1 \underline{g} \quad (4.36c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 \underline{U}_2) = \frac{1}{\rho_2} \underline{I} - \alpha_2 \underline{g} \quad (4.36d)$$

où  $\underline{I} = -\alpha_1 \alpha_2 K_T \underline{U}_r$ , la vitesse relative  $\underline{U}_r$  étant égale à  $(\underline{U}_2 - \underline{U}_1)$  et le terme  $K_T = K_T(\underline{W})$  étant modélisé dans l'équation (4.6).

Soit  $\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_2, \alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1, \alpha_2 \underline{U}_2)$  le vecteur des variables d'état. Durant l'étape de résolution des termes source, seules les variables de quantité de mouvement sont modifiées. Les termes sources sont discrétisés selon une formulation volumes finis semi-implicite :

$$\underline{W}_i^{n+1} = \underline{W}_i^{**} - \Delta t (\alpha_1 \alpha_2 K_T)_i^{**} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\underline{U}_r)_i^{n+1} \\ (\underline{U}_r)_i^{n+1} / \rho_2 \end{pmatrix} - \Delta t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\alpha_1 \rho_1)_i^{**} \underline{g} \\ (\alpha_2)_i^{**} \underline{g} \end{pmatrix}$$

Après inversion du système résolvant, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 \rho_1)_i^{n+1} &= (\alpha_1 \rho_1)_i^{**} \\
(\alpha_2)_i^{n+1} &= (\alpha_2)_i^{**} \\
(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1)_i^{n+1} &= (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1)_i^{**} - \Delta t (\alpha_1 \rho_1)_i^{**} \underline{g} \\
&\quad - \Delta t \left( (\alpha_2)_i^{**} \rho_2 \frac{(\alpha_1 \alpha_2 K_T)_i^{**}}{H_i^{**}} \right) (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1)_i^{**} \\
&\quad + \Delta t \left( (\alpha_1 \rho_1)_i^{**} \frac{(\alpha_1 \alpha_2 K_T)_i^{**}}{H_i^{**}} \right) \rho_2 (\alpha_2 \underline{U}_2)_i^{**} \\
(\alpha_2 \underline{U}_2)_i^{n+1} &= (\alpha_2 \underline{U}_2)_i^{**} - \Delta t (\alpha_2)_i^{**} \underline{g} \\
&\quad + \Delta t \left( (\alpha_2)_i^{**} \frac{(\alpha_1 \alpha_2 K_T)_i^{**}}{H_i^{**}} \right) (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1)_i^{**} \\
&\quad - \Delta t \left( (\alpha_1 \rho_1)_i^{**} \frac{(\alpha_1 \alpha_2 K_T)_i^{**}}{H_i^{**}} \right) (\alpha_2 \underline{U}_2)_i^{**}
\end{aligned}$$

où  $(K_T)_i^{**}$  est la valeur moyenne de la fonction  $K_T(\underline{W})$  sur la cellule  $C_i$  au temps  $t^{**}$ , elle vaut  $K_T(\underline{W}_i^{**})$  et  $H_i^{**}$  le terme d'expression :

$$H_i^{**} = H(\underline{W}_i^{**}, \Delta t) = (\alpha_2 \rho_2 \alpha_1 \rho_1 + \Delta t \alpha_1 \alpha_2 K_T(\underline{W})) (\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2)_i^{**}$$

Il faut noter que d'autres propositions ont été faites récemment pour traiter les termes sources (Cf. [Sai95b]).

#### 4.5.4 Traitement des conditions aux limites

On a explicité dans la section précédente le traitement des flux à une interface entre deux cellules internes au domaine, on détaille maintenant celui-ci pour une cellule adjacente à une frontière du domaine; cette frontière étant de type paroi ou de type entrée-sortie de l'écoulement.

##### 4.5.4.1 Flux à la paroi

Pour les conditions aux limites de paroi, on introduit une cellule fictive état miroir de la cellule  $C_i$  qui a une frontière commune avec la paroi (Cf. la figure [4.3]). Soit  $S_i$  un nœud de paroi auquel est associée la cellule  $C_i$ . Soit la variable d'état, composée par exemple d'un scalaire  $\rho$  et d'une variable vectorielle  $\underline{U} = (U, V)^t$ , associée à la cellule  $C_i$  intérieure au domaine bidimensionnel  $\underline{W}_i = (\rho_i, U_i, V_i)$  dans le repère habituel  $(x, y)$ . Plaçons nous dans le repère

$(\underline{n}, \underline{\tau})$  de la paroi,  $\underline{n}$  désignant le vecteur normal et  $\underline{\tau}$  le vecteur tangentiel à la paroi. Le vecteur d'état devient alors  $\underline{W}_i = (\rho_i, \underline{U}_i \cdot \underline{n}, \underline{U}_i \cdot \underline{\tau})$ . La variable d'état associée à la cellule miroir sera alors  $\underline{W}_i^* = (\rho_i, -\underline{U}_i \cdot \underline{n}, \underline{U}_i \cdot \underline{\tau})$ . Il vient alors naturellement une condition de glissement à la paroi,  $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$ . Toutes les variables sont considérées à un même temps  $t$ . On choisit de calculer le flux à l'interface entre l'état intérieur et l'état miroir à l'aide d'un flux de Roe dans le cas d'une accumulation de particules ou de gaz (i.e. l'équivalent du double choc symétrique) et, un flux de Godunov dans le cas de disparition de particules ou de gaz (i.e. l'équivalent de la double détente symétrique). On effectue si cela est nécessaire des approximations quand les invariants de Riemann ne sont pas primitivables (cas de la pression intergranulaire  $\Xi(\alpha_2)$  telle qu'elle est définie par exemple en (4.4)). Cette formulation des conditions aux limites de paroi est essentielle pour assurer le respect du principe du maximum (4.10) du taux de présence. Le flux ainsi calculé, de Godunov ou de Roe suivant la configuration, agit, comme on va le voir, dans le sens physique de l'écoulement. Ce principe, proposé par J.-M. Hérard, a été mis en œuvre dans [Lea95] pour la simulation d'un écoulement compressible lors de l'ouverture d'une soupape de générateur de vapeur.

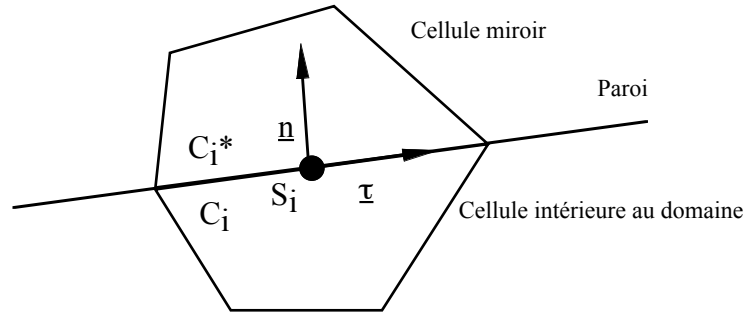


FIG. 4.3 - Etat miroir en paroi.

### Etape 1 - phase continue

Soit  $\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1)$  le vecteur des variables d'état. Le flux de Godunov qui est le flux analytique associé au système (4.31) est (Cf. le paragraphe 4.5.1.1) :

$$\mathcal{F}(\underline{W}, \underline{n}) = (\underline{U}_1 \cdot \underline{n}) \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \rho_1 U_1 \\ \alpha_1 \rho_1 V_1 \end{pmatrix}$$

Appliqué à l'état miroir, on obtient un flux numérique nul à la paroi, soit :

$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_i^*, \underline{n}) = \underline{0}$$

### Etape 1 - phase dispersée

Soit  $\underline{W}^t = (\alpha_2, \alpha_2 U_2, \alpha_2 V_2)$  le vecteur des variables d'état. Si  $\underline{W}_i$  est tel qu'il y a apparition du vide à la paroi (Cf. l'équation (4.22)), i.e. :

$$\int_0^{(\alpha_2)_i} \frac{c_2(a)}{a} da \geq -(\underline{U}_2)_i \cdot \underline{n} \geq 0$$

on prend alors un flux numérique nul, soit :

$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_i^*, \underline{n}) = \underline{0}$$

**Remarque 4.8** Si la fonction  $\Xi(\alpha_2)$  est de la forme (4.4), (4.5a), (4.5b) alors  $\int_0^{(\alpha_2)_i} \frac{c_2(a)}{a} da$  n'est pas intégrable analytiquement et l'on doit faire des approximations pour déterminer si il y a apparition du vide ou pas.

Si on se trouve dans le cas où :

$$-\int_0^{(\alpha_2)_i} \frac{c_2(a)}{a} da < (\underline{U}_2)_i \cdot \underline{n} \leq 0$$

on est alors dans une configuration de double détente symétrique et l'on prend le flux de Godunov qui est le flux analytique pris en la solution de  $\underline{W}$  à l'interface, soit, avec les hypothèses associées à l'état miroir :

$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_i^*, \underline{n}) = (\alpha_2 \Xi(\alpha_2))_{God} \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \end{pmatrix}$$

Si on est par contre dans une configuration de double choc symétrique, i.e. :

$$0 < (\underline{U}_2)_i \cdot \underline{n}$$

on considère alors, par souci de simplicité de mise en œuvre, le flux de Roe (Cf. le paragraphe 3.5), soit après calculs :

$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_i^*, \underline{n}) = \{ \alpha_2 \Xi(\alpha_2) + \alpha_2 (\underline{U}_2 \cdot \underline{n}) (\underline{U}_2 \cdot \underline{n} + c_2(\alpha_2)) \}_i \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \end{pmatrix}$$

**Remarque 4.9** Dans le cas de la disparition de particules en paroi (qui se traduit par une configuration de double détente symétrique,  $(\underline{U}_2)_i \cdot \underline{n} < 0$ ), la «pression» de paroi  $P_{God}^*$  obtenue par un flux de Godunov a pour expression :

$$P_{God}^* = (\alpha_2 \Xi(\alpha_2))_{God} \leq (\alpha_2 \Xi(\alpha_2))_i$$

alors que par un flux de Roe, elle serait d'expression :

$$P_{Roe}^* = \{ \alpha_2 \Xi(\alpha_2) + \alpha_2 (\underline{U}_2 \cdot \underline{n}) (c_2(\alpha_2) + \underline{U}_2 \cdot \underline{n}) \}_i$$

Le problème de cette formulation dans cette configuration est que, si :

$$(\underline{U}_2)_i \cdot \underline{n} \leq -c_2((\alpha_2)_i) \leq 0$$

alors :

$$P_{Roe}^* \geq (\alpha_2 \Xi(\alpha_2))_i$$

Cette «pression» a tendance à «chasser» les particules de la paroi et peut conduire à des taux de présence négatifs.

Pour une configuration à très fort taux de détente, nombre de «Mach» supérieur à 1,  $\alpha_2$  en paroi décroît et l'on peut approcher le vide de particules, ce qui entraîne  $c_2(\alpha_2)$  petit devant  $|\underline{U}_2 \cdot \underline{n}|$  et donc  $P_{Roe}^* > (\alpha_2 \Xi(\alpha_2))_i > P_{God}^*$ . Ainsi, dans cette configuration, utiliser le flux de Roe augmente la probabilité d'atteindre le vide «non physique» de particules.

## Etape 2

On considère le système conservatif (4.35) équivalent au système non conservatif (4.33). Soit  $\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1, U_1, \alpha_1 \rho_1, V_1, \alpha_1)$  le vecteur des variables d'état. Si  $\underline{W}_i$  est tel qu'il y a apparition du vide à la paroi (Cf. l'équation (4.29)), i.e. :

$$-(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 \cdot \underline{n})_i \geq \frac{2}{\gamma + 1} (\alpha_1 \rho_1 c_1(\rho_1))_i$$

alors on prend un flux numérique nul, soit :

$$\mathbb{F}(\underline{W}_i, \underline{W}_i^*, \underline{n}) = \underline{0}$$

Si on se trouve dans le cas où :

$$-\frac{2}{\gamma+1}(\alpha_1 \rho_1 c_1(\rho_1))_i \leq (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 \cdot \underline{n})_i \leq 0$$

on est alors dans une configuration de double détente symétrique et, comme pour la phase dispersée dans la première étape, on prend le flux de Godunov, soit, avec les hypothèses liées à l'état miroir :

$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_i^*, \underline{n}) = P((\rho_1)_{God}) \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(\rho_1)_{God}$  est donné par :

$$\frac{2}{\gamma+1}(\rho_1)_{God} c_1((\rho_1)_{God}) = (\rho_1 \underline{U}_1 \cdot \underline{n})_i + \frac{2}{\gamma+1}(\rho_1)_i c_1((\rho_1)_i)$$

**Remarque 4.10** On a :

$$P((\rho_1)_{God}) \leq P((\rho_1)_i).$$

Si on est par contre dans une configuration de double choc symétrique, i.e. :

$$0 < (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 \cdot \underline{n})_i$$

on considère alors le flux de Roe, soit après calculs :

$$\underline{\mathbb{F}}(\underline{W}_i, \underline{W}_i^*, \underline{n}) = (P(\rho_1) + \rho_1 c_1(\rho_1) (\underline{U}_1 \cdot \underline{n}))_i \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

#### 4.5.4.2 Flux à la frontière fluide

Les conditions aux limites d'entrée et de sortie du domaine de l'écoulement sont traitées de façon similaire au domaine intérieur. Pour chaque cellule adjacente à une frontière fluide du domaine, on introduit une cellule fictive extérieure sur laquelle on impose un état  $\underline{W}_\infty$  (appelé condition réservoir) puis on calcule le flux à l'interface entre ces deux cellules de la même manière qu'un flux interne en le décentrant suivant que l'on est dans une configuration subsonique ou supersonique. Pour que le problème soit bien posé dans  $L^2$  au sens de Kreiss, il faut imposer autant de conditions que l'on a d'ondes qui entrent dans le domaine. Cette formulation simple d'application des flux décentrés aux conditions aux limites tient naturellement compte des entrées et sorties subsoniques ou supersoniques si le flux numérique est calculé en la valeur exacte de l'état à l'interface (ce qui est le cas du schéma de Godunov). Mais ceci n'est plus valable dès lors que le flux numérique est calculé à partir d'une linéarisation du problème de Riemann (celle effectuée par le schéma de Roe par exemple). On peut alors se trouver dans des configurations où les ondes calculées à partir du problème de Riemann linéarisé ne correspondent pas, au sens entrantes ou sortantes du domaine, aux ondes associées à la résolution exacte du problème de Riemann à la frontière (Cf. [Dub87], [Bar91], [Bar92] et [Ben95]).

**Remarque 4.11** *On note que cette formulation des conditions aux limites d'entrée-sortie équivaut au calcul d'un flux à l'interface entre un état imposé  $\underline{W}_\infty$  et un état intérieur au domaine de calcul ; ce qui n'est pas équivalent au fait d'imposer un flux d'entrée.*

On note de plus que la méthode à pas fractionnaires peut engendrer des problèmes de conditions aux limites entrée-sortie qui perturbent la première maille de calcul à l'intérieur du domaine de l'écoulement. Ces problèmes sont dus au fait que l'on considère le même état réservoir que l'on calcule les flux associés aux conditions aux limites de la première étape ou ceux associés à la deuxième étape.

## 4.6 Tests numériques

On présente quelques simulations numériques sur des maillages bidimensionnels non structurés avec des cellules volumes finis de type INRIA. Les traitements informatiques ont été effectués dans la structure du code *N3S-MUSCL* de simulation d'écoulements compressibles bidimensionnels ou tridimensionnels (Cf. [Cha95]). Dans tous les cas, les effets visqueux sont négligés ( $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ). Le pas de temps est adapté en fonction d'une condition CFL basée sur les célérités d'ondes  $|U_k \pm c_k|$ ,  $k = 1, 2$ , qui constituent une bonne approximation des ondes associées au système de convection (4.14) quand  $\rho_2$  est grand devant  $\rho_1$  (Cf. remarque 4.1). Tous les calculs ont été réalisés sur station de travail HP9000-735. Pour un calcul diphasique explicite, d'ordre 1 en temps et en espace, avec effets de traînée, une adaptation du pas de temps et un contrôle de la réalisabilité de la solution à chaque itération, on obtient un temps CPU pour 1000 nœuds par pas de temps de 0.08 secondes (à titre comparatif, en utilisant la même structure de donnée et le même algorithme à pas fractionnaires pour un écoulement compressible monophasique ( $\alpha_2 = 0$ ), on obtient un temps CPU de 0.04 s). On effectuera tout d'abord, dans un cadre purement monodimensionnel, une comparaison des deux schémas de résolution numérique, présentés dans la section 4.5.2, du sous-système non conservatif (4.19) pour des tests de type tube à choc. On considérera ensuite des tests de type «tube à choc diphasique», avec ou sans effets de traînée, du système convectif avec la méthode à pas fractionnaires décrite précédemment.

Ces tests a priori unidimensionnels sont effectués dans une configuration bidimensionnelle non structurée. Il est clair que certains de ces tests de type tube à chocs sont plutôt académiques et ne sont pas expérimentalement réalisables ; ils ont cependant l'avantage d'être fréquemment cités dans la littérature, notamment pour observer le comportement d'un schéma numérique dans certaines configurations d'ondes. On présentera ensuite une simulation d'écoulement diphasique compressible dans une tuyère. Enfin, on regardera le comportement du schéma dans le cadre de la simulation de lits fluidisés denses.

#### 4.6.1 Comparaison de deux schémas de résolution numérique du sous-système non conservatif

On renvoie à la section 4.5.2 pour une description du schéma de type Roe associé au sous-système non conservatif (4.33) et du schéma de Roe classique associé à son «équivalent» conservatif (4.35) (sous hypothèse du choix de chemin linéaire équipondéré). On souhaite comparer ces deux schémas dans un cadre purement monodimensionnel. On propose deux tests de type tube à choc avec les conditions initiales suivantes :

	CI n° 1		CI n° 2	
	<i>G</i>	<i>D</i>	<i>G</i>	<i>D</i>
$\alpha_1$	0.99	0.4	0.99	0.4
$\rho_1 [kg.m^{-3}]$	1	0.5	1	$5.10^{-3}$
$U_1 [m.s^{-1}]$	-50	50	0	0

où les états «G» et «D» représentent les valeurs à gauche et à droite d'une variable de part et d'autre de la discontinuité initiale qui est centrée par rapport au domaine. On note que la variable  $\alpha_1$  appartient à l'intervalle  $]0,1[$ . Les simulations ont été réalisées avec  $\gamma = 7/5$ ,  $K = 10^5$  sur un maillage de 480 nœuds et une CFL égale à 0.375.

Quel que soit le système simulé (i.e. (4.33) ou (4.35)) et la configuration dans laquelle on se trouve, on doit vérifier, à la traversée de la discontinuité de contact stationnaire, que les variables  $\rho_1$  et  $\alpha_1 \rho_1 U_1$  sont constantes et, bien sûr, que la variable  $\alpha_1$  reste stationnaire en temps.

La figure [4.4] présente une simulation du schéma associé au système conservatif «équivalent» (4.35) avec les conditions initiales n° 1 où une 1-onde et une 3-onde de détente se développent ; la figure [4.6] présente la même simulation par le schéma associé au système non conservatif (4.33). On remarque que les résultats obtenus sont, «à l'œil nu», identiques et l'on peut vérifier que les états intermédiaires sont correctement prédits par rapport à la théorie associée au chemin linéaire.

La figure [4.5] présente une simulation du schéma associé au système conservatif «équivalent» (4.35) avec les conditions initiales n° 2 où une 1-onde de détente et une 3-onde de choc se développent ; la même simulation associée au système non conservatif (4.33) n'est pas présentée mais rend également des résultats identiques.

On présente maintenant des simulations par la méthode à pas fractionnaires précédemment décrite du modèle à deux fluides (4.1) dans un cadre bidimensionnel non structuré.



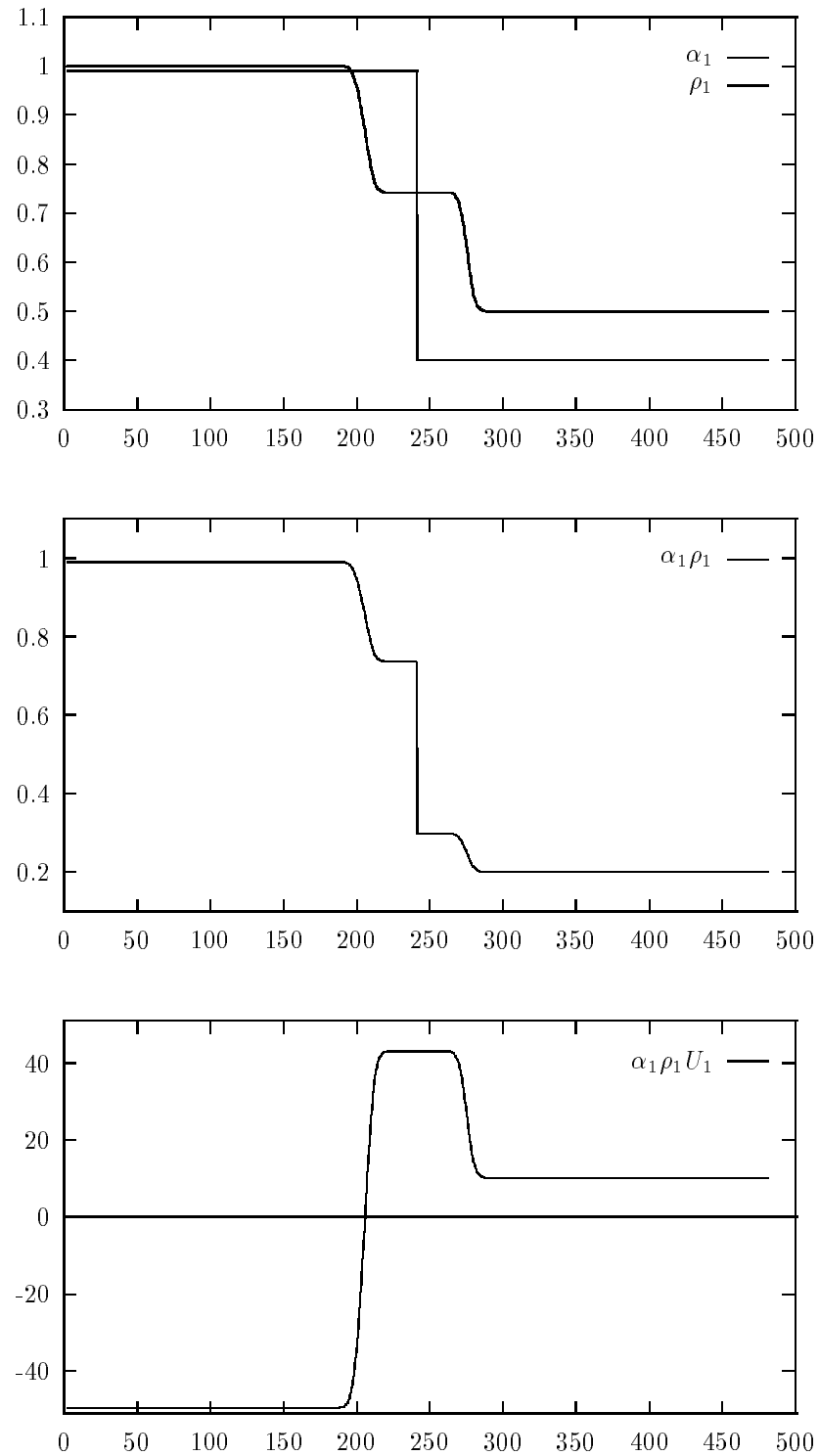


FIG. 4.4 – Simulation du schéma associé au système conservatif «équivalent» avec les conditions initiales n° 1.

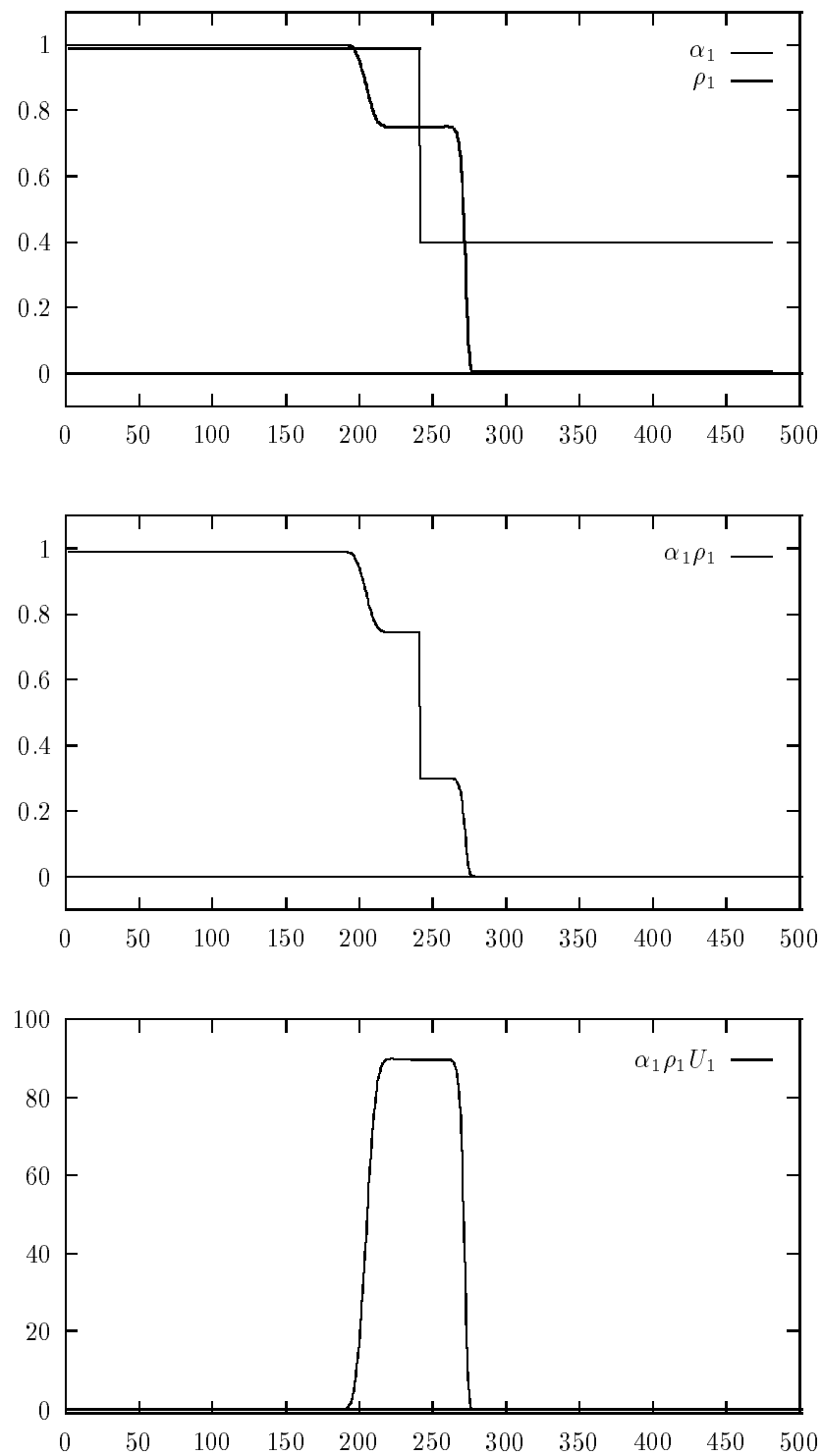


FIG. 4.5 – Simulation du schéma associé au système conservatif «équivalent» avec les conditions initiales n° 2.

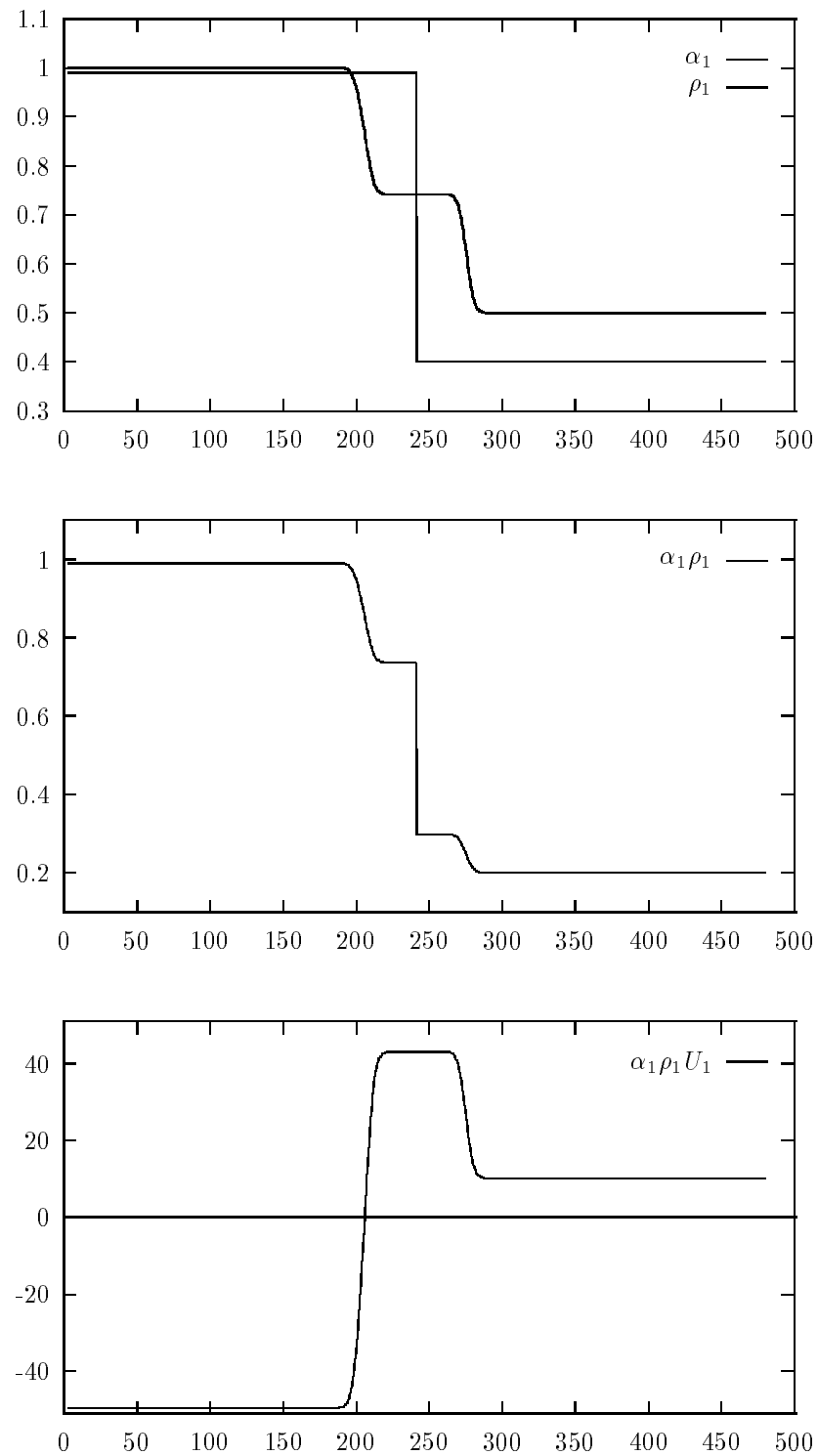


FIG. 4.6 – Simulation du schéma associé au système non conservatif avec les conditions initiales n° 1.

### 4.6.2 Tests de type tube à choc diphasique

On présente tout d'abord des simulations bidimensionnelles de type tube à choc monodimensionnel du système de convection associé à (4.1) avec les lois de fermeture (4.2, 4.3, 4.5b) et :

$$\Xi(\alpha_2) = \frac{2}{3} < q_2^2 >_0 \alpha_2^{2/3} (1 + g(\alpha_2)) \quad (4.37)$$

Le maillage étant non structuré, la solution numérique verra se développer des effets bidimensionnels (transverses). Les dimensions du domaine sont (en m.) :  $x \times y \in [-0.9, 0.9] \times [0, 0.1]$ . Le maillage primal, constitué de triangles, comporte  $11 \times 1000$  nœuds sommets et présente une symétrie par rapport à la droite  $y = 0$  (Cf. la figure [4.7]).

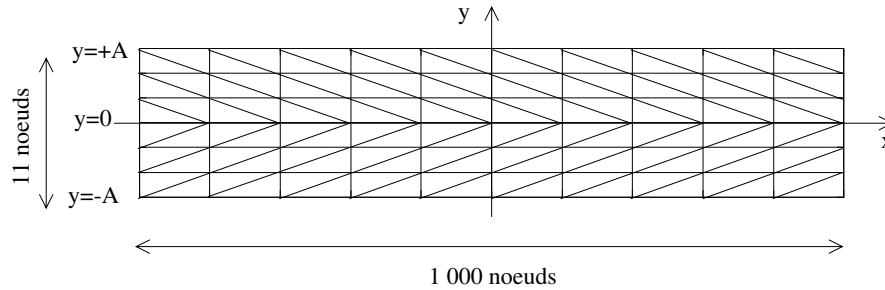


FIG. 4.7 –

Triangulation du domaine de calcul avant construction des cellules INRIA.

Les résultats sont tracés sur cet axe de symétrie. On a retenu des conditions aux limites de type «paroi» en  $y = \pm A$ , de manière à conserver le mieux possible le caractère unidimensionnel de la solution. Ces tests de tube à choc sont traités tout d'abord sans effets de traînée ( $\underline{l} = 0$ ). On présente quelques résultats réalisés à partir des valeurs d'initialisation décrites dans le tableau 4.1. Ces simulations ont été réalisées avec une CFL égale à 0.5 ;  $U_k$  désigne la vitesse selon  $x$  de la phase  $k$  et, dans tous les cas,  $V_1 = V_2 = 0$ . La densité est toujours exprimée en  $\text{kg.m}^{-3}$  et la vitesse en  $\text{m.s}^{-1}$ .

	CI n° 1		CI n° 2		CI n° 3	
	G	D	G	D	G	D
$\rho_1$ [ $\text{kg.m}^{-3}$ ]	1	0.3	1	0.3	1	1
$\alpha_2$	0.5	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6
$U_1$ [ $\text{m.s}^{-1}$ ]	0	0	0	0	0	0
$U_2$ [ $\text{m.s}^{-1}$ ]	0	0	0	0	0	0

Les tests ont été réalisés avec les constantes physiques suivantes :  $\gamma = 7/5$ ,  $K = 10^5$ ,  $\frac{2}{3} < q_2^2 >_0 = 5 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ ,  $d_2 = 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\rho_2 = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\alpha_{max} = 0.64$  et  $\epsilon_c = 1$ . On se place dans des configurations très denses, i.e.  $\alpha_2 \geq 0.5$ , car sinon  $c_2(\alpha_2) \ll c_1(\rho_1)$  et les ondes assimilées à la phase 2 sont très lentes par rapport à celles de phase 1.

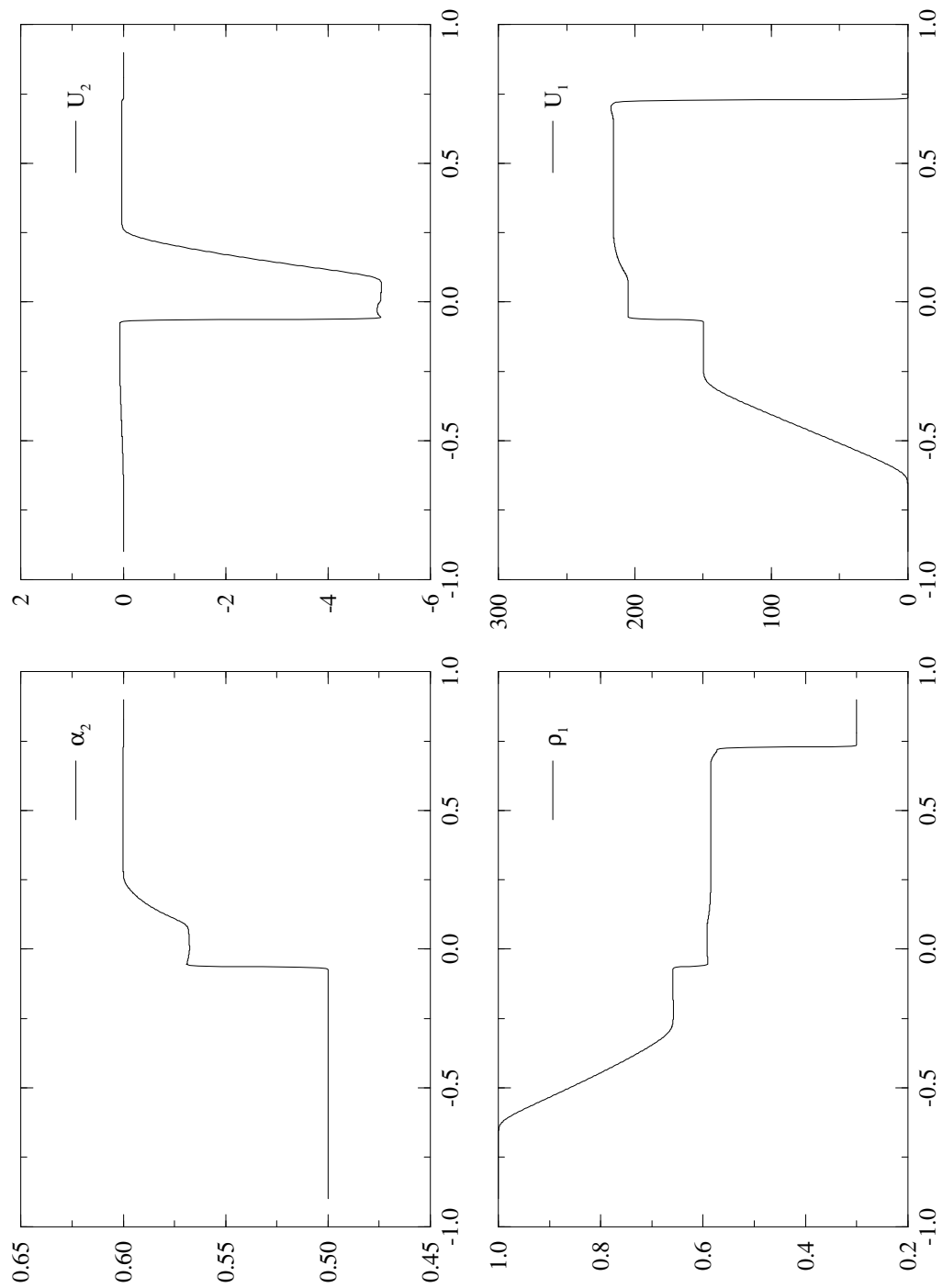


FIG. 4.8 –  
Test de tube à choc diphasique avec les conditions initiales n° 1.

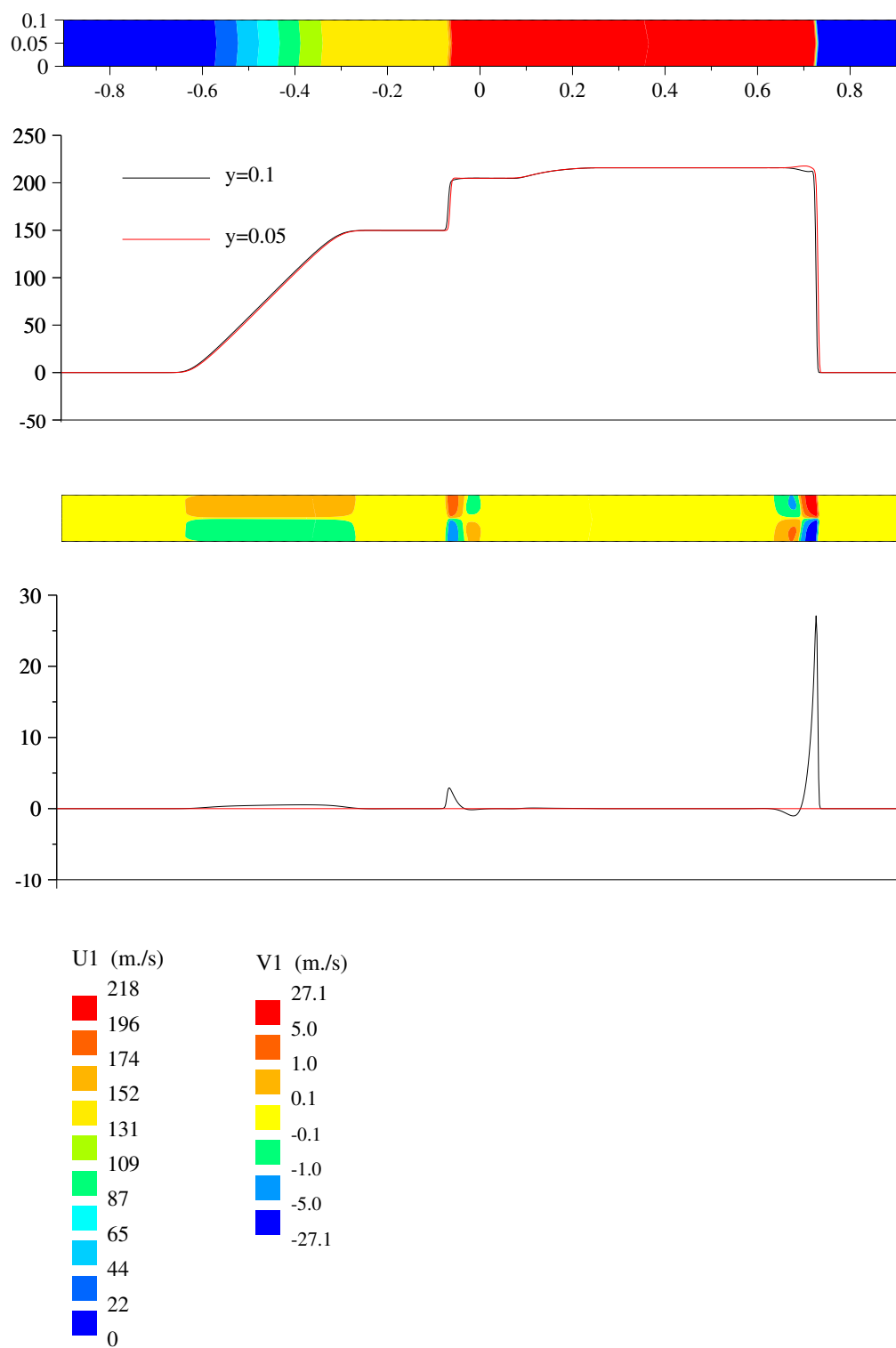


FIG. 4.9 –  
 Mise en évidence des effets bidimensionnels d'après la simulation du tube à choc diphasique  
 avec les conditions initiales n° 1.

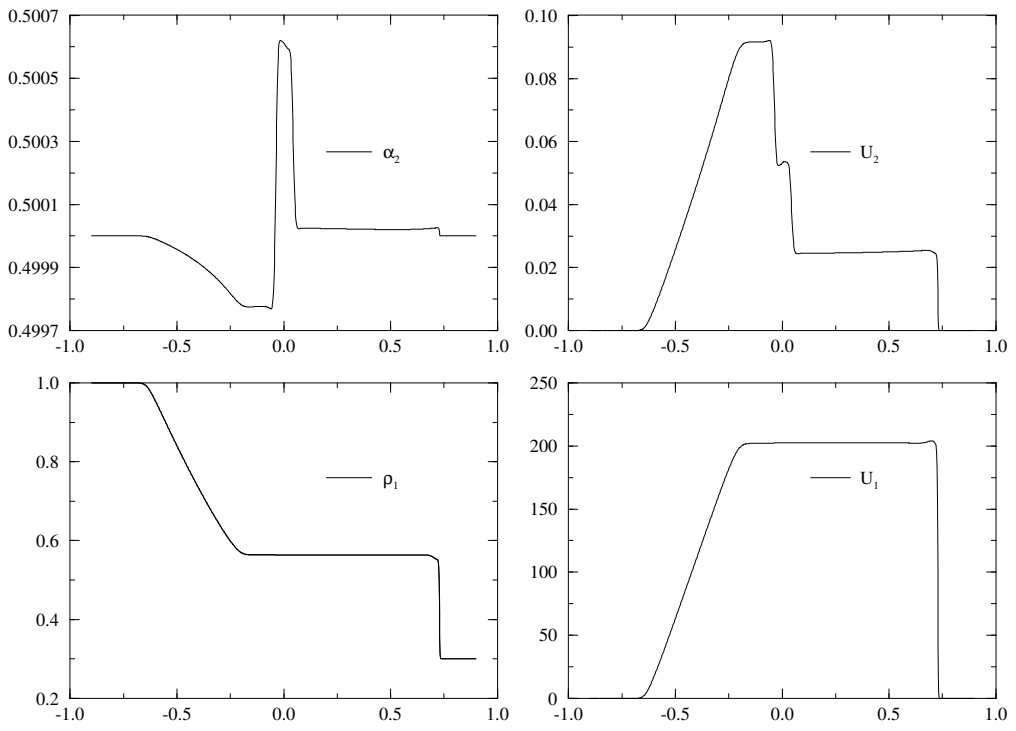


FIG. 4.10 - Test de tube à choc diphasique avec les conditions initiales n° 2.

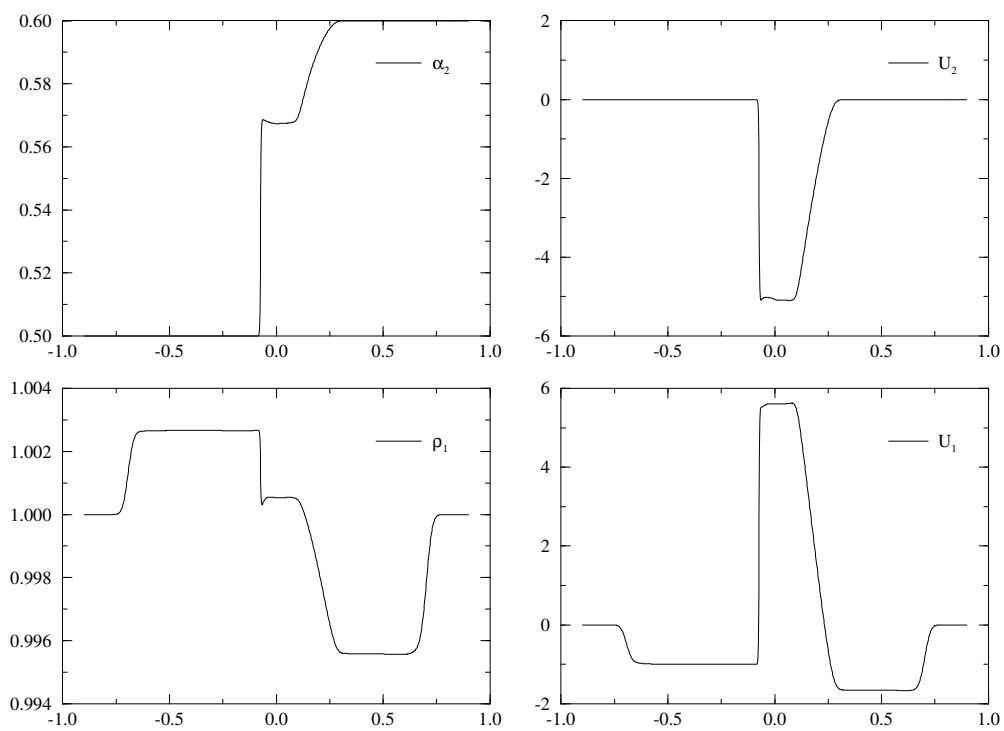


FIG. 4.11 -  
Test de tube à choc diphasique avec les conditions initiales n° 3.



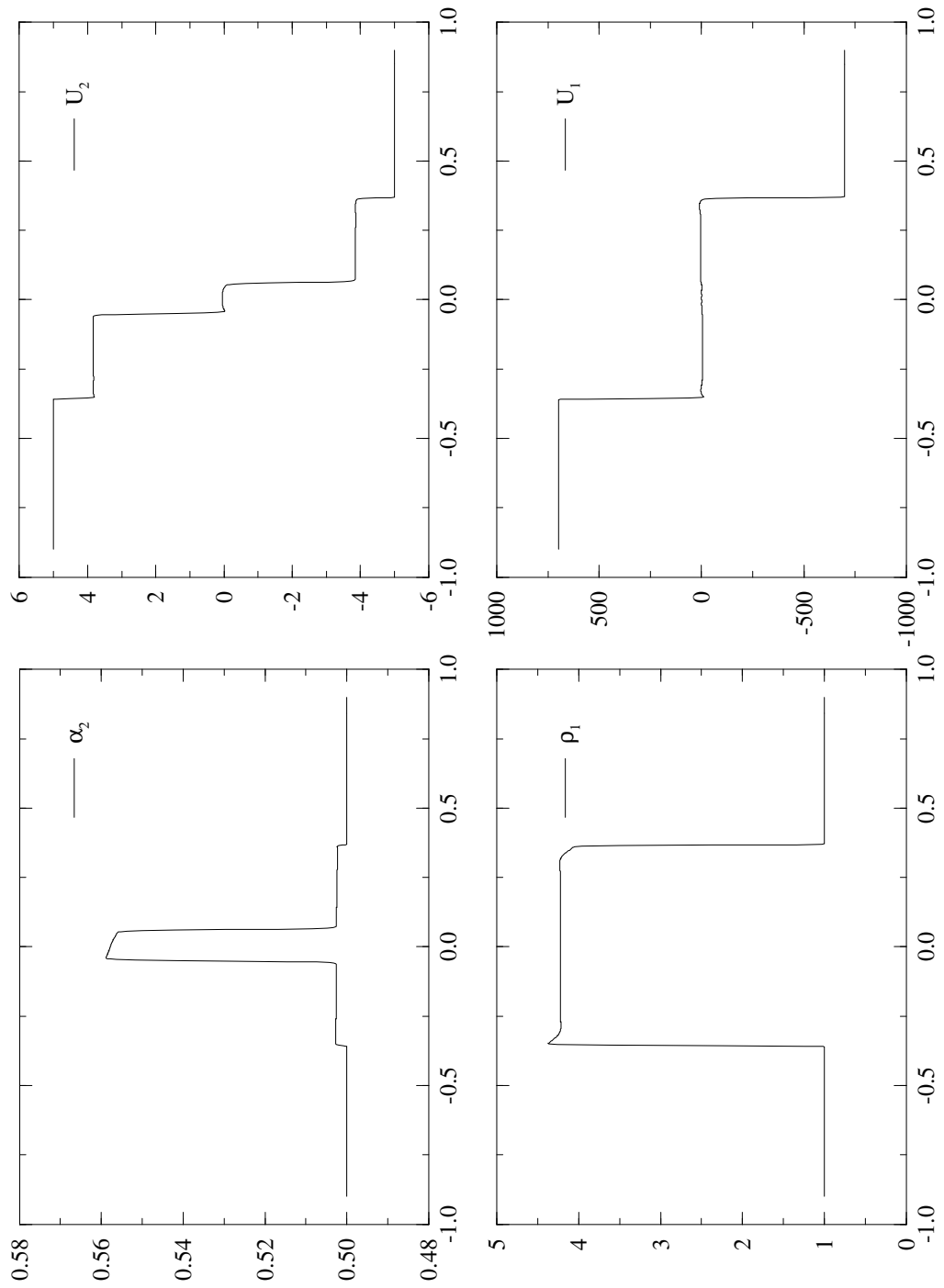


FIG. 4.12 -

Test de tube à choc diphasique comportant quatre ondes de choc (conditions initiales n° 4).

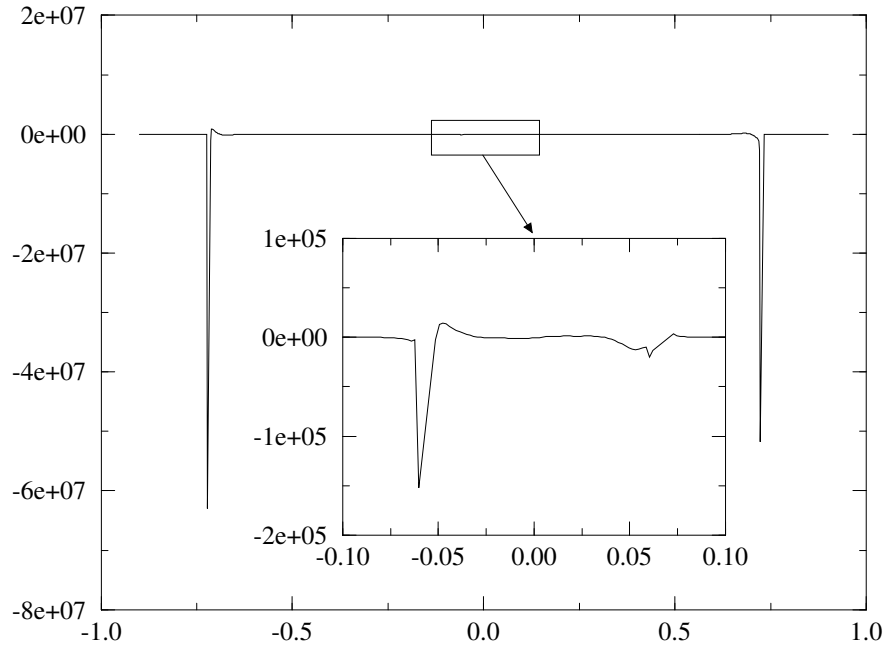


FIG. 4.13 –

*Comportement de l'inégalité d'entropie  $-\sigma[\eta] + [F_\eta] \leq 0$  sur le cas test du tube à choc diphasique comportant quatre ondes de choc (conditions initiales n° 4).*

On voit, sur la figure [4.8] issue de la simulation du tube à choc de conditions initiales n° 1, quatre ondes se développer : deux ondes de choc (les 2- et 4-ondes) et deux ondes de détente (les 1- et 3-ondes). Les ondes rapides (les 1- et 4-ondes) peuvent être approximativement assimilées aux ondes de phase 1 isolées (i.e. de vitesse  $U_1 \pm c_1$ ) et les ondes lentes (les 2- et 3-ondes) aux ondes de phase 2 isolées (i.e. de vitesse  $U_2 \pm c_2$ ). On remarque d'ailleurs que ces deux dernières sont très difficiles à distinguer quand l'énergie cinétique turbulente  $\langle q_2^2 \rangle_0$  est plus faible. On note également que la phase 1 perturbe peu les variables de phase 2 (voir les courbes associées à  $\alpha_2$  et  $U_2$ ). On constate toutefois, en observant  $U_2$ , un léger accroissement de vitesse de phase 2 pour  $x \in [-0.65, -0.3]$  (effet lié principalement au gradient de pression  $P(\rho_1)$  pondéré par  $\alpha_2/\rho_2$ ) ; de même, on enregistre un choc de faible amplitude pour  $x = 0.73$  m. La même expérience numérique, réalisée à l'aide du même schéma dans un cadre réellement unidimensionnel permet de vérifier que la légère sur-vitesse observée sur  $U_1$  avant la 4-onde de choc est due au maillage non structuré. Il en est de même pour la perturbation de l'état constant intermédiaire sur  $U_2$ , au voisinage de la 2-onde de choc pour  $x \simeq -0.1$  m. Si on effectue une expérience monophasique pure ne comportant que des particules ( $\rho_1 = 0$ ), en retenant les mêmes conditions initiales pour  $\alpha_2$  et  $U_2$ , on obtient un écoulement pratiquement identique. L'effet inverse est évidemment beaucoup plus net, si l'on observe les variables  $\rho_1$  et  $U_1$ . Pour s'en convaincre, il suffit de réaliser une simulation analogue monophasique pure ( $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = 1$ ) en retenant les mêmes conditions initiales pour  $\rho_1$  et  $U_1$ . Pour cette expérience, le nombre de «Mach» maximal,  $M_k = |U_k|/c_k$  associé à la phase  $k$ , vaut 0.078 pour la phase 2 et 0.65 pour la phase 1.

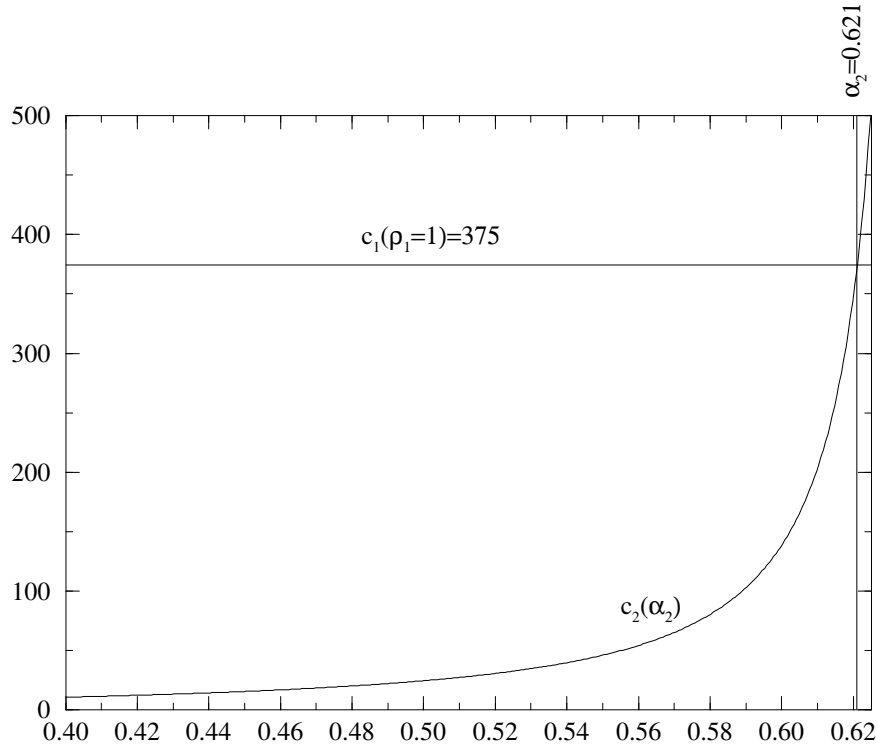


FIG. 4.14 -

Evolution de la célérité  $c_2(\alpha_2)$  des particules (en  $m.s^{-1}$ ) par rapport à la célérité du gaz pour  $\rho_1 = 1$ .

