



HAL
open science

Modélisation mathématique et méthode numérique pour la simulation du contrôle santé intégré par ultrasons de plaques composites stratifiées

Hajer Methenni

► **To cite this version:**

Hajer Methenni. Modélisation mathématique et méthode numérique pour la simulation du contrôle santé intégré par ultrasons de plaques composites stratifiées. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Institut Polytechnique de Paris, 2021. Français. NNT : 2021IPPAE002 . tel-03191607

HAL Id: tel-03191607

<https://theses.hal.science/tel-03191607v1>

Submitted on 7 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS

NNT : 2021IPPAAE002

Thèse de doctorat



Modélisation mathématique et méthode numérique pour la simulation du contrôle santé intégré par ultrasons de plaques composites stratifiées

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris
préparée à École Nationale Supérieure de Techniques Avancées (ENSTA Paris)

École doctorale n°574 École Doctorale de Mathématiques Hadamard (EDMH)
Spécialité de doctorat : Mathématiques appliquées

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 26 Mars 2021, par

HAJER METHENNI

Composition du Jury :

Régis Cottreau LMA (Équipe Ondes et Imagerie)	Président
Hélène Barucq INRIA (MAGIQUE-3D)	Rapporteuse
Pascal Noble Institut de Mathématiques de Toulouse (MIP)	Rapporteur
Juliette Chabassier INRIA (MAGIQUE-3D)	Examinatrice
Dominique Chapelle INRIA (MEDISIM)	Examineur
Sonia Fliss ENSTA Paris (POEMS)	Directrice de thèse
Sébastien Imperiale INRIA (MEDISIM)	Co-directeur de thèse
Alexandre Imperiale CEA LIST (DISC)	Co-encadrant

Table des matières

Introduction	1
I Méthode numérique pour la propagation d’ondes dans des plaques stratifiées	9
1 Construction d’un schéma implicite-explicite	11
1.1 Présentation du problème modèle	13
1.2 Mise à l’échelle du problème modèle, caractère bien posé et stabilité du problème continu	15
1.2.1 Mise à l’échelle du problème modèle	15
1.2.2 Caractère bien posé et stabilité du problème continu	18
1.3 Discrétisation du problème mis à l’échelle	21
1.3.1 Semi-discrétisation en espace	21
1.3.2 Discrétisation totale et présentation des schémas explicite, implicite et implicite-explicite	27
1.3.3 Identités d’énergies et propriétés des énergies discrètes	29
1.4 Estimations de quotients de Rayleigh, des CFL et des conditionnements	35
1.4.1 Estimations de quotients de Rayleigh	35
1.4.2 Estimation du pas de temps pour le schéma explicite	41
1.4.3 Estimation de la CFL pour le schéma implicite-explicite	42
1.4.4 Préconditionnement pour le schéma implicite	43
1.5 Résultats numériques	45
1.5.1 Validation des propriétés de convergence et de robustesse du schéma implicite-explicite	45
1.5.2 Comparaisons des temps de calcul	47
2 Analyse de convergence	51
2.1 Analyse de convergence du problème semi-discrétisé en espace	52
2.2 Analyse de convergence du problème totalement discrétisé	57
2.2.1 Convergence du schéma explicite	57
2.2.2 Convergence du schéma implicite	60
2.2.3 Convergence du schéma implicite-explicite	64
2.3 Estimation uniforme de $\delta^{-1}\ \partial_3\mathbf{u}^\delta\ _{L^2(\Omega)^3}$ par rapport à δ	68
2.3.1 Préliminaires	69
2.3.2 Développements asymptotiques formels	70
2.3.3 Régularité des correcteurs et estimations d’erreurs pour le problème continu	75

Annexe	79
II La méthode des demi-espaces raccordés en transitoire	89
3 Rappel de la méthode des demi-espaces raccordés dans le cas stationnaire	91
3.1 Problème modèle	93
3.2 La méthode HsM pour un problème posé à l'extérieur d'un carré	93
3.2.1 Notations	94
3.2.2 Principe de la méthode	95
3.2.3 Calcul analytique des représentations de la solution dans les demi-plans	95
3.2.4 Relations de compatibilité des représentations de la solution	96
3.2.5 Formulation variationnelle	99
3.3 Couplage de la méthode HsM avec la méthode des éléments finis	100
3.3.1 Reformulation du problème en fonction de $\{u_b, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$	102
3.3.2 Formulation variationnelle	102
3.4 Discrétisation et estimations d'erreurs	103
3.5 Extensions de la méthode HsM	104
4 La méthode des demi-espaces raccordés en régime temporel	105
4.1 Problème modèle	107
4.2 Formulation de la méthode HsM à l'extérieur d'un carré pour le problème continu	108
4.2.1 Notations	109
4.2.2 Principe de la méthode	110
4.2.3 Expression analytique de u_i dans Ω_i , pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$	110
4.2.4 Relations de compatibilité des représentations de la solution	112
4.2.5 Caractère bien posé	114
4.2.6 Conclusion	116
4.3 Formulation de la méthode HsM à l'extérieur d'un carré pour le problème semi-discrétisé en temps	117
4.3.1 Semi-discrétisation en temps	117
4.3.2 Expression analytique de u_i^n dans Ω_i , pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$	118
4.3.3 Relations de compatibilité	120
4.3.4 Formulation variationnelle du problème des traces	121
4.3.5 Caractère bien posé	122
4.4 Aspects numériques et algorithmiques	125
4.4.1 Discrétisation en espace de la méthode HsM semi-discrète	125
4.4.2 Algorithme de résolution de la méthode HsM discrète en temps et en espace	126
4.5 Résultats numériques	128
4.5.1 Validation qualitative de la méthode	128
4.5.2 Validation quantitative de la méthode	132
4.6 Résolution de la méthode HsM en utilisant une transformée en Z	136
4.6.1 Principe	136
4.6.2 Discrétisation	137
4.6.3 Algorithme	138
4.7 Couplage de la méthode HsM avec la méthode des éléments finis	138
4.7.1 Semi-discrétisation en temps	139
4.7.2 Reformulation du problème en fonction de $\{u_b^n, (\varphi_j^n)_{j=0..3}\}$	140

4.7.3	Formulation variationnelle	140
4.7.4	Résultats numériques	141
4.8	Cas de milieu anisotrope	141
4.8.1	Semi-discrétisation en temps	142
4.8.2	Expression analytique de u_i^n dans Ω_i , pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$	142
4.8.3	Relations de compatibilité et formulation variationnelle	144
4.8.4	Récapitulation	145
4.8.5	Résultats numériques	145
Annexe		147
Conclusions and perspectives		155

Introduction

Le contrôle non destructif (CND) est un procédé permettant de caractériser l'état d'intégrité d'une structure sans l'altérer. Il est fortement utilisé dans de nombreux domaines industriels comme l'aéronautique, l'aérospatial et l'énergie nucléaire. Parmi les techniques utilisées, citons les ultrasons, l'électromagnétisme (les courants de Foucault), la thermographie et la radiographie. Le CND par ultrasons consiste à émettre des ondes ultrasonores (ondes acoustiques comprises entre 20 kHz et 10 GHz) et à détecter leurs interactions avec les défauts éventuellement présents dans la pièce, dans le but de les caractériser. Notamment l'utilisation d'ondes guidées, des ondes qui se propagent à longue distance sans s'atténuer, permet de contrôler des zones peu accessibles dans des structures élancées (plaques, poutres, tubes, ...).

Lorsque les capteurs sont intégrés de manière permanente dans ou sur les structures d'intérêt et quand le contrôle se fait in situ et en temps réel, il s'agit de contrôle santé intégré (SHM: Structural Health Monitoring). Le SHM est une technique de contrôle de plus en plus populaire et souvent utilisée en aéronautique, les capteurs étant positionnés dans des sous-parties de l'avion. Par exemple, il peut être utilisé dans les ailes ou la coque, dans ces cas, les structures sont souvent complexes et les matériaux sont composites stratifiés. De manière générale, de tels contrôles sont difficiles à cause de l'anisotropie, de la stratification, ainsi que la présence éventuelle de défauts spécifiques aux matériaux utilisés (par exemple les défauts de corrosion pour les matériaux métalliques et les défauts de délaminage pour les matériaux composites).

Dans ce contexte, la simulation numérique des phénomènes de propagation ainsi que des phénomènes d'interactions avec les milieux et les défauts peut être utilisée pour l'interprétation des signaux obtenus expérimentalement, l'aide à la conception des protocoles de contrôle, ou encore l'aide au design de capteurs.

Ces travaux de thèse s'inscrivent dans le cadre d'une collaboration entre le CEA LIST (DISC), le laboratoire POEMS (CNRS-INRIA-ENSTA Paris) et l'EPI M Ξ DISIM de l'Inria Saclay. Depuis de nombreuses années, le Département Imagerie Simulation pour le Contrôle (DISC) au sein du CEA LIST développe et commercialise à l'échelle internationale la plateforme CIVA, spécifiquement dédiée à la simulation pour le CND tandis que le laboratoire POEMS est spécialisé dans la modélisation mathématique et numérique de phénomènes de propagation d'ondes. Par ailleurs, le CEA LIST collabore également avec l'EPI M Ξ DISIM et le laboratoire POEMS au sujet de la construction d'autres outils numériques pour la propagation d'ondes en régime temporel, la modélisation des capteurs piézoélectriques, ...

Le but de cette thèse est de développer un outil de simulation efficace permettant de modéliser la propagation des ondes émises, leur interaction avec les défauts et leur réception, lors d'un contrôle de type SHM d'une plaque composite stratifiée présentant potentiellement des défauts. Le travail a été organisé suivant deux axes :

(1) Le calcul du champ incident modélisant la propagation d'une onde élastique générée par un capteur piézoélectrique émetteur dans une plaque saine. La question ici est de développer une méthode numérique efficace qui peut prendre en compte la richesse paramétrique des configurations de contrôles (type de source, fréquence des signaux, stratifications, ...) tout en étant robuste par rapport à l'épaisseur du milieu de propagation. En effet, le principal point critique de notre problème est que l'épaisseur des plaques considérées est très faible devant la longueur d'onde la plus petite. Cet axe de travail est motivé par les deux aspects suivants :

- (i) Un calcul en force de l'équation élastique tridimensionnelle en régime temporel discrétisée par un schéma explicite en temps est trop coûteux car la CFL est contrainte par la taille de l'épaisseur. Par ailleurs, les schémas complètement implicites ne présentent pas cette limitation mais sont proscrits (sans traitement particulier) étant donnée la taille des problèmes considérés.
- (ii) Une alternative aurait pu être le recours aux modèles asymptotiques ([31; 3; 30; 72]). Cependant, l'utilisation des modèles de plaques classiques, par exemple les modèles de type Reissner-Mindlin ou Kirchhoff-Love ne semble pas évidente pour notre application. En effet, ces modèles n'ont pas été construits et justifiés pour des problèmes transitoires de propagation d'ondes dans des plaques stratifiées (un grand nombre de travaux sont réalisés en statique pour des matériaux homogènes isotropes).

La principale contribution de cette partie est donc de proposer et analyser une méthode numérique qui couple un schéma implicite dans l'épaisseur à un schéma explicite dans les autres directions. Des résultats numériques seront présentés, montrant l'efficacité et la précision de l'approche proposée sur des applications réalistes.

(2) La simulation de l'interaction du champ incident avec un ou plusieurs défauts est décrite par une équation élastique en régime temporel dans une plaque. Le domaine de propagation étant considéré grand par rapport à la taille du défaut et par rapport aux longueurs d'ondes, il devient nécessaire de restreindre les calculs autour des zones defectueuses. De nombreuses stratégies existent pour traiter le cas acoustique scalaire, élastique isotrope, et quelques stratégies pour des configurations plus compliquées (par exemple anisotrope).

Mentionnons tout d'abord les conditions aux limites absorbantes (CLA) qui ont été introduites dans les années 70 dans [43] et étendues ou analysées par la suite par de nombreux auteurs [11; 50; 53] (voir [47; 48] pour une review). Ces techniques visent à borner le domaine de calcul en écrivant une relation, faisant intervenir des opérateurs locaux et éventuellement des inconnues auxiliaires, satisfaite approximativement par les traces de la solution au bord du domaine. Ces stratégies, bien que généralement très efficaces, présentent quelques désavantages, tout d'abord leur extension à des géométries non droites est non triviale (voir [4]), leur stabilité n'est pas systématiquement garantie (voir tout de même [52]), mais surtout leur écriture est très dépendante de l'équation sous-jacente (voir [23] pour une extension de ces techniques au cas d'ondes convectées).

Une stratégie concurrente, les PML [13] puis [29], développée dans les années 90, consiste à entourer le domaine de calcul par des milieux absorbants parfaitement adaptés au sens où une onde se propage du domaine de calcul vers le milieu absorbant sans réflexions. De par leur simplicité d'implémentation, leur précision et la possibilité de les construire (au moins formellement) pour des systèmes généraux

[5], ces techniques ont connu un fort succès et de nombreuses extensions ont suivi [41; 24; 25; 10; 39]. Concernant l'utilisation des PML pour l'élasticité, l'analyse proposée dans [22] fait date, elle montre que pour certains milieux élastiques orthotropes les stratégies PML classiques sont instables. À ce jour la question de construire des PML stables pour ces cas-là est encore ouverte.

Une troisième stratégie, plus en lien avec ce qui sera proposé dans ce manuscrit, est la technique des potentiels retardés [51]. Ici, la connaissance de la fonction de Green du milieu extérieur est utilisée pour réduire les calculs à effectuer aux bords d'un obstacle. Il s'ensuit un problème où des opérateurs non-locaux espace-temps, possédant de bonnes propriétés mathématiques sont définis sur la frontière du domaine, et doivent être inversés. Pour ce faire, une stratégie efficace est l'utilisation de la *fast convolution quadrature method (CQM)* [9; 8] qui s'appuie sur l'utilisation de la transformée en Z (voir aussi [65]). Notons que le couplage de ces méthodes avec une zone où un schéma éléments finis est utilisé, est possible (voir [1]) mais ne permet pas de façon évidente d'utiliser les techniques d'accélération s'appuyant sur la transformée en Z. De plus, comme mentionné, l'utilisation des équations intégrales nécessite la connaissance (ou le calcul) de la fonction de Green du milieu qui, dans le cas de plaques stratifiées, est loin d'être évidente (ou potentiellement trop coûteux).

Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés à la méthode des demi-espaces raccordés (Halfspace Matching (HsM) method) inspirée des travaux de doctorat de S. Fliss [44] et J. Coatleven [33; 34], puis développée dans la thèse de A. Tonnoir [76; 19] et Y. Tjandrawidjaja [75; 18] dans un cadre fréquentiel.

Plus précisément, l'idée clé de cette méthode a été initialement développée lors des travaux de thèse [44] de S. Fliss sur les milieux périodiques bidimensionnels en régime harmonique, puis J. Coatleven [33; 34] a proposé une extension au cadre temporel, A. Tonnoir [76; 19] l'a étendue au cadre des équations élastiques en milieu bidimensionnel infini anisotrope en régime harmonique. Finalement, l'extension de cette méthode à des plaques tridimensionnelles, infinies dans deux directions et bornées dans la troisième direction a été ensuite développée dans la thèse de doctorat de Y. Tjandrawidjaja [75; 18].

Dans la continuité de ces travaux, l'objectif de ce deuxième axe de travail consiste à poursuivre les travaux de J. Coatleven [33; 34] et d'étendre cette méthode au régime temporel pour traiter le problème de l'interaction d'un défaut avec une onde incidente dans une plaque élastique anisotrope stratifiée. Bien que nous nous concentrons sur le cas des ondes acoustiques en milieu isotrope ou anisotrope 2D, la méthode est construite avec un souci de généralité qui nous permettra de l'étendre naturellement au cas des systèmes d'équations d'ondes tel que l'élasticité.

Le travail réalisé a été valorisé et intégré de la façon suivante :

- Écriture et analyse de convergence d'un schéma implicite-explicite robuste et efficace pour la propagation d'ondes dans des plaques stratifiées : ce schéma a été implémenté en C++ à partir du code existant au CEA LIST et une version industrielle est intégrée dans la version commerciale de la plateforme de calcul CIVA.
- Extension de la méthode HsM au cas temporel en acoustique isotrope et anisotrope : cette extension a été implémentée dans l'environnement de développement XLIFE++.

-
- Participation à deux conférences avec soumission de Proceedings avec comité de lecture (WAVES 2019 et NDT Aerospace 2019).
 - L'écriture d'un article associé aux développements de l'axe de travail I est en cours.

Nous détaillons maintenant chacune des deux parties du manuscrit qui sont liées à ces axes de travail.

(I) Méthode numérique pour la propagation d'ondes dans des plaques stratifiées

Dans la première partie de ce manuscrit, nous nous concentrons sur la partie émission c'est-à-dire le calcul du champ incident modélisant la propagation d'ondes générées par un capteur piézoélectrique émetteur dans une plaque saine (sans défauts). Dans notre application, ce capteur est un patch mince placé sur la surface supérieure de la plaque que nous pouvons modéliser par un chargement surfacique (agissant sur la surface supérieure de la plaque) ayant une composante nulle dans la direction de l'épaisseur. Le principal point critique de notre problème est que l'épaisseur de la plaque est très faible devant la longueur d'onde la plus petite. Par exemple, lorsqu'on utilise un schéma explicite, le choix du pas de temps est fortement lié à la faible épaisseur de la plaque (la condition de stabilité de ce schéma dépend de la discrétisation dans l'épaisseur et donc de l'épaisseur), ce qui rend ce schéma très coûteux en termes de temps de calcul lorsque l'épaisseur devient très petite. Un schéma purement implicite, ne peut être résolu directement, étant donnée la taille des problèmes considérés, et des méthodes itératives préconditionnées doivent être utilisées. Établir un préconditionneur efficace pour ce schéma implicite est une question difficile. Nous proposons dans le chapitre 1 un schéma implicite-explicite dont nous analysons la convergence dans le chapitre 2. Soit dit en passant ce schéma nous a permis de proposer un préconditionneur efficace pour le schéma implicite. Néanmoins cette stratégie reste coûteuse par rapport à la stratégie implicite-explicite efficace que nous détaillerons.

Dans le chapitre 1, nous commençons par présenter les équations du problème modèle (section 1.1). Ce problème modèle est posé sur un domaine mince dont l'épaisseur est proportionnelle à un petit paramètre δ . Après avoir remis ce problème à l'échelle dans la section 1.2 (c'est-à-dire après écriture des équations sous-jacentes dans un domaine indépendant du petit paramètre δ), nous présentons, dans la sous-section 1.3.1, une stratégie de discrétisation en espace basée sur des éléments finis spectraux anisotropes (c'est-à-dire avec des ordres d'approximations différents dans le plan tangent et dans la direction de l'épaisseur).

Ensuite dans la sous-section 1.3.2, nous revenons sur les schémas de discrétisation en temps explicite et implicite usuels et nous proposons le schéma implicite-explicite combinant ces deux approches. Les formes bilinéaires ne faisant intervenir que des dérivées spatiales le long de l'épaisseur sont discrétisées implicitement tandis que les autres termes (termes n'incluant que des dérivées dans le plan tangent et les termes croisés) sont discrétisés explicitement. Grâce aux propriétés de condensation de masse des éléments finis spectraux, les systèmes linéaires à inverser, à chaque itération, sont découplés suivant la direction de l'épaisseur et ne font intervenir que les degrés de liberté dans l'épaisseur.

L'objectif est que l'approche proposée pallie aux défauts des schémas purement explicite et purement implicite et offre ainsi une alternative robuste et efficace lorsque

l'épaisseur de la plaque est faible (δ petit), ou le nombre de stratifications est élevé. Notons que cette approche combine la stratégie présentée dans les travaux de T. Rylander [68] où des méthodes implicites-explicites pour des problèmes en électromagnétisme sont présentées avec des stratégies de splitting proposées par M. Hochbruch (alternating direction implicit method) [54].

Dans la sous-section 1.3.3, une analyse par technique d'énergie des schémas mentionnés est réalisée. Cette analyse confirme les bonnes propriétés du schéma implicite-explicite en obtenant, notamment, une condition de stabilité indépendante du petit paramètre δ . Dans les sous-sections 1.4.1 à 1.4.3, nous revenons en détail sur les estimations de stabilité de la sous-section 1.3.3 en estimant de manière précise (c'est-à-dire en prenant en compte la discrétisation spatiale et la géométrie du problème) les quotients de Rayleigh qui interviennent.

La sous-section 1.4.4 est dédiée à la présentation d'un préconditionneur pour le schéma implicite. Ce préconditionneur a été imaginé à partir de la construction et l'étude du schéma implicite-explicite. Bien que nous n'ayons pas pu montrer théoriquement sa robustesse, les résultats numériques de la section suivante la montrent en pratique. Finalement, dans la section 1.5, des résultats numériques sont présentés et ils montrent que, pour atteindre une précision raisonnable donnée et pour des épaisseurs de plaques faibles (δ petit) : le schéma explicite a un coût élevé et inversement proportionnel à δ , le schéma implicite préconditionné est robuste (coût observé très peu dépendant de δ), mais reste néanmoins bien moins efficace que le schéma implicite-explicite. Par ailleurs, les résultats numériques montrent que le schéma implicite-explicite converge à l'ordre 2 en temps en norme L^∞ en temps et L^2 en espace, à δ fixé.

Dans le chapitre 2, nous nous sommes intéressés à l'analyse de convergence des schémas complètement discrétisés. Nous avons dans un premier temps, dans les sous-sections 2.2.1 et 2.2.2, rappelé les éléments classiques de l'analyse pour les schémas explicite et implicite. Cette analyse préliminaire nous a permis deux choses. Tout d'abord, nous avons explicité la dépendance en δ dans l'analyse de ces deux schémas (cet aspect n'est pas traité dans la littérature à notre connaissance car il est spécifique à notre problème). Par ailleurs, cette étape prépare l'analyse du cas implicite-explicite qui est plus complexe et présentée en sous-section 2.2.3. Un résultat important de l'analyse de ce schéma est que nous avons montré une convergence en temps d'ordre 1 uniforme en δ au prix d'une hypothèse (\mathcal{H}) sur la solution du problème continu, à savoir que sa dérivée le long de l'épaisseur est en $O(\delta)$.

Finalement dans la dernière section de cette partie, nous investiguons l'hypothèse (\mathcal{H}) faite sur la solution du problème continu pour obtenir la convergence uniforme. Pour cela, nous nous plaçons dans un domaine infini dans le plan tangent et utilisons une stratégie d'analyse asymptotique pour trouver sous quelles conditions sur les données du problème (coefficients matériaux et source) l'hypothèse (\mathcal{H}) est vérifiée.

(II) La méthode des demi-espaces raccordés en transitoire

Dans le chapitre 3, nous rappelons le principe de la méthode des demi-espaces raccordés (HsM: Halfspace Matching), pour une équation elliptique à coefficients constants posée dans un domaine non borné (typiquement \mathbb{R}^2). L'idée clé de la méthode HsM est que l'on peut exprimer (via la transformée de Fourier pour les milieux homogènes ou la transformée de Floquet-Bloch pour les milieux périodiques) toute solution dans un demi-plan en fonction de sa trace sur le bord. L'approche consiste ensuite à utiliser

plusieurs représentations analytiques de la solution dans des demi-plans entourant la région d'intérêt bornée et d'imposer que ces représentations coïncident là où elles existent (des quarts de plan dans notre cas). Dans la zone d'intérêt, une représentation EF peut être utilisée et doit être couplée également aux représentations dans les demi-espaces. Les inconnues de la formulation sont les restrictions de la solution dans la zone bornée et ses traces aux bords des demi-espaces. Cela conduit à une formulation couplant via des opérateurs intégraux, à la fois la solution dans la région bornée et ses traces sur les bords des demi-plans. La méthode a été justifiée rigoureusement dans [19] pour des problèmes harmoniques avec dissipation (i.e. des problèmes elliptiques) et dans [17] pour des problèmes harmoniques sans dissipation. L'analyse numérique a été effectuée dans [76]. Nous rappelons dans ce chapitre ces résultats.

Dans le chapitre 4, nous étudions l'extension de la méthode HsM pour des problèmes temporels. Comme déjà mentionné, nous nous concentrons, pour une bonne partie de ce chapitre, sur l'équation des ondes scalaires dans un milieu homogène et isotrope (à des perturbations locales près). Nous rappelons tout de même que bien que d'autres méthodes de type PML par exemple ou CLA marchent dans ce cas et soient plus simples, la méthode HsM va s'étendre dans des situations où les méthodes classiques ne marchent pas. Dans la section 4.2, la méthode HsM en temps est présentée dans le cadre du calcul transitoire et continu de la solution d'une équation d'onde à l'extérieur d'un carré : on parlera d'un problème extérieur. Par opposition au cas statique, les opérateurs faisant intervenir les traces font intervenir une convolution (en temps) avec des fonctions de Green. La stratégie la plus naturelle serait de discrétiser en temps les équations obtenues. Cependant, cette approche présente deux problèmes : d'une part, il n'est pas clair que le problème discrétisé en temps soit stable, d'autre part on utilise ici une expression explicite de la fonction de Green. Cet aspect va à l'encontre de la volonté de proposer une méthode généralisable à d'autres physiques. Nous prenons donc un contre-pied : nous utilisons une stratégie introduite dans [6] et utilisée notamment dans [7] pour l'équation de Schrödinger mais aussi dans [14; 15; 16; 62] pour des équations ou des systèmes d'équations dispersives unidimensionnelles et enfin dans [33; 34] pour l'équation des ondes scalaires en milieux périodiques. Plus précisément, alors qu'habituellement nous semi-discrétisons tout d'abord en espace (voir aussi chapitres 1 et 2), ici nous semi-discrétisons en temps (par un schéma implicite) le problème (qui reste continu en espace), auquel nous appliquons les idées de la méthode HsM. À la place de la fonction de Green du milieu, nous devons calculer (numériquement et pour chaque variable de Fourier) des fonctions dites canoniques solutions de problèmes de demi-lignes avec données de Dirichlet aux bords. Les opérateurs de traces obtenus font intervenir une convolution discrète avec ces fonctions canoniques. Le caractère bien posé du problème obtenu est une conséquence directe de l'équivalence entre le problème obtenu par la HsM et le problème de départ. Dans les sections 4.4 et 4.5, les aspects de discrétisation en espace et en Fourier sont discutés et des résultats numériques sont présentés. Une des difficultés pratiques de la méthode est liée au coût de calcul des produits de convolution qui interviennent. Une stratégie envisagée en section 4.6 pour remédier à ce problème est l'utilisation de la transformée en Z .

Dans la section 4.7, nous nous intéressons à la résolution de l'équation des ondes dans un domaine non borné quelconque discrétisé par un schéma implicite et pour lequel la formulation HsM est couplée à une méthode EF. Nous introduisons les équations

couplées et présentons des résultats numériques. Finalement en section 4.8, nous montrons que la méthode s'étend naturellement au cas des milieux anisotropes.

Première partie

Méthode numérique pour la
propagation d'ondes dans des
plaques stratifiées

CHAPITRE 1

Construction d'un schéma implicite-explicite

Nous commençons par présenter les équations du problème modèle qui est posé sur un domaine mince dont l'épaisseur est proportionnelle à un petit paramètre δ . Après avoir remis ce problème à l'échelle, nous présentons une stratégie de discrétisation en espace basée sur des éléments finis spectraux anisotropes.

Ensuite, nous revenons sur les schémas de discrétisation en temps explicite et implicite usuels et nous proposons le schéma implicite-explicite combinant ces deux approches. Les formes bilinéaires ne faisant intervenir que des dérivées spatiales le long de l'épaisseur sont discrétisées implicitement tandis que les autres termes sont discrétisés explicitement. Grâce aux propriétés de condensation de masse des éléments finis spectraux, les systèmes linéaires à inverser, à chaque itération, sont découplés suivant la direction de l'épaisseur et ne font intervenir que les degrés de liberté dans l'épaisseur. L'objectif de l'approche est de proposer une alternative robuste et efficace lorsque δ est petit.

Une analyse par technique d'énergie des schémas mentionnés est réalisée. Cette analyse confirme les bonnes propriétés du schéma implicite-explicite en obtenant, notamment, une condition de stabilité indépendante de δ . Puis, nous présentons des estimations de stabilité en estimant de manière précise les quotients de Rayleigh qui interviennent.

Par ailleurs, nous nous intéressons à la présentation d'un préconditionneur pour le schéma implicite. Ce préconditionneur a été imaginé à partir de la construction et l'étude du schéma implicite-explicite. Bien que nous n'ayons pas pu montrer théoriquement sa robustesse, on l'observe numériquement. Finalement, des résultats numériques sont présentés et ils montrent que, pour atteindre une précision raisonnable donnée et pour δ petit : le schéma explicite a un coût élevé et inversement proportionnel à δ , le schéma implicite préconditionné est robuste (coût observé très peu dépendant de δ), mais reste néanmoins bien moins efficace que le schéma implicite-explicite. De plus, ils montrent que le schéma implicite-explicite converge à l'ordre 2 en temps en norme L^∞ en temps et L^2 en espace.

Sommaire

1.1	Présentation du problème modèle	13
1.2	Mise à l'échelle du problème modèle, caractère bien posé et stabilité du problème continu	15
1.2.1	Mise à l'échelle du problème modèle	15
1.2.2	Caractère bien posé et stabilité du problème continu	18
1.3	Discrétisation du problème mis à l'échelle	21
1.3.1	Semi-discrétisation en espace	21
1.3.2	Discrétisation totale et présentation des schémas explicite, implicite et implicite-explicite	27

1.3.3	Identités d'énergies et propriétés des énergies discrètes	29
1.4	Estimations de quotients de Rayleigh, des CFL et des condi- tionnements	35
1.4.1	Estimations de quotients de Rayleigh	35
1.4.2	Estimation du pas de temps pour le schéma explicite	41
1.4.3	Estimation de la CFL pour le schéma implicite-explicite	42
1.4.4	Préconditionnement pour le schéma implicite	43
1.5	Résultats numériques	45
1.5.1	Validation des propriétés de convergence et de robustesse du schéma implicite-explicite	45
1.5.2	Comparaisons des temps de calcul	47

1.1 Présentation du problème modèle

Notre objectif est de construire une discrétisation efficace en espace et en temps, en tenant compte de la petite épaisseur. Afin de rendre explicite la dépendance de notre problème vis-à-vis de l'épaisseur de la plaque, nous noterons δ la demi-épaisseur de la plaque, qui apparaîtra comme un paramètre dans la suite. Le domaine de la plaque est noté $\Omega^\delta = \Sigma \times (-\delta, \delta)$ avec $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ sa surface médiane.

Nous considérons le problème élastodynamique

$$\begin{cases} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^\delta - \operatorname{div}(\mathbf{C}^\delta \varepsilon(\mathbf{u}^\delta)) = 0 & \text{dans } \Omega^\delta \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{C}^\delta \varepsilon(\mathbf{u}^\delta) \mathbf{n} = (\mathbf{g}^+)^\delta & \text{sur } \Gamma_+^\delta \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{C}^\delta \varepsilon(\mathbf{u}^\delta) \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega^\delta \setminus \Gamma_+^\delta \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{u}^\delta(\cdot, 0) = \partial_t \mathbf{u}^\delta(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega^\delta, \end{cases} \quad (1.1)$$

où Γ_+^δ est la face supérieure de la plaque (voir Figure 1.1).

La densité ρ du milieu est indépendante de δ (contrairement à ce qui est fait dans [31; 3; 30; 72], où il est supposé que $\rho^\delta = \delta^2 \rho$ sans justification précise). Nous supposons que $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et qu'il existe deux constantes ρ^- et ρ^+ telles que

$$\rho^- = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega^\delta} \rho(\mathbf{x}), \quad \rho^+ = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega^\delta} \rho(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

Le terme source $(\mathbf{g}^+)^\delta$ vérifie

$$(\mathbf{g}^+)^\delta = \delta (g_1^+, g_2^+, 0)^t = \delta \mathbf{g}^+, \quad (1.3)$$

où $g_1^+, g_2^+ \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^+; L^2(\Gamma_+^\delta))$. Nous verrons à la Remarque 1 que l'hypothèse de la dépendance du terme source en δ garantit que les solutions sont bornées lorsque δ tend vers 0.

Le tenseur de déformations linéarisé $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ est défini sous les hypothèses de petites déformations par

$$\varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_1 v_1 & \cdot & \cdot \\ \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2 & 2\partial_2 v_2 & \cdot \\ \partial_3 v_1 + \partial_1 v_3 & \partial_3 v_2 + \partial_2 v_3 & 2\partial_3 v_3 \end{pmatrix}.$$

Enfin, nous considérons un milieu stratifié dans la direction de l'épaisseur, modélisé par \mathbf{C}^δ le tenseur de rigidité d'ordre 4 vérifiant

$$\mathbf{C}^\delta(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{C}(x_1, x_2, x_3/\delta),$$

avec $\mathbf{C} = (C_{ijkl})_{1 \leq i, j, k, l \leq 3}$ un tenseur de rigidité indépendant de δ potentiellement hétérogène. La propriété de symétrie du tenseur \mathbf{C} nous permet de simplifier sa représentation en une matrice $\tilde{\mathbf{C}}$ de taille 6×6 dont les composantes s'identifient dans les notations de Voigt comme

$$\tilde{C}_{p(ij)p(kl)} = C_{ijkl} \quad \forall 1 \leq i, j, k, l \leq 3,$$

où p est une fonction définie par

$$\begin{cases} p(i, j) = p(j, i) & 1 \leq i, j \leq 3, \\ p(1, 1) = 1, & p(2, 2) = 2, & p(3, 3) = 3, \\ p(1, 2) = 6, & p(1, 3) = 5, & p(2, 3) = 4. \end{cases}$$

Dans les notations de Voigt, le tenseur de déformations linéarisé ε est représenté par $\tilde{\varepsilon}$ défini par

$$\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{12})^t,$$

et le tenseur de rigidité \mathbf{C} est représenté par $\tilde{\mathbf{C}}$ qui vérifie

$$\tilde{\varepsilon}_1^t \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\varepsilon}_2 = \mathbf{C} \varepsilon_1 : \varepsilon_2,$$

et qui s'écrit

- pour un milieu anisotrope

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix},$$

- pour un milieu orthotrope

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

- pour un milieu isotrope

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix},$$

avec $c_{11} = \lambda + 2\mu$, $c_{12} = \lambda$ et $c_{44} = \mu$ où λ et μ sont appelés les coefficients de Lamé.

De plus, nous supposons que \mathbf{C} vérifie

- une propriété de coercivité : il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\alpha |\varepsilon|^2 \leq \mathbf{C} \varepsilon : \varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^3), \quad (1.5)$$

- une propriété de continuité : il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$|\mathbf{C} \varepsilon| \leq \beta |\varepsilon|, \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^3), \quad (1.6)$$

où $\mathcal{L}_s(\mathbb{R}^3)$ est l'espace des tenseurs symétriques sur \mathbb{R}^3 et $|\cdot|$ est la norme définie par

$$|\varepsilon|^2 = \sum_{i,j=1}^3 |\varepsilon_{ij}|^2, \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3).$$

À partir de cette norme, nous définissons la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega^\delta)^{3 \times 3}}$

$$\|\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\delta)^{3 \times 3}}^2 = \int_{\Omega^\delta} |\varepsilon|^2 d\Omega^\delta, \quad \forall \varepsilon \in L^2(\Omega^\delta)^{3 \times 3}.$$

L'objectif de ce chapitre est de proposer un schéma de discrétisation avec des propriétés de stabilité et de consistance indépendantes de δ .

1.2 Mise à l'échelle du problème modèle, caractère bien posé et stabilité du problème continu

1.2.1 Mise à l'échelle du problème modèle

Afin de définir la solution sur un domaine fixe indépendant de l'épaisseur, le problème (1.1) est mis à l'échelle de façon à transformer le domaine d'épaisseur 2δ en un domaine d'épaisseur 2.

Changement de variables et équations mises à l'échelle

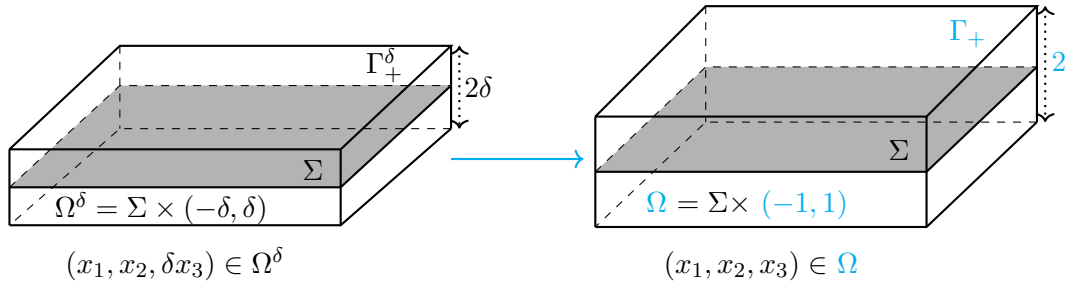


FIGURE 1.1 – Transformation du domaine de plaque d'épaisseur 2δ en un domaine d'épaisseur 2

Nous transformons chaque point $(x_1, x_2, \delta x_3) \in \Omega^\delta = \Sigma \times (-\delta, \delta)$ en un point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega = \Sigma \times (-1, 1)$. Nous notons Γ_+ la face supérieure de Ω . Soit $\hat{\mathbf{u}}^\delta$ le déplacement mis à l'échelle défini sur un domaine fixe

$$\hat{\mathbf{u}}^\delta(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{u}^\delta(x_1, x_2, \delta x_3, t) \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Ce changement de variable aura pour effet de transférer la dépendance en δ de la géométrie aux opérateurs différentiels. En effet, les dérivées partielles en espace $\partial_i \hat{\mathbf{u}}^\delta$ s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_i \hat{\mathbf{u}}^\delta(x_1, x_2, x_3, t) = \partial_i \mathbf{u}^\delta(x_1, x_2, \delta x_3, t) & i = 1, 2, \\ \partial_3 \hat{\mathbf{u}}^\delta(x_1, x_2, x_3, t) = \delta \partial_3 \mathbf{u}^\delta(x_1, x_2, \delta x_3, t), \end{cases} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Pour simplifier l'écriture des équations, nous introduisons le tenseur de déformations linéarisé mis à l'échelle

$$\varepsilon^\delta(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_1 v_1 & \cdot & \cdot \\ \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2 & 2\partial_2 v_2 & \cdot \\ \delta^{-1}\partial_3 v_1 + \partial_1 v_3 & \delta^{-1}\partial_3 v_2 + \partial_2 v_3 & 2\delta^{-1}\partial_3 v_3 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

qui se décompose sous la forme

$$\varepsilon^\delta(\mathbf{v}) = \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) + \delta^{-1}\varepsilon_\nu(\mathbf{v}), \quad (1.8)$$

où ε_τ est le tenseur associé aux dérivées dans le plan tangent

$$\varepsilon_\tau(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_1 v_1 & \cdot & \cdot \\ \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2 & 2\partial_2 v_2 & \cdot \\ \partial_1 v_3 & \partial_2 v_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

et ε_ν est le tenseur correspondant à la dérivée dans la direction de l'épaisseur

$$\varepsilon_\nu(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \\ \partial_3 v_1 & \partial_3 v_2 & 2\partial_3 v_3 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Formulation faible du problème mis à l'échelle

Supposons que \mathbf{u}^δ est une solution régulière du problème (1.1) et soit \mathbf{v}^δ une fonction test dans $H^1(\Omega^\delta)^3$. En utilisant la formule de Green et le fait que $\mathbf{C}\varepsilon^\delta(\widehat{\mathbf{u}}^\delta)$ est symétrique, nous avons

$$\int_{\Omega^\delta} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}^\delta}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v}^\delta \, d\Omega^\delta + \int_{\Omega^\delta} \mathbf{C}^\delta \varepsilon(\mathbf{u}^\delta) : \varepsilon(\mathbf{v}^\delta) \, d\Omega^\delta = \int_{\Gamma_+^\delta} (\mathbf{g}^+)^\delta \cdot \mathbf{v}^\delta \, d\Gamma_+^\delta.$$

En utilisant le changement de variables introduit dans la sous-section 1.2.1, nous obtenons

$$\delta \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \widehat{\mathbf{u}}^\delta}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \delta \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon^\delta(\widehat{\mathbf{u}}^\delta) : \varepsilon^\delta(\mathbf{v}) \, d\Omega = \delta \int_{\Gamma_+} (g_1^+, g_2^+, 0)^t \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+.$$

En introduisant $\mathbf{V} = H^1(\Omega)^3$, la formulation variationnelle du problème mis à l'échelle consiste alors à trouver $\widehat{\mathbf{u}}^\delta(t) \in \mathbf{V}$, pour tout $t \geq 0$, vérifiant pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

$$\frac{d^2}{dt^2} m(\widehat{\mathbf{u}}^\delta, \mathbf{v}) + a^\delta(\widehat{\mathbf{u}}^\delta, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \quad (1.11)$$

où pour tous $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, nous avons

$$m(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega : \text{la forme bilinéaire est dite de masse}, \quad (1.12)$$

$$a^\delta(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon^\delta(\mathbf{w}) : \varepsilon^\delta(\mathbf{v}) \, d\Omega : \text{la forme bilinéaire est dite de rigidité}, \quad (1.13)$$

$$\ell(\mathbf{v}) := \int_{\Gamma_+} (g_1^+, g_2^+, 0)^t \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+. \quad (1.14)$$

Remarque 1. L'écriture de la formulation variationnelle (1.11) nous rassure sur le choix (1.3) de la dépendance du terme source en δ car si nous avons pris un terme source indépendant de δ , la forme linéaire associée à ce terme source aurait été proportionnelle à δ^{-1} et par conséquent la famille de solutions $\hat{\mathbf{u}}^\delta$ aurait explosé lorsque δ tend vers 0.

Remarque 2. (Formulation forte du problème mis à l'échelle) En utilisant le changement de variables introduit dans la sous-section 1.2.1, le problème (1.1) que nous cherchons à résoudre devient

$$\begin{cases} \rho \partial_t^2 \hat{\mathbf{u}}^\delta - \operatorname{div}^\delta (\mathbf{C} \varepsilon^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta)) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{C} \varepsilon^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta) \mathbf{n} = (g_1^+, g_2^+, 0)^t & \text{sur } \Gamma_+ \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{C} \varepsilon^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta) \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_+ \times \mathbb{R}^+, \\ \hat{\mathbf{u}}^\delta(\cdot, 0) = \partial_t \hat{\mathbf{u}}^\delta(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.15)$$

où

$$\operatorname{div}^\delta (\mathbf{C} \varepsilon^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta)) = \begin{pmatrix} \partial_1 \sigma_{11}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta) + \partial_2 \sigma_{12}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta) + \frac{1}{\delta} \partial_3 \sigma_{13}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta) \\ \partial_1 \sigma_{21}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta) + \partial_2 \sigma_{22}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta) + \frac{1}{\delta} \partial_3 \sigma_{23}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta) \\ \partial_1 \sigma_{31}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta) + \partial_2 \sigma_{32}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta) + \frac{1}{\delta} \partial_3 \sigma_{33}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta) \end{pmatrix}.$$

Décomposition de la forme bilinéaire de rigidité a^δ

En utilisant la décomposition du tenseur de déformations linéarisé mis à l'échelle ((1.8), (1.9) et (1.10)), la forme bilinéaire de rigidité a^δ peut se réécrire

$$a^\delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_{\tau\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \delta^{-1} (a_{\tau\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_{\nu\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) + \delta^{-2} a_{\nu\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (1.16)$$

avec $a_{\tau\tau}$ la forme bilinéaire associée aux opérateurs différentiels dans le plan tangent, $a_{\nu\nu}$ la forme bilinéaire correspondant aux opérateurs différentiels dans la direction de l'épaisseur, $a_{\tau\nu}$ et $a_{\nu\tau}$ les formes bilinéaires associées aux opérateurs différentiels mixtes, définis par

$$a_{\tau\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_\tau(\mathbf{u}) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (1.17)$$

$$a_{\tau\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_\tau(\mathbf{u}) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}) \, d\Omega, \quad a_{\nu\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_{\tau\nu}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad (1.18)$$

$$a_{\nu\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_\nu(\mathbf{u}) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}) \, d\Omega. \quad (1.19)$$

Remarque 3. Pour un milieu orthotrope, les formes bilinéaires définies dans (1.17), (1.18) et (1.19) s'écrivent en utilisant (1.4)

$$\begin{cases} a_{\tau\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} c_{11} \partial_1 u_1 \partial_1 v_1 + c_{22} \partial_2 u_2 \partial_2 v_2 + c_{12} (\partial_2 u_2 \partial_1 v_1 + \partial_1 u_1 \partial_2 v_2) \\ \quad + c_{44} \partial_2 u_3 \partial_2 v_3 + c_{55} \partial_1 u_3 \partial_1 v_3 + c_{66} (\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) (\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2) \, d\Omega, \\ a_{\tau\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (c_{13} \partial_1 u_1 + c_{23} \partial_2 u_2) \partial_3 v_3 + c_{44} \partial_2 u_3 \partial_3 v_2 + c_{55} \partial_1 u_3 \partial_3 v_1 \, d\Omega, \\ a_{\nu\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} c_{55} \partial_3 u_1 \partial_3 v_1 + c_{44} \partial_3 u_2 \partial_3 v_2 + c_{33} \partial_3 u_3 \partial_3 v_3 \, d\Omega. \end{cases}$$

1.2.2 Caractère bien posé et stabilité du problème continu

Nous supposons $g_1^+, g_2^+ \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^+; L^2(\Gamma_+))$. D'après [59], le problème (1.11) admet une unique solution

$$\hat{\mathbf{u}}^\delta \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3) \cap C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)^3). \quad (1.20)$$

D'autres hypothèses de régularité sur g_1^+ et g_2^+ pourraient garantir l'existence et l'unicité de $\hat{\mathbf{u}}^\delta$ mais cette hypothèse suffit pour notre étude.

Inégalité de Korn pour le problème mis à l'échelle

Nous présentons maintenant des outils nécessaires pour la suite. Rappelons que l'inégalité de Korn nous assure l'existence d'une constante $C > 0$, ne dépendant que de la géométrie du domaine telle que

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C (\|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} + \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^3}), \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3. \quad (1.21)$$

Notre but est d'écrire une inégalité de Korn pour le problème mis à l'échelle (1.15), où la constante ne dépend pas de δ . Pour cela, introduisons

$$\mathbf{s}^\delta(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \delta v_3 \end{pmatrix}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3, \quad (1.22)$$

et

$$\kappa^\delta(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_1 v_1 & \cdot & \cdot \\ \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2 & 2\partial_2 v_2 & \cdot \\ \delta^{-1}(\partial_3 v_1 + \partial_1 v_3) & \delta^{-1}(\partial_3 v_2 + \partial_2 v_3) & 2\delta^{-2}\partial_3 v_3 \end{pmatrix}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3,$$

de manière à avoir

$$\varepsilon^\delta(\mathbf{v}) = \kappa^\delta(\mathbf{s}^\delta(\mathbf{v})), \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3. \quad (1.23)$$

Lemme 1. *Pour tout $\delta \in (0, 1)$, il existe une constante $C_K > 0$ indépendante de δ telle que*

$$\|\mathbf{s}^\delta(\mathbf{v})\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C_K (\|\varepsilon^\delta(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} + \|\mathbf{s}^\delta(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)^3}), \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3. \quad (1.24)$$

Démonstration. En appliquant l'inégalité de Korn (1.21) pour $\mathbf{s}^\delta(\mathbf{v}) \in H^1(\Omega)^3$, $\exists C_K > 0$ indépendante de δ vérifiant

$$\|\mathbf{s}^\delta(\mathbf{v})\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C_K (\|\varepsilon(\mathbf{s}^\delta(\mathbf{v}))\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} + \|\mathbf{s}^\delta(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)^3}).$$

Par ailleurs, pour $\delta \in (0, 1)$, nous avons

$$\|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \|\kappa^\delta(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}, \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3.$$

Par suite, il suffit d'utiliser (1.23) pour conclure. \square

Identité d'énergie et stabilité du problème continu

Notre objectif est de montrer que l'énergie du problème continu mis à l'échelle (1.11) est finie, et majorée par une constante indépendante de δ . Pour cette démonstration, nous allons utiliser l'inégalité de Korn définie dans le Lemme 1 et supposer que la solution est plus régulière qu'attendu.

Soit $\hat{\mathbf{u}}^\delta \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3) \cap C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)^3)$ solution de (1.11). Introduisons les énergies cinétique et potentielle du problème (1.11) définies respectivement par

$$\mathcal{K}(t) = \frac{1}{2}m(\partial_t \hat{\mathbf{u}}^\delta, \partial_t \hat{\mathbf{u}}^\delta), \quad \mathcal{P}(t) = \frac{1}{2}a^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta, \hat{\mathbf{u}}^\delta), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.25)$$

de sorte que l'énergie totale du problème (1.11) s'exprime comme

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{K}(t) + \mathcal{P}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (1.26)$$

Lemme 2. *Soit $\hat{\mathbf{u}}^\delta$ solution de (1.11), satisfaisant les hypothèses de régularité*

$$\hat{\mathbf{u}}^\delta \in C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)^3) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)^3). \quad (1.27)$$

Pour tout $T > 0$, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout $\delta \in (0, 1)$

$$\|\mathbf{s}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta)\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C_T \sup_{t \in (0, T)} \mathcal{E}^{1/2}(t), \quad \forall t \in (0, T), \quad (1.28)$$

où $\mathcal{E}(t)$ est l'énergie définie en (1.26).

Démonstration. L'application de l'inégalité de Korn (1.24) à $\mathbf{s}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta)$ donne

$$\|\mathbf{s}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta)\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C_K \left(\|\kappa^\delta(\mathbf{s}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta))\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} + \|\mathbf{s}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta)\|_{L^2(\Omega)^3} \right). \quad (1.29)$$

Nous cherchons maintenant à majorer les deux termes à droite de l'estimation précédente par $\mathcal{E}^{1/2}(t)$. Concernant le premier, en utilisant la propriété de coercivité (1.5) du tenseur \mathbf{C} ainsi que la définition (1.26) de l'énergie, nous avons

$$\|\kappa^\delta(\mathbf{s}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta))\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}^2 = \|\varepsilon^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta)\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}^2 \leq \frac{2}{\alpha} \mathcal{P}(t) \leq \frac{2}{\alpha} \mathcal{E}(t). \quad (1.30)$$

Concernant le second terme de (1.29), nous commençons par remarquer que $\delta < 1$ implique

$$\|\mathbf{s}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \|\hat{\mathbf{u}}^\delta\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

Ensuite, afin de faire apparaître l'énergie cinétique $\mathcal{K}(t)$, nous utilisons l'inégalité intégrale de Minkowski (en tenant compte des conditions initiales nulles)

$$\|\hat{\mathbf{u}}^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} = \left\| \int_0^t \partial_s \hat{\mathbf{u}}^\delta(\cdot, s) ds \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \int_0^t \|\partial_s \hat{\mathbf{u}}^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} ds.$$

En utilisant (1.2), nous obtenons l'estimation suivante

$$\|\hat{\mathbf{u}}^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \sqrt{\frac{2}{\rho^-}} \int_0^t \mathcal{K}^{1/2}(s) ds \leq \sqrt{\frac{2}{\rho^-}} \int_0^t \mathcal{E}^{1/2}(s) ds,$$

nous conduisant à

$$\|\mathbf{s}^\delta(\hat{\mathbf{u}}^\delta)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \sqrt{\frac{2}{\rho^-}} T \sup_{t \in (0, T)} \mathcal{E}^{1/2}(t). \quad (1.31)$$

En utilisant (1.29), (1.30) et (1.31), nous obtenons résultat (1.28). \square

Le lemme introduit ci-dessus nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit $\widehat{\mathbf{u}}^\delta$ solution de (1.11), satisfaisant les hypothèses de régularité (1.27). Supposons de plus que*

$$\mathbf{g}^+ = (g_1^+, g_2^+, 0)^t \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Gamma_+)^3). \quad (1.32)$$

Pour tout $T > 0$, il existe une constante $C_s(T) > 0$ indépendante de δ telle que

$$\mathcal{E}(t) \leq C_s(T), \quad t \in (0, T), \quad (1.33)$$

où $\mathcal{E}(t)$ est l'énergie définie en (1.26).

Démonstration. La solution $\widehat{\mathbf{u}}^\delta$ du problème variationnel (1.11) satisfait l'identité d'énergie

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = \left(\mathbf{g}^+, \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}^\delta}{\partial t} \right)_{L^2(\Gamma_+)^3}.$$

En tenant compte des conditions initiales nulles, cette identité est équivalente à

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \int_0^t \left(\mathbf{g}^+, \partial_s \widehat{\mathbf{u}}^\delta \right)_{L^2(\Gamma_+)^3} ds, \\ &= \left[\left(\mathbf{g}^+, \widehat{\mathbf{u}}^\delta \right)_{L^2(\Gamma_+)^3} \right]_0^t - \int_0^t \left(\partial_s \mathbf{g}^+, \widehat{\mathbf{u}}^\delta \right)_{L^2(\Gamma_+)^3} ds \quad (\text{car } \mathbf{g}^+ \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Gamma_+)^3)), \\ &= \left(\mathbf{g}^+, \widehat{\mathbf{u}}^\delta \right)_{L^2(\Gamma_+)^3} - \int_0^t \left(\partial_s \mathbf{g}^+, \widehat{\mathbf{u}}^\delta \right)_{L^2(\Gamma_+)^3} ds \quad (\text{car } \widehat{\mathbf{u}}^\delta(\cdot, 0) = 0), \\ &= \left(\mathbf{g}^+, \mathbf{s}^\delta(\widehat{\mathbf{u}}^\delta) \right)_{L^2(\Gamma_+)^3} - \int_0^t \left(\partial_s \mathbf{g}^+, \mathbf{s}^\delta(\widehat{\mathbf{u}}^\delta) \right)_{L^2(\Gamma_+)^3} ds \quad (\text{car } g_3^+ = 0). \end{aligned}$$

Une inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet d'écrire

$$\mathcal{E}(t) \leq \|\mathbf{g}^+\|_{L^2(\Gamma_+)^3} \|\mathbf{s}^\delta(\widehat{\mathbf{u}}^\delta)\|_{L^2(\Gamma_+)^3} + \int_0^t \|\partial_s \mathbf{g}^+\|_{L^2(\Gamma_+)^3} \|\mathbf{s}^\delta(\widehat{\mathbf{u}}^\delta)\|_{L^2(\Gamma_+)^3} ds.$$

En notant C_{Γ_+} la constante de continuité de l'opérateur trace sur Γ_+ , nous avons

$$\|\mathbf{s}^\delta(\widehat{\mathbf{u}}^\delta)\|_{H^{1/2}(\Gamma_+)^3} \leq C_{\Gamma_+} \|\mathbf{s}^\delta(\widehat{\mathbf{u}}^\delta)\|_{H^1(\Omega)^3}.$$

Ensuite, en utilisant le Lemme 2, nous obtenons

$$\mathcal{E}(t) \leq C_{\Gamma_+} C_T \sup_{t \in (0, T)} \mathcal{E}^{1/2}(t) \left(\|\mathbf{g}^+\|_{L^2(\Gamma_+)^3} + \int_0^t \|\partial_s \mathbf{g}^+\|_{L^2(\Gamma_+)^3} ds \right),$$

impliquant

$$\sup_{t \in (0, T)} \mathcal{E}(t) \leq C_{\Gamma_+} C_T \sup_{t \in (0, T)} \mathcal{E}^{1/2}(t) \left(\sup_{t \in (0, T)} \|\mathbf{g}^+\|_{L^2(\Gamma_+)^3} + \sup_{t \in (0, T)} \int_0^t \|\partial_s \mathbf{g}^+\|_{L^2(\Gamma_+)^3} ds \right). \quad (1.34)$$

Par ailleurs, l'hypothèse de régularité (1.32) de \mathbf{g}^+ nous permet d'assurer l'existence de $C_g(T) > 0$ vérifiant

$$\sup_{t \in (0, T)} \|\mathbf{g}^+\|_{L^2(\Gamma_+)^3} + \sup_{t \in (0, T)} \int_0^t \|\partial_s \mathbf{g}^+\|_{L^2(\Gamma_+)^3} ds \leq C_g(T). \quad (1.35)$$

De plus, nous avons

$$\mathcal{E}(t) \leq \sup_{t \in (0, T)} \mathcal{E}(t) \implies \mathcal{E}^{1/2}(t) \leq \left(\sup_{t \in (0, T)} \mathcal{E}(t) \right)^{1/2},$$

ou encore

$$\sup_{t \in (0, T)} \mathcal{E}^{1/2}(t) \leq \left(\sup_{t \in (0, T)} \mathcal{E}(t) \right)^{1/2}. \quad (1.36)$$

Finalement, en partant de (1.34) et en utilisant (1.36) et (1.35), nous arrivons au résultat (1.33). \square

1.3 Discrétisation du problème mis à l'échelle

1.3.1 Semi-discrétisation en espace

Nous considérons un maillage extrudé, c'est-à-dire que le maillage le long de l'épaisseur est obtenu par reproduction d'un maillage de la surface tangente Σ . Le maillage dans le volume Ω possède ainsi une structure en couches dans la direction de l'épaisseur. Dans un premier temps, nous décrivons le maillage de la surface Σ . Puis, nous expliquons comment obtenir le maillage volumique de toute la plaque. Ensuite, nous passons aux propriétés géométriques des triangulations construites à partir de quadrilatères ou d'hexaèdres.

Maillage de la surface Σ

Soit une famille de triangulations \mathcal{T}_h paramétrée par le pas de maillage $h > 0$. Pour chaque h , \mathcal{T}_h est une collection de $N_{h, \Sigma}$ quadrilatères fermés. Chaque quadrilatère est noté κ_ℓ avec $\ell \in \llbracket 1, N_{h, \Sigma} \rrbracket$ et on a

$$\bar{\Sigma} = \bigcup_{\kappa_\ell \in \mathcal{T}_h} \kappa_\ell, \quad h = \max_{\kappa_\ell \in \mathcal{T}_h} (h_\ell) \text{ où } h_\ell = \text{diam}(\kappa_\ell).$$

Chaque quadrilatère $\kappa_\ell \in \mathcal{T}_h$ est défini par ses sommets $\{\mathbf{s}_j^\ell\}_{j=0}^3 \subset \mathbb{R}^2$, avec $\ell \in \llbracket 1, N_{h, \Sigma} \rrbracket$. À chaque κ_ℓ , on peut associer une unique transformation \mathbf{f}_ℓ de $\hat{\kappa} = [0, 1]^2$ dans \mathbb{R}^2 , qui appartient à $Q_1(\hat{\kappa})$ et qui satisfait

$$\mathbf{f}_\ell(\hat{\kappa}) = \kappa_\ell.$$

Cette transformation est donnée par

$$\mathbf{f}_\ell(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \sum_{j=0}^3 \hat{\phi}_j(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \mathbf{s}_j^\ell, \quad \forall (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \hat{\kappa},$$

avec

$$\begin{cases} \hat{\phi}_0 = (1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2), & \hat{\phi}_2 = \hat{x}_1 \hat{x}_2, \\ \hat{\phi}_1 = \hat{x}_1(1 - \hat{x}_2), & \hat{\phi}_3 = (1 - \hat{x}_1) \hat{x}_2. \end{cases}$$

Obtention du maillage volumique de la plaque par extrusion

Nous construisons maintenant une triangulation $\mathcal{T}_{h, \eta}$ de $\Omega = \Sigma \times (-1, 1)$, par extrusion. Pour $0 < \eta < 1$, on se donne une subdivision de l'intervalle $(-1, 1)$ telle que

$$1 = z^{N_c+1} > z^{N_c} > \dots > z^1 = -1, \quad \eta = \max_{m \in \llbracket 1, N_c \rrbracket} |z^m - z^{m+1}|.$$

Pour chaque κ_ℓ , nous définissons ensuite N_c hexaèdres

$$K_{\ell,m} = \kappa_\ell \times [z^m, z^{m+1}], \quad \forall m \in \llbracket 1, N_c \rrbracket.$$

La triangulation $\mathcal{T}_{h,\eta}$ est construite comme l'ensemble des hexaèdres $K_{\ell,m}$ avec $\ell \in \llbracket 1, N_{h,\Sigma} \rrbracket$ et $m \in \llbracket 1, N_c \rrbracket$. Par construction, chaque $K_{\ell,m}$ est un hexaèdre ayant pour sommets

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} \mathbf{s}_j^\ell \\ z^k \end{array} \right), j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, k \in \llbracket m, m+1 \rrbracket \right\}.$$

À chaque $K_{\ell,m}$, nous pouvons associer une unique transformation $\mathbf{F}_{\ell,m}$ de $\widehat{K} = [0, 1]^3$ dans \mathbb{R}^3 , appartenant à $Q_1(\widehat{K})$ et vérifiant

$$\mathbf{F}_{\ell,m}(\widehat{K}) = K_{\ell,m}.$$

Cette transformation est donnée par

$$\mathbf{F}_{\ell,m}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{f}_\ell(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) \\ (1 - \widehat{x}_3)z_i + \widehat{x}_3 z_{i+1} \end{array} \right), \quad \forall (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3) \in \widehat{K}. \quad (1.37)$$

Propriétés géométriques des triangulations utilisées

Nous définissons la matrice Jacobienne $\nabla \mathbf{F}_{\ell,m}$

$$\nabla \mathbf{F}_{\ell,m}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3) = \left(\begin{array}{ccc} \partial_{\widehat{x}_1} F_{\ell,m}^1 & \partial_{\widehat{x}_2} F_{\ell,m}^1 & \partial_{\widehat{x}_3} F_{\ell,m}^1 \\ \partial_{\widehat{x}_1} F_{\ell,m}^2 & \partial_{\widehat{x}_2} F_{\ell,m}^2 & \partial_{\widehat{x}_3} F_{\ell,m}^2 \\ \partial_{\widehat{x}_1} F_{\ell,m}^3 & \partial_{\widehat{x}_2} F_{\ell,m}^3 & \partial_{\widehat{x}_3} F_{\ell,m}^3 \end{array} \right), \quad \forall (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3) \in \widehat{K},$$

et le Jacobien $J_{\ell,m}$

$$J_{\ell,m}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3) = \det \nabla \mathbf{F}_{\ell,m}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3), \quad \forall (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3) \in \widehat{K}.$$

Notre objectif est d'écrire des bornes "uniformes" (dans un sens à préciser) sur la matrice Jacobienne $\nabla \mathbf{F}_{\ell,m}$, son inverse $(\nabla \mathbf{F}_{\ell,m})^{-1}$, le Jacobien $J_{\ell,m}$ et son inverse $J_{\ell,m}^{-1}$. Nous aurons besoin de ces estimations pour l'analyse des schémas numériques que nous présenterons ultérieurement. Ces estimations vont dépendre des paramètres de triangulation, par exemple h et η ainsi que d'autres que nous définissons maintenant.