On observe sur la figure [4.9] les effets bidimensionnels qui se manifestent par une vitesse transverse  $V_1$  (mais aussi  $V_2$ ) non nulle à la traversée des ondes de détente et de choc, dès que l'on s'écarte de l'axe de symétrie  $y = 0$ . Cette vitesse transverse est très faible dans les zones de détente mais vaut à peu près 10 % en module du saut de la vitesse  $U_1$  en pied de choc, i.e.  $V_1$  vaut environ  $5 m.s^{-1}$  pour  $[U_1] \simeq 60 m.s^{-1}$  à la traversée du 2-choc ( $x \simeq -0.1 m$ ) et environ  $27 m.s^{-1}$  pour  $[U_1] \simeq 218 m.s^{-1}$  à la traversée du 4-choc ( $x \simeq 0.7 m$ ).

On considère maintenant la simulation présentée sur la figure [4.10], effectuée à partir des conditions initiales n°2 qui ne comprennent qu'une discontinuité sur la variable  $\rho_1$ . On voit une 1-onde de détente et des 2-, 3- et 4-ondes de choc se développer. La perturbation des variables de phase 2 sur les variables de phase 1 n'est pas visible à cette échelle visuelle. Les vitesses des ondes de phase 1 (i.e. les 1- et 4-ondes) et l'état intermédiaire sont superposables à la solution obtenue, dans un cadre monophasique pur ( $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = 1$ ), par un tube à choc avec des conditions initiales identiques sur les variables  $\rho_1$  et  $U_1$ . Par couplage, le déséquilibre de gaz met les particules en mouvement. Les variables de phase 2 sur lesquelles on distingue très nettement les quatre ondes, ne sont, en module, pas beaucoup perturbées, i.e.  $\alpha_2$  varie sur l'intervalle  $0.5 \pm 0.12 \%$  et  $U_2$  entre 0 et  $0.1 m.s^{-1}$ .

La figure [4.11] résulte de la simulation de tube à choc avec les conditions initiales n°3 qui ne comprennent qu'une discontinuité sur la variable  $\alpha_2$ . On voit se développer des 1-, 3- et 4-ondes

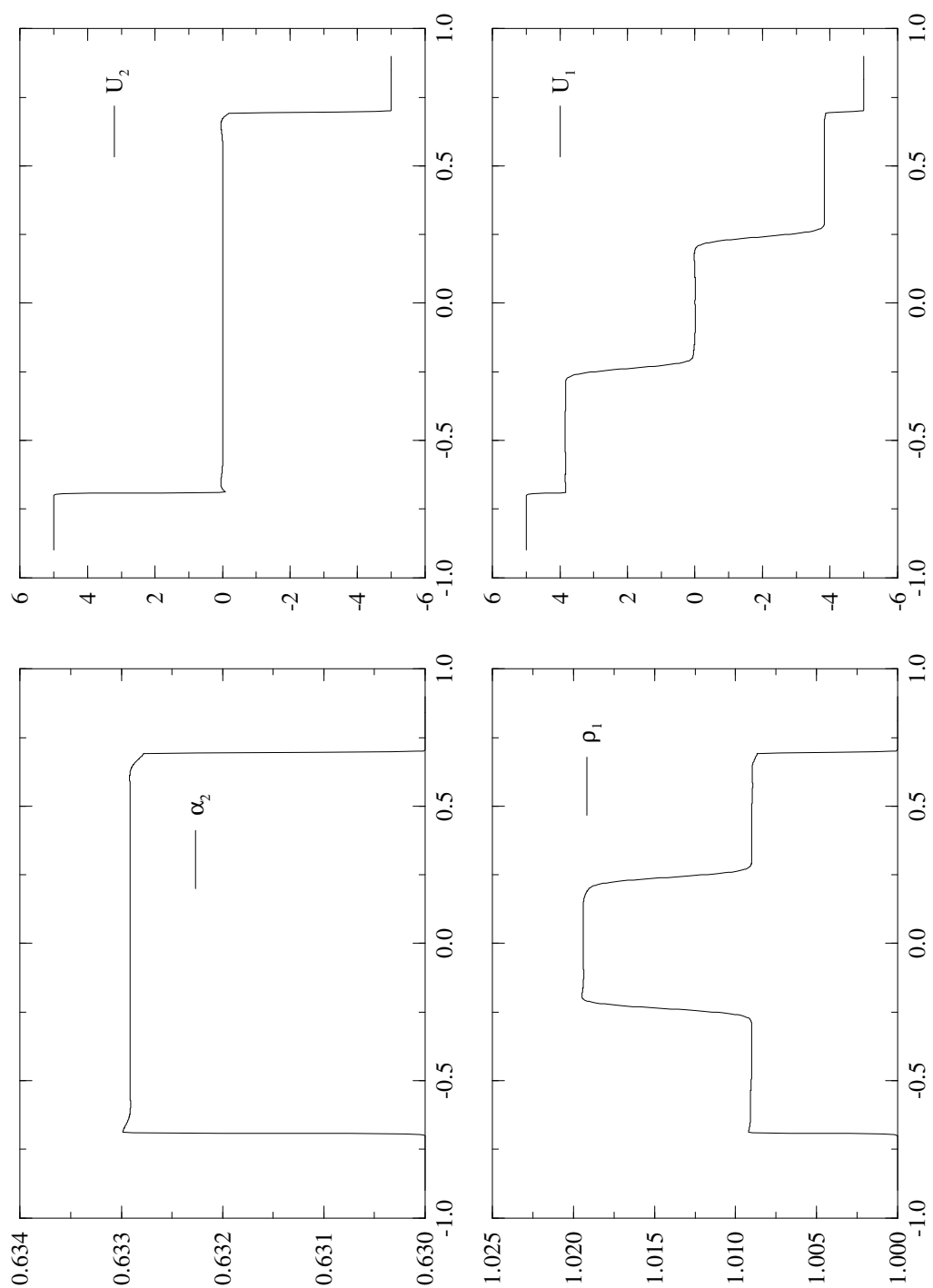


FIG. 4.15 -

Cas test de tube à choc diphasique comportant quatre ondes de choc dans un cadre très dense ; vérification du respect du principe du maximum (conditions initiales n° 5).

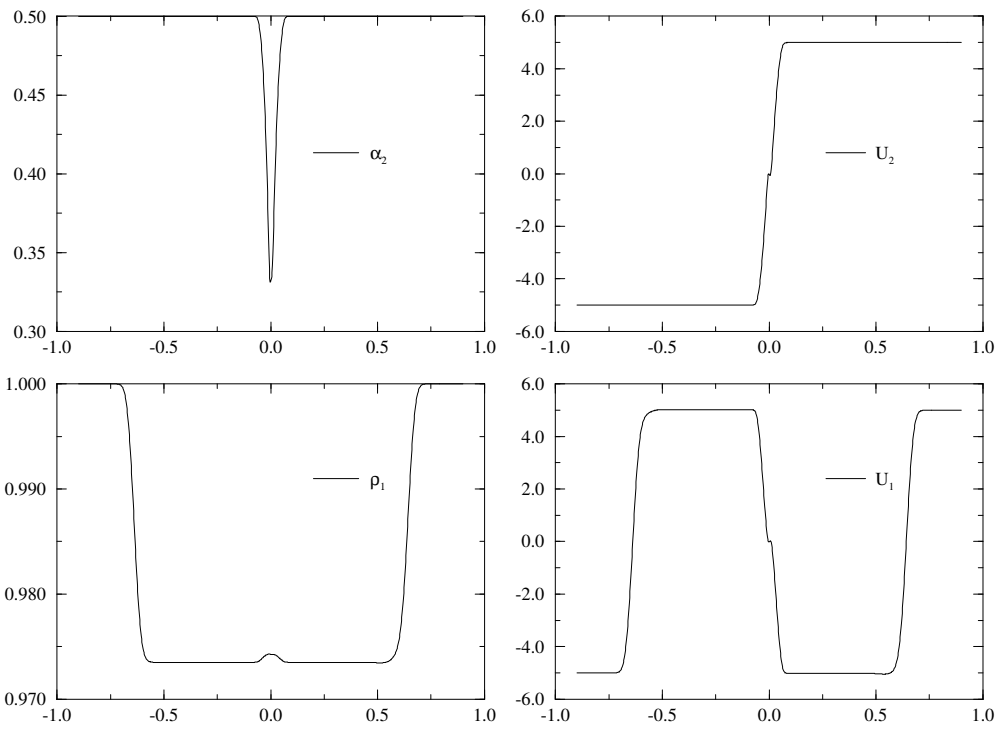


FIG. 4.16 - Test de tube à choc diphasique comportant quatre ondes de détente (conditions initiales n° 0).

	CI n° 4		CI n° 5		CI n° 6	
	G	D	G	D	G	D
$\rho_1$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	1	1	1	1	1	1
$\alpha_2$	0.5	0.5	0.63	0.63	0.5	0.5
$U_1$ [m.s <sup>-1</sup> ]	700	-700	5	-5	-5	5
$U_2$ [m.s <sup>-1</sup> ]	5	-5	5	-5	-5	5

TAB. 4.1 – Conditions initiales des tests de type tube à choc diphasique, où les états «G» et «D» représentent les valeurs à gauche et à droite d'une variable de part et d'autre de la discontinuité initiale qui est centrée en  $x = 0$  par rapport au domaine.

de détente et une 2-onde de choc. On reconnaît cette fois un tube à choc monophasique sur les variables de phase 2 sur lesquelles l'échelle de visualisation ne permet pas de discerner les 1- et 4-ondes de phase 1. La phase gazeuse, bien que mise en mouvement par le déséquilibre des particules, est assez peu perturbée. En effet  $\rho_1$  varie sur l'intervalle  $1 \text{ kg.m}^{-3} \pm 0.4 \%$  et  $U_1$  entre les valeurs -2 et 5 m.s<sup>-1</sup>.

On considère maintenant un cas test symétrique comportant quatre ondes de choc (Cf. la figure [4.12] et les conditions initiales n° 4). On observe une accumulation de particules au centre du domaine avec préservation du principe du maximum sur la fraction volumique:  $\alpha_2 < \alpha_{max} = 0.64$ . Le maillage bidimensionnel étant non structuré, on note que les résultats ne sont pas parfaitement symétriques.

On reprend le test précédent, mais avec la fonction  $\Xi(\alpha_2)$  définie de la façon suivante :

$$\alpha_2 \Xi(\alpha_2) = \frac{2}{3} < q_2^2 >_0 \frac{\alpha_2}{1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{max}}} \quad (4.38)$$

Cette fonction  $\Xi(\alpha_2)$  présente les mêmes caractéristiques que celle définie dans l'équation (4.37), à savoir qu'elle modélise les écoulements denses  $\Xi(\alpha_2 = \alpha_{max}) = +\infty$ ; mais, contrairement à (4.37), sa forme simplifiée permet d'exhiber la fonction  $H_2(\alpha_2)$  telle qu'elle est définie dans l'équation (4.9). Sur la figure [4.13], on observe que l'inégalité d'entropie discrète  $-\sigma[\eta] + [F_\eta] \leq 0$  est respectée au niveau des quatre ondes de choc ( $\sigma$  désigne la vitesse du choc) même si les effets bidimensionnels perturbent les résultats (notamment au niveau de la 3-onde de choc).

On se place maintenant dans une configuration très dense en particules  $\alpha_2 = 0.63$ , toujours avec quatre ondes de choc, pour laquelle  $c_2(\alpha_2) > c_1(\rho_1)$ , de sorte que les ondes assimilées à la phase 2 soient plus rapides que celles de phase 1 (figure [4.15], conditions initiales n° 5). On voit en effet sur la figure [4.14] qu'au delà de  $\alpha_2 \simeq 0.621$ , dans des conditions normales pour la phase gazeuse (i.e.  $\rho_1 \simeq 1 \text{ kg.m}^{-3}$ ) et les mêmes constantes physiques que précédemment, on a  $c_2(\alpha_2) > c_1(\rho_1 = 1)$  et donc généralement  $|U_2 \pm c_2| \geq |U_1 \pm c_1|$ . Contrairement au cas plus «dilué» de la figure [4.12] (conditions initiales n° 4,  $\alpha_2 = 0.5$ ), les quatre ondes de choc se distinguent très nettement sur les variables de phase 1. On note que  $\alpha_2$  atteint la valeur de 0.633 (on rappelle que  $\alpha_{max} = 0.64$ ); le principe du maximum (4.10) est respecté (du fait que  $\Xi(\alpha_2 = \alpha_{max}) = +\infty$ ). Les 1- et 4-ondes de choc sont assimilées aux ondes de phase 2 ( $c_2 \simeq 850 \text{ m.s}^{-1}$  pour  $\alpha_2 = 0.63$  et  $c_2 \simeq 1400 \text{ m.s}^{-1}$  pour  $\alpha_2 \simeq 0.633$ ) et les 2- et 3-ondes de choc à la phase 1 ( $c_1 \simeq 375 \text{ m.s}^{-1}$  pour  $\rho_1$  variant entre 1 et  $1.02 \text{ kg.m}^{-3}$ ).

On présente enfin sur la figure [4.16], les résultats d'une simulation effectuée à partir des condi-

tions initiales n°6, qui voit se développer quatre ondes de détente. Du fait que l'on a une disparition des particules au niveau des 2- et 3-ondes ( $\alpha_2 \simeq 0.33$ ), on a  $c_2(\alpha_2) < c_1(\rho_1)$  et les 2- et 3-ondes sont très lentes par rapport aux 1- et 4-ondes. On note que la décroissance de la fraction volumique  $\alpha_2$  des particules engendre une légère accumulation de gaz.

On s'intéresse maintenant aux effets de traînée sur certains de ces cas tests diphasiques de type tube à choc.

### 4.6.3 Tests de type tube à choc avec traînée

On s'intéresse à la simulation du système (4.1) (comprenant les effets de traînée, mais sans diffusion ni gravité) avec les lois de fermeture (4.2, 4.3, 4.5b, 4.37, 4.6). Le terme de traînée nécessite la connaissance du diamètre des particules  $d_2$ , ce terme sera d'autant plus important que l'on sera dans un cas dense en particules et que leur diamètre sera petit. Dans les simulations suivantes, on prendra des particules de diamètre  $10^{-4}$  à  $10^{-6}$  m, la fraction volumique des particules égale à 0.5 et les mêmes constantes physiques que précédemment, à savoir :  $\gamma = 7/5$ ,  $K = 10^5$ ,  $\frac{2}{3} < q_2^2 >_0 = 5 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\nu_1 = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\rho_2 = 2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\alpha_{max} = 0.64$  et  $e_c = 1$ . Pour ce régime dense en particules, la traînée tend à annuler la vitesse relative  $\underline{U}_1 - \underline{U}_2$  et l'on comparera, dans le chapitre 5, ces résultats avec des simulations d'un modèle homogène à trois équations qui suppose la vitesse relative entre phases nulle.

On considère d'abord une simulation avec les conditions initiales n°1 (Cf. la figure [4.17]). On visualise les effets de la traînée en comparant cette courbe avec la figure [4.8] provenant de la même simulation sans effets de traînée. Sur la figure [4.17], qui compare une simulation avec des particules de diamètre  $10^{-4}$  m et la même pour des particules de diamètre  $10^{-6}$  m, on note que les variables de la phase gazeuse ont tendance à s'aligner sur les variables de la phase particulaire, i.e. que l'écoulement de la phase gazeuse est dominé par le mouvement des particules. La vitesse relative  $|U_2 - U_1|$  atteint  $2.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pour des particules de diamètre  $10^{-4}$  m et n'est plus que de l'ordre de  $10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pour des particules de diamètre  $10^{-6}$  m.

On observe également des simulations avec les conditions initiales n°5 et 6 (Cf. les figures [4.18] et [4.19]), que l'on peut comparer aux simulations des figures [4.15] et [4.16], effectuées sans effets de traînée.

On reprendra ces trois simulations dans le chapitre 5 pour montrer que, dans certaines configurations, ce modèle à deux fluides à quatre équations, avec hypothèse de glissement d'une phase par rapport à l'autre, donne des résultats comparables à un modèle homogène à trois équations supposant la vitesse relative entre les deux phases nulle. Ce dernier modèle est conservatif inconditionnellement hyperbolique et le problème de Riemann associé admet un résultat d'existence et d'unicité de solution ; la comparaison nous offre des éléments de validation de l'algorithme à pas fractionnaires et des schémas numériques proposés pour la résolution du système non conservatif et conditionnellement hyperbolique (4.1). On effectue maintenant des tests où les effets bidimensionnels sont significatifs.

### 4.6.4 Écoulement diphasique dans une tuyère

On s'intéresse ici à un écoulement diphasique compressible dans une demi-tuyère. Le test qui suit a été réalisé avec les constantes physiques suivantes :  $\gamma = 7/5$ ,  $K = 10^5$ ,  $\frac{2}{3} < q_2^2 >_0 = 5$

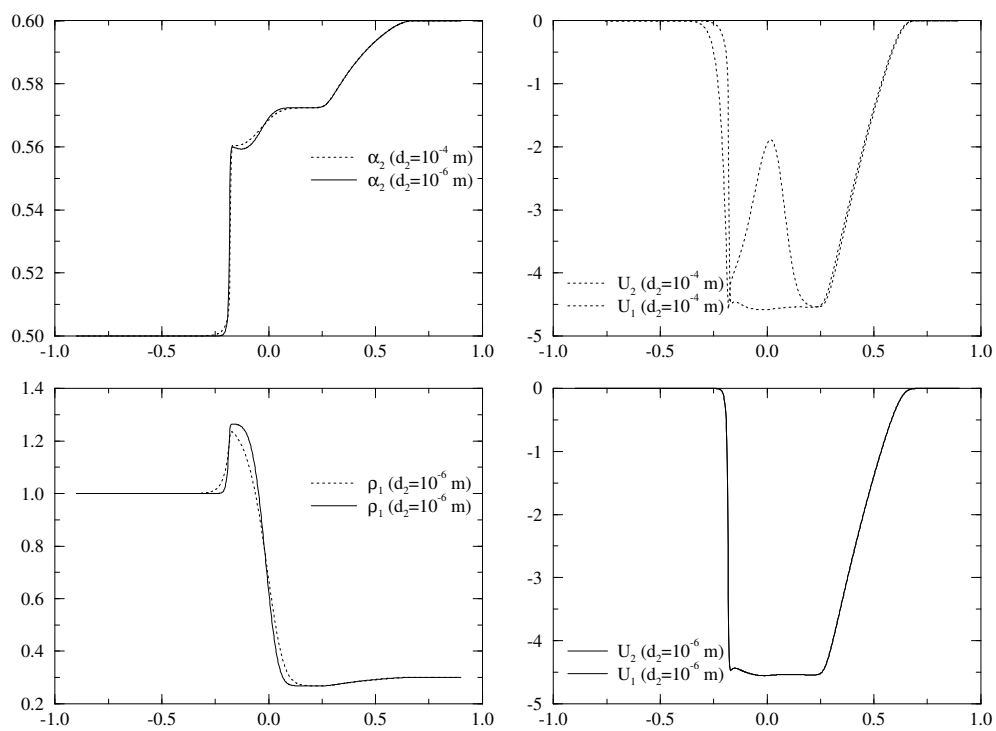


Fig. 4.17 - Effets de traînée sur le cas test de tube à choc diphasique de la figure 4.8; simulation avec des particules de diamètre  $d_2 = 10^{-4}$  et  $10^{-6}$  m.



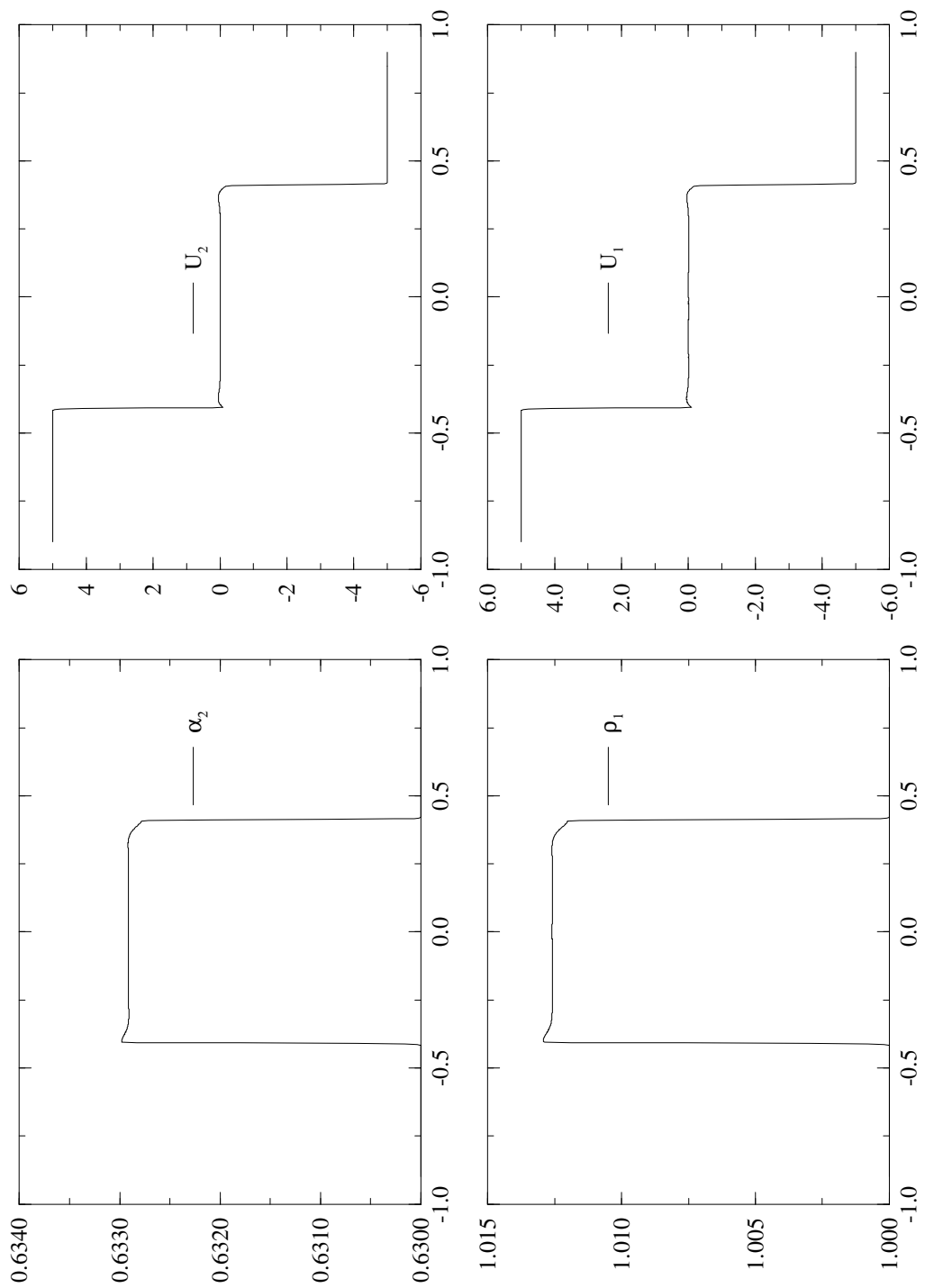


FIG. 4.18 -

Effets de traînée sur le cas test de tube à choc diphasique comportant quatre ondes de choc (conditions initiales n° 5); simulation avec des particules de diamètre  $10^{-6}$  m.

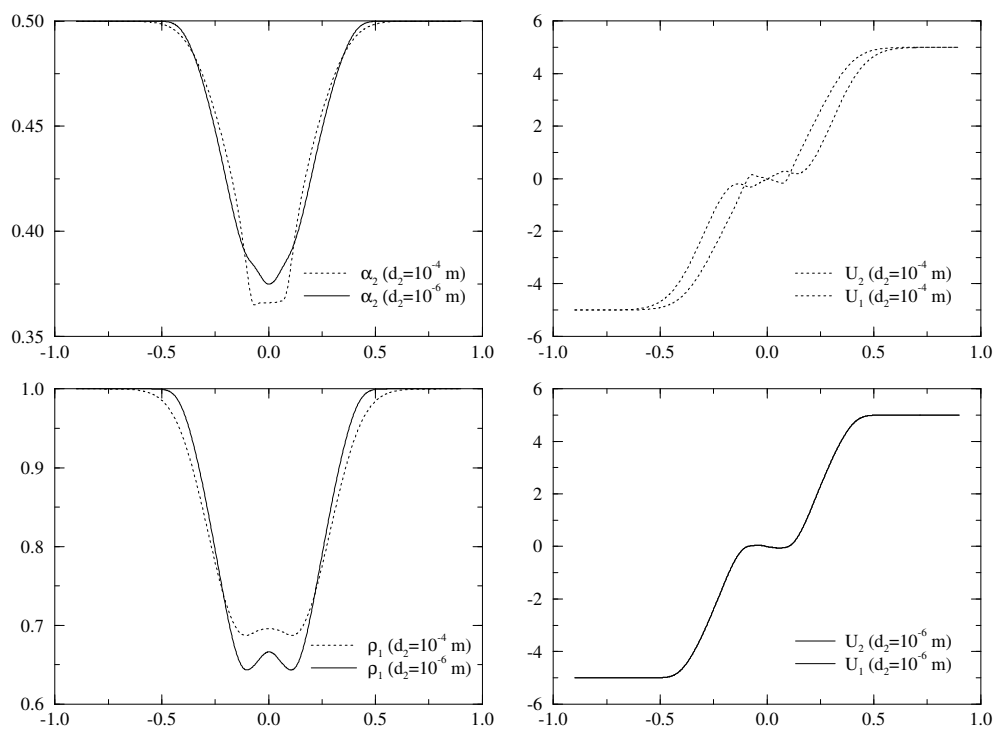


FIG. 4.19 - Effets de traînée sur le cas test de tube à choc diphasique comportant quatre ondes de détente ; simulation avec des particules de diamètre  $d_2 = 10^{-4}$  et  $10^{-6}$  m.

$\text{m}^2.\text{s}^{-2}$ ,  $\nu_1 = 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ,  $\rho_2 = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\alpha_{max} = 0.64$ ,  $d_2 = 10^{-4} \text{ m}$ ,  $e_c = 1$  et  $\underline{g} = \underline{0}$ . On observe la simulation numérique bidimensionnelle d'un écoulement diphasique dans une tuyère, incluant les effets de traînée (système (4.17) avec les lois de fermeture (4.2, 4.3, 4.5b, 4.4, 4.6)). Le maillage associé est de l'ordre de 8500 nœuds. Un zoom du maillage primal (i.e. triangulation avant construction des cellules INRIA) du convergent de la tuyère est présenté sur la figure [4.21]. Le calcul est effectué avec une CFL égale à 0.3. Les conditions initiales à l'intérieur de la tuyère et les conditions aux limites que l'on impose, sont détaillées dans le tableau 4.2. Du fait que l'on ne considère pas de terme de diffusion, on traite les conditions aux limites de l'axe de symétrie comme des conditions aux limites de paroi (avec une hypothèse de glissement).

C.I. Intérieur		C.L. Entrée		C.L. Sortie	
$\rho_1 = 1$	$\alpha_2 = 10^{-6}$	$\rho_1 = 1.1$	$\alpha_2 = 10^{-2}$	$\rho_1 = 1$	$\alpha_2 = 10^{-6}$
$U_1 = 0$	$U_2 = 0$	$U_1 = 200$	$U_2 = 200$	$U_1 = 0$	$U_2 = 0$
$V_1 = 0$	$V_2 = 0$	$V_1 = 0$	$V_2 = 0$	$V_1 = 0$	$V_2 = 0$

TAB. 4.2 – Conditions initiales de la simulation d'écoulement diphasique dans une tuyère. Les composantes horizontale et verticale de la vitesse  $\underline{U}_k = (U_k, V_k)^t$  de la phase  $k$  sont exprimées en  $\text{m.s}^{-1}$  et la densité du gaz en  $\text{kg.m}^{-3}$ .

On considère initialement, dans la tuyère, un mélange très dilué ( $\alpha_2 = 10^{-6}$ ) et au repos ( $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{0}$ ). On impose des conditions aux limites d'entrée supersoniques à partir d'un état infini amont constant pour un écoulement comprenant 1 % de particules en volume; les conditions aux limites de sortie, imposées à partir d'un état infini aval constant du mélange très dilué et au repos, peuvent être comparées ici à des conditions aux limites libres.

On observe sur les figures [4.22] à [4.26] un historique des variables  $\alpha_2$ ,  $\rho_1$ ,  $U_2$ ,  $U_1$  et  $U_r = U_2 - U_1$ . On remarque une très importante accumulation de particules au niveau de la paroi du convergent de la tuyère ainsi qu'au niveau de l'axe de symétrie à l'aval du col de la tuyère. Sur la projection de la solution de la fraction volumique  $\alpha_2$  sur l'axe de symétrie, on observe un choc très important (de  $10^{-2}$  à 0.6) situé à l'aval du col de la tuyère. Les zones d'entrée de tuyère et de proche paroi dans le divergent restent appauvries en particules (de l'ordre de  $10^{-2}$ ). Les valeurs maximales atteintes par la fraction volumique ( $\max(\alpha_2) = 0.627$ ) sont très proches du taux de compactage maximum  $\alpha_{max} = 0.64$  mais le principe du maximum (4.10) n'est pas violé. A l'état stationnaire, le maximum de  $\alpha_2$  vaut 0.623 pour ce maillage. Ce transfert de particules de la paroi du convergent vers l'axe de symétrie perturbe très fortement l'écoulement de la phase gazeuse comparé à une simulation monophasique. La figure [4.23] montre qu'il y a accumulation de gaz dans le convergent de la tuyère ce qui diffère de ce qui est obtenu en écoulement monophasique (qui se caractérise par une densité constante dans le convergent, une onde de détente au passage du col suivi d'une onde de choc en aval du col accompagnée d'une sur-vitesse (Mach égal à 1)). Sur la figure [4.24], on observe la vitesse des particules sur l'axe de symétrie; celle-ci est de l'ordre de  $190 \text{ m.s}^{-1}$  en début de tuyère, elle affiche une discontinuité très marquée (i.e. de  $40 \text{ m.s}^{-1}$ ) au col et reste à peu près constante (de l'ordre de  $140 \text{ m.s}^{-1}$ ) dans le divergent. On remarque la présence, dans la zone de proche paroi en début de divergent, d'une zone d'arrêt des particules ( $U_2 = 0$ ). La vitesse du gaz, comme dans une tuyère monophasique, croît dans le convergent (de 50 à  $225 \text{ m.s}^{-1}$ ) et traverse une onde choc (où elle perd environ 20 % en module); elle atteint par contre une vitesse de l'ordre de  $430 \text{ m.s}^{-1}$  en proche paroi du début du divergent dans une zone très appauvrie en particules.

La figure [4.26] confirme bien la présence d'une vitesse relative très élevée (de l'ordre de  $400 \text{ m.s}^{-1}$ ) dans cette zone. On peut voir sur la figure [4.27] l'importance de la pression gazeuse  $P(\rho_1)$  par rapport à la pression intergranulaire  $\rho_2 \alpha_2 \Xi(\alpha_2)$ ; la pression totale subit les effets des collisions interparticulaires dans les régions très denses. La figure [4.28] montre les débits (en  $\text{kg.m}^{-3}$ ) de gaz et de particules dans le convergent de la tuyère. Le débit des particules est dominé par le transfert de ces dernières de la paroi du convergent vers l'axe de symétrie. La figure [4.20] montre d'une part l'évolution du pas de temps adapté au cours de la simulation, qui varie de façon conséquente jusqu'à ce que le gaz et les particules atteignent la sortie de la tuyère, et l'évolution des résidus de masse qui atteignent approximativement  $10^{-4}$  au bout de 30000 itérations et  $10^{-10}$  au bout de 120000 itérations. La très forte variation du pas de temps, aux alentours de la 2000<sup>ième</sup> itération, est liée à la formation d'un «cluster» sur la paroi dans le convergent ( $\alpha_2 \simeq \alpha_{max}$ , ce qui entraîne  $c_2 = +\infty$  et pénalise très fortement le pas de temps dont la valeur est limitée par le module des vitesses  $\|\underline{U}_k\| + c_k$ ,  $k=1, 2$ ).

**Remarque 4.12** *Au cours du régime transitoire, aucune perte de positivité discrète des variables  $\alpha_2$ ,  $(1 - \alpha_2)$  et  $\rho_1$  n'a été enregistrée.*

**Remarque 4.13** *Cette simulation met en évidence des vitesses relatives localement très importantes (zone de proche paroi en début de divergent),  $\|\underline{U}_2 - \underline{U}_1\|/c_1$  pouvant atteindre 1 par endroits (Cf. la figure [4.29], dans la zone d'arrêt des particules en proche paroi du début du divergent).*

#### 4.6.5 Simulation de lits fluidisés denses

Le cadre de ces écoulements est une enceinte ou foyer dans laquelle des particules subissent des réactions chimiques ou de combustion. Le principe des lits fluidisés denses est de soulever cette masse compacte de particules, appelée lit, par une circulation de gaz pour mélanger les particules. Les lits fluidisés denses constituent notamment une partie de l'installation des chaudières à lit fluidisé circulant. Le régime de ces écoulements est très dense, le volume des particules pouvant occuper jusqu'à 64 % du volume total. La simulation numérique de ces écoulements, outre son caractère prédictif, a pour objectif l'optimisation de la géométrie du foyer et du débit de gaz pour mélanger au mieux l'ensemble des particules (recherche de rentabilité et de réduction des émissions polluantes par exemple).

L'expérience consiste en la «fluidisation» d'une masse de particules reposant sur la grille d'une colonne par injection d'un flux de gaz ascendant. Les particules sont donc maintenues en suspension par deux phénomènes en compétition qui doivent en fin de compte s'équilibrer : l'entraînement des particules par l'écoulement porteur et l'action de la gravité sur ces dernières. Les particules peuvent être momentanément entraînées hors du lit mais, sous l'action de la gravité, elles doivent toujours finir par y retomber. Ainsi, la circulation de gaz doit être suffisamment importante pour soulever le lit de particules mais la vitesse d'entraînement de ces dernières doit rester de l'ordre de la vitesse de chute.

La configuration typique des lits fluidisés denses réside en un lit compact parcouru par un courant d'air ascendant qui passe majoritairement par des zones très appauvries en particules, tandis qu'au sommet du lit, on observe des instabilités importantes. Le régime de l'écoulement est caractérisé par la vitesse de fluidisation. Pour les faibles vitesses de fluidisation, on distingue deux vitesses limites qui sont la vitesse minimale de fluidisation et la vitesse minimale d'apparition de bulles. La vitesse minimale de fluidisation est la vitesse du gaz (calculée hors du

lit sous la grille) pour laquelle la force de traînée sur les particules, produite par la circulation ascendante de gaz, est égale au poids des particules. La vitesse minimale d'apparition des bulles est supérieure à la vitesse minimale de fluidisation excepté dans le cas de particules de diamètre supérieur à  $100 \mu m$ . Pour des vitesses de fluidisation plus élevées, on observe un comportement très agité du lit. Dans les simulations qui vont suivre, on s'intéresse à un régime d'écoulement instationnaire précis, le régime à bulles, qui se caractérise par la formation dans le lit de bulles de gaz près de la grille de fluidisation. Ces bulles, qui peuvent coalescer entre elles, traversent le lit en grossissant jusqu'à la surface de ce dernier qu'elles perturbent en éclatant ; en outre, le flux de gaz circule principalement à l'intérieur de celles-ci. Si ces écoulements se caractérisent par des zones très appauvries en particules, leur fraction volumique étant de l'ordre de  $10^{-2}$  dans les bulles, ils s'accompagnent également de clusters de particules, dans lesquels la fraction volumique atteint pratiquement le taux de compactage maximum. Le régime à bulles, que l'on veut simuler, se situe entre le régime particulaire, pour lequel on observe une petite expansion homogène du lit dont la surface est bien définie, et le régime à piston, pour lequel la taille des bulles approche la largeur de la colonne de fluidisation, leur passage faisant monter et descendre de façon régulière la surface du lit. Au-delà du régime à piston, on atteint des régimes turbulents pour lesquels il devient difficile de distinguer les bulles et la surface du lit.

En de nombreux points, on peut comparer les lits fluidisés à bulles à un liquide peu visqueux parcouru par des bulles. En effet des poches d'air dans un milieu granulaire et des bulles dans un liquide présentent des similitudes comme leur forme sphérique, l'écoulement autour d'elles, leur vitesse et le fait qu'elles peuvent coalescer ou réagir au contact d'une paroi.

Les tests qui vont suivre ont pour but de montrer que la simulation numérique de lits fluidisés denses, par des techniques volumes finis pour des systèmes hyperboliques et sur maillage non structuré, est possible. On regardera le comportement qualitatif sur des temps d'intégration très longs de certaines grandeurs moyennes telles que la hauteur de lit, la fraction volumique moyenne dans le lit et la vitesse de fluidisation ; mais aussi l'évolution des résidus massiques témoins de l'instationnarité de l'écoulement et certaines caractéristiques des bulles comme leur taille, leur vitesse ou le taux de particules à l'intérieur. D'un point de vue numérique on regardera notamment la dépendance de l'algorithme au maillage et l'on constatera la présence d'états non hyperboliques situés à l'intérieur des bulles de gaz. L'algorithme mis en œuvre peut s'étendre à un modèle à cinq équations (comprenant en plus une équation d'évolution de l'énergie cinétique des particules). Ce système présente en effet les mêmes caractéristiques que le modèle à quatre équations (issu du modèle à cinq équations par intégration de l'équation d'énergie cinétique des particules) comme l'hyperbolicité conditionnelle et la présence de termes non conservatifs dans le système de convection associé. En outre, l'ajout des termes de diffusion ne remet pas en cause la méthode numérique présentée précédemment pour la résolution du système de convection et des termes sources.

Pour simuler des lits fluidisés denses, l'algorithme mis en œuvre doit pouvoir gérer des taux de fraction volumique très importants ou très faibles, mais également tenir compte du caractère fortement compressible, au sens  $\alpha_2$  variable, de l'écoulement des particules. Quand des bulles apparaissent, on met en contact des régions très appauvries en particules comme l'intérieur des bulles où  $\alpha_2 \simeq 10^{-2}$  ou dans la colonne au-dessus du lit où  $\alpha_2 \simeq 10^{-6}$ , avec des régions très denses, la fraction volumique dans le lit pouvant avoisiner par endroits le taux de compactage maximum  $\alpha_{max} = 0.64$ . On n'a pas constaté sur les simulations présentées de violation du principe du maximum de la variable fraction volumique, même si on atteint par endroit un taux de compactage de 63.9 %. Mais cette variable nécessite d'être réajustée à une valeur proche de zéro (fixée à  $10^{-6}$  dans nos applications) quand elle devient négative dans le haut de

la colonne qui ne cesse, par l'action de la gravité, de s'appauvrir en particules. On note que, par contre, la compressibilité du gaz pourrait être négligée pour ce régime d'écoulement.

Pour les simulations suivantes, on considère le modèle à deux fluides (4.1) avec les mêmes hypothèses et lois de fermeture que précédemment, à savoir :

- la phase gazeuse est supposée compressible ;
- les effets de la diffusion sont négligés ;
- la turbulence de l'écoulement porteur n'est pas prise en compte ;
- la pression moyenne de l'écoulement porteur ne dépend que de  $\rho_1$  (Cf. l'équation (4.3)) ;
- les collisions inter-particulaires sont modélisées par (4.4) avec  $h(\alpha_2) = 1$  et (4.5b) ;
- la force de traînée est modélisée par l'équation (4.6)
- et les effets de la gravité sont pris en compte.

Les tests ont été réalisés pour un écoulement de gaz caractérisé par  $\gamma = 7/5$ ,  $K = 10^5$  et  $\nu_1 = 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  ; et des particules de charbon de densité  $\rho_2 = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$ , de diamètre  $d_2 = 5.10^{-4} \text{ m}$ ,  $\alpha_{max} = 0.64$  et  $\epsilon_c = 1$ . La force gravitationnelle est  $\underline{g} = (0, 9.81 \text{ m.s}^{-2})^t$ .

Comme il est précisé plus haut, le modèle (4.1) est issu d'un modèle à cinq équations pour lequel on a intégré l'équation d'évolution de l'énergie cinétique des particules  $(q_2^2)((x, y), t)$  et abouti aux relations de fermeture (4.4), (4.5b) et (4.5a). Par intégration, il vient alors une constante  $\langle q_2^2 \rangle_0$ , caractéristique de l'agitation des particules, dont on doit déterminer la valeur. L'expérience montre que  $(q_2^2)((x, y), t)$  varie beaucoup suivant la région considérée : à l'intérieur du lit où  $(q_2^2)((x, y), t) \simeq 10^{-3} \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ , à la surface du lit où  $(q_2^2)((x, y), t) \simeq 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ , et dans la partie supérieure du foyer appauvrie en particules où  $(q_2^2)((x, y), t) \simeq 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ . On regardera dans notre cas l'influence de  $\langle q_2^2 \rangle_0$  sur l'écoulement.

Suivant l'application industrielle considérée, l'enceinte peut avoir un volume de plusieurs dizaines de mètres cube et le rapport entre la hauteur et la largeur de la colonne a des conséquences sur les caractéristiques de l'écoulement. Le domaine bidimensionnel de calcul  $D$  que l'on considère est une colonne de 0.5 m de large par 1.5 m de haut, avec des conditions aux limites de paroi sur les parois verticales de la colonne, des conditions aux limites de sortie en haut et, sur la grille située à la base du foyer, des conditions aux limites d'entrée pour le gaz et de paroi pour les particules. La quantité de particules dans le domaine doit être conservée durant toute la simulation.

On initialise les calculs avec un lit de particules de hauteur  $y_0 < 1.5 \text{ m}$ . au repos ( $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{0}$ ). On considère deux cas qui se différencient par la valeur initiale de la fraction volumique dans le lit : soit  $\alpha_2$  est relativement loin du taux de compactage maximum, i.e.  $\alpha_2 = 20 \%$  et le début de la simulation numérique se caractérise par la formation du lit dense, soit  $\alpha_2$  est près du taux de compactage maximum,  $\alpha_2 = 63 \%$ . Les conditions initiales sont décrites dans le tableau 4.3 ; on note que la vitesse  $V_1$  d'entrée donnée est différente de la vitesse de fluidisation, elle désigne ici la vitesse du gaz en amont de la grille hors de la cheminée à partir de laquelle on va calculer un flux (Cf. le paragraphe 4.5.4.2 sur les conditions aux limites et notamment les conditions réservoirs).

	C.L. Entrée	C.I. Intérieur	C.L. Sortie
	$y = 0, t \geq 0$	$y \in [0, 1.5], t = 0$	$y = 1.5, t \geq 0$
Gaz	$\rho_1 = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ $U_1 = 0$ $V_1$ paramètre	$\rho_1 = 1$ $U_1 = 0$ $V_1 = 0$	$\rho_1 = 1$ $U_1 = 0$ $V_1 = 0$

	C.I. Intérieur		C.L. Sortie
	$0 < y < y_0, t = 0$	$y_0 < y < 1.5, t = 0$	$y = 1.5, t \geq 0$
Particules	Cas n° 1	Cas n° 2	$\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ $\underline{U}_2 = \underline{0}$
	$\alpha_2 = 0.2$ $y_0 = 0.5$ $\underline{U}_2 = \underline{0}$	$\alpha_2 = 0.63$ $y_0 = 0.476$ $\underline{U}_2 = \underline{0}$	
	$\alpha_2 = 10^{-6}$ $y_0$ suivant cas $\underline{U}_2 = \underline{0}$		

TAB. 4.3 – Conditions initiales et aux limites pour la simulation des lits fluidisés denses.

Les calculs sont effectués avec une CFL égale à 0.5. On précise la définition de plusieurs quantités comme la quantité de particules dans le domaine :

$$M(t) = \iint_D \alpha_2((x, y), t) dx dy$$

La hauteur du lit est une quantité moyenne intéressante car elle apporte des renseignements significatifs sur le régime de l'écoulement. On la définit de la façon suivante :

$$H(t) = \frac{2 \iint_D \alpha_2((x, y), t) y dx dy}{M(t)}$$

On présente sur les courbes qui suivent une hauteur de lit normalisée par rapport à la hauteur de lit initiale  $H_0 = H(t=0)$ , i.e.  $\hat{H}(t) = H(t)/H_0$ . On veut également suivre l'évolution de la fraction volumique moyenne des particules dans le lit, elle est définie par :

$$(\alpha_2)_{\text{moy}}(t) = \frac{M(t)}{H(t) \times L_D}$$

où  $L_D$  désigne la largeur du domaine. La vitesse de fluidisation est également un paramètre important puisque c'est elle qui va imposer le régime de l'écoulement. La façon dont sont mises en œuvre les conditions aux limites d'entrée (Cf. le paragraphe 4.5.4.2) dans le code ne permet pas d'imposer la vitesse de fluidisation puisque l'on utilise des conditions de type réservoir ( $V_1|_{\text{Entrée}}$ ) pour lesquelles on impose un état infini amont mais pas le flux (Cf. la remarque 4.11). Par conservation des débits, on peut néanmoins estimer la vitesse de fluidisation correspondant à nos simulations à partir du débit moyen du gaz  $(\alpha_1 \rho_1 V_1)_{\text{moy}}(t)$  sur les cellules du domaine adjacentes à la grille d'entrée. Soit  $\mathcal{C}_{\text{Entrée}}$  l'ensemble des cellules du maillage adjacentes à la grille de fluidisation  $\Gamma_{\text{Entrée}}$  ( $|\Gamma_{\text{Entrée}}| = L_D$ ), on définit alors le débit moyen  $(\alpha_1 \rho_1 V_1)_{\text{moy}}(t)$  :

$$(\alpha_1 \rho_1 V_1)_{moy}(t) = \frac{1}{L_D} \sum_{C_i \in \mathcal{C}_{Entrée}} \int_{C_i \cap \Gamma_{Entrée}} (\alpha_1 \rho_1 V_1)(\underline{x} \in C_i, t) dx$$

Soit  $V_f(t)$  la vitesse de fluidisation qui est la vitesse d'injection du gaz calculée hors du lit sous la grille d'entrée. On écrit la relation de conservation du débit de gaz entre les débits avant la grille (monophasique avec  $\alpha_1 = 1$  et  $\rho_1 = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ ) et juste après, i.e.  $V_f(t) \simeq (\alpha_1 \rho_1 V_1)_{moy}(t)$ . Plusieurs expressions sont proposées dans la littérature pour le calcul de la vitesse minimum de fluidisation  $V_{mf}$  (Cf. [Boe97] et [Kun91] notamment pour une étude plus détaillée). On utilise ici une formulation, dérivant de la loi d'Ergun, qui est basée sur le calcul de la chute de pression au seuil de fluidisation.  $V_{mf}$  est alors solution de :

$$\rho_2 g (1 - \alpha_{max})^3 d_2 = \frac{150 \alpha_{max} \nu_1}{d_2 \rho_1} V_{mf} + 1.75 \rho_1 V_{mf}^2 \quad (4.39)$$

La première simulation effectuée concerne la formation d'un lit dense, la condition initiale associée au cas n°1 considérant un lit dans lequel les particules occupent 20 % du volume total. A vitesse d'injection de gaz nulle et dans des conditions réelles d'expérience, les particules doivent tomber, sous l'action de la gravité, jusqu'à former un «tas de sable», dans lequel  $\alpha_2 = \alpha_{max}$  et  $\underline{U}_2 = \underline{0}$ . Le système (4.1) ne peut pas atteindre cet état stationnaire car  $\alpha_2 = \alpha_{max}$  n'est pas solution de ce système. En effet, si  $\alpha_2 = \alpha_{max}$  alors  $g(\alpha_2) = +\infty$  ce qui donne une pression granulaire  $\alpha_2 \Xi(\alpha_2)$  infinie. On effectue néanmoins cette simulation pour voir d'une part comment l'algorithme va gérer la disparition de particules dans la partie supérieure de la colonne et l'accumulation de ces dernières sur la grille, mais aussi pour voir comment le système (4.1) va approcher l'état «tas de sable». On représente sur la figure [4.30] le profil de la fraction volumique des particules suivant la hauteur de la colonne. Au temps intermédiaire, on observe trois phases dans l'écoulement : un état intermédiaire constant,  $\alpha_2 = 0.2$ , qui concerne les particules qui subissent juste la gravité sans rentrer en collisions avec d'autres particules (vitesse de chute d'environ  $1.4 \text{ m.s}^{-1}$ ), un très fort gradient en bas de colonne vers un état très dense d'accumulation des particules,  $\alpha_2 = 0.6$ , et une détente qui relie la zone quasiment vide de particules,  $\alpha_2 = 10^{-6}$ , à l'état intermédiaire. A l'état «quasi» stationnaire, les particules ont compacté en un lit dense,  $\alpha_2 = 0.6$ , de 0.2 m de hauteur. On a tracé également l'évolution des résidus massiques<sup>1</sup>. On observe une instationnarité «désorganisée» de ceux-ci jusqu'aux environs de la 50000<sup>ème</sup> itération (temps physique environ 0.7 s.), ce qui correspond à la phase de formation du lit dense et, au-delà, des oscillations régulières de période environ 30000 itérations (temps physique environ 0.42 s.) qui correspondent à de légères oscillations du lit invisibles à l'oeil nu qui maintiennent le système à un état «quasi» stationnaire de lit dense sans que numériquement le principe du maximum soit violé. Sur le profil de vitesse des particules, à l'état «quasi» stationnaire, tracé à deux instants différents, on observe que la vitesse est quasiment nulle dans le lit, qu'elle subit de très forts gradients à la surface du lit mais qu'elle subit également des instabilités qui sont les manifestations des oscillations des résidus massiques. Sur cette simulation, effectuée avec  $\frac{2}{3} < q_2^2 >_0 = 10^{-2} \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ , le taux de compactage des particules atteint en bas de colonne est de 60 % ; on verra sur les simulations suivantes que la valeur de  $< q_2^2 >_0$  a des répercussions importantes sur le taux de compactage que peuvent atteindre les particules.

1. Le résidu temporel massique associé à la phase  $k$ , entre les temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$ , est calculé par

$$R_k^{n+1} = \frac{\|\alpha_k^{n+1} \rho_k^{n+1} - \alpha_k^n \rho_k^n\|_{L^2}}{\|\alpha_k^n \rho_k^n\|_{L^2}}$$



On effectue ensuite la simulation avec les conditions initiales associées au cas n° 1 avec  $V_1|_{\text{Entrée}} = 8 \text{ m.s}^{-1}$  pour trois valeurs de  $\frac{2}{3} < q_2^2 >_0$  différentes, à savoir  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  et  $10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$  et sur un maillage plutôt grossier de  $20 \times 60$  éléments. On montre sur la figure [4.31] l'évolution temporelle de la fraction volumique moyenne des particules dans le lit, des résidus de masse et de la hauteur de lit et sur la figure [4.32] trois images instantanées de répartition des particules dans le lit. On déduit le comportement suivant : pour de grandes valeurs de  $< q_2^2 >_0$ , i.e.  $< q_2^2 >_0 / \|\underline{U}_2\|^2 \simeq 10^{-4}$ , les particules compactent moins ( $\max(\alpha_2) = 0.58$  et  $(\alpha_2)_{\text{moy}} = 0.32$ ) et le lit est moins perturbé ; en outre, on constate surtout une expansion homogène du lit et si des bulles de gaz sont formées, la concentration volumique des particules à l'intérieur reste élevée (10 %  $< \alpha_2 < 20$  %). Inversement, pour de petites valeurs de  $< q_2^2 >_0$ , i.e.  $< q_2^2 >_0 / \|\underline{U}_2\|^2 \simeq 10^{-6}$ , l'écoulement est beaucoup plus « explosif », les particules compactent beaucoup plus pouvant pratiquement atteindre le taux de compactage maximum, le lit est très perturbé et la concentration volumique des particules dans les bulles de gaz est de l'ordre de 1 %. Dans les simulations suivantes, on considérera une valeur de  $< q_2^2 >_0$  de l'ordre de  $10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ .

Des études de sensibilité par rapport au maillage (Cf. [Boe97]) montrent que le diamètre des particules par rapport à la largeur des cellules du maillage (que l'on note  $\Delta x$ ) est un critère important. On effectue alors une simulation sur deux maillages différents : un maillage régulier assez grossier de  $20 \times 60$  éléments ( $\Delta x = 0.025 \text{ m}$ ) et un maillage non structuré raffiné en bas du foyer près de la grille, de 9400 éléments (obtenu par un algorithme Voronoï) représenté sur la figure [4.34] ( $\Delta x = 0.01 \text{ m}$ ). La simulation est effectuée avec les conditions initiales associées au cas n° 2, une vitesse d'entrée  $V_1|_{\text{Entrée}} = 14 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\frac{2}{3} < q_2^2 >_0 = 2.10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ . On compare sur la figure [4.33] les résultats obtenus avec deux maillages différents. On note que le maillage influence la présence ou l'absence de bulles dans la simulation. En effet, dans le cas du maillage grossier, l'évolution de la hauteur de lit montre une expansion de ce dernier en début de simulation puis une quasi stabilité, le flux de gaz traversant le lit de façon homogène en cheminant entre les particules. La hauteur de lit est contrôlée par la concentration de particules dans le lit mais également par le volume des bulles (qui est compris dans le calcul de  $H(t)$ ) et l'évolution de la hauteur de lit associée à la simulation avec le maillage raffiné montre bien par ses variations qu'il y a formation de bulles. Ainsi la physionomie de l'écoulement est très affectée par la résolution du maillage. Les maillages qualifiés de grossiers favorisent donc l'expansion du lit et la non apparition de bulles, la circulation des particules s'organisant autour de grands tourbillons dans le lit. Le rapport entre la largeur de la colonne et la hauteur du lit étant environ égal à 1, l'échelle spatiale de ces tourbillons de recirculation des particules dans le lit est liée à la largeur de la colonne. D'autres simulations parmi celles déjà décrites nous ont également permis de mettre en évidence que les grosses mailles influencent aussi la fraction volumique des particules qui compactent moins dans le lit et qui restent trop importantes à l'intérieur des bulles de gaz. L'échelle de longueur caractéristique des instabilités dans le lit est notamment liée au diamètre des particules. Cette échelle est d'autant plus petite que les particules sont fines et elle nécessite un maillage fin pour que les instabilités soient captées (d'où le raffinement proche de la grille où apparaissent les bulles).

On présente maintenant sur les figures [4.35] à [4.42] les résultats d'une simulation effectuée à partir des conditions initiales associées au cas n° 2 avec  $V_1|_{\text{Entrée}} = 14 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\frac{2}{3} < q_2^2 >_0 = 10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$  avec le maillage non structuré raffiné représenté sur la figure [4.34] et pour un temps d'intégration de 10 s. On voit sur la figure [4.35] que l'écoulement est très fortement perturbé par la formation de bulles ; la hauteur de lit, initialement égale à 0.5 m, varie entre 0.6 et 0.7 m ; le débit moyen  $(\alpha_1 \rho_1 V_1)_{\text{moy}}(t)$  en entrée du domaine est d'environ  $0.8 \text{ m.s}^{-1}$  ce qui correspond à une vitesse de fluidisation d'environ  $0.8 \text{ m.s}^{-1}$ . Ce résultat est cohérent avec la vitesse minimum de fluidisation calculée à partir de (4.39) qui est d'environ  $0.24 \text{ m.s}^{-1}$  pour ce cas mais aussi

avec les résultats obtenus dans [Bal95] à partir de simulations du modèle à cinq équations pour les mêmes caractéristiques des particules. La fraction volumique moyenne des particules est contrôlée par l'expansion du lit mais aussi par le volume des bulles présentes dans le lit, en moyenne  $\alpha_2$  est égal à 0.5 dans le lit. Sur la figure [4.36], on observe la formation, l'évolution puis l'éclatement en surface du lit de deux bulles (0.05 s. environ séparent deux images successives), le temps physique associé étant entre 4.675 et 5.325 s. On constate qu'elles sont de forme allongée dans la zone de formation proche de la grille, plutôt arrondie dans le lit et aplatie quand elles s'approchent de la surface du lit. La hauteur de lit n'est pas suffisante pour calculer précisément la vitesse de ces bulles ; on estime néanmoins leur vitesse à environ  $1.15 \text{ m.s}^{-1}$  et leur diamètre de l'ordre d'une quinzaine de centimètres. La fraction volumique des particules est supérieure à 0.6 dans les régions homogènes sans bulle. On constate que la formation des bulles perturbe fortement l'écoulement pour les temps d'intégration à suivre puisque l'on voit la formation d'une instabilité ressemblant à une cheminée (où  $\alpha_2 > 0.2$ ) qui se forme dans le sillage de la seconde bulle. Comme dans le cas de bulles de gaz dans un liquide, on montre sur la figure [4.37] la coalescence de deux bulles le temps physique associé étant entre 2.9 et 3.4 s. Sur la figure [4.38], on superpose les débits de gaz et de particules à la fraction volumique des particules dans le lit. On constate que le gaz circule dans le sens ascendant et majoritairement dans les zones appauvries en particules, telles que les bulles, alors que les particules fluidisées par l'écoulement porteur et poussées par les bulles circulent dans de grands tourbillons autour des bulles. On montre sur la figure [4.39] le profil de concentration des particules au centre de la colonne dans une région homogène dense, où  $\alpha_2$  est environ égal à 0.6, et dans une bulle, où  $\alpha_2$  atteint 0.05. On note un très fort gradient, de type choc, de la concentration dans la partie inférieure (d'où encore une fois la nécessité d'avoir un maillage suffisamment fin) et d'un gradient beaucoup plus régulier (zone de détente) dans la partie supérieure de la bulle. [Boe97] met en évidence l'importance du coefficient d'inélasticité  $e_c$ , de l'expression de la pression granulaire, sur la grosseur des bulles et la hauteur du lit. Des valeurs plus faibles de  $e_c$  entraînent que  $\Xi(\alpha_2)$  décroît, une formation de bulles plus grosses et une hauteur de lit plus faible car les particules compactent plus. Sur la figure [4.40], on montre que les lignes isobares, au sens  $P(\rho_1)$ , sont régulièrement espacées dans les zones homogènes mais déformées autour des bulles. La pression à la base du lit est fonction de la masse totale du lit, la pression au-dessus du lit étant égale à la pression dans la colonne. La décroissance linéaire de la pression suivant la hauteur est perturbée, dans le lit, par la présence de bulles et l'explosion de ces dernières à la surface. La figure [4.41] montre que la pression totale  $P_{tot} = P(\rho_1) + \alpha_2 \rho_2 \Xi(\alpha_2)$  équivaut à la pression de l'écoulement porteur  $P(\rho_1)$  dans les zones homogènes et qu'elle est perturbée par la pression granulaire  $\alpha_2 \Xi(\alpha_2)$  dans les zones très denses ( $\alpha_2 \simeq 0.64$ ). Sur cette simulation, le maximum atteint par  $\alpha_2$  est 0.639 et le principe du maximum (4.10) n'a pas été violé. On constate sur la figure [4.42] que l'on a des états non hyperboliques, la condition suffisante d'hyperbolicité  $\mu_3 \geq 0$  décrite dans l'équation (4.16) n'est pas respectée et deux valeurs propres sont complexes conjuguées. Ces états sont situés dans des zones appauvries en particules, i.e. les bulles (dans le lit, en formation ou bien quand elles éclatent), dans des régions où la vitesse relative est la plus importante mais surtout où la célérité  $c_2$  est très faible. Deux des valeurs propres associées sont complexes, le système est donc elliptique dans ces régions. Néanmoins, la présence de ces états non hyperboliques pour le système global de convection associé au système (4.1) ne semble pas déstabiliser la méthode à pas fractionnaires (les deux sous-systèmes (4.18) et (4.19) étant inconditionnellement hyperboliques).

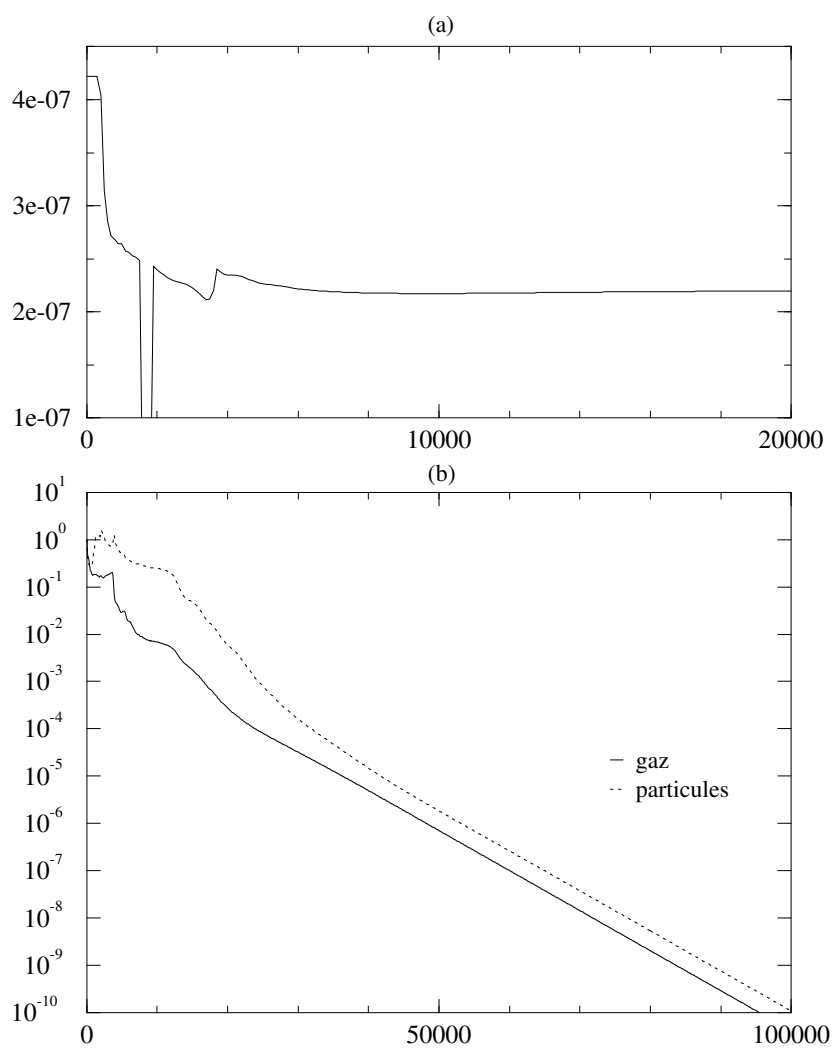


FIG. 4.20 -

Simulation d'écoulement dans une tuyère : en fonction du nombre d'itérations, (a) évolution du pas de temps (en s.), (b) résidus de masse par phase.

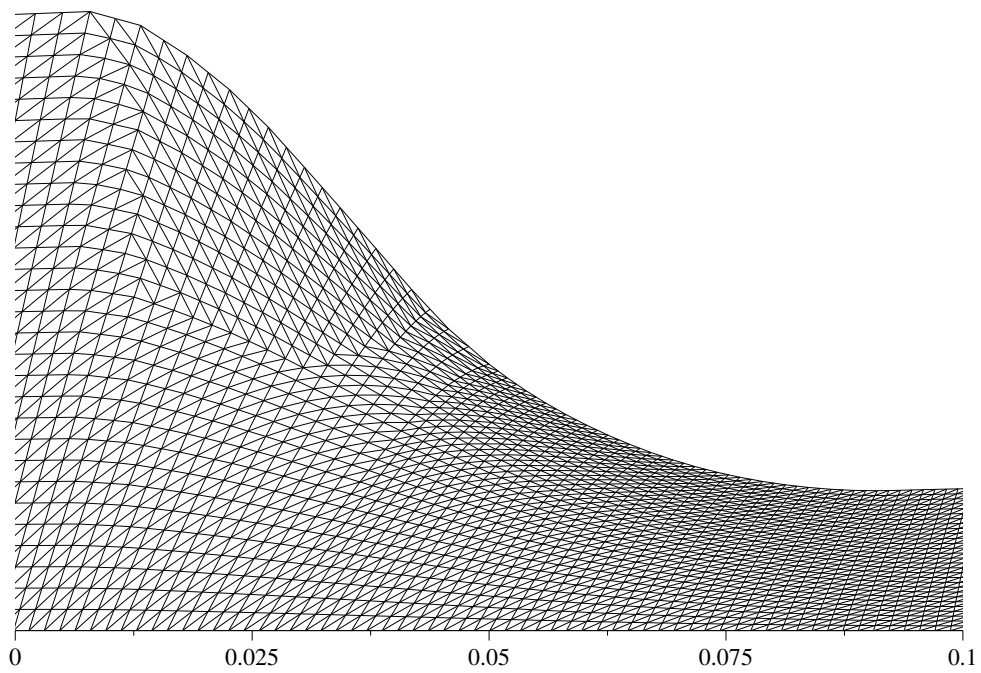


FIG. 4.21 - Maillage primal du col de la tuyère.

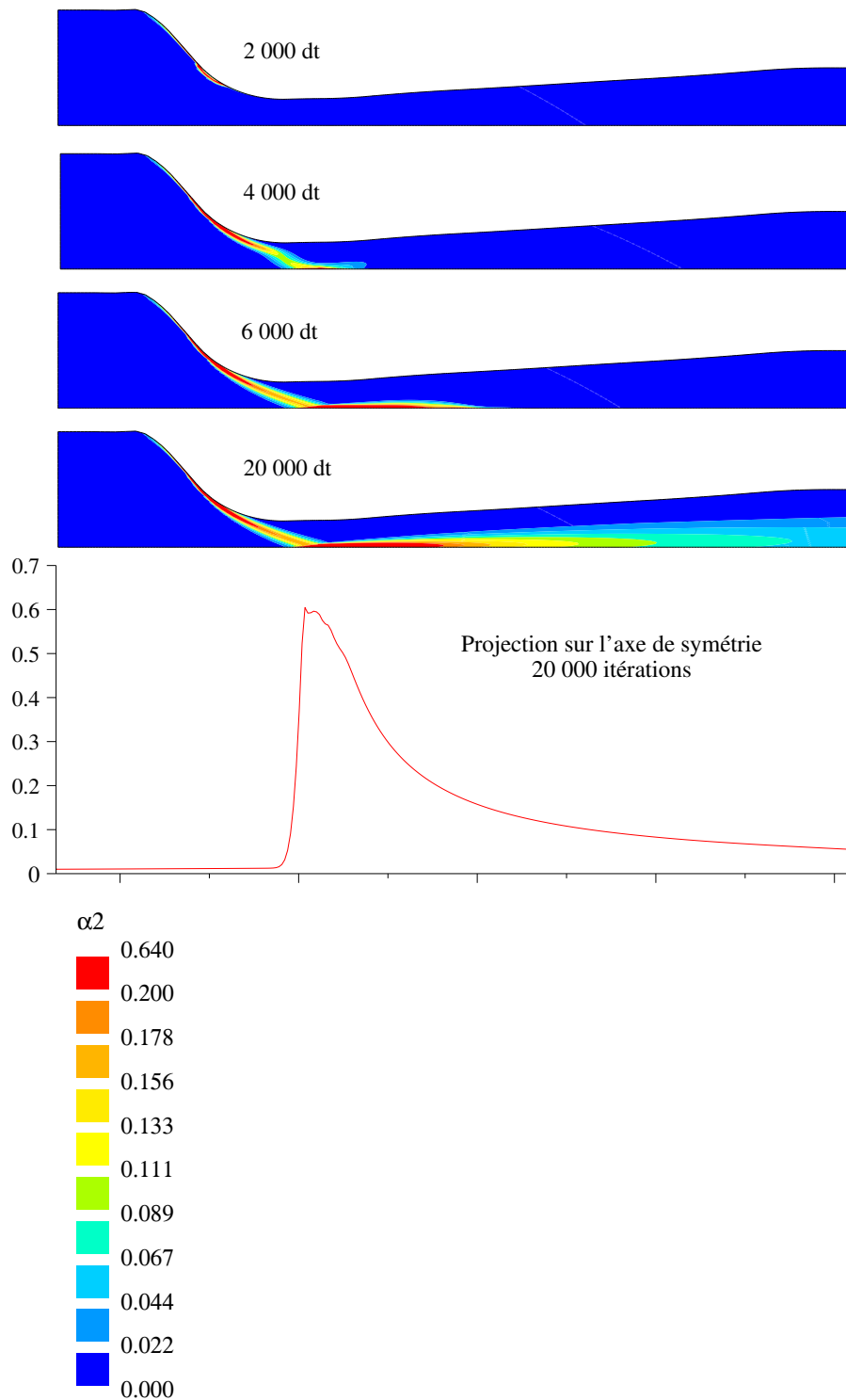
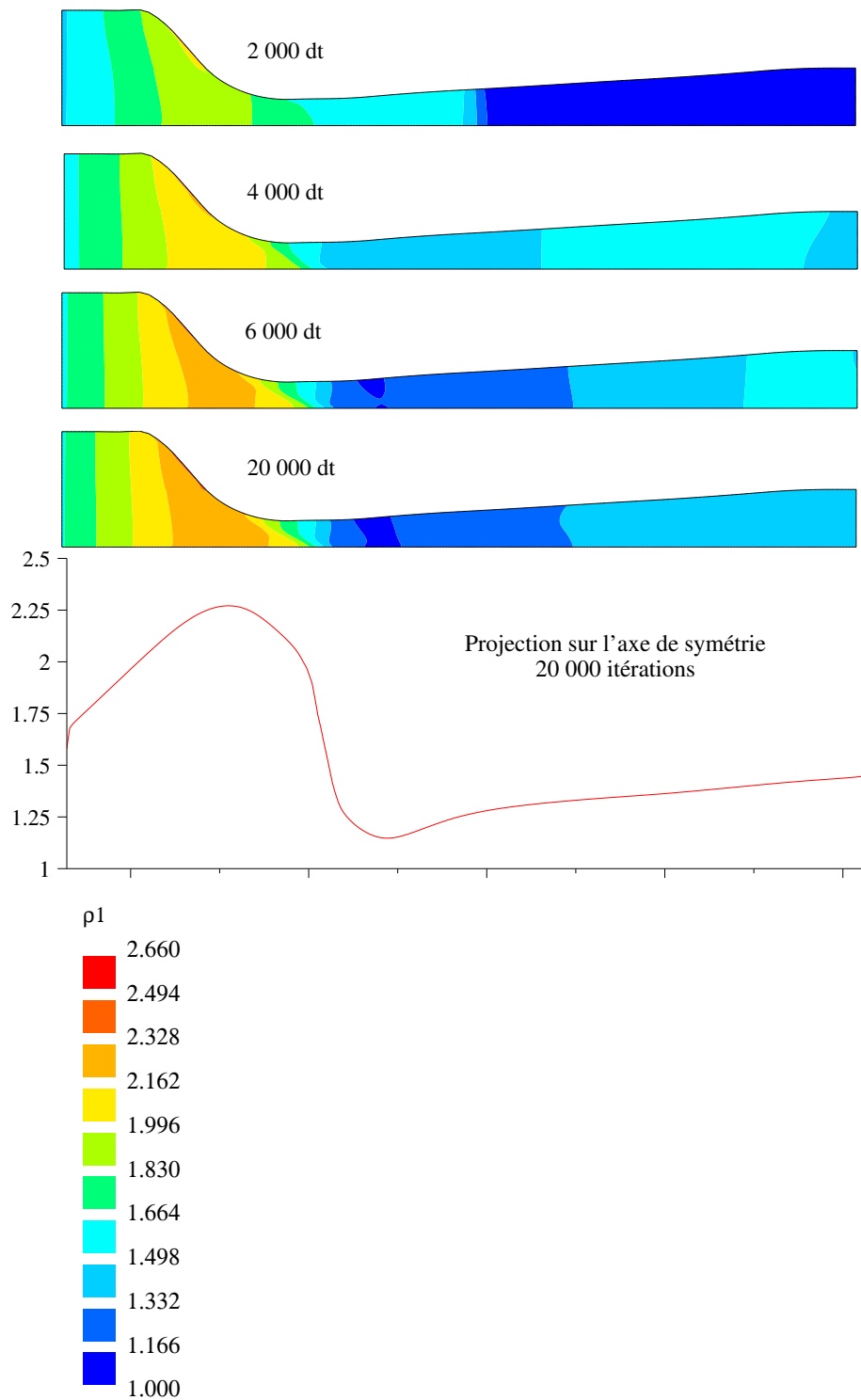


FIG. 4.22 - *Écoulement dans une tuyère : fraction volumique des particules.*

FIG. 4.23 - *Écoulement dans une tuyère : densité du gaz.*

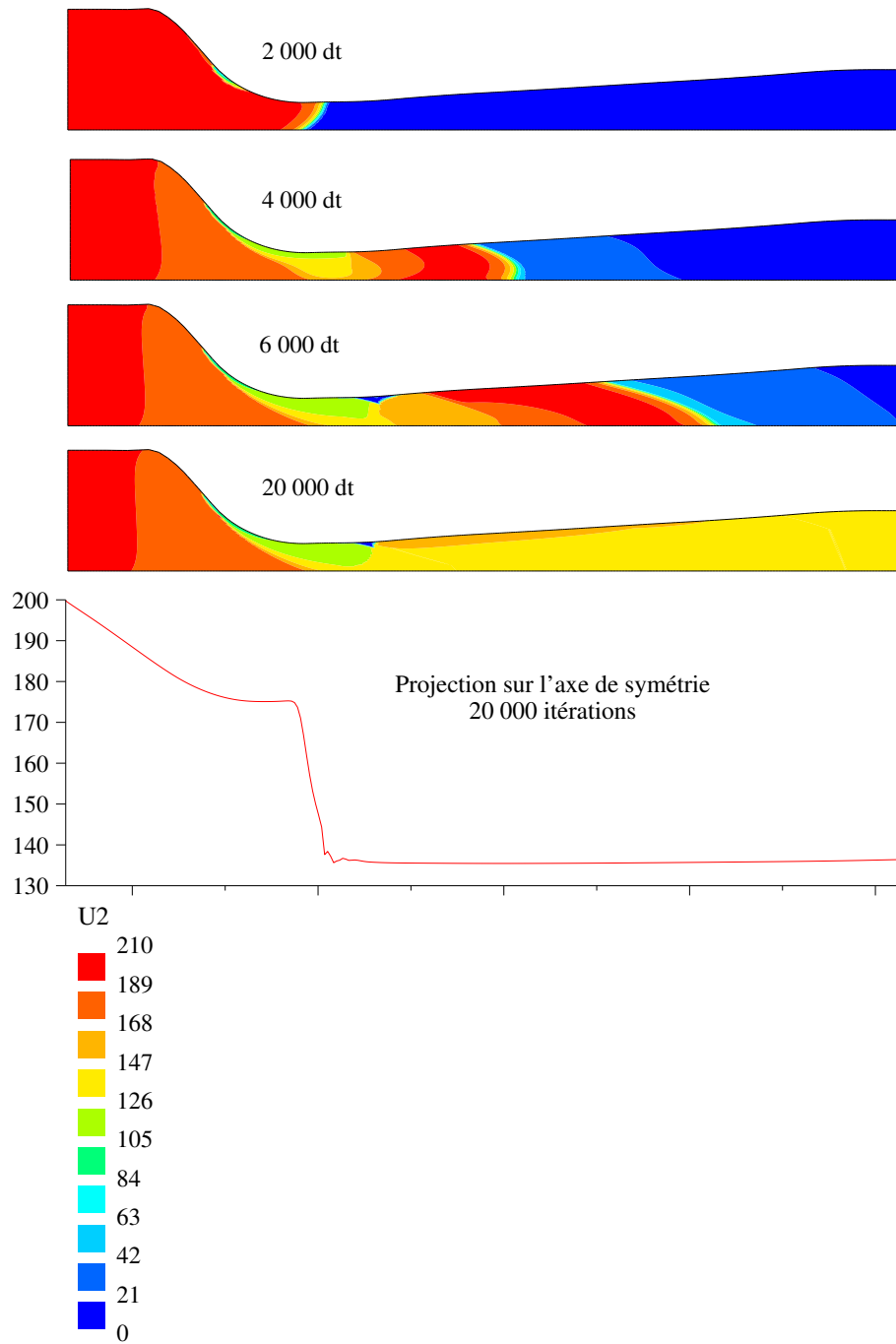


FIG. 4.24 – Ecoulement dans une tuyère : composante horizontale de la vitesse des particules.

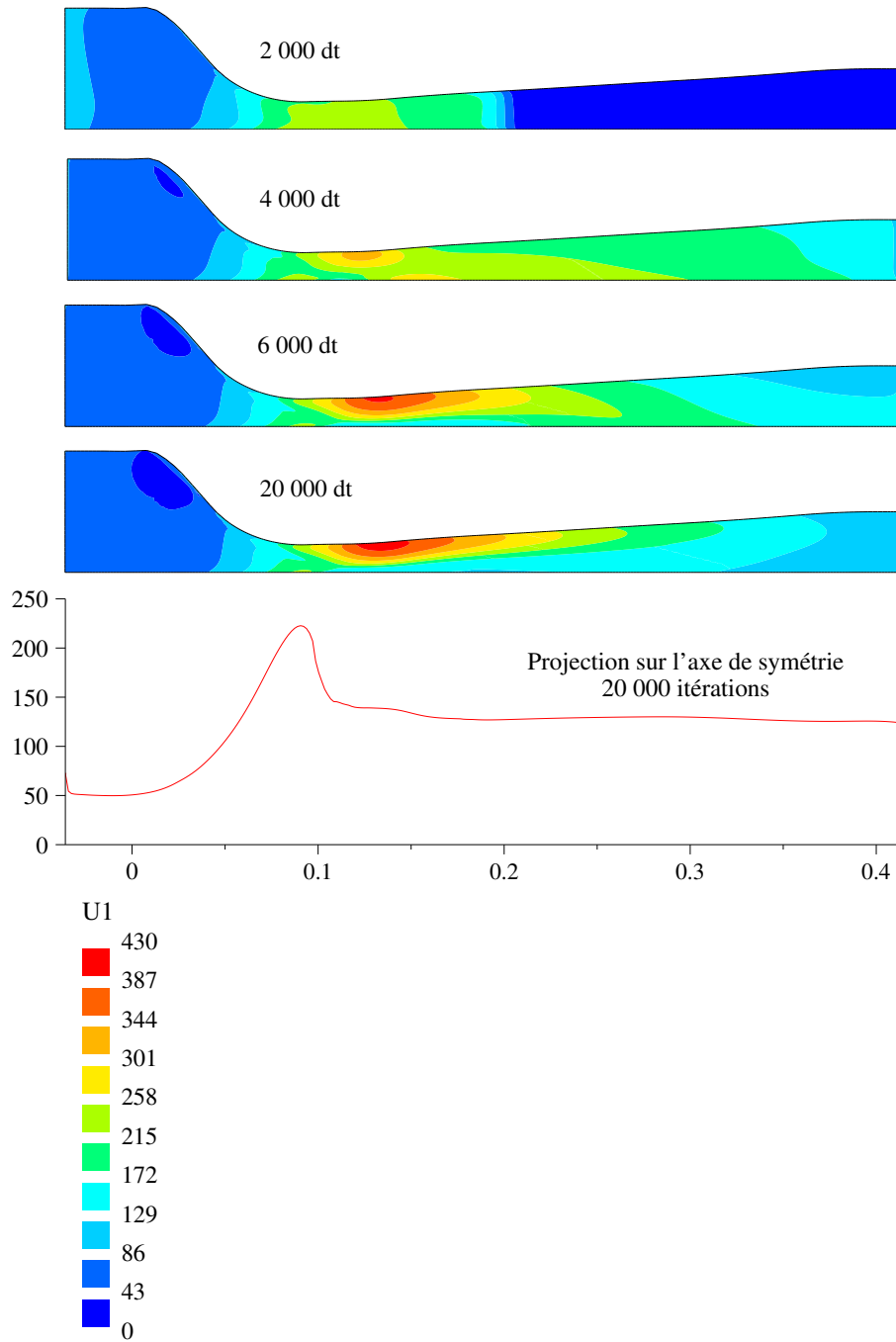


FIG. 4.25 – Ecoulement dans une tuyère : composante horizontale de la vitesse du gaz.



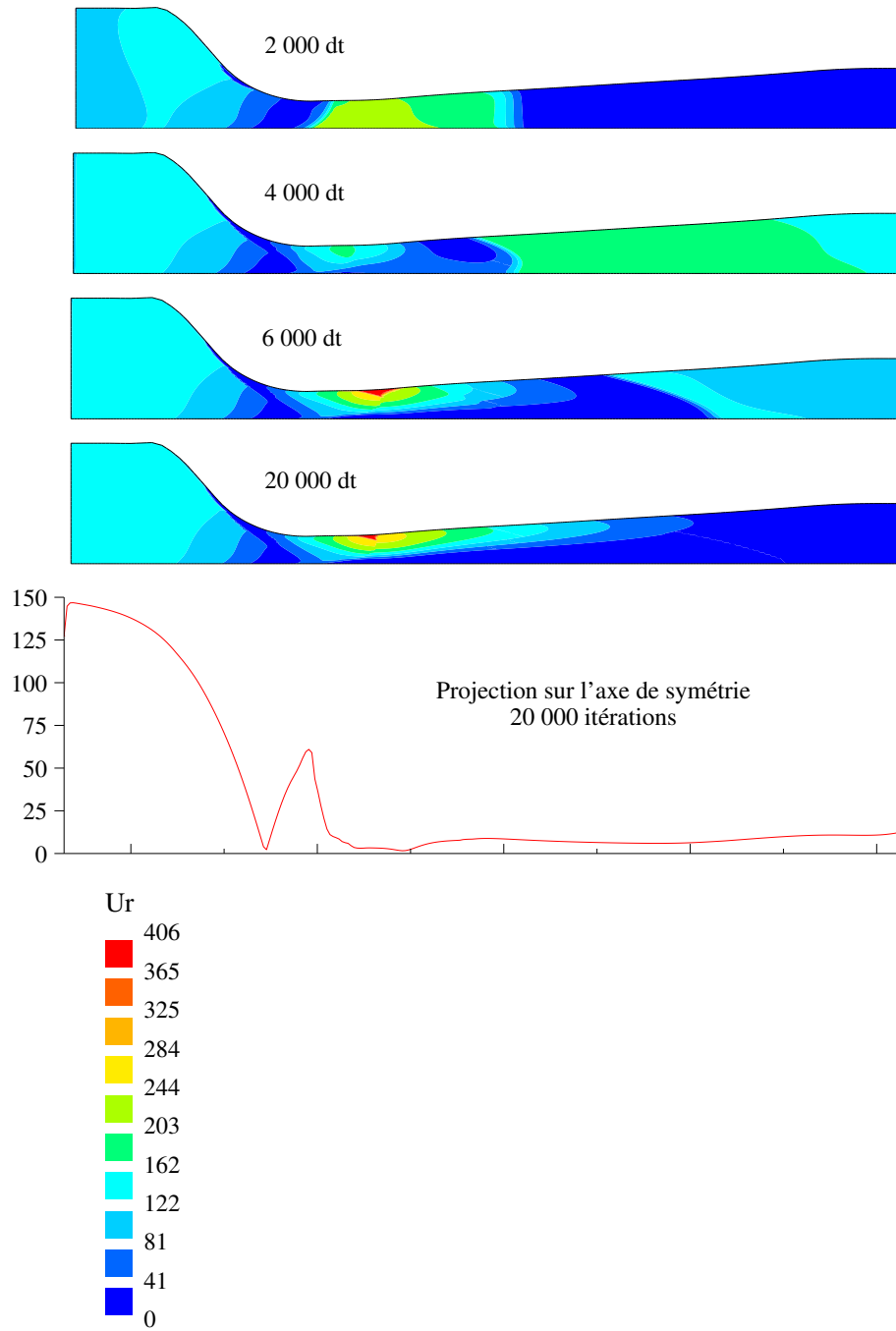


FIG. 4.26 - *Écoulement dans une tuyère : module de la vitesse relative.*

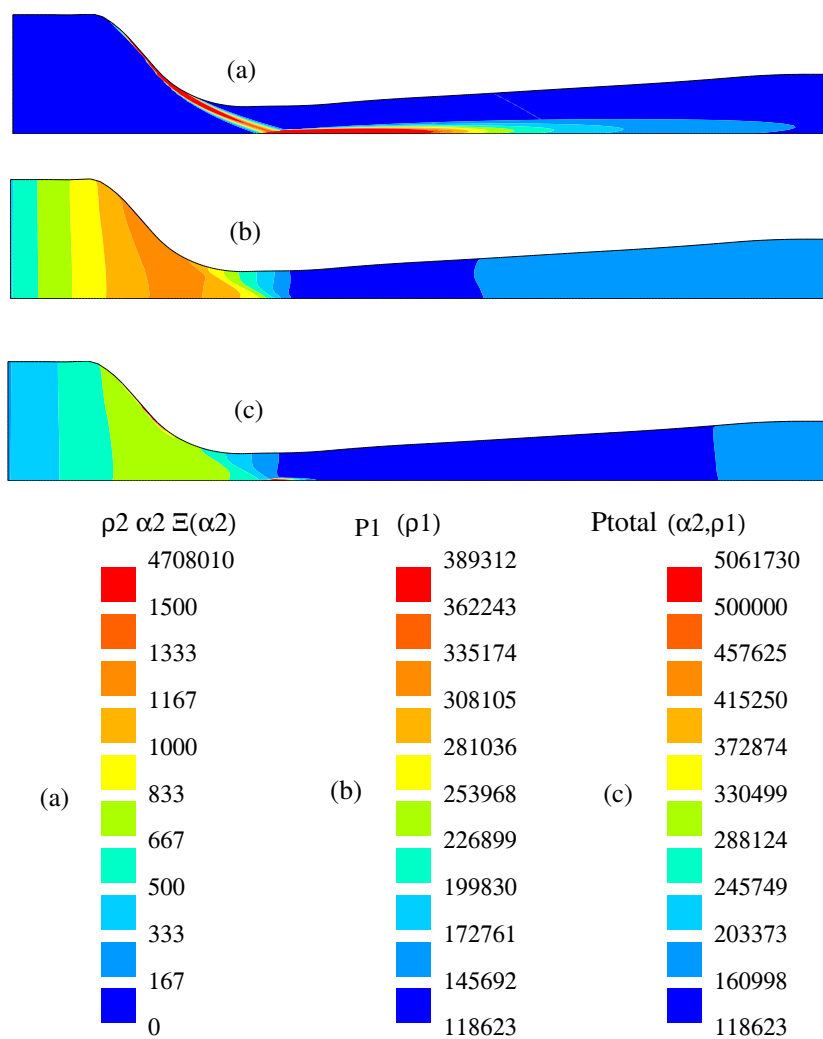


FIG. 4.27 – *Écoulement dans une tuyère : comparaison pression gazeuse  $P(\rho_1)$  et pression particulaire  $\rho_2 \alpha_2 \Xi(\alpha_2)$ .*

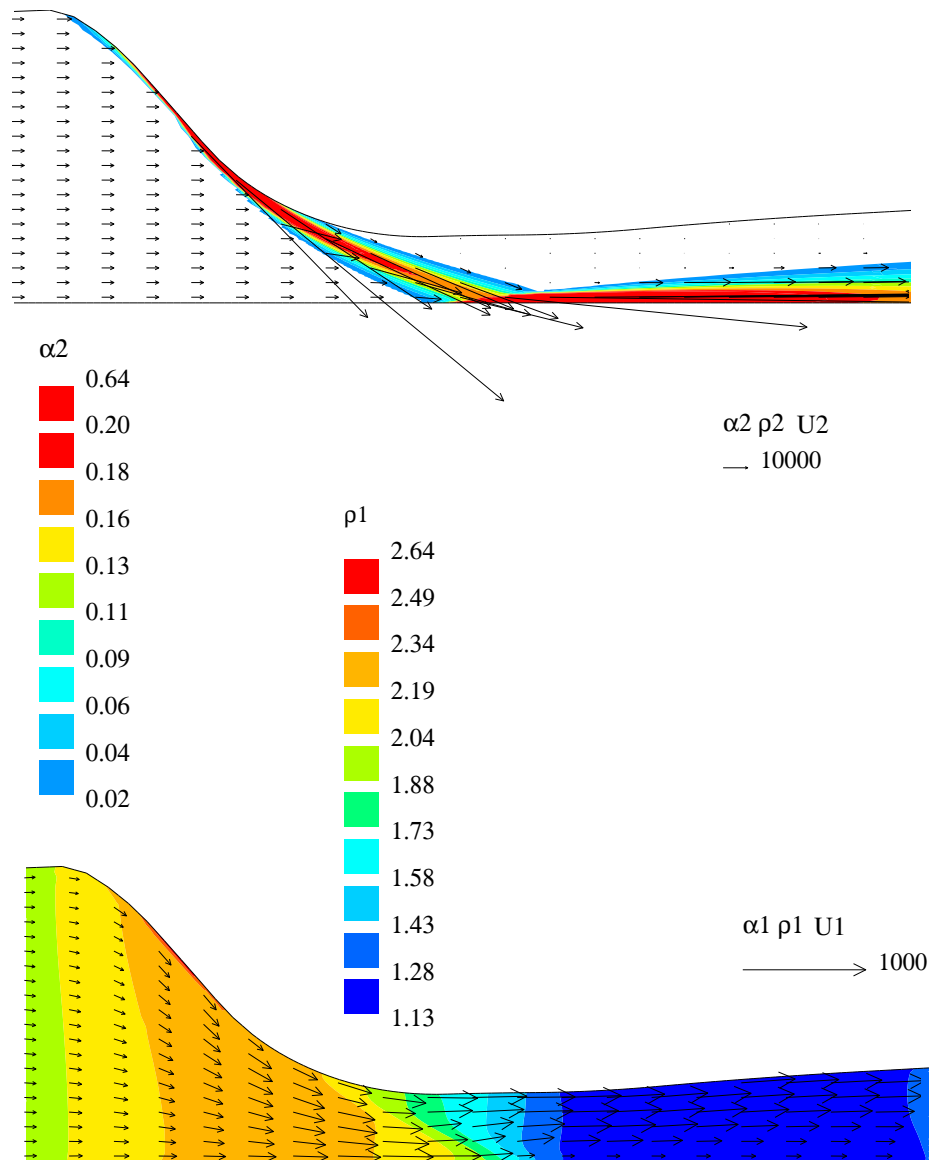


FIG. 4.28 - *Écoulement dans une tuyère : débits de gaz  $\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1$  et de particules  $\alpha_2 \rho_2 \underline{U}_2$  dans le convergent de la tuyère.*

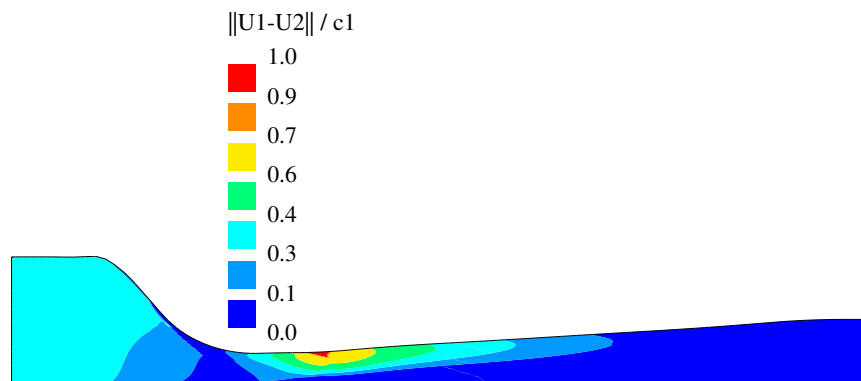


FIG. 4.29 – *Écoulement dans une tuyère : module de la vitesse relative normée par  $c_1$ .*

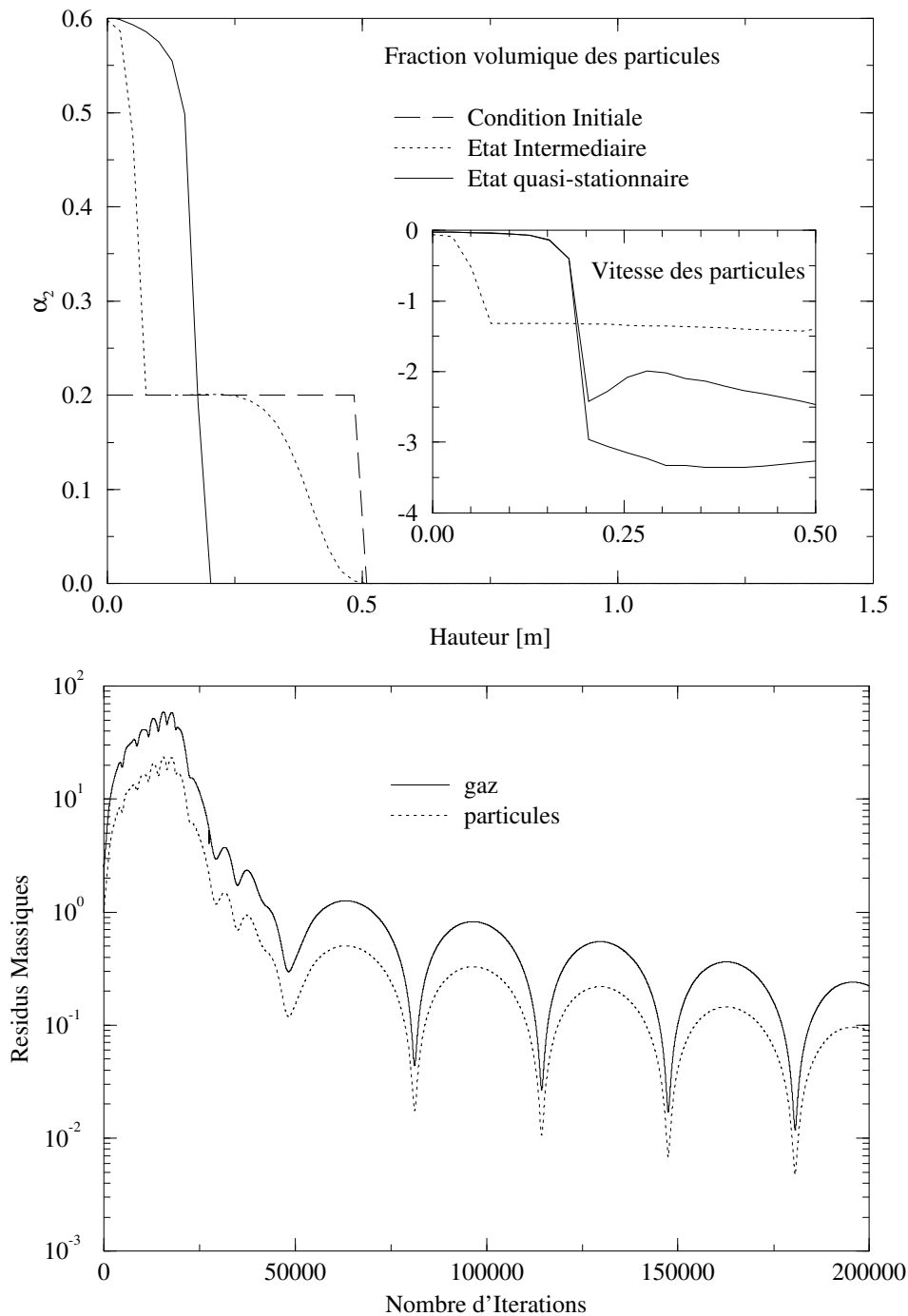


FIG. 4.30 -

*Simulation à vitesse d'injection nulle : formation du lit dense jusqu'à un état « quasi » stationnaire. Conditions initiales : cas n° 1 avec  $\langle q_2^2 \rangle_0 = 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  et  $V_1|_{\text{Entrée}} = 0$ . Profil de la fraction volumique et de la vitesse des particules selon la hauteur de la colonne à trois instants différents et évolution (en fonction du nombre d'itérations) des résidus massiques. Maillage primal régulier  $20 \times 60$  points.*

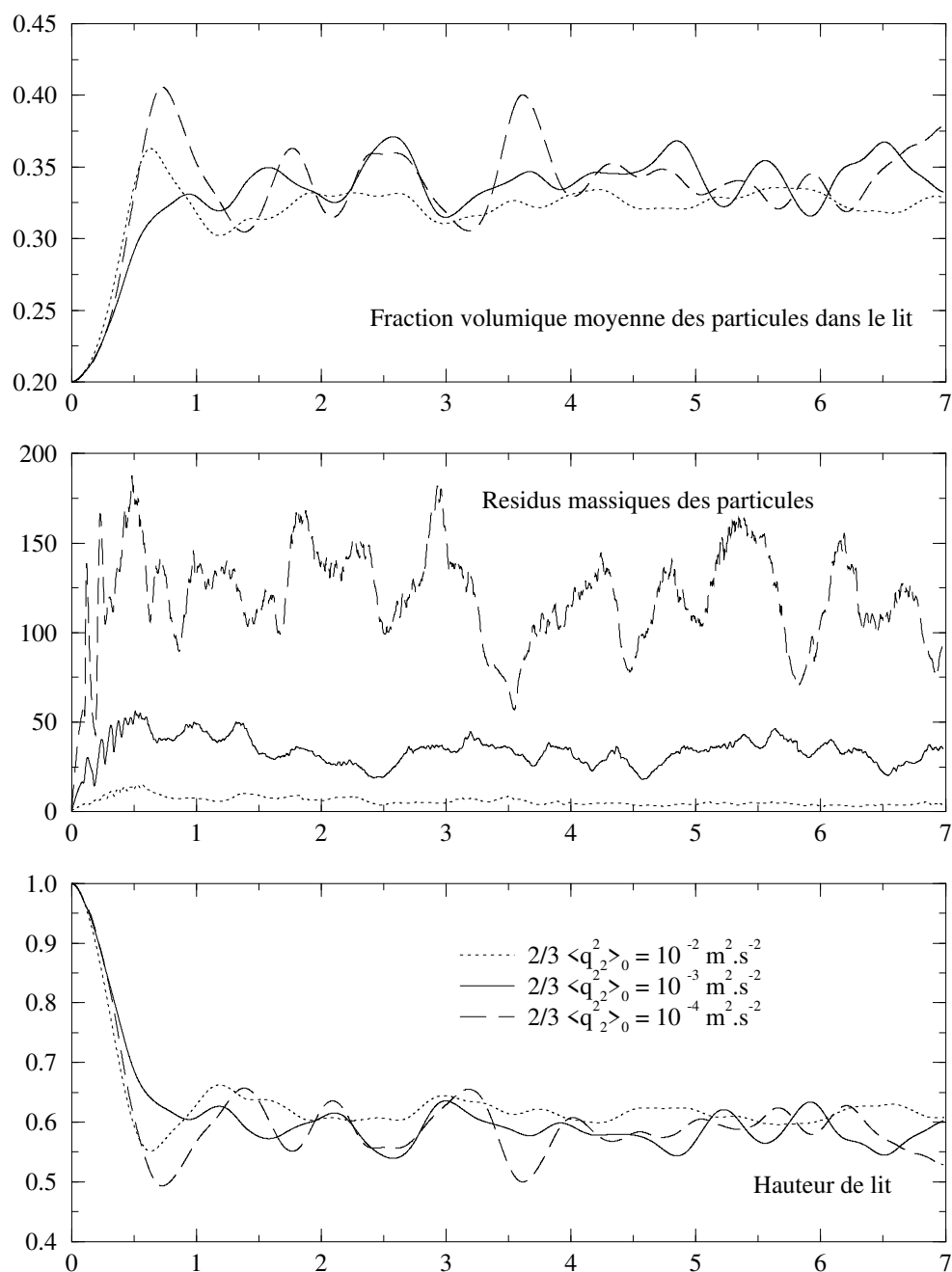


FIG. 4.31 -

Comparaison de simulations de lits fluidisés denses avec des valeurs de  $\langle q_{2,2}^2 \rangle_0$  différentes.  
 Conditions initiales: cas n° 1 avec  $\frac{2}{3} \langle q_{2,2}^2 \rangle_0 = 10^{-2}, 10^{-3}, \text{ et } 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  et  
 $V_1|_{\text{Entrée}} = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Evolution temporelle (en s.) de la fraction volumique moyenne des  
 particules dans le lit, des résidus massiques et de la hauteur de lit. Maillage régulier  $20 \times 60$   
 points.

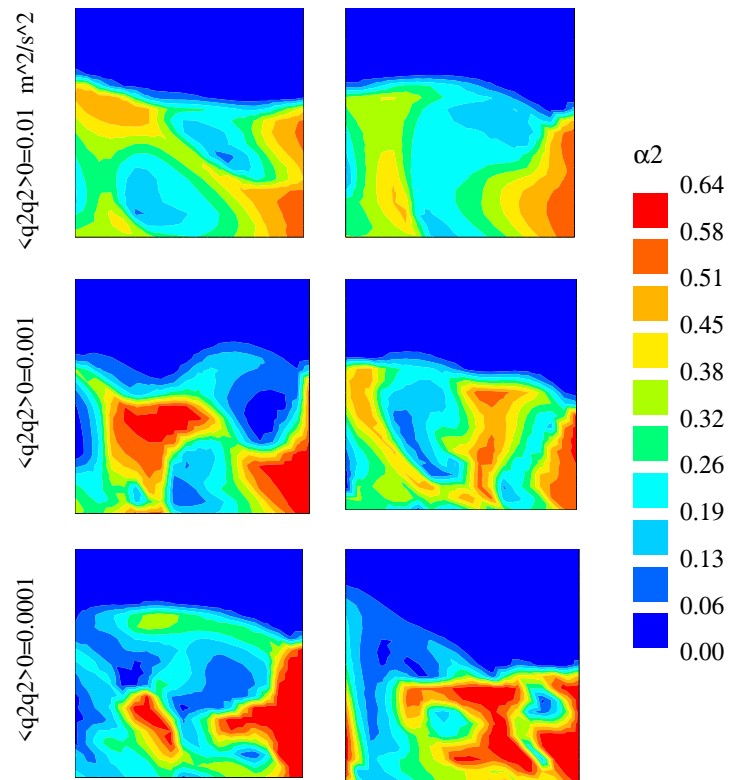


FIG. 4.32 -

Comparaison de simulations de lits fluidisés denses avec des valeurs de  $\langle q_2^2 \rangle_0$  différentes.

Conditions initiales : cas n° 1 avec  $\frac{2}{3} \langle q_2^2 \rangle_0 = 10^{-2}, 10^{-3},$  et  $10^{-4}$  m<sup>2</sup>.s<sup>-2</sup> et

$V_1|_{Entrée} = 8$  m.s<sup>-1</sup>. Maillage régulier  $20 \times 60$  points.

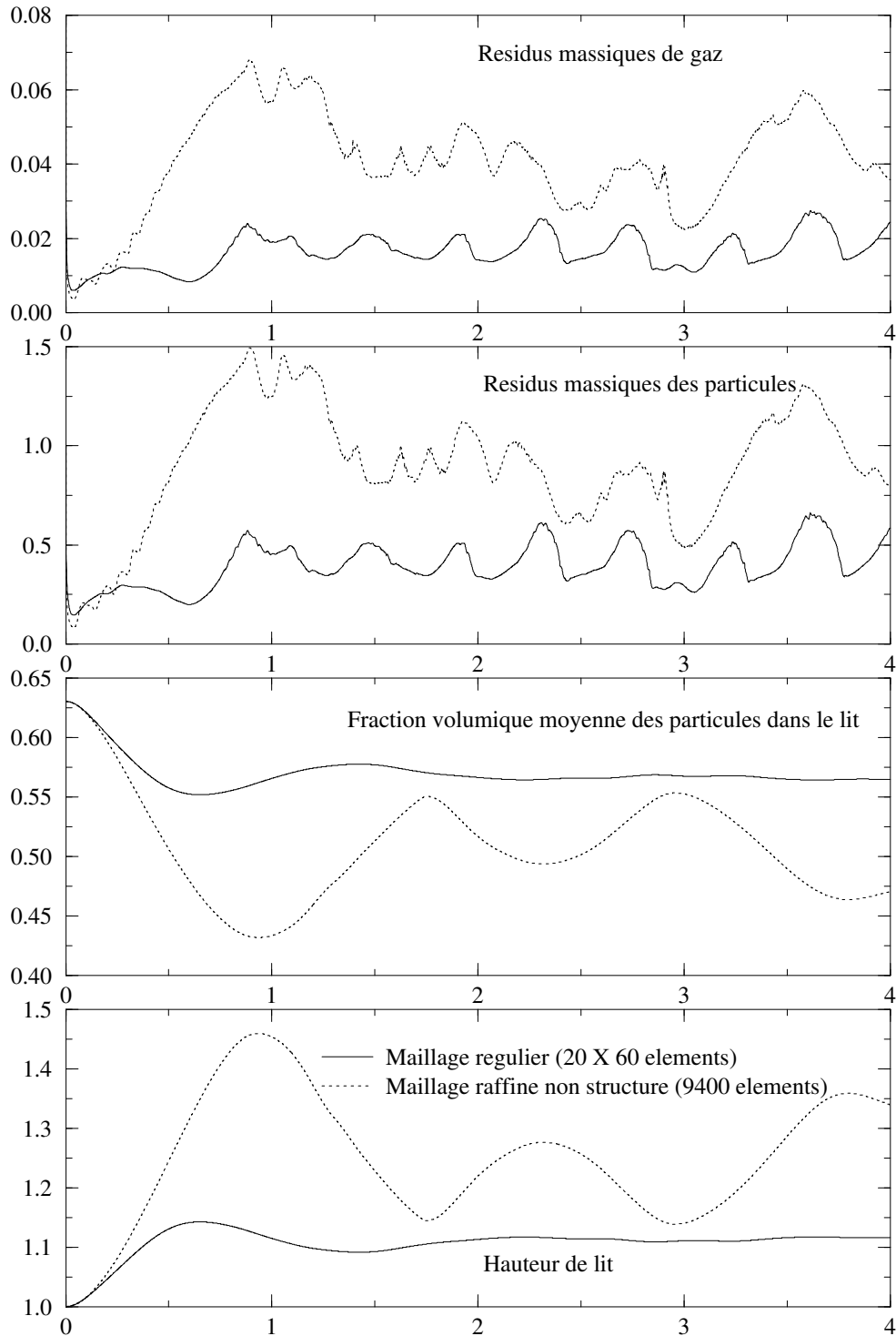


FIG. 4.33 –

Comparaison de simulations de lits fluidisés denses sur deux maillages différents. Conditions initiales: cas n° 2 avec  $\frac{2}{3} \langle q_2^2 \rangle_0 = 2.10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $V_1|_{\text{Entrée}} = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Evolution temporelle (en s.) des résidus massiques, de la fraction volumique moyenne des particules dans le lit et de la hauteur de lit. Maillage régulier  $20 \times 60$  points et maillage raffiné non structuré d'environ 9400 éléments (Cf. figure [4.34]).



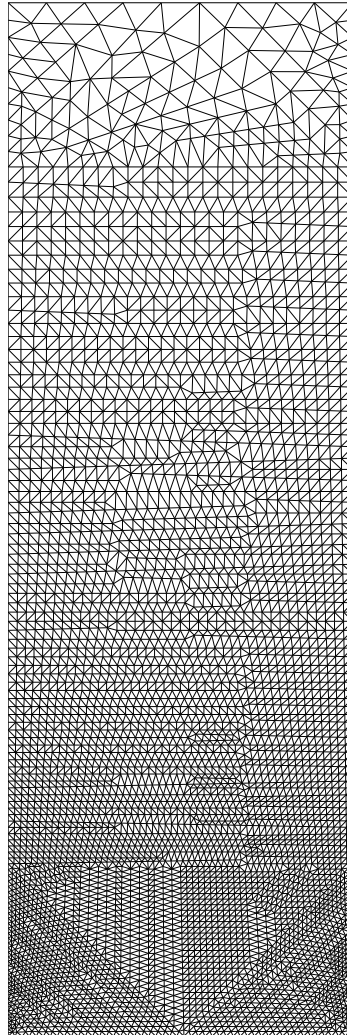


FIG. 4.34 -

*Maillage primal d'une colonne pour la simulation de lits fluidisés denses. Ce maillage non structuré, d'environ 9400 éléments, est généré par un algorithme Voronoï et se caractérise par un raffinement en bas du foyer où se forment les bulles.*

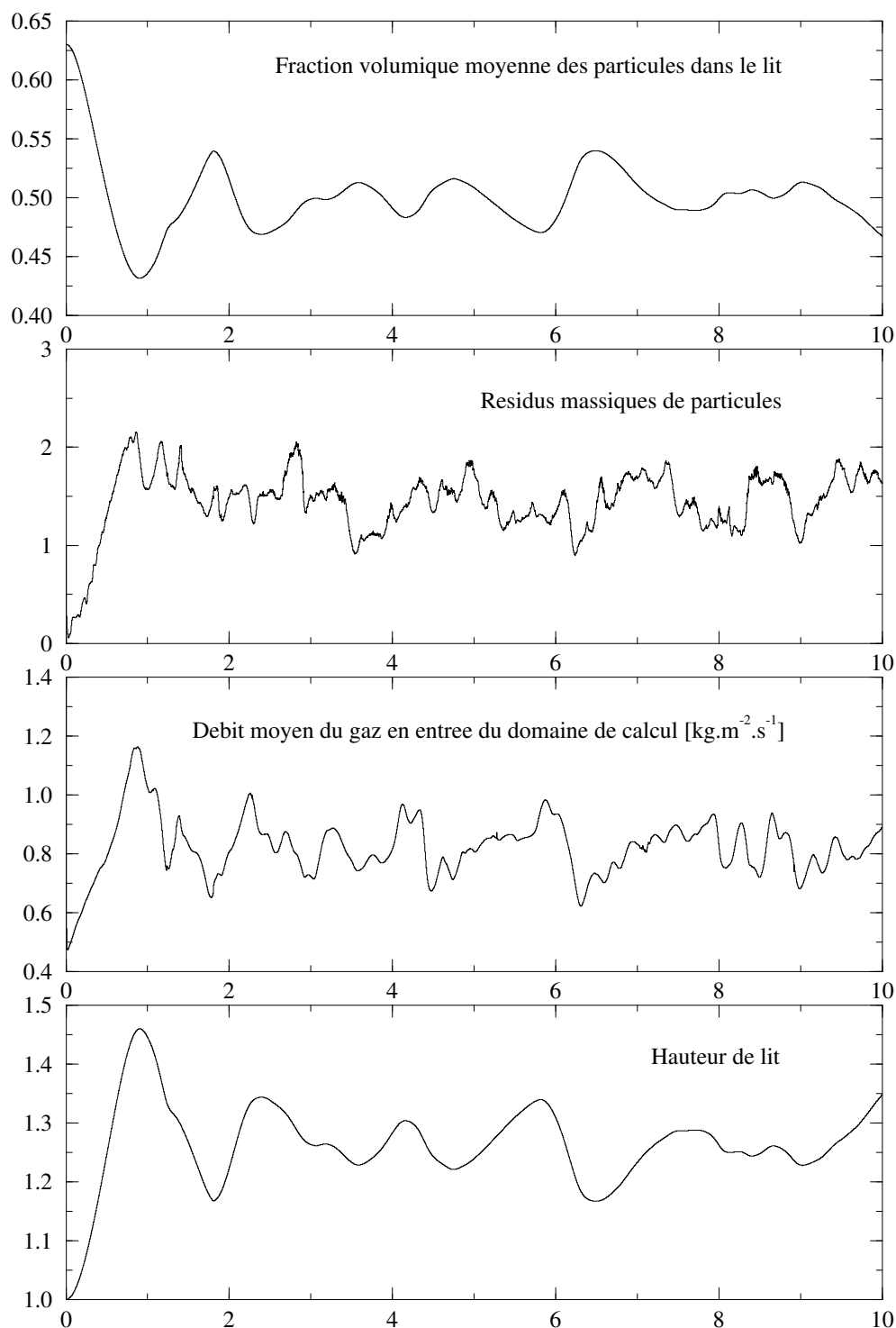


FIG. 4.35 -

Simulation d'un lit fluidisé dense. Conditions initiales : cas n° 2 avec  $\frac{2}{3} < q_2^2 >_0 = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  et  $V_1|_{\text{Entrée}} = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Evolution temporelle (en s.) de la fraction volumique moyenne des particules dans le lit, des résidus massiques, de la vitesse de fluidisation et de la hauteur de lit. Maillage non structuré [4.34].

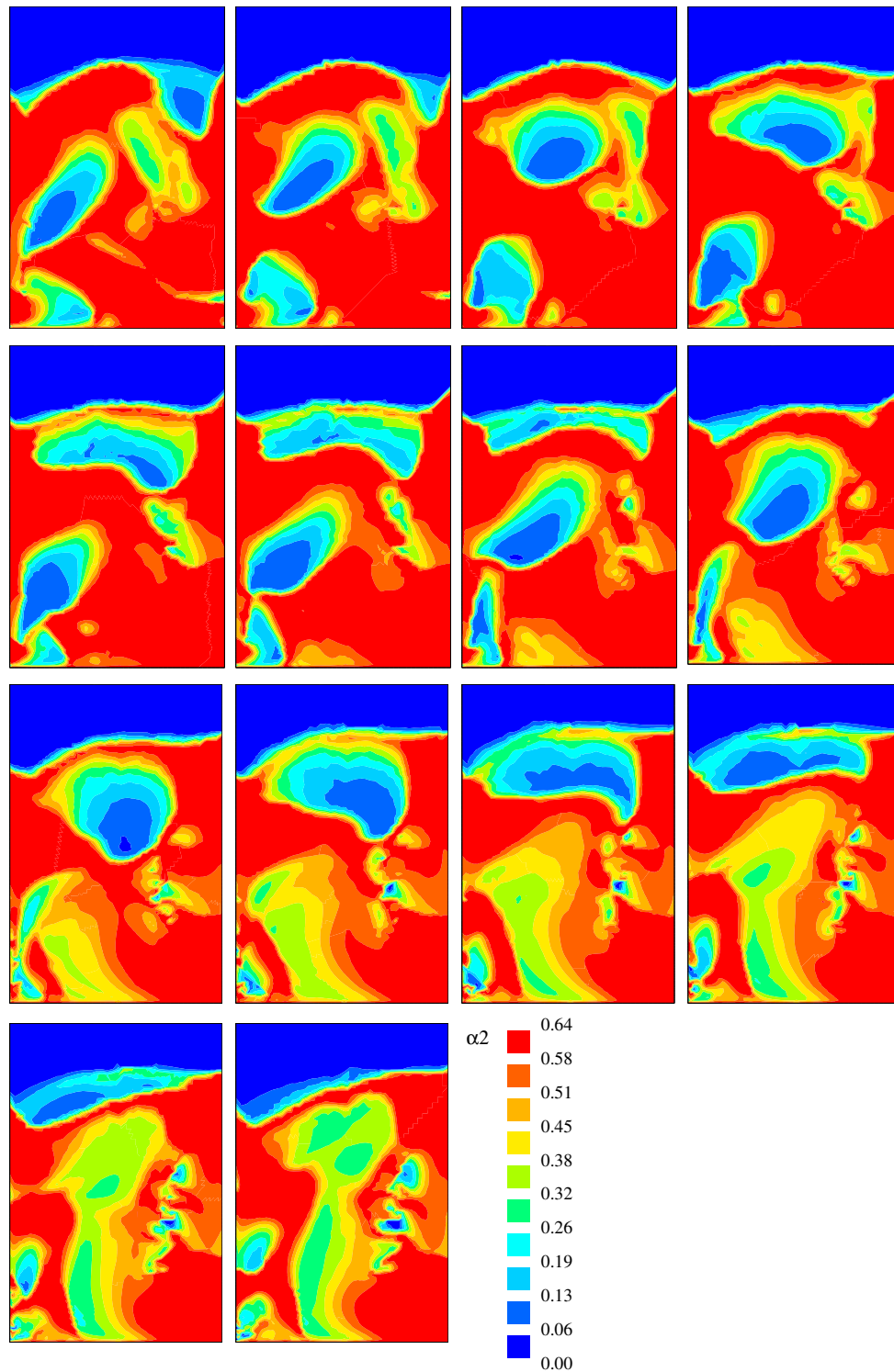


FIG. 4.36 -

Formation, évolution et explosion de bulles de gaz d'après une simulation d'un lit fluidisé dense. Conditions initiales : cas n° 2 avec  $\frac{2}{3} \langle q_2^2 \rangle_0 = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  et  $V_1|_{\text{Entrée}} = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On observe la répartition des particules dans le lit. Environ 0.05 s. séparent chaque image. Maillage non structuré [4.34].