Pour chaque $\kappa_\ell \in \mathcal{T}_h$, soit T_j^ℓ le sous-triangle de κ_ℓ de sommets \mathbf{s}_{j-1}^ℓ , \mathbf{s}_j^ℓ et \mathbf{s}_{j+1}^ℓ avec $j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Nous introduisons ρ_ℓ^j le diamètre du cercle inscrit au sous-triangle T_j^ℓ , ainsi que ρ_ℓ et σ_ℓ (le facteur d'aspect) définis par

$$\rho_\ell = 2 \min_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket} (\rho_\ell^j), \quad \sigma_\ell = \frac{h_\ell}{\rho_\ell}. \quad (1.38)$$

Nous introduisons deux hypothèses sur nos triangulations concernant leur quasi-uniformité.

Quasi-uniformité de \mathcal{T}_h

La triangulation \mathcal{T}_h est dite quasi-uniforme s'il existe deux constantes $\sigma > 0$ et $\tau > 0$ indépendantes de h et de ℓ , telles que

$$\tau h \leq h_\ell \leq \sigma \rho_\ell, \quad \forall \ell \in \llbracket 1, N_{h,\Sigma} \rrbracket. \quad (1.39)$$

L'inégalité $\tau h \leq h_\ell \leq h$, pour tout $\ell \in \llbracket 1, N_{h,\Sigma} \rrbracket$, nous assure que toutes les mailles ont quasiment le même diamètre. Grâce à l'inégalité à droite de (1.39), le facteur d'aspect σ_ℓ ne dégénère pas, lorsqu'on raffine le maillage.

Quasi-uniformité d'une subdivision de l'intervalle $(-1, 1)$

Une subdivision de l'intervalle $(-1, 1)$ est dite quasi-uniforme s'il existe une constante $\mu > 0$ telle que

$$\mu\eta \leq |z^m - z^{m+1}| \leq \eta, \quad \forall m \in \llbracket 1, N_c \rrbracket. \quad (1.40)$$

Pour tout $\ell \in \llbracket 1, N_{h,\Sigma} \rrbracket$, nous définissons la matrice Jacobienne $\nabla \mathbf{f}_\ell$

$$\nabla \mathbf{f}_\ell(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}_1} f_\ell^1 & \partial_{\hat{x}_2} f_\ell^1 \\ \partial_{\hat{x}_1} f_\ell^2 & \partial_{\hat{x}_2} f_\ell^2 \end{pmatrix}, \quad \forall (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \hat{\kappa},$$

et le Jacobien j_ℓ

$$j_\ell(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \det \nabla \mathbf{f}_\ell(\hat{x}_1, \hat{x}_2), \quad \forall (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \hat{\kappa}.$$

Pour tout domaine D de dimension d ($d = 2$ ou 3), nous introduisons la norme $\|\cdot\|_{\infty, D}$ définie par

$$\|M\|_{\infty, D} = \sup_{\mathbf{x} \in D} \|M(\mathbf{x})\|, \quad \|M(\mathbf{x})\| = \sup_{\mathbf{v} \neq 0} \frac{\|M(\mathbf{x})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \forall M \in C^0(D, \mathbb{R}^{d \times d}),$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. Par ailleurs nous introduisons la norme $|\cdot|_{\infty, D}$ définie par

$$|\alpha|_{\infty, D} = \sup_{\mathbf{x} \in D} |\alpha(\mathbf{x})|, \quad \forall \alpha \in C^0(D, \mathbb{R}).$$

D'après la référence [46], nous avons les estimations suivantes : il existe une constante géométrique $C_g > 0$ indépendante de ℓ telle que

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{f}_\ell\|_{\infty, \hat{\kappa}} &\leq C_g h_\ell, & |j_\ell|_{\infty, \hat{\kappa}} &\leq C_g h_\ell^2, & (1.41) \\ \|\nabla \mathbf{f}_\ell^{-1}\|_{\infty, \kappa} &\leq C_g h_\ell / \rho_\ell^2, & |j_\ell^{-1}|_{\infty, \kappa} &\leq C_g / \rho_\ell^2. & (1.42) \end{aligned}$$

En revenant sur la définition de la matrice Jacobienne $\nabla \mathbf{F}_{\ell, m}$ et l'expression (1.37) de $\mathbf{F}_{\ell, m}$, nous déduisons que

$$\nabla \mathbf{F}_{\ell, m} = \left(\begin{array}{c|c} (\nabla \mathbf{f}_\ell) & \\ \hline & z^{m+1} - z^m \end{array} \right). \quad (1.43)$$

Le Jacobien $J_{\ell, m}$ est donné par

$$J_{\ell, m} = j_\ell(z^{m+1} - z^m), \quad \forall (\ell, m) \in \llbracket 1, N_{h,\Sigma} \rrbracket \times \llbracket 1, N_c \rrbracket. \quad (1.44)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant

Théorème 2. *Pour tout $(\ell, m) \in \llbracket 1, N_{h,\Sigma} \rrbracket \times \llbracket 1, N_c \rrbracket$, nous avons*

$$\|\nabla \mathbf{F}_{\ell, m}\|_{\infty, \hat{K}} \leq C_g h_\ell + \eta, \quad |J_{\ell, m}|_{\infty, \hat{K}} \leq C_g h_\ell^2 \eta, \quad (1.45)$$

$$\|\nabla \mathbf{F}_{\ell, m}^{-1}\|_{\infty, K} \leq C_g h_\ell / \rho_\ell^2 + 1/(\mu\eta), \quad |J_{\ell, m}^{-1}|_{\infty, K} \leq C_g / (\rho_\ell^2 \mu\eta). \quad (1.46)$$

Démonstration. D'après (1.43), nous avons

$$\frac{\|\nabla \mathbf{F}_{\ell, m} \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq \frac{\|\nabla \mathbf{f}_\ell(v_1, v_2)^t\|}{\|\mathbf{v}\|} + \frac{|(z^{m+1} - z^m)v_3|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \forall \mathbf{v} \neq 0.$$

Trois cas se présentent :

- Si $v_3 = 0$ et $(v_1, v_2) \neq 0$, alors

$$\frac{\|\nabla \mathbf{F}_{\ell, m} \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\nabla \mathbf{f}_\ell(v_1, v_2)^t\|}{\|(v_1, v_2)^t\|}.$$

- Si $v_3 \neq 0$ et $(v_1, v_2) = 0$, alors

$$\frac{\|\nabla \mathbf{F}_{\ell, m} \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{|(z^{m+1} - z^m)v_3|}{|v_3|}.$$

- Si $v_3 \neq 0$ et $(v_1, v_2) \neq 0$, alors

$$\frac{\|\nabla \mathbf{F}_{\ell, m} \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq \frac{\|\nabla \mathbf{f}_\ell(v_1, v_2)^t\|}{\|(v_1, v_2)^t\|} + \frac{|(z^{m+1} - z^m)v_3|}{|v_3|}.$$

Ces trois cas nous permettent de déduire

$$\|\nabla \mathbf{F}_{\ell, m}\|_{\infty, \widehat{K}} \leq \|\nabla \mathbf{f}_\ell\|_{\infty, \widehat{K}} + \eta,$$

et donc la première inégalité de (1.45) grâce à la première estimation de (1.41). De même, nous avons

$$\frac{\|\nabla \mathbf{F}_{\ell, m}^{-1} \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq \frac{\|\nabla \mathbf{f}_\ell^{-1}(v_1, v_2)^t\|}{\|\mathbf{v}\|} + \frac{|v_3|}{|z^{m+1} - z^m| \|\mathbf{v}\|}, \quad \forall \mathbf{v} \neq 0.$$

En s'appuyant sur les trois cas présentés ci-dessus et en utilisant (1.40) et l'estimation à gauche de (1.42), nous montrons

$$\|\nabla \mathbf{F}_{\ell, m}^{-1}\|_{\infty, \widehat{K}} \leq \|\nabla \mathbf{f}_\ell^{-1}\|_{\infty, \widehat{K}} + 1/(\mu\eta) \leq C_g h_\ell / \rho_\ell^2 + 1/(\mu\eta).$$

Les inégalités à droite de (1.45) et (1.46) se démontrent facilement en utilisant (1.41), (1.42), (1.40) et (1.44). \square

Construction de l'espace éléments finis et formulation faible discrète

Nous définissons p_τ (respectivement p_ν) l'ordre des éléments finis dans le plan tangent (respectivement dans la direction de l'épaisseur). Nous considérons $Q_{p_\tau, p_\nu}(\widehat{K})$ l'espace des polynômes sur \widehat{K} de degré au plus p_τ dans le plan $(\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2)$ et p_ν dans la direction $\widehat{\mathbf{e}}_3$

$$Q_{p_\tau, p_\nu}(\widehat{K}) = \text{Vect}\{\widehat{x}_1^i \widehat{x}_2^j \widehat{x}_3^k, (i, j, k) \in \mathbb{N}^3, \max(i, j) \leq p_\tau \text{ et } k \leq p_\nu\}.$$

Dans la suite, afin d'alléger l'écriture, nous notons $\mathbf{F}_K = \mathbf{F}_{\ell, m}$, où ℓ et m sont tels que $K = K_{\ell, m}$.

À partir de cet espace local, nous construisons l'espace de discrétisation suivant

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \mid \forall K \in \mathcal{T}_{h, \eta}, v_h|_K \circ \mathbf{F}_K \in Q_{p_\tau, p_\nu}(\widehat{K})\},$$

et nous définissons

$$\mathbf{V}_h = V_h \times V_h \times V_h.$$

Il est possible de vérifier que cette définition implique nécessairement que V_h est un sous-espace de dimension finie de $H^1(\Omega)$. La formulation faible semi-discrète associée au problème (1.11) consiste à trouver $\widehat{\mathbf{u}}_h^\delta(t) \in \mathbf{V}_h$ vérifiant pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$

$$\frac{d^2}{dt^2} m(\widehat{\mathbf{u}}_h^\delta, \mathbf{v}_h) + a^\delta(\widehat{\mathbf{u}}_h^\delta, \mathbf{v}_h) = \ell(\mathbf{v}_h). \quad (1.47)$$

L'utilisation d'une méthode de Galerkin avec des éléments finis de Lagrange nous donne une matrice de masse généralement multi-diagonale, à inverser à chaque itération du schéma aux différences finies que nous comptons utiliser pour la discrétisation en temps. Cette étape est coûteuse en termes de temps de calcul et de stockage, et est prohibitive dans la perspective d'adresser des cas 3D réalistes.

Nous choisissons d'utiliser des éléments finis spectraux d'ordre élevé avec condensation de masse (voir [35]). Le choix de cette méthode est justifié par ses performances en termes de précision et de coût de calcul. Plus précisément, nous noterons n_h la dimension de l'espace V_h , qui est généré par l'ensemble des fonctions de base de Lagrange

$$V_h = \text{vect}\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_h}.$$

Les fonctions de base φ_i sont construites à partir des points d'interpolation

$$\mathcal{I}_h = \{\xi_j\}_{j=1}^{n_h} \subset \bar{\Omega},$$

avec

$$\varphi_i(\xi_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \llbracket 1, n_h \rrbracket.$$

L'ensemble des points d'interpolation est construit à partir des points d'interpolation sur l'élément de référence. Plus précisément

$$\mathcal{I}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_{h,\eta}} \bigcup_{I=1}^{\hat{n}} \mathbf{F}_K(\hat{\xi}_I), \quad \text{avec } \hat{n} = (p_\tau + 1)^2(p_\nu + 1),$$

où l'ensemble

$$\{\hat{\xi}_I\}_{I=1}^{\hat{n}} \subset \hat{K}$$

est construit par tensorisation des points de quadrature de Gauss-Lobatto (quadrature d'ordre $2p_\tau - 1$ dans le plan tangent et $2p_\nu - 1$ dans la direction de l'épaisseur (voir [58])).

Il est important de remarquer que si on définit l'ensemble des fonctions de base sur l'élément de référence

$$\{\hat{\varphi}_I\}_{I=1}^{\hat{n}} \subset Q_{p_\tau, p_\nu}(\hat{K}), \quad \hat{\varphi}_I(\xi_J) = \delta_{IJ}, \quad \forall I, J \in \llbracket 1, \hat{n} \rrbracket, \quad (1.48)$$

alors

$$\forall (K, i) \in \mathcal{T}_{h,\eta} \times \llbracket 1, n_h \rrbracket, \quad K \subset \text{supp}(\varphi_i) \quad \Rightarrow \quad \exists! I \in \llbracket 1, \hat{n} \rrbracket, \quad \varphi_i|_K \circ \mathbf{F}_K = \hat{\varphi}_I. \quad (1.49)$$

En fait, nous pouvons ainsi définir une fonction

$$I : \mathcal{T}_{h,\eta} \times \llbracket 1, n_h \rrbracket \longmapsto \llbracket 1, \hat{n} \rrbracket,$$

qui réalise une correspondance entre les degrés de liberté exprimés au niveau local vers les degrés de liberté exprimés au niveau global.

Théorème 3. *Il existe une constante C indépendante de h et de η telle que*

$$\max_{i \in \llbracket 1, n_h \rrbracket} \text{card}\{K \in \mathcal{T}_{h,\eta}, K \subset \text{supp}(\varphi_i)\} \leq C.$$

Nous nous référons à [32] pour la preuve de ce théorème.

Comme nous avons choisi des points d'interpolation qui coïncident avec les points de quadrature de Gauss-Lobatto, nous pouvons approcher la forme bilinéaire $m(\cdot, \cdot)$ en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Lobatto correspondante et obtenir ainsi une forme bilinéaire $m_h(\cdot, \cdot)$ dont le représentant matriciel est diagonal. La formule de quadrature satisfait

$$\int_{\Omega} f(x) d\Omega \approx \int_{\Omega}^{GL} f(x) d\Omega,$$

où

$$\int_{\Omega}^{GL} f(x) d\Omega = \sum_{i=1}^{n_h} f(\xi_i) w_i,$$

pour une fonction scalaire $f \in C^0(\bar{\Omega})$ et où les poids w_i sont strictement positifs. Lorsque la fonction scalaire f est continue sur chaque élément K (f étant éventuellement globalement discontinue), la formule de quadrature s'écrit

$$\int_{\Omega}^{GL} f(x) d\Omega = \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,\eta}} \int_K^{GL} f(x) dK,$$

où

$$\int_K^{GL} f(x) dK = \sum_{I=1}^{\hat{n}} f|_K \circ \mathbf{F}_K(\hat{\xi}_I) J_K(\hat{\xi}_I) \hat{w}_I,$$

avec \hat{w}_I sont les poids de la formule de Gauss-Lobatto sur le carré $[0, 1]^2$.

En notant

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{i}} = (\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \varphi_{i_3})^t, \quad \forall \mathbf{i} \in \llbracket 1, n_h \rrbracket^3,$$

où $(\varphi_{i_d})_{i_d=1..n_h}$ sont les fonctions de base de V_h , nous avons

$$m(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{i}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{j}}) \approx m_h(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{i}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{j}}),$$

avec

$$m_h(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{i}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{j}}) = \int_{\Omega}^{GL} \rho \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{i}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{j}} d\Omega = \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,\eta}} m_h^K(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{i}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{j}}), \quad (1.50)$$

où

$$m_h^K(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{i}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{j}}) = \sum_{d=1}^3 \int_K^{GL} \rho \varphi_{i_d} \varphi_{j_d} dK = \sum_{d=1}^3 \sum_{I=1}^{\hat{n}} (\rho \varphi_{i_d} \varphi_{j_d})|_K \circ \mathbf{F}_K(\hat{\xi}_I) J_K(\hat{\xi}_I) \hat{w}_I.$$

Grâce à la formule de quadrature et en utilisant (1.48) et (1.49), nous avons

$$m_h(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{i}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{j}}) = 0, \quad \mathbf{i} \neq \mathbf{j}.$$

Avec cette technique, la perte de précision sur la méthode numérique est minimale mais le gain en efficacité est important (voir [42] pour plus de détails). Finalement, nous cherchons $\hat{\mathbf{u}}_h^\delta(t) \in \mathbf{V}_h$ vérifiant la formulation variationnelle discrète approchée pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$

$$m_h(\partial_t^2 \hat{\mathbf{u}}_h^\delta, \mathbf{v}_h) + a_h^\delta(\hat{\mathbf{u}}_h^\delta, \mathbf{v}_h) = \ell(\mathbf{v}_h), \quad (1.51)$$

avec m_h est la forme bilinéaire associée à la matrice de masse diagonale et a_h^δ est une approximation de a^δ par l'utilisation de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto, définie par

$$a_h^\delta(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{i}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{j}}) = \int_{\Omega}^{GL} \mathbf{C} \varepsilon^\delta(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{i}}) : \varepsilon^\delta(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{j}}) d\Omega = \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,\eta}} a_h^{K,\delta}(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{i}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{j}}), \quad (1.52)$$

où

$$a_h^{K,\delta}(\varphi_i, \varphi_j) = \int_K^{GL} \mathbf{C} \varepsilon^\delta(\varphi_i) : \varepsilon^\delta(\varphi_j) dK.$$

De même, nous noterons $a_{h,\tau\tau}$, $a_{h,\nu\nu}$, $a_{h,\tau\nu}$ et $a_{h,\nu\tau}$ les approximations de $a_{\tau\tau}$, $a_{\nu\nu}$, $a_{\tau\nu}$ et $a_{\nu\tau}$:

$$a_{h,\tau\tau}(\varphi_i, \varphi_j) = \int_\Omega^{GL} \mathbf{C} \varepsilon_\tau(\varphi_i) : \varepsilon_\tau(\varphi_j) d\Omega = \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,\eta}} a_{h,\tau\tau}^K(\varphi_i, \varphi_j), \quad (1.53)$$

$$a_{h,\tau\nu}(\varphi_i, \varphi_j) = \int_\Omega^{GL} \mathbf{C} \varepsilon_\tau(\varphi_i) : \varepsilon_\nu(\varphi_j) d\Omega = \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,\eta}} a_{h,\tau\nu}^K(\varphi_i, \varphi_j), \quad (1.54)$$

$$a_{h,\nu\tau}(\varphi_i, \varphi_j) = a_{h,\tau\nu}(\varphi_j, \varphi_i), \quad (1.55)$$

$$a_{h,\nu\nu}(\varphi_i, \varphi_j) = \int_\Omega^{GL} \mathbf{C} \varepsilon_\nu(\varphi_i) : \varepsilon_\nu(\varphi_j) d\Omega = \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,\eta}} a_{h,\nu\nu}^K(\varphi_i, \varphi_j), \quad (1.56)$$

où les $a_{h,\tau\tau}^K$, $a_{h,\tau\nu}^K$ et $a_{h,\nu\nu}^K$ sont les contributions élémentaires aux formes bilinéaires données plus haut et satisfont

$$\begin{cases} a_{h,\tau\tau}^K(\varphi_i, \varphi_j) = \int_K^{GL} \mathbf{C} \varepsilon_\tau(\varphi_i) : \varepsilon_\tau(\varphi_j) dK, \\ a_{h,\tau\nu}^K(\varphi_i, \varphi_j) = \int_K^{GL} \mathbf{C} \varepsilon_\tau(\varphi_i) : \varepsilon_\nu(\varphi_j) dK, \\ a_{h,\nu\nu}^K(\varphi_i, \varphi_j) = \int_K^{GL} \mathbf{C} \varepsilon_\nu(\varphi_i) : \varepsilon_\nu(\varphi_j) dK. \end{cases}$$

Il est facile de remarquer que

$$a_h^{K,\delta}(\varphi_i, \varphi_j) = a_{h,\tau\tau}^K(\varphi_i, \varphi_j) + \delta^{-1} (a_{\tau\nu}^K(\varphi_i, \varphi_j) + a_{h,\nu\tau}^K(\varphi_i, \varphi_j)) + \delta^{-2} a_{h,\nu\nu}^K(\varphi_i, \varphi_j).$$

1.3.2 Discrétisation totale et présentation des schémas explicite, implicite et implicite-explicite

Soit Δt le pas de temps de discrétisation. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous cherchons

$$\mathbf{u}_h^n \sim \widehat{\mathbf{u}}_h^\delta(t^n = n\Delta t).$$

Dans la suite, nous notons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(\mathbf{g}^+)^n(\cdot) := \mathbf{g}^+(\cdot, t^n = n\Delta t),$$

et

$$\ell(t^n, \mathbf{v}) := \int_{\Gamma_+} ((g_1^+)^n, (g_2^+)^n, 0)^t \cdot \mathbf{v} d\Gamma_+. \quad (1.57)$$

Dans cette sous-section, nous proposons trois discrétisations en temps du système (1.51), deux standards et une plus originale (qui représente la contribution de cette partie) :

Schéma explicite – Schéma Saute-Mouton

En utilisant un schéma de différences finies explicite centré en temps, le problème discret à résoudre est

$$m_h \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \mathbf{v}_h \right) + a_h^\delta(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) = \ell(t^n, \mathbf{v}_h), \quad (1.58)$$

où m_h , a_h^δ et ℓ sont respectivement définis dans (1.50), (1.52) et (1.57). À chaque itération du schéma, il faut résoudre le problème

$$m_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) = \ell^{n,\delta}(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (1.59)$$

où $\ell^{n,\delta}$ est une forme linéaire qui dépend des itérations précédentes, du terme source, de Δt et de δ . Comme mentionné, le problème (1.59) est facile à résoudre si la stratégie de condensation de masse est utilisée. C'est un schéma qui présente l'avantage d'être explicite mais, nous verrons que la condition de positivité de l'énergie associée à ce schéma va dépendre de δ et dégénérer lorsque δ tend vers 0 ce qui est pénalisant.

Schéma implicite – θ -schéma

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Nous introduisons une approximation de $\widehat{\mathbf{u}}_h^\delta(n\Delta t)$ notée $\{\mathbf{u}_h^n\}_\theta$ et définie par

$$\{\mathbf{u}_h^n\}_\theta = \theta \mathbf{u}_h^{n+1} + (1 - 2\theta) \mathbf{u}_h^n + \theta \mathbf{u}_h^{n-1}. \quad (1.60)$$

Le problème (1.51) est discrétisé de la façon suivante

$$m_h \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \mathbf{v}_h \right) + a_h^\delta(\{\mathbf{u}_h^n\}_\theta, \mathbf{v}_h) = \ell(t^n, \mathbf{v}_h), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.61)$$

Cette discrétisation correspond au θ -schéma appliqué au problème (1.51). À chaque itération du schéma, il faut résoudre le problème

$$a_{h,\text{im}}^\delta(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) = \tilde{\ell}^{n,\delta}(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (1.62)$$

où

$$a_{h,\text{im}}^\delta(\cdot, \cdot) = m_h(\cdot, \cdot) + \theta \Delta t^2 a_h^\delta(\cdot, \cdot), \quad (1.63)$$

et $\tilde{\ell}^{n,\delta}$ est une forme linéaire qui dépend des itérations précédentes, du terme source, de Δt , de θ et de δ . L'énergie associée au schéma (1.61) est inconditionnellement positive pour $\theta \geq 1/4$. Cependant, le problème (1.62) nécessite la résolution d'un système linéaire creux dont le conditionnement dépend de δ . Nous proposons ultérieurement un préconditionneur robuste pour diminuer le coût de calcul de la méthode.

Schéma implicite-explicite

La construction de ce schéma hybride a été inspirée par [68], mais aussi par [40; 26]. En particulier, dans [68] ce sont les équations de Maxwell qui sont discrétisées. Comme en général, une méthode FTDT (Finite Difference Time Domain) explicite ne peut pas être utilisée dans une géométrie complexe, elle est couplée à une discrétisation éléments finis en espace et implicite en temps utilisée au niveau des bords ou des interfaces du domaine.

Dans notre cas, l'idée clé consiste à discrétiser implicitement les termes ne faisant intervenir que des dérivées le long de l'épaisseur (la partie pénalisante de la forme bilinéaire a_h^δ ,

à savoir $\delta^{-2}a_{h,\nu\nu}$) en utilisant l'approximation (1.60), tandis que les autres termes sont discrétisés explicitement. Nous obtenons ainsi le problème discret suivant

$$m_h\left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \mathbf{v}_h\right) + (a_{h,\tau\tau} + \delta^{-1}(a_{h,\tau\nu} + a_{h,\nu\tau}))(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + \delta^{-2}a_{h,\nu\nu}(\{\mathbf{u}_h^n\}_\theta, \mathbf{v}_h) = \ell(t^n, \mathbf{v}_h), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (1.64)$$

où $\theta \geq 1/4$. À chaque itération du schéma, il faut résoudre le problème

$$a_{h,\text{im-ex}}^\delta(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) = \tilde{\ell}^{n,\delta}(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (1.65)$$

où

$$a_{h,\text{im-ex}}^\delta(\cdot, \cdot) = m_h(\cdot, \cdot) + \theta \Delta t^2 \delta^{-2} a_{h,\nu\nu}(\cdot, \cdot), \quad (1.66)$$

et $\tilde{\ell}^{n,\delta}$ est une forme linéaire qui dépend des itérations précédentes, du terme source, de Δt , de θ et de δ . On verra que le schéma (1.64) possède une condition de positivité de l'énergie associée indépendante de δ si $\theta > 1/4$, tout en étant efficace en coût de calcul. De plus, nous verrons que si une formule de quadrature de Gauss-Lobatto est utilisée pour le calcul de $a_{h,\nu\nu}$, alors le problème (1.65) peut être résolu en inversant des petits systèmes linéaires creux. Il est à noter que les bonnes propriétés du schéma implicite-explicite découlent des propriétés particulières de la géométrie de notre problème (le domaine Ω est construit par extrusion de la surface tangente).

1.3.3 Identités d'énergies et propriétés des énergies discrètes

Dans cette sous-section, nous nous intéressons aux relations d'énergies associées aux schémas explicite (1.58), implicite (1.61) et implicite-explicite (1.64) ainsi que les propriétés des énergies discrètes. Cette étude est assez classique pour les deux premiers schémas mais nous la rappelons, dans un but pédagogique. Nous verrons que la condition de positivité de l'énergie associée au schéma implicite-explicite est uniforme par rapport à δ (lorsque $\theta > 1/4$) alors qu'elle dégénère pour le schéma explicite.

Nous verrons que les conditions de positivité obtenues nous permettront, dans le chapitre suivant, d'assurer la convergence et donc la stabilité des schémas.

Schéma explicite

Dans ce paragraphe, nous montrons qu'une énergie discrète associée au schéma explicite est conservée. Cette énergie est constituée des termes cinétiques et potentiels, qui sont les représentants discrets de (1.25).

Introduisons les énergies cinétique et potentielle discrètes définies respectivement par

$$\mathcal{K}_h^{n+1/2} = \frac{1}{2} m_h \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\text{ex},h}^{n+1/2} = \frac{1}{2} a_h^\delta(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n), \quad (1.67)$$

de sorte à pouvoir définir une fonctionnelle énergie discrète

$$\mathcal{E}_{\text{ex},h}^{n+1/2} = \mathcal{K}_h^{n+1/2} + \mathcal{P}_{\text{ex},h}^{n+1/2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.68)$$

Lemme 3. (Identité d'énergie pour le schéma explicite) *L'énergie $\mathcal{E}_{\text{ex},h}^{n+1/2}$ satisfait*

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{ex},h}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{\text{ex},h}^{n-1/2}}{\Delta t} = \left((\mathbf{g}^+)^n, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{L^2(\Gamma_+)^3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

L'énergie est donc conservée en absence de source.

Démonstration. En choisissant $\mathbf{v}_h = \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}$ dans l'équation (1.58), nous obtenons

$$m_h\left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}\right) + a_h^\delta(\mathbf{u}_h^n, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}) = \ell(t^n, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}).$$

En utilisant la symétrie de $a_h^\delta(\cdot, \cdot)$, nous avons

$$a_h^\delta(\mathbf{u}_h^n, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}) = \frac{1}{2\Delta t} \left(a_h^\delta(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n) - a_h^\delta(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n-1}) \right), \quad (1.69)$$

et en remarquant que

$$m_h\left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}\right) = \frac{\mathcal{K}_h^{n+1/2} - \mathcal{K}_h^{n-1/2}}{\Delta t}, \quad (1.70)$$

nous obtenons le résultat recherché. \square

Notons que le signe de l'énergie potentielle discrète définie en (1.67), n'est *a priori* pas connu. Ceci empêche donc de conclure directement sur la positivité de l'énergie discrète (1.68). Pour pallier à cette difficulté, nous réécrivons le terme potentiel de l'énergie en

$$a_h^\delta(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n) = a_h^\delta\left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n}{2}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n}{2}\right) - \frac{\Delta t^2}{4} a_h^\delta\left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}\right), \quad (1.71)$$

et nous rappelons que le terme $a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)$ défini dans (1.52) est positif pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ (les poids de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto sont positifs). La quantité $\mathcal{E}_{\text{ex},h}^{n+1/2}$ définie en (1.68) peut se réécrire alors

$$\mathcal{E}_{\text{ex},h}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(m_h - \frac{\Delta t^2}{4} a_h^\delta \right) \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} \right) + a_h^\delta \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n}{2}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n}{2} \right) \right\}, \quad (1.72)$$

ce qui nous permet d'énoncer le résultat suivant

Lemme 4. (Positivité d'énergie pour le schéma explicite) *L'énergie associée au schéma explicite, définie dans (1.72), est positive sous la condition*

$$\Delta t^2 \leq 4 \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right)^{-1}. \quad (1.73)$$

Démonstration. L'énergie $\mathcal{E}_{\text{ex},h}^{n+1/2}$ est positive si et seulement si la forme bilinéaire

$$m_h - \frac{\Delta t^2}{4} a_h^\delta$$

est positive, c'est-à-dire, pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$,

$$m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - \frac{\Delta t^2}{4} \left(a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \right) \geq 0,$$

ce qui est équivalent à (1.73), car \mathbf{V}_h étant de dimension finie donc le sup est atteint et

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \left(\frac{a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right)^{-1} = \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right)^{-1}.$$

□

Nous rappelons l'expression (1.16) de $a_h^\delta(v_h, v_h)$

$$a^\delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_{\tau\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \delta^{-1} (a_{\tau\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_{\nu\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) + \delta^{-2} a_{\nu\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Dans cette expression, le terme $\delta^{-2} a_{h,\nu\nu}(v_h, v_h)$ est le plus pénalisant et il implique naturellement $\Delta t = O(\delta)$. Il en résulte que le choix du pas de temps est fortement lié à la faible épaisseur de la plaque, ce qui rend ce schéma très coûteux en termes de temps de calcul lorsque δ tend vers 0 et à fenêtre en temps fixée.

Schéma implicite

Nous introduisons l'énergie potentielle discrète associée au schéma implicite

$$\mathcal{P}_{\text{im},h,\theta}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(a_h^\delta(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n) + \theta \Delta t^2 a_h^\delta \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} \right) \right),$$

et nous utilisons la définition (1.67) de l'énergie cinétique discrète $\mathcal{K}_h^{n+1/2}$. La fonctionnelle énergie associée à ce schéma est définie par

$$\mathcal{E}_{\text{im},h,\theta}^{n+1/2} = \mathcal{K}_h^{n+1/2} + \mathcal{P}_{\text{im},h,\theta}^{n+1/2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.74)$$

Lemme 5. (Identité d'énergie pour le schéma implicite) *L'énergie $\mathcal{E}_{\text{im},h,\theta}^{n+1/2}$ satisfait*

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{im},h,\theta}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{\text{im},h,\theta}^{n-1/2}}{\Delta t} = \left((\mathbf{g}^+)^n, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{L^2(\Gamma_+)^3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

L'énergie est donc conservée en absence de source.

Démonstration. En choisissant $\mathbf{v}_h = \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}$ dans l'équation (1.64) et en utilisant (1.70), nous obtenons

$$\frac{\mathcal{K}_h^{n+1/2} - \mathcal{K}_h^{n-1/2}}{\Delta t} + a_h^\delta(\{\mathbf{u}_h^n\}_\theta, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}) = \ell(t^n, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}).$$

En utilisant la définition (1.60) de $\{\mathbf{u}_h^n\}_\theta$, nous obtenons

$$\begin{aligned} a_h^\delta(\{\mathbf{u}_h^n\}_\theta, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}) &= a_h^\delta(\mathbf{u}_h^n, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}) \\ &\quad + a_h^\delta(\theta(\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}), \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}). \end{aligned} \quad (1.75)$$

En utilisant (1.69) et en remarquant que le dernier terme dans (1.75) se réécrit

$$\begin{aligned} a_h^\delta(\theta(\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}), \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}) &= \\ \frac{1}{2\Delta t} \left(\theta \Delta t^2 a_h^\delta \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} \right) - \theta \Delta t^2 a_h^\delta \left(\frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\Delta t} \right) \right), \end{aligned} \quad (1.76)$$

nous obtenons le résultat recherché. □

En utilisant (1.71) pour reformuler le terme $a_h^\delta(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n)$ de l'énergie potentielle, la quantité $\mathcal{E}_{\text{im}, h, \theta}^{n+1/2}$ définie en (1.74) peut se réécrire sous la forme suivante

$$\mathcal{E}_{\text{im}, h, \theta}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(m_h - \frac{\Delta t^2}{4} (1 - 4\theta) a_h^\delta \right) \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} \right) + a_h^\delta \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n}{2}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n}{2} \right) \right\}. \quad (1.77)$$

Lemme 6. (Positivité d'énergie pour le schéma implicite)

- Pour tout $\theta \geq 1/4$, l'énergie associée au schéma implicite est inconditionnellement positive.
- Pour tout $\theta < 1/4$, l'énergie associée au schéma implicite est positive sous la condition

$$\Delta t^2 \leq 4 \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(1 - 4\theta) a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right)^{-1}. \quad (1.78)$$

Démonstration. L'énergie $\mathcal{E}_{\text{im}, h, \theta}^{n+1/2}$ est positive si et seulement si la forme bilinéaire $m_h - \frac{\Delta t^2}{4} (1 - 4\theta) a_h^\delta$ est positive, c'est-à-dire, pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, nous avons l'inégalité suivante

$$m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - \frac{\Delta t^2}{4} \left((1 - 4\theta) a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \right) \geq 0, \quad (1.79)$$

qui est vérifiée, pour tout $\theta \geq 1/4$, sans condition sur le choix de Δt . Dans le cas où $\theta < 1/4$, l'inégalité (1.79) est équivalente à (1.78). \square

Nous avons intérêt à considérer le cas où $\theta \geq 1/4$ pour ne pas avoir un pas de temps dépendant de l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, pénalisant la méthode.

Schéma implicite-explicite

Comme précédemment, nous nous intéressons à établir une identité d'énergie pour le schéma implicite-explicite, dans la perspective d'une étude de propriétés de l'énergie discrète associée.

En s'inspirant des énergies potentielles discrètes pour les schémas explicite et implicite, nous introduisons l'énergie potentielle discrète associée au schéma implicite-explicite

$$\mathcal{P}_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(a_h^\delta(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n) + \delta^{-2} \theta \Delta t^2 a_{h, \nu\nu} \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} \right) \right),$$

et nous utilisons la définition (1.67) de l'énergie cinétique discrète $\mathcal{K}_h^{n+1/2}$. La fonctionnelle énergie associée à ce schéma est donc

$$\mathcal{E}_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2} = \mathcal{K}_h^{n+1/2} + \mathcal{P}_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.80)$$

Lemme 7. (Identité d'énergie pour le schéma implicite-explicite) L'énergie $\mathcal{E}_{\text{im-ex}, h}^{n+1/2}$ satisfait

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n-1/2}}{\Delta t} = \left((\mathbf{g}^+)^n, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{L^2(\Gamma_+)^3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Démonstration. En choisissant $\mathbf{v}_h = \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}$ dans l'équation (1.64) et en utilisant (1.70), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{K}_h^{n+1/2} - \mathcal{K}_h^{n-1/2}}{\Delta t} + (a_{h,\tau\tau} + \delta^{-1}a_{h,\tau\nu} + \delta^{-1}a_{h,\nu\tau})(\mathbf{u}_h^n, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}) \\ + \delta^{-2}a_{h,\nu\nu}(\{\mathbf{u}_h^n\}_\theta, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}) = \ell(t^n, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}). \end{aligned}$$

En utilisant la définition (1.60) de $\{\mathbf{u}_h^n\}_\theta$, nous obtenons

$$\begin{aligned} (a_{h,\tau\tau} + \delta^{-1}a_{h,\tau\nu} + \delta^{-1}a_{h,\nu\tau})(\mathbf{u}_h^n, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}) + \delta^{-2}a_{h,\nu\nu}(\{\mathbf{u}_h^n\}_\theta, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}) = \\ a_h^\delta(\mathbf{u}_h^n, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}) + \delta^{-2}a_{h,\nu\nu}(\theta(\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}), \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}). \end{aligned} \quad (1.81)$$

En remarquant que le dernier terme dans (1.81) se réécrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \delta^{-2}a_{h,\nu\nu}(\theta(\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}), \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t}) = \\ \frac{1}{2\Delta t} \left(\delta^{-2}\theta\Delta t^2 a_{h,\nu\nu}(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}) \right. \\ \left. - \delta^{-2}\theta\Delta t^2 a_{h,\nu\nu}(\frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\Delta t}) \right), \end{aligned} \quad (1.82)$$

et en utilisant la symétrie de $a_h^\delta(\cdot, \cdot)$ dans (1.81), nous obtenons le résultat recherché. \square

Comme pour les schémas précédents, le signe du terme potentiel dans l'énergie discrète n'est pas assuré. Nous utilisons (1.71) pour reformuler le terme $a_h^\delta(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n)$ de l'énergie potentielle. La quantité $\mathcal{E}_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2}$ définie en (1.80) peut se réécrire alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2} = \\ \frac{1}{2} \left\{ \left(m_h - \frac{\Delta t^2}{4} (a_{h,\tau\tau} + 2\delta^{-1}a_{h,\tau\nu} + \delta^{-2}(1-4\theta)a_{h,\nu\nu}) \right) \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} \right) \right. \\ \left. + a_h^\delta \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n}{2}, \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Lemme 8. (Positivité d'énergie pour le schéma implicite-explicite) *L'énergie associée au schéma implicite-explicite, définie dans (1.83), est positive sous la condition*

$$\Delta t^2 \leq 4 \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + 2\delta^{-1}a_{h,\tau\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + (1-4\theta)\delta^{-2}a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right)^{-1}. \quad (1.84)$$

Démonstration. L'énergie $\mathcal{E}_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2}$ est positive si et seulement si la forme bilinéaire

$$m_h - \frac{\Delta t^2}{4} (a_{h,\tau\tau} + 2\delta^{-1}a_{h,\tau\nu} + (1-4\theta)\delta^{-2}a_{h,\nu\nu})$$

est positive, c'est-à-dire, pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, nous avons l'inégalité

$$m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - \frac{\Delta t^2}{4} (a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + 2\delta^{-1}a_{h,\tau\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + (1 - 4\theta)\delta^{-2}a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)) \geq 0,$$

qui est équivalente à (1.84). \square

Comme on peut le voir, pour $\theta \geq 1/4$, le terme proportionnel à δ^{-2} dans la condition (1.84) est négatif, impliquant la relation

$$\Delta t^2 \leq 4 \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + 2\delta^{-1}a_{h,\tau\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right)^{-1},$$

qui constitue une condition suffisante pour que l'énergie associée au schéma implicite-explicite soit positive. Par conséquent, Δt est au pire en $O(\sqrt{\delta})$, ce qui est déjà mieux que le schéma explicite (nous rappelons que pour ce schéma nous avons $\Delta t = O(\delta)$).

En fait, nous avons un meilleur résultat pour $\theta > 1/4$. Dans ce cas, nous pouvons prouver que le pas de temps peut être choisi indépendamment de δ .

Commençons par la première étape de la preuve de ce résultat qui consiste à montrer que les termes mixtes $a_{h,\tau\nu}$ et $a_{h,\nu\tau}$ sont contrôlés par une combinaison des termes $a_{h,\tau\tau}$ et $a_{h,\nu\nu}$.

Lemme 9. *Pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, nous avons l'inégalité suivante*

$$2a_{h,\tau\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq \frac{1}{\epsilon}a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \epsilon a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h). \quad (1.85)$$

Démonstration. Nous allons démontrer ce résultat en supposant que \mathbf{C} est continu. La preuve du cas où \mathbf{C} est continu sur chaque maille se déduit aisément.

Nous rappelons les expressions (1.54), (1.53) et (1.56) des formes bilinéaires $a_{h,\tau\nu}$, $a_{h,\tau\tau}$ et $a_{h,\nu\nu}$ en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Lobatto

$$\begin{cases} a_{h,\tau\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega}^{GL} \mathbf{C}\varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}_h) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}_h) d\Omega = \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{C}\varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}_h) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}_h))(\xi_i) w_i, \\ a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega}^{GL} \mathbf{C}\varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}_h) : \varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}_h) d\Omega = \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{C}\varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}_h) : \varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}_h))(\xi_i) w_i, \\ a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega}^{GL} \mathbf{C}\varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}_h) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}_h) d\Omega = \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{C}\varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}_h) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}_h))(\xi_i) w_i. \end{cases}$$

Il faut maintenant remarquer que, par définition, $\mathbf{C}(x)$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ et donc pour tous $\varepsilon, \sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis de Young nous permettent d'écrire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$|\mathbf{C}(x)\varepsilon : \sigma| \leq \frac{1}{2\epsilon} \mathbf{C}(x)\varepsilon : \varepsilon + \frac{\epsilon}{2} \mathbf{C}(x)\sigma : \sigma, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

En particulier, pour $\varepsilon = \varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}_h)$ et $\sigma = \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}_h)$, nous avons

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}\varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}_h) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}_h))(x) &\leq \\ &\frac{1}{2\epsilon} (\mathbf{C}\varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}_h) : \varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}_h))(x) + \frac{\epsilon}{2} (\mathbf{C}\varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}_h) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}_h))(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

impliquant

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{C}_{\varepsilon_\tau}(\mathbf{v}_h) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}_h))(\xi_i) w_i &\leq \\ \frac{1}{2\epsilon} \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{C}_{\varepsilon_\tau}(\mathbf{v}_h) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}_h))(\xi_i) w_i + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{C}_{\varepsilon_\nu}(\mathbf{v}_h) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}_h))(\xi_i) w_i, \end{aligned}$$

ce qui nous donne le résultat (1.85). \square

Théorème 4. (Positivité d'énergie pour le schéma implicite-explicite indépendamment de δ) *Pour $\theta > 1/4$, l'énergie associée au schéma implicite-explicite, définie dans (1.83), est positive sous une condition indépendante de δ*

$$\Delta t^2 \leq 4 \left(1 + \frac{1}{4\theta - 1}\right)^{-1} \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right)^{-1}. \quad (1.86)$$

Démonstration. En utilisant le Lemme 9, nous avons pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$

$$\begin{aligned} 2\delta^{-1} a_{h,\tau\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - (4\theta - 1)\delta^{-2} a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &\leq \\ \epsilon^{-1}\delta^{-1} a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + (\epsilon\delta^{-1} - (4\theta - 1)\delta^{-2}) a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

Nous choisissons $\epsilon = \delta^{-1}(4\theta - 1)$, avec $\theta > 1/4$, ce qui nous permet d'obtenir pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$

$$\begin{aligned} a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + 2\delta^{-1} a_{h,\tau\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - (4\theta - 1)\delta^{-2} a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &\leq \\ \left(1 + \frac{1}{4\theta - 1}\right) a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

Par conséquent, si Δt satisfait (1.86), alors la condition (1.84) de positivité de l'énergie discrète associée au schéma implicite-explicite est vérifiée. \square

Grâce à ce théorème, le pas de temps peut être choisi indépendamment des paramètres de discrétisation le long de l'épaisseur et surtout, il peut être choisi indépendamment de δ . En d'autres termes, le choix de Δt ne dépend que de la discrétisation dans le plan tangent.

1.4 Estimations de quotients de Rayleigh, des CFL et des conditionnements

1.4.1 Estimations de quotients de Rayleigh

Proposition 1. *Il existe une constante C strictement positive telle que pour tout h nous avons*

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \leq Ch^{-2}. \quad (1.87)$$

Démonstration. Nous introduisons l'espace des fonctions polynomiales par morceaux et éventuellement discontinues entre chaque maille

$$\mathbf{V}_h^b = \{\mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)^3 \mid \forall K \in \mathcal{T}_{h,\eta}, \mathbf{v}_h|_K \circ \mathbf{F}_K \in Q_{p_\tau, p_\nu}(\widehat{K})\}.$$

Soit

$$r_h = \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}.$$

Comme m_h et $a_{h,\tau\tau}$ sont des formes bilinéaires bien définies sur \mathbf{V}_h^b (car la formule de quadrature n'utilise que la valeur des fonctions à l'intérieur des mailles, y compris les bords) et $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}_h^b$ alors nous avons

$$r_h \leq r_h^b, \quad (1.88)$$

où

$$r_h^b = \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b} \frac{a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}. \quad (1.89)$$

Montrons dans un premier temps que

$$r_h^b \leq r_h^*, \quad (1.90)$$

où

$$r_h^* = \max_{K \in \mathcal{T}_{h,\eta}} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b} \frac{a_{h,\tau\tau}^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}.$$

D'un autre côté, nous avons

$$r_h^* m_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq a_{h,\tau\tau}^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b, \quad \forall K \in \mathcal{T}_{h,\eta},$$

alors nous obtenons

$$r_h^* \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,\eta}} m_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,\eta}} a_{h,\tau\tau}^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b,$$

et donc

$$r_h^* m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b,$$

ce qui implique (1.90). Nous rappelons que

$$a_{h,\tau\tau}^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = \int_K^{GL} \mathbf{C}_{\varepsilon_\tau(\mathbf{v}_h)} : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}_h) dK,$$

où

$$\varepsilon_\tau(\mathbf{v}_h) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_1 v_{h,1} & \cdot & \cdot \\ \partial_2 v_{h,1} + \partial_1 v_{h,2} & 2\partial_2 v_{h,2} & \cdot \\ \partial_1 v_{h,3} & \partial_2 v_{h,3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$a_{h,\tau\tau}^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq C \sum_{i=1}^3 \int_K^{GL} \left\| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \nabla v_{h,i} \right\|^2 dK, \quad (1.91)$$

où $\mathbf{v}_h = (v_{h,1}, v_{h,2}, v_{h,3})^t$. Or nous avons

$$\int_K^{GL} \left\| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \nabla v_{h,i} \right\|^2 dK = \int_{\widehat{K}}^{GL} |J_K| \left\| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} (\nabla \mathbf{F}_K)^{-T} \nabla (v_{h,i} \circ \mathbf{F}_K) \right\|^2 d\widehat{K} \quad (1.92)$$

$$= \int_{\widehat{K}}^{GL} |J_K| \left\| \begin{pmatrix} (\nabla \mathbf{f}_\ell)^{-T} & \\ \hline & 0 \end{pmatrix} \nabla (v_{h,i} \circ \mathbf{F}_K) \right\|^2 d\widehat{K}. \quad (1.93)$$

La deuxième estimation de (1.45) et la première estimation de (1.42) nous permet d'écrire

$$\sum_{i=1}^3 \int_K^{GL} \left\| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \nabla v_{h,i} \right\|^2 dK \leq Ch_\ell^2 \eta \left(\frac{h_\ell}{\rho_\ell^2} \right)^2 \sum_{i=1}^3 \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla(v_{h,i} \circ \mathbf{F}_K)\|^2 d\widehat{K},$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^3 \int_K^{GL} \left\| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \nabla v_{h,i} \right\|^2 dK \leq Ch_\ell^2 \eta \left(\frac{h_\ell}{\rho_\ell^2} \right)^2 \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla(\mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_K)\|^2 d\widehat{K}.$$

Nous arrivons au résultat

$$a_{h,\tau\tau}^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq Ch_\ell^2 \eta \left(\frac{h_\ell}{\rho_\ell^2} \right)^2 \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla(\mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_K)\|^2 d\widehat{K}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b. \quad (1.94)$$

D'un autre côté, nous avons

$$m_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = \int_K^{GL} \rho \|\mathbf{v}_h\|^2 dK \geq \inf_{\mathbf{x} \in K} \rho(\mathbf{x}) \int_K^{GL} \|\mathbf{v}_h\|^2 dK,$$

et

$$\begin{aligned} \int_K^{GL} \|\mathbf{v}_h\|^2 dK &= \int_{\widehat{K}}^{GL} |J_K| \|\mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_K\|^2 d\widehat{K} \\ &\geq \inf_{\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{K}} |J_K| \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_K\|^2 d\widehat{K}. \end{aligned}$$

Or d'après (1.44), la deuxième estimation de (1.42) et (1.40), nous avons

$$\begin{aligned} |J_K| &= |j_\ell| |z^{m+1} - z^m|, \quad \forall \ell \in \llbracket 1, N_{h,\Sigma} \rrbracket, \quad \forall m \in \llbracket 1, N_c \rrbracket \\ &\geq C\mu\eta\rho_\ell^2, \quad \forall \ell \in \llbracket 1, N_{h,\Sigma} \rrbracket. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$m_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq C\mu\eta\rho_\ell^2 \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_K\|^2 d\widehat{K}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b. \quad (1.95)$$

Ainsi, en utilisant (1.94) et (1.95), nous avons

$$\frac{a_{h,\tau\tau}^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \leq C \frac{h_\ell^4 \eta \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla(\mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_K)\|^2 d\widehat{K}}{\mu\eta\rho_\ell^6 \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_K\|^2 d\widehat{K}}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b,$$

ou encore (en utilisant (1.38))

$$\frac{a_{h,\tau\tau}^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \leq C \frac{\sigma_\ell^6 \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla(\mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_K)\|^2 d\widehat{K}}{\mu h_\ell^2 \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_K\|^2 d\widehat{K}}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b.$$

Or

$$\mathbf{v}_{h|_K} \circ \mathbf{F}_K \in Q_{p_\tau, p_\nu}(\widehat{K}),$$

et l'espace $Q_{p_\tau, p_\nu}(\widehat{K})$ ne dépend pas de h . Par conséquent, il existe une constante C telle que

$$\frac{a_{h,\tau\tau}^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \leq C \frac{\sigma_\ell^6}{\mu h_\ell^2}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b.$$

Comme μ est la constante de quasi-uniformité définie dans (1.40) et $\sigma_\ell < \sigma$ avec σ la constante de quasi-uniformité définie dans (1.39), alors nous déduisons

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b} \frac{a_{h,\tau\tau}^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \leq Ch^{-2}.$$

En utilisant (1.90) et (1.88), nous obtenons le résultat (1.87). \square

Proposition 2. *Il existe une constante c strictement positive telle que pour tout h nous avons*

$$ch^{-2} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}. \quad (1.96)$$

Démonstration. Il est facile de remarquer que

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \geq \sup_{\mathbf{v}_h=(0,0,\varphi) \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}.$$

En utilisant l'expression de $a_{h,\tau\tau}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v}_h=(0,0,\varphi) \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} &\geq C \sup_{\varphi \in V_h} \frac{\int_{\Omega}^{GL} (\partial_2 \varphi)^2 + (\partial_1 \varphi)^2 d\Omega}{\int_{\Omega}^{GL} \varphi^2 d\Omega} \\ &\geq C \frac{\int_{\Omega}^{GL} (\partial_1 \varphi_j)^2 + (\partial_2 \varphi_j)^2 d\Omega}{\int_{\Omega}^{GL} \varphi_j^2 d\Omega}, \end{aligned}$$

où φ_j est une fonction de base de l'espace V_h . Or nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega}^{GL} \varphi_j^2 d\Omega &= \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_{h,\eta} \\ KC \text{ supp}(\varphi_j)}} \int_K^{GL} \varphi_j^2 dK \\ &= \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_{h,\eta} \\ KC \text{ supp}(\varphi_j)}} \int_{\widehat{K}}^{GL} |J_K| \widehat{\varphi}_{I(K,j)}^2 d\widehat{K} \\ &\leq \sup_{\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{K}} |J_K| \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_{h,\eta} \\ KC \text{ supp}(\varphi_j)}} \int_{\widehat{K}}^{GL} \widehat{\varphi}_{I(K,j)}^2 d\widehat{K}, \end{aligned}$$

qui, en utilisant la deuxième estimation de (1.45), devient

$$\int_{\Omega}^{GL} \varphi_j^2 d\Omega \leq Ch_\kappa^2 \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_{h,\eta} \\ KC \text{ supp}(\varphi_j)}} \int_{\widehat{K}}^{GL} \widehat{\varphi}_{I(K,j)}^2 d\widehat{K}. \quad (1.97)$$

D'un autre côté, nous avons

$$\int_{\Omega}^{GL} (\partial_1 \varphi_i)^2 + (\partial_2 \varphi_j)^2 d\Omega \geq \int_{K^*}^{GL} \left\| \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \nabla \varphi_j \right\|^2 dK,$$

où $K^* \subset \text{supp}(\varphi_j)$.

$$\begin{aligned}
 \int_{K^*}^{GL} \left\| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \nabla \varphi_j \right\|^2 dK^* &= \int_{\widehat{K}}^{GL} |J_{K^*}| \left\| \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} (\nabla \mathbf{F}_{K^*})^{-T} \nabla \widehat{\varphi}_{I_{(K^*,j)}} \right\|^2 d\widehat{K} \\
 &= \int_{\widehat{K}}^{GL} |J_{K^*}| \left\| \begin{pmatrix} (\nabla \mathbf{f}_\ell)^{-T} & \\ \hline & 0 \end{pmatrix} \nabla \widehat{\varphi}_{I_{(K^*,j)}} \right\|^2 d\widehat{K} \\
 &= \int_{\widehat{K}}^{GL} |J_{K^*}| \|(\nabla \mathbf{f}_\ell)^{-T} \nabla_{\widehat{x}_1, \widehat{x}_2} \widehat{\varphi}_{I_{(K^*,j)}}\|^2 d\widehat{K} \\
 &\geq \inf_{\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{K}} |J_{K^*}| \inf_{\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{K}} \|(\nabla \mathbf{f}_\ell)\|^{-2} \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla_{\widehat{x}_1, \widehat{x}_2} \widehat{\varphi}_{I_{(K^*,j)}}\|^2 d\widehat{K} \\
 &\geq \inf_{\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{K}} |J_{K^*}| \frac{1}{\sup_{\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{K}} \|(\nabla \mathbf{f}_\ell)\|^2} \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla_{\widehat{x}_1, \widehat{x}_2} \widehat{\varphi}_{I_{(K^*,j)}}\|^2 d\widehat{K},
 \end{aligned}$$

car $\nabla \mathbf{f}_\ell$ est continu et l'inf est atteint. La première estimation de (1.41) et la deuxième inégalité de (1.46) nous permettent d'écrire

$$\int_{\Omega}^{GL} (\partial_1 \varphi_i)^2 + (\partial_2 \varphi_j)^2 d\Omega \geq C \rho_\ell^2 \mu \eta h_\ell^{-2} \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla_{\widehat{x}_1, \widehat{x}_2} \widehat{\varphi}_{I_{(K^*,j)}}\|^2 d\widehat{K}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\frac{a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \geq C \frac{\mu \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla_{\widehat{x}_1, \widehat{x}_2} \widehat{\varphi}_{I_{(K^*,j)}}\|^2 d\widehat{K}}{h_\kappa^2 \sigma_\kappa^2 \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_{h,\eta} \\ K \subset \text{supp}(\varphi_j)}} \int_{\widehat{K}}^{GL} \widehat{\varphi}_{I_{(K,j)}}^2 d\widehat{K}}.$$

D'après le théorème 3, le nombre de mailles K tel que $K \subset \text{supp}(\varphi_j)$ est indépendant de h . En conclusion, il existe une constante C telle que

$$\frac{a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \geq C \frac{\mu}{h_\kappa^2 \sigma_\kappa^2}.$$

En utilisant $h_\ell \leq h$ et $\sigma_\kappa \leq \sigma$ (d'après la relation (1.39)) où σ est la constante de quasi-uniformité définie dans (1.39) et μ est la constante de quasi-uniformité définie dans (1.40), nous obtenons le résultat (1.96). \square

Proposition 3. *Il existe deux constantes c et C strictement positives telles que pour tout η nous avons*

$$c \eta^{-2} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \leq C \eta^{-2}. \quad (1.98)$$

Démonstration. La étapes de cette preuve sont identiques à celles des démonstrations des propositions 1 et 2. Nous allons juste indiquer les changements à effectuer. Bien évidemment, nous remplaçons les indices en τ par ν .

Commençons par la majoration. Nous remplaçons dans (1.91) et (1.92)

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{ par } \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne dans (1.93)

$$\begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix} (\nabla \mathbf{F}_K)^{-T} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \\ \hline & \frac{1}{z^{m+1}-z^m} \end{array} \right).$$

Puis, en utilisant (1.40), nous obtenons

$$a_{h,\nu\nu}^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq C h_\ell^2 \eta \left(\frac{1}{\mu\eta} \right)^2 \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla(\mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_K)\|^2 d\widehat{K}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b, \quad (1.99)$$

et en utilisant (1.99) et (1.95), nous avons

$$\frac{a_{h,\nu\nu}^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \leq C \frac{h_\ell^2}{\mu^3 \rho_\ell^2 \eta^2} \frac{\int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla(\mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_K)\|^2 d\widehat{K}}{\int_{\widehat{K}}^{GL} \|\mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_K\|^2 d\widehat{K}}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b,$$

ou encore (d'après (1.39))

$$\frac{a_{h,\nu\nu}^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \leq C \frac{\sigma^2}{\mu^3 \eta^2} \frac{\int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla(\mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_K)\|^2 d\widehat{K}}{\int_{\widehat{K}}^{GL} \|\mathbf{v}_h \circ \mathbf{F}_K\|^2 d\widehat{K}}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b.$$

Avec les mêmes arguments donnés dans la preuve de la proposition 1, on montre qu'il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\frac{a_{h,\nu\nu}^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \leq C \frac{\sigma^2}{\mu^3 \eta^2}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^b.$$

Passons à la minoration. En utilisant l'expression de $a_{h,\nu\nu}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v}_h=(0,0,\varphi) \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} &\geq C \sup_{\varphi \in V_h} \frac{\int_{\Omega}^{GL} (\partial_3 \varphi)^2 d\Omega}{\int_{\Omega}^{GL} \varphi^2 d\Omega} \\ &\geq C \frac{\int_{\Omega}^{GL} (\partial_3 \varphi_j)^2 d\Omega}{\int_{\Omega}^{GL} \varphi_j^2 d\Omega}, \end{aligned}$$

où φ_j est une fonction de base de l'espace V_h . Or

$$\int_{\Omega}^{GL} (\partial_3 \varphi_j)^2 d\Omega \geq \int_{K^*}^{GL} \left\| \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix} \nabla \varphi_j \right\|^2 dK,$$

où $K^* \subset \text{supp}(\varphi_j)$.

$$\begin{aligned} \int_{K^*}^{GL} \left\| \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix} \nabla \varphi_j \right\|^2 dK &= \int_{\widehat{K}}^{GL} |J_K| \left\| \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix} (\nabla \mathbf{F}_K)^{-T} \nabla \widehat{\varphi}_{I_{(K^*,j)}} \right\|^2 d\widehat{K} \\ &= \int_{\widehat{K}}^{GL} |J_K| \left\| \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \\ \hline & \frac{1}{z^{m+1}-z^m} \end{array} \right) \nabla \widehat{\varphi}_{I_{(K^*,j)}} \right\|^2 d\widehat{K} \\ &\geq \eta^{-2} \inf_{\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{K}} |J_K| \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla_{\widehat{\mathbf{x}}_3} \widehat{\varphi}_{I_{(K^*,j)}}\|^2 d\widehat{K} \quad (\text{d'après (1.40)}). \end{aligned}$$

La deuxième inégalité de (1.46) nous permet d'écrire

$$\int_{\Omega}^{GL} (\partial_3 \varphi_j)^2 d\Omega \geq C \rho_\ell^2 \mu \eta^{-1} \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla_{\widehat{x}_3} \widehat{\varphi}_{I_{(K^*,j)}}\|^2 d\widehat{K}. \quad (1.100)$$

Par conséquent, en utilisant (1.97) et (1.100) nous obtenons

$$\frac{a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \geq C \frac{\rho_\ell^2 \mu \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla_{\widehat{x}_3} \widehat{\varphi}_{I_{(K^*,j)}}\|^2 d\widehat{K}}{h_\kappa^2 \eta^2 \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_{h,\eta} \\ K \subset \text{supp}(\varphi_j)}} \int_{\widehat{K}}^{GL} \widehat{\varphi}_{I_{(K,j)}}^2 d\widehat{K}},$$

ou encore (d'après (1.39))

$$\frac{a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \geq C \frac{\mu \int_{\widehat{K}}^{GL} \|\nabla_{\widehat{x}_3} \widehat{\varphi}_{I_{(K^*,j)}}\|^2 d\widehat{K}}{\sigma^2 \eta^2 \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_{h,\eta} \\ K \subset \text{supp}(\varphi_j)}} \int_{\widehat{K}}^{GL} \widehat{\varphi}_{I_{(K,j)}}^2 d\widehat{K}}.$$

On conclut comme dans la démonstration de la proposition 2 qu'il existe une constante C telle que

$$\frac{a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \geq C \frac{\mu}{\sigma^2 \eta^2}.$$

□

Proposition 4. *Il existe une constante C strictement positive telle que pour tout h nous avons*

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \leq C (h^{-2} + \delta^{-2} \eta^{-2}). \quad (1.101)$$

Démonstration. En utilisant les Propositions 1, 3 et le Lemme 9 (avec $\epsilon = \delta^{-1}$), nous obtenons le résultat (1.101). □

Proposition 5. *Pour tout milieu orthotrope hétérogène, il existe une constante c strictement positive telle que pour tout h nous avons*

$$c (h^{-2} + \delta^{-2} \eta^{-2}) \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}. \quad (1.102)$$

Démonstration. Pour un milieu orthotrope hétérogène, la minoration (1.102) est facilement obtenue. En effet, considérer $\mathbf{v}_h = (0, 0, v_3)$ implique que le terme mixte $(a_{h,\tau\nu} + a_{h,\nu\tau})(0, 0, v_3)$ est nul. Par conséquent, en utilisant les Propositions 2 et 3, nous obtenons le résultat (1.102). □

1.4.2 Estimation du pas de temps pour le schéma explicite

Proposition 6. *Il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout h , l'énergie associée au schéma explicite (définie dans (1.72)) est positive sous la condition*

$$\Delta t^2 \leq C (h^{-2} + \delta^{-2} \eta^{-2})^{-1}. \quad (1.103)$$

Démonstration. Nous rappelons la condition de positivité de l'énergie associée au schéma explicite

$$\Delta t^2 \leq 4 \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right)^{-1}.$$

En utilisant la Proposition 4, nous avons

$$C(h^{-2} + \delta^{-2}\eta^{-2})^{-1} \leq \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right)^{-1}.$$

Si Δt satisfait (1.103), alors la positivité de l'énergie est vérifiée. \square

Remarque 4. Nous pouvons constater que le choix de $\eta \sim \delta^{-1}$, c'est-à-dire une discrétisation très grossière à travers l'épaisseur, nous permet d'obtenir une condition de positivité de l'énergie discrète associée au schéma explicite satisfaisante, mais ce n'est pas toujours possible pour au moins deux raisons : si l'on veut construire des solutions de référence ; si le milieu varie (généralement stratifié) le long de l'épaisseur. Dans ces cas, (1.103) pénalise fortement les calculs.