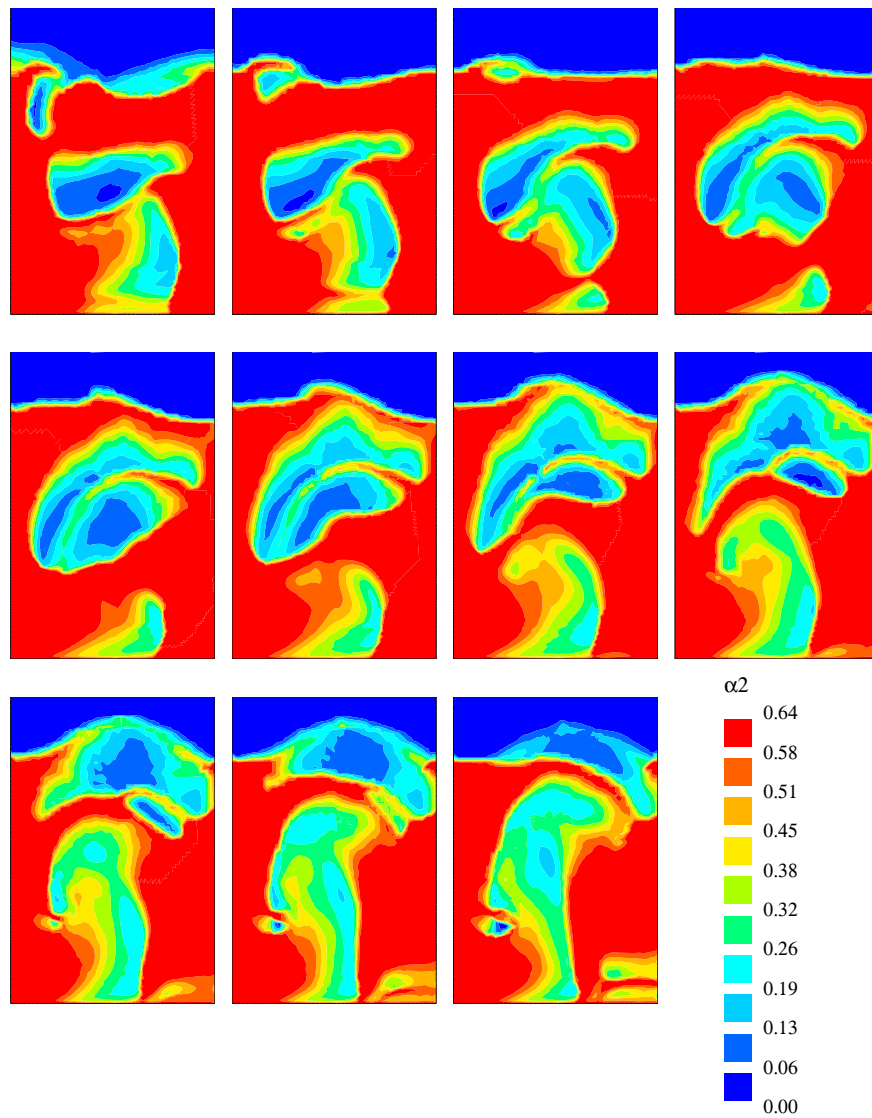


FIG. 4.37 –  
*Coalescence de deux bulles de gaz d'après une simulation d'un lit fluidisé dense. Conditions initiales : cas n° 2 avec  $\frac{2}{3} \langle q_2^2 \rangle_0 = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  et  $V_1|_{\text{Entrée}} = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On observe la répartition des particules dans le lit. Environ 0.05 s. séparent chaque image. Maillage non structuré [4.34].*

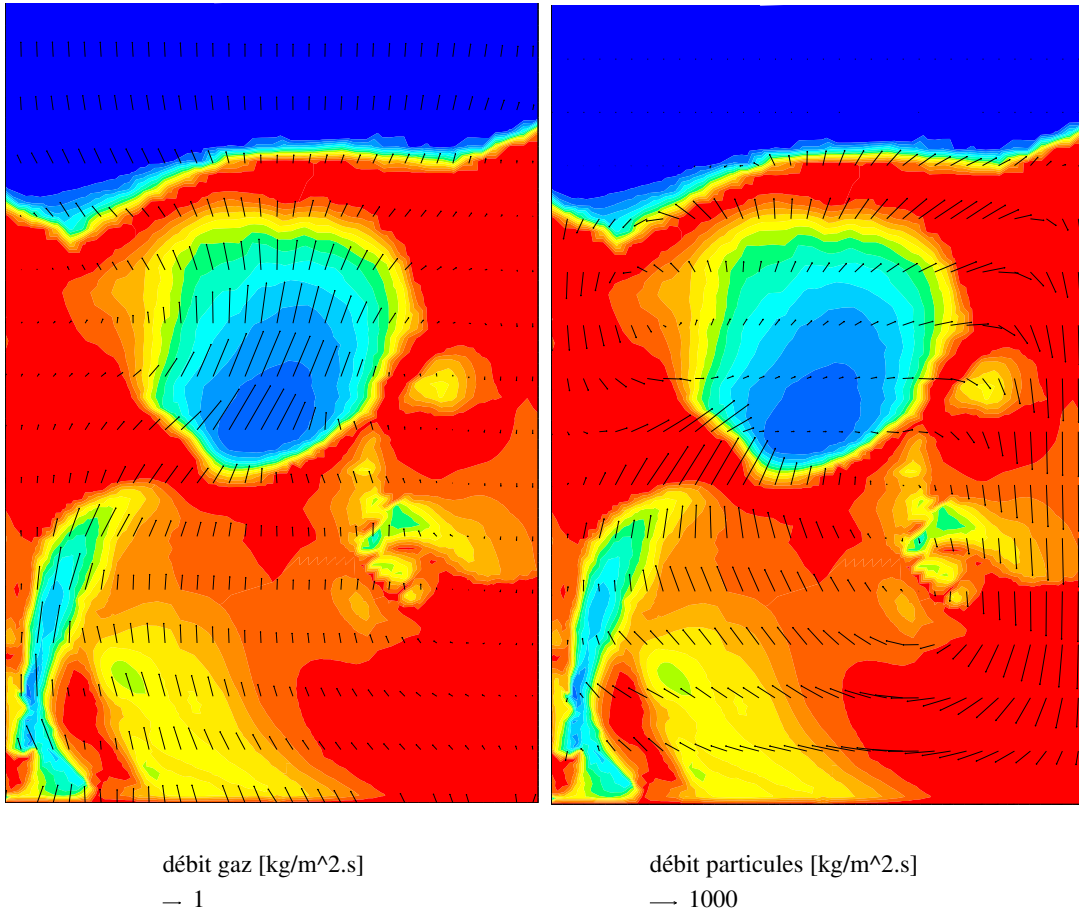


FIG. 4.38 -

*Superposition de la répartition des particules et des débits de gaz et de particules dans un lit fluidisé dense en régime à bulles. Conditions initiales : cas n° 2 avec  $\frac{2}{3} \langle q_2^2 \rangle_0 = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  et  $V_1|_{\text{Entrée}} = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Maillage non structuré [4.34].*

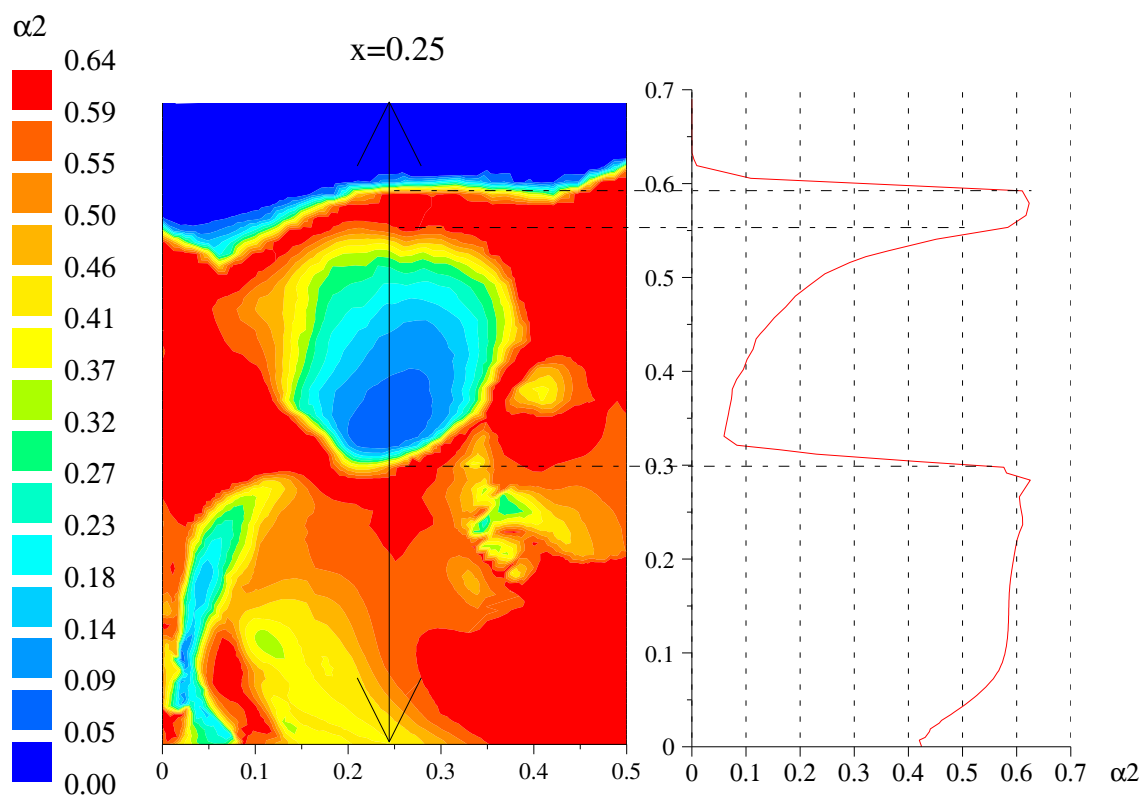


FIG. 4.39 –

Visualisation, dans un lit fluidisé dense, du profil de concentration de la fraction volumique des particules dans une bulle. Conditions initiales : cas n° 2 avec  $\frac{2}{3} \langle q_2^2 \rangle_0 = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  et  $V_1|_{\text{Entrée}} = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Maillage non structuré [4.34].

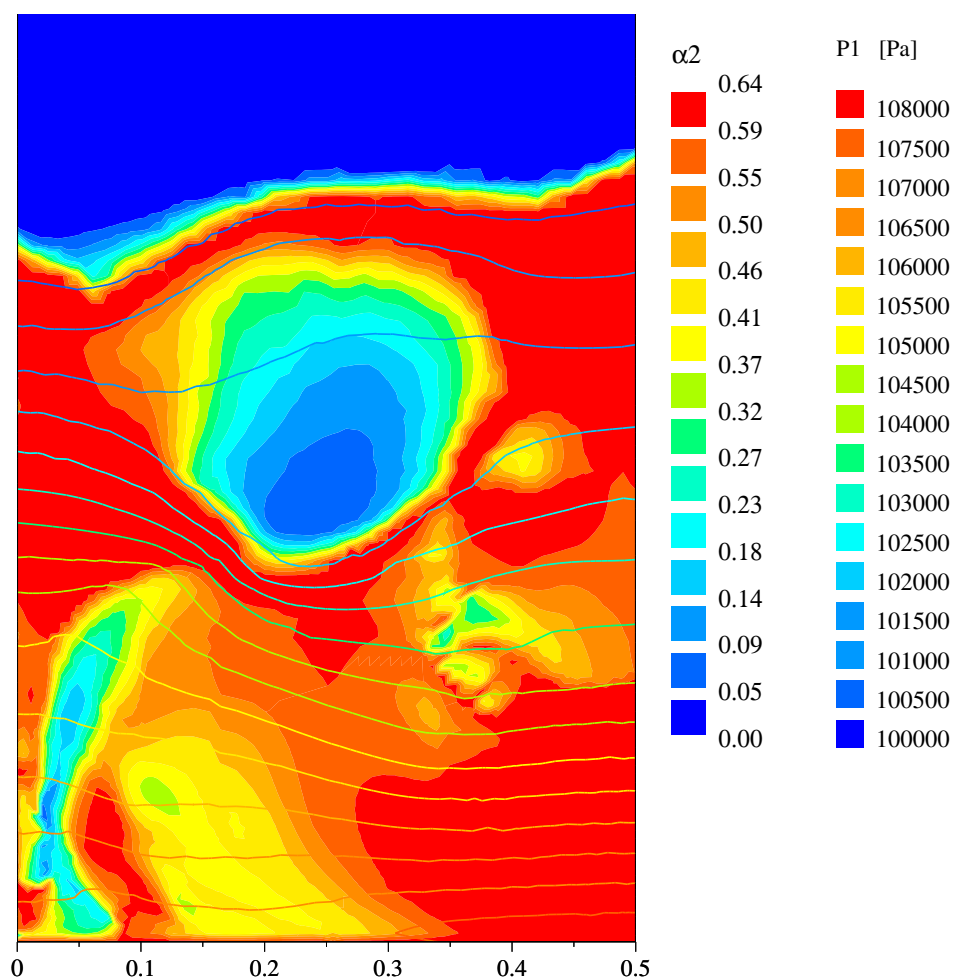


FIG. 4.40 -  
 Déformation des isolignes de pression  $P(\rho_1)$  autour d'une bulle dans un lit fluidisé dense.  
 Conditions initiales: cas n° 2 avec  $\frac{2}{3} < q_2^2 >_0 = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  et  $V_1|_{\text{Entrée}} = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Maillage non structuré [4.34].

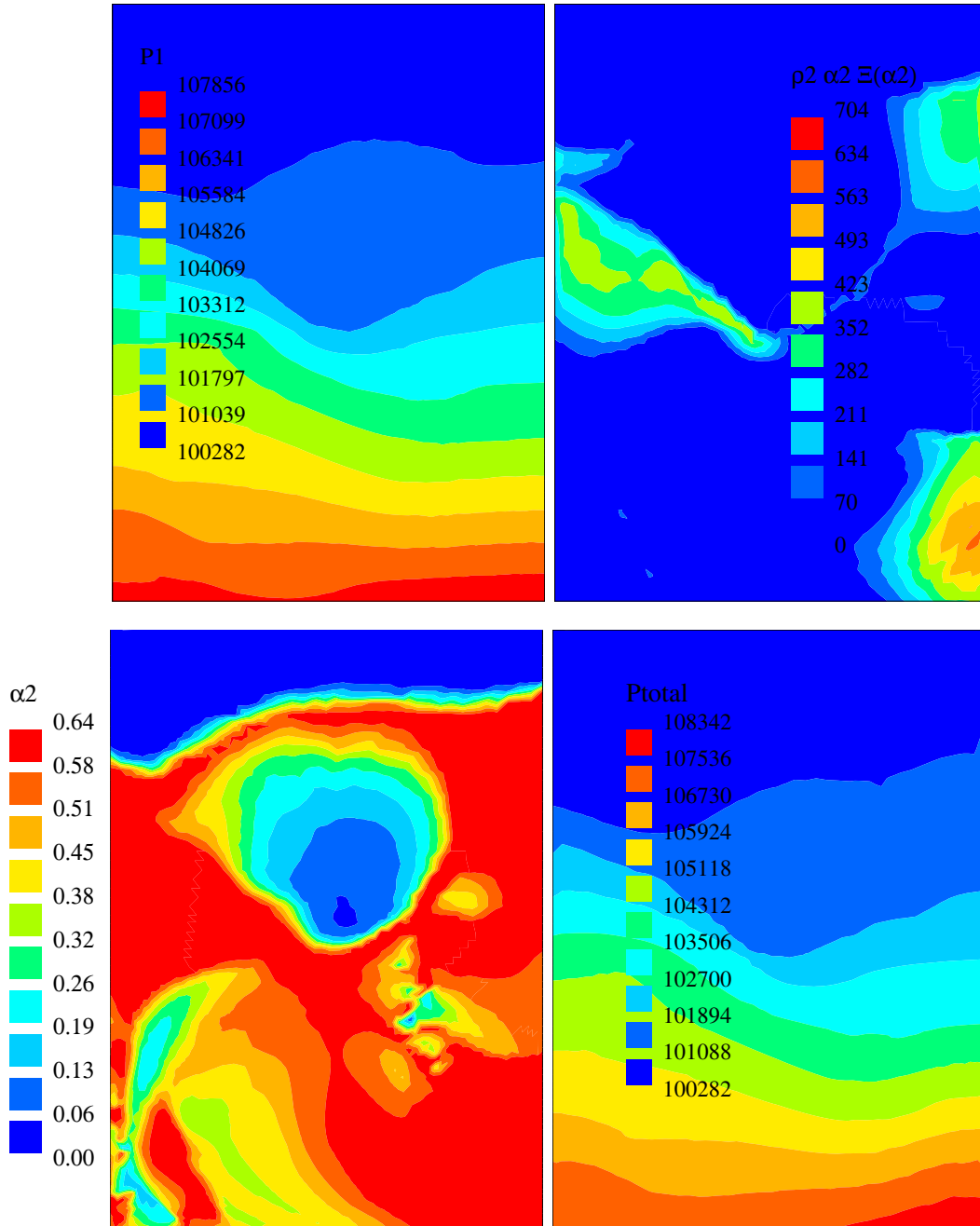


FIG. 4.41 -

Importance de la pression intergranulaire  $\alpha_2 \Xi(\alpha_2)$  et de la pression de l'écoulement porteur  $P(\rho_1)$  sur la pression totale  $P_{tot} = P(\rho_1) + \alpha_2 \Xi(\alpha_2)$  dans un lit fluidisé dense en régime à bulles. Conditions initiales : cas n° 2 avec  $\frac{2}{3} \langle q_2^2 \rangle_0 = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  et  $V_1|_{Entrée} = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Maillage non structuré [4.34].



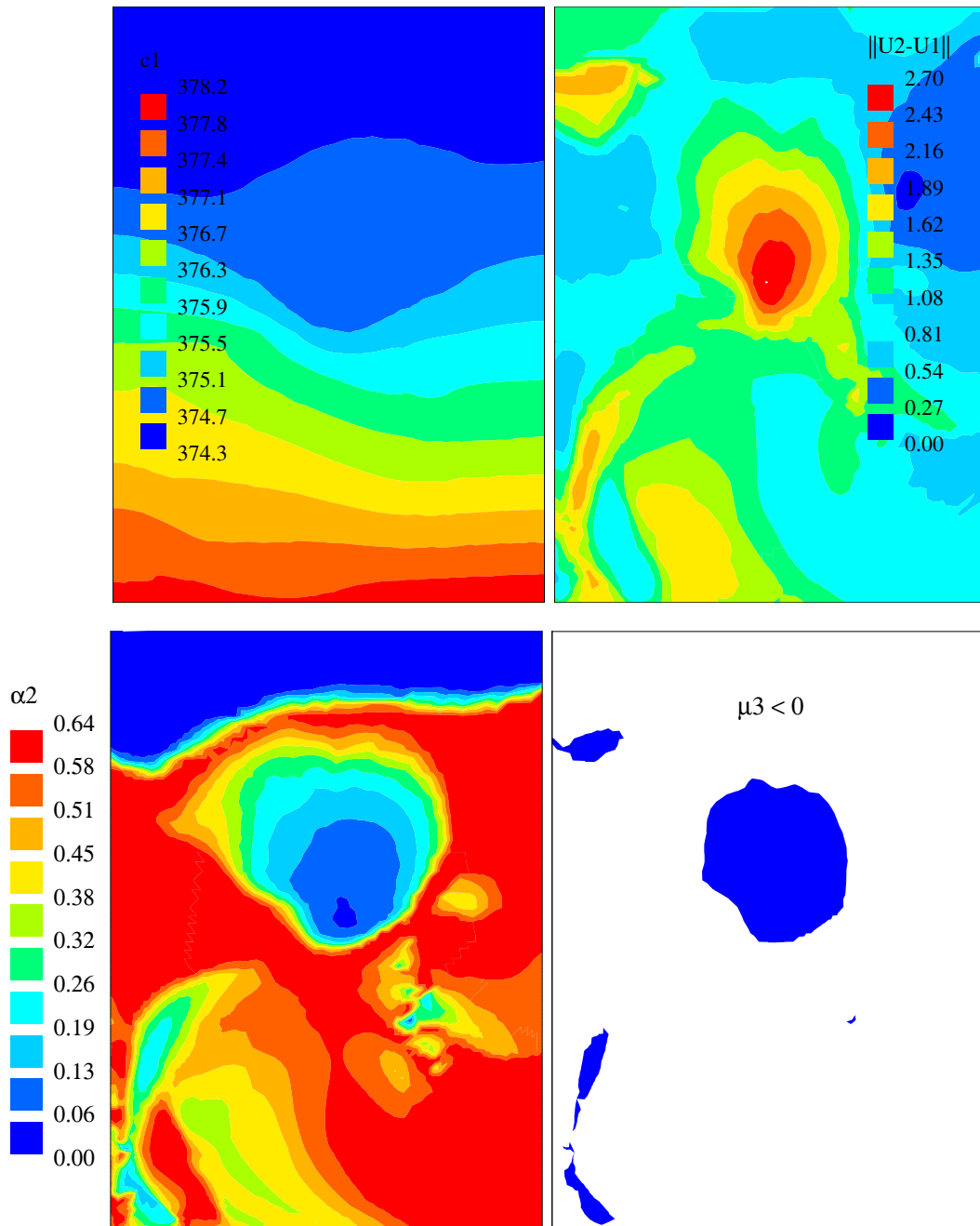


FIG. 4.42 –  
 Visualisation d'états non hyperboliques ( $\mu_3 < 0$ ) situés dans une bulle de gaz d'un lit fluidisé dense. Conditions initiales : cas n° 2 avec  $\frac{2}{3} \langle q_2^2 \rangle_0 = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  et  $V_1|_{\text{Entrée}} = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .  
 Maillage non structuré [4.34].



## Chapitre 5

# Un modèle homogène à trois équations pour les écoulements diphasiques de type gaz-particules

On s'intéresse maintenant à un modèle homogène à trois équations (deux équations de conservation de masse et une équation de conservation de quantité de mouvement du mélange) qui ne suppose aucune vitesse de glissement entre les deux phases. Ce modèle est conservatif, inconditionnellement hyperbolique et admet une caractérisation entropique. On résout le problème de Riemann associé et l'on montre que le respect du principe du maximum de la variable fraction volumique est intimement lié au choix de la pression intergranulaire. On choisit de résoudre numériquement ce système par un solveur de Riemann linéarisé, le schéma vfRoe, dont l'idée originale est présentée dans [Gal96b] et [Mas96]. Le schéma utilisé ici présente une modification qui a été introduite dans [Buf96] dans le cadre des gaz réels (*Cf.* le chapitre 3). On présente ensuite trois tests numériques de type tube à choc que l'on compare avec des simulations du modèle à deux fluides à quatre équations étudié dans le chapitre 4, et l'on regarde enfin la simulation d'un écoulement diphasique dans une tuyère.

### 5.1 Présentation du modèle

On considère le système ci-dessous pour la modélisation des écoulements diphasiques de type gaz-particules :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}) = 0 \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}) = 0 \quad (5.1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{U}) + \nabla \cdot (\rho \underline{U} \otimes \underline{U}) + \nabla P(\alpha_2, \rho_1) = -\rho \underline{g} - \nabla \cdot (\underline{\underline{\Sigma}}) \quad (5.1c)$$

où  $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$  et  $\underline{U}$  désignent la masse volumique et la vitesse du mélange,  $\alpha_1$  et  $\rho_1$  la fraction volumique et la densité du gaz et  $\alpha_2$  et  $\rho_2$  la fraction volumique et la densité des particules. Ce système suppose que la phase gazeuse est compressible, la phase dispersée incompressible ( $\rho_2$  constant), et qu'il n'y a pas de vitesse glissement d'une phase par rapport à l'autre. Un modèle similaire a été étudié dans [Gav96].

Les fractions volumiques vérifient :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (5.2)$$

La pression moyenne totale de l'écoulement  $P(\alpha_2, \rho_1)$  comprend deux composantes : une pression du milieu continu porteur (la phase gazeuse) et une pression granulaire qui modélise les écoulements dilués ou denses. On la définit par :

$$P(\alpha_2, \rho_1) = P_1(\rho_1) + \rho_2 P_2(\alpha_2) \quad (5.3)$$

où

$$P_1(\rho_1) = K \rho_1^{\tilde{\gamma}} \quad (5.4)$$

et

$$P_2(\alpha_2) = \frac{2}{3} \langle q_2^2 \rangle_0 \alpha_2^{5/3} (1 + g(\alpha_2)) h(\alpha_2) \quad (5.5)$$

avec

$$\log h(\alpha_2) = \frac{4}{3} (1 + e_c) \frac{2 \alpha_{max}}{5 \alpha_{max} - 2} \left( 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{max}} \right)^{1 - \frac{5}{2} \alpha_{max}} \quad (5.6a)$$

$$g(\alpha_2) = 2 \alpha_2 \left( 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{max}} \right)^{-\frac{5}{2} \alpha_{max}} (1 + e_c) \quad (5.6b)$$

Le terme  $P_1(\rho_1)$  désigne la pression moyenne de la phase gazeuse et  $P_2(\alpha_2)$  prend en compte les collisions interparticulaires.  $K$  est une constante de référence positive de la forme  $P(\rho_0)/\rho_0^\gamma$  avec  $\gamma$  l'indice adiabatique du gaz,  $e_c$  est une constante pour la prise en compte des collisions interparticulaires inélastiques ( $0 < e_c < 1$ ),  $\alpha_{max}$  est le taux de compactage maximum des particules indéformables supposées sphériques (que l'on prend en pratique égal à 0.64) et  $< q_2^2 >_0$  est une constante de dimension  $[m.s^{-1}]^2$ .

Les termes de diffusion sont modélisés par (avec  $\mu$  la viscosité dynamique du mélange) :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = -\mu \left( \nabla \underline{U} + \nabla^t \underline{U} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{U}) \underline{\underline{Id}} \right) \quad (5.7)$$

**Remarque 5.1** *Le modèle (5.1) peut être dérivé du modèle à deux fluides à quatre équations étudié dans le chapitre 4. On rappelle celui-ci :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) + \alpha_1 \nabla P_1(\rho_1) &= -\underline{I} - \alpha_1 \rho_1 \underline{g} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P_1(\rho_1) + \nabla P_2(\alpha_2) &= \frac{\underline{I}}{\rho_2} - \alpha_2 \underline{g} \end{aligned}$$

On introduit les variables masse volumique du mélange  $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$ , vitesse du mélange  $\underline{U}_m = (\underline{U}_1 + \underline{U}_2)/2$  et vitesse relative  $\underline{U}_r = (\underline{U}_2 - \underline{U}_1)$ . On réécrit le système en fonction de  $\underline{U}_m$  et  $\underline{U}_r$  en ne conservant qu'une équation de conservation de la quantité de mouvement du mélange (obtenue en sommant les équations de quantité de mouvement de chaque phase) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_m) &= \frac{1}{2} \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_r) \\ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_m) &= -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_r) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{U}_m) + \nabla \cdot (\rho \underline{U}_m \otimes \underline{U}_m) + \nabla \cdot (P_1(\rho_1) + \rho_2 P_2(\alpha_2)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}((\alpha_1 \rho_1 - \alpha_2 \rho_2) \underline{U}_r) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \left( (\alpha_1 \rho_1 - \alpha_2 \rho_2) \underline{U}_r \otimes \left( 2\underline{U}_m - \frac{\underline{U}_r}{2} \right) \right) - \rho \underline{g} \end{aligned}$$

On note que le terme de traînée  $\underline{I}$  disparaît dans la sommation des deux équations de quantité de mouvement. On fait alors l'hypothèse que la vitesse relative entre les deux phases  $\underline{U}_r$  est

nulle ; le système comprend alors deux équations de conservation de masse et une équation de conservation de quantité de mouvement moyenne, et s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{U}_m) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_m) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{U}_m) + \nabla \cdot (\rho \underline{U}_m \otimes \underline{U}_m) + \nabla (P_1(\rho_1) + P_2(\alpha_2)) &= -\rho \underline{g} .\end{aligned}$$

Le système (5.1) n'est néanmoins pas un sous-système de (4.1) pour  $\underline{U}_r = \underline{0}$ .

On définit les célérités  $c_1$  et  $c_2$  suivantes :

$$\begin{aligned}c_1^2(\alpha_2, \rho_1) &= \frac{\partial}{\partial \rho_1} P(\alpha_2, \rho_1) \geq 0 \\ \rho_2 c_2^2(\alpha_2, \rho_1) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_2} P(\alpha_2, \rho_1) \geq 0\end{aligned}\tag{5.8}$$

Elles sont liées par la relation de compatibilité suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} c_1^2(\alpha_2, \rho_1) = \rho_2 \frac{\partial}{\partial \rho_1} c_2^2(\alpha_2, \rho_1)$$

Les conditions de réalisabilité physique imposent :

$$\begin{aligned}0 \leq \alpha_2 < \alpha_{max} \leq 1 \\ 0 \leq \rho_1\end{aligned}\tag{5.9}$$

## 5.2 Quelques propriétés du système global

Le système (5.1) est conservatif, invariant par rotation et rentre dans le cadre classique des systèmes hyperboliques.

### 5.2.1 Entropie du système

Soit  $\underline{W}$  le vecteur des variables d'état conservatives :

$$\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_2, \rho \underline{U})$$

On généralise tout d'abord le résultat à une fonction  $P(\alpha_2, \rho_1)$  quelconque. Soit  $(\eta(\underline{W}), \underline{F}_\eta(\underline{W}))$  un couple entropie-flux d'entropie du système (5.1), il est donné par :

$$\eta(\underline{W}) = \frac{1}{2} \rho \|\underline{U}\|^2 + \psi(\alpha_2, \rho_1) \quad , \quad \underline{F}_\eta(\underline{W}) = (\eta + P(\alpha_2, \rho_1)) \underline{U} \quad (5.10)$$

où la fonction  $\psi(\alpha_2, \rho_1)$  est définie implicitement de la façon suivante :

$$P(\alpha_2, \rho_1) = -\psi(\alpha_2, \rho_1) + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \psi(\alpha_2, \rho_1) + \frac{\rho_1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi(\alpha_2, \rho_1) \quad (5.11)$$

On obtient alors la caractérisation entropique suivante du système (5.1) en présence de termes visqueux du second ordre (en négligeant les effets de la gravité) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(\underline{W}) + \nabla \cdot \underline{F}_\eta(\underline{W}) + \nabla \cdot (\underline{\Sigma} \underline{U}) = \underline{\underline{S}}_\eta(\underline{W})$$

Le signe de  $\underline{\underline{S}}_\eta(\underline{W})$  est déterminé, puisque :

$$\underline{\underline{S}}_\eta(\underline{W}) = \frac{1}{2} \underline{\Sigma} : (\nabla \underline{U} + \nabla^t \underline{U}) \leq 0$$

On associe à cette caractérisation la limite non visqueuse suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(\underline{W}) + \nabla \cdot \underline{F}_\eta(\underline{W}) \leq 0$$

Si on considère la pression  $P(\alpha_2, \rho_1)$  suivante :

$$P(\alpha_2, \rho_1) = P_1(\rho_1) + \rho_2 P_2(\alpha_2),$$

la forme admissible de la fonction  $\psi(\alpha_2, \rho_1)$  est alors :

$$\psi(\alpha_2, \rho_1) = \alpha_1 \rho_1 \psi_1(\rho_1) + \alpha_2 \rho_2 \psi_2(\alpha_2) \quad (5.12)$$

avec

$$\frac{d}{d\rho_1}\psi_1(\rho_1) = \frac{P_1(\rho_1)}{\rho_1^2} \quad (5.13a)$$

$$\text{et } \frac{d}{d\alpha_2}\psi_2(\alpha_2) = \frac{P_2(\alpha_2)}{\alpha_2^2} \quad (5.13b)$$

**Remarque 5.2** *On note que cette caractérisation entropique est formellement semblable à celle du modèle à deux fluides à quatre équations (4.1) étudiée dans le paragraphe 4.2.1 alors que le modèle homogène (5.1) à trois équations n'est pas un sous-système de ce dernier.*

A la traversée d'un choc (de vitesse  $\sigma$ ), l'inégalité d'entropie nous permet de choisir la solution physiquement admissible :

$$-\sigma[\eta(W)] + [F_\eta(W)] \leq 0$$

Elle est équivalente à :

$$\left( \overline{\psi(\alpha_2, \rho_1)} + \overline{P(\alpha_2, \rho_1)} + \overline{\rho \frac{[\psi(\alpha_2, \rho_1)]}{[\rho]}} \right) [U] \leq 0$$

Si la pression  $P(\alpha_2, \rho_1)$  est de la forme (5.3,5.4,5.5,5.6) et la fonction  $\psi(\alpha_2, \rho_1)$  conforme à (5.12,5.13), on peut alors montrer que l'inégalité d'entropie est équivalente à :

$$[U] \leq 0 \quad (5.14)$$

## 5.2.2 Principe du maximum

On précise tout d'abord que l'on désignera par loi de pression granulaire «diluée», une fonction  $P_2(\alpha_2)$  du même type que celle utilisée dans [Sai95a], [Sai95b] et [Rav95] pour les écoulements dilués gaz-liquide (i.e. telle que  $g(\alpha_2) = 0$  et  $h(\alpha_2) = 1$  dans le formalisme des équations (5.5) et (5.6)), à savoir, une loi  $P_2(\alpha_2)$  monotone croissante et bornée. On désignera par loi de pression granulaire «dense», une fonction  $P_2(\alpha_2)$  monotone croissante et non bornée (i.e. telle que  $P_2(\alpha_{max}) = +\infty$ ) du même type que celle décrite en (5.5) et (5.6).

On a montré dans le chapitre 4 que, sur la base d'un modèle à deux fluides à quatre équations (deux équations de conservation de masse et deux équations de quantité de mouvement), on peut préserver numériquement le principe du maximum pour la variable fraction volumique en utilisant une méthode à pas fractionnaires et des schémas de Godunov dans chaque sous-pas, dès lors que l'on considère une loi de pression granulaire de type «dense». Néanmoins, ceci ne



permet pas de conclure que le principe du maximum est valable dans le cas continu puisque l'on ne sait pas montrer que la méthode à pas fractionnaires est convergente. Par contre, dans le cadre du modèle homogène à trois équations (5.1), l'étude du problème de Riemann associé va nous permettre de montrer qu'avec une loi de pression intergranulaire de type «diluée», on vérifie que :

$$0 \leq \alpha_2 \leq 1 \quad (5.15)$$

alors que, dans le cas d'une loi «dense», on a :

$$0 \leq \alpha_2 < \alpha_{max} \leq 1 \quad (5.16)$$

Si l'on applique le lemme 4.1 aux équations de conservation de la masse (5.1a) et (5.1b), on obtient déjà la positivité des variables  $\alpha_2$  et  $\alpha_1 \rho_1$ .

### 5.3 Etude de l'hyperbolicité du système de convection

Le système de convection associé à (5.1) admet, en dimension 2 d'espace, les valeurs propres suivantes (en notant  $\mathbf{U} = \underline{U, \underline{n}}$ ) :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathcal{U} - c \\ \lambda_{2,3} &= \mathcal{U} \\ \lambda_4 &= \mathcal{U} + c \end{aligned}$$

où

$$c = \sqrt{\frac{\rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 \rho_2 c_2^2}{\alpha_1 \rho}} \quad (5.17)$$

Les champs associés aux ondes  $\lambda_1$  et  $\lambda_4$  sont vraiment non linéaires et ceux associés à  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont linéairement dégénérés ( $c_1$  et  $c_2$  étant définis dans l'équation (5.8)).

Le système de convection associé à (5.1) est donc inconditionnellement hyperbolique dès lors que les conditions de réalisabilité physiques (5.9) sont respectées.

**Remarque 5.3** La célérité  $c$  n'est pas la moyenne des célérités  $c_1$  et  $c_2$ , car :

$$c_1 = c_2 \text{ entraîne } c^2 = c_1^2 \left( 1 + \frac{(2 - \alpha_2)\alpha_2 \rho_1}{\alpha_1 \rho} \right)$$

## 5.4 Résolution du problème de Riemann

On rappelle le vecteur des variables d'état conservatives  $\underline{W}^t = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_2, \rho \underline{U})$ .

On veut résoudre le problème de Riemann suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{W}(x, t), \text{ solution du système de convection associé à (5.1),} \\ \text{tel que :} \\ \underline{W}(x, t = 0) = \begin{cases} \underline{W}_L & \text{si } x \leq 0 \\ \underline{W}_R & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{avec } \underline{W}_L, \underline{W}_R \text{ deux états constants réalisables.} \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Le système de convection associé à (5.1) admet, en une dimension, trois valeurs propres,  $\lambda_1 = U - c$ ,  $\lambda_2 = U$  et  $\lambda_3 = U + c$ .

Soit  $b$  le rapport des masses partielles :

$$b = \frac{\alpha_1 \rho_1}{\alpha_2 \rho_2}$$

On considère  $c$  la célérité définie en (5.17) comme fonction de  $\rho_1$  et  $b$ ,  $c(\alpha_2, \rho_1) = c(\rho_1, b)$ . Les invariants de Riemann de chaque champ sont :

$$\text{1-onde : } \Phi_1 = \left( b, U + \int_0^{\rho_1} \frac{c(a, b)}{a(1 + a(\rho_2 b)^{-1})} da \right)$$

$$\text{2-onde : } \Phi_2 = (P(\alpha_2, \rho_1), U)$$

$$\text{3-onde : } \Phi_3 = \left( b, U - \int_0^{\rho_1} \frac{c(a, b)}{a(1 + a(\rho_2 b)^{-1})} da \right)$$

Soit  $\sigma$  la vitesse d'une discontinuité et  $[.] = (.)_R - (.)_L$  le saut de la variable  $(.)$  de part et d'autre de la discontinuité. Les relations de saut de Rankine-Hugoniot sont :

$$\sigma[\alpha_1 \rho_1] = [\alpha_1 \rho_1 U] \quad (5.19a)$$

$$\sigma[\alpha_2] = [\alpha_2 U] \quad (5.19b)$$

$$\sigma[\rho U] = [\rho U^2] + [P(\alpha_2, \rho_1)] \quad (5.19c)$$

La 2-3-discontinuité de contact se caractérise par :

$$\begin{aligned}\sigma &= U \\ [U] &= [P(\alpha_2, \rho_1)] = 0\end{aligned}$$

Après quelques manipulations algébriques, on montre qu'à travers un champ vraiment non linéaire, on a :

$$\overline{\alpha_2}[\alpha_1 \rho_1] = \overline{\alpha_1 \rho_1}[\alpha_2]$$

ou encore :

$$\left[ \frac{\alpha_1 \rho_1}{\alpha_2 \rho_2} \right] = [b] = 0 \quad (5.20)$$

Cette dernière relation est essentielle. On vient de montrer que la quantité  $b$  ne varie pas à la traversée des 1- et 3-ondes (que l'on soit en choc ou en détente). On peut alors affirmer que la fraction volumique restera inférieure à 1 (si  $\rho_1$  reste réalisable). En effet, si on écrit la conservation de la quantité  $b$  à la traversée de la 1-onde qui relie l'état initial connu  $\underline{W}_L$  à un premier état intermédiaire  $\underline{W}^*$  à déterminer, on obtient :

$$b(\alpha_2^*, \rho_1^*) = b((\alpha_2)_L, (\rho_1)_L) = b_L$$

soit encore :

$$\alpha_2^* = \frac{\rho_1^*}{\rho_1^* + \rho_2 b_L}$$

Comme  $b_L$  est positif, on obtient donc que  $\alpha_2^*$  est élément de l'intervalle  $[0, 1]$  si  $\rho_1^*$  est réalisable (i.e. positif). De manière analogue, si on écrit la conservation de la quantité  $b$  à la traversée de la 3-onde qui relie le second état intermédiaire  $\underline{W}^{**}$  à déterminer à l'état initial connu  $\underline{W}_R$ , on obtient :

$$b(\alpha_2^{**}, \rho_1^{**}) = b((\alpha_2)_R, (\rho_1)_R) = b_R$$

soit encore :

$$\alpha_2^{**} = \frac{\rho_1^{**}}{\rho_1^{**} + \rho_2 b_R}$$

$b_R$  étant positif, on obtient que  $\alpha_2^{**}$  est compris entre 0 et 1 si  $\rho_1^{**}$  est réalisable. On a donc montré que la solution du problème de Riemann, associé à des états initiaux  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$  réalisables, vérifiait pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\alpha_2(x, t) \in [0, 1]$ . Mais pour obtenir le principe du maximum (5.16), il nous reste à démontrer que  $\alpha_2^*$  et  $\alpha_2^{**}$  sont inférieurs à  $\alpha_{max}$  quand celui-ci est inférieur à 1.

**Remarque 5.4** *L'invariance de la quantité  $b$  peut être assimilée à l'invariance d'une quantité physique comparable à la concentration  $\alpha_2 \rho_2 / \rho$  (à la traversée des champs vraiment non linéaires).*

En éliminant  $\sigma$  de la relation de saut (5.19c), cette dernière peut se réécrire de la façon suivante :

$$\rho_L \rho_R [U]^2 = [\rho] [P(\alpha_2, \rho_1)] \quad (5.21)$$

ou encore :

$$\alpha_2 \rho_R \rho_L [U]^2 = \bar{\rho} [\alpha_2] [P(\alpha_2, \rho_1)] \quad (5.22)$$

On rappelle que la solution du problème de Riemann monodimensionnel verra se développer 3 ondes séparées par deux états intermédiaires  $\underline{W}^*$  et  $\underline{W}^{**}$  à déterminer. On effectue la paramétrisation des ondes associées aux champs vraiment non linéaires en exprimant la conservation des invariants de Riemann pour les ondes de détente, et par les relations (5.20) et (5.21) pour les ondes de choc, soit :

$$\begin{aligned} \text{1-onde } \alpha_2^* &= \frac{\rho_1^*}{\rho_1^* + \rho_2 b_L} = \alpha_2^*(\rho_1^*, b_L) && \text{en détente ou choc} \\ U^* &= U_L + \int_{\rho_1^*}^{(\rho_1)_L} \frac{c(a, b_L)}{a(1 + a(\rho_2 b_L)^{-1})} da && \text{en détente, } \rho_1^* \leq (\rho_1)_L \\ U^* &= U_L + \sqrt{\frac{(\rho^* - \rho_L)(P(\alpha_2^*, \rho_1^*) - P((\alpha_2)_L, (\rho_1)_L))}{\rho^* \rho_L}} && \text{en choc, } \rho_1^* \geq (\rho_1)_L \\ \text{2-onde } U^* &= U^{**} \\ P(\alpha_2^*, \rho_1^*) &= P(\alpha_2^{**}, \rho_1^{**}) \\ \text{3-onde } \alpha_2^{**} &= \frac{\rho_1^{**}}{\rho_1^{**} + \rho_2 b_R} = \alpha_2^{**}(\rho_1^{**}, b_R) && \text{en détente ou choc} \\ U^{**} &= U_R - \int_{\rho_1^{**}}^{(\rho_1)_R} \frac{c(a, b_R)}{a(1 + a(\rho_2 b_R)^{-1})} da && \text{en détente, } \rho_1^{**} \leq (\rho_1)_R \\ U^{**} &= U_R - \sqrt{\frac{(\rho_R - \rho^{**})(P((\alpha_2)_R, (\rho_1)_R) - P(\alpha_2^{**}, \rho_1^{**}))}{\rho^{**} \rho_R}} && \text{en choc, } \rho_1^{**} \geq (\rho_1)_R \end{aligned}$$

Or  $\alpha_2^* = \alpha_2^*(\rho_1^*, b_L)$  et, par définition,  $\rho^* = \rho^*(\alpha_2^*, \rho_1^*)$ , on a donc  $\rho^* = \rho^*(\alpha_2^*(\rho_1^*, b_L), \rho_1^*)$ .

De même,  $P(\alpha_2^*, \rho_1^*) = P(\alpha_2^*(\rho_1^*, b_L), \rho_1^*)$ .

De façon analogue, on a  $\rho_L = \rho_L(b_L, (\rho_1)_L)$  et  $P((\alpha_2)_L, (\rho_1)_L) = P(b_L, (\rho_1)_L)$ .

D'où pour la 1-onde en choc ou détente :

$$U^* = U_L - f_1(\rho_1^*; ((\rho_1)_L, b_L))$$

et de manière analogue entre les états  $\underline{W}^{**}$  et  $\underline{W}_R$  :

$$U^{**} = U_R + f_2(\rho_1^{**}; ((\rho_1)_R, b_R))$$

On effectue ensuite la connexion des ondes par la variable  $\rho_1$  :

$$P(\alpha_2^*(\rho_1^*, b_L), \rho_1^*) = P(\alpha_2^{**}(\rho_1^{**}, b_R), \rho_1^{**}) \quad (5.23a)$$

$$U_R - U_L = -f_1(\rho_1^*; ((\rho_1)_L, b_L)) - f_2(\rho_1^{**}; ((\rho_1)_R, b_R)) \quad (5.23b)$$

L'équation (5.23a) nous permet de déduire  $\rho_1^{**} = \rho_1^{**}(\rho_1^*)$ . On montre que  $\rho_1^*$  et  $\rho_1^{**}$  varient de façon identique :

$$\left( \frac{\partial \alpha_2^*(\rho_1^*)}{\partial \rho_1^*} \frac{\partial P}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial P}{\partial \rho_1} \right) (\alpha_2^*(\rho_1^*), \rho_1^*) = \frac{d\rho_1^{**}(\rho_1^*)}{d\rho_1^*} \left( \frac{\partial \alpha_2^{**}(\rho_1^{**})}{\partial \rho_1^{**}} \frac{\partial P}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial P}{\partial \rho_1} \right) (\alpha_2^{**}(\rho_1^{**}), \rho_1^{**}(\rho_1^*))$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} P(\alpha_2, \rho_1) = c_1^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} P(\alpha_2, \rho_1) = \rho_2 c_2^2 \geq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1^*} \alpha_2^*(\rho_1^*) = \frac{\rho_2 b_L}{(\rho_1^* + \rho_2 b_L)^2} \geq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1^{**}} \alpha_2^{**}(\rho_1^{**}) = \frac{\rho_2 b_R}{(\rho_1^{**} + \rho_2 b_R)^2} \geq 0$$

On obtient donc :

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1^*} \rho_1^{**}(\rho_1^*) \geq 0$$

Et l'équation (5.23b) peut se réduire à une fonction de  $\rho_1^*$  :

$$U_R - U_L = \mu((\alpha_2)_L, (\rho_1)_L), ((\alpha_2)_R, (\rho_1)_R), \rho_1^* \quad (5.24)$$

En détente comme en choc, on vérifie que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho_1^*} f_1(\rho_1^*; ((\rho_1)_L, b_L)) &\geq 0 \\ \frac{d}{d\rho_1^{**}} f_2(\rho_1^{**}; ((\rho_1)_R, b_R)) &\geq 0 \end{aligned}$$

On montre donc que la fonction  $\mu(\rho_1^*)$  est décroissante :

$$\frac{d}{d\rho_1^*} \mu(\rho_1^*) = -\frac{d}{d\rho_1^*} f_1(\rho_1^*) - \frac{d}{d\rho_1^*} \rho_1^{**}(\rho_1^*) \frac{d}{d\rho_1^{**}} f_2(\rho_1^{**})$$

et qu'elle admet comme limites :

$$\begin{aligned} \lim_{z_1 \rightarrow 0^+} \mu(\rho_1^*) &= -\int_{(\rho_1)_L}^{0^+} \frac{c(a, b_L)}{a(1 + a(\rho_2 b_L)^{-1})} da - \int_{(\rho_1)_R}^{0^+} \frac{c(a, b_R)}{a(1 + a(\rho_2 b_R)^{-1})} da \\ \lim_{\rho_1^* \rightarrow +\infty} \mu(\rho_1^*) &= -\infty \end{aligned}$$

On obtient donc l'existence et l'unicité de la solution de l'équation non linéaire (5.24) dès lors que :

$$U_R - U_L < -\int_{(\rho_1)_L}^{0^+} \frac{c(a, b_L)}{a(1 + a(\rho_2 b_L)^{-1})} da - \int_{(\rho_1)_R}^{0^+} \frac{c(a, b_R)}{a(1 + a(\rho_2 b_R)^{-1})} da$$

On a démontré précédemment que  $\alpha_2^*$  et  $\alpha_2^{**}$  sont positives, il nous reste à prouver qu'elles sont inférieures à  $\alpha_{max}$ . Pour vérifier le principe du maximum dans un double choc, l'équation (5.22) dit que la pression totale  $P(\alpha_2, \rho_1)$  de l'état intermédiaire devra absorber une énergie infinie si l'énergie cinétique initiale du fluide tend vers l'infini. On distingue deux cas :

- si la pression granulaire  $P_2(\alpha_2)$  est de type «diluée», on aura alors :

$$\max(P_2(\alpha_2)) = P_2(\alpha_{max}) \neq +\infty$$

C'est donc la pression du gaz qui absorbera cette énergie. On aura donc  $\rho_1^*$  qui tend vers  $+\infty$ , et donc :

$$\max(\alpha_2^*) = \lim_{\rho_1^* \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{\rho_1^*}{\rho_1^* + \rho_2 b_L} \right\} = 1$$

– alors que dans le cas d'une pression granulaire  $P_2(\alpha_2)$  de type «dense», on aura :

$$\max(\alpha_2^*) = \alpha_{max}$$

et

$$\max(\rho_1^*) = \lim_{\alpha_2^* \rightarrow \alpha_{max}} \left\{ \frac{\alpha_2^* \rho_2 b_L}{1 - \alpha_2^*} \right\} = \frac{\alpha_{max} \rho_2 b_L}{1 - \alpha_{max}}$$

On peut alors énoncer le résultat suivant :

**Proposition 5.1** *Le problème de Riemann unidimensionnel, dans la direction  $\underline{n}$ , associé au système (5.1) admet une unique solution entropique à densité  $\rho_1$  positive et à taux de présence  $\alpha_2 \in [0, \alpha_{max}]$  dès lors que les conditions initiales vérifient :*

$$(\mathcal{U})_D - (\mathcal{U})_G < X_G + X_D \quad (5.25)$$

avec

$$X_i = \int_0^{(\rho_1)_i} \frac{c(a, b_i)}{a(1 + a(\rho_2 b_i)^{-1})} da, \quad i = G, D$$

$(\cdot)_G$  et  $(\cdot)_D$  désignant respectivement l'état de la variable  $(\cdot)$  à gauche et à droite de la discontinuité initiale.

La résolution exacte du problème de Riemann nous permet d'envisager la mise en œuvre d'un schéma de Godunov pour calculer les flux numériques. Mais le coût CPU serait bien supérieur à ceux nécessaires aux solveurs de Riemann approchés d'autant plus que l'hypothèse d'une loi de pression granulaire «dense» nous laisse peu d'espoir d'intégrer analytiquement les invariants de Riemann. On choisit donc de mettre en œuvre un solveur de Riemann approché et, plus particulièrement, le schéma vfRoe modifié.

## 5.5 Résolution par un schéma vfRoe modifié

Le domaine de calcul est composé de cellules volumes finis INRIA (*Cf.* les paragraphes 3.1 et 4.5). Le schéma volumes finis que l'on va mettre en œuvre s'appuie sur un solveur de Riemann linéarisé, le schéma vfRoe, décrit dans le paragraphe 3.6 et présenté dans [Gal96b] et [Mas96]. Ce schéma qui trouve sa source dans les schémas de Godunov et de Roe (*Cf.* les paragraphes 3.3 et 3.5) a l'avantage, par rapport au schéma de Roe, de ne pas nécessiter de trouver une moyenne. L'algorithme décrit ci-dessous présente une modification par rapport à l'idée originale qui est introduite dans [Buf96] et dont le principe est de résoudre le problème de Riemann linéarisé dans des variables autres que les variables conservatives (*Cf.* le paragraphe 3.7). A cet effet, on introduit le vecteur des variables d'état non conservatives suivant :

$$\underline{Z}^t = (\alpha_2, \rho_1, \underline{U})$$

Le vecteur des variables d'état conservatives étant  $\underline{W} = \underline{W}(\underline{Z})$  :

$$\underline{W}^t = (\alpha_2, \alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 \underline{U})$$

où  $\underline{U}^t = (U, V)$ . Soient  $C_i$  une cellule du maillage, de volume  $|C_i|$ ,  $V(i)$  l'ensemble des cellules ayant une frontière commune avec  $C_i$  et  $\underline{n}_{ij}$  le vecteur normal à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ , extérieur à  $C_i$  ( $\underline{n}_{ij} = -\underline{n}_{ji}$ ).

On calcule la valeur moyenne de  $\underline{W}$  par cellule  $C_i$  à la  $n^{\text{ième}}$  itération, c'est à dire au temps physique  $t^n$ , et l'on pose :  $\underline{W}(\underline{x} \in C_i, t^n) = \underline{W}_i^n$ . On a également besoin de certaines valeurs de  $\underline{W}$  à l'interface  $\partial C_{ij}$  entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ , on introduit alors les notations suivantes :  $[\underline{W}]_{ij} = \underline{W}_j - \underline{W}_i$  le saut de  $\underline{W}$  à l'interface et  $\overline{\underline{W}}_{ij} = (\underline{W}_i + \underline{W}_j)/2$  la moyenne arithmétique.

Le schéma d'intégration sur la cellule  $C_i$ , d'ordre un en temps et en espace, du système conservatif (5.1), s'écrit en deux dimensions d'espace :

$$\underline{W}_i^{n+1} = \underline{W}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \sum_{j \in V(i)} \mathbb{F}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) \quad (5.26)$$

$\Delta t$  désigne le pas de temps tel que  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  et  $\mathbb{F}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij})$  le flux numérique qui est égal au flux analytique  $\mathcal{F}(\underline{W}, \underline{n}) = n_x \underline{F}_x + n_y \underline{F}_y$  pris en un certain état moyen  $\underline{W}_{ij}(Z_{ij}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}))$  que l'on doit déterminer (où  $\underline{F}_x$  et  $\underline{F}_y$  désignent les flux du système (5.1) associés aux directions spatiales  $x$  et  $y$ ). Le flux numérique s'écrit donc :

$$\mathbb{F}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) = \mathcal{F}(\underline{W}_{ij}(Z_{ij}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij})), \underline{n}_{ij}) \quad (5.27)$$

le flux analytique étant défini par :



$$\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}, \underline{n}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 (\underline{U} \cdot \underline{n}) \\ \alpha_2 (\underline{U} \cdot \underline{n}) \\ \rho (\underline{U} \cdot \underline{n}) U + P(\alpha_2, \rho_1) n_x \\ \rho (\underline{U} \cdot \underline{n}) V + P(\alpha_2, \rho_1) n_y \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

On écrit alors le système de convection associé à (5.1) dans les variables non conservatives  $(\alpha_2, \rho_1, \underline{U})$  et dans le repère habituel  $(x, y)$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + (\underline{U} \cdot \nabla) \alpha_2 + \alpha_2 \nabla \cdot \underline{U} = 0 \quad (5.29a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_1 + (\underline{U} \cdot \nabla) \rho_1 + \frac{\rho_1}{\alpha_1} \nabla \cdot \underline{U} = 0 \quad (5.29b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{U} + (\underline{U} \cdot \nabla) \underline{U} + \frac{1}{\rho} \nabla P(\alpha_2, \rho_1) = \underline{0} \quad (5.29c)$$

Soit le repère local orthonormé  $(\underline{n}, \underline{\tau})$ , on réécrit le système (5.29) dans ce repère, les composantes du vecteur vitesse devenant  $(U_n, U_\tau)t$  où  $U_n = \underline{U} \cdot \underline{n}$  et  $U_\tau = \underline{U} \cdot \underline{\tau}$ , en négligeant les variations selon la direction tangente :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 + U_n \frac{\partial}{\partial n} \alpha_2 + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial n} U_n = 0 \quad (5.30a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_1) + U_n \frac{\partial}{\partial n} \rho_1 + \frac{\rho_1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial n} U_n = 0 \quad (5.30b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U_n + U_n \frac{\partial}{\partial n} U_n + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} P(\alpha_2, \rho_1) = 0 \quad (5.30c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U_\tau + U_n \frac{\partial}{\partial n} U_\tau = 0 \quad (5.30d)$$

On considère alors le système linéaire hyperbolique tangent suivant, obtenu en gelant localement la Jacobienne sur l'état moyen  $\overline{(\cdot)}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \rho_1 \\ U_n \\ U_\tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{U_n} & 0 & \overline{\alpha_2} & 0 \\ 0 & \overline{U_n} & \overline{\rho_1/\alpha_1} & 0 \\ \overline{\rho_2 c_2^2/\bar{\rho}} & \overline{c_1^2/\bar{\rho}} & \overline{U_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{U_n} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial n} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \rho_1 \\ U_n \\ U_\tau \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (5.31)$$

Avec les moyennes suivantes :

$$\bar{\rho} = \bar{\alpha}_1 \bar{\rho}_1 + \bar{\alpha}_2 \rho_2 \quad (5.32a)$$

$$\bar{\alpha}_1 = 1 - \bar{\alpha}_2 \quad (5.32b)$$

$$\bar{c}_k^2 = c_k^2(\bar{\alpha}_2, \bar{\rho}_1) \quad k = 1, 2 \quad (5.32c)$$

$$\bar{c}^2 = \frac{\bar{\rho}_1 \bar{c}_1^2 + \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \rho_2 \bar{c}_2^2}{\bar{\alpha}_1 \bar{\rho}} \quad (5.32d)$$

Le système résultant (5.31) peut être résolu pour des conditions initiales données par :

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}(W_i) \quad , \quad \underline{Z}_j = \underline{Z}(W_j) \quad (5.33)$$

Pour cela, on a besoin des vecteurs propres à droite associés :

$$\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\rho}_1 \\ -\bar{\alpha}_1 \bar{c} \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{r}_2 = \begin{pmatrix} \bar{c}_1^2 \\ -\rho_2 \bar{c}_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{r}_4 = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\rho}_1 \\ \bar{\alpha}_1 \bar{c} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

On considère la moyenne arithmétique à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ , i.e.  $\bar{(\cdot)} = \bar{(\cdot)}_{ij} = \frac{1}{2}((\cdot)_i + (\cdot)_j)$  pour  $(\cdot) = \alpha_1, \alpha_2$  ou  $\rho_1$ . La solution du problème de Riemann linéarisé (5.31,5.33) se compose de trois ondes linéairement dégénérées (les 2- et 3-ondes étant confondues) séparées par deux états intermédiaires constants  $\underline{Z}^*$  et  $\underline{Z}^{**}$  qui s'obtiennent simplement :

$$\underline{Z}^* = \underline{Z}_i + x_1 \underline{r}_1 \quad , \quad \underline{Z}^{**} = \underline{Z}_j - x_4 \underline{r}_4 \quad (5.35)$$

où  $x_1$  et  $x_4$  résultent du système linéaire suivant :

$$\underline{Z}_j - \underline{Z}_i = x_1 \underline{r}_1 + x_2 \underline{r}_2 + x_3 \underline{r}_3 + x_4 \underline{r}_4$$

après résolution de ce système linéaire, on obtient les expressions suivantes :

$$x_1 = \frac{1}{2 \bar{\alpha}_1 \bar{\rho} \bar{c}^2} \left\{ \bar{c}_2^2 \rho_2 [\alpha_2] + \bar{c}_1^2 [\rho_1] - \bar{\rho} \bar{c} [U_n] \right\} \quad (5.36a)$$

$$x_4 = \frac{1}{2 \bar{\alpha}_1 \bar{\rho} \bar{c}^2} \left\{ \bar{c}_2^2 \rho_2 [\alpha_2] + \bar{c}_1^2 [\rho_1] + \bar{\rho} \bar{c} [U_n] \right\} \quad (5.36b)$$

où  $[.] = [.]_{ij} = (\cdot)_j - (\cdot)_i$ .