1.4.3 Estimation de la CFL pour le schéma implicite-explicite

Nous avons vu dans le Théorème 4 que pour $\theta > 1/4$, l'énergie associée au schéma implicite-explicite, définie dans (1.83), est positive sous une condition indépendante de δ . Nous nous concentrons ici à la condition CFL pour le cas limite $\theta = 1/4$.

Proposition 7. Si $\theta = 1/4$, il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout h , l'énergie associée au schéma implicite-explicite (définie dans (1.83)) est positive sous la condition

$$\Delta t^2 \leq C (h^{-2} + \delta^{-1}(h^{-2} + \eta^{-2}))^{-1}. \quad (1.104)$$

Démonstration. Pour $\theta = 1/4$, nous rappelons que la positivité de l'énergie associée au schéma implicite-explicite est vérifiée sous la condition

$$\Delta t^2 \leq 4 \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + 2\delta^{-1}a_{h,\tau\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right)^{-1}. \quad (1.105)$$

En utilisant le Lemme 9 avec $\epsilon = 1$, nous avons

$$2a_{h,\tau\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h).$$

Nous en déduisons que

$$a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + 2\delta^{-1}a_{h,\tau\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq (1 + \delta^{-1})a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \delta^{-1}a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h). \quad (1.106)$$

En utilisant (1.106), (1.87) et (1.98), nous montrons qu'il existe une constante telle que

$$C (h^{-2} + \delta^{-1}(h^{-2} + \eta^{-2}))^{-1} \leq \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + 2\delta^{-1}a_{h,\tau\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right)^{-1}.$$

Par conséquent, si Δt satisfait (1.104), alors la condition de positivité (1.105) de l'énergie associée au schéma implicite-explicite est vérifiée. \square

Remarque 5. Cette estimation nous montre une amélioration par rapport à l'estimation (1.103), car Δt est au pire en $O(\sqrt{\delta})$.

1.4.4 Préconditionnement pour le schéma implicite

À chaque itération, le système suivant doit être résolu

$$a_{h,\text{im}}^\delta(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) = \tilde{\ell}^{n,\delta}(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h,$$

où

$$a_{h,\text{im}}^\delta(\cdot, \cdot) = m_h(\cdot, \cdot) + \theta \Delta t^2 a_h^\delta(\cdot, \cdot),$$

et $\tilde{\ell}^{n,\delta}(\mathbf{v}_h)$ se calcule à partir des itérations précédentes et du terme source

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}^n(\mathbf{v}_h) &= 2m_h(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - \Delta t^2(1 - 2\theta)a_h^\delta(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) \\ &\quad - \left(m_h(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h) + \theta \Delta t^2 a_h^\delta(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h) \right) + \Delta t^2 \ell(t^n, \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

Pour un système de grande taille, nous pouvons utiliser une méthode itérative (voir [49; 69]) pour inverser le système, par exemple la méthode de gradient conjugué preconditionné (notons que le système algébrique correspondant est symétrique, défini et positif). La convergence de cette méthode dépend du conditionnement du système.

Un simple preconditionnement

Si la matrice de masse (associée à la forme bilinéaire $m_h(\cdot, \cdot)$) est utilisée comme une matrice de preconditionnement, alors le conditionnement χ du système résultant est défini par

$$\chi = \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\text{im}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \Big/ \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\text{im}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}.$$

Proposition 8. (Estimation de χ) *Il existe une constante C strictement positive telle que le conditionnement χ vérifie*

$$\chi \geq C(1 + \theta \Delta t^2 (h^{-2} + \delta^{-2} \eta^{-2})). \quad (1.107)$$

Démonstration. Nous avons

$$\frac{a_{h,\text{im}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} = 1 + \theta \Delta t^2 \frac{a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}.$$

Comme le terme $\frac{a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}$ est positif et en utilisant des fonctions constantes qui sont dans \mathbf{V}_h et dans le noyau de $a_h^\delta(\cdot, \cdot)$, nous obtenons le résultat

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} = 0, \quad (1.108)$$

impliquant

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\text{im}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} = 1. \quad (1.109)$$

Par ailleurs, en utilisant la Proposition 5, nous déduisons qu'il existe une constante C telle que

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\text{im}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \geq C(1 + \theta \Delta t^2 (h^{-2} + \delta^{-2} \eta^{-2})). \quad (1.110)$$

Le résultat (1.107) est directement obtenu en utilisant (1.109) et (1.110). \square

On remarque que le conditionnement χ explose lorsque δ tend vers 0. Par conséquent, on ne garantit pas, dans ce cas, qu'une méthode itérative utilisée avec la matrice de masse comme preconditionneur soit efficace.

Une technique de préconditionnement robuste

Nous montrons ici que le schéma implicite-explicite pourrait être utilisé pour préconditionner le système à résoudre associé au schéma implicite. Dans la sous-section précédente, nous avons utilisé la matrice de masse comme préconditionneur. Maintenant, nous proposons d'utiliser la matrice associée à la forme bilinéaire $a_{h,\text{im-ex}}^\delta$ définie dans (1.66) par

$$a_{h,\text{im-ex}}^\delta(\cdot, \cdot) = m_h(\cdot, \cdot) + \theta \Delta t^2 \delta^{-2} a_{h,\nu\nu}(\cdot, \cdot).$$

Nous rappelons qu'en raison de la technique de condensation de masse (utilisation de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto pour approcher la forme bilinéaire de masse m), le représentant matriciel de la forme bilinéaire m_h est diagonal. Par ailleurs, nous avons choisi d'utiliser aussi la formule de quadrature de Gauss-Lobatto où les points de quadrature coïncident avec les points d'interpolation pour calculer la forme bilinéaire $a_{h,\nu\nu}$. Or seules les dérivées dans la direction de l'épaisseur interviennent dans $a_{h,\nu\nu}$. De plus, nous rappelons que le domaine de la plaque est construit par extrusion de la surface tangente. Par conséquent, l'inversion de la matrice associée à $a_{h,\text{im-ex}}^\delta$ est facile car cela revient à inverser des petits systèmes linéaires découplés, où chaque système correspond à un point d'interpolation dans le plan tangent de la plaque.

Le conditionnement du système qui en résulte est donné par

$$\chi_r = \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\text{im}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{a_{h,\text{im-ex}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \Big/ \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\text{im}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{a_{h,\text{im-ex}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}.$$

Proposition 9. *Il existe une constante C indépendante de δ telle que*

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\text{im}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{a_{h,\text{im-ex}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \leq C (1 + \theta \Delta t^2 h^{-2}).$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{a_{h,\text{im}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{a_{h,\text{im-ex}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} &= \frac{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \theta \Delta t^2 a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \theta \Delta t^2 \delta^{-2} a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \\ &= 1 + \frac{\theta \Delta t^2 (a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + 2\delta^{-1} a_{h,\tau\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h))}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \theta \Delta t^2 \delta^{-2} a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 9, nous avons que pour tout $\epsilon > 0$

$$2a_{h,\tau\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq \frac{1}{\epsilon} a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \epsilon a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h).$$

Nous choisissons $\epsilon = \delta^{-1}$

$$2\delta^{-1} a_{h,\tau\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \delta^{-2} a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h).$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \frac{a_{h,\text{im}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{a_{h,\text{im-ex}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} &\leq 1 + \frac{2\theta \Delta t^2 a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \theta \Delta t^2 \delta^{-2} a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \theta \Delta t^2 \delta^{-2} a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \\ &\leq 2 + \frac{2\theta \Delta t^2 a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \theta \Delta t^2 \delta^{-2} a_{h,\nu\nu}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \\ &\leq 2 + \frac{2\theta \Delta t^2 a_{h,\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}. \end{aligned}$$

En utilisant la Proposition 1, nous déduisons qu'il existe une constante C strictement positive telle que pour tout h

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\text{im}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{a_{h,\text{im-ex}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \leq C (1 + \theta \Delta t^2 h^{-2}).$$

□

Malheureusement, il n'est pas évident de prouver que le terme

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{h,\text{im}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{a_{h,\text{im-ex}}^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}$$

est théoriquement indépendant de δ , bien qu'on observe l'indépendance de χ_r par rapport à δ dans les résultats numériques.

1.5 Résultats numériques

Nous avons développé un code en C++, en nous basant sur un solveur par éléments finis nommé Ondomatic qui est déjà développé au sein du Département Imagerie Simulation pour le Contrôle (DISC) du CEA LIST. Notre code a été ensuite intégré dans la plateforme CIVA.

Dans cette section, nous nous concentrons sur les résultats numériques du schéma implicite-explicite. Pour nos simulations, nous utilisons le terme source

$$f_E(x_1, x_2, x_3, t) = f_E^t(t) * f_E^s(x_1, x_2, x_3).$$

La dépendance en temps f_E^t est une fonction de Ricker (fonction indéfiniment dérivable en temps) comme suit

$$f_E^t(t) = (-1.5 F^2 \tau + 0.25 F^4 \tau^3) \exp(-0.25 F^2 \tau^2),$$

où F représente la fréquence centrale et $\tau = t - t_0$ avec t_0 l'origine en temps. Pour la dépendance spatiale, nous choisissons

$$f_E^s(x_1, x_2, x_3) = -(H(d + r_1) - H(d + r_0)) - (H(d - r_0) - H(d - r_1)),$$

où $d = \sqrt{(x_1 - x_1^c)^2 + (x_2 - x_2^c)^2}$, H est la fonction Heaviside régularisée, $(x_1^c, x_2^c, 0)$ sont les coordonnées du centre du capteur, r_0 et r_1 représentent les rayons interne et externe du capteur.

Nous choisissons $t_0 = 25 \mu\text{s}$, $F = 100\pi \text{ kHz}$, $r_0 = 5 \text{ mm}$ et $r_1 = 10 \text{ mm}$. Par ailleurs, pour le schéma implicite-explicite, nous prenons $\theta = 1/2$.

1.5.1 Validation des propriétés de convergence et de robustesse du schéma implicite-explicite

Notre objectif est d'analyser les propriétés de convergence du schéma implicite-explicite en prenant comme solution de référence celle du schéma explicite.

Tout d'abord, nous devons nous concentrer sur le calcul du pas de temps Δt pour chaque schéma. Rappelons que $\Delta t_{\text{IM-EX}}^* \geq \Delta t_{\text{EX}}$ où $\Delta t_{\text{IM-EX}}^*$ et Δt_{EX} sont respectivement les pas de temps des schémas implicite-explicite et explicite, vérifiant respectivement les conditions

(1.84) et (1.73) de positivité des énergies discrètes associées. Dans nos simulations, nous voulons comparer les solutions des deux schémas aux mêmes instants sans imposer le même pas de temps (le plus petit étant Δt_{EX}) pour les deux méthodes. Dans cette sous-section, nous choisissons $\Delta t_{\text{IM-EX}} = k\Delta t_{\text{EX}}$ avec k le plus grand entier tel que $\Delta t_{\text{IM-EX}}^* \geq k\Delta t_{\text{EX}}$. Nous cherchons à analyser le comportement de l'erreur relative

$$err^{**} := \frac{\sup_{n \in [0, N]} \|(\mathbf{u}_h^n)_{\text{IM-EX}} - (\mathbf{u}_h^{kn})_{\text{EX}}\|_{(L^2(\Omega))^3}}{\sup_{n \in [0, N]} \|(\mathbf{u}_h^{kn})_{\text{EX}}\|_{(L^2(\Omega))^3}} \quad (1.111)$$

en termes de δ et h . Dans (1.111), $(\mathbf{u}_h^n)_{\text{IM-EX}}$ (respectivement $(\mathbf{u}_h^n)_{\text{EX}}$) représente la solution du problème discrétisé par le schéma implicite-explicite (respectivement le schéma explicite).

La figure 1.2 montre que l'erreur err^{**} diminue en suivant $err^{**} \sim h^2 \sim \Delta t_{\text{IM-EX}}^2$, à δ fixé.

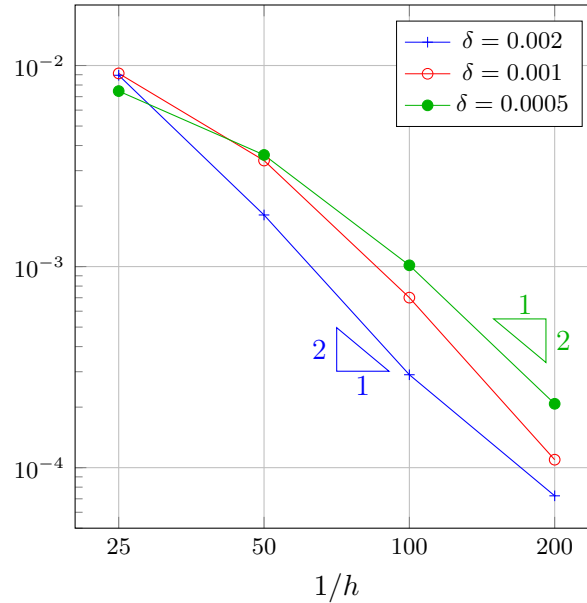


FIGURE 1.2 – Comportement de l'erreur relative err^{**} en fonction de h avec différentes valeurs de δ pour une plaque isotrope homogène avec des paramètres de discrétisation $p_\tau = 6$ et $(\eta, p_\nu) = (\delta, 5)$.

D'après le tableau 1.1, nous constatons que lorsque δ diminue, l'erreur err^{**} augmente un peu mais pour de très faibles valeurs de δ , l'erreur err^{**} reste approximativement constante, ce qui confirme que le phénomène de verrouillage numérique (qui signifie que la constante d'erreur explose lorsque l'épaisseur de la plaque passe à zéro) ne semble pas significatif lorsque la méthode implicite-explicite est utilisée.

$10^3\delta$	1	0.75	0.5	0.375	0.25	0.125
10^3err^{**}	0.701018	0.813895	1.01474	0.925119	1.02194	1.01887

TABLE 1.1 – Comportement de l'erreur relative err^{**} en fonction de δ pour une plaque isotrope homogène avec des paramètres de discrétisation $(h, p_\tau) = (0.01, 6)$ et $(\eta, p_\nu) = (\delta, 5)$.

1.5.2 Comparaisons des temps de calcul

Nous cherchons à comparer les coûts de calcul des schémas explicite, implicite avec un simple préconditionnement, (IM- χ), implicite avec un préconditionnement robuste IM- χ_r et implicite-explicite. Notons que nous avons choisi une discrétisation en espace qui nous semble raisonnable (suffisamment fine dans la direction de l'épaisseur sans être très pénalisante pour le schéma explicite).

Tout d'abord, nous rappelons que l'énergie discrète associée au schéma implicite est inconditionnellement positive pour $\theta \geq 1/4$. Par conséquent, le pas de temps pour ce schéma peut être choisi indépendamment des paramètres de discrétisation le long de l'épaisseur et surtout il peut être choisi indépendamment de δ . Dans nos simulations, nous utilisons le même pas de temps que celui de la méthode implicite-explicite, premièrement, pour des raisons de consistance (le pas de temps ne doit pas être trop grand), deuxièmement pour pouvoir comparer facilement les deux méthodes.

	EX		IM- χ		IM- χ_r		IM-EX	
	$10^5 \Delta t$	CPU*	$10^5 \Delta t$	CPU*	$10^5 \Delta t$	CPU*	$10^5 \Delta t$	CPU*
$\delta = 0.002$	2.16	120	25.5	423	25.5	89	25.5	11
$\delta = 0.001$	1.08	242	25.5	730	25.5	96	25.5	11
$\delta = 0.0005$	0.54	486	25.5	1122	25.5	103	25.5	11

*=(s)

TABLE 1.2 – Tableau comparatif des temps de calcul des schémas explicite, implicite avec un simple préconditionnement, implicite-explicite et implicite avec un préconditionnement robuste, pour une plaque homogène isotrope avec des paramètres de discrétisation $(h, p_\tau) = (0.02, 4)$ et $(\eta, p_\nu) = (2/3, 4)$.

Le tableau 1.2 nous montre pour le schéma explicite que plus δ est petit, plus le pas de temps est faible et donc plus le temps de calcul de la méthode est élevé. On retrouve numériquement l'estimation $\Delta t = O(\delta)$ (Proposition 6).

Pour le schéma implicite avec un simple préconditionnement (IM- χ), nous constatons que plus δ est petit, plus le temps de calcul est élevé en raison du nombre d'itérations de la méthode du gradient conjugué qui augmente. En effet, le conditionnement du système à inverser augmente lorsque δ devient petit (voir l'estimation (1.107) de χ). Remarquons que le temps de calcul est encore plus grand que celui du schéma explicite. Par ailleurs, l'utilisation du préconditionnement robuste proposé dans la sous-section 1.4.4 peut réduire considérablement le temps de calcul pour le schéma implicite IM- χ_r . Finalement, comme prévu, le schéma implicite-explicite est considérablement le moins coûteux.

En effet, nous rappelons qu'à chaque itération pour le schéma implicite-explicite, nous avons à résoudre

$$m_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + \theta \Delta t^2 \delta^{-2} a_{h,\nu\nu}(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) = \tilde{\ell}^{n,\delta}(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

En raison de la technique de condensation de masse (utilisation de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto pour approcher la forme bilinéaire de masse m), la matrice associée à la forme bilinéaire m_h est diagonale. Par ailleurs, nous avons choisi d'utiliser aussi la formule de quadrature de Gauss-Lobatto où les points de quadrature coïncident avec les points d'interpolation pour calculer la forme bilinéaire $a_{h,\nu\nu}$. Or seules les dérivées dans la direction de l'épaisseur interviennent dans $a_{h,\nu\nu}$. De plus, nous rappelons que le domaine de la plaque est construit par extrusion de la surface tangente. Par conséquent, l'inversion

de la matrice associée à $a_{h,im-ex}^\delta$ est facile car cela revient à inverser des petits systèmes linéaires découplés, où chaque système correspond à un point d'interpolation dans le plan tangent de la plaque. Cette étape est très efficace et peut être réalisée en parallèle, ce qui justifie le coût de calcul faible de cette méthode par rapport aux autres schémas.

Dans la suite de cette sous-section, nous nous intéressons à un cas plus réaliste dans lequel nous utilisons une plaque composite stratifiée (composée de 2 matériaux orthotropes) de 24 couches alternées.

Nous représentons sur la figure 1.3 l'amplitude du champ de déplacements obtenu avec le schéma implicite-explicite à deux instants différents t_1 et t_2 .

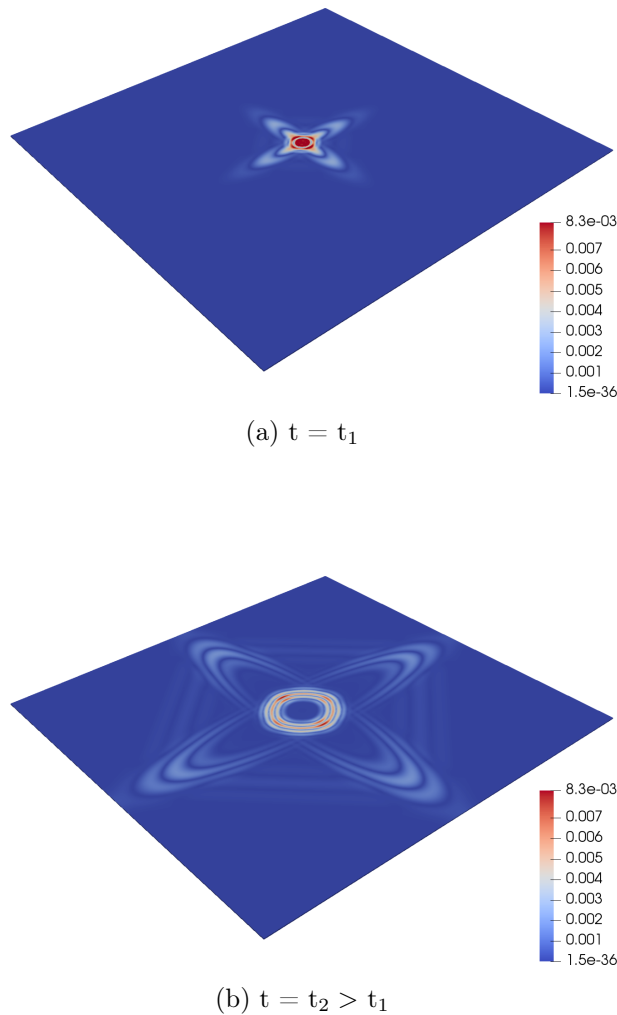


FIGURE 1.3 – Amplitude du champ de déplacements obtenu avec le schéma implicite-explicite à deux instants différents t_1 et t_2 , pour une plaque composite stratifiée (composée de 2 matériaux orthotropes) de 24 couches alternées avec $\delta = 0.002$ et des paramètres de discrétisation $(h, p_\tau) = (0.01, 6)$ et $(\eta, p_\nu) = (\delta/12, 2)$.

Les solutions obtenues avec les schémas explicite et implicite-explicite sont superposées, comme l'illustre la figure 1.4.

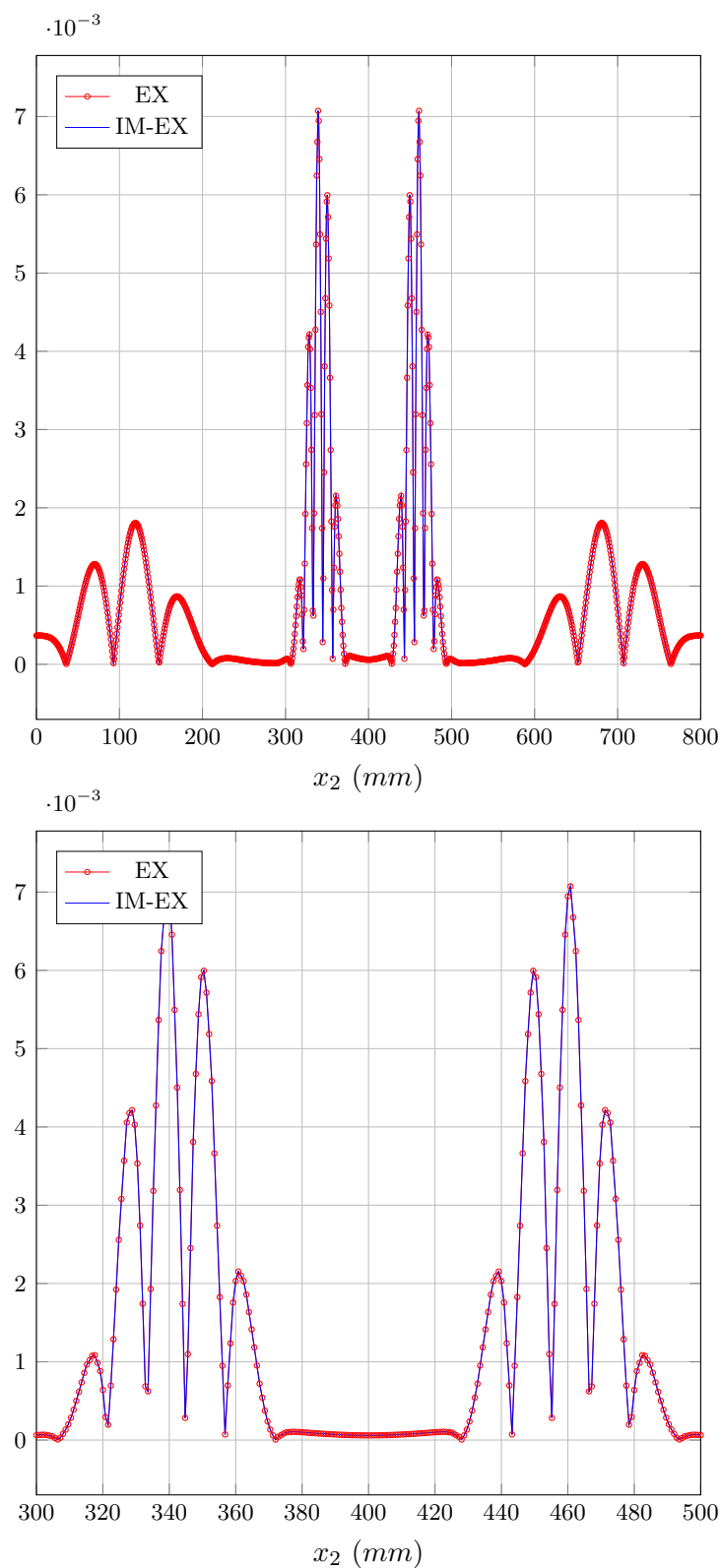


FIGURE 1.4 – Extraction des amplitudes des champs de déplacement obtenus avec les schémas explicite et implicite-explicite, suivant la droite $x_1 = 400$ mm, $x_3 = 0$ mm et à l'instant t_2 . L'échantillon est une plaque composite stratifiée (composée de 2 matériaux orthotropes) de 24 couches alternées avec $\delta = 0.002$ et des paramètres de discrétisation $(h, p_\tau) = (0.01, 6)$ et $(\eta, p_\nu) = (\delta/12, 2)$.

La relation entre les variations de δ , le pas de temps et le temps de calcul pour les méthodes explicite et implicite-explicite est illustrée dans le tableau 1.3. La dernière ligne de ce tableau nous montre que le coût de calcul du schéma implicite-explicite est à peu près 11 fois plus petit que celui du schéma explicite.

	EX		IM-EX	
	$10^5 \Delta t$	CPU (s)	$10^5 \Delta t$	CPU (s)
$\delta = 0.002$	1.7	2996.18	4.779	1097.54
$\delta = 0.001$	0.852	5901.17	4.779	1099.56
$\delta = 0.0005$	0.426	11706.8	4.779	1090.6

TABLE 1.3 – Tableau comparatif des temps de calcul des schémas explicite et implicite-explicite à $t = t_1$, pour une plaque composite stratifiée (composée de 2 matériaux orthotropes) de 24 couches alternées avec des paramètres de discrétisation $(h, p_\tau) = (0.01, 6)$ et $(\eta, p_\nu) = (\delta/12, 2)$.

CHAPITRE 2

Analyse de convergence

Nous nous intéressons à l'analyse de convergence des schémas explicite, implicite et implicite-explicite. Nous rappelons dans un premier temps les éléments classiques de l'analyse pour les schémas explicite et implicite. D'une part, cette étape préliminaire nous permet d'explicitier la dépendance en δ dans l'analyse de ces deux schémas (cet aspect n'est pas traité dans la littérature à notre connaissance car il est spécifique à notre problème). D'autre part, elle prépare l'analyse du cas implicite-explicite qui est plus complexe. Un résultat important de l'analyse de ce schéma est la convergence en temps d'ordre 1 uniforme en δ au prix d'une hypothèse (\mathcal{H}) sur la solution du problème continu, à savoir que sa dérivée le long de l'épaisseur est en $O(\delta)$.

Finalement dans la dernière section de ce chapitre, nous investiguons l'hypothèse (\mathcal{H}) faite sur la solution du problème continu pour obtenir la convergence uniforme. Pour cela, nous nous plaçons dans un domaine infini dans le plan tangent et utilisons une stratégie d'analyse asymptotique pour trouver sous quelles conditions sur les données du problème (coefficients matériaux et source) l'hypothèse (\mathcal{H}) est vérifiée.

Sommaire

2.1	Analyse de convergence du problème semi-discrétisé en espace	52
2.2	Analyse de convergence du problème totalement discrétisé	57
2.2.1	Convergence du schéma explicite	57
2.2.2	Convergence du schéma implicite	60
2.2.3	Convergence du schéma implicite-explicite	64
2.3	Estimation uniforme de $\delta^{-1}\ \partial_3\mathbf{u}^\delta\ _{L^2(\Omega)^3}$ par rapport à δ	68
2.3.1	Préliminaires	69
2.3.2	Développements asymptotiques formels	70
2.3.3	Régularité des correcteurs et estimations d'erreurs pour le problème continu	75

2.1 Analyse de convergence du problème semi-discrétisé en espace

Nous rappelons que le domaine modèle mis à l'échelle est noté $\Omega = \Sigma \times (-1, 1)$ avec $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ sa surface médiane. Nous cherchons $\widehat{\mathbf{u}}^\delta(t) \in \mathbf{V} = H^1(\Omega)^3$, pour tout $t \geq 0$, vérifiant pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, le problème (1.11)

$$\frac{d^2}{dt^2} m(\widehat{\mathbf{u}}^\delta, \mathbf{v}) + a^\delta(\widehat{\mathbf{u}}^\delta, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \quad (2.1)$$

où pour tous $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \\ a^\delta(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon^\delta(\mathbf{w}) : \varepsilon^\delta(\mathbf{v}) \, d\Omega, \\ \ell(\mathbf{v}) := \int_{\Gamma_+} (g_1^+, g_2^+, 0)^t \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+. \end{array} \right.$$

La densité $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ satisfait

$$\rho^- = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega^\delta} \rho(\mathbf{x}), \quad \rho^+ = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega^\delta} \rho(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

De plus, nous rappelons que \mathbf{C} vérifie

- une propriété de coercivité : il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\alpha |\varepsilon|^2 \leq \mathbf{C} \varepsilon : \varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^3), \quad (2.3)$$

- une propriété de continuité : il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$|\mathbf{C} \varepsilon| \leq \beta |\varepsilon|, \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^3). \quad (2.4)$$

Pour rappel, le tenseur ε^δ se décompose sous la forme

$$\varepsilon^\delta(\mathbf{v}) = \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) + \delta^{-1} \varepsilon_\nu(\mathbf{v}),$$

où

$$\varepsilon_\tau(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_1 v_1 & \cdot & \cdot \\ \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2 & 2\partial_2 v_2 & \cdot \\ \partial_1 v_3 & \partial_2 v_3 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\varepsilon_\nu(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \\ \partial_3 v_1 & \partial_3 v_2 & 2\partial_3 v_3 \end{pmatrix},$$

ce qui nous a permis de réécrire la forme bilinéaire a^δ

$$a^\delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_{\tau\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \delta^{-1} (a_{\tau\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_{\nu\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) + \delta^{-2} a_{\nu\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

où

$$\begin{cases} a_{\tau\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_{\tau}(\mathbf{u}) : \varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}) \, d\Omega, \\ a_{\tau\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_{\tau}(\mathbf{u}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega, \quad a_{\nu\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_{\tau\nu}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \\ a_{\nu\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_{\nu}(\mathbf{u}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega. \end{cases}$$

Nous rappelons aussi que la formulation faible semi-discrète associée au problème (2.1) consiste à trouver $\widehat{\mathbf{u}}_h^{\delta}(t) \in \mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ vérifiant pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$

$$\frac{d^2}{dt^2} m(\widehat{\mathbf{u}}_h^{\delta}, \mathbf{v}_h) + a^{\delta}(\widehat{\mathbf{u}}_h^{\delta}, \mathbf{v}_h) = \ell(\mathbf{v}_h). \quad (2.5)$$

De plus, $\widehat{\mathbf{u}}^{\delta}$ et $\widehat{\mathbf{u}}_h^{\delta}$ vérifient des conditions initiales nulles.

Dans ce chapitre, pour simplifier l'analyse, nous n'étudions pas la quadrature c'est-à-dire qu'on suppose que $m_h = m$, $a_{h,\tau\tau} = a_{\tau\tau}$, $a_{h,\tau\nu} = a_{\tau\nu}$, $a_{h,\nu\tau} = a_{\nu\tau}$, $a_{h,\nu\nu} = a_{\nu\nu}$ et donc $a_h^{\delta} = a^{\delta}$. Les résultats du chapitre précédent s'étendent sans difficulté à ce cas qui est plus simple.

Par ailleurs, afin d'alléger l'écriture des équations, nous allons utiliser respectivement les notations \mathbf{u}^{δ} et \mathbf{u}_h^{δ} au lieu de $\widehat{\mathbf{u}}^{\delta}$ et $\widehat{\mathbf{u}}_h^{\delta}$.

Dans cette section, nous cherchons une estimation de l'erreur entre la solution exacte \mathbf{u}^{δ} du problème (2.1) et la solution \mathbf{u}_h^{δ} du problème semi-discrétisé en espace (2.5), en fonction de h et δ . Il s'agit de l'analyse de consistance, étape préliminaire à l'étude de la convergence globale. Nous introduisons l'erreur

$$\mathbf{e}_h^{\delta}(t) = \mathbf{u}^{\delta}(t) - \mathbf{u}_h^{\delta}(t), \quad \forall t \in (0, T).$$

Nous cherchons à montrer que cette erreur converge vers 0, lorsque h tend vers 0, en norme $\|\cdot\|_{\delta}$ définie par

$$\|\mathbf{u}\|_{\delta}^2 := \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\varepsilon^{\delta}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3, \quad (2.6)$$

et qui dépend donc de δ . Pour cela, nous introduisons un outil fondamental à notre analyse. Cet outil est classique, nous attirons seulement l'attention du lecteur sur le fait que les constantes sont indépendantes de δ .

Pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, on note $P_h \mathbf{u}$ l'unique solution du problème

$$m(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + a^{\delta}(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (2.7)$$

où P_h est l'opérateur de projection elliptique de \mathbf{V} sur \mathbf{V}_h .

Lemme 10. *Le problème (2.7) est bien posé dans \mathbf{V} .*

Démonstration. En utilisant la continuité (2.4) du tenseur de rigidité \mathbf{C} et la définition (2.2) de ρ^+ , nous avons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} m(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + a^{\delta}(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \leq \\ \rho^+ \|\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^3} \|\mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)^3} + \beta \left\| \varepsilon^{\delta}(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}) \right\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \left\| \varepsilon^{\delta}(\mathbf{v}_h) \right\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons aisément par définition (2.6) de $\|\cdot\|_{\delta}$

$$m(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + a^{\delta}(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \leq 2 \max(\rho^+, \beta) \|\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}\|_{\delta} \|\mathbf{v}_h\|_{\delta},$$

prouvant la continuité par rapport à la norme $||| \cdot |||_\delta$. Par ailleurs, la définition (2.2) de ρ^- et la coercivité (2.3) du tenseur de rigidité \mathbf{C} nous permettent de montrer

$$m(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{u} - P_h \mathbf{u}) + a^\delta(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{u} - P_h \mathbf{u}) \geq \rho^- \|\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \alpha \left\| \varepsilon^\delta(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}) \right\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}^2,$$

ou encore

$$m(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{u} - P_h \mathbf{u}) + a^\delta(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{u} - P_h \mathbf{u}) \geq \min(\rho^-, \alpha) |||\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}|||_\delta^2.$$

Par conséquent, le problème (2.7) est coercif en norme $||| \cdot |||_\delta$. Le théorème de Lax-Milgram nous permet de conclure le caractère bien posé du problème (2.7). \square

Lemme 11. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ telle que*

$$|||\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}|||_\delta \leq C \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} |||\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|||_\delta, \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3. \quad (2.8)$$

β est la constante de continuité du tenseur \mathbf{C} (définie dans (2.4)) et α est la constante de coercivité du tenseur \mathbf{C} (définie dans (2.3))

Démonstration. Par définition de l'opérateur de projection elliptique, nous montrons que

$$m(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{u} - P_h \mathbf{u}) + a^\delta(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{u} - P_h \mathbf{u}) = m(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + a^\delta(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

La continuité et la coercivité du problème (2.7) nous permettent de déduire

$$\min(\rho^-, \alpha) |||\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}|||_\delta^2 \leq \max(\rho^+, \beta) |||\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}|||_\delta |||\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|||_\delta, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h,$$

et donc le résultat souhaité. \square

Nous introduisons

$$\boldsymbol{\eta}_h^\delta(t) = \mathbf{u}^\delta(t) - P_h \mathbf{u}^\delta(t) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\epsilon}_h^\delta(t) = \mathbf{u}_h^\delta(t) - P_h \mathbf{u}^\delta(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

de sorte que

$$\mathbf{e}_h^\delta(t) = \boldsymbol{\eta}_h^\delta(t) - \boldsymbol{\epsilon}_h^\delta(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.9)$$

Nous introduisons également l'énergie $\mathcal{E}_h(t)$ associée à l'erreur de projection à l'instant t par

$$\mathcal{E}_h(t) = \frac{1}{2} m(\partial_t \boldsymbol{\epsilon}_h^\delta, \partial_t \boldsymbol{\epsilon}_h^\delta) + \frac{1}{2} a^\delta(\boldsymbol{\epsilon}_h^\delta, \boldsymbol{\epsilon}_h^\delta), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.10)$$

Théorème 5. *Pour tout $T > 0$, supposons que \mathbf{u}^δ solution de (2.1) est dans*

$$C^2((0, T); L^2(\Omega)^3) \cap C^1((0, T); H^1(\Omega)^3).$$

Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et δ telle que

$$\sup_{t \in (0, T)} \mathcal{E}_h^{1/2}(t) \leq CT \sup_{t \in (0, T)} \left(\left\| \partial_t^2 \boldsymbol{\eta}_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)^3} + \left\| \boldsymbol{\eta}_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)^3} \right). \quad (2.11)$$

Démonstration. En soustrayant les deux équations (2.1) et (2.5) vérifiées respectivement par \mathbf{u}^δ et \mathbf{u}_h^δ et en utilisant (2.9), nous obtenons

$$m(\partial_t^2 \epsilon_h^\delta, \mathbf{v}_h) + a^\delta(\epsilon_h^\delta, \mathbf{v}_h) = m(\partial_t^2 \boldsymbol{\eta}_h^\delta, \mathbf{v}_h) + a^\delta(\boldsymbol{\eta}_h^\delta, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

En choisissant $\mathbf{v}_h = \partial_t \epsilon_h^\delta$, nous obtenons l'identité suivante

$$\frac{d\mathcal{E}_h(t)}{dt} = m(\partial_t^2 \boldsymbol{\eta}_h^\delta, \partial_t \epsilon_h^\delta) + a^\delta(\boldsymbol{\eta}_h^\delta, \partial_t \epsilon_h^\delta). \quad (2.12)$$

Comme $\partial_t \epsilon_h^\delta \in \mathbf{V}_h$, la définition (2.7) de l'opérateur de projection elliptique P_h nous permet de réécrire l'identité (2.12)

$$\frac{d\mathcal{E}_h(t)}{dt} = m(\partial_t^2 \boldsymbol{\eta}_h^\delta - \boldsymbol{\eta}_h^\delta, \partial_t \epsilon_h^\delta).$$

Par conséquent, nous avons l'inégalité

$$\frac{d\mathcal{E}_h(t)}{dt} \leq \rho^+ \left(\|\partial_t^2 \boldsymbol{\eta}_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{\eta}_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \right) \|\partial_t \epsilon_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

En remarquant que

$$\|\partial_t \epsilon_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \sqrt{\frac{2}{\rho^-}} \mathcal{E}_h^{1/2}(t), \quad (2.13)$$

nous obtenons, par le lemme de Grönwall

$$\frac{d\mathcal{E}_h^{1/2}(t)}{dt} \leq \frac{\rho^+}{\sqrt{2\rho^-}} \left(\|\partial_t^2 \boldsymbol{\eta}_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{\eta}_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \right).$$

En utilisant le fait que $\mathcal{E}_h^{1/2}(0) = 0$ (car les conditions initiales sont nulles), nous déduisons

$$\mathcal{E}_h^{1/2}(t) \leq \frac{\rho^+}{\sqrt{2\rho^-}} \int_0^t \left(\|\partial_s^2 \boldsymbol{\eta}_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{\eta}_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \right) ds,$$

impliquant

$$\sup_{t \in (0, T)} \mathcal{E}_h^{1/2}(t) \leq \frac{\rho^+ T}{\sqrt{2\rho^-}} \sup_{t \in (0, T)} \left(\|\partial_t^2 \boldsymbol{\eta}_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{\eta}_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \right). \quad (2.14)$$

□

L'estimation du Théorème 5 est l'estimation de base qui nous permet de déduire que l'erreur \mathbf{e}_h^δ est contrôlée en norme L^∞ en temps et en norme L^2 en espace.

Corollaire 1. *Supposons que \mathbf{u}_h^δ solution de (2.1) est dans $C^2((0, T); H^1(\Omega)^3)$. Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et δ telle que*

$$\sup_{t \in (0, T)} \|\mathbf{e}_h^\delta(t)\|_\delta \leq C \sup_{t \in (0, T)} \left((T + T^2) \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\partial_t^2 \mathbf{u}^\delta - \mathbf{v}_h\|_\delta + (1 + T + T^2) \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u}^\delta - \mathbf{v}_h\|_\delta \right).$$

Démonstration. Dans cette preuve, la constante C peut varier d'une ligne à une autre. En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons

$$|||\mathbf{e}_h^\delta|||_\delta \leq |||\boldsymbol{\eta}_h^\delta|||_\delta + |||\boldsymbol{\epsilon}_h^\delta|||_\delta.$$

D'après la définition (2.6) de la norme $|||\cdot|||_\delta$, nous avons

$$|||\boldsymbol{\epsilon}_h^\delta|||_\delta \leq \|\boldsymbol{\epsilon}_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\varepsilon^\delta(\boldsymbol{\epsilon}_h^\delta)\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}.$$

Or en utilisant (2.13), la coercivité (2.3) du tenseur de rigidité \mathbf{C} et le fait que les conditions initiales sont nulles, nous montrons que

$$|||\boldsymbol{\epsilon}_h^\delta|||_\delta \leq C(1+T) \sup_{t \in (0,T)} \mathcal{E}_h^{1/2}(t),$$

ou encore (en utilisant (2.11))

$$|||\boldsymbol{\epsilon}_h^\delta|||_\delta \leq C(T+T^2) \sup_{t \in (0,T)} \left(\|\partial_t^2 \boldsymbol{\eta}_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{\eta}_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \right).$$

Comme $\mathbf{u}^\delta \in C^2((0,T); H^1(\Omega)^3)$ donc on peut appliquer P_h au terme $\partial_t^2 \mathbf{u}^\delta$. En utilisant (2.8), nous avons

$$\|\partial_t^2 \boldsymbol{\eta}_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \leq |||\partial_t^2 \boldsymbol{\eta}_h^\delta|||_\delta \leq C \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} |||\partial_t^2 \mathbf{u}^\delta - \mathbf{v}_h|||_\delta,$$

ainsi que

$$\|\boldsymbol{\eta}_h^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \leq |||\boldsymbol{\eta}_h^\delta|||_\delta \leq C \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} |||\mathbf{u}^\delta - \mathbf{v}_h|||_\delta.$$

Nous en déduisons

$$\sup_{t \in (0,T)} |||\boldsymbol{\epsilon}_h^\delta|||_\delta \leq C(T+T^2) \sup_{t \in (0,T)} \left(|||\partial_t^2 \mathbf{u}^\delta - \mathbf{v}_h|||_\delta + \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} |||\mathbf{u}^\delta - \mathbf{v}_h|||_\delta \right),$$

impliquant le résultat

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (0,T)} |||\mathbf{e}_h^\delta(t)|||_\delta \leq C \sup_{t \in (0,T)} \left((T+T^2) \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} |||\partial_t^2 \mathbf{u}^\delta - \mathbf{v}_h|||_\delta \right. \\ \left. + (1+T+T^2) \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} |||\mathbf{u}^\delta - \mathbf{v}_h|||_\delta \right). \end{aligned}$$

□

Le corollaire 1 est bien un résultat de convergence. En effet, nous avons

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} |||\mathbf{u}^\delta - \mathbf{v}_h|||_\delta \leq C\delta^{-1} \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u}^\delta - \mathbf{v}_h\|_{H^1(\Omega)^3},$$

donc si on utilise des éléments finis Q_k et si la solution est régulière (de classe H^{k+1} en espace) alors on s'attend à avoir

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} |||\mathbf{u}^\delta - \mathbf{v}_h|||_\delta \lesssim \delta^{-1} h^k.$$

On a la même estimation pour $\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} |||\partial_t^2 \mathbf{u}^\delta - \mathbf{v}_h|||_\delta$, en supposant que \mathbf{u}^δ est suffisamment régulière en temps.

2.2 Analyse de convergence du problème totalement discrétisé

Pour étudier la convergence globale, nous allons procéder par inégalité triangulaire

$$\|\mathbf{u}^\delta(t^n) - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \|\mathbf{u}^\delta(t^n) - \mathbf{u}_h^\delta(t^n)\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\mathbf{u}_h^\delta(t^n) - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

Le premier terme du membre de droite est estimé dans la section précédente 2.1. Dans cette section, notre objectif est de montrer que les 3 schémas en temps (schéma explicite (1.58), schéma implicite (1.61) et schéma implicite-explicite (1.64)) approchent convenablement le problème semi-discret (2.5), c'est-à-dire qu'ils constituent des approximations consistantes. Plus précisément, nous nous intéressons à l'analyse de l'énergie discrète associée à l'erreur de convergence de chaque schéma.

Nous introduisons l'erreur

$$\mathbf{e}_h^n := \mathbf{u}_h^\delta(t^n) - \mathbf{u}_h^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $\mathbf{u}_h^\delta(t^n)$ est la solution du problème semi-discret (2.5) et \mathbf{u}_h^n correspond à la solution du problème discret associé au schéma explicite (1.58)

$$m\left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \mathbf{v}_h\right) + a^\delta(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) = \ell(t^n, \mathbf{v}_h), \quad (2.15)$$

ou au schéma implicite (1.61)

$$m\left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \mathbf{v}_h\right) + a^\delta(\{\mathbf{u}_h^n\}_\theta, \mathbf{v}_h) = \ell(t^n, \mathbf{v}_h), \quad (2.16)$$

ou au schéma implicite-explicite (1.64)

$$m\left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \mathbf{v}_h\right) + (a_{\tau\tau} + \delta^{-1}(a_{\tau\nu} + a_{\nu\tau}))(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + \delta^{-2}a_{\nu\nu}(\{\mathbf{u}_h^n\}_\theta, \mathbf{v}_h) = \ell(t^n, \mathbf{v}_h). \quad (2.17)$$

2.2.1 Convergence du schéma explicite

L'analyse de la consistance du schéma explicite est classique mais pour des raisons pédagogiques, nous la rappelons.

Par analogie avec (1.72), en remplaçant \mathbf{u}_h^i par \mathbf{e}_h^i avec $i = n-1, n, n+1$, nous définissons l'énergie discrète associée à l'erreur de convergence pour le schéma explicite

$$E_{\text{ex},h}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(m - \frac{\Delta t^2}{4} a^\delta \right) \left(\frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{\Delta t} \right) + a^\delta \left(\frac{\mathbf{e}_h^{n+1} + \mathbf{e}_h^n}{2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} + \mathbf{e}_h^n}{2} \right) \right\}. \quad (2.18)$$

Lemme 12. *Supposons que \mathbf{u}_h^δ solution de (2.5) est dans $C^4(\mathbb{R}^+; \mathbf{V}_h)$. Pour tout $n \geq 1$, il existe un instant $t^{n,*} \in]t^{n-1}, t^{n+1}[$ tel que*

$$\frac{E_{\text{ex},h}^{n+1/2} - E_{\text{ex},h}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{\Delta t^2}{12} m\left(\frac{\partial^4 \mathbf{u}_h^\delta(t^{n,*})}{\partial t^4}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}\right). \quad (2.19)$$

Démonstration. En utilisant (2.5) et (2.15) et en prenant $\mathbf{v}_h = \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}$, nous obtenons que \mathbf{e}_h^n vérifie

$$m\left(\frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - 2\mathbf{e}_h^n + \mathbf{e}_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}\right) + a^\delta\left(\mathbf{e}_h^n, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}\right) = m\left(\frac{\mathbf{u}_h^\delta(t^{n+1}) - 2\mathbf{u}_h^\delta(t^n) + \mathbf{u}_h^\delta(t^{n-1})}{\Delta t^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^n)}{\partial t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}\right).$$

En s'inspirant des calculs faits pour le schéma explicite en sous-section 1.3.3, il est facile de retrouver l'identité d'énergie

$$\frac{E_{\text{ex},h}^{n+1/2} - E_{\text{ex},h}^{n-1/2}}{\Delta t} = m\left(\frac{\mathbf{u}_h^\delta(t^{n+1}) - 2\mathbf{u}_h^\delta(t^n) + \mathbf{u}_h^\delta(t^{n-1})}{\Delta t^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^n)}{\partial t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}\right). \quad (2.20)$$

Ensuite, en additionnant les développements en temps de $\mathbf{u}_h^\delta(t^{n-1})$ et $\mathbf{u}_h^\delta(t^{n+1})$ à l'ordre 4, donnés par le théorème de Taylor-Lagrange, nous savons qu'il existe un instant $t^{n,*} \in]t^{n-1}, t^{n+1}[$ tel que

$$\frac{\mathbf{u}_h^\delta(t^{n+1}) - 2\mathbf{u}_h^\delta(t^n) + \mathbf{u}_h^\delta(t^{n-1})}{\Delta t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^n)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 \mathbf{u}_h^\delta(t^{n,*})}{\partial t^4}. \quad (2.21)$$

Enfin, en injectant cette expression dans (2.20), nous obtenons (2.19). \square

Théorème 6. *Supposons que \mathbf{u}_h^δ solution de (2.5) est dans $C^4(\mathbb{R}^+; \mathbf{V}_h)$ et $T > 0$. Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h , δ , Δt et T telle que pour tout γ_{ex} satisfaisant*

$$\gamma_{\text{ex}} = \frac{\Delta t^2}{4} \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right) < 1, \quad (2.22)$$

nous avons l'estimation de l'énergie $E_{\text{ex},h}^{n+1/2}$, pour tout $n\Delta t < T$,

$$\sqrt{E_{\text{ex},h}^{n+1/2}} \leq \frac{C C_{\mathbf{u}}^\delta T}{\sqrt{1 - \gamma_{\text{ex}}}} \Delta t^2, \quad (2.23)$$

où

$$C_{\mathbf{u}}^\delta = \sup_{t \in (0, T)} \left\| \frac{\partial^4 \mathbf{u}_h^\delta(t)}{\partial t^4} \right\|_{L^2(\Omega)^3}. \quad (2.24)$$

Démonstration. La condition (2.22) nous permet d'écrire

$$\frac{\Delta t^2}{4} a^\delta \left(\frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^k}{\Delta t}, \frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^k}{\Delta t} \right) < \gamma_{\text{ex}} m \left(\frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^k}{\Delta t}, \frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^k}{\Delta t} \right).$$

Ensuite, en utilisant la définition (2.18), nous obtenons

$$\frac{1 - \gamma_{\text{ex}}}{2} m \left(\frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^k}{\Delta t}, \frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^k}{\Delta t} \right) \leq E_{\text{ex},h}^{k+1/2},$$

impliquant

$$\left\| \frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^k}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{1}{\sqrt{2\rho^-(1-\gamma_{\text{ex}})}} \sqrt{E_{\text{ex},h}^{k+1/2}}. \quad (2.25)$$

Soit $t^{k,*} \in]t^{k-1}, t^{k+1}[$ et $t^{k+1} < T$. Grâce à la régularité de \mathbf{u}_h^δ en temps, nous avons

$$\left\| \frac{\partial^4 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k,*})}{\partial t^4} \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \sup_{t \in (0,T)} \left\| \frac{\partial^4 \mathbf{u}_h^\delta(t)}{\partial t^4} \right\|_{L^2(\Omega)^3} (= C_{\mathbf{u}}^\delta). \quad (2.26)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à (2.19) donne

$$\frac{E_{\text{ex},h}^{k+1/2} - E_{\text{ex},h}^{k-1/2}}{\Delta t} \leq \frac{\Delta t^2 C_{\mathbf{u}}^\delta}{12} \left(\left\| \frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^k}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)^3} + \left\| \frac{\mathbf{e}_h^k - \mathbf{e}_h^{k-1}}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)^3} \right),$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{E_{\text{ex},h}^{k+1/2} - E_{\text{ex},h}^{k-1/2}}{\Delta t} \leq \frac{\Delta t^2 C_{\mathbf{u}}^\delta}{12\sqrt{2\rho^-(1-\gamma_{\text{ex}})}} \left(\sqrt{E_{\text{ex},h}^{k+1/2}} + \sqrt{E_{\text{ex},h}^{k-1/2}} \right). \quad (2.27)$$

ce qui implique directement

$$\sqrt{E_{\text{ex},h}^{k+1/2}} - \sqrt{E_{\text{ex},h}^{k-1/2}} \leq \frac{C_{\mathbf{u}}^\delta}{12\sqrt{2\rho^-(1-\gamma_{\text{ex}})}} \Delta t^3.$$

En sommant de 1 à n cette relation, nous obtenons

$$\sqrt{E_{\text{ex},h}^{n+1/2}} \leq \sqrt{E_{\text{ex},h}^{1/2}} + \frac{C_{\mathbf{u}}^\delta T}{12\sqrt{2\rho^-(1-\gamma_{\text{ex}})}} \Delta t^2. \quad (2.28)$$

En tenant compte des conditions initiales nulles, nous arrivons au résultat du théorème. \square

Corollaire 2. *Supposons que \mathbf{u}_h^δ solution de (2.5) est dans $C^4(\mathbb{R}^+; \mathbf{V}_h)$ et $T > 0$. Supposons que la condition (2.22) est vérifiée. Le schéma explicite (2.15) est consistant à l'ordre 2 en temps avec le problème semi-discret (2.5), c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h , Δt et T telle que*

$$\|\mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{C C_{\mathbf{u}}^\delta T^2}{1-\gamma_{\text{ex}}} \Delta t^2, \quad \forall n\Delta t < T. \quad (2.29)$$

Démonstration. En remarquant que

$$\mathbf{e}_h^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^k \right), \quad (2.30)$$

et en utilisant (2.25) et (2.28) nous avons pour tout $n\Delta t < T$

$$\|\mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq 2\Delta t \frac{1}{\sqrt{2\rho^-(1-\gamma_{\text{ex}})}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{E_{\text{ex},h}^{k+1/2}} \leq \frac{C_{\mathbf{u}}^\delta}{12\rho^-} \frac{T^2}{1-\gamma_{\text{ex}}} \Delta t^2,$$

ce qui termine la preuve de la consistance de second ordre en temps du schéma explicite. \square

Remarque 6. *On pourrait améliorer les estimations (2.23) et (2.29) afin de faire disparaître le terme $(1-\gamma_{\text{ex}})^{-1}$ (voir [57; 27]). En d'autres termes, la convergence du schéma explicite ne se détériore pas lorsque γ_{ex} tend vers 1.*

2.2.2 Convergence du schéma implicite

L'analyse de consistance du schéma implicite est assez classique mais nous la rappelons, pour mieux comprendre l'analyse de la consistance du schéma implicite-explicite.

Par analogie avec (1.77), en remplaçant \mathbf{u}_h^i par \mathbf{e}_h^i avec $i = n-1, n, n+1$, nous définissons l'énergie discrète totale associée à l'erreur de convergence pour le schéma implicite

$$E_{\text{im},h,\theta}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(m - \frac{\Delta t^2}{4} (1 - 4\theta) a^\delta \right) \left(\frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{\Delta t} \right) + a^\delta \left(\frac{\mathbf{e}_h^{n+1} + \mathbf{e}_h^n}{2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} + \mathbf{e}_h^n}{2} \right) \right\}. \quad (2.31)$$

Lemme 13. *Supposons que \mathbf{u}_h^δ solution de (2.5) est dans $C^4(\mathbb{R}^+; \mathbf{V}_h)$. Pour tout $n \geq 1$, il existe des instants $t^{n,*}, t^{n,**} \in]t^{n-1}, t^{n+1}[$ tel que*

$$\frac{E_{\text{im},h,\theta}^{n+1/2} - E_{\text{im},h,\theta}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{\Delta t^2}{12} m \left(\frac{\partial^4 \mathbf{u}_h^\delta(t^{n,*})}{\partial t^4}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) + \theta \Delta t^2 a^\delta \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{n,**})}{\partial t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t} \right). \quad (2.32)$$

Démonstration. En utilisant (2.5) et (2.16) et en prenant $\mathbf{v}_h = \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}$, nous obtenons l'équation vérifiée par \mathbf{e}_h^n .

$$\begin{aligned} m \left(\frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - 2\mathbf{e}_h^n + \mathbf{e}_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) + a^\delta(\{\mathbf{e}_h^n\}_\theta, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}) = \\ m \left(\frac{\mathbf{u}_h^\delta(t^{n+1}) - 2\mathbf{u}_h^\delta(t^n) + \mathbf{u}_h^\delta(t^{n-1})}{\Delta t^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^n)}{\partial t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\ + a^\delta(\{\mathbf{u}_h^\delta(t^n)\}_\theta - \mathbf{u}_h^\delta(t^n), \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}). \end{aligned}$$

L'énergie $E_{\text{im},h,\theta}^{n+1/2}$ vérifie

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{im},h,\theta}^{n+1/2} - E_{\text{im},h,\theta}^{n-1/2}}{\Delta t} = m \left(\frac{\mathbf{u}_h^\delta(t^{n+1}) - 2\mathbf{u}_h^\delta(t^n) + \mathbf{u}_h^\delta(t^{n-1})}{\Delta t^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^n)}{\partial t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\ + a^\delta(\{\mathbf{u}_h^\delta(t^n)\}_\theta - \mathbf{u}_h^\delta(t^n), \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}). \quad (2.33) \end{aligned}$$

Le premier terme de (2.32) est donné par (2.21). Par ailleurs, en additionnant les développements en temps de $\mathbf{u}_h^\delta(t^{n-1})$ et $\mathbf{u}_h^\delta(t^{n+1})$ à l'ordre 2, donnés par le théorème de Taylor-Lagrange, nous montrons qu'il existe un instant $t^{n,**} \in]t^{n-1}, t^{n+1}[$ tel que

$$\mathbf{u}_h^\delta(t^{n+1}) - 2\mathbf{u}_h^\delta(t^n) + \mathbf{u}_h^\delta(t^{n-1}) = \Delta t^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{n,**})}{\partial t^2}, \quad (2.34)$$

ce qui nous permet de déduire le second terme de (2.32). \square

Théorème 7. *Supposons que \mathbf{u}_h^δ solution de (2.5) est dans $C^4(\mathbb{R}^+; \mathbf{V}_h)$ et $T > 0$. Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h , Δt et T telle que, pour tout $n\Delta t < T$,*

$$\sqrt{E_{\text{im},h,\theta}^{n-1/2}} \leq \Delta t^2 C \left(\theta C_{\mathbf{v}}^\delta + T \left(C_{\mathbf{u}}^\delta + \theta C_{\mathbf{v}}^\delta \right) \right), \quad (2.35)$$

où la constante $C_{\mathbf{u}}^\delta$ est définie dans (2.24) et

$$C_{\mathbf{v}}^\delta = \max \left(\sup_{t \in (0, T)} \left\| \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t)}{\partial t^2} \right\| \right\|_\delta, \sup_{t \in (0, T)} \left\| \left\| \frac{\partial^3 \mathbf{u}_h^\delta(t)}{\partial t^3} \right\| \right\|_\delta \right). \quad (2.36)$$

Démonstration. Notre point de départ est l'identité (2.32). Pour tout $(\varepsilon_1^k)_{k=0..n}$ et $(\varepsilon_2^k)_{k=0..n}$ dans $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, l'intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_1^k : (\varepsilon_2^{k+1} - \varepsilon_2^{k-1}) = \\ - \sum_{k=1}^{n-2} (\varepsilon_1^{k+1} - \varepsilon_1^k) : (\varepsilon_2^{k+1} + \varepsilon_2^k) + \varepsilon_1^{n-1} : (\varepsilon_2^n + \varepsilon_2^{n-1}) - \varepsilon_1^0 : (\varepsilon_2^1 + \varepsilon_2^0). \end{aligned} \quad (2.37)$$

En remplaçant respectivement ε_1^k et ε_2^k par $\mathbf{C}\varepsilon^\delta(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k,**})}{\partial t^2})$ et $\varepsilon^\delta(\frac{\mathbf{e}_h^k}{2\Delta t})$ et en intégrant sur Ω , nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} a^\delta \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k,**})}{\partial t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^{k-1}}{2\Delta t} \right) \\ = - \sum_{k=1}^{n-2} \int_\Omega \mathbf{C}\varepsilon^\delta \left(\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k+1,**})}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k,**})}{\partial t^2} \right) \right) : \varepsilon^\delta \left(\frac{\mathbf{e}_h^{k+1} + \mathbf{e}_h^k}{2} \right) d\Omega \\ + \frac{1}{\Delta t} \int_\Omega \mathbf{C}\varepsilon^\delta \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{n-1,**})}{\partial t^2} \right) : \varepsilon^\delta \left(\frac{\mathbf{e}_h^n + \mathbf{e}_h^{n-1}}{2} \right) d\Omega, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que les conditions initiales sont nulles ($\mathbf{e}_h^0 = \mathbf{e}_h^1 = \mathbf{0}$). En utilisant la propriété de continuité (2.4) de \mathbf{C} , nous montrons que tout $\mathbf{v}_h(t) \in H^1(\Omega)^3$ vérifie

$$\| \mathbf{C}\varepsilon^\delta(\mathbf{v}_h(t)) \|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \beta \| \varepsilon^\delta(\mathbf{v}_h(t)) \|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \beta \| \| \mathbf{v}_h(t) \| \|_\delta. \quad (2.38)$$

Grâce à la régularité de \mathbf{v}_h en temps, nous obtenons

$$\left\| \mathbf{C}\varepsilon^\delta(\mathbf{v}_h(t)) \right\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \beta \sup_{t \in (0, T)} \| \| \mathbf{v}_h(t) \| \|_\delta. \quad (2.39)$$

Nous rappelons que $t^{n,**} \in]t^{n-1}, t^{n+1}[$. En remplaçant $\mathbf{v}_h(t)$ par $\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{n,**})}{\partial t^2}$ dans (2.39), nous montrons que

$$\left\| \mathbf{C}\varepsilon^\delta \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{n,**})}{\partial t^2} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \beta \sup_{t \in (0, T)} \left\| \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t)}{\partial t^2} \right\| \right\|_\delta. \quad (2.40)$$

D'autre part, la régularité de \mathbf{u}_h^δ nous permet d'écrire

$$\left\| \left\| \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k+1,**})}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k,**})}{\partial t^2} \right) \right\| \right\|_\delta \leq \sup_{t \in (0, T)} \left\| \left\| \frac{\partial^3 \mathbf{u}_h^\delta(t)}{\partial t^3} \right\| \right\|_\delta. \quad (2.41)$$

En remplaçant $\mathbf{v}_h(t)$ par $\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k+1,**})}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k,**})}{\partial t^2} \right)$ dans (2.38) et en utilisant l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\left\| \mathbf{C}_{\varepsilon^\delta} \left(\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k+1,**})}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k,**})}{\partial t^2} \right) \right) \right\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \beta \sup_{t \in (0, T)} \left\| \frac{\partial^3 \mathbf{u}_h^\delta(t)}{\partial t^3} \right\|_\delta.$$

Par ailleurs, la propriété de coercivité (2.3) de \mathbf{C} ainsi que la définition (2.31) nous permettent d'écrire

$$\left\| \varepsilon^\delta \left(\frac{\mathbf{e}_h^{k+1} + \mathbf{e}_h^k}{2} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{k+1/2}}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous montrons que

$$\sum_{k=1}^{n-1} a^\delta \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k,**})}{\partial t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^{k-1}}{2\Delta t} \right) \leq \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^\delta \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{k+1/2}} + \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^\delta \sqrt{2}}{\Delta t \sqrt{\alpha}} \sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{n-1/2}}.$$

Par ailleurs, d'après la définition (2.31) de l'énergie $E_{\text{im}, h, \theta}^{k+1/2}$, nous avons

$$\left\| \frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^k}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{1}{\sqrt{2\rho^-}} \sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{k+1/2}}, \quad (2.42)$$

et en utilisant (2.26), nous obtenons

$$\frac{\Delta t^2}{12} m \left(\frac{\partial^4 \mathbf{u}_h^\delta(t^{n,*})}{\partial t^4}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) \leq \frac{\Delta t^2 C_{\mathbf{u}}^\delta}{12 \sqrt{2\rho^-}} \left(\sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{k+1/2}} + \sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{k-1/2}} \right). \quad (2.43)$$

Par conséquent, en injectant (2.43) dans (2.32), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{im}, h, \theta}^{k+1/2} - E_{\text{im}, h, \theta}^{k-1/2}}{\Delta t} &\leq \frac{\Delta t^2 C_{\mathbf{u}}^\delta}{12 \sqrt{2\rho^-}} \left(\sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{k+1/2}} + \sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{k-1/2}} \right) \\ &\quad + \theta \Delta t^2 a^\delta \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k,**})}{\partial t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^{k-1}}{2\Delta t} \right). \end{aligned}$$

En sommant de 1 à $n-1$ cette relation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{im}, h, \theta}^{n-1/2}}{\Delta t} &\leq \frac{\Delta t^2 C_{\mathbf{u}}^\delta}{12 \sqrt{2\rho^-}} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{k+1/2}} + \sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{k-1/2}} \right) \\ &\quad + \theta \Delta t^2 \left(\frac{\beta C_{\mathbf{v}}^\delta \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{k+1/2}} + \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^\delta \sqrt{2}}{\Delta t \sqrt{\alpha}} \sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{n-1/2}} \right). \end{aligned}$$

Or nous avons

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{k+1/2}} + \sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{k-1/2}} \right) \leq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{k+1/2}},$$

impliquant

$$E_{\text{im}, h, \theta}^{n-1/2} \leq \left(\frac{\Delta t^3 C_{\mathbf{u}}^\delta}{6 \sqrt{2\rho^-}} + \theta \Delta t^3 \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^\delta \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \right) \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{k+1/2}} + \theta \Delta t^2 \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^\delta \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{E_{\text{im}, h, \theta}^{n-1/2}}. \quad (2.44)$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité d'Young, nous obtenons la relation suivante

$$\theta \Delta t^2 \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^{\delta} \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{E_{\text{im},h,\theta}^{n-1/2}} \leq \frac{1}{2} \left(\theta \Delta t^2 \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^{\delta} \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 + \frac{1}{2} E_{\text{im},h,\theta}^{n-1/2},$$

que nous injectons dans (2.44)

$$E_{\text{im},h,\theta}^{n-1/2} \leq \left(\frac{\Delta t^3 C_{\mathbf{u}}^{\delta}}{6\sqrt{2\rho^-}} + \theta \Delta t^3 \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^{\delta} \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \right) \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{E_{\text{im},h,\theta}^{k+1/2}} + \frac{1}{2} \left(\theta \Delta t^2 \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^{\delta} \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 + \frac{1}{2} E_{\text{im},h,\theta}^{n-1/2}.$$

Par conséquent, nous déduisons

$$E_{\text{im},h,\theta}^{n-1/2} \leq \left(\theta \Delta t^2 \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^{\delta} \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 + 2\Delta t^3 \left(\frac{C_{\mathbf{u}}^{\delta}}{6\sqrt{2\rho^-}} + \theta \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^{\delta} \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \right) \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{E_{\text{im},h,\theta}^{k+1/2}}.$$

Par ailleurs, nous écrivons la version discrète du lemme de Grönwall (voir [28]). Soit une suite $(r^m)_{m \in \mathbb{N}}$ à termes positifs et A et B deux réels positifs tels que pour tout $m \geq 2$ on ait

$$r^{m-1} \leq A + B \sum_{k=0}^{m-1} \sqrt{r^k},$$

alors pour tout $m \geq 2$, nous avons

$$\sqrt{r^{m-1}} \leq \sqrt{A} + (m-1)B + B\sqrt{r^0}.$$

L'application de ce lemme pour $A = \left(\theta \Delta t^2 \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^{\delta} \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \right)^2$, $B = 2\Delta t^3 \left(\frac{C_{\mathbf{u}}^{\delta}}{6\sqrt{2\rho^-}} + \theta \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^{\delta} \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \right)$, $m = n$ et $r^n = E_{\text{im},h,\theta}^{n+1/2}$, nous donne

$$\sqrt{E_{\text{im},h,\theta}^{n-1/2}} \leq \theta \Delta t^2 \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^{\delta} \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} + 2(n-1) \left(\frac{\Delta t^3 C_{\mathbf{u}}^{\delta}}{6\sqrt{2\rho^-}} + \theta \Delta t^3 \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^{\delta} \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \right),$$

ou encore

$$\sqrt{E_{\text{im},h,\theta}^{n-1/2}} \leq \Delta t^2 \left(\theta \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^{\delta} \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} + 2T \left(\frac{C_{\mathbf{u}}^{\delta}}{6\sqrt{2\rho^-}} + \theta \frac{\beta C_{\mathbf{v}}^{\delta} \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \right) \right).$$

□

Corollaire 3. *Supposons que \mathbf{u}_h^{δ} solution de (2.5) est dans $C^4(\mathbb{R}^+; \mathbf{V}_h)$ et $T > 0$. Le schéma implicite (2.16) est consistant à l'ordre 2 en temps avec le problème semi-discret (2.5), c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h , Δt et T telle que*

$$\|\mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \Delta t^2 C T \left(\theta C_{\mathbf{v}}^{\delta} + T \left(C_{\mathbf{u}}^{\delta} + \theta C_{\mathbf{v}}^{\delta} \right) \right), \quad \forall n \Delta t < T.$$

Démonstration. En utilisant (2.30), (2.42) et (2.35) nous avons, pour tout $n \Delta t < T$,

$$\|\mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq 2 \Delta t \frac{1}{\sqrt{2\rho^-}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{E_{\text{im},h,\theta}^{k+1/2}} \leq 2 \frac{1}{\sqrt{2\rho^-}} T \Delta t^2 C \left(\theta C_{\mathbf{v}}^{\delta} + T \left(C_{\mathbf{u}}^{\delta} + \theta C_{\mathbf{v}}^{\delta} \right) \right),$$

ce qui termine la preuve de la consistance de second ordre en temps du schéma implicite. □

Remarque 7. *Les constantes $C_{\mathbf{v}}^{\delta}$ et $C_{\mathbf{u}}^{\delta}$ définies respectivement dans (2.36) et (2.26) sont bornées indépendamment de δ si la source \mathbf{g}^+ est régulière en temps car les normes $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|\|\cdot\|\|_{\delta}$ (définie dans (2.6)) sont contrôlées par l'énergie du problème mis à l'échelle. Cette propriété de stabilité se démontre de la même façon que le Théorème 1.*

2.2.3 Convergence du schéma implicite-explicite

Par analogie avec (1.83), en remplaçant \mathbf{u}_h^i par \mathbf{e}_h^i avec $i = n-1, n, n+1$, nous définissons l'énergie discrète totale associée à l'erreur de convergence en utilisant un schéma implicite-explicite

$$E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(m - \frac{\Delta t^2}{4} (a_{\tau\tau} + 2\delta^{-1}a_{\tau\nu} + \delta^{-2}(1-4\theta)a_{\nu\nu}) \right) \left(\frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{\Delta t} \right) + a^\delta \left(\frac{\mathbf{e}_h^{n+1} + \mathbf{e}_h^n}{2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} + \mathbf{e}_h^n}{2} \right) \right\}. \quad (2.45)$$

Pour $\theta > 1/4$, nous rappelons que la positivité de l'énergie associée au schéma implicite-explicite est vérifiée sous la condition CFL (1.86)

$$\Delta t^2 \leq 4 \left(1 + \frac{1}{4\theta - 1} \right)^{-1} \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right)^{-1}. \quad (2.46)$$

Lemme 14. *Supposons que \mathbf{u}_h^δ solution de (2.5) est dans $C^4(\mathbb{R}^+; \mathbf{V}_h)$. Pour tout $n \geq 1$, il existe des instants $t^{n,*}, t^{n,**} \in]t^{n-1}, t^{n+1}[$ tel que*

$$\frac{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2} - E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{\Delta t^2}{12} m \left(\frac{\partial^4 \mathbf{u}_h^\delta(t^{n,*})}{\partial t^4}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) + \theta \Delta t^2 \delta^{-2} a_{\nu\nu} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{n,**})}{\partial t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t} \right). \quad (2.47)$$

Démonstration. En utilisant (2.5) et (2.17) et en prenant $\mathbf{v}_h = \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}$, nous obtenons l'équation vérifiée par \mathbf{e}_h^n .

$$\begin{aligned} & m \left(\frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - 2\mathbf{e}_h^n + \mathbf{e}_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\ & + (a_{\tau\tau} + \delta^{-1}a_{\tau\nu} + \delta^{-1}a_{\nu\tau})(\mathbf{e}_h^n, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}) + \delta^{-2}a_{\nu\nu}(\{\mathbf{e}_h^n\}_\theta, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}) = \\ & m \left(\frac{\mathbf{u}_h^\delta(t^{n+1}) - 2\mathbf{u}_h^\delta(t^n) + \mathbf{u}_h^\delta(t^{n-1})}{\Delta t^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^n)}{\partial t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\ & + \delta^{-2}a_{\nu\nu}(\{\mathbf{u}_h^\delta(t^n)\}_\theta - \mathbf{u}_h^\delta(t^n), \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}). \end{aligned} \quad (2.48)$$

L'énergie $E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2}$ satisfait

$$\frac{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2} - E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n-1/2}}{\Delta t} = m \left(\frac{\mathbf{u}_h^\delta(t^{n+1}) - 2\mathbf{u}_h^\delta(t^n) + \mathbf{u}_h^\delta(t^{n-1})}{\Delta t^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) + \delta^{-2}a_{\nu\nu}(\{\mathbf{u}_h^\delta(t^n)\}_\theta - \mathbf{u}_h^\delta, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^{n-1}}{2\Delta t}). \quad (2.49)$$

En utilisant (2.21) et (2.34), nous obtenons (2.47) \square

On voit que le terme $\delta^{-2}a_{\nu\nu}(\cdot, \cdot)$ dans l'identité d'énergie (2.47) n'est pas un terme qu'on contrôle naturellement dans la définition (2.45) de l'énergie $E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2}$.

Lemme 15. *Nous supposons que $\theta > 1/4$. Il existe une constante C indépendante de h et Δt telle que si*

$$\gamma_{\text{im-ex}}^{(1)} = \frac{\Delta t^2}{4} \left(1 + \frac{1}{4\theta - 1}\right) \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right) < 1, \quad (2.50)$$

nous avons l'estimation

$$\left\| \varepsilon_\nu \left(\frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^k}{\Delta t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \frac{C}{\sqrt{\theta - \theta^*}} \frac{\delta}{\Delta t} \sqrt{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{k+1/2}}, \quad (2.51)$$

où $\theta^* \in]\frac{1}{4}, \theta[$ et défini par

$$\theta^* = \frac{\theta}{4\theta(1 - \gamma_{\text{im-ex}}^{(1)}) + \gamma_{\text{im-ex}}^{(1)}}. \quad (2.52)$$

Démonstration. On peut montrer que θ^* défini dans (2.52) vérifie la relation

$$\frac{\Delta t^2}{4} \left(1 + \frac{1}{4\theta^* - 1}\right) \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_{\tau\tau}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right) = 1. \quad (2.53)$$

L'énergie (2.45) peut se réécrire alors sous la forme

$$E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2} = E_{c,h}^{n+1/2} + \frac{1}{2} \left\{ \Delta t^2 \delta^{-2} (\theta - \theta^*) a_{\nu\nu} \left(\frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{\Delta t} \right) + a^\delta \left(\frac{\mathbf{e}_h^{n+1} + \mathbf{e}_h^n}{2}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} + \mathbf{e}_h^n}{2} \right) \right\}, \quad (2.54)$$

où

$$E_{c,h}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(m - \frac{\Delta t^2}{4} (a_{\tau\tau} + 2\delta^{-1}a_{\tau\nu} + \delta^{-2}(1 - 4\theta^*)a_{\nu\nu}) \right) \left(\frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{\Delta t} \right) \right\}. \quad (2.55)$$

Grâce à (2.53) et les éléments de la preuve du Théorème 4 du chapitre précédent, nous avons

$$E_{c,h}^{n+1/2} \geq 0, \quad (2.56)$$

impliquant

$$\frac{1}{2} \Delta t^2 \delta^{-2} (\theta - \theta^*) a_{\nu\nu} \left(\frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{\Delta t} \right) \leq E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2}. \quad (2.57)$$

En utilisant la propriété de coercivité (2.3) du tenseur \mathbf{C} ainsi que l'inégalité (2.57), nous obtenons

$$\left\| \varepsilon_\nu \left(\frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{\Delta t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha} \sqrt{\theta - \theta^*}} \frac{\delta}{\Delta t} \sqrt{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2}}. \quad (2.58)$$

□

Lemme 16. Soit $\gamma_{\text{im-ex}}^{(2)}$ défini par

$$\gamma_{\text{im-ex}}^{(2)} = \frac{\Delta t^2}{4} \left(\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(a_{\tau\tau} + 2\delta^{-1}a_{\tau\nu} + \delta^{-2}(1-4\theta)a_{\nu\nu})(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}{m(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \right). \quad (2.59)$$

Alors nous avons

$$\gamma_{\text{im-ex}}^{(2)} < \gamma_{\text{im-ex}}^{(1)}, \quad (2.60)$$

et si $\gamma_{\text{im-ex}}^{(2)} < 1$, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{1}{\sqrt{2\rho^- (1 - \gamma_{\text{im-ex}}^{(1)})}} \sqrt{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2}}. \quad (2.61)$$

Démonstration. L'inégalité (2.60) est obtenue en utilisant les éléments de la preuve du Théorème 4. Par ailleurs, par analogie avec (2.25), nous montrons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \frac{\mathbf{e}_h^{n+1} - \mathbf{e}_h^n}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{1}{\sqrt{2\rho^- (1 - \gamma_{\text{im-ex}}^{(2)})}} \sqrt{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2}}, \quad (2.62)$$

impliquant le résultat (2.61). \square

Théorème 8. Supposons que \mathbf{u}_h^δ solution de (2.5) est dans $C^4(\mathbb{R}^+; \mathbf{V}_h)$. Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h , δ , Δt et T telle que pour tout $\gamma_{\text{im-ex}}^{(1)}$ satisfaisant (2.50), nous avons l'estimation de l'énergie $E_{\text{im-ex}, h}^{n+1/2}$

$$\sqrt{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2}} \leq CT \left(\frac{C_{\mathbf{u}}^\delta}{\sqrt{1 - \gamma_{\text{im-ex}}^{(1)}}} \Delta t^2 + \frac{C_3^\delta \theta}{\sqrt{\theta - \theta^*}} \Delta t \right), \quad \forall n\Delta t < T, \quad (2.63)$$

où $C_{\mathbf{u}}^\delta$ est définie dans (2.24) et

$$C_3^\delta = \delta^{-1} \sup_{t \in (0, T)} \left\| \partial_3(\partial_t^2 \mathbf{u}_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)^3}. \quad (2.64)$$

Démonstration. En utilisant la propriété de continuité (2.4) de \mathbf{C} , nous montrons que pour tout $\mathbf{v}_h(t) \in H^1(\Omega)^3$

$$\|\mathbf{C}_{\varepsilon_\nu}(\mathbf{v}_h(t))\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \beta \|\varepsilon_\nu(\mathbf{v}_h(t))\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}. \quad (2.65)$$

Soit $t^{k, **} \in]t^{k-1}, t^{k+1}[$. Grâce à la régularité de \mathbf{u}_h^δ en temps, nous obtenons

$$\left\| \mathbf{C}_{\varepsilon_\nu} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k, **})}{\partial t^2} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \beta \sup_{t \in (0, T)} \left\| \varepsilon_\nu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t)}{\partial t^2} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}, \quad (2.66)$$

impliquant (en utilisant la définition (2.64))

$$\left\| \mathbf{C}_{\varepsilon_\nu} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k, **})}{\partial t^2} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \beta C_3^\delta \delta. \quad (2.67)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet en utilisant (2.67) et (2.58) d'écrire

$$\theta \Delta t^2 \delta^{-2} a_{\nu\nu} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k,**})}{\partial t^2}, \frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^k}{2\Delta t} \right) \leq \frac{\beta C_3^\delta \theta}{\sqrt{2\alpha(\theta - \theta^*)}} \Delta t \sqrt{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{k+1/2}}. \quad (2.68)$$

De même, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (2.26) et (2.61), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t^2}{12} m \left(\frac{\partial^4 \mathbf{u}_h^\delta(t^{k,*})}{\partial t^4}, \frac{\mathbf{e}_h^{k+1} - \mathbf{e}_h^{k-1}}{2\Delta t} \right) \leq \\ \frac{\Delta t^2 C_{\mathbf{u}}^\delta}{12\sqrt{2\rho^-} (1 - \gamma_{\text{im-ex}}^{(1)})} \left(\sqrt{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{k+1/2}} + \sqrt{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{k-1/2}} \right). \end{aligned} \quad (2.69)$$

En injectant (2.69) et (2.68) dans (2.47), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{k+1/2} - E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{k-1/2}}{\Delta t} \leq \\ \Delta t \left(\frac{\Delta t C_{\mathbf{u}}^\delta}{12\sqrt{2\rho^-} (1 - \gamma_{\text{im-ex}}^{(1)})} + \frac{\beta C_3^\delta \theta}{\sqrt{2\alpha(\theta - \theta^*)}} \right) \left(\sqrt{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{k+1/2}} + \sqrt{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{k-1/2}} \right). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\sqrt{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{k+1/2}} - \sqrt{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{k-1/2}} \leq \Delta t^2 \left(\frac{\Delta t C_{\mathbf{u}}^\delta}{12\sqrt{2\rho^-} (1 - \gamma_{\text{im-ex}}^{(1)})} + \frac{\beta C_3^\delta \theta}{\sqrt{2\alpha(\theta - \theta^*)}} \right). \quad (2.71)$$

En sommant de 1 à $n-1$ cette relation et en tenant compte des conditions initiales, nous obtenons

$$\sqrt{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{n+1/2}} \leq T \left(\frac{C_{\mathbf{u}}^\delta}{12\sqrt{2\rho^-} (1 - \gamma_{\text{im-ex}}^{(1)})} \Delta t^2 + \frac{\beta C_3^\delta \theta}{\sqrt{2\alpha(\theta - \theta^*)}} \Delta t \right). \quad (2.72)$$

□

Corollaire 4. *Supposons que \mathbf{u}_h^δ solution de (2.5) est dans $C^4(\mathbb{R}^+; \mathbf{V}_h)$. Supposons que la relation (2.59) est satisfaite. Si C_3^δ définie dans (2.64) est bornée indépendamment de δ , alors le schéma implicite-explicite (2.17) est consistant à l'ordre 1 en temps avec le problème semi-discret (2.5), uniformément par rapport à δ , c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de $h, \delta, \Delta t$ et T telle que*

$$\|\mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{CT^2}{\sqrt{1 - \gamma_{\text{im-ex}}^{(1)}}} \left(\frac{C_{\mathbf{u}}^\delta}{\sqrt{1 - \gamma_{\text{im-ex}}^{(1)}}} \Delta t^2 + \frac{C_3^\delta \theta}{\sqrt{\theta - \theta^*}} \Delta t \right). \quad (2.73)$$

Démonstration. En utilisant (2.30), (2.61) et (2.63) nous avons pour tout $n\Delta t < T$

$$\|\mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq 2 \Delta t \frac{1}{\sqrt{2\rho^-} (1 - \gamma_{\text{im-ex}}^{(1)})} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{E_{\text{im-ex}, h, \theta}^{k+1/2}}, \quad (2.74)$$

ou encore

$$\|\mathbf{e}_h^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{2T^2}{\sqrt{2\rho^- (1 - \gamma_{\text{im-ex}}^{(1)})}} \left(\frac{C_{\mathbf{u}}^\delta}{12\sqrt{2\rho^- (1 - \gamma_{\text{im-ex}}^{(1)})}} \Delta t^2 + \frac{\beta C_3^\delta \theta}{\sqrt{2\alpha (\theta - \theta^*)}} \Delta t \right), \quad (2.75)$$

ce qui termine la preuve de la consistance de premier ordre en temps du schéma implicite-explicite. \square

Commentaires

La convergence du schéma implicite-explicite semble se détériorer quand $\gamma_{\text{im-ex}}$ et θ^* tendent respectivement vers 1 et θ . Or les deux comportements sont liés. En effet, θ^* tend vers θ lorsque $\gamma_{\text{im-ex}}$ vers 1 (voir la définition (2.52)). Par conséquent, en utilisant les mêmes techniques pour faire disparaître le terme $(1 - \gamma_{\text{ex}})^{-1}$ dans les estimations (2.23) et (2.29) (voir [57; 27]), on montre que la convergence du schéma implicite-explicite ne se détériore pas lorsque $\gamma_{\text{im-ex}}$ tend vers 1.

On a montré la convergence en Δt sous réserve que C_3^δ définie dans (2.64) soit bornée indépendamment de δ , or nous avons

$$\delta^{-1} \left\| \partial_3 \mathbf{u}_h^\delta \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \delta^{-1} \left\| \partial_3 \mathbf{u}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)^3} + \delta^{-1} \left\| \partial_3 (\mathbf{u}^\delta - \mathbf{u}_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)^3}. \quad (2.76)$$

On a vu que le terme

$$\left\| \partial_3 (\mathbf{u}^\delta - \mathbf{u}_h^\delta) \right\|_{L^2(\Omega)^3}$$

est contrôlé par l'erreur de discrétisation spatiale. Il faut donc vérifier que

$$\delta^{-1} \left\| \partial_3 \mathbf{u}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)^3}$$

est borné uniformément par rapport à δ . Cela sera l'objectif du prochain chapitre. En fait, il nous faut le résultat sur $\partial_3 \partial_t^2 \mathbf{u}^\delta$ mais ce résultat peut être déduit de l'estimation sur $\partial_3 \mathbf{u}^\delta$ si le terme source est régulier, à support compact en temps et les données initiales sont nulles. Pour finir, on pourrait montrer une propriété de convergence en $\delta^{-1} \Delta t^2$ pour la norme $\|\cdot\|_\delta$. Dans nos simulations numériques, on observe une convergence en Δt^2 pour la norme $L^2(\Omega)^3$ uniforme, à δ fixé.

2.3 Estimation uniforme de $\delta^{-1} \left\| \partial_3 \mathbf{u}^\delta \right\|_{L^2(\Omega)^3}$ par rapport à δ

Nous supposons dans la suite que $\Omega = \Sigma \times (-1, 1)$ où $\Sigma = \mathbb{R}^2$, ce qui simplifie l'analyse (sinon il y aurait des termes de couches limites).

Rappel du problème à résoudre et des hypothèses considérées

Nous rappelons que la formulation variationnelle du problème mis à l'échelle consiste à trouver $\mathbf{u}^\delta(t) \in \mathbf{V}$ vérifiant des conditions initiales nulles et pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

$$\frac{d^2}{dt^2} m(\mathbf{u}^\delta, \mathbf{v}) + a^\delta(\mathbf{u}^\delta, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \quad (2.77)$$

où pour tous $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$, nous avons

$$\begin{cases} m(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \\ a^\delta(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon^\delta(\mathbf{w}) : \varepsilon^\delta(\mathbf{v}) \, d\Omega, \\ \ell(\mathbf{v}) := \int_{\Gamma_+} (g_1^+, g_2^+, 0)^t \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+. \end{cases}$$

Nous rappelons les hypothèses en relation avec notre application :

- Le milieu considéré est une plaque stratifiée à travers l'épaisseur et chaque couche de stratification correspond à un milieu orthotrope homogène. En d'autres termes, le tenseur de rigidité \mathbf{C} est constant par morceaux (couches de stratification) dans la direction de l'épaisseur,
- $\text{supp } \mathbf{g} \subset \Sigma \times \{1\}$ et $g_3^+ = 0$.

2.3.1 Préliminaires

Une première estimation par analyse énergétique

Pour l'analyse de notre problème, nous avons besoin de comprendre la dépendance de la solution en x_3 . En particulier, nous cherchons à montrer que $\|\partial_3\mathbf{u}^\delta\|_{L^2(\Omega)^3}$ est d'ordre δ .

Lemme 17. *Soit \mathbf{u}^δ solution du problème continu (1.11), alors pour tout $T > 0$ il existe une constante $C(T)$ indépendante de δ telle que*

$$\|\partial_3 u_1^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_3 u_2^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \delta^{-1} \|\partial_3 u_3^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq C(T), \quad \forall t \in (0, T).$$

Démonstration. En utilisant (1.30), (1.31) et (1.33), nous montrons qu'il existe une constante C telle que

$$\|\varepsilon^\delta(\mathbf{u}^\delta)\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} + \|\mathbf{s}^\delta(\mathbf{u}^\delta)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C(T).$$

D'une part, en utilisant (1.24), nous obtenons

$$\|\mathbf{s}^\delta(\mathbf{u}^\delta)\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C(T), \tag{2.78}$$

impliquant

$$\|\nabla u_1^\delta\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} + \|\nabla u_2^\delta\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq C(T), \tag{2.79}$$

D'autre part, nous obtenons

$$\delta^{-1} \|\partial_3 u_3^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq C(T). \tag{2.80}$$

□

Remarque 8. *En utilisant $\|\varepsilon^\delta(\mathbf{u}^\delta)\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq C(T)$, on a*

$$\delta^{-1} \|\partial_3 u_1^\delta + \delta \partial_1 u_3^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \delta^{-1} \|\partial_3 u_2^\delta + \delta \partial_2 u_3^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \delta^{-1} \|\partial_3 u_3^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq C(T).$$

Le Lemme (17) nous permet de contrôler $\delta^{-1}\partial_3 u_3^\delta$ en norme L^2 mais ne nous donne pas de l'information sur $\delta^{-1}\partial_3 u_1^\delta$ et $\delta^{-1}\partial_3 u_2^\delta$. Même en utilisant la Remarque 8, nous n'arrivons pas à obtenir la propriété voulue.

Pour montrer que $\delta^{-1}\|\partial_3 u_1^\delta\|_{L^2(\Omega)}$ et $\delta^{-1}\|\partial_3 u_2^\delta\|_{L^2(\Omega)}$ sont bornées indépendamment de δ , nous allons construire de manière formelle le développement asymptotique en δ de \mathbf{u}^δ

$$\mathbf{u}^\delta = \mathbf{u}^{(0)} + \delta \mathbf{u}^{(1)} + \delta^2 \mathbf{u}^{(2)} + O(\delta^3), \quad (2.81)$$

($\mathbf{u}^{(0)}$, $\mathbf{u}^{(1)}$ et $\mathbf{u}^{(2)}$ seront introduits dans la suite), puis nous montrons qu'il existe une constante C indépendante de δ telle que

$$\|\mathbf{u}^\delta - \mathbf{u}^{(0)} - \delta \mathbf{u}^{(1)}\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C\delta \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}^{(1)}\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C.$$

On verra notamment que $\mathbf{u}^{(0)}$ ne dépend pas de x_3 et on aura donc

$$\partial_3 u_i^\delta = \delta \partial_3 u_i^{(1)} + O_{L^2}(\delta), \quad i = 1, 2,$$

ce qui nous permettra de conclure. On pourrait également utiliser que

$$\partial_i u_3^\delta = \partial_i u_3^{(0)} + O_{L^2}(\delta), \quad i = 1, 2,$$

ce qui d'après la Remarque 8 nous permettrait aussi de conclure.

2.3.2 Développements asymptotiques formels

Nous supposons que le champ de déplacements \mathbf{u}^δ vérifie l'ansatz (2.81). Dans un premier temps, nous allons caractériser les termes $\mathbf{u}^{(0)}$, $\mathbf{u}^{(1)}$ et $\mathbf{u}^{(2)}$ du développement asymptotique puis nous justifierons rigoureusement ce développement grâce à des estimations d'erreurs dans la sous-section suivante. Pour cela, nous injectons l'ansatz (2.81) dans l'équation (2.77) satisfaite par \mathbf{u}^δ . En identifiant formellement les puissances de δ , nous obtenons

- à l'ordre -2 :

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}) \, d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.82)$$

- à l'ordre -1 :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\tau(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(1)}) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}) \, d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

- à l'ordre 0 :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(0)} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\tau(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\tau(\mathbf{u}^{(1)}) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}) \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(1)}) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(2)}) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}) \, d\Omega \\ - \int_{\Gamma_+} \mathbf{g}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+ = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

De l'équation (2.82), on déduit facilement la proposition suivante

Proposition 10. *Le terme $\mathbf{u}^{(0)}$ est indépendant de x_3 .*

Démonstration. L'équation (2.82) correspond à l'équation (2.117) dans l'Annexe avec $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}$. Le Lemme 19 dans l'Annexe nous donne directement le résultat voulu. \square

En tenant compte de ce résultat, l'équation (2.83) se réécrit

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(1)}) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\tau(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}) \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (2.85)$$

Il est facile de voir que cette formulation variationnelle est équivalente à une équation différentielle par rapport à la variable x_3 où les variables transverses jouent le rôle de paramètres. Comme ε_ν est un opérateur différentiel par rapport à la variable x_3 , cette équation nous donne une relation entre $\mathbf{u}^{(1)}$ et $\mathbf{u}^{(0)}$ à une fonction de variables transverses près. Ce résultat est résumé dans la proposition ci-dessous.

Nous introduisons la notation $\mathbf{x}_T = (x_1, x_2)$ et $\nabla_T = (\partial_1, \partial_2)^t$.

Proposition 11. *Il existe une fonction $\widehat{\mathbf{u}}^{(1)}$ qui ne dépend que de \mathbf{x}_T et t telle que $\mathbf{u}^{(1)}$ s'écrit*

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}_T, x_3, t) = \widehat{\mathbf{u}}^{(1)}(\mathbf{x}_T, t) + \Theta^{(1)}(x_3, \nabla_T) \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}_T, t)$$

où $\Theta^{(1)}(x_3, \nabla_T)$ est une matrice 3×3 donnée par

$$\Theta^{(1)}(x_3, \nabla_T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_3 \partial_1 \\ 0 & 0 & -x_3 \partial_2 \\ -\alpha_1(x_3)\partial_1 & -\alpha_2(x_3)\partial_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

avec

$$\alpha_1(x_3) = \int_0^{x_3} \frac{c_{13}}{c_{33}} dx'_3 \quad \text{et} \quad \alpha_2(x_3) = \int_0^{x_3} \frac{c_{23}}{c_{33}} dx'_3.$$

Démonstration. La relation (2.85) correspond à l'équation (2.119) dans l'Annexe avec $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)}$ et $\mathbf{w} = \mathbf{u}^{(0)}$. Le Lemme 20 dans l'Annexe nous permet d'obtenir le résultat souhaité. \square

L'équation (2.84) se réécrit pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(0)} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\tau(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\tau(\mathbf{u}^{(1)}) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}) \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(1)}) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(2)}) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Gamma_+} \mathbf{g}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+ \end{aligned} \quad (2.86)$$

Dans un premier temps, nous cherchons des équations vérifiées par $\mathbf{u}^{(0)}$. En prenant des fonctions tests indépendantes de x_3 , les termes comportant $\varepsilon_\nu(\mathbf{v})$ s'annule dans (2.86) et on obtient pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(0)} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\tau(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(1)}) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) \, d\Omega = \\ & \int_{\Gamma_+} \mathbf{g}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+. \end{aligned} \quad (2.87)$$

En utilisant les expressions des composantes de $\mathbf{u}^{(1)}$ (Proposition 11), nous montrons

$$\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(1)}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \\ -\partial_1 u_3^{(0)} & -\partial_2 u_3^{(0)} & -\frac{2c_{13}}{c_{33}} \partial_1 u_1^{(0)} - \frac{2c_{23}}{c_{33}} \partial_2 u_2^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Nous rappelons que

$$\varepsilon_\tau(\mathbf{u}^{(0)}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_1 u_1^{(0)} & \cdot & \cdot \\ \partial_2 u_1^{(0)} + \partial_1 u_2^{(0)} & 2\partial_2 u_2^{(0)} & \cdot \\ \partial_1 u_3^{(0)} & \partial_2 u_3^{(0)} & 0 \end{pmatrix}.$$

En définissant le tenseur $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)})$ par

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) = \varepsilon_\tau(\mathbf{u}^{(0)}) + \varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(1)}),$$

nous obtenons

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_1 u_1^{(0)} & \cdot & \cdot \\ \partial_2 u_1^{(0)} + \partial_1 u_2^{(0)} & 2\partial_2 u_2^{(0)} & \cdot \\ 0 & 0 & -\frac{2c_{13}}{c_{33}} \partial_1 u_1^{(0)} - \frac{2c_{23}}{c_{33}} \partial_2 u_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (2.88)$$

et nous avons

$$\int_\Omega \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(0)} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_\Omega \mathbf{C} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Gamma_+} \mathbf{g}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+, \quad \forall \mathbf{v}, \quad (2.89)$$

où

$$\mathbf{C} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) = \begin{pmatrix} (c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}) \partial_1 u_1^{(0)} + (c_{12} - \frac{c_{13} c_{23}}{c_{33}}) \partial_2 u_2^{(0)} & \cdot & \cdot \\ c_{66} (\partial_2 u_1^{(0)} + \partial_1 u_2^{(0)}) & (c_{12} - \frac{c_{13} c_{23}}{c_{33}}) \partial_1 u_1^{(0)} + (c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}}) \partial_2 u_2^{(0)} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.90)$$

De cette équation (2.89), on déduit tout d'abord le résultat suivant :

Proposition 12. *La troisième composante $u_3^{(0)}$ du terme $\mathbf{u}^{(0)}$ est nulle.*

Démonstration. Nous cherchons à déterminer $u_3^{(0)}$ donc il est naturel de prendre comme fonction test $\mathbf{v} = (0, 0, v_3(\mathbf{x}_T))^t$ ce qui nous donne

$$\varepsilon_\tau(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \\ \partial_1 v_3 & \partial_2 v_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \mathbf{v} = (0, 0, v_3(\mathbf{x}_T))^t. \quad (2.91)$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}\tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) \, d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v} = (0, 0, v_3(\mathbf{x}_T))^t.$$

Par conséquent, l'équation (2.87) devient

$$\int_{\Omega} \rho \partial_t^2 u_3^{(0)} v_3 \, d\Omega = \int_{\Gamma_+} g_3^+ v_3 \, d\Gamma_+$$

Or notre terme source \mathbf{g}^+ a la composante g_3^+ nulle donc nous obtenons la relation suivante

$$\int_{\Omega} \partial_t^2 u_3^{(0)} v_3 \, d\Omega = 0,$$

qui se réécrit sous la forme

$$2 \int_{\Sigma} \partial_t^2 u_3^{(0)} v_3 \, d\Sigma = 0.$$

Cette dernière relation est vraie pour tout $v_3(\mathbf{x}_T)$, ce qui nous permet d'écrire $\partial_t^2 u_3^{(0)} = 0$. Or les conditions initiales sont nulles donc

$$u_3^{(0)} = 0. \tag{2.92}$$

□

Remarque 9. Attention la Proposition 12 n'est vraie que pour le cas de conditions initiales nulles et un terme source \mathbf{g}^+ ayant la composante g_3^+ nulle.

Ensuite, on va déduire une équation d'ondes satisfaite par les composantes transverses de $\mathbf{u}^{(0)}$, en utilisant l'expression de $\mathbf{u}^{(1)}$ en fonction $\mathbf{u}^{(0)}$ (Propositions 11 et 12).

Théorème 9. Le vecteur $\mathbf{u}_T^{(0)} = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)})^t$ des composantes transverses du terme d'ordre 0 vérifie l'équation

$$\int_{\Sigma} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}_T^{(0)} \cdot \mathbf{v}_T \, d\Sigma + \int_{\Sigma} \langle \mathbf{C}_T \rangle \varepsilon_T(\mathbf{u}_T^{(0)}) : \varepsilon_T(\mathbf{v}_T) \, d\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \mathbf{g}_T^+ \cdot \mathbf{v}_T \, d\Sigma, \quad \forall \mathbf{v}_T(\mathbf{x}_T) = (v_1(\mathbf{x}_T), v_2(\mathbf{x}_T))^t, \tag{2.93}$$

où $\mathbf{g}_T^+(\mathbf{x}_T, t) = (g_1^+(\mathbf{x}_T, 1, t), g_2^+(\mathbf{x}_T, 1, t))^t$, ε_T est le tenseur de déformations linéarisé 2D défini par

$$\varepsilon_T(\mathbf{v}_T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_1 v_1 & \cdot \\ \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2 & 2\partial_2 v_2 \end{pmatrix},$$

et

$$\langle \mathbf{C}_T \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{C}_T \, dx_3, \tag{2.94}$$

avec \mathbf{C}_T le tenseur 2D représenté dans les notations de Voigt par la matrice

$$\tilde{\mathbf{C}}_T = \begin{pmatrix} c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} & c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}} & 0 \\ c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}} & c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}. \tag{2.95}$$

Démonstration. En utilisant l'expression (2.90) de $\mathbf{C}\tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)})$, nous remarquons que nous pouvons écrire

$$\mathbf{C}\tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_T(\mathbf{v}) = \mathbf{C}_T \varepsilon_T(\mathbf{u}_T^{(0)}) : \varepsilon_T(\mathbf{v}_T),$$

où $\mathbf{u}_T^{(0)}$, \mathbf{v}_T , ε_T et \mathbf{C}_T sont définis dans l'énoncé du théorème. Par conséquent, l'équation (2.89) se réécrit

$$\int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}_T^{(0)} \cdot \mathbf{v}_T \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}_T \varepsilon_T(\mathbf{u}_T^{(0)}) : \varepsilon_T(\mathbf{v}_T) \, d\Omega = \int_{\Gamma_+} \mathbf{g}_T^+ \cdot \mathbf{v}_T \, d\Gamma_+, \quad \forall \mathbf{v}_T(\mathbf{x}_T), \quad (2.96)$$

où \mathbf{g}_T^+ est défini dans l'énoncé du théorème. En utilisant la définition de $\langle \mathbf{C}_T \rangle$, nous obtenons

$$2 \int_{\Sigma} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}_T^{(0)} \cdot \mathbf{v}_T \, d\Sigma + 2 \int_{\Sigma} \langle \mathbf{C}_T \rangle \varepsilon_T(\mathbf{u}_T^{(0)}) : \varepsilon_T(\mathbf{v}_T) \, d\Sigma = \int_{\Sigma} \mathbf{g}_T^+ \cdot \mathbf{v}_T \, d\Sigma, \quad \forall \mathbf{v}_T(\mathbf{x}_T).$$

□

Proposition 13. *Le tenseur \mathbf{C}_T défini dans les notations de Voigt par la matrice $\tilde{\mathbf{C}}_T$ donnée par (2.95) est continu, coercif et correspond à un milieu orthotrope bidimensionnel.*

Démonstration. Le caractère orthotrope est évident lorsqu'on regarde la forme du tenseur dans les notations de Voigt. La continuité du tenseur \mathbf{C}_T est évidente aussi car le tenseur \mathbf{C} est continu. Pour montrer le caractère coercif, il suffit de montrer que la matrice $\tilde{\mathbf{C}}_T$ donnée par (2.95) est définie positive. Ceci n'est obtenu que si et seulement si $c_{66} > 0$ et la matrice

$$\begin{pmatrix} c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} & c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}} \\ c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}} & c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}} \end{pmatrix}, \quad (2.97)$$

est définie positive. Or la matrice représentative dans les notations de Voigt du tenseur de rigidité \mathbf{C} est définie positive donc $c_{66} > 0$ et nous avons la matrice

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

définie positive (voir [74]). En effectuant un complément de Schur, nous obtenons que la matrice

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} c_{33}^{-1} \begin{pmatrix} c_{13} & c_{23} \end{pmatrix}$$

est définie positive qui n'est rien d'autre que la matrice donnée par (2.97). □

Remarque 10. *Évidemment, le tenseur $\langle \mathbf{C}_T \rangle$ défini dans (2.94) va hériter des mêmes propriétés de continuité et de coercivité du tenseur \mathbf{C}_T .*

Corollaire 5. *Supposons que $\mathbf{g}_T^+ \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^2)^2)$, le problème (2.93) admet une unique solution*

$$\mathbf{u}_T^{(0)} \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^2)^2) \cap C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R}^2)^2). \quad (2.98)$$

Après avoir déterminé $\mathbf{u}^{(0)}$, nous pouvons maintenant nous concentrer sur $\mathbf{u}^{(2)}$ qui vérifie l'équation

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(2)}) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}) \, d\Omega = & - \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\tau(\mathbf{u}^{(1)}) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{C}\tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(0)} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_+} \mathbf{g}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+ \end{aligned} \quad (2.99)$$

On montre de nouveau que cette formulation variationnelle n'est rien d'autre qu'une équation différentielle par rapport à la variable x_3 où les variables transverses jouent le rôle de paramètres. En d'autres termes, nous pouvons calculer explicitement $\mathbf{u}^{(2)}$ en fonction de $\mathbf{u}^{(0)}$, $\mathbf{u}^{(1)}$ et \mathbf{g}^+ , à une fonction de variables transverses près. Le résultat est résumé de manière abstraite dans la proposition suivante et démontré en Annexe.

Proposition 14. *Il existe une fonction $\hat{\mathbf{u}}^{(2)}$ qui ne dépend que de \mathbf{x}_T et t telle que $\mathbf{u}^{(2)}$ s'écrit*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}_T, x_3, t) = & \hat{\mathbf{u}}^{(2)}(\mathbf{x}_T, t) + \Theta^{(1)}(x_3, \nabla_T) \hat{\mathbf{u}}^{(1)}(\mathbf{x}_T, t) \\ & + \Theta^{(2)}(x_3, \nabla_T) \mathbf{u}_T^{(0)}(\mathbf{x}_T, t) + \mathbf{H}(x_3) \mathbf{g}^+(\mathbf{x}_T, 1, t) \end{aligned}$$

où $\Theta^{(1)}(x_3, \nabla_T)$ est définie dans la Proposition 11, $\Theta^{(2)}(x_3, \nabla_T)$ est une matrice 3×3 telle que pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2$, $(\Theta^{(2)}(x_3, \boldsymbol{\eta}))_{ij}$ est un polynôme de degré 2 dont les coefficients sont des fonctions de x_3 (voir l'Annexe pour plus de détails) et \mathbf{H} est une matrice 3×3 qui ne dépend que de x_3 .

2.3.3 Régularité des correcteurs et estimations d'erreurs pour le problème continu

Dans cette sous-section, on va supposer que les fonctions $\hat{\mathbf{u}}^{(1)}$ et $\hat{\mathbf{u}}^{(2)}$ sont nulles, cela ne changera ni les estimations ni les résultats finaux.

Nous posons

$$\mathbf{e}^\delta = \mathbf{u}^\delta - \mathbf{u}^{(0)} - \delta \mathbf{u}^{(1)}.$$

L'équation vérifiée par \mathbf{e}^δ s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \mathbf{e}^\delta \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon^\delta(\mathbf{e}^\delta) : \varepsilon^\delta(\mathbf{v}) \, d\Omega \\ = \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(2)}) : \varepsilon_\nu(\mathbf{v}) \, d\Omega - \delta \int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \delta \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\tau(\mathbf{u}^{(1)}) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) \, d\Omega. \end{aligned}$$

En utilisant $\varepsilon_\nu(\mathbf{v}) = \delta \varepsilon^\delta(\mathbf{v}) - \delta \varepsilon_\tau(\mathbf{v})$, nous montrons que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \mathbf{e}^\delta \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon^\delta(\mathbf{e}^\delta) : \varepsilon^\delta(\mathbf{v}) \, d\Omega = & \delta \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(2)}) : \varepsilon^\delta(\mathbf{v}) \, d\Omega - \delta \int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \\ & - \delta \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(2)}) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) \, d\Omega - \delta \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\tau(\mathbf{u}^{(1)}) : \varepsilon_\tau(\mathbf{v}) \, d\Omega, \end{aligned} \quad (2.100)$$

et en posant

$$\mathbf{h} = -\rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(1)} - \operatorname{div}_\tau \left(\mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(2)}) \right) - \operatorname{div}_\tau \left(\mathbf{C}\varepsilon_\tau(\mathbf{u}^{(1)}) \right),$$

l'équation (2.100) se réécrit sous la forme

$$\int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \mathbf{e}^\delta \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon^\delta(\mathbf{e}^\delta) : \varepsilon^\delta(\mathbf{v}) \, d\Omega = \delta \int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \delta \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(2)}) : \varepsilon^\delta(\mathbf{v}) \, d\Omega \quad (2.101)$$

Théorème 10. Si $\mathbf{h} \in C^0((0, T); L^2(\Omega)^3)$ et $\mathbf{C}_{\varepsilon_\nu}(\mathbf{u}^{(2)}) \in C^1((0, T); L^2(\Omega)^{3 \times 3})$, alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\partial_t \mathbf{e}^\delta\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \leq \delta^2 C, \quad (2.102)$$

$$\left(\mathbf{C}_{\varepsilon^\delta}(\mathbf{e}^\delta), \varepsilon^\delta(\mathbf{e}^\delta) \right)_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \delta^2 C. \quad (2.103)$$

Démonstration. L'erreur \mathbf{e}^δ satisfait l'identité d'énergie

$$\frac{d\mathcal{E}_e(t)}{dt} = \delta \left(\mathbf{h}, \frac{\partial \mathbf{e}^\delta}{\partial t} \right)_{L^2(\Omega)^3} + \delta \left(\mathbf{C}_{\varepsilon_\nu}(\mathbf{u}^{(2)}), \varepsilon^\delta \left(\frac{\partial \mathbf{e}^\delta}{\partial t} \right) \right)_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}, \quad (2.104)$$

où $\mathcal{E}_e(t)$ est l'énergie à l'instant t définie par

$$\mathcal{E}_e(t) = \frac{1}{2} \left(\rho \partial_t \mathbf{e}^\delta, \partial_t \mathbf{e}^\delta \right)_{L^2(\Omega)^3}^2 + \frac{1}{2} \left(\mathbf{C}_{\varepsilon^\delta}(\mathbf{e}^\delta), \varepsilon^\delta(\mathbf{e}^\delta) \right)_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}. \quad (2.105)$$

En considérant les conditions initiales nulles, cette identité (2.104) est équivalente à

$$\mathcal{E}_e(t) = \delta \int_0^t \left(\mathbf{h}, \partial_s \mathbf{e}^\delta \right)_{L^2(\Omega)^3} ds + \delta \int_0^t \left(\mathbf{C}_{\varepsilon_\nu}(\mathbf{u}^{(2)}), \varepsilon^\delta(\partial_s \mathbf{e}^\delta) \right)_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} ds. \quad (2.106)$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$|(\mathbf{h}, \partial_t \mathbf{e}^\delta)_{L^2(\Omega)^3}| \leq \|\mathbf{h}\|_{L^2(\Omega)^3} \|\partial_t \mathbf{e}^\delta\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

Par ailleurs, en tenant compte des conditions initiales nulles et en intégrant par parties en temps, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\mathbf{C}_{\varepsilon_\nu}(\mathbf{u}^{(2)}), \varepsilon^\delta(\partial_s \mathbf{e}^\delta) \right)_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} ds &= - \int_0^t \left(\mathbf{C}_{\varepsilon_\nu}(\partial_s \mathbf{u}^{(2)}), \varepsilon^\delta(\mathbf{e}^\delta) \right)_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} ds \\ &\quad + \left(\mathbf{C}_{\varepsilon_\nu}(\mathbf{u}^{(2)}(t)), \varepsilon^\delta(\mathbf{e}^\delta(t)) \right)_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété de continuité (2.4) de \mathbf{C} , nous montrons qu'il existe une constante C indépendante de δ telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e(t) &\leq \delta \int_0^t \|\mathbf{h}\|_{L^2(\Omega)^3} \|\partial_s \mathbf{e}^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} ds \\ &\quad + \delta C \int_0^t \|\varepsilon_\nu(\partial_s \mathbf{u}^{(2)})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \|\varepsilon^\delta(\mathbf{e}^\delta)\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} ds \\ &\quad + \delta C \|\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(2)})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \|\varepsilon^\delta(\mathbf{e}^\delta)\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}. \end{aligned}$$

La définition (2.105) ainsi que la propriété de coercivité (2.3) de \mathbf{C} nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e(t) &\leq \delta C \int_0^t \left(\|\mathbf{h}\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\varepsilon_\nu(\partial_s \mathbf{u}^{(2)})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \right) \mathcal{E}_e^{1/2}(s) ds \\ &\quad + \delta C \|\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(2)})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \mathcal{E}_e^{1/2}(t). \quad (2.107) \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité d'Young, nous avons la relation suivante

$$\delta C \|\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(2)})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \mathcal{E}_e^{1/2}(t) \leq \frac{1}{2} \left(\delta C \|\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(2)})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{E}_e(t),$$

que nous injectons dans (2.107) pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e(t) \leq \delta C \int_0^t \left(\|\mathbf{h}\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\varepsilon_\nu(\partial_s \mathbf{u}^{(2)})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \right) \mathcal{E}_e^{1/2}(s) ds \\ + \delta^2 C \|\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(2)})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'utilisation du lemme de Grönwall nous permet d'avoir la relation suivante

$$\mathcal{E}_e(t) \leq \delta^2 C \left(\int_0^t \|\mathbf{h}\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\varepsilon_\nu(\partial_s \mathbf{u}^{(2)})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} ds + \|\varepsilon_\nu(\mathbf{u}^{(2)})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \right)^2.$$

Sous les hypothèses $\mathbf{h} \in C^0((0, T); L^2(\Omega)^3)$ et $\mathbf{C}_{\varepsilon_\nu}(\mathbf{u}^{(2)}) \in C^1((0, T); L^2(\Omega)^{3 \times 3})$, nous obtenons

$$\mathcal{E}_e(t) \leq \delta^2 C, \quad (2.108)$$

impliquant les résultats (2.102) et (2.103) (en utilisant la définition (2.105) de l'énergie $\mathcal{E}_e(t)$). \square

Corollaire 6. Si $\mathbf{h} \in C^0((0, T); L^2(\Omega)^3)$ et $\mathbf{C}_{\varepsilon_\nu}(\mathbf{u}^{(2)}) \in C^1((0, T); L^2(\Omega)^{3 \times 3})$, alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ telle que

$$\sup_{t \in (0, T)} \|\partial_3 \mathbf{u}^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C\delta. \quad (2.109)$$

Démonstration. En utilisant la relation (2.103) et la propriété de coercivité (2.3) de \mathbf{C} , nous avons

$$\|\varepsilon^\delta(\mathbf{e}^\delta)\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \delta C, \quad (2.110)$$

impliquant

$$\|\partial_3 e_3^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^2 < C\delta \quad (\text{car } \delta < 1). \quad (2.111)$$

Nous rappelons la définition (1.22) de $\mathbf{s}^\delta(\mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$

$$\mathbf{s}^\delta(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \delta v_3 \end{pmatrix}. \quad (2.112)$$

En nous basant sur les éléments de la preuve du Lemme 2 du chapitre précédent et en utilisant la relation (2.108), nous montrons que pour $T > 0$, il existe une constante C_T telle que

$$\|\mathbf{s}^\delta(\mathbf{e}^\delta)\|_{H^1(\Omega)^3} \leq \delta C_T, \quad (2.113)$$

impliquant

$$\|\nabla e_1^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\nabla e_2^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \delta C_T,$$

ou encore

$$\|\partial_3 e_i^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta C_T, \quad \text{pour } i=1,2. \quad (2.114)$$

Par conséquent, en s'appuyant sur (2.114) et (2.111) nous arrivons au résultat

$$\|\partial_3 \mathbf{e}^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} = \|\partial_3(\mathbf{u}^\delta - \delta \mathbf{u}^{(1)})\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \delta C_T.$$

Finalement, en utilisant l'inégalité triangulaire nous obtenons

$$\|\partial_3 \mathbf{u}^\delta\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \delta (C_T + \|\partial_3 \mathbf{u}^{(1)}\|_{L^2(\Omega)^3}),$$

impliquant le résultat voulu (2.109). \square

Pour finir, il faut donc démontrer que

$$\mathbf{h} = -\rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(1)} - \operatorname{div}_\tau \left(\mathbf{C}_{\varepsilon_\nu}(\mathbf{u}^{(2)}) \right) - \operatorname{div}_\tau \left(\mathbf{C}_{\varepsilon_\tau}(\mathbf{u}^{(1)}) \right),$$

est dans $C^0((0, T); L^2(\Omega)^3)$ et que $\mathbf{C}_{\varepsilon_\nu}(\mathbf{u}^{(2)}) \in C^1((0, T); L^2(\Omega)^{3 \times 3})$.

En utilisant l'expression de $\mathbf{u}^{(1)}$ (Proposition 11) en fonction de $\mathbf{u}^{(0)}$ (en tenant compte de la Proposition 12), on a que

$$\partial_t^2 \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}_T, x_3, t) = \Theta^{(1)}(x_3, \nabla_T) \partial_t^2 \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}_T, t),$$

qui appartient à $C^0((0, T); L^2(\Omega)^3)$ si $\mathbf{u}_T^{(0)} \in C^2((0, T); L^2(\mathbb{R}^2)^2)$ (car toutes les fonctions de x_3 qui apparaissent dans $\Theta^{(1)}(x_3, \nabla_T)$ sont bornées).

On a de la même façon, $\operatorname{div}_\tau \left(\mathbf{C}_{\varepsilon_\tau}(\mathbf{u}^{(1)}) \right) \in C^0((0, T); L^2(\Omega)^3)$ si

$$\mathbf{u}_T^{(0)} \in C^0((0, T); H^2(\mathbb{R}^2)^2).$$

Enfin en utilisant l'expression de $\mathbf{u}^{(2)}$ (Proposition 14) en fonction de $\mathbf{u}^{(0)}$ et \mathbf{g}^+ , on a $\operatorname{div}_\tau \left(\mathbf{C}_{\varepsilon_\nu}(\mathbf{u}^{(2)}) \right) \in C^0((0, T); L^2(\Omega)^3)$ si

- $\mathbf{u}_T^{(0)} \in C^0((0, T); H^3(\mathbb{R}^2)^2)$ (car toutes les fonctions qui apparaissent dans $\Theta^{(2)}(x_3, \nabla_T)$ sont de dérivées bornées)
- $\mathbf{g}^+ \in C^0((0, T); H^1(\Gamma_+)^3)$ (car toutes les fonctions qui apparaissent dans \mathbf{H} sont de dérivées bornées).

De plus, on a $\mathbf{C}_{\varepsilon_\nu}(\mathbf{u}^{(2)}) \in C^1((0, T); L^2(\Omega)^{3 \times 3})$ si

- $\mathbf{u}_T^{(0)} \in C^1((0, T); H^2(\mathbb{R}^2)^2)$,
- $\mathbf{g}^+ \in C^1((0, T); L^2(\Gamma_+)^3)$.

En utilisant le Corollaire 5, on peut écrire toutes ces hypothèses en fonction de \mathbf{g}^+ :

$$\mathbf{g}^+ \in C^0((0, T); H^1(\Gamma_+)^3) \cap C^1((0, T); L^2(\Gamma_+)^3).$$

Il est intéressant de constater que le résultat de convergence est valide même lorsque le tenseur de rigidité \mathbf{C} est discontinu dans la direction de l'épaisseur. Par ailleurs, une estimation de $\|\partial_3(\partial_t^2 \mathbf{u}^\delta)\|_{L^2(\Omega)^3}$ peut être obtenue de la même façon si \mathbf{g}^+ possède suffisamment de régularité en temps.

Annexe

Problème canonique

Nous introduisons le problème canonique : pour tous $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$, $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma_+)^3$ et $\mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3$, nous cherchons \mathbf{u} vérifiant

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_{\nu}(\mathbf{u}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_+} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+ - \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_{\tau}(\mathbf{w}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3. \quad (2.115)$$

Ce problème constitue le problème modèle pour notre analyse asymptotique. D'abord, nous étudions son caractère bien posé. Ensuite, nous donnons la forme de la solution en fonction des données de notre problème, dans des cas bien précis qui vont nous servir à définir les éléments de notre analyse asymptotique.

Caractère bien posé

Supposons qu'une solution \mathbf{u} du problème (2.115) existe. En choisissant la fonction test \mathbf{v} indépendante de x_3 , nous obtenons

$$\int_{-1}^1 \mathbf{f} \, dx_3 + \mathbf{g}(x_1, x_2, 1) = 0, \quad (2.116)$$

ce qui constitue la condition de compatibilité du problème (2.115). Nous montrons que c'est la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution. Par ailleurs, nous montrons de façon classique (notamment en utilisant une inégalité de type Poincaré-Wirtinger) le lemme suivant :

Lemme 18. *Supposons que $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$, $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma_+)^3$ et $\mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3$. Le problème (2.115) admet une solution dans $H = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \text{ tel que } \partial_3 \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3\}$, sous la condition de compatibilité (2.116). Cette solution est unique à une fonction indépendante de x_3 près.*

Structure de la solution

Notre objectif n'est pas de trouver une forme générale de la solution du problème (2.115) mais plutôt d'étudier des cas particuliers pour \mathbf{f} , \mathbf{g} et \mathbf{w} (les données de notre problème). En effet, les seconds membres des équations vérifiées par les composantes des correcteurs d'ordre 0, 1 et 2 seront facilement identifiés à travers les cas décrits ci-dessous.

Pour désigner les coordonnées transverses, nous utilisons la notation $\mathbf{x}_T = (x_1, x_2)$.

Lemme 19. Lorsque $\mathbf{f} = \mathbf{w} = 0$ et $\mathbf{g} = 0$, toute fonction indépendante de x_3 est solution du problème (2.115).

Démonstration. Lorsque $\mathbf{f} = \mathbf{w} = 0$ et $\mathbf{g} = 0$, l'équation vérifiée par \mathbf{u} est

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_{\nu}(\mathbf{u}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega = 0. \quad (2.117)$$

En choisissant $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ et en utilisant la propriété de coercivité (1.5) de \mathbf{C} , nous obtenons

$$\varepsilon_{\nu}(\mathbf{u}) = 0,$$

impliquant

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_T).$$

□

Lemme 20. Lorsque $\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{g} = 0$ et \mathbf{w} est indépendante de x_3 , la fonction donnée par

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{x}_T, x_3) = u_1(\mathbf{x}_T, 0) - x_3 \partial_1 w_3(\mathbf{x}_T), & (2.118a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2(\mathbf{x}_T, x_3) = u_2(\mathbf{x}_T, 0) - x_3 \partial_2 w_3(\mathbf{x}_T), & (2.118b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_3(\mathbf{x}_T, x_3) = u_3(\mathbf{x}_T, 0) - \partial_1 w_1 \int_0^{x_3} \frac{c_{13}}{c_{33}} dx'_3 - \partial_2 w_2 \int_0^{x_3} \frac{c_{23}}{c_{33}} dx'_3, & (2.118c) \end{cases}$$

est solution du problème (2.115).