La résolution complète nécessite l'estimation des vitesses  $\overline{U_n} \pm \bar{c}$  des ondes associées au problème de Riemann approché (5.31), et d'évaluer l'état  $\underline{Z}_{ij}$  à l'interface  $x/t = 0$  dans le repère local. Cet état dépend de la configuration des ondes par rapport à la caractéristique  $x/t = 0$  et s'écrit :

$$\underline{Z}_{ij} = \begin{cases} \underline{Z}_i & \text{si } 0 \leq \overline{(U_n)}_{ij} - \bar{c}_{ij} \\ \underline{Z}^* & \text{si } 0 \leq \overline{(U_n)}_{ij} \leq \bar{c}_{ij} \\ \underline{Z}^{**} & \text{si } -\bar{c}_{ij} \leq \overline{(U_n)}_{ij} \leq 0 \\ \underline{Z}_j & \text{si } \overline{(U_n)}_{ij} + \bar{c}_{ij} \leq 0 \end{cases} \quad (5.37)$$

On a donc déterminé complètement le flux numérique  $\underline{\mathbb{F}}$  à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ .

**Remarque 5.5** *On note que l'on aurait pu retenir le vecteur des variables d'état non conservatives  $\underline{Z}^t = (1/\rho, P(\alpha_2, \rho_1), \underline{U})$ , et le schéma conserverait naturellement, par construction, les invariants de Riemann  $P(\alpha_2, \rho_1)$  et  $\underline{U} \cdot \underline{n}$  du 2-3-champ linéairement dégénéré du système de convection associé à (5.1). Cette formulation vérifie alors le premier principe proposé dans [Buf96] et est détaillée dans [Com96c]. Le problème est alors de retrouver les variables  $\alpha_2$  et  $\rho_1$  à partir de la fonction fortement non linéaire  $P(\alpha_2, \rho_1)$ . Cette formulation accroît fortement le temps calcul du schéma et l'on préférera la première définition de  $\underline{Z}$ .*

**Remarque 5.6** *Pour les conditions aux limites de paroi, on introduit une cellule fictive  $C_{i^*}$  état miroir de la cellule  $C_i$  qui a une frontière commune avec la paroi. On choisit de calculer le flux numérique entre la cellule intérieure et la cellule miroir comme un flux interne. Cette formulation d'état miroir respecte naturellement la condition de glissement (Cf. le paragraphe 4.5.4). Par symétrie, on se trouve dans une configuration double détente symétrique ou double choc symétrique et les états intermédiaires  $\underline{Z}^*$  et  $\underline{Z}^{**}$  associés sont donc identiques. On résout le problème linéarisé (5.31) à l'interface entre la cellule interne  $C_i$  et la cellule miroir  $C_{i^*}$  associée, et l'on obtient l'état  $\underline{Z}^*$  :*

$$\alpha_2^* = (\alpha_2)_i \left( 1 + \frac{U_n}{c} \right)_i \quad (5.38a)$$

$$(5.38b)$$

$$\rho_1^* = (\rho_1)_i \left( 1 + \frac{U_n}{\alpha_1 c} \right)_i \quad (5.38c)$$

On obtient le flux numérique du schéma en considérant le flux analytique du système en la valeur  $\underline{Z}_{ii^*}$  qui vaut ici  $\underline{Z}^*$ . Par la condition de glissement, on obtient donc :

$$\underline{F}(\underline{W}_i, \underline{W}_i^*, \underline{n}) = P(\alpha_2^*, \rho_1^*) \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

On déduit des équations (5.38) que la valeur calculée de  $\alpha_2^*$  est réalisable si  $(U_n + c)_i \geq 0$  et celle de  $\rho_1^*$  si  $(U_n + \alpha_1 c)_i \geq 0$ . On choisit donc de modifier la pression de paroi  $P(\alpha_2^*, \rho_1^*)$  si l'une ou l'autre des deux inégalités n'est pas respectée ; à savoir, si  $(U_n + c)_i < 0$  alors les valeurs  $\alpha_2^*$  mais aussi  $\rho_1^*$  calculées sont négatives et l'on prend  $P(\alpha_2^*, \rho_1^*) = 0$  et si  $(U_n + \alpha_1 c)_i < 0$  alors la valeur  $\rho_1^*$  calculée est négative et l'on prend  $P(\alpha_2^*, \rho_1^*) = P_2(\alpha_2^*)$ .

Les conditions aux limites d'entrée du domaine de l'écoulement sont traitées de façon similaire au domaine intérieur. Pour chaque cellule  $C_i$  adjacente à une frontière d'entrée du domaine, on introduit une cellule fictive extérieure sur laquelle on impose un état  $\underline{W}_\infty$ , dont on déduit  $\underline{Z}_\infty$ , puis on détermine la solution  $\underline{Z}_{i,\infty}$  du système linéarisé (5.31) de la même manière qu'un flux interne, i.e. en le décentrant suivant le signe des valeurs propres  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , considérées en l'état moyen  $\overline{(\lambda_k)}_{i,\infty}$ . Pour prendre correctement en compte la configuration subsonique ou supersonique de la sortie, on choisit donc de baser le décentrement du flux non pas sur le signe de  $\overline{(\lambda_k)}_{i,\infty}$  mais plutôt sur le signe de  $(\lambda_k)_i$ .

**Remarque 5.7** En décrivant le choix des conditions aux limites de paroi dans la remarque 5.6, on a mis en évidence les conditions de positivité des variables  $\alpha_2$  et  $\rho_1$  associées au schéma vfRoe modifié dans les cas particuliers d'un double choc symétrique ou d'une double détente symétrique. On donne, dans le cas général, les états intermédiaires calculés par le schéma à partir des valeurs initiales réalisables  $\underline{Z}_i$  et  $\underline{Z}_j$  :

$$\alpha_2^* = \overline{\alpha_2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho_1} \overline{c_1^2}}{\overline{\alpha_2} \overline{\alpha_1} \overline{\rho} \overline{c^2}} [\alpha_1] + \frac{1}{2} \frac{\overline{c_1^2}}{\overline{\rho} \overline{c^2}} [\rho_1] - \frac{1}{2\overline{c}} [U_n] \right\}$$

$$\rho_1^* = \overline{\rho_1} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_2 \overline{c_2^2}}{\overline{\alpha_1} \overline{\rho} \overline{c^2}} [\alpha_2] - \frac{1}{2} \frac{\rho_2 \overline{\alpha_2} \overline{c_2^2}}{\overline{\rho_1} \overline{\rho} \overline{c^2}} [\rho_1] - \frac{1}{2\overline{\alpha_1} \overline{c}} [U_n] \right\}$$

Dans le cas dilué, i.e.  $\alpha_1 \simeq 1$ , on obtient :

$$\rho_1^* \simeq \overline{\rho_1} \left\{ 1 - \frac{[U_n]}{2c_1} \right\}$$

On retrouve donc, dans le cas dilué, la même condition de positivité de l'état intermédiaire  $\rho_1^*$  que, dans le cas monophasique pur, du système de la dynamique des gaz résolu par un solveur de Roe (Cf. le paragraphe 3.8.1).

## 5.6 Tests numériques

On présente quelques simulations numériques sur des maillages bidimensionnels non structurés avec des cellules volumes finis de type INRIA. Les traitements informatiques ont été effectués dans la structure du code *N3S-MUSCL*. Le pas de temps est adapté en fonction d'une condition CFL basée sur les célérités d'ondes  $|U \pm c|$  associées au système de convection de (5.1). Tous les calculs ont été réalisés sur station de travail HP9000-735. Pour un calcul diphasique explicite, d'ordre 1 en temps et en espace, avec adaptation du pas de temps, on obtient un temps CPU pour 1000 nœuds par pas de temps de 0.06 secondes. On effectuera tout d'abord des tests de type «tube à choc diphasique» du système convectif que l'on comparera à des simulations avec traînée du modèle à deux fluides à quatre équations (avec hypothèse de glissement d'une phase par rapport à l'autre) étudié dans le chapitre 4. On présentera enfin une simulation d'écoulement dans une tuyère.

### 5.6.1 Tests de type tube à choc et comparaison avec le modèle à deux fluides à quatre équations

On présente tout d'abord des simulations bidimensionnelles de type tube à choc monodimensionnel du système de convection associé à (5.1) avec les lois de fermeture (5.2, 5.3, 5.4, 5.6b) et :

$$P_2(\alpha_2) = \frac{2}{3} < q_2^2 >_0 \alpha_2^{5/3} (1 + g(\alpha_2)) \quad (5.39)$$

Le maillage étant non structuré, la solution numérique verra se développer des effets bidimensionnels (transverses). Les dimensions du domaine sont (en m.) :  $x \times y \in [-0.9, 0.9] \times [0, 0.1]$ . Le maillage primal, constitué de triangles, comporte soit  $11 \times 1000$ , soit, pour les besoins d'une solution vraiment convergée en maillage,  $3 \times 10000$  nœuds sommets et présente une symétrie par rapport à la droite  $y = 0$  (Cf. la figure [5.1]).

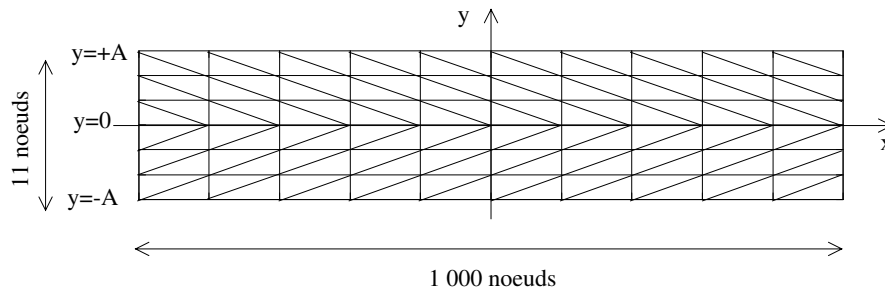


FIG. 5.1 –  
Triangulation du domaine de calcul avant construction des cellules INRIA.

Les résultats sont tracés sur cet axe de symétrie. On a retenu des conditions aux limites de type «paroi» en  $y = \pm A$ , de manière à conserver le mieux possible le caractère unidimensionnel de

la solution. On présente deux simulations réalisées à partir des valeurs d'initialisation décrites dans le tableau 5.1. Ces simulations ont été réalisées avec une CFL égale à 0.5;  $U$  (resp.  $V$ ) désigne la vitesse selon  $x$  (resp.  $y$ ) du mélange et, dans tous les cas,  $V = 0$ .

	CI n° 1		CI n° 2		CI n° 3	
	G	D	G	D	G	D
$\rho_1$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	1	0.3	1	1.	1	1.
$\alpha_2$	0.5	0.6	0.5	0.5	0.63	0.63
$U$ [m.s <sup>-1</sup> ]	0	0	-5	5	5	-5

TAB. 5.1 – Conditions initiales des tests de type tube à choc diphasique, où les états «G» et «D» représentent les valeurs à gauche et à droite d'une variable de part et d'autre de la discontinuité initiale qui est centrée en  $x = 0$  par rapport au domaine.

Comme dans le cas du modèle à quatre équations (4.1) étudié dans le chapitre 4, les tests ont été réalisés avec les constantes physiques suivantes :  $\gamma = 7/5$ ,  $K = 10^5$ ,  $\frac{2}{3} < q_2^2 >_0 = 5 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\rho_2 = 2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\alpha_{max} = 0.64$  et  $\epsilon_c = 1$ .

On effectue une première simulation subsonique avec les conditions initiales n° 1 et l'on présente les résultats sur les figures [5.2] et [5.3]. Une 1-onde de choc et une 3-onde de détente se développent. On vérifie que  $U$  et  $P(\alpha_2, \rho_1)$  ne varient pas à la traversée de la 2-discontinuité de contact et que  $\alpha_2 \rho_2 / \rho_1$ , i.e  $\alpha_2 \rho_2 / \alpha_1 \rho_1$ , est constant à la traversée des 1- et 3-ondes. Le caractère unidimensionnel de la solution est correctement préservé. Les courbes [5.3] à [5.5] ont pour objet de faire la comparaison des résultats issus du modèle à trois équations avec ceux issus du modèle à quatre équations avec traînée (4.1) (Cf. la figure [4.17]) qui suppose une vitesse de glissement entre les deux phases. Ce modèle à quatre équations nécessite les données supplémentaires du diamètre des particules  $d_2$  et de la viscosité du fluide  $\nu_1$  afin d'effectuer le calcul du coefficient de traînée statique qui donne explicitement le transfert de quantité de mouvement entre phases. Les conditions initiales retenues pour le modèle à quatre équations sont décrites dans le chapitre 4 référencées par le n° 1. Sur la figure [5.3], on superpose les simulations, effectuées sur le maillage  $3 \times 10000$  éléments, du modèle à trois équations à ceux du modèle à quatre équations pour des particules de diamètre  $d_2 = 10^{-4} \text{ m}$ . Concernant le modèle à deux fluides, la force de traînée tend à annuler la vitesse relative entre les deux phases et l'on note sur les variables  $\alpha_2$  et  $\rho_1$  que les résultats tendent à converger vers ceux du modèle à trois équations. On retrouve notamment, pour la variable  $\alpha_2$  qui est monotone croissante, les champs vraiment non linéaires du modèle à trois équations avec la même vitesse de propagation et les mêmes états intermédiaires. Cette tendance est moins marquée sur la variable  $\rho_1$ . On remarque également que la quantité  $b$  est un peu perturbée à la traversée à la traversée de la 1-onde de choc mais qu'elle ne varie pas dans la 3-onde de détente et que la pression totale  $P(\alpha_2, \rho_1)$  prédite par le modèle à deux fluides se superpose aux résultats du modèle à trois équations. L'adéquation des résultats des deux modèles est encore plus marquée quand on considère des particules de plus petit diamètre, i.e.  $d_2 = 10^{-6} \text{ m}$ . Ceci est dû au fait que le coefficient de traînée est d'autant plus important que les particules sont fines. On constate effectivement sur la figure [5.4], pour une solution convergée en maillage ( $3 \times 10000$  nœuds), que les résultats des deux modèles sont quasiment identiques. On montre effectivement sur la figure [5.5] que si la vitesse relative du modèle à deux fluides atteint encore  $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pour des particules de diamètre  $100 \mu\text{m}$ , elle n'atteint plus que  $10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pour des particules de diamètre  $1 \mu\text{m}$ . On effectue la même comparaison dans le cas d'une double détente symétrique (conditions initiales n° 2 pour le modèle à trois équations et n° 6 pour le modèle à deux fluides, Cf. les figures [5.6] à [5.8]) et d'un double choc symétrique (conditions initiales n° 3 pour le modèle à trois équations et n° 5 pour le modèle à deux fluides,

Cf. les figures [5.9] à [5.11]).

On déduit de ceci que dans certaines configurations monodimensionnelles, avec les mêmes conditions initiales et pour des particules de petit diamètre, le modèle à deux fluides avec effets de traînée «converge» vers le modèle à trois équations homogène.

### 5.6.2 Écoulement dans une tuyère et comparaison avec le modèle à deux fluides à quatre équations

On s'intéresse ici à un écoulement diphasique compressible dans une demi-tuyère. La simulation présentée a été réalisée avec les constantes physiques suivantes :  $\gamma = 7/5$ ,  $K = 10^5$ ,  $\frac{2}{3} < q_2^2 >_0 = 5 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\rho_2 = 2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\alpha_{max} = 0.64$ ,  $e_c = 1$  et  $\underline{g} = \underline{0}$ .

On observe la simulation numérique bidimensionnelle d'un écoulement diphasique dans une demi-tuyère (système (5.1) avec les lois de fermeture (5.2, 5.3, 5.4, 5.6b) et :

$$P_2(\alpha_2) = \frac{2}{3} < q_2^2 >_0 \alpha_2^{5/3} (1 + g(\alpha_2)) \quad (5.40)$$

Le maillage associé est de l'ordre de 8500 nœuds. Un zoom du maillage primal (i.e. triangulation avant construction des cellules INRIA) du convergent de la tuyère est présenté sur la figure [4.21] du chapitre 4. Le calcul est effectué avec une CFL égale à 0.5. Les conditions initiales à l'intérieur de la tuyère et les conditions aux limites que l'on impose, sont détaillées dans le tableau 5.2. Du fait que l'on ne considère pas de terme de diffusion, on traite les conditions aux limites de l'axe de symétrie comme des conditions aux limites de paroi (avec une hypothèse de glissement).

C.L. Entrée		C.I. Intérieur		C.L. Sortie	
$\rho_1 = 1.1$	$\alpha_2 = 10^{-2}$	$\rho_1 = 1$	$\alpha_2 = 10^{-6}$	$\rho_1 = 1$	$\alpha_2 = 10^{-6}$
$U = 200$	$V = 0$	$U = 0$	$V = 0$	$U = 0$	$V = 0$

TAB. 5.2 – Conditions initiales de la simulation d'un écoulement diphasique dans une demi-tuyère. Les composantes horizontale et verticale de la vitesse  $\underline{U} = (U, V)^t$  sont exprimées en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  et la densité du gaz en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

On considère initialement, dans la tuyère, un mélange très dilué ( $\alpha_2 = 10^{-6}$ ) et au repos ( $\underline{U} = \underline{0}$ ). On impose des conditions aux limites d'entrée supersoniques à partir d'un état infini amont constant pour un écoulement comprenant 1 % de particules en volume ; les conditions aux limites de sortie, imposées à partir d'un état infini aval constant du mélange très dilué et au repos, peuvent être comparées, pour cet écoulement, à des conditions aux limites libres.

On observe sur la figure [5.12], l'évolution des résidus massiques (norme  $L^2$ ). On note que l'on obtient un régime numériquement stationnaire, avec une convergence quasi linéaire, les résidus atteignant  $10^{-13}$  au bout de 50000 itérations. On note sur les résidus un léger phénomène de pompage de période environ 0.075 s., soit 8000 itérations. Ce phénomène ne se manifeste pas de façon visible sur les variables et doit être dû, à pression totale  $P(\alpha_2, \rho_1)$  constante, à un transfert entre la pression granulaire  $P_2(\alpha_2)$  et la pression du gaz isolé  $P_1(\rho_1)$ . Toujours sur

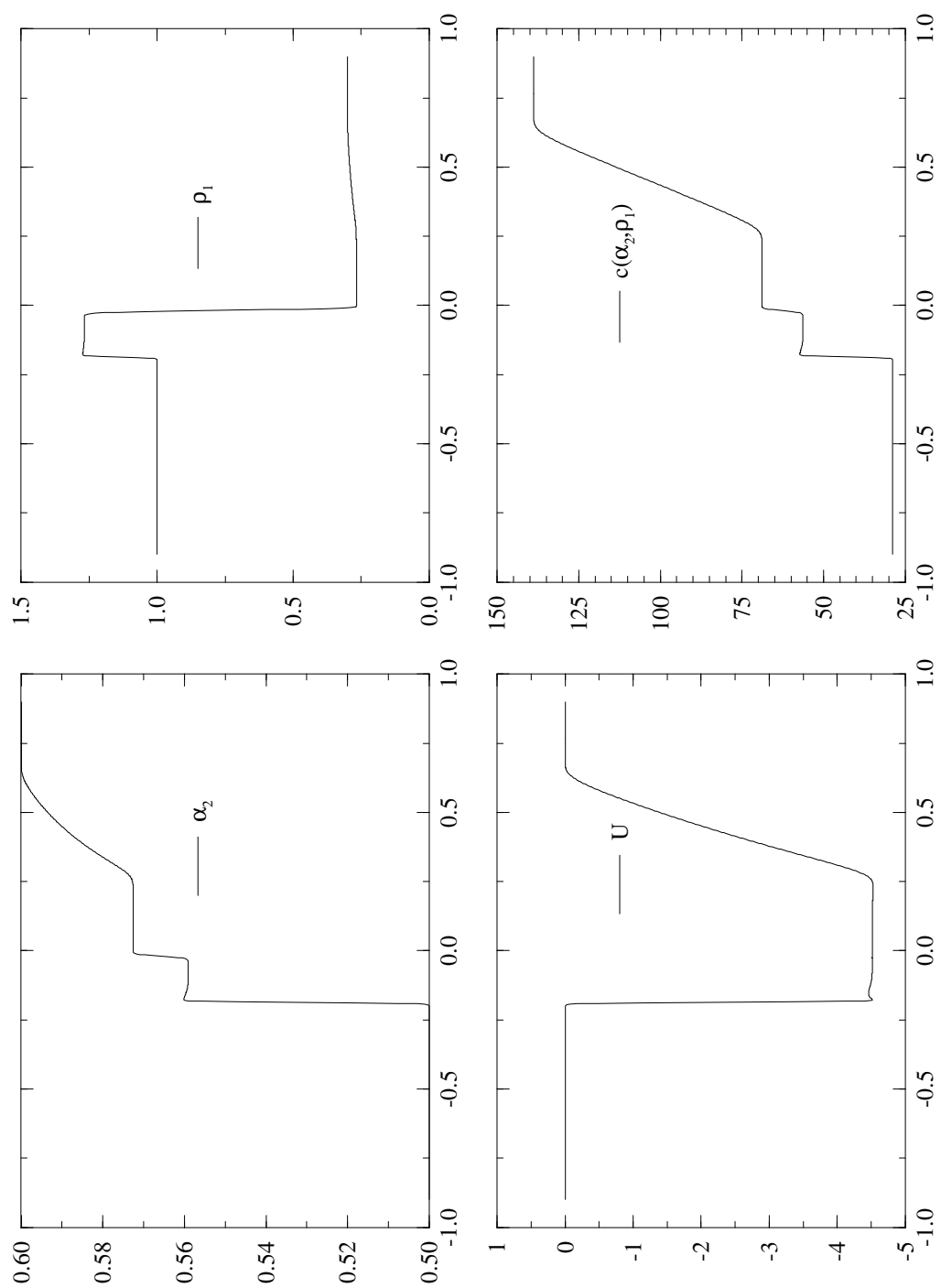


FIG. 5.2 -

Simulation, par le système à trois équations, du cas test de tube à choc diphasique de conditions initiales n° 1.



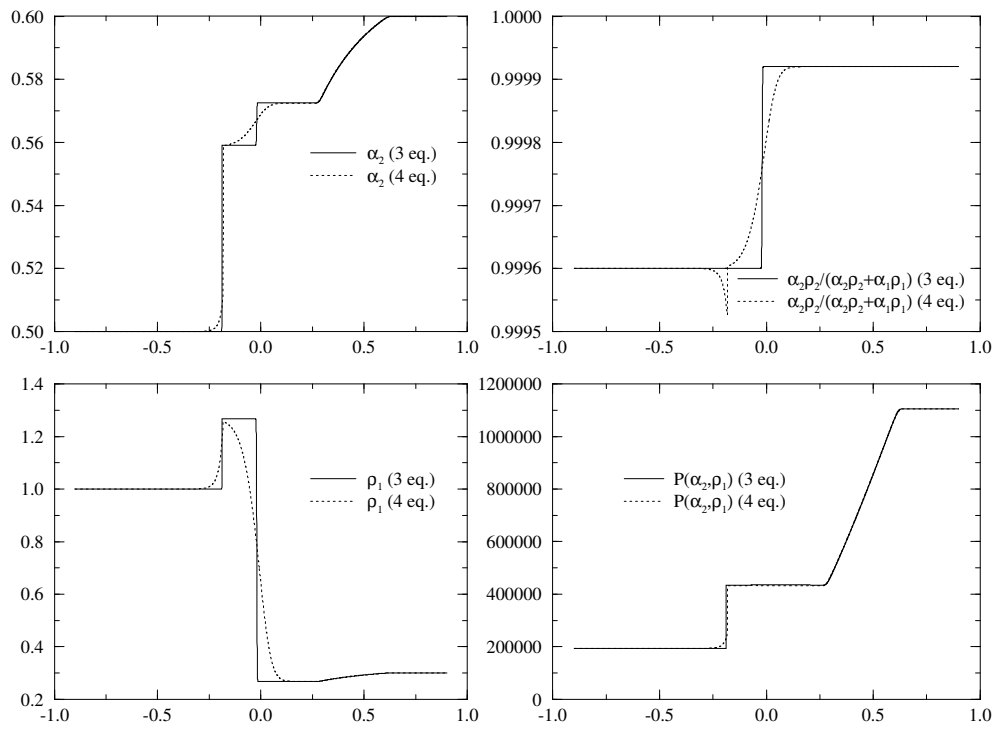


FIG. 5.3 -

Comparaison du modèle à deux fluides à quatre équations avec traînée et des particules de diamètre  $d_2 = 10^{-4}$  m et du système homogène à trois équations pour le cas test de tube à choc diphasique de conditions initiales n. 1.

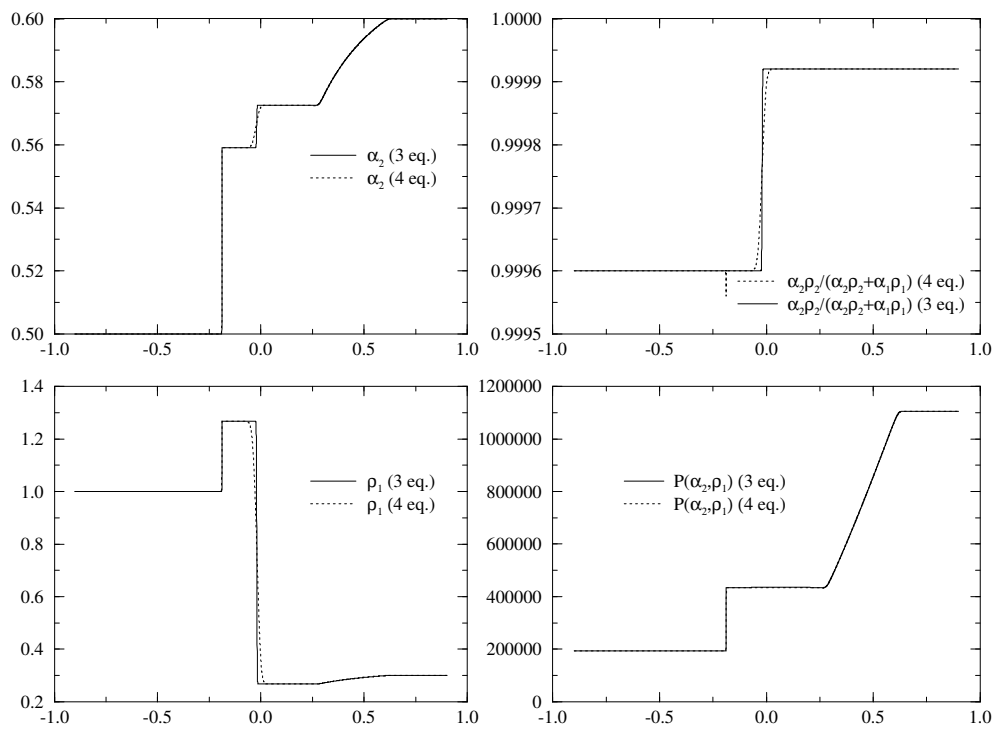


FIG. 5.4 -

Comparaison du modèle à deux fluides à quatre équations avec traité et des particules de diamètre  $d_2 = 10^{-6}$  m et du système homogène à trois équations pour le cas test de tube à choc diphasique de conditions initiales n° 1.

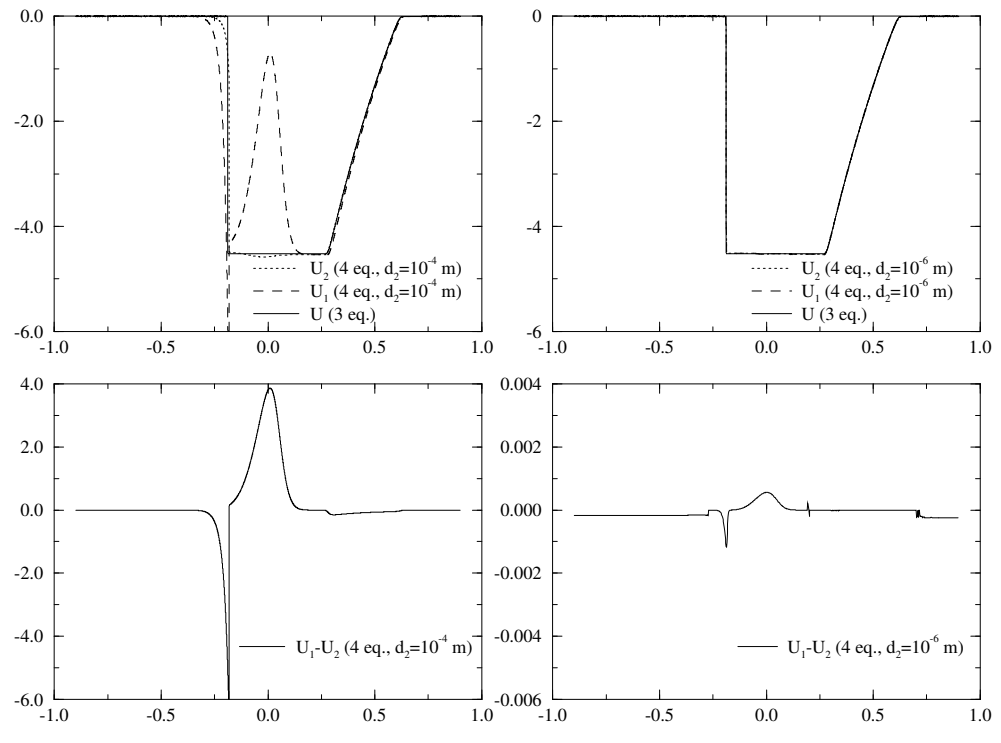


FIG. 5.5 -  
 Comparaison des vitesses obtenues par le modèle à deux fluides à quatre équations avec  
 truite et des particules de diamètre  $d_2 = 10^{-6}$  m et du système homogène à trois équations  
 pour le cas test de tube à choc diphasique de conditions initiales n° 1.

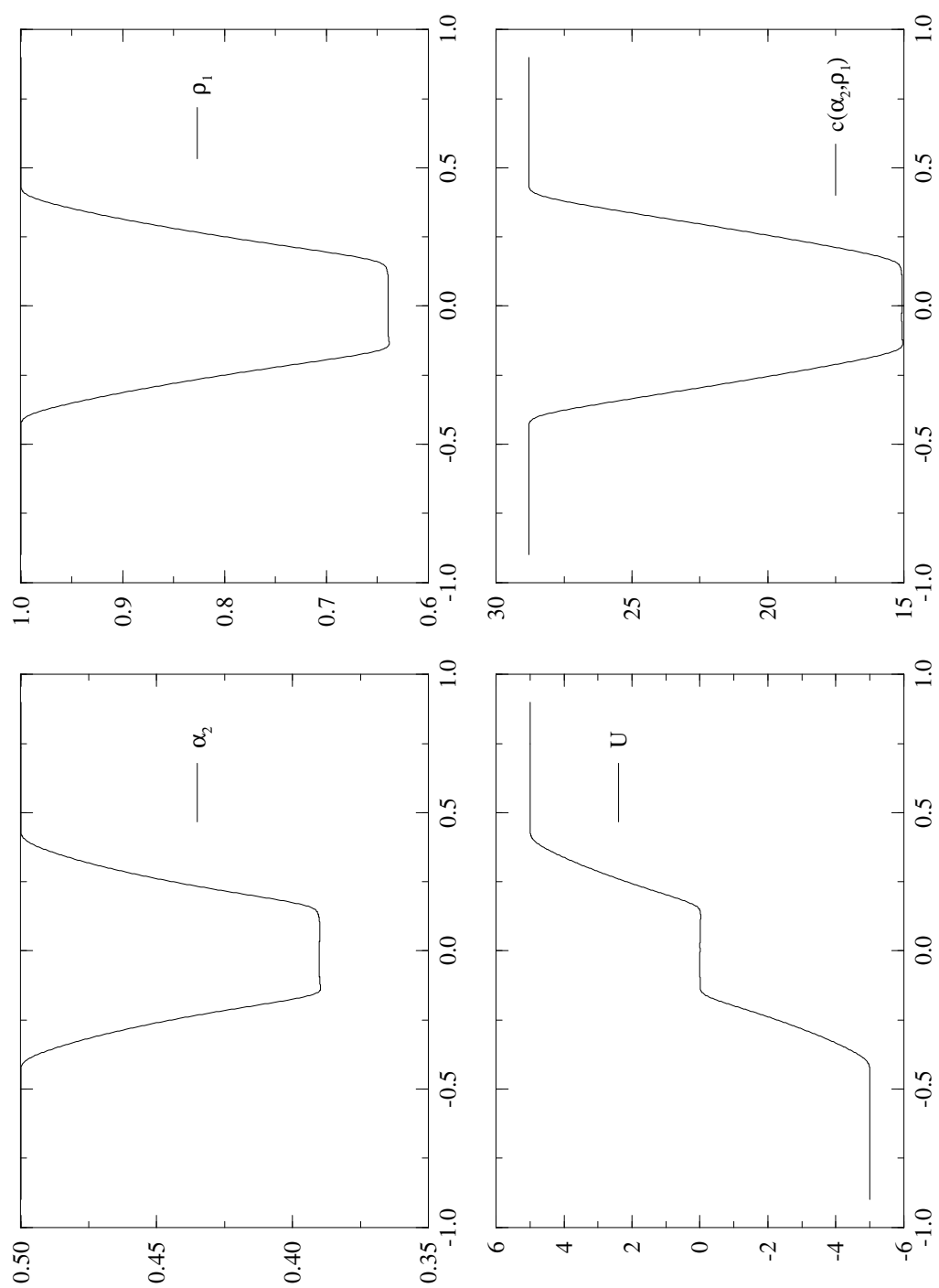


FIG. 5.6 -

Simulation, par le système à trois équations, du cas test de double détente symétrique diphasique de conditions initiales n° 2.

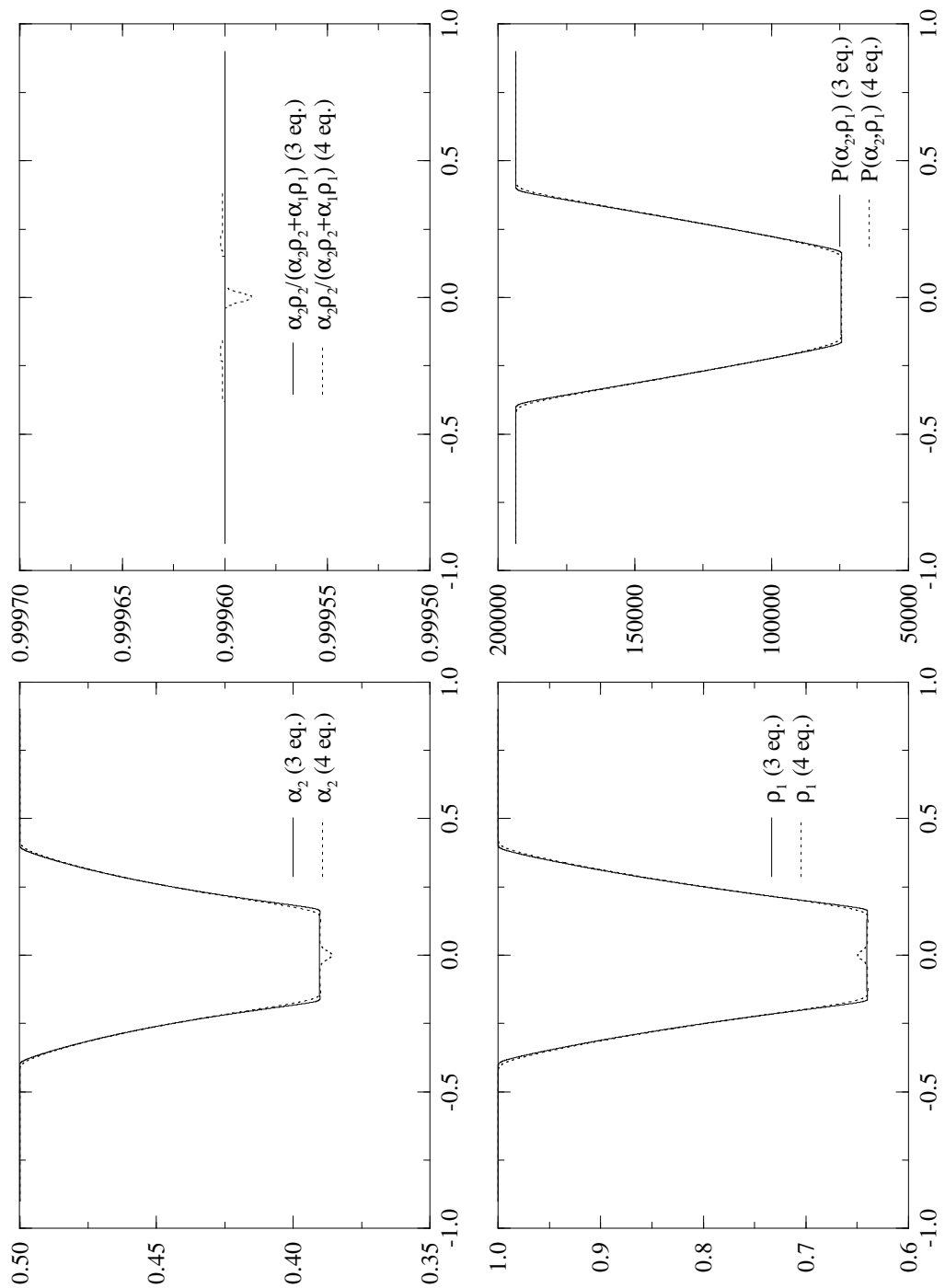


FIG. 5.7 -

Comparaison du modèle à deux fluides à quatre équations avec traînée et des particules de diamètre  $d_2 = 10^{-6}$  m et du système homogène à trois équations pour le cas test de double détente symétrique diphasique de conditions initiales n° 2.

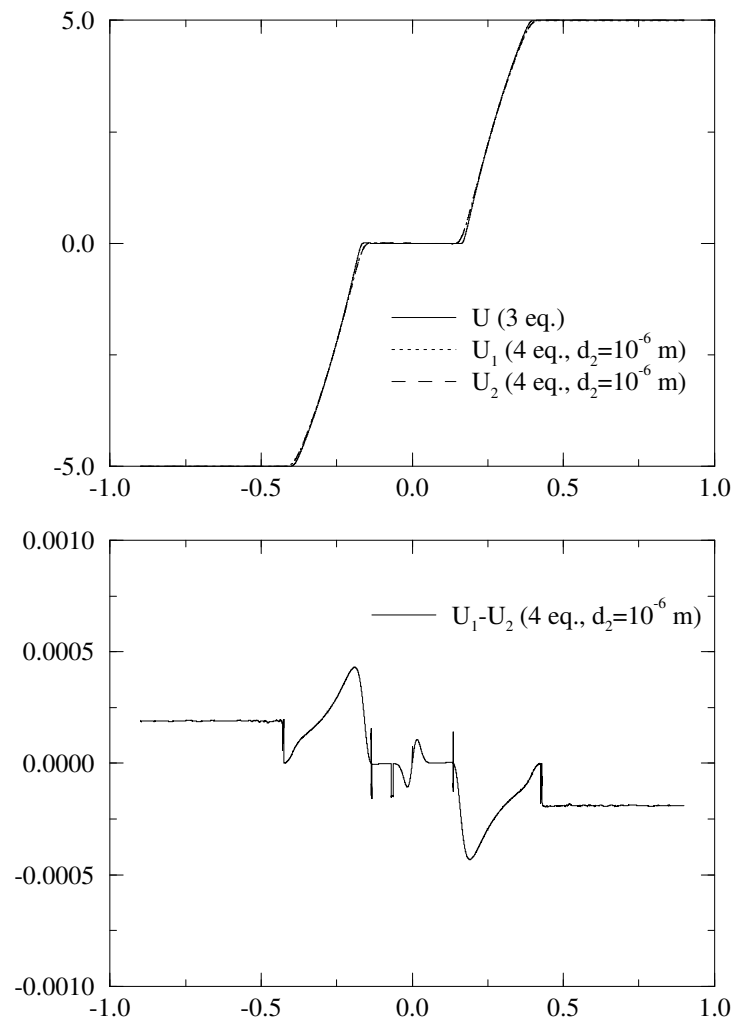


FIG. 5.8 -

*Comparaison des vitesses obtenues par le modèle à deux fluides à quatre équations avec traînée et des particules de diamètre  $d_2 = 10^{-6}$  m et du système homogène à trois équations pour le cas test de double détente symétrique diphasique de conditions initiales n° 2.*

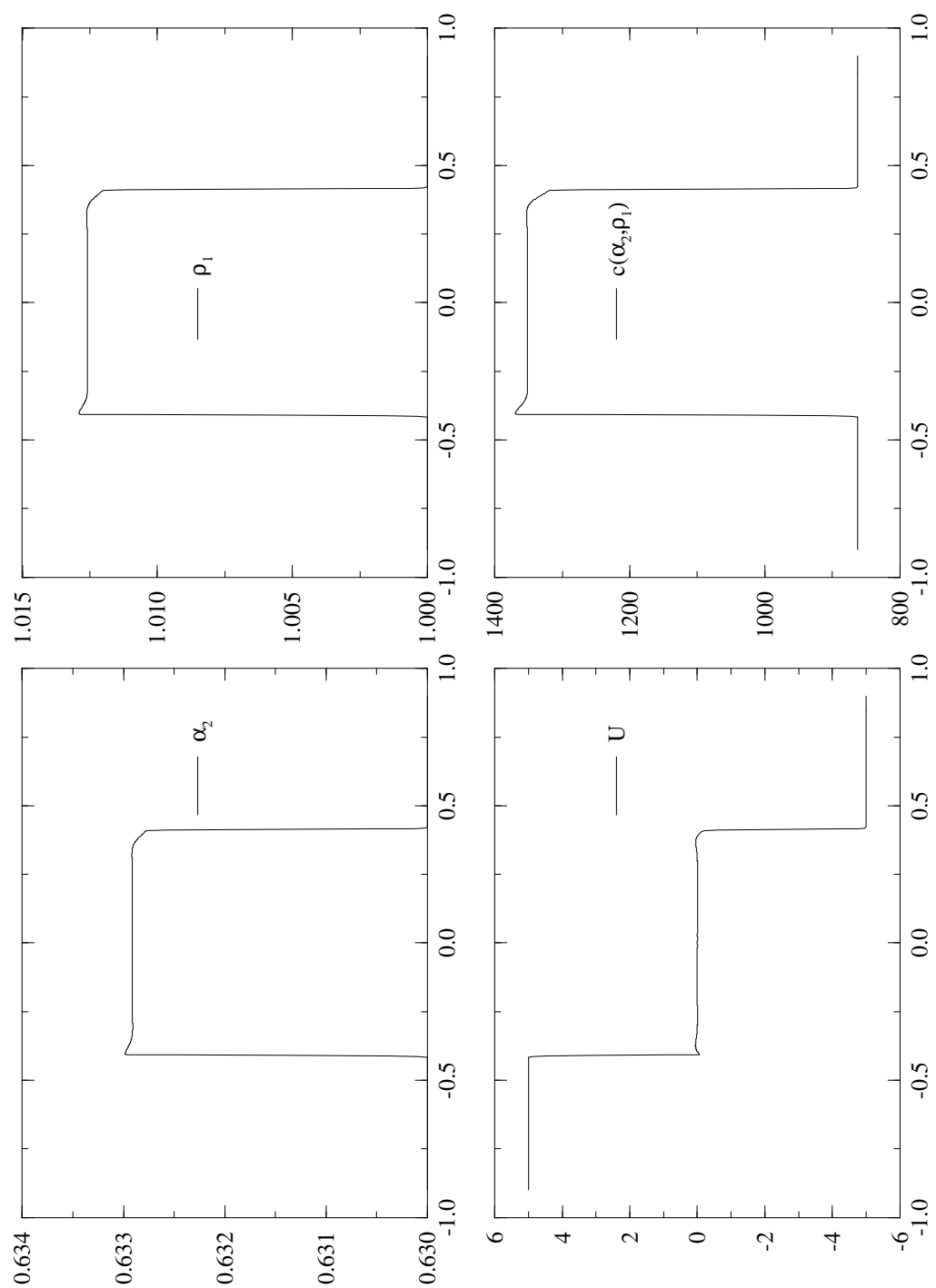


FIG. 5.9 –  
Simulation, par le système à trois équations, du cas test de double choc symétrique diphasique de conditions initiales n° 3.

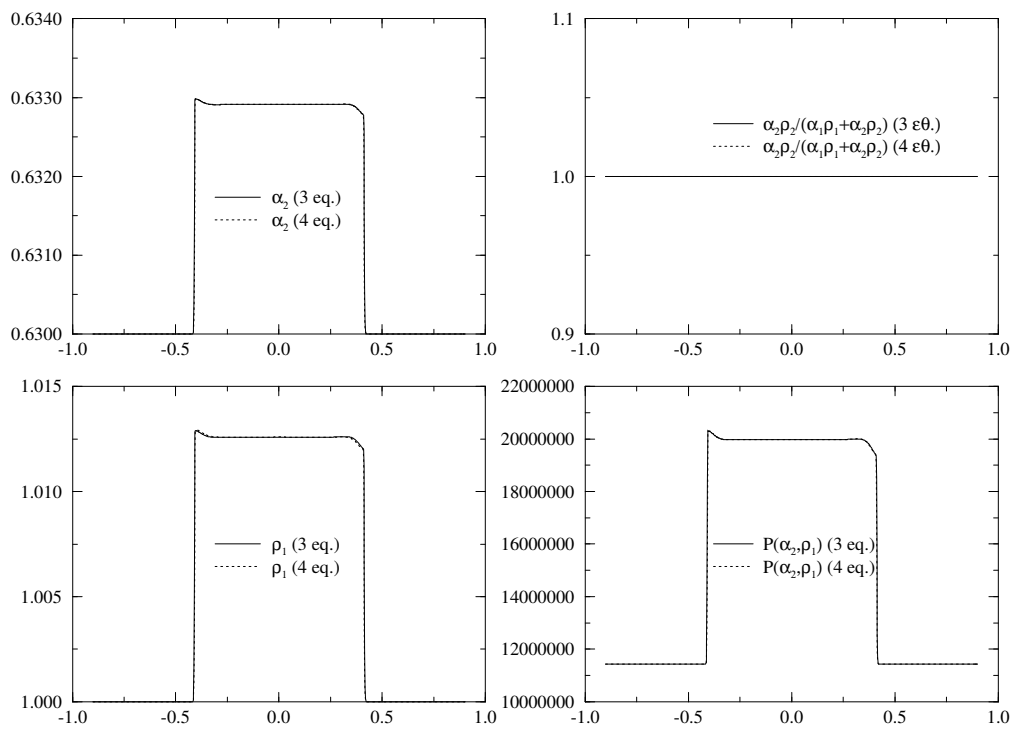


Fig. 5.10 -

Comparaison du modèle à deux fluides à quatre équations avec traité et des particules de diamètre  $d_2 = 10^{-6}$  m et du système homogène à trois équations pour le cas test de double choc symétrique diphasique de conditions initiales n° 3.



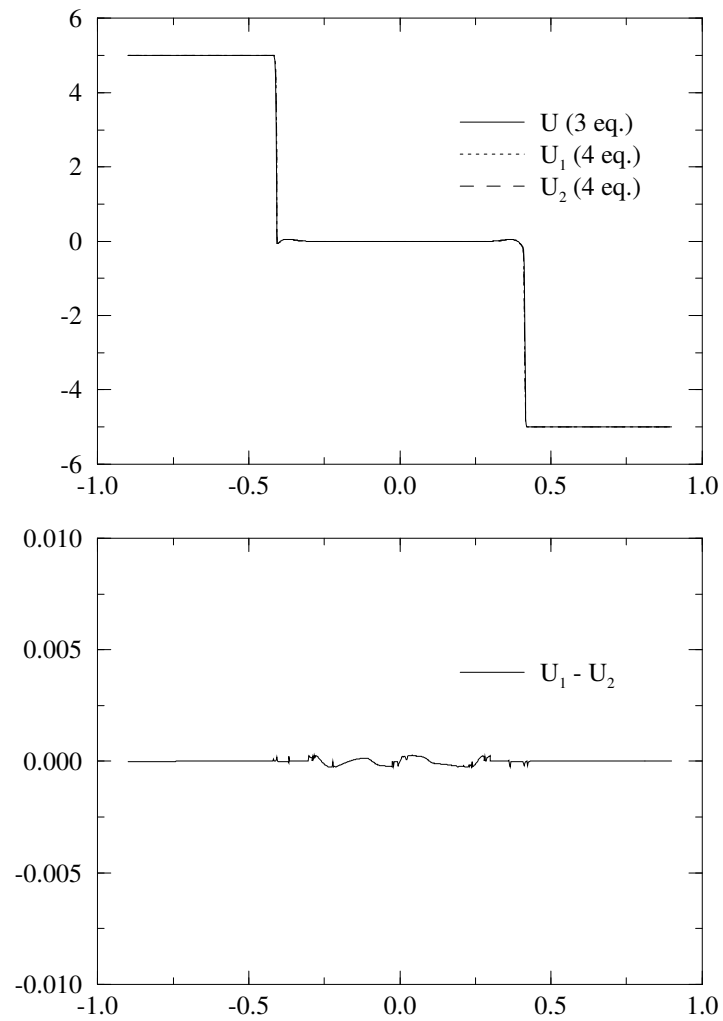


FIG. 5.11 -

Comparaison des vitesses obtenues par le modèle à deux fluides à quatre équations avec traînée et des particules de diamètre  $d_2 = 10^{-6}$  m et du système homogène à trois équations pour le cas test de double choc symétrique diphasique de conditions initiales n° 3.

la figure [5.12], on montre l'évolution du pas de temps au cours du régime transitoire qui se stabilise dès que l'écoulement a atteint un régime quasi stationnaire.

Sur la figure [5.13], on montre à l'état quasi stationnaire la répartition dans la tuyère des variables scalaires par phase  $\alpha_2$ ,  $\rho_1$  et de la densité  $\rho$  du mélange. Il est évident que les résultats sont très différents de ceux obtenus avec le modèle à deux fluides avec traînée (*Cf.* les figures [4.22] à [4.29]). Dans le cas présent, les évolutions de  $\alpha_2$  et  $\rho_1$  dans la tuyère sont identiques, l'écoulement diphasique tendant à se comporter comme un écoulement monophasique. Ceci est confirmé par la figure [5.14] d'après laquelle on constate que l'écoulement est subsonique dans le convergent, sonique<sup>1</sup> au niveau du col puis supersonique régulier dans le divergent. La même simulation à partir du modèle à deux fluides avec traînée (*Cf.* le paragraphe 4.6.4), qui a mis en évidence la présence de vitesses relatives localement très importantes, montre bien que le choix du modèle homogène à trois équations est inadéquat dans ce cas où, avec des particules de diamètre relativement grand, les effets bidimensionnels sont importants.

---

1. On définit le nombre de Mach à partir de la vitesse du mélange  $\underline{U}$  et de la célérité définie en 5.17,  $\text{Mach} = \frac{\|\underline{U}\|}{c}$

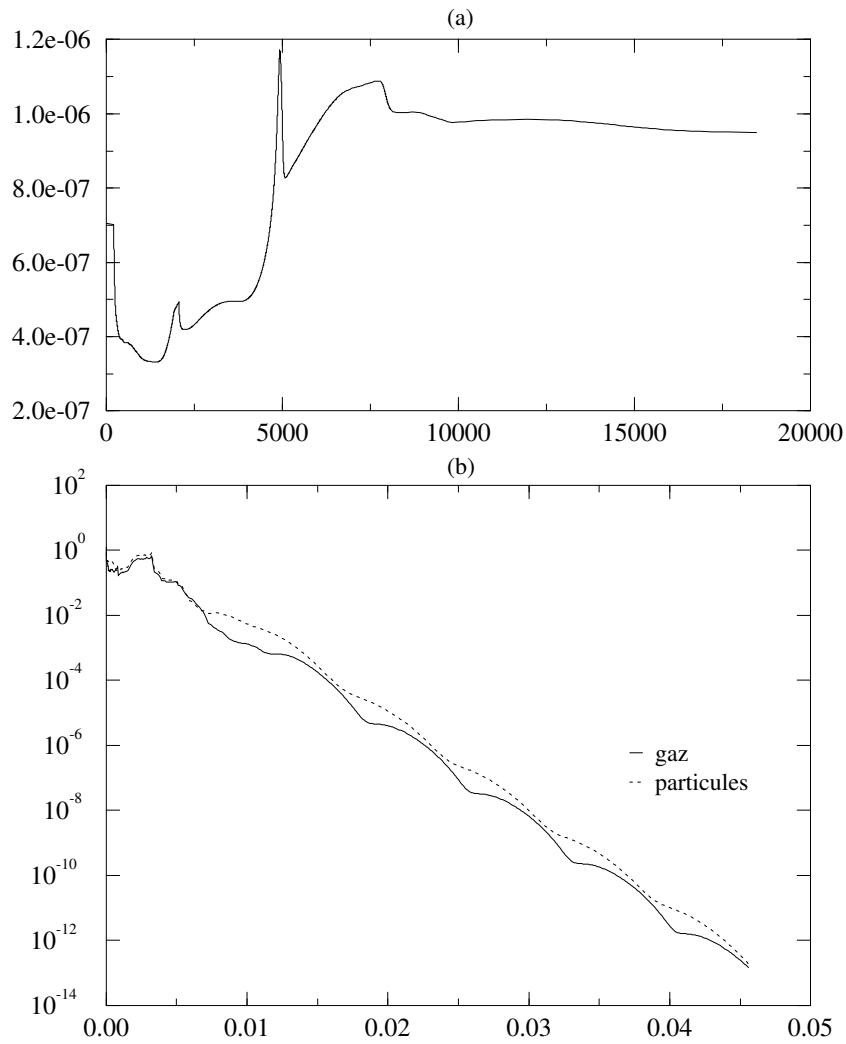


FIG. 5.12 -

*Simulation d'écoulement dans une tuyère: en fonction du nombre d'itérations, (a) évolution du pas de temps (en s.) en fonction du nombre d'itérations, (b) résidus de masse par phase en fonction du temps physique (en s.).*

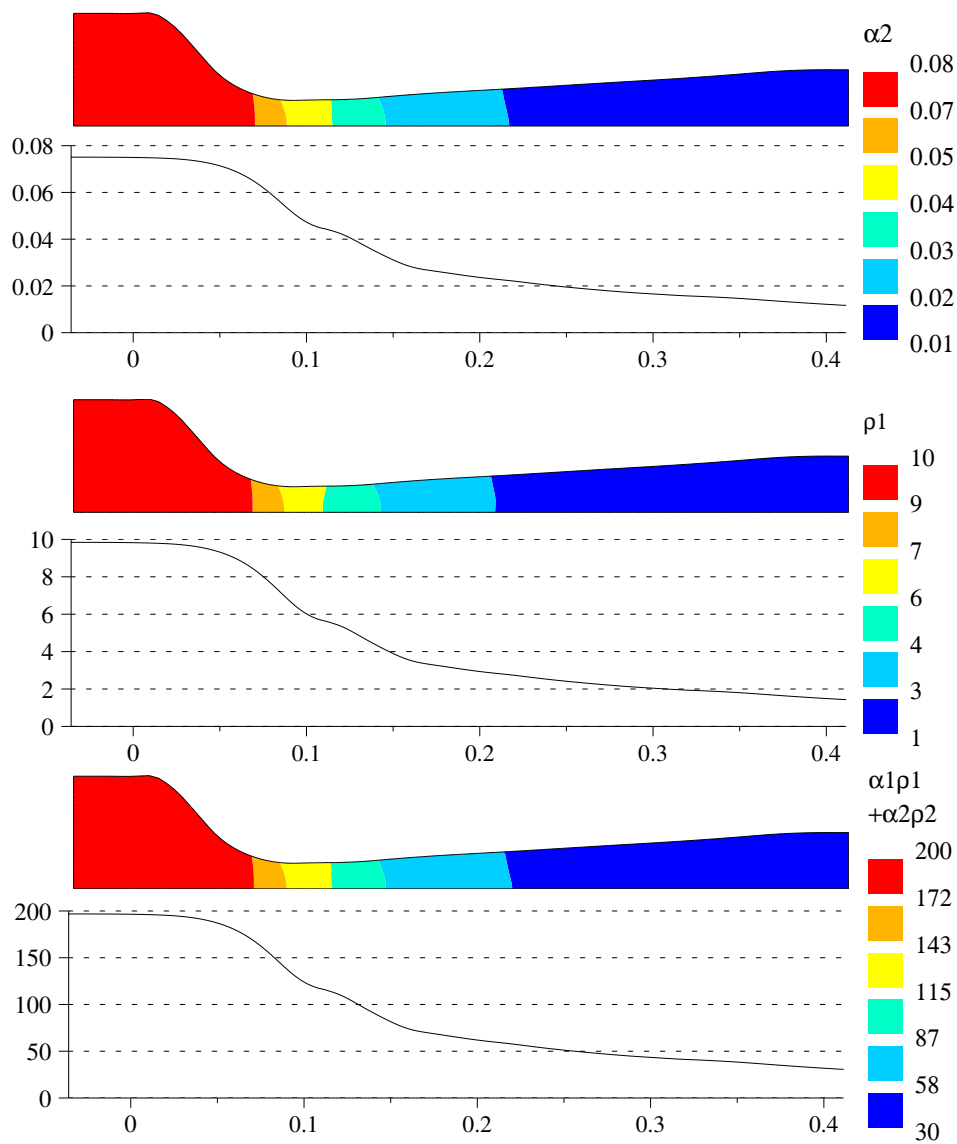


FIG. 5.13 – *Écoulement dans une tuyère : fraction volumique des particules, densité du gaz (en  $\text{kg.m}^{-3}$ ) et densité du mélange (en  $\text{kg.m}^{-3}$ ).*

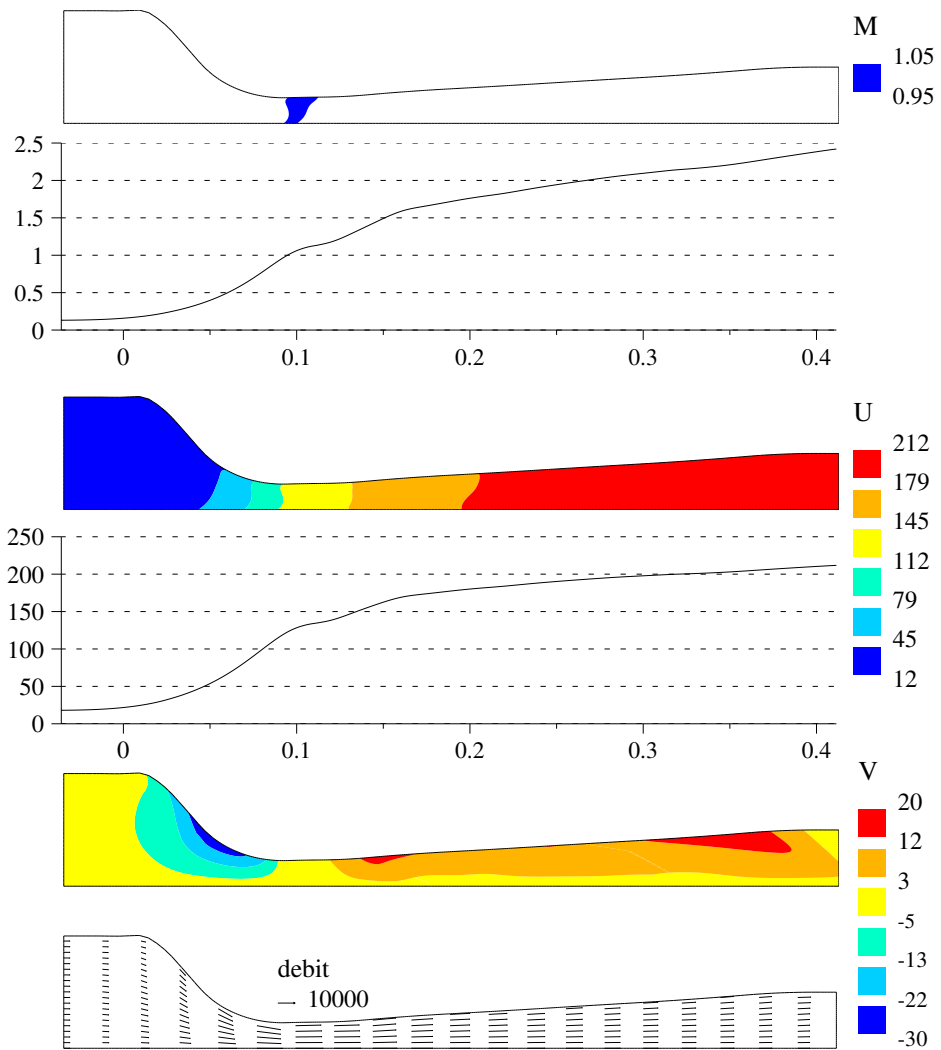


FIG. 5.14 – Ecoulement dans une tuyère : nombre de Mach, vitesse du mélange (en  $m.s^{-1}$ ) et débit du mélange (en  $kg.m^{-2}.s^{-1}$ ).