Démonstration. Dans notre cas, nous avons la relation suivante

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_{\nu}(\mathbf{u}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_{\tau}(\mathbf{w}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (2.119)$$

qui se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (c_{13}\partial_1 w_1 + c_{23}\partial_2 w_2 + c_{33}\partial_3 u_3)\partial_3 v_3 \\ & \quad + c_{44}(\partial_2 w_3 + \partial_3 u_2)\partial_3 v_2 + c_{55}(\partial_1 w_3 + \partial_3 u_1)\partial_3 v_1 \, d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Nous rappelons que les coefficients c_{44} et c_{55} sont strictement positifs et que \mathbf{w} est indépendant de x_3 . Ensuite, en choisissant

$$\begin{cases} v_1 = x_3 \partial_1 w_3 + u_1, \\ v_2 = x_3 \partial_2 w_3 + u_2, \\ v_3 = \partial_1 w_1 \int_0^{x_3} c_{13} dx'_3 + \partial_2 w_2 \int_0^{x_3} c_{23} dx'_3 + \partial_3 u_3 \int_0^{x_3} c_{33} dx'_3, \end{cases}$$

nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_1 w_3 + \partial_3 u_1 = 0, \\ \partial_2 w_3 + \partial_3 u_2 = 0, \\ c_{13}\partial_1 w_1 + c_{23}\partial_2 w_2 + c_{33}\partial_3 u_3 = 0, \end{cases}$$

impliquant (2.118a), (2.118b) et (2.118c). □

Lemme 21. Lorsque $\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{g} = 0$, w_1, w_2 indépendants de x_3 et $w_3 \in \mathbb{P}_1$ par morceaux en x_3 , la fonction donnée par

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{x}_T, x_3) = u_1(\mathbf{x}_T, 0) - x_3 \partial_1 w_3(\mathbf{x}_T, x_3), \end{cases} \quad (2.120a)$$

$$\begin{cases} u_2(\mathbf{x}_T, x_3) = u_2(\mathbf{x}_T, 0) - x_3 \partial_2 w_3(\mathbf{x}_T, x_3), \end{cases} \quad (2.120b)$$

$$\begin{cases} u_3(\mathbf{x}_T, x_3) = u_3(\mathbf{x}_T, 0) - \partial_1 w_1(\mathbf{x}_T, 0) \int_0^{x_3} \frac{c_{13}}{c_{33}} dx'_3 - \partial_2 w_2(\mathbf{x}_T, 0) \int_0^{x_3} \frac{c_{23}}{c_{33}} dx'_3, \end{cases} \quad (2.120c)$$

est solution du problème (2.115).

Démonstration. Dans notre cas, la solution \mathbf{u} vérifie l'équation suivante

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_{\nu}(\mathbf{u}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_{\tau}(\mathbf{w}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) d\Omega, \quad (2.121)$$

que nous réécrivons sous la forme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_{55} (\partial_3 u_1 + \partial_1 w_3) \partial_3 v_1 + c_{44} (\partial_3 u_2 + \partial_2 w_3) \partial_3 v_2 \\ + (c_{13} \partial_1 w_1 + c_{23} \partial_2 w_2 + c_{33} \partial_3 u_3) \partial_3 v_3 d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Ensuite, en choisissant

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + \int_0^{x_3} \partial_1 w_3 dx'_3, \\ v_2 = u_2 + \int_0^{x_3} \partial_2 w_3 dx'_3, \\ v_3 = \int_0^{x_3} c_{33} u_3 dx'_3 + \partial_1 w_1 \int_0^{x_3} c_{13} dx'_3 + \partial_2 w_2 \int_0^{x_3} c_{23} dx'_3, \end{cases}$$

nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_3 u_1 = -\partial_1 w_3(\mathbf{x}_T, x_3), \\ \partial_3 u_2 = -\partial_2 w_3(\mathbf{x}_T, x_3), \\ \partial_3 u_3 = -\frac{c_{13}}{c_{33}} \partial_1 w_1(\mathbf{x}_T, 0) - \frac{c_{23}}{c_{33}} \partial_2 w_2(\mathbf{x}_T, 0). \end{cases}$$

Nous en déduisons (2.120a), (2.120b) et (2.120c). \square

Lemme 22. Lorsque $\mathbf{g} = 0$, $\mathbf{w} = 0$ et $f_3 = 0$, la fonction donnée par

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{x}_T, x_3) = u_1(\mathbf{x}_T, 0) + \int_0^{x_3} \frac{1}{c_{55}} \int_{-1}^{x'_3} f_1 dx''_3 dx'_3, \end{cases} \quad (2.122a)$$

$$\begin{cases} u_2(\mathbf{x}_T, x_3) = u_2(\mathbf{x}_T, 0) + \int_0^{x_3} \frac{1}{c_{44}} \int_{-1}^{x'_3} f_2 dx''_3 dx'_3, \end{cases} \quad (2.122b)$$

$$\begin{cases} u_3(\mathbf{x}_T, x_3) = u_3(\mathbf{x}_T), \end{cases} \quad (2.122c)$$

est solution du problème (2.115).

Démonstration. Dans notre cas, l'équation vérifiée par \mathbf{u} est la suivante

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_{\nu}(\mathbf{u}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega, \quad (2.123)$$

qui se réécrit comme suit

$$\int_{\Omega} c_{55} \partial_3 u_1 \partial_3 v_1 + c_{44} \partial_3 u_2 \partial_3 v_2 + c_{33} \partial_3 u_3 \partial_3 v_3 \, d\Omega = \int_{\Omega} f_1 v_1 \, d\Omega + \int_{\Omega} f_2 v_2 \, d\Omega.$$

Ensuite, en choisissant les fonctions $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ et $v_3 = u_3$ et en se rappelant que $c_{33} > 0$, nous obtenons

$$\partial_3 u_3 = 0 \quad \text{sur } \Omega, \quad (2.124)$$

impliquant (2.122c).

Par conséquent, en utilisant (2.124) et en choisissant $v_2 = 0$, en intégrant par parties et se rappelant que le tenseur de rigidité \mathbf{C} ne varie que dans la direction de l'épaisseur, nous obtenons

$$- \int_{\Omega} \partial_3 (c_{55} \partial_3 u_1) v_1 \, d\Omega + \int_{\Gamma_+} c_{55} \partial_3 u_1 v_1 \, d\Gamma_+ - \int_{\Gamma_-} c_{55} \partial_3 u_1 v_1 \, d\Gamma_- = \int_{\Omega} f_1 v_1 \, d\Omega. \quad (2.125)$$

En choisissant $v_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, nous obtenons

$$\partial_3 (c_{55} \partial_3 u_1) = f_1, \quad (2.126)$$

Le terme à droite de l'équation (2.126) est constant par rapport à x_3 dans chaque stratification de la plaque. En revenant sur (2.125) et en utilisant (2.126), nous déduisons

$$\int_{\Gamma_+} c_{55} \partial_3 u_1 v_1 \, d\Gamma_+ - \int_{\Gamma_-} c_{55} \partial_3 u_1 v_1 \, d\Gamma_- = 0,$$

qui se réécrit sous la forme

$$\int_{\Sigma} (c_{55} \partial_3 u_1 v_1)|_{x_3=1} - (c_{55} \partial_3 u_1 v_1)|_{x_3=-1} \, d\Sigma = 0. \quad (2.127)$$

Ensuite, nous prenons $v_1 = \frac{x_3 + 1}{2} \Phi(\mathbf{x}_T)$ où $\Phi \in \mathcal{D}(\Sigma)$ pour avoir finalement

$$c_{55} \partial_3 u_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+. \quad (2.128)$$

En utilisant (2.127) et (2.128) et en prenant $v_1 \in \mathcal{D}(\Sigma)$, nous arrivons au résultat

$$c_{55} \partial_3 u_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_-. \quad (2.129)$$

Les équations (2.126) et (2.129) impliquent

$$c_{55} \partial_3 u_1 = \int_{-1}^{x_3} f_1 \, dx'_3,$$

ce qui nous permet d'obtenir (2.122a).

En suivant les mêmes techniques pour obtenir les équations vérifiées par u_1 , nous montrons les relations

$$\begin{cases} \partial_3 (c_{44} \partial_3 u_2) = f_2 & \text{sur } \Omega, \\ c_{44} \partial_3 u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_+, \\ c_{44} \partial_3 u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_-, \end{cases}$$

impliquant (2.122b). □

Lemme 23. Lorsque $\mathbf{f} = -\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{g}}$ où $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_T, x_3) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_T, 1)$ et $\mathbf{w} = 0$, la fonction donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(\mathbf{x}_T, x_3) = u_1(\mathbf{x}_T, 0) + \frac{1}{2}g_1 \int_0^{x_3} \frac{(x'_3 + 1)}{c_{55}} dx'_3, \\ u_2(\mathbf{x}_T, x_3) = u_2(\mathbf{x}_T, 0) + \frac{1}{2}g_2 \int_0^{x_3} \frac{(x'_3 + 1)}{c_{44}} dx'_3, \\ u_3(\mathbf{x}_T, x_3) = u_3(\mathbf{x}_T). \end{array} \right. \quad (2.130a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(\mathbf{x}_T, x_3) = u_1(\mathbf{x}_T, 0) + \frac{1}{2}g_1 \int_0^{x_3} \frac{(x'_3 + 1)}{c_{55}} dx'_3, \\ u_2(\mathbf{x}_T, x_3) = u_2(\mathbf{x}_T, 0) + \frac{1}{2}g_2 \int_0^{x_3} \frac{(x'_3 + 1)}{c_{44}} dx'_3, \end{array} \right. \quad (2.130b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(\mathbf{x}_T, x_3) = u_1(\mathbf{x}_T, 0) + \frac{1}{2}g_1 \int_0^{x_3} \frac{(x'_3 + 1)}{c_{55}} dx'_3, \\ u_2(\mathbf{x}_T, x_3) = u_2(\mathbf{x}_T, 0) + \frac{1}{2}g_2 \int_0^{x_3} \frac{(x'_3 + 1)}{c_{44}} dx'_3, \\ u_3(\mathbf{x}_T, x_3) = u_3(\mathbf{x}_T). \end{array} \right. \quad (2.130c)$$

est solution du problème (2.115).

Démonstration. Dans notre cas, l'équation satisfaite par la solution \mathbf{u} est la suivante

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon_{\nu}(\mathbf{u}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) d\Omega = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_+} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\Gamma_+, \quad (2.131)$$

que nous réécrivons sous la forme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_{55} \partial_3 u_1 \partial_3 v_1 + c_{44} \partial_3 u_2 \partial_3 v_2 + c_{33} \partial_3 u_3 \partial_3 v_3 d\Omega &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{g}_1 v_1 + \tilde{g}_2 v_2 d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_+} g_1 v_1 + g_2 v_2 d\Gamma_+. \end{aligned}$$

En utilisant une intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (\partial_3(c_{55} \partial_3 u_1) - \frac{1}{2}\tilde{g}_1) v_1 + (\partial_3(c_{44} \partial_3 u_2) - \frac{1}{2}\tilde{g}_2) v_2 d\Omega \\ + \int_{\Gamma_+} (c_{55} \partial_3 u_1 - g_1)v_1 + (c_{44} \partial_3 u_2 - g_2)v_2 d\Gamma_+ \\ - \int_{\Gamma_-} c_{55} \partial_3 u_1 v_1 + c_{44} \partial_3 u_2 v_2 d\Gamma_- + \int_{\Omega} c_{33} \partial_3 u_3 \partial_3 v_3 d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Ensuite, en choisissant les fonctions $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ et $v_3 = u_3$ et en se rappelant que $c_{33} > 0$, nous obtenons

$$\partial_3 u_3 = 0 \quad \text{sur } \Omega, \quad (2.132)$$

impliquant (2.130c).

Par conséquent, en utilisant (2.132) et en choisissant $v_2 = 0$ et $v_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, nous obtenons

$$\int_{\Omega} (\partial_3(c_{55} \partial_3 u_1) - \frac{1}{2}\tilde{g}_1) v_1 d\Omega = 0, \quad \forall v_1 \in \mathcal{D}(\Omega),$$

impliquant

$$\partial_3(c_{55} \partial_3 u_1) = \frac{1}{2}\tilde{g}_1 \quad \text{sur } \Omega. \quad (2.133)$$

Par ailleurs, en utilisant (2.132) et (2.133) et en choisissant $v_2 = 0$, nous obtenons

$$\int_{\Gamma_+} (c_{55} \partial_3 u_1 - g_1)v_1 d\Gamma_+ - \int_{\Gamma_-} c_{55} \partial_3 u_1 v_1 d\Gamma_- = 0,$$

qui se réécrit sous la forme

$$\int_{\Sigma} ((c_{55} \partial_3 u_1 - g_1)v_1)|_{x_3=1} - (c_{55} \partial_3 u_1 v_1)|_{x_3=-1} d\Sigma = 0.$$

Ensuite, nous prenons $v_1 = \frac{x_3 + 1}{2} \Phi(\mathbf{x}_T)$ où $\Phi \in \mathcal{D}(\Sigma)$ pour avoir finalement

$$c_{55} \partial_3 u_1 = \tilde{g}_1 \quad \text{sur } \Gamma_+. \quad (2.134)$$

En utilisant (2.132), (2.133) et (2.134), nous arrivons au résultat

$$c_{55} \partial_3 u_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_-. \quad (2.135)$$

Les équations (2.133) et (2.135) impliquent

$$c_{55} \partial_3 u_1 = \frac{(x_3 + 1)}{2} \tilde{g}_1,$$

ce qui nous permet d'obtenir (2.130a).

En suivant les mêmes techniques pour obtenir les équations vérifiées par u_1 , nous montrons les relations suivantes

$$\begin{cases} \partial_3(c_{44} \partial_3 u_2) = \frac{1}{2} \tilde{g}_2 & \text{sur } \Omega, \\ c_{44} \partial_3 u_2 = g_2 & \text{sur } \Gamma_+, \\ c_{44} \partial_3 u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_-, \end{cases}$$

impliquant (2.130b). □

Expressions des composantes du terme $\mathbf{u}^{(2)}$

Nous rappelons que l'équation vérifiée par $\mathbf{u}^{(2)}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_{\nu}(\mathbf{u}^{(2)}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega &= - \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_{\tau}(\mathbf{u}^{(1)}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{C} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}) \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(0)} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_+} \mathbf{g}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+. \end{aligned} \quad (2.136)$$

La linéarité de cette équation nous permet de décomposer la solution $\mathbf{u}^{(2)}$ sous la forme

$$\mathbf{u}^{(2)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(2)} + \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}^{(2)},$$

vérifiant respectivement les équations

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_{\nu}(\tilde{\mathbf{u}}^{(2)}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_{\tau}(\mathbf{u}^{(1)}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (2.137)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_{\nu}(\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}^{(2)}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{C} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(0)} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \\ + \int_{\Gamma_+} \mathbf{g}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+. \quad (2.138)$$

Théorème 11. *Les composantes du terme $\tilde{\mathbf{u}}^{(2)}$ vérifient*

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1^{(2)}(\mathbf{x}_T, x_3, t) &= \tilde{u}_1^{(2)}(\mathbf{x}_T, 0, t) - x_3 \partial_1 u_3^{(1)}(\mathbf{x}_T, 0, t) \\ &\quad + \partial_{1,1} u_1^{(0)} \int_0^{x_3} \int_0^{x'_3} \frac{c_{13}}{c_{33}} dx''_3 dx'_3 + \partial_{1,2} u_2^{(0)} \int_0^{x_3} \int_0^{x'_3} \frac{c_{23}}{c_{33}} dx''_3 dx'_3, \end{aligned} \quad (2.139a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2^{(2)}(\mathbf{x}_T, x_3, t) &= \tilde{u}_2^{(2)}(\mathbf{x}_T, 0, t) - x_3 \partial_2 u_3^{(1)}(\mathbf{x}_T, 0, t) \\ &\quad + \partial_{2,1} u_1^{(0)} \int_0^{x_3} \int_0^{x'_3} \frac{c_{13}}{c_{33}} dx''_3 dx'_3 + \partial_{2,2} u_2^{(0)} \int_0^{x_3} \int_0^{x'_3} \frac{c_{23}}{c_{33}} dx''_3 dx'_3, \end{aligned} \quad (2.139b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_3^{(2)}(\mathbf{x}_T, x_3, t) &= \tilde{u}_3^{(2)}(\mathbf{x}_T, 0, t) - \partial_1 u_1^{(1)}(\mathbf{x}_T, 0, t) \int_0^{x_3} \frac{c_{13}}{c_{33}} dx'_3 \\ &\quad - \partial_2 u_2^{(1)}(\mathbf{x}_T, 0, t) \int_0^{x_3} \frac{c_{23}}{c_{33}} dx'_3. \end{aligned} \quad (2.139c)$$

Démonstration. La relation (2.137) correspond à l'équation (2.121) avec $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}^{(2)}$ et $\mathbf{w} = \mathbf{u}^{(1)}$. Le Lemme 21 nous permet de déduire les résultats (2.139a), (2.139b) et (2.139c), en utilisant les expressions des composantes de $\mathbf{u}^{(1)}$ (Proposition 11 en tenant compte de la Proposition 12). \square

Théorème 12. *Les composantes du terme $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}^{(2)}$ vérifient*

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{u}}_1^{(2)}(\mathbf{x}_T, x_3, t) &= \tilde{\tilde{u}}_1^{(2)}(\mathbf{x}_T, 0, t) + \partial_{1,1} u_1^{(0)} \int_0^{x_3} \frac{1}{c_{55}} \int_{-1}^{x'_3} [c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}] dx''_3 dx'_3 \\ &\quad + \partial_{1,2} u_2^{(0)} \int_0^{x_3} \frac{1}{c_{55}} \int_{-1}^{x'_3} [c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}] dx''_3 dx'_3 \\ &\quad + (\partial_{2,2} u_1^{(0)} + \partial_{2,1} u_2^{(0)}) \int_0^{x_3} \frac{1}{c_{55}} \int_{-1}^{x'_3} [c_{66}] dx''_3 dx'_3 + \frac{1}{2} g_1^+ \int_0^{x_3} \frac{(x'_3 + 1)}{c_{55}} dx'_3, \end{aligned} \quad (2.140)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{u}}_2^{(2)}(\mathbf{x}_T, x_3, t) &= \tilde{\tilde{u}}_2^{(2)}(\mathbf{x}_T, 0, t) + \partial_{2,1} u_1^{(0)} \int_0^{x_3} \frac{1}{c_{44}} \int_{-1}^{x'_3} [c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}] dx''_3 dx'_3 \\ &\quad + \partial_{2,2} u_2^{(0)} \int_0^{x_3} \frac{1}{c_{44}} \int_{-1}^{x'_3} [c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}}] dx''_3 dx'_3 \\ &\quad + (\partial_{1,2} u_1^{(0)} + \partial_{1,1} u_2^{(0)}) \int_0^{x_3} \frac{1}{c_{44}} \int_{-1}^{x'_3} [c_{66}] dx''_3 dx'_3 + \frac{1}{2} g_2^+ \int_0^{x_3} \frac{(x'_3 + 1)}{c_{44}} dx'_3, \end{aligned} \quad (2.141)$$

$$\tilde{\tilde{u}}_3^{(2)}(\mathbf{x}_T, x_3, t) = \tilde{\tilde{u}}_3^{(2)}(\mathbf{x}_T, t), \quad (2.142)$$

où la notation $[\mathbf{f}(c_{ij})]$ désigne, pour toute fonction \mathbf{f} des composantes c_{ij} du tenseur de rigidité \mathbf{C} d'un milieu orthotrope hétérogène,

$$[\mathbf{f}(c_{ij})] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{f}(c_{ij}) dx_3 - \mathbf{f}(c_{ij}).$$

Démonstration. En tenant compte du fait que $g_3^+ = 0$, $u_3^{(0)} = 0$ et du Théorème (2.93), nous avons

$$\int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(0)} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Gamma_+} \mathbf{g}^+ \cdot \mathbf{v} d\Gamma_+, \quad \forall \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_T). \quad (2.143)$$

Nous posons

$$\langle \mathbf{C} \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{C} \, dx_3.$$

Or $\mathbf{u}^{(0)}$ est indépendant de x_3 donc la relation (2.143) se réécrit

$$2 \int_{\Sigma} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(0)} \cdot \mathbf{v} \, d\Sigma + 2 \int_{\Sigma} \langle \mathbf{C} \rangle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}) \, d\Sigma = \int_{\Sigma} \mathbf{g}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Sigma, \quad \forall \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_T)$$

Par conséquent, nous obtenons la relation suivante sur Σ

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(0)} - \operatorname{div}_{\tau} \langle \mathbf{C} \rangle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) = \frac{1}{2} \mathbf{g}^+$$

Nous définissons la fonction $\tilde{\mathbf{g}}^+$ à partir de \mathbf{g}^+

$$\tilde{\mathbf{g}}^+(\mathbf{x}_T, x_3, t) = \mathbf{g}^+(\mathbf{x}_T, 1, t)$$

Ensuite, pour tout \mathbf{v} nous avons

$$\int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}^{(0)} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \langle \mathbf{C} \rangle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{g}}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Omega$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \mathbf{C} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}) - \partial_t^2 \mathbf{u}^{(0)} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_+} \mathbf{g}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+ \\ & = \int_{\Omega} (\langle \mathbf{C} \rangle - \mathbf{C}) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}) \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{g}}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_+} \mathbf{g}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+ \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_{\nu}(\tilde{\mathbf{u}}^{(2)}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega & = \int_{\Omega} (\langle \mathbf{C} \rangle - \mathbf{C}) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}) \, d\Omega \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{g}}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_+} \mathbf{g}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Grâce à la linéarité de l'équation (2.144), la solution $\tilde{\mathbf{u}}^{(2)}$ s'écrit sous la forme d'une somme de deux solutions $\tilde{\mathbf{u}}^{(2)*}$ et $\tilde{\mathbf{u}}^{(2)**}$ (à une constante en x_3 près) vérifiant respectivement les équations suivantes

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_{\nu}(\tilde{\mathbf{u}}^{(2)*}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} (\langle \mathbf{C} \rangle - \mathbf{C}) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) : \varepsilon_{\tau}(\mathbf{v}) \, d\Omega, \right. \quad (2.145)$$

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_{\nu}(\tilde{\mathbf{u}}^{(2)**}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{g}}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_+} \mathbf{g}^+ \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_+. \right. \quad (2.146)$$

Résolvons d'abord l'équation suivante (2.145). Nous définissons le tenseur $[\mathbf{C}]$

$$[\mathbf{C}] = \langle \mathbf{C} \rangle - \mathbf{C}.$$

Nous remarquons que ce tenseur met en évidence l'hétérogénéité de la plaque dans la direction de l'épaisseur car pour un matériau homogène à travers l'épaisseur, il sera à coefficients nuls. Par conséquent, nous réécrivons la relation (2.145) sous la forme

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon_{\nu}(\tilde{\mathbf{u}}^{(2)*}) : \varepsilon_{\nu}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\tau} \left([\mathbf{C}] \tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}) \right) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (2.147)$$

ce qui correspond à l'équation (2.123) avec $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}^{(2)*}$ et $\mathbf{f} = \operatorname{div}_\tau ([\mathbf{C}]\tilde{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(0)}))$. Le vecteur \mathbf{f} a pour composantes

$$\begin{cases} f_1 = [c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}]\partial_{1,1}u_1^{(0)} + [c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}]\partial_{1,2}u_2^{(0)} + [c_{66}](\partial_{2,2}u_1^{(0)} + \partial_{2,1}u_2^{(0)}), \\ f_2 = [c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}]\partial_{2,1}u_1^{(0)} + [c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}}]\partial_{2,2}u_2^{(0)} + [c_{66}](\partial_{1,2}u_1^{(0)} + \partial_{1,1}u_2^{(0)}), \\ f_3 = 0. \end{cases}$$

Le Lemme 22 nous donne directement les expressions suivantes

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1^{(2)*}(\mathbf{x}_T, x_3, t) &= \tilde{u}_1^{(2)*}(\mathbf{x}_T, 0, t) + \partial_{1,1}u_1^{(0)} \int_0^{x_3} \frac{1}{c_{55}} \int_{-1}^{x'_3} [c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}] dx''_3 dx'_3 \\ &\quad + \partial_{1,2}u_2^{(0)} \int_0^{x_3} \frac{1}{c_{55}} \int_{-1}^{x'_3} [c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}] dx''_3 dx'_3 \\ &\quad + (\partial_{2,2}u_1^{(0)} + \partial_{2,1}u_2^{(0)}) \int_0^{x_3} \frac{1}{c_{55}} \int_{-1}^{x'_3} [c_{66}] dx''_3 dx'_3, \end{aligned} \quad (2.149)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2^{(2)*}(\mathbf{x}_T, x_3, t) &= \tilde{u}_2^{(2)*}(\mathbf{x}_T, 0, t) + \partial_{2,1}u_1^{(0)} \int_0^{x_3} \frac{1}{c_{44}} \int_{-1}^{x'_3} [c_{12} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}] dx''_3 dx'_3 \\ &\quad + \partial_{2,2}u_2^{(0)} \int_0^{x_3} \frac{1}{c_{44}} \int_{-1}^{x'_3} [c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}}] dx''_3 dx'_3 \\ &\quad + (\partial_{1,2}u_1^{(0)} + \partial_{1,1}u_2^{(0)}) \int_0^{x_3} \frac{1}{c_{44}} \int_{-1}^{x'_3} [c_{66}] dx''_3 dx'_3, \end{aligned} \quad (2.150)$$

$$\tilde{u}_3^{(2)*}(\mathbf{x}_T, x_3, t) = \tilde{u}_3^{(2)*}(\mathbf{x}_T, t). \quad (2.151)$$

Passons maintenant à la relation (2.146) qui correspond à l'équation (2.131) avec $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}^{(2)**}$, $\mathbf{g} = \mathbf{g}^+$ et $\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{g}}^+$. Le Lemme 23 nous permet de déduire

$$\tilde{u}_1^{(2)**}(\mathbf{x}_T, x_3, t) = \tilde{u}_1^{(2)**}(\mathbf{x}_T, 0, t) + \frac{1}{2} g_1^+ \int_0^{x_3} \frac{(x'_3 + 1)}{c_{55}} dx'_3, \quad (2.152)$$

$$\tilde{u}_2^{(2)**}(\mathbf{x}_T, x_3, t) = \tilde{u}_2^{(2)**}(\mathbf{x}_T, 0, t) + \frac{1}{2} g_2^+ \int_0^{x_3} \frac{(x'_3 + 1)}{c_{44}} dx'_3, \quad (2.153)$$

$$\tilde{u}_3^{(2)**}(\mathbf{x}_T, x_3, t) = \tilde{u}_3^{(2)**}(\mathbf{x}_T, t). \quad (2.154)$$

En utilisant (2.149), (2.150), (2.151), (2.152), (2.153) et (2.154) nous obtenons les expressions (2.140), (2.141) et (2.142). \square

Deuxième partie

La méthode des demi-espaces raccordés en transitoire

CHAPITRE 3

Rappel de la méthode des demi-espaces raccordés dans le cas stationnaire

Dans ce chapitre, nous rappelons le principe de la méthode des demi-espaces raccordés, que nous noterons dans la suite la méthode HsM (Halfspace Matching), pour une équation elliptique à coefficients constants posée dans un domaine non borné (typiquement \mathbb{R}^2).

La méthode a été introduite dans les travaux de S. Fliss et Patrick Joly [44; 45] qui traitent des ondes scalaires en régime harmonique dans des milieux périodiques localement perturbés. Elle a ensuite été développée dans la thèse d'A. Tonnoir [76] pour traiter le cas des équations des ondes élastiques dans des milieux anisotropes 2D. Dans la thèse d' Y. Tjandrawidjaja [75], il s'agissait d'étendre la méthode à des plaques élastiques anisotropes 3D. Dans toutes ces situations, il n'est pas simple de restreindre le problème à une région d'intérêt. Toutes les méthodes pour construire des conditions transparentes, absorbantes ou les méthodes PML échouent pour des milieux périodiques ou des milieux élastiques anisotropes.

L'idée clé de la méthode HsM est que l'on peut exprimer (via la transformée de Fourier pour les milieux homogènes ou la transformée de Floquet-Bloch pour les milieux périodiques) toute solution dans un demi-plan en fonction de sa trace sur le bord. L'approche consiste à coupler plusieurs représentations analytiques de la solution dans des demi-plans entourant la région d'intérêt bornée. Dans la zone d'intérêt, une représentation EF peut être utilisée. La difficulté est d'assurer la compatibilité de ces représentations dans les régions où elles coïncident en particulier dans les intersections infinies des demi-plans. Cela conduit à une reformulation couplant via des opérateurs intégraux, à la fois la solution dans la région bornée et ses traces sur les demi-plans. La méthode a été justifiée rigoureusement dans [19] pour des problèmes harmoniques avec dissipation (i.e. des problèmes elliptiques). L'analyse numérique a été effectuée dans [76]. Nous rappelons dans ce chapitre ces résultats.

Sommaire

3.1	Problème modèle	93
3.2	La méthode HsM pour un problème posé à l'extérieur d'un carré	93
3.2.1	Notations	94
3.2.2	Principe de la méthode	95
3.2.3	Calcul analytique des représentations de la solution dans les demi-plans	95
3.2.4	Relations de compatibilité des représentations de la solution	96
3.2.5	Formulation variationnelle	99

3.3	Couplage de la méthode HsM avec la méthode des éléments finis	100
3.3.1	Reformulation du problème en fonction de $\{u_b, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$	102
3.3.2	Formulation variationnelle	102
3.4	Discrétisation et estimations d'erreurs	103
3.5	Extensions de la méthode HsM	104

3.1 Problème modèle

Soit \mathcal{O} un domaine borné de \mathbb{R}^2 . Le problème que nous cherchons à résoudre dans ce chapitre est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + \alpha u = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \\ \text{Condition aux limites} \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où f est le terme source supposé dans $L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O})$ et à support compact et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. En appliquant le théorème de Lax-Milgram, nous déduisons que le problème (3.1) admet une solution unique dans $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O})$.

Soit $a > 0$ tel que $\mathcal{O} \subset (-a, a)^2$ et $\text{supp}(f) \subset (-a, a)^2$. Nous définissons

- $\Omega_a = (-a, a)^2 \setminus \mathcal{O}$: le domaine intérieur,
- $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (-a, a)^2$: le domaine extérieur (zone saine).

Dans le but d'expliquer la méthode HsM dans un cadre simplifié, nous allons considérer les 2 problèmes suivants

- (1) **La méthode HsM à l'extérieur d'un carré** : Nous cherchons à résoudre le problème (3.1) posé dans le domaine extérieur Ω (ce qui revient en quelque sorte à considérer $\mathcal{O} = (-a, a)^2$), sans terme source f et avec des conditions de Dirichlet non-homogènes imposées sur le bord. Ceci nous permet de nous concentrer sur le système d'équations de la méthode HsM. Nous décomposons le domaine Ω en 4 demi-plans s'appuyant sur les 4 bords du carré $(-a, a)^2$. Il est possible de représenter analytiquement la restriction de la solution à chaque demi-plan, à partir de sa trace sur le bord. En s'assurant que ces différentes représentations sont compatibles dans les intersections des demi-plans, nous nous ramenons à un système d'équations couplées dont les inconnues sont les traces de la solution sur les bords des demi-plans.
- (2) **Couplage de la méthode HsM avec la méthode des éléments finis** : Il est question de résoudre maintenant le problème (3.1) en présence de terme source et de perturbations. À l'extérieur du carré $(-a, a)^2$, nous utilisons ce que nous avons fait précédemment et dans une zone bornée contenant les perturbations, il est question d'utiliser une formulation variationnelle qui sera discrétisée par la méthode des éléments finis. Les inconnues sont alors les 4 traces de la solution sur les bords des demi-plans et la restriction de la solution dans la zone bornée. Toutes ces inconnues sont couplées par un système d'équations qui assurent la compatibilité de toutes les représentations de la solution.

Nous présenterons à la fin de ce chapitre différentes extensions de la méthode HsM.

3.2 La méthode HsM pour un problème posé à l'extérieur d'un carré

Nous considérons le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + \alpha u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = g \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

où g est une donnée appartenant à $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

3.2.1 Notations

Le domaine Ω est l'union de 4 demi-plans Ω_j (avec $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$) s'appuyant sur les 4 bords du carré $(-a, a)^2$.

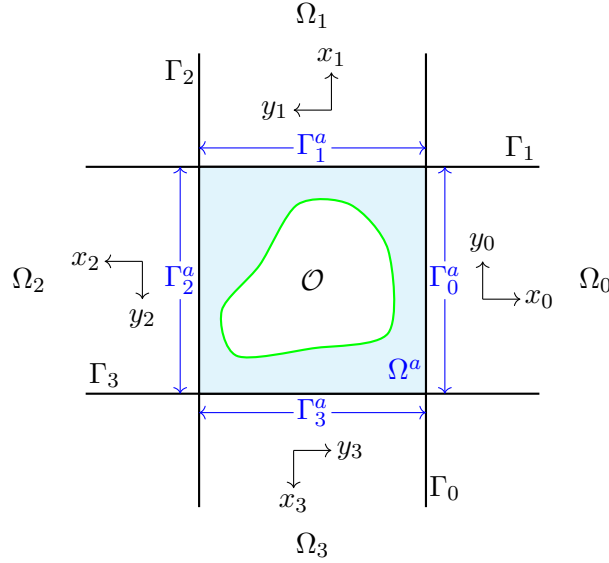


FIGURE 3.1 – Représentation schématique de la décomposition du domaine extérieur au défaut en un domaine borné et 4 demi-plans

La numérotation des demi-plans est choisie dans le sens trigonométrique en partant du côté droit d'indice $j = 0$, avec un angle de rotation de $\frac{\pi}{2}$ pour passer d'un demi-plan au demi-plan suivant. En utilisant un système de coordonnées locales dans chaque demi-plan Ω_j

$$\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & \sin \theta_j \\ -\sin \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ avec } \theta_j = \frac{j\pi}{2},$$

nous définissons le domaine Ω_j comme suit

$$\Omega_j = \{x_j \geq a\} \times \{y_j \in \mathbb{R}\}.$$

Nous notons Γ_j sa frontière

$$\Gamma_j = \{x_j = a\} \times \{y_j \in \mathbb{R}\},$$

que nous décomposons en une partie intérieure

$$\Gamma_j^a = \{x_j = a\} \times \{y_j \in [-a, a]\},$$

et en une partie extérieure formée de

$$\Gamma_j^+ = \{x_j = a\} \times \{y_j > a\} \text{ et } \Gamma_j^- = \{x_j = a\} \times \{y_j < -a\},$$

qui représentent les demi-droites externes de Γ_j situées de part et d'autre de Γ_j^a . Remarquons que l'union des 4 segments Γ_j^a n'est rien d'autre que la frontière du carré $(-a, a)^2$, que nous notons

$$\Gamma^a = \bigcup_{j=0}^3 \Gamma_j^a.$$

Par ailleurs, nous introduisons les notations suivantes, pour tout $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$

$$u_j := u|_{\Omega_j} \quad \text{et} \quad \varphi_j := u|_{\Gamma_j}.$$

3.2.2 Principe de la méthode

L'idée clé de la méthode est de calculer analytiquement la solution dans chaque demi-plan, à partir de sa trace sur le bord, en utilisant la transformée de Fourier. Les différentes représentations de la solution doivent être compatibles dans les intersections des demi-plans. Ainsi, nous obtenons un système d'équations couplant les 4 traces de la solution sur les bords des demi-plans.

3.2.3 Calcul analytique des représentations de la solution dans les demi-plans

Dans cette partie, notre objectif est de calculer analytiquement la représentation de la solution dans le demi-plan Ω_j , à partir de la trace φ_j sur le bord, pour tout $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

La restriction u_j de u à Ω_j est l'unique solution dans $H^1(\Omega_j)$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta u_j + \alpha u_j = 0 & \text{dans } \Omega_j, \\ u_j = \varphi_j & \text{sur } \Gamma_j. \end{cases} \quad (3.3)$$

Pour toute fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, nous définissons la transformée de Fourier dans la direction y par

$$\widehat{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi(y) e^{-i\xi y} dy.$$

En appliquant la transformée de Fourier au système (3.3) dans la direction y_j , nous obtenons le problème suivant pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_x^2 \widehat{u}_j + (-\alpha - \xi^2) \widehat{u}_j = 0, & x_j > a, \\ \widehat{u}_j = \widehat{\varphi}_j, & x_j = a, \end{cases} \quad (3.4)$$

dont la solution générale s'écrit sous la forme

$$\widehat{u}_j(x_j, \xi) = A_j(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \alpha}(x_j - a)} + B_j(\xi) e^{\sqrt{\xi^2 + \alpha}(x_j - a)}.$$

avec la convention $\operatorname{Re}(\sqrt{z}) > 0$ pour tout nombre complexe z . Nous cherchons $u_j \in H^1(\Omega_j)$, cela implique

$$B_j(\xi) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

et donc

$$\widehat{u}_j(x_j, \xi) = \widehat{\varphi}_j(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \alpha}(x_j - a)}.$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse, nous obtenons

$$u_j(x_j, y_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_j(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \alpha}(x_j - a)} e^{i\xi y_j} d\xi.$$

Nous avons donc exprimé la restriction de la solution dans chaque demi-plan à partir de sa trace sur le bord. Plus généralement, la solution notée $U_j(\varphi) \in H^1(\Omega_j)$ du problème de demi-plan (3.3) et de trace $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_j)$ sur le bord est donnée par la représentation intégrale

$$U_j(\varphi)(x_j, y_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \alpha}(x_j - a)} e^{i\xi y_j} d\xi. \quad (3.5)$$

Nous avons bien évidemment

$$u_j = U_j(\varphi_j), \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket. \quad (3.6)$$

3.2.4 Relations de compatibilité des représentations de la solution

Nous avons donc exprimé les représentations de la solution dans les 4 demi-plans en fonction des traces sur les bords. Toutes ces représentations doivent coïncider là où elles coexistent c'est-à-dire dans les intersections des demi-plans

$$u_j = u_{j\pm 1} \quad \text{dans } \Omega_j \cap \Omega_{j\pm 1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad (3.7)$$

qui donnent en particulier que

$$u_j = u_{j\pm 1} \quad \text{sur } \partial(\Omega_j \cap \Omega_{j\pm 1}), \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (3.8)$$

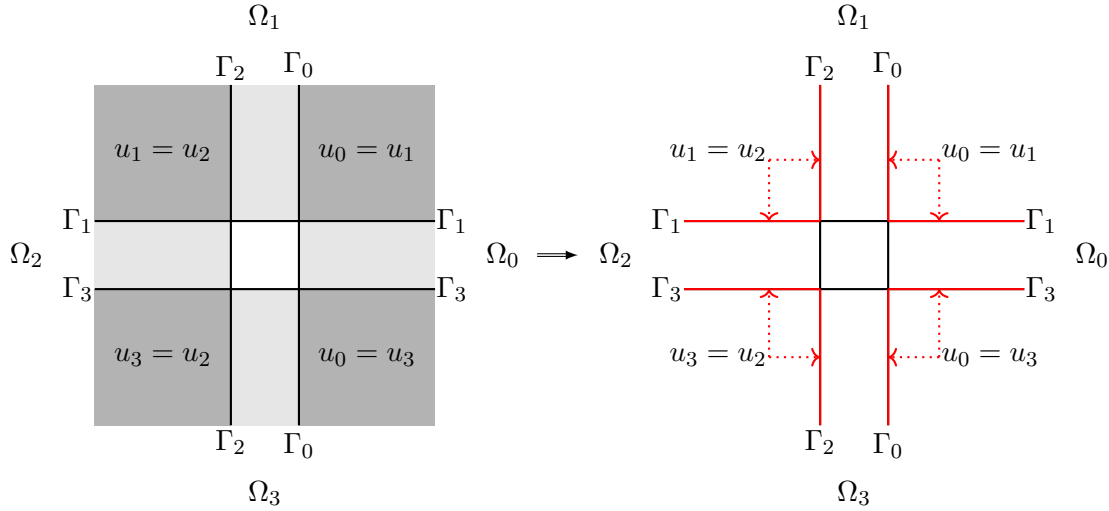


FIGURE 3.2 – Compatibilité des représentations de la solution dans les intersections des quatre demi-plans

Afin de pouvoir écrire (3.8) en termes des traces, nous nous concentrons sur l'exemple de $\partial(\Omega_0 \cap \Omega_1)$, où la relation (3.8) s'écrit

$$u_0 = u_1 \quad \text{sur } \partial(\Omega_0 \cap \Omega_1),$$

ou encore

$$u_0 = u_1 \quad \text{sur } \Omega_1 \cap \Gamma_0 \text{ et } \Omega_0 \cap \Gamma_1.$$

Or d'après la définition de la trace φ_0 et en utilisant (3.6), nous avons

$$\begin{cases} u_0 = \varphi_0 \\ u_1 = U_1(\varphi_1) \end{cases} \quad \text{sur } \Omega_1 \cap \Gamma_0, \quad (3.9)$$

ce qui nous permet de déduire

$$\varphi_0 = U_1(\varphi_1) \quad \text{sur } \Omega_1 \cap \Gamma_0.$$

De même, nous avons

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1 \\ u_0 = U_0(\varphi_0) \end{cases} \quad \text{sur } \Omega_0 \cap \Gamma_1,$$

donc nous obtenons

$$\varphi_1 = U_0(\varphi_0) \quad \text{sur } \Omega_0 \cap \Gamma_1.$$

Plus généralement, nous avons

$$\varphi_{j\pm 1}|_{\Omega_j \cap \Gamma_{j\pm 1}} = U_j(\varphi_j)|_{\Omega_j \cap \Gamma_{j\pm 1}}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (3.10)$$

Précisons comment s'écrit la relation (3.10) pour $j = 0$.

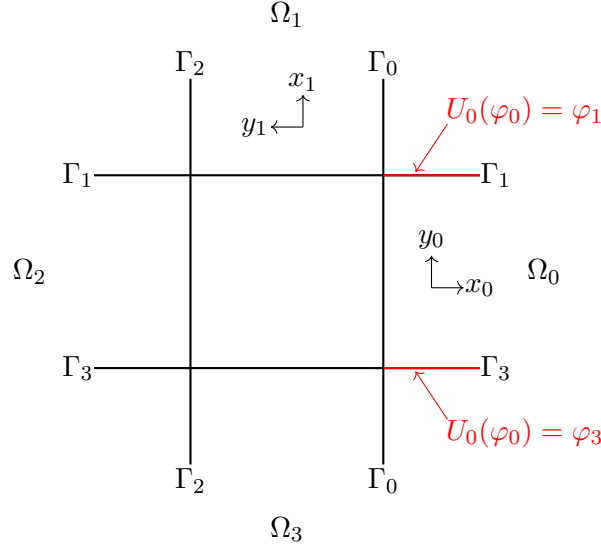


FIGURE 3.3 – Relations de compatibilité dans Ω_0

Sur $\Omega_0 \cap \Gamma_1$, φ_1 s'exprime en fonction de la variable spatiale y_1 et $U_0(\varphi_0)$ s'écrit en fonction de x_0 . Or tout point de $\Omega_0 \cap \Gamma_1$ peut être représenté à partir des coordonnées locales $(x_0, y_0 = a)$ ou $(x_1 = a, y_1)$ et nous avons

$$y_1 = -x_0 \quad \text{sur } \Omega_0 \cap \Gamma_1.$$

De même, sur $\Omega_0 \cap \Gamma_3$, φ_3 s'exprime en fonction de la variable spatiale y_3 et $U_0(\varphi_0)$ s'écrit en fonction de x_0 . Or tout point de $\Omega_0 \cap \Gamma_3$ peut être représenté à partir des coordonnées locales $(x_0, y_0 = -a)$ ou $(x_3 = a, y_3)$ et nous avons

$$y_3 = x_0 \quad \text{sur } \Omega_0 \cap \Gamma_3.$$

Par conséquent, les relations de compatibilité (3.10) s'écrivent dans Ω_0

$$\begin{cases} \varphi_1(-x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_0(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \alpha}(x_0 - a)} e^{i\xi a} d\xi, \\ \varphi_3(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_0(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \alpha}(x_0 - a)} e^{-i\xi a} d\xi, \end{cases} \quad \forall x_0 \geq a.$$

La relation (3.10) se réécrit sous la forme

$$\varphi_{j\pm 1} = D_{j,j\pm 1} \varphi_j \quad \text{sur } \Omega_j \cap \Gamma_{j\pm 1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad (3.11)$$

où $D_{j,j\pm 1}$ est l'opérateur défini pour tout $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_j)$ par

$$D_{j,j\pm 1} \psi = U_j(\psi)|_{\Omega_j \cap \Gamma_{j\pm 1}}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad (3.12)$$

ou plus précisément

$$[D_{j,j\pm 1} \psi](x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \alpha}(x_j - a)} e^{i\xi(\pm a)} d\xi, \quad \forall x_j \geq a, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (3.13)$$

Notons que dans notre cas correspondant à un milieu isotrope, nous manipulons uniquement deux opérateurs différents notés D_+ et D_- définis par

$$[D_{\pm} \psi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \alpha}(x - a)} e^{i\xi(\pm a)} d\xi, \quad \forall x \geq a.$$

Mais ce n'est plus le cas en général (en particulier pour un milieu anisotrope).

Par ailleurs, la condition aux limites vérifiée par u dans le système (3.2) nous permet d'écrire

$$\varphi_j|_{\Gamma_j^a} = g|_{\Gamma_j^a}.$$

Afin d'alléger l'écriture, nous utilisons la notation \prod pour désigner $\prod_{j=0}^3$.

Finalement, le problème satisfait par les traces $(\varphi_j)_{j \in \llbracket 0,3 \rrbracket} \in \prod H^{1/2}(\Gamma_j)$ est le suivant

$$\begin{cases} \varphi_j = D_{j-1,j} \varphi_{j-1} & \text{sur } \Omega_{j-1} \cap \Gamma_j, \\ \varphi_j = D_{j+1,j} \varphi_{j+1} & \text{sur } \Omega_{j+1} \cap \Gamma_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \\ \varphi_j = g & \text{sur } \Gamma_j^a, \end{cases} \quad (3.14)$$

Proposition 15. *Le système d'équations (3.14) est équivalent au problème initial (3.2).*

La preuve de cette équivalence est donnée dans [76; 19]. Nous redonnons néanmoins les éléments de la preuve qui nous permettent de comprendre comment à partir de la solution $(\varphi_j)_{j \in \llbracket 0,3 \rrbracket}$ de (3.12), nous reconstruisons la solution du problème de départ (3.2).

Supposons que $(\varphi_j)_{j \in \llbracket 0,3 \rrbracket} \in \prod H^{1/2}(\Gamma_j)$ est solution de (3.12). Introduisons les fonctions $v_j \in H^{1/2}(\Omega_j)$ pour tout $j \in \llbracket 0,3 \rrbracket$, définies par

$$v_j = U_j(\varphi_j),$$

où nous rappelons que $U_j(\varphi_j)$ est solution du problème de demi-plan (3.3) de trace φ_j sur le bord. Nous avons que si $(\varphi_j)_{j \in \llbracket 0,3 \rrbracket}$ vérifie les 2 premières équations de (3.14), alors

$$v_j = v_{j\pm 1} \quad \text{dans } \Omega_j \cap \Omega_{j\pm 1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Détaillons par exemple pourquoi $v_0 = v_1$ dans $\Omega_0 \cap \Omega_1$ (la preuve des autres égalités étant très similaire). Nous avons que $v_0 - v_1$ vérifie, par linéarité,

$$-\Delta(v_0 - v_1) + \alpha(v_0 - v_1) = 0 \quad \text{dans } \Omega_0 \cap \Omega_1. \quad (3.15)$$

De plus, nous avons

$$v_0 - v_1 = 0 \quad \text{sur } \Omega_1 \cap \Gamma_0,$$

car $\varphi_0 = D_{1,0} \varphi_1 \equiv U_1(\varphi_1)|_{\Omega_1 \cap \Gamma_0} \equiv v_1|_{\Omega_1 \cap \Gamma_0}$ sur $\Omega_1 \cap \Gamma_0$ d'après la deuxième équation du système (3.14) pour $j = 0$. Nous avons également

$$v_0 - v_1 = 0 \quad \text{sur } \Omega_0 \cap \Gamma_1,$$

car $\varphi_1 = D_{0,1} \varphi_0 \equiv U_0(\varphi_0)|_{\Omega_0 \cap \Gamma_1} \equiv v_0|_{\Omega_0 \cap \Gamma_1}$ sur $\Omega_0 \cap \Gamma_1$ d'après la première équation du système (3.14) pour $j = 1$. Finalement, nous obtenons

$$v_0 - v_1 = 0 \quad \text{sur } \partial(\Omega_0 \cap \Omega_1). \quad (3.16)$$

D'après (3.15) et (3.16), comme le problème de Dirichlet dans le quart d'espace $\Omega_0 \cap \Omega_1$ est bien posé ($\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$), nous concluons que

$$v_0 - v_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_0 \cap \Omega_1.$$

Enfin la fonction u définie par

$$u|_{\Omega_j} = v_j, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket,$$

est bien définie et dans $H^1(\Omega)$. Elle est solution de la première équation de (3.2) et vérifie la condition aux bords de Ω car

$$u|_{\Omega_j \cap \Gamma_j} = v_j|_{\Gamma_j^a} = \varphi_j|_{\Gamma_j^a} = g|_{\Gamma_j^a}, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket.$$

Nous avons donc bien reconstruit la solution de (3.2).

3.2.5 Formulation variationnelle

Notre objectif est d'écrire une formulation variationnelle du système (3.14). Nous allons chercher les traces $(\varphi_j)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket}$ dans $\prod L^2(\Gamma_j)$ plutôt que $\prod H^{1/2}(\Gamma_j)$ car le problème sera plus simple à discrétiser. L'opérateur $D_{j, j \pm 1}$ est bien défini et continu de $L^2(\Gamma_j^a)$ dans $L^2(\Omega_j \cap \Gamma_{j \pm 1})$ (voir [19] pour la preuve). Notons qu'il n'est plus évident de montrer que le problème qui consiste à trouver $(\varphi_j)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket} \in \prod L^2(\Gamma_j)$ vérifiant (3.14) est équivalent au problème de départ (3.2), puisque nous avons changé les espaces fonctionnels.

Nous introduisons finalement

$$\tilde{\varphi}_j = \begin{cases} \varphi_j & \text{sur } \Omega_j \cap \Gamma_{j \pm 1}, \\ 0 & \text{sur } \Gamma_j^a, \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

et $\tilde{G} = (\tilde{g}_j)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket}$ tel que

$$\tilde{g}_j = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Gamma_j^- \cup \Gamma_j^+, \\ g & \text{sur } \Gamma_j^a, \end{cases} \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket,$$

de sorte que

$$\varphi_j = \tilde{\varphi}_j + \tilde{g}_j, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket. \quad (3.17)$$

Ainsi, le problème se réécrit en utilisant les inconnues $(\tilde{\varphi}_j)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket} \in \prod L^2(\Gamma_j)$ sous la forme

$$|\tilde{\varphi}_j - (D_{j-1, j} \tilde{\varphi}_{j-1} + D_{j+1, j} \tilde{\varphi}_{j+1}) = D_{j-1, j} \tilde{g}_{j-1} + D_{j+1, j} \tilde{g}_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad (3.18)$$

où les fonctions $D_{j \pm 1, j} \tilde{\varphi}_{j \pm 1}$ et $D_{j \pm 1, j} \tilde{g}_{j \pm 1}$ appartenant à $L^2(\Gamma_j \cap \Omega_{j \pm 1})$ sont prolongées par 0 pour être identifiées à des fonctions de $L^2(\Gamma_j)$.

Nous introduisons l'espace \tilde{V} défini par

$$\tilde{V} = \{\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_j)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket} \in \prod L^2(\Gamma_j), \tilde{\psi}_j|_{\Gamma_j^a} = 0, \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket\}.$$

Il est facile de montrer que la formulation variationnelle associée au problème (3.18) est : trouver $\tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}_j)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket} \in \tilde{V}$ vérifiant pour tout $\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_j)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket} \in \tilde{V}$ le système suivant

$$\sum_{j=0}^3 \int_{\Gamma_j} ((\mathbb{I} - \mathbb{D})\tilde{\Phi})_j \overline{\tilde{\Psi}_j} d\Gamma_j = \sum_{j=0}^3 \int_{\Gamma_j} (\mathbb{D}\tilde{G})_j \overline{\tilde{\Psi}_j} d\Gamma_j, \quad (3.19)$$

avec pour tout $\Psi = (\psi_j)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket} \in \prod L^2(\Gamma_j)$

$$\begin{cases} (\mathbb{D}\Psi)_j = D_{j-1,j} \psi_{j-1} + D_{j+1,j} \psi_{j+1}, & \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \\ (\mathbb{I}\Psi)_j = \psi_j, \end{cases} \quad (3.20)$$

Dans [19], il est démontré que l'opérateur $\mathbb{I} - \mathbb{D}$ est la somme d'un opérateur coercif et d'un opérateur compact. D'après l'alternative de Fredholm, il suffisait de montrer l'unicité de la solution pour avoir le caractère bien posé du problème (3.19). Ceci est démontré dans [19] et permet de conclure à l'équivalence avec le problème de départ. Notons que la difficulté de la preuve réside dans le fait que les traces $(\varphi_j)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket}$ sont cherchées dans $\prod L^2(\Gamma_j)$ et non pas dans $\prod H^{1/2}(\Gamma_j)$. En particulier, si $(\tilde{\varphi}_j)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket} \in \tilde{V}$ est solution de (3.19) alors

$$\varphi_j = \tilde{\varphi}_j + \tilde{g}_j, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket,$$

est dans $\prod H^{1/2}(\Gamma_j)$ et est solution de (3.12). De plus, la solution de (3.2) est donnée par

$$u|_{\Omega_j} = U_j(\varphi_j), \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket,$$

(voir la fin de la sous-section 3.2.4 pour les explications).

3.3 Couplage de la méthode HsM avec la méthode des éléments finis

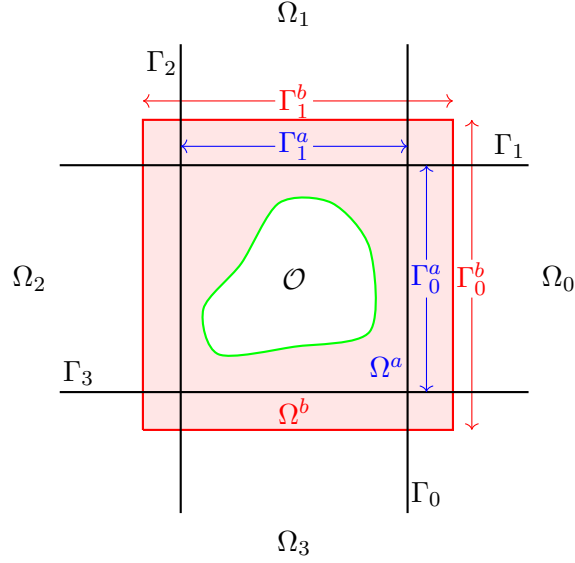
Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \\ \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \quad (3.21)$$

avec ν le vecteur unité normal à $\partial\mathcal{O}$, sortant par rapport à \mathcal{O} . Nous avons imposé une condition de Neumann homogène sur le bord de \mathcal{O} mais toute autre condition au bord peut être considérée.

Soit $b > 0$ tel que $a \leq b$. Nous introduisons les notations suivantes

- $\Omega_b = (-b, b)^2 \setminus \mathcal{O}$,
- $\Gamma_j^b = \{x_j = b\} \times \{y_j \in [-b, b]\}$, pour tout $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$,
- $\Gamma^b = \bigcup_{j=0}^3 \Gamma_j^b$,
- $B_l = \Omega_b \cap \Omega$: la zone de recouvrement entre Ω_b et Ω ,
- $u_b := u|_{\Omega_b}$.


 FIGURE 3.4 – Recouvrement entre le domaine intérieur Ω_b et le domaine extérieur Ω

Ces notations introduites nous permettent de décomposer le domaine $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$ en sous-domaines Ω_b et Ω_j , avec $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. Comme u_b est la restriction de u dans Ω_b , alors u_b satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u_b + \alpha u_b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ \frac{\partial u_b}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Pour écrire une formulation variationnelle pour u_b , il faut imposer une condition au bord de Ω_b . D'après la sous-section précédente, la restriction u_j de la solution dans Ω_j peut être représentée à partir de sa trace sur le bord et les traces φ_j de u sur les droites Γ_j doivent vérifier

$$\begin{cases} \varphi_j = D_{j-1,j} \varphi_{j-1} & \text{sur } \Omega_{j-1} \cap \Gamma_j, \\ \varphi_j = D_{j+1,j} \varphi_{j+1} & \text{sur } \Omega_{j+1} \cap \Gamma_j, \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (3.23)$$

Il manque une condition sur φ_j en Γ_j^a . Comme u_b et u_j (avec $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$) sont deux représentations de la même fonction u , elles doivent coïncider là où elles coexistent. En particulier, nous avons par exemple

$$\begin{cases} u_b|_{\Gamma_j^a} = u_j|_{\Gamma_j^a}, \\ \nabla u_b \cdot \nu_j|_{\Gamma_j^b} = \nabla u_j \cdot \nu_j|_{\Gamma_j^b}, \end{cases} \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad (3.24)$$

avec ν_j le vecteur unité normal à Γ_j^b et extérieur à Ω^b .

Notons qu'en absence de recouvrement ($a = b$), les relations (3.24) représentent les conditions de transmission classiques qui nous assurent le raccord en trace et en dérivée normale entre u_b et u_j sur $\Gamma_j^a = \Gamma_j^b$. Ces équations doivent être écrites en termes de φ_j . La première relation nous donne

$$u_b|_{\Gamma_j^a} = \varphi_j|_{\Gamma_j^a}, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket.$$

Pour exprimer la deuxième équation en terme de φ_j , introduisons pour tout $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ l'opérateur Λ_j défini pour tout $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_j)$ par

$$\Lambda_j \psi = \nabla U_j(\psi) \cdot \nu_j|_{\Gamma_j^b}, \quad (3.25)$$

où $U_j(\psi)$ est la solution du problème de demi-plan (3.3), de trace ψ sur le bord, dont l'expression est donnée dans (3.5). Ces opérateurs Λ_j sont également des opérateurs intégraux qui dans notre cas de milieu isotrope correspondent à $\Lambda_j \equiv \Lambda$ où Λ est donné pour tout $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_j)$ par

$$\Lambda\psi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-\sqrt{\xi^2 + \alpha}) \widehat{\psi}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \alpha}(b-a)} e^{i\xi y} d\xi, \quad \forall y \in (-b, b).$$

Dans le cas des milieux anisotropes par exemple, ces opérateurs Λ_j seront deux à deux différents.

3.3.1 Reformulation du problème en fonction de $\{u_b, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

En utilisant (3.22), (3.23), (3.24) et (3.25), nous obtenons un système d'équations qui couplent la restriction de la solution dans le domaine borné Ω_b et ses traces sur les bords des demi-plans. Le problème initial (3.1) est équivalent à trouver $u_b \in H^1(\Omega_b)$ et $(\varphi_j)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket} \in \prod H^{1/2}(\Gamma_j)$ tels que

$$\begin{cases} -\Delta u_b + \alpha u_b = f & \text{dans } \Omega_b, \\ \nabla u_b \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \\ u_b = \varphi_j & \text{sur } \Gamma_j^a, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \\ \nabla u_b \cdot \nu_j = \Lambda_j \varphi_j & \text{sur } \Gamma_j^b, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \\ \varphi_{j\pm 1} = D_{j, j\pm 1} \varphi_j & \text{sur } \Omega_j \cap \Gamma_{j\pm 1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3.26)$$

La démonstration de cette équivalence est donnée dans [19].

3.3.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème (3.26) ne s'écrit que dans le cas $b > a$. En effet, lorsque $a = b$, nous avons une difficulté liée aux coins ([76; 19]). Nous introduisons γ l'opérateur trace de $H^1(\Omega_b)$ dans $L^2(\bigcup_{j=0}^3 \Gamma_j)$ tel que pour tout $u_b \in H^1(\Omega_b)$ nous avons

$$\gamma u_b = \begin{cases} 0 & \text{sur } \bigcup_{j=0}^3 (\Gamma_j^- \cup \Gamma_j^+), \\ u_b & \text{sur } \bigcup_{j=0}^3 \Gamma_j^a. \end{cases} \quad (3.27)$$

Dans la suite, nous notons $\gamma_j u_b$ la restriction de γu_b sur Γ_j

$$\gamma_j u_b = \gamma u_b|_{\Gamma_j}, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket. \quad (3.28)$$

Comme dans la sous-section précédente, en écrivant

$$\varphi_j = \tilde{\varphi}_j + \gamma_j u_b, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad (3.29)$$

la formulation variationnelle du problème (3.26) s'écrit : trouver $(u_b, \tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}_j)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket}) \in H^1(\Omega_b) \times \tilde{V}$ vérifiant pour tous $(v_b, \Psi) \in H^1(\Omega_b) \times \tilde{V}$ le problème

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_b} \nabla u_b \cdot \nabla \bar{v}_b d\Omega_b + \alpha \int_{\Omega_b} u_b \bar{v}_b d\Omega_b - \sum_{j=0}^3 \left(\int_{\Gamma_j^b} \Lambda_j(\gamma_j u_b) \bar{v}_b d\Gamma_j^b - \int_{\Gamma_j^b} \Lambda_j \tilde{\varphi}_j \bar{v}_b d\Gamma_j^b \right) \\ & + \sum_{j=0}^3 \int_{\Gamma_j} ((\mathbb{I} - \mathbb{D})\tilde{\Phi})_j \bar{\Psi}_j d\Gamma_j - \sum_{j=0}^3 \int_{\Gamma_j} (\mathbb{D}(\gamma u_b))_j \bar{\Psi}_j d\Gamma_j = \int_{\Omega_b} f \bar{v}_b d\Omega_b, \end{aligned} \quad (3.30)$$

où \mathbb{I} et \mathbb{D} sont définis dans (3.20).