## Conclusion

Au cours de ce travail, on s'est intéressé à l'analyse et à la résolution numérique par des méthodes volumes finis sur maillage non structuré de modèles Eulériens d'écoulements diphasiques compressibles de type gaz-particules. Ces modèles ont pour principales caractéristiques d'être non conservatifs et conditionnellement hyperboliques, de sorte que :

- ils ne rentrent pas dans le cadre théorique classique des modèles hyperboliques issus de lois de conservation ;
- la présence de termes non conservatifs nécessite une redéfinition de la notion de solution faible du problème de Riemann (*Cf.* notamment les travaux de Le Floch [Lef88], [Lef92a], [Lef92b]) ;
- et les techniques volumes finis classiques de résolution des systèmes hyperboliques ne s'appliquent donc pas.

Il faut rajouter enfin que l'on ne sait pas démontrer que le modèle préserve le principe du maximum pour la variable fraction volumique.

Pour examiner ces différents problèmes, on a retenu un modèle à deux fluides à quatre équations (une équation de conservation de masse et une équation de quantité de mouvement par phase) pour la description des évolutions d'écoulements compressibles de type gaz-particules. Ce modèle simple est issu de ceux proposés dans [Bal93] et correspond à un modèle proposé dans [Gid93]. Il présente toutes les pathologies énumérées ci-dessus et permet de modéliser les écoulements denses comme dilués.

Afin de résoudre le problème lié à l'hyperbolicité conditionnelle, il a été proposé, de résoudre le modèle à deux fluides par une méthode à pas fractionnaires dont chacun des sous-pas est inconditionnellement hyperbolique et pour chacun desquels on sait résoudre le problème de Riemann monodimensionnel associé. On a montré, en outre, que la décomposition proposée préserve, de façon continue, le principe du maximum dans chacun des sous-pas en associant des relations de Rankine-Hugoniot approchées au système non conservatif. Parallèlement, on s'est intéressé à un modèle homogène à trois équations (une équation de conservation de masse par phase et une équation de conservation de quantité de mouvement du mélange) qui suppose la vitesse de glissement entre les deux phases nulle. Le système de convection associé est conservatif et inconditionnellement hyperbolique et l'on sait résoudre le problème de Riemann associé pour des valeurs initiales quelconques. En outre, on a démontré que le principe du maximum de la variable fraction volumique est préservé si le terme de prise en compte des collisions inter-particulaires est modélisé de façon adéquate. De façon plus précise, la préservation du principe

du maximum nécessite que la pression intergranulaire soit non bornée, i.e. qu'elle tende vers l'infini quand la fraction volumique des particules tend vers le taux de compactage maximum.

D'un point de vue numérique, les solveurs de Riemann exact ou approchés étant basés sur une formulation conservative des équations, l'utilisation de ces solveurs est impossible dans le cadre des modèles non conservatifs. Il a alors été proposé de résoudre le sous-système non conservatif par un schéma de type Roe qui traite de façon adéquate les termes non conservatifs. Ce schéma a également été testé dans le cadre de la turbulence compressible (*Cf.* [Her95a] et [Uhl97]). On a comparé ce schéma avec un schéma de Roe classique de résolution du système conservatif équivalent au sous-système non conservatif, en associant des relations de Rankine-Hugoniot approchées. Ces deux schémas donnent des résultats similaires. Comme il a déjà été constaté dans le cadre monophasique (*Cf.* [Buf93a]), la méthode à pas fractionnaires a l'avantage de faire disparaître le choc non entropique présent dans les champs vraiment non linéaires inhérent aux solveurs de Riemann exact ou approchés. Les tests effectués de type tube à choc dans une configuration bidimensionnelle montrent le bon comportement de l'algorithme, notamment dans les zones très denses où le principe du maximum est numériquement préservé. On a également présenté quelques simulations de lits fluidisés denses qui montrent la faisabilité de telles simulations par des algorithmes destinés aux écoulements compressibles. En outre, ces écoulements mettent en présence des régions très denses en particules et aucune violation du principe du maximum n'a été numériquement constatée.

Pour la résolution du modèle à trois équations, on a mis en œuvre, d'après une proposition récente (*Cf.* [Gal96b] et [Mas96]), un schéma basé sur la résolution de problèmes de Riemann locaux qui ne nécessite pas la vérification, souvent ardue, d'une propriété de type Roe. Ce schéma, adapté à la résolution de systèmes hyperboliques complexes, a été initialement mis en œuvre dans le cadre des écoulements diphasiques en conduites pétrolières (*Cf.* [Mas97]) et est actuellement testé dans le cadre des gaz réels (*Cf.* [Buf96]). On a constaté que dans certaines configurations avec une force de traînée très importante, le modèle à deux fluides à quatre équations tendait à se comporter comme le modèle à trois équations. Ceci nous conforte dans l'idée que la modélisation de la pression intergranulaire est prépondérante pour le respect du principe du maximum de la fraction volumique des particules. Il est cependant bien clair que le modèle à trois équations ne peut pas remplacer le modèle à deux fluides ; ceci est notamment mis en évidence par une simulation d'écoulement diphasique dans une tuyère où la vitesse relative et les effets bidimensionnels sont très importants.

D'un point de vue modélisation physique, en vue d'une comparaison des résultats avec des expériences, l'évolution naturelle de ce travail consiste en la considération d'un modèle à deux fluides à cinq équations qui comprend en plus une équation d'évolution de l'énergie turbulente des particules (*Cf.* [Bal93]). On note que l'algorithme proposé pour la résolution du modèle à deux fluides à quatre équations s'étend à la résolution du modèle à cinq équations car ces deux modèles présentent les mêmes caractéristiques à savoir qu'il sont tout deux non conservatifs conditionnellement hyperboliques avec le même domaine d'hyperbolicité et qu'ils admettent la même caractérisation entropique (*Cf.* [Her94a]). Une autre évolution souhaitable serait la prise en compte de phénomènes physiques tels que l'influence de la turbulence des particules sur l'écoulement porteur. Cette modélisation plus fine des collisions interparticulaires et leur influence sur l'écoulement porteur permettrait, entre autres, de poursuivre les simulations de lits fluidisés denses.

D'un point de vue numérique, il est souhaitable de poursuivre l'étude de schémas de résolution de systèmes hyperboliques non conservatifs. D'autres points restent à perfectionner, tels que la prise en compte des conditions aux limites dans une méthode à pas fractionnaires et le



traitement des termes sources. D'autre part, le problème, sur le sens à donner aux simulations qui mettent en évidence des états non hyperboliques, subsiste. La solution reste réalisable mais le calcul, localement, des valeurs propres montre que l'on peut alors se trouver dans le domaine elliptique. On rappelle que les simulations présentées ici ont été effectuées dans le cadre non visqueux mais l'on peut se demander si le problème reste mal posé en présence de termes sources et des termes visqueux<sup>2</sup>.

Enfin, dans des travaux récents de [Boi96], les auteurs proposent une discrétisation par des méthodes volumes finis sur maillage non structuré des équations de Navier-Stokes incompressibles couplées avec une équation de type convection-diffusion d'un scalaire passif. Ils montrent que cette discrétisation préserve numériquement le principe du maximum des grandeurs scalaires et une extension de cette méthode au cadre diphasique incompressible est actuellement envisagée.

---

2. voir à ce propos l'article de N. Bedjaoui et L. Sainsaulieu, Analysis of a non hyperbolic system modeling two-phase flows - Part 1 : the effects of diffusion and relaxation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1997, Vol. 20, p. 783-803



# Bibliographie

- [Bal93] G. BALZER, O. SIMONIN, Extension of Eulerian gas-solid flow modelling to dense fluidized bed prediction, *Proceedings of the 5th International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, Paris, 7-10 septembre 1993. (Rapport EDF HE44/93.13B)
- [Bal95] G. BALZER, A. BOËLLE, O. SIMONIN, Eulerian gas-solid flow modelling of dense fluidized bed, *Proceedings of the International Symposium of the Eng. Foundation Fluidization VIII*, Tours, 14-19 mai 1995. (Coll. notes internes DER 96NB00096)
- [Bar91] R. BARAILLE, *Développement de schémas numériques adaptés à l'hydrodynamique*, Thèse de doctorat de l'université de Bordeaux I, 1991.
- [Bar92] R. BARAILLE, G. BOURDIN, F. DUBOIS, A.Y. LE ROUX, Une version à pas fractionnaires du schéma de Godunov pour l'hydrodynamique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1992, t. 314, Série I, p. 147-152.
- [Ben95] S. BENHARBIT, A. CHALABI, J.P. VILA, Numerical viscosity and convergence of finite volume methods for conservation laws with boundary conditions, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1995, Vol. 32(3), p. 775-796.
- [Ber96] F. BEREUX, Zero-relaxation limit versus operator splitting for two-phase fluid flow computations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1996, Vol. 133, p. 93-124.
- [Boe95] A. BOËLLE, G. BALZER, O. SIMONIN, Second-order prediction of the particle-phase stress tensor of inelastic spheres in simple shear dense suspensions, *Proceedings of A.S.M.E., ASME FED*, 1995, Vol. 228, p. 9-18.
- [Boe97] A. BOËLLE, *Validation d'un modèle à deux fluides appliqué à la simulation des lits fluidisés denses*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, 1997.
- [Boi96] S. BOIVIN, J.M. HÉRARD, Résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode des volumes finis sur maillage non structuré, *Revue Européenne des Eléments Finis*, 1996, Vol. 5(4), p. 461-490.
- [Bru96] G. BRUN, J.M. HÉRARD, L. LEAL DE SOUSA, M. UHLMANN, Numerical modelling of turbulent compressible flows using second order models, *Proceedings of the first International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications*, Rouen, 15-18 juillet 1996, p. 337-346. (Rapport EDF HE41/96/037/A)
- [Buf93a] T. BUFFARD, *Analyse de quelques méthodes de volumes finis non structurés pour la résolution des équations d'Euler*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, 1993.
- [Buf93b] T. BUFFARD, J.M. HÉRARD, Un schéma conservatif à pas fractionnaires pour résoudre les équations d'Euler en maillage non structuré, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1993, t. 316, Série II, p. 575-582.

- [Buf96] T. BUFFARD, T. GALLOUËT, J.M. HÉRARD, *Schéma VFROE en variables caractéristiques - Principe de base et application aux gaz réels*, Rapport EDF HE41/96/41/A.
- [Buf97] T. BUFFARD, J.M. HÉRARD, Une méthode conservative à pas fractionnaires pour résoudre les équations d'Euler non isentropiques, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1997, Vol. 144(3-4), p. 199-225.
- [Buf97a] T. BUFFARD, T. GALLOUËT, J.M. HÉRARD, *Un schéma simple pour les équations de Saint-Venant*, Rapport EDF HE41/97/022/A.
- [Bur95] E. BURMAN, L. SAINSAULIEU, Numerical analysis of two operator splitting methods for an hyperbolic system of conservation laws with stiff relaxation terms, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1995, Vol. 128, p. 291-314.
- [Cha91] A. CHALABI, J.P. VILA, *Operator splitting, fractionnal steps method and entropy condition*, tiré du rapport EDF HE41/91.03A.
- [Cha92] S. CHAMPIER, T. GALLOUËT, Convergence d'un schéma décentré amont sur un maillage triangulaire pour un problème hyperbolique linéaire, *M<sup>2</sup>AN*, 1992, Vol. 26(7), p. 835-853.
- [Cha93] S. CHAMPIER, T. GALLOUËT, R. HERBIN, Convergence of an upstream finite volume scheme on a triangular mesh for a nonlinear hyperbolic equation, *Numer. Math.*, 1993, Vol. 66, p. 139-157.
- [Cha95] D. CHARGY, E. LARREY, A. MERLO, *Manuel théorique du logiciel N3S-MUSCL V3.2*, Rapport Simulog, 1995, RAP.SQ.95.CLS.032.
- [Com96a] L. COMBE, J. FABRE, J.M. HÉRARD, O. SIMONIN, On the numerical preservation of the maximum principle for gas-solid flows, *Proceedings of A.S.M.E. Fluids Engineering, Summer Meeting, San Diego, California, 7-11 juillet 1996*, ASME FED vol.236, p. 181-188. Rapport EDF HE41/96/036/A.
- [Com96b] L. COMBE, J.M. HÉRARD, Numerical modelling of compressible gas-solid two-phase flows, *Proceedings of the first International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications*, Rouen, France, 15-18 juillet 1996, Ed. Hermès, p. 273-282. (Rapport EDF HE41/96/038/A)
- [Com96c] L. COMBE, J.M. HÉRARD, *Principe du maximum pour un modèle diphasique gaz-solide à trois équations*, Rapport EDF HE41/96/045/A.
- [Com97] L. COMBE, J.M. HÉRARD, Un schéma volumes finis pour la simulation d'un modèle bi-fluide d'écoulements diphasiques compressibles gaz-solide, *Revue Européenne des Eléments Finis*, 1997, Vol.6(2), p.197-231.
- [Coq96] F. COQUEL, K. EL AMINE, E. GODLEWSKI, B. PERTHAME, P. RASCLE, *Numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows*, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI, R 96014.
- [Dal95] G. DALMASO, P. LE FLOCH, F. MURAT, Definition and weak stability of nonconservative products, *J. Math. Pures Appl.*, 1995, Vol. 74, p. 483-548.
- [Der92] A. DERVIEUX, J.A. DESIDERI, *Compressible flow solvers using unstructured grids*, Rapport INRIA, 1992, n 1732.
- [Dev94] F. DE VUYST, *Schémas non-conservatifs et schémas cinétiques pour la simulation numérique d'écoulements hypersoniques non visqueux en déséquilibre thermo-chimique*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, France, 1994.

- [Dip83] R.J. DiPERNA, Convergence of approximate solutions to conservation laws, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1983, Vol. 82, p. 27-70.
- [Dub87] F. DUBOIS, Boundary conditions and the Osher scheme for the Euler equations of gas dynamics, *CMAP*, 1987, n° 170.
- [Eco96] Ecole CEA-EDF-INRIA, Problèmes non linéaires appliqués, *Méthodes numériques pour les écoulements diphasiques*, INRIA Rocquencourt, novembre 1996.
- [Ein88] B. EINFELD, On Godunov-type methods for gas dynamics, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1988, Vol. 25(2), p. 294-318.
- [Ein91] B. EINFELD, C.D. MUNZ, P.L. ROE, B. SJÖGREEN, On Godunov-type methods near low densities, *J. Comput. Phys.*, 1991, Vol. 92, p. 273-295.
- [ElA97] K. EL AMINE, *Modélisation et analyse numérique des écoulements diphasiques en déséquilibre*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, France, 1997.
- [Eym97] R. EYMARD, T. GALLOUËT, R. HERBIN, *Finite volume methods*, à paraître dans Handbook of Numerical Analysis, Editions P.G. Ciarlet et J.L. Lions, North Holland.
- [Fab93] J. FABRE, *Écoulements polyphasiques*, Cours de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique d'Electronique d'Informatique et d'Hydraulique de Toulouse, 1993.
- [Fez89] L. FEZOU, S. LANTERI, B. LARROUTUROU, C. OLIVIER, *Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible en maillage triangulaire*, Rapport INRIA, 1989, n° 1033.
- [For95] A. FORESTIER, J.M. HÉRARD, X. LOUIS, *Exact or approximate Riemann solvers to compute a two-equation turbulent compressible model*, Rapport EDF HE41/95/047/A.
- [For97] A. FORESTIER, J.M. HÉRARD, X. LOUIS, Solveur de type Godunov pour simuler les écoulements turbulents compressibles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1997, t. 324, Série I, p. 919-926.
- [Gal92] T. GALLOUËT, *An introduction to finite volume methods*, Ecole CEA-EDF-INRIA, octobre 1992.
- [Gal96a] T. GALLOUËT, Rough schemes for complex hyperbolic systems, *Proceedings of the first International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications*, Rouen, 15-18 juillet 1996, Ed. Hermès, p. 5-14.
- [Gal96b] T. GALLOUËT, J.M. MASELLA, Un schéma de Godunov approché, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1996, t. 323, Série I, p. 77-84.
- [Gav93] S.L. GAVRILYUK, *A simple method of averaging in dispersed two-phase flows : application to bubbly liquids*, Preprint E.N.S. Lyon, 1993.
- [Gav96] S.L. GAVRILYUK, J. FABRE, Lagrangian coordinates for a drift-flux model of a gas-liquid mixture, *Int. J. of Multiphase Flow*, 1996, Vol. 22, p. 453-460.
- [Gid93] D. GIDASPOW, *Multiphase flow and fluidization*, Academic Press, 1993.
- [God59] S.K. GODUNOV, A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics, *Math. Sbornik*, 1959, 47(89), p. 271-300. (En Russe)
- [God92] E. GODLEWSKI, P.A. RAVIART, *Hyperbolic systems of conservation laws*, coll. SMAI n° 3/4, 1992, Ellipses.

- [Gol95] A. GOLDSTEIN, M. SHAPIRO, L. MOLDAVSKY, M. FICHMAN, Mechanics of collisional motion of granular materials. Part 2. Wave propagation through vibrofluidized granular layers, *J. Fluid Mech.*, 1995, Vol. 287, p. 349-382.
- [Gol96a] A. GOLDSTEIN, M. SHAPIRO, Mechanics of collisional motion of granular materials. Part 1. General hydrodynamic equations, *J. Fluid Mech.*, 1995, Vol. 282, p. 75-114.
- [Gol96b] A. GOLDSTEIN, M. SHAPIRO, C. GUTFINGER, Mechanics of collisional motion of granular materials. Part 3. Self-similar shock wave propagation, *J. Fluid Mech.*, 1996, Vol. 316, p. 29-51.
- [Har76] A. HARTEN, J.M. HYMAN, P.D. LAX, On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks, *Commun. Pure Appl. Math.*, 1976, Vol. XXIX, p. 297-322.
- [Har83a] A. HARTEN, On the symmetric form of systems of conservation laws with entropy, *J. Comput. Phys.*, 1983, Vol. 49, p. 151-164.
- [Har83b] A. HARTEN, P.D. LAX, B. VAN LEER, On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Rev.*, 1983, Vol. 25(1), p. 35-61.
- [Her94a] J.M. HÉRARD, *A fractional step method to investigate gas-solid flow*, Rapport EDF HE41/94.20A.
- [Her94b] J.M. HÉRARD, L. COMBE, *Un système diphasique bi-fluide pour la modélisation des écoulements gaz-solide*, Coll. notes internes DER 95NB00077.
- [Her94c] J.M. HÉRARD, A. FORESTIER, X. LOUIS, *A non strictly hyperbolic system to describe compressible turbulence*, Rapport EDF HE41/94.11A.
- [Her95a] J.M. HÉRARD, *Solveur de Riemann approché pour un système hyperbolique non conservatif issu de la turbulence compressible*, Rapport EDF HE41/95/009/A.
- [Her95b] R. HERBIN, An error estimate for a finite volume scheme for a diffusion-convection problem on a triangular mesh, *Numer. Meth. Part. Diff. Equations*, Vol. 11, 1995.
- [Hou92] T.Y. HOU, P. LE FLOCH, *Why nonconservative schemes converge to wrong solutions: error analysis*, Pub. Ecole Polytechnique-Centre de Mathématiques Appliquées, 1992, n° 255.
- [Ish75] M. ISHII, *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow*, Coll. de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, Eyrolles, 1975.
- [Kum93] A. KUMBARO, *Modélisation, analyse mathématique et numérique des modèles bifluides d'écoulement diphasique*, Thèse de doctorat de l'université Paris XI, France, 1993.
- [Kun91] D. KUNII, O. LEVENSPIEL, *Fluidization Engineering*, Butterworth-Heinemann series in chemical engineering, 1991.
- [Lar91] B. LARROUTUROU, How to preserve the mass fractions positivity when computing compressible multi-component flows, *J. Comput. Phys.*, 1991, Vol. 95(1), p. 59-84.
- [Lax57] P.D. LAX, Hyperbolic systems of conservation laws II, *Commun. Pure Appl. Math.*, 1957, Vol. X, p. 537-566.
- [Lax60] P.D. LAX, B. WENDROFF, Systems of conservation laws, *Commun. Pure Appl. Math.*, 1960, Vol. XIII, p. 217-237.
- [Lax72] P.D. LAX, Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of the shock waves, *C.B.M.S. Regional Conference Series in Applied Mathematics 11*, SIAM, Philadelphia, 1972.

- [Lea95] L. LEAL DE SOUSA, J.M. HÉRARD, *Comparaison de deux schémas de résolution d'un système hyperbolique non conservatif (Modèle k- $\epsilon$  compressible)*, Rapport EDF HE41/95/038/A.
- [Lea95] L. LEAL DE SOUSA, *Ouverture d'une soupape en fonctionnement vapeur, simulation numérique à l'aide du code N3S-MUSCL*, Rapport EDF HE41/96/0098/A.
- [Lef88] P. LE FLOCH, Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems under nonconservative form, *Commun. Partial Diff. Equations*, 1988, Vol. 13(6), p. 669-727.
- [Lef92a] P. LE FLOCH, *Convergence des méthodes volumes finis monotones pour les lois de conservation scalaires*, Ecole CEA-EDF-INRIA, octobre 1992.
- [Lef92b] P. LE FLOCH, T.P. LIU, *Existence theory for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form*, Pub. Ecole Polytechnique - Centre de Mathématiques Appliquées, 1992, n° 254.
- [Lou95] X. LOUIS, *Modélisation numérique de la turbulence compressible*, Thèse de doctorat de l'université de Paris VI, France, 1995.
- [Mas96] J.M. MASELLA, I. FAILLE, T. GALLOUËT, On a rough Godunov scheme, soumis à publication.
- [Mas97] J.M. MASELLA, *Quelques méthodes numériques pour les écoulements diphasiques bi-fluides en conduites pétrolières*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, France, 1997.
- [Mun94] C.D. MUNZ, A tracking method for gas flow into vacuum based on the vacuum Riemann problem, *Math. Methods Appl. Sciences*, 1994, Vol. 17, p. 597-612.
- [Osh84] S. OSHER, Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1984, Vol. 21(2), p. 217-235.
- [Rav92] P.A. RAVIART, L. SAINSAULIEU, Mathematical and numerical modelling of two-phase flows, *Proceedings of the 10th International Conference on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Nova Science Publisher, Glowinski ed., 1992, p. 119-132.
- [Rav95] P.A. RAVIART, L. SAINSAULIEU, A non conservative hyperbolic system modeling spray dynamics. Part 1: Solution of the Riemann problem, *Math. Models Methods Appl. Sciences*, 1995.
- [Roe81] P.L. ROE, Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, *J. Comput. Phys.*, 1981, Vol. 43, p. 357-372.
- [Sai91] L. SAINSAULIEU, Ondes progressives solutions de systèmes convectifs- diffusifs et systèmes hyperboliques non conservatifs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1991, t. 312, Série I, p. 491-494.
- [Sai95a] L. SAINSAULIEU, Finite volume approximation of two phase-fluid flows based on an approximate Roe-type Riemann solver, *J. Comput. Phys.*, 1995, Vol. 121, p. 1-28.
- [Sai95b] L. SAINSAULIEU, *Contribution à la modélisation mathématique et numérique des écoulements diphasiques constitués d'un nuage de particules dans un écoulement de gaz*, Thèse d'habilitation, 20/01/95, Paris VI, France.
- [Sau94] R. SAUREL, A. FORESTIER, D. VEYRET, J.C. LORAUD, A finite volume scheme for two-phase compressible flows, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 1994, Vol. 18, p. 803-819.
- [Sim91] O. SIMONIN, *Modélisation numérique des écoulements turbulents diphasiques à inclusions dispersées*, Ecole de Printemps de Mécanique des Fluides Numérique, Carcans-Maubuisson, 1995.

- [Sim92] O. SIMONIN, P.L. VIOLLET, *Introduction à la modélisation des écoulements constitués d'une phase continue contenant des inclusions dispersées en mouvement*, Cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1992.
- [Smo83] J. SMOLLER, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, 1983.
- [Soo90] S.L. SOO, *Multiphase Fluid Dynamics*, Science Press, 1990.
- [Swe84] P.K. SWEBY, High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1984.
- [Tor??] E.F. TORO, Riemann-problem-based techniques for computing reactive two-phase flows.
- [Tou89] I. TOUMI, *Etude du problème de Riemann et construction de schémas type Godunov multidimensionnels pour des modèles d'écoulements diphasiques*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, France, 1989.
- [Tou92] I. TOUMI, A weak formulation of Roe's approximate Riemann solver, *J. Comput. Phys.*, 1992, Vol. 102, p. 360-373.
- [Tou96] I. TOUMI, A. KUMBARO, An approximate linearized Riemann solver for a two-fluid model, *J. Comput. Phys.*, 1996, Vol. 124, p. 286-300.
- [Uhl97] M. UHLMANN, *Etude de modèles de fermeture au second ordre et contribution à la résolution numérique des écoulements turbulents compressibles*, Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon, 1997.
- [Van77] B. VAN LEER, Towards the ultimate conservative difference scheme. III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow, *J. Comput. Phys.*, 1977, Vol. 23, p. 263-275.
- [Vil86] J.P. VILA, *Sur la théorie de l'approximation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires. Applications aux équations de Saint-Venant et à la modélisation des avalanches de neige dense*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, France, 1986.



## Annexe A

# Schéma de Godunov pour la résolution du système de la dynamique des gaz isentropique

On présente ici un schéma de Godunov pour la résolution des équations de la dynamique des gaz isentropique monodimensionnelles. On rappelle que les propriétés et caractéristiques fondamentales de ce système sont décrites dans le paragraphe 2.8 où l'on construit également une paramétrisation des ondes résolventes (à savoir des ondes de détente ou de choc) du problème de Riemann monodimensionnel. On a montré alors que la résolution de ce dernier équivaut à chercher les zéros d'une fonction non linéaire (2.27) dépendant d'un seul paramètre et que, si les conditions initiales vérifient l'inégalité (2.28), ce problème scalaire admet une unique solution entropique sur l'espace des états admissibles. On choisit ici de résoudre chaque problème de Riemann local par une méthode de Newton. Les problèmes rencontrés dans la mise au point de la méthode de Newton sont évoqués. Plusieurs cas test sont présentés : tests de tube à choc avec forts rapports de pression, tests de double détente avec apparition du vide dans la solution et tests de double choc forts. La convergence obtenue sur un maillage à 500 éléments est satisfaisante.

## A.1 Mise en œuvre numérique du schéma de Godunov

### A.1.1 Schéma de Godunov

Les fondements et propriétés du schéma de Godunov sont décrits dans le paragraphe 3.3.

On rappelle tout d'abord les équations monodimensionnelles de la dynamique des gaz isentropique en variables conservatives  $\underline{W} = (\rho, \rho u)^t$  et coordonnées Eulériennes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}(\underline{W}) = \underline{0}, \quad \underline{W} = \underline{W}(x, t)$$

avec

$$\underline{F}(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P(\rho) \end{pmatrix}$$

On associe au système la loi d'état des gaz parfaits :

$$P(\rho) = K\rho^\gamma \tag{A.1}$$

et l'on définit la célérité associée :

$$c^2 = P'(\rho) = \gamma \frac{P(\rho)}{\rho}$$

On considère un maillage régulier 1D. Soient  $\Delta t$  et  $h$  les pas de discrétisation temporelle et spatiale. Chaque cellule  $C_j$  est représentée par l'intervalle  $[j h, (j + 1) h]$  et centrée sur le point  $x_j$  de coordonnée  $(j + 1/2)h$ . La solution  $\underline{W}_j^{n+1}$ , constante par maille  $C_j$ , est évaluée au temps  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  par le schéma suivant :

$$\underline{W}_j^{n+1} = \underline{W}_j^n - \frac{\Delta t}{h} \left( \underline{F}(\underline{W}_{j+1/2}) - \underline{F}(\underline{W}_{j-1/2}) \right)$$

où le flux analytique  $\underline{F}$  est calculé en la valeur  $\underline{W}_{j+1/2}$  à l'interface entre les cellules  $C_j$  et  $C_{j+1}$ , et en la valeur  $\underline{W}_{j-1/2}$  à l'interface entre les cellules  $C_{j-1}$  et  $C_j$ , ces valeurs s'obtenant en résolvant exactement le problème de Riemann associé à chaque interface.

Une itération du schéma de Godunov revient donc à résoudre un problème de Riemann par cellule, car, pour une cellule donnée  $C_j$ , le problème de Riemann à l'interface entre les cellules  $C_{j-1}$  et  $C_j$  a déjà été résolu lors de l'itération sur la cellule  $C_{j-1}$  (i.e.  $\underline{F}(\underline{W}_{j-1/2}) = -\underline{F}(\underline{W}_{(j-1)+1/2})$ ).

Enfin, le pas de temps est déterminé par la condition de Courant-Friedrichs-Lévy (3.7) de sorte que deux problèmes de Riemann voisins n'interagissent pas avant le temps  $t^n + \Delta t$ .

On explicite maintenant l'algorithme de résolution du problème de Riemann exact à l'interface entre deux cellules par une méthode de Newton.

### A.1.2 Algorithme de résolution d'un problème de Riemann exact

On veut résoudre le problème de Riemann suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}(\underline{W}) = \underline{0} \\ \underline{W}(x, t = 0) = \begin{cases} \underline{W}_L & \text{si } x \leq 0 \\ \underline{W}_R & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

où  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$  sont deux états admissibles constants.

On a établi dans le paragraphe 2.8 que la résolution exacte du problème de Riemann ci-dessus équivaut à la résolution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } z_1 \in \tilde{\Omega} \text{ tel que :} \\ u_R - u_L = \Psi(z_1) \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

$$\text{avec} \quad \Psi(z_1) = c_R h_2(z_2(z_1)) + c_L h_1(z_1) \quad \text{et} \quad z_2(z_1) = \frac{\rho_R}{\rho_L} z_1^{-1}.$$

$\tilde{\Omega}$  est l'espace des valeurs admissibles de  $z_1$ , il dépend de la configuration d'onde dans laquelle on se trouve (donc des conditions initiales). Les valeurs de la fonction  $z_2(z_1)$  doivent coïncider avec les valeurs admissibles de  $z_2$ . On déduit donc l'espace des états admissibles de  $z_1$  suivant :

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \begin{array}{ll} ]\rho_R/\rho_L, 1] & , \text{ en 1-détente/2-choc} \\ ]1, \rho_R/\rho_L] & , \text{ en 1-choc/2-détente} \\ ]\max(\rho_R/\rho_L, 1), +\infty[ & , \text{ en 1-choc/2-choc} \\ ]0, \min(\rho_R/\rho_L, 1)] & , \text{ en 1-détente/2-détente} \end{array} \right.$$

On va résoudre le problème (A.2) par une méthode de Newton.

$$\text{On pose} \quad f(z_1) = \Psi(z_1) - (u_R - u_L)$$

La résolution de (A.2) équivaut à la résolution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } z_1 \in \tilde{\Omega} \text{ tel que :} \\ f(z_1) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

On rappelle brièvement l'algorithme de la méthode de Newton :

$$\left| \begin{array}{l} (z_1)_0 \in \tilde{\Omega} \\ (z_1)_{n+1} = (z_1)_n - \frac{f((z_1)_n)}{f'((z_1)_n)}, \quad n = 0, 1, \dots \end{array} \right.$$

où  $(z_1)_n$  est l'itéré de Newton approximant la solution  $z_1$  cherchée.

La fonction  $f$  est  $C^1(\tilde{\Omega})$  et admet une solution unique dès lors que la condition (2.28) est vérifiée (i.e. si le vide n'apparaît pas).

Il faut débiter l'algorithme de Newton avec une initialisation  $(z_1)_0 \in \tilde{\Omega}$  convenable. Pour cela, on détermine, en début d'algorithme, la configuration d'onde dans laquelle on se trouve. Cette dernière dépend des conditions initiales considérées et se déduit des variations de la fonction  $\Psi$  (Cf. le paragraphe 2.8.2.3) :

$$\begin{aligned} \text{1-détente} &\iff z_1 \leq 1 \\ &\iff \frac{2}{\gamma-1}(c_R + c_L) > u_R - u_L \geq \Psi(z_1 = 1) = c_R h_2(\rho_R/\rho_L) \end{aligned}$$

Inversement :

$$\text{1-choc} \iff u_R - u_L < c_R h_2(\rho_R/\rho_L)$$

De façon analogue, on étudie les variations de la fonction  $\phi$  définie par :

$$\Phi(z_2) = c_R h_2(z_2) + c_L h_1(z_1(z_2))$$

qui s'obtient en éliminant  $z_1$  dans l'équation (2.26b) grâce à (2.26a).  $\Phi$  est croissante monotone et :

$$\begin{aligned} \lim_{z_2 \rightarrow +\infty} \Phi(z_2) &= \frac{2}{\gamma-1}(c_L + c_R) \\ \lim_{z_2 \rightarrow +0^+} \Phi(z_2) &= -\infty \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \text{2-détente} &\iff z_2 \geq 1 \\ &\iff \frac{2}{\gamma-1}(c_R + c_L) > u_R - u_L \geq \Phi(z_2 = 1) = c_L h_1(\rho_R/\rho_L) \end{aligned}$$

Inversement :

$$\text{2-choc} \iff u_R - u_L < c_L h_1(\rho_R/\rho_L)$$

**Remarque A.1** Dans la configuration d'onde 1-détente/2-détente, la solution de l'équation  $\Psi(z_1) = u_R - u_L$  est explicite et ne nécessite donc pas de résolution numérique. La valeur de  $\underline{W}$  à l'état constant intermédiaire est alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{u_R + u_L}{2} + \frac{c_L - c_R}{\gamma - 1} \\ \rho_1 &= \rho_L \left( -(u_R - u_L) \frac{\gamma - 1}{4c_L} + \frac{1}{2} \left( \frac{c_R}{c_L} + 1 \right) \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \end{aligned}$$

## A.2 Tests

Trois catégories de tests sont présentées : le tube à choc, la double détente et le double choc. Les simulations ci-après ont été réalisées avec un seuil de convergence de la méthode de Newton fixé à  $10^{-6}$  et une CFL de 0.5 :

$$\max_{C_j} |u_j^0 \pm c_j^0| \frac{\Delta t}{h} \leq \text{CFL} = 0.5$$

Les courbes présentées ci-après sont tracées dans le plan  $(x, V)$  où  $x \in [0, 1]$  et  $V \in \{\rho, \rho u, u, M = |u|/c\}$ . On compare les résultats des simulations avec la solution exacte, cette dernière, tracée en pointillés sur les courbes, est obtenue en résolvant exactement le problème de Riemann initial (i.e. une seule itération temporelle sur un maillage à deux éléments) puis en calculant la solution au temps final de la simulation.

### A.2.1 Cas test du tube à choc

Le test du tube à choc est un cas test du type «rupture de barrage». Il est utilisé notamment pour les phases d'initialisation de calculs. On présente une série de tests avec  $\gamma = 2$  (référence aux équations de Saint-Venant). On considère les conditions initiales suivantes :

$$u_L = u_R = 0 \text{ m.s}^{-1}, \quad \rho_L = 1 \text{ kg.m}^{-3}$$

et l'on va faire varier le rapport de pression  $P(\rho_L)/P(\rho_R)$  au moyen de  $\rho_R$ .

On commence par se placer dans les conditions du tube à choc de Sod, c'est à dire avec un rapport de pression égal à 10 ce qui implique  $\rho_R = 0.3 \text{ kg.m}^{-3}$ . Puis, afin d'étudier le comportement du solveur sur de forts rapports de pression, on diminue la valeur de  $\rho_R$  :

$\rho_R$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$P(\rho_L)/P(\rho_R)$
0.3	~ 10
10 <sup>-1</sup>	10 <sup>2</sup>
10 <sup>-3</sup>	10 <sup>6</sup>
10 <sup>-5</sup>	10 <sup>10</sup>
10 <sup>-7</sup>	10 <sup>14</sup>

On analyse alors les résultats obtenus à un temps physique final égal à 0.176 s. Pour le test subsonique ( $\rho_R = 0.3 \text{ kg.m}^{-3}$ , figure [A.1]), on constate, sur un maillage à 500 éléments, que l'état des variables à l'état constant  $\underline{W}_1$  est très bien approché. Les ondes de 1-détente et de 2-choc sont très bien prédites par rapport à la courbe théorique. On estime également bien la vitesse de choc  $\sigma$ . On retrouve sur le bord du domaine, i.e. aux abscisses pas encore perturbées par la discontinuité initiale, les états constants initiaux  $\underline{W}_L$  et  $\underline{W}_R$ . Afin d'examiner la convergence de l'algorithme, on effectue la même simulation au même temps physique sur un maillage à 2000 éléments. Les résultats sont présentés sur la figure [A.2]. La convergence est excellente sauf bien sûr au voisinage des discontinuités  $C^1$ .

On observe maintenant des simulations supersoniques à  $\rho_R = 10^{-1}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-5}$  et  $10^{-7}$  kg.m<sup>-3</sup> sur les figures [A.3] à [A.12]. On constate l'apparition d'un léger choc non entropique à l'abscisse correspondant à  $M = 1$  sur les maillages à 500 éléments (Cf. figures [A.3], [A.5], [A.8] et [A.10]). Les variables conservatives présentent une convergence correcte et l'état constant  $\underline{W}_1$  est bien estimé jusqu'à  $\rho_R = 10^{-3}$  kg.m<sup>-3</sup> puis devient visuellement inexistant pour  $\rho_R \leq 10^{-5}$  kg.m<sup>-3</sup>. On ne voit plus le 2-choc car il est devenu trop faible par rapport à notre échelle de visualisation. Cependant à  $\rho_R = 10^{-5}$  kg.m<sup>-3</sup>, figure [A.8], on constate que sur la variable débit le choc est décalé par rapport à la courbe théorique. Ceci signifie que la vitesse du 2-choc  $\sigma$  est mal estimée. Cette observation est beaucoup plus nette sur les variables non conservatives,  $u$  et  $M$ , car l'état constant  $\underline{W}_1$  reste visible à  $\rho_R = 10^{-5}$  ou  $10^{-7}$  kg.m<sup>-3</sup> (Cf. les figures [A.8] et [A.10]). On constate d'autre part que la vitesse simulée n'atteint pas la valeur plateau  $u_1$  théorique et que le choc n'est pas bien situé. Ceci est encore plus visible sur la courbe du nombre de Mach.

Les figures [A.4], [A.6], [A.9] et [A.11] représentent les mêmes tests repris sur un maillage à 2000 éléments et observés au même temps physique que précédemment. On remarque tout d'abord sur les figures [A.4] et [A.6] que le nombre de points contenus dans le 2-choc reste identique à celui du maillage à 500 éléments. On note ensuite l'atténuation du choc non entropique situé à  $M = 1$ . On observe enfin sur le test à  $\rho_R = 10^{-5}$  kg.m<sup>-3</sup>, figure [A.9], une meilleure convergence, c'est à dire une meilleure estimation de la vitesse du 2-choc et des valeurs de  $\underline{W}_1$ . Par contre la convergence du test à  $\rho_R = 10^{-7}$  kg.m<sup>-3</sup>, figure [A.11], bien qu'améliorée, n'est toujours pas très bonne ; mais le même test passé sur un maillage à 8000 éléments, figure [A.12], montre que l'on converge bien vers la solution théorique.

La figure [A.7] donne la courbe de convergence en norme  $L^1$  du schéma de Godunov dans le cas du tube à choc de Sod ( $\rho_R = 0.3$ ) et d'un tube à choc supersonique ( $\rho_R = 10^{-3}$ ). Les maillages considérés ont 250, 500, 2000, 4000 et 8000 nœuds. Les courbes représentent l'erreur normalisée  $E$  en norme  $L^1$  associée aux variables  $\rho$ ,  $u$  et  $\rho u$  en fonction du logarithme du pas de discrétisation spatiale,  $h = 1/\text{nombre de cellules}$ , du maillage considéré. Pour le tube à choc de Sod, on trouve que l'ordre de convergence atteint 0.9 pour la variable débit, alors que l'erreur est en  $O(h^{0.86})$  pour les variables  $\rho$  et  $u$ . Dans le cas du tube à choc supersonique, on veut vérifier que la mauvaise prédiction de la vitesse du choc ne détériore pas trop l'ordre de convergence du schéma. Dans ce cas, on obtient que l'erreur est en  $O(h^{0.8})$  pour la variable  $\rho$ ,  $O(h^{0.7})$  pour la variable  $u$  et  $O(h^{0.76})$  pour la variable débit.

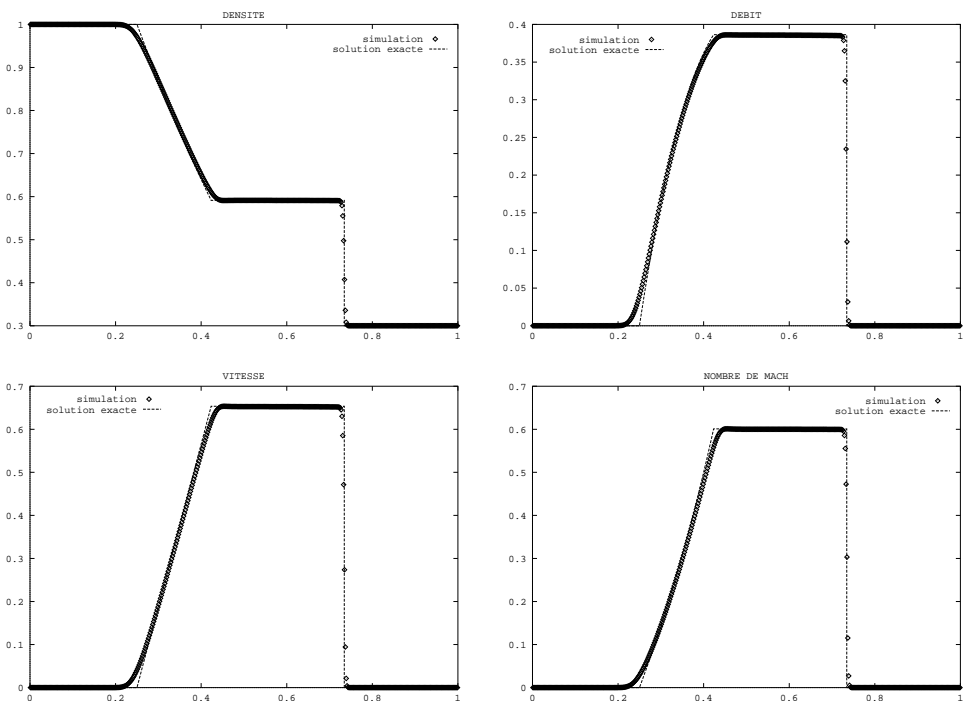


FIG. A.1 - Type à choc :  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 0.3 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $u_L = u_R = 0 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 500 mailles, CFL=0.5

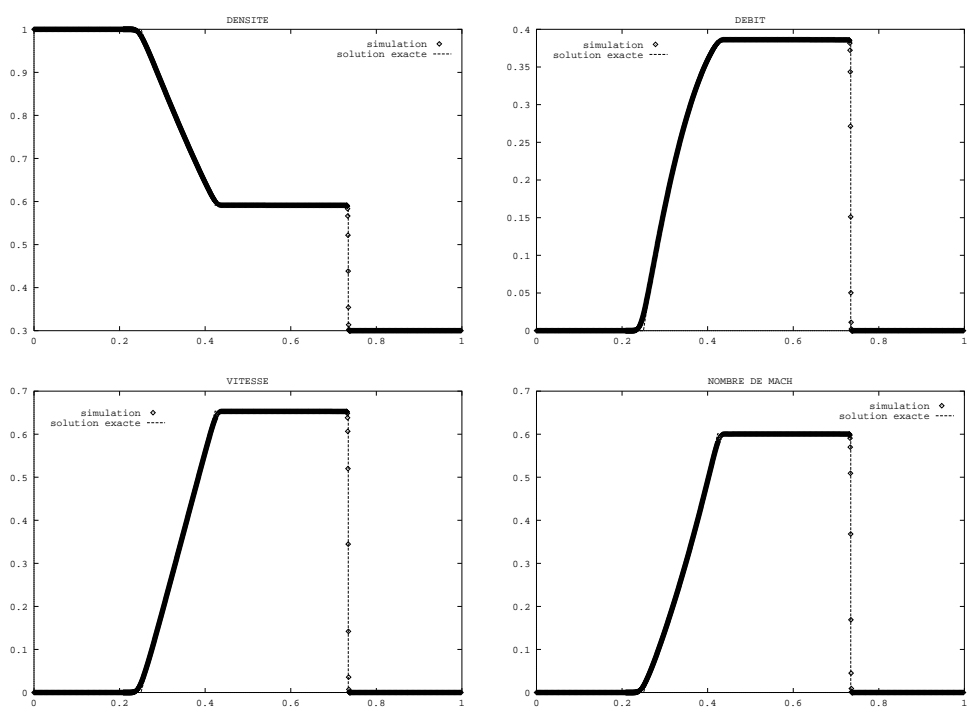


FIG. A.2 - Type à choc:  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 0.3 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $u_L = u_R = 0 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 2000 mailles, CFL=0.5.



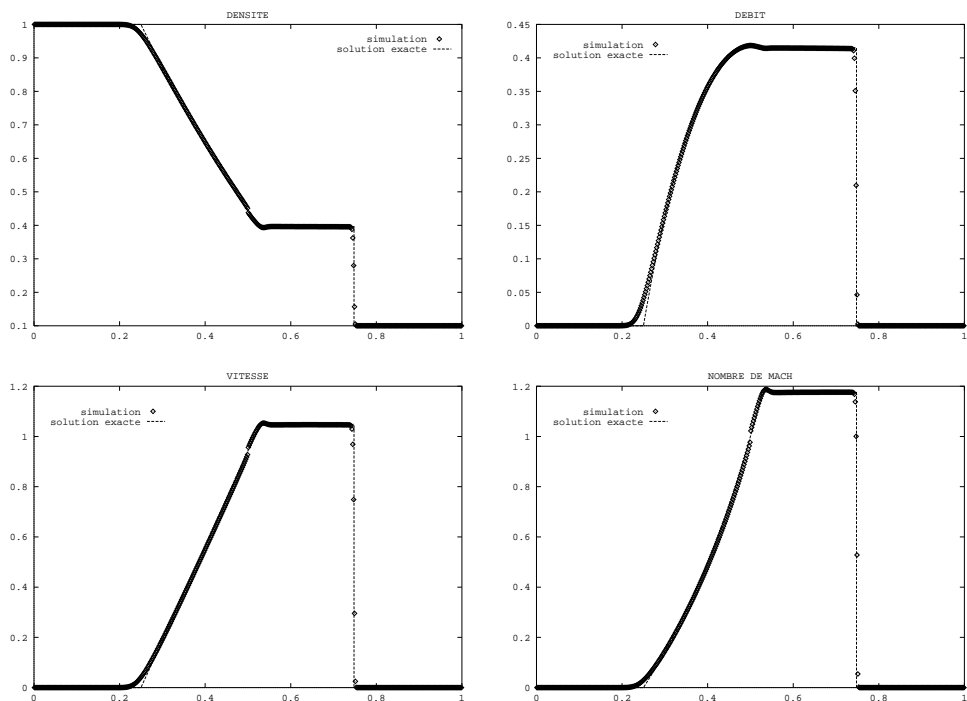


FIG. A.3 - Type de choc :  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 10^{-1} \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $u_L = u_R = 0 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 500 mailles, CFL=0.5

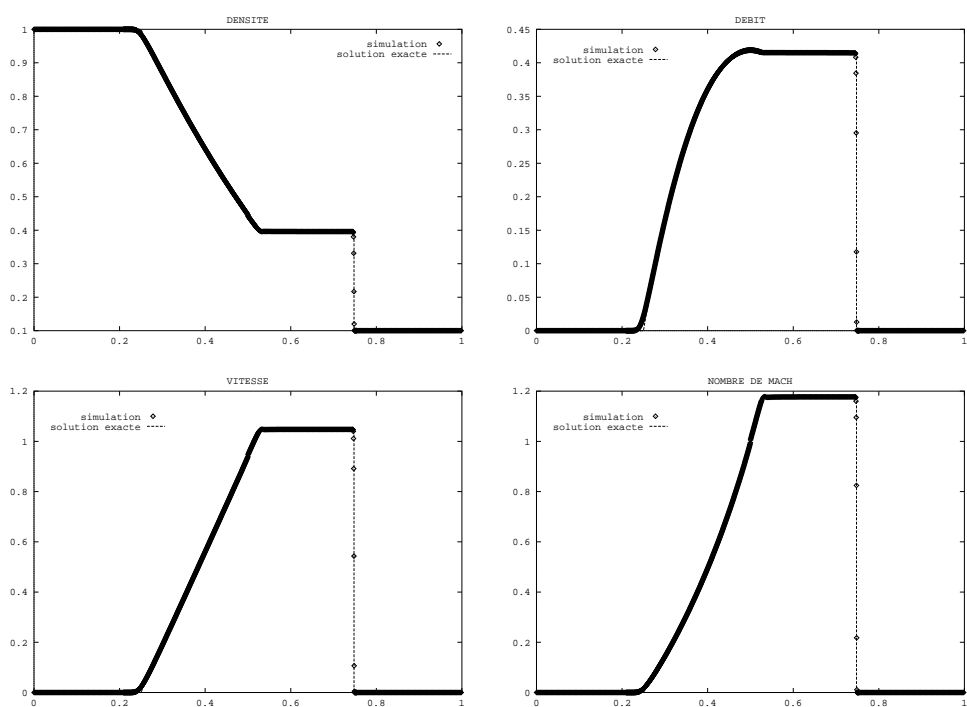


FIG. A.4 - Type à choc :  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 10^{-1} \text{ kg m}^{-3}$ ,  $u_L = u_R = 0 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 2000 mailles, CFL=0.5.

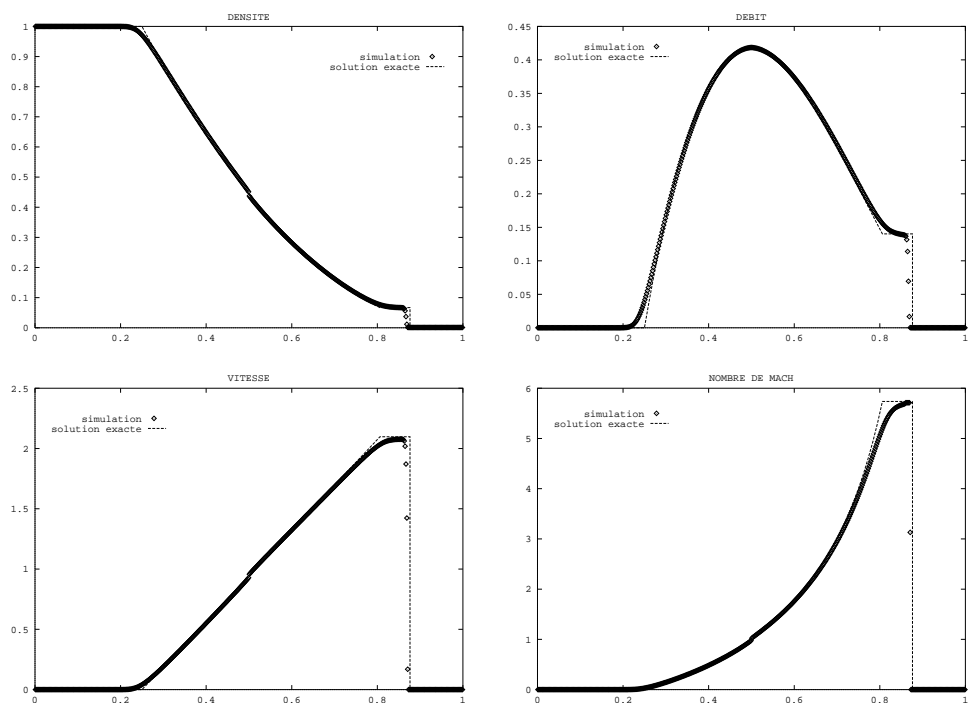


FIG. A.5 - Tube à choc :  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $u_L = u_R = 0 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 500 mailles, CFL=0.5

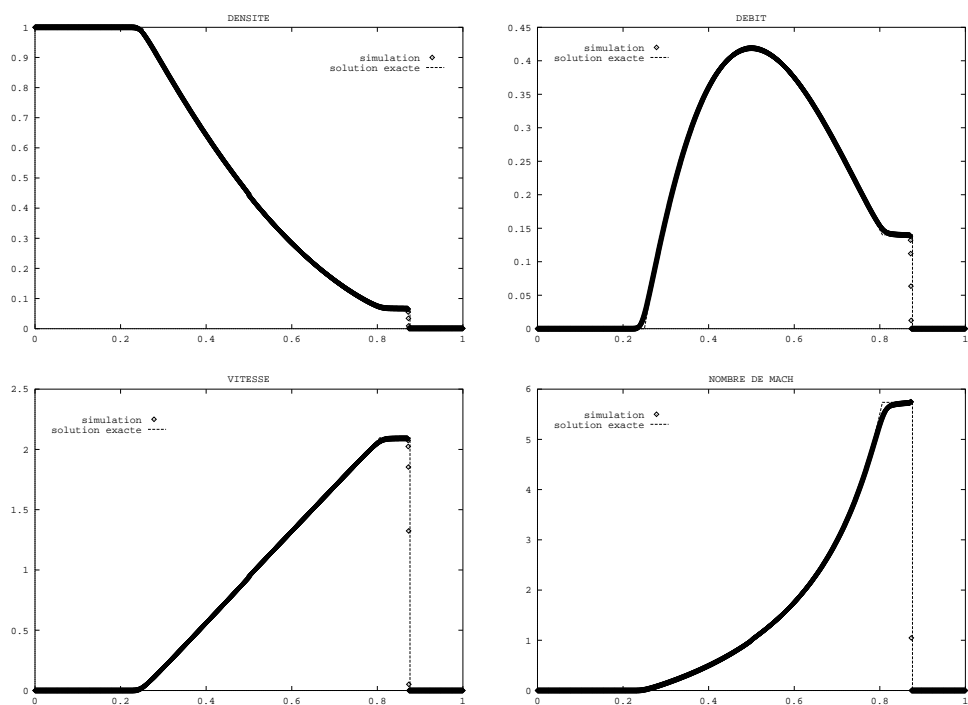


FIG. A.6 - Type à choc :  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$ ,  $u_L = u_R = 0 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 2000 mailles, CFL=0.5

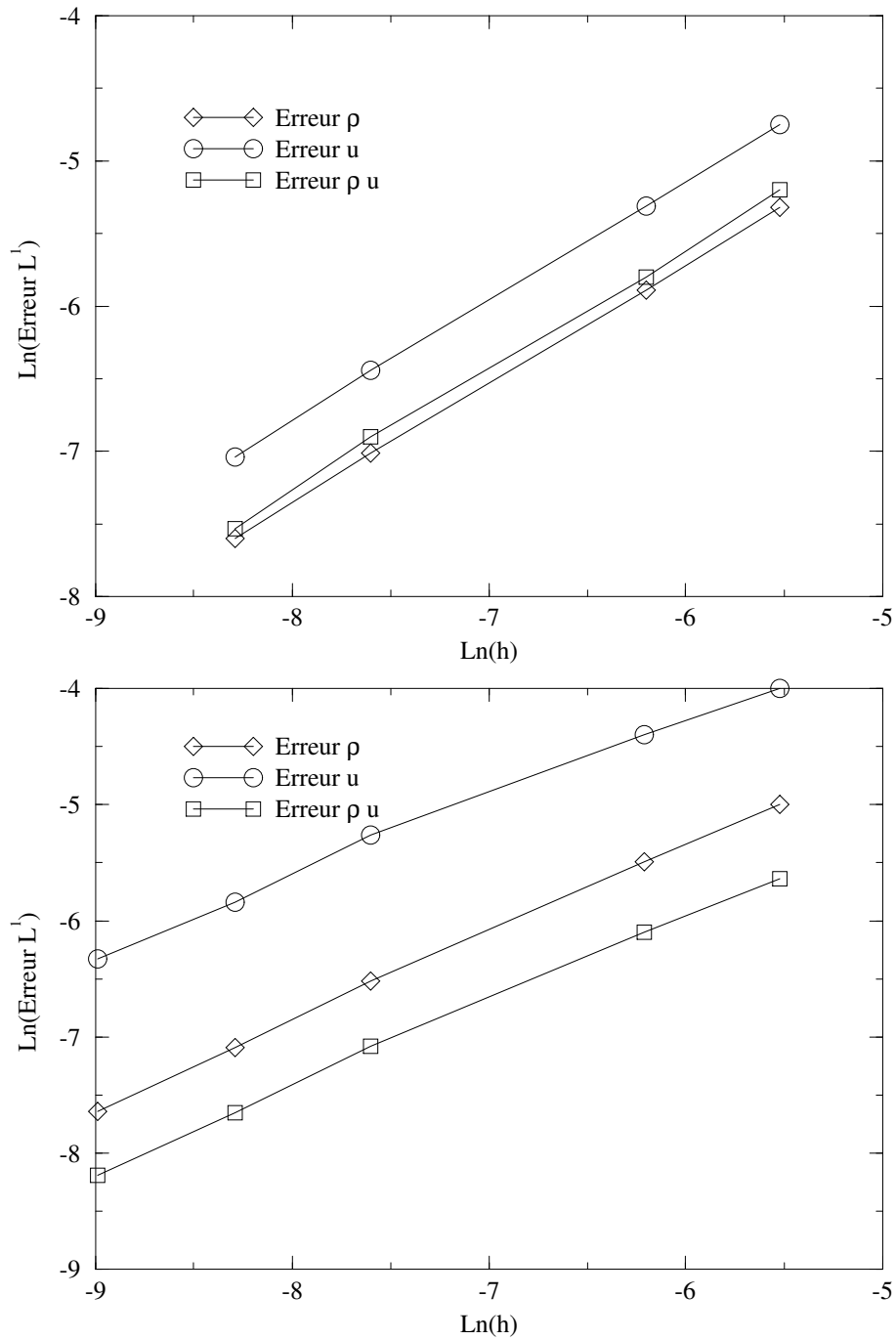


FIG. A.7 - D'après les simulations du système de la dynamique des gaz isentropique par un schéma de Godunov, étude de la convergence  $L^1$  dans le cas du tube à choc de Sod (en haut) et le cas d'un tube à choc supersonique (conditions initiales:  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $u_L = u_R = 0 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ ).

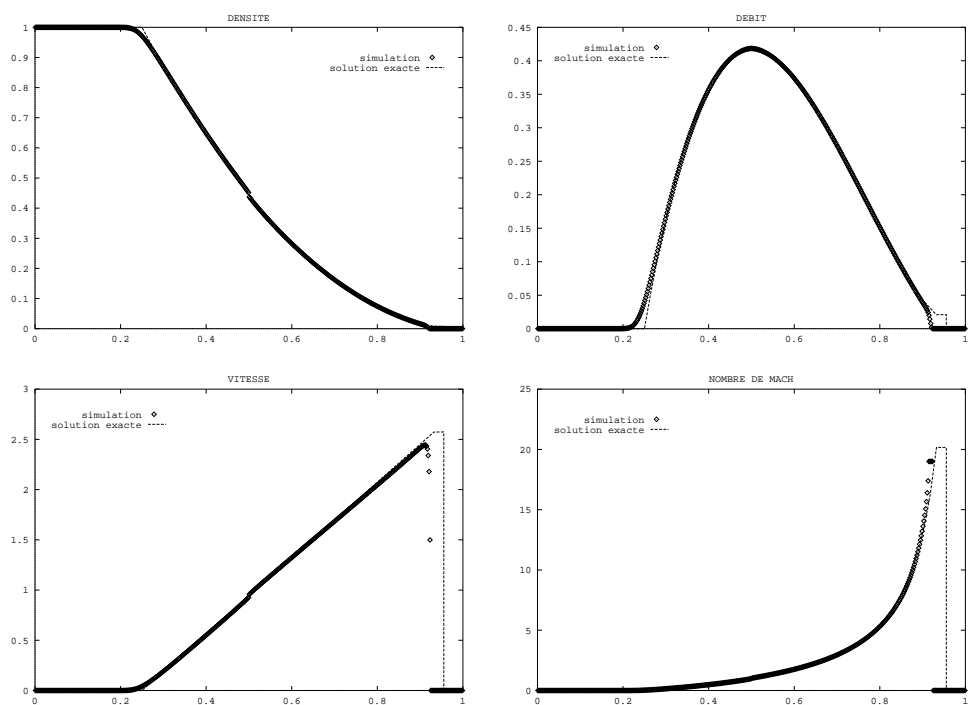


FIG. A.8 – Type à choc :  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 10^{-5} \text{ kg m}^{-3}$ ,  $u_L = u_R = 0 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 500 mailles, CFL=0.5

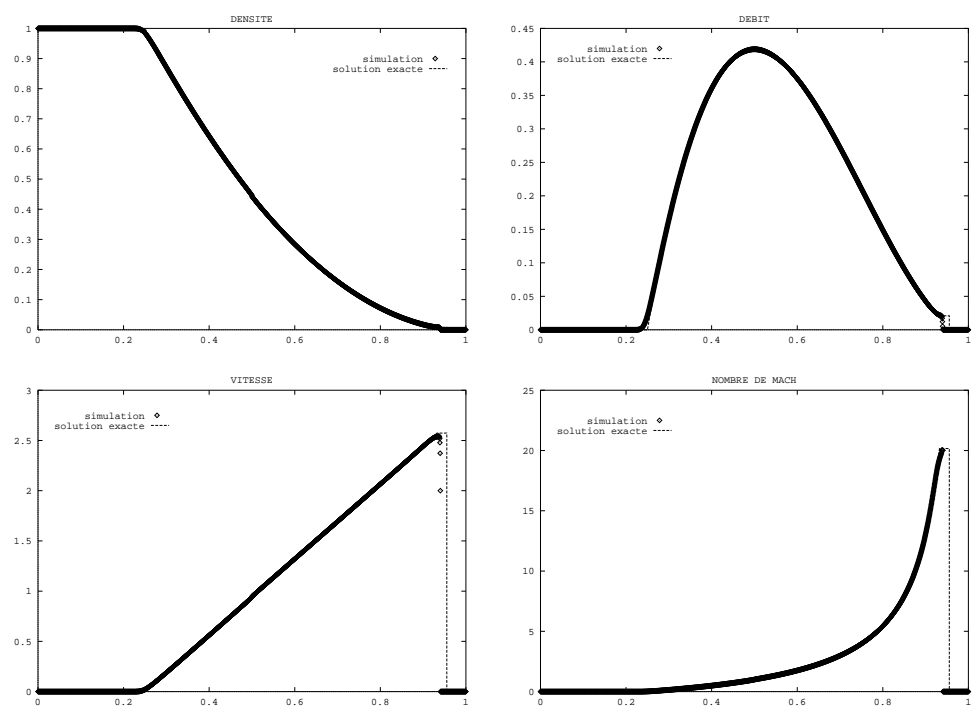


FIG. A.9 - Tube à choc :  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 10^{-5} \text{ kg m}^{-3}$ ,  $u_L = u_R = 0 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 2000 mailles, CFL=0.5

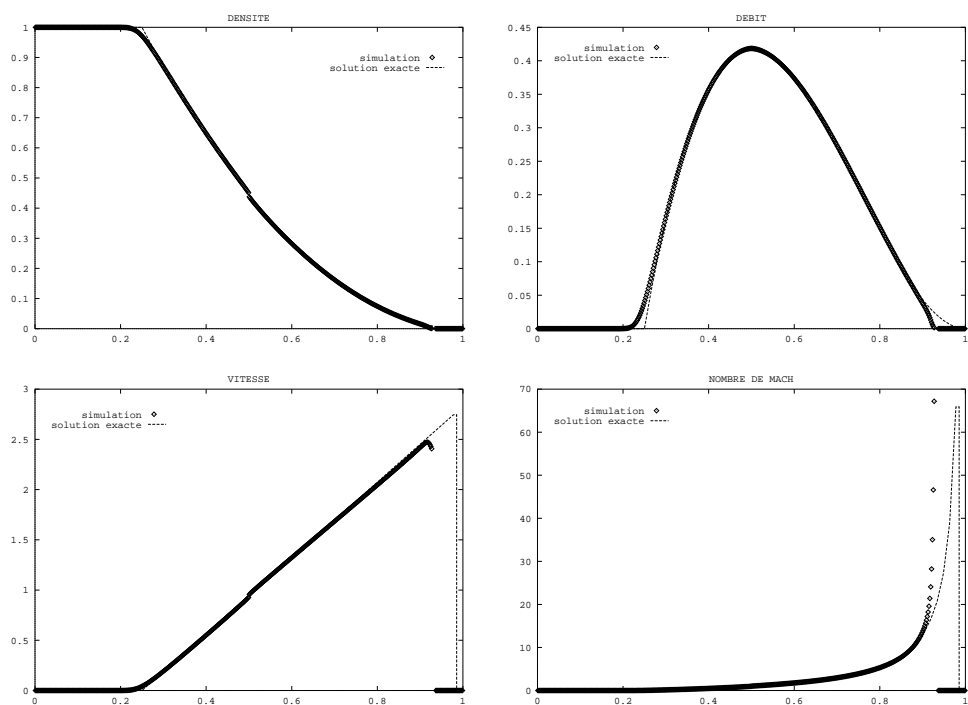


FIG. A.10 - Tube à choc :  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 10^{-7} \text{ kg m}^{-3}$ ,  $u_L = u_R = 0 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 500 mailles, CFL=0.5



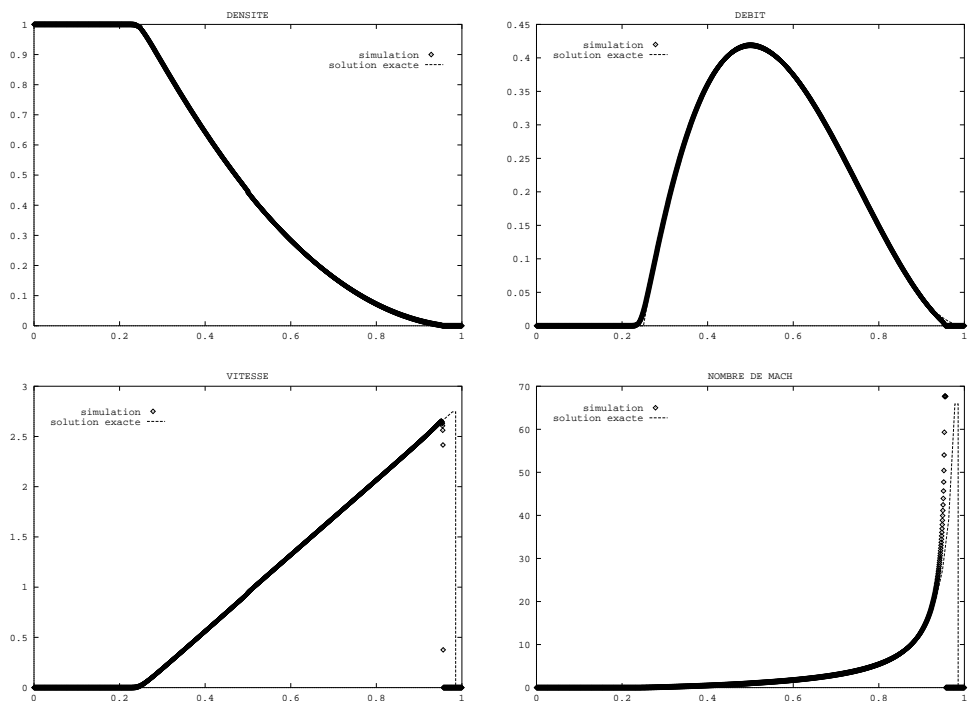


FIG. A.11 - Tube à choc :  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 10^{-7}$   $\text{kg.m}^{-3}$ ,  $u_L = u_R = 0$   $\text{m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 2000 mailles, CFL=0.5

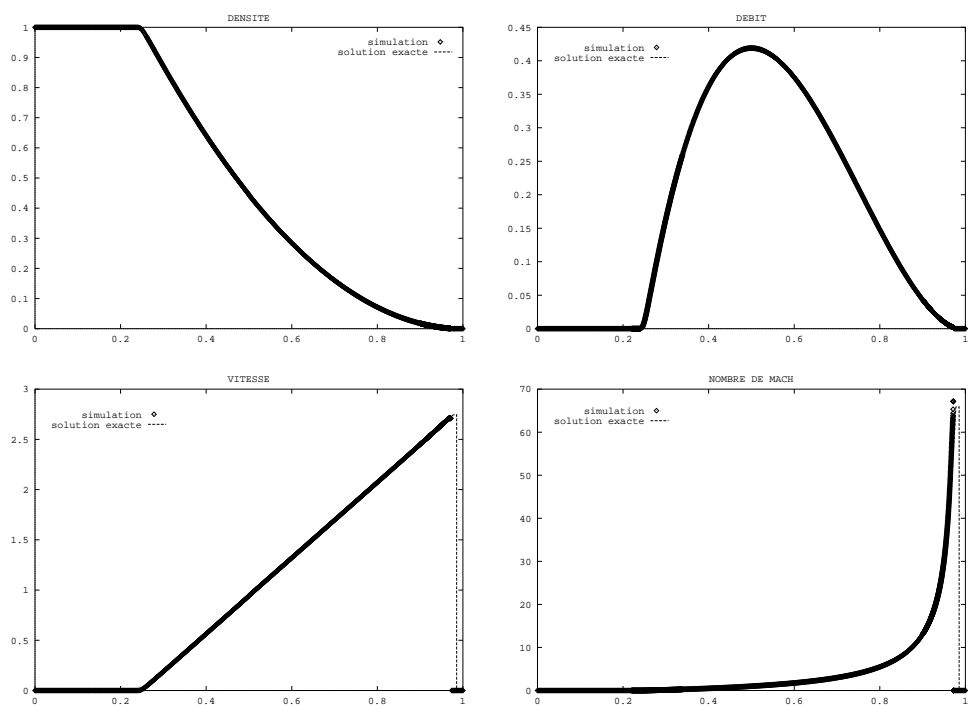


FIG. A.12 - Tube à choc :  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 10^{-7} \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $u_L = u_R = 0 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 8000 mailles, CFL=0.5

### A.2.2 Cas test de la double détente

On regarde maintenant le comportement du schéma dans la configuration 1-détente/2-détente qui permet de simuler des zones de dépressurisation. Les tests de double détente présentés ici sont pour  $\gamma = 2$  et symétriques :

$$\rho_L = \rho_R, \quad u_L < 0, \quad u_L = -u_R$$

La figure [A.13] présente un historique à trois pas de temps différents (temps final égal à 0.026 s.), sur un maillage à 500 éléments, du test :  $\rho_L = 10 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $u_L = -5 \text{ m.s}^{-1}$ . On retrouve bien les deux ondes de détente mais on constate qu'il faut laisser les ondes se développer suffisamment avant d'avoir un état intermédiaire  $\underline{W}_1$  à peu près constant. Sur la figure [A.14], on constate que la convergence des ondes de détente est très satisfaisante mais que la convergence vers  $\rho_1$  se fait par valeurs inférieures ( $\rho_1^{\text{théorique}} = 1.94 \text{ kg.m}^{-3}$ ). On remarque une légère perte de monotonie de la variable  $u$  au voisinage de la valeur nulle, c'est à dire au voisinage de la connexion des ondes de détente avec l'état constant  $\underline{W}_1$ . De façon plus importante les valeurs du nombre de Mach associées à l'état  $\underline{W}_1$  ne forment pas un état constant. La figure [A.15] montre le même test au même temps physique sur un maillage à 2000 éléments. La convergence sur les variables  $\rho$ ,  $\rho u$  et  $u$  est excellente. L'oscillation du nombre de Mach sur l'état  $\underline{W}_1$  est toujours visible mais est très atténuée. La figure [A.16] sur un maillage à 8000 éléments présente un état  $\underline{W}_1$  à peu près constant.

La figure [A.17] donne la courbe de convergence en norme  $L^1$  du schéma de Godunov dans le cas de la double détente symétrique. Les maillages considérés ont 250, 500, 2000, 4000 et 8000 nœuds. Les courbes représentent l'erreur normalisée  $E$  en norme  $L^1$  associée aux variables  $\rho$ ,  $u$  et  $\rho u$  en fonction du logarithme du pas de discrétisation spatiale,  $h = 1/\text{nombre de cellules}$ , du maillage considéré. On trouve que l'ordre de convergence atteint 0.8 pour les variables  $\rho$ ,  $u$  et  $\rho u$ .

On a voulu voir ensuite le comportement de l'algorithme dans le cas d'une double détente proche du vide. La valeur limite de  $|u_0|$  avant de violer l'inégalité (2.28) est d'environ  $8.94 \text{ m.s}^{-1}$  pour  $\rho_L = \rho_R = 10 \text{ kg.m}^{-3}$ . On s'intéresse alors au cas  $u_L = -8.3 \text{ m.s}^{-1}$  sur lequel théoriquement le vide ne doit pas être atteint ( $\rho_1^{\text{théorique}} = 0.052 \text{ kg.m}^{-3}$ ). La figure [A.18] montre une simulation de ce cas à quatre instants différents sur un maillage à 500 éléments, et la figure [A.19] la comparaison avec la solution exacte associée au dernier pas de temps. On ne constate a priori rien d'anormal sur les variables conservatives  $\rho$  et  $\rho u$ , on converge bien vers l'état constant  $\underline{W}_1$ . Par contre on observe sur la vitesse une très forte discontinuité au voisinage de l'état  $\underline{W}_1$  où la vitesse devrait être nulle. Cette discontinuité est précédée de très fortes variations et d'une perte de monotonie de la vitesse. En fait des tests placés dans le programme montrent, qu'à chaque pas de temps, l'état du vide a été atteint sur une ou plusieurs cellules alors que cela n'aurait pas dû être le cas. Ce phénomène peut être expliqué par le fait que l'algorithme converge vers l'état  $\underline{W}_1$  par valeurs inférieures (Cf. figure [A.13]) ; mais on dispose de peu de références dans ce domaine mis à part les articles [Ein91] et [Mun94].

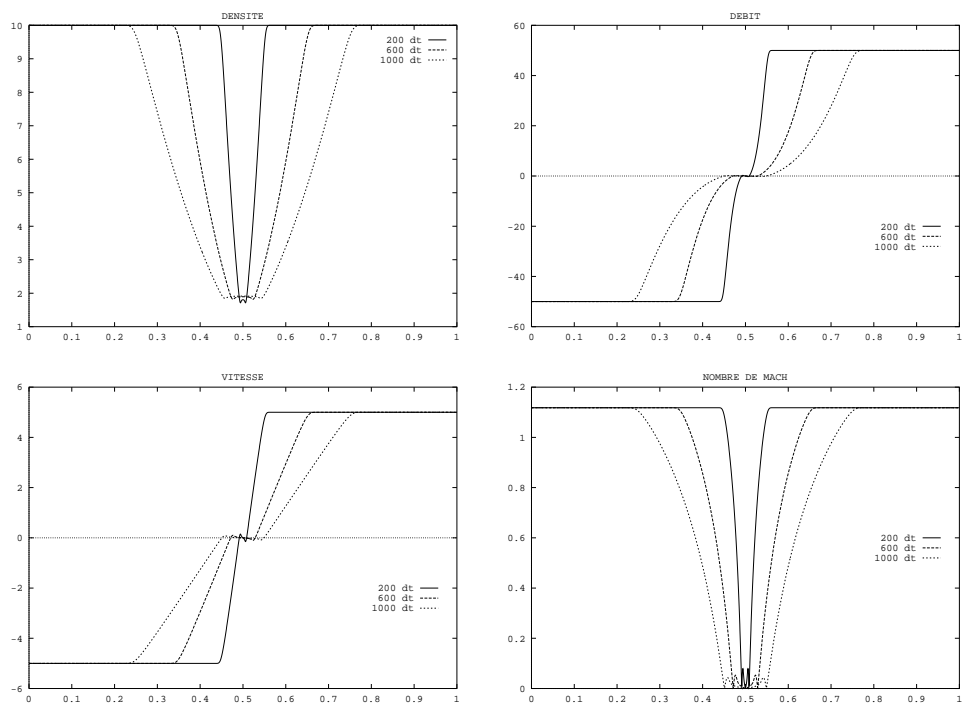


FIG. A.13 - Double détente :  $\rho_L = \rho_R = 10 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $u_R = -u_L = 5 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 2000 nœuds, CFL=0.5.

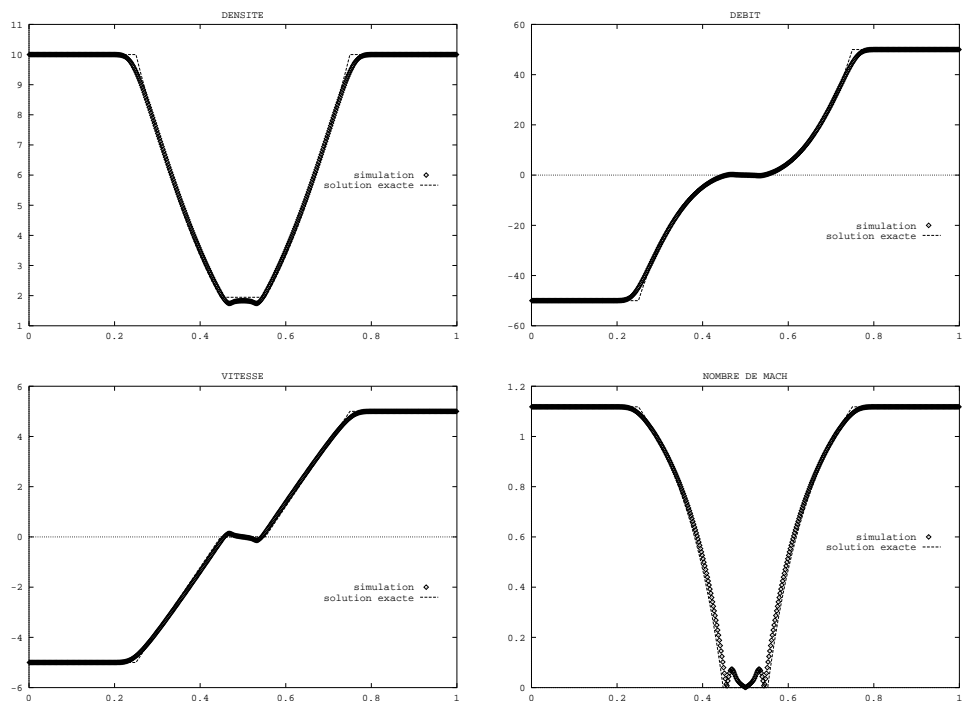


FIG. A.14 - Double détente :  $\rho_L = \rho_R = 10 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $u_R = -u_L = 5 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 500 mailles, CFL=0.5

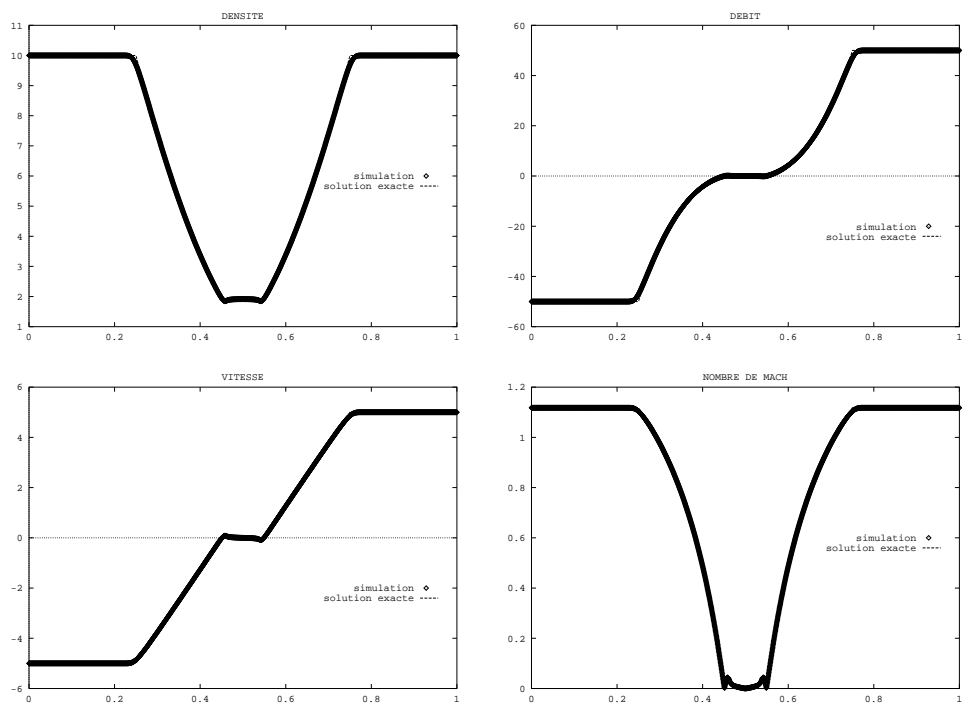


FIG. A.15 - Double détente :  $\rho_L = \rho_R = 10 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $u_R = -u_L = 5 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 2000 mailles, CFL=0.5.

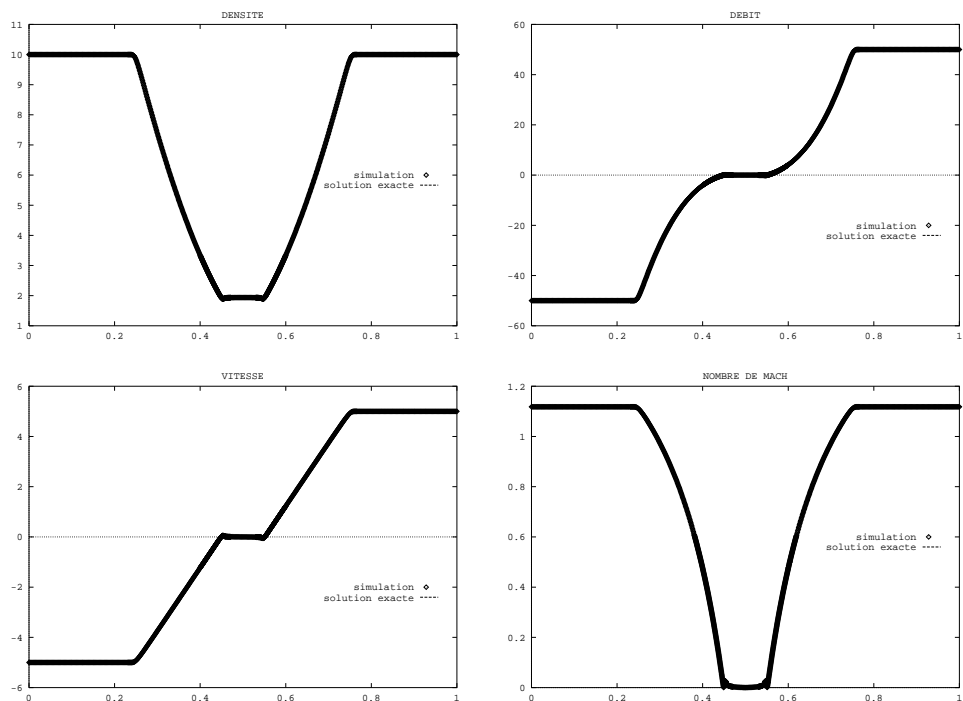


FIG. A.16 - Double détente :  $\rho_L = \rho_R = 10 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $u_R = -u_L = 5 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 8000 mailles, CFL=0.5

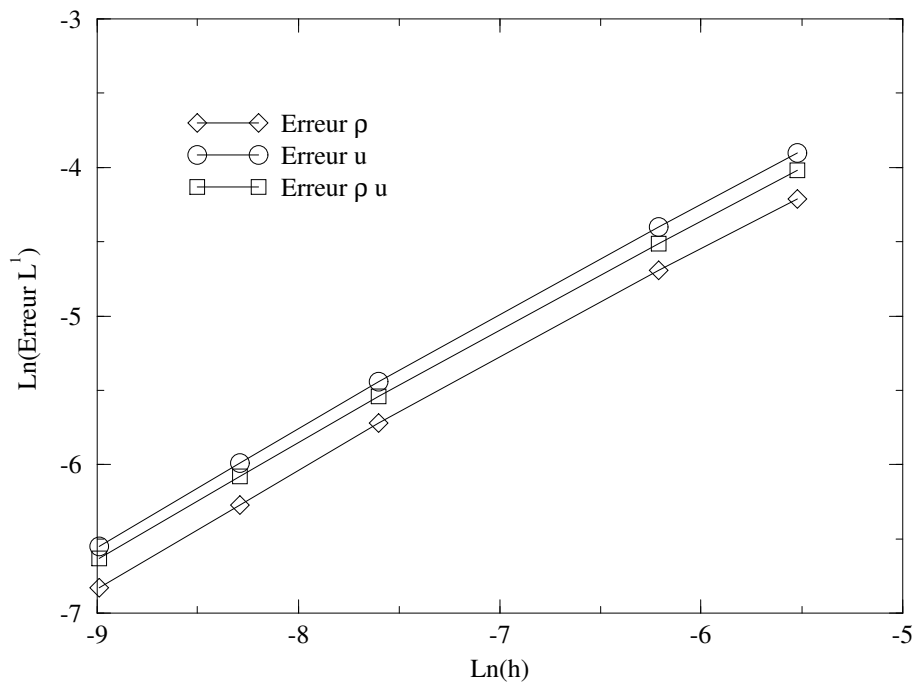


FIG. A.17 - D'après les simulations du système de la dynamique des gaz isentropique par un schéma de Godunov, étude de la convergence  $L^1$  dans le cas d'une double détente symétrique (conditions initiales :  $\rho_L = \rho_R = 10 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $u_R = -u_L = 5 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ ).



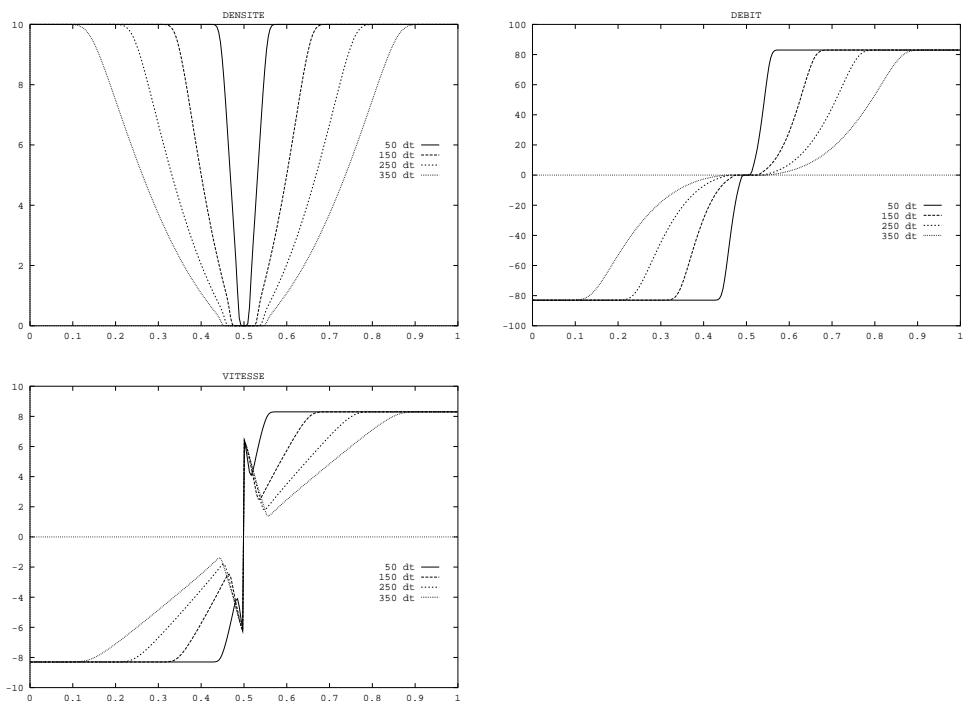


FIG. A.18 - Double détente tendant vers le vide:  $\rho_L = \rho_R = 10 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $u_R = -u_L = 8.3 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 500 mailles, CFL=0.5.

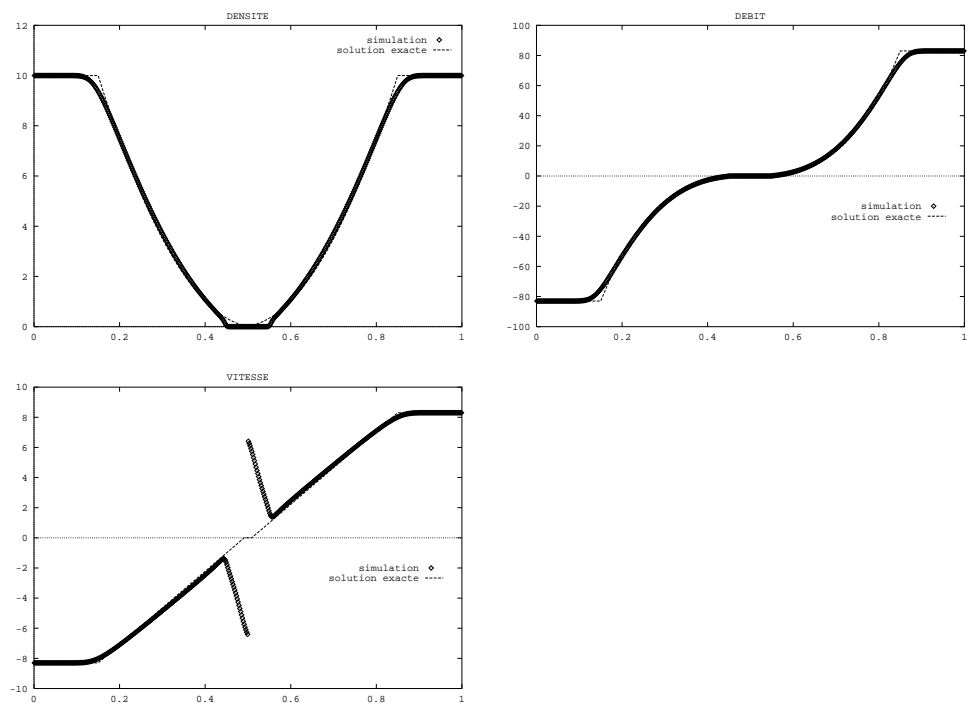


FIG. A.19 – Double détente tendant vers le vide :  $\rho_L = \rho_R = 10 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $u_R = -u_L = 8.3 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 500 mailles,  $CFL=0.5$ .

### A.2.3 Cas test du double choc

On s'intéresse maintenant à la simulation de la rencontre de deux jets, c'est à dire à des tests dans la configuration 1-choc/2-choc. On considère des doubles choc à  $\gamma = 2$  et symétriques, c'est à dire avec des conditions initiales telles que :

$$\rho_L = \rho_R, u_L > 0, u_L = -u_R$$

La figure [A.20] représente une simulation avec pour conditions initiales  $\rho_L = 10 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $u_L = 5 \text{ m.s}^{-1}$  sur un maillage à 500 éléments à un temps physique final égal à 0.052 s. On constate que les vitesses des 1- et 2-onde de choc sont bien estimées ainsi que l'état constant  $\underline{W}_1$ . On remarque également la transformation de l'énergie cinétique en énergie de pression qui, par la loi d'état  $P(\rho) = K\rho^\gamma$ , ne dépend que de la densité.

Sur la figure [A.21] est présentée la simulation d'un double choc avec  $u_L = 50 \text{ m.s}^{-1}$  et sur un maillage à 500 éléments à un temps physique final égal à 0.036 s. On remarque que les 1- et 2-onde de choc sont bien placées et que l'état  $\underline{W}_1$  est bien estimé. Cependant une oscillation est visible sur l'état constant  $\underline{W}_1$  au voisinage des chocs. Cette oscillation ne vient pas du choix du nombre de CFL (le pas de temps est fixé au début de la simulation en fonction des conditions initiales avec un nombre de CFL égal à 0.5). On constate d'autre part la persistance mais pas l'aggravation de ces oscillations quand on raffine le maillage ou quand on laisse les ondes se développer plus longtemps. On en déduit que ce phénomène ne vient pas d'une instabilité numérique mais serait plutôt dû au comportement du schéma numérique en présence de chocs importants, mais on manque de références sur ce point.

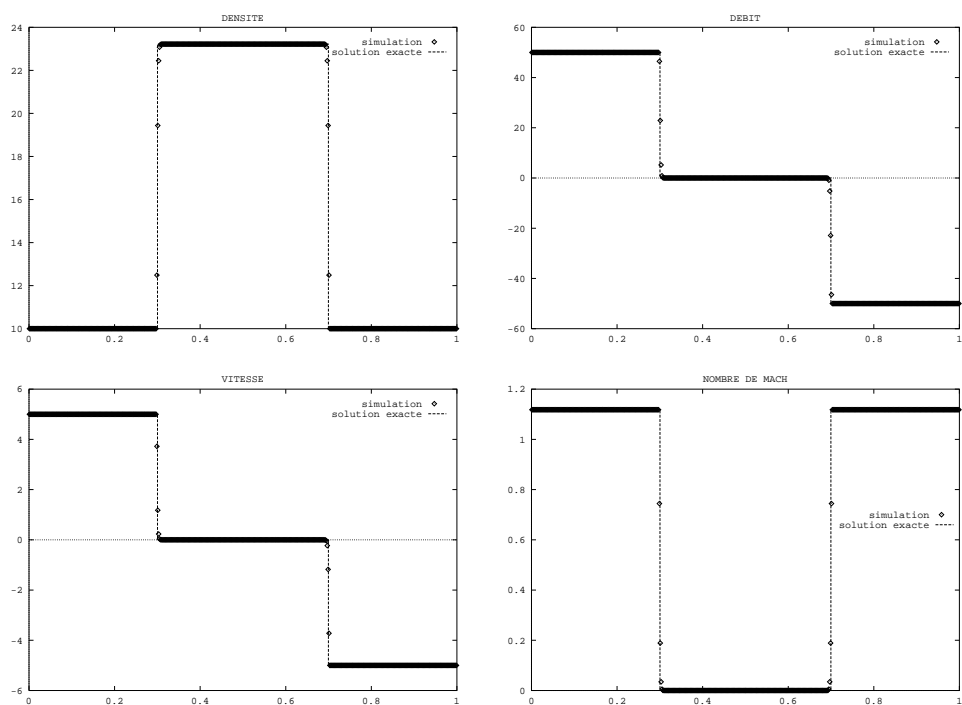


FIG. A.20 - Double choc :  $\rho_L = \rho_R = 10 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $u_L = -u_R = 5 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 500 mailles, CFL=0.5.

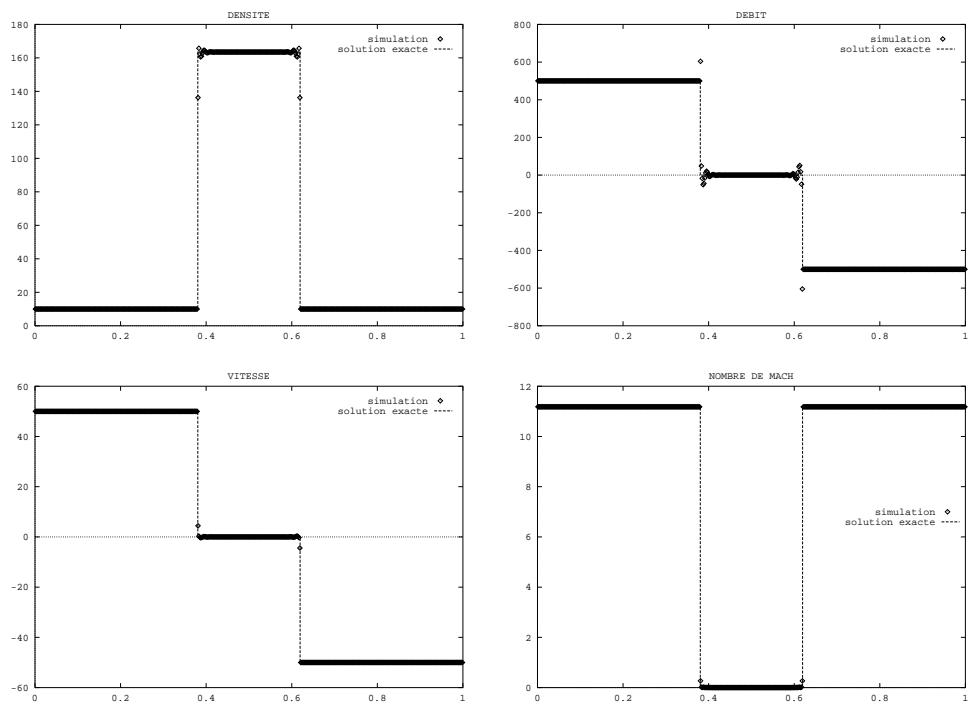


FIG. A.21 - Double choc :  $\rho_L = \rho_R = 10 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $u_L = -u_R = 50 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ , 500 mailles, CFL=0.5

### A.2.4 Convergence de la méthode de Newton

La méthode de Newton converge vite : en moyenne 4 itérations pour un seuil de convergence fixé à une erreur relative de la variable  $z_1$  inférieure à  $10^{-6}$ .

Pour avoir une symétrie parfaite dans les résultats, on a choisi d'effectuer les calculs de la configuration 1-choc/2-détente dans la configuration 1-détente/2-choc au moyen de la transformation suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_L &\longleftarrow \rho_R & \tilde{\rho}_R &\longleftarrow \rho_L \\ \tilde{u}_L &\longleftarrow -u_R & \tilde{u}_R &\longleftarrow -u_L\end{aligned}$$

où  $\tilde{x}$  désigne la variable  $x$  dans la configuration 1-choc/2-détente.

On obtient la solution du problème initial en opérant la transformation inverse sur les résultats obtenus dans la configuration 1-détente/2-choc.

Le principal problème rencontré au cours de la mise au point du programme est lié à la résolution du problème de Riemann entre deux états  $\underline{W}_i^n$  et  $\underline{W}_{i+1}^n$  voisins, c'est à dire  $\underline{W}_i^n \simeq \underline{W}_{i+1}^n$ . L'erreur machine entraîne des divisions par zéro dans l'algorithme de Newton car  $f'((z_1)_n)$  tend vers zéro. D'autre part l'espace des valeurs admissibles  $\tilde{\Omega} = ]\rho_{i+1}/\rho_i, 1]$  de  $z_1$ , dans la configuration 1-détente/2-choc, est très réduit car  $\rho_{i+1}/\rho_i \simeq 1$ . On a donc fixé un seuil d'états voisins au-delà duquel, au lieu d'effectuer des itérations de Newton, on approche l'état  $\underline{W}_1$  en moyennant les états  $\underline{W}_i^n$  et  $\underline{W}_{i+1}^n$ . Dans les tests présentés précédemment, on a fixé le seuil des états voisins à  $10^{-4}$ , c'est à dire que l'on considère voisins les états  $\underline{W}_i^n$  et  $\underline{W}_{i+1}^n$  si :

$$\frac{|\underline{W}_{i+1}^n - \underline{W}_i^n|}{|\underline{W}_i^n|} < 10^{-4}$$

Le test porte sur la variable  $\rho$  dans la configuration 1-détente/2-choc et on calcule l'état  $\underline{W}_1$  en moyennant de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i+1}) \\ u_1 = u_i + \frac{2c_i}{\gamma-1} \left( 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{\rho_{i+1}}{2\rho_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) \end{array} \right.$$

De même, dans la configuration 1-choc/2-choc, le test porte sur les variables  $\rho$  et  $u$  et on calcule l'état  $\underline{W}_1$  en moyennant de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}) \\ \rho_1 = \rho_i \left( 1 - \frac{u_{i+1} - u_i}{2c_i} \right) \end{array} \right.$$

Sur une simulation de  $N$  mailles, les cellules considérées avec des états voisins se situent notamment au voisinage du raccordement des ondes de détente avec les états constants.

On considère maintenant l'importance de l'initialisation de la méthode de Newton. En fait, l'équation  $f(z_1) = 0$ ,  $z_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ , admet deux solutions: la solution entropique  $z_1 \in \tilde{\Omega}$  et une solution non entropique sur l'intervalle  $\mathbb{R}^{+*} \setminus \tilde{\Omega}$ . La figure [A.22] représente le tracé de la fonction  $f(z_1)$ ,  $z_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ , dans le cas du tube à choc ayant pour conditions initiales  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 10^{-1} \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $u_L = u_R = 0 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$  et  $K_0 = 1$ . On est donc dans la configuration 1-détente/2-choc et l'espace des valeurs admissibles de  $z_1$  est  $\tilde{\Omega} = ]z_{min}, 1]$  où  $z_{min} = \rho_{i+1}/\rho_i$ . On retrouve l'analyse théorique des variations de la fonction  $\Psi(z_1) = f(z_1) + u_R - u_L$  (Cf. le paragraphe 2.8.2.3), à savoir que  $f(z_1)$  est décroissante sur  $\tilde{\Omega}$ . On constate d'autre part la présence d'une solution de l'équation  $f(z_1) = 0$  sur  $z_1 \in ]z_{min}, 1]$ . Cette solution est appelée solution entropique car c'est l'unique solution sur l'espace  $\tilde{\Omega}$  des valeurs admissibles de  $z_1$ . Par contre sur l'intervalle  $]0, z_{min}[$  la fonction  $f(z_1)$  est croissante et l'équation  $f(z_1) = 0$  admet une autre solution. Cette solution est dite non entropique car elle ne fait pas partie des solutions admissibles. On remarque d'autre part la présence d'une asymptote verticale  $f(z_1) \rightarrow -\infty$  quand  $z_1 \rightarrow 0^+$ .

On a donc un critère théorique pour rejeter la solution non entropique (i.e.  $z_1 \notin \tilde{\Omega}$ ), mais on veut assurer la convergence de l'algorithme vers la solution entropique. Quand l'algorithme ne converge pas vers la solution entropique c'est que, soit il a convergé vers la solution non entropique, soit le calcul a explosé si l'algorithme de Newton a renvoyé un itéré  $(z_1)_n < 0$  à cause de l'asymptote verticale. Ces deux issues sont dues à une initialisation de la méthode de Newton  $(z_1)_0 \in \tilde{\Omega}$  à droite de la solution entropique. Dans ce cas, si la solution est trop près de la borne inférieure de l'intervalle des valeurs admissibles de  $z_1$ , le premier itéré de Newton étant assez imprécis, il est possible qu'il soit hors de cet espace. Or sur l'intervalle  $]0, z_{min}[$ , la fonction  $f(z_1)$  est croissante, l'algorithme va alors converger vers la solution non entropique et risque en plus de diverger à cause de l'asymptote verticale. On rencontre notamment ce problème lorsque deux états sont très voisins car  $\rho_{i+1}/\rho_i \simeq 1$  et l'espace des valeurs admissibles est alors très restreint.

L'idéal est donc d'initialiser la méthode de Newton entre la borne inférieure et la solution entropique pour assurer que l'algorithme ne sort pas de l'intervalle des espaces admissibles. On ne peut pas garantir cette initialisation mais on peut rendre le programme plus robuste en adoptant le critère des états voisins et ainsi approcher  $z_1$  en moyennant les états  $\underline{W}_i$  et  $\underline{W}_{i+1}$  au lieu d'effectuer des itérations de Newton (on aurait également pu procéder par dichotomie).

On examine maintenant le temps CPU de ce solveur de Godunov. Toutes les simulations ont été effectuées sur station en réels double précision. D'autre part, si  $\underline{W}_i = \underline{W}_{i+1}$  au sens de la précision machine, on pose  $\underline{W}_1 = \underline{W}_i$ ; ceci permet de ne pas effectuer d'itérations inutiles sur les cellules qui n'ont pas encore été perturbées par les ondes. En moyenne, le temps CPU est de l'ordre de  $2.10^{-2}$  secondes pour 1000 cellules par pas de temps.

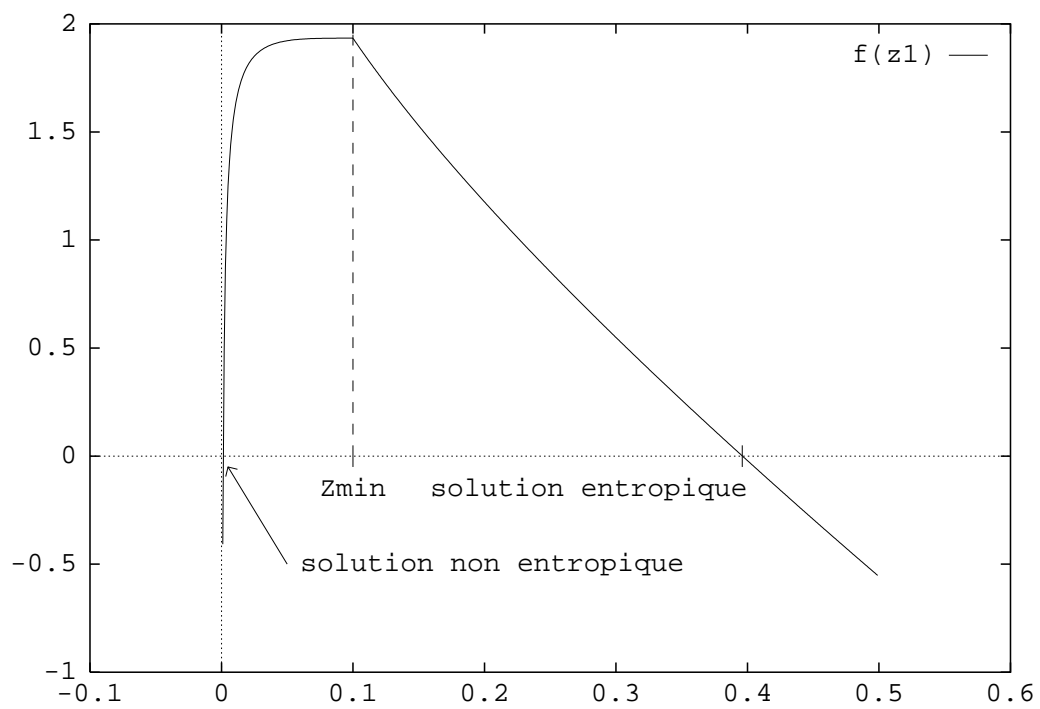


FIG. A.22 - Tracé de la fonction  $f(z_1)$  dans le cas du tube à choc :  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 10^{-1} \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $u_L = u_R = 0 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $K = 1$ .



## Annexe B

# Stabilité linéaire $L^2$ du schéma associé au modèle à deux fluides à quatre équations

Nous étudions dans ce chapitre la stabilité linéaire  $L^2$  du schéma volumes finis monodimensionnel associé au modèle à deux fluides à quatre équations, dans le cas d'une méthode à pas fractionnaires puis dans le cas d'une méthode de splitting de flux. Nous effectuons tout d'abord l'étude de stabilité dans le cas de la phase gazeuse isolée car celle-ci revient, comme on va le démontrer à étudier la stabilité du système diphasique.

### B.1 Rappel du système

On considère la partie convective du modèle à deux fluides à quatre équations (4.1) en se plaçant dans un cadre monodimensionnel :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1 U_1) = 0 \quad (\text{B.1a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2 U_2) = 0 \quad (\text{B.1b})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 U_1) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1 U_1^2) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x}P(\rho_1) = 0 \quad (\text{B.1c})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 U_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2 U_2^2 + \alpha_2 \Xi(\alpha_2)) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x}P(\rho_1) = 0 \quad (\text{B.1d})$$

avec des lois de fermeture, qu'il n'est pas nécessaire de préciser ici, modélisant la pression moyenne de l'écoulement  $P(\rho_1)$  et la prise en compte des collisions interparticulaires  $\Xi(\alpha_2)$ .

La méthode numérique choisie pour résoudre le système (B.1) instationnaire est une technique de décomposition de flux faisant appel soit à la technique des pas fractionnaires soit à la technique de splitting de flux ; le choix de l'une ou de l'autre étant basé sur des critères numériques, notamment sur la stabilité linéaire  $L^2$ .

On rappelle la décomposition du flux convectif que l'on a retenu :

**Etape 1 :**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) = 0 \quad (\text{B.2a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2 U_2) = 0 \quad (\text{B.2b})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 U_1) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1 U_1^2) = 0 \quad (\text{B.2c})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 U_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2 U_2^2 + \alpha_2 \Xi(\alpha_2)) = 0 \quad (\text{B.2d})$$

**Etape 2 :**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1 U_1) = 0 \quad (\text{B.3a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_2 = 0 \quad (\text{B.3b})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 U_1) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x}P(\rho_1) = 0 \quad (\text{B.3c})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2 U_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x}P(\rho_1) = 0 \quad (\text{B.3d})$$

Dans l'étape 1, les deux phases sont découplées, les équations sur la phase 2 pouvant être exactement identifiées aux équations d'Euler isentropique. On rappelle que les termes non conservatifs sont regroupés dans l'étape 2 et que le système associé à l'étape 2 admet un système conservatif équivalent sous l'hypothèse d'un chemin linéaire équipondéré pour relier les états de la fraction volumique de part et d'autre d'une discontinuité (*Cf.* le paragraphe 4.4.3).

## B.2 Rappel du principe des méthodes à pas fractionnaires et de splitting de flux

On rappelle tout d'abord, dans un cadre monodimensionnel le principe de la mise en œuvre de ces deux méthodes sur le système de convection non conservatif suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t}\underline{W} + \frac{\partial}{\partial x}E_1(\underline{W}) + \frac{\partial}{\partial x}E_2(\underline{W}) + \underline{A}(\underline{W})\frac{\partial}{\partial x}\underline{W} = \underline{0}$$

où  $\underline{W}$  désigne le vecteur des variables d'état,  $\underline{F}_1$  et  $\underline{F}_2$  une décomposition du flux convectif global du système et,  $\underline{A}$  la matrice des termes non conservatifs ( $\underline{A}$  est nulle si le système est conservatif). On va résoudre séparément les deux sous-systèmes suivants (en regroupant par exemple tous les termes non conservatifs dans le même sous-système) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}_1(\underline{W}) = \underline{0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}_2(\underline{W}) + \underline{A}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} = \underline{0}$$

Soit  $\underline{W}_i^n$  la valeur approchée de  $\underline{W}$  sur la cellule  $C_i$  au temps  $t^n$ , avec  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ . L'algorithme de la méthode à pas fractionnaires, associé par exemple à un schéma d'Euler en temps et une discrétisation volumes finis en espace, s'écrit alors :

Pour  $\underline{W}^n$  donné,

**Etape 1 :**  $\underline{W}^n \rightarrow \underline{W}^*$

$$\underline{W}_i^* = \underline{W}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left\{ \int_{C_i} \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}_1(\underline{W}) dx \right\}^n$$

**Etape 2 :**  $\underline{W}^* \rightarrow \underline{W}^{n+1}$

$$\underline{W}_i^{n+1} = \underline{W}_i^* - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left\{ \int_{C_i} \left( \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}_2(\underline{W}) + \underline{A}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} \right) dx \right\}^*$$

où l'exposant \* désigne un temps intermédiaire fictif entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$ . Ce qui revient à :

$$\underline{W}_i^{n+1} = \underline{W}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left\{ \int_{C_i} \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}_1(\underline{W}) dx \right\}^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left\{ \int_{C_i} \left( \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}_2(\underline{W}) + \underline{A}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} \right) dx \right\}^*$$

Sous les mêmes hypothèses, la méthode de splitting de flux s'écrit :

Pour  $\underline{W}^n$  donné,

$$\underline{W}_i^{n+1} = \underline{W}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left\{ \int_{C_i} \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}_1(\underline{W}) dx \right\}^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \left\{ \int_{C_i} \left( \frac{\partial}{\partial x} \underline{F}_2(\underline{W}) + \underline{A}(\underline{W}) \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} \right) dx \right\}^n$$

### B.3 Rappels sur la stabilité linéaire $L^2$

Dans le cas d'un système linéaire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{W} + \underline{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \underline{W} = \underline{0}$$

la stabilité  $L^2$  du schéma est facile à étudier au moyen de la transformée de Fourier sous réserve de la linéarité du schéma.