Dans [19], il est démontré que le problème (3.30) est bien posé. En effet, il relève encore de l'alternative de Fredholm. La solution u de (3.21) est donnée par

$$u = \begin{cases} u_b & \text{dans } \Omega_b, \\ U_j(\varphi_j) & \text{dans } \Omega_j, \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket. \end{cases}$$

3.4 Discrétisation et estimations d'erreurs

Pour discrétiser la formulation variationnelle (3.19) en utilisant une méthode de Galerkin, il s'agit tout d'abord d'introduire des espaces d'approximation de $V = \prod L^2(\Gamma_j)$. Il faut tout d'abord "tronquer" les lignes Γ_j et introduire les segments

$$\Gamma_j^T = \{(x_j = a, y_j) \in \Gamma_j, y_j \in [-T, T]\}, \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket,$$

où T est un premier paramètre de discrétisation qu'on appelle la troncature en espace. Notons qu'une troncature différente pour chaque ligne Γ_j peut être utilisée mais nous n'avons pas exploré cette possibilité. Chaque ligne tronquée Γ_j^T est ensuite maillée par des segments $[M_j^i M_j^{i+1}]$ (avec $i \in \llbracket 1, N_j \rrbracket$) de taille maximale notée h . Finalement l'espace $V_{\mathbf{h}}$ avec $\mathbf{h} = (T, h, k)$ est construit à partir d'éléments finis de type Lagrange de degré k

$$V_{\mathbf{h}} = \{(\varphi_{j,\mathbf{h}})_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket} \in V \mid \varphi_{j,\mathbf{h}}|_{[M_j^i M_j^{i+1}]} \in \mathbb{P}^k([M_j^i M_j^{i+1}]), \forall i \in \llbracket 1, N_j \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket\},$$

et

$$\tilde{V}_{\mathbf{h}} = V_{\mathbf{h}} \cap \tilde{V}.$$

On peut donc déduire la formulation variationnelle discrète de (3.19). Dans cette formulation variationnelle discrète, interviennent notamment les formes bilinéaires suivantes, liées aux opérateurs intégraux

$$d_{\pm}(\varphi_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^T \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}_{\mathbf{h}}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \alpha}(x-a)} e^{i\xi(\pm a)} \psi_{\mathbf{h}}(x) d\xi dx,$$

où $\varphi_{\mathbf{h}}$ et $\psi_{\mathbf{h}}$ sont des fonctions polynomiales de degré k par morceaux. Ces intégrales ne peuvent pas être calculées explicitement même si $\varphi_{\mathbf{h}}$ et $\psi_{\mathbf{h}}$ sont polynomiales par morceaux. Nous les approchons en tronquant l'intégrale de Fourier

$$d_{\pm}(\varphi_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) \approx d_{\pm, \hat{T}}(\varphi_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^T \int_{-\hat{T}}^{\hat{T}} \hat{\varphi}_{\mathbf{h}}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \alpha}(x-a)} e^{i\xi(\pm a)} \psi_{\mathbf{h}}(x) d\xi dx.$$

La solution de la formulation variationnelle discrète approchée associée est notée

$$\Phi_{\mathbf{h}, \hat{T}} = (\varphi_{j,\mathbf{h}, \hat{T}})_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket}.$$

Dans [18], il est montré que si $\varphi_j \in H^s(\Gamma_j)$ pour tout $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ avec $s > 0$, alors il existe une constante C telle que

$$\|\Phi - \Phi_{\mathbf{h}, \hat{T}}\|_V \leq \frac{C}{\hat{T}^s} + C e^{-C_{\alpha} T} + C h^{\min(s, k+1)},$$

où C_{α} est une constante qui dépend de α . Enfin, en pratique les intégrales même tronquées en Fourier ne peuvent pas être calculées. Il faut utiliser une formule de quadrature

$$d_{\pm}(\varphi_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) \approx d_{\pm, \hat{T}, N_{\xi}}(\varphi_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{q=1}^{N_{\xi}} \int_a^T w_q \hat{\varphi}_{\mathbf{h}}(\xi_q) e^{-\sqrt{\xi_q^2 + \alpha}(x-a)} e^{i\xi_q(\pm a)} \psi_{\mathbf{h}}(x) dx.$$

L'analyse numérique après cette étape est encore une question ouverte.

Pour le couplage avec un problème intérieur, il suffit de coupler les éléments de discrétisation précédents et introduire l'espace d'approximation $W_h \subset H^1(\Omega_b)$ qui est construit à partir d'éléments finis de type Lagrange de degré k . Pour discrétiser la forme bilinéaire associée à l'opérateur DtN, il suffit d'utiliser aussi une troncature dans l'intégrale de Fourier et une formule de quadrature.

3.5 Extensions de la méthode HsM

Évidemment, d'autres méthodes peuvent être utilisées pour résoudre le problème coercif présenté dans ce chapitre (les PML, les équations intégrales, ...). La méthode HsM sert à traiter des problèmes plus difficiles :

- **Milieux anisotropes** : L'opérateur $-\Delta \cdot$ est remplacé par $-\text{div}(A\nabla \cdot)$ dans le problème modèle (3.1), avec A une matrice définie positive modélisant l'anisotropie du milieu. Ce qui change c'est que les opérateurs $D_{j,j\pm 1}$ et Λ_j vont dépendre de j .
- **Équation des ondes élastiques dans un milieu isotrope ou anisotrope** : La différence est dans la résolution des problèmes de demi-espace où après avoir appliqué la transformée de Fourier, la résolution de la simple EDO (3.4) est remplacée par la résolution d'un système d'EDO couplées.
- **Plaques élastiques** : Dans [75], l'EDO est remplacée par un problème de demi-guide élastique anisotrope paramétré par la variable de Fourier. Chaque problème de demi-guide est résolu par une décomposition modale.
- **Milieux stratifiés** : La méthode HsM a déjà été utilisée dans [66] pour traiter des jonctions 2D de guides d'ondes ouverts. Il faut remplacer la transformée de Fourier par une transformée de Fourier généralisée (voir [20])
- **Milieux périodiques** : Il faut utiliser la transformée de Floquet-Bloch à la place de la transformée de Fourier et la résolution des EDO est remplacée par la résolution de problèmes de demi-guide paramétrés par la variable de Floquet.
- **Équation des ondes en régime harmonique (sans dissipation)** : D'un point de vue numérique, la méthode appliquée naïvement au cas $\alpha = -\omega^2$ et en choisissant la solution sortante dans chaque demi-espace, marche très bien. Cependant, il y a des difficultés pour justifier théoriquement la méthode. La difficulté vient du fait que le problème n'est pas coercif. La définition même de la solution physique dans les cas évoqués plus haut est délicate. Mais dans le cas des ondes scalaires, il est bien connu que la condition de Sommerfeld [73] permet de définir la solution. Des premiers résultats théoriques sur la méthode HsM dans ce cas ont été obtenus dans [75; 17].

CHAPITRE 4

La méthode des demi-espaces raccordés en régime temporel

Nous étudions dans ce chapitre l'extension de la méthode HsM pour des problèmes temporels. Dans [33; 34], le cas des milieux périodiques a été en partie traité et notre méthode s'inscrit dans la continuité de ce travail. Nous nous concentrons sur l'équation des ondes scalaires dans un milieu homogène et isotrope (à des perturbations locales près) même si évidemment d'autres méthodes de type PML par exemple ou CLA marchent dans ce cas et sont plus simples. Mais comme nous le montre le chapitre précédent, nous savons que cette méthode va marcher dans des situations où les méthodes classiques ne marchent pas. Citons l'exemple de milieux périodiques, des équations de l'élastodynamique en milieux anisotropes ainsi que celles dans des plaques isotropes ou anisotropes.

Ce travail est réalisé en collaboration avec Maryna Kachanovska.

Sommaire

4.1	Problème modèle	107
4.2	Formulation de la méthode HsM à l'extérieur d'un carré pour le problème continu	108
4.2.1	Notations	109
4.2.2	Principe de la méthode	110
4.2.3	Expression analytique de u_i dans Ω_i , pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$	110
4.2.4	Relations de compatibilité des représentations de la solution	112
4.2.5	Caractère bien posé	114
4.2.6	Conclusion	116
4.3	Formulation de la méthode HsM à l'extérieur d'un carré pour le problème semi-discrétisé en temps	117
4.3.1	Semi-discrétisation en temps	117
4.3.2	Expression analytique de u_i^n dans Ω_i , pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$	118
4.3.3	Relations de compatibilité	120
4.3.4	Formulation variationnelle du problème des traces	121
4.3.5	Caractère bien posé	122
4.4	Aspects numériques et algorithmiques	125
4.4.1	Discrétisation en espace de la méthode HsM semi-discrète	125
4.4.2	Algorithme de résolution de la méthode HsM discrète en temps et en espace	126
4.5	Résultats numériques	128

4.5.1	Validation qualitative de la méthode	128
4.5.2	Validation quantitative de la méthode	132
4.6	Résolution de la méthode HsM en utilisant une transformée en Z	136
4.6.1	Principe	136
4.6.2	Discrétisation	137
4.6.3	Algorithme	138
4.7	Couplage de la méthode HsM avec la méthode des éléments finis	138
4.7.1	Semi-discrétisation en temps	139
4.7.2	Reformulation du problème en fonction de $\{u_b^n, (\varphi_j^n)_{j=0..3}\}$	140
4.7.3	Formulation variationnelle	140
4.7.4	Résultats numériques	141
4.8	Cas de milieu anisotrope	141
4.8.1	Semi-discrétisation en temps	142
4.8.2	Expression analytique de u_i^n dans Ω_i , pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$	142
4.8.3	Relations de compatibilité et formulation variationnelle	144
4.8.4	Récapitulation	145
4.8.5	Résultats numériques	145

4.1 Problème modèle

Nous cherchons à résoudre l'équation des ondes en régime temporel

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, t \in \mathbb{R}^+, \\ \text{Condition aux limites} & \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^{(0)}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = u^{(1)}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où \mathcal{O} un domaine borné de \mathbb{R}^2 . Le terme source f et les données initiales $(u^{(0)}, u^{(1)})$ sont supposés à support compact. Soit $a > 0$ tel que $\mathcal{O} \subset (-a, a)^2$ et les supports de la source ainsi que des données initiales de notre problème sont inclus dans $(-a, a)^2$. Nous introduisons comme au chapitre précédent

- $\Omega_a = (-a, a)^2 \setminus \mathcal{O}$,
- $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (-a, a)^2$: le domaine extérieur (zone saine).

Notre objectif est d'étendre la méthode HsM présentée au chapitre précédent à ce problème d'évolution. Une première idée est de l'appliquer sur le problème (4.1), d'obtenir des équations de compatibilité espace-temps puis de discrétiser en espace et en temps ces équations (voir la section 4.2). Cependant, nous allons voir qu'il serait assez délicat de construire des discrétisations stables de ces équations (voir la sous-section 4.2.6). Pour assurer la stabilité, nous avons choisi de discrétiser d'abord en temps le problème (4.1) puis d'appliquer la méthode HsM au problème semi-discret en temps (voir la section 4.3). Nous allons voir que la méthode marche bien mais qu'elle est assez coûteuse si on la compare aux PML, mais évidemment généralisable au cas où les PML ne marchent pas. Une première piste d'amélioration serait d'utiliser la transformée en Z, ceci est présenté à la section 4.6.

Afin de se concentrer tout d'abord sur la méthode HsM, nous traitons un problème posé à l'extérieur du carré $(-a, a)^2$. Dans un second temps, comme dans le cas stationnaire, nous décrivons comment coupler cette méthode à une méthode éléments finis.

Plus précisément, dans ce chapitre, nous allons décrire

- (1) **La méthode HsM à l'extérieur d'un carré appliquée à un problème continu** : Dans un premier temps, nous nous intéressons à la résolution du problème (4.1) posé dans le domaine extérieur Ω (ce qui revient à considérer $\mathcal{O} = (-a, a)^2$), sans terme source f et avec des conditions initiales nulles ($u^{(0)} = u^{(1)} = 0$) et des conditions de Dirichlet non-homogènes imposées sur le bord. Nous appliquons la méthode HsM pour ce problème. Nous expliquons la difficulté d'assurer la stabilité du problème discret, avec cette démarche. La méthode (1) est décrite dans la section 4.2.
- (2) **La méthode HsM à l'extérieur d'un carré appliquée à un problème semi-discret en temps** : Nous cherchons à résoudre le même problème mais nous commençons par le semi-discrétiser en temps. Ensuite, nous passons à l'application de la méthode HsM au problème semi-discret en temps. En d'autres termes, nous exprimons la solution à chaque pas de temps et dans chaque demi-plan en fonction de sa trace sur le bord du demi-plan à cet instant ainsi qu'aux instants précédents. Les représentations de la solution à chaque pas de temps et dans chaque demi-plan doivent être compatibles dans les intersections des demi-plans. Par conséquent, nous obtenons une formulation qui couple les traces de la solution sur les bords des demi-plans

à chaque pas de temps, en fonction des mêmes quantités aux instants précédents. Nous étudierons en particulier le coût de calcul de la méthode et nous montrons qu'il augmente de manière quadratique en fonction du pas de temps à cause d'un produit de convolution discret. Enfin, nous discrétisons en espace le système à résoudre. La méthode (2) est décrite dans les sections 4.3, 4.4 et 4.5.

- (3) **Couplage de la méthode HsM avec la méthode des éléments finis** : Nous cherchons à calculer cette fois-ci la solution du problème (4.1). Nous prenons en compte ces perturbations en utilisant la méthode des éléments finis (EF) dans une zone bornée délimitant les perturbations. En s'inspirant de l'approche précédente, notre démarche consiste d'abord à semi-discrétiser le problème en temps puis à coupler la méthode HsM avec la méthode des éléments finis, à chaque pas de temps. Ainsi, nous obtenons un problème qui couple les 4 traces de la solution sur les bords des demi-plans avec la représentation EF de la solution dans le domaine borné entourant les perturbations, à chaque pas de temps, en fonction des mêmes quantités aux instants précédents. Le couplage de la méthode HsM avec la méthode des éléments finis est détaillé dans la section 4.7.
- (4) **Extension de la méthode HsM à un milieu anisotrope** : Tout ce qui est fait dans ce chapitre s'étend de manière évidente à l'équation des ondes

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = f, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+$$

où ρ et μ sont bornés inférieurement par des constantes strictement positives, appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et sont des perturbations compactes de fonctions constantes. Notons aussi que comme dans le cas stationnaire, la méthode est construite pour s'étendre à l'équation des ondes en milieu anisotrope (voir la section 4.8).

4.2 Formulation de la méthode HsM à l'extérieur d'un carré pour le problème continu

Nous cherchons la solution du problème extérieur suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (4.2)$$

Nous supposons que $g \in C^2(\mathbb{R}^+; H^{1/2}(\partial\Omega))$ telle que $g(\cdot, t=0) = \frac{\partial g}{\partial t}(\cdot, t=0) = 0$. Nous rappelons un résultat de caractère bien posé de ce problème qui est assez classique mais pas évident à cause de la condition aux bords non homogène. Nous donnons la preuve également dans l'Annexe 4.8.5. Nous définissons

$$H^1(\Delta, \Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

Proposition 16. *Le problème (4.2) admet une unique solution forte dans $C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\Delta, \Omega))$ (voir [36], [77] et [67]). Pour tout $t > 0$, nous avons*

les estimations

$$\left\| \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C(t+1) \sum_{k=0}^2 \sup_{s \in [0, t]} \left\| \frac{\partial^k g}{\partial s^k}(\cdot, s) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad (4.3)$$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(t^2 + 1) \sum_{k=0}^2 \sup_{s \in [0, t]} \left\| \frac{\partial^k g}{\partial s^k}(\cdot, s) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad (4.4)$$

où C est une constante.

4.2.1 Notations

Dans cette sous-section, nous rappelons les notations déjà introduites dans 3.2.1. Le domaine Ω est l'union de 4 demi-plans Ω_j (avec $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$) s'appuyant sur les 4 bords du carré $(-a, a)^2$. La numérotation des demi-plans est choisie dans le sens trigonométrique en partant du côté droit d'indice $j = 0$, avec un angle de rotation de $\frac{\pi}{2}$ pour passer d'un demi-plan au demi-plan suivant. En utilisant un système de coordonnées locales dans chaque demi-plan Ω_j

$$\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & \sin \theta_j \\ -\sin \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ avec } \theta_j = \frac{j\pi}{2},$$

nous définissons le domaine Ω_j

$$\Omega_j = \{x_j \geq a\} \times \{y_j \in \mathbb{R}\}.$$

Nous notons Γ_j sa frontière

$$\Gamma_j = \{x_j = a\} \times \{y_j \in \mathbb{R}\},$$

que nous décomposons en une partie intérieure

$$\Gamma_j^a = \{x_j = a\} \times \{y_j \in [-a, a]\},$$

et en une partie extérieure formée de

$$\Gamma_j^+ = \{x_j = a\} \times \{y_j > a\} \text{ et } \Gamma_j^- = \{x_j = a\} \times \{y_j < -a\},$$

qui représentent les demi-droites externes de Γ_j situées de part et d'autre de Γ_j^a . Remarquons que l'union des 4 segments Γ_j^a n'est rien d'autre que la frontière du carré $(-a, a)^2$, que nous notons

$$\Gamma^a = \bigcup_{j=0}^3 \Gamma_j^a.$$

Par ailleurs, nous introduisons les notations suivantes, pour tout $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$

- $u_j := u|_{\Omega_j}$,
- $\varphi_j := u|_{\Gamma_j}$.

La représentation schématique de la décomposition du domaine extérieur en 4 demi-plans est illustrée dans la Figure 3.1.

4.2.2 Principe de la méthode

Nous rappelons que l'idée clé de la méthode consiste à calculer analytiquement la solution dans chaque demi-plan, à partir de sa trace sur le bord, en utilisant la transformée de Fourier. Les différentes représentations de la solution doivent être compatibles dans les intersections des demi-plans. Ainsi, nous obtenons un système d'équations couplant les 4 traces de la solution sur les bords des demi-plans.

4.2.3 Expression analytique de u_i dans Ω_i , pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$

Nous rappelons que u_j est la restriction de la solution u à Ω_j donc elle satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \Delta u_j = 0 & \text{dans } \Omega_j \times \mathbb{R}^+, \\ u_j(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega_j, \\ \frac{\partial u_j}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega_j, \\ u_j|_{\Gamma_j} = \varphi_j & \text{sur } \Gamma_j \times \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Dans cette section, nous allons chercher une expression de u_j en fonction de φ_j . L'idée est d'utiliser la transformée de Fourier de u_j dans la direction y_j pour $(x_j, t) \in (a, +\infty) \times \mathbb{R}^+$ définie par

$$\widehat{u}_j(x_j, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u_j(x_j, y_j, t) e^{-i\xi y_j} dy_j, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

En appliquant la transformée de Fourier au système (4.5) dans la direction y_j , nous obtenons le problème suivant pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 \widehat{u}_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}_j}{\partial x_j^2} + \xi^2 \widehat{u}_j = 0 & x_j > a, t \in \mathbb{R}^+, \\ \widehat{u}_j(\cdot, \xi, 0) = 0 & x_j > a, \\ \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial t}(\cdot, \xi, 0) = 0 & x_j > a, \\ \widehat{u}_j(x_j = a, \xi, t) = \widehat{\varphi}_j(\xi, t) & x_j = a, t \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Nous devons maintenant résoudre une EDP dans $(a, +\infty) \times \mathbb{R}^+$ paramétrée par la variable de Fourier ξ (dans le cas stationnaire nous rappelons qu'il fallait résoudre une EDO dans $(a, +\infty)$ (voir la sous-section 3.2.3)). Introduisons G_ξ la fonction de Green de l'EDP sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 G_\xi}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 G_\xi}{\partial x^2}(x, t) + \xi^2 G_\xi(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\ G_\xi(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial G_\xi}{\partial t}(x, 0) = \delta(x) & x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Pout tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction G_ξ s'écrit (voir [2])

$$G_\xi(x, t) = \frac{1}{2} H(t) H(t - |x|) J_0(\xi \sqrt{t^2 - x^2}), \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.8)$$

avec H la fonction de Heaviside et J_0 la fonction de Bessel. Nous remarquons que la fonction $G_\xi(x, t)$ est la transformée de Fourier dans la direction y de la fonction de Green $G(x, y, t)$ (voir [56]).

Proposition 17. La solution u_j du problème (4.5) s'exprime à partir de la fonction de Green G_ξ grâce à une représentation intégrale

$$u_j(x_j, y_j, t) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \frac{\partial G_\xi}{\partial x}(x_j - a, t - s) \widehat{\varphi}_j(\xi, s) e^{i\xi y_j} ds d\xi, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket. \quad (4.9)$$

Démonstration. Notons tout d'abord

$$\widehat{u}_j(x_j, t) = \widehat{v}_j(x_j - a, t), \quad \forall x_j \geq a, t \geq 0, \quad (4.10)$$

où \widehat{v}_j est solution de (4.6) avec $a = 0$. Nous allons exprimer \widehat{v}_j grâce à une représentation intégrale à partir de la fonction de Green G_ξ^D du problème de demi-ligne satisfaisant une condition de Dirichlet en $x = 0$. Plus précisément, $G_\xi^D(\cdot, \cdot; x_j)$ vérifie pour presque tout $x_j \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 G_\xi^D}{\partial t^2}(x, t; x_j) - \frac{\partial^2 G_\xi^D}{\partial x^2}(x, t; x_j) + \xi^2 G_\xi^D(x, t; x_j) = 0 & x \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}^+, \\ G_\xi^D(x, 0; x_j) = 0 & x \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial G_\xi^D}{\partial t}(x, 0; x_j) = \delta(x - x_j) & x \in \mathbb{R}^+, \\ G_\xi^D(0, t; x_j) = 0 & t \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (4.11)$$

La fonction $G_\xi^D(\cdot, \cdot; x_j)$ peut être construite à partir de la fonction de Green G_ξ . En effet, pour presque tout $x_j \geq 0$, la fonction de Green G_ξ^D est donnée par

$$G_\xi^D(x, t; x_j) = G_\xi(|x - x_j|, t) - G_\xi(|x + x_j|, t), \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+.$$

En multipliant (4.11) par \widehat{v}_j et en intégrant en espace sur $(0, +\infty)$ et en temps sur $(0, t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 G_\xi^D}{\partial s^2}(x, t - s; x_j) \widehat{v}_j(x, \xi, s) dx ds - \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 G_\xi^D}{\partial x^2}(x, t - s; x_j) \widehat{v}_j(x, \xi, s) dx ds \\ + \xi^2 \int_0^t \int_0^{+\infty} G_\xi^D(x, t - s; x_j) \widehat{v}_j(x, \xi, s) dx ds = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

En utilisant l'équation vérifiée par \widehat{v}_j dans (4.6) (avec $a = 0$) multipliée par G_ξ^D , la relation (4.12) se réécrit

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 G_\xi^D}{\partial s^2}(x, t - s; x_j) \widehat{v}_j(x, \xi, s) ds dx - \int_0^t \int_0^{+\infty} G_\xi^D(x, t - s; x_j) \frac{\partial^2 \widehat{v}_j}{\partial s^2}(x, \xi, s) ds dx \\ - \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 G_\xi^D}{\partial x^2}(x, t - s; x_j) \widehat{v}_j(x, \xi, s) dx ds + \int_0^t \int_0^{+\infty} G_\xi^D(x, t - s; x_j) \frac{\partial^2 \widehat{v}_j}{\partial x^2}(x, \xi, s) dx ds \\ = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Compte tenu des conditions initiales vérifiées par \widehat{v}_j et G_ξ^D , nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial^2 G_\xi^D}{\partial s^2}(x, t - s; x_j) \widehat{v}_j(x, \xi, s) ds - \int_0^t G_\xi^D(x, t - s; x_j) \frac{\partial^2 \widehat{v}_j}{\partial s^2}(x, \xi, s) ds = \\ \widehat{v}_j(x_j, \xi, t), \quad \forall x \in (0, +\infty). \end{aligned} \quad (4.14)$$

D'un autre côté, nous avons

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 G_\xi^D}{\partial x^2}(x, t-s; x_j) \widehat{v}_j(x, \xi, s) dx - \int_0^{+\infty} G_\xi^D(x, t-s; x_j) \frac{\partial^2 \widehat{v}_j}{\partial x^2}(x, \xi, s) dx, \\
 &= -\frac{\partial G_\xi^D}{\partial x}(0, t-s; x_j) \widehat{v}_j(0, \xi, s) + G_\xi^D(0, t-s; x_j) \frac{\partial \widehat{v}_j}{\partial x}(0, \xi, s), \\
 &= -\frac{\partial G_\xi^D}{\partial x}(0, t-s; x_j) \widehat{v}_j(0, \xi, s).
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

En injectant les relations (4.14) et (4.15) dans (4.13), nous obtenons

$$\widehat{v}_j(x_j, \xi, t) = \int_0^t \frac{\partial G_\xi^D}{\partial x}(0, t-s; x_j) \widehat{\varphi}_j(\xi, s) ds, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket. \tag{4.16}$$

Enfin, si x proche de 0, $x \geq 0$ et $x_j \geq 0$ alors $|x - x_j| = -x + x_j$ et $|x + x_j| = x + x_j$. Par conséquent

$$\frac{\partial G_\xi^D}{\partial x}(0, t-s; x_j) = -2 \frac{\partial G_\xi}{\partial x}(x_j, t-s).$$

Nous avons finalement

$$\widehat{v}_j(x_j, \xi, t) = -2 \int_0^t \frac{\partial G_\xi}{\partial x}(x_j, t-s) \widehat{\varphi}_j(\xi, s) ds, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket.$$

En utilisant la notation (4.10), nous obtenons

$$\widehat{u}_j(x_j, \xi, t) = -2 \int_0^t \frac{\partial G_\xi}{\partial x}(x_j - a, t-s) \widehat{\varphi}_j(\xi, s) ds, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket. \tag{4.17}$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse au (4.17), nous arrivons au résultat (4.9). \square

Remarque 11. La relation (4.9) n'est rien d'autre qu'une représentation intégrale à partir d'un potentiel retardé de type double couche (voir [70]).

Plus généralement, la solution notée $U_j(\varphi)$ du problème de demi-plan (4.5) et de trace φ sur le bord est donnée par

$$[U_j(\varphi)](x_j, y_j, t) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \frac{\partial G_\xi}{\partial x}(x_j - a, t-s) \widehat{\varphi}(\xi, s) e^{i\xi y_j} ds d\xi, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket. \tag{4.18}$$

Nous avons bien évidemment

$$u_j = U_j(\varphi_j), \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket.$$

4.2.4 Relations de compatibilité des représentations de la solution

Nous avons donc exprimé les représentations de la solution dans les 4 demi-plans en fonction des traces sur les bords. Toutes ces représentations doivent coïncider là où elles coexistent (voir Figure 3.2), ce qui se traduit par la relation suivante

$$u_j = u_{j\pm 1} \quad \text{dans } \Omega_j \cap \Omega_{j\pm 1} \times \mathbb{R}^+, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \tag{4.19}$$

impliquant en particulier

$$u_j = u_{j\pm 1} \quad \text{sur } \partial(\Omega_j \cap \Omega_{j\pm 1}) \times \mathbb{R}^+, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \tag{4.20}$$

Nous avons montré dans la sous-section 3.2.4 du chapitre précédent que la relation de compatibilité (4.20) s'exprime en variables φ_j

$$\varphi_{j\pm 1} = U_j(\varphi_j) \quad \text{sur } \Omega_j \cap \Gamma_{j\pm 1} \times \mathbb{R}^+, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (4.21)$$

Le principe pour obtenir ces relations de compatibilité est donc le même que dans le cas stationnaire. Précisons que les différences sont que les fonctions dépendent du temps et les représentations des restrictions u_j font intervenir une convolution en temps. Nous allons préciser, comme dans le cas stationnaire (voir la sous-section 3.2.4), comment s'écrit la relation (4.21) pour $j = 0$ (voir Figure 3.3). Sur $\Omega_0 \cap \Gamma_1$, φ_1 s'exprime en fonction de la variable spatiale y_1 et $U_0(\varphi_0)$ s'écrit en fonction de x_0 . Or tout point de $\Omega_0 \cap \Gamma_1$ peut être représenté à partir des coordonnées locales $(x_0, y_0 = a)$ ou $(x_1 = a, y_1)$ et nous avons

$$y_1 = -x_0 \quad \text{sur } \Omega_0 \cap \Gamma_1.$$

De même, sur $\Omega_0 \cap \Gamma_3$, φ_3 s'exprime en fonction de la variable spatiale y_3 et $U_0(\varphi_0)$ s'écrit en fonction de x_0 . Or tout point de $\Omega_0 \cap \Gamma_3$ peut être représenté à partir des coordonnées locales $(x_0, y_0 = -a)$ ou $(x_3 = a, y_3)$ et nous avons

$$y_3 = x_0 \quad \text{sur } \Omega_0 \cap \Gamma_3.$$

Par conséquent, les relations de compatibilité (4.21) s'écrivent dans Ω_0

$$\begin{cases} \varphi_1(-x_0, t) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \frac{\partial G_\xi}{\partial x}(x_0 - a, t - s) \widehat{\varphi}_0(\xi, s) e^{i\xi a} ds d\xi, \\ \varphi_3(x_0, t) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \frac{\partial G_\xi}{\partial x}(x_0 - a, t - s) \widehat{\varphi}_0(\xi, s) e^{-i\xi a} ds d\xi, \end{cases} \quad \forall x_0 \geq a, t \geq 0.$$

Nous introduisons l'opérateur $D_{j,j\pm 1}^{(t)}$ défini pour tout $\psi \in C^0(\mathbb{R}^+; H^{1/2}(\Gamma_j))$ par

$$D_{j,j\pm 1}^{(t)} \psi = U_j(\psi)|_{\Omega_j \cap \Gamma_{j\pm 1}}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad (4.22)$$

ou plus précisément

$$\begin{aligned} \left[D_{j,j\pm 1}^{(t)} \psi \right] (x_j, t) = \\ -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \frac{\partial G_\xi}{\partial x}(x_j - a, t - s) \widehat{\psi}(\xi, s) e^{i\xi(\pm a)} ds d\xi, \quad \forall x_j \geq a, \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Pour un milieu isotrope, le nombre d'opérateurs différents se réduit à deux définis par

$$\left[D_{\pm}^{(t)} \psi \right] (x, t) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \frac{\partial G_\xi}{\partial x}(x - a, t - s) \widehat{\psi}(\xi, s) e^{i\xi(\pm a)} ds d\xi, \quad \forall x \geq a.$$

Cependant, ce n'est plus le cas pour un milieu anisotrope.

Nous rappelons la condition aux limites vérifiée par u dans le système (4.2) qui se réécrit

$$\varphi_j = g \quad \text{sur } \Gamma_j^a \times \mathbb{R}^+. \quad (4.24)$$

Nous rappelons qu'afin d'alléger l'écriture, nous utilisons la notation \prod (introduite dans le chapitre précédent) pour désigner $\prod_{j=0}^3$.

Finalement, en utilisant (4.21), (4.22) et (4.24), le problème satisfait par les traces s'écrit : trouver $(\varphi_j)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket} \in \prod C^1(\mathbb{R}^+; H^{1/2}(\Gamma_j))$ telles que $\forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nous avons

$$\begin{cases} \varphi_j = D_{j-1, j}^{(t)} \varphi_{j-1} & \text{sur } \Omega_{j-1} \cap \Gamma_j \times \mathbb{R}^+, \\ \varphi_j = D_{j+1, j}^{(t)} \varphi_{j+1} & \text{sur } \Omega_{j+1} \cap \Gamma_j \times \mathbb{R}^+, \\ \varphi_j = g & \text{sur } \Gamma_j^a \times \mathbb{R}^+, \\ \varphi_j(\cdot, t=0) = \partial_t \varphi_j(\cdot, t=0) = 0 & \text{sur } \Gamma_j. \end{cases} \quad (4.25)$$

De manière similaire au cas stationnaire, le cadre fonctionnel $\prod C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Gamma_j))$ est utilisé plutôt que $\prod C^1(\mathbb{R}^+; H^{1/2}(\Gamma_j))$.

Nous introduisons

$$\tilde{\varphi}_j = \begin{cases} \varphi_j & \text{sur } (\Gamma_j^- \cup \Gamma_j^+) \times \mathbb{R}^+, \\ 0 & \text{sur } \Gamma_j^a \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket,$$

et

$$\tilde{g} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \bigcup_{j=0}^3 (\Gamma_j^- \cup \Gamma_j^+) \times \mathbb{R}^+, \\ g & \text{sur } \bigcup_{j=0}^3 \Gamma_j^a \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

de sorte que

$$\varphi_j = \tilde{\varphi}_j + \tilde{g}|_{\Gamma_j}, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket.$$

Ainsi, le problème (4.25) se réécrit en utilisant les inconnues $(\tilde{\varphi}_j)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket} \in \prod C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Gamma_j))$ sous la forme

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_j - (D_{j-1, j}^{(t)} \tilde{\varphi}_{j-1} + D_{j+1, j}^{(t)} \tilde{\varphi}_{j+1}) = D_{j-1, j}^{(t)} \tilde{g}|_{\Gamma_{j-1}} + D_{j+1, j}^{(t)} \tilde{g}|_{\Gamma_{j+1}}, & \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \\ \tilde{\varphi}_j(\cdot, t=0) = \partial_t \tilde{\varphi}_j(\cdot, t=0) = 0, \end{cases} \quad (4.26)$$

où les fonctions $D_{j\pm 1, j}^{(t)} \tilde{\varphi}_{j\pm 1}$ et $D_{j\pm 1, j}^{(t)} \tilde{g}|_{\Gamma_{j\pm 1}}$ sont prolongées par 0 pour être identifiées à des fonctions de $\Gamma_j \times \mathbb{R}^+$. Il est équivalent de considérer que les $\tilde{\varphi}_j \in C^1(\mathbb{R}; L^2(\Gamma_j))$ sont causales en temps c'est-à-dire $\tilde{\varphi}_j(\cdot, t) = 0$ pour tout $t \leq 0$.

4.2.5 Caractère bien posé

Nous rappelons qu'une fonction f est dite au plus exponentiellement croissante en temps s'il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$|f(t)| \leq e^{\beta t}.$$

Théorème 13. *Il existe une unique solution du problème (4.25) dans $\prod C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Gamma_j))$ causale en temps avec une croissance en temps qui est au plus exponentielle.*

Démonstration.

1. Existence

Nous venons de démontrer par construction que si

$$u \in C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\Delta, \Omega))$$

est la solution de (4.2), alors $\varphi_j = u|_{\Gamma_j}$ est la solution de (4.25) dans $C^1(\mathbb{R}^+; H^{1/2}(\Gamma_j))$. En utilisant les estimations (4.3) et (4.4) de u , nous avons pour tout $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$

$$\|\varphi_j(\cdot, t)\|_{H^{1/2}(\Gamma_j)} \leq C(1+t+t^2) \sum_{k=0}^2 \sup_{s \in [0, t]} \left\| \frac{\partial^k g}{\partial s^k}(\cdot, s) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

2. Unicité

Supposons que les $\varphi_j \in \prod C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Gamma_j))$ sont causales, satisfont le comportement

$$\|\varphi_j(\cdot, t)\|_{L^2(\Gamma_j)} \leq C e^{\beta t}, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad (4.27)$$

et vérifient

$$\begin{cases} \varphi_j = D_{j-1,j}^{(t)} \varphi_{j-1} & \text{sur } \Omega_{j-1} \cap \Gamma_j \times \mathbb{R}^+, \\ \varphi_j = D_{j+1,j}^{(t)} \varphi_{j+1} & \text{sur } \Omega_{j+1} \cap \Gamma_j \times \mathbb{R}^+, \\ \varphi_j = 0 & \text{sur } \Gamma_j^a \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (4.28)$$

Montrons que $\varphi_j = 0$, pour tout $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. Il suffit d'utiliser la transformée de Laplace (nous nous référons à [77] et [71] pour sa définition) pour se ramener à un problème stationnaire. Pour toute fonction ψ assez régulière, causale et vérifiant le comportement (4.27), la transformée de Laplace est définie par

$$\mathcal{L}\psi(p) = \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-pt} dt, \quad \forall p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > \beta.$$

En appliquant la transformée de Laplace à (4.28), nous obtenons pour tout $j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi_j(\cdot, p) = \mathcal{L}(D_{j-1,j}^{(t)} \varphi_{j-1})(\cdot, p) & \text{sur } \Omega_{j-1} \cap \Gamma_j, \forall p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > \beta, \\ \mathcal{L}\varphi_j(\cdot, p) = \mathcal{L}(D_{j+1,j}^{(t)} \varphi_{j+1})(\cdot, p) & \text{sur } \Omega_{j+1} \cap \Gamma_j, \forall p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > \beta, \\ \mathcal{L}\varphi_j(\cdot, p) = 0 & \text{sur } \Gamma_j^a, \forall p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > \beta. \end{cases} \quad (4.29)$$

De plus, pour tout $\psi \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Gamma_j))$, d'après la formule de Fubini et la propriété de la transformée de Laplace (la transformée de Laplace d'un produit de convolution est le produit des transformées de Laplace), nous avons pour tout $j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D_{j,j\pm 1}^{(t)} \psi)(x_j, p) &= \\ \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial(\mathcal{L}G_\xi)}{\partial x}(x_j - a, p) \mathcal{L}\widehat{\psi}(\xi, p) e^{i\xi(\pm a)} d\xi, & \quad \forall x_j \geq a, \forall p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > \beta, \end{aligned} \quad (4.30)$$

où $\mathcal{L}G_\xi$ est bien défini car G_ξ est borné en temps (voir l'expression (4.8)). Afin d'évaluer $\frac{\partial(\mathcal{L}G_\xi)}{\partial x}$, il suffit de revenir au problème (4.7) et lui appliquer la transformée de Laplace.

Nous obtenons alors pour presque tout $p \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(p) > \beta$

$$\left| -\frac{\partial^2 \mathcal{L}G_\xi}{\partial x^2} + (p^2 + \xi^2) \mathcal{L}G_\xi = \delta(x) \quad x \in \mathbb{R}. \right.$$

$\mathcal{L}G_\xi(x, p)$ n'est rien d'autre que la solution fondamentale de l'équation stationnaire précédente. Nous avons donc

$$\mathcal{L}G_\xi(x, p) = \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 + p^2}} e^{-\sqrt{\xi^2 + p^2} |x|}, \quad (4.31)$$

ce qui nous donne

$$\frac{\partial(\mathcal{L}G_\xi)}{\partial x}(x_j - a, p) = -\frac{1}{2} e^{-\sqrt{\xi^2 + p^2} (x_j - a)}, \quad \forall x_j \geq a. \quad (4.32)$$

En injectant (4.32) dans (4.30), nous obtenons

$$\mathcal{L}(D_{j,j\pm 1}^{(t)} \psi)(x_j, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}\widehat{\psi}(\xi, p) e^{-\sqrt{\xi^2+p^2}(x_j-a)} e^{i\xi(\pm a)} d\xi, \quad \forall x_j \geq a, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Rappelons l'expression (3.13) de l'opérateur $D_{j\pm 1, j}$ (introduit dans le cas stationnaire (voir la sous-section 3.2.4)) qui est dépendant d'un paramètre α et qui est défini pour toute fonction $\psi \in L^2(\Gamma_j)$ par

$$[D_{j,j\pm 1} \psi](x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2+\alpha}(x_j-a)} e^{i\xi(\pm a)} d\xi, \quad \forall x_j \geq a, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (4.33)$$

En utilisant (4.33), le problème (4.29) se réécrit pour tout $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi_j(\cdot, p) = D_{j-1, j}(\alpha(p)) \mathcal{L}\varphi_{j-1}(\cdot, p) & \text{sur } \Omega_{j-1} \cap \Gamma_j, \quad \forall p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > \beta, \\ \mathcal{L}\varphi_j(\cdot, p) = D_{j+1, j}(\alpha(p)) \mathcal{L}\varphi_{j+1}(\cdot, p) & \text{sur } \Omega_{j+1} \cap \Gamma_j, \quad \forall p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > \beta, \\ \mathcal{L}\varphi_j(\cdot, p) = 0 & \text{sur } \Gamma_j^a, \quad \forall p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > \beta, \end{cases} \quad (4.34)$$

avec

$$\alpha(p) = p^2.$$

Le problème (4.34) correspond au problème stationnaire (3.14) sans terme source et avec $(\mathcal{L}\varphi_j(\cdot, p))_j$ les inconnues. Le caractère bien posé de (3.14) implique

$$\mathcal{L}\varphi_j(\cdot, p) = 0, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad \forall p \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(p) > \beta.$$

La transformée de Laplace inverse de $\mathcal{L}\varphi_j$ s'écrit

$$[\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}\varphi_j)](\cdot, t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c-iR}^{c+iR} \mathcal{L}\varphi_j(\cdot, p) e^{pt} dp = \begin{cases} \varphi_j(\cdot, t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

où $c > \beta$. Par conséquent, nous déduisons

$$\varphi_j = 0 \quad \text{dans } C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Gamma_j)), \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$$

□

Remarque 12. *Il est possible de montrer l'unicité pour des inconnues qui sont des distributions tempérées en temps, à valeurs dans $L^2(\Gamma_j)$ en espace et causales, en raisonnant avec des fonctions test. Cependant, pour simplifier, nous supposons que les inconnues sont régulières en temps.*

La stabilité du problème (4.25) reste une question ouverte.

4.2.6 Conclusion

Nous ne sommes pas allés plus loin dans l'analyse du problème (4.25) car nous anticipions qu'il serait difficile de proposer une discrétisation stable de ce problème et plus précisément des opérateurs intégraux donnés dans (4.23). Les difficultés sont similaires à celles rencontrées dans la discrétisation des équations intégrales espace-temps (potentiels retardés) (voir [37; 38]). Nous ne disons pas que c'est impossible de proposer un schéma stable du problème (4.25) mais il est plus simple d'adapter la stratégie de la section suivante. D'autant plus que pour le cas des équations de l'élastodynamique dans des milieux anisotropes, la fonction de Green n'a pas d'expression simple et explicite.

4.3 Formulation de la méthode HsM à l'extérieur d'un carré pour le problème semi-discrétisé en temps

Comme il est délicat de discrétiser les équations de la méthode HsM obtenues à partir du problème continu, nous utilisons une stratégie introduite dans [6] et utilisée notamment dans [7] pour l'équation de Schrödinger mais aussi dans [14; 15; 16; 62] pour des équations ou des systèmes d'équations dispersives unidimensionnelles et enfin dans [33; 34] pour l'équation des ondes scalaires en milieux périodiques. Cette stratégie consiste à semi-discrétiser en temps le problème de départ et construire la méthode sur le problème semi-discret.

4.3.1 Semi-discrétisation en temps

Soit Δt le pas de discrétisation en temps. Nous rappelons la définition de la θ -approximation (introduite dans (1.60)) qui consiste à approcher $u(\cdot, n\Delta t)$ par $\{u^n\}_\theta(\cdot)$ avec

$$\{u^n\}_\theta = \theta u^{n+1} + (1 - 2\theta)u^n + \theta u^{n-1}. \quad (4.35)$$

L'inconnue devient alors $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dans la suite, nous notons pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $g^n(\cdot) := g(\cdot, n\Delta t)$,
- $\varphi_j^n := u^n|_{\Gamma_j}$,
- $u_j^n := u^n|_{\Omega_j}$.

Nous supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^n \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ avec $g^0 = g^1 = 0$. Le problème (4.2) semi-discrétisé par un θ -schéma s'écrit

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} - \Delta\{u^n\}_\theta = 0 & \text{dans } \Omega, n \in \mathbb{N}^*, \\ u^0 = u^1 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u^n = g^n & \text{sur } \partial\Omega, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.36)$$

Nous rappelons un résultat classique de caractère bien posé de ce problème mais il n'est pas évident de trouver dans la littérature exactement le résultat que nous cherchons. La preuve de la proposition ci-dessous se trouve en Annexe 4.8.5.

Proposition 18. *Pour tout $\theta \geq 1/4$, la solution du problème (4.36) vérifie les estimations pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\left\| \begin{array}{l} \|u^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ C(n^2\Delta t^2 + 1) \left(\sup_{t \in (0, n\Delta t)} \left\| \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \sup_{t \in (0, n\Delta t)} \|g(t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right), \end{array} \right. \quad (4.37)$$

$$\left\| \begin{array}{l} \|\nabla u^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \\ C(n\Delta t + 1) \left(\sup_{t \in (0, n\Delta t)} \left\| \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \sup_{t \in (0, n\Delta t)} \|g(t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right). \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Pour tout $\theta \geq 1/4$, le schéma implicite (4.36) est inconditionnellement stable. Nous supposons dans la suite que $\theta \geq 1/4$.

4.3.2 Expression analytique de u_i^n dans Ω_i , pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$

Nous introduisons les opérateurs dépendant de θ et Δt

$$\begin{aligned} A(\theta, \Delta t) : H^1(\Delta, \Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto u - \theta \Delta t^2 \Delta u, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} B(\theta, \Delta t) : H^1(\Delta, \Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto 2u + (1 - 2\theta) \Delta t^2 \Delta u, \end{aligned} \quad (4.40)$$

de sorte que notre problème (4.36) se réécrit

$$\begin{cases} A(\theta, \Delta t) u^{n+1} = B(\theta, \Delta t) u^n - A(\theta, \Delta t) u^{n-1} & \text{dans } \Omega, \ n \in \mathbb{N}^*, \\ u^0 = u^1 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u^n = g^n & \text{sur } \partial\Omega, \ n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.41)$$

Notre objectif est de calculer analytiquement la représentation de la solution dans le demi-plan Ω_j , pour tout $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, à chaque pas de temps. La restriction $(u_j^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ à Ω_j vérifie

$$\begin{cases} A(\theta, \Delta t) u_j^{n+1} = B(\theta, \Delta t) u_j^n - A(\theta, \Delta t) u_j^{n-1} & \text{dans } \Omega_j, \ n \in \mathbb{N}^*, \\ u_j^0 = u_j^1 = 0 & \text{dans } \Omega_j, \\ u_j^n = \varphi_j^n & \text{sur } \Gamma_j, \ n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.42)$$

En appliquant la transformée de Fourier dans la direction y_j pour le problème (4.42), nous obtenons

$$\begin{cases} \widehat{A}(\theta, \Delta t) \widehat{u}_j^{n+1} = \widehat{B}(\theta, \Delta t) \widehat{u}_j^n - \widehat{A}(\theta, \Delta t) \widehat{u}_j^{n-1} & \forall x_j \geq a, \ \xi \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}^*, \\ \widehat{u}_j^0 = \widehat{u}_j^1 = 0 & \forall x_j \geq a, \ \xi \in \mathbb{R}, \\ \widehat{u}_j^n(x_j = a, \xi) = \widehat{\varphi}_j^n(\xi) & \forall \xi \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (4.43)$$

où les opérateurs $\widehat{A}(\theta, \Delta t)$ et $\widehat{B}(\theta, \Delta t)$ sont définis pour tout $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}; H^1([a, +\infty[))$

$$\widehat{A}(\theta, \Delta t) : \widehat{u} \longmapsto \widehat{u} - \theta \Delta t^2 \partial_x^2 \widehat{u} + \theta \Delta t^2 \xi^2 \widehat{u}, \quad (4.44)$$

$$\widehat{B}(\theta, \Delta t) : \widehat{u} \longmapsto 2\widehat{u} + (1 - 2\theta) \Delta t^2 \partial_x^2 \widehat{u} - (1 - 2\theta) \Delta t^2 \xi^2 \widehat{u}. \quad (4.45)$$

La difficulté du problème (4.43) est que le second membre n'est pas nul (sauf pour $n = 1$). En effet, il est facile de calculer la solution du système (4.43) pour $n = 1$, qui s'écrit

$$\widehat{u}_j^2(x_j, \xi) = \widehat{\varphi}_j^2(\xi) e^{-\sqrt{\frac{1}{\theta \Delta t^2} + \xi^2} (x_j - a)}. \quad (4.46)$$

Pour $n > 1$, le second membre dépend de la solution aux instants précédents. Par récurrence, nous allons pouvoir dégager une structure de la solution.

Définition 1. *Nous introduisons une famille particulière de fonctions $(\widehat{X}^n)_{n \geq -2}$ que nous appelons la famille de fonctions canoniques dans la suite. Cette famille vérifie pour tous $x \geq a$ et $\xi \in \mathbb{R}$*

$$\begin{cases} \widehat{A}(\theta, \Delta t) \widehat{X}^{n+1} = \widehat{B}(\theta, \Delta t) \widehat{X}^n - \widehat{A}(\theta, \Delta t) \widehat{X}^{n-1} & n \geq -1, \\ \widehat{X}^n(x = a, \xi) = \delta_{n,0} & n \in \mathbb{N}, \\ \widehat{X}^{-1} = 0 \text{ et } \widehat{X}^{-2} = 0, & \end{cases} \quad (4.47)$$

avec $\delta_{n,0}$ le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $n = 0$ et 0 sinon.

Pour tous $x \geq a$ et $\xi \in \mathbb{R}$, les fonctions \widehat{X}^0 et \widehat{X}^1 ont pour expressions

$$\widehat{X}^0(x, \xi) = e^{-\sqrt{\frac{1}{\theta\Delta t^2} + \xi^2} (x-a)}, \quad (4.48a)$$

$$\widehat{X}^1(x, \xi) = \frac{(x-a)}{2\theta^2\Delta t^2\sqrt{\frac{1}{\theta\Delta t^2} + \xi^2}} e^{-\sqrt{\frac{1}{\theta\Delta t^2} + \xi^2} (x-a)}. \quad (4.48b)$$

L'introduction de cette famille de fonctions nous permet d'établir la structure de la famille de solutions $(\widehat{u}_j^n)_{j=0..3}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et de mettre en évidence un produit de convolution discret.

Proposition 19. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, les expressions analytiques des représentations de la solution u^n dans les quatre demi-plans s'écrivent*

$$u_j^n(x_j, y_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=2}^n \int_{\mathbb{R}} \widehat{X}^{n-k}(x_j, \xi) \widehat{\varphi}_j^k(\xi) e^{i\xi y_j} d\xi, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket. \quad (4.49)$$

Démonstration. Commençons par montrer par récurrence la relation

$$\widehat{u}_j^n(x_j, \xi) = \sum_{k=2}^n \widehat{X}^{n-k}(x_j, \xi) \widehat{\varphi}_j^k(\xi) \quad \forall x_j \geq a, \xi \in \mathbb{R}, n \geq 2. \quad (4.50)$$

En utilisant (4.48a) et (4.46), il est facile de voir que la formule (4.50) est vraie pour $n = 2$. Supposons maintenant que (4.50) est vérifiée au rang n . Montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$. En remplaçant \widehat{u}_j^n et \widehat{u}_j^{n-1} dans (4.43) par leurs expressions données par (4.50), nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned} \widehat{A}(\theta, \Delta t) \widehat{u}_j^{n+1}(x_j, \xi) &= \widehat{B}(\theta, \Delta t) \sum_{k=2}^n \widehat{X}^{n-k}(x_j, \xi) \widehat{\varphi}_j^k(\xi) \\ &\quad - \widehat{A}(\theta, \Delta t) \sum_{k=2}^{n-1} \widehat{X}^{n-1-k}(x_j, \xi) \widehat{\varphi}_j^k(\xi) \quad \forall x_j \geq a, \xi \in \mathbb{R}, n \geq 2, \end{aligned}$$

qui se réécrit

$$\begin{aligned} \widehat{A}(\theta, \Delta t) \widehat{u}_j^{n+1}(x_j, \xi) &= \sum_{k=2}^{n-1} \left(\widehat{B}(\theta, \Delta t) \widehat{X}^{n-k}(x_j, \xi) - \widehat{A}(\theta, \Delta t) \widehat{X}^{n-1-k}(x_j, \xi) \right) \widehat{\varphi}_j^k(\xi) \\ &\quad + \widehat{B}(\theta, \Delta t) \widehat{X}^0(x_j, \xi) \widehat{\varphi}_j^n(\xi) \quad \forall x_j \geq a, \xi \in \mathbb{R}, n \geq 2. \end{aligned}$$

Ensuite en utilisant les équations (4.47) vérifiées par \widehat{X}^{n+1-k} et \widehat{X}^1 , nous obtenons

$$\begin{aligned} \widehat{A}(\theta, \Delta t) \widehat{u}_j^{n+1}(x_j, \xi) &= \widehat{A}(\theta, \Delta t) \widehat{X}^1(x_j, \xi) \widehat{\varphi}_j^n(\xi) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n-1} \widehat{A}(\theta, \Delta t) \widehat{X}^{n+1-k}(x_j, \xi) \widehat{\varphi}_j^k(\xi) \quad \forall x_j \geq a, \xi \in \mathbb{R}, n \geq 2, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\widehat{A}(\theta, \Delta t) \left(\widehat{u}_j^{n+1}(x_j, \xi) - \sum_{k=2}^n \widehat{X}^{n+1-k}(x_j, \xi) \widehat{\varphi}_j^k(\xi) \right) = 0 \quad \forall x_j \geq a, \xi \in \mathbb{R}, n \geq 2.$$

Or la solution du problème

$$\begin{cases} \widehat{A}(\theta, \Delta t) \widehat{v}_j^{n+1} = 0 & \forall x_j \geq a, \xi \in \mathbb{R}, \\ \widehat{v}_j^{n+1}(x_j = a, \xi) = \widehat{\varphi}_j^{n+1}(\xi) & \forall \xi \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

s'écrit

$$\widehat{v}_j^{n+1}(x_j, \xi) = \widehat{\varphi}_j^{n+1}(\xi) e^{-\sqrt{\frac{1}{\theta \Delta t^2} + \xi^2} (x_j - a)} \quad \forall x_j \geq a, \xi \in \mathbb{R},$$

qui n'est rien d'autre que

$$\widehat{v}_j^{n+1}(x_j, \xi) = \widehat{X}^0(x_j, \xi) \widehat{\varphi}_j^{n+1}(\xi) \quad \forall x_j \geq a, \xi \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, nous en déduisons

$$\widehat{u}_j^{n+1}(x_j, \xi) = \sum_{k=2}^{n+1} \widehat{X}^{n+1-k}(x_j, \xi) \widehat{\varphi}_j^k(\xi) \quad \forall x_j \geq a, \xi \in \mathbb{R}, n \geq 2.$$

Ainsi nous avons montré par récurrence le résultat (4.50). En appliquant la transformée de Fourier inverse sur (4.50), nous obtenons (4.49). \square

En notant

$$\phi^n = (\varphi^k)_{k=2..n},$$

la solution générale du problème de demi-plan (4.42) et de trace φ^k sur le bord à l'instant k pour tout $k \leq n$ est donnée par

$$U_j^n(\phi^n)(x_j, y_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=2}^n \int_{\mathbb{R}} \widehat{X}^{n-k}(x_j, \xi) \widehat{\varphi}^k(\xi) e^{i\xi y_j} d\xi, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket. \quad (4.51)$$

Nous avons bien évidemment

$$u_j^n = U_j^n(\phi_j^n), \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad (4.52)$$

où

$$\phi_j^n = (\varphi_j^k)_{k=2..n}.$$

4.3.3 Relations de compatibilité

Les différentes représentations de la solution doivent être compatibles dans les intersections des quatre demi-plans. Cela revient à imposer la relation suivante

$$u_j^n = u_{j\pm 1}^n \text{ dans } \Omega_j \cap \Omega_{j\pm 1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}. \quad (4.53)$$

En particulier, nous avons

$$u_j^n = u_{j\pm 1}^n \text{ sur } \partial(\Omega_j \cap \Omega_{j\pm 1}), \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}. \quad (4.54)$$

En utilisant l'expression analytique (4.49) de u_j^n dans le demi-plan Ω_j en fonction de $\phi_j^n = (\varphi_j^k)_{k=2..n}$, la relation de compatibilité (4.54) s'exprime en variables ϕ_j^n

$$\varphi_{j\pm 1}^n|_{\Omega_j \cap \Gamma_{j\pm 1}} = U_j^n(\phi_j^n)|_{\Omega_j \cap \Gamma_{j\pm 1}}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad (4.55)$$

que nous réécrivons sous la forme

$$\varphi_{j\pm 1}^n = \sum_{k=2}^n D_{j, j\pm 1}^{n-k} \varphi_j^k, \text{ sur } \Omega_j \cap \Gamma_{j\pm 1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad (4.56)$$

avec $D_{j,j\pm 1}^m$ l'opérateur défini pour tout $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_j)$ par

$$D_{j,j\pm 1}^m \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{X}^m(x_j, \xi) \widehat{\psi}(\xi) e^{i\xi(\pm a)} d\xi, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N}. \quad (4.57)$$

Nous rappelons la condition aux limites vérifiée par u dans le système (4.36) qui se réécrit

$$\varphi_j^n|_{\Gamma_j^a} = g^n|_{\Gamma_j^a}, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Finalement, le problème satisfait par les traces consiste à trouver $(\varphi_j^n)_{j=0..3} \in \prod H^{1/2}(\Gamma_j)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ telles que $\forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nous avons

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_j^n = \sum_{k=2}^n D_{j-1,j}^{n-k} \varphi_{j-1}^k & \text{sur } \Omega_{j-1} \cap \Gamma_j, \quad n \geq 2, \\ \varphi_j^n = \sum_{k=2}^n D_{j+1,j}^{n-k} \varphi_{j+1}^k & \text{sur } \Omega_{j+1} \cap \Gamma_j, \quad n \geq 2, \\ \varphi_j^0 = \varphi_j^1 = 0 & \text{sur } \Gamma_j, \\ \varphi_j^n = g^n, & \text{sur } \Gamma_j^a, \quad n \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \quad (4.58)$$

4.3.4 Formulation variationnelle du problème des traces

Notre objectif est d'écrire une formulation variationnelle du problème des traces (4.58). Comme dans le cas stationnaire, nous considérons les traces $(\varphi_j^n)_{j=0..3}$ dans $\prod L^2(\Gamma_j)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous définissons $\tilde{\varphi}_j^n$ par

$$\tilde{\varphi}_j^n = \begin{cases} \varphi_j^n & \text{sur } \Omega_j \cap \Gamma_{j\pm 1}, \\ 0 & \text{sur } \Gamma_j^a, \end{cases} \quad (4.59)$$

et $\tilde{G}^n = (\tilde{g}_j^n)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket}$ tel que

$$\tilde{g}_j^n = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Gamma_j^- \cup \Gamma_j^+, \\ g^n & \text{sur } \Gamma_j^a, \end{cases} \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad (4.60)$$

de sorte que

$$\varphi_j^n = \tilde{\varphi}_j^n + \tilde{g}_j^n \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.61)$$

Ainsi, le problème (4.58) se réécrit en utilisant les inconnues $(\tilde{\varphi}_j^n)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket} \in \prod L^2(\Gamma_j)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_j^n - (D_{j-1,j}^0 \tilde{\varphi}_{j-1}^n + D_{j+1,j}^0 \tilde{\varphi}_{j+1}^n) = D_{j-1,j}^0 \tilde{g}_{j-1}^n + D_{j+1,j}^0 \tilde{g}_{j+1}^n \\ \quad + \sum_{k=2}^{n-1} (D_{j-1,j}^{n-k} (\tilde{\varphi}_{j-1}^k + \tilde{g}_{j-1}^k) + D_{j+1,j}^{n-k} (\tilde{\varphi}_{j+1}^k + \tilde{g}_{j+1}^k)) \quad n \geq 2, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \\ \tilde{\varphi}_j^0 = \tilde{\varphi}_j^1 = 0 \end{array} \right. \quad (4.62)$$

où les fonctions $D_{j\pm 1,j}^n \tilde{\varphi}_{j\pm 1}^m$ et $D_{j\pm 1,j}^n \tilde{g}_{j\pm 1}^m$ sont prolongées par 0 pour être identifiées à des fonctions de Γ_j , pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le problème des traces (4.62) se réécrit sous forme matricielle

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{I} - \mathbb{D}^0) \tilde{\Phi}^n = \mathbb{D}^0 \tilde{G}^n + \sum_{k=2}^{n-1} \mathbb{D}^{n-k} (\tilde{\Phi}^k + \tilde{G}^k) \quad n \geq 2, \\ \tilde{\Phi}^0 = \tilde{\Phi}^1 = 0, \end{array} \right.$$

où

$$\tilde{\Phi}^n = (\tilde{\varphi}_0^n, \tilde{\varphi}_1^n, \tilde{\varphi}_2^n, \tilde{\varphi}_3^n), \quad \tilde{G}^n = (\tilde{g}_0^n, \tilde{g}_1^n, \tilde{g}_2^n, \tilde{g}_3^n),$$

et

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{D}^n = \begin{bmatrix} 0 & D_{1,0}^n & 0 & D_{3,0}^n \\ D_{0,1}^n & 0 & D_{2,1}^n & 0 \\ 0 & D_{1,2}^n & 0 & D_{3,2}^n \\ D_{0,3}^n & 0 & D_{2,3}^n & 0 \end{bmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.63)$$

Nous rappelons la définition de l'espace \tilde{V} (introduit dans 3.2.5)

$$\tilde{V} = \{\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_j)_{j \in \llbracket 0,3 \rrbracket} \in \prod L^2(\Gamma_j) \mid \tilde{\psi}_j|_{\Gamma_j^a} = 0, \forall j \in \llbracket 0,3 \rrbracket\}. \quad (4.64)$$

Par conséquent, nous montrons que la formulation variationnelle du problème des traces consiste à trouver $\tilde{\Phi}^n \in \tilde{V}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant pour tout $\Psi \in \tilde{V}$ le système suivant

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^3 \int_{\Gamma_j} ((\mathbb{I} - \mathbb{D}^0)\tilde{\Phi}^n)_j \overline{\Psi}_j d\Gamma_j = \\ \sum_{j=0}^3 \int_{\Gamma_j} (\mathbb{D}^0 \tilde{G}^n)_j \overline{\Psi}_j d\Gamma_j + \sum_{j=0}^3 \sum_{k=2}^{n-1} \int_{\Gamma_j} (\mathbb{D}^{n-k}(\tilde{\Phi}^k + \tilde{G}^k))_j \overline{\Psi}_j d\Gamma_j & n \geq 2, \\ \tilde{\Phi}^0 = \tilde{\Phi}^1 = 0. \end{cases} \quad (4.65)$$

4.3.5 Caractère bien posé

Théorème 14. *Il existe une unique solution du problème (4.58) dans $\prod L^2(\Gamma_j)$ causale (c'est-à-dire $\varphi_j^n = 0$ pour tout $n < 0$) et vérifiant le comportement*

$$\|\varphi_j^n\|_{L^2(\Gamma_j)} \leq C e^{\beta n}, \quad \forall j \in \llbracket 0,3 \rrbracket, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4.66)$$

où C et β sont des constantes strictement positives.