On suppose que le schéma est linéaire de la forme :

$$\frac{\underline{W}_i^{n+1} - \underline{W}_i^n}{\Delta t} + \sum_{C_j} \underline{B}_{ij} \cdot \underline{W}_j^{n,n+1} = \underline{0} \quad (\text{B.4})$$

où les cellules  $C_j$  sont les cellules qui ont une frontière commune avec la cellule  $C_i$ . On rappelle la définition de la stabilité  $L^2$  selon Von Neumann : le schéma est  $L^2$ -stable si il existe une constante  $B > 0$  indépendante de  $\Delta t$  telle que :

$$\|\underline{W}^n\|_{L^2} \leq C \|\underline{W}^0\|_{L^2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Reprenons le schéma (B.4) dans lequel on introduit une perturbation harmonique de la forme :

$$\underline{W}_i^n = \underline{W}^n \exp(jkih), \quad j^2 = -1$$

On obtient la récurrence suivante :

$$\underline{W}^{n+1} = \underline{G}(\Delta t/h, \theta) \underline{W}^n$$

où  $\theta = kh$  caractérise la fréquence associée au mode de Fourier  $k$  et  $\underline{G}$  la matrice d'amplification du schéma. On peut alors montrer que la condition de Von Neumann :

$$\rho(\underline{G}(\Delta t/h, \theta)) \leq 1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

est une condition **suffisante** de stabilité linéaire au sens  $L^2$ .

Si l'opérateur du schéma est non linéaire, on définit un critère de stabilité locale en le linéarisant à l'ordre 0, ce qui autorise le recours à l'analyse de Fourier. Ces critères locaux entraînent une stabilité globale mais ne permettent pas la convergence dans  $L^2$ .

On applique maintenant cette méthode au schéma de Roe standard.

## B.4 Stabilité linéaire $L^2$ du schéma de Roe standard

Soit le système hyperbolique suivant de dimension  $p$  :

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}(\underline{W})}{\partial x} = \underline{0}$$

où  $\underline{W}(x, t)$  est le vecteur des variables d'état et  $\underline{F}(\underline{W})$  le flux associé.

On linéarise le système en posant  $\underline{F}(\underline{W}) = \underline{A}\underline{W}$ , où  $\underline{A}$  est une matrice localement constante s'identifiant avec la Jacobienne du flux prise en un certain état constant. Soit  $\underline{W}_i^n$  la valeur approchée de  $\underline{W}(x, t^n)$ ,  $x \in C_i$ , on écrit le schéma de Roe :

$$\underline{W}_i^{n+1} = \underline{W}_i^n - \frac{\Delta t}{h} (\underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_{i+1}^n) - \underline{\mathcal{F}}(\underline{W}_{i-1}^n, \underline{W}_i^n))$$

où :

$$\underline{\mathcal{F}}(\underline{U}, \underline{V}) = \frac{1}{2} (\underline{A}\underline{U} + \underline{A}\underline{V}) - \frac{1}{2} |\underline{A}| (\underline{V} - \underline{U})$$

On peut donc réécrire le schéma de Roe de la façon suivante :

$$\underline{W}_i^{n+1} = \underline{W}_i^n - \frac{\Delta t}{h} \left( \underline{A} \frac{\underline{W}_{i+1}^n - \underline{W}_{i-1}^n}{2} - |\underline{A}| \frac{\underline{W}_{i+1}^n + \underline{W}_{i-1}^n - 2\underline{W}_i^n}{2} \right)$$

En initialisant dans l'algorithme le vecteur  $\underline{W}_i^n$  par  $\underline{W}_i^0 = \underline{V}^0 \exp(jkih)$ ,  $k \in \mathbb{R}$  ( $j^2 = -1$ ), on obtient la récurrence suivante :

$$\underline{V}^{n+1} = \left( \underline{I} - \frac{\Delta t}{h} \left( \underline{A} \frac{\exp(jkh) - \exp(-jkh)}{2} - |\underline{A}| \frac{\exp(jkh) + \exp(-jkh) - 2}{2} \right) \right) \underline{V}^n$$

En posant  $\theta = kh$ , on obtient :

$$\underline{V}^{n+1} = \left( \underline{I} - \frac{\Delta t}{h} ((1 - \cos \theta) |\underline{A}| + i \sin \theta \underline{A}) \right) \underline{V}^n$$

La matrice d'amplification admet donc des valeurs propres  $\mu_k$  complexes :

$$\mu_k(\theta) = 1 - \frac{\Delta t}{h} ((1 - \cos \theta) |\lambda_k| + i \sin \theta \lambda_k), k = 1, \dots, p$$

où  $\lambda_k$  désigne les valeurs propres de la Jacobienne  $\underline{A}$ . La condition de stabilité  $\max_{1 \leq k \leq p} |\mu_k| \leq 1$  est équivalente à  $\frac{\Delta t}{h} |\lambda_k| \leq 1$ , soit :

$$\rho(\underline{A}) \frac{\Delta t}{h} \leq 1$$

où  $\rho(\underline{A})$  désigne le rayon spectral de la matrice  $\underline{A}$ .

## B.5 Stabilité linéaire $L^2$ du schéma associé à la phase gazeuse isolée

Le système homogène monodimensionnel associé à la phase gazeuse isolée s'obtient en posant  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 = 0$  dans le système (B.1) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho U) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho U) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho U^2 + P(\rho)) = 0 \end{cases}$$

La décomposition en deux sous-systèmes, équivalents à (B.2,B.3), s'écrit alors :

**Sous-système 1 :**

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho U) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho U^2) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

**Sous-système 2 :**

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho U) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho U) + \frac{\partial}{\partial x} (P(\rho)) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

### B.5.1 Etude de stabilité du schéma associé au sous-système (B.5)

Le schéma volumes finis monodimensionnel de Godunov associé au sous-système (B.5) s'écrit :

$$\begin{cases} \rho_i^{n+1} & = \rho_i^n \\ (\rho U)_i^{n+1} & = (\rho U)_i^n - \frac{\Delta t}{h} (F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}})^n \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

avec le flux numérique  $F_{i+\frac{1}{2}}$  à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_{i+1}$  :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } U_i < 0 \text{ et } U_{i+1} > 0 \\ (\rho U^2)_i & \text{si } \hat{U}_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ (\rho U^2)_{i+1} & \text{si } \hat{U}_{i+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}$$

et la vitesse pondérée :

$$\hat{U}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\rho_i} U_i + \sqrt{\rho_{i+1}} U_{i+1}}{\sqrt{\rho_{i+1}}}$$

On linéarise par rapport à la vitesse  $U_i^n = U$ , où  $U$  est une constante positive (le cas  $U$  négatif étant traité de façon identique). On obtient alors le schéma linéarisé suivant :

$$\begin{cases} \rho_i^{n+1} & = \rho_i^n \\ (\rho U)_i^{n+1} & = (\rho U)_i^n - \frac{\Delta t}{h} U ((\rho U)_i - (\rho U)_{i-1})^n \end{cases}$$

La matrice d'amplification du sous-système (B.5) de la phase gazeuse est donc donnée par :

$$\underline{G}_{(I),1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où  $D = 1 - \frac{\Delta t}{h} U (1 - \cos \theta + i \sin \theta)$ .

La stabilité du schéma est dictée par la condition de Von Neumann  $|D| \leq 1$ , soit :

$$\frac{\Delta t}{h} |U| \leq 1$$

### B.5.2 Etude de stabilité du schéma associé au sous-système (B.6)

On écrit maintenant le schéma volumes finis monodimensionnel de type Roe associé au sous-système (B.6) :

$$\begin{cases} \rho_i^{n+1} & = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{h} (F_{i+\frac{1}{2}}^1 - F_{i-\frac{1}{2}}^1)^n \\ (\rho U)_i^{n+1} & = (\rho U)_i^n - \frac{\Delta t}{h} (F_{i+\frac{1}{2}}^2 - F_{i-\frac{1}{2}}^2)^n \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

avec les flux de Roe :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} \left\{ (\rho U)_i + (\rho U)_{i+1} - \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}} [\rho]_{i+\frac{1}{2}} \right\}$$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{2} \left\{ P(\rho_i) + P(\rho_{i+1}) - \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}} [\rho U]_{i+\frac{1}{2}} \right\}$$

où  $[\cdot]_{i+\frac{1}{2}} = \cdot_{i+1} - \cdot_i$ , et la moyenne de Roe de la célérité :

$$\tilde{c}_{i+\frac{1}{2}}^2 = \begin{cases} \frac{[P(\rho)]_{i+\frac{1}{2}}}{[\rho]_{i+\frac{1}{2}}} & \text{si } [\rho]_{i+\frac{1}{2}} \neq 0 \\ (P'(\rho))_i & \text{si } \rho_i = \rho_{i+1} \end{cases}$$

On linéarise par rapport à la moyenne de Roe de la célérité  $\tilde{c}_{i+\frac{1}{2}} = c$ , où  $c$  est une constante positive. On obtient alors le schéma linéarisé suivant :

$$\begin{cases} \rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{2h} ((\rho U)_{i+1} - (\rho U)_{i-1})^n + \frac{\Delta t}{2h} c (\rho_{i+1} - 2\rho_i + \rho_{i-1})^n \\ (\rho U)_i^{n+1} = (\rho U)_i^n - \frac{\Delta t}{2h} c^2 (\rho_{i+1} - \rho_{i-1})^n + \frac{\Delta t}{2h} c ((\rho U)_{i+1} - 2(\rho U)_i + (\rho U)_{i-1})^n \end{cases}$$

La matrice d'amplification du sous-système (B.5) de la phase gazeuse est donc donnée par :

$$\underline{\underline{G}}_{(II),1} = \begin{pmatrix} A & iB \\ ic^2B & A \end{pmatrix}$$

où  $A = 1 - \frac{\Delta t}{h} c (1 - \cos \theta)$  et  $B = -\frac{\Delta t}{h} \sin \theta$ . Les valeurs propres de la matrice  $\underline{\underline{G}}_{(II),1}$  sont :

$$\lambda_{\pm} = 1 - \frac{\Delta t}{h} c (1 - \cos \theta \pm i \sin \theta)$$

La stabilité du schéma est dictée par la condition de Von Neumann  $|\lambda_{\pm}| \leq 1$ , soit :

$$\frac{\Delta t}{h} c \leq 1$$



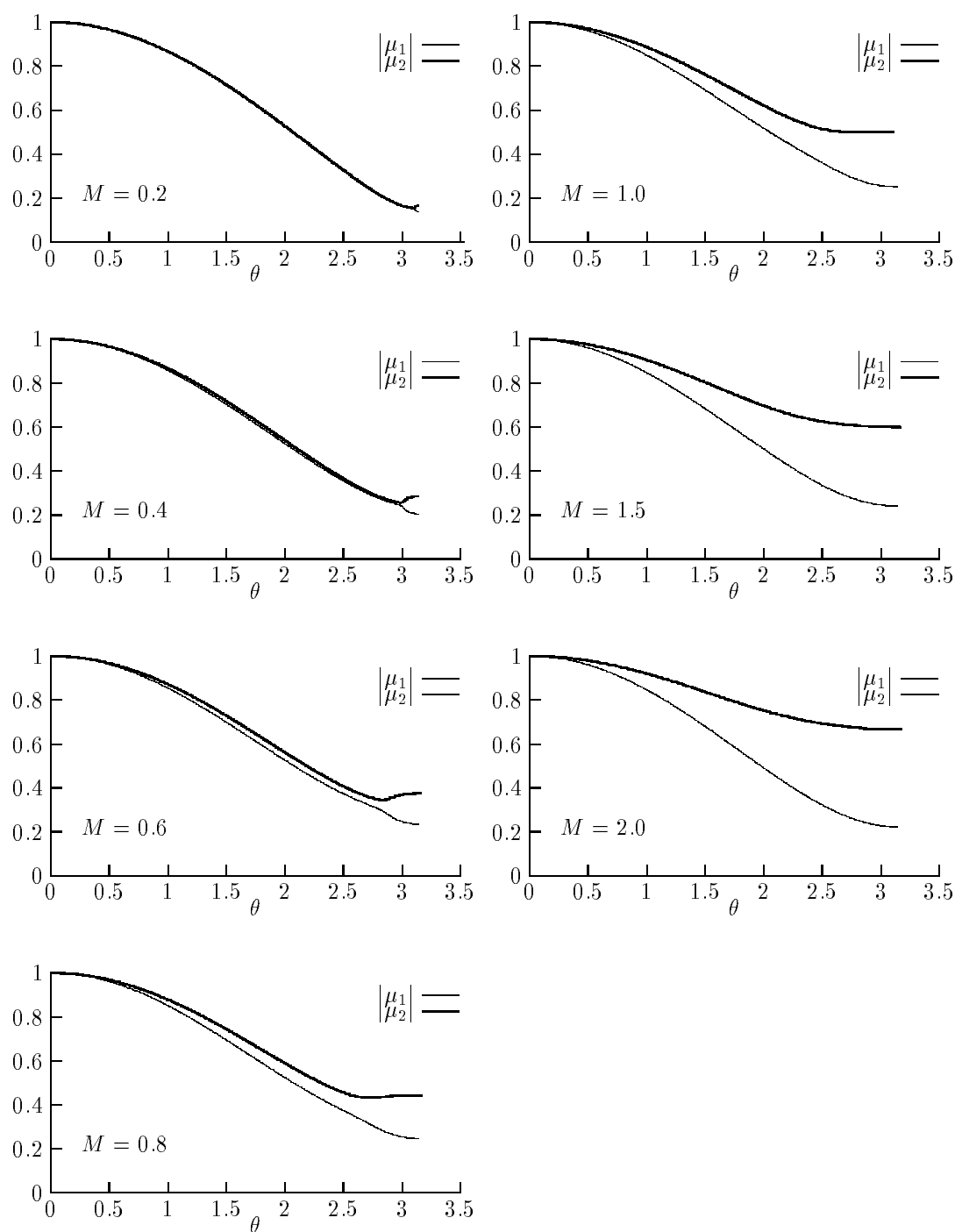


FIG. B.1 – Modules des valeurs propres de la matrice d'amplification associée à la méthode des pas fractionnaires, avec  $N_c = 0.5$ .

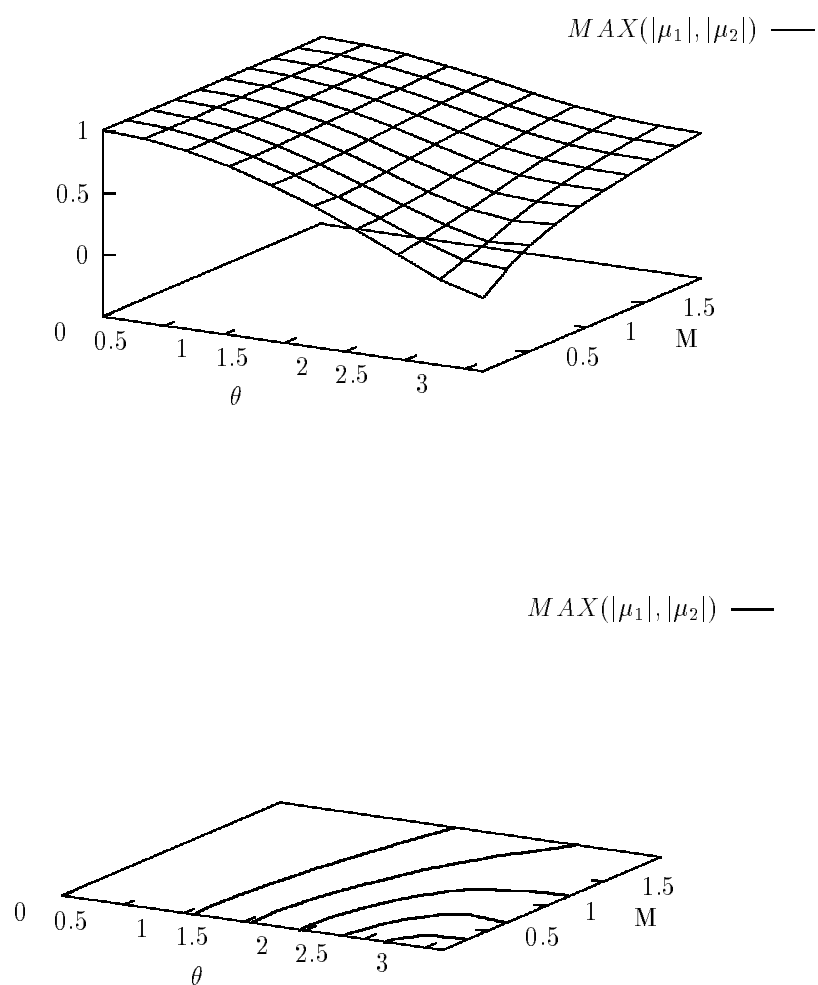


FIG. B.2 – Module et Iso-contours du rayon spectral de la matrice d'amplification associée à la méthode des pas fractionnaires, avec  $N_c = 0.5$ .

### B.5.3 Etude de stabilité du schéma associé à la méthode des pas fractionnaires

La matrice de gain associée à la méthode des pas fractionnaires des systèmes (B.5) et (B.6) s'obtient en faisant le produit des matrices de gain associées aux schémas linéarisés des deux étapes de la méthode :

$$\underline{\underline{G}}_{(PF),1} = \underline{\underline{G}}_{(II),1} \cdot \underline{\underline{G}}_{(I),1} = \begin{pmatrix} A & iBD \\ ic^2B & AD \end{pmatrix}$$

La matrice  $\underline{\underline{G}}_{(PF),1}$  admet des valeurs propres  $\mu$  complexes, de la forme :

$$\mu_{\pm} = \frac{A(1+D) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

où  $\Delta = A^2(1+D)^2 - 4(c^2B^2 + A^2)D$ .

La stabilité du schéma est dictée par la condition de Von Neumann  $|\mu_{\pm}| \leq 1$ .

**Remarque B.1** *La stabilité du schéma dépend uniquement des paramètres nombre de Mach  $M$  et nombre de Courant  $N_c$ . En effet,*

$$\frac{\Delta t}{h} = \frac{N_c}{U+c} \text{ et } M = \frac{U}{c}$$

alors :

$$A = 1 - \frac{N_c}{M+1} (1 - \cos \theta) \text{ et } D = 1 - \frac{M \cdot N_c}{M+1} (1 - \cos \theta + i \sin \theta)$$

Le coefficient  $B$ , quant à lui, peut s'écrire  $B = -\frac{N_c}{c(M+1)} \sin \theta$ . Alors  $\Delta$  et donc  $\mu_{\pm}$  ne dépendent que des variables nombre de Courant, nombre de Mach et nombre d'onde.

**Remarque B.2** *On atteint la limite de stabilité,  $|\mu| = 1$ , pour tout  $\theta$ , pour  $N_c = 1$  et  $M = 0$ .*

Les figures [B.1] à [B.4] représentent les variations des modules des valeurs propres de la matrice d'amplification  $\underline{\underline{G}}_{(PF),1}$  associée à la méthode des pas fractionnaires, en fonction du nombre de Mach (variant de 0 à 2), du nombre de Courant (égal à 0.5 ou 1) et du nombre d'onde (variant de 0 à  $\pi$ ). On observe bien que le rayon spectral de la matrice est inférieur à 1 (Cf. Fig. [B.2] et [B.4]) avec une limite de stabilité atteinte pour un nombre de Courant égal à 1 et un nombre de Mach tendant vers zéro (Cf. Fig. [B.4]). On remarque également que les deux valeurs propres ont un comportement assez homogène (Cf. Fig. [B.1] et [B.3]) et que le rendement n'est jamais nul mis à part au point  $(M, \theta, N_c) = (1.0, \pi, 1.0)$  (Cf. Fig. [B.3]).

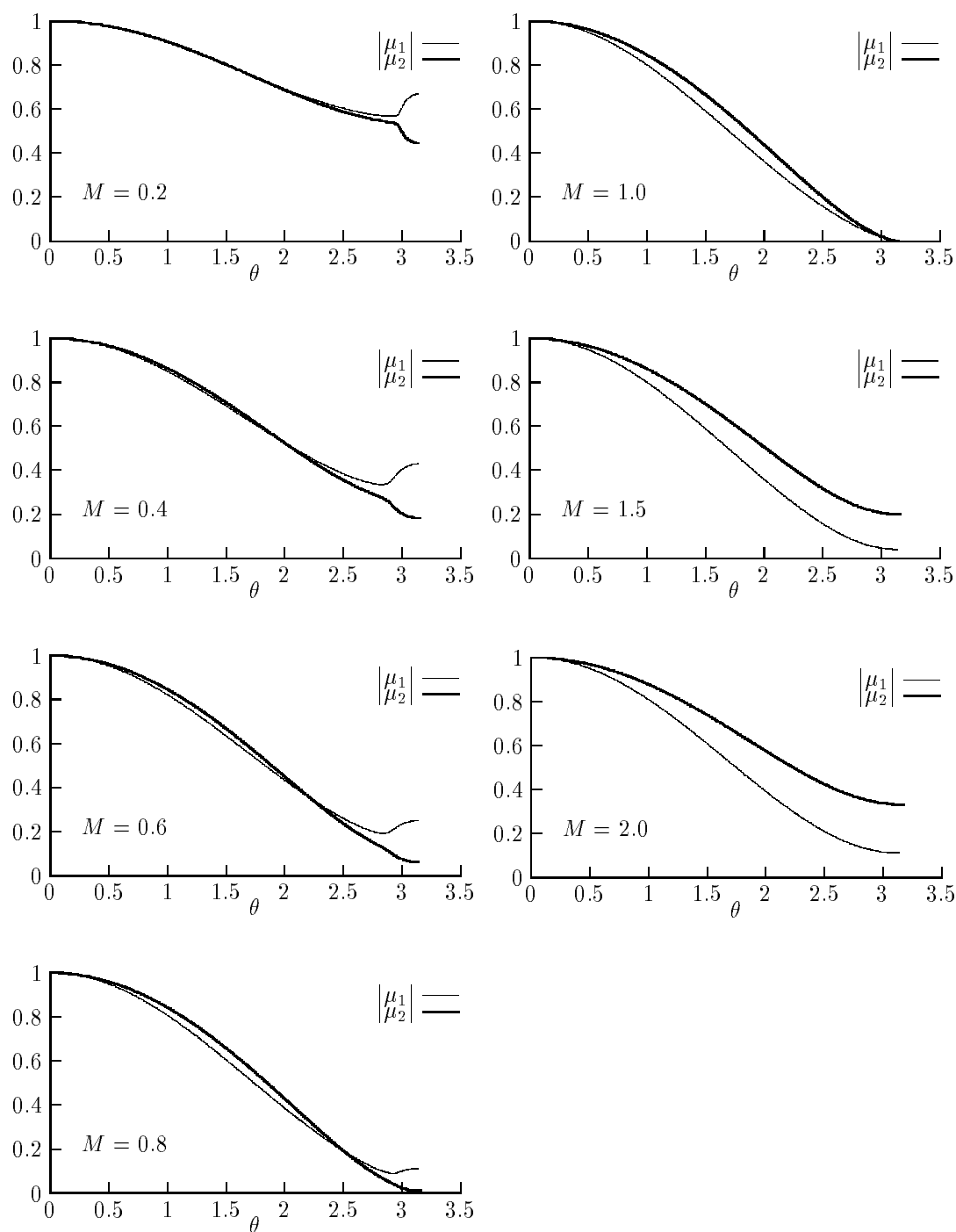


FIG. B.3 – Module des valeurs propres de la matrice d'amplification associée à la méthode des pas fractionnaires, avec  $N_c = 1.0$ .

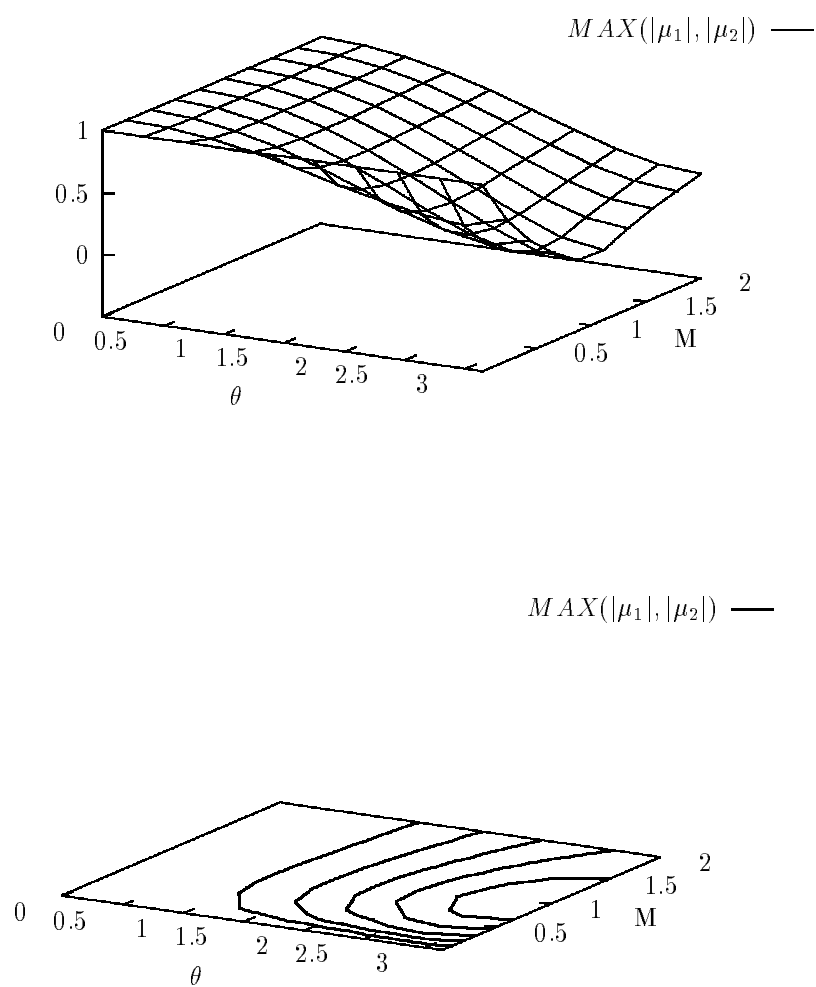


FIG. B.4 - Module et iso-contours du rayon spectral de la matrice d'amplification associée à la méthode des pas fractionnaires, avec  $N_c = 1.0$ .

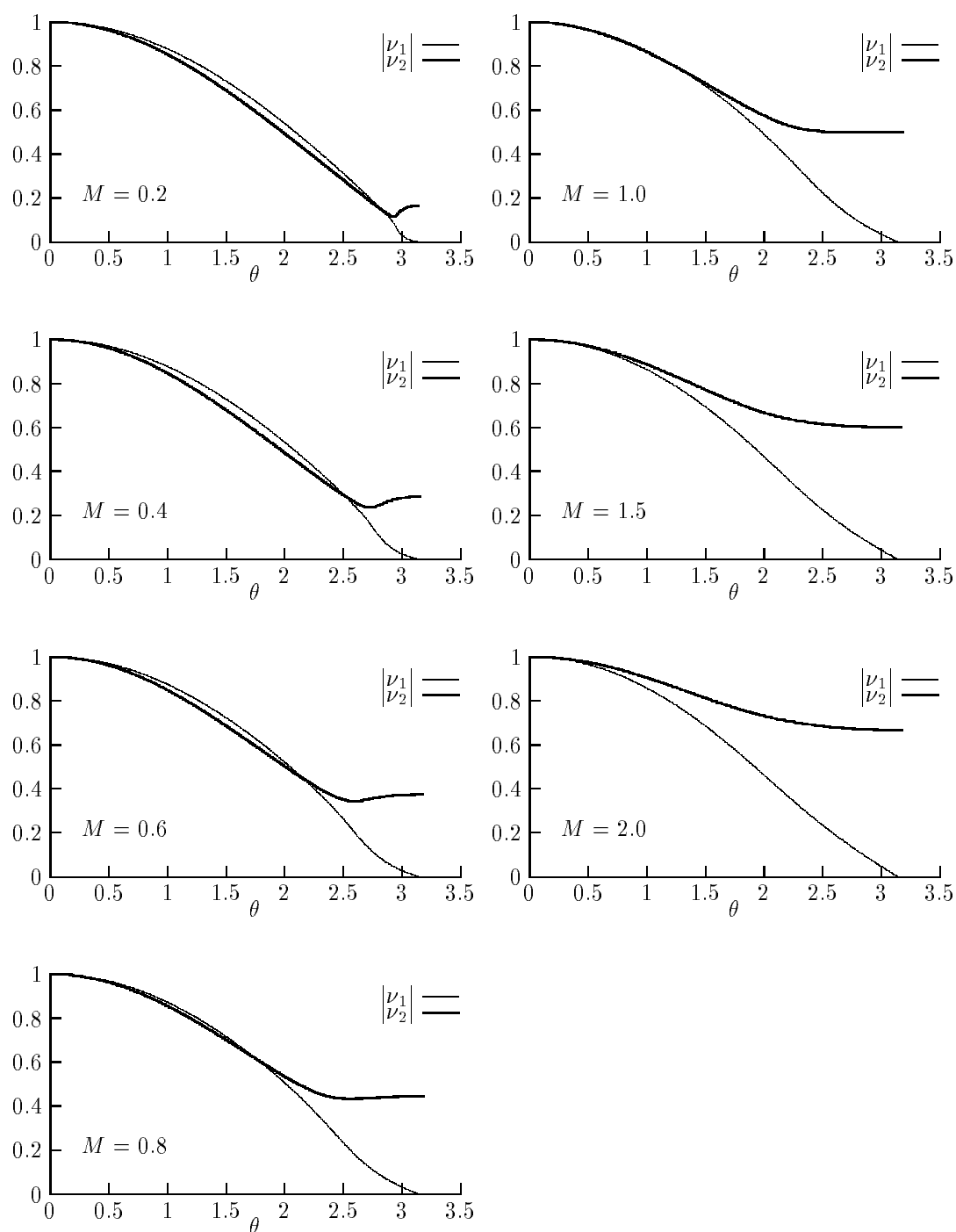


FIG. B.5 – Module des valeurs propres de la matrice d'amplification associée à la méthode de *splitting de flux*, avec  $N_c = 0.5$ .

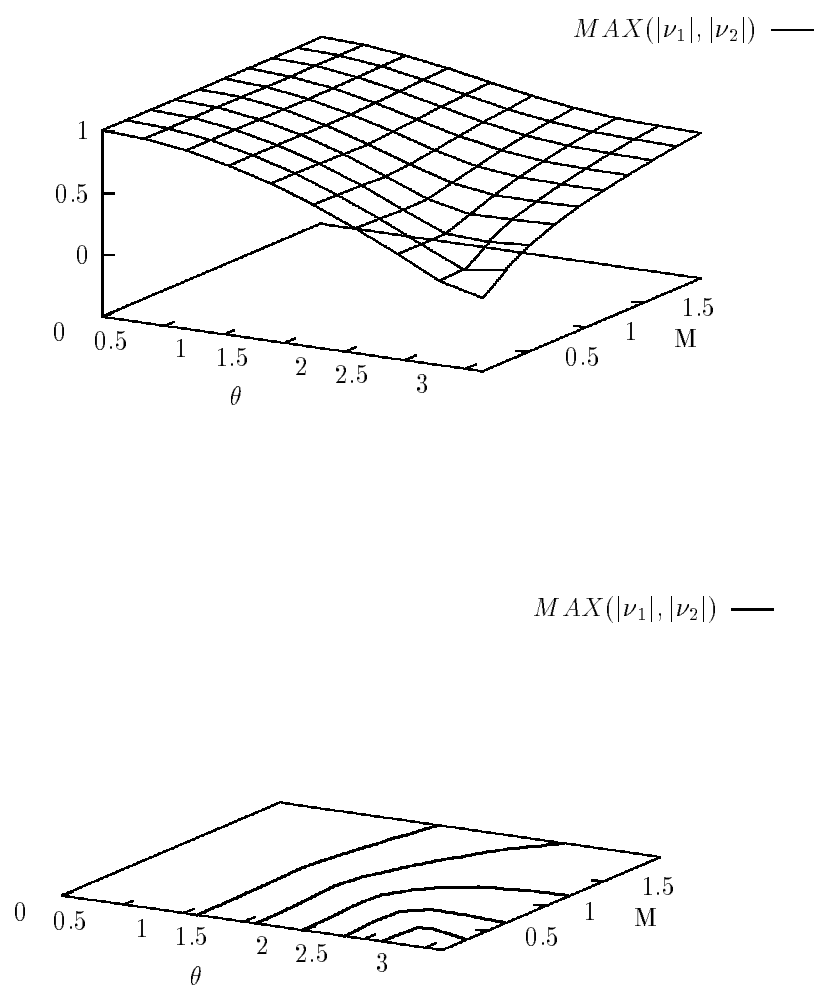


FIG. B.6 - Module et iso-contours du rayon spectral de la matrice d'amplification associée à la méthode de *splitting de flux*, avec  $N_c = 0.5$ .

### B.5.4 Etude de stabilité du schéma associé à la méthode de splitting de flux

La matrice de gain associée à la méthode de splitting de flux s'obtient en faisant la somme des matrices de gain associées aux schémas linéarisés des deux étapes de la méthode et en soustrayant la matrice identité :

$$\underline{\underline{G}}_{(SF),1} = \underline{\underline{G}}_{(I),1} + \underline{\underline{G}}_{(II),1} - \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} A & iB \\ ic^2B & A + D - 1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\underline{\underline{G}}_{(SF),1}$  admet des valeurs propres  $\nu$  complexes, de la forme :

$$\nu_{\pm} = \frac{2A + D - 1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

où  $\Delta = (2A + D - 1)^2 - 4(A(A + D - 1) + c^2B^2)$ .

La stabilité du schéma est dictée par la condition de Von Neumann  $|\nu_{\pm}| \leq 1$ .

**Remarque B.3** De même que dans la remarque B.1 sur la méthode des pas fractionnaires, les valeurs propres de la matrice de gain  $\underline{\underline{G}}_{(SF),1}$  et donc la stabilité linéaire du schéma dépendent uniquement des variables nombre de Courant, nombre de Mach et nombre d'onde.

**Remarque B.4** On atteint la limite de stabilité,  $|\nu| = 1$ , pour tout  $\theta$ , pour  $N_c = 1$  et  $M = 0$ .

Les figures [B.5] à [B.8] représentent les variations des modules des valeurs propres de la matrice d'amplification  $\underline{\underline{G}}_{(SF),1}$  associée à la méthode de splitting de flux, en fonction du nombre de Mach (variant de 0 à 2), du nombre de Courant (égal à 0.5 ou 1) et du nombre d'onde (variant de 0 à  $\pi$ ). On observe bien que le rayon spectral de la matrice est inférieur à 1 (Cf. Fig. [B.6] et [B.8]) avec une limite de stabilité atteinte pour un nombre de Courant égal à 1 et un nombre de Mach tendant vers zéro (Cf. Fig. [B.8]). On remarque cependant que les deux valeurs propres ont un comportement très hétérogène (Cf. Fig. [B.5] et [B.7]) et qu'une valeur propre est bloquée à la valeur zéro quel que soit le nombre de Mach pour un nombre de Courant égal à 0.5 (Cf. Fig. [B.5]), ce qui signifie que l'un des modules a un rendement nul. On tiendra compte de ces deux derniers points dans les critères du choix entre la méthode à pas fractionnaires et la méthode de splitting de flux, bien que l'analyse de stabilité linéaire  $L^2$  de ces systèmes fortement non linéaires ne procure qu'une condition de stabilité locale.



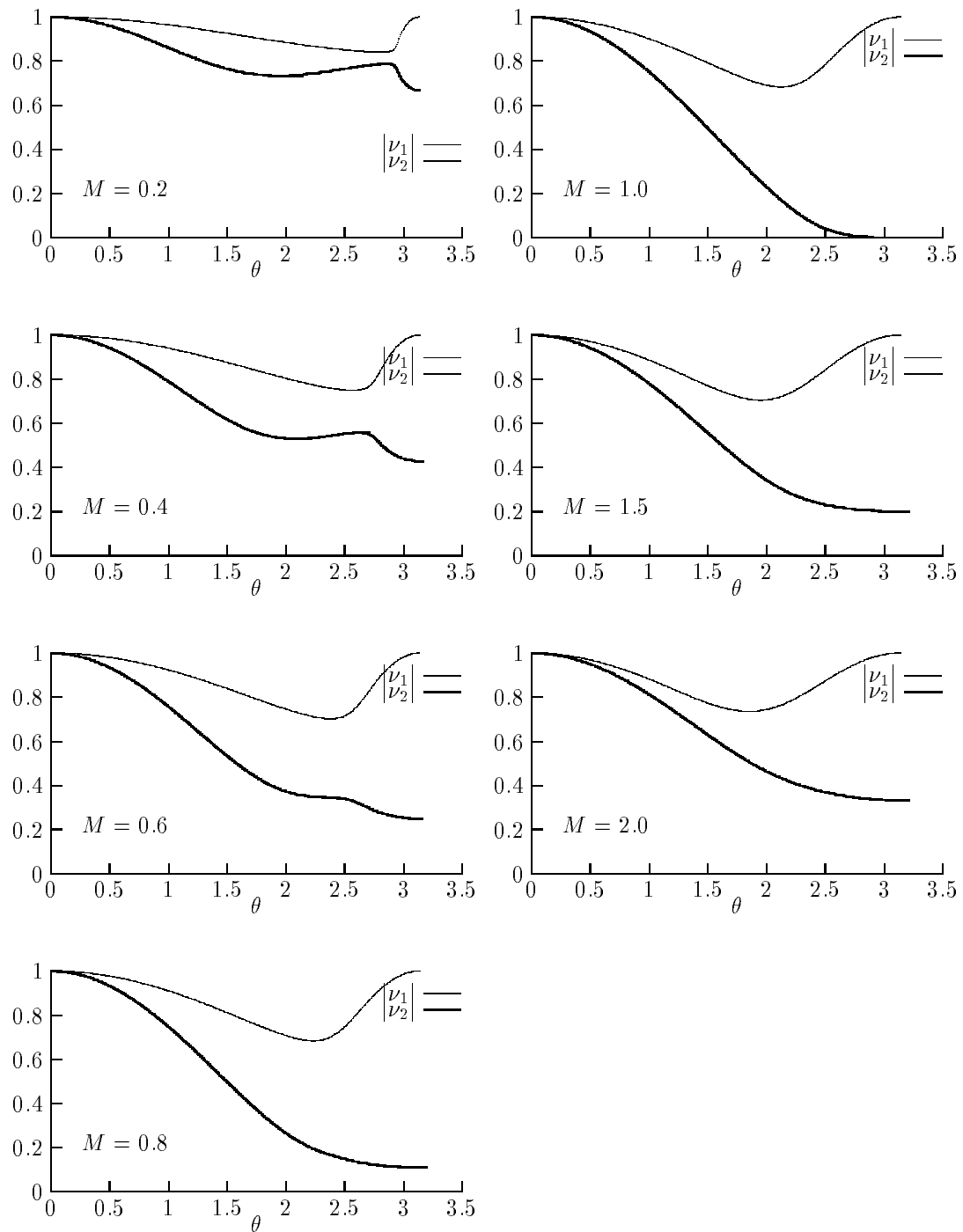


FIG. B.7 – Module des valeurs propres de la matrice d'amplification associée à la méthode de *splitting* de flux, avec  $N_c = 1.0$ .

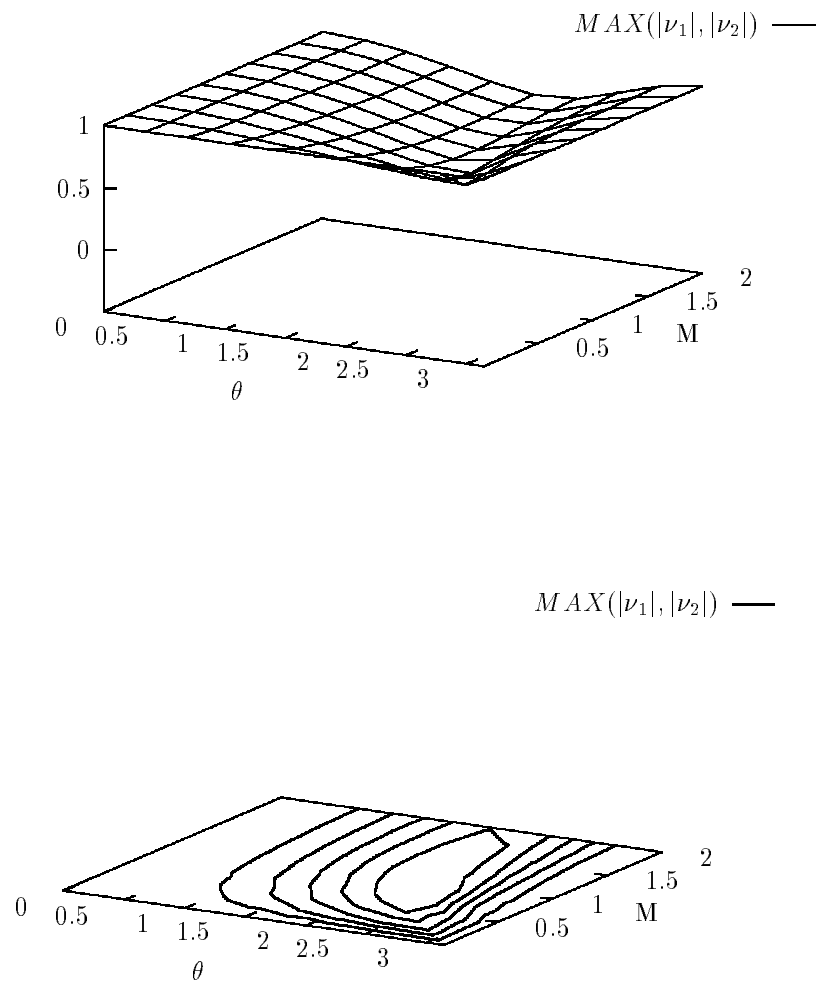


FIG. B.8 - Module et iso-contours du rayon spectral de la matrice d'amplification associée à la méthode de *splitting de flux*, avec  $N_c = 1.0$ .

## B.6 Stabilité linéaire $L^2$ du schéma associé au système diphasique

### B.6.1 Etude de stabilité du schéma associé à l'étape (B.2)

Soit  $\underline{W}^t(x, t) = (\alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 U_1, \alpha_2, \alpha_2 U_2)$  le vecteur des variables d'état du système et  $\underline{W}_i^n$  la valeur approchée de  $\underline{W}(x_i, t^n)$ . Le schéma volumes finis monodimensionnel associé au sous-système (B.2), de Godunov pour les variables de la phase continue et de type Roe pour les variables de la phase dispersée, s'écrit :

$$\underline{W}_i^{n+1} = \underline{W}_i^n - \frac{\Delta t}{h} \left( \underline{\Phi}_{i+\frac{1}{2}} - \underline{\Phi}_{i-\frac{1}{2}} \right)^n$$

avec le flux numérique  $\underline{\Phi}^t = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)$  :

$$(\Phi_1)_{i+\frac{1}{2}} = 0$$

$$(\Phi_2)_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (\alpha_1 \rho_1 U_1^2)_i & \text{si } (\hat{U}_1)_{i+\frac{1}{2}} > 0 \\ (\alpha_1 \rho_1 U_1^2)_{i+1} & \text{si } (\hat{U}_1)_{i+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_2 U_2} \\ \alpha_2 U_2^2 + \Xi(\alpha_2) \end{pmatrix}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} |\underline{A}(\tilde{W}, \underline{n})|_{i+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} [\alpha_2] \\ [\alpha_2 U_2] \end{pmatrix}_{i+\frac{1}{2}}$$

avec les notations  $(\bar{\cdot})_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\cdot_i + \cdot_{i+1})$  et  $[\cdot]_{i+\frac{1}{2}} = \cdot_{i+1} - \cdot_i$ , la vitesse pondérée :

$$(\hat{U}_1)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{(\alpha_1 \rho_1)_i} (U_1)_i + \sqrt{(\alpha_1 \rho_1)_{i+1}} (U_1)_{i+1}}{\sqrt{(\alpha_1 \rho_1)_{i+1}}}$$

et les moyennes :

$$(\tilde{U}_2)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{(\alpha_2 \rho_2)_i} (U_2)_i + \sqrt{(\alpha_2 \rho_2)_{i+1}} (U_2)_{i+1}}{\sqrt{(\alpha_2 \rho_2)_i} + \sqrt{(\alpha_2 \rho_2)_{i+1}}}$$

$$(\tilde{c}_2^2)_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{[\alpha_2 \Xi(\alpha_2)]_{i+\frac{1}{2}}}{[\alpha_2]_{i+\frac{1}{2}}} & \text{si } [\alpha_2]_{i+\frac{1}{2}} \neq 0 \\ (\alpha_2 \Xi(\alpha_2))'_i & \text{si } (\alpha_2)_i = (\alpha_2)_{i+1} \end{cases}$$

et la matrice de Roe :

$$|\underline{A}(\tilde{W}, \underline{n})|_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(\tilde{c}_2^2)_{i+\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} |\mu^-|\mu^+ - |\mu^+|\mu^- & -|\mu^-| + |\mu^+| \\ \mu^+\mu^- (|\mu^-| - |\mu^+|) & -\mu^-|\mu^-| + \mu^+|\mu^+| \end{pmatrix}$$

où  $\mu^\pm = (\tilde{U}_2)_{i+\frac{1}{2}} \pm (\tilde{c}_2)_{i+\frac{1}{2}}$ .

Il est clair que dans le système (B.2), les deux phases sont découplées. On peut donc calculer séparément la matrice de gain de chacune des deux phases :  $\underline{G}_{(I),1}$  et  $\underline{G}_{(I),2}$  ; la matrice de gain globale du système (B.2) se présentant alors sous la forme :

$$\underline{G}_{(I)} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{(I),1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{G}_{(I),2} \end{pmatrix}$$

On linéarise le schéma associé à la phase gazeuse par rapport à la vitesse  $(U_1)_i^n = U_1$ , où  $U_1$  est une constante positive (on suppose également que  $(\tilde{U}_1)_{i+\frac{1}{2}}^n$  est positif) (le cas négatif étant traité de façon identique). Le schéma ainsi linéarisé est équivalent à celui obtenu pour le premier sous-système dans le cas de la phase gazeuse isolée (en identifiant  $\rho$  à  $\alpha_1\rho_1$ ) :

$$\begin{cases} (\alpha_1\rho_1)_i^{n+1} & = (\alpha_1\rho_1)_i^n \\ (\alpha_1\rho_1 U_1)_i^{n+1} & = (\alpha_1\rho_1 U_1)_i^n - \frac{\Delta t}{h} U_1 ((\alpha_1\rho_1 U_1)_i - (\alpha_1\rho_1 U_1)_{i-1})^n \end{cases}$$

La matrice d'amplification associée s'écrit donc :

$$\underline{G}_{(I),1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où  $D = 1 - \frac{\Delta t}{h} U_1 (1 - \cos \theta + i \sin \theta)$ .

Le schéma associé à la phase dispersée est un schéma de Roe classique. On étudie la stabilité linéaire  $L^2$  du schéma de Roe standard en linéarisant ce dernier par rapport à la matrice de Roe  $|\underline{A}(\tilde{W}, \underline{n})|_{i\pm\frac{1}{2}}^n = |\underline{A}|$  (Cf. le paragraphe B.4). On obtient la matrice d'amplification suivante :

$$\underline{G}_{(I),2} = \underline{I} - \frac{\Delta t}{h} ((1 - \cos \theta) |\underline{A}| + i \sin \theta \underline{A})$$

où  $|\underline{A}|$  désigne la matrice de Roe figée et  $\underline{A}$  la Jacobienne figée du système.

La matrice  $\underline{\underline{G}}_{(I),2}$  admet donc deux valeurs propres  $\mu_1$  et  $\mu_2$  complexes :

$$\mu_i = 1 - \frac{\Delta t}{h}((1 - \cos \theta)|\lambda_i| + i \sin \theta \lambda_i)$$

où  $\lambda_i = U_2 \pm c_2$ ,  $i = 1, 2$  désigne les valeurs propres de la Jacobienne.

Du fait de la structure diagonale par blocs de  $\underline{\underline{G}}_{(I)}$ , l'ensemble de ses valeurs propres est donc la réunion de celles de  $\underline{\underline{G}}_{(I),1}$  et de  $\underline{\underline{G}}_{(I),2}$ . On obtient donc deux conditions de stabilité du schéma global :

$$\frac{\Delta t}{h}|U_1| \leq 1 \text{ et } \frac{\Delta t}{h}|U_2 + c_2| \leq 1$$

### B.6.2 Etude de stabilité du schéma associé à l'étape (B.3)

On considère le système conservatif (4.35) équivalent au système non conservatif (4.33), sous l'hypothèse du choix d'un chemin linéaire équipondéré (Cf. le paragraphe 4.5.2.2).

Soit  $\underline{W}^t(x, t) = (\alpha_1 \rho_1, \rho_1 U_1, \alpha_2, \rho_2 U_2)$  le vecteur des variables d'état du système. Le schéma volumes finis 1D de type Roe associé au sous-système (4.35) s'écrit :

$$\underline{W}_i^{n+1} = \underline{W}_i^n - \frac{\Delta t}{h}(\Phi_{i+\frac{1}{2}} - \Phi_{i-\frac{1}{2}})^n \quad (\text{B.9})$$

avec le flux numérique  $\Phi_{i+\frac{1}{2}}$  au temps  $n$  :

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha_1 \rho_1 U_1)}{P(\rho_1)} \\ 0 \\ \frac{0}{P(\rho_1)} \end{pmatrix}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\tilde{c}_1)_{i+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} [\rho_1] \\ [\alpha_1 \rho_1 U_1] / \bar{\alpha}_1 \\ 0 \\ [\alpha_1 \rho_1 U_1] / \bar{\alpha}_1 \end{pmatrix}_{i+\frac{1}{2}}$$

et la moyenne de Roe de la célérité :

$$(\tilde{c}_1^2)_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{[P(\rho_1)]_{i+\frac{1}{2}}}{[\rho_1]_{i+\frac{1}{2}}} & \text{si } [\rho_1]_{i+\frac{1}{2}} \neq 0 \\ (P'(\rho_1))_i & \text{si } (\rho_1)_i = (\rho_1)_{i+1} \end{cases}$$

On linéarise le schéma par rapport à la moyenne de Roe de la célérité  $(\tilde{c}_1)_{i\pm\frac{1}{2}} = c_1$  ( $c_1$  est une constante positive) et par rapport à la fraction volumique  $(\alpha_1)_i = (\alpha_1)_{i\pm 1} = \alpha_1$ .

**Remarque B.5** La linéarisation que l'on effectue par rapport à  $\alpha_1$  est très forte (Cf. par

exemple les simulations du schéma non linéaire de propagation, présentés dans le paragraphe 4.6.1).

On obtient alors le schéma linéarisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1 \rho_1)_i^{n+1} = (\alpha_1 \rho_1)_i^n - \frac{\Delta t}{2h} \{ \alpha_1 ((\rho_1 U_1)_{i+1} - (\rho_1 U_1)_{i-1}) \\ \quad - c_1 ((\alpha_1 \rho_1)_{i+1} - 2(\alpha_1 \rho_1)_i + (\alpha_1 \rho_1)_{i-1}) \}^n \\ (\rho_1 U_1)_i^{n+1} = (\rho_1 U_1)_i^n - \frac{\Delta t}{2h} c_1 \{ ((\alpha_1 \rho_1)_{i+1} - (\alpha_1 \rho_1)_{i-1}) c_1 / \alpha_1 \\ \quad - (\rho_1 U_1)_{i+1} + 2(\rho_1 U_1)_i - (\rho_1 U_1)_{i-1} \}^n \\ (\alpha_2)_i^{n+1} = (\alpha_2)_i^n \\ (\rho_2 U_2)_i^{n+1} = (\rho_2 U_2)_i^n - \frac{\Delta t}{2h} c_1 \{ ((\alpha_1 \rho_1)_{i+1} - (\alpha_1 \rho_1)_{i-1}) c_1 / \alpha_1 \\ \quad - (\rho_1 U_1)_{i+1} + 2(\rho_1 U_1)_i - (\rho_1 U_1)_{i-1} \}^n \end{array} \right.$$

La matrice d'amplification du sous-système (4.35) est donc donnée par :

$$\underline{\underline{G}}_{(II)} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{G}}'_{(II),1} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{H}}_{(II)} & \underline{\underline{I}} \end{pmatrix}$$

où  $\underline{\underline{G}}'_{(II),1}$  est une matrice semblable à la matrice d'amplification  $\underline{\underline{G}}_{(II),1}$  associée au deuxième sous-système de la phase gazeuse isolée (ce qui est dû au changement de variables pour passer du système non conservatif (4.33) au système conservatif (4.35)) :

$$\underline{\underline{G}}'_{(II),1} = \begin{pmatrix} A & i\alpha_1 B \\ ic_1^2 B / \alpha_1 & A \end{pmatrix}$$

où  $A = 1 - \frac{\Delta t}{h} c_1 (1 - \cos \theta)$  et  $B = -\frac{\Delta t}{h} \sin \theta$ ,

et  $\underline{\underline{H}}_{(II)}$  la matrice de couplage entre la phase gazeuse et la phase particulaire :

$$\underline{\underline{H}}_{(II)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ic_1^2 B / \alpha_1 & A \end{pmatrix}$$

La matrice  $\underline{\underline{G}}_{(II)}$  étant triangulaire par blocs, ses valeurs propres sont celles de la matrice identité  $\underline{\underline{I}}$  et de la matrice  $\underline{\underline{G}}'_{(II),1}$  réunies. Or les matrices  $\underline{\underline{G}}'_{(II),1}$  et  $\underline{\underline{G}}_{(II),1}$  sont semblables,

ce qui implique qu'elles ont des valeurs propres identiques. Il est, d'autre part, intéressant de noter que le couplage des deux phases au moyen de la matrice  $\underline{\underline{H}}_{(II)}$  n'influe pas sur la stabilité du schéma linéarisé.

Les valeurs propres de la matrice  $\underline{\underline{G}}'_{(II),1}$  sont donc :

$$\lambda_{\pm} = 1 - \frac{\Delta t}{h} c_1 (1 - \cos \theta \pm i \sin \theta)$$

Et l'on obtient la condition de stabilité suivante :

$$\frac{\Delta t}{h} c_1 \leq 1$$

### B.6.3 Etude de stabilité du schéma associé à la méthode des pas fractionnaires

La matrice de gain associée à la méthode des pas fractionnaires s'écrit :

$$\underline{\underline{G}}_{(PF)} = \underline{\underline{G}}_{(II)} \cdot \underline{\underline{G}}_{(I)} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{G}}'_{(II),1} \cdot \underline{\underline{G}}_{(I),1} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{H}}_{(II)} \cdot \underline{\underline{G}}_{(I),2} & \underline{\underline{G}}_{(I),2} \end{pmatrix}$$

Soit  $\underline{\underline{G}}'_{(PF),1} = \underline{\underline{G}}'_{(II),1} \cdot \underline{\underline{G}}_{(I),1}$ . La matrice  $\underline{\underline{G}}'_{(PF),1}$  est une matrice semblable à la matrice d'amplification associée à la méthode des pas fractionnaires dans le cas de la phase gazeuse isolée  $\underline{\underline{G}}_{(PF),1}$  :

$$\underline{\underline{G}}'_{(PF),1} = \begin{pmatrix} A & i\alpha_1 DB \\ ic_1^2 B/\alpha_1 & AD \end{pmatrix}$$

Du fait que la matrice  $\underline{\underline{G}}_{(PF)}$  est triangulaire par blocs, elle a pour valeurs propres la réunion de celles des matrices  $\underline{\underline{G}}'_{(PF),1}$  et  $\underline{\underline{G}}_{(I),2}$ . Les conditions de stabilité du schéma sont donc, d'une part, celles déjà exposées pour la méthode des pas fractionnaires dans le cas de la phase gazeuse isolée (puisque  $\underline{\underline{G}}'_{(PF),1}$  et  $\underline{\underline{G}}_{(PF),1}$  sont semblables et ont donc des valeurs propres identiques) et, d'autre part, celle provenant de la matrice  $\underline{\underline{G}}_{(I),2}$ , c'est à dire  $\frac{\Delta t}{h} |U_2 + c_2| \leq 1$ .

### B.6.4 Etude de stabilité du schéma associé à la méthode de splitting de flux

La matrice de gain associée à la méthode de splitting de flux s'écrit :

$$\underline{\underline{G}}_{(SF)} = \underline{\underline{G}}_{(I)} + \underline{\underline{G}}_{(II)} - \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{G}}_{(I),1} + \underline{\underline{G}}'_{(II),1} - \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{H}}_{(II)} & \underline{\underline{G}}_{(I),2} \end{pmatrix}$$

Soit  $\underline{\underline{G}}'_{(SF)} = \underline{\underline{G}}_{(I),1} + \underline{\underline{G}}'_{(II),1} - \underline{\underline{I}}$ . La matrice  $\underline{\underline{G}}'_{(SF),1}$  est une matrice semblable à la matrice d'amplification associée à la méthode de splitting de flux dans le cas de la phase gazeuse isolée  $\underline{\underline{G}}_{(SF),1}$  :

$$\underline{\underline{G}}'_{(SF)} = \begin{pmatrix} A & i\alpha_1 B \\ ic_1^2 B / \alpha_1 & A + D - 1 \end{pmatrix}$$

Du fait que la matrice  $\underline{\underline{G}}_{(SF)}$  est triangulaire par blocs, elle a pour valeurs propres l'ensemble des valeurs propres des matrices  $\underline{\underline{G}}'_{(SF),1}$  et  $\underline{\underline{G}}_{(I),2}$ . Les conditions de stabilité du schéma sont donc, d'une part, celles déjà exposées pour la méthode de splitting de flux dans le cas de la phase gazeuse isolée (puisque  $\underline{\underline{G}}'_{(SF),1}$  et  $\underline{\underline{G}}_{(SF),1}$  sont semblables) et, d'autre part, celle provenant de la matrice  $\underline{\underline{G}}_{(I),2}$ , c'est à dire  $\frac{\Delta t}{h} |U_2 + c_2| \leq 1$ .