Démonstration.

1. Existence

Nous venons de démontrer par construction que si $u^n \in H^1(\Omega)$ est la solution de (4.36), alors $(\varphi_j^n)_{j \in \llbracket 0,3 \rrbracket}$ est la solution dans $\prod H^{1/2}(\Gamma_j)$ de (4.58), telle que $\varphi_j^n = u|_{\Gamma_j}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les estimations (4.37) et (4.38) de u^n , nous déduisons pour tous $j \in \llbracket 0,3 \rrbracket$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|\varphi_j^n\|_{H^{1/2}(\Gamma_j)} \leq C(1 + n\Delta t + n^2\Delta t^2) \left(\sup_{t \in (0, n\Delta t)} \left\| \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \sup_{t \in (0, n\Delta t)} \|g(t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right), \quad (4.67)$$

où C est une constante.

2. Unicité

Supposons que les fonctions $(\varphi_j^n)_{j \in \llbracket 0,3 \rrbracket} \in \prod L^2(\Gamma_j)$ sont causales, satisfaisant (4.66) et solutions du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_j^n = \sum_{k=2}^n D_{j-1,j}^{n-k} \varphi_{j-1}^k \quad \text{sur } \Omega_{j-1} \cap \Gamma_j, \quad n \geq 2, \\ \varphi_j^n = \sum_{k=2}^n D_{j+1,j}^{n-k} \varphi_{j+1}^k \quad \text{sur } \Omega_{j+1} \cap \Gamma_j, \quad n \geq 2, \\ \varphi_j^0 = \varphi_j^1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j, \\ \varphi_j^n = 0, \quad \text{sur } \Gamma_j^a, \quad n \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \quad (4.68)$$

Notre objectif est de prouver que $\varphi_j^n = 0$, $\forall j \in \llbracket 0,3 \rrbracket$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nous allons appliquer la transformée en Z (nous nous référons à [61] pour la définition et les propriétés de cette transformée) et utiliser le résultat d'unicité obtenu pour un problème stationnaire (voir la sous-section 3.2.4). Pour toute suite $(Y_k)_{k \geq 0}$ assez régulière et causale telle que

$$\|Y_k\|_{L^2} \leq C e^{\beta k}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

nous définissons sa transformée en Z par la fonction de la variable complexe z comme suit

$$Z\left((Y_k)_{k \geq 0}\right)(z) = \sum_{k \geq 0} z^{-k} Y_k, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| > e^\beta.$$

Dans la suite, pour toute suite $(Y_k)_{k \geq 0}$ nous utilisons la notation $\{Y_k\}$ pour la désigner, afin d'alléger l'écriture.

En appliquant la transformée en Z au système (4.68), nous obtenons pour tout $j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) = Z\left\{\sum_{k=2}^n D_{j-1,j}^{n-k} \varphi_{j-1}^k\right\}(\cdot, z) \quad \text{sur } \Omega_{j-1} \cap \Gamma_j, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| > e^\beta, \\ Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) = Z\left\{\sum_{k=2}^n D_{j+1,j}^{n-k} \varphi_{j+1}^k\right\}(\cdot, z) \quad \text{sur } \Omega_{j+1} \cap \Gamma_j, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| > e^\beta, \\ Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j^a, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| > e^\beta. \end{array} \right. \quad (4.69)$$

Pour tout $\psi^k \in L^2(\Gamma_j)$ avec $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$Z\left\{\sum_{k=2}^n D_{j,j \pm 1}^{n-k} \psi^k\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} Z\left\{\sum_{k=2}^{n-1} \widehat{X}^{n-k}(x_j, \xi) \widehat{\psi}^k(\xi)\right\} e^{i\xi(\pm a)} d\xi, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \quad (4.70)$$

Or la transformée en Z d'un produit de convolution est le produit des transformées en Z, avec une région de convergence qui est l'intersection des domaines de convergence des transformées. Nous obtenons alors

$$Z\left\{\sum_{k=2}^n D_{j,j \pm 1}^{n-k} \psi^k\right\}(x_j, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} Z\{\widehat{X}^n\}(x_j, \xi, z) Z\{\widehat{\psi}^n\}(\xi, z) e^{i\xi(\pm a)} d\xi, \quad \forall z \in \text{ROC}_1 \cap \text{ROC}_2, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad (4.71)$$

où ROC_1 et ROC_2 sont respectivement les régions de convergence de $Z\{\widehat{X}^n\}$ et $Z\{\widehat{\psi}^n\}$. Nous avons besoin d'évaluer $Z\{\widehat{X}^n\}$. Nous rappelons quelques propriétés de la transformée en Z d'une suite $\{Y_k\}$

$$Z\{Y_{k+1}\} = z Z\{Y_k\} - zY_0, \quad (4.72)$$

$$Z\{Y_{k-1}\} = z^{-1} Z\{Y_k\}. \quad (4.73)$$

Nous revenons au système (4.47) que satisfait $\{\widehat{X}^n\}$ et nous y appliquons la transformée en Z , ce qui nous permet d'obtenir l'équation suivante

$$\widehat{A}(\theta, \Delta t) Z\{\widehat{X}^{n+1}\} = \widehat{B}(\theta, \Delta t) Z\{\widehat{X}^n\} - \widehat{A}(\theta, \Delta t) Z\{\widehat{X}^{n-1}\}, \quad (4.74)$$

où les opérateurs $\widehat{A}(\theta, \Delta t)$ et $\widehat{B}(\theta, \Delta t)$ sont définis dans (4.44) et (4.45). En utilisant les propriétés (4.72) et (4.73), la relation (4.74) se réécrit

$$-\partial_x^2(Z\{\widehat{X}^n\}) + \left(\frac{\gamma_\theta(z)}{\Delta t^2} + \xi^2\right) Z\{\widehat{X}^n\} = 0, \quad (4.75)$$

avec

$$\gamma_\theta(z) = \frac{(z-1)^2}{\theta z^2 + (1-2\theta)z + \theta} = \frac{1}{\frac{(z+1)^2}{4(z-1)^2} + \left(\theta - \frac{1}{4}\right)}.$$

Puisque nous considérons le cas $\theta \geq 1/4$, les cas possibles qui se présentent sont

- Pour $\theta = 1/4$, $\gamma_\theta(z) = 4 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. Pour $|z| > 1$, $\text{Re}(\gamma_\theta(z)) > 0$.
- Pour $\theta > 1/4$, $\exists R > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$ et $|z| > R$ nous avons $\text{Re}(\gamma_\theta(z)) > 0$.

Nous en déduisons pour R assez grand

$$Z\{\widehat{X}^n\}(x, \xi, z) = e^{-\sqrt{\frac{\gamma_\theta(z)}{\Delta t^2} + \xi^2}(x-a)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| > R. \quad (4.76)$$

En notant $R_0 = \max(R, e^\beta)$, nous obtenons

$$Z\left\{\sum_{k=2}^n D_{j, j\pm 1}^{n-k} \psi^k\right\}(x_j, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} Z\{\widehat{\psi}^n\}(\xi, z) e^{-\sqrt{\frac{\gamma_\theta(z)}{\Delta t^2} + \xi^2}(x_j-a)} e^{i\xi(\pm a)} d\xi, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| > R_0, \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

ou encore (d'après la définition (3.13) de l'opérateur $D_{j\pm 1, j}$ introduite dans la sous-section 3.2.4)

$$Z\left\{\sum_{k=2}^n D_{j\pm 1, j}^{n-k} \psi^k\right\}(x_j, z) = D_{j\pm 1, j}(\alpha(z)) Z\{\psi^n\}(x_j, z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| > R_0, \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

avec

$$\alpha(z) = \frac{\gamma_\theta(z)}{\Delta t^2}.$$

Par conséquent, le problème (4.69) se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) = D_{j-1, j}(\alpha(z)) Z\{\varphi_{j-1}^n\}(\cdot, z) & \text{sur } \Omega_{j-1} \cap \Gamma_j, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > R_0, \\ Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) = D_{j+1, j}(\alpha(z)) Z\{\varphi_{j+1}^n\}(\cdot, z) & \text{sur } \Omega_{j+1} \cap \Gamma_j, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > R_0, \\ Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) = 0, & \text{sur } \Gamma_j^a, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > R_0. \end{cases} \quad (4.77)$$

Le système (4.77) correspond au problème stationnaire (3.14) sans terme source et avec $(Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z))_j$ les inconnues. Le caractère bien posé du problème stationnaire (3.14) implique

$$Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) = 0, \quad \text{sur } \Gamma_j, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| > R_0, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La transformée en Z inverse est donnée par

$$Z^{-1}\{Z\{\varphi_j^n\}\}(\cdot) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) z^{n-1} dz, \quad \text{sur } \Gamma_j, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où C est un chemin fermé parcouru dans le sens trigonométrique et inclus dans le domaine de convergence $|z| > R_0$.

Par conséquent, nous obtenons

$$\varphi_j^n = 0, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

4.4 Aspects numériques et algorithmiques

4.4.1 Discrétisation en espace de la méthode HsM semi-discrète

Pour la discrétisation en temps, nous considérons un temps final T_f et un pas de temps Δt tels que $T_f = N_t \Delta t$ avec $N_t \in \mathbb{N}$.

Nous allons utiliser la méthode des éléments finis pour la discrétisation en espace de la formulation variationnelle du problème des traces (4.65). Nous rappelons dans cette sous-section les paramètres de discrétisation en espace déjà introduits dans le régime stationnaire (plus précisément dans la sous-section 3.4).

Afin de calculer numériquement toutes les intégrales définies sur les quatre droites Γ_i avec $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, ces droites doivent être tronquées à une distance T supérieure à a , d'où l'introduction des segments

$$\Gamma_j^T = \{x_j = a\} \times \{y_j \in [-T, T]\}, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket.$$

Nous utilisons des segments $[M_j^i M_j^{i+1}]$ (avec $i \in \llbracket 1, N_j \rrbracket$) de taille maximale notée h pour mailler les segments Γ_j^T . Soit $V_{\mathbf{h}}$ avec $\mathbf{h} = (T, h, k)$ l'espace d'approximation de $V = \prod L^2(\Gamma_j)$, construit à partir d'éléments finis de type Lagrange de degré k

$$V_{\mathbf{h}} = \{(\varphi_{j,\mathbf{h}})_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket} \in V \mid \varphi_{j,\mathbf{h}}|_{[M_j^i M_j^{i+1}]} \in \mathbb{P}^k([M_j^i M_j^{i+1}]), \quad \forall i \in \llbracket 1, N_j \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket\},$$

et

$$\tilde{V}_{\mathbf{h}} = V_{\mathbf{h}} \cap \tilde{V}.$$

Passons au calcul approché des formes bilinéaires où apparaissent des opérateurs intégraux

$$d_{\pm}^n(\varphi_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^T \int_{\mathbb{R}} \hat{X}^n(x, \xi) \hat{\varphi}_{\mathbf{h}}(\xi) e^{i\xi(\pm a)} \psi_{\mathbf{h}}(x) d\xi dx, \quad \forall n \in \llbracket 0, N_t - 2 \rrbracket,$$

avec $\varphi_{\mathbf{h}}$ et $\psi_{\mathbf{h}}$ des fonctions polynomiales de degré k par morceaux. Afin d'approcher l'intégrale de Fourier, nous allons la tronquer sur un intervalle $[-\hat{T}, \hat{T}]$

$$d_{\pm}^n(\varphi_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) \approx d_{\pm, \hat{T}}^n(\varphi_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^T \int_{-\hat{T}}^{\hat{T}} \hat{X}^n(x, \xi) \hat{\varphi}_{\mathbf{h}}(\xi) e^{i\xi(\pm a)} \psi_{\mathbf{h}}(x) d\xi dx, \quad \forall n \in \llbracket 0, N_t - 2 \rrbracket.$$

Ensuite, l'utilisation d'une méthode de quadrature (par exemple de Gauss) nous permet de calculer en pratique l'intégrale de Fourier tronquée

$$d_{\pm}^n(\varphi_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) \approx d_{\pm, \hat{T}, N_{\xi}}^n(\varphi_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{q=1}^{N_{\xi}} \int_a^T w_q \hat{X}^n(x, \xi_q) \hat{\varphi}_{\mathbf{h}}(\xi_q) e^{i\xi_q(\pm a)} \psi_{\mathbf{h}}(x) dx, \quad \forall n \in \llbracket 0, N_t - 2 \rrbracket, \quad (4.78)$$

où les w_q et ξ_q sont respectivement les poids et les nœuds de la quadrature.

Enfin, il faut calculer $\hat{X}^n(x, \xi_q)$, pour tous $n \in \llbracket 0, N_t - 2 \rrbracket$ et $q \in \llbracket 1, N_{\xi} \rrbracket$. Afin de pouvoir calculer les fonctions de la famille canonique, nous allons tronquer le calcul sur un intervalle $[a, L]$ avec $L > T$. Ce segment est maillé par des segments $[M^i M^{i+1}]$ (avec $i \in \llbracket 1, N_{FC} \rrbracket$) de taille maximale notée h_{FC} . Nous utilisons des éléments finis de Lagrange 1D de degré k' pour construire l'espace $\hat{V}_{\mathbf{h}_{FC}}$ avec $\mathbf{h}_{FC} = (L, h_{FC}, k')$

$$\hat{V}_{\mathbf{h}_{FC}} = \{ \hat{X}_{\mathbf{h}_{FC}} \in H_0^1([a, L]) \mid \hat{X}_{\mathbf{h}_{FC}}|_{[M^i M^{i+1}]} \in \mathcal{P}^{k'}([M^i M^{i+1}]), \forall i \in \llbracket 1, N_{FC} \rrbracket \}.$$

Par conséquent, la relation (4.78) est approchée par

$$d_{\pm}^n(\varphi_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) \approx d_{\pm, \hat{T}, N_{\xi}, \mathbf{h}_{FC}}^n(\varphi_{\mathbf{h}}, \psi_{\mathbf{h}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{q=1}^{N_{\xi}} \int_a^T w_q \hat{X}_{\mathbf{h}_{FC}}^n(x, \xi_q) \hat{\varphi}_{\mathbf{h}}(\xi_q) e^{i\xi_q(\pm a)} \psi_{\mathbf{h}}(x) dx, \quad \forall n \in \llbracket 0, N_t - 2 \rrbracket. \quad (4.79)$$

4.4.2 Algorithme de résolution de la méthode HsM discrète en temps et en espace

L'algorithme associé à la formulation variationnelle (4.65) du problème des traces est le suivant

Données :

- Le vecteur \tilde{G}_h^n est une donnée à l'instant n sur $\bigcup_{i=0}^3 \Gamma_i$,
- $\tilde{\Phi}_h^0 = \tilde{\Phi}_h^1 = 0$.

Instructions :

- Boucle sur tous les points de quadrature ξ_q : Pour q allant de 1 à N_{ξ}
 - Boucle sur le temps : Pour n allant de 0 à N_t
 - Calcul des fonctions canoniques $\hat{X}_{\mathbf{h}_{FC}}^n(\xi_q)$
- Assemblage de la matrice \mathcal{D}^0
- Inversion de la matrice $\mathcal{I} - \mathcal{D}^0$
- Boucle sur le temps : Pour n allant de 2 à N_t
 - Assemblage de la matrice \mathcal{D}^{n-1}
 - Assemblage du second membre $b = \mathcal{D}^0 \tilde{G}_h^n + \sum_{k=2}^{n-1} \mathcal{D}^{n-k} (\tilde{\Phi}_h^k + \tilde{G}_h^k)$
 - Calcul de $\tilde{\Phi}_h^n = (\mathcal{I} - \mathcal{D}^0)^{-1} b$

La forme des matrices \mathcal{D}^n avec $n \in \llbracket 0, N_t - 2 \rrbracket$ est donnée par (4.63) où chaque bloc est calculé à partir des formes bilinéaires $d_{\pm}^n(\cdot, \cdot)$.

L'avantage de cet algorithme est qu'il n'y a qu'une seule matrice à inverser et que l'inversion peut se faire avant la boucle en temps. L'inconvénient est qu'à chaque pas de temps, il faut assembler une nouvelle matrice et la stocker pour pouvoir l'utiliser aux pas de temps ultérieurs. Un autre inconvénient est que pour assembler le second membre à chaque pas de temps, il faut calculer un produit de convolution. Pour des paramètres de discrétisation donnés, nous avons représenté le temps de calcul pour les étapes :

- Assemblage des matrices (voir Figure 4.1a),
- Convolution (voir Figure 4.1b).

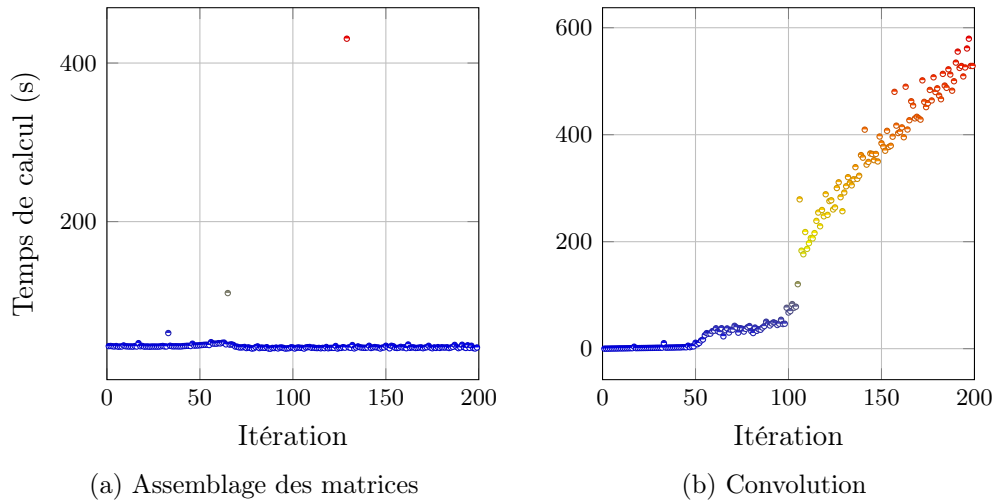


FIGURE 4.1 – Temps de calcul de l'assemblage des matrices et de la convolution à chaque pas de temps

D'après la Figure 4.1a, on voit que le temps de calcul de l'assemblage des matrices est le même à chaque itération. La Figure 4.1b nous montre qu'à n fixé, le coût de calcul de la convolution est en $O(n)$.

Par ailleurs, nous avons tracé respectivement dans les Figures 4.2a et 4.2b l'évolution du temps de calcul pour chacune des étapes en fonction du temps final. Si N_t est le temps final, le temps de calcul des produits de convolution est donc en $O(N_t^2)$, comme le montre la Figure 4.2b. C'est le facteur limitant du calcul.

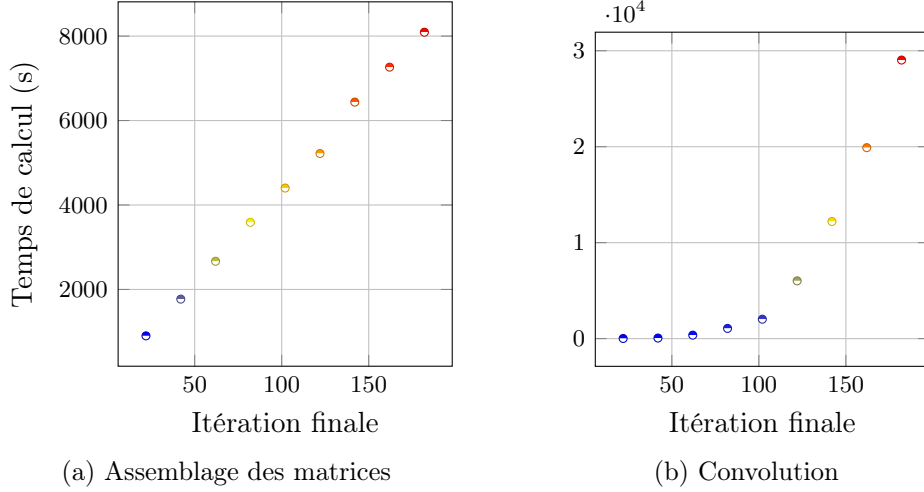


FIGURE 4.2 – Temps de calcul de l'assemblage des matrices et de la convolution en fonction du temps final

4.5 Résultats numériques

Les résultats numériques présentés dans cette section sont obtenus à l'aide de la bibliothèque d'éléments finis XLiFE++ [63].

4.5.1 Validation qualitative de la méthode

Nous voulons dans un premier temps valider la méthode à partir d'une solution exacte.

4.5.1.1 Calcul d'une solution exacte

Nous cherchons la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = g \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \quad (4.80)$$

où $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (-a, a)^2$ et

$$g(\cdot, t = 0) = \frac{\partial g}{\partial t}(\cdot, t = 0) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Notre but est de trouver une expression particulière de la donnée g qui nous permet d'obtenir une expression analytique de la solution du problème.

Nous rappelons que la solution fondamentale G de l'équation des ondes en dimension 2 (voir [56])

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \Delta G(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}^+, \\ G(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{array} \right.$$

est

$$\begin{cases} G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}} & \text{si } \|\mathbf{x}\| \leq t, \\ G(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{si } \|\mathbf{x}\| > t. \end{cases}$$

Pour tout $v^{(1)} \in H^2(\mathbb{R}^2)$, la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \Delta v(\mathbf{x}, t) = 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}^+, \\ v(\mathbf{x}, 0) = 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = v^{(1)}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (4.81)$$

s'écrit

$$v(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|\mathbf{y}\| \leq t} \frac{v^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{y}\|^2}} d\mathbf{y}.$$

Notons qu'en choisissant la fonction $v^{(1)}$ satisfaisant $v^{(1)}(\mathbf{x}) = 0$ dans Ω et en prenant

$$g(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega},$$

nous avons de manière évidente que la solution u de (4.80) est égale à v la solution de (4.81). Nous choisissons ensuite une expression spécifique de $v^{(1)}$ qui nous permet d'avoir un calcul analytique de la solution

$$v^{(1)}(\mathbf{x}) = e^{-\alpha\|\mathbf{x}\|^2} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,$$

où α est un réel positif suffisamment grand de manière à avoir $\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0)$ suffisamment petit pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$. Nous obtenons alors

$$v(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|\mathbf{y}\| \leq t} \frac{e^{-\alpha\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{y}\|^2}} d\mathbf{y}.$$

En notant $\mathbf{x} = (R_x \cos(\theta_x), R_x \sin(\theta_x))$ et $\mathbf{y} = (R_y \cos(\theta_y), R_y \sin(\theta_y))$ avec $0 \leq \theta_y \leq 2\pi$ et $R_y \leq t$, nous avons

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t R_y \frac{e^{-\alpha(R_x^2 + R_y^2) + 2\alpha R_x R_y \cos(\theta_x - \theta_y)}}{\sqrt{t^2 - R_y^2}} dR_y d\theta_y, \\ &= \int_0^t R_y \frac{e^{-\alpha(R_x^2 + R_y^2)}}{\sqrt{t^2 - R_y^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\alpha R_x R_y \cos(\theta_x - \theta_y)} d\theta_y dR_y, \\ &= \int_0^t R_y \frac{e^{-\alpha(R_x^2 + R_y^2)}}{\sqrt{t^2 - R_y^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\alpha R_x R_y \cos(\theta_y)} d\theta_y dR_y. \end{aligned}$$

Nous rappelons la définition de la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre 0 (voir [78])

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z \cos \theta} d\theta.$$

Par conséquent, la solution du problème (4.81) est donnée par

$$v(\mathbf{x}, t) = \int_0^t R_y \frac{e^{-\alpha(R_x^2 + R_y^2)}}{\sqrt{t^2 - R_y^2}} I_0(2\alpha R_x R_y) dR_y. \quad (4.82)$$

Nous posons

$$\tilde{I}_0(R_y, R_x, \alpha) = I_0(2\alpha R_x R_y) e^{-\alpha(R_x^2 + R_y^2)}, \quad (4.83)$$

et

$$\tilde{f}(R_y, R_x, \alpha, t) = \frac{R_y}{\sqrt{t + R_y}} \tilde{I}_0(R_y, R_x, \alpha), \quad (4.84)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \frac{\tilde{f}(R_y, R_x, \alpha, t)}{\sqrt{t - R_y}} dR_y, \\ &= \int_0^t \frac{\tilde{f}(t - R_y, R_x, \alpha, t)}{\sqrt{R_y}} dR_y, \\ &= \int_0^t \frac{\tilde{f}(t - R_y, R_x, \alpha, t) - \tilde{f}(t, R_x, \alpha, t) + \tilde{f}(t, R_x, \alpha, t)}{\sqrt{R_y}} dR_y, \\ &= \int_0^t \frac{\tilde{f}(t - R_y, R_x, \alpha, t) - \tilde{f}(t, R_x, \alpha, t)}{\sqrt{R_y}} dR_y + 2\sqrt{t} \tilde{f}(t, R_x, \alpha, t). \end{aligned}$$

Nous utilisons la méthode des trapèzes pour approcher le calcul de l'intégrale définie sur $[0, t]$

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, t) &= \Delta t^* \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\tilde{f}(t - n\Delta t^*, R_x, \alpha, t) - \tilde{f}(t, R_x, \alpha, t)}{\sqrt{n\Delta t^*}} \\ &\quad + \frac{\Delta t^*}{2} \frac{\tilde{f}(t, R_x, \alpha, t)}{\sqrt{t}} + 2\sqrt{t} \tilde{f}(t, R_x, \alpha, t). \end{aligned}$$

Nous nous sommes ensuite donnés

$$g(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} \quad (4.85)$$

et nous avons appliqué la méthode HsM discrète avec les données suivantes : $h_{FC} = 0.001$, $h = 0.005$, $\Delta t = 0.005$, $\hat{T} = 50$, $a = 0.5$, $T = 2.5$, $L = 4.5$, $\theta = 0.25$ et $T_f = 2$.

Dans la Figure 4.3, nous représentons la solution exacte φ_0^n et la partie réelle de la solution calculée $\varphi_{0,h}^n$ sur Γ_0^+ pour plusieurs pas de temps. Nous observons une superposition des courbes, ce qui valide notre méthode.

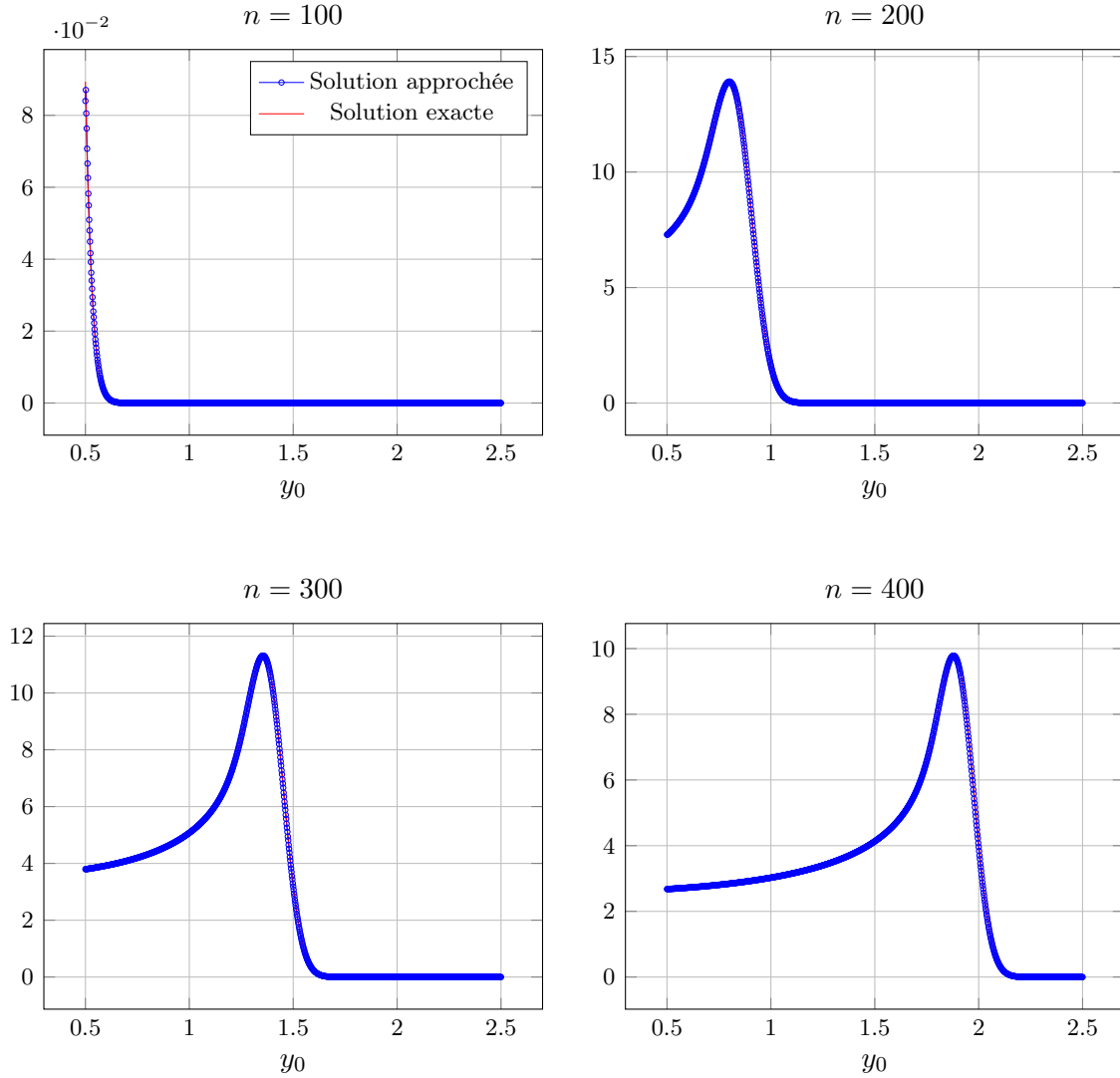


FIGURE 4.3 – Comparaison de la restriction de la partie réelle de $\varphi_{0,h}^n$ sur Γ_0^+ avec la solution exacte φ_0^n sur Γ_0^+ , aux instants $n = 100$, $n = 200$, $n = 300$ et $n = 400$.

Dès que les traces sont calculées, on peut reconstruire une approximation de la solution dans chaque demi-espace Ω_j en utilisant l'expression (4.49). Notez que cette reconstruction nécessite un coût de calcul conséquent. Dans les zones d'intersection des demi-espaces, on peut choisir l'une ou l'autre des représentations de demi-espaces puisqu'elles coïncident (à une erreur de discrétisation près). Dans la Figure 4.4, nous représentons la solution exacte et la partie réelle de la solution reconstruite dans les domaines

$$\Omega_0^{T_{rec}} = [a, T_{rec}] \times [-T_{rec}, T_{rec}] \quad \text{et} \quad \Omega_1^{a, T_{rec}} = [-a, a] \times [a, T_{rec}],$$

où T_{rec} est la distance à laquelle nous construisons. Nous utilisons les données suivantes : $h_{FC} = 0.005$, $h = 0.01$, $\Delta t = 0.01$, $\hat{T} = 50$, $a = 0.5$, $T = 2.5$, $L = 4.5$, $\theta = 0.25$ et $T_f = 1.5$.

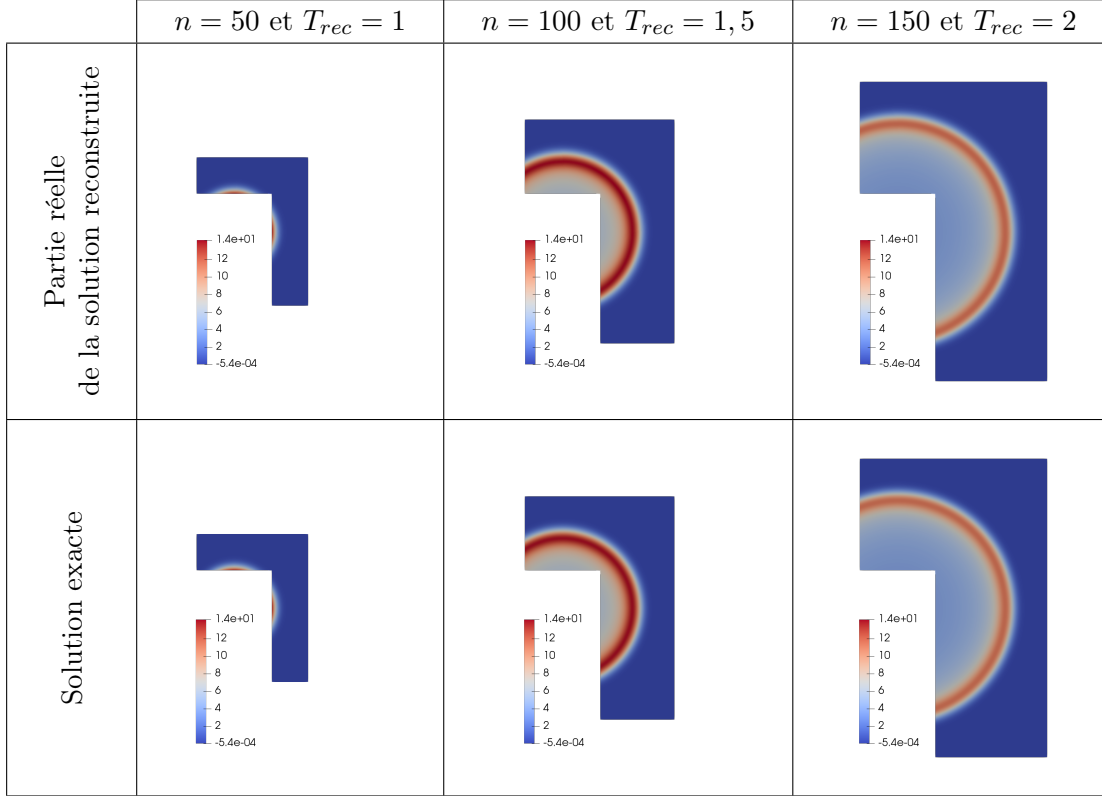


FIGURE 4.4 – Validation de la reconstruction de la solution approchée

4.5.2 Validation quantitative de la méthode

Nous définissons l'erreur relative

$$err := \frac{\sup_{n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket} \|(\varphi_h^n)_{\text{approch}} - \varphi_{\text{exact}}(n\Delta t)\|_{L^2(\bigcup_{j=0}^3 \Gamma_j)}}{\sup_{n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket} \|\varphi_{\text{exact}}(n\Delta t)\|_{L^2(\bigcup_{j=0}^3 \Gamma_j)}}, \quad (4.86)$$

où $(\varphi_h^n)_{\text{approch}}$ (respectivement $\varphi_{\text{exact}}(n\Delta t)$) représente la solution approchée calculée par la méthode HsM (respectivement la solution exacte).

Nous n'avons pas fait l'analyse numérique de la méthode. Des estimations d'erreurs ont été obtenues dans [18]. Ici, nous voulons dans un premier temps étudier le comportement de l'erreur relative en fonction des paramètres de discrétisation suivants

- h_{FC} : le pas de discrétisation du segment $[a, L]$ sur lequel le calcul de la famille canonique est approché,
- h : le pas de discrétisation du domaine extérieur au défaut,
- Δt : le pas de temps,
- \hat{T} : la distance à laquelle le calcul des intégrales de Fourier est tronqué,
- T : la distance à laquelle le calcul des traces est tronqué.

Nous prenons $a = 0.5$, $T = 2.5$, $L = 2.5$, $\theta = 0.25$ et $T_f = 1$. Pour le calcul de l'intégrale de Fourier tronquée, nous utilisons une quadrature de Gauss d'ordre 3 avec un pas égal

à 1. Pour la résolution du problème des fonctions canoniques, nous utilisons des éléments finis d'ordre $k' = 1$. Concernant la discrétisation en espace de la formulation variationnelle du problème des traces, des éléments finis d'ordre $k = 3$ sont utilisés.

Influence de h_{FC}

Dans la Figure 4.5, nous traçons $\log_{10}(err)$ en fonction de $\log_{10}(h_{FC})$. Nous constatons que le calcul de la famille canonique influe fortement sur le calcul de la solution. On s'attend à une erreur d'ordre 2 (puisque l'on utilise des éléments finis d'ordre $k' = 1$) mais on trouve une erreur d'ordre 1. En effet, dans notre code, on est mené à utiliser une approximation constante par morceaux pour évaluer $\widehat{X}_{h_{FC}}^n(x, \xi_q)$ en une valeur $x \in [a, L]$ dans la relation (4.79). Par conséquent, un point d'amélioration de notre code consiste à utiliser une quadrature encore plus précise.

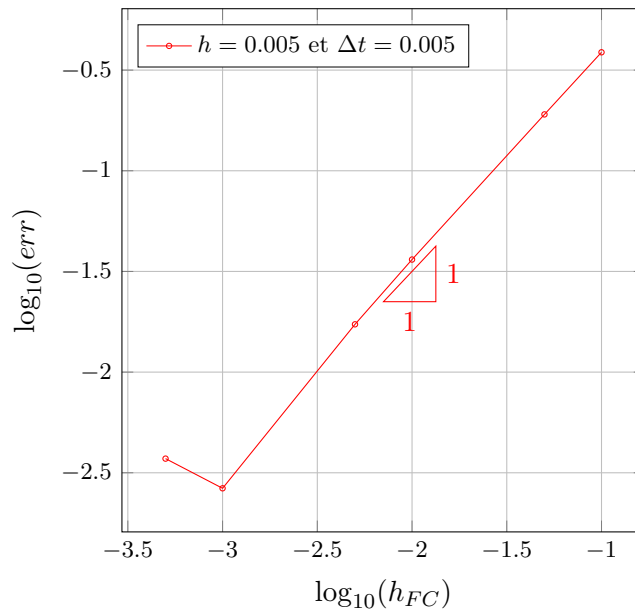
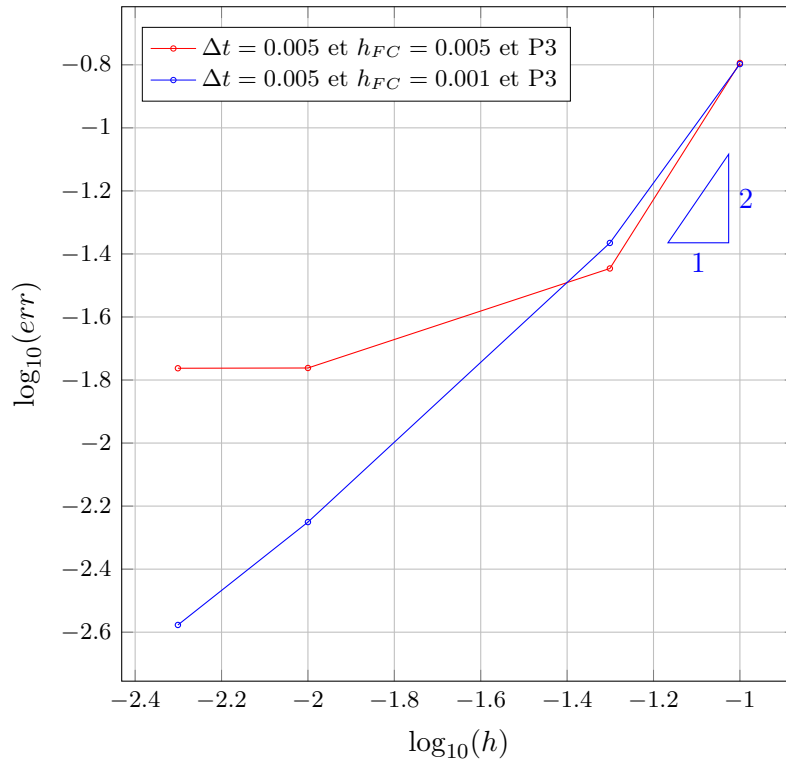


FIGURE 4.5 – Influence de h_{FC}

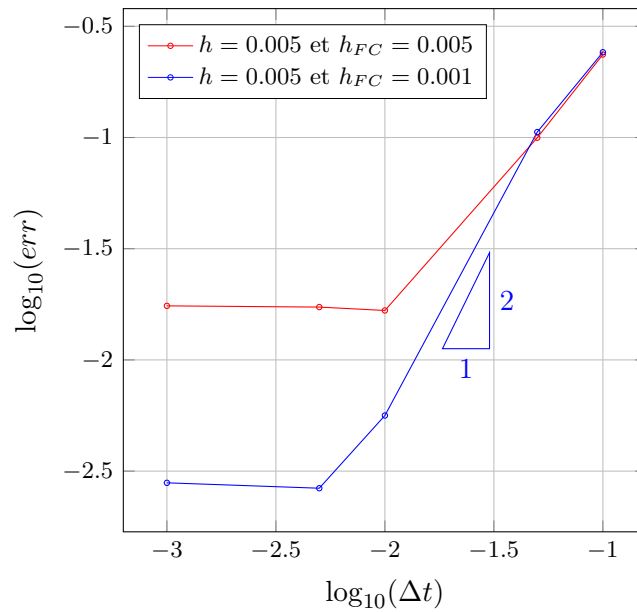
Influence de h

La figure 4.6 nous montre l'évolution de $\log_{10}(err)$ en fonction de $\log_{10}(h)$, pour différentes valeurs de h_{FC} . Comme prévu, plus h est petit, plus l'erreur relative décroît jusqu'à devenir constante (un palier constant dû aux autres paramètres de discrétisation). On s'attend à un ordre de convergence en norme L^2 égal à 4 puisque l'on utilise des éléments finis d'ordre 3.


 FIGURE 4.6 – Influence de h

Influence de Δt

Dans la Figure 4.7, nous représentons $\log_{10}(err)$ en fonction de $\log_{10}(\Delta t)$, pour différentes valeurs de h_{FC} . Comme on peut le voir, l'erreur relative évolue en $O(\Delta t^2)$. Le palier constant est dû aux autres paramètres de discrétisation.


 FIGURE 4.7 – Influence de Δt

Influence de \hat{T}

La figure 4.8 nous montre que l'erreur relative err décroît exponentiellement en fonction de la distance de troncature \hat{T} jusqu'à devenir constante (un palier constant dû aux autres paramètres de discrétisation).

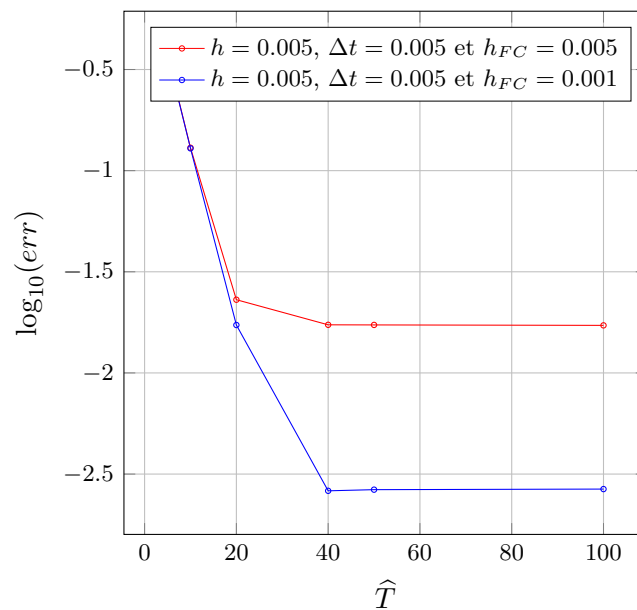
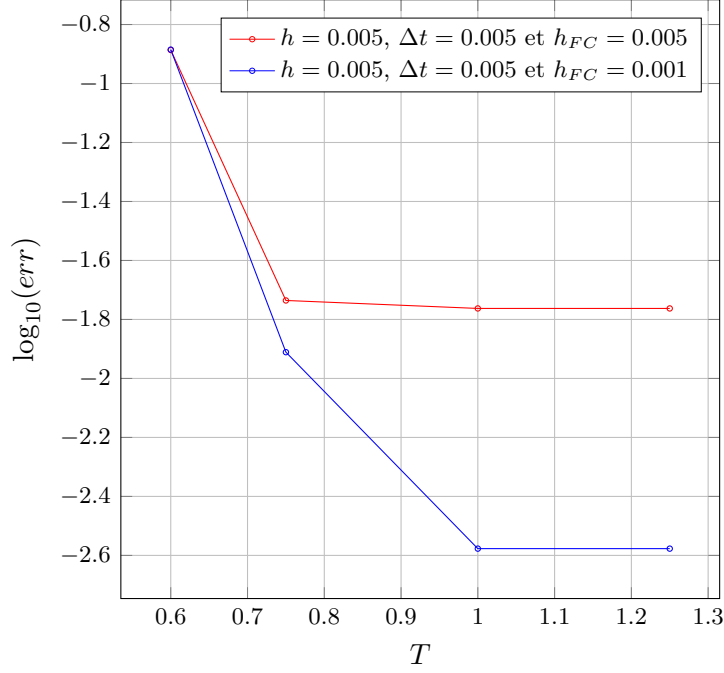


FIGURE 4.8 – Influence de \hat{T}

4.5.2.1 Influence de T

La figure 4.9 nous montre que le choix de la distance de troncature T est lié à la décroissance de la solution de notre problème. En effet, il est inutile de tronquer à une distance supérieure au support de la solution.


 FIGURE 4.9 – Influence de T

4.6 Résolution de la méthode HsM en utilisant une transformée en Z

4.6.1 Principe

Comme nous l'avons dit dans la section précédente, les produits de convolution à calculer à chaque pas de temps coûtent extrêmement cher. Une idée naturelle et déjà utilisée dans la preuve du théorème 14 est d'utiliser la transformée en Z .

Nous rappelons que pour toute suite $(Y_k)_{k \geq 0}$ assez régulière et causale telle que

$$\|Y_k\|_{L^2} \leq C e^{\beta k}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

sa transformée en Z s'écrit

$$Z\left((Y_k)_{k \geq 0}\right)(z) = \sum_{k \geq 0} z^{-k} Y_k, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| > e^{\beta}.$$

Rappelons aussi la notation $\{Y_k\}$ pour désigner la suite $(Y_k)_{k \geq 0}$. On se place dans la suite dans le cas où $\beta = 0$. Nous supposons

$$\|g^n\|_{L^2} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \text{ROC}(Z\{g^n\}) = \{1\}.$$

En appliquant la transformée en Z au système (4.58), nous obtenons pour tout $j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) = Z\left\{\sum_{k=2}^n D_{j-1,j}^{n-k} \varphi_{j-1}^k\right\}(\cdot, z) \quad \text{sur } \Omega_{j-1} \cap \Gamma_j, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > 1, \\ Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) = Z\left\{\sum_{k=2}^n D_{j+1,j}^{n-k} \varphi_{j+1}^k\right\}(\cdot, z) \quad \text{sur } \Omega_{j+1} \cap \Gamma_j, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > 1, \\ Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) = Z\{g^n\}(\cdot, z) \quad \text{sur } \Gamma_j^a, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > 1. \end{array} \right.$$

Pour simplifier nos calculs, nous supposons que $\theta = 1/4$. Avec les mêmes arguments donnés dans la preuve du théorème 14, nous montrons

$$\begin{cases} Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) = D_{j-1,j}(\alpha(z)) Z\{\varphi_{j-1}^n\}(\cdot, z) & \text{sur } \Omega_{j-1} \cap \Gamma_j, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > 1, \\ Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) = D_{j+1,j}(\alpha(z)) Z\{\varphi_{j+1}^n\}(\cdot, z) & \text{sur } \Omega_{j+1} \cap \Gamma_j, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > 1, \\ Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) = Z\{g^n\}(\cdot, z) & \text{sur } \Gamma_j^a, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > 1, \end{cases}$$

où

$$\alpha(z) = \frac{\gamma_\theta(z)}{\Delta t^2},$$

avec

$$\gamma_\theta(z) = 4 \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2.$$

Pour chaque z , nous sommes donc ramenés à la résolution d'un problème stationnaire elliptique paramétré par z . Pour reconstruire les φ_j^n , il suffit ensuite d'utiliser la transformée en Z inverse qui s'écrit

$$\varphi_j^n(\cdot) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, z) z^{n-1} dz, \quad \text{sur } \Gamma_j, \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \forall n \in \mathbb{N},$$

où C_R est un cercle orienté dans le sens trigonométrique de rayon $|z| > 1$ (il est donc inclus dans le domaine de convergence de $Z\{\varphi_j^n\}$). Cette formule d'inversion est liée au fait que φ_j^n est le nième coefficient du développement en série de Laurent de $Z\{\varphi_j^n\}$ et est basée sur une formule de Cauchy.

4.6.2 Discrétisation

À z fixé, il faut résoudre un problème stationnaire. Pour cela, on utilise la discrétisation expliquée à la sous-section 4.4.1. On suppose que les paramètres de discrétisation h, k, T, \hat{T} et N_ξ sont indépendants de z . Notons qu'on pourrait aussi les faire dépendre de z . Il faut calculer la transformée en Z de $\{g^n\}$. À z fixé, il est possible d'évaluer la somme en utilisant une Fast Fourier Transform (FFT).

Remarque 13. *Il n'y a pas de solution de problèmes canoniques à calculer ici donc le paramètre de discrétisation h_{FC} n'apparaît pas.*

Pour évaluer φ_j^n , on le réécrit sous la forme

$$\varphi_j^n(\cdot) = \frac{R^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, R e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta, \quad \text{sur } \Gamma_j, \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \forall n \in \mathbb{N},$$

on remarque qu'il faut tout d'abord choisir R . On voit dans la formule que le calcul peut être délicat pour des n grands car $R > 1$ apparaît à la puissance n .

Pour la formule de quadrature, il suffit d'utiliser une méthode de trapèzes qui pour des fonctions périodiques régulières est d'ordre arbitrairement grand. Si nous notons

$$\theta_p = \frac{2\pi p}{M},$$

nous avons

$$\varphi_j^n(\cdot) = \frac{R^n}{M} \sum_{p=0}^{M-1} Z\{\varphi_j^n\}(\cdot, R e^{i\theta_p}) e^{in\theta_p}, \quad \text{sur } \Gamma_j, \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \forall n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket. \quad (4.87)$$

Dans [64], il est montré qu'il faut choisir $M = 2N_t$ et $R = \epsilon^{-\frac{1}{M}}$ pour avoir une erreur de la formule de quadrature en $O(\epsilon)$. Enfin pour évaluer efficacement (4.87), on voit qu'on peut utiliser une iFFT (inverse FFT).

4.6.3 Algorithme

Le nombre de pas de temps doit être fixé.

Instructions :

- Calcul de $Z\{g^n\}(\cdot, z)$ par FFT pour $z_p = R e^{i\frac{2\pi p}{M}}$ et $M = 2N_t$

$$Z\{g^n\}(\cdot, R e^{i\frac{2\pi p}{M}}) = \sum_{n=0}^{N_t} g^n(\cdot) R^{-n} e^{-i\frac{2\pi p n}{M}}.$$

- Pour chaque z_p , on résout le problème stationnaire associé

$$(\mathbb{I} - \mathbb{D}) Z\{\tilde{\Phi}^n\} = \mathbb{D} Z\{\tilde{G}^n\},$$

où $Z\{\tilde{\Phi}^n\} = \left(Z\{\tilde{\varphi}_j^n\} \right)_{j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket}$ avec $Z\{\varphi_j^n\} = Z\{\tilde{\varphi}_j^n\} + Z\{\tilde{g}_j^n\}$, $\forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. Rappelons que $\tilde{\varphi}_j^n$ et \tilde{g}_j^n sont définis dans (4.59) et (4.60). Les opérateurs \mathbb{I} et \mathbb{D} sont donnés dans (3.20)

- On évalue φ_j^n pour tous $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ et $n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$ en utilisant (4.87) avec une iFFT.

Notons que l'avantage de cet algorithme est qu'il n'y a plus de produit de convolution à calculer. L'inconvénient est qu'il faut inverser autant de matrices que de points de quadrature z_p . Cependant ceci peut être fait en parallèle.

4.7 Couplage de la méthode HsM avec la méthode des éléments finis

Nous cherchons à résoudre le problème modèle (4.1) avec une condition de Neumann homogène sur le bord de \mathcal{O} et des conditions initiales nulles

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O} \times \mathbb{R}^+, \\ \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}. \end{array} \right. \quad (4.88)$$

avec ν le vecteur unité normal à $\partial\mathcal{O}$, sortant par rapport à \mathcal{O} .

Rappelons les notations que nous avons déjà introduites dans 3.3 pour traiter le problème de couplage de la méthode HsM avec la méthode des éléments finis dans le cas stationnaire.

Soit $b > 0$ tel que $a \leq b$. Nous notons

- $\Omega_b = (-b, b)^2 \setminus \mathcal{O}$,
- $\Gamma_j^b = \{x_j = b\} \times \{y_j \in [-b, b]\}$, pour tout $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$,
- $\Gamma^b = \bigcup_{j=0}^3 \Gamma_j^b$,
- $B_l = \Omega_b \cap \Omega$: la zone de recouvrement entre Ω_b et Ω ,
- $u_b := u|_{\Omega_b}$.

La représentation schématique du recouvrement entre le domaine intérieur Ω_b et le domaine extérieur Ω est illustrée dans la Figure 3.4.

4.7.1 Semi-discrétisation en temps

Nous notons $f^n(\cdot) = f(\cdot, n\Delta t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le problème (4.88) semi-discretisé par un θ -schéma s'écrit

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} - \Delta\{u^n\}_\theta = f^n & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \\ u^0 = u^1 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \\ \nabla u^n \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.89)$$

avec $f^n(\cdot) = f(\cdot, n\Delta t)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En notant u_b^n la restriction de u^n dans Ω_b pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{u_b^{n+1} - 2u_b^n + u_b^{n-1}}{\Delta t^2} - \Delta\{u_b^n\}_\theta = f^n & \text{dans } \Omega_b, \quad n \in \mathbb{N}^*, \\ u_b^0 = u_b^1 = 0 & \text{dans } \Omega_b, \\ \nabla u_b^n \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.90)$$

Par ailleurs, d'après la formulation de la méthode HsM dans la sous-section précédente, pour tous $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ et $n \in \mathbb{N}$, nous avons u_j^n solution du problème de demi-plan (4.42) et nous avons montré que les traces φ_j^n de u^n sur les droites Γ_j doivent vérifier (4.55). Comme u_b^n et u_j^n (avec $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$) sont des représentations de la même solution u^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc elles doivent coïncider là où elles coexistent. Afin de simplifier nos explications, nous choisissons les conditions de compatibilité dans la zone de recouvrement

$$\begin{cases} u_b^n|_{\Gamma_j^a} = u_j^n|_{\Gamma_j^a}, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \nabla\{u_b^n\}_\theta \cdot \nu_j|_{\Gamma_j^b} = \nabla\{u_j^n\}_\theta \cdot \nu_j|_{\Gamma_j^b}, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (4.91)$$

avec ν_j le vecteur unité normal à Γ_j^b et extérieur à Ω^b .

Notons qu'en absence de recouvrement ($a = b$), les relations (4.91) représentent les conditions de transmission qui nous assurent le raccord en trace et en dérivée normale entre u_b^n et u_j^n sur $\Gamma_j^a = \Gamma_j^b$, à chaque pas de temps n .

En utilisant (4.52) et (4.51), nous rappelons l'expression de u_j^n

$$u_j^n(x_j, y_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=2}^n \int_{\mathbb{R}} \widehat{X}^{n-k}(x_j, \xi) \widehat{\varphi}_j^k(\xi) e^{i\xi y_j} d\xi, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket.$$

Nous en déduisons la relation

$$\begin{aligned} \nabla\{u_j^n\}_\theta \cdot \nu_j|_{\Gamma_j^b} &= \\ \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \partial_x \{\widehat{X}^{n-k}\}_\theta(b, \xi) \widehat{\varphi}_j^k(\xi) e^{i\xi y} d\xi, \quad \forall y \in (-b, b), \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

qui se réécrit

$$\nabla\{u_j^n\}_\theta \cdot \nu_j|_{\Gamma_j^b} = \sum_{k=2}^{n+1} \Lambda^{n+1-k} \varphi_j^k, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4.92)$$

où l'opérateur Λ^m est défini pour tout $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_j)$ par

$$\begin{aligned} \Lambda^m \psi(y) &= \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \partial_x \{\widehat{X}^{m-1}\}_\theta(b, \xi) \widehat{\psi}(\xi) e^{i\xi y} d\xi, \quad \forall y \in (-b, b), \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

4.7.2 Reformulation du problème en fonction de $\{u_b^n, (\varphi_j^n)_{j=0..3}\}$

En utilisant (4.90), (4.56), (4.91), (4.92) et en notant $\phi_j^n = (\varphi_j^k)_{k=2..n}$, nous obtenons un système d'équations qui couplent, à chaque pas de temps n , $(\phi_j^n)_{j=0..3}$ et la restriction u_b^n de la solution dans le domaine borné Ω_b . Le problème initial (4.89) est équivalent à trouver $u_b^n \in H^1(\Omega_b)$ et $(\varphi_j^n)_{j=0..3} \in \prod H^{1/2}(\Gamma_j)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{u_b^{n+1} - 2u_b^n + u_b^{n-1}}{\Delta t^2} - \Delta\{u_b^n\}_\theta = f^n & \text{dans } \Omega_b, \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \nabla u_b^n \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_b^n = \varphi_j^n & \text{sur } \Gamma_j^a, \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \forall n \in \mathbb{N}, \\ \nabla\{u_b^n\}_\theta \cdot \nu_j = \sum_{k=2}^{n+1} \Lambda^{n+1-k} \varphi_j^k & \text{sur } \Gamma_j^b, \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \forall n \in \mathbb{N}, \\ \varphi_{j\pm 1}^n = \sum_{k=2}^n D_{j,j\pm 1}^{n-k} \varphi_j^k & \text{sur } \Omega_j \cap \Gamma_{j\pm 1}, \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, n \geq 2, \\ u_b^0 = u_b^1 = 0 & \text{dans } \Omega_b, \\ \varphi_j^0 = \varphi_j^1 = 0 & \text{sur } \Gamma_j, \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket. \end{array} \right. \quad (4.93)$$

4.7.3 Formulation variationnelle

Comme dans le cas stationnaire, la formulation variationnelle du problème (4.93) ne s'écrit que dans le cas $b > a$ (voir la sous-section 3.3.2). Nous écrivons

$$\varphi_j^n = \tilde{\varphi}_j^n + \gamma_j u_b^n, \quad \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, n \in \mathbb{N} \quad (4.94)$$

où γ est l'opérateur trace de $H^1(\Omega_b)$ dans $L^2(\bigcup_{j=0}^3 \Gamma_j)$ défini dans (3.27) et $\gamma_j u_b^n$ est la restriction de γu_b^n sur Γ_j pour tous $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ et $n \in \mathbb{N}$ (γ_j est introduit dans (3.28)). Ainsi, en notant $\tilde{\Phi}^n = (\tilde{\varphi}_j^n)_{j=0..3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formulation variationnelle du problème (4.93) consiste à trouver $(u_b^n, \tilde{\Phi}^n) \in H^1(\Omega_b) \times \tilde{V}$ vérifiant pour tous $(v_b, \Psi) \in H^1(\Omega_b) \times \tilde{V}$ le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t^2} \int_{\Omega_b} u_b^{n+1} \bar{v}_b d\Omega_b + \theta \int_{\Omega} \nabla u_b^{n+1} \cdot \nabla \bar{v}_b d\Omega_b - \sum_{j=0}^3 \int_{\Gamma_j^b} \Lambda^0 \gamma_j u_b^{n+1} \bar{v}_b d\Gamma_j^b \\ + \sum_{j=0}^3 \int_{\Gamma_j^b} \Lambda^0 \tilde{\varphi}_j^{n+1} \bar{v}_b d\Gamma_j^b + \sum_{j=0}^3 \int_{\Gamma_j} ((\mathbb{I} - \mathbb{D}^0) \tilde{\Phi}^{n+1})_j \bar{\Psi}_j d\Gamma_j \\ - \sum_{j=0}^3 \int_{\Gamma_j} (\mathbb{D}^0 \gamma u_b^{n+1})_j \bar{\Psi}_j d\Gamma_j = \sum_{j=0}^3 \sum_{k=2}^n \int_{\Gamma_j} (\mathbb{D}^{n+1-k} (\tilde{\Phi}^k + \gamma u_b^k))_j \bar{\Psi}_j d\Gamma_j \\ + \sum_{j=0}^3 \sum_{k=2}^{n+1} \int_{\Gamma_j^b} \Lambda^{n+1-k} \gamma_j u_b^k \bar{v}_b d\Gamma_j^b - \sum_{j=0}^3 \sum_{k=2}^{n+1} \int_{\Gamma_j^b} \Lambda^{n+1-k} \tilde{\varphi}_j^k \bar{v}_b d\Gamma_j^b \\ + \frac{2}{\Delta t^2} \int_{\Omega_b} u_b^n \bar{v}_b d\Omega_b - (1 - 2\theta) \int_{\Omega_b} \nabla u_b^n \cdot \nabla \bar{v}_b d\Omega_b \\ - \frac{1}{\Delta t^2} \int_{\Omega_b} u_b^{n-1} \bar{v}_b d\Omega_b - \theta \int_{\Omega_b} \nabla u_b^{n-1} \cdot \nabla \bar{v}_b d\Omega_b + \int_{\Omega_b} f^n \bar{v}_b d\Omega_b \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ u_b^0 = u_b^1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_b, \\ \tilde{\varphi}_j^0 = \tilde{\varphi}_j^1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j, \forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, \end{array} \right. \quad (4.95)$$

où \mathbb{D}^n et \mathbb{I} sont définis dans (4.63).

4.7.4 Résultats numériques

Dans cette sous-section, nous représentons les résultats numériques pour le problème de couplage de la méthode HsM avec la méthode des éléments finis, avec une condition de Neumann sur le bord $\partial\mathcal{O}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O} \times \mathbb{R}^+, \\ \nabla u \cdot \nu = \tilde{g} \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \end{array} \right. \quad (4.96)$$

avec ν le vecteur unité normal à $\partial\mathcal{O}$, sortant par rapport à $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$. Dans nos résultats numériques, nous choisissons $\tilde{g} = \nabla g \cdot \nu$ avec g la fonction définie dans (4.85) et \mathcal{O} un disque de rayon r . Les valeurs de nos données sont : $h_{FC} = 0.01$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.05$, $\widehat{T} = 50$, $r = 0.4$, $a = 0.5$, $T = 2.5$, $L = 2.5$, $\theta = 0.25$ et $T_f = 1$. La Figure 4.10 nous montre la partie réelle de la solution calculée à l'extérieur du domaine \mathcal{O} à deux instants $n = 9$ et $n = 18$.

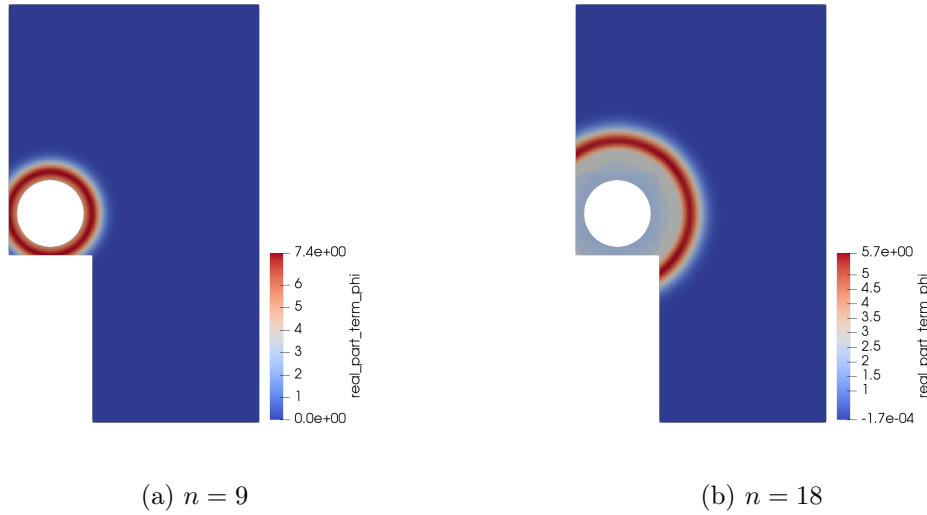


FIGURE 4.10 – Représentation de la partie réelle de la solution du problème de couplage de la méthode HsM avec la méthode des éléments finis, à deux instants

4.8 Cas de milieu anisotrope

Notre méthode est construite de manière à s'étendre à l'équation des ondes en milieu anisotrope. Nous généralisons le problème (4.2) au cas anisotrope

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\nabla \mathcal{A}u) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = g \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \quad (4.97)$$

où \mathcal{A} est une matrice modélisant l'anisotropie du milieu, supposée définie positive et constante dans Ω . Nous posons

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Notons que pour le cas isotrope, \mathcal{A} correspond à la matrice identité.

4.8.1 Semi-discrétisation en temps

Nous discrétisons le problème (4.97) par un θ -schéma

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} - \operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla\{u^n\}_\theta) = 0 & \text{dans } \Omega, \ n \in \mathbb{N}^*, \\ u^0 = u^1 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u^n = g^n & \text{sur } \partial\Omega, \ n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.98)$$

4.8.2 Expression analytique de u_i^n dans Ω_i , pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$

Nous généralisons les expressions des opérateurs $A(\theta, \Delta t)$ et $B(\theta, \Delta t)$ (données respectivement dans (4.39) et (4.40)) au cas anisotrope

$$\begin{aligned} A(\theta, \Delta t) : H^1(\Delta, \Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto u - \theta \Delta t^2 \operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\theta, \Delta t) : H^1(\Delta, \Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto 2u + (1 - 2\theta) \Delta t^2 \operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u). \end{aligned}$$

Considérons tout d'abord le problème de demi-espace posé dans Ω_0 . En appliquant la transformée de Fourier dans la direction y_0 (qui correspond à la direction y dans le plan Oxy) au problème que vérifie $(u_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (la restriction de $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ à Ω_0) et qui s'écrit

$$\begin{cases} A(\theta, \Delta t) u_0^{n+1} = B(\theta, \Delta t) u_0^n - A(\theta, \Delta t) u_0^{n-1} & \text{dans } \Omega_0, \ n \in \mathbb{N}^*, \\ u_0^0 = u_0^1 = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ u_0^n = \varphi_0^n & \text{sur } \Gamma_0, \ n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (4.99)$$

nous obtenons

$$\begin{cases} \widehat{A}_0(\theta, \Delta t) \widehat{u}_0^{n+1} = \widehat{B}_0(\theta, \Delta t) \widehat{u}_0^n - \widehat{A}_0(\theta, \Delta t) \widehat{u}_0^{n-1} & \forall x_0 \geq a, \ \xi \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}^*, \\ \widehat{u}_0^0 = \widehat{u}_0^1 = 0 & \forall x_0 \geq a, \ \xi \in \mathbb{R}, \\ \widehat{u}_0^n(x_0 = a, \xi) = \widehat{\varphi}_0^n(\xi) & \forall \xi \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (4.100)$$

où les opérateurs $\widehat{A}_0(\theta, \Delta t)$ et $\widehat{B}_0(\theta, \Delta t)$ sont définis pour tout $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}; H^1([a, +\infty[))$ par

$$\widehat{A}_0(\theta, \Delta t) : \widehat{u} \longmapsto \widehat{u} - a_1 \theta \Delta t^2 \partial_{x_0}^2 \widehat{u} - 2a_3 i \xi \theta \Delta t^2 \partial_{x_0} \widehat{u} + a_2 \theta \Delta t^2 \xi^2 \widehat{u},$$

$$\widehat{B}_0(\theta, \Delta t) : \widehat{u} \longmapsto 2\widehat{u} + a_1 (1 - 2\theta) \Delta t^2 \partial_{x_0}^2 \widehat{u} + 2a_3 i \xi (1 - 2\theta) \Delta t^2 \partial_{x_0} \widehat{u} - a_2 (1 - 2\theta) \Delta t^2 \xi^2 \widehat{u}.$$

Proposition 20. *La solution du problème (4.100) à l'instant $n = 2$, s'écrit*

$$\widehat{u}_0^2(x_0, \xi) = \widehat{\varphi}_0^2(\xi) e^{\left(-i\xi \frac{a_3}{a_1} - \sqrt{\frac{1}{a_1} \left(\frac{1}{\theta \Delta t^2} + \xi^2 \frac{a_1 a_2 - a_3^2}{a_1} \right)} \right) (x_0 - a)}. \quad (4.101)$$

Démonstration. À l'instant $n = 2$, le problème (4.100) est une équation différentielle ordinaire à coefficients constants

$$\begin{cases} -a_1 \theta \Delta t^2 \partial_{x_0}^2 \widehat{u}_0^2 - 2a_3 i \xi \theta \Delta t^2 \partial_{x_0} \widehat{u}_0^2 + (1 + a_2 \theta \Delta t^2 \xi^2) \widehat{u}_0^2 = 0 & \forall x_0 \geq a, \xi \in \mathbb{R}, \\ \widehat{u}_0^2(x_0 = a, \xi) = \widehat{\varphi}_0^n(\xi) & \forall \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.102)$$

Le polynôme caractéristique de (4.102) est

$$-a_1 \theta \Delta t^2 r^2 - 2a_3 i \xi \theta \Delta t^2 r + (1 + a_2 \theta \Delta t^2 \xi^2) = 0, \quad (4.103)$$

Comme $a_1 a_2 - a_3^2 > 0$ (car la matrice A est définie positive), donc le discriminant

$$\Delta = 4a_1 \theta^2 \Delta t^4 \left(\frac{1}{\theta \Delta t^2} + \xi^2 \frac{a_1 a_2 - a_3^2}{a_1} \right)$$

est positif. Le polynôme (4.103) possède alors deux racines

$$\begin{cases} r_\xi^{(1)}(\theta, \Delta t) = -i\xi \frac{a_3}{a_1} - \sqrt{\frac{1}{a_1} \left(\frac{1}{\theta \Delta t^2} + \xi^2 \frac{a_1 a_2 - a_3^2}{a_1} \right)}, \\ r_\xi^{(2)}(\theta, \Delta t) = -i\xi \frac{a_3}{a_1} + \sqrt{\frac{1}{a_1} \left(\frac{1}{\theta \Delta t^2} + \xi^2 \frac{a_1 a_2 - a_3^2}{a_1} \right)}. \end{cases}$$

La solution générale de (4.102) s'écrit donc sous la forme

$$\widehat{u}_0(x_0, \xi) = f_0(\xi) e^{r_\xi^{(1)}(\theta, \Delta t)(x_0 - a)} + g_0(\xi) e^{r_\xi^{(2)}(\theta, \Delta t)(x_0 - a)}.$$

Or nous cherchons une solution qui n'explose pas à l'infini ce qui nous permet d'écrire

$$g_0(\xi) = 0.$$

Par conséquent, nous pouvons déduire le résultat (4.101). \square

Définition 2. La famille de fonctions canoniques $(\widehat{X}_0^n)_{n \geq -2}$, généralisée au cas anisotrope, vérifie pour tous $x_0 \geq a$ et $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \widehat{A}_0(\theta, \Delta t) \widehat{X}_0^{n+1} = \widehat{B}_0(\theta, \Delta t) \widehat{X}_0^n - \widehat{A}_0(\theta, \Delta t) \widehat{X}_0^{n-1} & n \geq -1, \\ \widehat{X}_0^n(x_0 = a, \xi) = \delta_{n,0} & n \in \mathbb{N}, \\ \widehat{X}_0^{-1} = 0 \text{ et } \widehat{X}_0^{-2} = 0, \end{cases} \quad (4.105)$$

avec $\delta_{n,0}$ le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $n = 0$ et 0 sinon.

Pour tous $x_0 \geq a$ et $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction \widehat{X}_0^0 est donnée par

$$\widehat{X}_0^0(x_0, \xi) = e^{\left(-i\xi \frac{a_3}{a_1} - \sqrt{\frac{1}{a_1} \left(\frac{1}{\theta \Delta t^2} + \xi^2 \frac{a_1 a_2 - a_3^2}{a_1} \right)} \right) (x_0 - a)}. \quad (4.106)$$

L'expression de u_1 dans Ω_1 est différente et fait intervenir une autre famille de fonctions canoniques. Pour pouvoir appliquer la transformée de Fourier dans la direction y_1 (qui correspond à la direction $-x$ dans le plan Oxy), nous définissons les opérateurs

$$\widehat{A}_1(\theta, \Delta t) : \widehat{u} \longmapsto \widehat{u} - a_2 \theta \Delta t^2 \partial_{x_1}^2 \widehat{u} + 2a_3 i \xi \theta \Delta t^2 \partial_{x_1} \widehat{u} + a_1 \theta \Delta t^2 \xi^2 \widehat{u},$$

$$\widehat{B}_1(\theta, \Delta t) : \widehat{u} \longmapsto 2\widehat{u} + a_2(1 - 2\theta) \Delta t^2 \partial_{x_1}^2 \widehat{u} - 2a_3 i \xi (1 - 2\theta) \Delta t^2 \partial_{x_1} \widehat{u} - a_1(1 - 2\theta) \Delta t^2 \xi^2 \widehat{u}.$$

En suivant la même démarche de la preuve de la proposition (20), nous montrons

Proposition 21. La solution \widehat{u}_1^2 s'écrit

$$\widehat{u}_1^2(x_1, \xi) = \widehat{\varphi}_1^2(\xi) e^{\left(i\xi \frac{a_3}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_2} \left(\frac{1}{\theta \Delta t^2} + \xi^2 \frac{a_1 a_2 - a_3^2}{a_2} \right)} \right) (x_1 - a)}. \quad (4.107)$$

Définition 3. Par analogie à (2), nous introduisons la famille de fonctions canoniques $(\widehat{X}_1^n)_{n \geq -2}$ vérifiant pour tous $x_1 \geq a$ et $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \widehat{A}_1(\theta, \Delta t) \widehat{X}_1^{n+1} = \widehat{B}_1(\theta, \Delta t) \widehat{X}_1^n - \widehat{A}_1(\theta, \Delta t) \widehat{X}_1^{n-1} & n \geq -1, \\ \widehat{X}_1^n(x_1 = a, \xi) = \delta_{n,0} & n \in \mathbb{N}, \\ \widehat{X}_1^{-1} = 0 \text{ et } \widehat{X}_1^{-2} = 0. \end{cases} \quad (4.108)$$

Pour tous $x_1 \geq a$ et $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction \widehat{X}_1^0 est donnée par

$$\widehat{X}_1^0(x_1, \xi) = e^{\left(i\xi \frac{a_3}{a_2} - \sqrt{\frac{1}{a_2} \left(\frac{1}{\theta \Delta t^2} + \xi^2 \frac{a_1 a_2 - a_3^2}{a_2} \right)} \right) (x_1 - a)}. \quad (4.109)$$

Une fois que nous avons défini les deux familles canoniques $(\widehat{X}_0^n)_{n \geq -2}$ et $(\widehat{X}_1^n)_{n \geq -2}$ qui interviennent dans le cas anisotrope, nous pouvons donner l'expression analytique de u_j^n dans le demi-plan Ω_j , pour tout $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

Proposition 22. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, les expressions analytiques des représentations de la solution u^n dans les quatre demi-plans s'écrivent

$$\left| \begin{aligned} u_j^n(x_j, y_j) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=2}^n \int_{\mathbb{R}} \widehat{X}_0^{n-k}(x_j, \xi) \widehat{\varphi}_j^k(\xi) e^{i\xi y_j} d\xi, & \forall j \in \{0, 2\}, \end{aligned} \right. \quad (4.110a)$$

$$\left| \begin{aligned} u_j^n(x_j, y_j) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=2}^n \int_{\mathbb{R}} \widehat{X}_1^{n-k}(x_j, \xi) \widehat{\varphi}_j^k(\xi) e^{i\xi y_j} d\xi, & \forall j \in \{1, 3\}. \end{aligned} \right. \quad (4.110b)$$

4.8.3 Relations de compatibilité et formulation variationnelle

Les relations de compatibilité sont obtenues de la même manière que dans le cas isotrope. Nous rappelons qu'elles s'écrivent sous la forme

$$\varphi_{j\pm 1}^n = \sum_{k=2}^n D_{j,j\pm 1}^{n-k} \varphi_j^k \quad \text{sur } \Omega_j \cap \Gamma_{j\pm 1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad (4.111)$$

où $D_{j,j\pm 1}^m$ est l'opérateur défini pour tout $\psi \in L^2(\Gamma_j)$ par

$$D_{j,j\pm 1}^m \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{X}_j^m(x_j, \xi) \widehat{\psi}(\xi) e^{i\xi(\pm a)} d\xi, \quad \forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (4.112)$$

avec

$$\begin{cases} \widehat{X}_0^m = \widehat{X}_2^m, \\ \widehat{X}_1^m = \widehat{X}_3^m, \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Dans notre cas anisotrope, il s'agit de 4 opérateurs différents notés $D_{0,+}^m$, $D_{0,-}^m$, $D_{1,+}^m$ et $D_{1,-}^m$ définis par

$$\begin{cases} D_{0,\pm}^m \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{X}_0^m(x, \xi) \widehat{\psi}(\xi) e^{i\xi(\pm a)} d\xi, & \forall x \geq a, \\ D_{1,\pm}^m \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{X}_1^m(x, \xi) \widehat{\psi}(\xi) e^{i\xi(\pm a)} d\xi, & \forall x \geq a. \end{cases}$$

En résumé, la formulation variationnelle de la méthode HsM en milieu anisotrope s'écrit : trouver $(\varphi_j^n)_{j=0..3} \in \prod L^2(\Gamma_j)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ telles que $\forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nous avons

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_j^n = \sum_{k=2}^n D_{j-1,j}^{n-k} \varphi_{j-1}^k & \text{sur } \Omega_{j-1} \cap \Gamma_j, \quad n \geq 2, \\ \varphi_j^n = \sum_{k=2}^n D_{j+1,j}^{n-k} \varphi_{j+1}^k & \text{sur } \Omega_{j+1} \cap \Gamma_j, \quad n \geq 2, \\ \varphi_j^0 = \varphi_j^1 = 0 & \text{sur } \Gamma_j, \\ \varphi_j^n = g^n, & \text{sur } \Gamma_j^a, \quad n \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \quad (4.113)$$

4.8.4 Récapitulation

Que le milieu soit isotrope ou anisotrope, la méthode HsM est la même. Ce qui change c'est que dans le cas anisotrope, nous devons introduire deux familles canoniques différentes pour dégager la structure de la solution du problème à résoudre. Dans les relations de compatibilité puis la formulation variationnelle, nous avons 4 opérateurs différents qui interviennent.

4.8.5 Résultats numériques

Dans cette sous-section, nous représentons les résultats numériques pour le problème de couplage de la méthode HsM avec la méthode des éléments finis, en milieu anisotrope, avec une condition de Dirichlet sur le bord $\partial\mathcal{O}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O} \times \mathbb{R}^+, \\ u = g & \text{sur } \partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}. \end{array} \right. \quad (4.114)$$

Dans nos résultats numériques, nous choisissons \mathcal{O} un disque de rayon r et

$$g(\mathbf{x}, t) = A \sin(2\pi t F) e^{(-\alpha\|\mathbf{x}\|^2)}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}^+,$$

où $A = 10^{12}$, $F = 2$ et $\alpha = 100$. Les valeurs de nos données sont : $h_{FC} = 0.01$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.05$, $\hat{T} = 50$, $r = 0.5$, $a = 0.6$, $T = 2.6$, $L = 2.6$, $\theta = 0.25$ et $T_f = 1$. Pour la matrice modélisant l'anisotropie du milieu, nous prenons

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{pmatrix}.$$

La Figure 4.11 nous montre la partie réelle de la solution calculée à l'extérieur du domaine \mathcal{O} à deux instants $n = 9$ et $n = 18$.

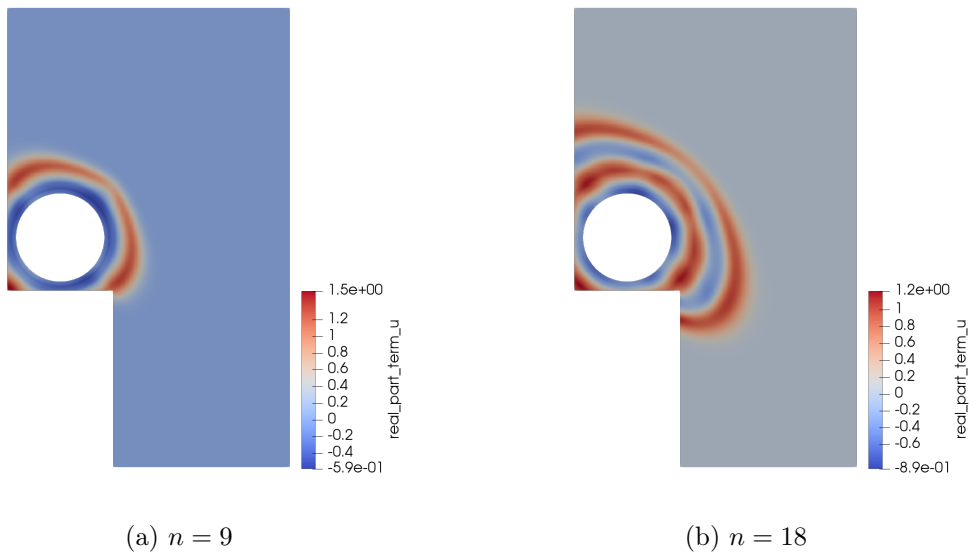


FIGURE 4.11 – Représentation de la partie réelle de la solution du problème de couplage de la méthode HsM avec la méthode des éléments finis, en milieu anisotrope, à deux instants

Annexe

Formulation de la méthode HsM à l'extérieur d'un carré pour un problème continu

Nous rappelons que nous cherchons la solution du problème extérieur (4.2)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (4.115)$$

Proposition 23. *Le problème (4.115) admet une unique solution forte dans*

$$C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\Delta, \Omega)).$$

Pour tout $t > 0$, nous avons les estimations

$$\begin{cases} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C(t+1) \sum_{k=0}^2 \sup_{s \in [0, t]} \left\| \frac{\partial^k g}{\partial s^k}(\cdot, s) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \\ \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(t^2+1) \sum_{k=0}^2 \sup_{s \in [0, t]} \left\| \frac{\partial^k g}{\partial s^k}(\cdot, s) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \end{cases}$$

où C est une constante.

Démonstration.

• Étape 1 : Relèvement

Si $g \in C^2(\mathbb{R}^+; H^{1/2}(\partial\Omega))$ alors la solution u_g du problème

$$\begin{cases} u_g - \Delta u_g = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_g = g & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (4.116)$$

est dans $C^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}^+; H^1(\Delta, \Omega))$ et nous montrons que pour tout $s > 0$

$$\|u_g(\cdot, s)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|g(\cdot, s)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad (4.117)$$

$$\left\| \frac{\partial^2 u_g}{\partial s^2}(\cdot, s) \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(\cdot, s) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}. \quad (4.118)$$

où C est une constante. Soit $\tilde{u} = u - u_g$ alors \tilde{u} satisfait

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \Delta \tilde{u} = -\frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} + u_g & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \tilde{u}(\cdot, 0) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega, \quad (\text{car } g(\cdot, t=0) = \frac{\partial g}{\partial t}(\cdot, t=0) = 0) \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (4.119)$$

Puisque $-\partial_t^2 u_g + u_g \in C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$ nous pouvons utiliser le théorème de Hille-Yosida (voir [67], [21] et [12]) : il existe une unique solution classique

$$\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\Delta, \Omega)).$$

• Étape 2 : Identité d'énergie

La solution \tilde{u} vérifie l'identité d'énergie

$$\frac{d}{dt} E(t, \tilde{u}) = \left(-\frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2}(\cdot, t) + u_g(\cdot, t), \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\cdot, t) \right)_{L^2(\Omega)},$$

où l'énergie $E(t, \tilde{u})$ du problème (4.119) est définie par

$$E(t, \tilde{u}) = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2. \quad (4.120)$$

• Étape 3 : Estimation d'énergie

Comme les conditions initiales sont nulles alors l'énergie initiale du problème (4.119), notée E_0 vérifie

$$E_0 = 0.$$

En intégrant entre 0 et t la relation (4.120) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons

$$E(t, \tilde{u}) \leq \int_0^t \left\| -\frac{\partial^2 u_g}{\partial s^2}(\cdot, s) + u_g(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

Or d'après la définition (4.120) de l'énergie $E(t, \tilde{u})$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2} E^{1/2}(t, \tilde{u}).$$

Par suite, nous déduisons

$$E(t, \tilde{u}) \leq \int_0^t \sqrt{2} \left\| -\frac{\partial^2 u_g}{\partial s^2}(\cdot, s) + u_g(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} E^{1/2}(s, \tilde{u}) ds.$$

Nous rappelons le lemme de Grönwall (voir [55]) :

Soit $\alpha \in]0, 1[$, $C \geq 0$ et $\zeta(t)$ et $m(t)$ deux fonctions continues et positives définies sur \mathbb{R}^+ et satisfaisant

$$\zeta(t) \leq C + \int_0^t m(s) \zeta(s)^\alpha ds, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

alors nous avons

$$\zeta(t) \leq \left(C^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t m(s) ds \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

En appliquant le lemme de Grönwall pour $\zeta(t) = E(t, \tilde{u})$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $C = 0$ et $m(t) = \sqrt{2} \left\| -\frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2}(\cdot, t) + u_g(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)}$, nous obtenons

$$E(t, \tilde{u}) \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^t \left\| -\frac{\partial^2 u_g}{\partial s^2}(\cdot, s) + u_g(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds \right)^2, \quad (4.121)$$

• **Étape 4 : Conclusions**

La relation (4.121) nous conduit aux estimations

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t \left\| -\frac{\partial^2 u_g}{\partial s^2}(\cdot, s) + u_g(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds, \quad (4.122)$$

$$\left\| \nabla \tilde{u}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \int_0^t \left\| -\frac{\partial^2 u_g}{\partial s^2}(\cdot, s) + u_g(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds. \quad (4.123)$$

Or

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u_g}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\left\| \nabla u(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \left\| \nabla \tilde{u}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)^3} + \left\| \nabla u_g(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)^3},$$

impliquant en utilisant (4.122) et (4.123)

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t \left\| -\frac{\partial^2 u_g}{\partial s^2}(\cdot, s) + u_g(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds + \left\| \frac{\partial u_g}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\left\| \nabla u(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \int_0^t \left\| -\frac{\partial^2 u_g}{\partial s^2}(\cdot, s) + u_g(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds + \left\| \nabla u_g(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

D'un autre côté, d'après (4.117) et (4.118) nous avons

$$\left\| \frac{\partial u_g}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\| \frac{\partial g}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

$$\left\| \nabla u_g(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \|u_g(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|g(\cdot, t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

ce qui nous permet de déduire

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t \left\| -\frac{\partial^2 u_g}{\partial s^2}(\cdot, s) + u_g(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds + C \left\| \frac{\partial g}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

$$\left\| \nabla u(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \int_0^t \left\| -\frac{\partial^2 u_g}{\partial s^2}(\cdot, s) + u_g(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds + C \|g(\cdot, t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

ou encore

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$C t \left(\sup_{s \in [0, t]} \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(\cdot, s) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \sup_{s \in [0, t]} \|g(\cdot, s)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) + C \left\| \frac{\partial g}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

$$\left\| \nabla u(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq$$

$$C t \left(\sup_{s \in [0, t]} \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(\cdot, s) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \sup_{s \in [0, t]} \|g(\cdot, s)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) + C \|g(\cdot, t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

En utilisant $\tilde{u}(\cdot, 0) = 0$ et l'inégalité intégrale de Minkowski, on trouve

$$\|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \int_0^t \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}(\cdot, s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds,$$

impliquant l'estimation suivante en utilisant (4.122)

$$\|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t \int_0^s \left\| -\frac{\partial^2 u_g}{\partial \tau^2}(\cdot, \tau) + u_g(\cdot, \tau) \right\|_{L^2(\Omega)} d\tau ds,$$

qui se réécrit en utilisant une intégration par parties comme suit

$$\|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t (t-s) \left\| -\frac{\partial^2 u_g}{\partial s^2}(\cdot, s) + u_g(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

Nous en déduisons

$$\|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq t^2 \left(\sup_{s \in [0, t]} \left\| \frac{\partial^2 u_g}{\partial s^2}(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{s \in [0, t]} \|u_g(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

D'après (4.117) et (4.118), on conclut que

$$\|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C t^2 \left(\sup_{s \in [0, t]} \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(\cdot, s) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \sup_{s \in [0, t]} \|g(\cdot, s)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right). \quad (4.124)$$

où C est une constante. Or

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_g(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui nous permet d'écrire en utilisant (4.124), (4.117) et (4.118)

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \\ &C t^2 \left(\sup_{s \in [0, t]} \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(\cdot, s) \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \sup_{s \in [0, t]} \|g(\cdot, s)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) + C \|g(\cdot, t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Caractère bien posé du problème semi-discrétisé en temps

Nous rappelons que le problème (4.36) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} - \Delta \{u^n\}_\theta = 0 & \text{dans } \Omega, \quad n \in \mathbb{N}^*, \\ u^0 = u^1 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u^n = g^n & \text{sur } \partial\Omega, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (4.125)$$

où nous supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^n \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ avec $g^0 = g^1 = 0$.

Proposition 24. *Pour tout $\theta \geq 1/4$, la solution du problème (4.125) vérifie les estimations pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{cases} \|u^n\|_{L^2(\Omega)} \leq C(n^2 \Delta t^2 + 1) \left(\sup_{t \in (0, n\Delta t)} \left\| \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \sup_{t \in (0, n\Delta t)} \|g(t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right), \\ \|\nabla u^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C(n \Delta t + 1) \left(\sup_{t \in (0, n\Delta t)} \left\| \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \sup_{t \in (0, n\Delta t)} \|g(t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right). \end{cases}$$

Démonstration.

• **Étape 1 : Relèvement**

Pour traiter la donnée au bord, nous introduisons un relèvement de $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire en effectuant un changement de fonction inconnue. Nous définissons

$$\tilde{u}^n = u^n - u_g^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.126)$$

où $(u_g^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est solution du problème

$$\begin{cases} u_g^n - \Delta u_g^n = 0 & \text{dans } \Omega, \quad n \in \mathbb{N}, \\ u_g^n = g^n & \text{sur } \partial\Omega, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.127)$$

Nous remarquons que $(\tilde{u}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait

$$\begin{cases} \frac{\tilde{u}^{n+1} - 2\tilde{u}^n + \tilde{u}^{n-1}}{\Delta t^2} - \Delta \{\tilde{u}^n\}_\theta = -\frac{u_g^{n+1} - 2u_g^n + u_g^{n-1}}{\Delta t^2} + \{u_g^n\}_\theta & \text{dans } \Omega, \quad n \in \mathbb{N}^*, \\ \tilde{u}^0 = \tilde{u}^1 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{u}^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.128)$$

La formulation variationnelle du problème (4.128) consiste à trouver $u^n \in H_0^1(\Omega)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ nous avons

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\tilde{u}^{n+1} - 2\tilde{u}^n + \tilde{u}^{n-1}}{\Delta t^2} v + \int_{\Omega} \nabla \{\tilde{u}^n\}_\theta \cdot \nabla v = \int_{\Omega} \left(-\frac{u_g^{n+1} - 2u_g^n + u_g^{n-1}}{\Delta t^2} + \{u_g^n\}_\theta \right) v, \\ \tilde{u}^0 = \tilde{u}^1 = 0, \end{cases} \quad (4.129)$$

• **Étape 2 : Identité d'énergie**

L'énergie discrète du problème (4.128) définie par

$$\tilde{E}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \left\| \frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{4} \right) \left\| \nabla \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n}{\Delta t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \left\| \nabla \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} + \tilde{u}^n}{2} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \right\}, \quad (4.130)$$

satisfait l'identité d'énergie suivante

$$\frac{\tilde{E}^{n+1/2} - \tilde{E}^{n-1/2}}{\Delta t} = \left(-\frac{u_g^{n+1} - 2u_g^n + u_g^{n-1}}{\Delta t^2} + \{u_g^n\}_\theta, \frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{L^2(\Omega)}. \quad (4.131)$$

En effet, en choisissant $v = \frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n-1}}{2\Delta t}$ dans l'équation (4.129), nous obtenons

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} - 2\tilde{u}^n + \tilde{u}^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{L^2(\Omega)} + \left(\nabla \{\tilde{u}^n\}_\theta, \nabla \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \right)_{L^2(\Omega)^3} = \\ \left(-\frac{u_g^{n+1} - 2u_g^n + u_g^{n-1}}{\Delta t^2} + \{u_g^n\}_\theta, \frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Il est facile de remarquer

$$\left(\frac{\tilde{u}^{n+1} - 2\tilde{u}^n + \tilde{u}^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2\Delta t} \left(\left\| \frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left\| \frac{\tilde{u}^n - \tilde{u}^{n-1}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (4.132)$$

En utilisant $\{\tilde{u}^n\}_\theta = \theta u^{n+1} + (1 - 2\theta)u^n + \theta u^{n-1}$, nous obtenons

$$\left(\nabla \{\tilde{u}^n\}_\theta, \nabla \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \right)_{L^2(\Omega)^3} = \left(\nabla \tilde{u}^n, \nabla \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \right)_{L^2(\Omega)^3} + \left(\theta \nabla (\tilde{u}^{n+1} - 2\tilde{u}^n + \tilde{u}^{n-1}), \nabla \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \right)_{L^2(\Omega)^3}. \quad (4.133)$$

En utilisant

$$(a, b) = \frac{1}{4} [(a + b, a + b) - (a - b, a - b)], \quad \forall a, b,$$

où (\cdot, \cdot) définit un produit scalaire, on trouve que les termes à droite dans la relation (4.132) se réécrivent sous la forme

$$\left(\nabla \tilde{u}^n, \nabla \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \right)_{L^2(\Omega)^3} = \frac{1}{2\Delta t} \left(\left\| \nabla \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} + \tilde{u}^n}{2} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^3}^2 - \frac{\Delta t^2}{4} \left\| \nabla \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n}{\Delta t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^3}^2 - \left\| \nabla \left(\frac{\tilde{u}^n + \tilde{u}^{n-1}}{2} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \frac{\Delta t^2}{4} \left\| \nabla \left(\frac{\tilde{u}^n - \tilde{u}^{n-1}}{\Delta t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \right), \quad (4.134)$$

et

$$\left(\theta \nabla (\tilde{u}^{n+1} - 2\tilde{u}^n + \tilde{u}^{n-1}), \nabla \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \right)_{L^2(\Omega)^3} = \frac{1}{2\Delta t} \left(\theta \Delta t^2 \left\| \nabla \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n}{\Delta t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^3}^2 - \theta \Delta t^2 \left\| \nabla \left(\frac{\tilde{u}^n - \tilde{u}^{n-1}}{\Delta t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \right). \quad (4.135)$$

Finalement, les relations (4.132), (4.133), (4.134) et (4.135) nous permettent d'obtenir le résultat recherché (4.131).

• Étape 3 : Estimation d'énergie

En sommant de 1 à n la relation (4.131), nous obtenons

$$\frac{\tilde{E}^{n+1/2} - \tilde{E}^{1/2}}{\Delta t} = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{u_g^{k+1} - 2u_g^k + u_g^{k-1}}{\Delta t^2} + \{u_g^k\}_\theta, \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^{k-1}}{2\Delta t} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

Dans notre cas, nous avons des conditions initiales nulles donc

$$\tilde{E}^{1/2} = 0. \quad (4.136)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet d'écrire

$$\tilde{E}^{n+1/2} \leq \Delta t \sum_{k=1}^n \left(\left\| -\frac{u_g^{k+1} - 2u_g^k + u_g^{k-1}}{\Delta t^2} + \{u_g^k\}_\theta \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^{k-1}}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (4.137)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire

$$\left\| \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^{k-1}}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\tilde{u}^k - \tilde{u}^{k-1}}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)},$$

et d'après la définition (4.130) de l'énergie $\tilde{E}^{k+1/2}$, nous avons

$$\left\| \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^{k-1}}{2\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\tilde{E}^{k+1/2}} + \sqrt{\tilde{E}^{k-1/2}} \right). \quad (4.138)$$

En injectant l'inégalité (4.138) dans (4.137), nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{n+1/2} &\leq \\ &\frac{\Delta t}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \left(\left\| -\frac{u_g^{k+1} - 2u_g^k + u_g^{k-1}}{\Delta t^2} + \{u_g^k\}_\theta \right\|_{L^2(\Omega)} \left(\sqrt{\tilde{E}^{k+1/2}} + \sqrt{\tilde{E}^{k-1/2}} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.139)$$

En utilisant

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \alpha^k (\beta^{k+1/2} + \beta^{k-1/2}) &= \\ &\alpha^1 \beta^{1/2} + \alpha^n \beta^{n+1/2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha^k + \alpha^{k+1}) \beta^{k+1/2}, \quad \forall (\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}}, (\beta^k)_{k \in \mathbb{N}}, \end{aligned}$$

et en tenant compte de (4.136), la relation (4.139) se réécrit comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{n+1/2} &\leq \\ &\frac{\Delta t}{\sqrt{2}} \|\mathcal{U}_g^n\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\tilde{E}^{n+1/2}} + \frac{\Delta t}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\|\mathcal{U}_g^k\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{U}_g^{k+1}\|_{L^2(\Omega)} \right) \sqrt{\tilde{E}^{k+1/2}}, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{U}_g^k = -\frac{u_g^{k+1} - 2u_g^k + u_g^{k-1}}{\Delta t^2} + \{u_g^k\}_\theta, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.140)$$

Nous rappelons la version discrète du lemme de Grönwall (voir [60]) :

Soient $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\gamma^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites à termes positifs et A un réel positif tels que pour tout $n \geq 0$ on ait

$$r^n \leq A + \gamma^n \sqrt{r^n} + \sum_{k=1}^{n-1} B^k \sqrt{r^k},$$

alors pour tout $n \geq 0$, nous avons

$$\sqrt{r^n} \leq \sqrt{A} + \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \gamma^k + \sum_{k=1}^{n-1} B^k.$$

L'application de ce lemme pour $r^n = \tilde{E}^{n+1/2}$, $B^k = \frac{\Delta t}{\sqrt{2}} \left(\|\mathcal{U}_g^k\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{U}_g^{k+1}\|_{L^2(\Omega)} \right)$, $\gamma^n = \|\mathcal{U}_g^n\|_{L^2(\Omega)}$ et $A = 0$ nous donne

$$\sqrt{\tilde{E}^{n+1/2}} \leq \frac{\Delta t}{\sqrt{2}} \left(\max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \|\mathcal{U}_g^k\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\|\mathcal{U}_g^k\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{U}_g^{k+1}\|_{L^2(\Omega)} \right) \right),$$

ou encore

$$\sqrt{\tilde{E}^{n+1/2}} \leq C^* \frac{\Delta t}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \|\mathcal{U}_g^k\|_{L^2(\Omega)}.$$

où C^* est une constante.

• Étape 4 : Conclusions

Par conséquent, pour $\theta \geq 1/4$, nous avons les estimations suivantes

$$\left\| \frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C^* \Delta t \sum_{k=1}^n \|\mathcal{U}_g^k\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.141)$$

$$\left\| \nabla \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} + \tilde{u}^n}{2} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C^* \Delta t \sum_{k=1}^n \|\mathcal{U}_g^k\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.142)$$

$$\left\| \nabla (\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n) \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C^* \Delta t \sum_{k=1}^n \|\mathcal{U}_g^k\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.143)$$

En utilisant

$$\|\nabla \tilde{u}^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \left\| \nabla \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} + \tilde{u}^n}{2} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^3} + \left\| \nabla \left(\frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n}{2} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^3},$$

et les estimations (4.142) et (4.143), il existe une constante \tilde{C}^* telle que

$$\|\nabla \tilde{u}^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \tilde{C}^* \Delta t \sum_{k=1}^n \|\mathcal{U}_g^k\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité

$$\|\tilde{u}^m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{u}^m - \tilde{u}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)},$$

ainsi que l'estimation (4.141), nous déduisons

$$\|\tilde{u}^m\|_{L^2(\Omega)} \leq C^* \Delta t^2 \sum_{k=1}^{m-1} \|\mathcal{U}_g^k\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}.$$

En sommant de 1 à n , nous obtenons alors

$$\|\tilde{u}^n\|_{L^2(\Omega)} \leq C^* \Delta t^2 \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^{m-1} \|\mathcal{U}_g^k\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}^0\|_{L^2(\Omega)},$$

ou encore (en tenant compte de $\tilde{u}^0 = 0$)

$$\|\tilde{u}^n\|_{L^2(\Omega)} \leq C^* \Delta t^2 \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^{m-1} \|\mathcal{U}_g^k\|_{L^2(\Omega)}.$$

En revenant sur la définition (4.140) de \mathcal{U}_g^k , nous avons

$$\left\| \mathcal{U}_g^k \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{u_g^{k+1} - 2u_g^k + u_g^{k-1}}{\Delta t^2} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \{u_g^k\}_\theta \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme $(u_g^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la solution du problème (4.127) donc il existe une constante \tilde{C} telle que

$$\|u_g^k\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{C} \|g^k\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

ce qui nous donne

$$\begin{cases} \|u_g^k\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{C} \|g^k\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, & \forall k \in \mathbb{N}, \\ \|\nabla u_g^k\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \tilde{C} \|g^k\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, & \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

En utilisant le théorème de Taylor-Lagrange, nous montrons qu'il existe un instant $t^{k,**} \in]t^{k-1}, t^{k+1}[$ tel que

$$u_g(t^{k+1}) - 2u_g(t^k) + u_g(t^{k-1}) = \Delta t^2 \frac{\partial^2 u_g(t^{k,**})}{\partial t^2},$$

et

$$\{u_g^k\}_\theta = u_g(t^{k,**}).$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\left\| \frac{u_g^{k+1} - 2u_g^k + u_g^{k-1}}{\Delta t^2} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \sup_{t \in (0, n\Delta t)} \left\| \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

et

$$\left\| \{u_g^k\}_\theta \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \sup_{t \in (0, n\Delta t)} \|g(t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. Il en résulte

$$\begin{cases} \|\tilde{u}^n\|_{L^2(\Omega)} \leq Cn^2 \Delta t^2 \left(\sup_{t \in (0, n\Delta t)} \left\| \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \sup_{t \in (0, n\Delta t)} \|g(t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right), \\ \|\nabla \tilde{u}^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq Cn \Delta t \left(\sup_{t \in (0, n\Delta t)} \left\| \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \sup_{t \in (0, n\Delta t)} \|g(t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right). \end{cases}$$

D'après la définition du relèvement (4.126), nous avons

$$\begin{cases} \|u^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{u}^n\|_{L^2(\Omega)} + \|u_g^n\|_{L^2(\Omega)}, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ \|\nabla u^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \|\nabla \tilde{u}^n\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\nabla u_g^n\|_{L^2(\Omega)^3}, & \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

impliquant

$$\begin{cases} \|u^n\|_{L^2(\Omega)} \leq Cn^2 \Delta t^2 \left(\sup_{t \in (0, n\Delta t)} \left\| \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \sup_{t \in (0, n\Delta t)} \|g(t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) \\ \quad + C \|g^n\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \|\nabla u^n\|_{L^2(\Omega)^3} \leq Cn \Delta t \left(\sup_{t \in (0, n\Delta t)} \left\| \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \sup_{t \in (0, n\Delta t)} \|g(t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) \\ \quad + C \|g^n\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

□

Conclusions and perspectives

Les deux contributions majeures de cette thèse portent, d'une part sur l'écriture et analyse de convergence d'un schéma implicite-explicite robuste et efficace pour la propagation d'ondes dans des plaques stratifiées, et d'autre part, sur l'extension de la méthode HsM à l'équation des ondes acoustiques en régime temporel dans des milieux isotropes et anisotropes. Des expériences numériques viennent renforcer les aspects théoriques développés durant la thèse démontrant la pertinence des approches présentées.

Plus précisément, les messages importants sur chacune des parties sont les suivants :

- (I) Nous avons proposé une méthode efficace pour traiter le cas de la propagation d'ondes dans des plaques minces. Cette méthode est d'autant plus efficace, comparativement à un schéma explicite standard, que la plaque est mince et/ou fortement stratifiée. La méthode proposée repose sur l'exploitation de la géométrie (domaine extrudé) et des éléments finis spectraux (points de quadrature confondus aux nœuds de la base lagrangienne). Pour renforcer la pertinence du schéma, nous avons démontré la convergence uniforme (par rapport à l'épaisseur de la plaque) à l'ordre 1 en temps. Outre l'aspect applicatif de la modélisation des configurations du SHM, ce nouveau type de schéma numérique permet aussi de construire des solutions de référence dans des cas limites (épaisseur de la plaque très petite et fortement stratifié) pour améliorer la compréhension des phénomènes propagatifs dans ces milieux complexes.
- (II) Nous avons étudié et mis en œuvre l'extension de la méthode HsM à des problèmes temporels. Dans un premier temps, nous avons formulé l'approche naturelle qui consiste à discrétiser une version continue en espace et en temps de la formulation HsM (cette approche nécessite la connaissance des fonctions de Green d'une famille de problèmes). Dans un second temps, nous avons développé une approche alternative qui consiste tout d'abord à écrire un problème discrétisé en temps uniquement, puis d'appliquer la stratégie HsM à ce problème semi-discret. Cette approche offre deux avantages : tout d'abord, la connaissance des fonctions de Green est naturellement remplacée par le calcul d'une famille de fonctions canoniques ; par ailleurs, nous construisons la méthode sur un problème semi-discret implicite stable et nous espérons ainsi conserver cette stabilité après discrétisation en espace. Nous avons démontré la validité de l'approche par des résultats numériques dans des cas scalaires (isotropes et anisotropes). Signalons que le coût de calcul est dominé par la convolution temporelle discrète qui intervient à chaque pas de temps pour le calcul du second membre. De ce fait, nous avons proposé une résolution du problème via l'utilisation de la transformation en Z. Pour finir la méthode a été couplée à la résolution d'un problème intérieur par éléments finis, simulant ainsi la réponse d'un défaut à un champ incident.

Les deux axes de travail offrent de nombreuses perspectives que nous détaillons ci-dessous.

-
- (I) Une première extension théorique est de vérifier que le schéma offre bien une convergence uniforme à l'ordre 2 en temps. Par ailleurs, la justification théorique de la robustesse du préconditionneur pour le schéma implicite est une question ouverte. De plus, il devient facile de comparer les modèles asymptotiques pour des milieux stratifiés (ou non) qui ont été obtenus dans la section 2.3 avec des modèles tridimensionnels complets. Pour finir, l'extension de la méthode implicite-explicite pour la propagation d'ondes dans des plaques courbes présente un fort intérêt applicatif (typiquement les peaux d'ailes d'avions ou les géométries tubulaires). Cette extension consisterait à développer un schéma qui garantirait les bonnes propriétés liées à la stabilité et au découplage des opérateurs définis localement dans le plan tangent et dans la direction de l'épaisseur.
- (II) Il serait important de mettre en œuvre la HsM au cas élastique anisotrope 2D et pour des modèles issus de l'analyse asymptotique de plaques stratifiées (par exemple, ceux obtenus dans la section 2.3). Un objectif dans cet esprit pourrait être de coupler des modèles volumiques intérieurs de propagation 3D (par exemple prenant en compte la modélisation d'un capteur piézoélectrique ou d'un défaut) à des modèles extérieurs asymptotiques 2D discrétisés par la méthode HsM. Concernant la méthode HsM en elle-même, une des principales difficultés rencontrées lors de la mise en œuvre est le coût de calcul lié aux produits de convolution temporels discrets. De nombreuses perspectives nous permettraient de pallier cette difficulté.
- (i) Utilisation de schémas d'ordre élevé pour garder en précision tout en augmentant le pas de temps utilisé, réduisant ainsi le coût lié à la convolution.
 - (ii) D'autres axes d'améliorations des performances sont à l'étude : optimisation des paramètres de discrétisation en espace et Fourier, produits matrices/vecteurs non assemblés pour le second membre, compression des matrices intervenant dans la HsM (qui sont éventuellement de rang faible) par des H-matrices...
 - (iii) Dans le cas d'un problème extérieur, implémenter la méthode par transformée en Z et utiliser les méthodes rapides développées par exemple dans [8]. À noter que la construction d'un couplage efficace entre la méthode par transformée en Z et un problème intérieur discrétisé par EF est une question ouverte.
 - (iv) De plus, une extension importante est l'utilisation de schéma intérieur explicite dans le cadre du couplage EF-HsM, avec éventuellement, la possibilité de faire du pas de temps local dans la partie EF.

Pour finir il reste des questions ouvertes sur les aspects théoriques, par exemple, l'étude de la stabilité de la méthode ou l'écriture d'estimation d'erreur par rapport aux différents paramètres de discrétisation.

Références bibliographiques

- [1] T. Abboud, P. Joly, J. Rodríguez, and I. Terrasse. Coupling discontinuous Galerkin methods and retarded potentials for transient wave propagation on unbounded domains. *Journal of Computational Physics*, 230(15):5877–5907, 2011.
- [2] A. Alessandra and S. Panizzi. BEM-FEM coupling for the 1d Klein-Gordon equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 30(6):2042–2082, 2014.
- [3] L. Alvarez-Vazquez and J.M. Viaño. Derivation of an evolution model for nonlinearly elastic beams by asymptotic expansion methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 115(1–2):53–66, 1994.
- [4] X. Antoine, H. Barucq, and A. Bendali. Bayliss–Turkel-like radiation conditions on surfaces of arbitrary shape. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 229(1):184–211, 1999.
- [5] D. Appelö, T. Hagstrom, and G. Kreiss. Perfectly matched layers for hyperbolic systems: general formulation, well-posedness, and stability. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 67(1):1–23, 2006.
- [6] A. Arnold. Numerically absorbing boundary conditions for quantum evolution equations. *VLSI Design*, 6:313–319, 1998.
- [7] A. Arnold, M. Ehrhardt, and I. Sofronov. Discrete transparent boundary conditions for the Schrödinger equation: Fast calculation, approximation, and stability. *Communications in Mathematical Sciences*, 1(3):501–556, 2003.
- [8] L. Banjai and M. Kachanovska. Fast convolution quadrature for the wave equation in three dimensions. *Journal of Computational Physics*, 279:103–126, 2014.
- [9] Lehel Banjai. Multistep and multistage convolution quadrature for the wave equation: algorithms and experiments. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(5):2964–2994, 2010.
- [10] H. Barucq, J. Diaz, and M. Tlemcani. New absorbing layers conditions for short water waves. *Journal of Computational Physics*, 229(1):58–72, 2010.
- [11] A. Bayliss and E. Turkel. Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Communications on Pure and applied Mathematics*, 33(6):707–725, 1980.
- [12] A. Bensoussan, G. Da Prato, M.C. Delfour, and S. Mitter. *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems*. Birkhäuser, 2 edition, 2007.
- [13] J.-P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, 114(2):185–200, 1994.

-
- [14] C. Besse, M. Ehrhardt, and I. Lacroix-Violet. Discrete artificial boundary conditions for the linearized Korteweg–de Vries equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 32(5):1455–1484, 2016.
- [15] C. Besse, B. Mésognon-Gireau, and P. Noble. Artificial boundary conditions for the linearized Benjamin–Bona–Mahony equation. *Numerische Mathematik*, 139(2):281–314, 2018.
- [16] C. Besse, P. Noble, and D. Sanchez. Discrete transparent boundary conditions for the mixed KDV–BBM equation. *Journal of Computational Physics*, 345:484–509, 2017.
- [17] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, S. N. Chandler-Wilde, S. Fliss, C. Hazard, K.-M. Perfekt, and Y. Tjandrawidjaja. The complex-scaled Half-Space Matching method. Working paper or preprint, 2020.
- [18] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, S. Fliss, and Y. Tjandrawidjaja. Numerical analysis of the Half-Space Matching method with Robin traces on a convex polygonal scatterer. In *Maxwell’s equations: Analysis and numerics*, volume 24 of *Radon Series on Computational and Applied Mathematics*. De Gruyter, 2019.
- [19] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, S. Fliss, and A. Tonnoir. The Halfspace Matching Method: a new method to solve scattering problem in infinite media. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 338:44–68, 2018.
- [20] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, B. Goursaud, and C. Hazard. Mathematical analysis of the junction of two acoustic open waveguides. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 71(6):2048–2071, 2011.
- [21] H. Brézis. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, 1983.
- [22] É. Bécache, S. Fauqueux, and P. Joly. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *Journal of Computational Physics*, 188(2):399–433, 2003.
- [23] É Bécache, D. Givoli, and T. Hagstrom. High-order absorbing boundary conditions for anisotropic and convective wave equations. *Journal of Computational Physics*, 229(4):1099–1129, 2010.
- [24] É. Bécache, P. Joly, and V. Vinoles. On the analysis of perfectly matched layers for a class of dispersive media and application to negative index metamaterials. *Mathematics of Computation*, 87(314):2775–2810, 2018.
- [25] É. Bécache and M. Kachanovska. Stable perfectly matched layers for a class of anisotropic dispersive models. part i: necessary and sufficient conditions of stability. *ESAIM: M2AN*, 51(6):2399–2434, 2017.
- [26] J. Chabassier and S. Imperiale. Fourth-order energy-preserving locally implicit time discretization for linear wave equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015.
- [27] J. Chabassier and S. Imperiale. Space/time convergence analysis of a class of conservative schemes for linear wave equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 355(3):282–289, 2017.
-

- [28] J. Chabassier and S. Imperiale. Construction and convergence analysis of conservative second order local time discretisation for linear wave equations. Working paper or preprint, 2020.
- [29] W.C. Chew and W.H. Weedon. A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates. *Microwave and optical technology letters*, 7(13):599–604, 1994.
- [30] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity, Volume II: Theory of Plates*. Elsevier Science, 1997.
- [31] P. G. Ciarlet and S. Kesavan. Two-dimensional approximations of three-dimensional eigenvalue problems in plate theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 26(2):145–172, 1981.
- [32] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. SIAM, 2002.
- [33] J. Coatléven. *Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes d'ondes en milieu périodique*. PhD thesis, École Polytechnique, 2011.
- [34] J. Coatléven. Transparent boundary conditions for evolution equations in infinite periodic strips. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(3):1563–1583, 2012.
- [35] G. Cohen. *Higher-order numerical methods for transient wave equations*. Scientific Computation. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [36] R. Dautray and J.-L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology - Volume 5 Evolution Problems I*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [37] P.J. Davies. Numerical stability and convergence of approximations of retarded potential integral equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31(3):856–875, 1994.
- [38] P.J. Davies and D.B. Duncan. Stability and convergence of collocation schemes for retarded potential integral equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(3):1167–1188, 2004.
- [39] É. Demaldent and S. Imperiale. Perfectly matched transmission problem with absorbing layers: application to anisotropic acoustics in convex polygonal domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 96(11):689–711, 2013.
- [40] S. Descombes, S. Lanteri, and L. Moya. Locally implicit time integration strategies in a discontinuous Galerkin method for Maxwell's equations. *Journal of Scientific Computing*, 56(1):190–218, 2013.
- [41] J. Diaz and P. Joly. A time domain analysis of PML models in acoustics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(29-32):3820–3853, 2006.
- [42] M. Duruflé, P. Grob, and P. Joly. Influence of Gauss and Gauss-Lobatto quadrature rules on the accuracy of a quadrilateral finite element method in the time domain. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 25:526–551, 2009.
- [43] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation*, 31(139):629–651, 1977.

-
- [44] S. Fliss. *Étude mathématique et numérique de la propagation des ondes dans des milieux périodiques localement perturbés*. PhD thesis, École Polytechnique, 2009.
- [45] S. Fliss and P. Joly. Exact boundary conditions for time-harmonic wave propagation in locally perturbed periodic media. *Applied Numerical Mathematics*, 59(9):2155–2178, 2009.
- [46] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986.
- [47] D. Givoli. Non-reflecting boundary conditions. *Journal of computational physics*, 94(1):1–29, 1991.
- [48] D. Givoli. High-order local non-reflecting boundary conditions: a review. *Wave motion*, 39(4):319–326, 2004.
- [49] A. Greenbaum. *Iterative methods for solving linear systems*. SIAM, 1997.
- [50] M.J. Grote and J.B. Keller. Exact nonreflecting boundary conditions for the time dependent wave equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 55(2):280–297, 1995.
- [51] T. Ha-Duong and A. Bamberger. Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé de la diffraction d’une onde acoustique (I). *Mathematical methods in the applied sciences*, 8(1):405–435, 1986.
- [52] T. Ha-Duong and P. Joly. On the stability analysis of boundary conditions for the wave equation by energy methods. I. The homogeneous case. *Mathematics of computation*, 62(206):539–563, 1994.
- [53] T. Hagstrom. Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Acta numerica*, 8:47–106, 1999.
- [54] M. Hochbruck, T. Jahnke, and R. Schnaubelt. Convergence of an ADI splitting for Maxwell’s equations. *Numerische Mathematik*, 129(3):535–561, 2015.
- [55] P. Joly. *Introduction à l’analyse mathématique des équations de Maxwell en régime transitoire*. École Polytechnique, 1995.
- [56] P. Joly. *Analyse et approximation de modèles de propagation d’ondes. Partie 1 Analyse mathématique*. École Polytechnique, 2001.
- [57] P. Joly. Variational methods for time-dependent wave propagation problems. In *Topics in computational wave propagation*, pages 201–264. Springer, 2003.
- [58] P. Joly. Finite element methods with continuous displacement. In *Effective computational methods for wave propagation*, volume 5 of *Numerical Insights*, pages 247–266. Chapman and Hall/CRC, 2008.
- [59] P. Joly. The mathematical model for elastic wave propagation. In *Effective computational methods for wave propagation*, volume 5 of *Numerical Insights*, pages 247–266. Chapman and Hall/CRC, 2008.
- [60] P. Joly and M. Kachanovska. Transparent boundary conditions for wave propagation in fractal trees: convolution quadrature approach. Working paper or preprint, 2020.

-
- [61] E.I. Jury. *Theory and Applications of the Z-Transform Method*. Krieger, 1973.
- [62] M. Kazakova and P. Noble. Discrete transparent boundary conditions for the linearized Green–Naghdi system of equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 58(1):657–683, 2020.
- [63] N. Kielbasiewicz and É. Lunéville. *User documentation of XLiFE++*. POEMS, ENSTA, 2016.
- [64] C. Lubich. Convolution quadrature and discretized operational calculus. II. *Numerische Mathematik*, 52(4):413–425, 1988.
- [65] D. Mavaleix-Marchessoux, M. Bonnet, S. Chaillat, and B. Leblé. A fast boundary element method using the Z-transform and high-frequency approximations for large-scale three-dimensional transient wave problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(21):4734–4767, 2020.
- [66] J. Ott. *Halfspace Matching: a Domain Decomposition Method for Scattering by 2D Open Waveguides*. PhD thesis, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2017.
- [67] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag New York, 1983.
- [68] T. Rylander and A. Bondeson. Stability of explicit-implicit hybrid time-stepping schemes for Maxwell’s equations. *Journal of Computational Physics*, 179(2):426–438, 2002.
- [69] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems - Second Edition*. SIAM, 2003.
- [70] F.-J. Sayas. *Retarded potentials and time domain boundary integral equations: A road map*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer International Publishing Switzerland, 2016.
- [71] M. Schanz. *Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua: A Boundary Element Approach*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [72] R.W. Shen. Reissner-Mindlin plate theory for elastodynamics. *Journal of Applied Mathematics*, 2004(3):179–189, 2004.
- [73] A. Sommerfeld. *Partial Differential Equations in Physics*. Academic Press, New York, 1949.
- [74] T. C. T. Ting. Positive definiteness of anisotropic elastic constants. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 1(3):301–314, 1996.
- [75] Y. Tjandrawidjaja. *Some contributions to the analysis of the Half-Space Matching Method for scattering problems and extension to 3D elastic plates*. PhD thesis, ENSTA Paristech, Université Paris-Saclay, 2019.
- [76] A. Tonnoir. *Conditions transparentes pour la diffraction d’ondes en milieu élastique anisotrope*. PhD thesis, ENSTA Paristech, Université Paris-Saclay, 2015.
- [77] F. Trèves. *Basic linear partial differential equations*. Academic Press, 1975.
- [78] G.N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, 1995.

Titre : Modélisation mathématique et méthode numérique pour la simulation du contrôle santé intégré par ultrasons de plaques composites stratifiées

Mots clés : Élastodynamique, Plaque anisotrope, Schémas préservant l'énergie, Stabilité numérique, Conditions transparentes, Méthode des demi-espaces-raccordés

Résumé : Cette thèse s'inscrit dans le contexte du contrôle santé intégré (SHM). Cette méthode de contrôle non-destructif (CND), visant à surveiller in situ et périodiquement une structure, est de plus en plus présente dans de nombreux domaines industriels, notamment dans le secteur aéronautique. En particulier, le CND par ultrasons consiste à émettre des ondes ultrasonores et à détecter leur interaction avec des défauts éventuellement présents dans le milieu. L'objectif de cette thèse est de développer un outil efficace pour simuler la propagation des ondes élastiques, en régime transitoire lors de leur émission par les capteurs, l'interaction avec des défauts et leur réception dans des plaques minces éventuellement stratifiées.

La première partie de notre travail concerne le développement d'une méthode numérique efficace pour la propagation des ondes élastiques générées par des capteurs piézoélectriques, dans des plaques saines. En nous basant sur des éléments fi-

nis spectraux d'ordre élevé, nous proposons une discrétisation temporelle efficace qui traite implicitement les phénomènes se produisant à travers l'épaisseur et explicitement les phénomènes de propagation dans les autres directions. Nous présentons des résultats numériques montrant l'efficacité et la précision de notre approche sur des applications réalistes.

La deuxième partie de notre travail concerne la résolution des équations de l'élastodynamique dans des milieux anisotropes non bornés et présentant des défauts. Mentionnons que toutes les méthodes classiques pour restreindre les calculs autour des perturbations sont instables dans les milieux élastiques anisotropes (PML par exemple) ou très coûteuses (équations intégrales). L'idée est d'étendre au régime temporel la méthode des demi-espaces raccordés (Halfspace Matching (HsM) method) qui est déjà développée pour des problèmes de propagation en régime harmonique.

Title: Mathematical modelling and numerical method for the simulation of ultrasound structural health monitoring of laminated composite plates

Keywords: Elastodynamics, Anisotropic plate, Energy preserving schemes, Numerical stability, Transparent conditions, Halfspace Matching Method

Abstract: This thesis is embedded in the context of Structural Health Monitoring (SHM). This method of Non-Destructive Testing (NDT), aiming at monitoring in situ and periodically a structure, is increasingly present in many industrial fields, particularly in the aeronautics sector. In particular, ultrasonic NDT consists in emitting ultrasonic waves and detecting their interaction with any defects that may be present. The objective of this thesis is to develop an efficient tool to simulate the propagation of elastic waves, in transient regime during their emission by sensors, the interaction with defects and their reception in thin plates eventually laminated. The objective of this thesis is to provide an efficient tool to simulate transient wave propagation during emission, interaction with defects and reception.

The first part of our work concerns the development of an efficient numerical method for the propagation

of elastic waves generated by piezoelectric sensors in healthy plates. Based on high-order spectral finite elements, we propose an efficient time discretization that treats explicitly the propagative phenomena in the in-plane direction and implicitly the phenomena occurring through the thickness. We present numerical results showing the efficiency and accuracy of our approach on realistic applications.

The second part of our work concerns the resolution of elastodynamic equations in anisotropic unbounded media with defects. Let us mention that all the classical methods to restrict the computation around the perturbations are unstable in anisotropic elastic media (PML for instance) or really costly (Integral equations). The idea is to extend to the time domain the Halfspace Matching (HsM) method which is already developed for time-harmonic problems.